

Grafos

Componentes Conectados

Caminos de Euler y Hamilton

Estructuras de Datos

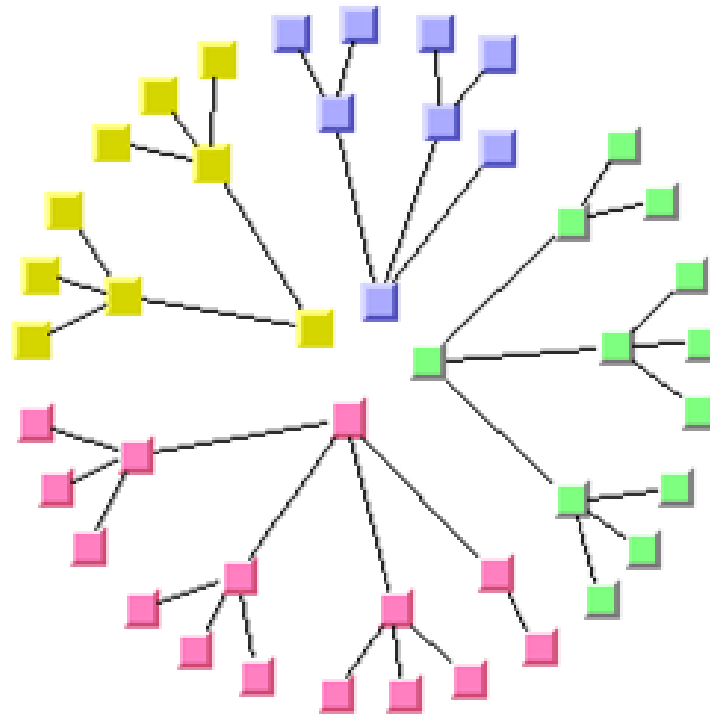
Gabriel Ávila

Pontificia Universidad Javeriana
Departamento de Ingeniería de Sistemas

Componentes Conectados

Componentes Conectados

.Si el grafo no está conectado, los subconjuntos de vértices que están mutuamente conectados se conocen como los componentes conectados (o conexos) del grafo.



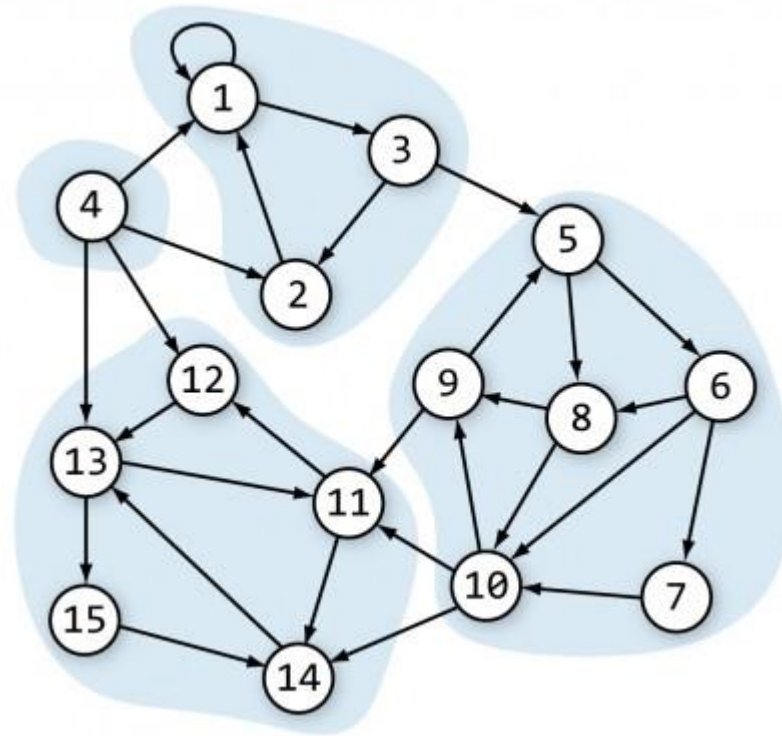
Componentes Conectados

.Pasos a seguir:

- .- Recorrer el grafo a partir de un vértice.
- .- Si se visitan todos los vértices, es conexo.
- .- Si no, los visitados hasta ahora forman un componente conectado.
- .- Tomar un vértice no visitado y recorrer el grafo a partir de éste. Los vértices visitados forman otro componente conectado.
- .- Repetir el paso anterior hasta visitar todos los vértices del grafo.

Componentes Conectados

• En un grafo dirigido, cuando es débilmente conectado, se pueden identificar también componentes fuertemente conectados.



Componentes Conectados

.Pasos a seguir:

- .- Obtener el conjunto de vértices descendientes $D(v)$, incluido v (vértice de partida).
- .- Obtener el conjunto de vértices ascendientes $A(v)$, incluido v (vértice de partida).
- .- Vértices comunes entre D y A forman el componente fuertemente conectado al que pertenece v , si es igual al conjunto de vértices del grafo es fuertemente conectado.
- .- Si no, escoger un vértice que no esté en la intersección y repetir hasta visitarlos todos.

Componentes Conectados

- Descendientes de un vértice:

A los que se puede llegar desde ese vértice.

- Recorrido en profundidad del grafo a partir de ese vértice.

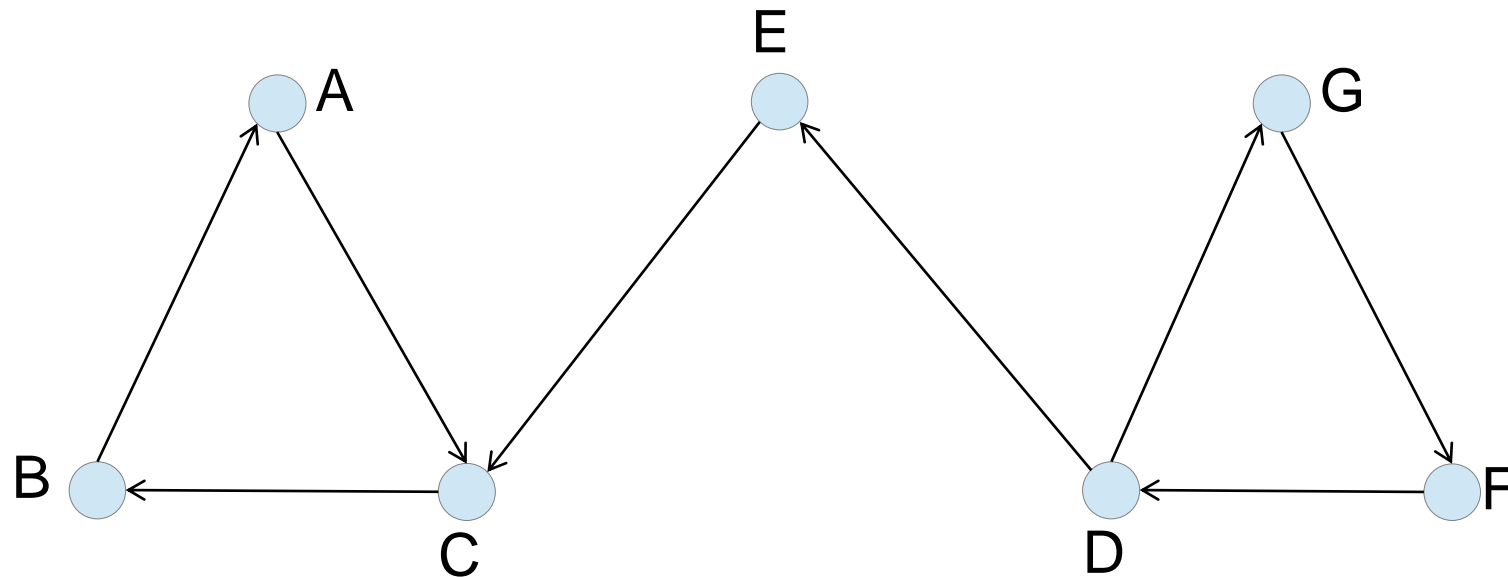
- Ascendientes de un vértice:

Desde los que se puede llegar a ese vértice.

- Invertir la dirección de las aristas del grafo, y recorrer en profundidad desde ese vértice.

Componentes Conectados

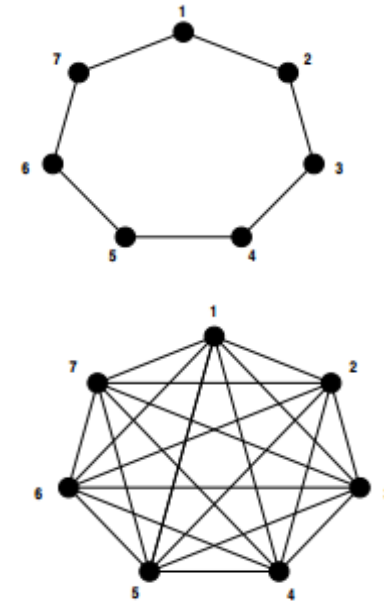
Dado el siguiente grafo



Identificar sus componentes fuertemente conectados.

