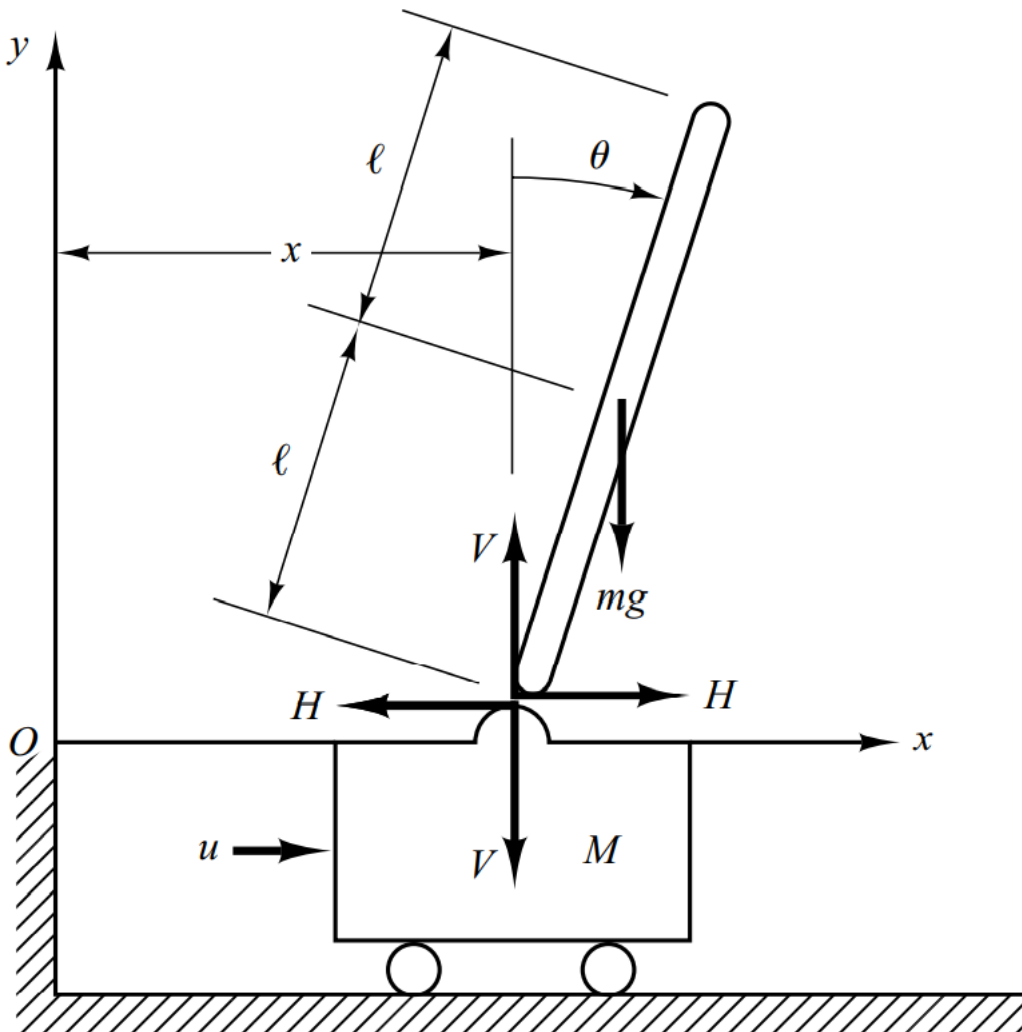


## self\_balanced\_robot

LQR控制算法在两轮自平衡小车的实践

### 经典倒立摆模型



倒立摆控制-CSDN博客提供了详细的倒立摆动力学模型推导过程。本文取逆时针旋转为正方向（即：上图摆杆摆角小于0），动力学模型如下：

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m^2 g l^2}{I(M+m) + M m l^2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{m g l (M+m)}{I(M+m) + M m l^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I + m l^2}{I(M+m) + M m l^2} & 0 & \frac{m}{I(M+m)} \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

其中： $l$ 表示摆杆重心到铰链的距离， $I$ 表示摆杆以铰链为旋转轴的惯量

### 两轮自平衡小车动力学模型

#### 轮子摩擦力和电机PWM关系

自平衡小车和经典倒立摆不完全相同，最大的差异在于：自平衡小车没有推力 $u$ ，它的推力实际来自于地面对轮子的滚动摩擦力，而滚动摩擦来自于电机转矩。直流电机转矩由电压确定，电压大小由PWM占空比来决定。因此，有必要建立滚动摩擦力和电机PWM占空比的表达式。

