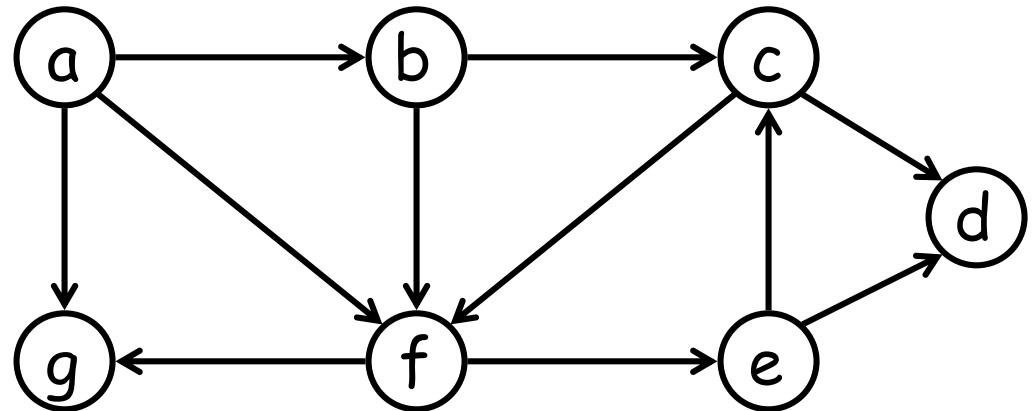


# מציאת סדר טופולוגי בגרף

$$G = (V, E)$$



הגדרה:

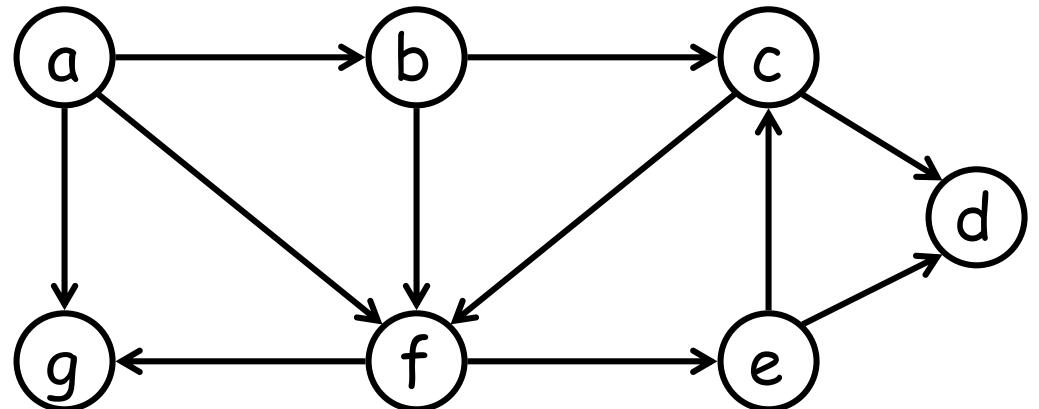
יהי  $G$  גרף מכוון ללא מעגלים, אז **סדר טופולוגי** עבור  $(V, E) = G$  הוא רשימה  $T$  של כל הקדוקדים ב  $G$ , כך שלכל זוג קדוקדים  $a, b \in V$

מתקיים:

אם  $E \in E$ , אז  $a$  קודם ל  $b$  בסדר הטופולוגי של  $G$ .

# מציאת סדר טופולוגי בגרף

$$G = (V, E)$$



אין סדר טופולוגי!  
כי יש מעגל בgraf

הגדרה:

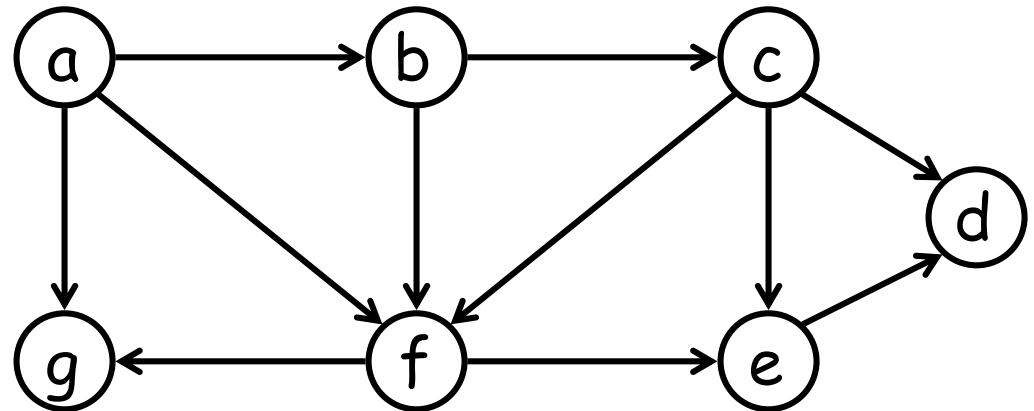
יהי  $G$  גראף מכוון ללא מעגלים, אז **סדר טופולוגי** עבור  $(V, E) = G$  הוא רשימה  $T$  של כל הקדוקדים ב- $G$ , כך שלכל זוג קדוקדים  $a, b \in V$

מתוקים:

אם  $E \in E$ , אז  $a$  קודם ל  $b$  בסדר הטופולוגי של  $G$ .

# מציאת סדר טופולוגי בגרף

$$G = (V, E)$$



הגדרה:

יהי  $G$  גרף מכוון ללא מעגלים, אז **סדר טופולוגי** עבור  $(V, E) = G$  הוא רשימה  $T$  של כל הקדוקדים ב  $G$ , כך שלכל זוג קדוקדים  $a, b \in V$

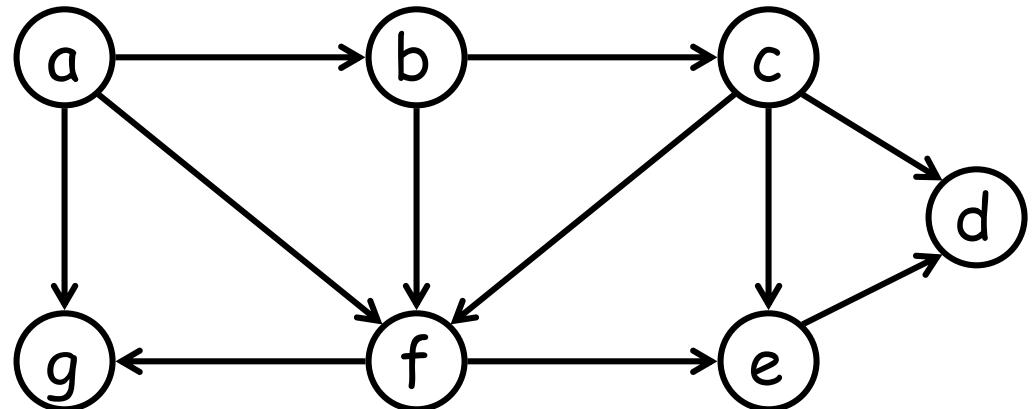
מתוקים:

אם  $E \in E$ , אז  $a$  קודם ל  $b$  בסדר הטופולוגי של  $G$ .

$T$ :

# מציאת סדר טופולוגי בגרף

$$G=(V,E)$$



הגדרה:

יהי  $G$  גרף מכוון ללא מעגלים, אז **סדר טופולוגי** עבור  $(V,E)=G$  הוא רשימה  $T$  של כל הקדוקדים ב  $G$ , כך שלכל זוג קדוקדים  $a, b \in V$

מתקיים:

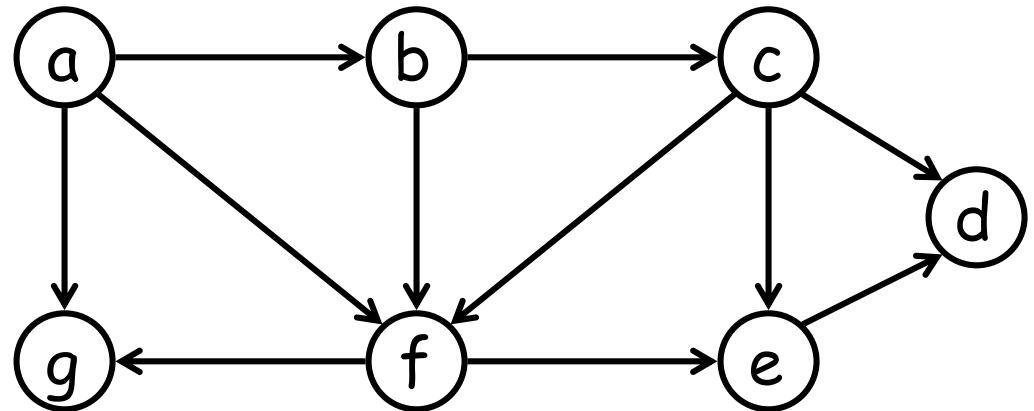
אם  $E \in E$ , אז  $a$  קודם ל  $b$  בסדר הטופולוגי של  $G$ .

$T: \quad a \quad b \quad c \quad f \quad g \quad e \quad d$

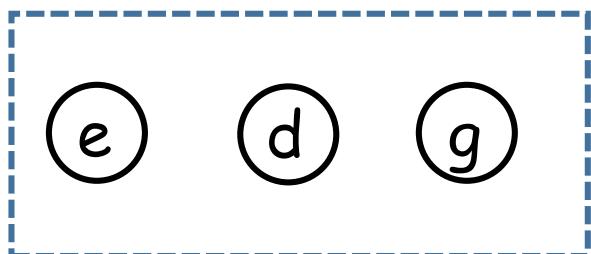
האם סדר טופולוגי  
הוא ייחיד?

# מציאת סדר טופולוגי בגרף

$$G = (V, E)$$



T:  $a \quad b \quad c \quad f$



הגדרה:

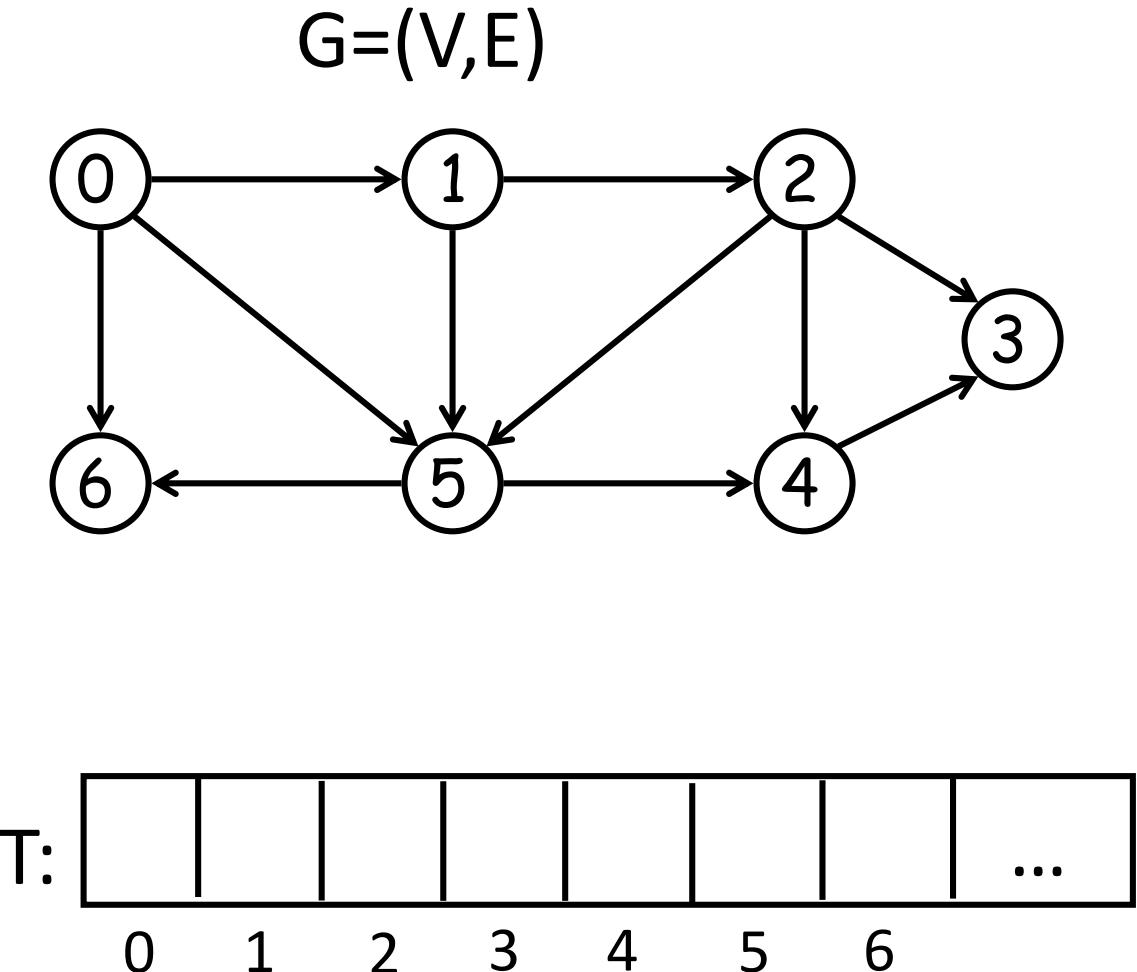
יהי  $G$  גרף מכוון ללא מעגלים, אזי **סדר טופולוגי** עבור  $(V, E) = G$  הוא רשימה  $T$  של כל הקדוקדים ב  $G$ , כך שלכל זוג קדוקדים  $a, b \in V$

מתקיים:

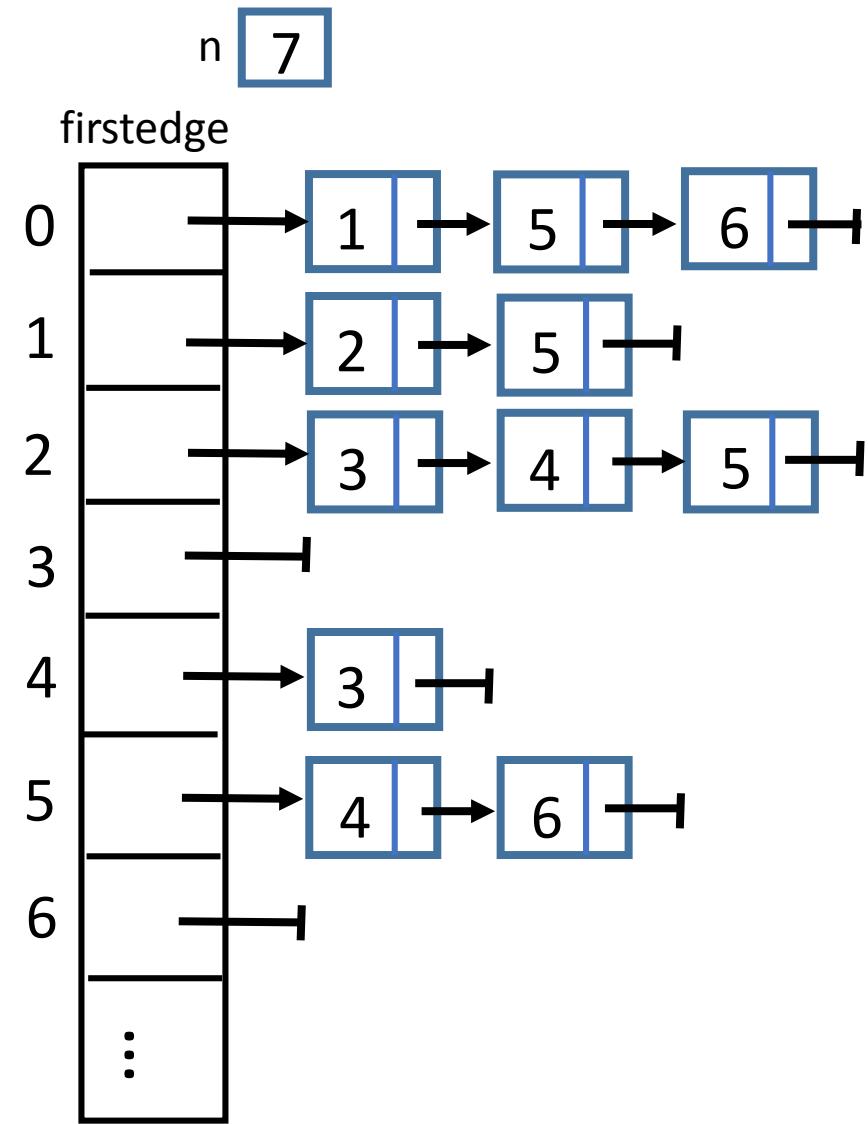
אם  $E \in E$ , אזי  $a$  קודם ל  $b$  בסדר הטופולוגי של  $G$ .

האם סדר טופולוגי הוא ייחיד? לא בהכרח.

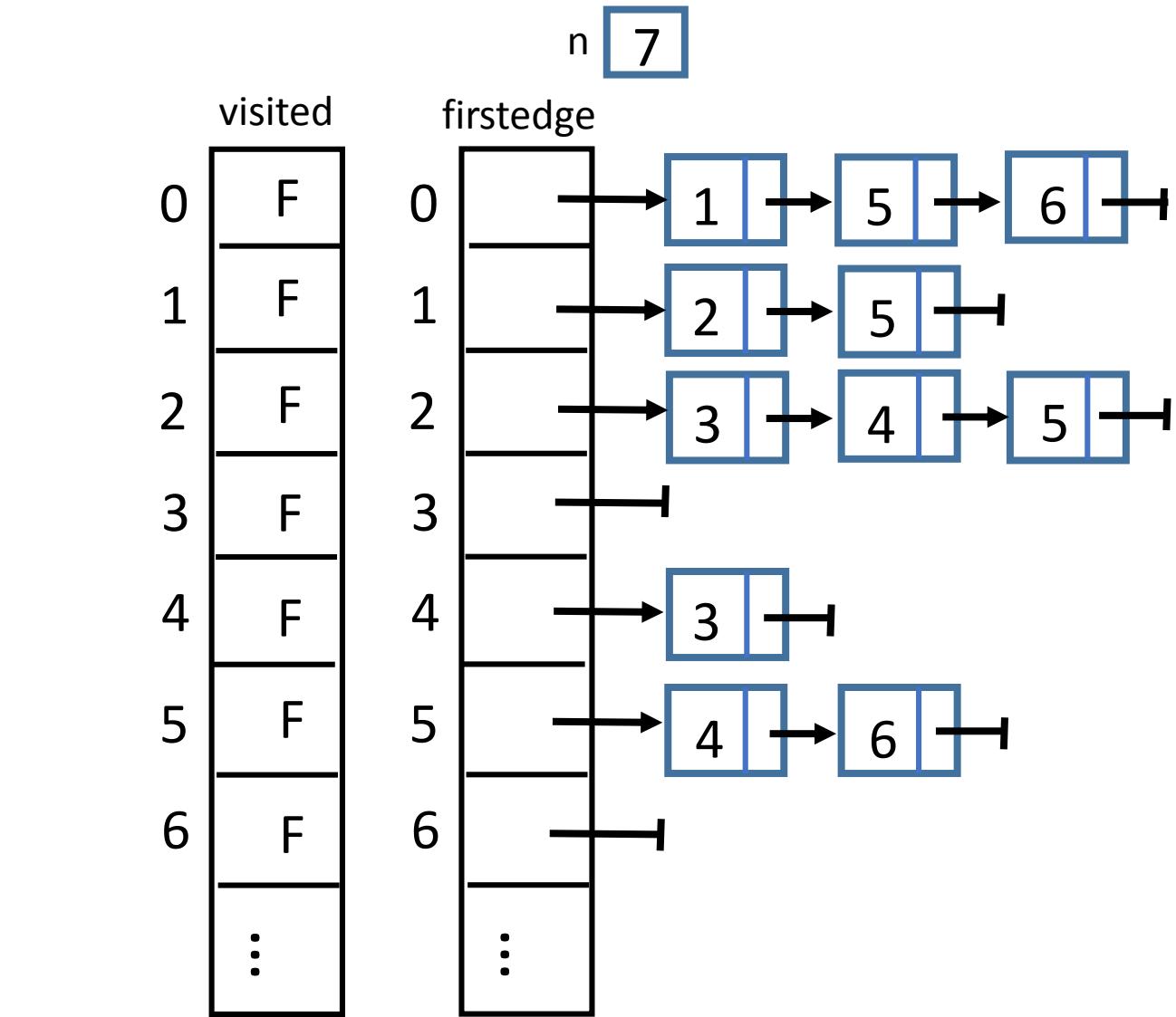
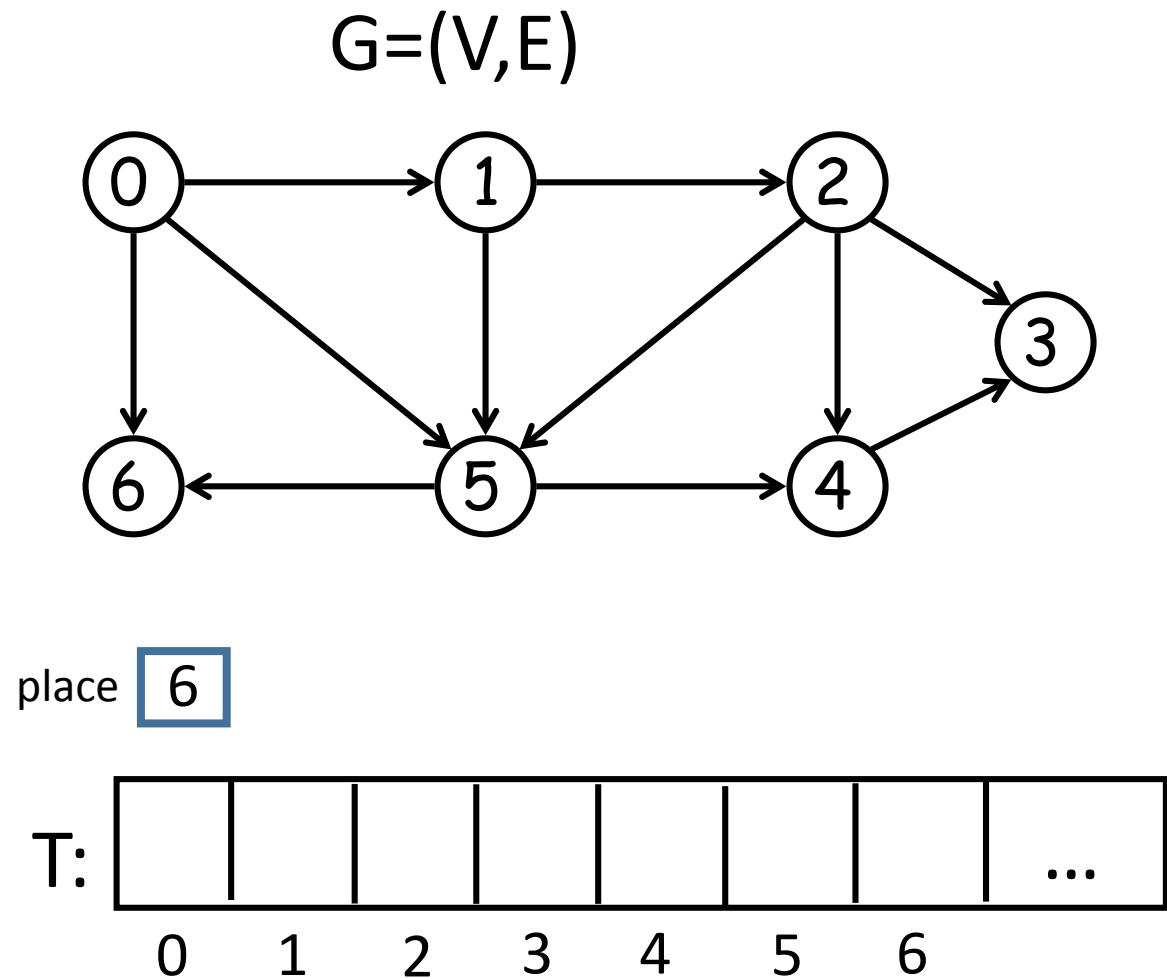
# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק



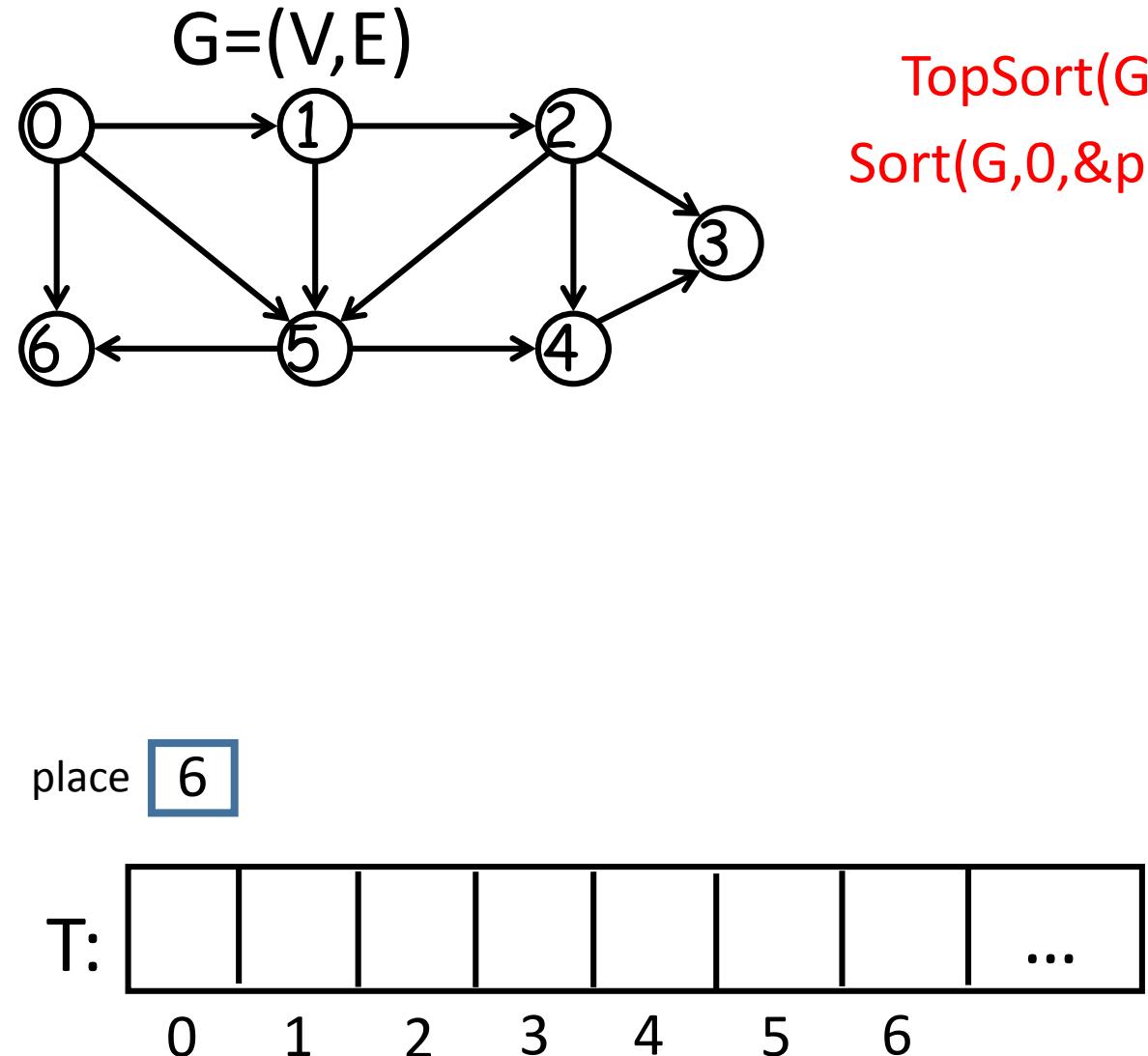
© פרופ' אביבית לוי



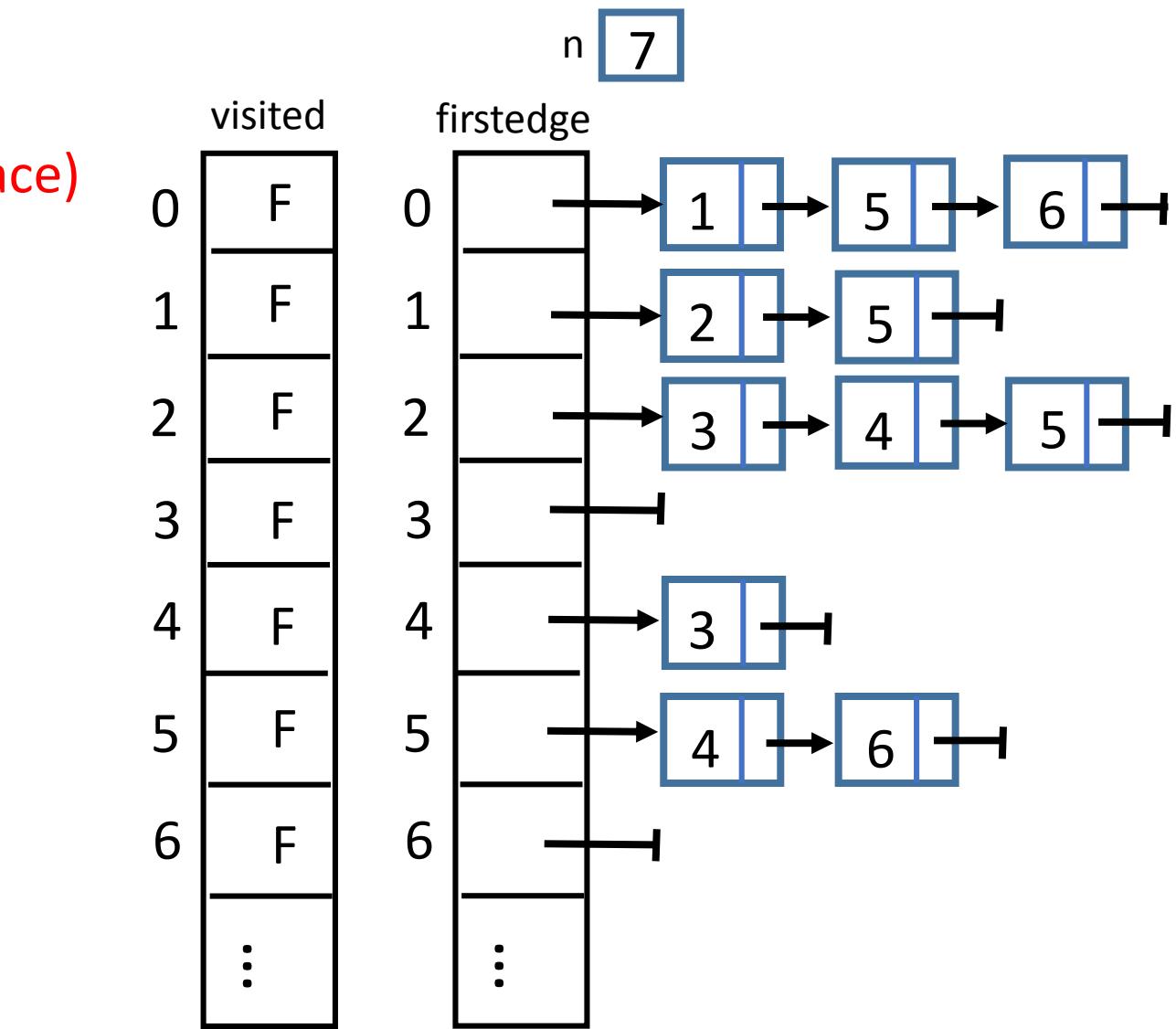
# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק



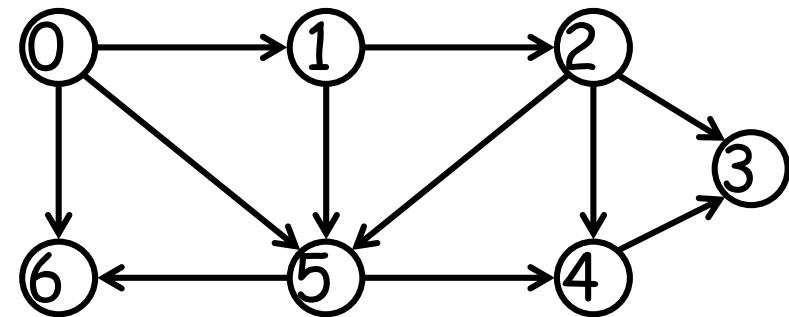
TopSort( $G$ )  
Sort( $G, 0, \&place$ )



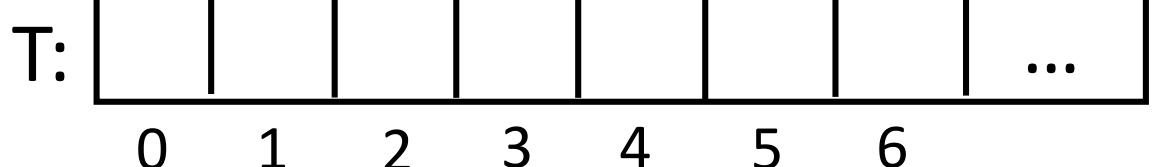
# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

1

$$G = (V, E)$$



place 6

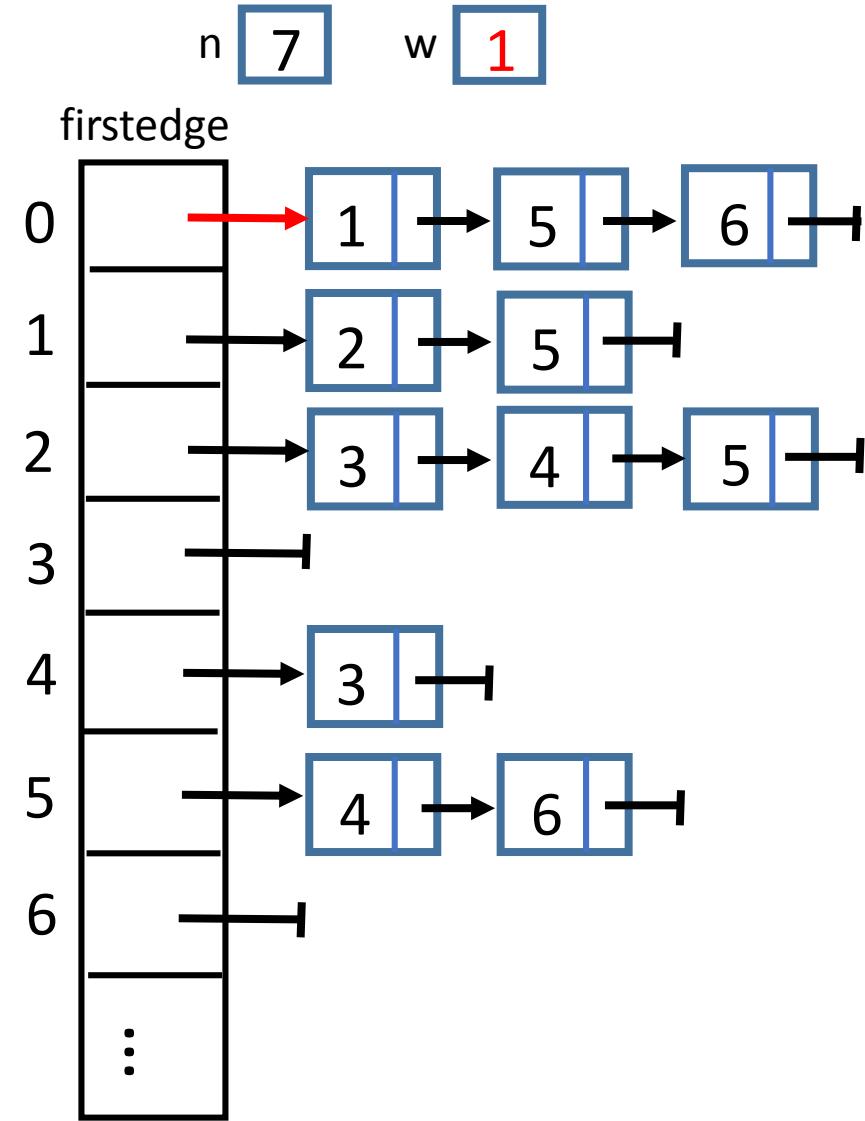


TopSort(G)  
Sort(G, 0, &place)  
Sort(G, 1, &place)

visited

0	T
1	F
2	F
3	F
4	F
5	F
6	F
:	

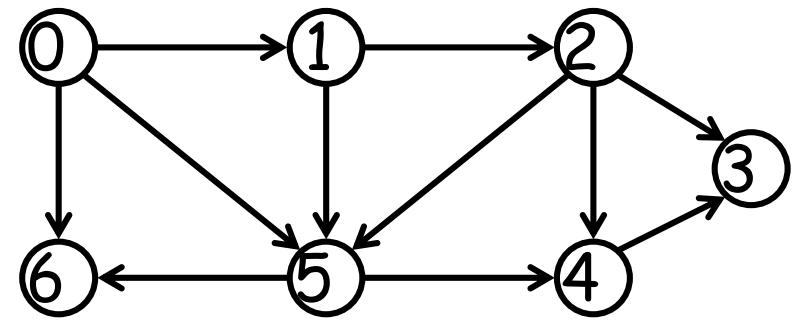
firstedge



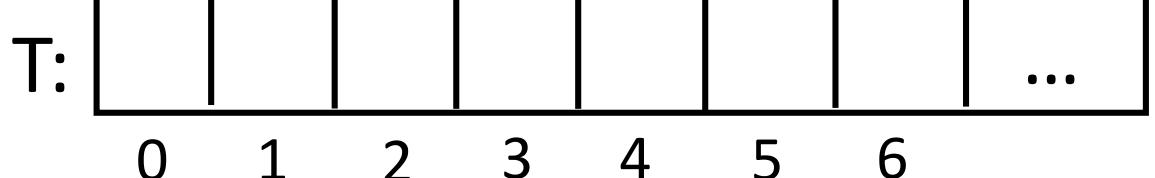
# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

1

$$G = (V, E)$$



place 6



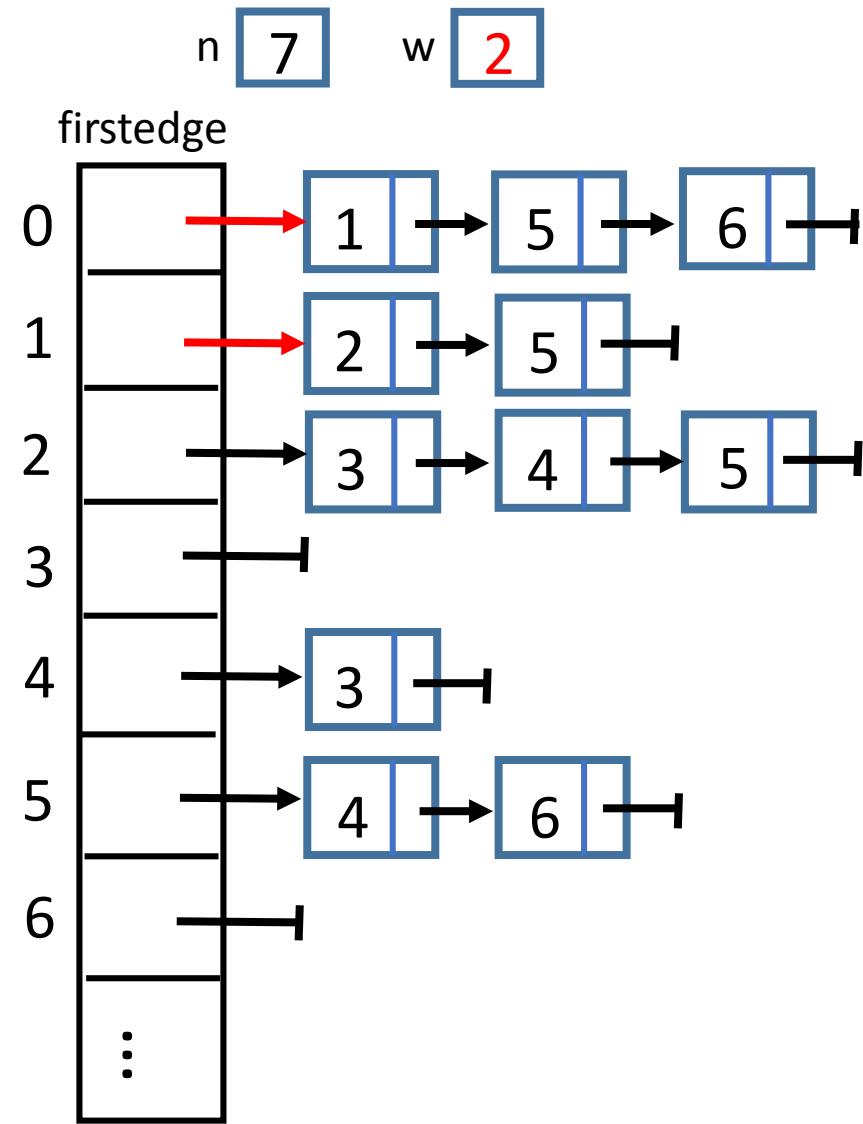
TopSort(G)  
 Sort(G, 0, &place)  
 Sort(G, 1, &place)  
 Sort(G, 2, &place)

© פרופ' אביבית לוי

visited

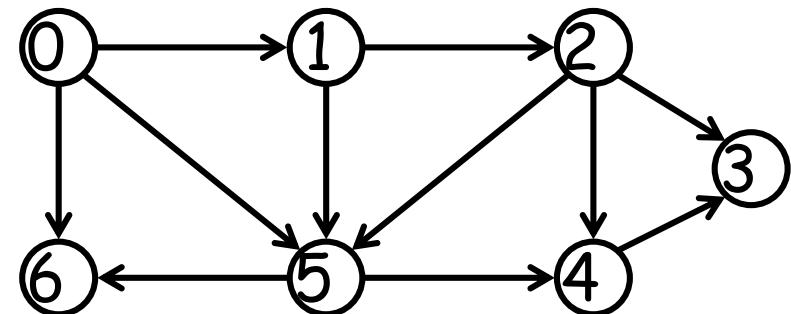
0	T
1	T
2	F
3	F
4	F
5	F
6	F
⋮	

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 6

T:

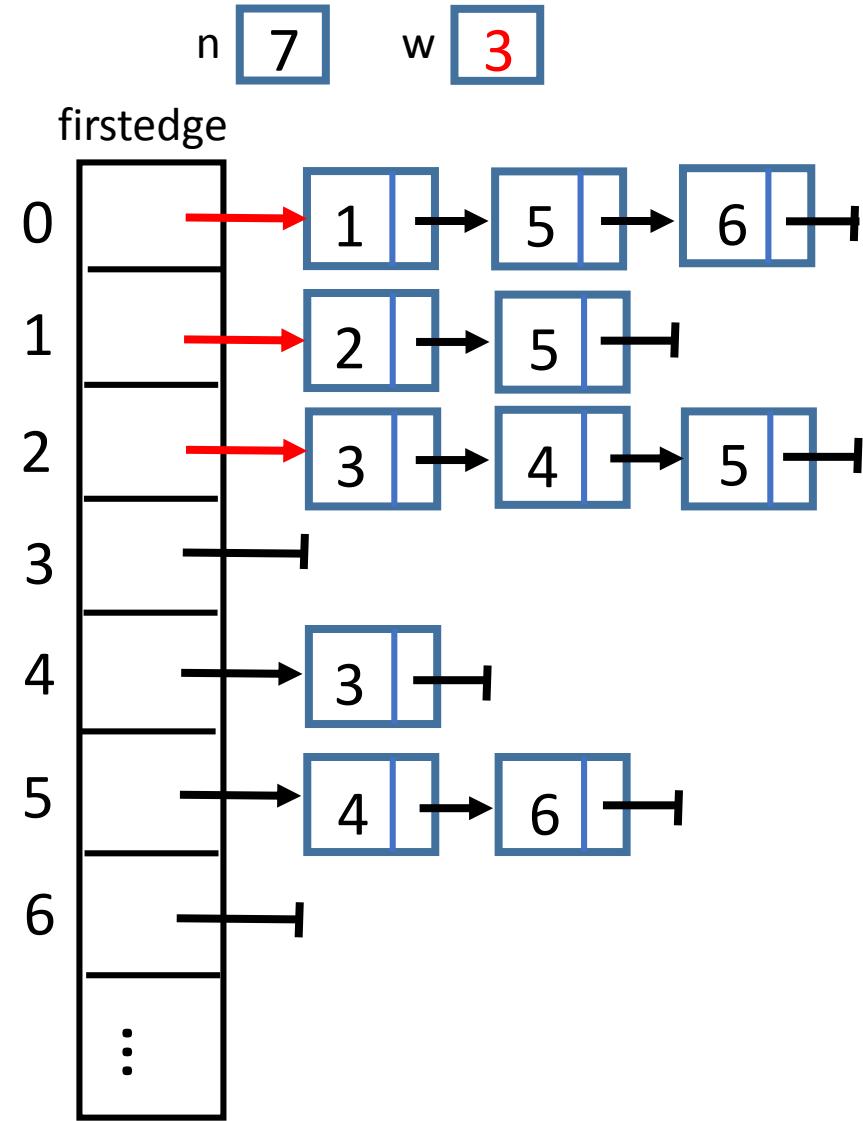
							...
0	1	2	3	4	5	6	

TopSort(G)  
 Sort(G, 0, &place)  
 Sort(G, 1, &place)  
 Sort(G, 2, &place)  
 Sort(G, 3, &place)

visited

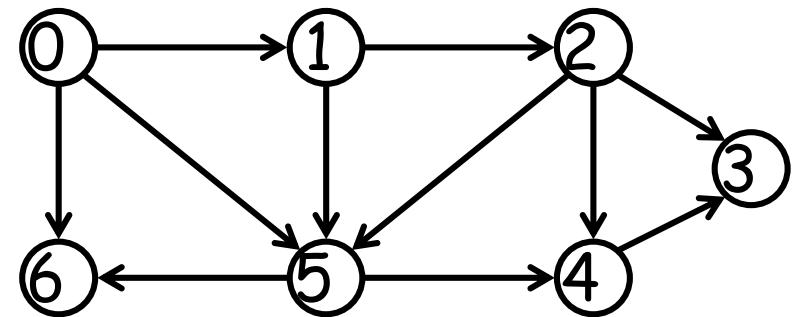
0	T
1	T
2	T
3	F
4	F
5	F
6	F
	⋮

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 5

T:

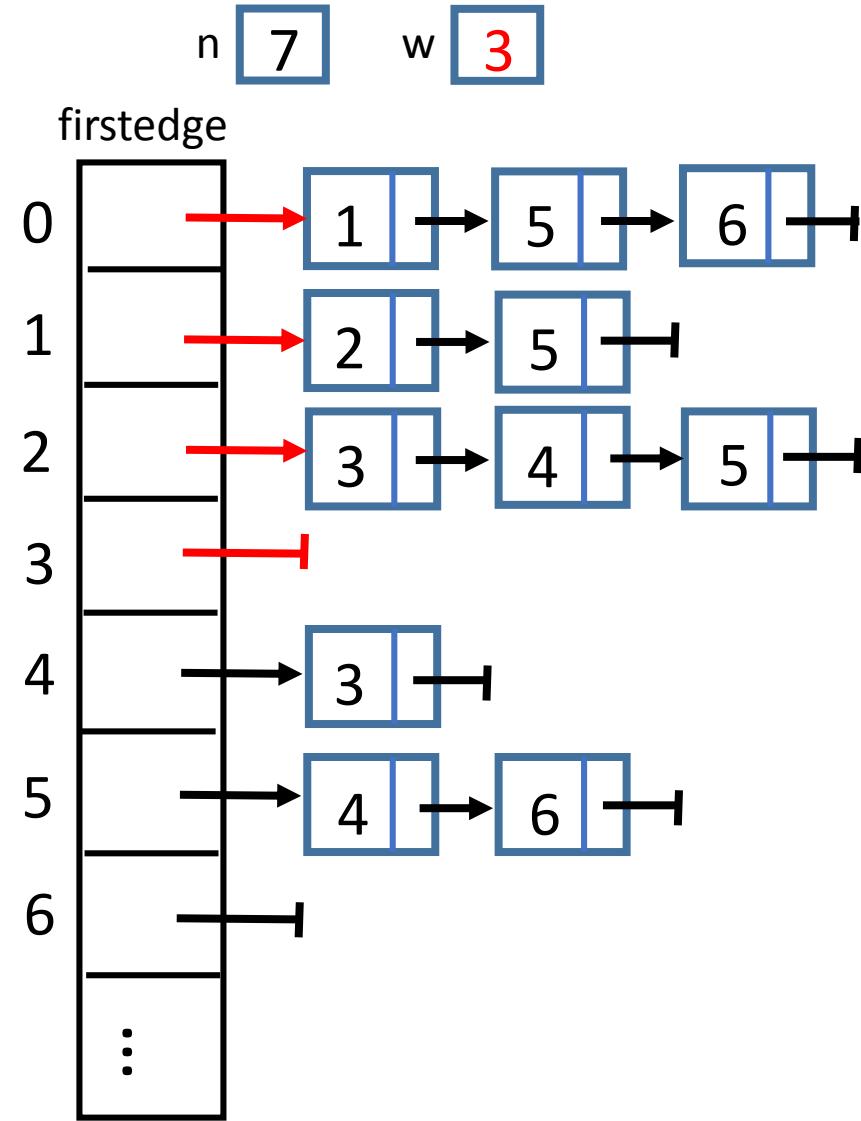
							3	...
0	1	2	3	4	5	6		

TopSort(G)  
 Sort(G, 0, &place)  
 Sort(G, 1, &place)  
 Sort(G, 2, &place)  
 Sort(G, 3, &place)

visited

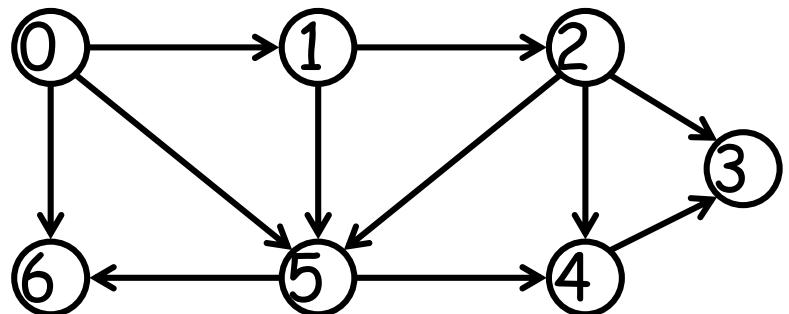
0	T
1	T
2	T
3	T
4	F
5	F
6	F
⋮	⋮

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 5

T:

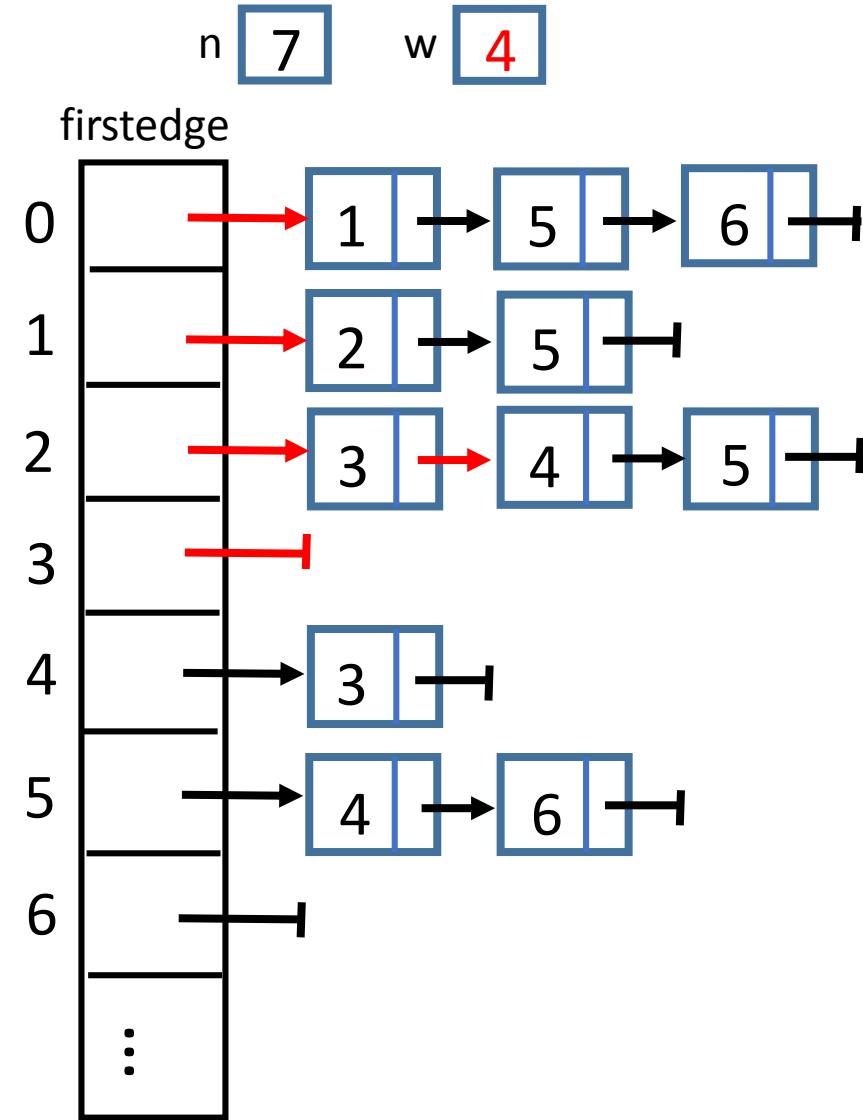
							3	...
0	1	2	3	4	5	6		

TopSort(G)  
 Sort(G, 0, &place)  
 Sort(G, 1, &place)  
 Sort(G, 2, &place)  
 Sort(G, 3, &place)  
 Sort(G, 4, &place)

visited

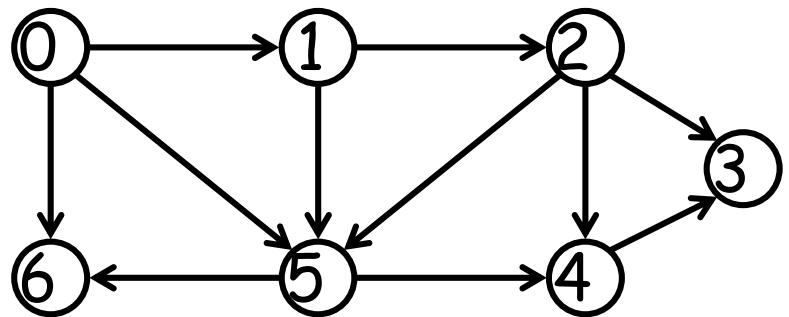
0	T
1	T
2	T
3	T
4	F
5	F
6	F
⋮	

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 5

T:

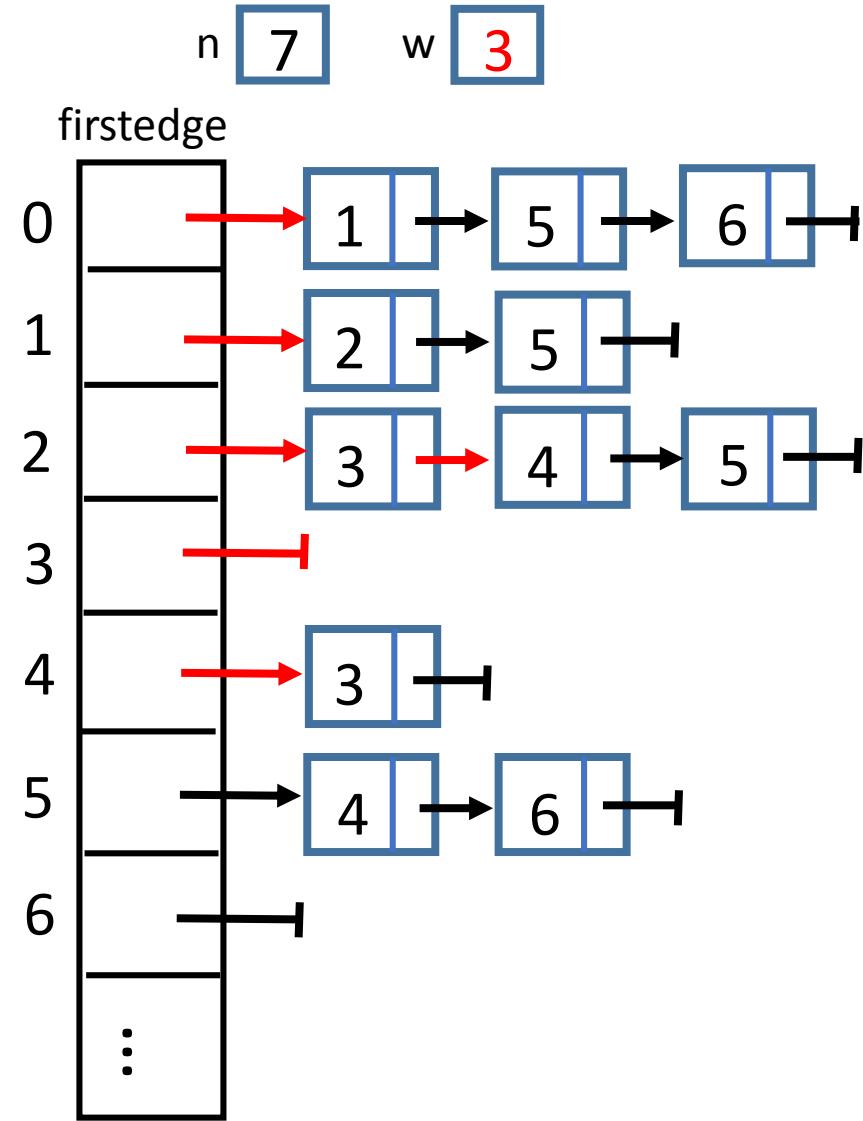
0	1	2	3	4	5	6	...

TopSort(G)  
 Sort(G, 0, &place)  
 Sort(G, 1, &place)  
 Sort(G, 2, &place)  
 Sort(G, 3, &place)  
 Sort(G, 4, &place)

visited

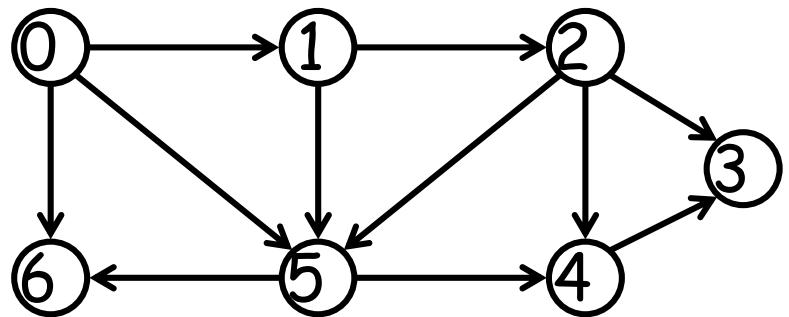
0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	F
6	F
⋮	⋮

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 4

T:

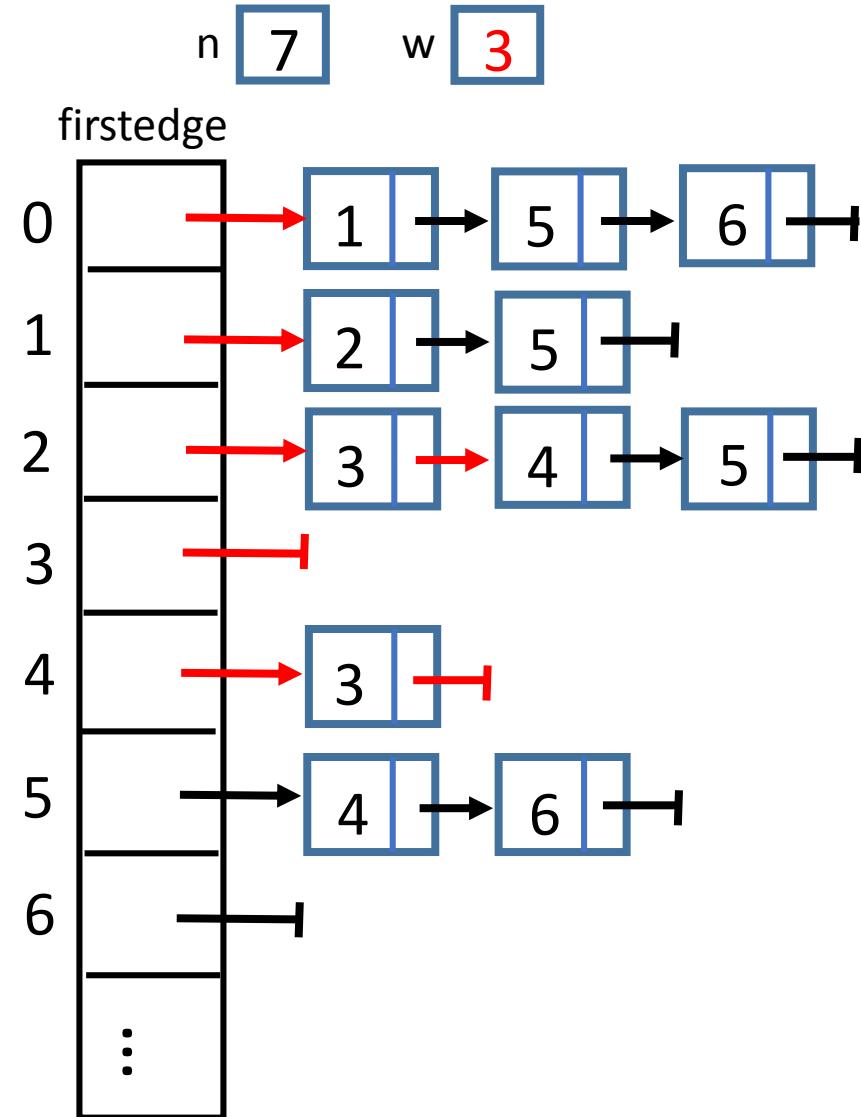
							4	3	...
0	1	2	3	4	5	6			

TopSort(G)  
 Sort(G, 0, &place)  
 Sort(G, 1, &place)  
 Sort(G, 2, &place)  
 Sort(G, 3, &place)  
 Sort(G, 4, &place)

visited

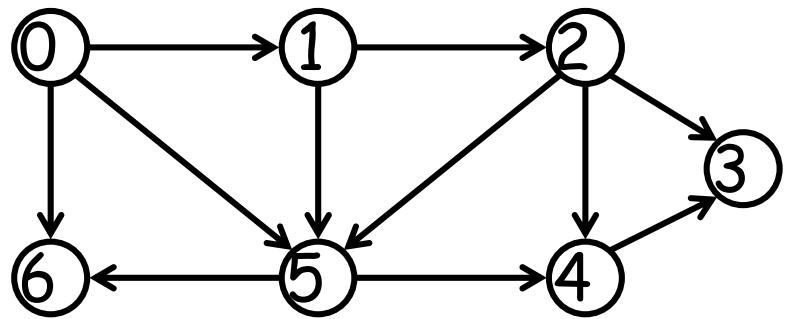
0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	F
6	F
⋮	⋮

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 4

T:

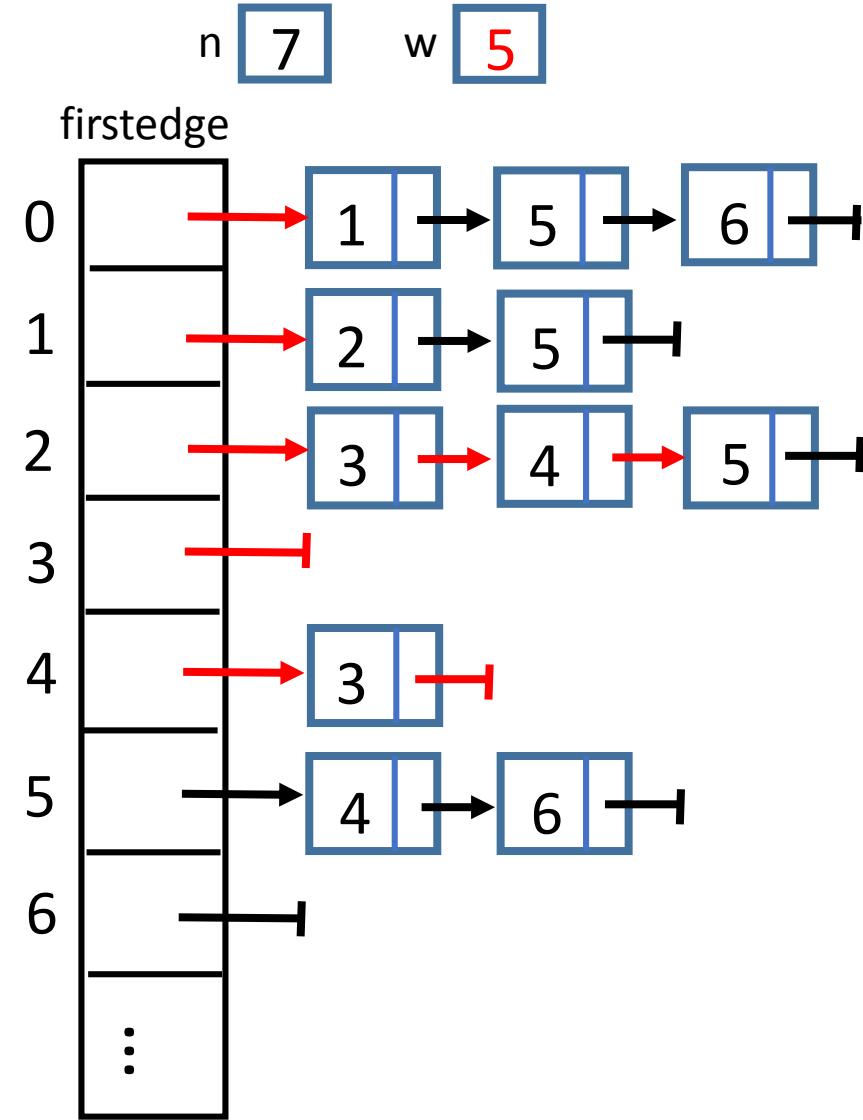
							4	3	...
0	1	2	3	4	5	6			

TopSort(G)  
 Sort(G,0,&place)  
 Sort(G,1,&place)  
 Sort(G,2,&place)  
 Sort(G,3,&place)  
 Sort(G,4,&place)  
 Sort(G,5,&place)

visited

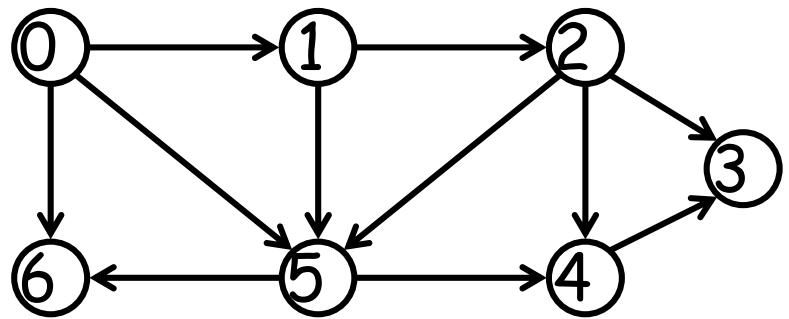
0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	F
6	F
	⋮

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 4

T:

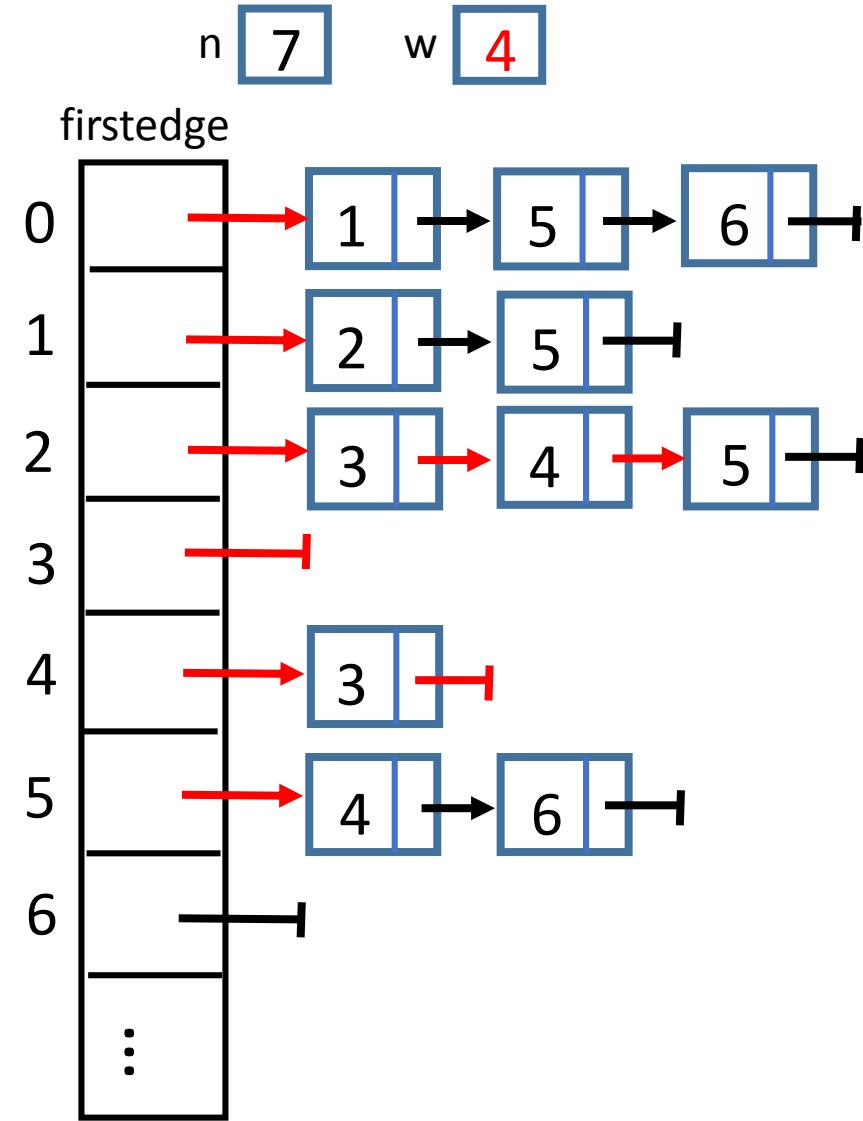
							4	3	...
0	1	2	3	4	5	6			

TopSort(G)  
 Sort(G,0,&place)  
 Sort(G,1,&place)  
 Sort(G,2,&place)  
 Sort(G,3,&place)  
 Sort(G,4,&place)  
 Sort(G,5,&place)

visited

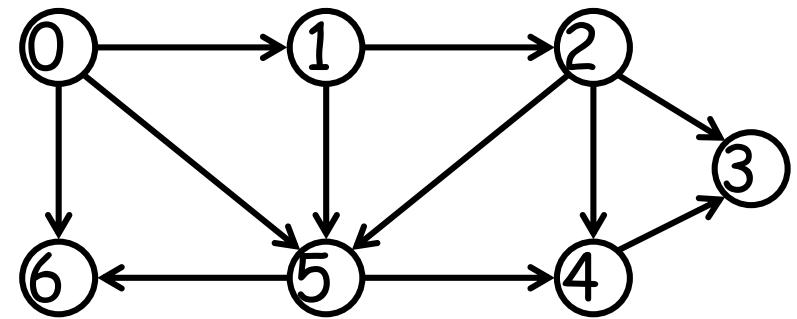
0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	T
6	F
⋮	

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 4

T:

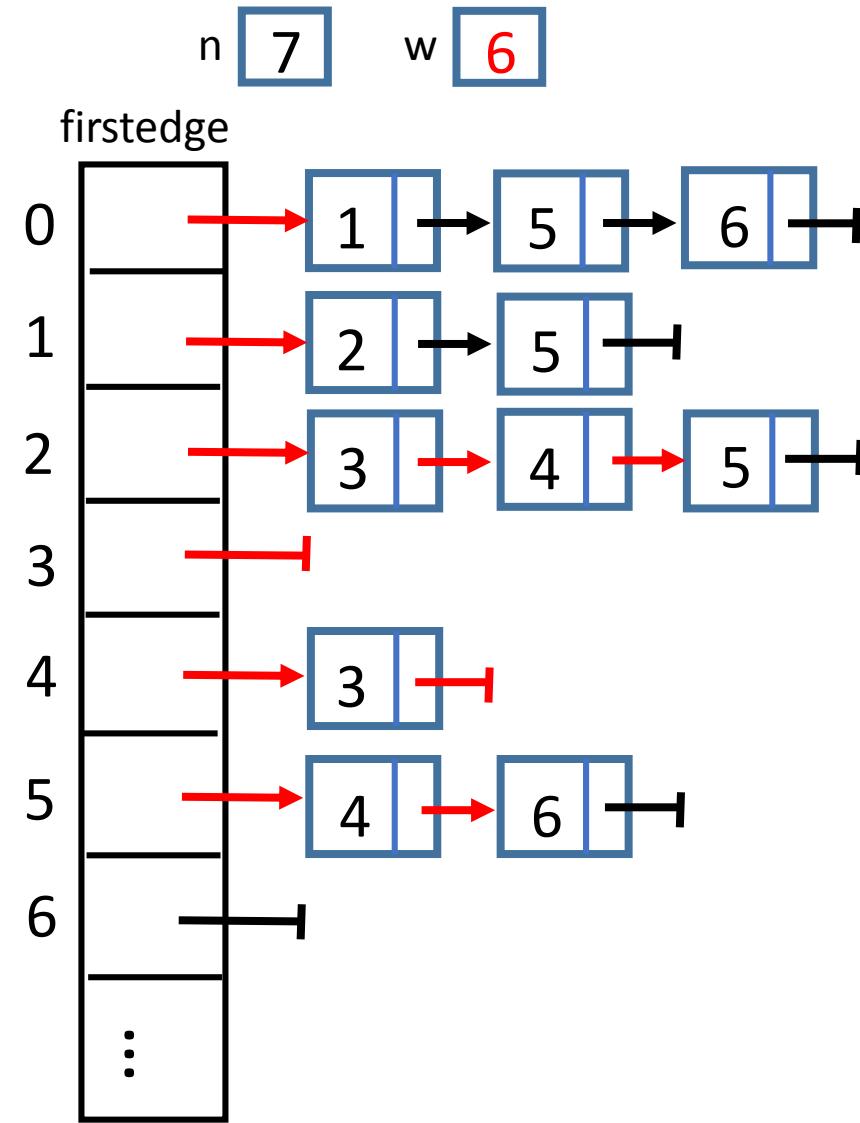
							4	3	...
0	1	2	3	4	5	6			

TopSort(G)  
 Sort(G,0,&place)  
 Sort(G,1,&place)  
 Sort(G,2,&place)  
 Sort(G,3,&place)  
 Sort(G,4,&place)  
 Sort(G,5,&place)  
 Sort(G,6,&place)

visited

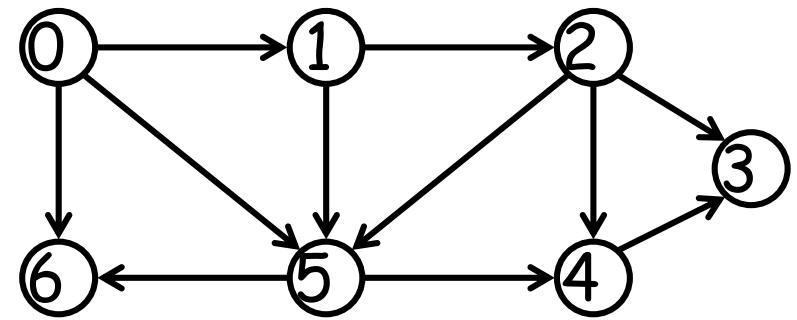
0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	T
6	F
⋮	

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 3

T:

					6	4	3	...
0	1	2	3	4	5	6		

TopSort(G)  
 Sort(G,0,&place)  
 Sort(G,1,&place)  
 Sort(G,2,&place)  
 Sort(G,3,&place)  
 Sort(G,4,&place)  
 Sort(G,5,&place)  
 Sort(G,6,&place)

visited

0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	T
6	T
⋮	⋮

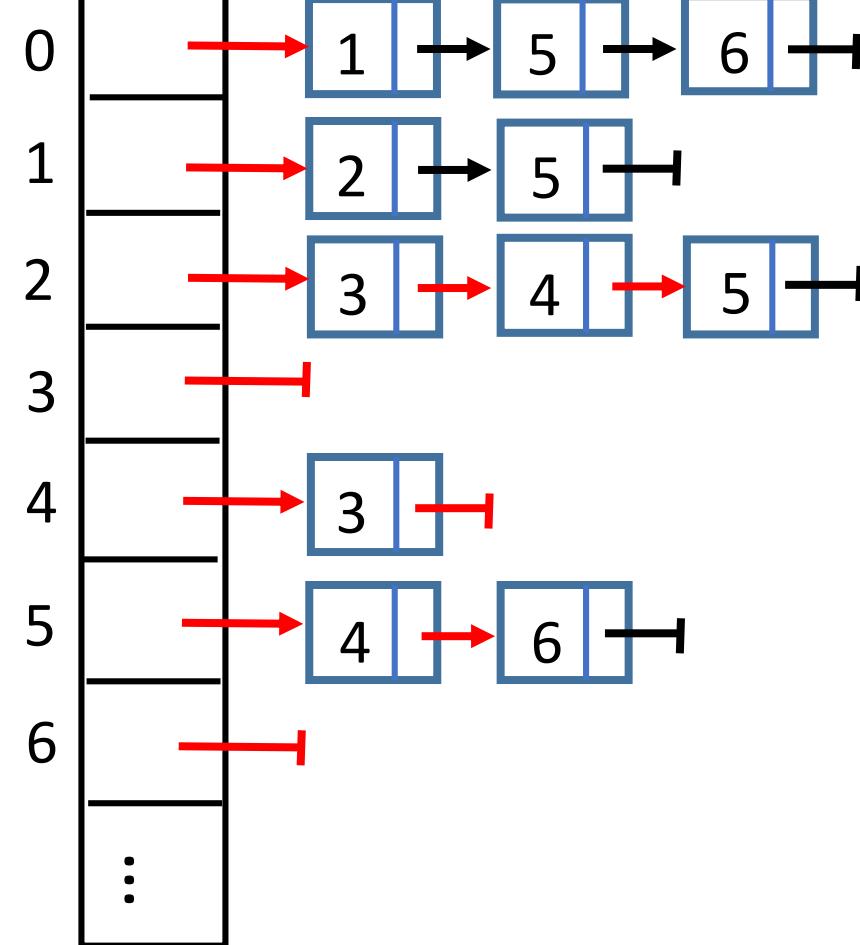
n

7

w

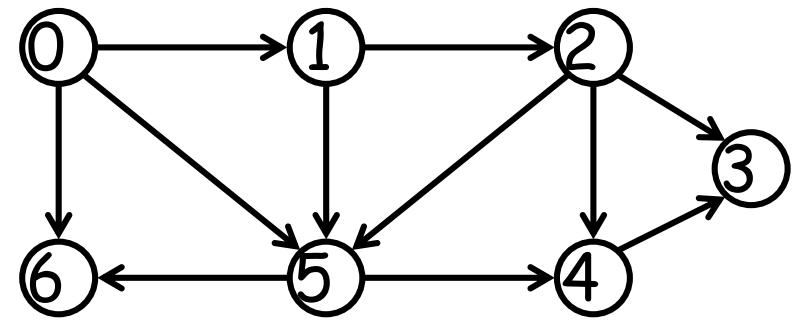
6

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 3

T:

					6	4	3	...
0	1	2	3	4	5	6		

TopSort(G)  
 Sort(G,0,&place)  
 Sort(G,1,&place)  
 Sort(G,2,&place)  
 Sort(G,3,&place)  
 Sort(G,4,&place)  
**Sort(G,5,&place)**  
 Sort(G,6,&place)

visited

0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	T
6	T
⋮	⋮

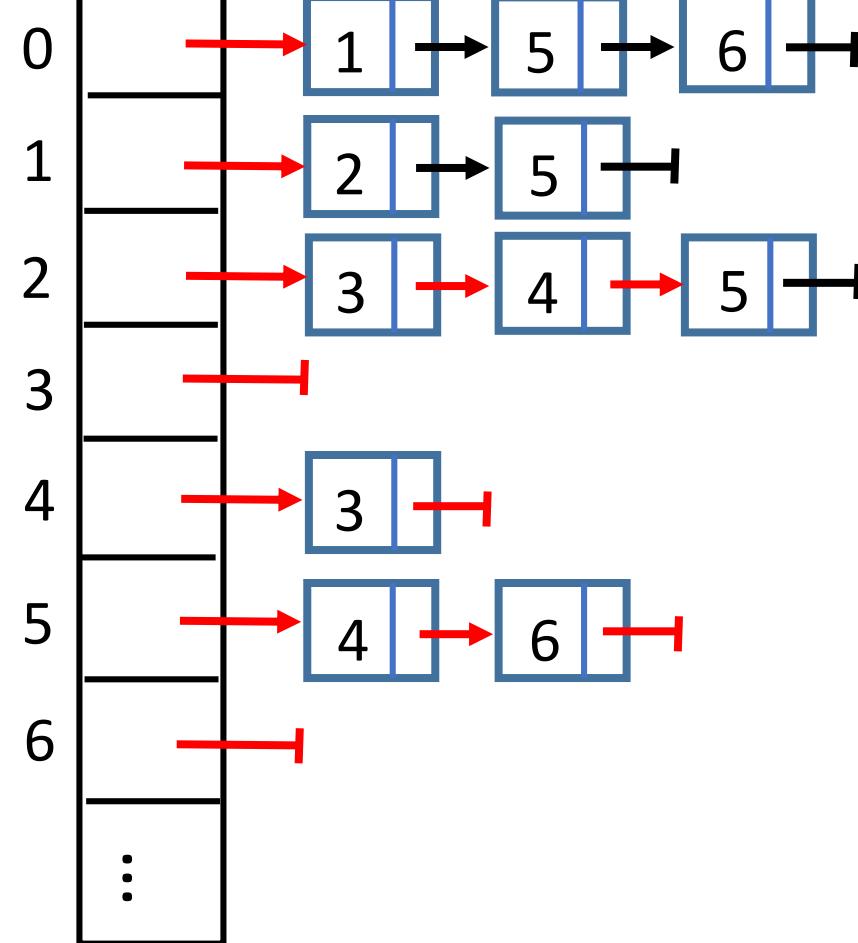
n

7

w

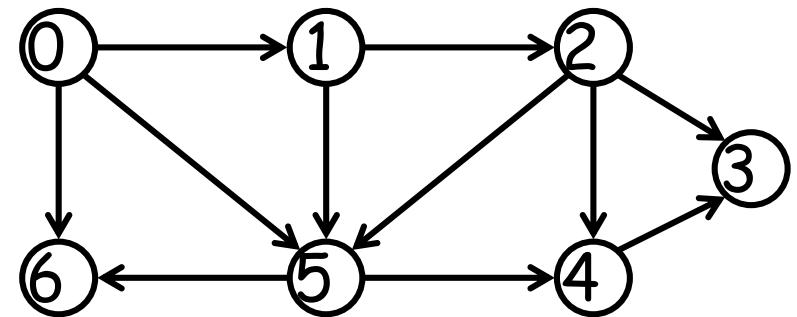
6

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 2

T:

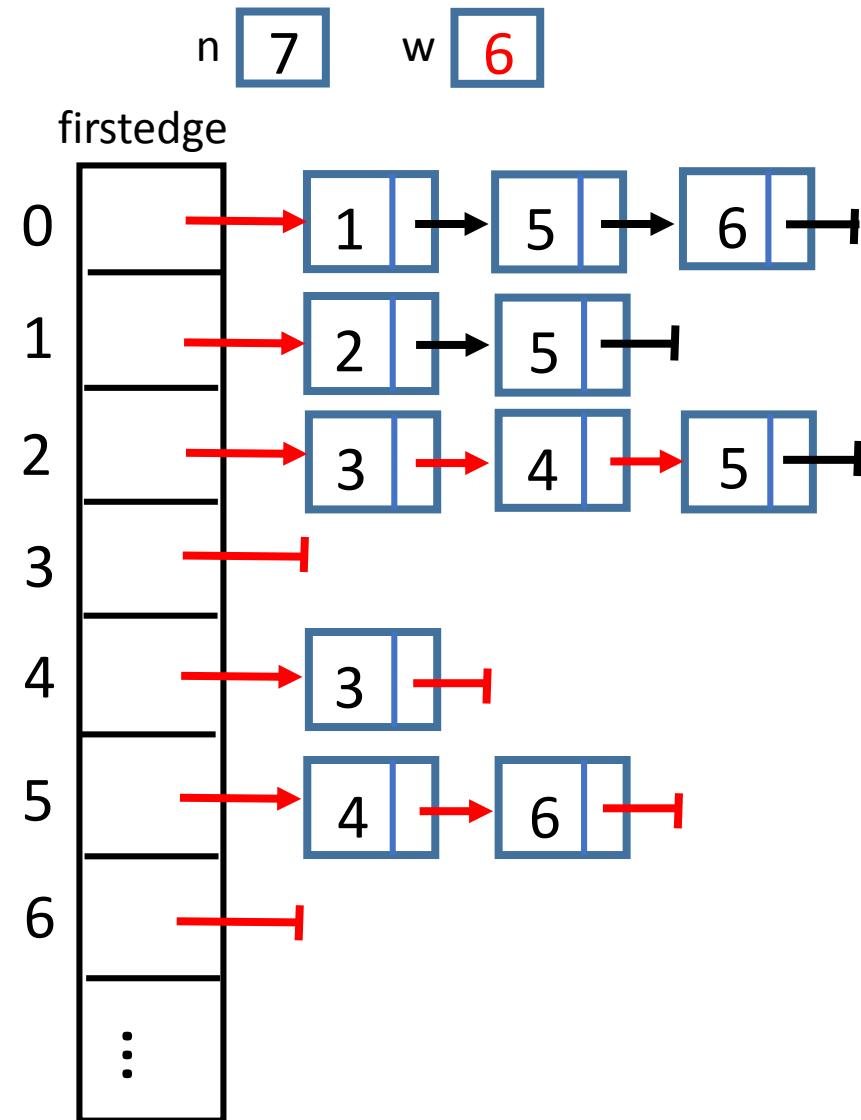
				5	6	4	3	...
0	1	2	3	4	5	6		

TopSort(G)  
 Sort(G,0,&place)  
 Sort(G,1,&place)  
 Sort(G,2,&place)  
 Sort(G,3,&place)  
 Sort(G,4,&place)  
**Sort(G,5,&place)**  
 Sort(G,6,&place)

visited

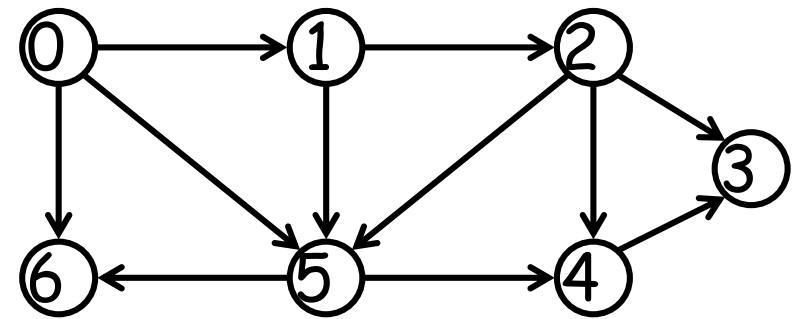
0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	T
6	T
⋮	⋮