Recorridos en Grafos

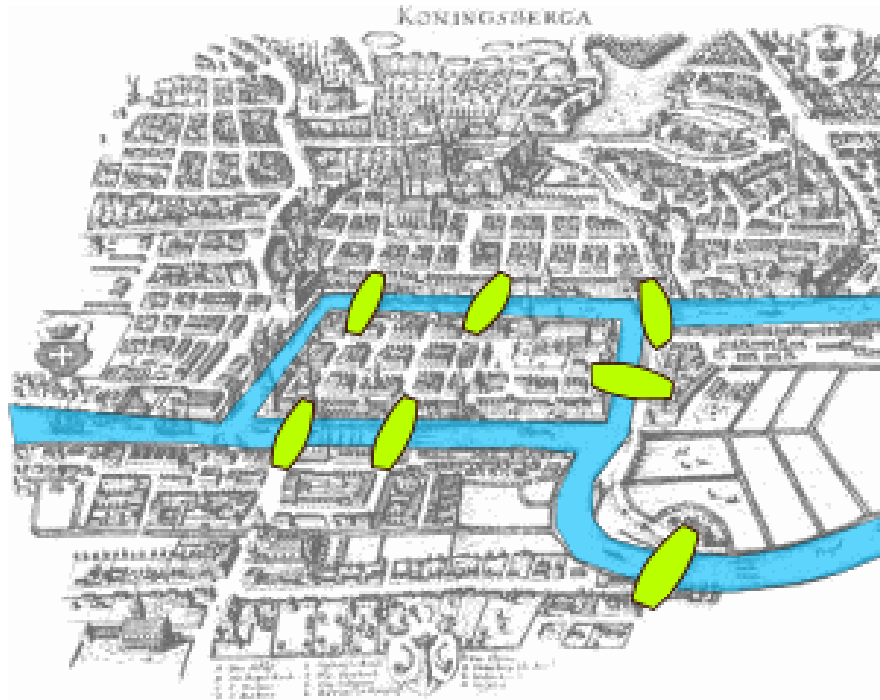
- Plano.
- Preorden.
- Niveles / Vecindario.
- Euler:
 - Todas las aristas una vez.
- Hamilton:
 - Todos los vértices una vez.



Caminos o Trayectorias de Euler

Camino de Euler

- Motivación: siete puentes de Königsberg.
- Problema: encontrar una ruta para recorrer la ciudad que cruce cada puente una y sólo una vez.



Camino de Euler

- Motivación: siete puentes de Königsberg.
- Modelar el problema con un grafo:
 - Cada pedazo de tierra representado con un vértice.
 - Cada puente representado con una arista.



Caminos de Euler

- Motivación: siete puentes de Königsberg.
- Si cada puente debe atravesarse una vez, cada vértice debería tener un número par de conexiones (mitad de ida y mitad de vuelta).

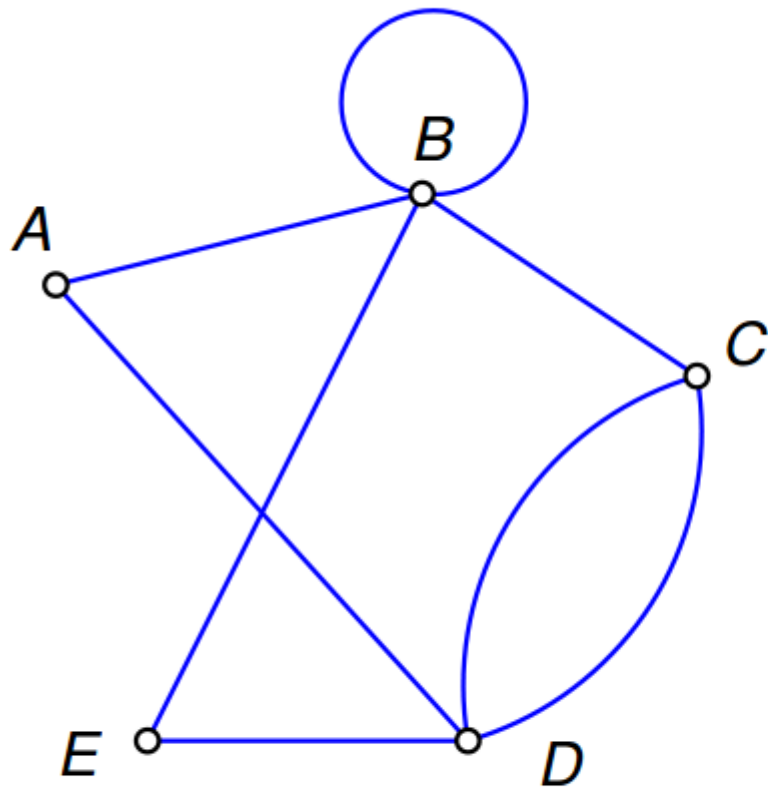
Caminos de Euler

- Motivación: siete puentes de Königsberg.
- Si cada puente debe atravesarse una vez, cada vértice debería tener un número par de conexiones (mitad de ida y mitad de vuelta).
- Sin embargo, cada porción de tierra está conectada por un número impar de puentes, lo que lleva a una contradicción.
- Por lo cual, Euler identificó que este problema no se puede resolver.

Caminos de Euler

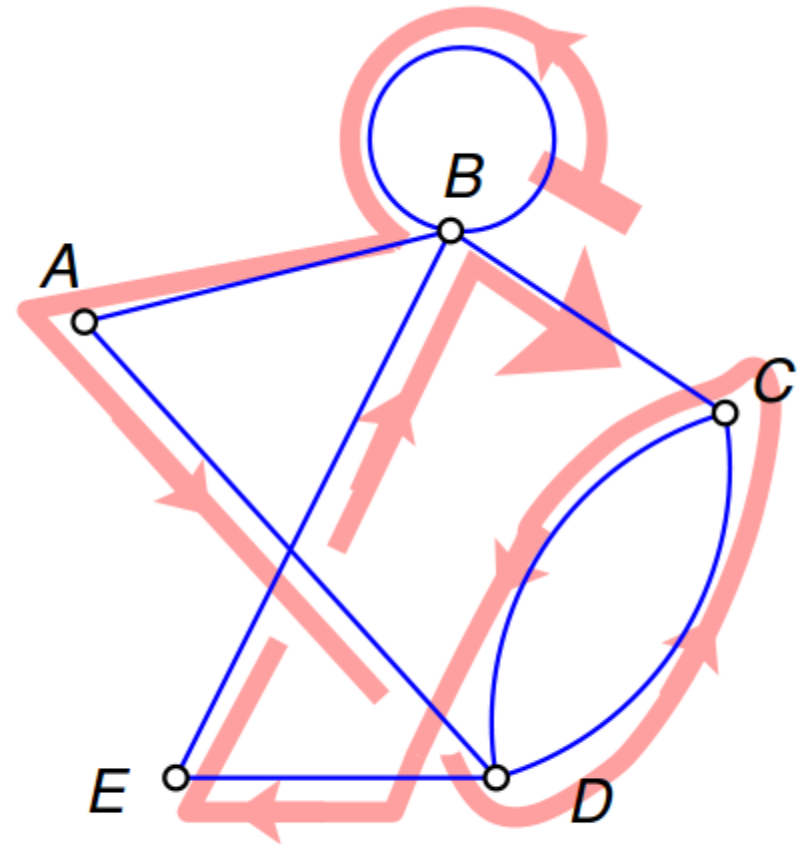
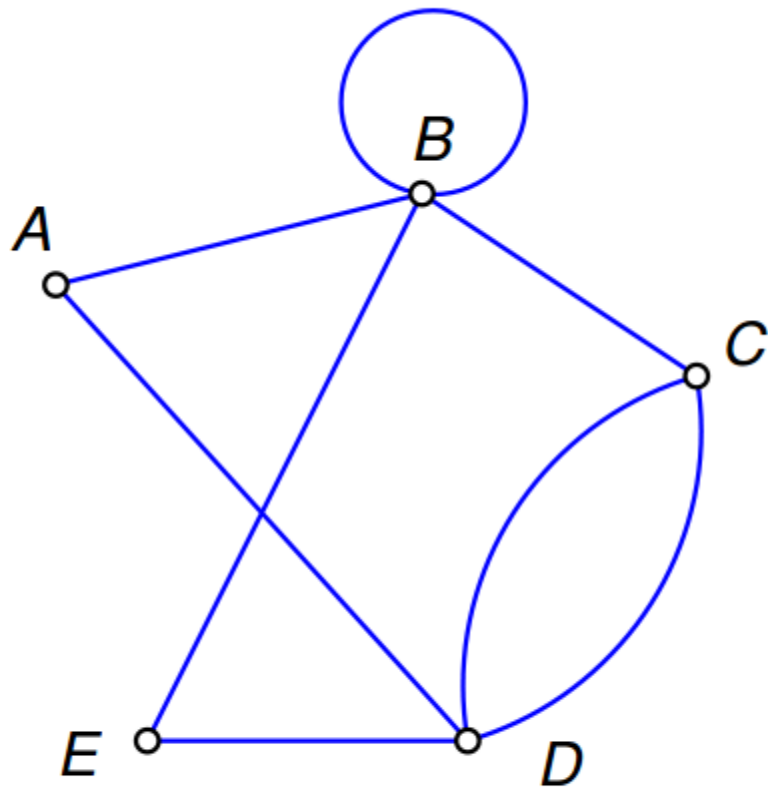
- Caminos, rutas o trayectorias en un grafo G , que sólo incluyen o visitan cada arista una sola vez, se conocen como caminos, rutas o trayectorias de Euler.
- Si adicionalmente los caminos empiezan y terminan en el mismo vértice, se conocen como circuitos o ciclos de Euler .

