ANALISIS NUMERICO

SOLUCION DE ECUACIÓN NO LINEAL

Condiciones de Convergencia de los Metodos Iterativos

Definición 2.6 Supongamos que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión que converge a p, con $p_n \neq p$ para toda n. Si existen constantes positivas λ y α con

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{\alpha}} = \lambda,$$

entonces $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ **converge a p con orden α y una constante de error asintótica λ.** ■

Se dice que un método iterativo de la forma $p_n = g(p_{n-1})$ es **de orden** α, si la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a la solución $p = g(p)$ con orden α.

n	Sucesión lineal convergente $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(0.5)^n$	Sucesión cuadrática convergente $\{\tilde{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(0.5)^{2^n-1}$
1	5.0000×10^{-1}	5.0000×10^{-1}
2	2.5000×10^{-1}	1.2500×10^{-1}
3	1.2500×10^{-1}	7.8125×10^{-3}
4	6.2500×10^{-2}	3.0518×10^{-5}
5	3.1250×10^{-2}	4.6566×10^{-10}
6	1.5625×10^{-2}	1.0842×10^{-19}
7	7.8125×10^{-3}	5.8775×10^{-39}

Teorema 2.7 Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para toda $x \in C[a, b]$. Supongamos, además, que g' es continua en (a, b) y que existe una constante positiva $k < 1$ con

$$|g'(x)| \leq k, \qquad \text{para todo } x \in (a, b).$$

Si $g'(p) \neq 0$, entonces para cualquier número p_0 en $[a, b]$ la sucesión

$$p_n = g(p_{n-1}), \qquad \text{para} \quad n \geq 1,$$

converge sólo linealmente en el único punto fijo p en $[a, b]$. ■

Lo anterior indica que si la primera derivada es cero entonces la convergencia no es lineal sino de orden superior

Teorema 2.8 Sea p una solución de la ecuación $x = g(x)$. Supongamos que $g'(p) = 0$ y g'' es continua y está estrictamente acotada por M en un intervalo abierto I que contiene a p. Entonces existe una $\delta > 0$ tal que, para $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ la sucesión definida por $p_n = g(p_{n-1})$, cuando $n \geq 1$, converge al menos cuadráticamente a p. Además, para valores suficientemente grandes de n,

$$|p_{n+1} - p| < \frac{M}{2} |p_n - p|^2.$$ ■

Definición 2.9 Una solución p de $f(x) = 0$ es un **cero de multiplicidad** m de f si para $x \neq p$, podemos escribir $f(x) = (x - p)^m q(x)$, donde $\lim_{x\to p} q(x) \neq 0$. ■

Teorema 2.10 $f \in C^1[a, b]$ tiene un cero simple en p en (a, b) si y sólo si $f(p) = 0$, pero $f'(p) \neq 0$. ■

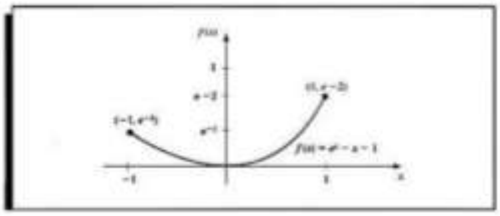
Teorema 2.11 La función $f \in C^m[a, b]$ tiene un cero de multiplicidad m en p en (a, b) si y sólo si

$$0 = f(p) = f'(p) = f''(p) = \cdots = f^{(m-1)}(p), \quad \text{pero} \quad f^{(m)}(p) \neq 0.$$

Tabla 2.8

n	p_n	n	p_n
0	1.0	9	2.7750×10^{-3}
1	0.58198	10	1.3881×10^{-3}
2	0.31906	11	6.9411×10^{-4}
3	0.16800	12	3.4703×10^{-4}
4	0.08635	13	1.7416×10^{-4}
5	0.04380	14	8.8041×10^{-5}
6	0.02206	15	4.2610×10^{-5}
7	0.01107	16	1.9142×10^{-6}
8	0.005545		

Figura 2.11



Modificación del Método de Newton Raphson

Un método para resolver el problema de las raíces múltiples consiste en definir una función μ por medio de

