Règles de la Déduction Naturelle

Axiome

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : A$
montrons A
$\langle i \rangle$ CQFD (Ax avec h)

Axiome

$\langle j \rangle$ supposons $h'_1 : A'_1, \cdots, h'_k : A'_k, h : A$
montrons B
$\cdots$
> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons A
> $\langle i \rangle$ CQFD (Ax avec h)

$\cdots$
$\langle j \rangle$ CQFD (Nom)

Introduction du connecteur $\Rightarrow$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A \Rightarrow B$
> $\langle i+1 \rangle$ supposons $h : A$
> montrons B
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$)

Introduction du connecteur $\wedge$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A \wedge B$
> $\langle i+1 \rangle$ montrons A
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ montrons B
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\wedge$)

Affaiblissement

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : B$
montrons A
> $\langle i+1 \rangle$ montrons A sans utiliser h
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (Af)

Introduction de true

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons true
$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\top$)

Elimination de false

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h :$ false
montrons B
$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\perp$ avec h)

Elimination du connecteur $\Rightarrow$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons B
> $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \Rightarrow B$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ montrons A
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\Rightarrow$)

Elimination gauche du connecteur $\wedge$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons A
> $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E^g_\wedge$)

Elimination droite du connecteur $\wedge$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons B
> $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E^d_\wedge$)

Introduction gauche du connecteur $\vee$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A \vee B$
> $\langle i+1 \rangle$ montrons A
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I^g_\vee$)

Introduction droite du connecteur $\vee$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A \vee B$
> $\langle i+1 \rangle$ montrons B
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I^d_\vee$)

Introduction du connecteur $\neg$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $\neg A$
> $\langle i+1 \rangle$ supposons $h : A$
> montrons false
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\neg$)

Introduction du quantificateur $\forall$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $\forall x\, A$
> $\langle i+1 \rangle$ soit une nouvelle variable y
> $(y \notin \text{Free}(A) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \text{Free}(A_i))$
> montrons $A[x := y]$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

Introduction du quantificateur $\exists$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $\exists x\, A$
> $\langle i+1 \rangle$ montrons $A[x := t]$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\exists$)

Raisonnement par l'absurde

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons A
> $\langle i+1 \rangle$ supposons $h : \neg A$
> montrons false
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (Abs)

Elimination du connecteur $\vee$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons C
> $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \vee B$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ supposons $h_A : A$
> montrons C
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

> $\langle i+3 \rangle$ supposons $h_B : B$
> montrons C
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+3 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\vee$)

Elimination du connecteur $\neg$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons false
> $\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg A$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ montrons A
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\neg$)

Elimination du quantificateur $\forall$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A[x := t]$
> $\langle i+1 \rangle$ montrons $\forall x\, A$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\forall$)

Elimination du quantificateur $\exists$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons B
> $\langle i+1 \rangle$ montrons $\exists x\, A$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ soit une nouvelle variable y
> $(y \notin \text{Free}(A) \cup \text{Free}(B) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \text{Free}(A_i))$
> supposons $h : A[x := y]$
> montrons B
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\exists$)

Règles supplémentaires pour le connecteur $\Leftrightarrow$

Introduction du connecteur $\Leftrightarrow$

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A \Leftrightarrow B$
$\langle i+1\rangle$ montrons $A \Rightarrow B$
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1\rangle$ CQFD
$\langle i+2\rangle$ montrons $B \Rightarrow A$
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+2\rangle$ CQFD
$\langle i\rangle$ CQFD $(I_{\Leftrightarrow})$

Elimination gauche du connecteur $\Leftrightarrow$

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A \Rightarrow B$
$\langle i+1\rangle$ montrons $A \Leftrightarrow B$
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1\rangle$ CQFD
$\langle i\rangle$ CQFD $(E^g_{\Leftrightarrow})$

Elimination droite du connecteur $\Leftrightarrow$

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $B \Rightarrow A$
$\langle i+1\rangle$ montrons $A \Leftrightarrow B$
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1\rangle$ CQFD
$\langle i\rangle$ CQFD $(E^d_{\Leftrightarrow})$

Règles Dérivées

Elimination gauche directe du connecteur $\wedge$

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : A \wedge B$
montrons A
$\langle i\rangle$ CQFD ($D^g_{\wedge}$ avec h)

Introductions du connecteur $\Rightarrow$

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : F_1, \cdots, h_m : F_m$
montrons $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\cdots (A_n \Rightarrow A_{n+1}) \cdots))$
$\langle i+1\rangle$ supposons $h'_1 : A_1, \cdots, h'_n : A_n$
montrons A_{n+1}
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1\rangle$ CQFD
$\langle i\rangle$ CQFD $(I^n_{\Rightarrow})$