Camino de Euler



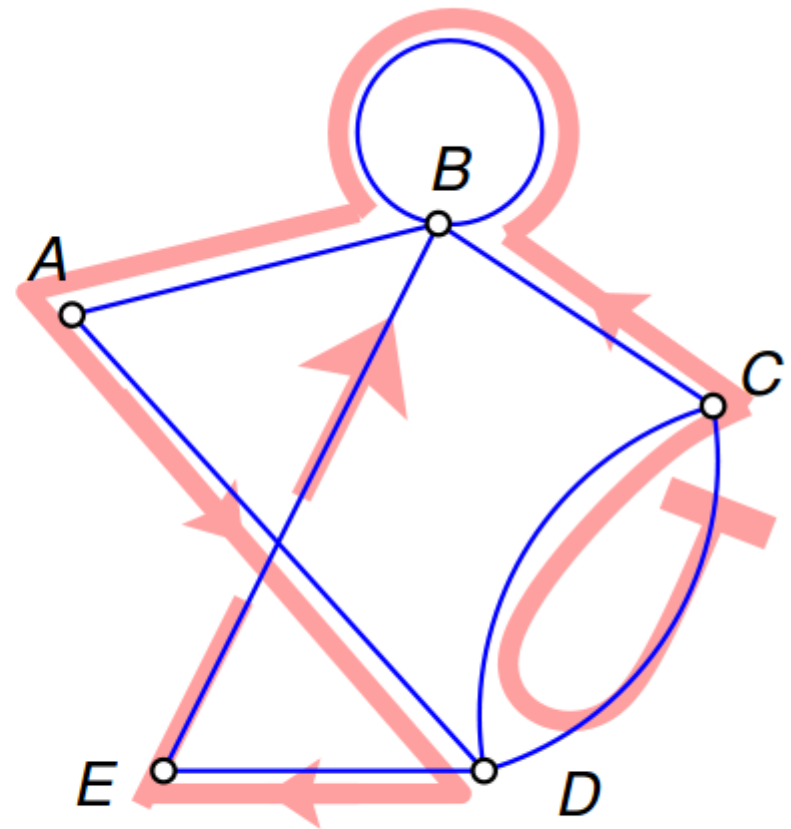
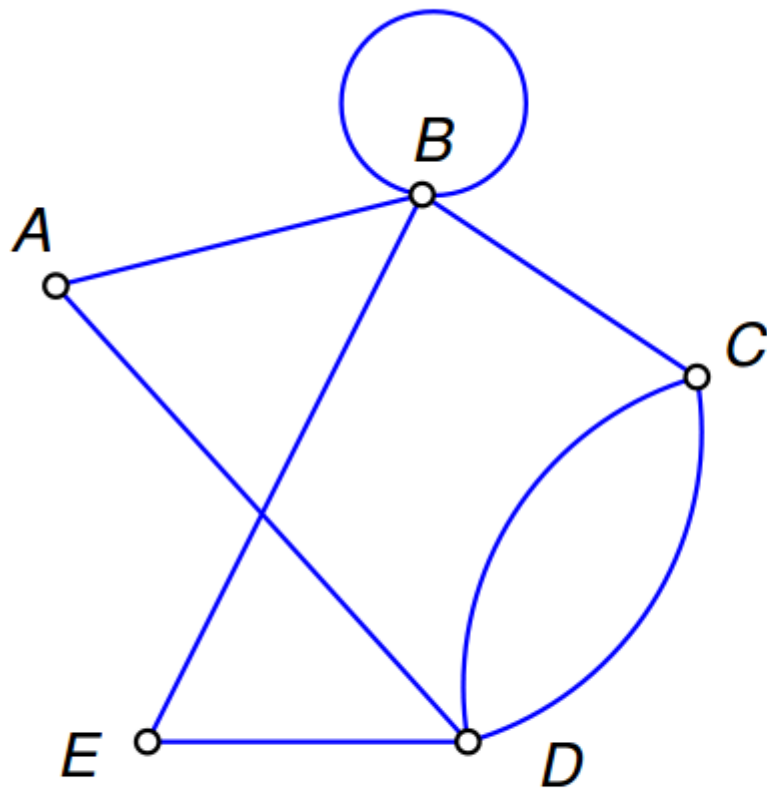
An Euler path:

Camino de Euler



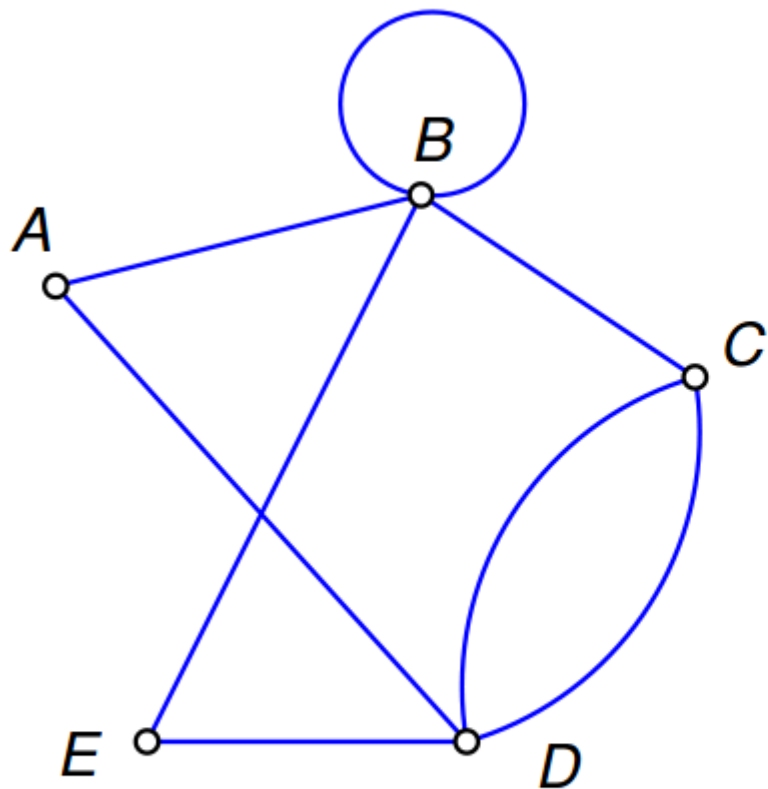
An Euler path: BBADCDEBC

Camino de Euler



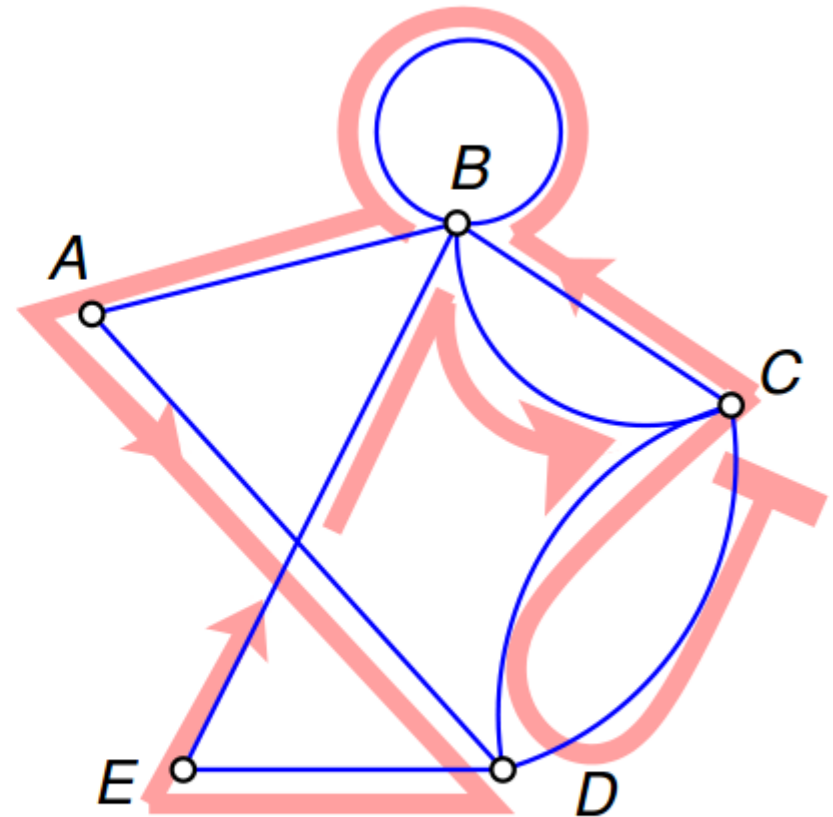
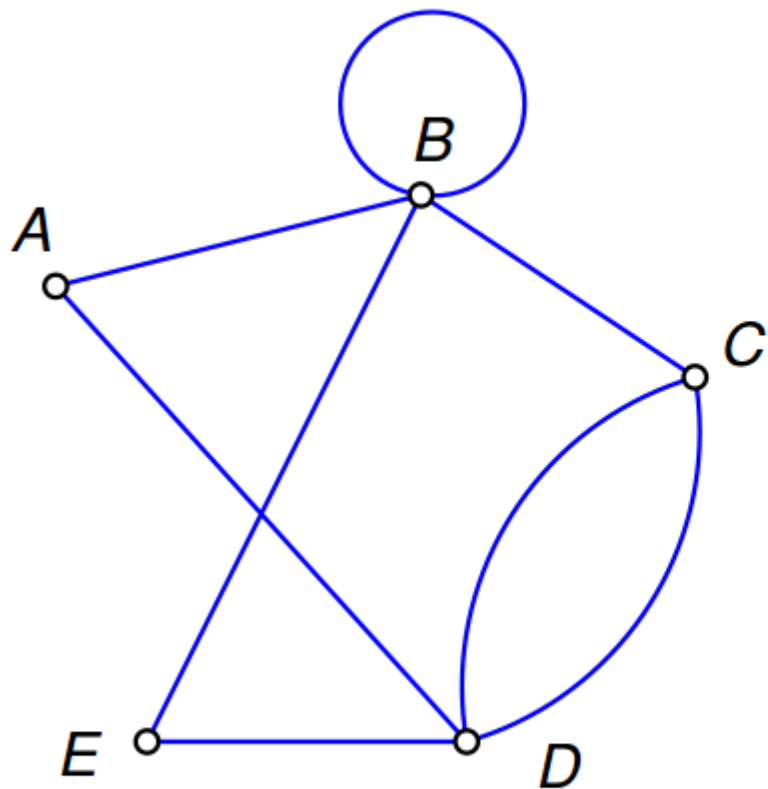
Another Euler path: CDCBBADEB