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 2

T:

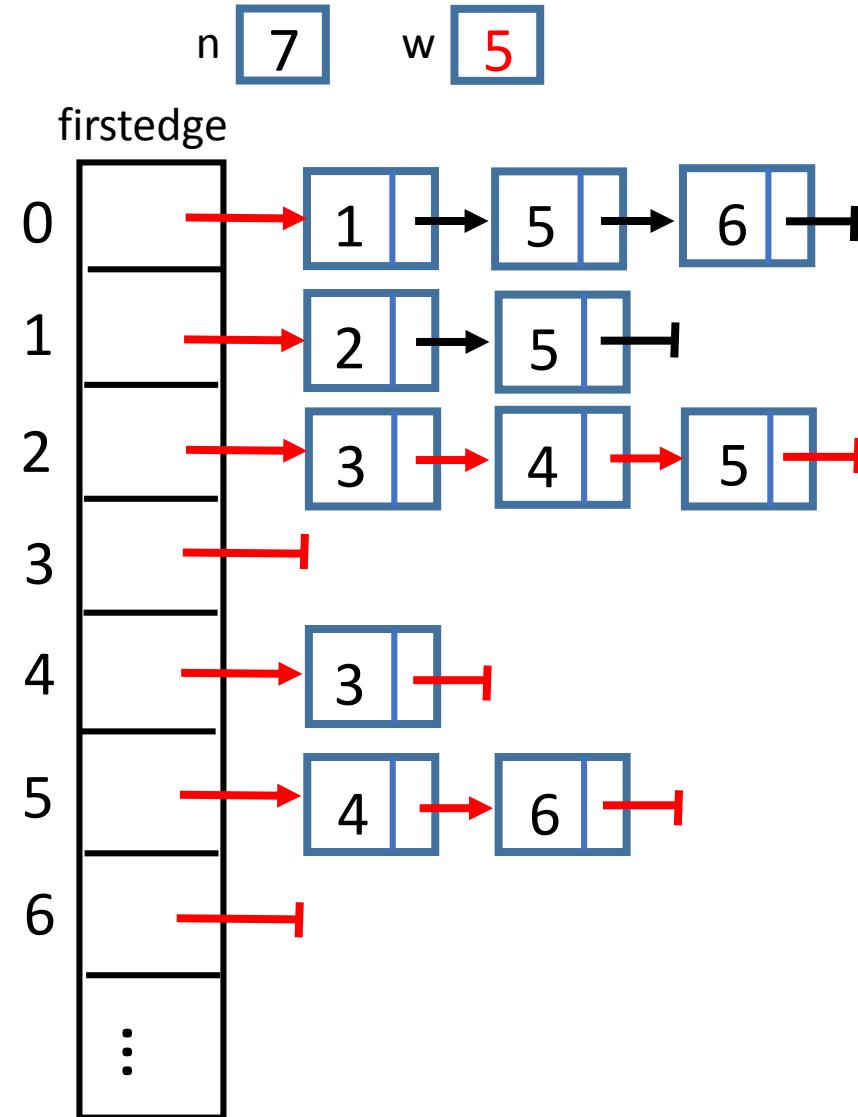
				5	6	4	3	...
0	1	2	3	4	5	6		

TopSort(G)  
 Sort(G,0,&place)  
 Sort(G,1,&place)  
 Sort(G,2,&place)  
 Sort(G,3,&place)  
 Sort(G,4,&place)  
 Sort(G,5,&place)  
 Sort(G,6,&place)

visited

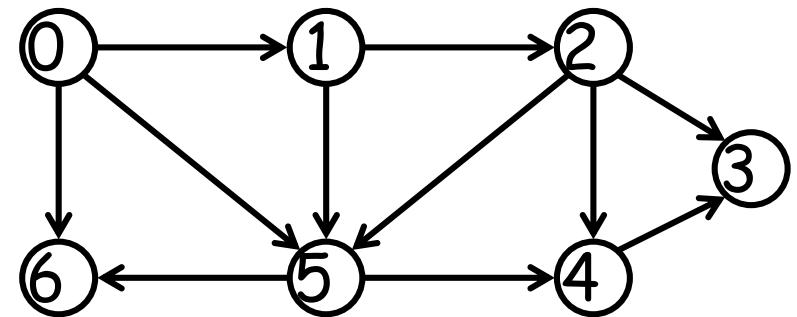
0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	T
6	T
⋮	⋮

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 1

T:

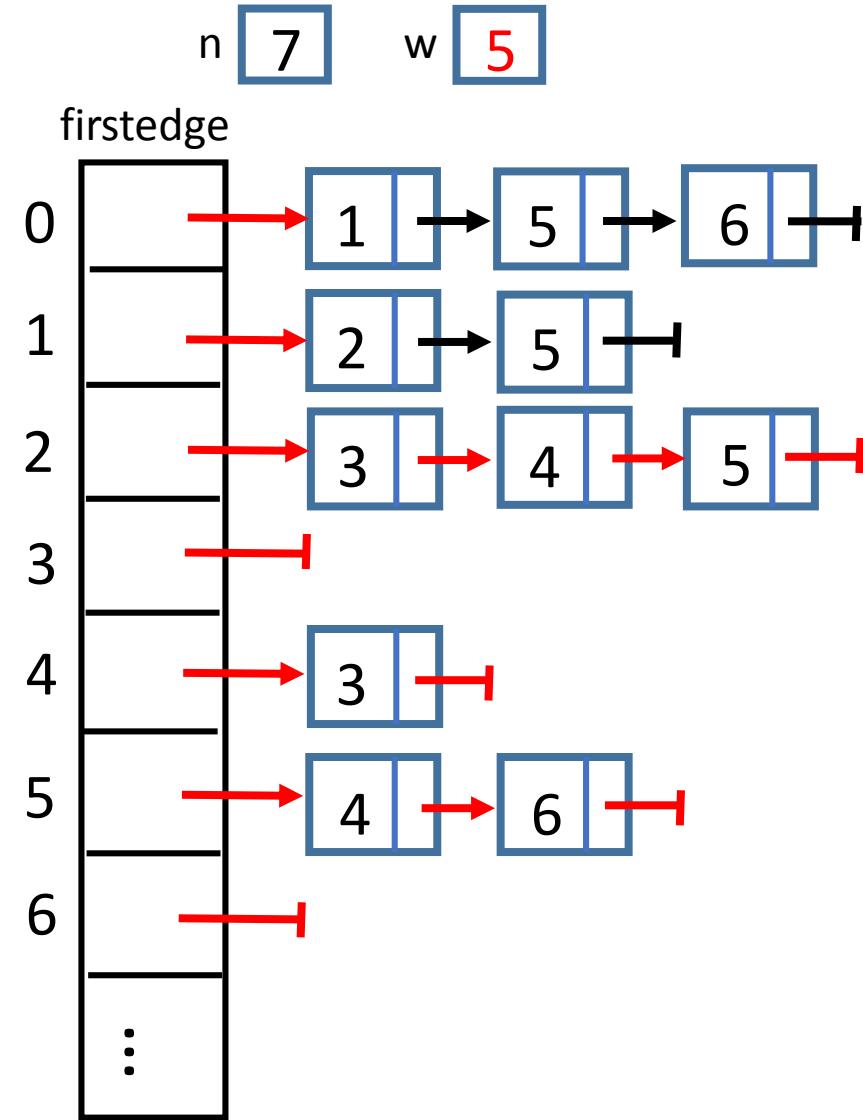
			2	5	6	4	3	...
0	1	2	3	4	5	6		

TopSort(G)  
 Sort(G,0,&place)  
 Sort(G,1,&place)  
 Sort(G,2,&place)  
 Sort(G,3,&place)  
 Sort(G,4,&place)  
 Sort(G,5,&place)  
 Sort(G,6,&place)

visited

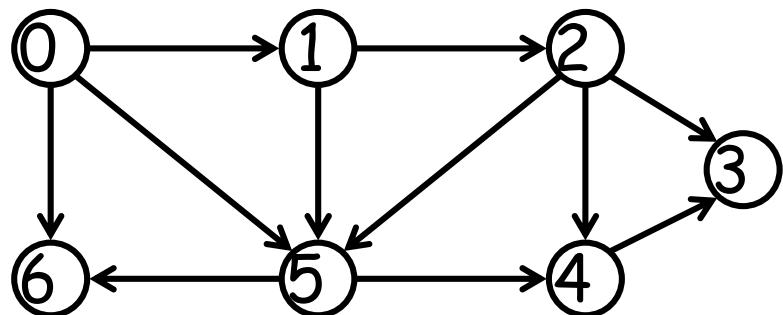
0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	T
6	T
⋮	⋮

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 1

T:

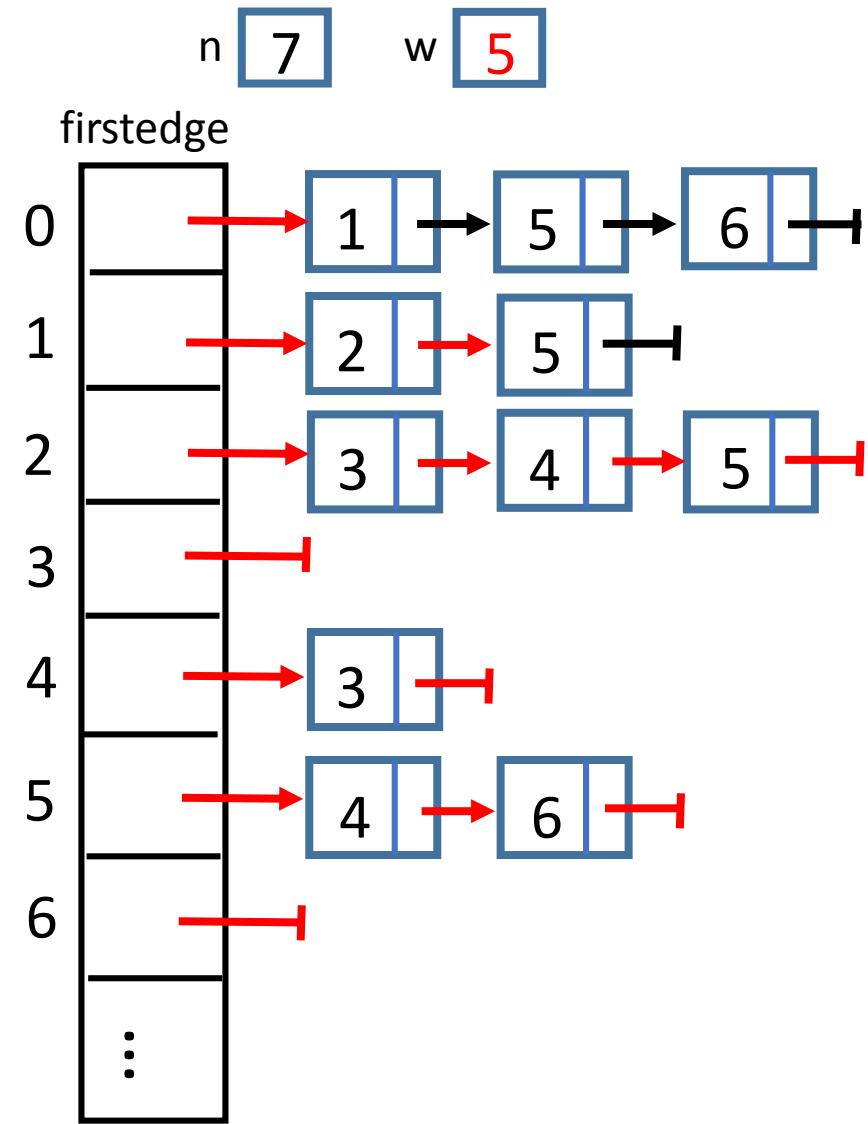
			2	5	6	4	3	...
0	1	2	3	4	5	6		

TopSort(G)  
 Sort(G, 0, &place)  
 Sort(G, 1, &place)  
 Sort(G, 2, &place)  
 Sort(G, 3, &place)  
 Sort(G, 4, &place)  
 Sort(G, 5, &place)  
 Sort(G, 6, &place)

visited

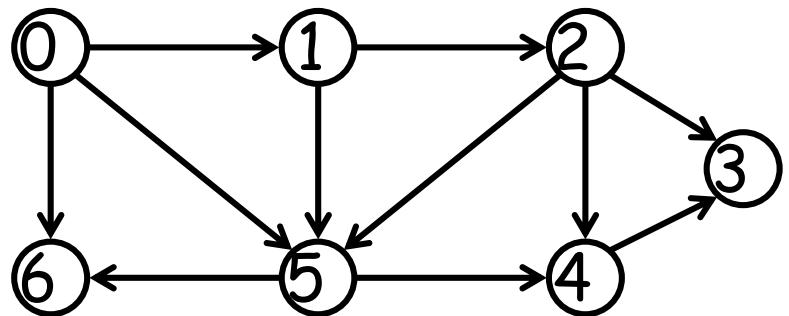
0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	T
6	T
⋮	⋮

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 0

T:   
 0 1 2 3 5 6 4 3 ...

TopSort(G)  
 Sort(G,0,&place)  
 Sort(G,1,&place)  
 Sort(G,2,&place)  
 Sort(G,3,&place)  
 Sort(G,4,&place)  
 Sort(G,5,&place)  
 Sort(G,6,&place)

visited

0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	T
6	T
⋮	⋮

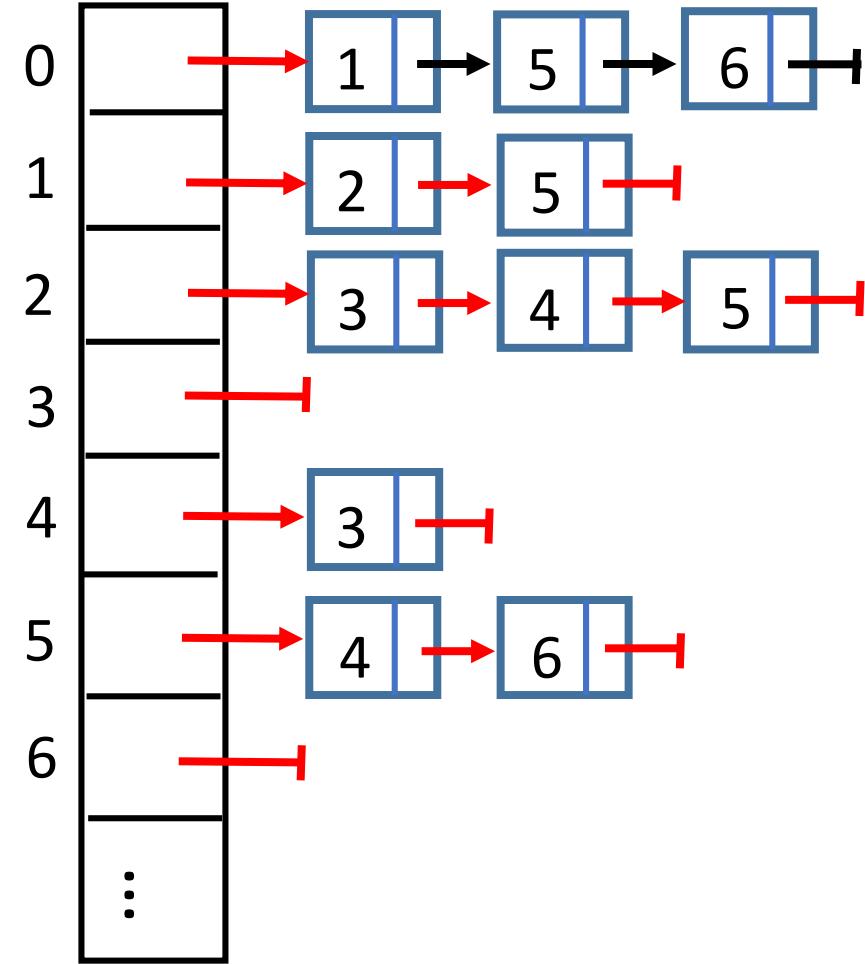
n

7

w

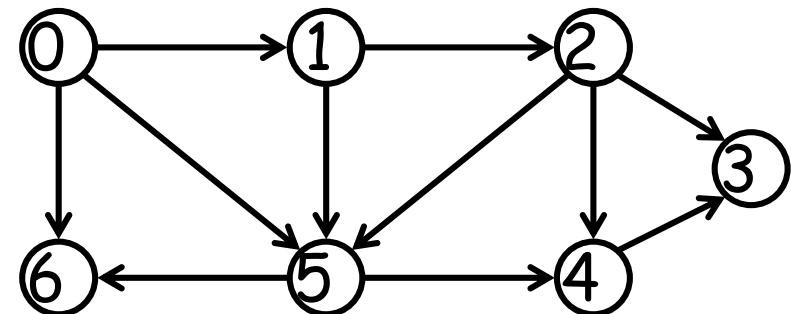
5

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 0

T:  

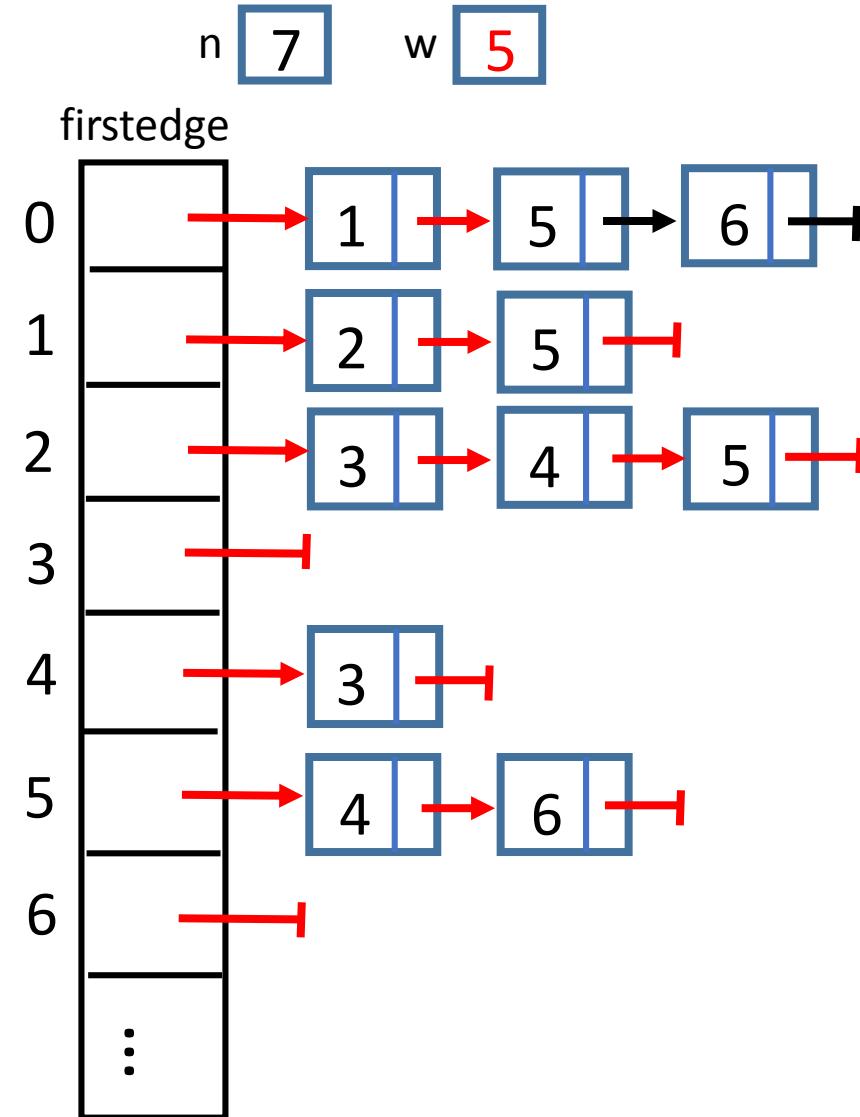
0	1	2	5	6	4	3	...
---	---	---	---	---	---	---	-----

TopSort(G)  
Sort(G, 0, &place)  
Sort(G, 1, &place)  
Sort(G, 2, &place)  
Sort(G, 3, &place)  
Sort(G, 4, &place)  
Sort(G, 5, &place)  
Sort(G, 6, &place)

visited

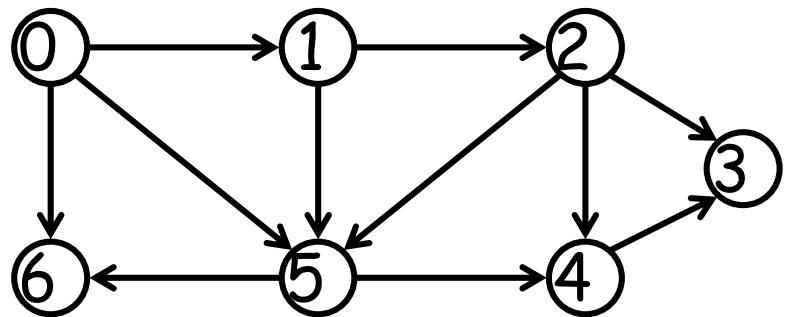
0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	T
6	T
⋮	⋮

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place 0

T:  

0	1	2	5	6	4	3	...
---	---	---	---	---	---	---	-----

TopSort(G)  
Sort(G, 0, &place)  
Sort(G, 1, &place)  
Sort(G, 2, &place)  
Sort(G, 3, &place)  
Sort(G, 4, &place)  
Sort(G, 5, &place)  
Sort(G, 6, &place)

visited

0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	T
6	T
⋮	⋮

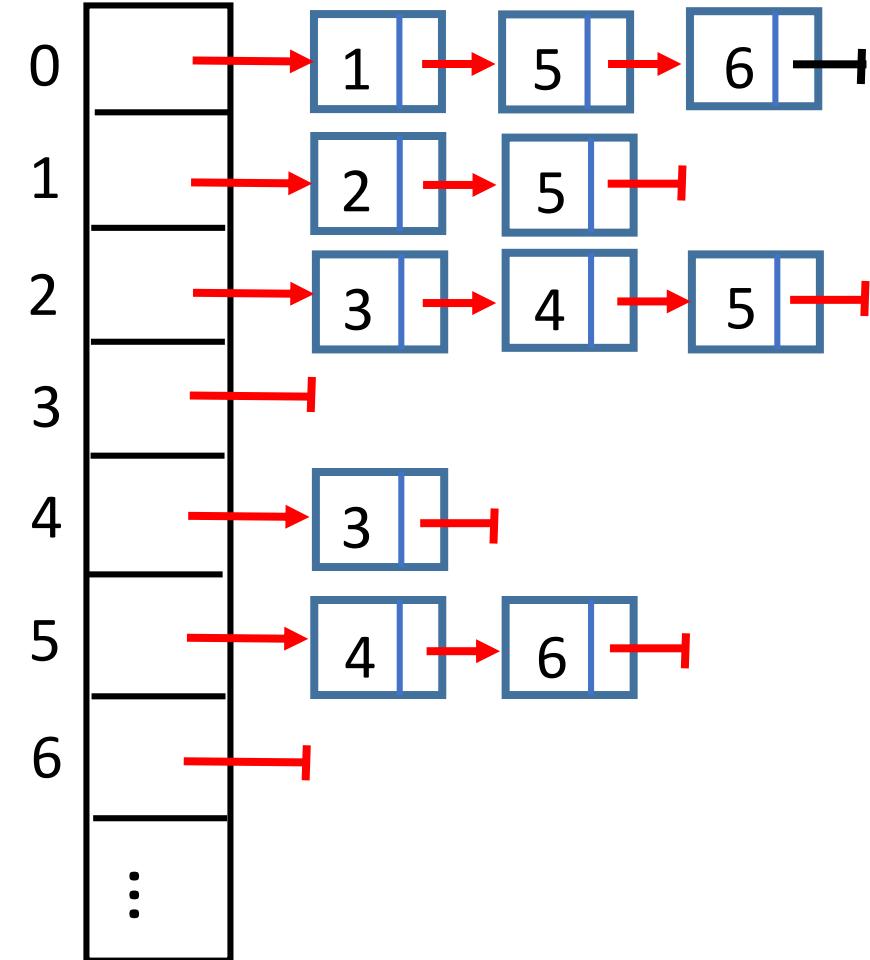
n

7

w

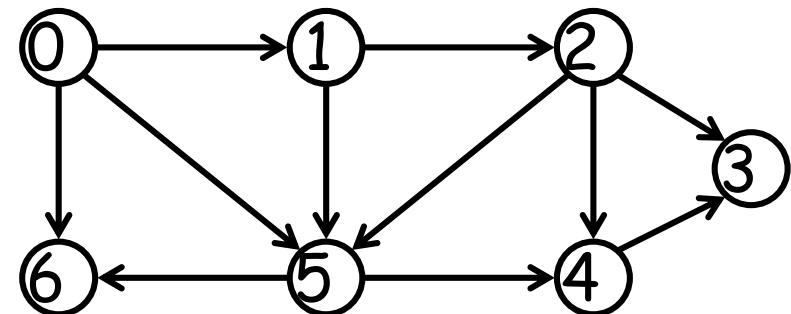
6

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place -1

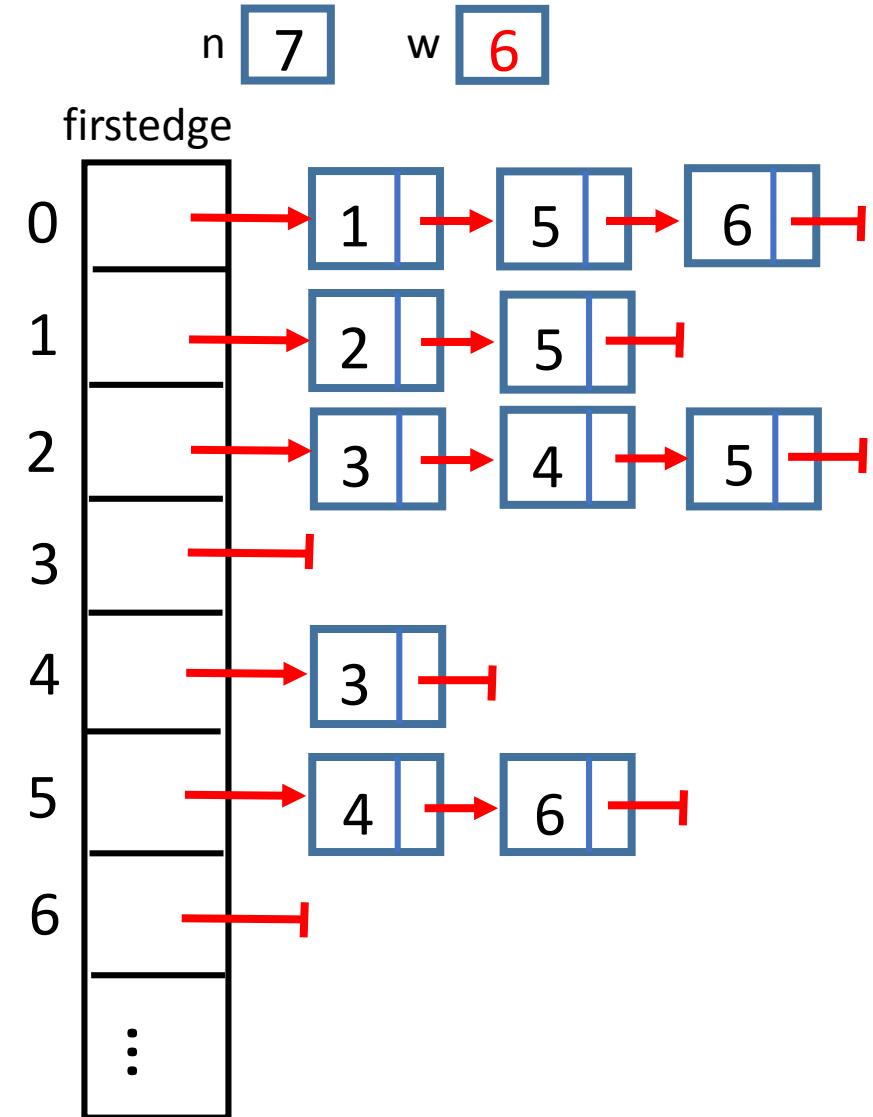
T: 0 | 1 | 2 | 5 | 6 | 4 | 3 | ...

TopSort(G)  
 Sort(G, 0, &place)  
 Sort(G, 1, &place)  
 Sort(G, 2, &place)  
 Sort(G, 3, &place)  
 Sort(G, 4, &place)  
 Sort(G, 5, &place)  
 Sort(G, 6, &place)

visited

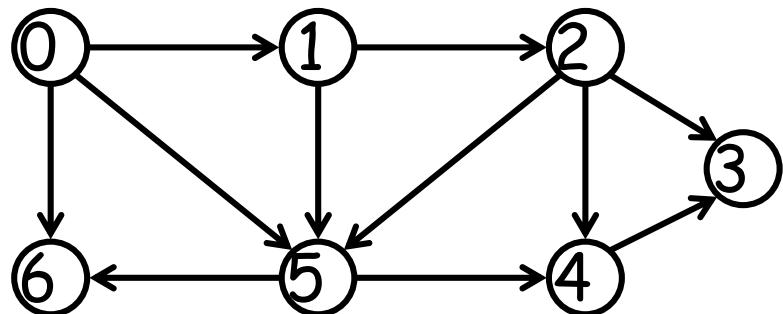
0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	T
6	T
⋮	⋮

firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף בעומק

$$G = (V, E)$$



place -1

T: 0 | 1 | 2 | 5 | 6 | 4 | 3 | ...

TopSort(G)

Sort(G,0,&place)  
 Sort(G,1,&place)  
 Sort(G,2,&place)  
 Sort(G,3,&place)  
 Sort(G,4,&place)  
 Sort(G,5,&place)  
 Sort(G,6,&place)

visited

0	T
1	T
2	T
3	T
4	T
5	T
6	T
⋮	⋮

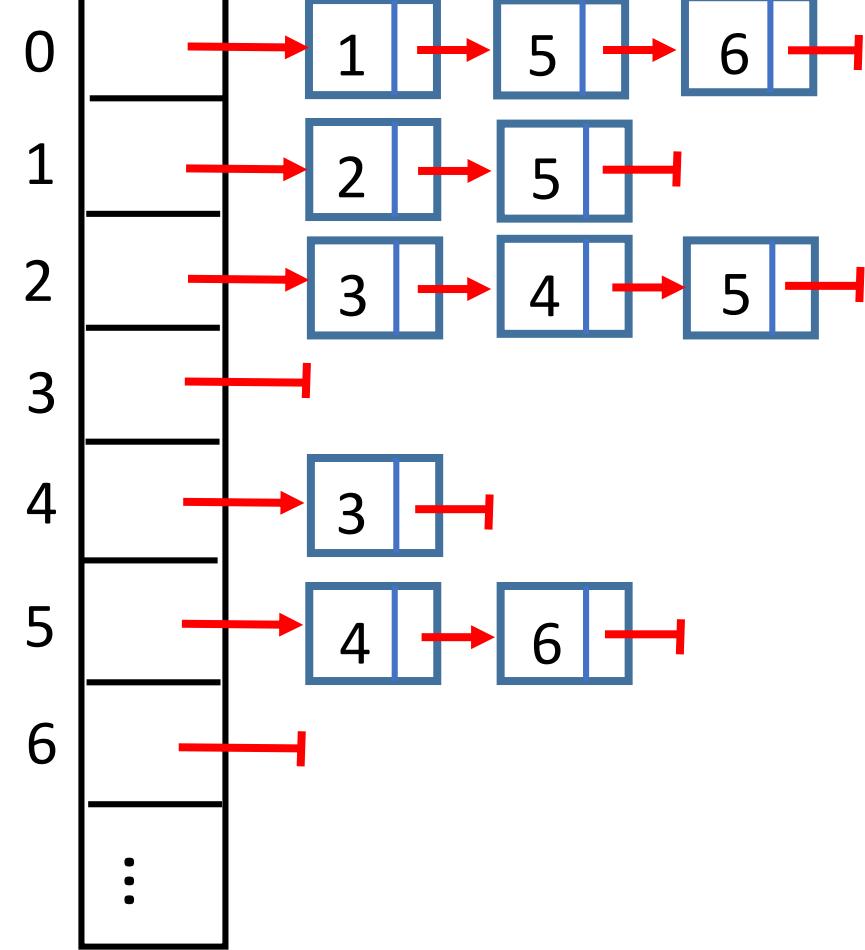
n

7

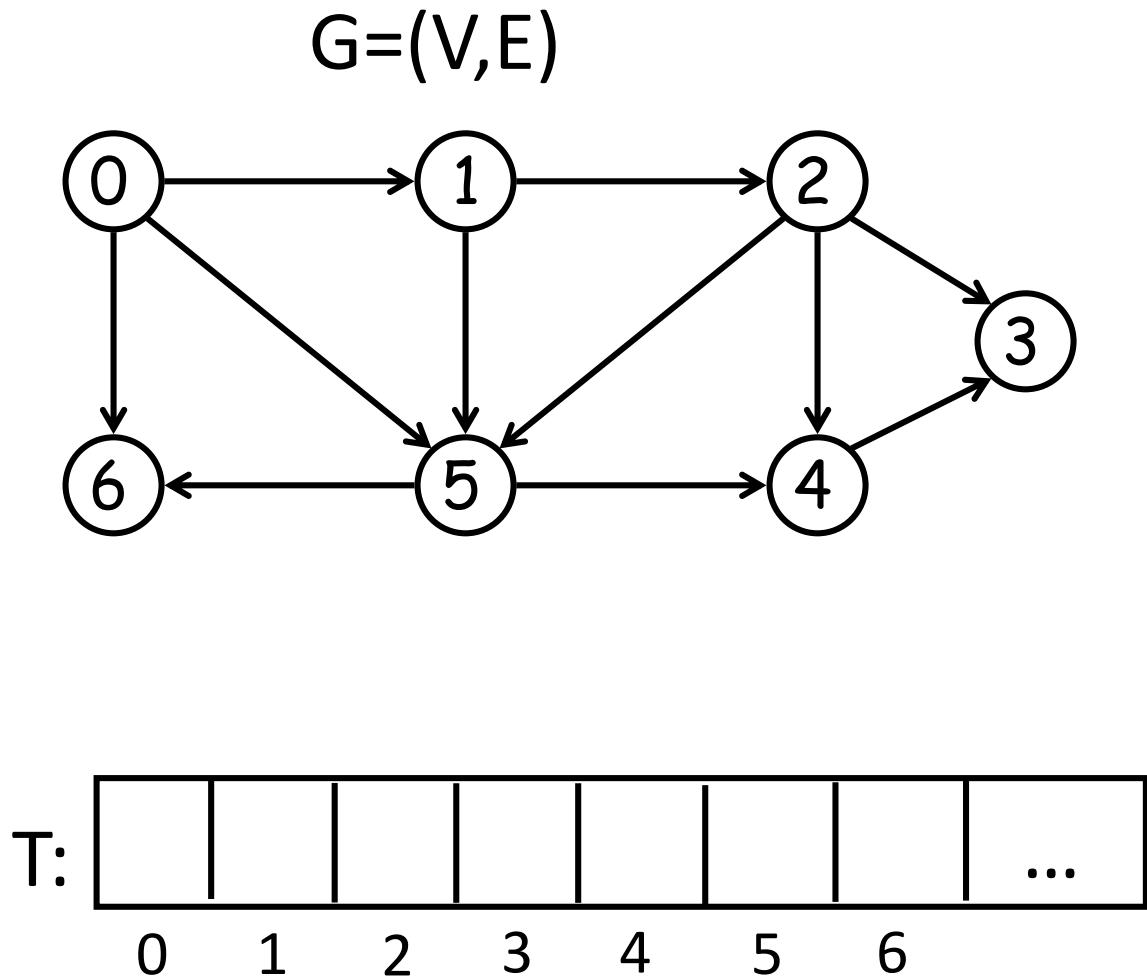
w

6

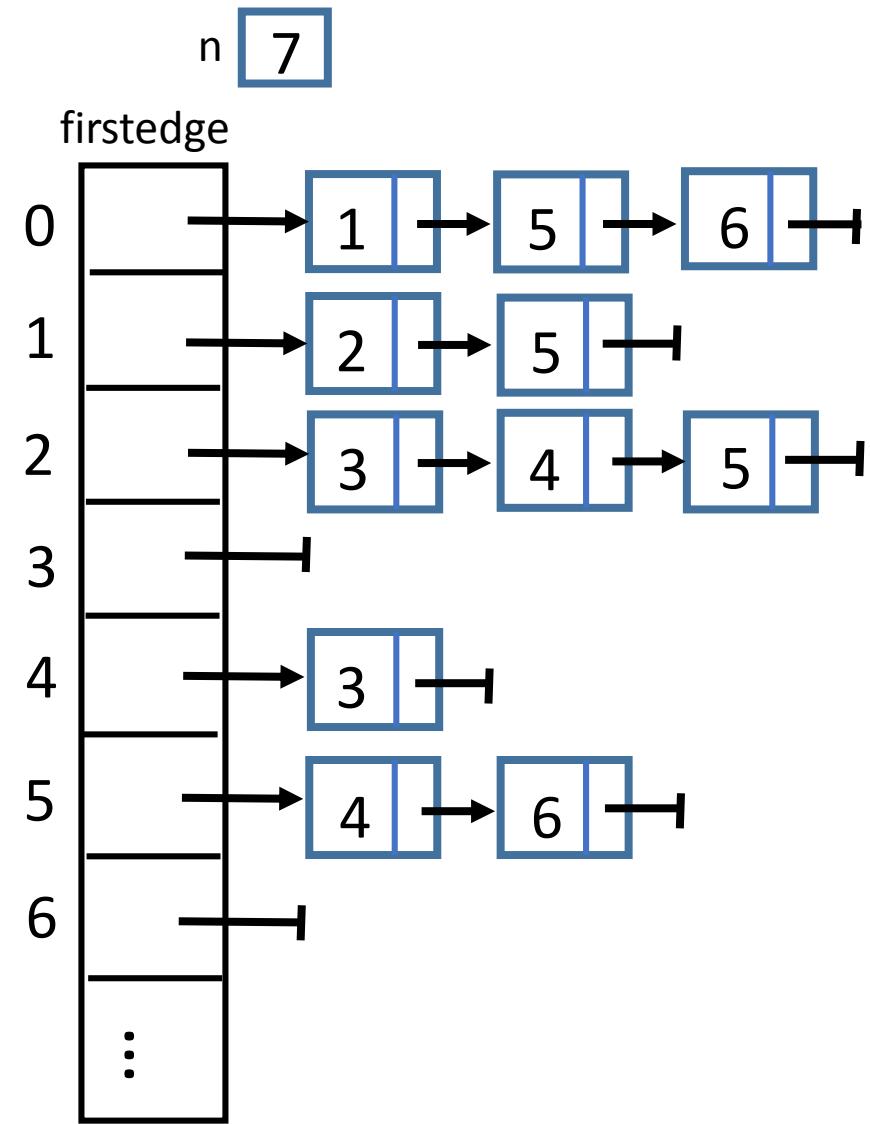
firstedge



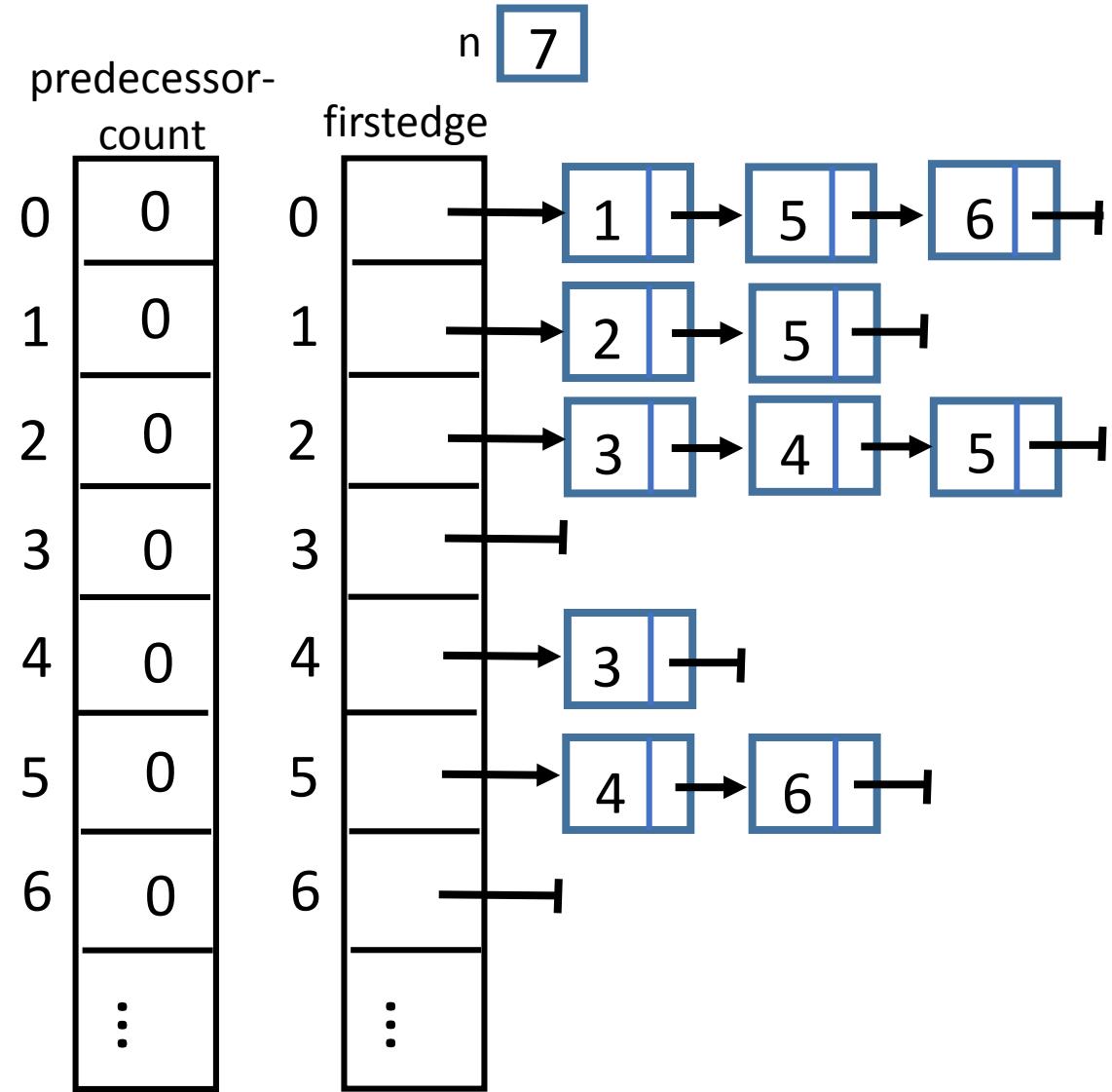
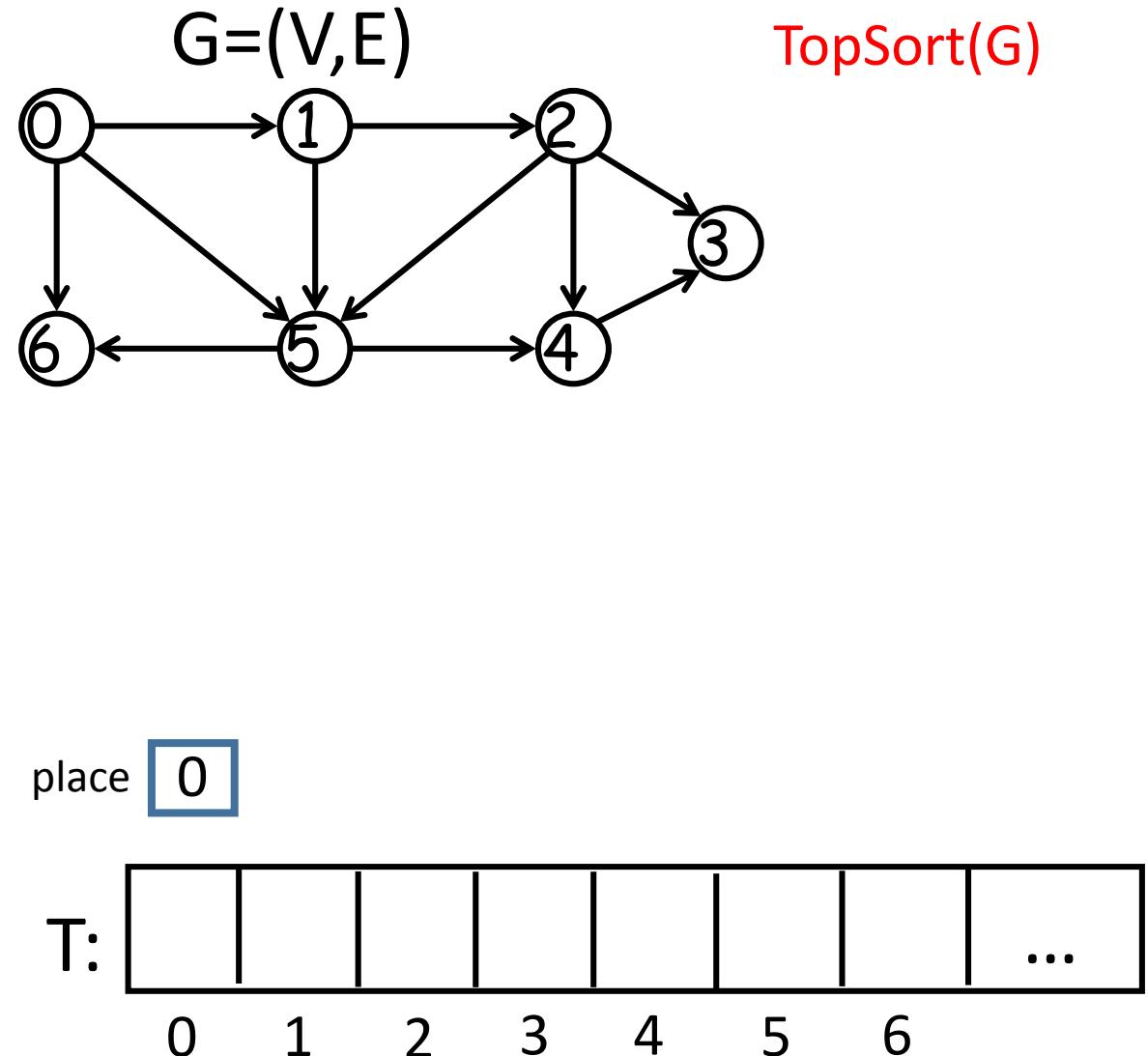
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן לרוחב



