随机方法及应用

（随机过程）

- 11.2上午8：00-10：00考试
- 同时提交课程论文

复习提纲：

1.特征函数、母函数、条件期望；
2.随机过程的分布(一、二维) 及数学特征
重要过程中的维纳过程和正态过程；
3.泊松过程：重点齐次泊松过程的定义及基本
性质(分布、数字特征、时间间隔与等待时间
分布、到达时间的条件分布等)
4.马尔可夫链
(1)转移概率、初始概率与绝对概率、有限维分布；
(2)马氏链的状态分类、周期性、状态空间的分解、
遍历性与平稳分布。

5.连续时间的马尔可夫链.
(1)连续性条件、Q矩阵、前进与后退方程、
绝对概率所满足的方程、平稳分布；
(2)生灭过程，排队系统，例M/M/S、M/M/1，机器维修问题等。

6.平稳过程
(1)证明过程是平稳过程，相关函数的性质，
判断平稳过程是否各态历经性(定义和充要条件)
(2)随机分析：均方连续、均方导数、均方积分。

7.平稳过程的谱密度分析
(1)谱密度、平均功率，常用函数的付氏变换
关系，白噪声过程；
(2)平稳过程通过线性系统的分析
①线性时不变系统；
②频率响应与脉冲响应；
③输出的均值和相关函数；
④线性系统的谱密度、互谱密度。

复习提纲：

1.特征函数、母函数、条件期望；
2.随机过程的分布(一、二维) 及数学特征
重要过程中的维纳过程和正态过程；
3.泊松过程：重点齐次泊松过程的定义及基本
性质(分布、数字特征、时间间隔与等待时间
分布、到达时间的条件分布等)
4.马尔可夫链
(1)转移概率、初始概率与绝对概率、有限维分布；
(2)马氏链的状态分类、周期性、状态空间的分解、
遍历性与平稳分布。

概率论中的基本概念——

随机试验、样本空间、事件、概率、概率空间、条件概率、全概率。

随机变量及分布函数——

随机变量、分布函数、随机变量函数的分布、n维随机变量、边际分布、条件分布。

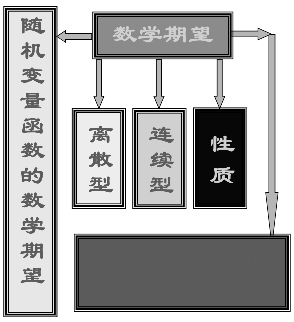
随机变量的数字特征——

统计平均、数学期望、方差、协方差、相关系数、相关性和统计独立。

随机变量的数字特征

- 统计平均与随机变量的数学期望
- 随机变量函数的期望值
- 方差
- 协方差
- 相关系数
- 独立与不相关

随机变量的数字特征



- **数学期望**

设随机变量X的分布函数为$F(x)$，若

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\mathrm{d}F(x)<\infty$$

则称 $$EX=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F(x)$$

为X的数学期望（均值）

- **对离散型随机变量X，分布律**

$P(X=x_k)=p_k$，k=1,2,…

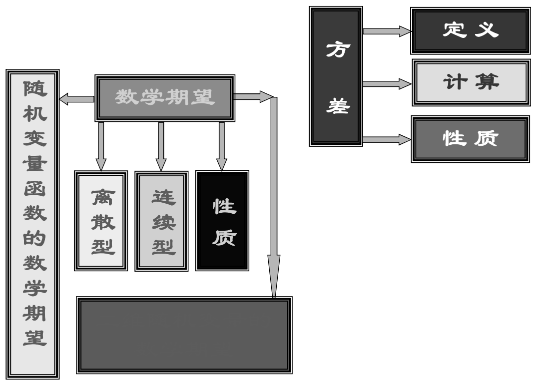
数学期望

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$$

- **对连续型随机变量X，概率密度$f(x)$的数学期望**

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x$$

随机变量的数字特征



二、方差

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

标准差 $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

❖ **随机变量的数学期望和方差的性质**

(1)$E(aX+bY)= aE(X) + bE(Y)$

(2) 若X,Y独立，则$E(XY)=E(X)E(Y)$

(3)若X,Y独立，则

$$D(aX+bY)= a^2D(X) + b^2D(Y)$$

(4)若$EX^2<\infty$, $EY^2<\infty$ ，则

$$(E\,XY)^2 \le E(X^2)\,E(Y^2)$$

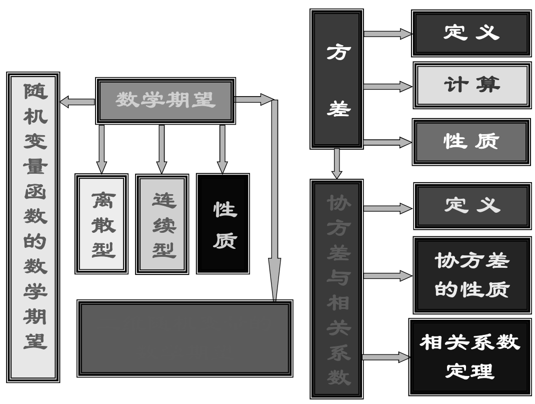
常见随机变量的数学期望、方差

分布	期望	方差
0-1分布	p	pq
二项分布	np	npq
泊松分布	λ	λ
几何分布	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$

常见随机变量的数学期望、方差

分布	期望	方差
均匀分布	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
指数分布	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

随机变量的数字特征



三、协方差

X,Y的协方差

$$B_{XY} = E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

四、相关系数

$$\rho_{XY}=\frac{B_{XY}}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

ρ_{XY}称为归一化的协方差系数或相关系数。

$$-1\le\rho_{XY}\le 1$$

相关系数 ρ_{XY}表示X，Y之间的线性相关程度的 大小

若ρ_{XY}＝0，则称随机变量X和Y不相关。

随机过程的数字特征

- 均值函数
- 方差函数
- 协方差函数
- 相关函数
- 互相关函数

一、均值函数

$$m_X(t)=EX(t)\,,t\in T$$

二、方差函数

$$D_X(t)=B_x(t,\ t)$$

$$=E[\left(X(t)-m_x(t)\right)^2]$$

$$=E[(X(t)-EX(t))^2]\ ,\quad t\in T$$

三、协方差函数

$$B_X(s,t)=E[(X(s)-m_x(s))(X(t)-m_x(t))]$$

$$=E[(X(s)-EX(s))(X(t)-EX(t))]$$

$$s,t\in T$$

例1　已知随机过程X(t)的均值函数$m_X(t)$和协方差函数$B_X(t_1,t_2)$ ，$\varphi(t)$为普通函数，令$Y(t)=X(t)+\varphi(t)$,求随机过程$Y(t)$ 的均值函数和协方差函数。

解　$m_Y(t)=EY(t)$

$$=E[X(t)+\varphi(t)]$$

$$=EX+E\varphi$$

$$=m_X(t)+\varphi(t)$$

$$B_Y(t_1,t_2)=R_Y(t_1,t_2)-m_Y(t_1)m_Y(t_2)$$
$$=E[Y(t_1)Y(t_2)]-m_Y(t_1)m_Y(t_2)$$
$$=E[(X(t_1)+\varphi(t_1))(X(t_2)+\varphi(t_2))]$$
$$-\left[m_X(t_1)+\varphi(t_1)\right]\left[m_X(t_2)+\varphi(t_2)\right]$$
$$=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)$$
$$=B_X(t_1,t_2)$$

例2　设X(t)=Ycos(θt)+Zsin(θt), t>0，Y, Z相互独立，EY=EZ=0，DY=DZ=σ^2。求{X(t), t>0}的均值函数和协方差函数。

解
$$m_X(t)=EX(t)$$
$$=E[Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t)]$$
$$=\cos(\theta t)EY+\sin(\theta t)EZ$$
$$=0$$

$$B_X(s,t)=E[(X(s)-m_x(s))(X(t)-m_x(t))]$$
$$=E[(X(s)-EX(s))(X(t)-EX(t))]$$
$$=E[X(s)X(t)]-EX(s)EX(t)$$
$$=E[X(s)X(t)]$$
$$=E[(Y\cos(\theta s)+Z\sin(\theta s))(Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t))]$$
$$=E[(\cos(\theta s)\cos(\theta t)Y^2+\cos(\theta s)\sin(\theta t)YZ)$$
$$+\sin(\theta s)\cos(\theta t)YZ\ +\sin(\theta s)\sin(\theta t)Z^2)]$$