直流电机的输出转矩 $\tau_m$ 和角速度 $\omega$ 、外加电压 $V_a$ 存在以下关系：

$$\tau_m = \frac{-k_m k_e}{R} \omega + \frac{k_m}{R} V_a$$

其中 $k_m$ 表示电机转矩常数、 $k_e$ 表示电机反电动势常数、 $R$ 表示电机电阻，都是常数

对电机轴应用刚体转动定律，电机的输出转矩 $\tau_m$ 和负载转矩 $\tau_a$ 、角加速度 $\dot{\omega}$ 存在以下关系：

$$I_R \dot{\omega} = \tau_m - \tau_a$$

代换后得到：

$$\tau_a = -I_R \dot{\omega} + \frac{-k_m k_e}{R} \omega + \frac{k_m}{R} V_a$$

对轮子应用刚体转动定律：

$$I_W \dot{\omega} = \tau_a - H_f r$$

其中， $I_W$ 表示轮子转动惯量， $H_f$ 表示地面的静摩擦力， $r$ 表示轮子半径。（在这里近似认为电机输出转矩全部传递给轮子，忽略电机传动过程中轴承齿轮摩擦力形成的转矩）

代换后得到：

$$H_f = \frac{1}{r} (-I_W \dot{\omega} - I_R \dot{\omega} + \frac{-k_m k_e}{R} \omega + \frac{k_m}{R} V_a)$$

电机电压和pwm占空比存在比例关系：

$$V_a = V_{amax} D_{pwm}$$

因此，最终得到轮子滚动摩擦力和电机PWM占空比关系为：

$$H_f = \frac{1}{r} (-I_W \dot{\omega} - I_R \dot{\omega} + \frac{-k_m k_e}{R} \omega + \frac{k_m V_{amax}}{R} D_{pwm})$$

(参考资料：[Balancing a Two-Wheeled Autonomous Robot](#))

电机MC520P30\_12V手册：

根据堵转电流计算电机电阻  $R = \frac{12}{3.75} = 3.2$  和内参基本符合，按内参取  $R = 2.8$

根据额定转矩和额定电流计算转矩常数  $k_m = \frac{1.5/100}{0.36} = 0.04167$ ，内参转矩常数考虑减速比后  $k_m = 101.41 \times 10^{-5} \times 30 = 0.030423$ ，按内参取

根据额点电流和额定转速计算反电动势常数  $k_e = \frac{12 - 0.36 \times 2.8}{290 \times \pi / 30} = 0.3620$ ，内参单位看不出来

带入电机参数得：

$$\frac{-k_m k_e}{R} = -0.003933 \quad \frac{k_m V_{amax}}{R} = 0.13038$$

# 产品参数

MC520 电机参数			
电机型号	MC520P20_12V	MC520P30_12V	MC520P60_12V
额定电压	12V（建议供电范围在11-16V之间，推荐12V）		
减速比	1:20	1:30	1:60
额定电流	0.36A	0.36A	0.53A
堵转电流	3.2A	3.2A	3.2A
空载转速	550±30rpm	360±20rpm	190±10rpm
额定转速	440±30rpm	290±20rpm	150±10rpm
额定扭矩	0.8kg·cm	1.5kg·cm	2.6kg·cm
堵转扭矩	3.8kg·cm	4.5kg·cm	9.2kg·cm
额定功率	约7W	约7W	约7W
重量	~150g	~150g	~150g
13线脉冲数	1040	1560	3120
1024线脉冲数	81920	122880	245760

电机内部参数			
电感	4.45mH	反电动势系数(Ke)	0.001040725
阻感	2.3Ω±0.5	电磁转矩系数(KT)	101.409135360

编码器参数		
型号	磁向编码器	霍尔编码器
编码器线数	1024线	13线
编码器原理	磁向分割技术	霍尔磁感应
编码器类型	AB相正交编码器（可测速和方向）	
供电范围	3.3-5V	3.3-5V
编码器保护	带塑料保护盖	裸露（相对稳定，无需保护盖）
编码器脉冲数	电机一圈脉冲数：编码器线数*减速比*程序倍频数 13线霍尔编码器30减速比电机为例，脉冲数=13x30x4=1560 1024线磁向编码器30减速比电机为例，脉冲数=1024x30x4=122880	

## 转动惯量辨识

通过空载测试进行辨识。空载时摩擦力为0，此时：

$$\dot{\omega} = \frac{1}{I_W + I_R} (\frac{-k_m k_e}{R} \omega + \frac{k_m V_{amax}}{R} D_{pwm})$$

计算后取：

$$I_W + I_R = 0.00016$$

## Matlab求解LQR反馈矩阵K

见matlab源程序

## 实际部署效果



演示1

演示2