Caminos de Euler



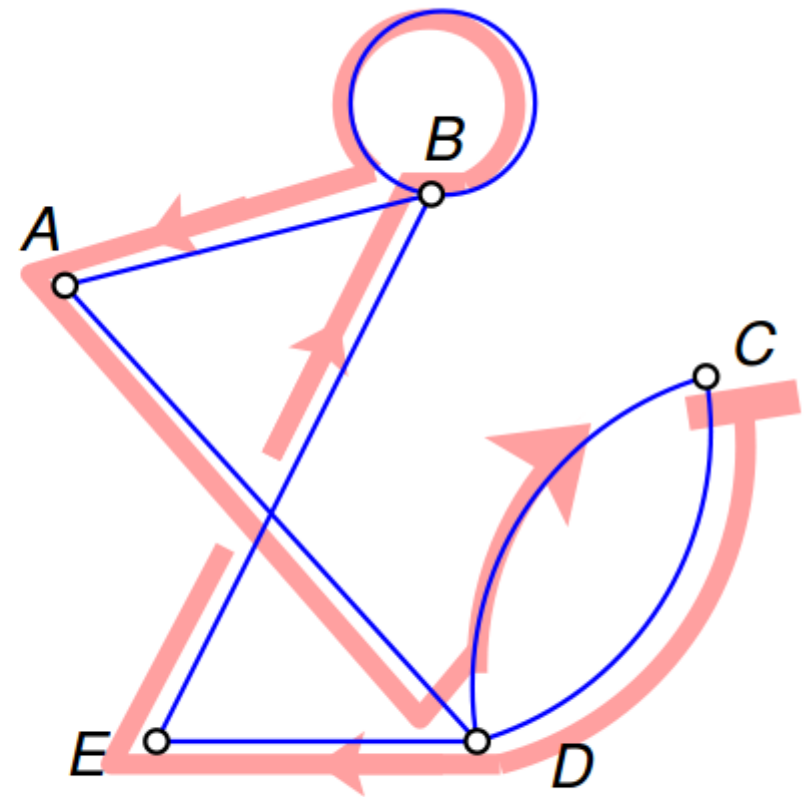
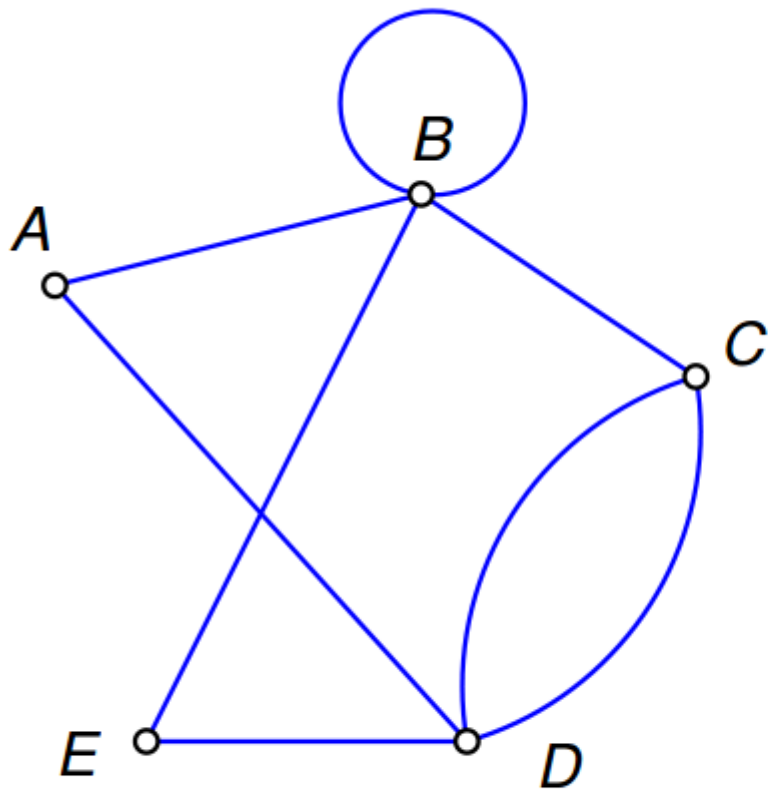
An Euler circuit:

Camino de Euler



An Euler circuit: CDCBBADEBC

Camino de Euler



Another Euler circuit: CDEBBADC

Camino de Euler

Condiciones necesarias para la existencia de circuitos de Euler:

- Todos los vértices del grafo deben tener grado par \rightarrow si existe al menos un vértice de grado impar, no puede existir un circuito de Euler.

- Grafo “Euleriano”:

- Un grafo con un circuito de Euler.

- Un grafo con todos sus vértices de grado par.

Caminos de Euler

Definiciones formales:

.Un grafo **no dirigido** tiene un circuito de Euler si y sólo si cada vértice tiene grado par, y todos los vértices con grado diferente de cero pertenecen al mismo componente conectado.

.Un grafo **no dirigido** tiene un camino de Euler si y sólo si por mucho dos vértices tienen grado impar, y todos los vértices con grado diferente de cero pertenecen al mismo componente conectado.

Caminos de Euler

Definiciones formales:

.Un grafo **dirigido** tiene un circuito de Euler si y sólo si cada vértice tiene el mismo grado de salida como de entrada, y todos los vértices con grado diferente de cero pertenecen al mismo componente fuertemente conectado.

Caminos de Euler

Definiciones formales:

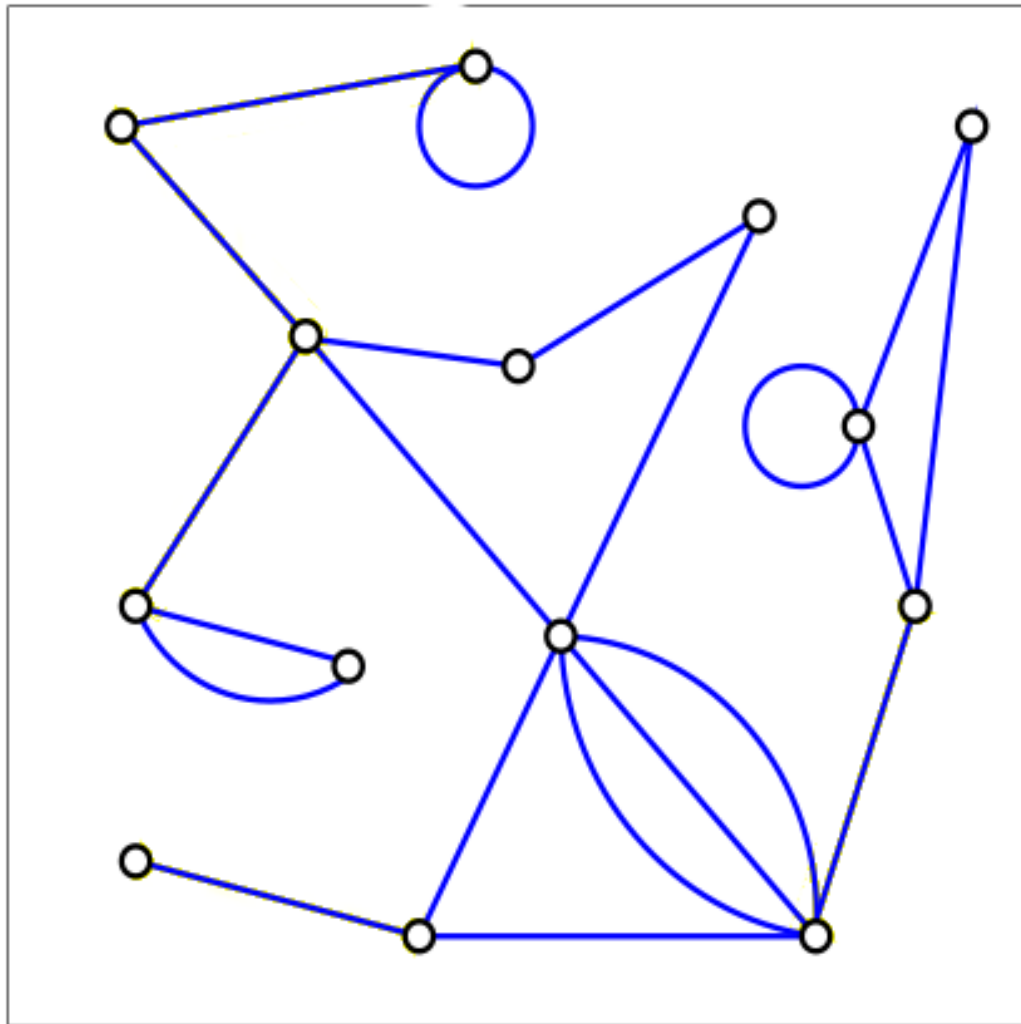
• Un grafo **dirigido** tiene un camino de Euler si y sólo si por mucho un vértice tiene una diferencia de 1 entre el grado de salida y de entrada, si por mucho otro vértice tiene una diferencia de 1 entre el grado de entrada y el de salida, el resto de vértices tienen igual grado de salida y de entrada, y todos los vértices con grado diferente de cero pertenecen al mismo componente conectado.

Caminos de Euler

- Sabiendo que en el grafo pueden existir caminos y/o circuitos de Euler, ¿cómo encontrarlos?
- Noción de arista “puente”:
 - Una arista en un grafo conectado se asume como “puente” si al remover solamente esa arista hace que partes del grafo se desconecten.