EY=EZ=0
DY=DZ=σ^2

$$=\cos(\theta s)\cos(\theta t)E(Y^2)+\cos(\theta s)\sin(\theta t)E(YZ)$$
$$+\sin(\theta s)\cos(\theta t)E(YZ)\ +\sin(\theta s)\sin(\theta t)E(Z^2)$$

0

σ^2

$$B_X(s,t)=E[(X(s)-m_x(s))(X(t)-m_x(t))]$$
$$=E[(X(s)-EX(s))(X(t)-EX(t))]$$
$$=E[X(s)X(t)]-EX(s)EX(t)$$
$$=E[X(s)X(t)]$$
$$=E[(Y\cos(\theta s)+Z\sin(\theta s))(Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t))]$$
$$=E[(\cos(\theta s)\cos(\theta t)Y^2+\cos(\theta s)\sin(\theta t)YZ)$$
$$+\sin(\theta s)\cos(\theta t)YZ\ +\sin(\theta s)\sin(\theta t)Z^2)]$$
$$=\cos(\theta s)\cos(\theta t)E(Y^2)+\cos(\theta s)\sin(\theta t)E(YZ)$$
$$+\sin(\theta s)\cos(\theta t)E(YZ)\ +\sin(\theta s)\sin(\theta t)E(Z^2)$$
$$=\cos(\theta s)\cos(\theta t)\sigma^2+\sin(\theta s)\sin(\theta t)\sigma^2$$
$$=\sigma^2\cos[(s-t)\theta]$$

例3　设随机过程X(t)=Vt+b, t>0，b为常数，V服从正态分布N(0,1)的随机变量。

求X(t)的一维概率密度、均值和相关函数。

解

因X(t)=V(t)+b，V~N(0,1)，

故X(t)服从正态分布，且

$$EX(t)=E\left(Vt+b\right)=b, DX\left(t\right)=D\left(Vt+b\right)=t^2$$

故X(t)的一维概率密度为

$$f_t\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left|t\right|}e^{-\frac{(x-b)^2}{2t^2}}, x\in R$$

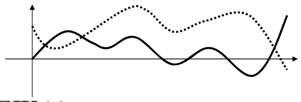
- 均值函数：

$$m(t)=EX\left(t\right)=b$$

- 相关函数：

$$R(t_1,t_2)=EX\left(t_1\right)X\left(t_2\right)=E\left(Vt_1+b\right)\left(Vt_2+b\right)$$
$$=E\left(V^2t_1t_2+bVt_1+bVt_2+b^2\right)$$
$$=t_1t_2+b^2$$

例4　设$X(t)$为信号过程，$Y(t)$为噪声过程，$W(t)=X(t)+Y(t)$，求$W(t)$的均值函数和相关函数。



解

$$m_W(t)=EW(t)$$
$$=E[X(t)+Y(t)]$$
$$=EX(t)+EY(t)$$
$$=m_X(t)+m_Y(t)$$

$$R_W(s,t)=E[W(s)W(t)]$$
$$=E[(X(s)+Y(s))(X(t)+Y(t))]$$
$$=E[X(s)X(t)+X(s)Y(t)+Y(s)X(t)+Y(s)Y(t)]$$
$$=E[X(s)X(t)]+E[X(s)Y(t)]+E[Y(s)X(t)]+E[Y(s)Y(t)]$$
$$=R_X(s,t)+R_{XY}(s,t)+R_{YX}(s,t)+R_Y(s,t)$$

复习提纲：

1.特征函数、母函数、条件期望；

2.随机过程的分布**(**一、二维**)** 及数学特征
重要过程中的维纳过程和正态过程；

3.泊松过程：重点齐次泊松过程的定义及基本性质**(**分布、数字特征、时间间隔与等待时间分布、到达时间的条件分布等**)**

4.马尔可夫链

(1)转移概率、初始概率与绝对概率、有限维分布；

(2)马氏链的状态分类、周期性、状态空间的分解、遍历性与平稳分布。

3.1 泊松过程的定义

- **定义3.1　如果 $N(t)$ 表示到时刻 t为止已发生的事件A的总数，且$N(t)$满足条件**

(1) $N(t)\geq 0$；

(2) $N(t)$取整数;

(3)若$s<t$，则$N(s)\leq N(t)$;

(4)当$s<t$时，$N(t)-N(s)$等于区间$(s, t]$中发生事件A的次数。

则称，随机过程$\{N(t), t\geq 0\}$是计数过程

- 独立增量计数过程

对于$t_1<t_2<\ldots<t_n$，$N(t_2)-N(t_1)$, $N(t_3)-N(t_2)$, …, $N(t_n)-N(t_{n-1})$ 独立

- 平稳增量计数过程

在$(t, t+s]$内$(s>0)$，事件A发生的次数 $N(t+s)-N(t)$仅与时间间隔s有关，而与初始时刻t无关

- **定义3.2　如果$X(t)$满足**

(1) $X(0)=0$;

(2) $X(t)$是独立增量过程;

(3)在任一长度为t的区间中，事件A发生的次数服从参数$\lambda t>0$的泊松分布，即对任意$s, t\geq 0$，有

$$P\{X(t+s)-X(s)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},$$
$$n=0,1,2,\cdots$$

称计数过程$\{X(t), t\geq 0\}$是参数$\lambda>0$的泊松过程

其中条件(3)：
在任一长度为t的区间中，事件A发生的次数服从参数$\lambda t>0$的泊松分布，即对任意$s, t \geq 0$，有

$$P\left\{X(t+s)-X(s)=n\right\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},$$
$$n=0,1,2,\cdots$$

可以知道泊松过程是平稳增量过程，且 E[X(t)]= λt。

由于λ= E[X(t)]/t表示单位时间内事件A发生的平均个数，则称λ为此过程的速率或强度

❖ 定义3.3：
如果$X(t)$满足
(1) $X(0)=0$；
(2) $X(t)$是平稳、独立增量过程；
(3) $X(t)$满足下列两式

$$P\left\{X(t+h)-X(t)=1\right\}=\lambda h+o(h)$$
$$P\left\{X(t+h)-X(t)\geq 2\right\}=o(h)$$

(参数λ>0)

称计数过程{$X(t)$，$t\geq 0$ }是泊松过程，

可以证明，泊松过程的两种定义是等价的。

3.2 泊松过程的性质

❖ 一、数字特征

设{$X(t)$, $t \geq 0$}是参数为λ的泊松过程，
对任意t, $s\in$[0, +∞)，若$s < t$，则有

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[X(t)-X(0)]=\lambda t$$
$$\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=D[X(t)-X(0)]=\lambda t$$
$$E[X(t)-X(s)]=D[X(t)-X(s)]=\lambda(t-s)$$

相关函数

$$\begin{aligned}R_X(s,t)&=E[X(s)X(t)]\\&=E[X(s)(X(t)-X(s)+X(s))]\\&=E[X(s)(X(t)-X(s))]+E[(X(s))^2]\\&=E[(X(s))]E[(X(t)-X(s))]\\&\quad+D[X(s)]+(E[X(s)])^2\\&=\lambda s\lambda(t-s)+\lambda s+(\lambda s)^2\\&=\lambda^2 st+\lambda s\\&=\lambda s(\lambda t+1)\end{aligned}$$

协方差函数

$$\begin{aligned}B_X(s,t)&=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t)\\&=\lambda s\left(\lambda t+1\right)-\lambda s\lambda t\\&=\lambda s\end{aligned}$$

一般来说，若$t<s$,

则泊松过程的协方差函数$B_X(s,t)=\lambda t$,

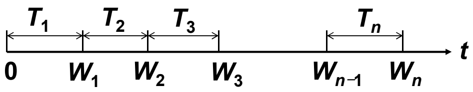
从而

$$B_X(s,t)=\lambda\min(s,t)$$

•二、泊松过程的时间间隔与等待时间的分布

设{$X(t)$, $t\geq 0$}是参数为λ的泊松过程，
$X(t)$表示到t时刻为止事件A发生的次数，
W_n表示第n次事件A发生的时间($n \geq 1$)，
也称为第n次事件A的等待时间, 或到达时间,
T_n表示第$n-1$次事件A发生到第n次事件A发生的时间间隔。

