最优化理论与方法

研究生学位课

陈军华（副教授、主任）

有约束非线性规划的罚函数求解算法

- **基本思想**
  - 有约束问题转化为无约束优化问题。

- **简单的罚函数**
  - 对于等式约束的非线性规划
  - $\min f(x)$
  - $s.t.\quad g_i(x)=0\qquad i=1,\dots,m$
  - 定义如下目标函数：

$$P(x,K)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}K_i[g_i\ (x)]^2$$

  - K_i：$0\rightarrow+\infty$．考虑极端情况，当$K_i=0$相当于无约束，当$K_i=+\infty$，约束条件严格满足。K_i的取值大小根据实际需要选取。

- **例 7_6**
  - $\boldsymbol{min f(x)} = x_1^2 + x_{\boldsymbol{2}}^2$
  - $\boldsymbol{s.t.} \quad \boldsymbol{x_2 = 1}$

- **例 7_6**
  - $\boldsymbol{minf}(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$
  - $\boldsymbol{s.t.} \quad \boldsymbol{x_2 = 1}$
  - 定义罚函数：

$$\boldsymbol{P(x,K)} = x_1^2 + x_2^2 + \boldsymbol{K} \ [\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{1}]^2$$

  - 求$\boldsymbol{minP(x,K)}$,其必要条件为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{x_1}} = \boldsymbol{2x_1 = 0}$$

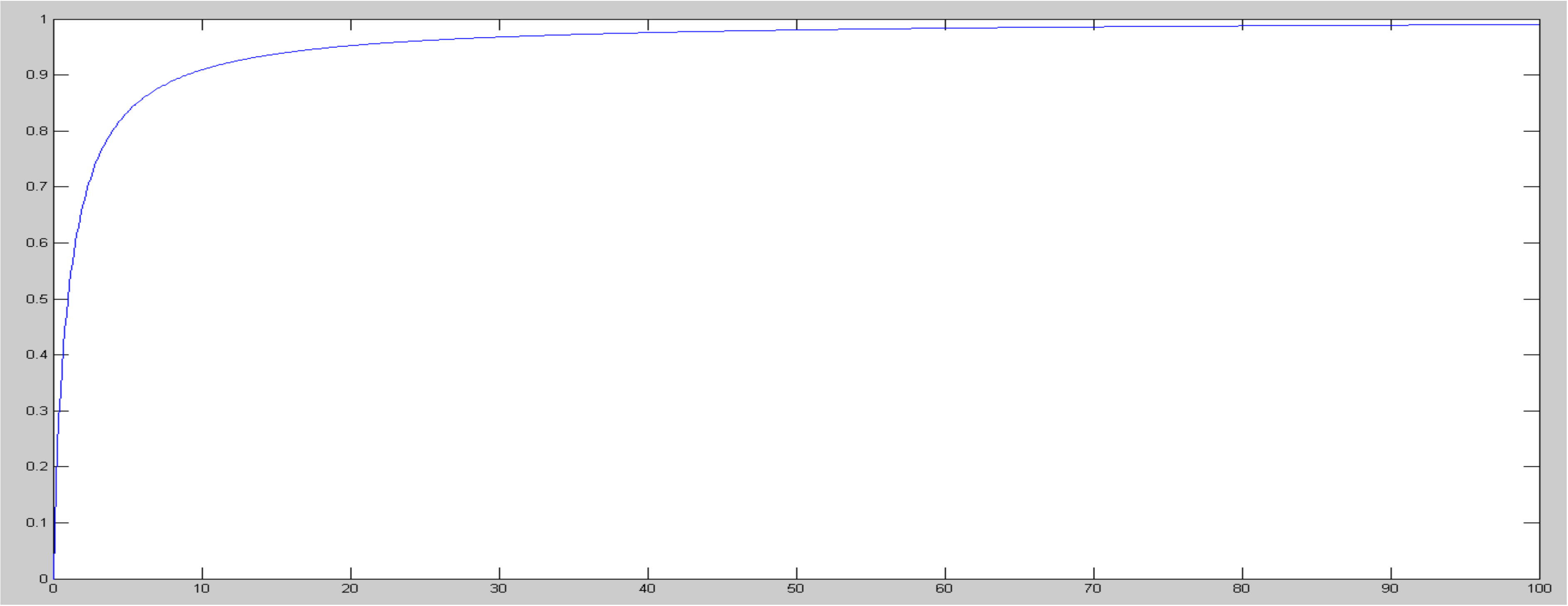
$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{x_2}} = \boldsymbol{2x_2 + 2K(x_2 - 1) = 0}$$