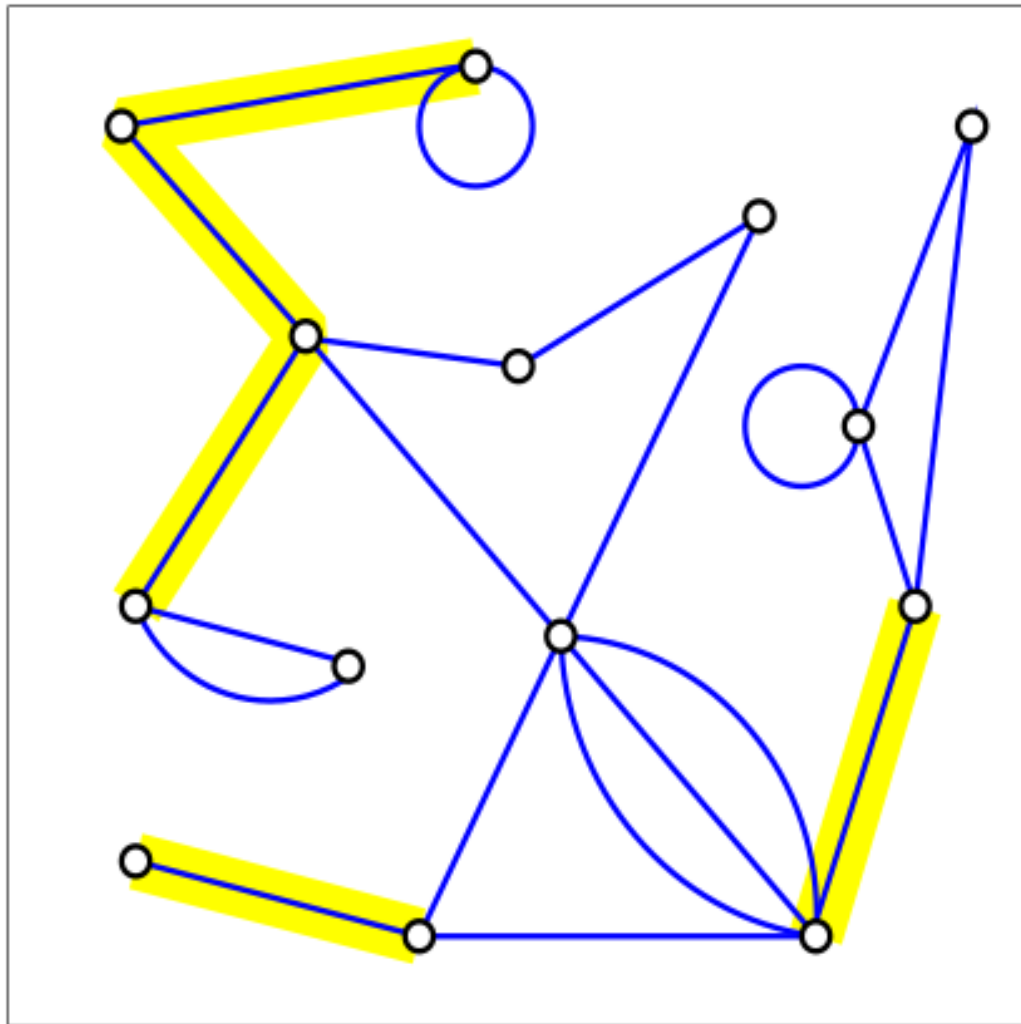
Camino de Euler

•Noción de arista “puente”:



Camino de Euler

•Noción de arista “puente”:



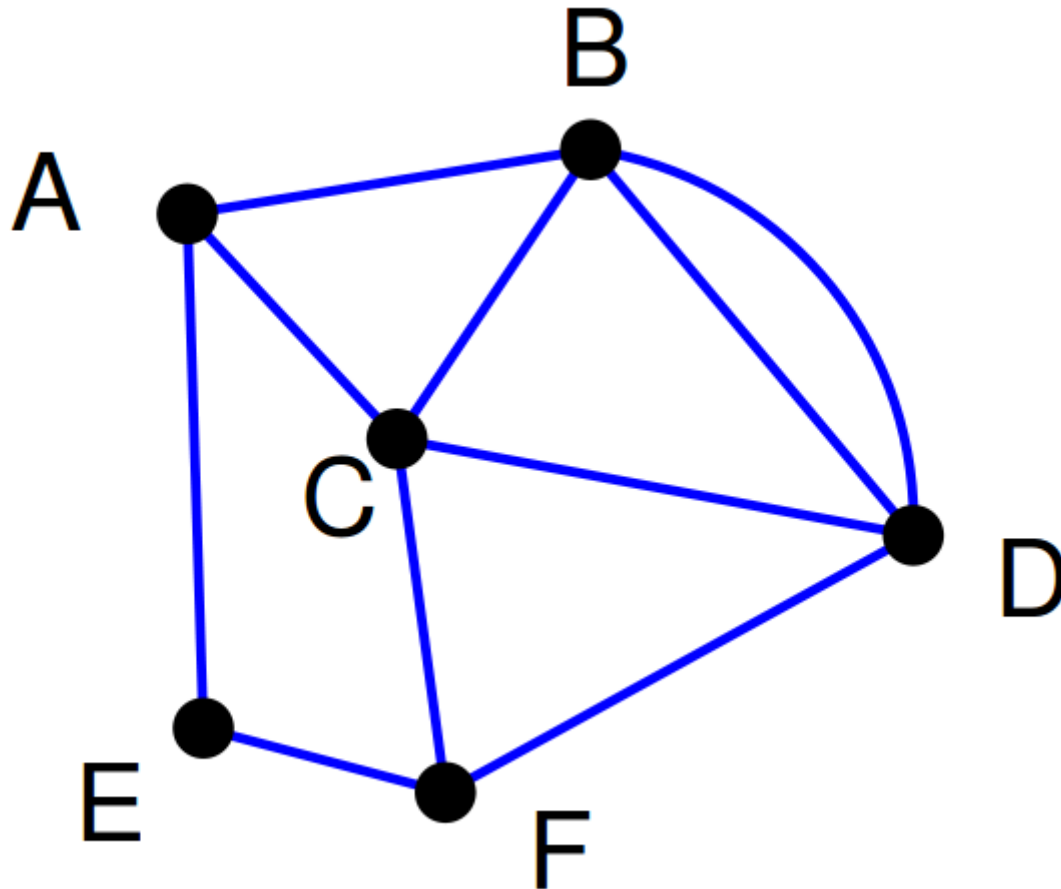
Caminos de Euler

• Encontrar un camino o circuito de Euler en un grafo → Algoritmo de Fleury's.

1. Verificar si el grafo tiene 0 o 2 vértices de grado impar.
2. Con 0 vértices, empezar en cualquier vértice.
Con 2 vértices, empezar en uno de ellos.
3. Seguir las aristas una por vez (marcadas como usadas). Si se requiere escoger entre una arista “puente” y otra(s), siempre escoger alguna de las otras.
4. Parar cuando se acaben las aristas sin usar.

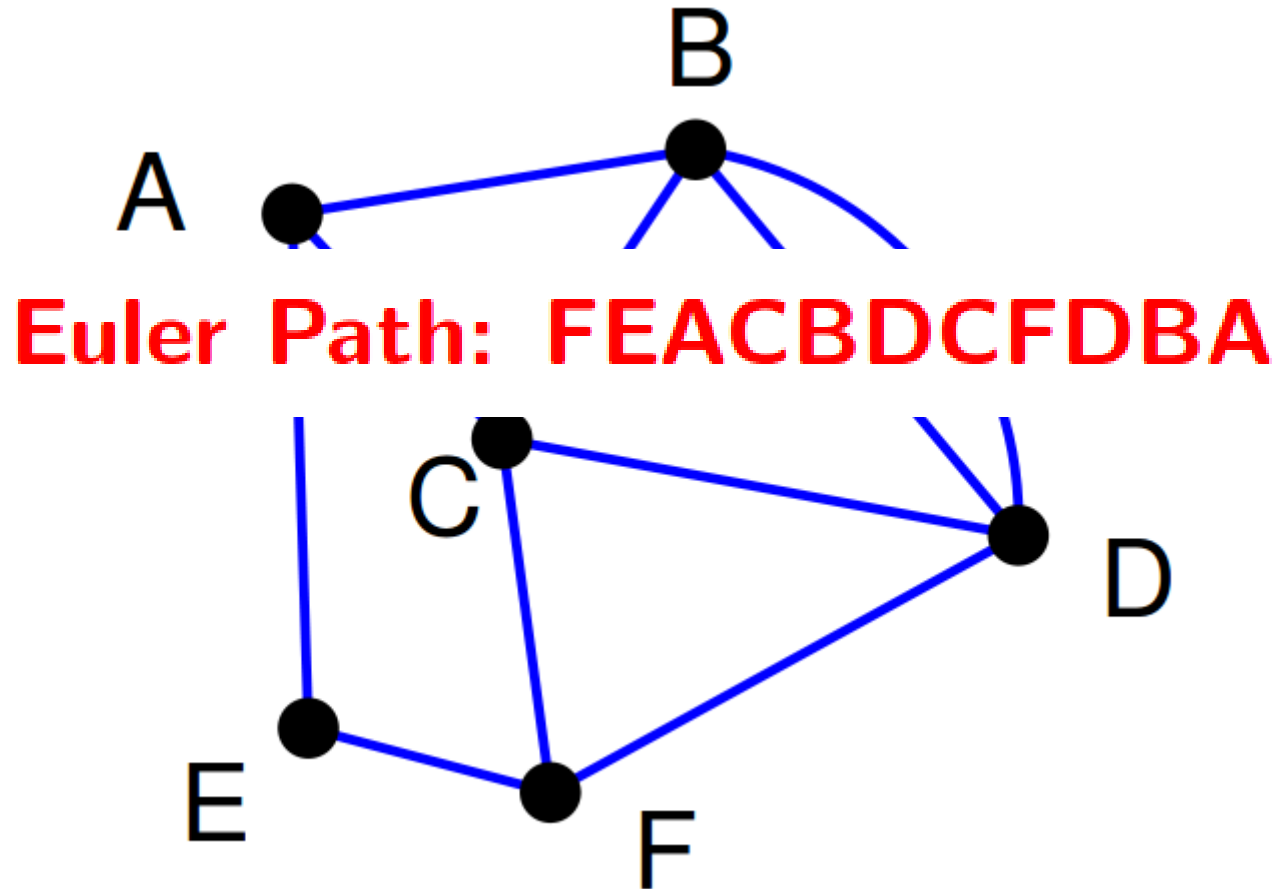
Caminos de Euler

• Encontrar un camino o circuito de Euler en el siguiente grafo → Algoritmo de Fleury's.