等待时间W_n与时间间隔T_n均为随机变量



- **时间间隔T_n的分布**

  定理3.2设$\{X(t), t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程，$\{T_n, n\geq 1\}$是相应第n-1次事件A发生到第n次事件A发生的时间间隔序列，则随机变量$T_n, n=1,2\ldots$独立服从均值为1/λ的指数分布

时间间隔T_n的分布为

$$F_{T_n}(t)=P\{T_n\leq t\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, t\geq 0\\ 0 \quad , \quad t<0\end{cases}$$

概率密度为

$$f_{T_n}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, t\geq 0\\ 0 \quad , \quad t<0\end{cases}$$

•**等待时间W_n的分布**

定理3.3设$\{X(t), t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程，$\{W_n, n\geq 1\}$是相应等待时间序列，则W_n服从参数为n与λ的Γ分布，概率密度为

$$f_{W_n}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, t\geq 0\\ 0 \quad , \quad t<0\end{cases}$$

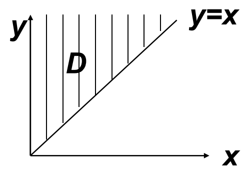
例 5　设$\{X_1(t), t\geq 0\}$和$\{X_2(t), t\geq 0\}$是两个相互独立的泊松过程，它们在单位时间内平均出现的事件数分别为λ_1和λ_2。记$W_k^{(1)}$为过程$X_1(t)$的第k次事件到达时间，记$W_1^{(2)}$为过程$X_2(t)$的第1次事件到达时间，求$P\{W_k^{(1)}<W_1^{(2)}\}$即第一个泊松过程第k次事件发生比第二个泊松过程第1次事件发生早的概率。

解　设$W_k^{(1)}$的取值为x，$W_1^{(2)}$的取值为y，

$$f_{W_k^{(1)}}(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\dfrac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!}, x\geq 0\\ 0 \quad , \quad x<0\end{cases}$$

$$f_{W_1^{(2)}}(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, y\geq 0\\ 0 \quad , \quad y<0\end{cases}$$

$$P\{W_k^{(1)}<W_1^{(2)}\}=\iint_D f(x,y)dxdy$$



其中D为由y=x与y轴所围的区域

$f(x, y)$为 $W_k^{(1)}$与 $W_1^{(2)}$ 的联合概率密度

由于$X_1(t)$与$X_2(t)$独立，故

$$f(x,y)=f_{W_k^{(1)}}(x)f_{W_1^{(2)}}(y)$$

$$
\begin{aligned}
&P\left\{W_k^{(1)} < W_1^{(2)}\right\} \\
&= \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\,dy\,dx \\
&= \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!}\int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\,dx \\
&= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k
\end{aligned}
$$

- **定理3.4**
- **设$\{X(t), t\geq 0\}$是泊松过程，已知在$[0, t]$内事件A发生n次，则这n次事件的到达时间$W_1 < W_2 < \ldots < W_n$的条件概率密度为**

$$
f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n}, 0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t \\ 0，其他\end{cases}
$$

例6 已知商店上午9：00开门，顾客到达某商店服从参数λ=4人/小时的泊松过程。试求到9：30时仅到一位顾客，而到11：30时总计已达5位顾客的概率。

解：设$X(t)$ 表示在时间t时到达的顾客数

$$
\begin{aligned}
&P(X(0.5)=1, X(2.5)=5) \\
&= P(X(0.5)=1, X(2.5)-X(0.5)=4) \\
&= P(X(0.5)=1)P(X(2)=4) \\
&= \frac{(4\times 0.5)^1}{1!}e^{-4\times 0.5}\cdot\frac{(4\times 2)^4}{4!}e^{-4\times 2} \\
&\approx 0.0155
\end{aligned}
$$

$P\{X(t+s)-X(s)=n\} = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$,
$n=0,1,2,\cdots$

- **例7 设$\{X(t), t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程，$\{T_n, n\geq 1\}$是相应第n-1**次事件**A**发生到第**n**次事件**A**发生**的时间间隔序列，**
- **则求证：随机变量T_n, n=1,2…独立服从均值为1/λ的指数分布**

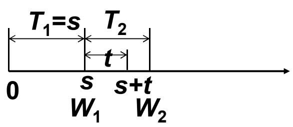
证 (1)n=1

事件$\{T_1 > t\}$发生当且仅当在$[0, t]$内没有事件发生

$$
\begin{aligned}
P\{T_1 > t\} &= P\{X(t)=0\} \\
&= P\{X(t)-X(0)=0\} = e^{-\lambda t} \\
F_{T_1}(t) &= P\{T_1 \leq t\} \\
&= 1-P\{T_1 > t\} = 1-e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

T_1服从均值为1/λ的指数分布

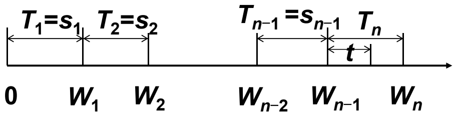
(2)n=2



$$
\begin{aligned}
&P\{T_2 > t \mid T_1 = s_1\} \\
&= P\{在(s_1, s_1+t]内没有事件发生 \mid T_1 = s_1\} \\
&= P\{在(s_1, s_1+t]内没有事件发生\} \quad （增量的独立性） \\
&= P\{X(s_1+t)-X(s_1)=0\} \\
&= P\{X(t)-X(0)=0\} \quad （平稳增量过程） \\
&= P\{X(t)=0\} = e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

$$
F_{T_2}(t) = P\{T_2 \leq t\} = 1-P\{T_2 > t\} = 1-e^{-\lambda t}
$$

(3)以此类推，对任意$n \ge 1$



$P\{T_n > t \mid T_1 = s_1, \cdots, T_{n-1} = s_{n-1}\}$

$= P\{X(s_1 + \cdots + s_{n-1} + t) - X(s_1 + \cdots + s_{n-1}) = 0\}$

$= e^{-\lambda t}$

$F_{T_n}(t) = P\{T_n \le t\} = 1 - P\{T_n > t\} = 1 - e^{-\lambda t}$

这就证明了到达时间间隔序列 T_n 是相互独立同分布的随机变量序列，且都具有相同均值为$1/\lambda$的指数分布。

时间间隔T_n的分布为

$$F_{T_n}(t) = P\{T_n \le t\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

概率密度为

$$f_{T_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

例8 甲、乙两路公共汽车都通过某一车站，两路汽车的到达分别服从10分钟1辆（甲），15分钟1辆（乙）的泊松分布。假定车总不会满员，试问可乘坐甲或乙两路公共汽车的乘客在此车站所需等待时间的概率分布及其期望。

反映甲、乙两路公共汽车到达情况的泊松分布

$X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 的速率分别为 $\lambda_1 = 1/10$，$\lambda_2 = 1/15$

下面证明两路车混合到达过程$X(t)$服从速率为

$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松分布

事实上 $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$ 是独立增量

且 $X(t+s) - X(t)$ 是相互独立地服从泊松分布的随机变量

$X_1(t+s) - X_1(t)$ 及 $X_2(t+s) - X_2(t)$ 的和，

所以由泊松过程的定义可知

$X(t)$服从均值为 λt 的泊松分布。

因此 $X(t)$ 服从速率为 $\lambda = 1/10 + 1/15 = 1/6$ 的泊松过程。

由定理1知公共汽车的到达时间间隔服从均值为6分钟的指数分布。 再由指数分布的无记忆性，

这位乘客的等待时间也服从均值为6分钟的指数分布。

例9 设移民到某地区定居的户数是一Poisson过程，平均每周有2户定居，即 λ=2.
如果每户的人口数是随机变量
一户4人的概率为1/6，一户3人的概率为1/3，
一户2人的概率为1/3，一户1人的概率为1/6，
且每户的人口数是相互独立的，
求在五周内移民到该地区的人口数的数学期望和方差.

