

Proyecto Final

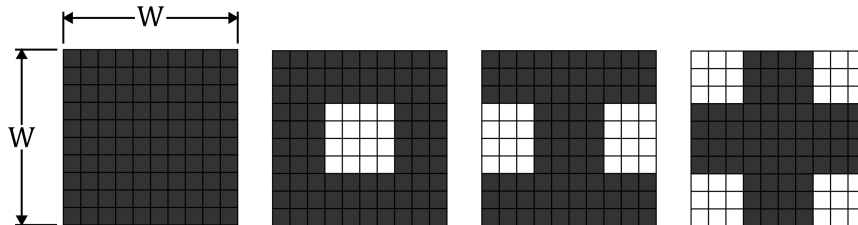
Problema de torsión en barras prismáticas cuadriculadas

Josué Licona Mármol, 202015173
Daniel Buitrago Velasco, 202014164

6 de diciembre de 2023

Introducción

Este proyecto se enfoca en el análisis de una viga empotrada sometida a una carga torsional en su extremo libre. Fabricada con acero 1020, la viga tiene un módulo de rigidez al cortante (G) de 80MPa y un esfuerzo de fluencia (Sy) de 205MPa. La sección transversal de la viga puede variar, siempre y cuando cumpla criterios esenciales para el análisis, como el cálculo del momento polar de inercia. Se exploran diversas formas de sección transversal para comprender su influencia en la resistencia y comportamiento torsional de la estructura. El estudio se lleva a cabo mediante métodos de diferencias finitas, permitiendo una evaluación detallada de los esfuerzos torsionales en las secciones transversales consideradas .



El análisis se basa en la resolución de la ecuación de Poisson para determinar la distribución torsional en una sección transversal.

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta, \quad \Phi|_r = 0$$

La función de torsión Φ se mantiene constante a lo largo del contorno. La relación entre la función de torsión y el torque se muestra a continuación:

$$T = 2 \int_A \Phi dA, \quad T = 2 \sum \Phi \Delta A$$

También será necesario obtener los esfuerzos de corte, los cuales se relacionan con la función de torsión de la siguiente forma:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

Donde Θ es el ángulo de giro producido por el torque y es necesario para obtener Φ , el cual depende del momento polar de inercia (J):

$$\theta = \frac{T}{JG}, \quad J = \int_A \rho^2 dA, \quad J = \sum \rho^2 \Delta A,$$

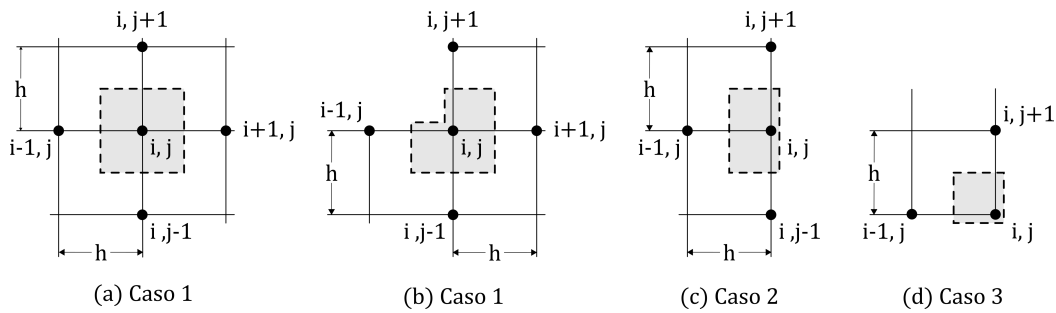
Precisamente el momento polar de inercia es característico de la sección transversal y se calcula como una suma acumulativa ponderada de las distancias al cuadrado desde cada punto de la sección transversal hasta su centro.

Cabe aclarar que θ , estará definido por unidad de longitud, lo cual quiere decir que para obtener el ángulo real para la viga será:

$$\gamma = \theta \cdot L$$

Metodología

La metodología se basa en la identificación de casos posibles en una sección transversal, representados por las ecuaciones para los casos 1, 2 y 3 y visualizados en la figura de a continuación.



Caso 1: 4 nodos adyacentes

$$\nabla^2 \Phi_{i,j} = \frac{\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j+1} - 4\Phi_{i,j}}{h^2} = -2G\theta$$

Caso 2: 3 nodos adyacentes

$$\nabla^2 \Phi_{i,j} = \frac{\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j-1} - 4\Phi_{i,j}}{h^2} = -2G\theta$$

Caso 3: 2 nodos adyacentes

$$\nabla^2 \Phi_{i,j} = \frac{\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} - 4\Phi_{i,j}}{h^2} = -2G\theta$$

Con esta información, se construye una matriz binaria que replica la forma específica de la sección transversal. Posteriormente, esta matriz se amplía para facilitar el proceso de identificación de casos. Utilizando esta matriz ampliada, se asigna un número a cada nodo según el caso al que pertenece, lo que permite finalmente crear una matriz que asigna un número a cada nodo de la figura.