$$x_1^* = \boldsymbol{0}, x_2^* = \boldsymbol{K/(1+K)}$$

- **例 7_6**

$$x_1^* = 0, x_2^* = K/(1+K)$$

K	0	1	2	5	10	∞
x_2^*	0	0.5	0.67	0.83	0.91	1



对不等式约束的罚函数

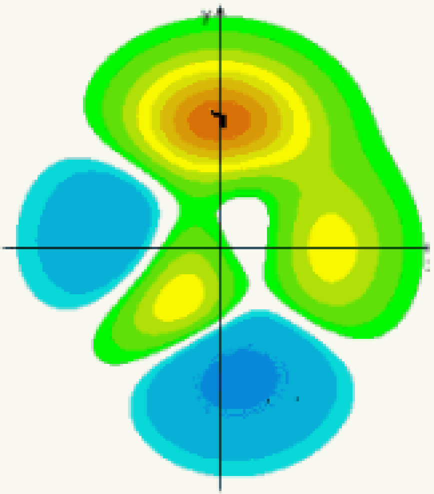
- $\min f(x)$
- $s.t.\quad g_i(x) \le 0 \qquad i = 1, \dots, m$
- 定义如下目标函数：

$$P(x, K) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} K_i [g_i(x)]^2 u_i(g_i)$$

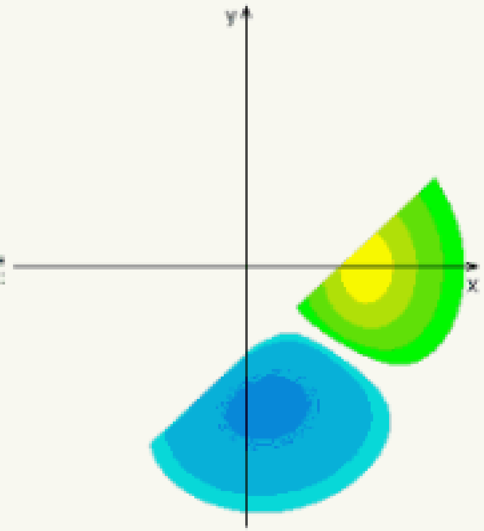
$$u_i(g_i) = \begin{cases} 0 & g_i(x) \le 0 \\ 1 & g_i(x) > 0 \end{cases}$$

- u_i在当前点为可行解时，不惩罚，或者惩罚生效。

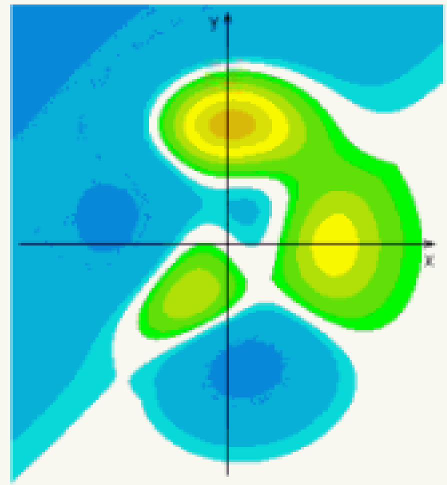
- 注意有可能会收敛到虚假的解上。



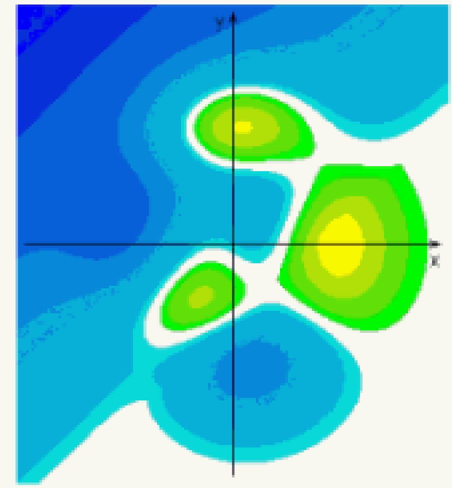
f(x,y)



