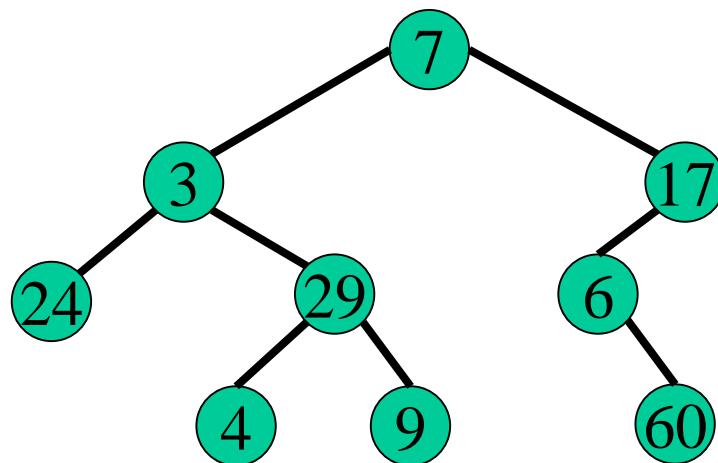


# ייצוג עץ ביניי בעזרת מערך

שורש העץ נשמר בתא הראשון במערך.

- הבן השמאלי של הצלומת בתא ה- $i$  נמצא בתא ה- $i+1$ .
- הבן הימני של הצלומת בתא ה- $i$  נמצא בתא ה- $i+2$ .

דוגמה:



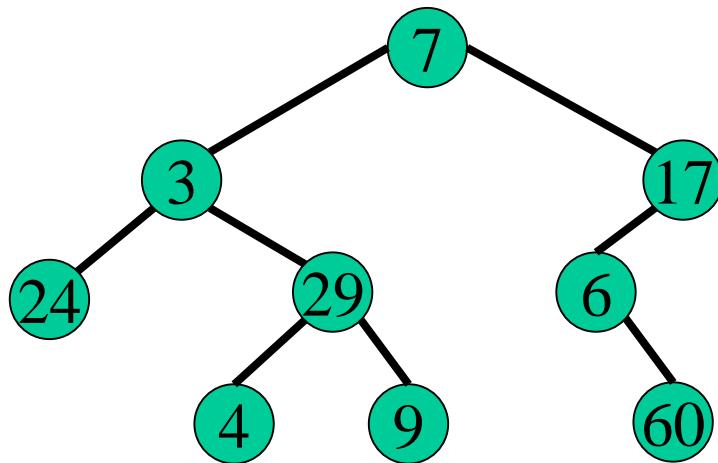
7	3	17	24	29	6					4	9	60		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

# מה היחס בין כמות המידע לשימרת המקום הדרוש?

שורש העץ נשמר בתא הראשון במערך.

- הבן השמאלי של הצומת בתא ה- $i+1$  נמצא בתא ה- $i+2$ .
- הבן הימני של הצומת בתא ה- $i+2$  נמצא בתא ה- $i+1$ .

דוגמה:



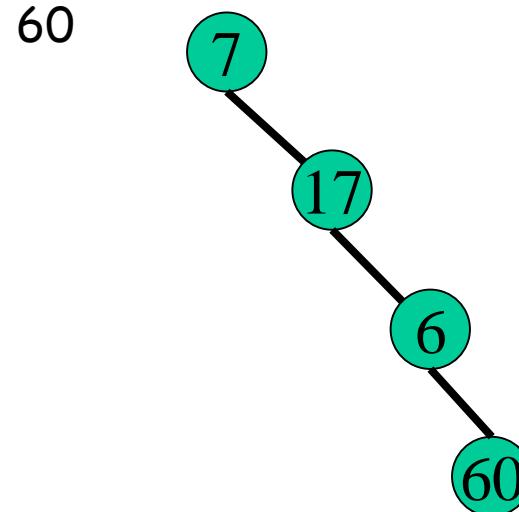
7	3	17	24	29	6					4	9	60		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

# מה היחס בין כמות המידע לשמירת המקום הדרושים?

שורש העץ נשמר בתא הראשון במערך.

- הבן השמאלי של הצומת בתא ה- $i+1$  נמצא בתא ה- $i+2$ .
- הבן הימני של הצומת בתא ה- $i$  נמצא בתא ה- $i+2$ .