设N(t)为在时间[0，t]内移民户数，Y_i表示每户的人口数，则在[0，t]内移民人数

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

是一个复合泊松过程。 Y_i是互相独立且相同分布的随机变量，其分布列：

$P\{Y=1\} = P\{Y=4\} = 1/6 \quad P\{Y=2\} = P\{Y=3\} = 1/3$

$EY = 15/6, \quad EY^2 = 43/6$

根据题意知N（t）在5周内是强度为10的泊松过程，由定理3.6有：

定理**3.6**：

❖ **设** $X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, t\ge 0$ **是复合泊松过程，则**

(1){$X(t)$，$t\ge 0$}是独立增量过程；

(2)$X(t)$的特征函数 $g_{X(t)}(u)=\exp\{\lambda t[g_Y(u)-1]\}$

λ是事件的到达率，$g_Y(u)$是随机变量Y_1的特征函数；

(3)若 $E(Y_1^2)<\infty$ **，则**

$$E[X(t)]=\lambda tE[Y_1], D[X(t)]=\lambda tE[Y_1^2]$$

设N(t)为在时间[0，t]内移民户数，Y_i表示每户的人口数，则在[0，t]内移民人数

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

是一个复合泊松过程。Y_i是互相独立且相同分布的随机变量，其分布列：

$$P\{Y=1\}=P\{Y=4\}=1/6 \qquad P\{Y=2\}=P\{Y=3\}=1/3$$

$$EY=15/6,\quad EY^2=43/6$$

根据题意知N（t）在5周内是强度为10的泊松过程，由定理3.6有：

$$m_x(5)=10\times EY_1=10\times\frac{15}{6}=25 \qquad \sigma_x(5)=10\times EY_1^2=10\times\frac{43}{6}=\frac{215}{3}$$

复习提纲：

1.特征函数、母函数、条件期望；

2.随机过程的分布(一、二维) 及数学特征
重要过程中的维纳过程和正态过程；

3.泊松过程：重点齐次泊松过程的定义及基本性质(分布、数字特征、时间间隔与等待时间分布、到达时间的条件分布等)

4.马尔可夫链
(1)转移概率、初始概率与绝对概率、有限维分布；
(2)马氏链的状态分类、周期性、状态空间的分解、遍历性与平稳分布。

4.1 马尔可夫链与转移概率

定义　设 {$X(t)$，$t\in T$}为随机过程，若对任意正整数n及$t_1<t_2<\ldots<t_n$，

$P\{X(t_1)=x_1,\ldots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}>0$，且条件分布

$P\{X(t_n)\le x_n|X(t_1)=x_1,\ldots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$

$= P\{X(t_n)\le x_n|X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$，

则称{$X(t)$，$t\in T$}为马尔可夫过程。

☆**若$t_1,t_2,\ldots,t_{n-2}$表示过去，t_{n-1}表示现在，t_n表示将来，马尔可夫过程表明：在已知现在状态的条件下，将来所处的状态与过去状态无关。**

❖ **定义　称条件概率$p_{ij}(n)= P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$ 为马尔可夫链{X_n，$n\in T$}在时刻n的一步转移概率，简称转移概率，其中$i,j\in I$。**

❖ **定义　若对任意的$i,j\in I$，马尔可夫链{$X_n,n\in T$}的转移概率$p_{ij}(n)$与n无关，则称马尔可夫链是齐次的，并记$p_{ij}(n)$为p_{ij}。**

❖ **齐次马尔可夫链具有平稳转移概率，状态空间I={1, 2, 3, …}，一步转移概率为**

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

❖ **转移概率性质**

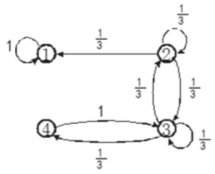
(1) $p_{ij}\ge 0, i,j\in I$　**(2)** $\sum_{j\in I} p_{ij}=1, i\in I$

P称为随机矩阵

例 具有吸收壁和反射壁的随机游动

状态空间{1,2,3,4}，1为吸收壁，4为反射壁

状态转移图 **状态转移矩阵**



$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\ 0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&0&1&0\end{pmatrix}$$

- **定义 称条件概率 $p_{ij}^{(n)}=P\{X_{m+n}=j|X_m=i\}$ 为马尔可夫链$\{X_n, n\in T\}$的n步转移概率($i,j\in I,\ m\geq 0,\ n\geq 1$)。**
- **n步转移矩阵** $P^{(n)}=\left(p_{ij}^{(n)}\right)$

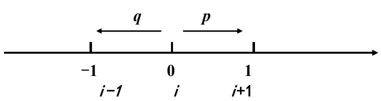
其中 $p_{ij}^{(n)}\geq 0,\ \sum_{j\in I}p_{ij}^{(n)}=1,\ i,j\in I$

$P^{(n)}$也为随机矩阵

当$n=1$时，$p_{ij}^{(1)}=p_{ij}$，$P^{(1)}=P$

当$n=0$时，规定$p_{ij}^{(0)}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$

例10 无限制随机游动



一步转移概率:

$$p_{i,i+1}=p$$

$$p_{i,i-1}=q=1-p$$

$$p_{ii}=0,\ p_{ij}=0,\ |i-j|\geq 2$$

n步转移概率:

i经过k步进入j,向右移了x步,向左移了y步则

$$\begin{cases}x+y=k\\ x-y=j-i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{k+(j-i)}{2}\\ y=\dfrac{k-(j-i)}{2}\end{cases}$$

$$p_{ij}^{(k)}=\begin{cases}C_k^x p^x q^y, & k+(j-i)\text{为偶数}\\ 0, & k+(j-i)\text{为奇数}\end{cases}$$

例11 一个圆周上共有N格（按顺时针排列），一个质点在该圆周上作随机游动，移动的规则是：质点总是以概率p顺时针游动一格， 以概率 $q=1-p$ 逆时针游动一格。试求转移概率矩阵。 $I=\{1,2,\dots,N\}$

$$P_1=\begin{bmatrix}0&p&0&0&\dots&0&q\\ q&0&p&0&\dots&0&0\\ 0&q&0&p&\dots&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&\dots&0&q&0&p\\ p&0&\dots&0&0&q&0\end{bmatrix}$$

例12：设$\{X_n, n\geq 0\}$是描述天气变化的齐次马尔科夫链，状态空间为$S=\{0,1\}$,其中**0**,**1**分别表示有雨和无雨，**X**的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0.7&0.3\\ 0.4&0.6\end{pmatrix}$$

试对任意的$i,j\in S$,计算三步转移概率 $p_{ij}^{(3)}$

$$P^2=\begin{bmatrix}0.61&0.39\\ 0.52&0.48\end{bmatrix}$$

$$P^3=P^2\cdot P=\begin{bmatrix}0.583&0.417\\ 0.556&0.444\end{bmatrix}$$

例13　设$\{X_n, n\ge 0\}$是具有三个状态0,1,2的齐次Markov链，一步转移矩阵为：

$P\{X_0=0\}=P\{X_0=1\}=\frac{1}{2}$

试求：

(1)　$P\{X_0=0, X_1=1, X_3=1\}$；

(2)　$P\{X_3=1, X_1=1 \mid X_0=0\}$

(3)　$P\{X_3=1\}$

(3)　$P\{X_0=0 \mid X_3=1\}$

$$P=\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

解：

$$P^2=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{16} & \frac{7}{16} \end{bmatrix} \qquad P^3=\begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{16} & \frac{3}{32} & \frac{15}{32} \\ \frac{3}{32} & \frac{45}{64} & \frac{13}{64} \end{bmatrix}$$

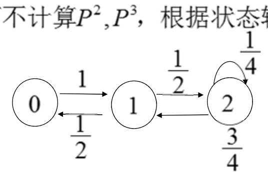
$(1) P\{X_0=0, X_1=1, X_3=1\}=P(X_0=0)\ p_{01}p_{11}^{(2)}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{8}=\frac{7}{16}$

(2)　$P\{X_3=1, X_1=1 \mid X_0=0\}=p_{01}p_{11}^{(2)}=\frac{7}{8}$

(3)　$P\{X_3=1\}=P(X_0=0)p_{01}^{(3)}+P(X_0=1)p_{11}^{(3)}+P(X_0=2)p_{21}^{(3)}=\frac{31}{64}$

$(4) P\{X_0=0 \mid X_3=1\}=\frac{P\{X_3=1 \mid X_0=0\}P(X_0=0)}{P(X_3=1)}=\frac{\frac{1}{2}p_{01}^{(3)}}{\frac{31}{64}}=\frac{28}{31}$

也可不计算P^2, P^3，根据状态转移图和C－K方程：



$p_{11}^{(2)}=p_{10}p_{01}+p_{12}p_{21}=\frac{7}{8}$　　$p_{01}^{(3)}=p_{01}p_{11}^{(2)}=\frac{7}{8}$

$p_{11}^{(3)}=p_{12}p_{22}p_{21}=\frac{3}{32}$

例14 设$\{X_n, n\ge 0\}$是具有三个状态0，1，2的齐次马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

初始分布 $q_i^{(0)}=\frac{1}{3}, i=0,1,2,$　试求：

$(1) P(X_0=0, X_2=1)$;

$(2) P(X_2=1)$.