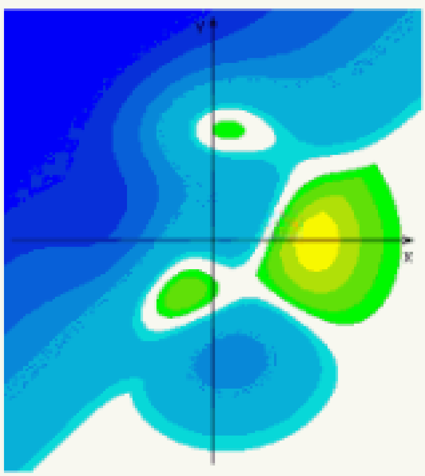
f(x,y) x-y>1



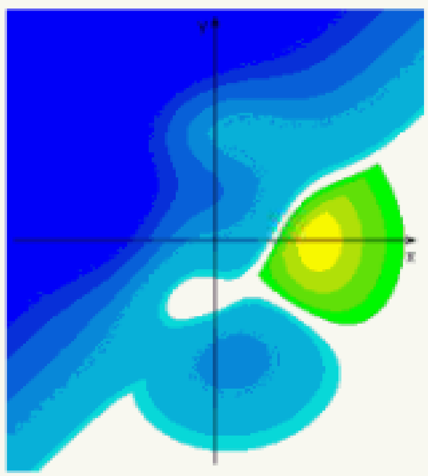
k=1



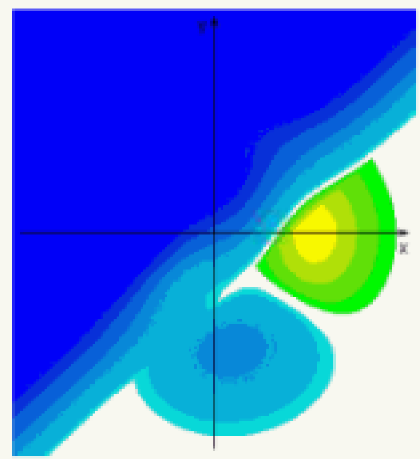
k=2



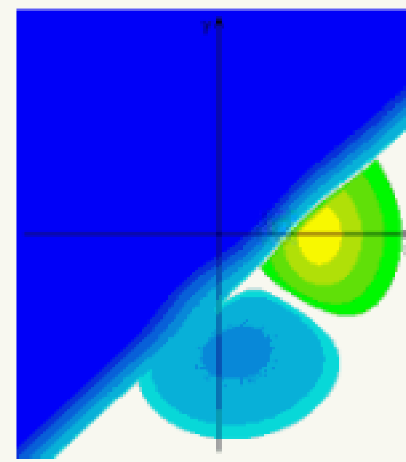
k=3



k=5



k=10



k=20

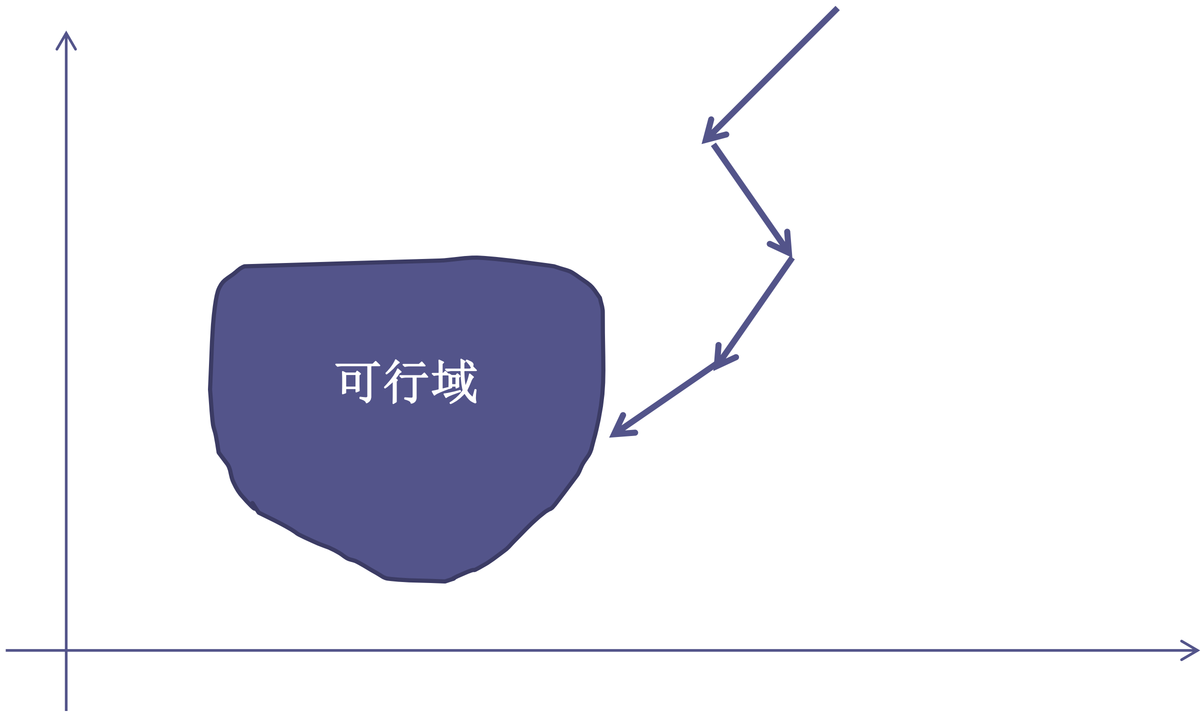
- **例 7_7**
  - $\boldsymbol{min f(x)} = x_1^2 + x_2^2$
  - $\boldsymbol{s.t.}\quad \boldsymbol{x_1 + x_2 - 1 = 0}$