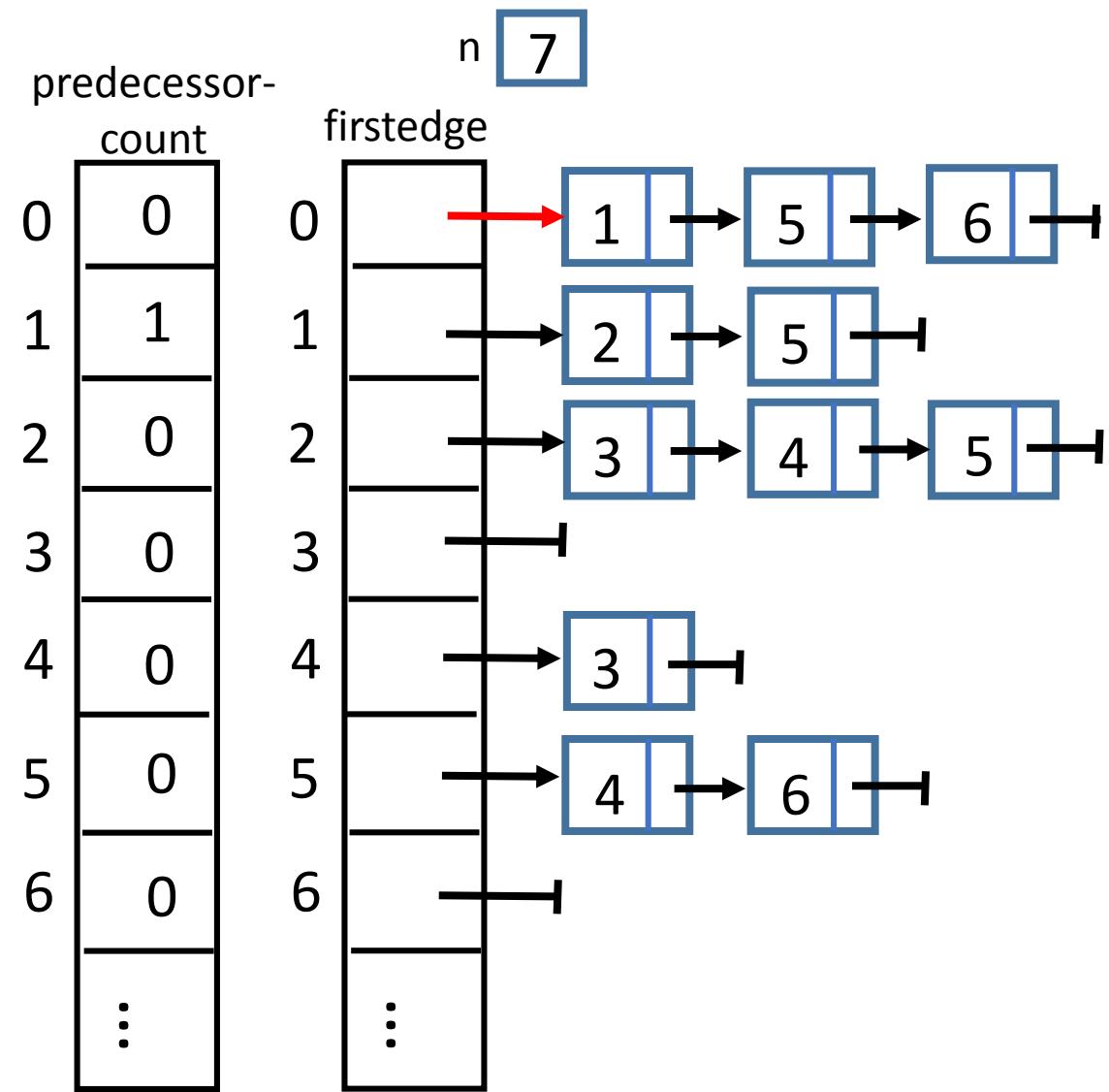
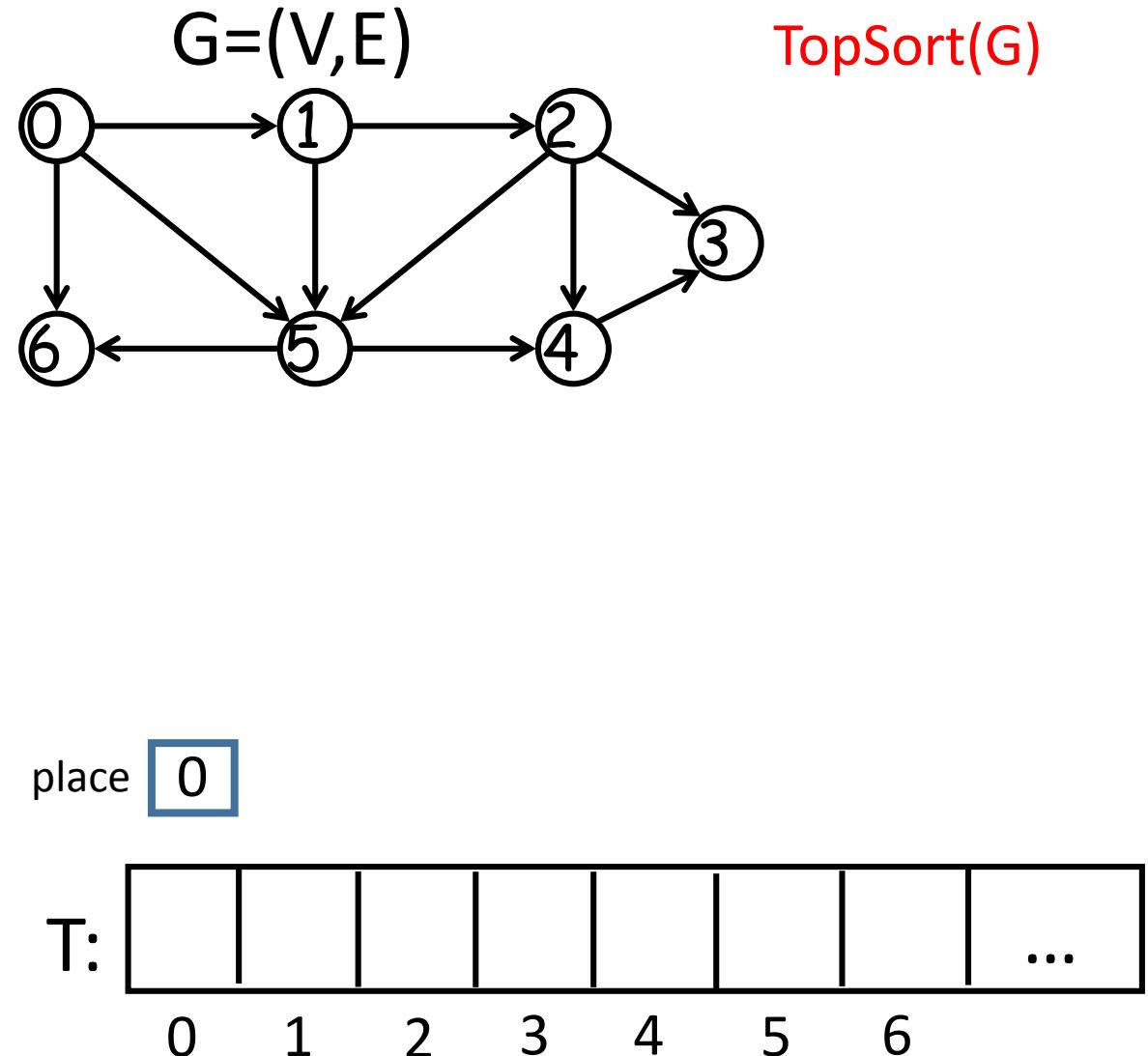
© פרופ' אביבית לוי



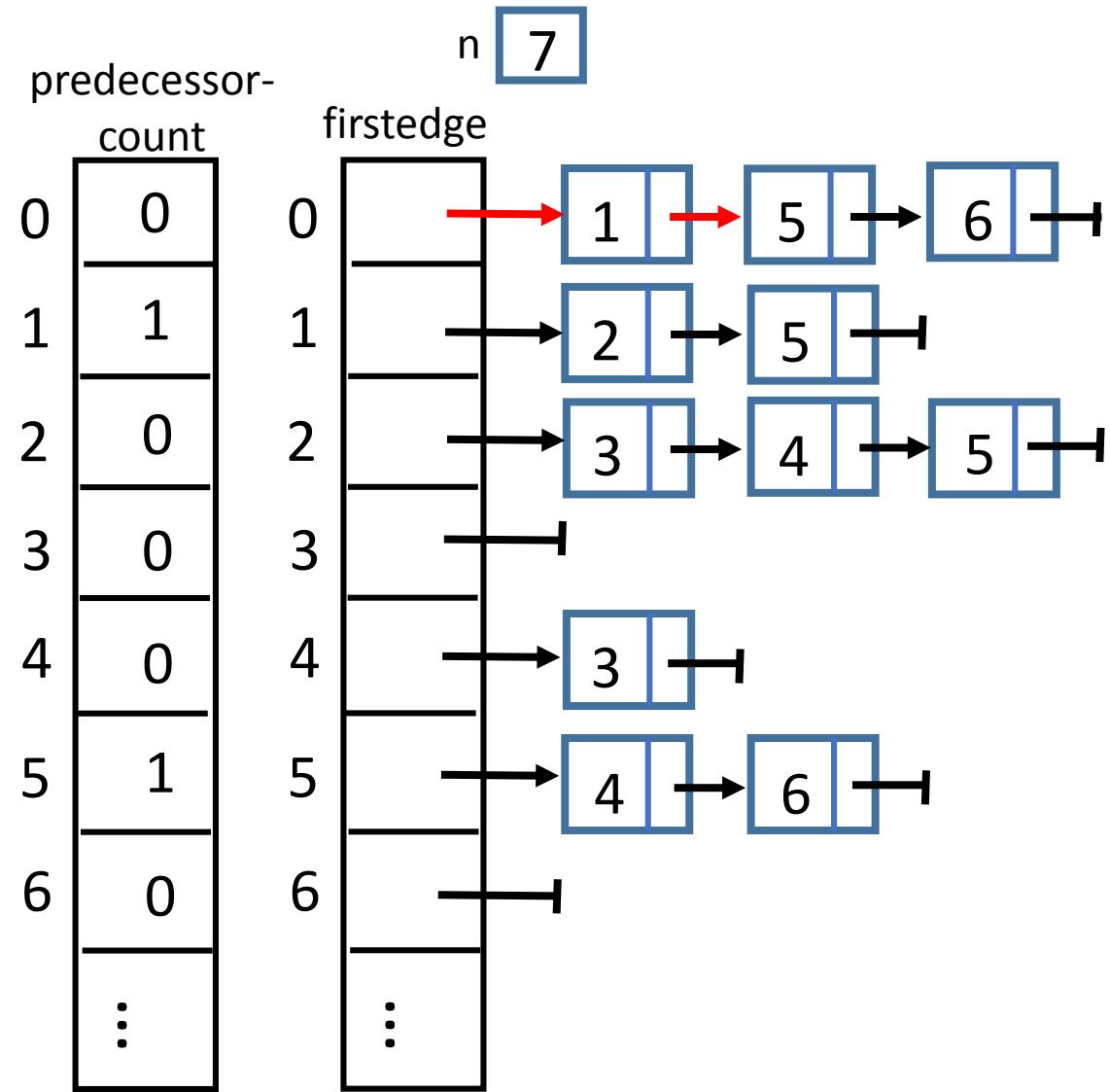
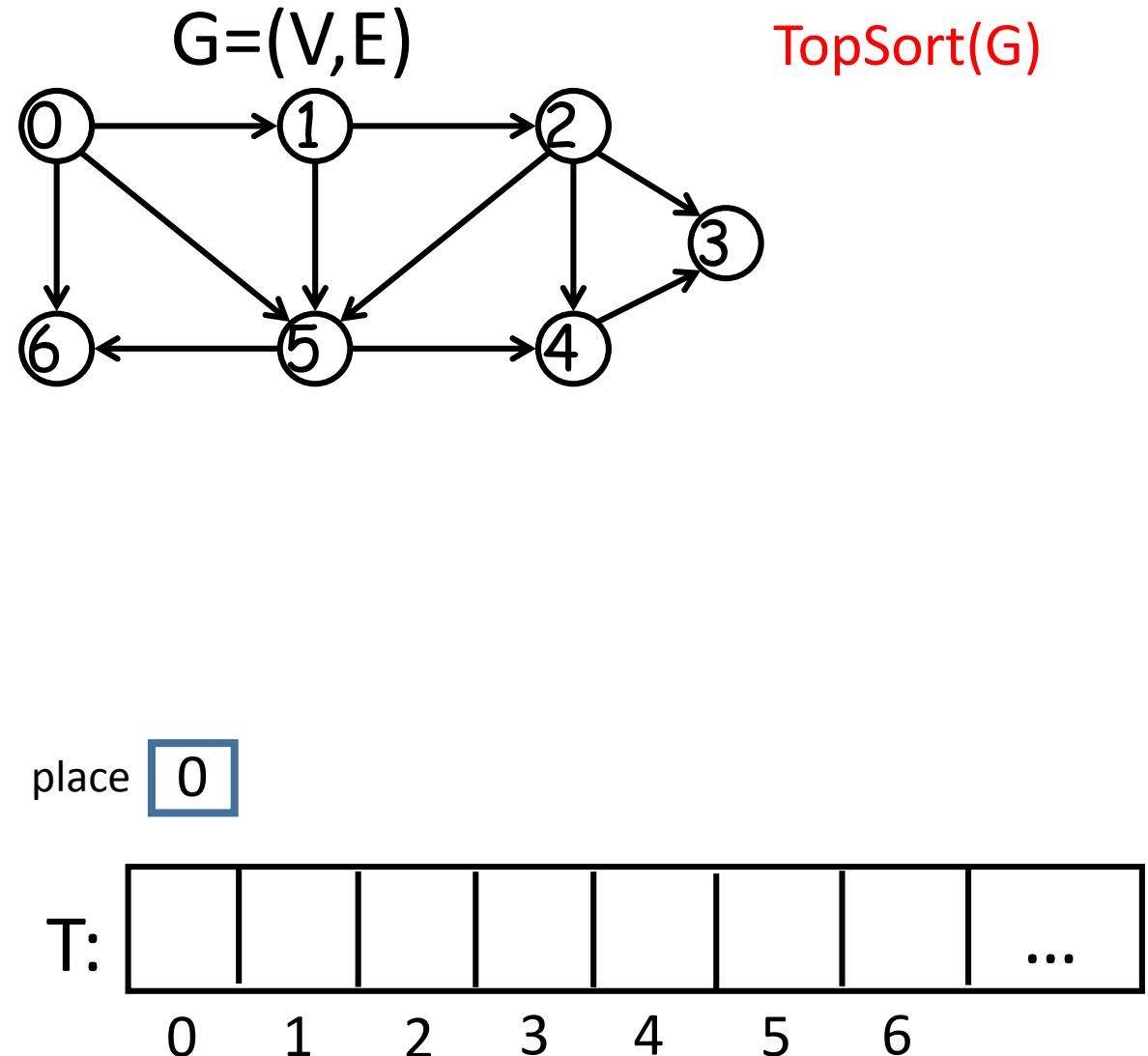
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן



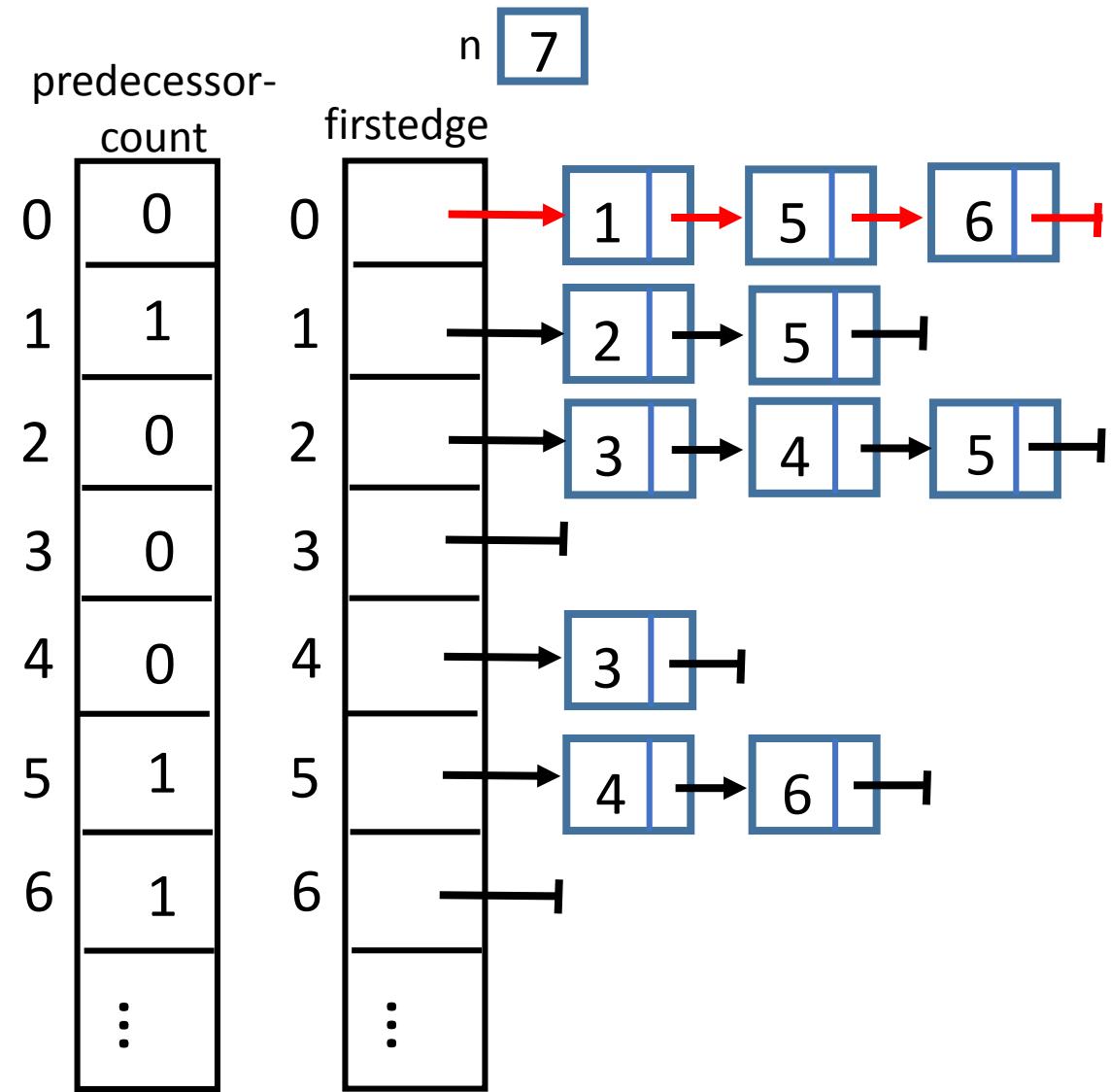
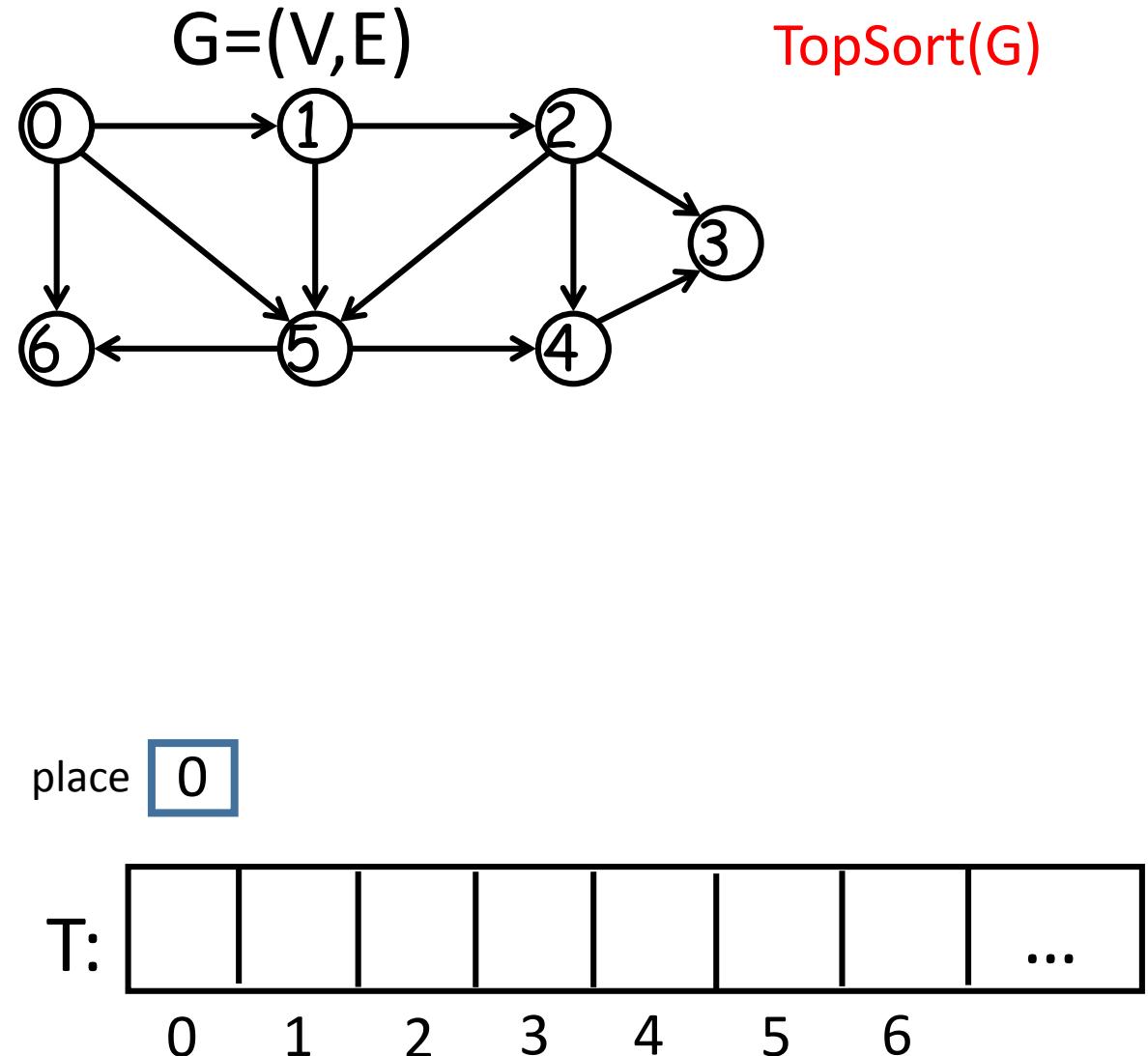
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן



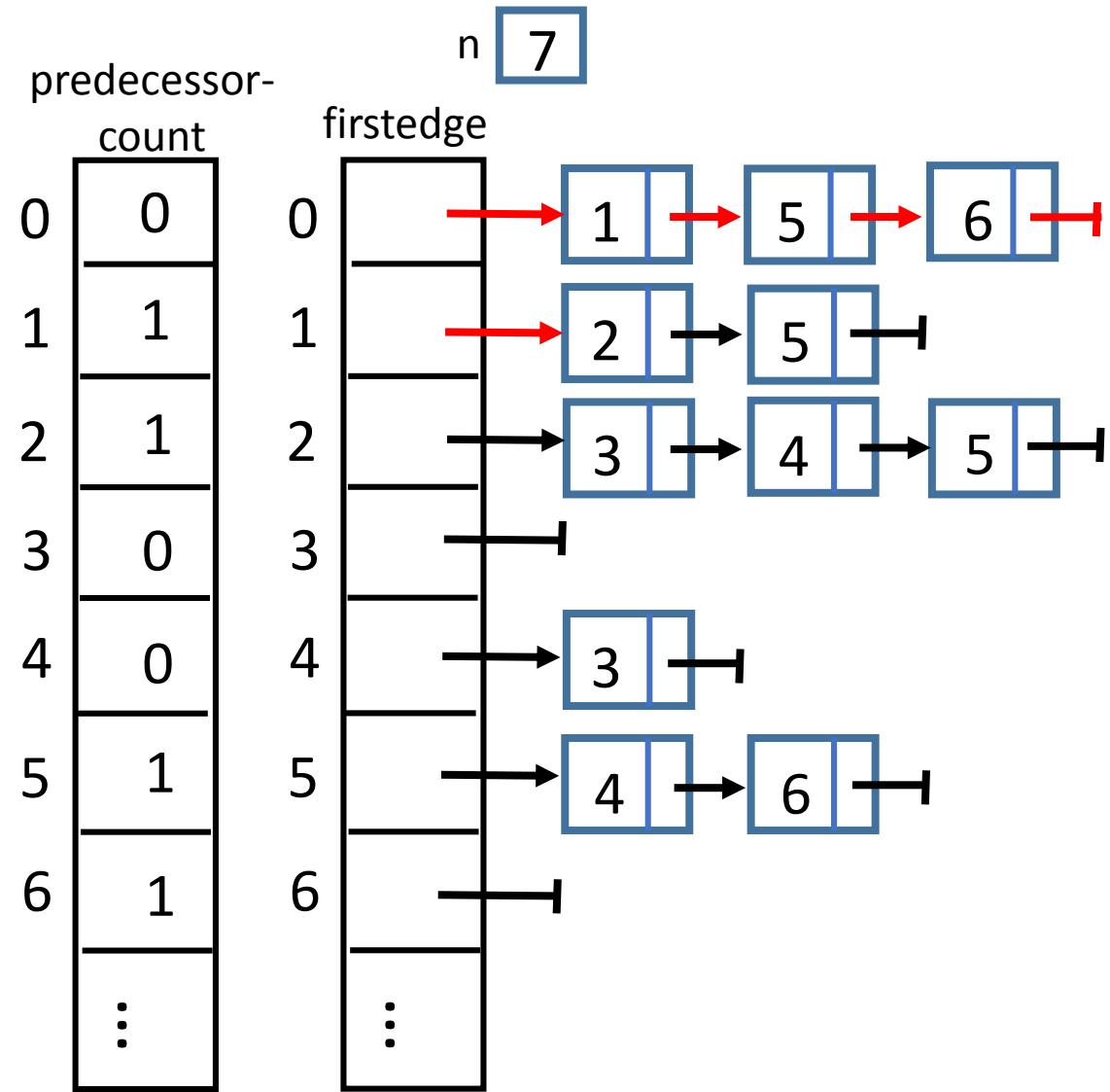
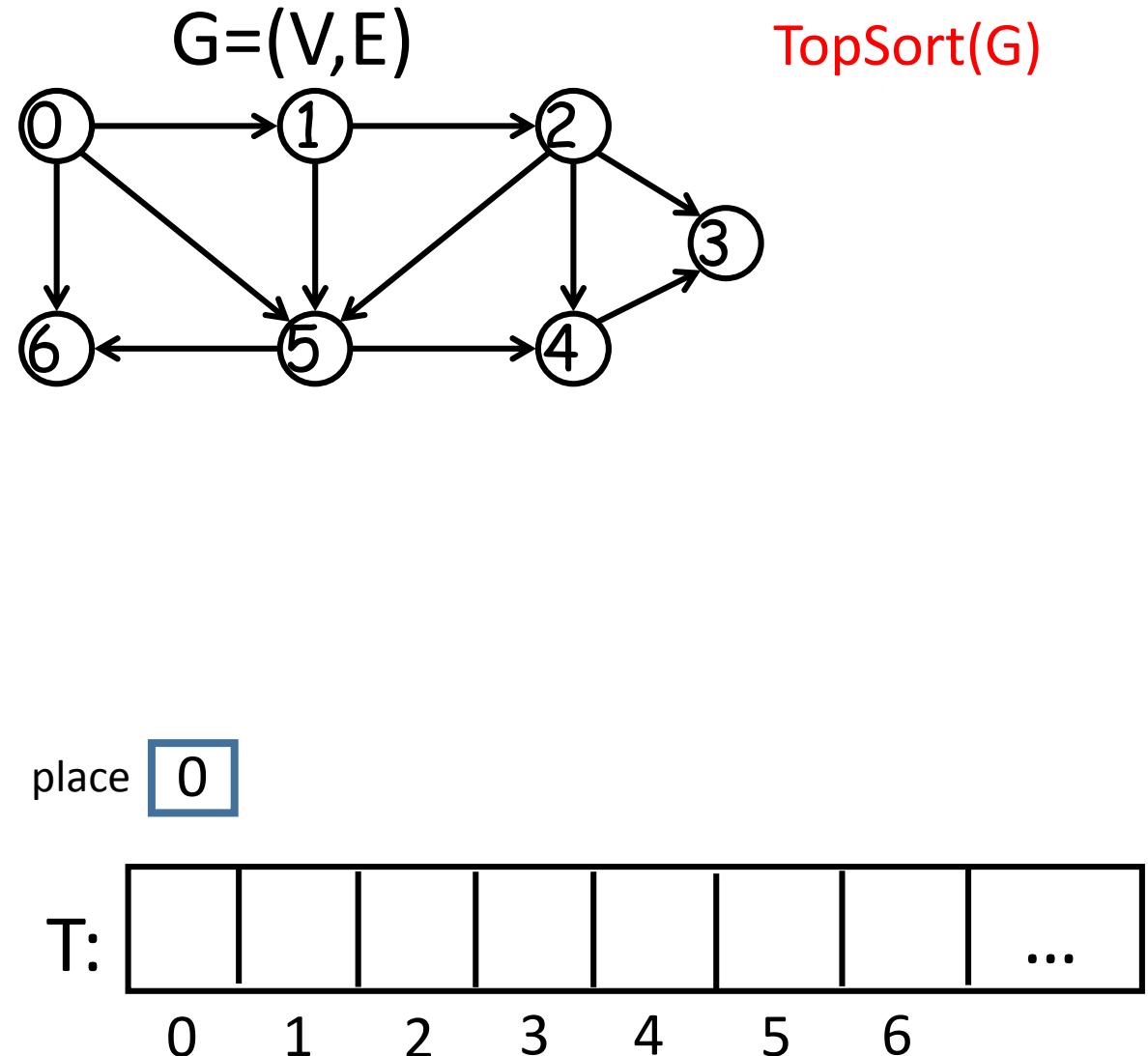
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן



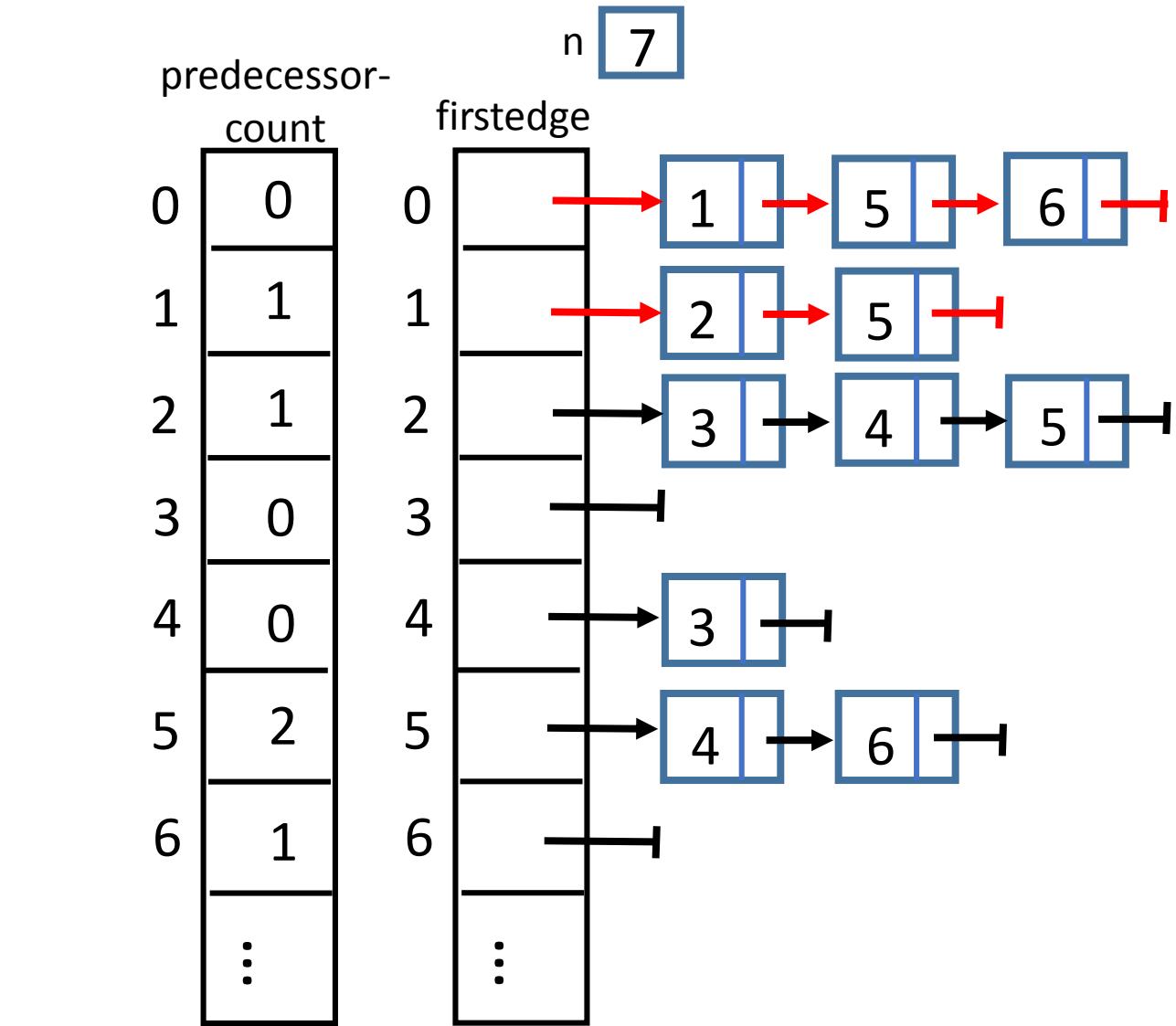
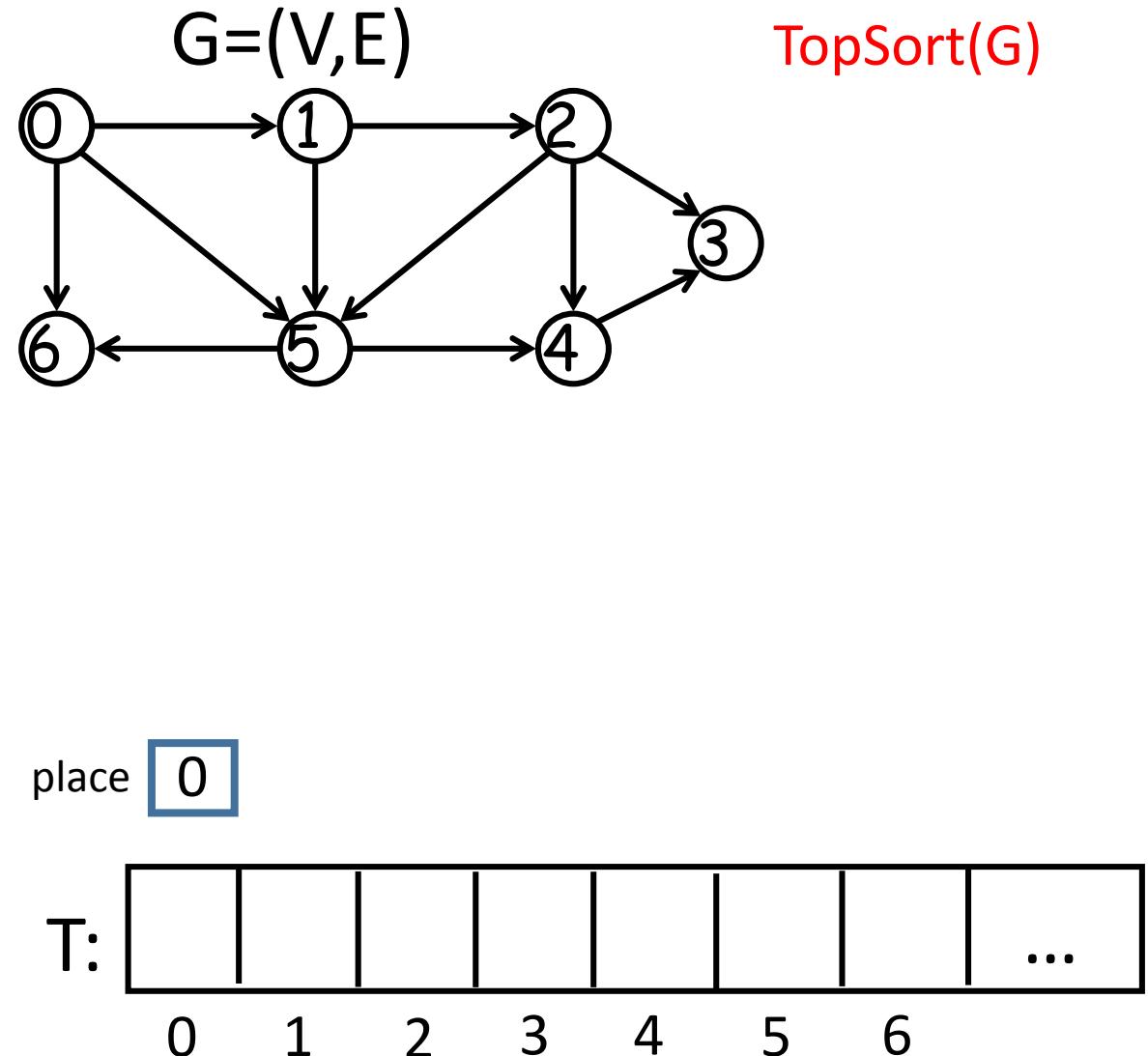
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן



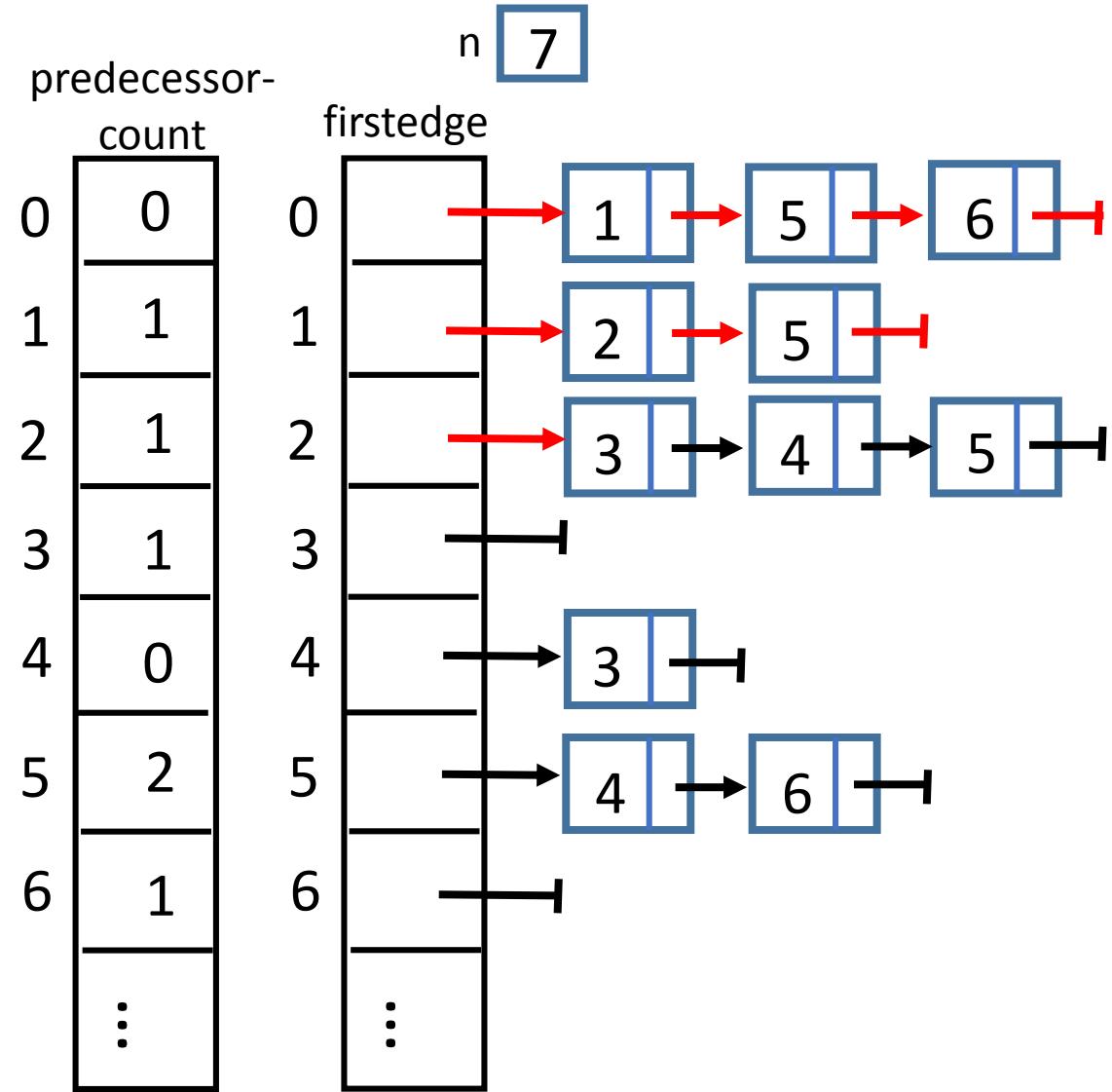
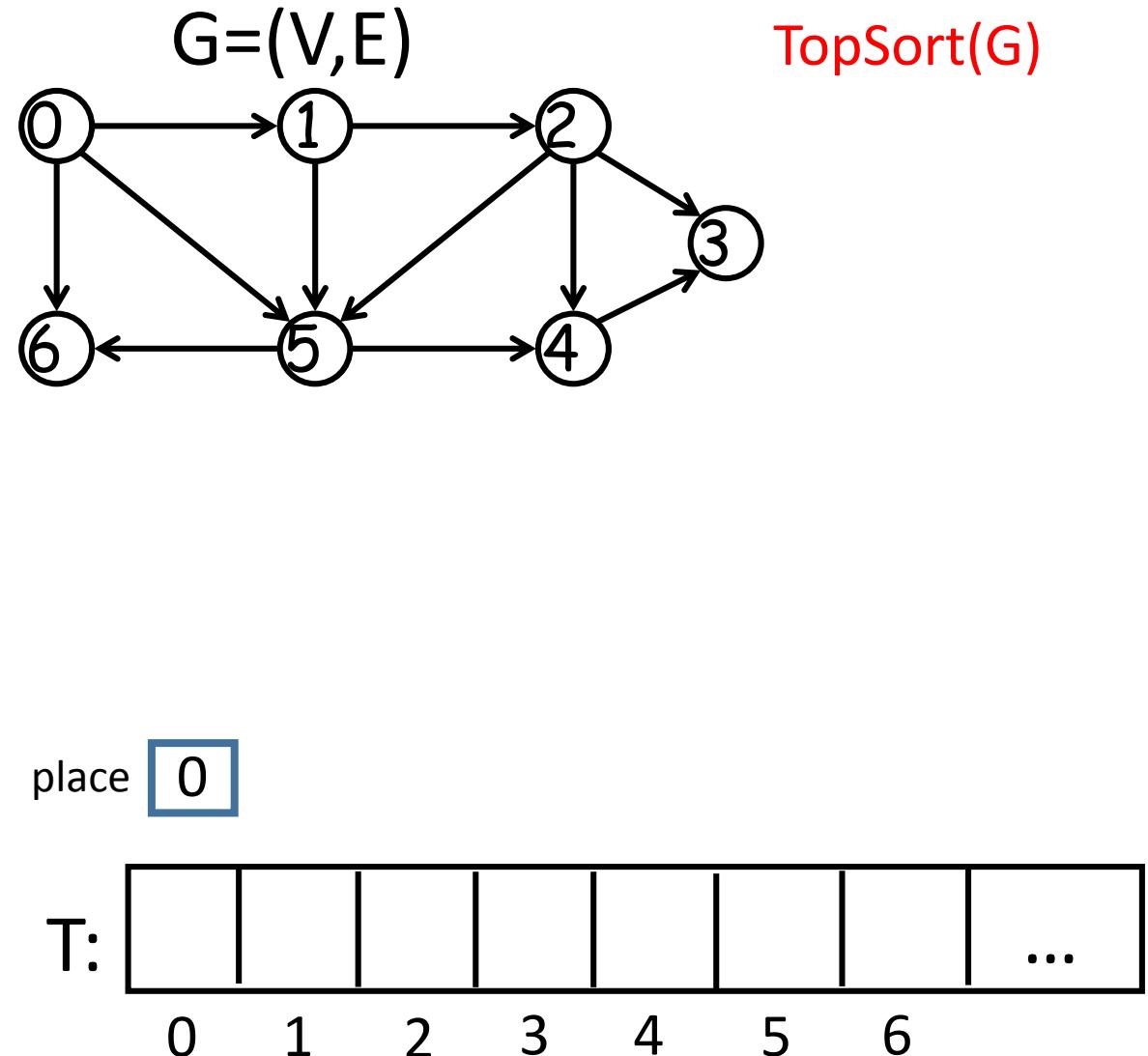
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן



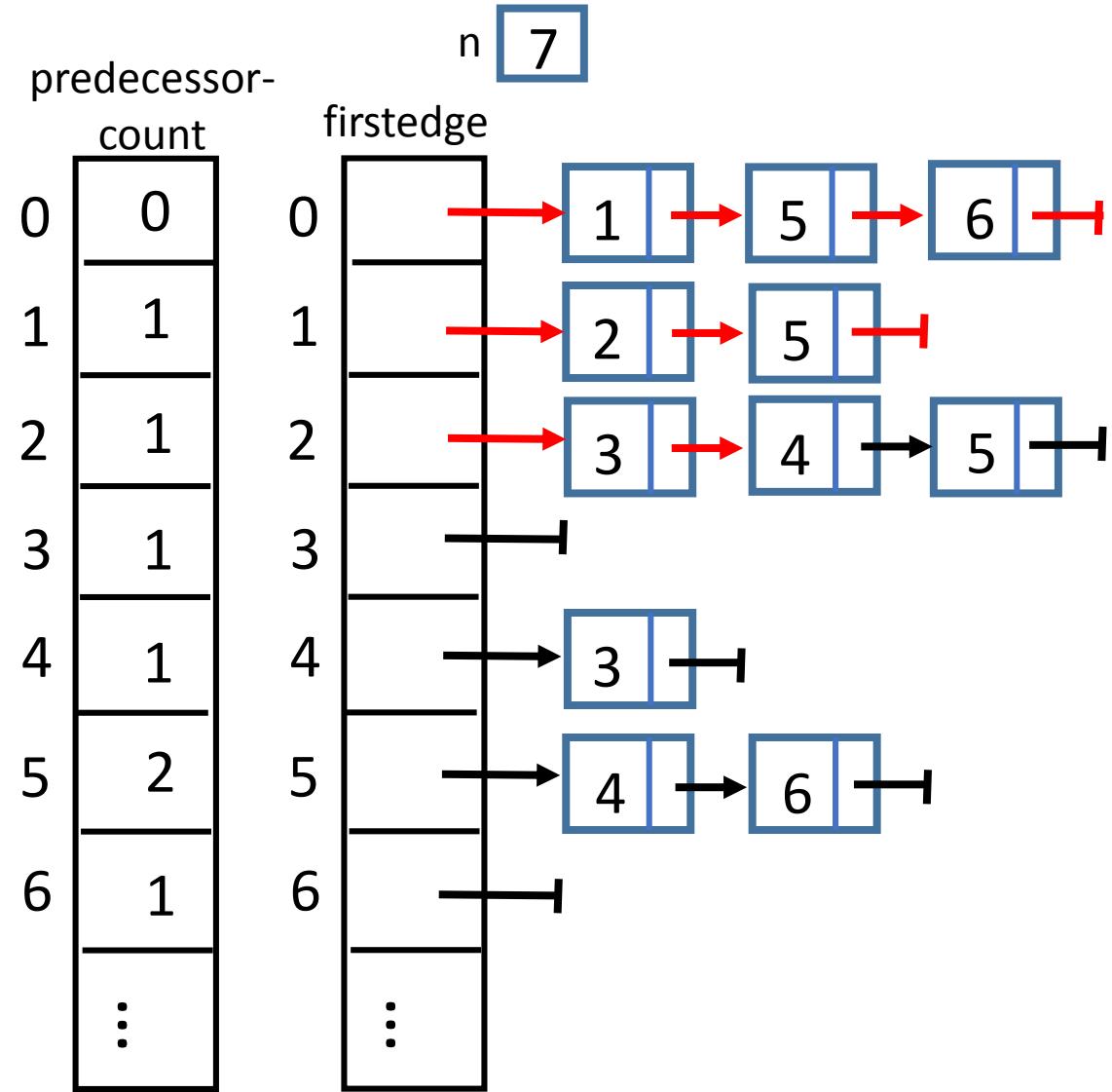
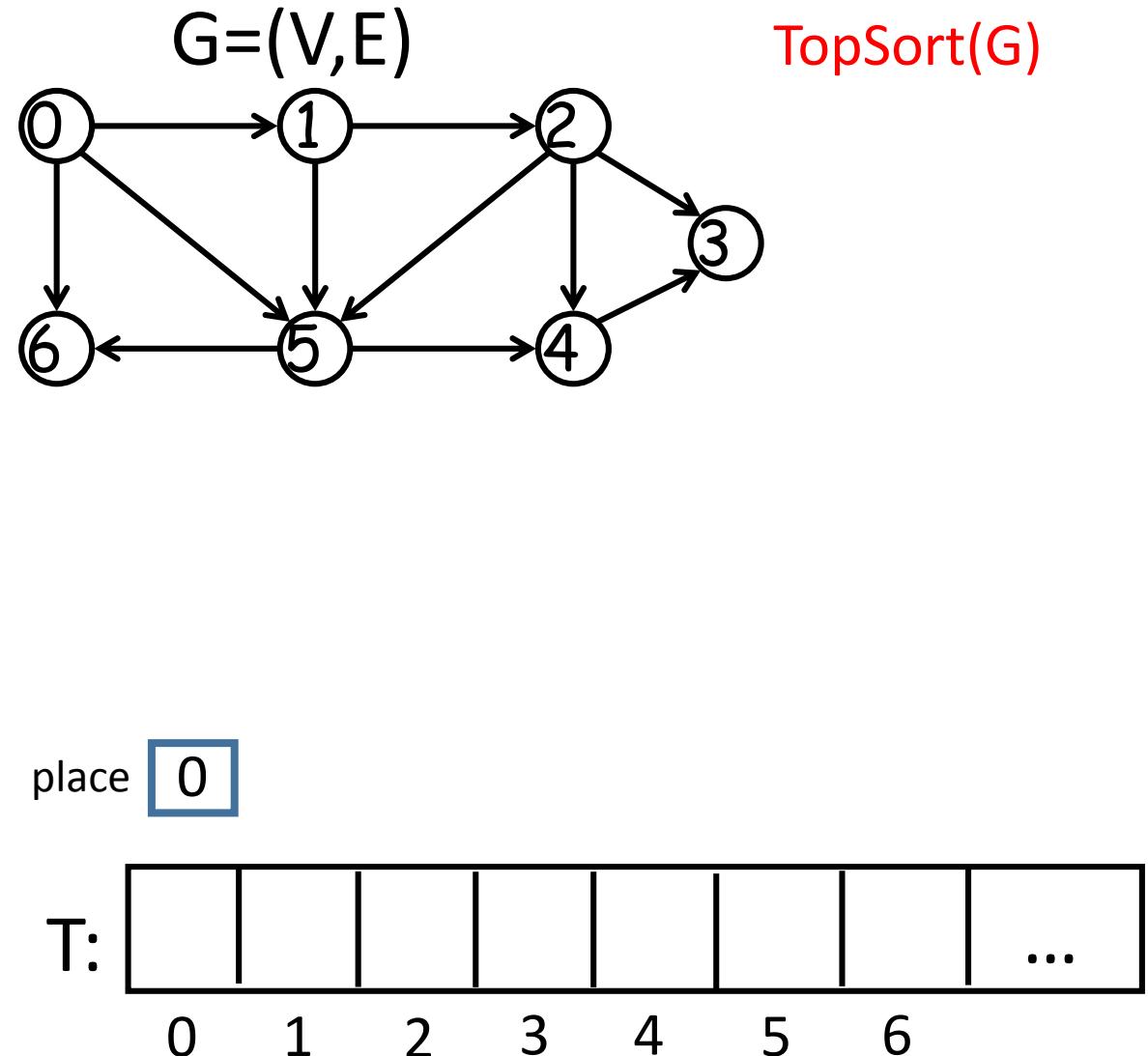
# מציאת סדר טופולוגי בגרף לרוחב



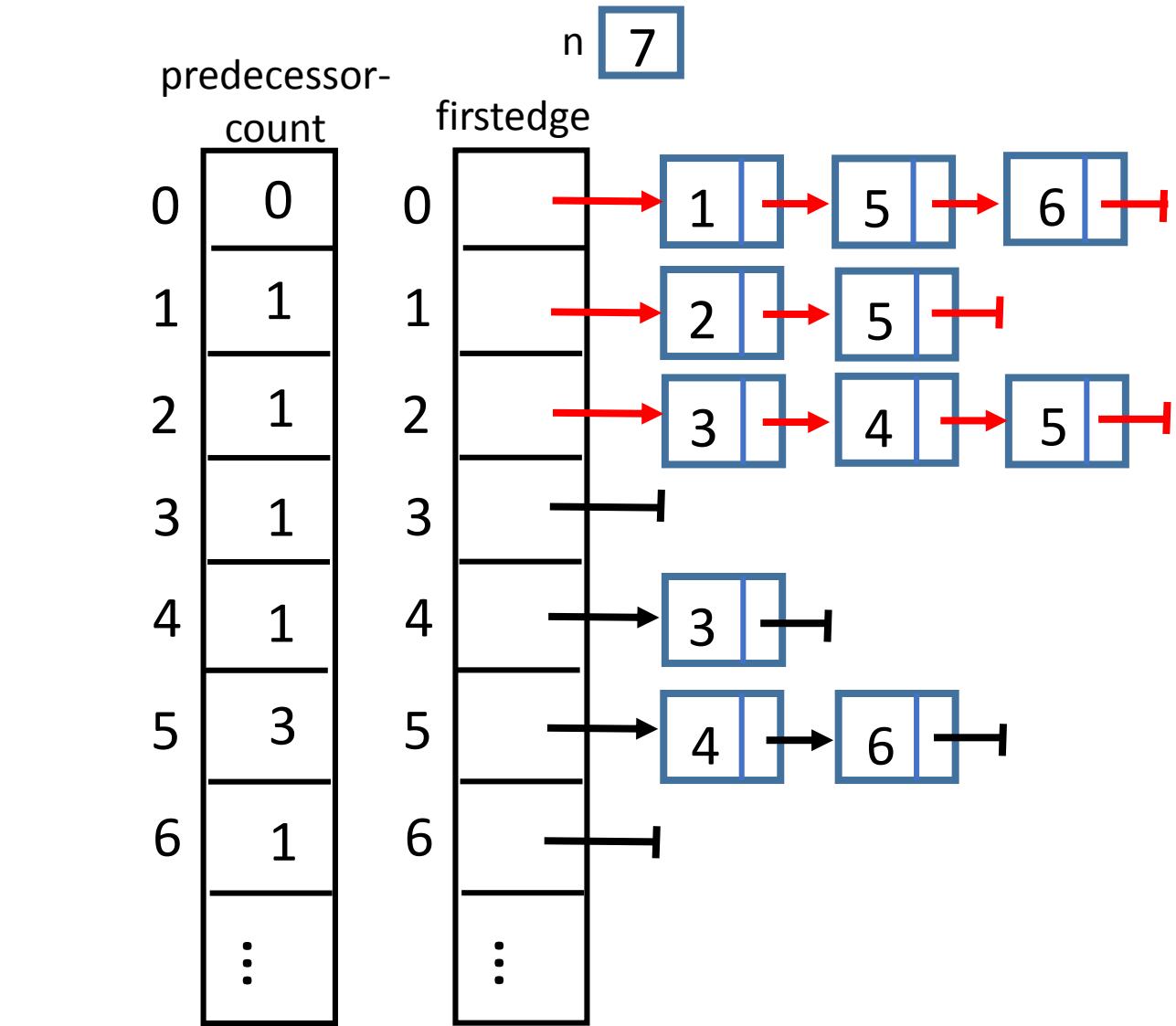
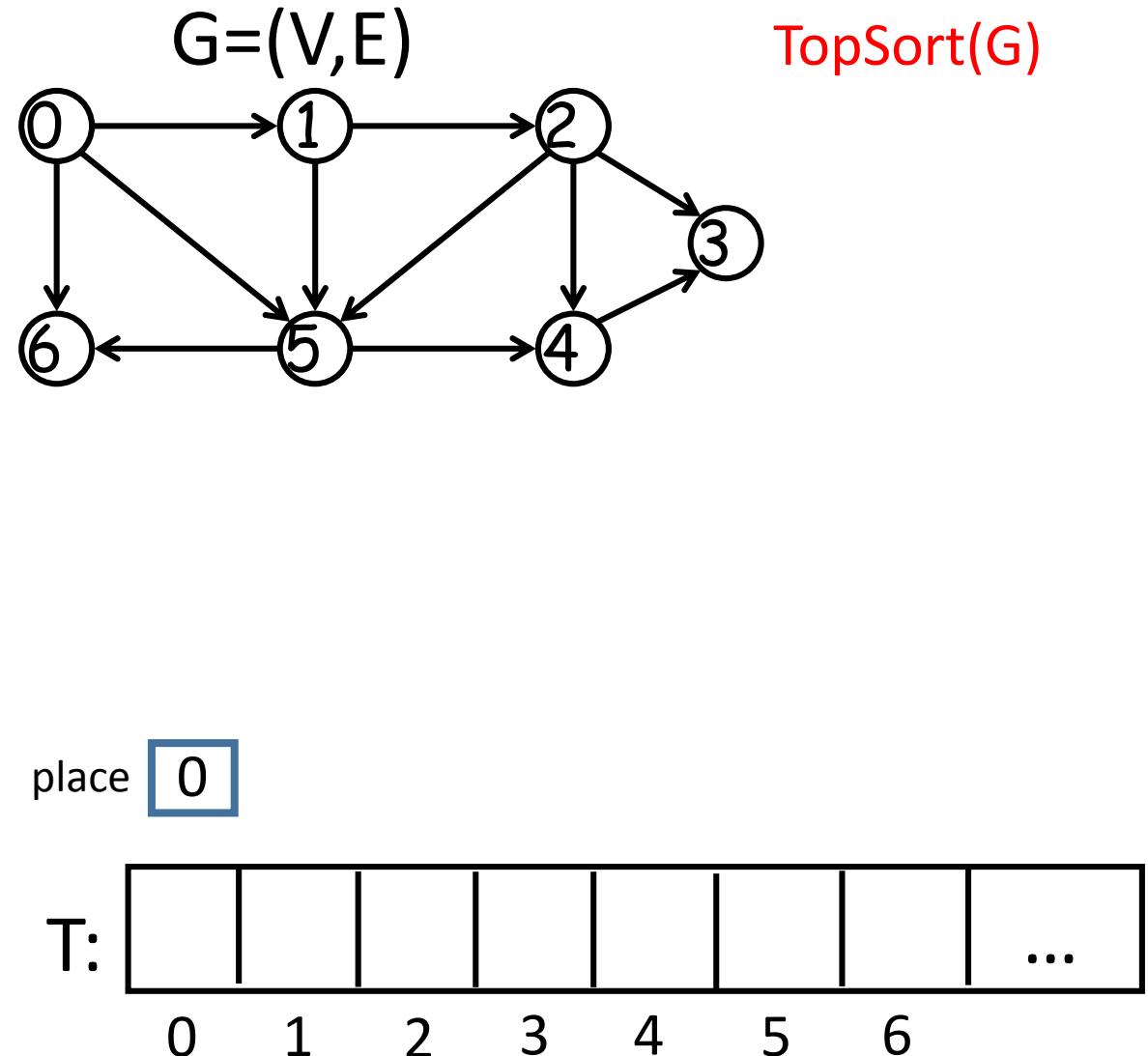
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן



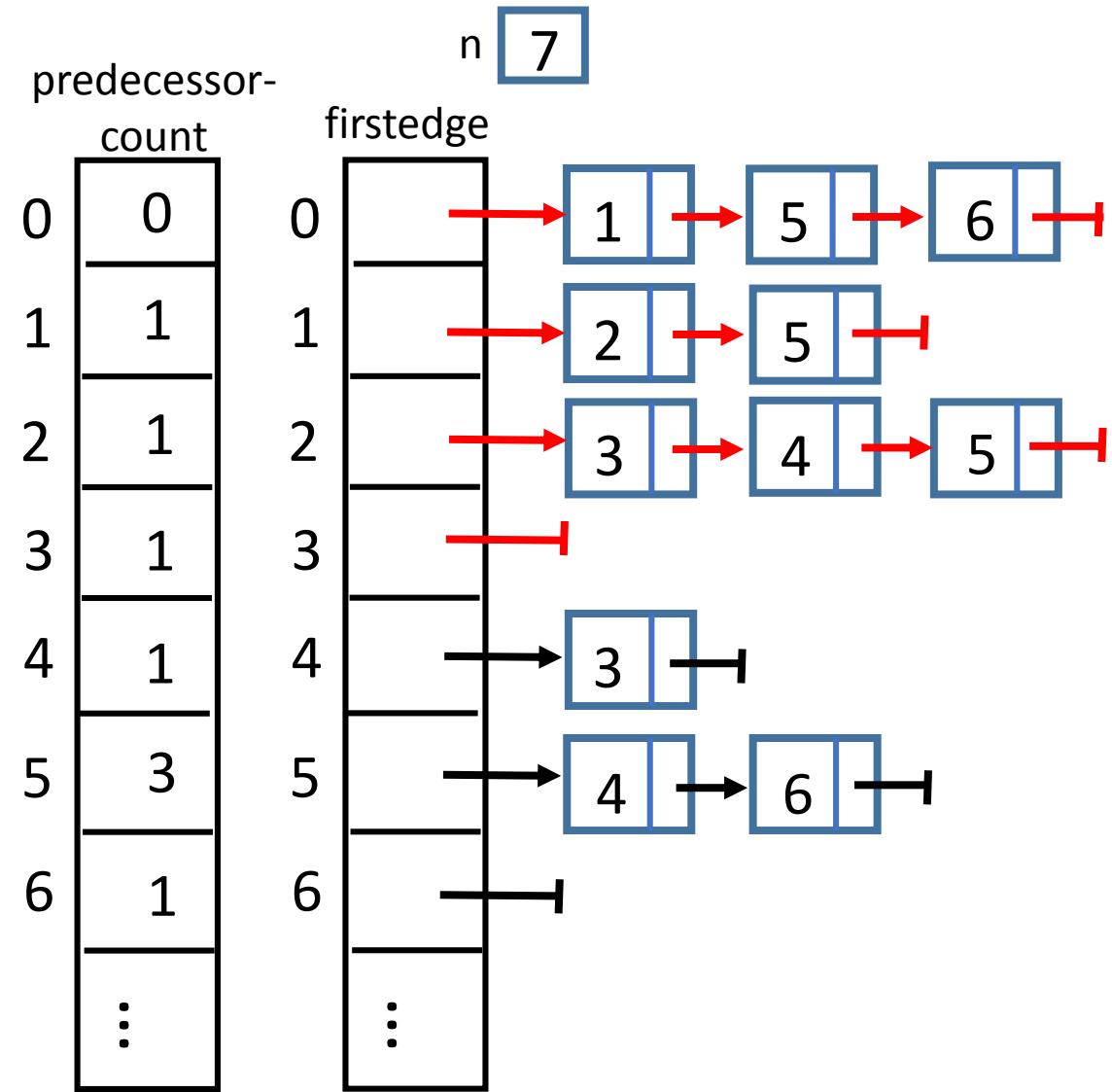
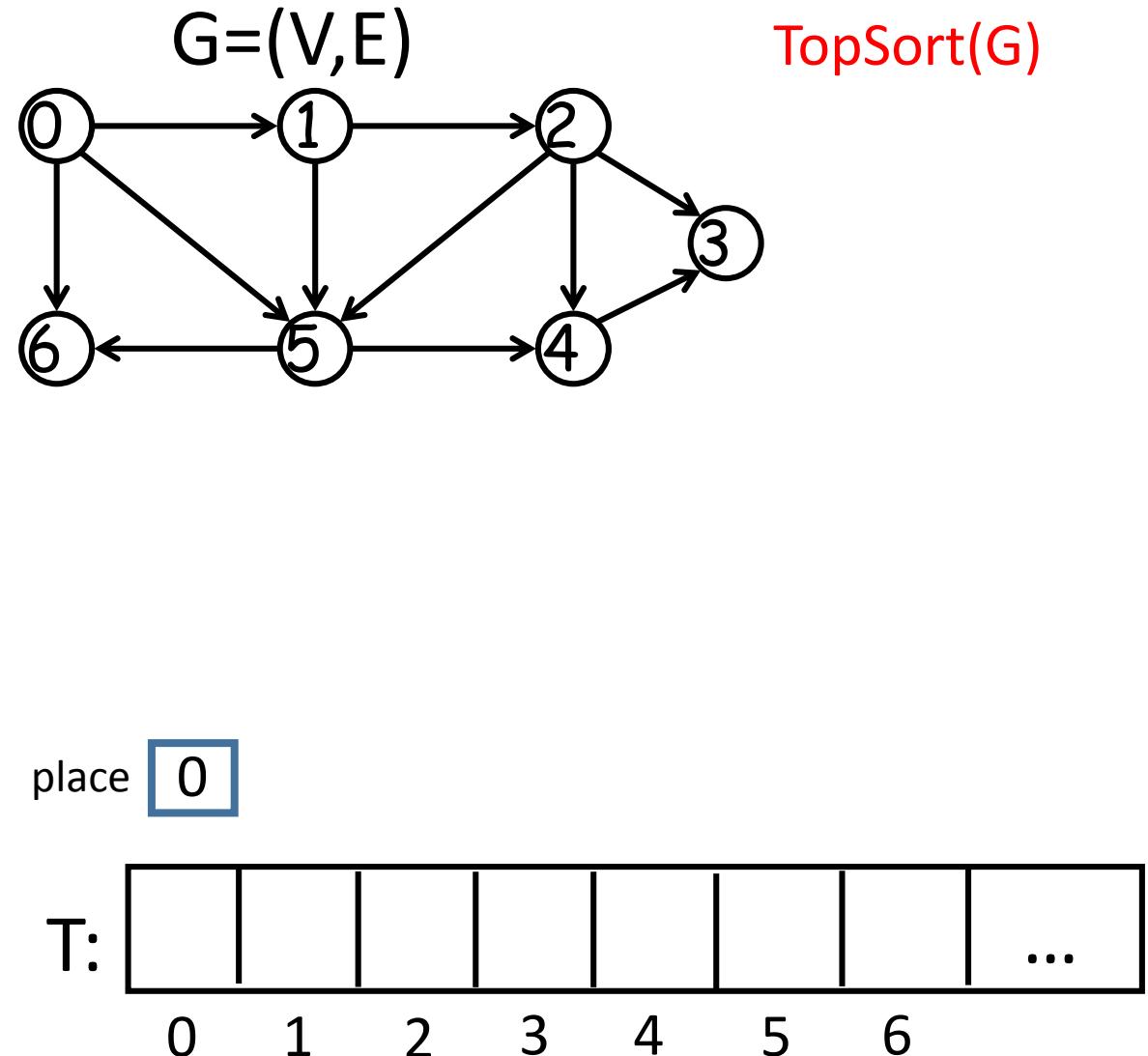
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן



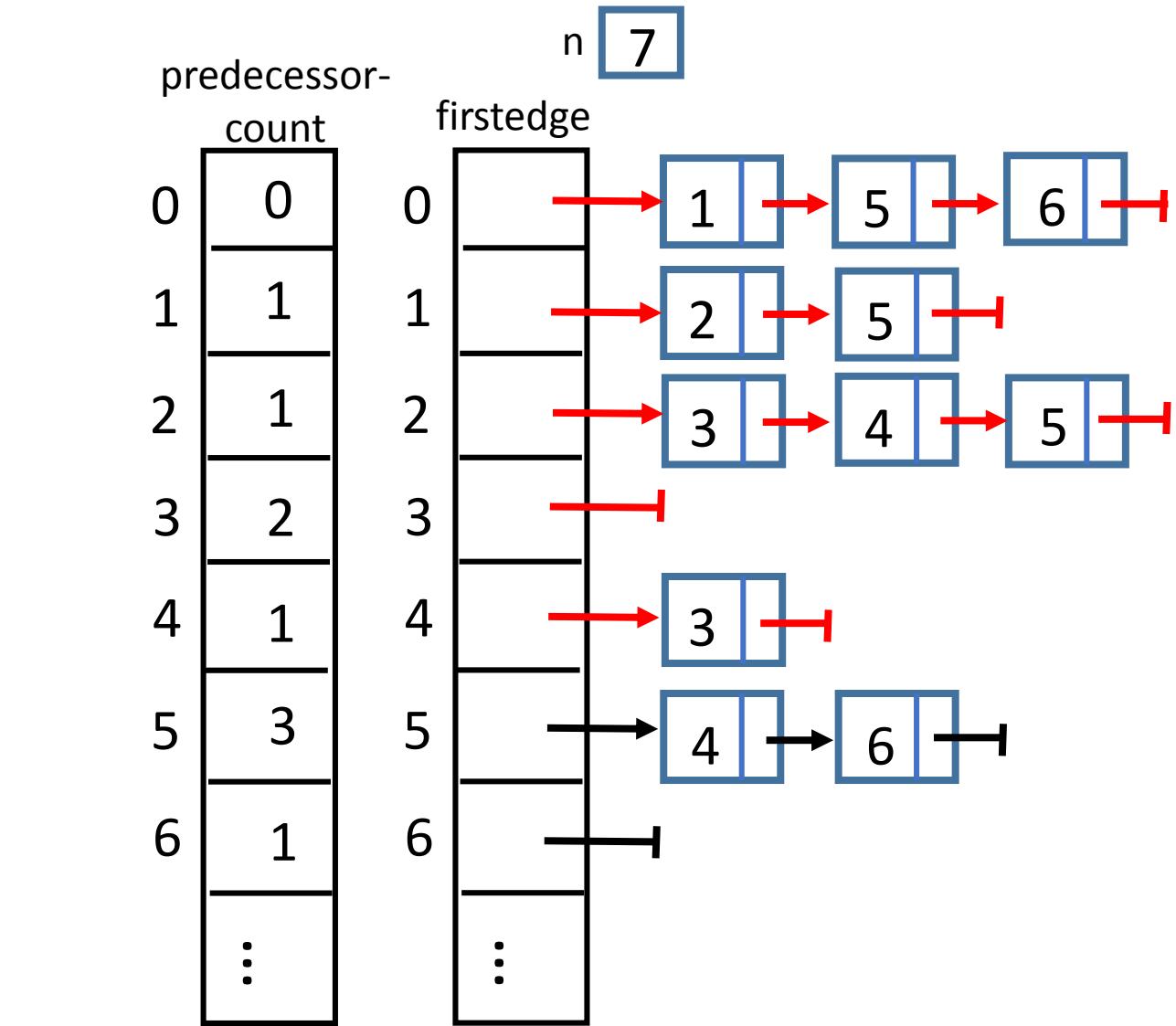
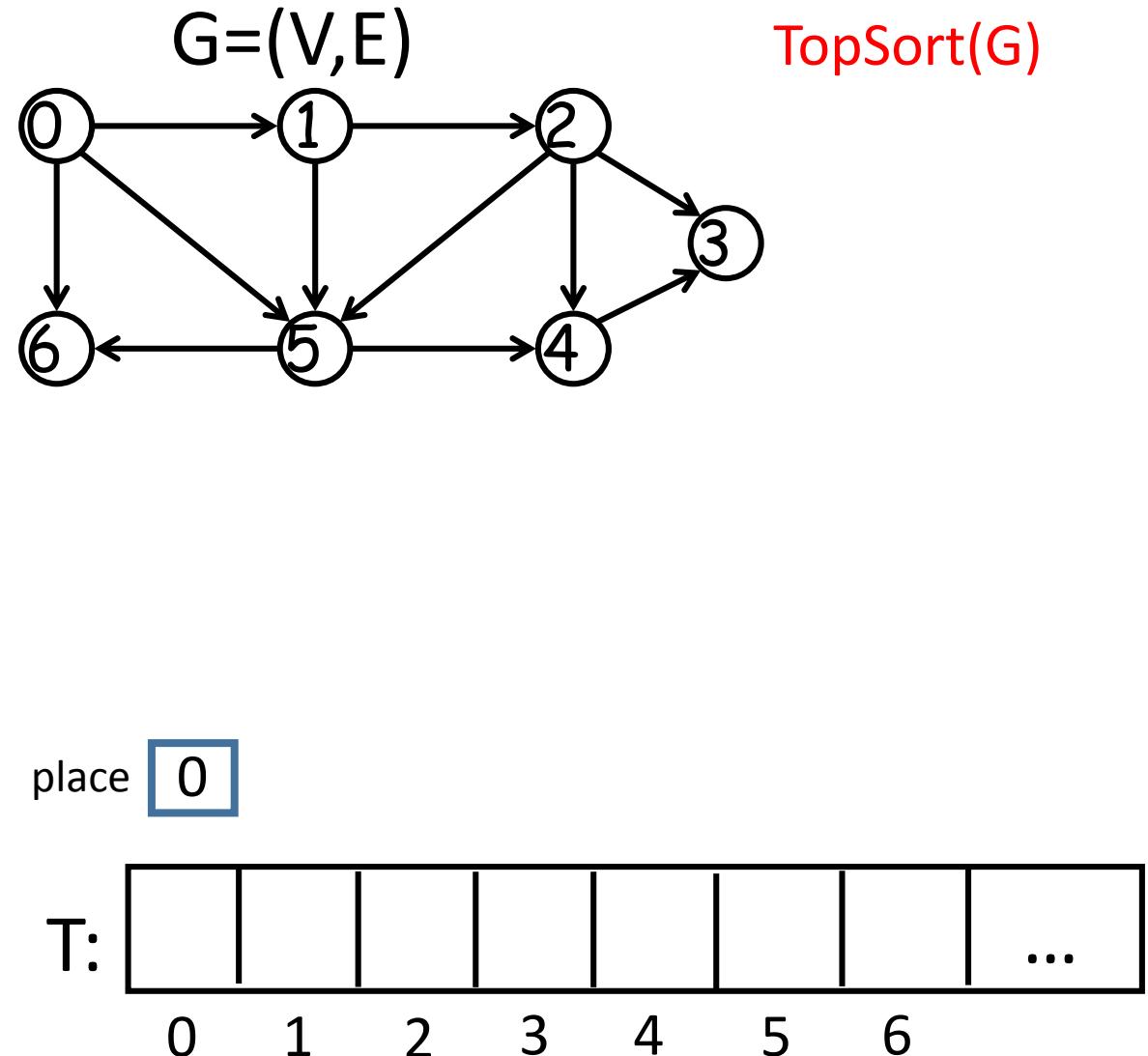
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן לרוחב



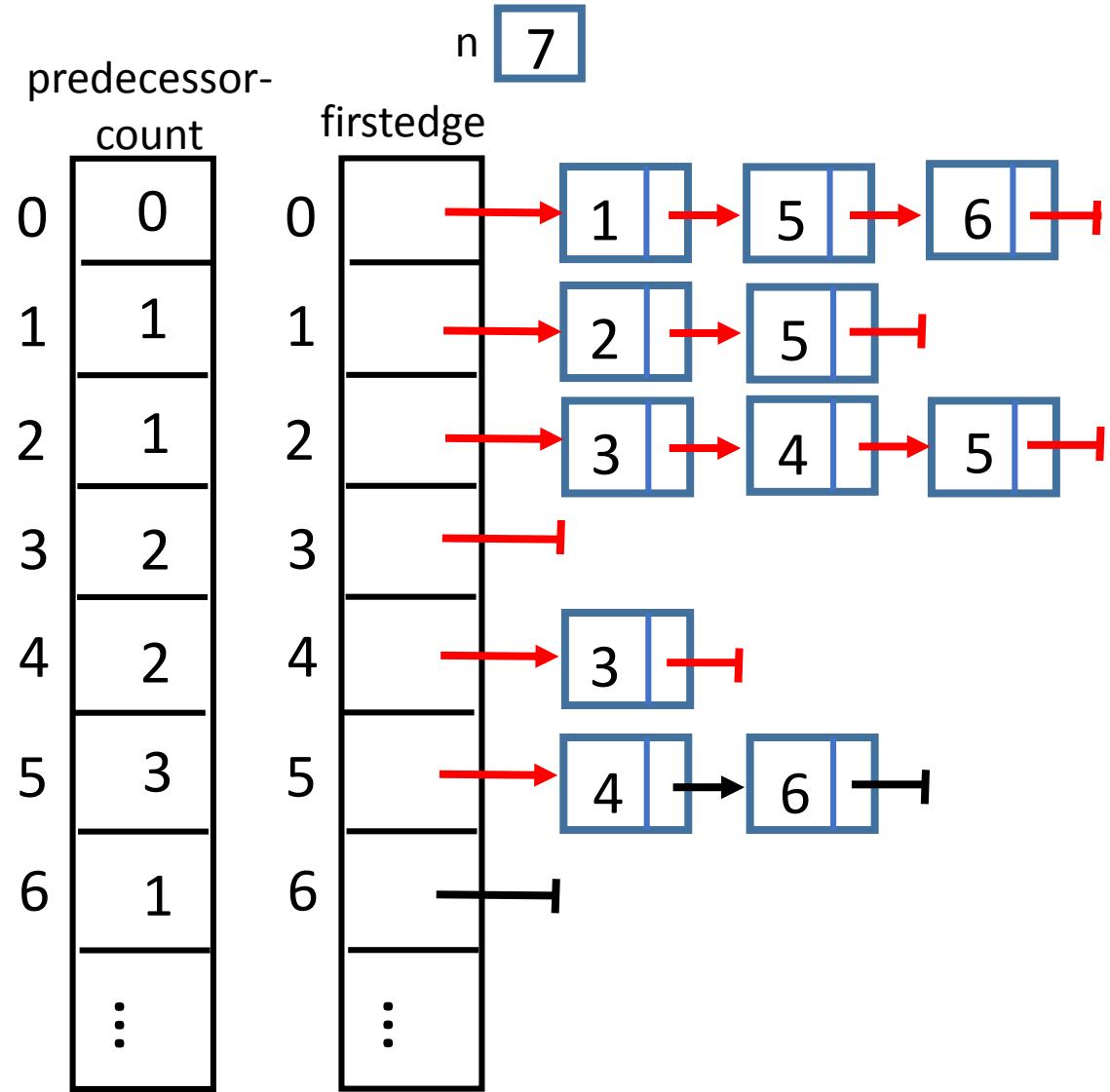
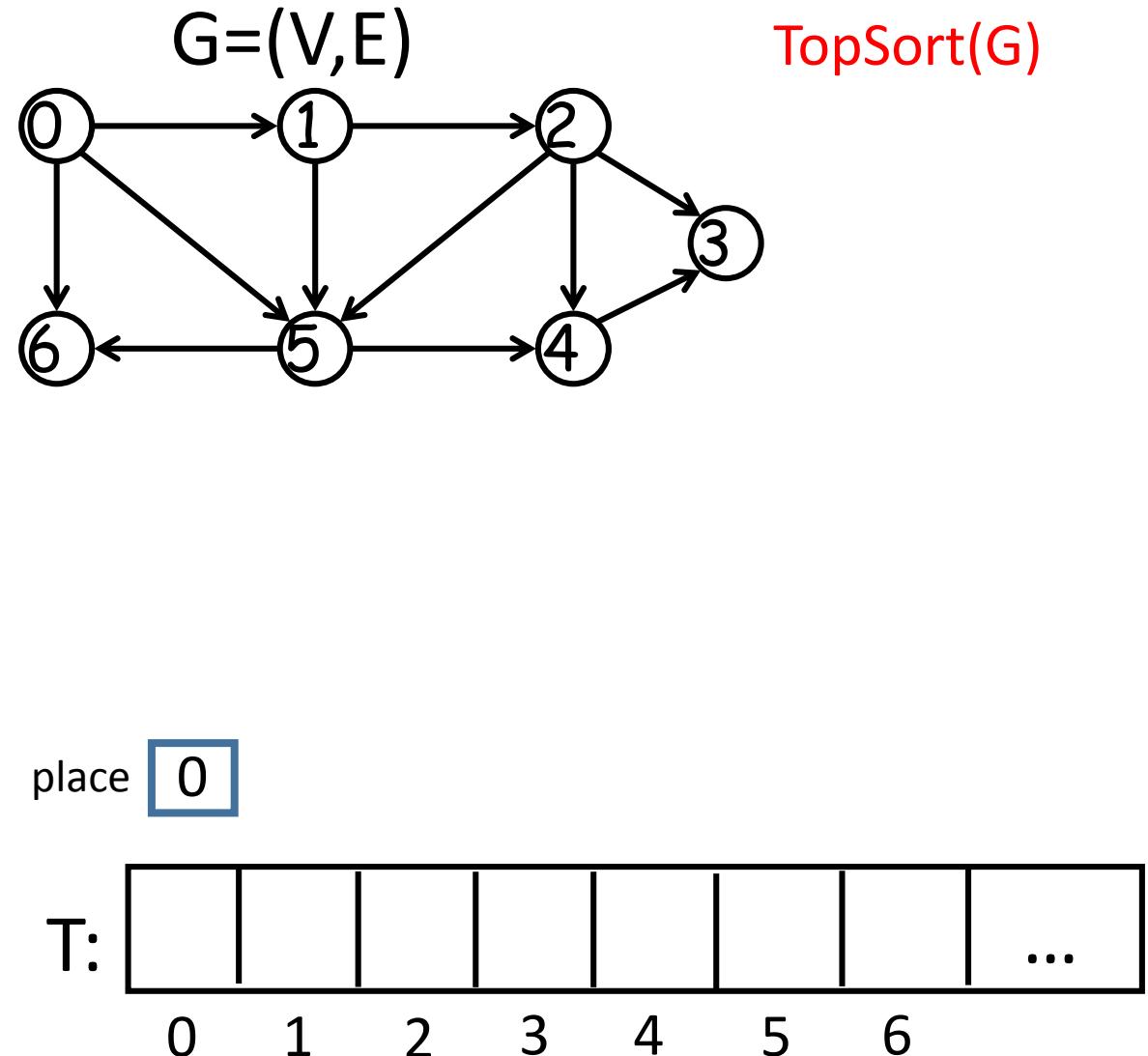
# מציאת סדר טופולוגי בגרף לרוחב