解　(1)　$P(X_0=0, X_2=1)=P(X_0=0)\cdot P(X_2=1|X_0=0)$

$$=\frac{1}{3}\cdot p_{01}^{(2)}$$

其中$p_{01}^{(2)}$为一个两步转移概率，在两步转移概率矩阵中是第一行第二列的元素.

$\because\ P^{(2)}=P^2$

$$=\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$\therefore\ p_{01}^{(2)}=\frac{5}{16}$

$\therefore\ P(X_0=0, X_2=1)$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{5}{16}=\frac{5}{48}$$

(2)　$P(X_2=1)=\sum_i q_i^{(0)}\cdot p_{i1}^{(2)}$

$$=\frac{1}{3}(p_{01}^{(2)}+p_{11}^{(2)}+p_{21}^{(2)})$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{5}{16}+\frac{1}{2}+\frac{9}{16})$$

$$=\frac{11}{24}$$

例15　某同学周一上午是否上课，取决于当天情绪及天气情况，且当天是否下雨与心情好坏没有关系。若下雨且心情好，则50%的可能会上课；若不下雨且心情好，则有10%的可能性不上课；若不下雨且心情不好则有40%的可能性上课；若下雨且心情不好，则有90%的可能不会上课。
假设当天下雨的概率为30%，该同学当天心情好的概率为20%，

试计算该同学周一上课的可能性是多大？

分析：
天气情况用随机变量**X**表示，“**0**”表示下雨，“**1**”表示不下雨；心情好坏用**Y**表示，“**0**”表示心情好用“**0**”表示，心情不好用“**1**”表示；是否上课用随机变量**Z**表示，“**0**”表示上课，“**1**”表示不上课。由题意可知

$$P[Z=0|X=0,Y=0]=0.5，P[Z=1|X=0,Y=0]=0.5$$
$$P[Z=1|X=1,Y=0]=0.1，P[Z=0|X=1,Y=0]=0.9$$
$$P[Z=0|X=1,Y=1]=0.4，P[Z=1|X=1,Y=1]=0.6$$
$$P[Z=1|X=0,Y=1]=0.9，P[Z=0|X=0,Y=1]=0.1$$
$$P[X=0]=0.3，P[X=1]=0.7$$
$$P[Y=0]=0.2，P[Y=1]=0.8$$

即题目实际上给出了八个个条件概率和四个概率

$$\begin{aligned}P[Z=0]&=P[X=0]\cdot P[Y=0|X=0]\cdot P[Z=0|Y=0,X=0]\\&+P[X=0]\cdot P[Y=1|X=0]\cdot P[Z=0|Y=1,X=0]\\&+P[X=1]\cdot P[Y=0|X=1]\cdot P[Z=0|Y=0,X=1]\\&+P[X=1]\cdot P[Y=1|X=1]\cdot P[Z=0|Y=1,X=1]\end{aligned}$$

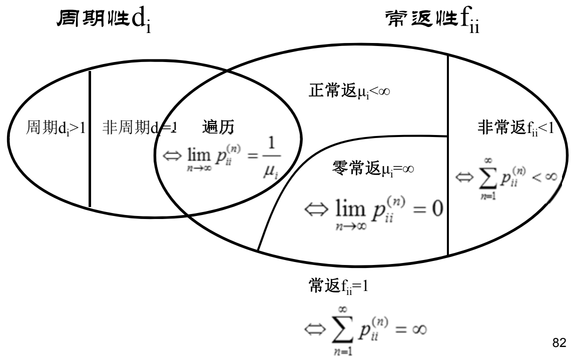
由于X，Y相互独立，则有

$$\begin{aligned}P[Z=0]&=P[X=0]\cdot P[Y=0]\cdot P[Z=0|Y=0,X=0]\\&+P[X=0]\cdot P[Y=1]\cdot P[Z=0|Y=1,X=0]\\&+P[X=1]\cdot P[Y=0]\cdot P[Z=0|Y=0,X=1]\\&+P[X=1]\cdot P[Y=1]\cdot P[Z=0|Y=1,X=1]\end{aligned}$$

$$P[Z=0]=0.3\times0.2\times0.5+0.3\times0.8\times0.1+0.7\times0.2\times0.9+0.7\times0.8\times0.1$$

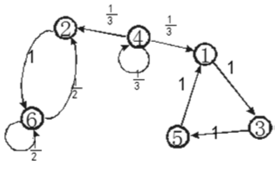
=0.236

4.3 状态空间的分解



例16　马氏链的状态空间*I* ={1,2,3,4,5,6}，状态转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$



分解此链并指出各状态的常返性及周期性

- **解　由状态转移图知**

$$f_{11}^{(3)}=1, f_{11}^{(n)}=0, n\neq 3, \text{故}\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty} nf_{11}^{(n)}=3$$

可见1为正常返状态且周期为3，含1的基本常返闭集为 $C_1=\{k:1\to k\}=\{1,3,5\}$，从而状态3及5也为正常返状态且周期为3。

同理可知6为正常返状态，$\mu_6=3/2$，周期为1。含6的基本常返闭集为 $C_2=\{k:6\to k\}=\{2,6\}$，可见2，6为遍历状态。

由于$f_{44}^{(1)}=\frac{1}{3}, f_{44}^{(n)}=0, n\neq 1$, 故4非常返周期为1,

于是I可分解为

$$I=D\cup C_1\cup C_2=\{4\}\cup\{1,3,5\}\cup\{2,6\}$$

❖ **定义4.10 称矩阵$A=(a_{ij})$为随机矩阵，若**

$$a_{ij}\ge 0\text{且}\sum_j a_{ij}=1$$

显然k步转移矩阵 $P^{(k)}=\left(p_{ij}^{(k)}\right)$ **为随机矩阵。**

例17 设马尔可夫链的转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0.7 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\\ 0.05 & 0.05 & 0.9\end{pmatrix}$$

求马尔可夫链的平稳分布及各状态的平均返回时间。

❖ **解 因为马尔可夫链是不可约非周期有限状态的，所以平稳分布存在，设$\pi=(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$，则$\pi=\pi P$，$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$即**

$$\begin{cases}\pi_1=0.7\pi_1+0.1\pi_2+0.05\pi_3\\ \pi_2=0.1\pi_1+0.8\pi_2+0.05\pi_3\\ \pi_3=0.2\pi_1+0.1\pi_2+0.9\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi_1=0.1765\\ \pi_2=0.2353\\ \pi_3=0.5882\end{cases}$$

各状态的平均返回时间为

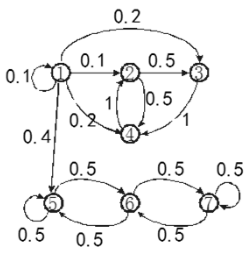
$$\mu_1=\frac{1}{\pi_1}=5.67,\ \mu_2=\frac{1}{\pi_2}=4.25,\ \mu_3=\frac{1}{\pi_3}=1.70$$

例18 设马尔可夫链转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

求每一个不可约闭集的平稳分布。

❖ **解 从状态转移图看出，状态空间可分解为两个不可约常返闭集C_1={2,3,4}和C_2={5,6,7}，一个非常返集N={1}。在常返集上求平稳分布。**