    $\boldsymbol{x_1 + x_2 - 2 = 0}$

- 例 7_7
  - $\boldsymbol{minf}(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$
  - $\boldsymbol{s.t.} \quad \boldsymbol{x_1 + x_2 - 1 = 0}$
    $\boldsymbol{x_1 + x_2 - 2 = 0}$
  - $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{K}) = x_1^2 + x_2^2 + \boldsymbol{K_1[x_1 + x_2 - 1]^2 + K_2[x_1 + x_2 - 2]^2}$
  - $\boldsymbol{\frac{\partial P}{\partial x_1} = 2x_1 + 2K_1(x_1 + x_2 - 1) + 2K_2(x_1 + x_2 - 2) = 0}$
  - $\boldsymbol{\frac{\partial P}{\partial x_2} = 2x_2 + 2K_1(x_1 + x_2 - 1) + 2K_2(x_1 + x_2 - 2) = 0}$
  - $\boldsymbol{\rightarrow x_1 = x_2 = \frac{3K_1}{4K_2+1}},$
  - 当$\boldsymbol{K} \rightarrow \infty$时，$\boldsymbol{x_1 = x_2 = \frac{3}{4}}$

- **作业**
  - $\min f(x) = x_1^2 + 2x_2^2$
  - $s.t. \quad 1 - x_1 - x_2 = 0$

- **罚函数算法实现–外点法**
  - 算法原理：外点函数是通过一系列罚因子$\{K_i\}$，求罚函数的极小点来逼近约束问题的最优点。之所以称为外点函数法，是因为它是从可行域外部向约束边界逐步靠拢的。



外点罚函数算法步骤

- 1.给定初始点$\boldsymbol{x}^0$，罚参数$\{\boldsymbol{K}_i\}$，精度$\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$，置$\boldsymbol{m} = \mathbf{1}$
- 2.构造罚函数$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{K}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{K}\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|^2$
- 3.采用无约束非线性规划，以 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}-\mathbf{1}}$为初始点求解 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{K})$
- 4.设最优解为 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}$，若 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}$满足终止条件，结束，否则$\boldsymbol{m} + +$，转2.

- $\{\boldsymbol{K}_i\}$的一般选法：先选定一个初始常数$\boldsymbol{K}_\mathbf{1}$和一个比例系数$\boldsymbol{\delta} \geq 2$,则 $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{K}_\mathbf{1}\boldsymbol{\delta}^{i-\mathbf{1}}$
- 终止条件可选$\left\|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}+\mathbf{1}} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}\right\|^2$

- **例 7_8**
  - 用外点法求 $\min f(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2$
  - $s.t.\quad x_1+x_2=1$
  - 初始点为[0,0], $K_1=0.05$，　δ=2

- **例 7_8**
  - 用外点法求 $minf(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2$
  - $s.t. \quad x_1 + x_2 = 1$
  - 初始点为[0,0], $K_1 = 0.05$， δ=2
  - 解： $P(x, K) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} K_i[h_i\ (x)]^2$

$$= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + K_1[x_1 + x_2 - 1]^2$$

使用牛顿法求此无约多维优化问题： $x' = \begin{pmatrix} 1/13 \\ 2/13 \end{pmatrix}$

$\|x' - x^m\| = 0.17$　　循环继续...