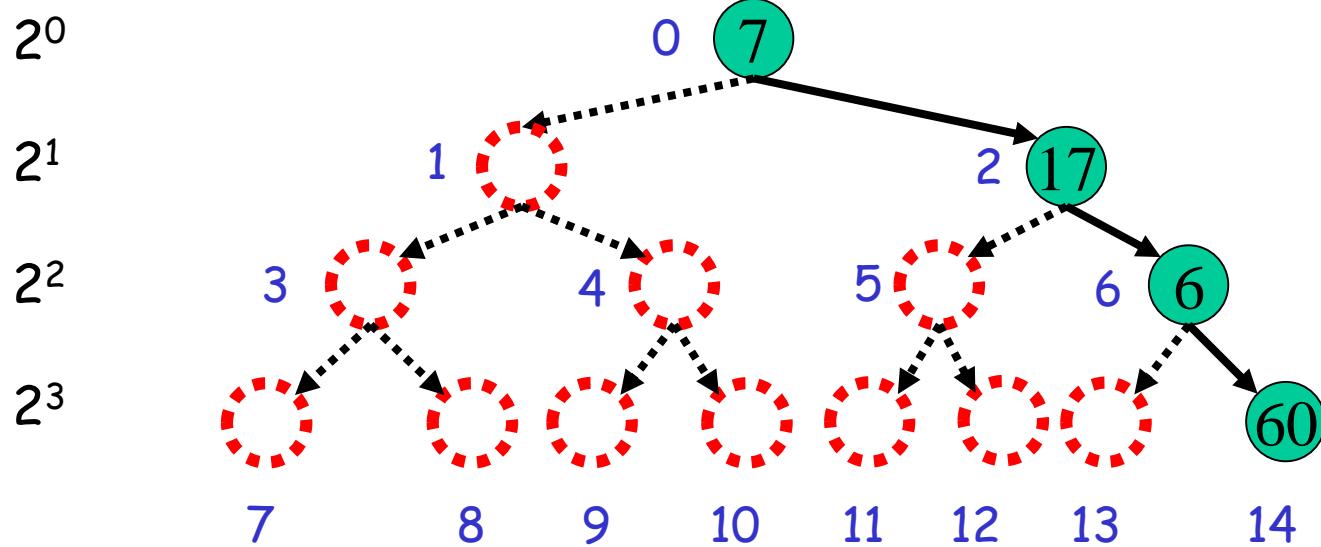
דוגמא:



7		17			6									60
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

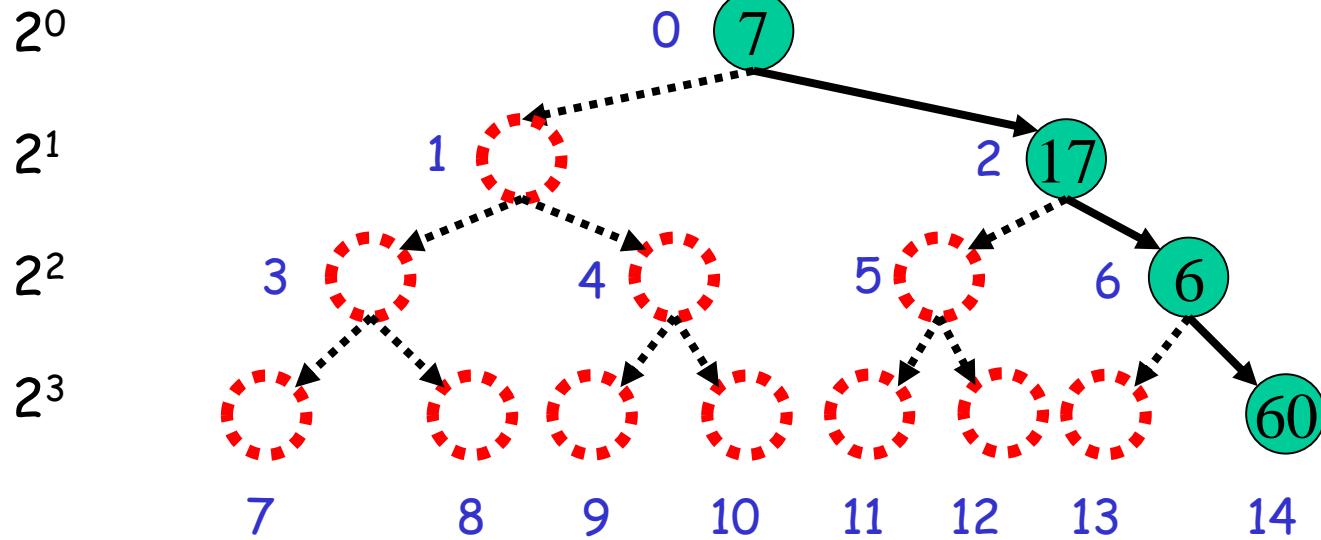
# מה היחס בין כמות המידע לשמירת המקום הדרוש?

