最优化理论与方法

研究生学位课

陈军华（副教授、主任）

- **不等式约束的非线性规划**
  - $\min f(x)$
  - $s.t.\quad g_i(x) \le 0 \qquad i = 1,2,\ldots,r$
  - $f(x)$，$g(x)$ 都可导

• 库恩–塔克条件（Kuhn-Tucker）

- 首先定义一个类拉格朗日函数$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i g_i(x)$

以下四组条件在x^*点需满足：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x^*)+\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*)=0\\ g_i(x^*)\le 0\\ (\lambda_i^*)g_i(x^*)=0\\ \lambda_i^*\ge 0\end{cases}$$

- 简洁的表示：

$$\begin{cases}\nabla_x L(x^*,\lambda^*)=0\\ \nabla_\lambda L(x^*,\lambda^*)\le 0\\ (\lambda^*)^T g(x^*)=0\\ \lambda^*\ \ge 0\end{cases}$$

- **库恩–塔克条件（Kuhn-Tucker）**
  - **KT条件为必要条件，当目标函数为凸时，为充要条件。**

- 例 6_6
  - 利用KT条件求：
  - $$\min_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2+\boldsymbol{b}$$

    $$\boldsymbol{s.t.} \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}$$

- **例 6_6**
  - 利用KT条件求：
  - $\min_{x}(x-a)^2+b$

    $s.t. \quad x \geq c$

$$\begin{cases} \nabla_x L(x^*,\lambda^*) = 0 \\ \nabla_\lambda L(x^*,\lambda^*) \leq 0 \\ (\lambda^*)^T g(x^*) = 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases}$$

$$L(x,\lambda) = (x-a)^2+b+\lambda(c-x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-a)-\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = c-x \leq 0$$

$$\lambda g(x^*) = \lambda(c-x) = 0$$

$$\lambda \geq 0$$

- **例 6_6**

情形I：$\boldsymbol{\lambda = 0}$，$\rightarrow \boldsymbol{x = a}$,且 $\boldsymbol{c \le a}$

情形II： $\boldsymbol{x = c}$, $\rightarrow \boldsymbol{c > a}$

情形III： $\boldsymbol{x = c = a}$

- **例 6_7**
  - 写出下式的KT条件。
  - $$\max_{x} f(x)$$

$$s.t. \quad g_i(x) \le 0 \quad i = 1,2,\ldots,r$$

- 例 6_7
  - 写出下式的KT条件。
  - $\max\limits_{x} f(x)$

$$s.t. \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1,2,\dots,r$$

$$L(x,\lambda) = -f(x) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i g_i(x)$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) + \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*) = 0 \\ g_i(x^*) \leq 0 \\ (\lambda_i^*) g_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i^* \geq 0 \end{cases}$$

- 有等式约束和不等式约束的KT条件
  - $\min_x f(x)$

$$s.t.\quad h_i(x) = 0 \quad i = 1,2,\dots,r$$

$$g_j(x) \le 0 \quad i = 1,2,\dots,n$$

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i \dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*) = 0 \\ g_i(x^*) \le 0 \\ (\lambda_i^*) g_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i^* \ge 0 \end{cases}$$

- **例 6_8**
  - 用KT条件解NLP问题
  - $$\min_{x} f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & x_2 - x_1 = 1 \\ & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

- **例 6_8**
  - 用KT条件解NLP问题
  - $\min\limits_{x} f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & x_2 - x_1 = 1 \\
& x_1 + x_2 \le 2 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

解：$h_1(x) = -x_1 + x_2 - 1 = 0$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \le 0$$

$$g_2(x) = -x_1 \le 0$$

$$g_3(x) = -x_2 \le 0$$

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x)$$

- **例 6_8**

$$L(x,\mu,\lambda)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+\mu(-x_1+x_2-1)+\lambda_1(x_1+x_2-2)+\lambda_2(-x_1)+\lambda_3(-x_2)$$

根据KT条件有：

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2\left(x_1-1\right)-\mu+\lambda_1-\lambda_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2\left(x_2-2\right)+\mu+\lambda_1-\lambda_3=0$$

$$\lambda_1(x_1+x_2-2)=0$$

$$\lambda_2 x_1=0$$

$$\lambda_3 x_2=0$$

$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq 0$$

- **例 6_8**

讨论解的情况：

由$h_1(x) = -x_1 + x_2 - 1 = 0$可设

情形I： $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$，则：$\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$

$$2\left(x_1 - 1\right) - \mu + \lambda_1 = 0$$

$$2\left(x_2 - 2\right) + \mu + \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_1(x_1 + x_2 - 2) = 0$$

$$x_2 - x_1 = 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

若$\lambda_1 = 0$，可得解 $\mu = 0$，$x_1 = 1$，$x_2 = 2$，不满足$x_1 + x_2 \leq 2$，即非驻点

- **例 6_8**

若$\lambda_1 \neq 0$，可得解 $\mu = 0$，$\lambda_1 = 1$，$x_1 = \frac{1}{2}$，$x_2 = \frac{3}{2}$，满足各类条件。

情形II：$x_1 \neq 0, x_2 = 0$，则：$\lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$，得联立方程组：

$$2\left(x_1 - 1\right) - \mu + \lambda_1 = 0$$
$$2(0-2) + \mu + \lambda_1 = 0$$
$$\lambda_1(x_1 - 2) = 0$$
$$-x_1 = 1$$

可得解 $\mu = 0$，$\lambda_1 = 0$，$\lambda_3 = -4$，$x_1 = -1$，$x_2 = 0$，不满足约束。

- **例 6_8**

情形III：$x_1 = 0, x_2 \neq 0$，则：$\lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0$，得联立方程组：

$$2(0-1) - \mu + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$
$$2(x_2 - 2) + \mu + \lambda_1 = 0$$
$$\lambda_1(x_1 - 2) = 0$$
$$x_2 - 1 = 0$$

可得解 $\mu = 0$，$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = -4$，$x_1 = 0$，$x_2 = 1$，满足约束。

- 例 6_9
  - $\min_{x} f(x)$

    $$s.t. \quad g_i(x) \le 0 \quad i = 1,2,\dots,r$$

    $$x_j \ge 0 \quad i = 1,2,\dots,n$$

- **例 6_9**
  - $$\min_{x} f(x)$$
    $$s.t. \quad g_i(x) \le 0 \quad i = 1,2,\dots,r$$
    $$x_j \ge 0 \quad i = 1,2,\dots,n$$

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) + \displaystyle\sum_{i=1}^{r} (\lambda_i) \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*) - \mu_i^* = 0 \\ g_i(x^*) \le 0 \\ (\lambda_i^*) g_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i^* \ge 0 \\ \mu_j^* \ge 0 \end{cases}$$

- 作业（写出模型的KT条件）

$$\text{Max} \quad 2x^2 - 3y^2 - 2x^2$$

$$s.t \quad x^2 + y^2 \le 1$$