在C_1上，对应的转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad\begin{cases}\pi_2=\pi_4\\ \pi_3=0.5\pi_2\\ \pi_4=0.5\pi_2+\pi_3\\ \pi_2+\pi_3+\pi_4=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi_2=0.4\\ \pi_3=0.2\\ \pi_4=0.4\end{cases}$$

C_1上的平稳分布为{0, 0.4, 0.2, 0.4, 0, 0, 0}

同理可求得C_2上的平稳分布为

{0, 0, 0, 0, 1/3, 1/3, 1/3}

j常返		j非常返
零常返	正常返	
$p_{jj}^{(n)} \to 0$	$p_{jj}^{(nd)} \to \frac{d}{\mu_j}$	$p_{jj}^{(n)} \to 0$
$p_{ij}^{(n)} \to 0$	$p_{ij}^{(nd+r)} \to f_{ij}(r)\frac{d}{\mu_j}$	$p_{ij}^{(n)} \to 0$
$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \to 0$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \to \frac{f_{ij}}{\mu_j}$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \to 0$

马尔可夫过程（无后效性）

马尔可夫链（状态、时间离散）

齐次马尔可夫链（转移概率与时间无关）

有限状态	不可约性	周期性	常返性	结　论
			零常返	存在无限个零常返状态
√	√			正常返
	√	×	正常返	存在平稳分布
√	√	×		存在平稳分布
	√		零常返、非常返	不存在平稳分布

5.连续时间的马尔可夫链.

(1)连续性条件、**Q**矩阵、前进与后退方程、绝对概率所满足的方程、平稳分布；

(2)生灭过程，排队系统，例**M/M/S**、**M/M/1**，机器维修问题等。

6.平稳过程

(1)证明过程是平稳过程，相关函数的性质，判断平稳过程是否各态历经性**(**定义和充要条件**)**

(2)随机分析：均方连续、均方导数、均方积分。

5.1 连续时间马尔可夫链

定义5.1 设随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$，状态空间$I=\{0,1,2,\ldots\}$，若对任意$0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$及非负整数$i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$，有

$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} | X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2, \ldots, X(t_n)=i_n\} = P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} | X(t_n)=i_n\},$$

则称$\{X(t), t \geq 0\}$为连续时间马尔可夫链。

转移概率：在s时刻处于状态i，经过时间t后转移到状态j的概率

$$p_{ij}(s,t)= P\{X(s+t)=j | X(s)=i\}$$

定义5.2 齐次转移概率 $p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t)$

(与起始时刻s无关，只与时间间隔t有关)

- **转移概率矩阵$P(t)=(p_{ij}(t))$，$i,j \in I$，$t \geq 0$**

性质：若τ_i为过程在状态转移之前停留在状态i的时间，则对$s, t \geq 0$有

(1) $P\{\tau_i > s+t \mid \tau_i > s\} = P\{\tau_i > t\}$

(2) **τ_i服从指数分布**

注：

向后方程的矩阵形式：$P'(t)=QP(t)$

向前方程的矩阵形式：$P'(t)=P(t)Q$

$$P = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) & \cdots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots \\ p_{20}(t) & p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad P'(t) = \left(p'_{ij}(t)\right)$$

$$Q = \begin{pmatrix} -q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

若Q是一个有限矩阵，则有

$$P(t) = e^{Q(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Qt)^n}{n!}$$

例19：一质点在1，2，3点上做随机游动，若在时刻t质点位于这三个点之一，则在[t,t+h)内，它以概率 $\frac{1}{2}h+o(h)$ 分别转移到其他二点之一。

试求质点随机游动的柯尔莫哥洛夫方程、转移概率及平稳分布。

向前方程：

$$p_{ij}'(t)=-p_{ij}(t)+\frac{1}{2}p_{i,j-1}(t)+\frac{1}{2}p_{i,j+1}(t)$$

由于状态空间I=｛1，2，3｝，所以

$$p_{ij}(t)+p_{i,j-1}(t)+p_{i,j+1}(t)=1$$

$$p_{ij}'(t)=-p_{ij}(t)+\frac{1}{2}\left(1-p_{ij}(t)\right)$$
$$=-\frac{3}{2}p_{ij}(t)+\frac{1}{2}$$

解一阶线性微分方程得：

$$p_{ij}(t)=ce^{-\frac{3}{2}t}+\frac{1}{3}$$

由初始条件 $p_{ij}(0)=\begin{cases}1\ ,\ i=j\\ 0\ ,\ i\neq j\end{cases}$

确定常数c，得

$$p_{ij}(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t},\ i=j\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}t}\ ,\ i\neq j\end{cases}$$

故其平稳分布 $\pi_j=\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\frac{1}{3},j=1,2,3$

例20 设两个状态的连续时间马尔可夫链，状态转移概率满足，试讨论平稳分布。

$$\begin{cases}p_{01}(h)=\lambda h+o(h)\\ p_{10}(h)\ =\mu h+o(h)\end{cases}$$

证明：$q_{00}=\lim\limits_{h\to0}\frac{1-p_{00}(h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{p_{01}(h)}{h}=\lambda=q_{01}$

$$q_{11}=\lim_{h\to0}\frac{1-p_{11}(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{p_{10}(h)}{h}=\mu=q_{10}$$

$$Q=\begin{pmatrix}-q_{00} & q_{01}\\ q_{10} & -q_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

$$Q^2=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+\lambda\mu & -\lambda^2-\lambda\mu\\ -\lambda\mu-\mu^2 & \lambda\mu+\mu^2\end{pmatrix}$$

$$=-(\lambda+\mu)\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}=-(\lambda+\mu)Q$$

$$Q^n=[-(\lambda+\mu)]^{n-1}Q$$

$$P(t)=e^{Qt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Qt)^n}{n!}=E+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Qt)^n}{n!}$$
$$=E+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[-(\lambda+\mu)^{n-1}]Qt^n}{n!}$$
$$=E+\frac{1}{-(\lambda+\mu)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[-(\lambda+\mu)t]^nQ}{n!}$$
$$=E-\frac{1}{\lambda+\mu}\left[e^{-(\lambda+\mu)t}-1\right]Q$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{1}{\lambda+\mu}\left[e^{-(\lambda+\mu)t}-1\right]\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}+\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}-\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}-\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix}$$

转移概率为 $p_{00}(t)=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}+\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$

$$p_{01}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$p_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$p_{11}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

转移概率的极限为

$$\lim_{t\to\infty}p_{00}(t)=\lim_{t\to\infty}p_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\lim_{t\to\infty}p_{01}(t)=\lim_{t\to\infty}p_{11}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

平稳分布为

$$\pi_0=\lim_{t\to\infty}p_{00}(t)=\lim_{t\to\infty}p_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\pi_1=\lim_{t\to\infty}p_{01}(t)=\lim_{t\to\infty}p_{11}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

若取初始分布为平稳分布，即

$$p_0=\frac{\mu}{\lambda+\mu},\ p_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

则过程在时刻t的绝对概率分布为

$$\begin{aligned} p_0(t)&=p_0p_{00}(t)+p_1p_{10}(t)\\ &=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right]\\ &\quad+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right]\\ &=\frac{\mu}{\lambda+\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1(t)&=p_0p_{01}(t)+p_1p_{11}(t)\\ &=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right]\\ &\quad+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right]\\ &=\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{aligned}$$

排队系统

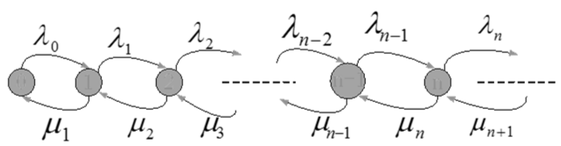
若排队系统具有下列性质：

(1) 顾客到达为泊松流，时间间隔服从参数为 $_n$的负指数分布；

(2) 顾客服务时间服从参数为 $_n$的负指数分布；

则排队系统的随机过程**{N(t),t>=0}**具有马尔可夫性质，为一个生灭过程.