$K_1 = K_1\delta = 0.05 \times 2 = 0.1$ ….

$$x^* = \begin{pmatrix} 0.329 \\ 0.658 \end{pmatrix}$$

- **例 7_9**
  - 用外点法求 $\min f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2 - x_1 + 1$

$$s.t.\quad 2x_1 + 3x_2 - 9 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 6 \geq 0$$
$$x_1, x_2 > 0$$

  - 初始点为[2,2], $K_1 = 0.05$，　δ=2

$$P(x,K) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} K_i[h_i\ (x)]^2 + \sum_{i=1}^{m} K_i[min(0, g_i\ (x)]^2$$

  - 课后作业，用程序实现。

- **罚函数法-内点法**
  - 如果在求解时要求每次的近似解都在可行域内，一边观察达到最优解时，目标函数的变化情况；或者函数在可行域外的性质比较复杂，甚至没有定义，就无法使用外点法，这样就要使用内点法。
  - 内点法要求迭代过程始终在可行域内进行。基本思想是：先把初始点选在可行域内，并在边界上设置一道障碍，使迭代点靠近边界使目标迅速增大，阻止其出域。

- 罚函数法-内点法
  - $\min f(x) = x_1^2 + 2x_2^2$
  - $s.t. \quad g_i(x) \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m$
  - 定义如下目标函数：

$$P(x, K) = f(x) + K \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}$$

随着K值逐步减小，对于边界上最优点也能逐步达到。

- **内点罚函数算法步骤**
  - 1.给定初始点$\boldsymbol{x}^0$，罚参数$\{K_i\}$，缩小系数δ，精度$\varepsilon > 0$，置$\varepsilon_0 = 1$
  - 2.构造罚函数$F(x, K) = f(x) + K\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(x)}$
  - 3.用某种无约束非线性规划，以 x^{m-1}为初始点求解 $F(x, K)$
  - 4.设最优解为 x^m，若 x^m满足终止条件，结束，否则m++，转2.

  - $\{K_i\}$的一般选法：先选定一个初始常数K_1和一个比例系数$\delta < 1$,则 $K_i = K_1\delta^{i-1}$

- **例 7_10**
  - 用内点法求 $\min f(x) = x_1^2 + x_2^2$
  - $s.t. \quad x_1 + x_2 - 1 \geq 0$

    $2x_1 - x_2 - 2 \geq 0$

    $x_1, x_2 > 0$
  - 初始点为[3,1], $K_1 = 8$， δ=0.5

- **例 7_10**
  - 用内点法求 $minf(x) = x_1^2 + x_2^2$
  - $s.t. \quad x_1 + x_2 - 1 \ge 0$

    $2x_1 - x_2 - 2 \ge 0$

    $x_1, x_2 > 0$
  - 初始点为[3,1], $K_1 = 8$，　δ=0.5
  - 解：$P(x, K) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} K_i/[g_i\ (x)]$

$= x_1^2 + x_2^2 + k_1/(x_1 + x_2 - 1) + k_1/(2x_1 - x_2 - 2) + k_1/x_1$
$+ k_1/x_2$

使用坐标轮换法求解此无约问题得到$x' = \begin{pmatrix} 2.76 \\ 1.43 \end{pmatrix}$

精度为0.49，继续迭代，令$K_1 = K_1 \times \delta = 4$, 进入下一轮…

- **LR 松弛算法**

复习(to be continue…)

To be continue…

学习框架

- 基本理论
  - 凸函数及其性质
  - 函数极值存在条件
  - 等式约束的最优性条件
  - K-T条件
- 基本方法
  - 单峰函数极值问题
    - 试探法（区间分割）
      - 二分法
      - 0.618
      - Fibonacci
    - 函数逼近法（插值法）
      - 牛顿法
      - 多项式逼近法
  - ……………………

总结(to be continue…)

