2006 矩阵论试题答案

一．填空（每题 4 分，共 40 分）

1． 设 $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 8 & 2\\ 2 & 12 & -2 & 12\\ 1 & 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$，则 A 的值域 $R(A)=\{y\,|\,y=Ax, x\in\mathbf{R}^4\}$ 的维数

$\dim R(A)=$ __2__.

2． 设 A 的若当标准型 $J=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，则 A 的最小多项式

$\psi_m(\lambda)=\underline{(\lambda+1)^3(\lambda-2)^2}$.

3． 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，则 $h(A)=A^5-3A^4+A^3+3A^2-3A=\underline{\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 4 & -3 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}}$.

4． 设埃尔米特阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & 1+i & i\\ 1-i & 5 & 0\\ -i & 0 & 2\end{bmatrix}$，则矩阵 A 为__正定的__埃尔米特阵.

5． 在 $\mathbf{R}^3$ 中有下列两组向量：

$\alpha_1=(-3,1,-2)^T$，$\alpha_2=(1,-1,1)^T$，$\alpha_3=(2,3,-1)^T$；

$\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(2,0,1)^T$，

则由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 $P=\underline{\begin{pmatrix}-6 & -19 & -1\\ -13 & -42 & -1\\ -2 & -7 & 0\end{pmatrix}}$.

6． 设 $A\in\mathbf{C}^{3\times 3}$，$\|A\|_{m_2}=\{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}|^2\}^{\frac{1}{2}}$，$AA^H$ 的非零特征值分别为 3, 5, 15，

则 $\|A\|_{m_2}=\underline{\sqrt{23}}$.

7. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 7\end{bmatrix}$，$V_1, V_2$ 分别为齐次线性方程组

$Ax=0$，$Bx=0$ 的解空间，则 $\dim(V_1 \cap V_2)=$ __1__.

8. 设 $A_n=\begin{bmatrix}\dfrac{n+(-1)^n}{n} & (1-\dfrac{1}{n})^{\frac{1}{n}}\\ \dfrac{n+1}{3n} & (\dfrac{2n+1}{2n-1})^n\end{bmatrix}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\underline{\begin{bmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{3} & e\end{bmatrix}}$.

9. 设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$，则 A 的 $\tilde{L}D\tilde{U}$ 分解为

$$\underline{A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/2 & 1 & 0\\ 1 & 2/5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 5/2 & 0\\ 0 & 0 & -4/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 3/2\\ 0 & 1 & -1/5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

10. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$，则 $A\otimes B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 4 & 8\\ 2 & 0 & 4 & 0\\ -4 & -8 & 10 & 20\\ -4 & 0 & 10 & 0\end{bmatrix}$.

二．(10 分) 设 T 为 n 维欧氏空间 V 中的线性变换，且满足：$(Tx, y)=-(x, Ty)$，试证明：T 在标准正交基下的矩阵 A 为反对称阵（$A=-A^T$）

证明：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的标准正交基，$A=\{a_{ij}\}_{n\times n}$，下证：$a_{ij}=-a_{ji}$：

由 $T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$ 知

$$T\alpha_i=a_{1i}\alpha_1+a_{2i}\alpha_2+\cdots+a_{ni}\alpha_n,\quad T\alpha_j=a_{1j}\alpha_1+a_{2j}\alpha_2+\cdots+a_{nj}\alpha_n,$$

$$(T\alpha_i,\alpha_j)=-(\alpha_i,T\alpha_j);$$

$$(T\alpha_i,\alpha_j)=(a_{1i}\alpha_1+a_{2i}\alpha_2+\cdots+a_{ni}\alpha_n,\alpha_j)=a_{ji},$$

$$(\alpha_i,T\alpha_j)=(\alpha_i,a_{1j}\alpha_1+a_{2j}\alpha_2+\cdots+a_{nj}\alpha_n)=a_{ij},$$

所以：$a_{ij}=-a_{ji}$.

三．(10 分) 在复数域上求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 10\\ -4 & 3 & 7\\ -3 & 1 & 7\end{pmatrix}$ 的若当标准形 J，并求出可逆

矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=J$.

解： A 的若当标准形 $J=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$. 令 $P=(p_1,p_2,p_3)$ ，则有

$$Ap_1=2p_1,\quad Ap_2=p_1+2p_2,\quad Ap_3=p_2+2p_3;$$

$$\begin{pmatrix}-6&2&10\\-4&1&7\\-3&1&5\end{pmatrix}p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-6&2&10\\-4&1&7\\-3&1&5\end{pmatrix}p_2=p_1,\quad \begin{pmatrix}-6&2&10\\-4&1&7\\-3&1&5\end{pmatrix}p_3=p_2$$

解得： $p_1=(2,1,1)^T$ ， $p_2=(0,1,0)^T$ ， $p_3=(1,-2,1)^T$ ， $P=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$.

四. (10 分) 已知 $X=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\end{bmatrix}$ ， $f(X)=e^{x_1x_6}+\sin(x_2x_5)+x_3x_4$ ，求 $\dfrac{df}{dX}$.

解答： $\dfrac{df}{dX}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}&\dfrac{\partial f}{\partial x_2}&\dfrac{\partial f}{\partial x_3}\\\dfrac{\partial f}{\partial x_4}&\dfrac{\partial f}{\partial x_5}&\dfrac{\partial f}{\partial x_6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_6e^{x_1x_6}&x_5\cos(x_2x_5)&x_4\\x_3&x_2\cos(x_2x_5)&x_1e^{x_1x_6}\end{bmatrix}$.