Hypothèses contradictoires

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h'_1 : A, h'_2 : \neg A$
montrons B
$\langle i\rangle$ CQFD ($D^1_{\perp}$ avec h'_1, h'_2)

Elimination droite directe du connecteur $\wedge$

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : A \wedge B$
montrons B
$\langle i\rangle$ CQFD ($D^d_{\wedge}$ avec h)

Elimination directe du connecteur $\Rightarrow$

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n,$
$h'_1 : A \Rightarrow B, h'_2 : A$
montrons B
$\langle i\rangle$ CQFD ($D_{\Rightarrow}$ avec h'_1, h'_2)

Hypothèses contradictoires

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons B
$\langle i+1\rangle$ montrons A
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1\rangle$ CQFD
$\langle i+2\rangle$ montrons $\neg A$
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+2\rangle$ CQFD
$\langle i\rangle$ CQFD $(D^2_{\perp})$

Elimination directe du connecteur $\neg$

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h'_1 : A, h'_2 : \neg A$
montrons false
$\langle i\rangle$ CQFD ($D_{\neg}$ avec h'_1, h'_2)

Elimination directe du connecteur $\vee$

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : A \vee B$
montrons C
$\langle i+1\rangle$ supposons $h_A : A$
montrons C
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1\rangle$ CQFD
$\langle i+2\rangle$ supposons $h_B : B$
montrons C
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+2\rangle$ CQFD
$\langle i\rangle$ CQFD ($D_{\vee}$ avec h)

Elimination directe du quantificateur $\forall$

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : \forall x\, A$
montrons $A[x := t]$
$\langle i\rangle$ CQFD ($D_{\forall}$ avec h)

Elimination directe du quantificateur $\exists$

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : \exists x\, A$
montrons B
$\langle i+1\rangle$ soit une nouvelle variable y
$(y \notin \mathrm{Free}(A) \cup \mathrm{Free}(B) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Free}(A_i))$
supposons $h' : A[x := y]$
montrons B
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1\rangle$ CQFD
$\langle i\rangle$ CQFD ($D_{\exists}$ avec h)

Double négation

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons A
$\langle i+1\rangle$ montrons $\neg\neg A$
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1\rangle$ CQFD
$\langle i\rangle$ CQFD $(R^1_{\neg})$

Double négation

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $\neg\neg A$
$\langle i+1\rangle$ montrons A
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1\rangle$ CQFD
$\langle i\rangle$ CQFD $(R^2_{\neg})$

Tiers exclu

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A \vee \neg A$
$\langle i\rangle$ CQFD (TE)

Elimination du tiers exclu

$\langle i\rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons B
$\langle i+1\rangle$ supposons $h'_1 : A$, montrons B
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1\rangle$ CQFD
$\langle i+2\rangle$ supposons $h'_2 : \neg A$
montrons B
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+2\rangle$ CQFD
$\langle i\rangle$ CQFD (D_{TE})

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Equivalences sur les expressions booléennes

Distinction	
$0 \not\equiv 1$	(E0)

Complément		
complément 0	$\overline{0} \equiv 1$	(E1.1)
involution	$\overline{\overline{a}} \equiv a$	(E1.2)

	Produit		Somme	
commutativité	$a \cdot b \equiv b \cdot a$	(E2.1)	$a + b \equiv b + a$	(E3.1)
élément neutre	$1 \cdot a \equiv a$	(E2.2)	$0 + a \equiv a$	(E3.2)
élément absorbant	$0 \cdot a \equiv 0$	(E2.3)	$1 + a \equiv 1$	(E3.3)

Equivalences dérivées

associativité			
$(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c)$	(E2.4)	$(a + b) + c \equiv a + (b + c)$	(E3.4)
idempotence			
$a \cdot a \equiv a$	(E2.5)	$a + a \equiv a$	(E3.5)
élément neutre			
$a \cdot 1 \equiv a$	(E2.6)	$a + 0 \equiv a$	(E3.6)
élément absorbant			
$a \cdot 0 \equiv 0$	(E2.7)	$a + 1 \equiv 1$	(E3.7)
distributivité			
$a \cdot (b + c) \equiv a \cdot b + a \cdot c$	(E4.1)	$a + (b \cdot c) \equiv (a + b) \cdot (a + c)$	(E4.2)
complément			
$a \cdot \overline{a} \equiv 0$	(E1.3)	$a + \overline{a} \equiv 1$	(E1.4)
lois de Morgan			
$\overline{a \cdot b} \equiv \overline{a} + \overline{b}$	(E4.3)	$\overline{a + b} \equiv \overline{a} \cdot \overline{b}$	(E4.4)