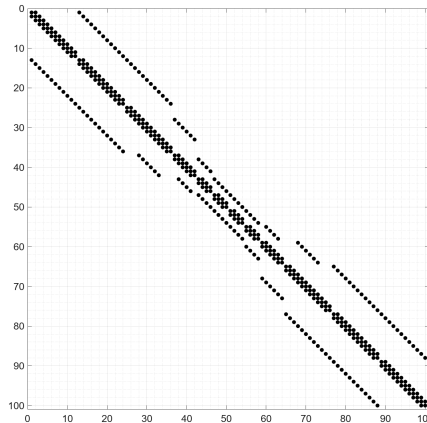
$$D_{p \times p} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{m-1 \times m-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{m \times m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{m \times m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 0 \\ 0 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 0 \\ 0 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 43 & 44 & 45 & 46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 47 & 48 & 49 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51 & 52 & 53 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 55 & 56 & 57 & 58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 59 & 60 & 61 & 62 & 63 & 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 65 & 66 & 67 & 68 & 69 & 70 & 71 & 72 & 73 & 74 & 75 & 76 & 0 \\ 0 & 77 & 78 & 79 & 80 & 81 & 82 & 83 & 84 & 85 & 86 & 87 & 88 & 0 \\ 0 & 89 & 90 & 91 & 92 & 93 & 94 & 95 & 96 & 97 & 98 & 99 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La resolución del problema implica la generación de la matriz A, característica de la sección transversal, que es producto de la relación entre las matrices K y M:



Los coeficientes asignados a la matriz A se definen específicamente en función de la disposición y relaciones entre estos nodos discretizados. Esta matriz es esencial para el cálculo de la función de torsión Φ y la solución numérica del sistema, puesto que Φ podrá ser solucionado de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$A_{n \times n} \Phi_{n \times 1} = F_{n \times 1}, \quad F_{n,1} = -2G\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = A^{-1}F$$

Para determinar el ángulo de giro correspondiente a la viga con una sección transversal específica, se plantea una ecuación que involucra el torque objetivo y el torque derivado de la función de torsión, función que a su vez depende del ángulo de giro estimado, producto de un torque igualmente estimado.

$$\frac{\partial^2 \Phi_{guess}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{guess}}{\partial y^2} = -2G \left(\frac{T_{guess}}{JG} \right)$$

$$2 \sum (\theta_{guess} \Delta A) - T_{target} = 0$$

En términos prácticos, la metodología propuesta para resolver este problema se fundamenta en una secuencia lógica de pasos interconectados. Inicia calculando un ángulo de giro Φ a partir del torque (T) dado. Este ángulo se utiliza para determinar la función de torsión Φ , que a su vez se emplea para calcular el nuevo torque generado por la función de tensión. Con este nuevo torque, se procede a calcular un nuevo ángulo de giro, cerrando así un ciclo. La solución efectiva del problema se alcanza cuando el ángulo de giro obtenido en el primer paso coincide con el ángulo de giro calculado en el cuarto paso.

Esta ecuación, representada mediante funciones de MATLAB, se resuelve empleando la función `fsolve`, la cual proporciona un valor que satisface la ecuación para el torque (T). Este valor de T será luego utilizado para obtener el ángulo de giro correspondiente. De esta forma, se calcula nuevamente Φ para este θ .

Los esfuerzos de corte se calculan mediante diferencias finitas centradas, permitiendo comprender la distribución de fuerzas cortantes a lo largo de la sección transversal.

$$\tau_{xz(i,j)} = \begin{cases} \frac{img\Phi_{i,j+1} - img\Phi_{i,j-1}}{2h}, & \text{si } img\Phi_{i,j} \in \mathbb{N} \\ \emptyset, & \text{d.l.c} \end{cases}$$

$$\tau_{yz(i,j)} = \begin{cases} \frac{img\Phi_{i+1,j} - img\Phi_{i-1,j}}{2h}, & \text{si } img\Phi_{i,j} \in \mathbb{N} \\ \emptyset, & \text{d.l.c} \end{cases}$$

$$||\tau||_{i,j} = \sqrt{\tau_{xz(i,j)}^2 + \tau_{yz(i,j)}^2}, \quad \tau_{max} = \max(||\tau||)$$

Finalmente, se verifica la estabilidad estructural utilizando el criterio de Tresca. Si el máximo esfuerzo cortante supera la mitad del esfuerzo de fluencia ($\tau_{max} > Sy/2$), se alerta sobre una posible falla estática, proporcionando una guía crucial para evaluar la seguridad estructural.