五. (10 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-2&0&2\\-1&-1&3\end{pmatrix}$ ，求 $\sin(\frac{\pi}{4}A)$ ， e^A .

解： $|\lambda E-A|=(\lambda-2)^3$ ， A 的最小多项式 $\varphi(\lambda)=(\lambda-2)^2$.

待定系数一：

令 $\sin\frac{\pi}{4}\lambda=q(\lambda)(\lambda-2)^2+a+b\lambda$ ，则 $a+2b=1,\ b=0$ ， $\sin(\frac{\pi}{4}A)=E$ ；

令 $e^{\lambda}=q(\lambda)(\lambda-2)^2+a+b\lambda$ ，则 $a+2b=e^2,\ b=e^2$.

$$e^A=-e^2E+e^2A=e^2\begin{pmatrix}2&1&-1\\-2&-1&2\\-1&-1&2\end{pmatrix}.$$

待定系数二：

令 $\sin\frac{\pi}{4}\lambda=q(\lambda)(\lambda-2)^3+a+b\lambda+c\lambda^2$ ，则

$$\begin{cases}a+2b+4c=1\\b+4c=0\\2c=-\pi^2/16\end{cases}\Rightarrow a=1-\pi^2/8,\quad b=\pi^2/8,\quad c=-\pi^2/32;$$

$$\sin(\tfrac{\pi}{4}A)=E-\frac{\pi^2}{32}(4E-4A+A^2)=E.$$

令 $e^{\lambda}=q(\lambda)(\lambda-2)^3+a+b\lambda+c\lambda^2$，则

$$\begin{cases} a+2b+4c=e^2 \\ b+4c=e^2 \\ 2c=e^2 \end{cases} \Rightarrow a=e^2,\quad b=-e^2,\quad c=\frac{1}{2}e^2;$$

$$e^A=e^2(E-A+\frac{1}{2}A^2)=e^2\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

六.（10 分）设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，求 A 的奇异值分解.

解答一： $A^HA=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$， A 的奇异值为 $\sqrt{2},\sqrt{5}$；

$$\Sigma=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix},\quad V^HA^HAV=\begin{bmatrix} 2 & \\ & 5 \end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$U_1=AV\Sigma^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix};$$

$$U=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix};$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

解答二： $A^H A=\begin{bmatrix}2&0\\0&5\end{bmatrix}$，那么 A 的奇异值为 $\sqrt{2},\sqrt{5}$， $A^H A$ 对应于特征值 5，2 的标准特征向量为 $x_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, x_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$， $V=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$；

再计算 AA^H 的标准正交特征向量，解得分别与 5，2，0，0 对应的四个标准正交特征向量

$$\upsilon_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{bmatrix},\ \upsilon_2=\begin{bmatrix}0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\ \upsilon_3=\begin{bmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{bmatrix},\ \upsilon_4=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0&\frac{-2}{\sqrt{5}}&0\\0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix};$$

所以 $A=U\Delta V^H=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0&\frac{-2}{\sqrt{5}}&0\\0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0\\0&\sqrt{2}\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$.

七．（10 分）设 $0\neq A_i\in C^{n\times n}$， $\operatorname{rank}A_i=\operatorname{rank}A_i^2\ (i=1,2,\cdots,n)$，且当 $i\neq j$ 时 $A_iA_j=0\ (i,j=1,2,\cdots,n)$.试用归纳法证明存在同一个可逆阵 $P\in C^{n\times n}$ 使得对所有的 $i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 有 $A_i=a_iPE_{ii}P^{-1}$，其中 $a_i\in C$.

证明： $n=1$ 时，命题显然.
假设 $n\le k$ 时，命题成立.

当 $n=k+1$ 时，设 $\operatorname{rank}A_1=r$.

由若当分解 $A_1=P_1\begin{bmatrix}D_1&0\\0&0\end{bmatrix}P_1^{-1}$，其中 $D_1\in C^{r\times r}$ 可逆；

当 $j=2,\cdots,n$ 时，由 $A_1A_j=A_jA_1=0$ 可得

$A_j = P_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_j \end{bmatrix} P_1^{-1}$，$B_j \in \mathrm{C}^{(n-1)\times(n-1)}$（直接推出的 $\boldsymbol{B_j}$ 为 $(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})\times(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})$ 的）

再由 $A_i A_j = 0$ 得 $B_i B_j = 0$ $(\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = \mathbf{2}, \cdots, \boldsymbol{n})$；

$\boldsymbol{B_j} \neq \mathbf{0}$，$\mathbf{rank}\, \boldsymbol{B_j} = \mathbf{rank}\, \boldsymbol{B_j^2}$ 也是明显的.

由假设知存在可逆阵 $Q \in \mathrm{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ 使得 $B_j = a_j Q E_{jj} Q^{-1}$，其中 $a_j \in \mathrm{C}$，

$\boldsymbol{j} = \mathbf{2}, \cdots, \boldsymbol{n}$.

此时，再由 $A_1 A_j = A_j A_1 = 0$ 得到

$A_1 = P_1 \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_1^{-1} = a_1 P_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} P_1^{-1}$；

记 $P = P_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$，则

$$\begin{aligned} A_j &= P_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_j \end{bmatrix} P_1^{-1} = P_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_j Q E_{jj} Q^{-1} \end{bmatrix} P_1^{-1} \\ &= a_j P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{jj} \end{bmatrix} P^{-1} = a_j P\, E_{jj} P^{-1} \ \ (j = 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

由归纳原理知命题为真.