- 学习框架

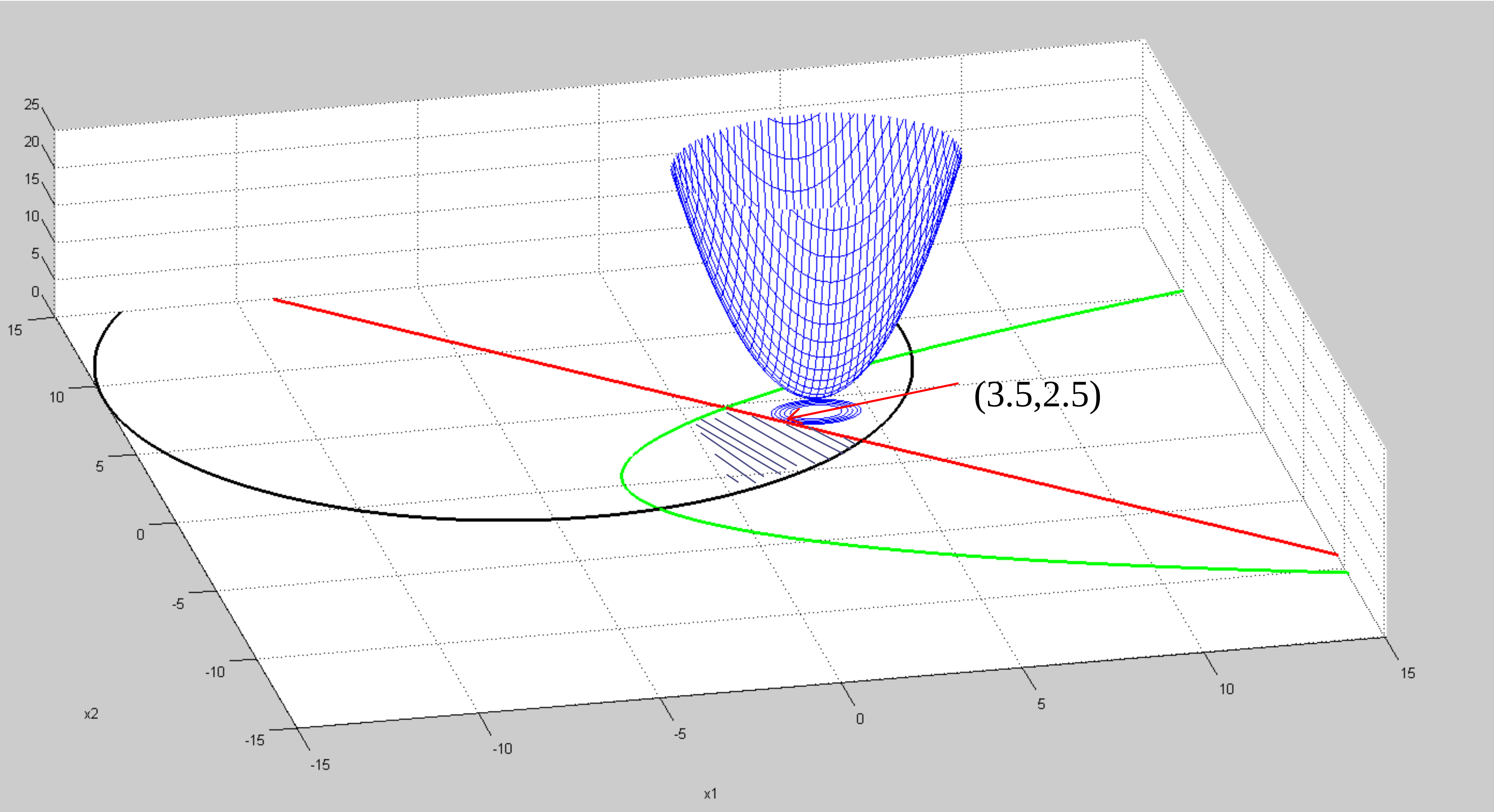
基本方法
- 单峰函数极值问题
  - 试探法（区间分割）
    - 二分法
    - 0.618
    - Fibonacci
  - 函数逼近法（插值法）
    - 牛顿法
    - 多项式逼近法
- 多变量函数无约束极值问题
  - 解析法
    - 梯度法
    - 二阶导数法
    - 共轭梯度法
    - 变尺度法
  - 直接法
    - 坐标轮换法
    - 单纯形法
- 有约束非线性规范问题
  - NLP→LP
    - 线性逼近法
    - 二次规划法
  - 约束→无约束
    - 惩罚函数法

