

直方图均衡

李重斌

lichongbin2004@126.com

2018 年 12 月 4 日

1 数学基础

直方图均衡 (Histogram Equalization) 是图像增强的常用手段。基本思想是要均衡各个灰度级分布, 其结果就是图像的对比度增强了。背后的数学基础是概率论中的随机变量变换。下面介绍其中最重要的公式。

X 和 Y 是两个连续型的随机变量, 他们的 PDF 分别是 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, CDF 分别是 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 。 X 和 Y 之间满足以下函数关系式:

$$Y = g(X) \quad (1)$$

函数 1 满足单调可导特性, 因此, 该函数具有反函数, 即:

$$X = g^{-1}(Y) \quad (2)$$

假设函数 1 递增。根据 CDF 的定义, $F_Y(y)$ 可表示成

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(g(X) \leq y) \\ &= P(X \leq g^{-1}(y)) \\ &= \int_0^{g^{-1}(y)} f_X(w) dw \\ &= F_X(x)|_0^{g^{-1}(y)} \\ &= F_X(g^{-1}(y)) - F_X(0) \end{aligned} \quad (3)$$

上式两侧同时对 y 求导得:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = f_X(x) \frac{dx}{dy} \quad (4)$$

函数 1 递减时, $\frac{dx}{dy} \leq 0$, 而 PDF 始终为正数, 所以应该在求导之后取绝对值。综上所述, 可得出以下公式:

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

2 实践

将图像的各个灰度值当做随机变量, 统计出图像的灰度直方图。该直方图可近似的看做一个随机变量的 PDF。假设变换之前和之后图像的 PDF 分别为 $p_s(s)$ 和 $p_r(r)$, s 和 r 满足函数关系式:

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw \quad (5)$$

我也不知道这个函数式怎么想出来的, 很神奇。显然, 函数 5 满足单调可导特性。这里 L 表示图像的灰度级数。

根据上面的推到, $p_s(s)$ 和 $p_r(r)$ 之间满足关系式:

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| \quad (6)$$

下面求 $\frac{ds}{dr}$:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dr} &= \frac{dT(r)}{dr} \\ &= (L - 1) \frac{d}{dr} \left[\int_0^r p_r(w) dw \right] \\ &= (L - 1) p_r(r) \end{aligned}$$

将此关系式带入 6 得:

$$\begin{aligned} p_s(s) &= p_r(r) \left| \frac{1}{(L - 1) p_r(r)} \right| \\ &= \frac{1}{L - 1} \end{aligned}$$

以上证明结果揭示了一个重要的事实: 对图像的 PDF 做积分, 得到的 PDF 是一个均匀分布。连续变量的积分对应到离散变量就是累加求和。