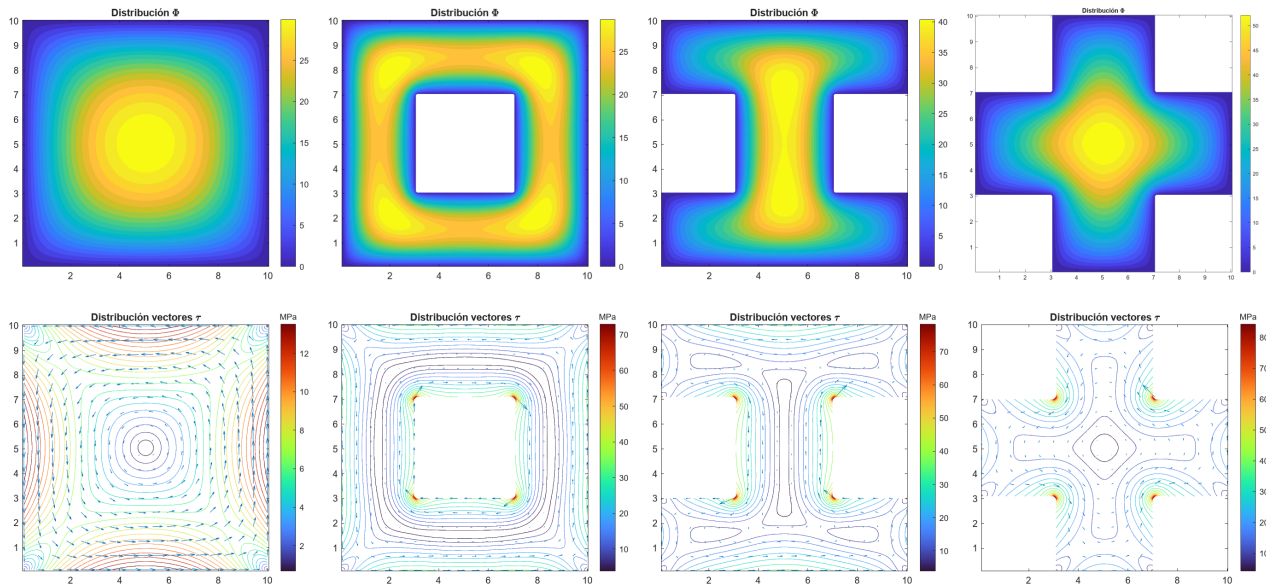
Resultados

Los tiempos de operación del programa varían en función de la sección transversal y del número de nodos especificados por el usuario. Por ende, figuras de mayor tamaño generarán un mayor costo computacional.

Nombre perfil	Cuadrado	Agujorado	Letra I	Cruz
Preprocesamiento [s]	9.249	5.749	4.387	2.438
Solución [s]	2.131	2.301	2.583	1.668
J [mm ⁴]	1.666.750	1.624.070	1.322.730	730.720
τ_{max} [MPa]	4.200	76.649	82.213	88.536
Deformación (γ)	0.15°	0.78°	0.68°	0.56°
Factor de seguridad (n)	7.218	1.337	1.247	1.158

Es importante destacar que el tiempo requerido para generar las matrices con las cuales se resuelve el problema suele ser mayor que el tiempo necesario para la resolución en sí.

A continuación se mostrarán diferentes resultados para la función de torsión y los esfuerzos de corte para diferentes secciones transversales siguiendo el enfoque presentado en este informe:



Conclusiones

- En figuras con bordes rectos, se identifican concentradores de esfuerzos notables, donde los valores de torsión son significativamente elevados.

Esto ocurre debido a la presencia de esquinas o cambios abruptos en la sección transversal. Estos puntos generan discontinuidades en la distribución de la función Φ , lo que resulta en una mayor concentración de esfuerzos en esas áreas.

- Se observan valores más altos de torsión en regiones cercanas a las fronteras de la sección transversal.

Esto se debe a la influencia de las condiciones de contorno. Las regiones adyacentes a las fronteras experimentan una mayor influencia de la interacción con el entorno exterior, lo que conlleva a una redistribución de esfuerzos y, en consecuencia, a valores más altos de torsión.

- La función Φ presenta valores más altos a medida que nos acercamos al centro de la figura.

Esta tendencia se relaciona con la geometría de la sección transversal. En el centro de la figura, hay una mayor simetría y uniformidad, lo que resulta en una distribución más equilibrada de los esfuerzos torsionales. A medida que nos alejamos del centro, las irregularidades en la sección transversal generan variaciones en la distribución de esfuerzos, aumentando los valores de torsión en esta zona.