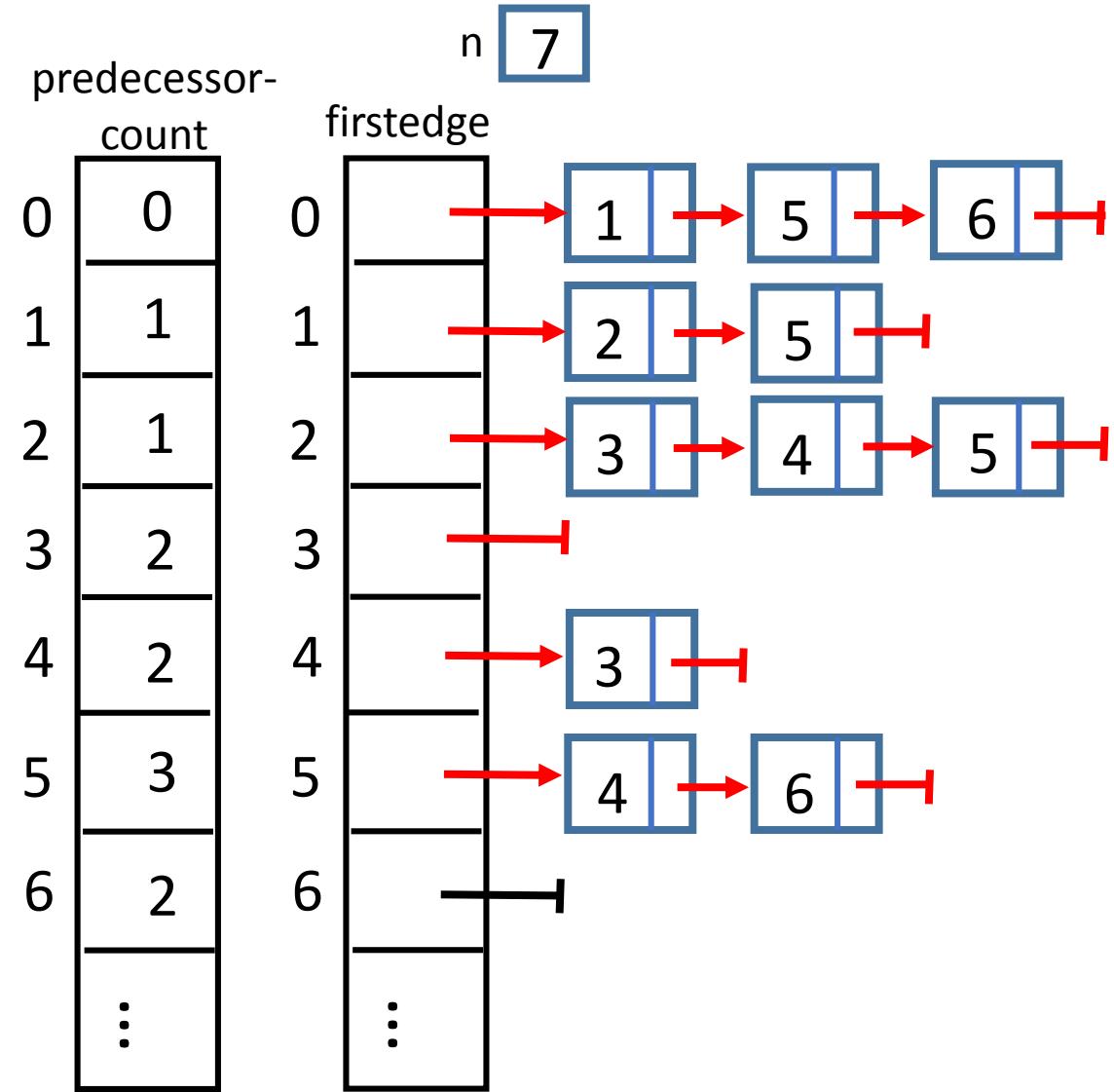
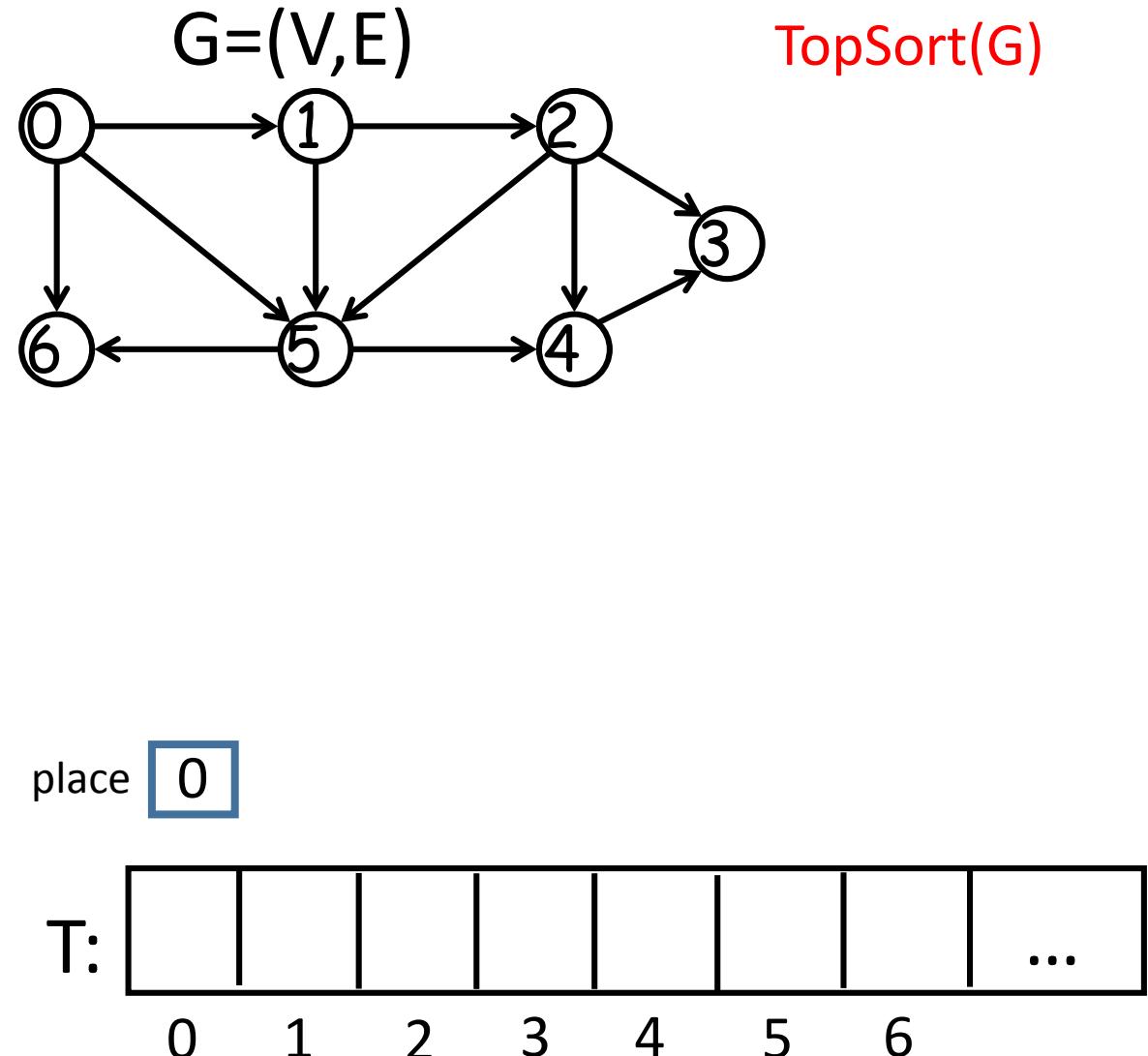
# מציאת סדר טופולוגי בגרף לרוחב



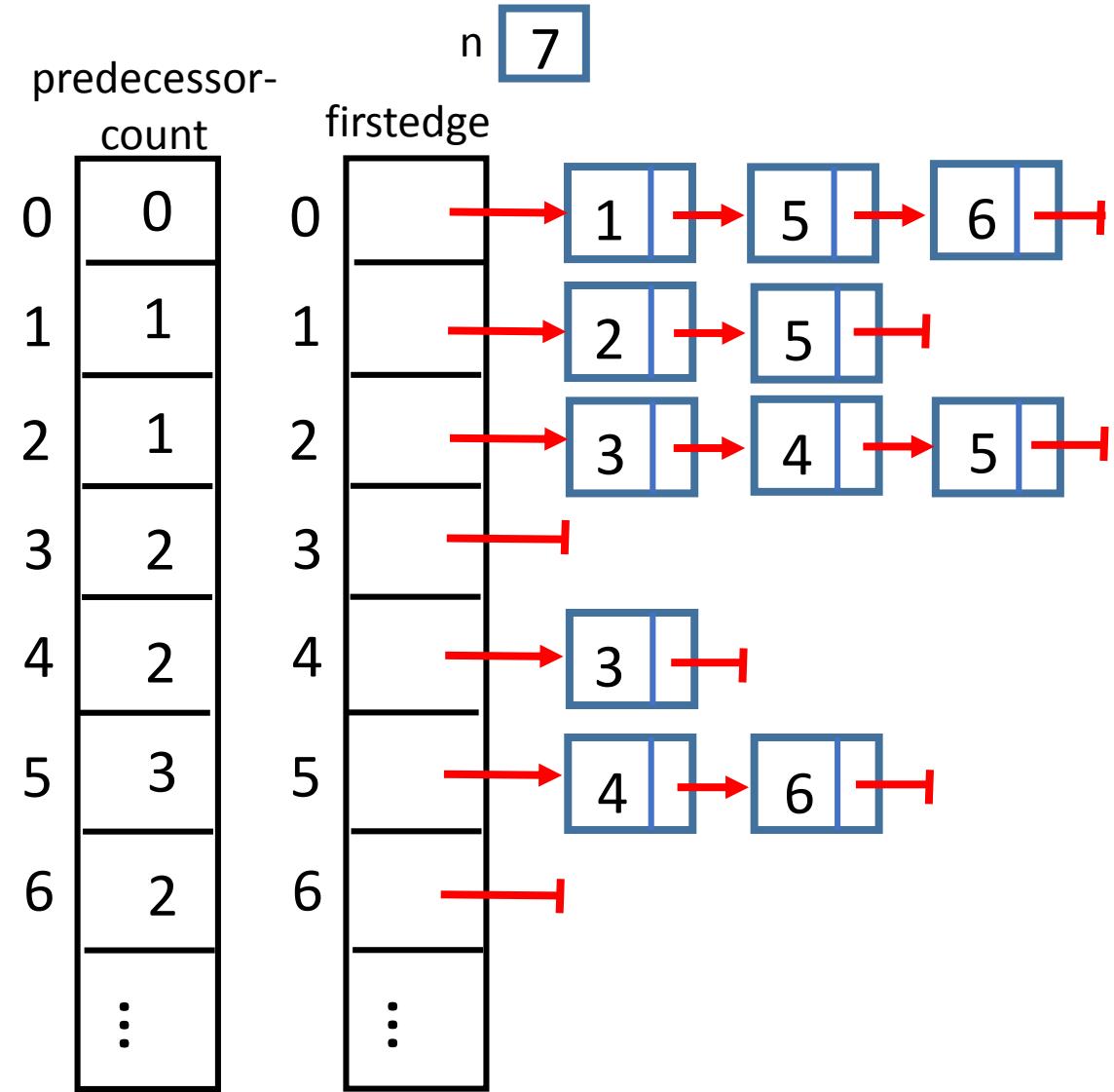
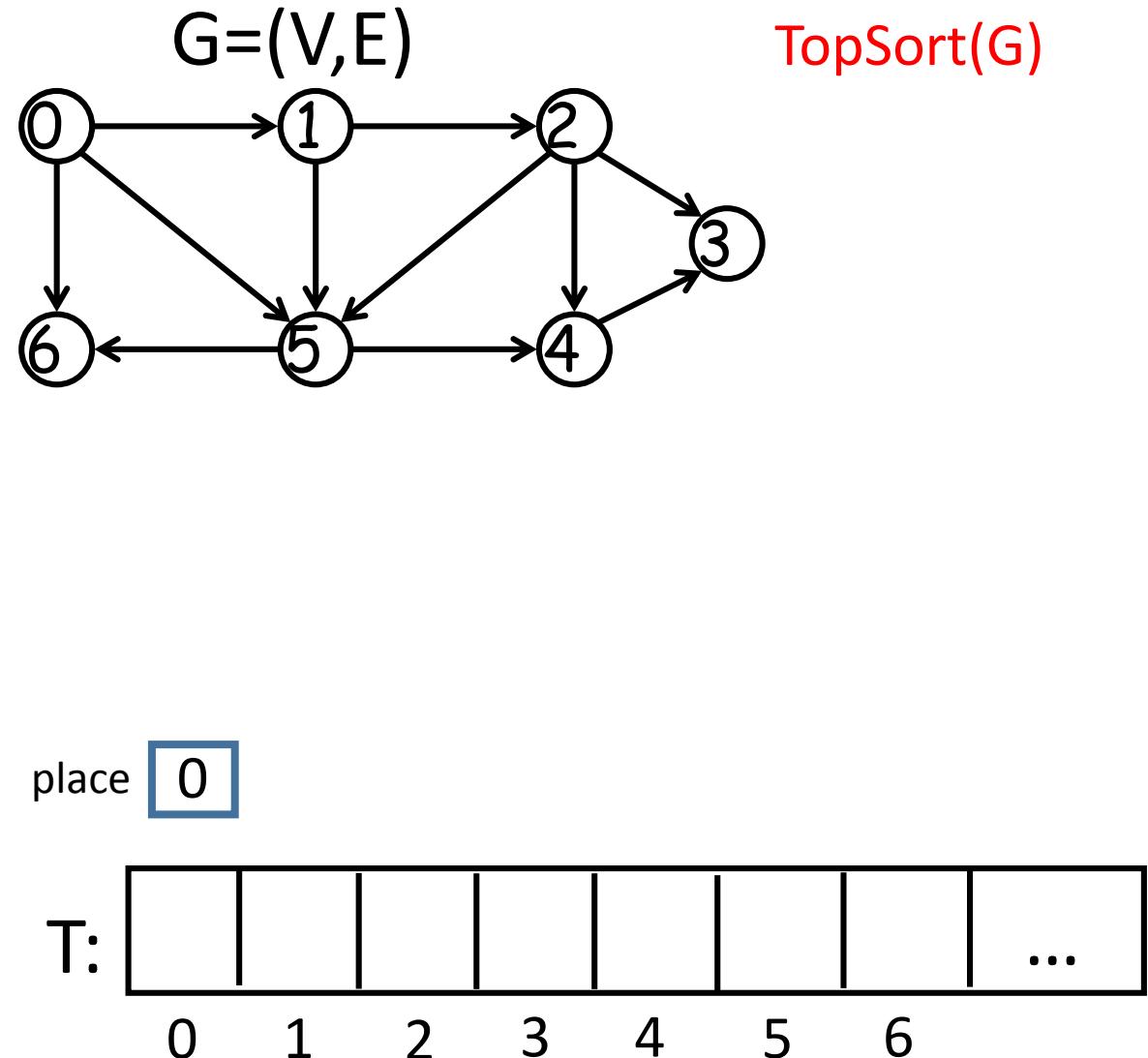
# מציאת סדר טופולוגי בגרף לרוחב



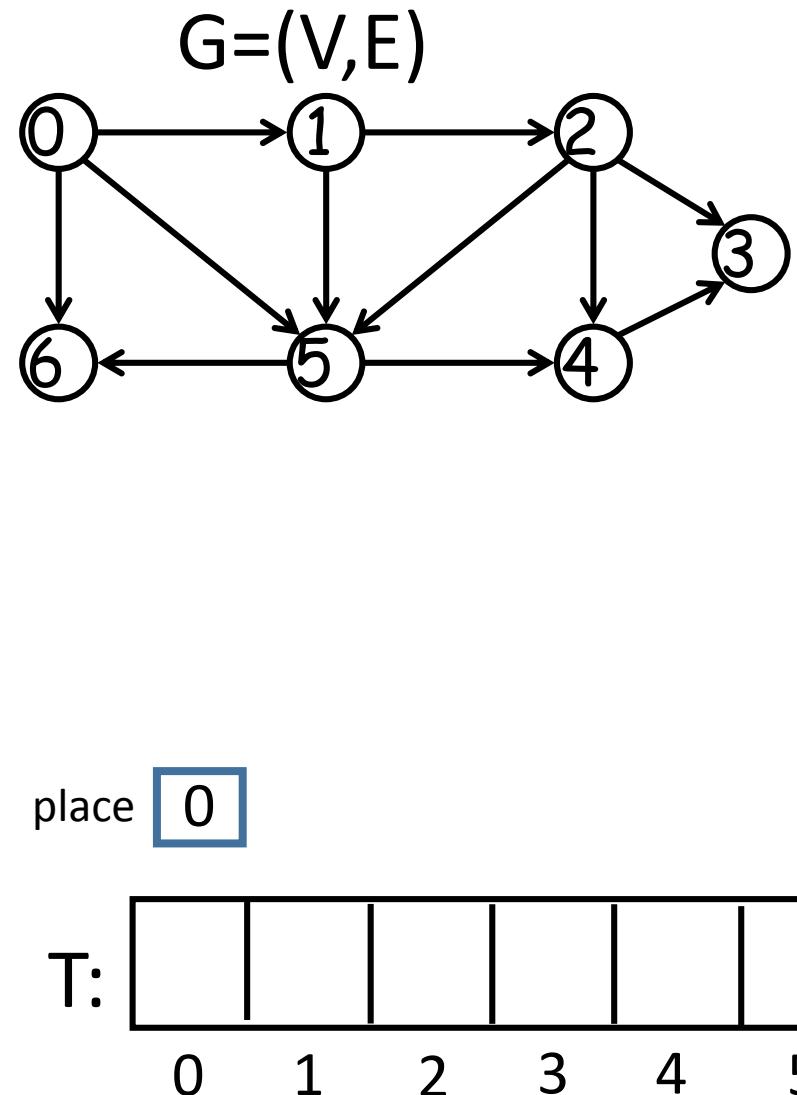
# מציאת סדר טופולוגי בגרף לרוחב



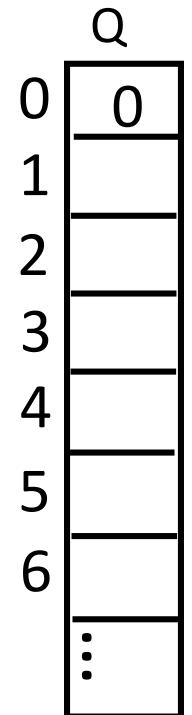
# מציאת סדר טופולוגי בגרף לרוחב



# מציאת סדר טופולוגי בגרף לרוחב



TopSort( $G$ )

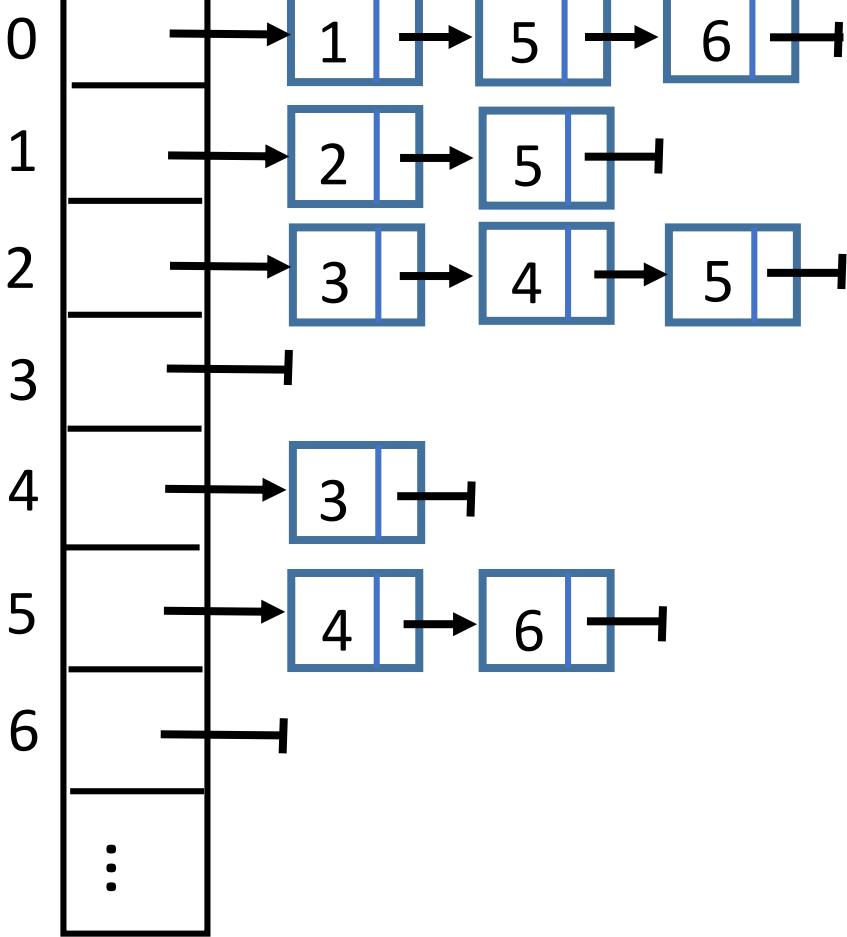


predecessor-count

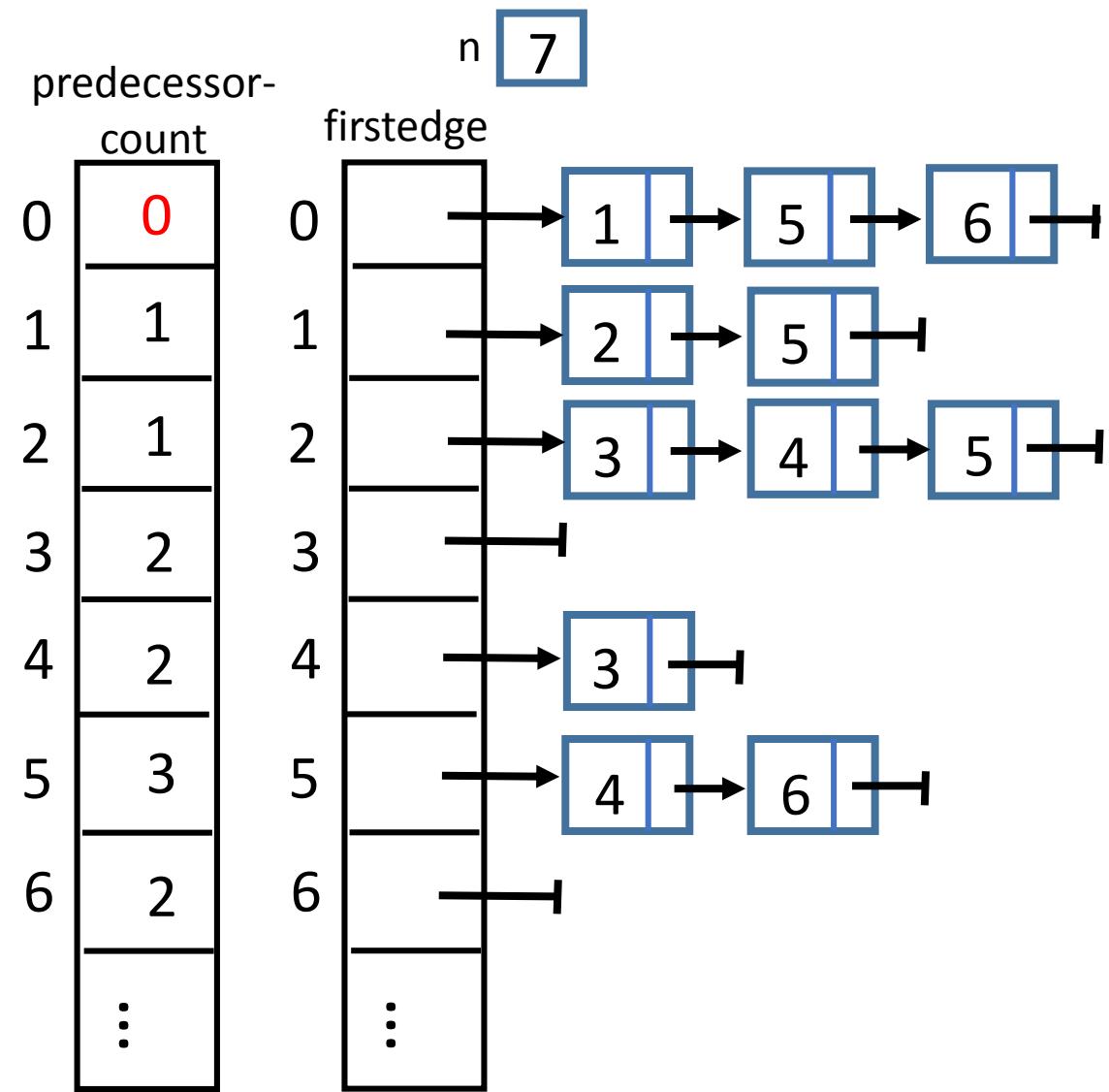
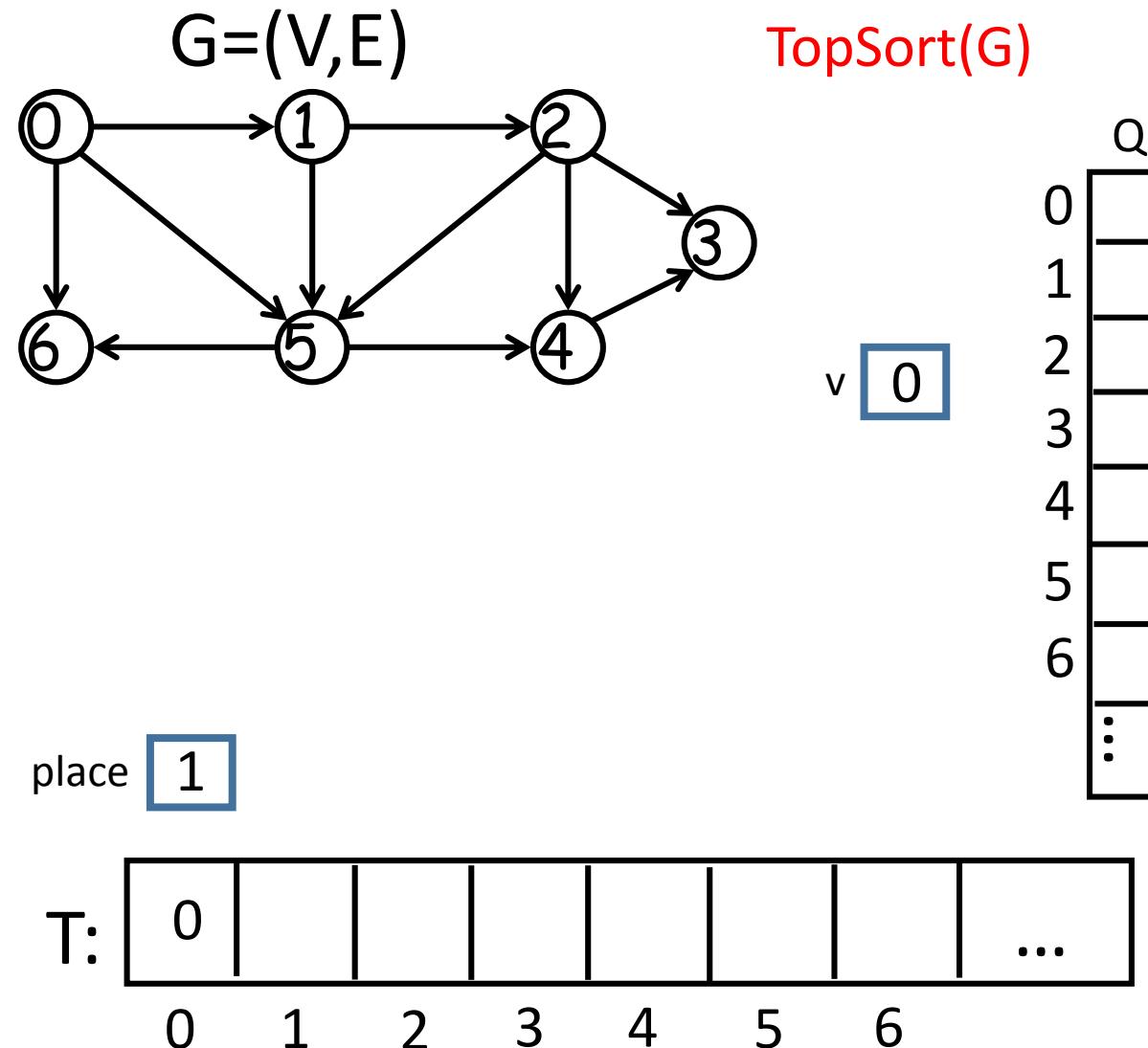
0	0
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	2
⋮	

n 7

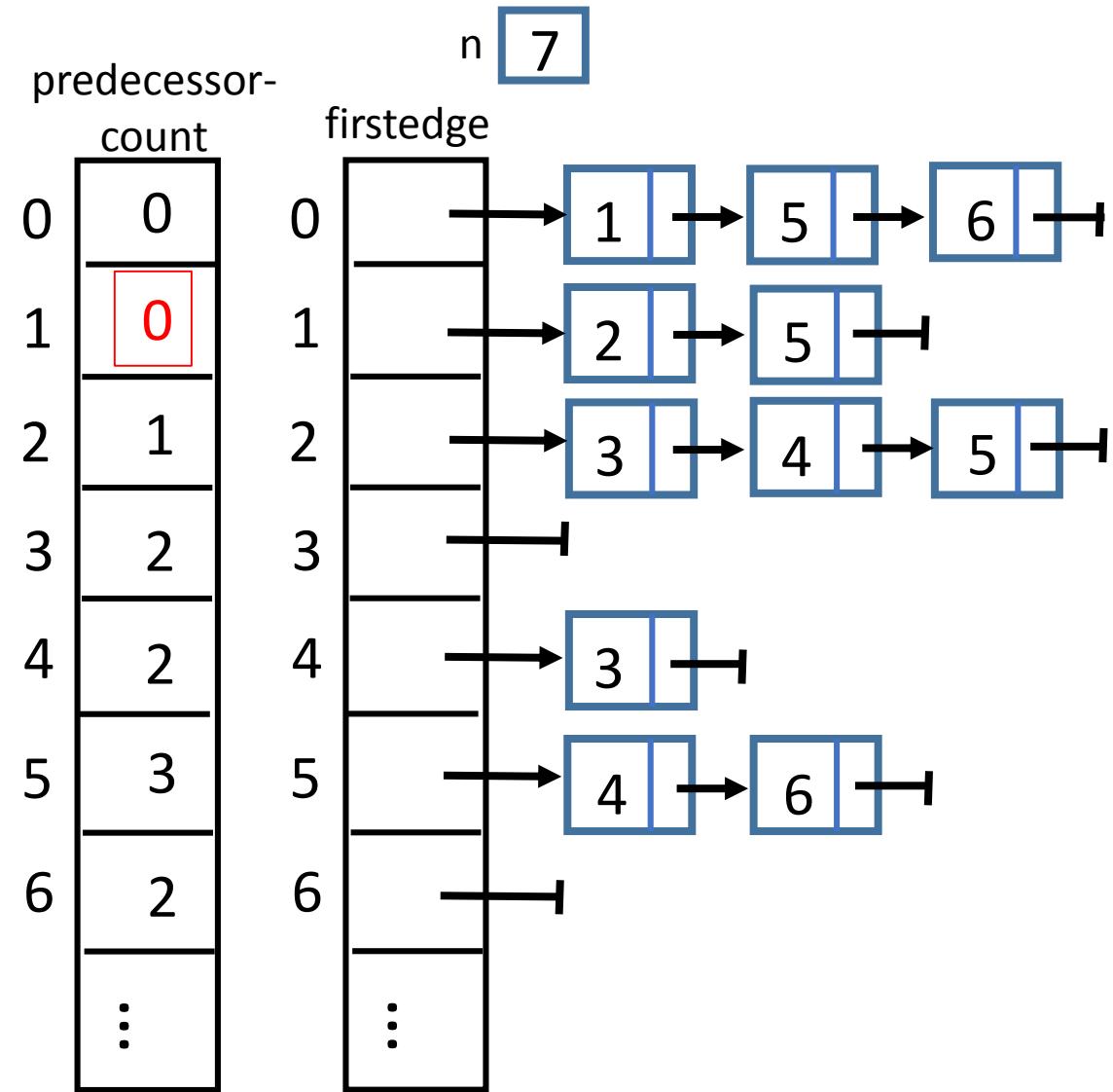
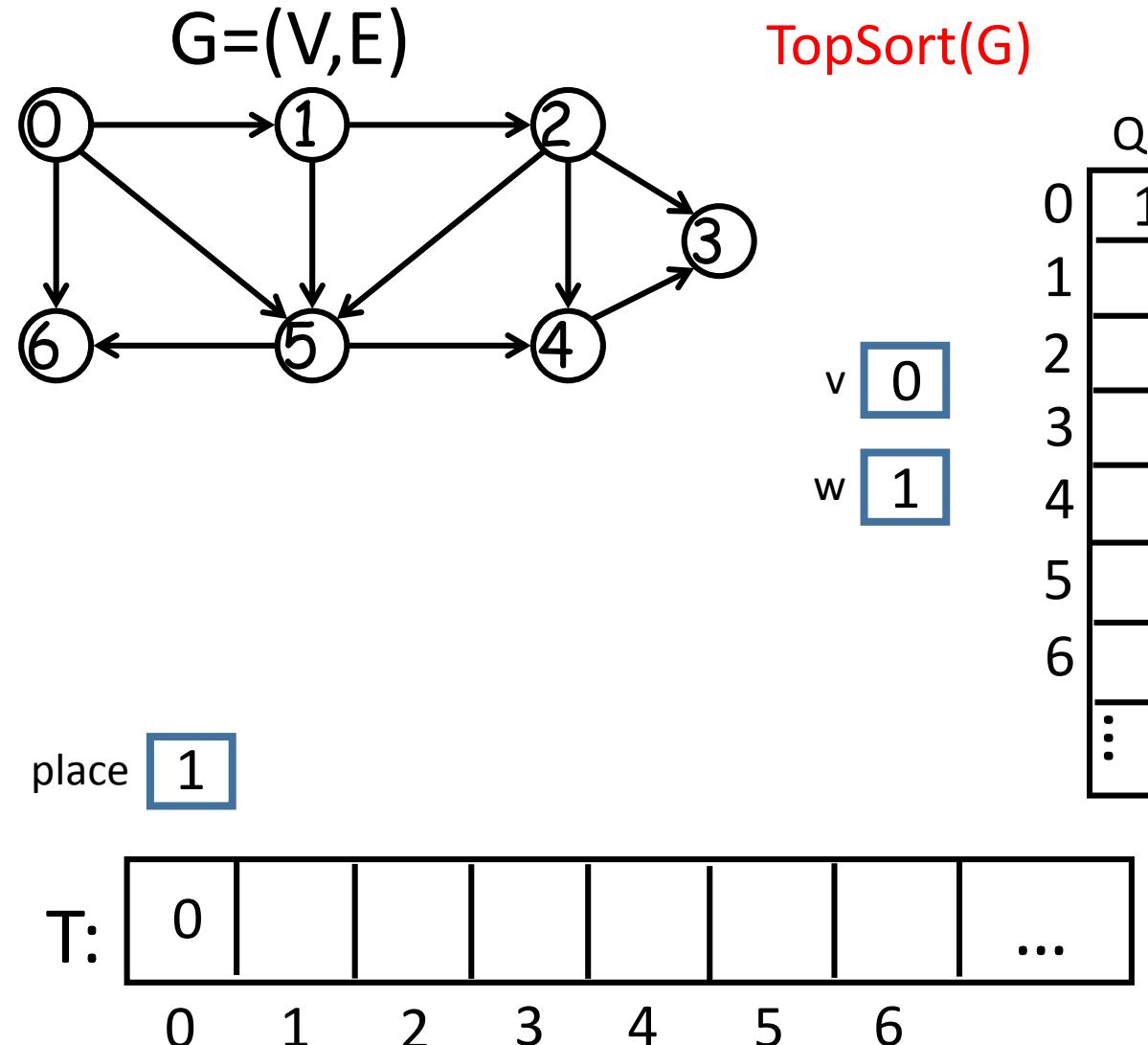
firstedge



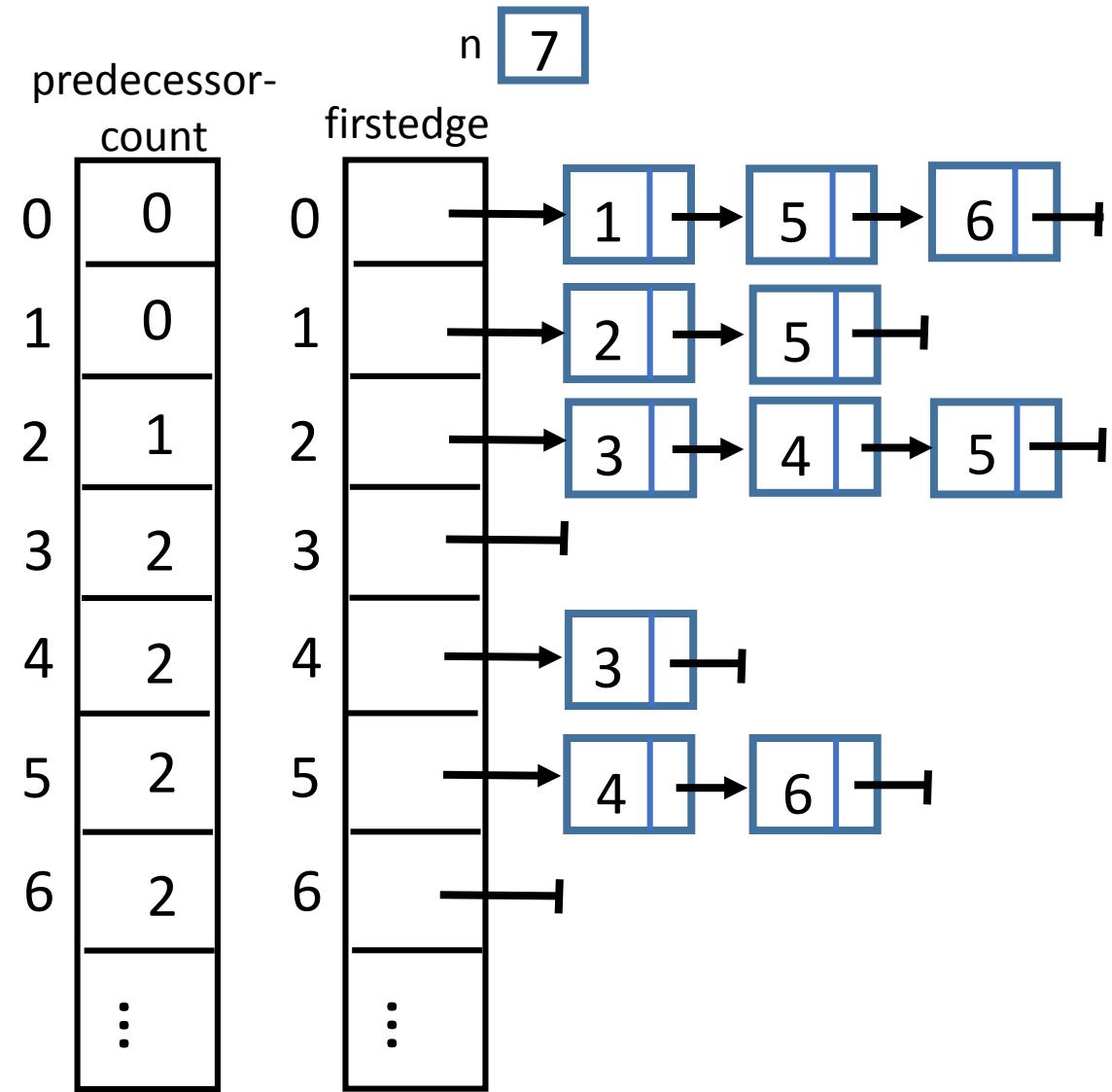
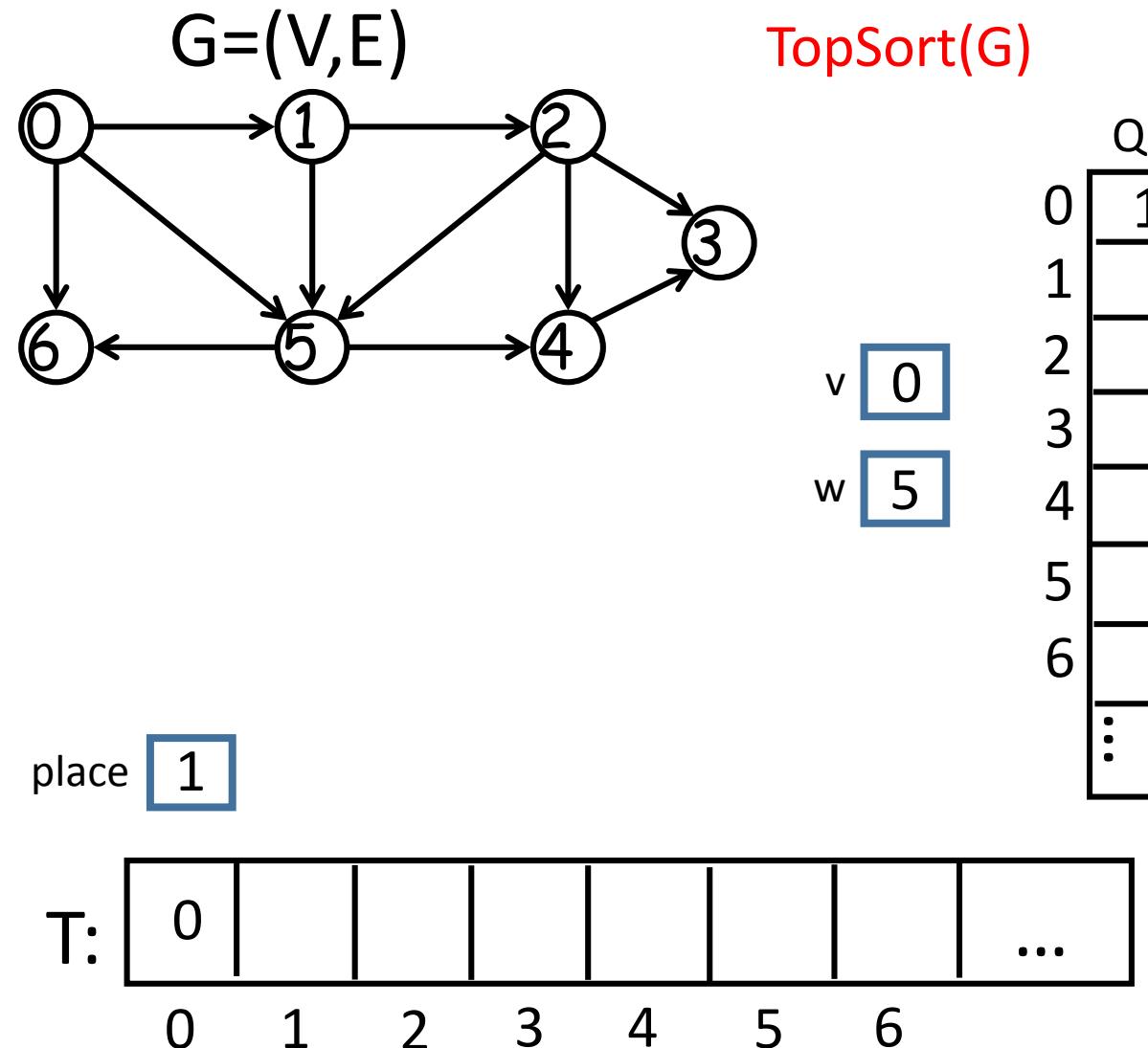
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן



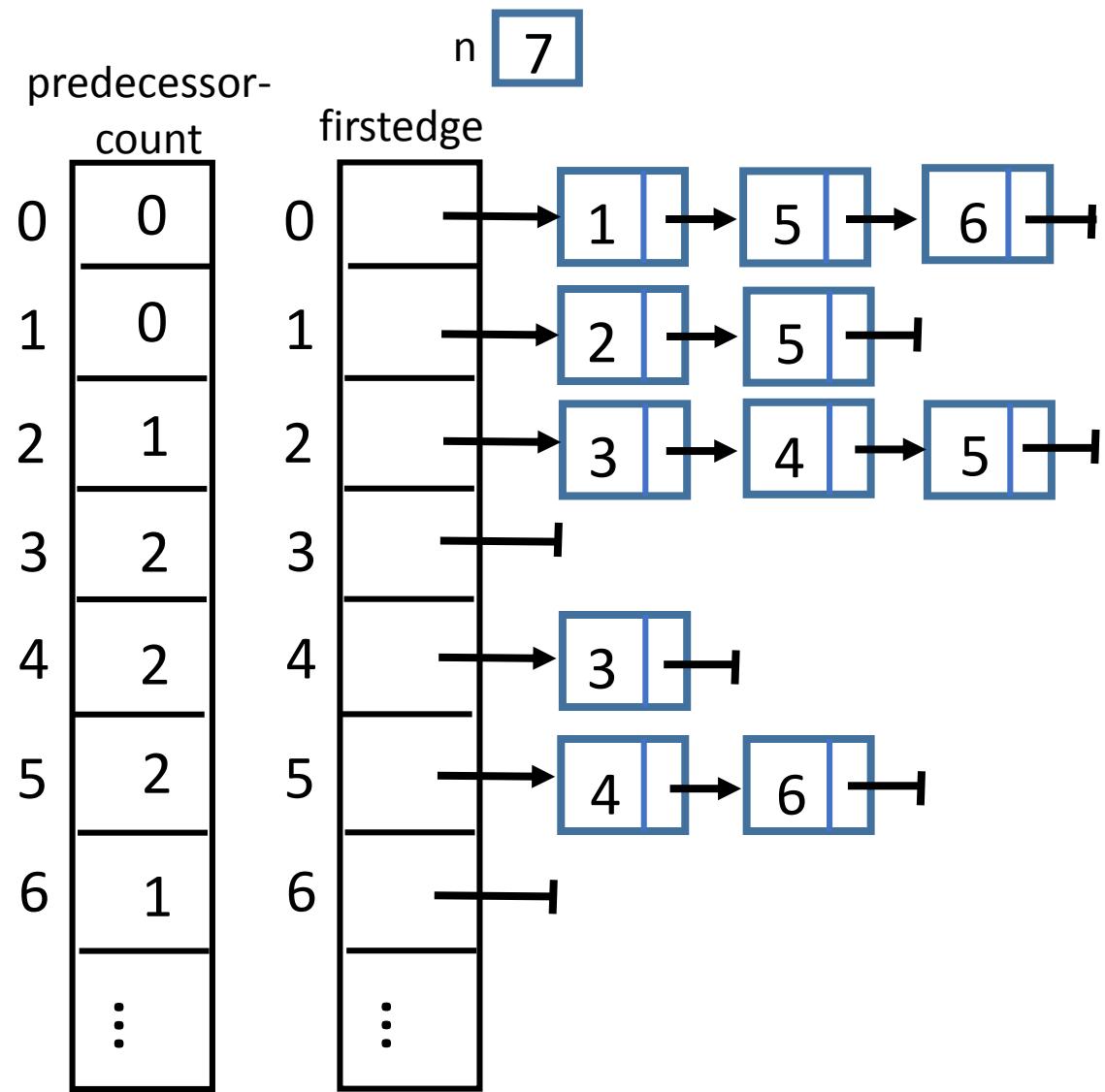
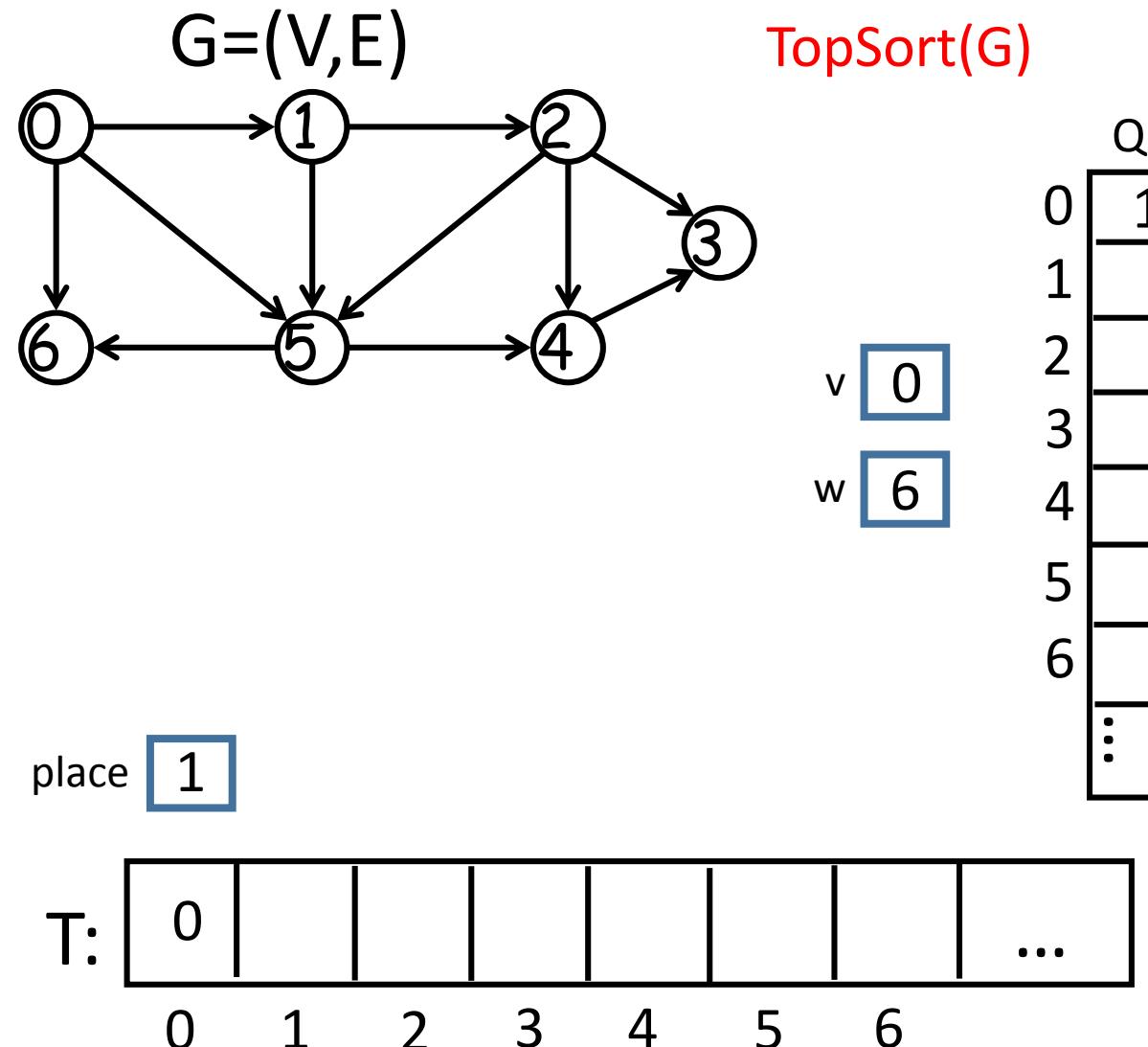
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן



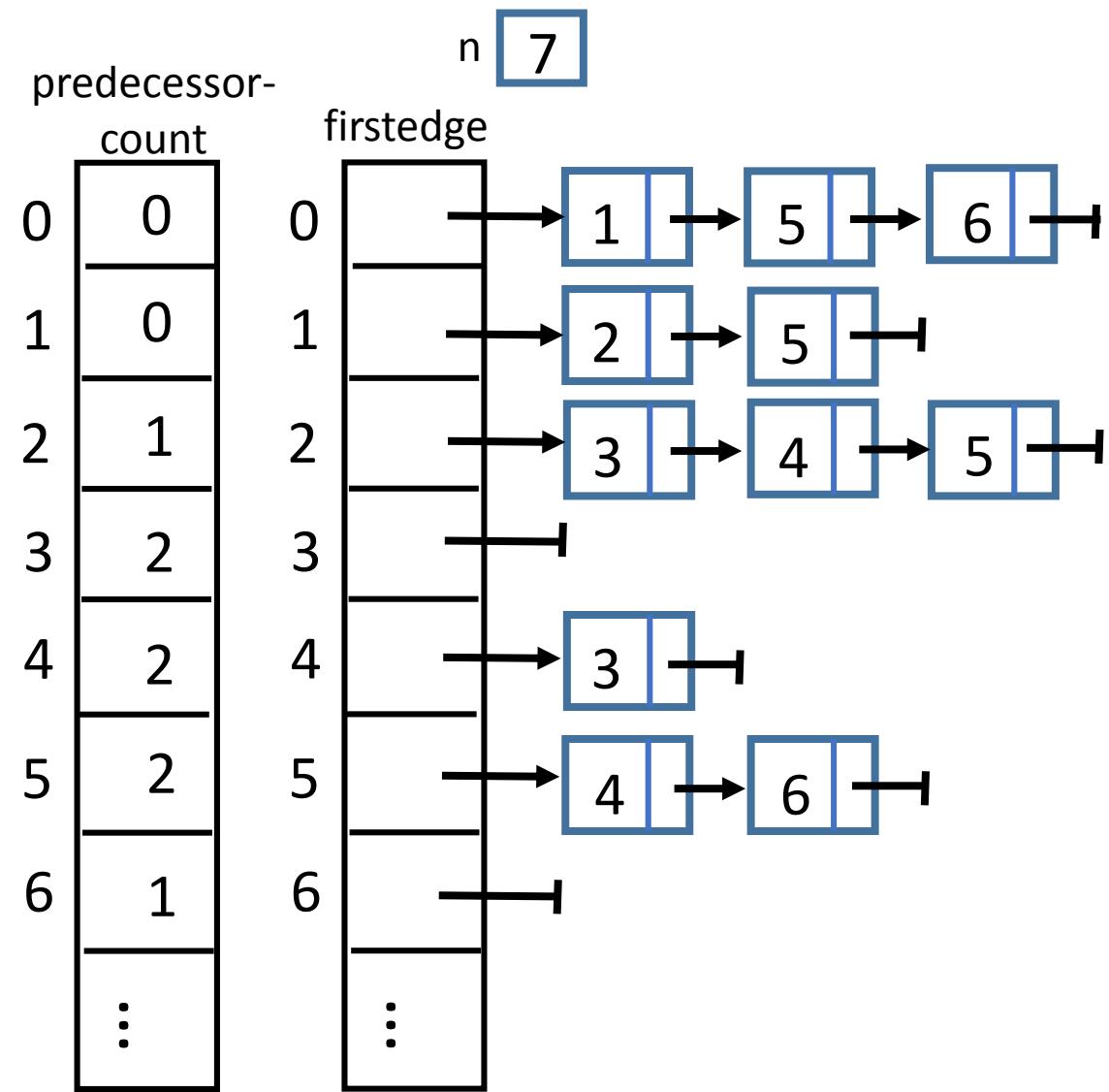
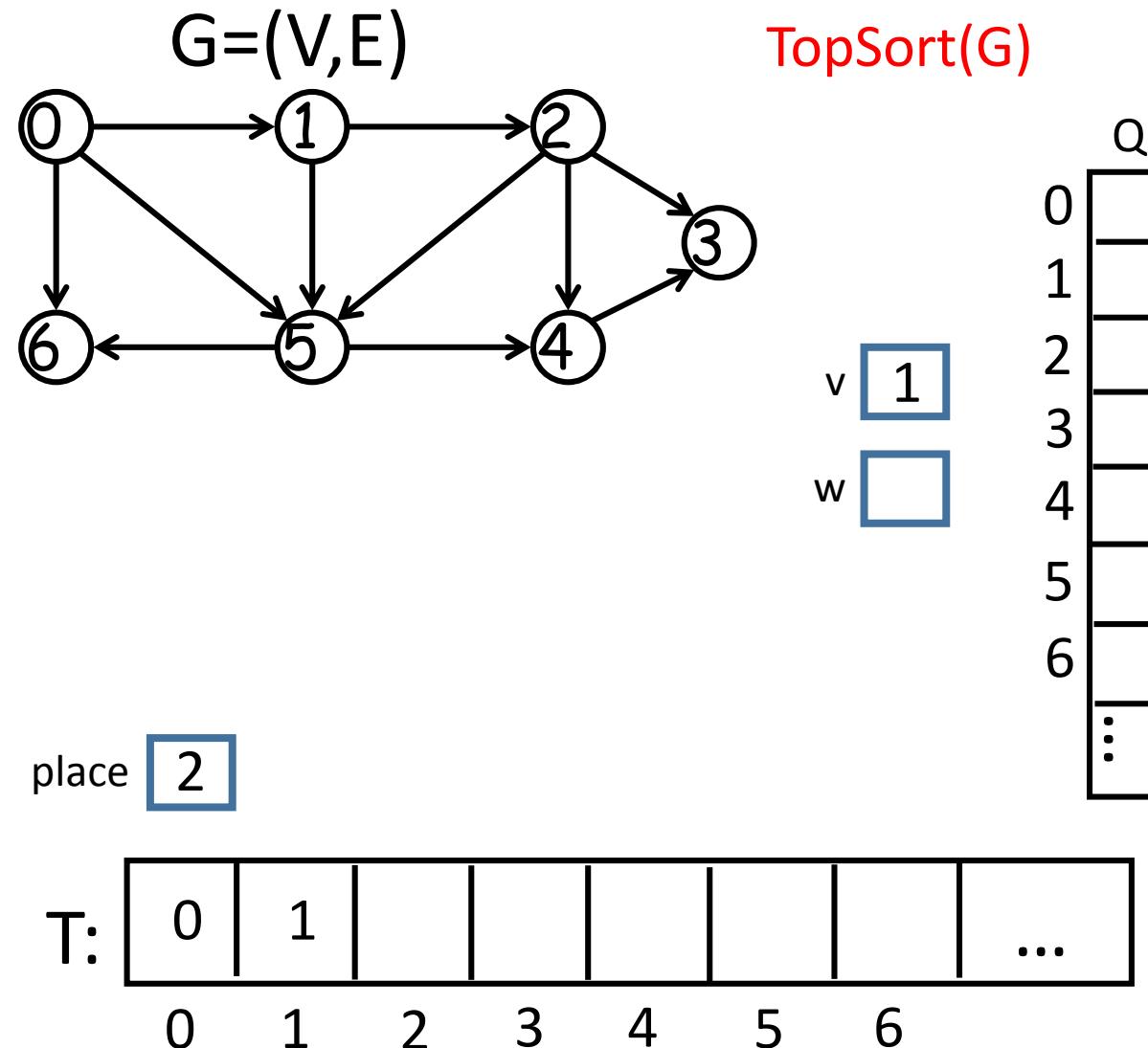
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן



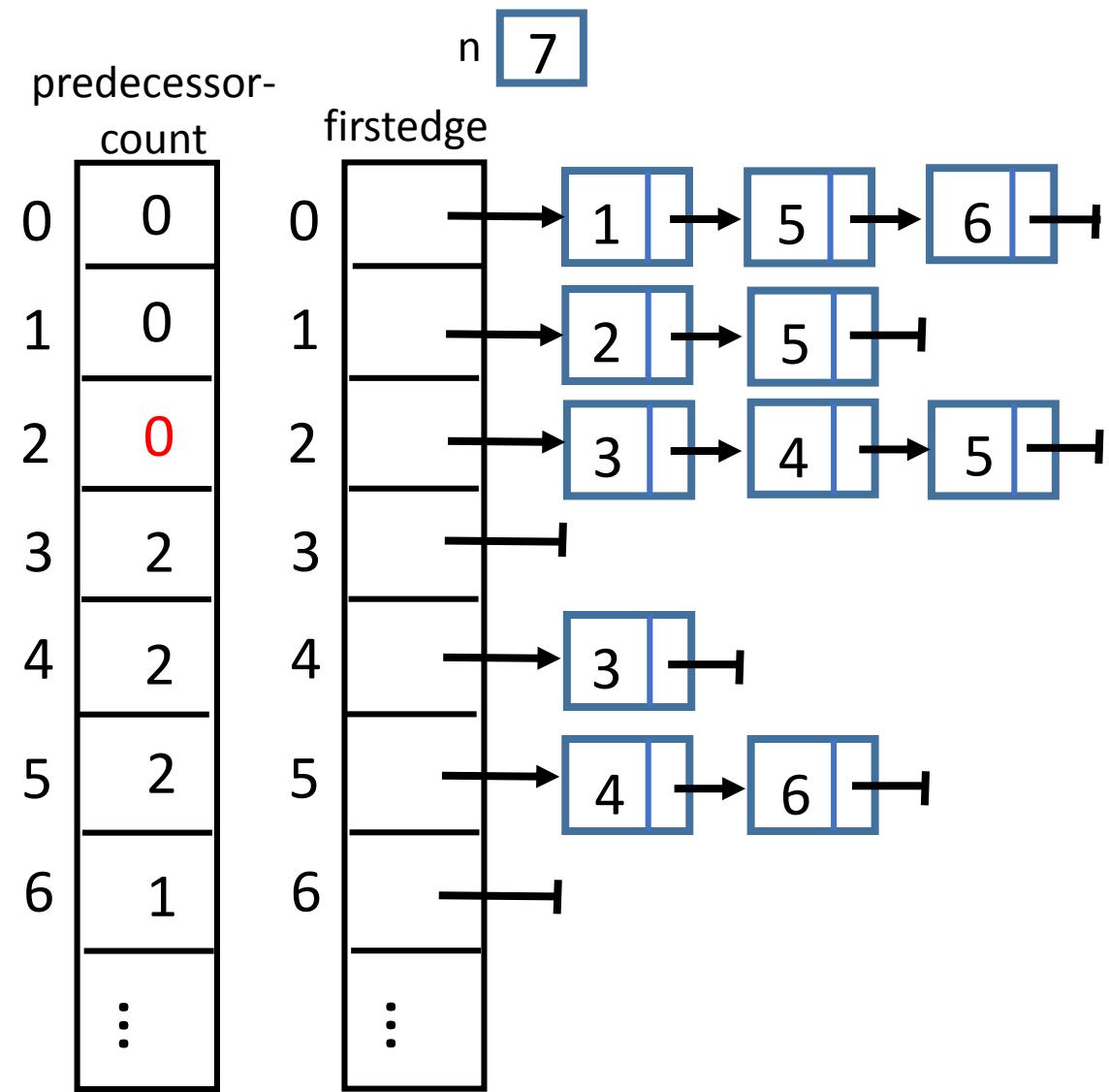
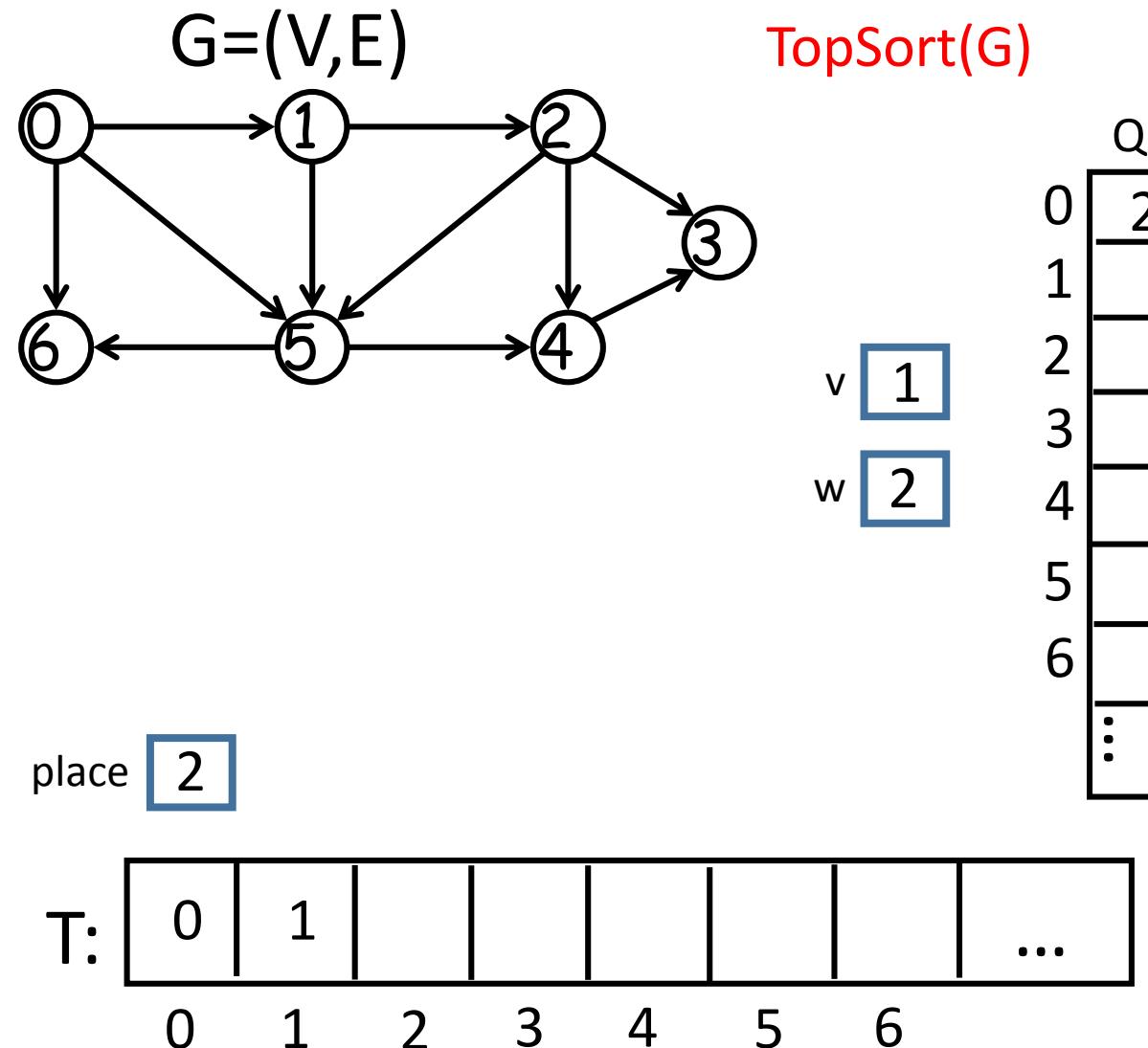
# מציאת סדר טופולוגי בגרף לרוחב



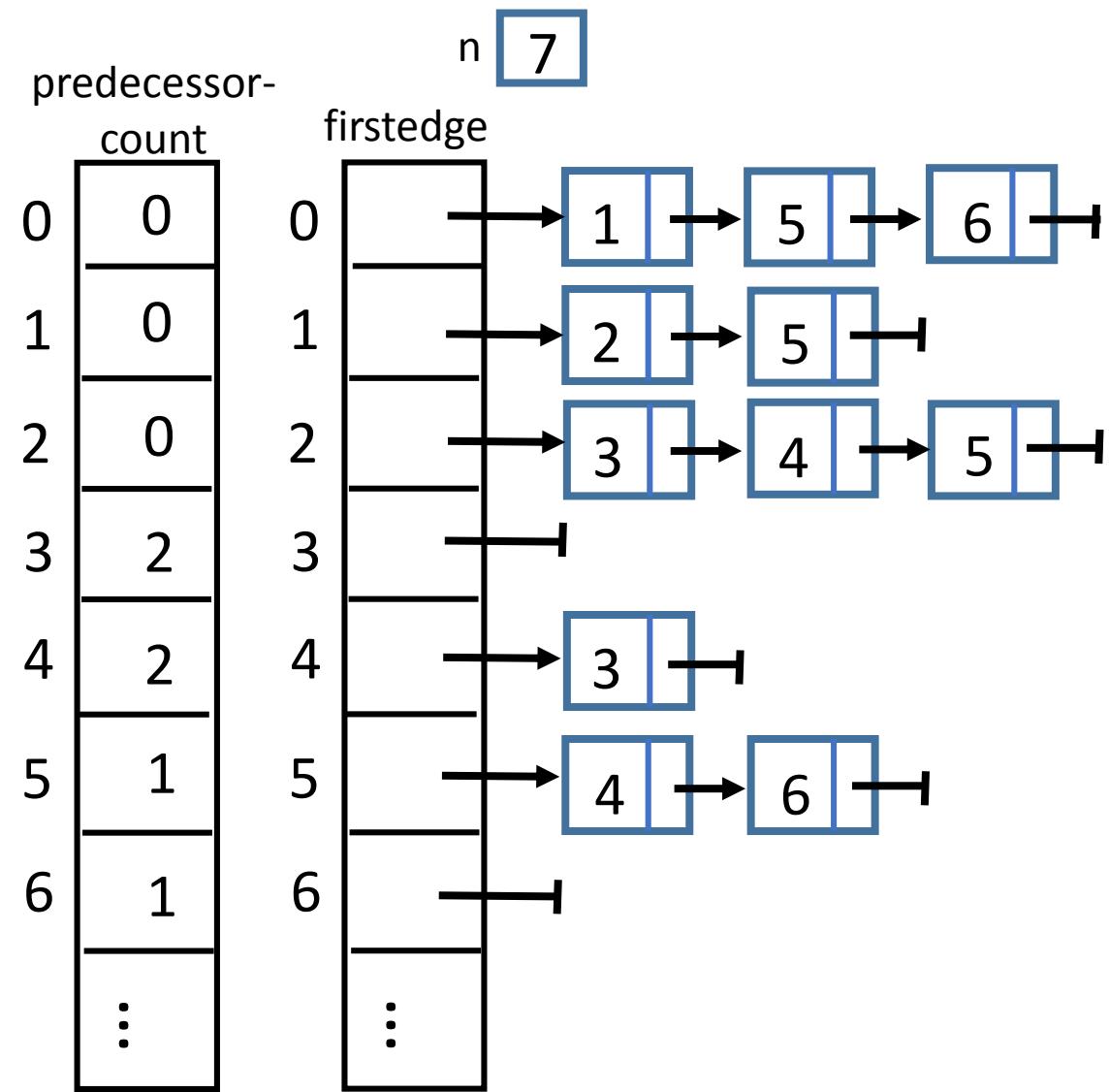
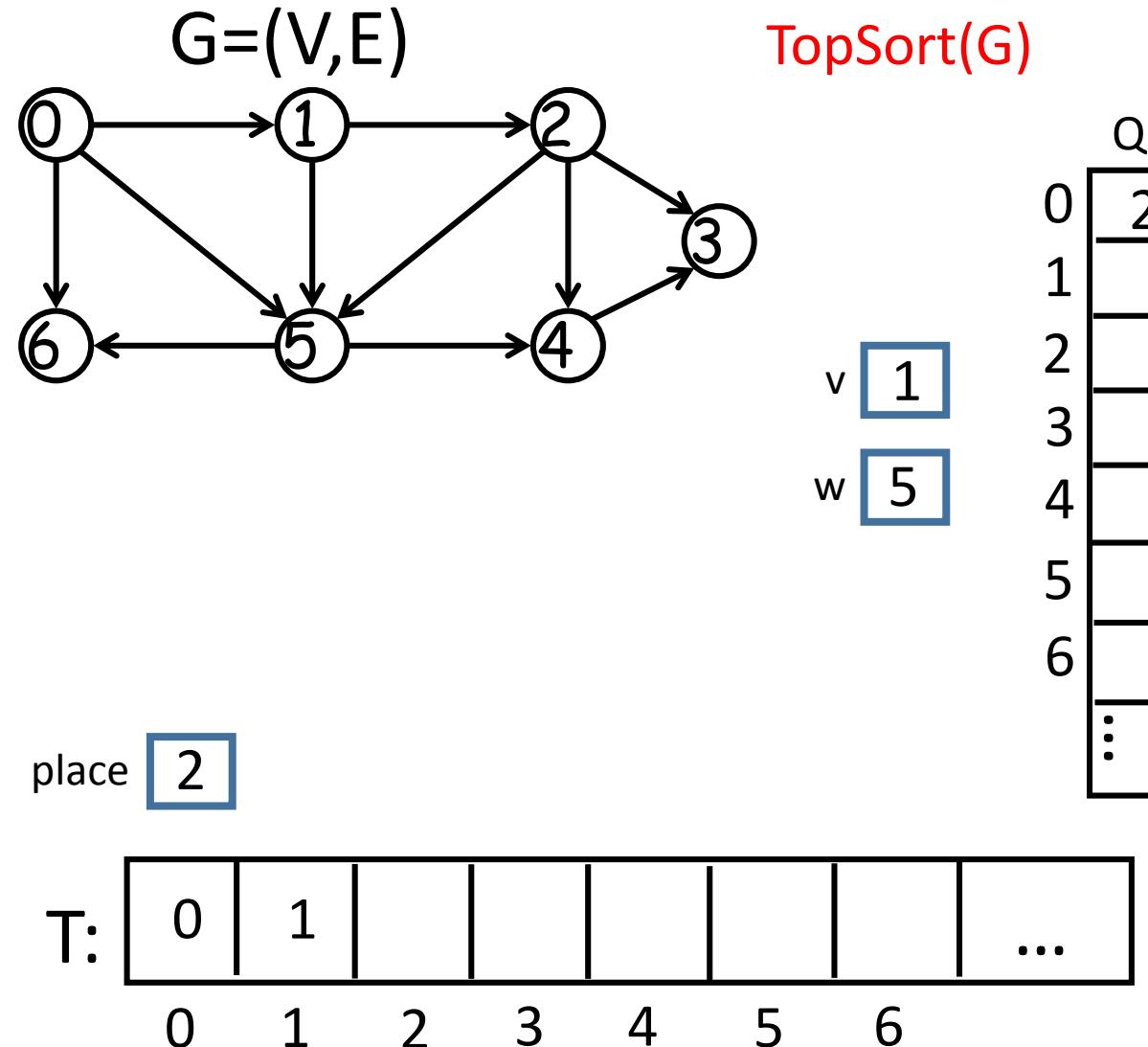
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן



# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן



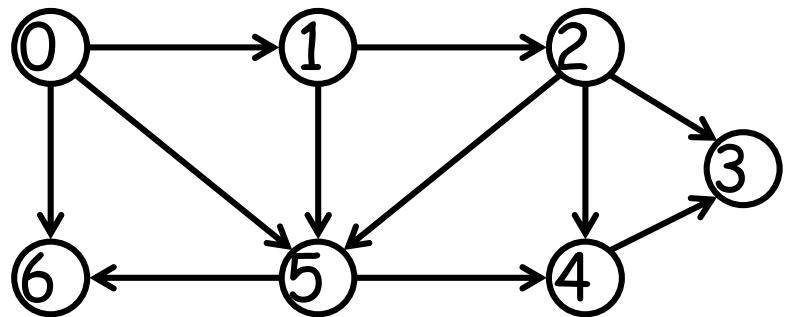
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן



# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן

1

$$G = (V, E)$$

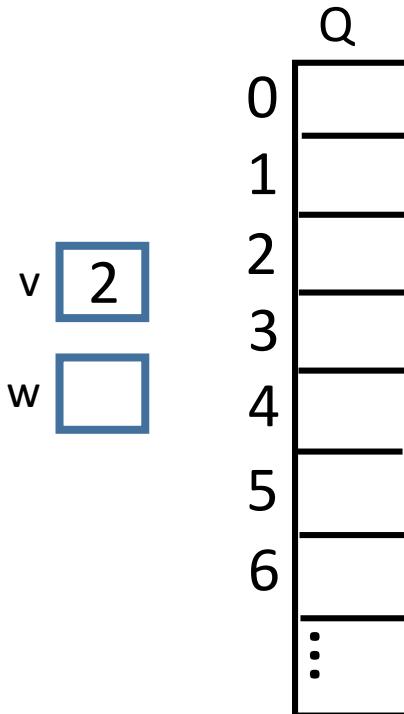


TopSort(G)

$$\begin{matrix} v \\ w \end{matrix}$$

$$\text{place}$$

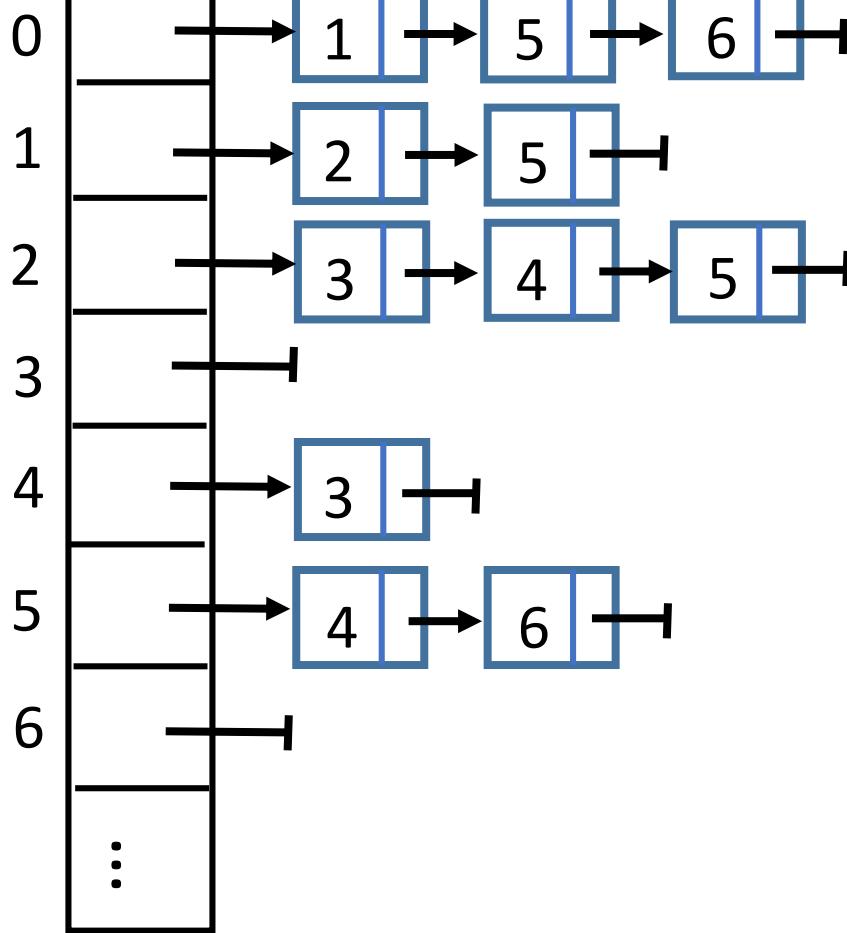
$$T: \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{matrix}$$



predecessor-count

0	0
1	0
2	0
3	2
4	2
5	1
6	1
⋮	⋮

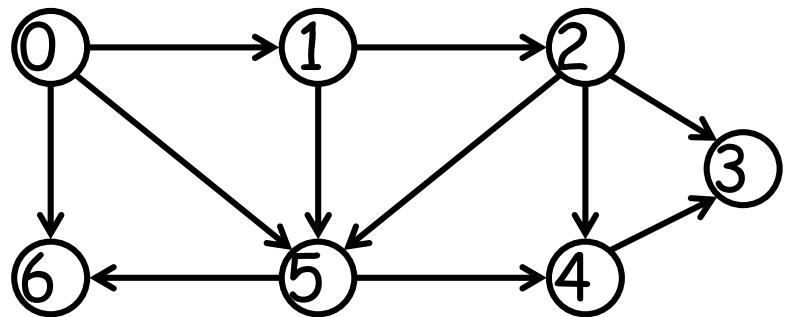
n  
firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן

1

$$G = (V, E)$$

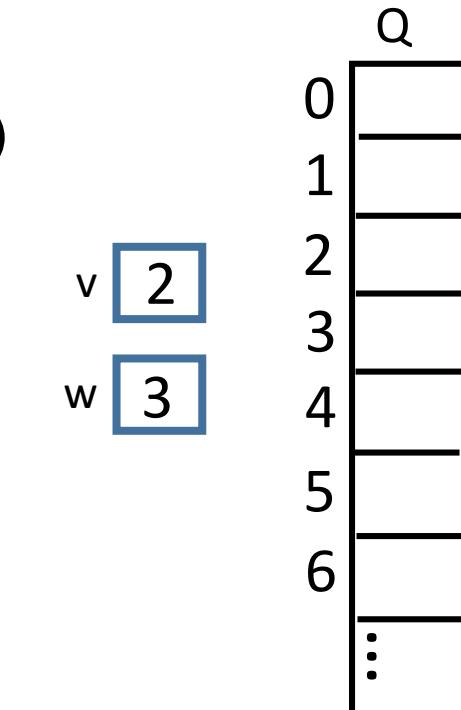


TopSort(G)

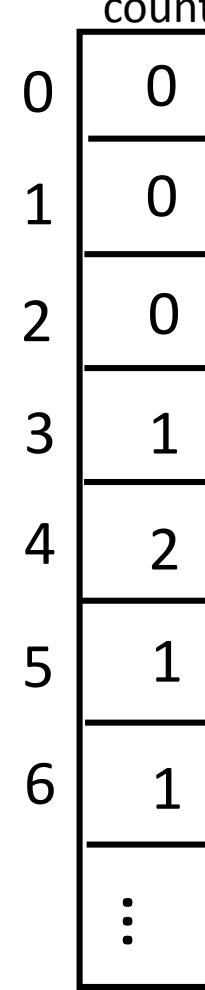
$$\begin{matrix} v \\ w \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\text{place} \quad \begin{matrix} 3 \end{matrix}$$

$$T: \quad \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{matrix}$$

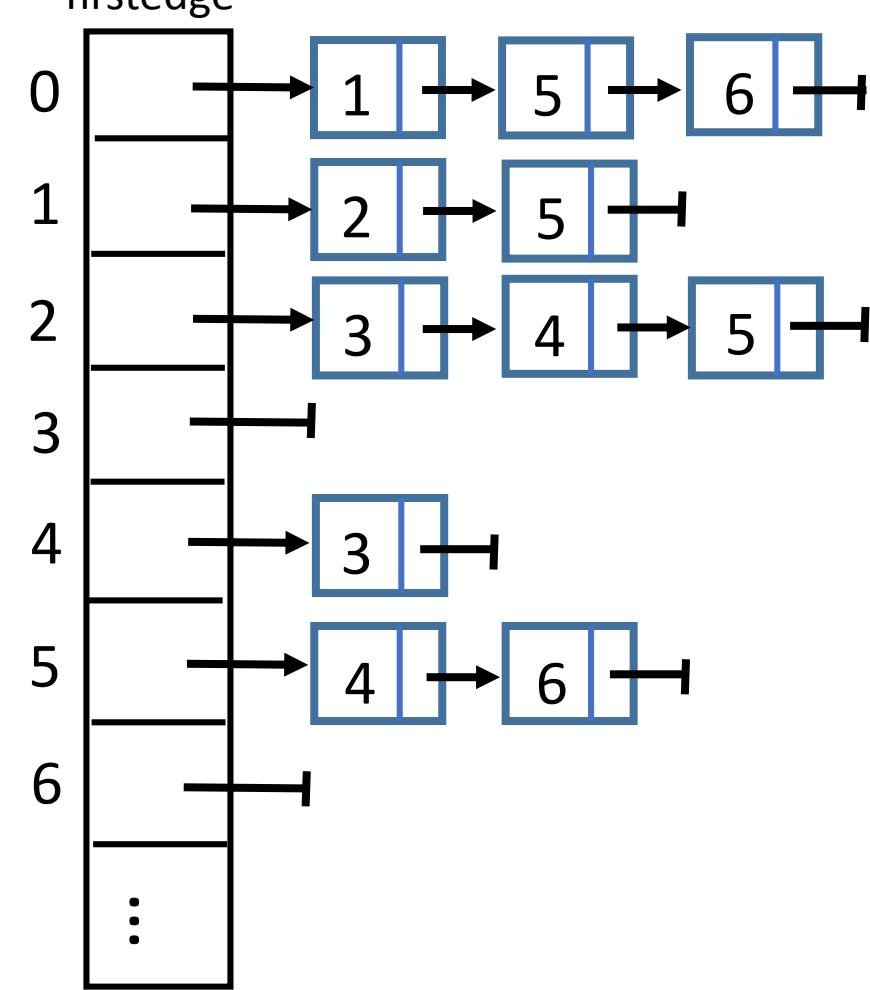


predecessor-  
count



n  $\quad \begin{matrix} 7 \end{matrix}$

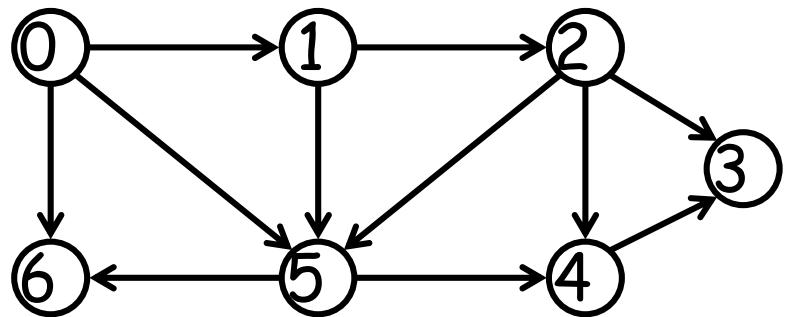
firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן

1

$$G = (V, E)$$

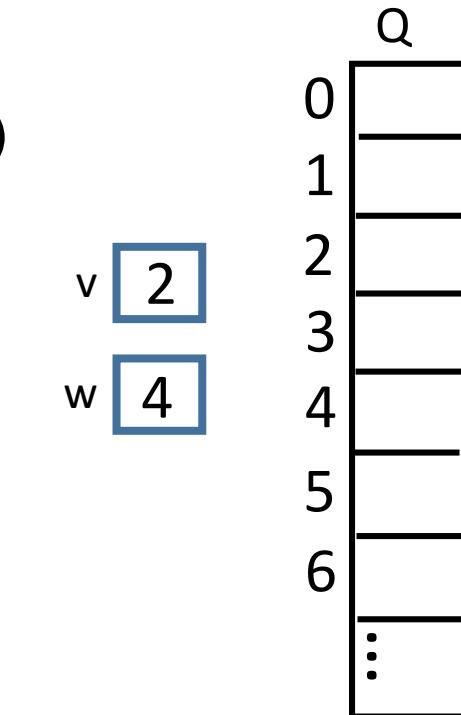


TopSort(G)

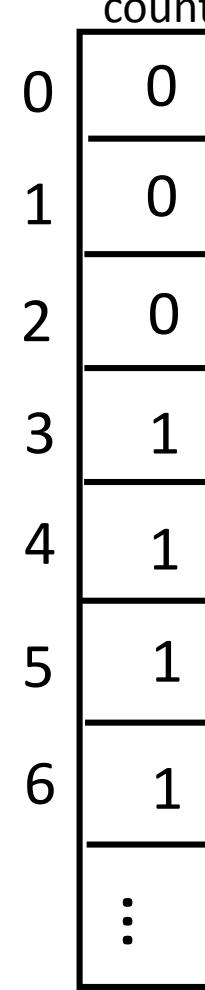
$$\begin{matrix} v \\ w \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\text{place} \quad \begin{matrix} 3 \end{matrix}$$

$$T: \quad \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{matrix}$$

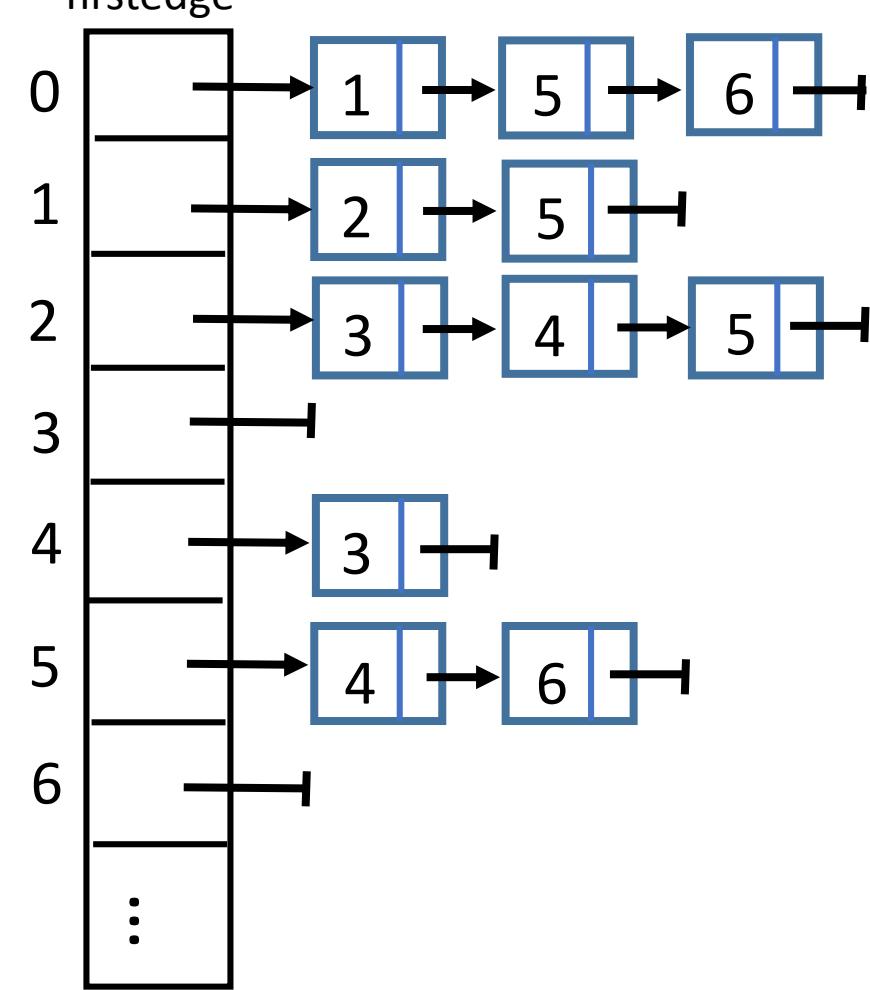


predecessor-  
count



n  $\quad \begin{matrix} 7 \end{matrix}$

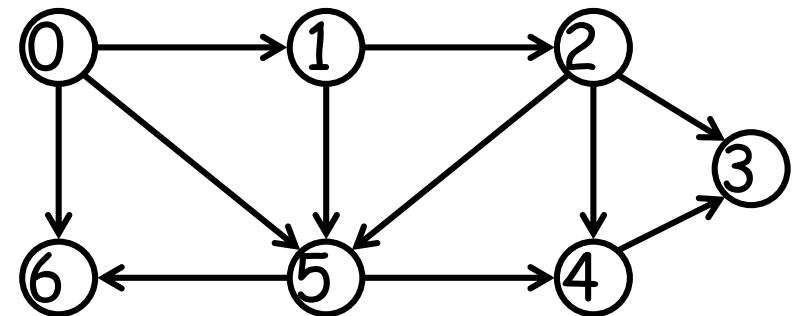
firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף לרוחב

1

$$G = (V, E)$$

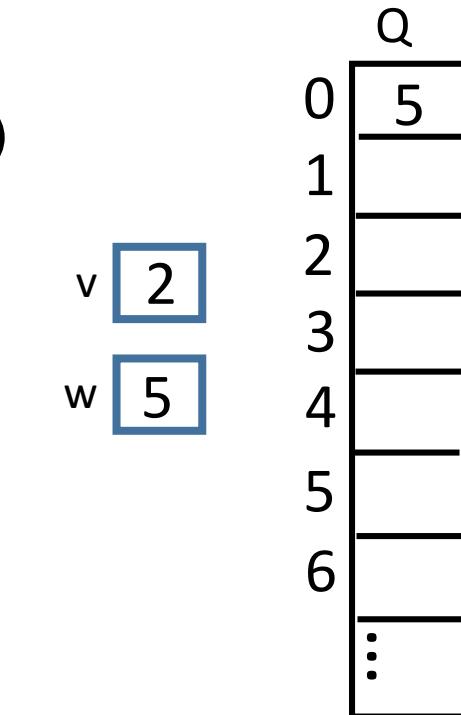


TopSort(G)

$$\begin{matrix} v \\ w \end{matrix} = \boxed{2} \quad \boxed{5}$$

$$\text{place} = \boxed{3}$$

$$T: \begin{matrix} 0 & | & 1 & | & 2 & | & \dots \end{matrix}$$



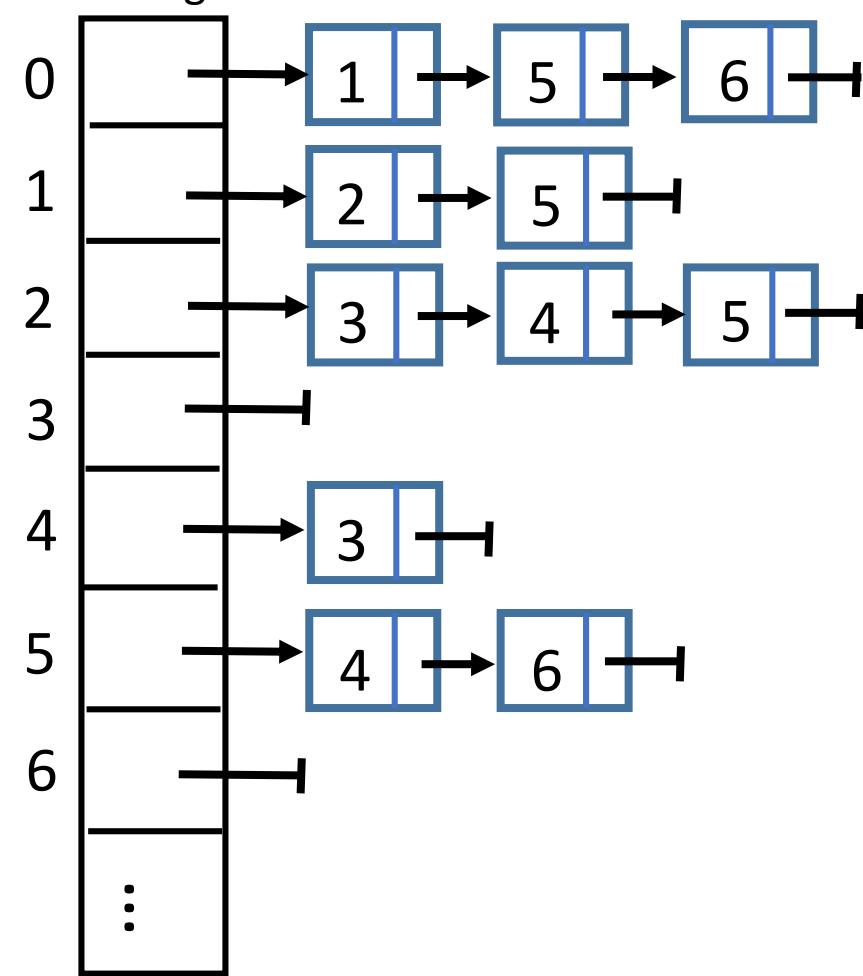
predecessor-

count

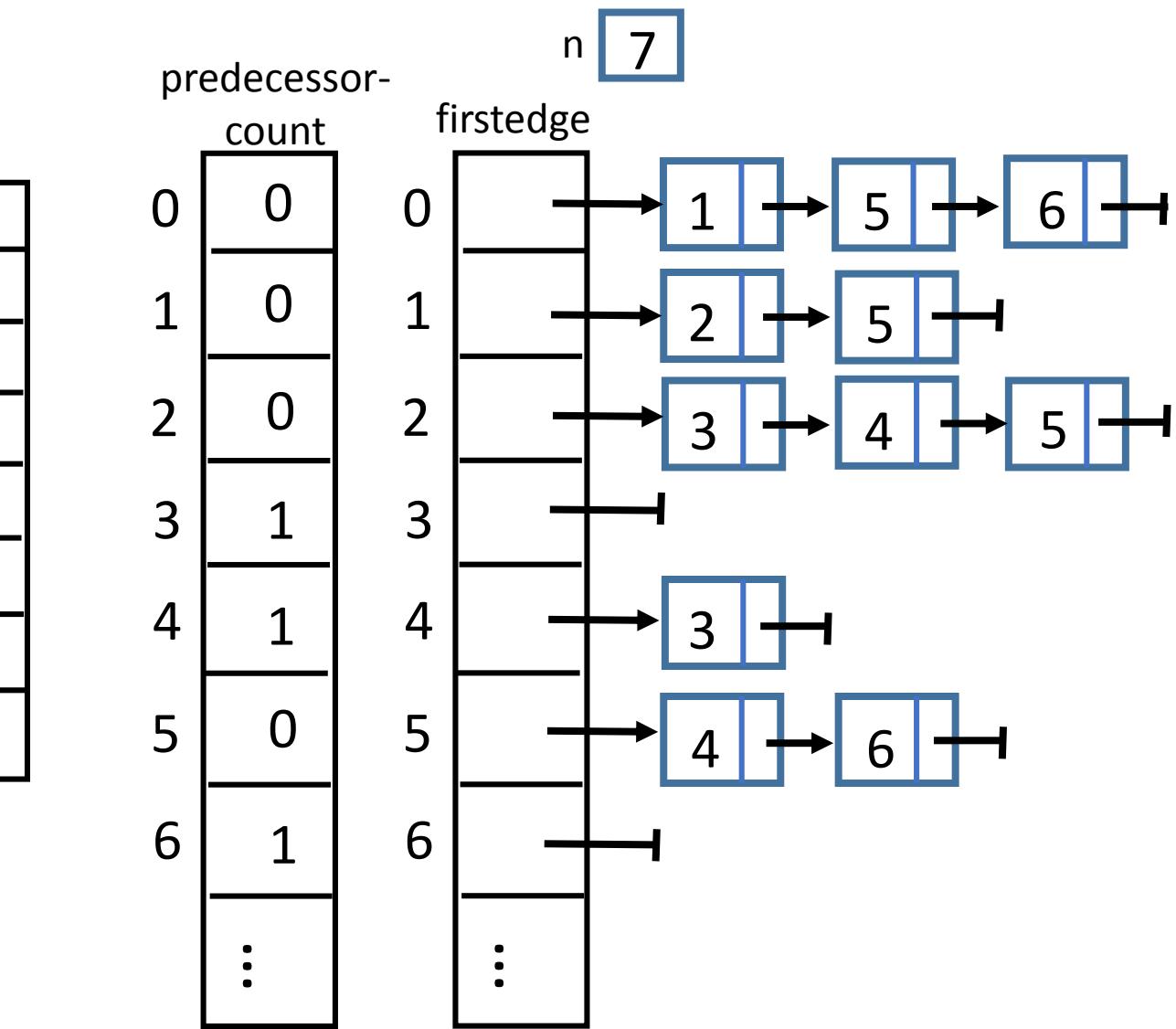
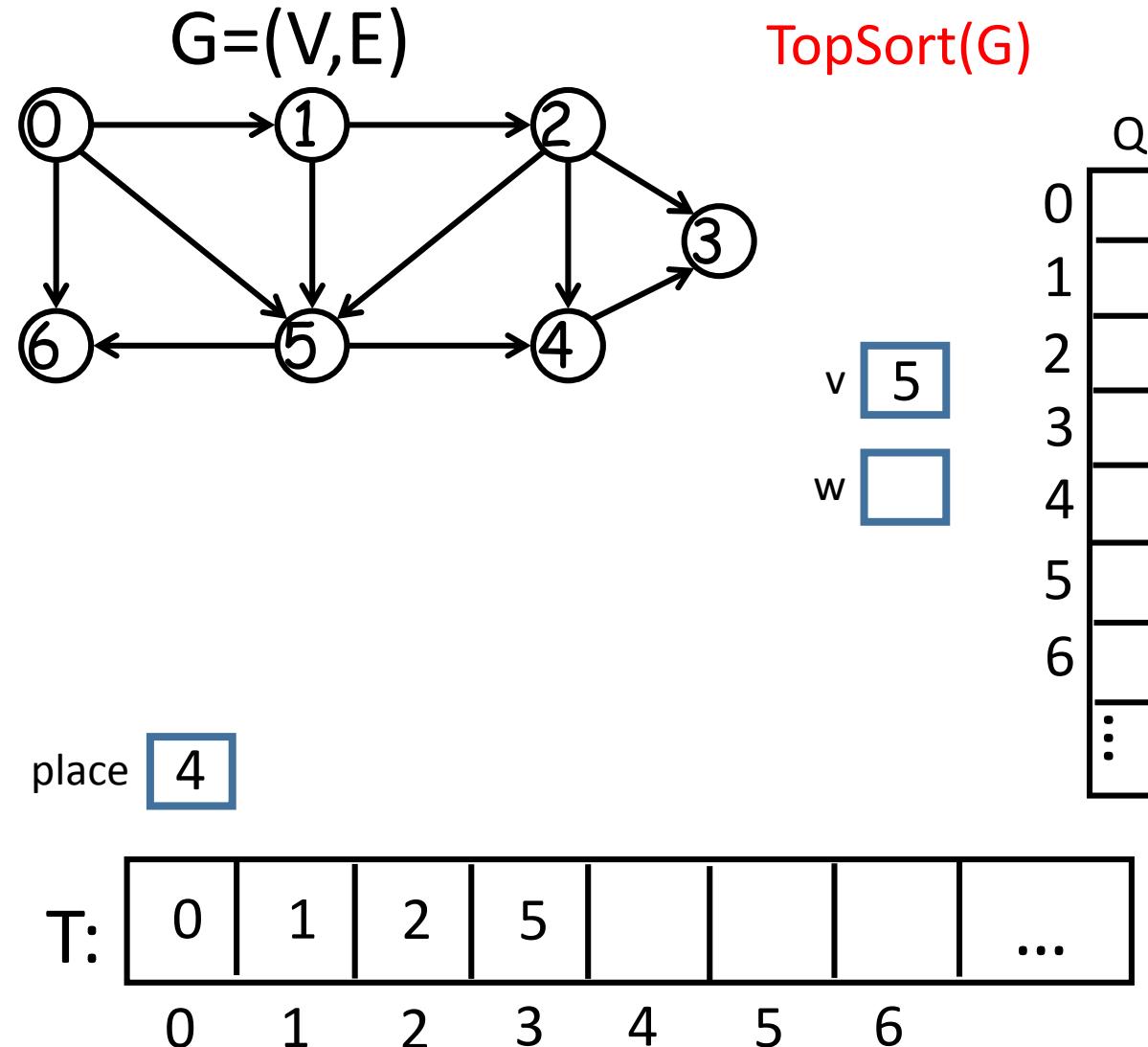
0	0
1	0
2	0
3	1
4	1
5	0
6	1
⋮	⋮

$$n = \boxed{7}$$

firstedge



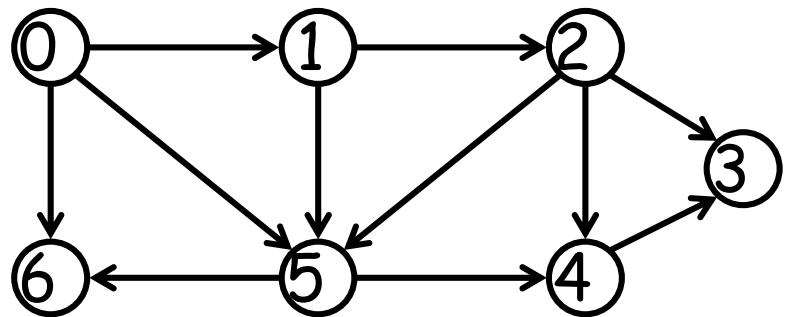
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן



# מציאת סדר טופולוגי בגרף לרוחב

1

$$G = (V, E)$$



TopSort(G)

$$\begin{matrix} v \\ w \end{matrix} = \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\text{place} = \begin{matrix} 4 \end{matrix}$$

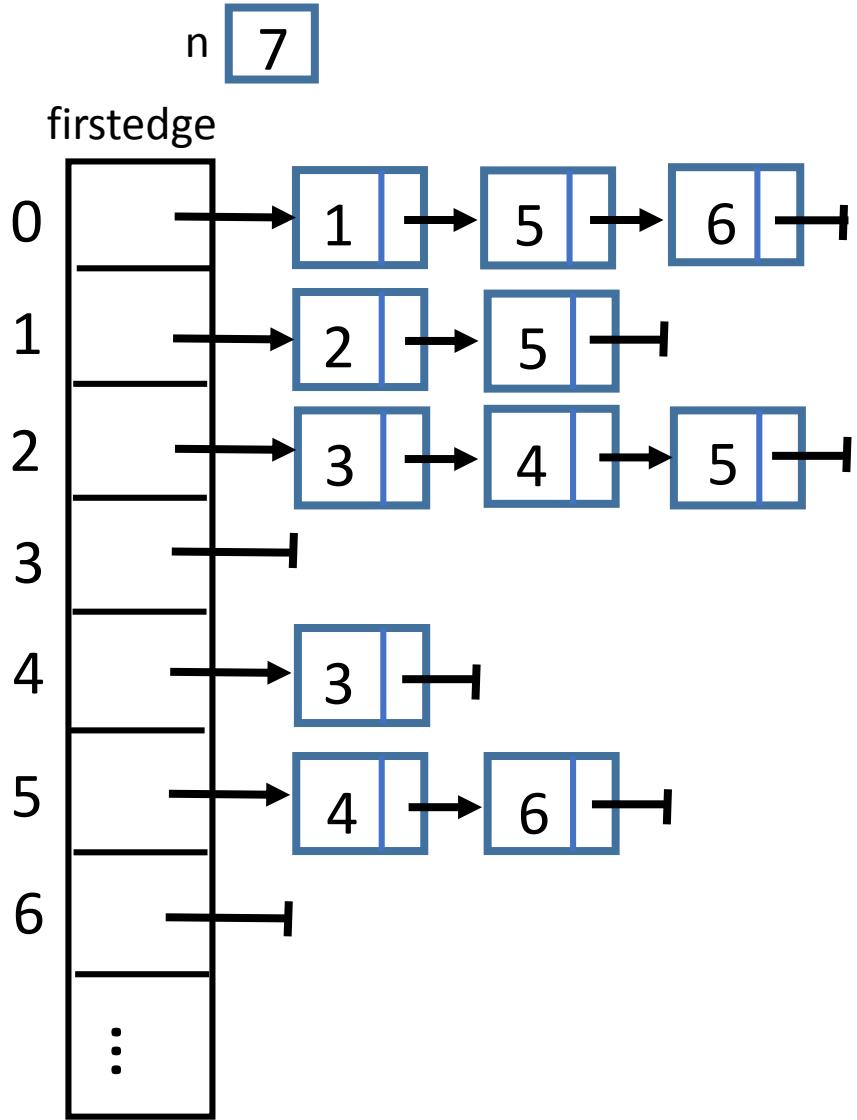
T:	0	1	2	5		...
	0	1	2	3	4	5

Q	0	1	2	3	4	5	6
	4						

predecessor-count

0	0
1	0
2	0
3	1
4	0
5	0
6	1

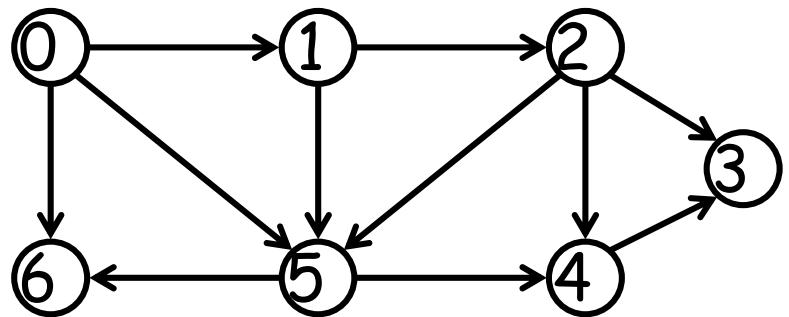
firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף לרוחב

1

$$G = (V, E)$$



TopSort(G)

$$\begin{matrix} v \\ w \end{matrix} = \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\text{place} = \begin{matrix} 4 \end{matrix}$$

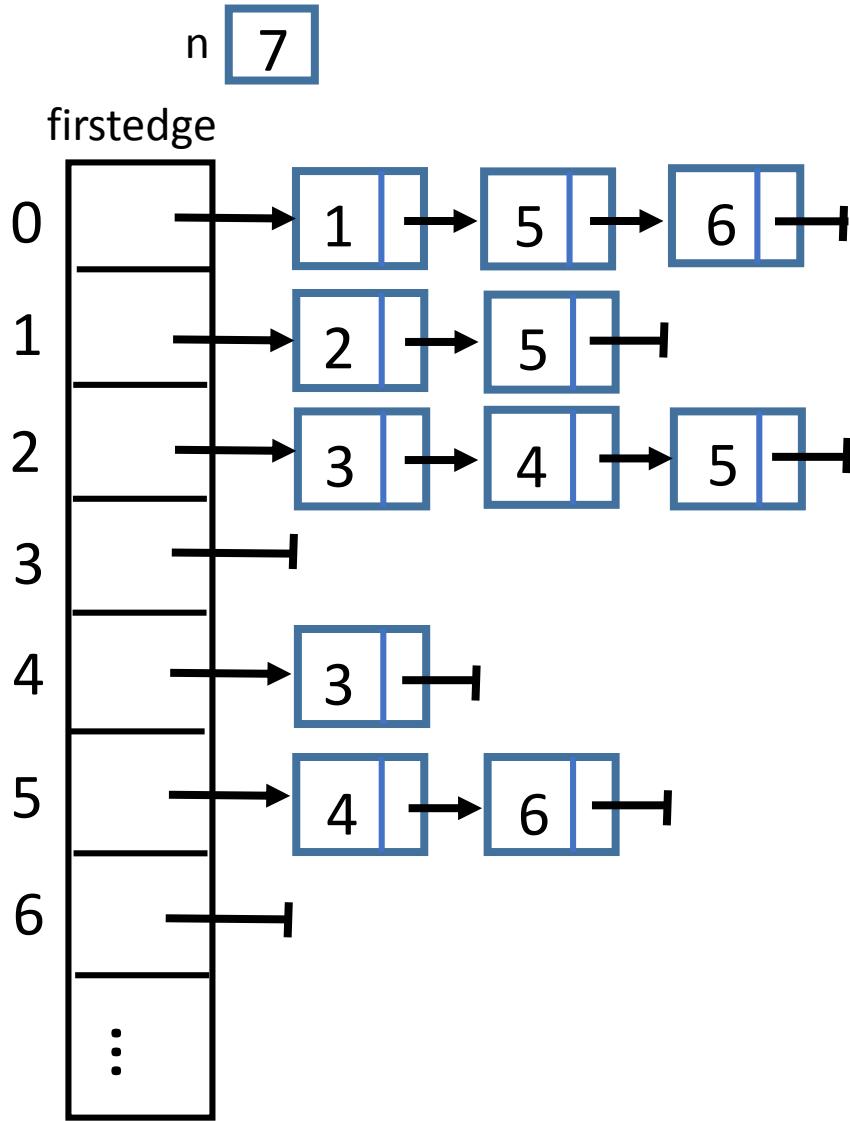
T:	0	1	2	5		...
	0	1	2	3	4	5

Q	0	1	2	3	4	5	6
0	4						
1	6						
2							
3					1		
4					0		
5					0		
6					0		

predecessor-count

0	0
1	0
2	0
3	1
4	0
5	0
6	0

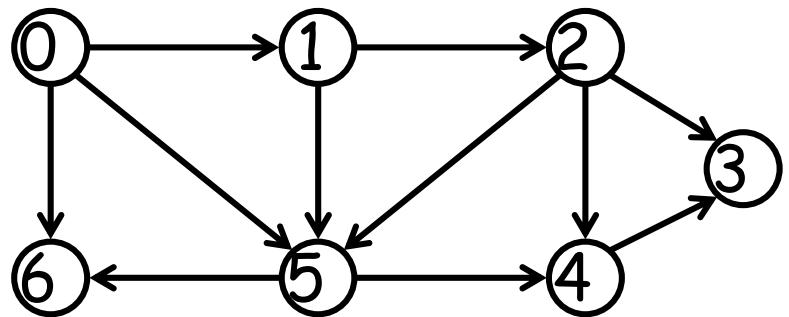
firstedge



# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן

1

$$G = (V, E)$$



TopSort(G)

place [5]

T:	0	1	2	5	4	...
	0	1	2	3	4	5

v [4]  
w [ ]

Q	0	1	2	3	4	5	6

predecessor-

count

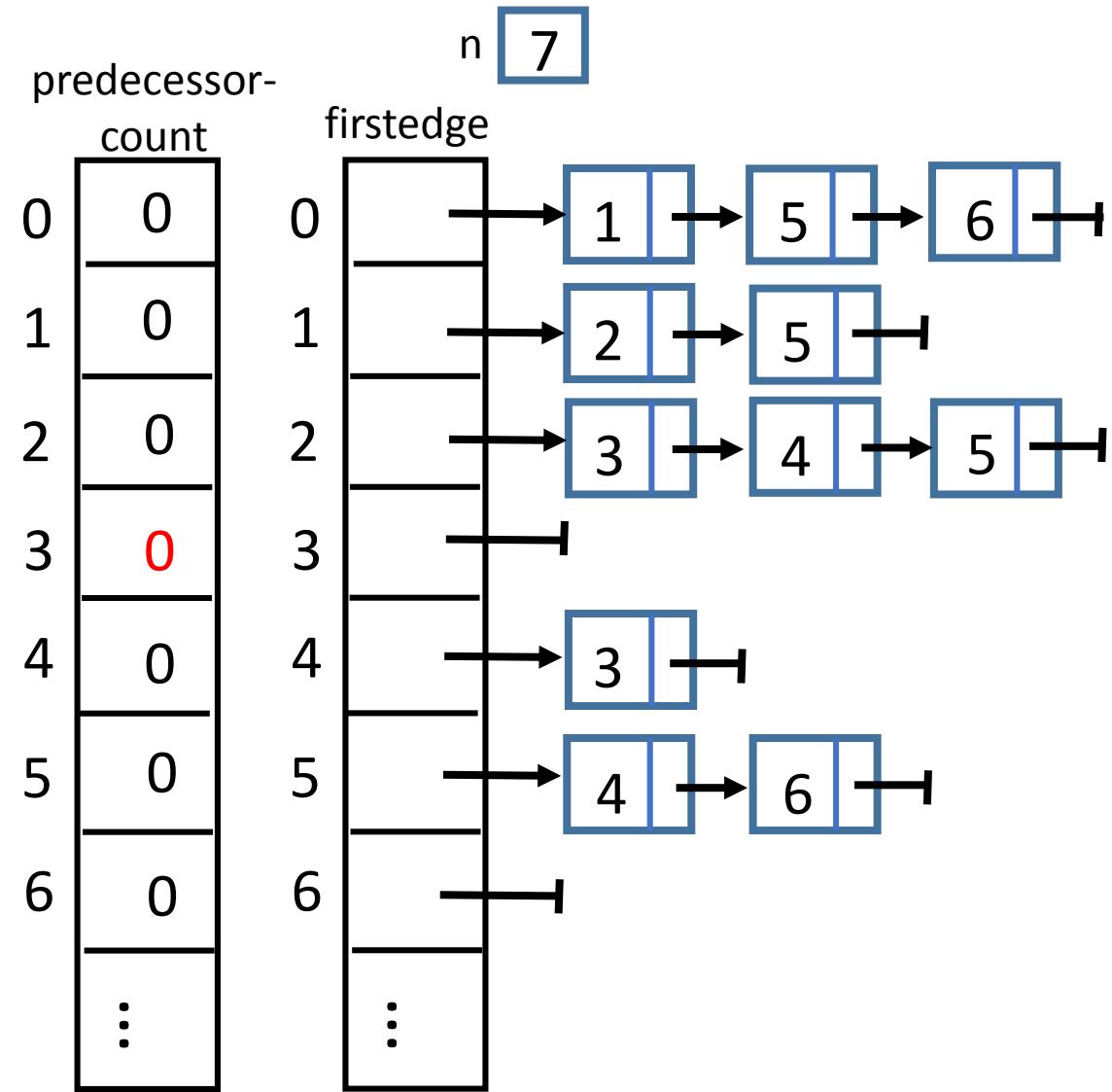
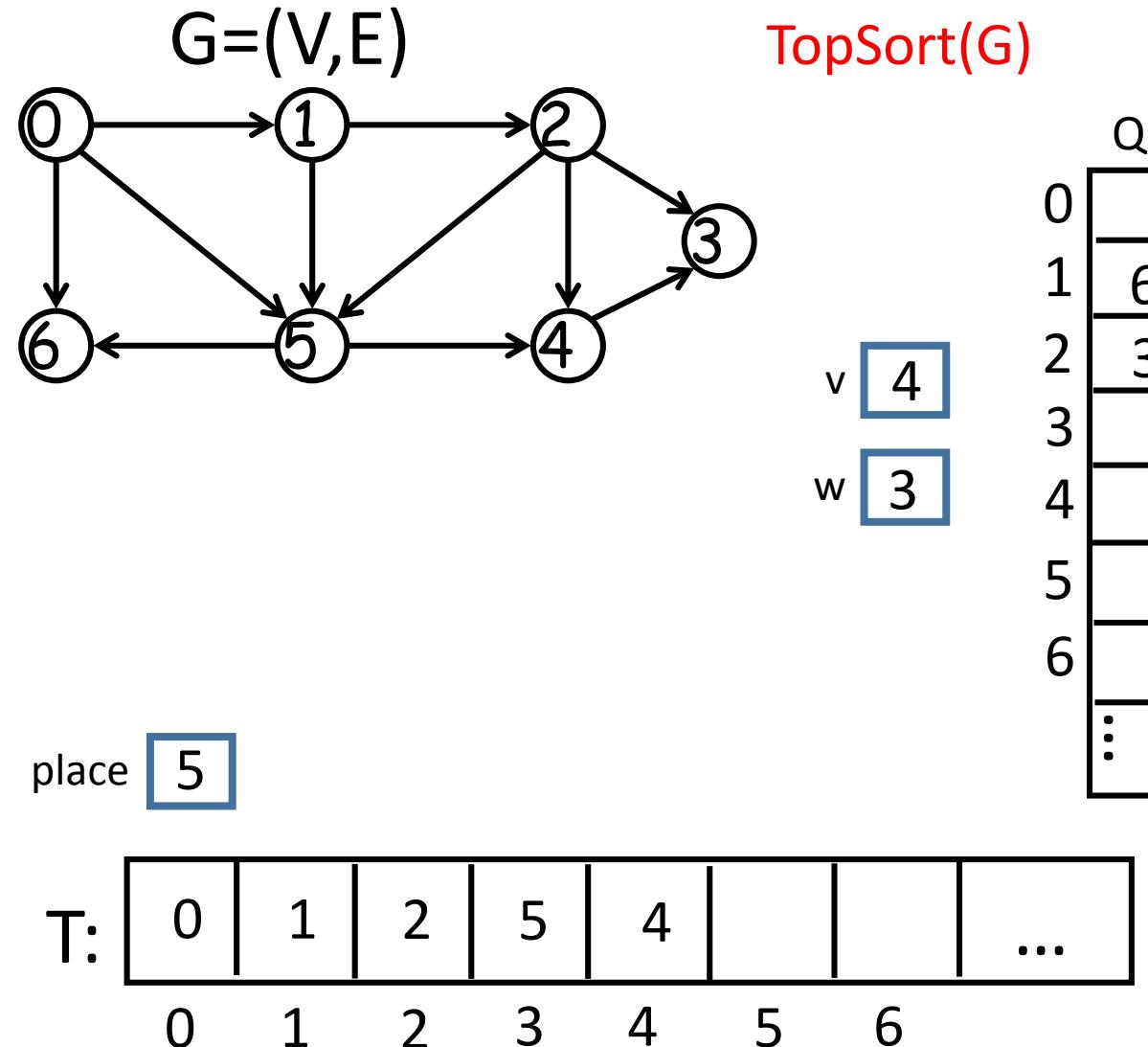
0	0
1	0
2	0
3	1
4	0
5	0
6	0

n [7]

firstedge

0	1	5	6
1	2	5	6
2	3	4	5
3	3		
4	3		
5	4	6	
6			

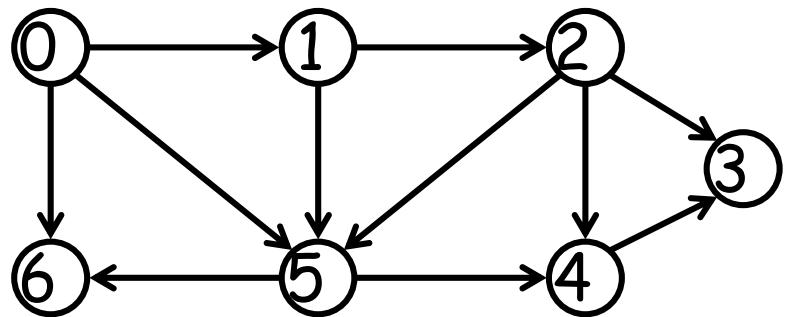
# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן



# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן

1

$$G = (V, E)$$

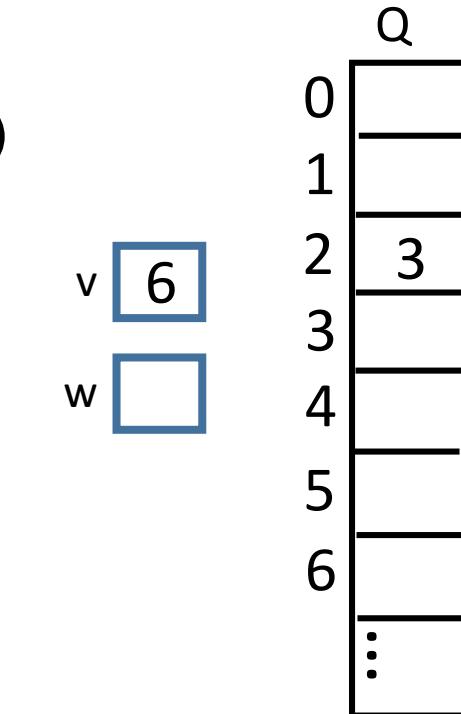


TopSort(G)

$$\begin{matrix} v \\ w \end{matrix}$$

$$\text{place}$$

$$T: \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & \dots \end{matrix}$$

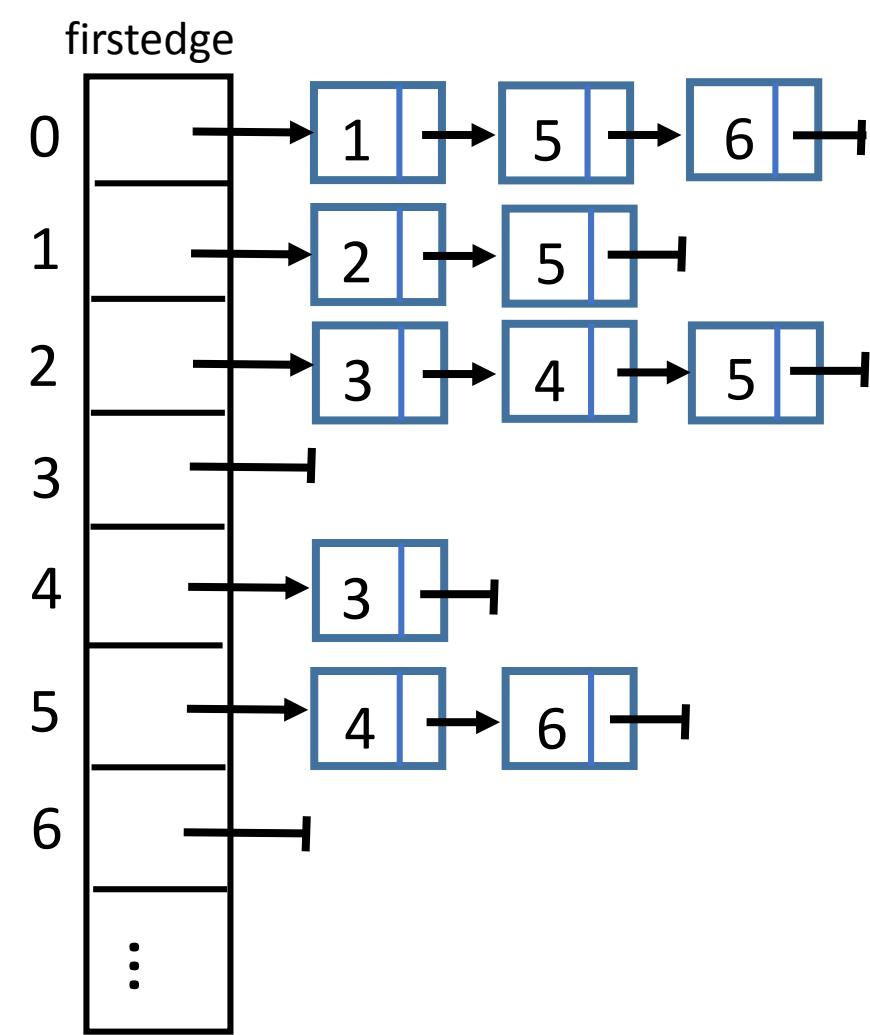


predecessor-

count

0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
⋮	

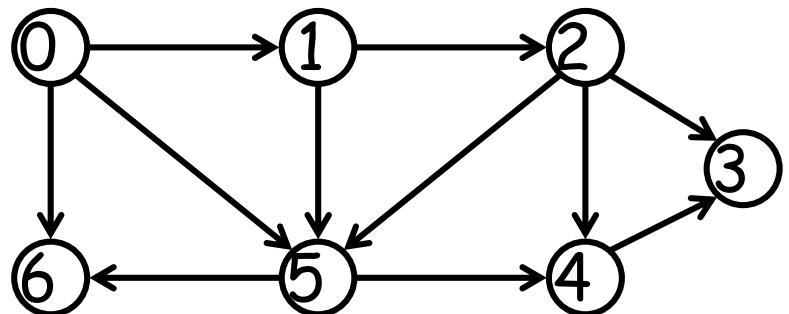
$$\begin{matrix} n \\ \text{firstedge} \end{matrix}$$



# מציאת סדר טופולוגי בגרף ברוחן

1

$$G = (V, E)$$



TopSort(G)

$$\begin{matrix} v \\ w \end{matrix} = \boxed{3}$$

$$\text{place} = \boxed{7}$$

$$T: \begin{matrix} 0 & | & 1 & | & 2 & | & 5 & | & 4 & | & 6 & | & 3 & | & \dots \end{matrix}$$