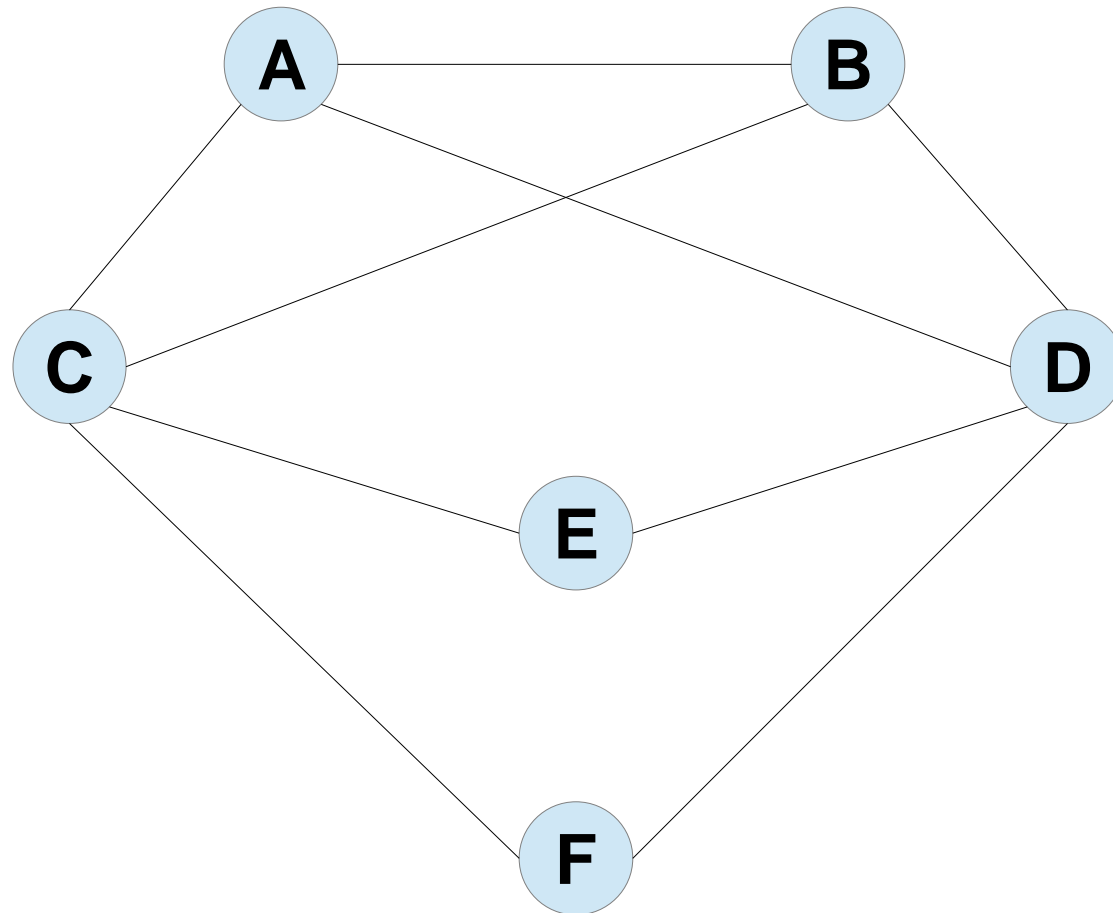
Caminos de Euler

• Encontrar un camino o circuito de Euler en el siguiente grafo → Algoritmo de Fleury's.



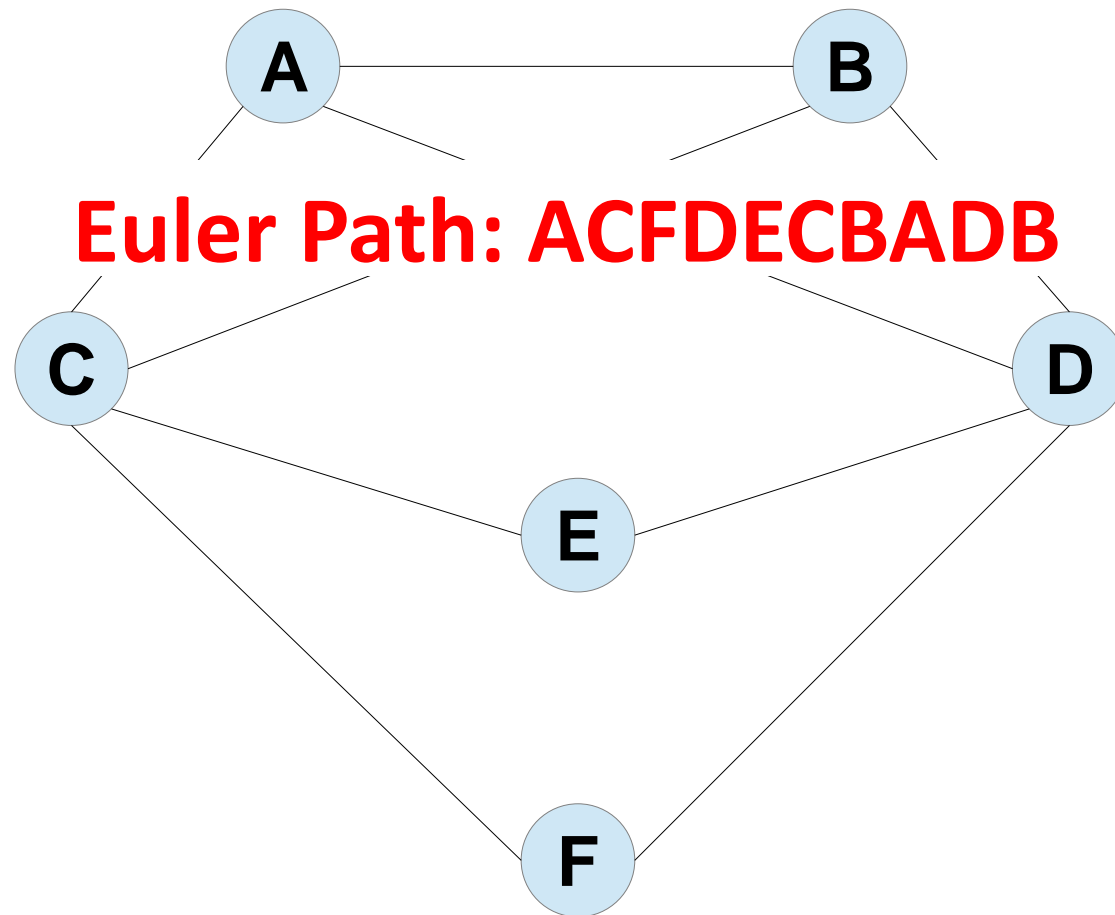
Caminos de Euler

.Encontrar un camino o circuito de Euler en el siguiente grafo → Algoritmo de Fleury's.



Caminos de Euler

• Encontrar un camino o circuito de Euler en el siguiente grafo → Algoritmo de Fleury's.



Camino de Euler

- Algoritmo de Fleury's:

- Applet interactivo:

- <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/FleuryAlgorithm.shtml>

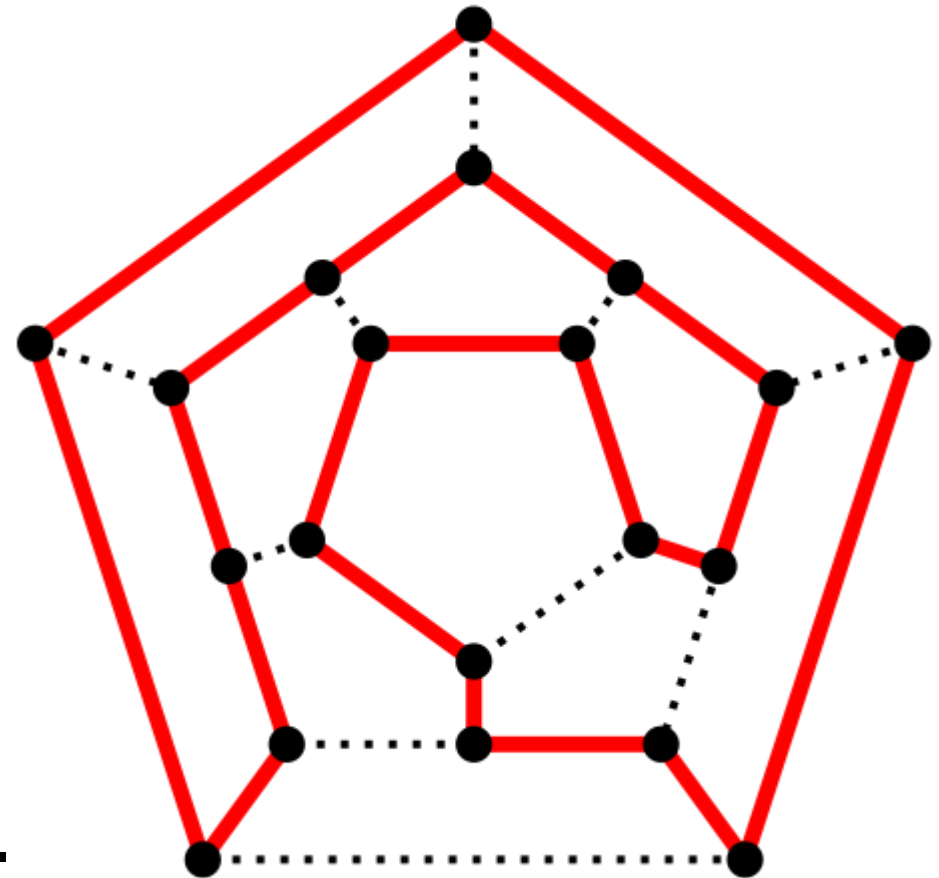
Camino o Trayectorias de Hamilton

Camminos de Hamilton

- Motivación: Juego “Icosian” (Icosian game).
- Juego desarrollado por Sir William Hamilton
- Gráfica de madera en forma de dodecaedro regular → objetivo del juego: encontrar un circuito hamiltoniano.
- Circuito hamiltoniano: visitar cada vértice una sola vez, con excepción del vértice inicial (que es también el último).

Camino de Hamilton

• Motivación: Juego “Icosian” (Icosian game).



La solución es un ciclo que contiene veinte (en griego icosá) aristas.

Caminos de Hamilton

- Motivación: problema del vendedor viajero.
- Dadas N ciudades, y conocidas las distancias entre cada par de ellas, el objetivo es encontrar una ruta que, comenzando y terminando en una ciudad concreta, pase una sola vez por cada una de las ciudades y además minimice la distancia recorrida por el viajero.