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Si p es un cero de f de multiplicidad m y si $f(x) = (x - p)^m q(x)$, entonces

$$\mu(x) = \frac{(x-p)^m q(x)}{m(x-p)^{m-1} q(x) + (x-p)^m q'(x)}$$

$$= (x - p)\frac{q(x)}{mq(x) + (x-p)q'(x)}$$

también tiene un cero en p. Pero como $q(p) \neq 0$,

$$\frac{q(p)}{mq(p) + (p-p)q'(p)} = \frac{1}{m} \neq 0,$$

por tanto, p es un cero simple de μ. Así, podemos aplicar el método de Newton a la función μ para obtener

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)/f'(x)}{\{[f'(x)]^2 - [f(x)][f''(x)]\}/[f'(x)]^2}$$

o bien

$$g(x) = x - \frac{f(x)\,f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)\,f''(x)}. \qquad (2.11)$$

1. Use el método de Newton para encontrar las soluciones de los siguientes problemas con una exactitud de 10^{-5}.
   a. $x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} = 0$, para $0 \le x \le 1$
   b. $\cos(x + \sqrt{2}) + x(x/2 + \sqrt{2}) = 0$, para $-2 \le x \le -1$
   c. $x^3 - 3x^2(2^{-x}) + 3x(4^{-x}) - 8^{-x} = 0$, para $0 \le x \le 1$
   d. $e^{6x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 8)\, e^{4x} - (\ln 2)^3 = 0$, para $-1 \le x \le 0$

2. Repita el ejercicio 1 aplicando el método modificado de Newton-Raphson descrito en la ecuación (2.11). ¿Mejora la rapidez o la exactitud en comparación con el ejercicio 1?

3. Aplique el método de Newton y el método modificado de Newton-Raphson descrito en la ecuación (2.11) para encontrar una solución del siguiente problema con una exactitud de 10^{-5}:

$$e^{6x} + 1.441e^{2x} - 2.079e^{4x} - 0.3330 = 0 \quad \text{para} \quad -1 \le x \le 0.$$

   Este es el mismo problema que 1(d), sólo que el coeficiente ha sido reemplazado por sus aproximaciones de cuatro dígitos. Compare las soluciones con los resultados de 1(d) y de 2(d).

4. Demuestre que las sucesiones siguientes convergen linealmente a $p = 0$. ¿Qué tan grande debe ser n antes que $|p_n - p| \le 5 \times 10^{-2}$?
   a. $p_n = \dfrac{1}{n}$, $n \ge 1$
   b. $p_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \ge 1$

5. a. Demuestre que, para cualquier entero positivo k, la sucesión definida por $p_n = 1/n^k$ converge linealmente a $p = 0$.
   b. Para cada par de enteros k y m, determine un número N para el cual $1/N^k < 10^{-m}$.

6. a. Demuestre que la sucesión $p_n = 10^{-2^n}$ converge cuadráticamente en cero.
   b. Demuestre que la sucesión $p_n = 10^{-n^k}$ no converge cuadráticamente a cero, sin importar el tamaño del exponente $k > 1$.

7. a. Construya una sucesión que converja a cero de orden 3.
   b. Suponga que $\alpha > 1$. Construya una sucesión que converja a cero de orden α.

8. Suponga que p es una raíz de multiplicidad m de f donde f'' es continua en un intervalo abierto que contiene p. Demuestre que el siguiente método de punto fijo tiene $g'(p) = 0$:

$$g(x) = x - \frac{m\,f(x)}{f'(x)}.$$

9. Demuestre que el algoritmo de bisección 2.1 da una sucesión con una cota de error que converge linealmente a cero.

10. Suponga que f tiene m derivadas continuas. Modifique la demostración del teorema 2.10 para probar que f tiene una raíz de multiplicidad m en p si y sólo si

$$0 = f(p) = f'(p) = \cdots = f^{(m-1)}(p), \quad \text{pero} \quad f^{(m)}(p) \ne 0.$$

11. El método iterativo para resolver $f(x) = 0$, dado por el método de punto fijo $g(x) = x$, donde

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} - \frac{f''(p_{n-1})}{2f'(p_{n-1})}\left[\frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}\right]^2, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

   tiene $g'(p) = g''(p) = 0$. Esto generalmente producirá una convergencia cúbica ($\alpha = 3$). Use el análisis del ejemplo 1 para comparar la convergencia cuadrática y la convergencia cúbica.