- **回到开始…**
  - 例：$\min f(x) = 2(x_1 - 3.5)^2 + 4(x_2 - 4)^2 + 2$

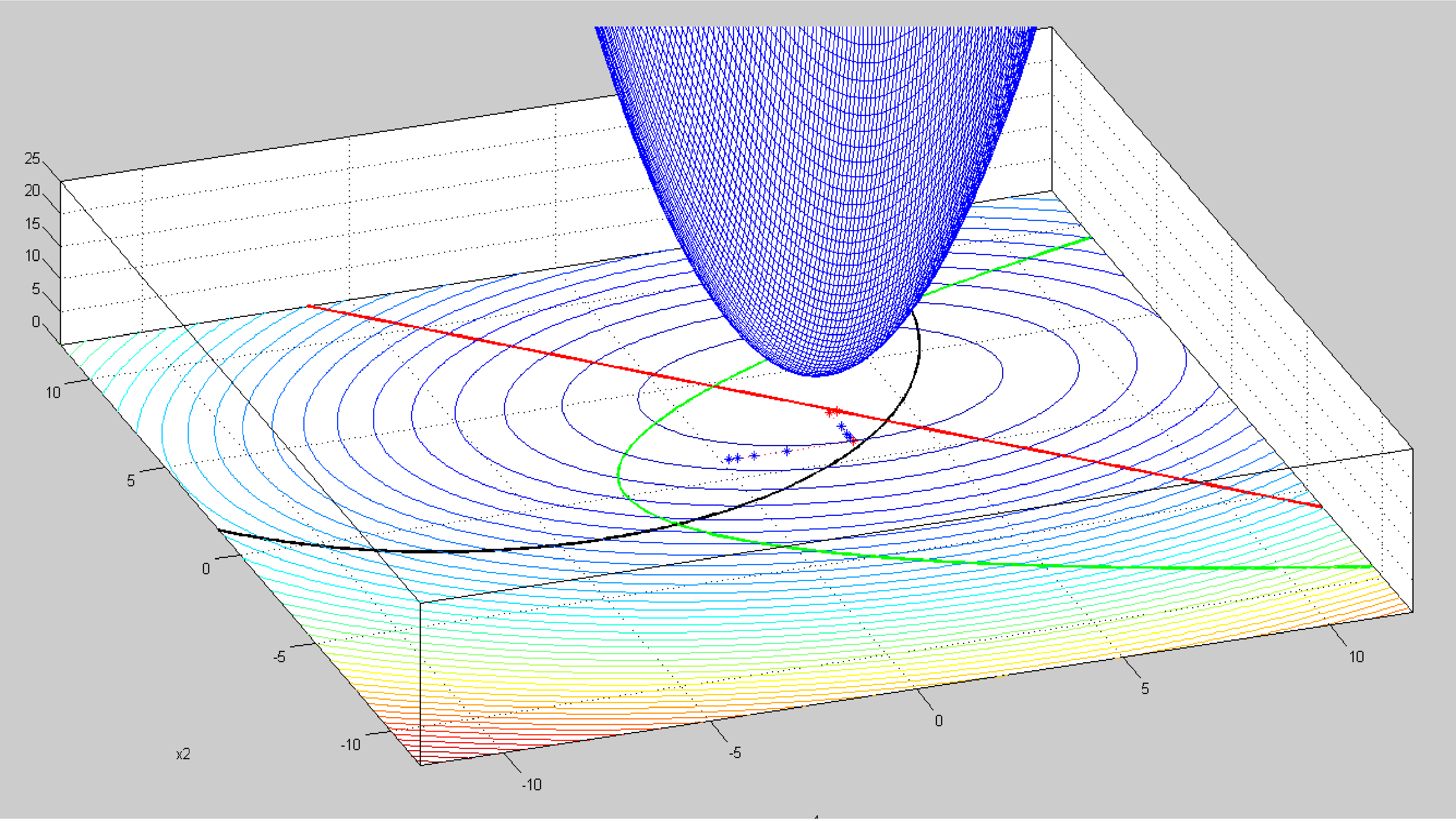
    $$\begin{aligned} s.t.\ & x_1 + x_2 - 6 \le 0 \\ & 6x_1 - {x_2}^2 + 16 \ge 0 \\ & (x_1 + 4)^2 + (x_2 - 9)^2 - 121 \le 0 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

  - 先在三维空间中画出可行域R,然后画出目标函数的立体图。

- **NLP的图解法**



- NLP的模式搜索算法



结语

总结(to be continue…)

While(!optimal){ discover(); }

为了理想的目标，怎能停止寻优的脚步！