（四）排队系统状态转移图

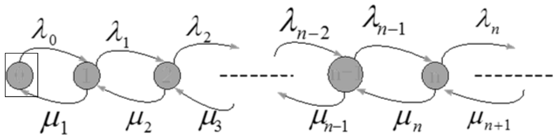


在任意状态**n**达到稳态平衡的条件：

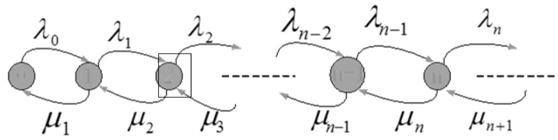
产生该状态的平均速率

=该状态转变成其他状态的平均速率

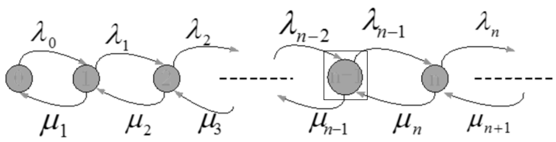
（流入**=**流出）



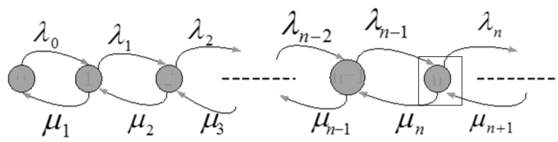
$$\mu_1 p_1 = \lambda_0 p_0$$



$$\lambda_1 p_1 + \mu_3 p_3 = (\lambda_2 + \mu_2) p_2$$



$$\lambda_{n-2} p_{n-2} + \mu_n p_n = (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) p_{n-1}$$



$$\lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) p_n$$

$$\mu_1 p_1 = \lambda_0 p_0$$

三、 排队系统稳态概率P_n的求解

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0, \qquad p_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0$$

$$\cdots\ p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1} p_0 \cdots$$

记

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1}$$

则 $p_n = C_n p_0, \qquad n = 1,2,\cdots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

$$p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n p_0 = (1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n) p_0 = 1$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n}, \qquad p_n = \frac{C_n}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n}$$

5.连续时间的马尔可夫链.

(1)连续性条件、**Q**矩阵、前进与后退方程、绝对概率所满足的方程、平稳分布；

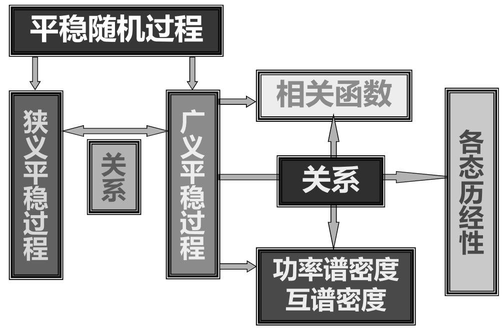
(2)生灭过程，排队系统，例**M/M/S**、**M/M/1**，机器维修问题等。

6.平稳过程

(1)证明过程是平稳过程，相关函数的性质，判断平稳过程是否各态历经性**(**定义和充要条件**)**

(2)随机分析：均方连续、均方导数、均方积分。

二、主要内容



平稳随机过程

如果过程的统计特性不随时间的推移而变化，则称之为平稳随机过程.

狭义平稳过程

如果对于任意的$n(=1,2,\cdots),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$和任意实数$h$，当$t_1+h,t_2+h,\cdots,t_n+h\in T$时，$n$维随机变量 $(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$

和 $(X(t_1+h),X(t_2+h),\cdots,X(t_n+h))$

具有相同的分布函数，则称随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ **为严平稳过程或狭义平稳过程.**

广义平稳过程

定义1 给定二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$，如果对任意$t,t+\tau\in T$： $E[X(t)]=\mu_X$ （常数），

$$E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau),$$

则称$\{X(t),t\in T\}$为宽平稳过程，或广义平稳过程.

定义2 对于两个平稳过程： $X(t)$ 和 $Y(t)$，

$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]=R_{XY}(\tau)$，称$X(t)$和$Y(t)$是平稳相关的，或两过程是**联合宽平稳的.**

狭义平稳过程与广义平稳过程的关系

1. 严平稳过程只要二阶矩存在，则它必定也是宽平稳的. 反之不成立.

2. 宽平稳的正态过程必定也是严平稳的.

相关函数

随机过程 $X(t)$ 沿整个时间轴上的两种时间平均：$<X(t)>=\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\mathrm{d}t$

和 $<X(t)X(t+\tau)>=\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)\mathrm{d}t$

称为随机过程 $X(t)$ 的时间均值和时间相关函数.

相关函数的性质

假设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是平稳相关过程,

$R_X(\tau)$、$R_Y(\tau)$和$R_{XY}(\tau)$**分别是它们的自相关函数和互相关函数.**

性质1 $R_X(0)=E[X^2(t)]=\Psi_X^2\geq 0.$

性质2 $R_X(-\tau)=R_X(\tau)$，即 $R_X(\tau)$ 是 τ 的偶函数.

性质3 关于自相关函数和自协方差函数有不等式

$|R_X(\tau)|\leq R_X(0)$ 和 $|C_X(\tau)|\leq C_x(0)=\sigma_X^2.$

性质4 $R_X(\tau)$ **是非负定的.**

即 对于任意数组$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$ 和任意实值函数 $g(t)$都有 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}R_X(t_i-t_j)g(t_i)g(t_j)\geq 0.$

性质5 如果平稳过程$X(t)$ 满足条件

$P\{X(t+T_0)=X(t)\}=1,$

则称它为周期是 T_0 的平稳过程.

各态历经性

设$X(t)$是一平稳过程：

(1) 如果 $<X(t)>=E[X(t)]=\mu_X$ 以概率1成立,
则称随机过程$X(t)$的均值具有各态历经性.

(2) 如果对于实数τ,

$<X(t)X(t+\tau)>=E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau)$

以概率1成立，则称随机过程$X(t)$的自相关函数**具有各态历经性.**

当$\tau=0$时,称均方值具有各态历经 性.

(3) 如果 $X(t)$ 的均值和自相关函数都具有各态历经性,则称 $X(t)$ 是(宽)各态历经过程.

或者说$X(t)$是各态历经的.

说明

(1) “以概率1成立” 是对 $X(t)$ 的所有样本函数而言

(2)各态历经性有时也称作遍历性或埃尔古德性 (ergodicity).

(3)并不是任意一个平稳过程都是各态历经的.

各态历经定理条件

定理一 (均值各态历经定理)

平稳过程$X(t)$ 的均值具有各态历经性的充要条件是 $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)[R_X(\tau)-\mu_X^2]\mathrm{d}\tau=0.$

推论

在 $\lim\limits_{\tau\to+\infty}R_X(\tau)$ 存在条件下,若 $\lim\limits_{\tau\to+\infty}R_X(\tau)=\mu_X{}^2$,

则有 $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)[R_X(\tau)-\mu_X^2]\mathrm{d}\tau=0.$

定理二 (自相关函数各态历经定理)

平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 具有各态历经性的充要条件是

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)[B(\tau_1)-R_x^2(\tau)]\mathrm{d}\tau_1=0,$$

其中

$$B(\tau_1)=E[X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)X(t+\tau+\tau_1)].$$

定理三 $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\mathrm{d}t=E[X(t)]=\mu_X$

以概率1成立的充要条件是

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T}\left(1-\frac{\tau}{T}\right)[R_X(\tau)-\mu_X^2]\mathrm{d}\tau=0.$$

定理四

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)X(t+\tau)\mathrm{d}t=E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau)$$

以概率1成立的充要条件是

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T}\left(1-\frac{\tau_1}{T}\right)[B(\tau_1)-R_X^2(\tau)]\mathrm{d}\tau_1=0.$$

功率谱密度和互谱密度

平稳过程$X(t)$的功率谱密度

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}E\left\{\left|F_X(\omega,T)\right|^2\right\}.$$

平稳过程$X(t)$和$Y(t)$的互谱密度

$$S_{XY}(\omega)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}E\{F_X(-\omega,T)F_Y(\omega,T)\}.$$

谱密度与相关函数的关系

$$F_X'(\omega)=S_X(\omega),\quad -\pi\le\omega\le\pi,$$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega,\quad \tau\in(-\infty,+\infty).$$

为了计算平稳过程的谱密度(或互谱密度)，一般总是先求出相关函数，再进行*FT*(维纳-辛钦公式)得到谱密度.