Camminos de Hamilton

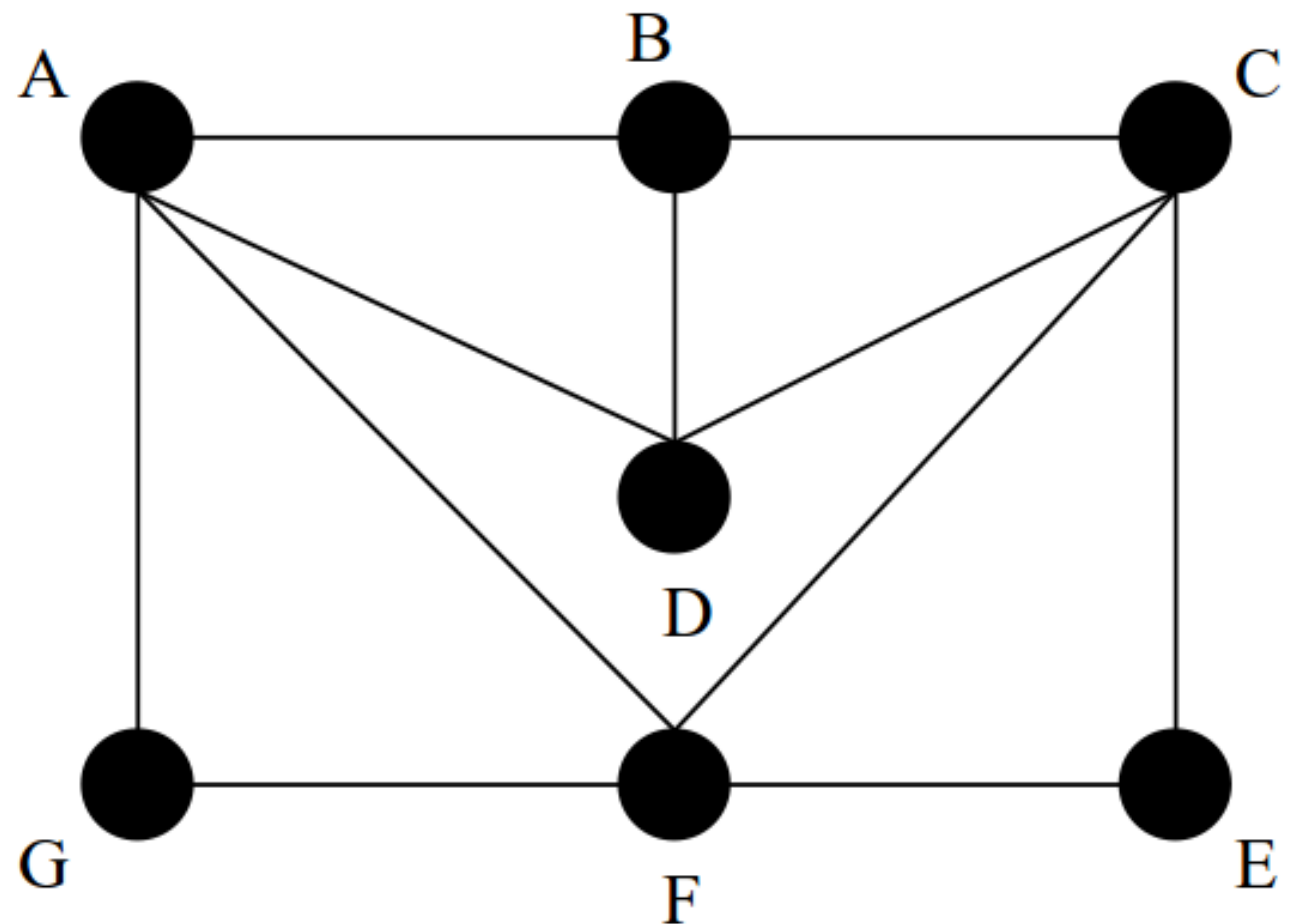
- Motivación: problema del vendedor viajero.
- Dadas N ciudades, y conocidas las distancias entre cada par de ellas, el objetivo es encontrar una ruta que, comenzando y terminando en una ciudad concreta, pase una sola vez por cada una de las ciudades y además minimice la distancia recorrida por el viajero.
- Respuesta: encontrar un circuito hamiltoniano en el grafo donde las ciudades son vértices y las aristas las rutas entre ciudades.

Caminos de Hamilton

- Caminos, rutas o trayectorias en un grafo G , que sólo incluyen o visitan cada vértice una sola vez, se conocen como caminos, rutas o trayectorias de Hamilton (o caminos, rutas o trayectorias hamiltonianas).
- Si adicionalmente los caminos empiezan y terminan en el mismo vértice, se conocen como circuitos o ciclos de Hamilton (o circuitos o ciclos hamiltonianos).

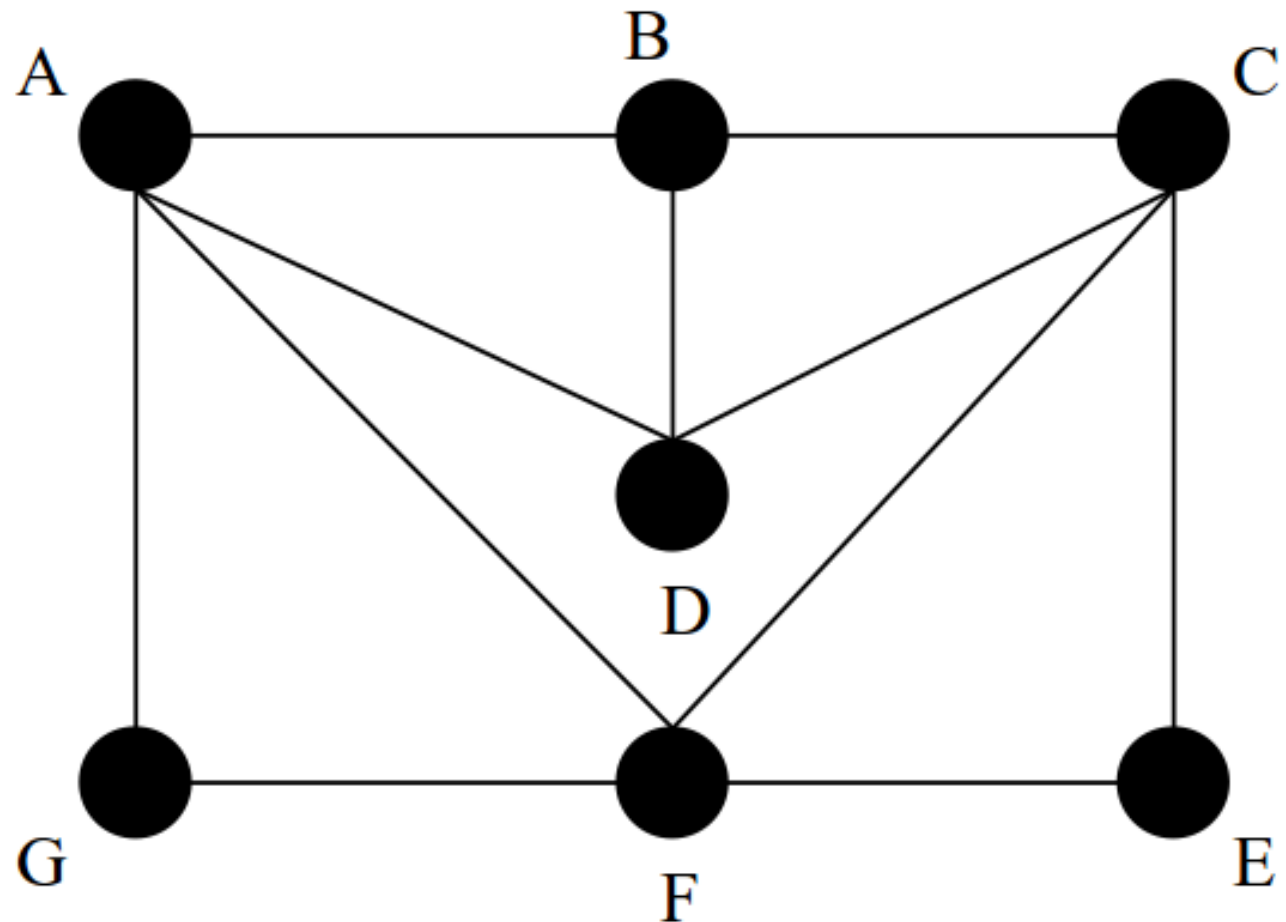
Camino de Hamilton

Hamiltonian cycle:



Camino de Hamilton

Hamiltonian cycle: the path **AGFECDBA**.



Caminos de Hamilton

Condiciones necesarias para la existencia de circuitos de Hamilton (asumiendo un grafo $G = (V, E)$ con más de 2 vértices):

- No deben existir vértices de grado 1.
- Si un vértice tiene grado 2, entonces ambas aristas incidentes deben pertenecer al circuito.
- No deben existir circuitos más pequeños (internos) dentro de cualquier circuito de Hamilton.

Camino de Hamilton

Condiciones necesarias para la existencia de circuitos de Hamilton (asumiendo un grafo $G = (V, E)$ con más de 2 vértices):

• Debe existir un subgrafo H de G con las siguientes propiedades:

- H contiene cada vértice de G .
- H está conectado.
- H tiene el mismo número de aristas que de vértices.
- H tiene cada vértice con grado 2.

• Este subgrafo es el circuito de Hamilton de G .

Camino de Hamilton

Condiciones necesarias para la existencia de circuitos de Hamilton (asumiendo un grafo $G = (V, E)$ con más de 2 vértices):

Problema: las 3 primeras condiciones pueden verificarse fácilmente, pero la cuarta...

... no puede verificarse en tiempo polinomial, por lo que se conoce como un problema NP-completo.

Camino de Hamilton

- ¿Cómo encontrar un camino o circuito de Hamilton en un grafo?
- No existe algoritmo conocido que sea óptimo... es un problema NP-completo!
- Opción 1: fuerza bruta, probar todas las posibles combinaciones de conexiones entre grafos.

