历年部分试题讲解

09-10矩阵分析试题第二题；
15-16矩阵分析试题第一题

设 $R[x]_3$是由次数小于3 的所以实系数多项式组成的线性空间，$R[x]_3$ 中线性映射T满足：对任意 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in R[x]_3$

$$Tf(x)=(a_1+a_2)+(a_0+a_2)x+(a_0+a_1+2a_2)x^2$$

(1) 求T的核N(T)的基和维数；
(2) 求T的值域R(T)的基和维数；
(3) 求$R[x]_3$的一个基使得T 在该基下的矩阵表示为对角矩阵.

解：取$R[x]_3$的一组基$1, x, x^2$，则

$$T(1, x, x^2) = (T1, Tx, Tx^2) = (x + x^2, 1 + x^2, 1 + x + 2x^2)$$

$$= (1, x, x^2)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

即T在基$1, x, x^2$下的矩阵表示是$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(1) 求T的核N(T)的基和维数

$$\text{先求}A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\text{的核空间：}$$

$Ax=0$的基础解系为$(1,1,-1)^T$

$$\text{所以}N(T)=span\left\{(1,x,x^2)(1,1,-1)^T\right\}$$

$$=span\left\{1+x-x^2\right\}$$

故$N(T)$的基为$1+x-x^2$，维数是1。

(2) 求T的值域R(T)的基和维数

$$R(A)=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

所以$R(T)=span\left\{(1,x,x^2)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$=span\left\{x+x^2,1+x^2\right\}$$

故$R(T)$的基为$x+x^2,1+x^2$，维数是2。

(3) 求$R[x]_3$的一个基使得T 在该基下的矩阵表示为对角矩阵.

设所求基为α_1，α_2，α_3,

T在此基下的矩阵表示为对角矩阵B,

假设从$1, x, x^2$到α_1，α_2，α_3的过渡矩阵为U,

则$A = UBU^{-1}$.

思路：先将A对角化，求出U,再求基。

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$是实对称矩阵，所以可求正交矩阵$U$使$A$对角化。

求得$U=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

因为从$1,x,x^2$到α_1，α_2，α_3的过渡矩阵为U，

所以$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\left(1,x,x^2\right)U$

$$=\left(1,x,x^2\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-x),\frac{1}{\sqrt{3}}(1+x-x^2),\frac{1}{\sqrt{6}}(1+x+2x^{2)}\right)$$

11-12矩阵分析试题第五题

（3）设 $B \in C^{n\times n}$ 且 $\|B\|<1$，证明：$E+B$ 可逆（其中 E 为单位矩阵）

证明：设$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$是$B$的$n$个特征值，则

$$\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|\le\|B\|<1$$

所以对每个$1\le i\le n$，$-1<\lambda_i<1.$

于是$0<1+\lambda_i<2$

而$E+B$的特征值为$1+\lambda_1,1+\lambda_2,\ldots,1+\lambda_n$

故$|E+B|=(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_n)>0$

即$E+B$可逆。

14-15矩阵分析试题第六题

2．设 A 方阵，证明 $|e^{A}|=e^{\mathrm{Tr}(A)}$

证明：设A的$Jordan$标准形为J,则存在可逆矩阵P

使得$A=PJP^{-1}=P\left(J_1,J_2,\ldots,J_r\right)P^{-1}$,

$$\text{其中}J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{d_i\times d_i}\qquad (i=1,2,\cdots,r)$$

于是$e^{A}=Pe^{J}P^{-1}=P\left(e^{J_1},e^{J_2},\ldots,e^{J_r}\right)P^{-1}$,

$$\text{其中}e^{J_i}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_i} & e^{\lambda_i} & \cdots & \dfrac{e^{\lambda_i}}{(d_i-1)!} \\ & e^{\lambda_i} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & e^{\lambda_i} \\ & & & e^{\lambda_i}{}_{i} \end{bmatrix}(i=1,2,\cdots,r)$$

所以$e^A = Pe^J P^{-1} = P\left(e^{J_1}, e^{J_2}, \ldots, e^{J_r}\right)P^{-1}$

$$=P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & & & & & & & & & & & \\ & e^{\lambda_1} & & & & & * & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & & e^{\lambda_1} & & & & & & & & & \\ & & & & e^{\lambda_2} & & & & & & & & \\ & & & & & e^{\lambda_2} & & & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & & e^{\lambda_2} & & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & & e^{\lambda_r} & & & \\ & & & & & & & & & & e^{\lambda_r} & & \\ & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & e^{\lambda_r} \end{bmatrix}P^{-1}$$

于是$\left|e^{A}\right| = |P|\left|\left(e^{J_1}, e^{J_2}, \ldots, e^{J_r}\right)\right|\left|P^{-1}\right|$

$$=\left(e^{\lambda_1}\right)^{d_1}\left(e^{\lambda_2}\right)^{d_2}\ldots\left(e^{\lambda_r}\right)^{d_r}$$

$$= e^{d_1\lambda_1+d_2\lambda_2+\cdots+d_r\lambda_r}$$

$$= e^{Tr(A)}$$

15-16矩阵分析试题第六题

六、(10分)证明对任意的$n\times n$矩阵A,

若定义$\|A\|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$,

证明$\|\bullet\|$是一种矩阵范数，但不是算子范数（诱导范数）.

证明：第一问详见ppt上的第五章第二节例1.

下证$\|\bullet\|$不是算子范数（诱导范数）。

因为$\| I \| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | = n^2$

当$n \neq 1$时，$\| I \| \neq 1$,

所以$\|\bullet\|$不是算子范数。

17-18矩阵分析试题第九题

九、（6分）设正规矩阵A满足

$$A^4+2A^2+E=0$$

证明

$$A^H=-A$$

其中 $A^H=(\overline{A})^T$

证明：只需证A的特征值是0或者纯虚数。

$$A^4+2A^2+E=0\Rightarrow\left(A^2+E\right)^2=0\Rightarrow A^2+E=0$$

因为A是正规矩阵，根据结构定理，

存在酉矩阵$U\in U^{n\times n}$

使得$U^HAU=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的特征值。

于是$A=Udiag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)U^H$

所以$A^2+E=Udiag(1+\lambda_1{}^2,1+\lambda_2{}^2,\ldots,1+\lambda_n{}^2)U^H=0$

$$A^2+E=U\mathrm{diag}(1+\lambda_1{}^2,1+\lambda_2{}^2,\ldots,1+\lambda_n{}^2)U^H=0$$

于是对$i=1,2,\cdots,n$, $1+\lambda_i{}^2=0\Rightarrow\lambda_i=\pm i$

即A的特征值都是纯虚数，

所以$A^H=-A$.