三、典型例题

例21 设 $X(t)=A\cos at+B\sin at, t\ge0, a$ 为常数，A，B 相互独立同分布于 $N(0,\sigma^2)$，试求均值函数，相关函数和协方差函数．判别 $X(t)$ 是否为平稳过程．

解 $m_X(t)=E[A\cos at+B\sin at]$

$=E(A)\cos at+E(B)\sin at$

$=0,$

$R_X(s,t)=E\{X(s)X(t)\}$

$=E\{[A\cos as+B\sin as][A\cos at+B\sin at]\}$

$=E[A^2]\cos as\cos at+E[B^2]\sin as\sin at$

$=\sigma^2\cos a(t-s),$

$C_X(s,t)=\sigma^2\cos a(t-s),$

$X(t)$ 是平稳过程.

例22上例中随机过程 $X(t)=A\cos at+B\sin at$, $t\geq 0$, a 为常数, A,B 相互独立同分布于 $N(0,\sigma^2)$, 试讨论 $X(t)$ 对数学期望的各态历经性.

解　因为 $m_X(t)=0$,

所以 $C_X(\tau)=R_X(\tau)=\sigma^2\cos a\tau$,

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})\sigma^2\cos a\tau\mathrm{d}\tau$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{\sigma^2}{T}\frac{1-\cos 2aT\tau}{2Ta^2}=0,$$

$X(t)$ 对数学期望具有各态历经性.

❖ **例23　设随机过程**

***X*(*t*)=*Y*cos(θ*t*)+*Z*sin(θ*t*), *t*>0，**

且*Y*, *Z*相互独立，*EY*=*EZ*=0，*DY*=*DZ*=σ^2

验证其平稳性。

- **二阶矩** $E\left[X^2(t)\right]$**存在**
- $m_X(t)=EX(t)=$**常数**
- $R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=R_X(t-s)$

❖ 例23　设随机过程

X(*t*)=*Y*cos(θ*t*)+*Z*sin(θ*t*), *t*>0，

且*Y*, *Z*相互独立，*EY*=*EZ*=0，*DY*=*DZ*=σ^2

验证其平稳性。

解　$m_X(t)=EX(t)=E[Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t)]$

$$=\cos(\theta t)EY+\sin(\theta t)EZ=0$$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$$

$$=E[(Y\cos(\theta s)+Z\sin(\theta s))(Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t))]$$

$$=E[\cos(\theta s)\cos(\theta t)Y^2+\sin(\theta s)\cos(\theta t)YZ$$
$$+\cos(\theta s)\sin(\theta t)YZ+\sin(\theta s)\sin(\theta t)Z^2]$$

$$=\cos(\theta s)\cos(\theta t)E(Y^2)+\sin\theta(s+t)E(YZ)$$
$$+\sin(\theta s)\sin(\theta t)E(Z^2)$$

$$=\cos(\theta s)\cos(\theta t)DY+\sin\theta(s+t)EYEZ$$
$$+\sin(\theta s)\sin(\theta t)DZ$$

$$=\cos(\theta s)\cos(\theta t)\sigma^2+\sin(\theta s)\sin(\theta t)\sigma^2$$

$$=\sigma^2\cos[(t-s)\theta]$$

所以{*X*(*t*)，*t* ∈ *T* }为宽平稳过程。

例24白噪声的取样观察值$\{X_n\}$相互独立同分布于 $N(0,\sigma^2)$, 它是一个随机序列求它的相关函数.

解　$m_X(n)=E[X_n]=0$,

$$R_X(n,n+m)=E\{X_nX_{n+m}\}$$

$$=\begin{cases}0, & m\neq 0,\\ \sigma^2, & m=0,\end{cases}$$

故 $\{X_n\}$ 是平稳过程.

称满足此性质的随机序列 $\{X_n\}$ 为离散白噪声.

例25　设有两个随机过程 $X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)$, $Y(t)=b\sin(\omega_0 t+\Phi)$, 其中 a,b,ω_0 为常数, Φ 是均匀分布于 $(0,2\pi)$ 上的随机变量试求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 和 $R_{YX}(\tau)$.

解　$R_{XY}(\tau)=E\{X(t)Y(t+\tau)\}$

$$=E\{a\cos(\omega_0 t+\Phi)b\sin(\omega_0 t+\tau)+\Phi\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ab\cos(\omega_0 t+\Phi)\sin(\omega_0(t+\tau)+\Phi)\mathrm{d}\Phi$$

$$=\frac{ab}{2}\sin\omega_0\tau,\qquad R_{YX}(\tau)=-\frac{ab}{2}\sin\omega_0\tau.$$

例26 (1) 下列函数哪些是功率谱密度,哪些不是?为什么?

$$S_1(\omega)=\frac{\omega^2+9}{(\omega^2+4)(\omega+1)^2},\quad S_2(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6},$$

$$S_3(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4-4\omega^2+3},\quad S_4(\omega)=\frac{e^{-i\omega^2}}{\omega^2+6}.$$

(2) 对上面正确的功率谱密度表达式计算其相关函数和均方值.

解 (1)

由于功率谱密度是实的、非负的偶函数,所以 $S_2(\omega)$ 是功率谱密度,其它不是.

(2) 对 $S_2(\omega)=\dfrac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}$,

$$R_X(\tau)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|\tau|},$$

均方值为 $E|X(t)|^2=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

例27 设平稳过程 $X(t)$ 的相关函数 $R_X(\tau)=S\delta(\tau)$,其中 S 为常数,计算它的功率谱密度.

解 $$S_Y(\omega)=S\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=Se^{-i\omega 0}=S.$$

功率谱密度为常数的平稳过程是白噪

例28设平稳过程 $X(t)$ 的相关函数 $R_X(\tau)=\sigma^2\cos a\tau$,计算它的功率谱密度.

解 将 $R_X(\tau)$ 改写为 $R_X(\tau)=\dfrac{\sigma^2}{2}(e^{ia\tau}+e^{-ia\tau})$,

由 $S_X(\omega)$ 与 $R_X(\tau)$ 互为Fourier 变换对的关系可知,

$$\frac{\sigma^2}{2}(e^{ia\tau}+e^{-ia\tau})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega\tau}S_X(\omega)d\omega,$$

故 $S_X(\omega)=\pi\sigma^2(\delta(\omega-a)+\delta(\omega+a))$.

例29 设平稳过程$X(t)$的功率谱密度

$$S_X(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9},$$

计算它的相关函数和平均功率.

解 方法1

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega\tau}\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}d\omega,$$

先考虑 $\tau\ge 0$: 令 $z^4+10z^2+9=0$,

得零点 $z=\pm 3i,\pm i$,

其中 $z=3i, i$ 是在上半平面的两个零点,

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[e^{iz\tau}\frac{z^2+4}{z^4+10z^2+9},i\right]+\mathrm{Res}\left[e^{iz\tau}\frac{z^2+4}{z^4+10z^2+9},3i\right]\right\}$$

$$=i\left\{\frac{3}{16i}e^{-\tau}+\frac{5}{48i}e^{-3\tau}\right\}$$

$$=\frac{1}{48}(9e^{-\tau}+5e^{-3\tau}),$$

由于$R_X(\tau)$是偶函数,对任意的τ,有

$$R_X(\tau) = \frac{1}{48}(9e^{-|\tau|} + 5e^{-3|\tau|}).$$

平均功率为

$$R_X(0) = \frac{7}{24}.$$

方法2 $S_X(\omega) = \dfrac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\omega^2 + 1} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{\omega^2 + 9},$$

$$R_X(\tau) = F\left\{\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\omega^2 + 1}\right\} + F\left\{\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{\omega^2 + 9}\right\}$$

$$= \frac{3}{8} F\left\{\frac{1}{\omega^2 + 1}\right\} + \frac{5}{8} F\left\{\frac{1}{\omega^2 + 9}\right\}$$

$$= \frac{1}{48}(9e^{-|\tau|} + 5e^{-3|\tau|}).$$