Camino de Hamilton

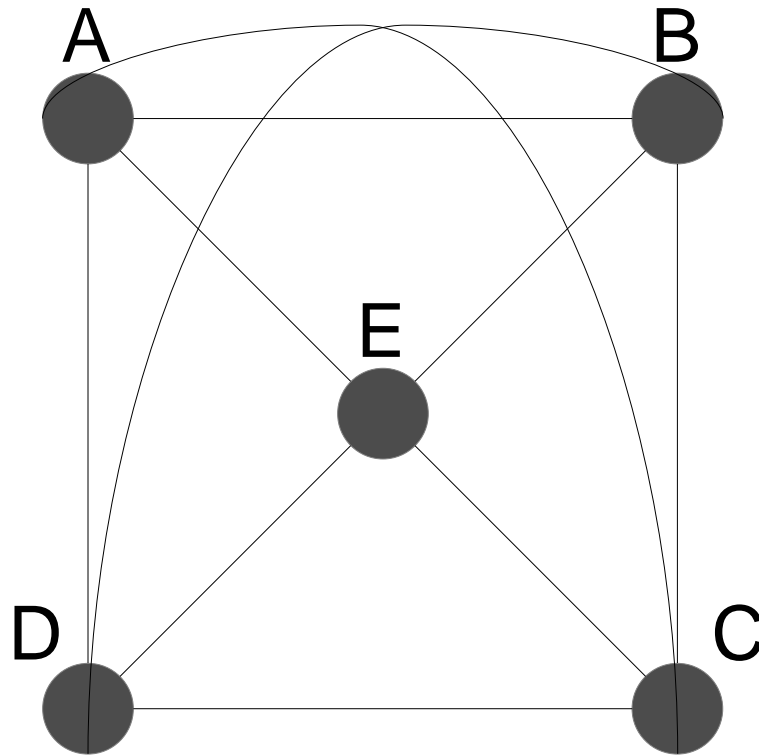
- ¿Cómo encontrar un camino o circuito de Hamilton en un grafo?
- Opción 2: a partir de un vértice, seleccionar conexiones, hasta que no se pueda avanzar. Si algunos vértices quedaron sin visitar, revertir la última conexión, pivotar sobre el vértice, y probar de nuevo.

Caminos de Hamilton

- ¿Cómo encontrar un camino o circuito de Hamilton en un grafo?
- Opción 3: utilizar algoritmos (basados en el problema del vendedor viajero) que entregan soluciones aproximadas (cercanas al resultado óptimo):
 - Cheapest Link Algorithm (CLA).
 - Nearest Neighbor Algorithm (NNA).
 - Repetitive Nearest Neighbor Algorithm (NNA).
 - ...

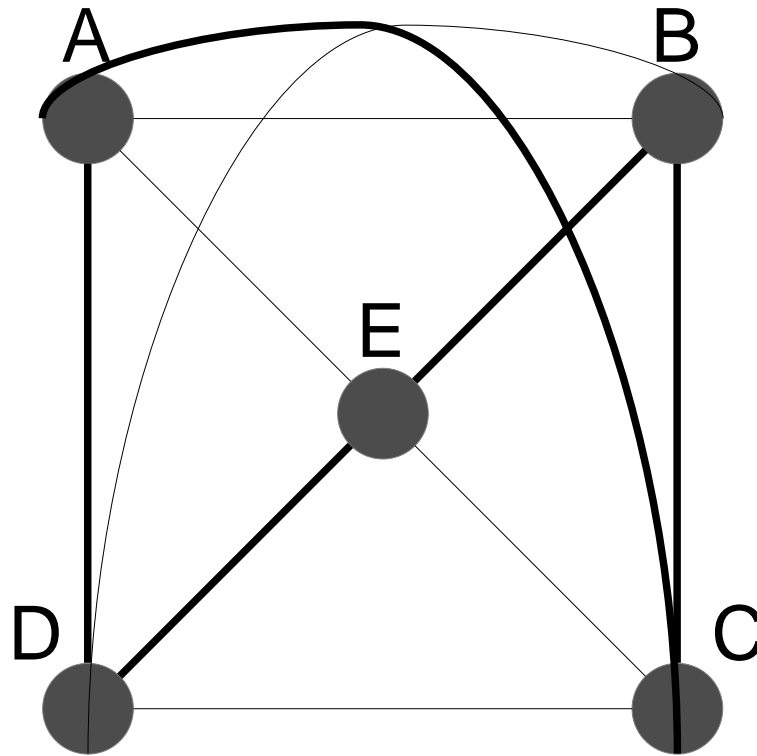
Caminos de Hamilton

• Encontrar un camino o circuito de Hamilton en el siguiente grafo:



Caminos de Hamilton

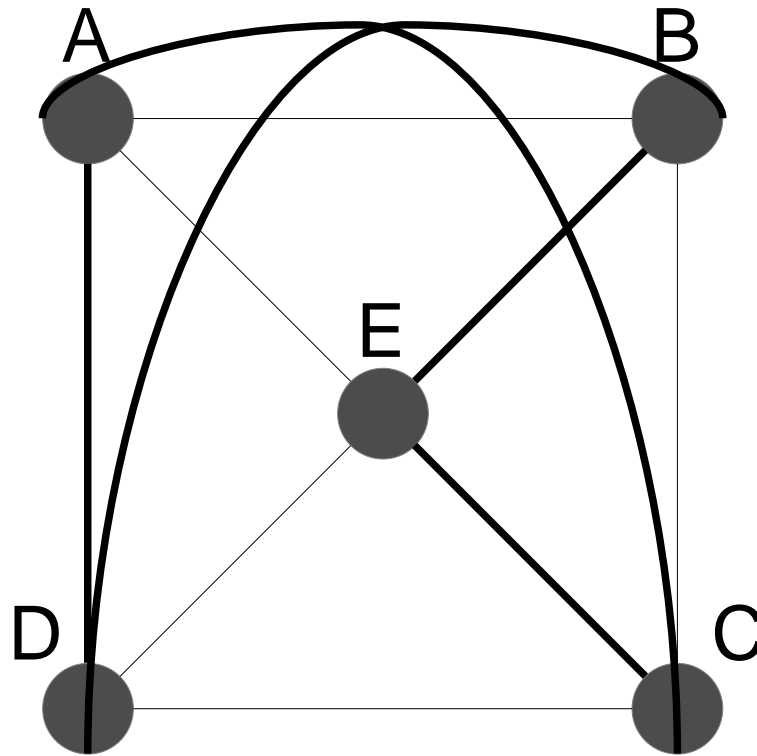
• Encontrar un camino o circuito de Hamilton en el siguiente grafo:



ADEBCA

Caminos de Hamilton

• Encontrar un camino o circuito de Hamilton en el siguiente grafo:



BDACEB

Camino de Hamilton

- Encontrando caminos de Hamilton:

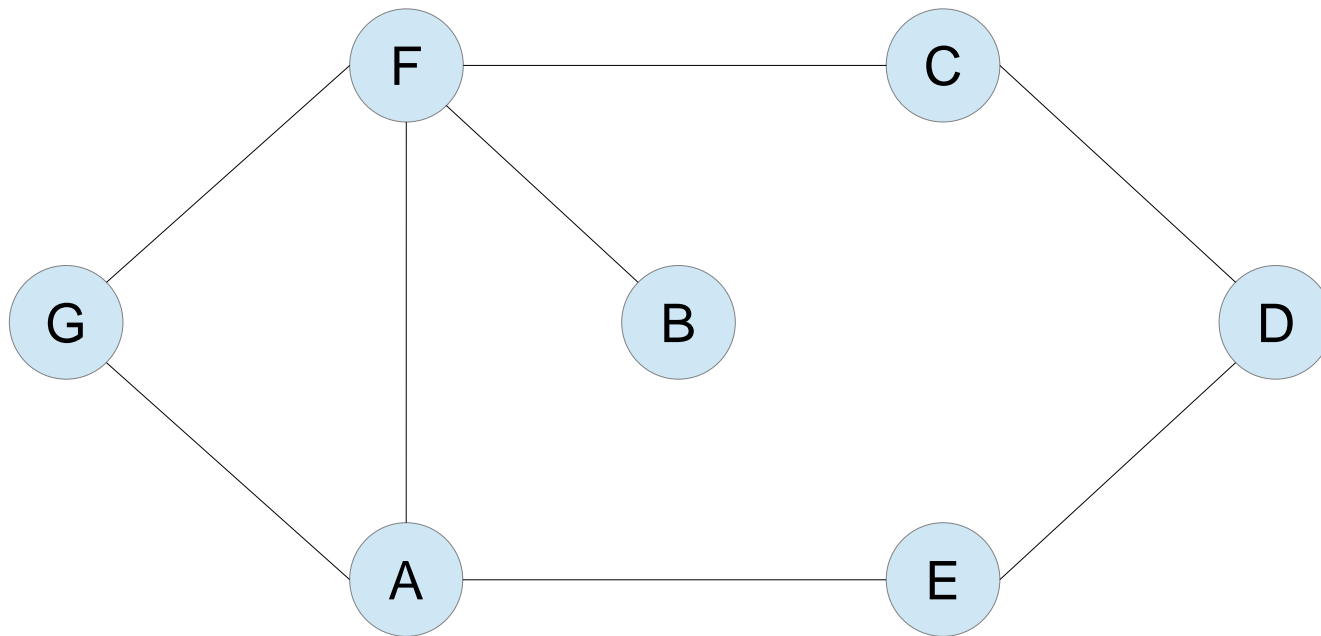
- Applet interactivo:

- <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/HamiltonPath.shtml>

- <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/GraphPractice.shtml>

¡ Quiz !

.Para el siguiente grafo, indique si existe (y cuáles): camino de Euler, circuito de Euler, camino de Hamilton, circuito de Hamilton.



Referencias

- Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., & Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms (Third Ed.).
- www.csd.uoc.gr/~hy583/papers/ch14.pdf
- www.math.ku.edu/~jmartin/courses/math105-F11/Lectures/chapter5-part2.pdf
- mathworld.wolfram.com/IcosianGame.html
- en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem

Referencias

- en.wikipedia.org/wiki/Eulerian_path
- en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg
- en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path
- en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path_problem