דוגמה:



# מה היחס בין כמות המידע לשימרת המקום הדרוש?

דוגמא:

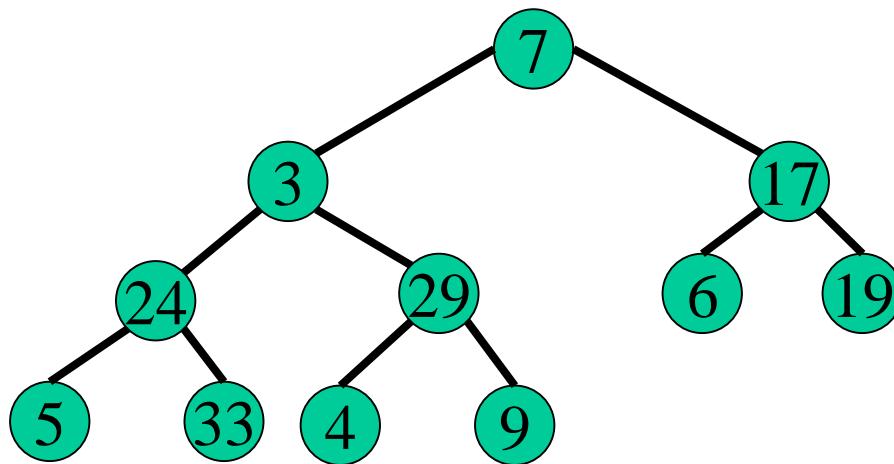


כמות המידע:  $n$   
המקום הדרוש:  $2^n - 1$

# עץ בינירי כמעט שלם

עץ שבו כל הרמות מלאות, פרט אולי לרמה התחתונה בה קיים רצף ברמה התחתונה משמאלי לימין.

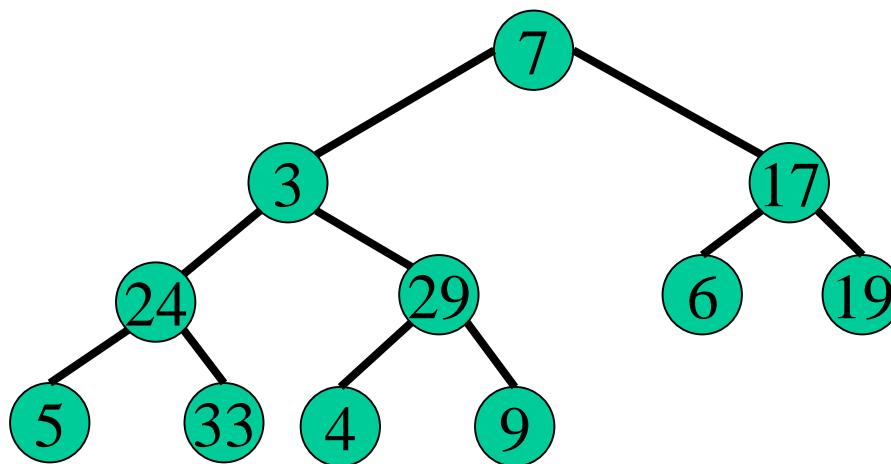
דוגמא:



# עץ בינירי כמערך שלם

עץ שבו כל הרמות מלאות, פרט אולי לrama התחתונה  
בها קיים רצף ברמה התחתונה משמאל לימין.

דוגמה:



ייצוג בעזרת מערך:

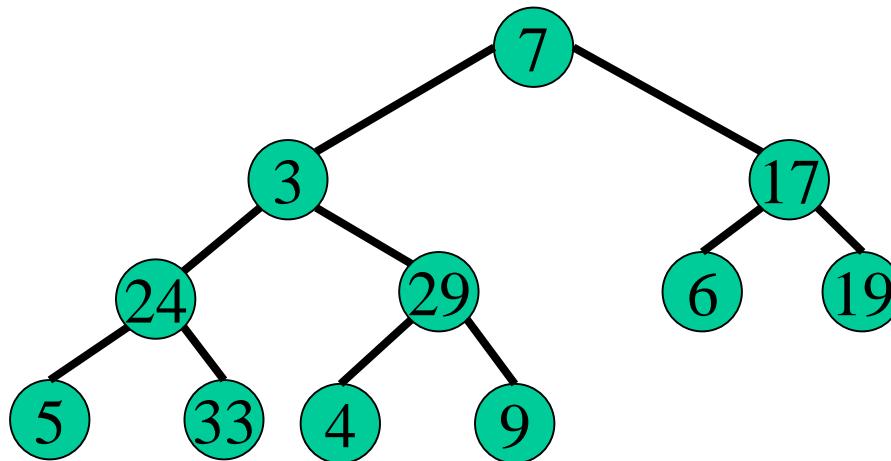
Q	7	3	17	24	29	6	19	5	33	4	9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

האיברים מאוחסנים ברצף מלמעלה למטה משמאל לימין

# מה ניתן לומר על גובה העץ?

ע"ז שבו כל הרמות מלאות, פרט אולי לרמה התחתונה בה קיימן רצף בرمמה התחתונה משמאל לימין.

דוגמא:



יצוג בעזרת מערך:

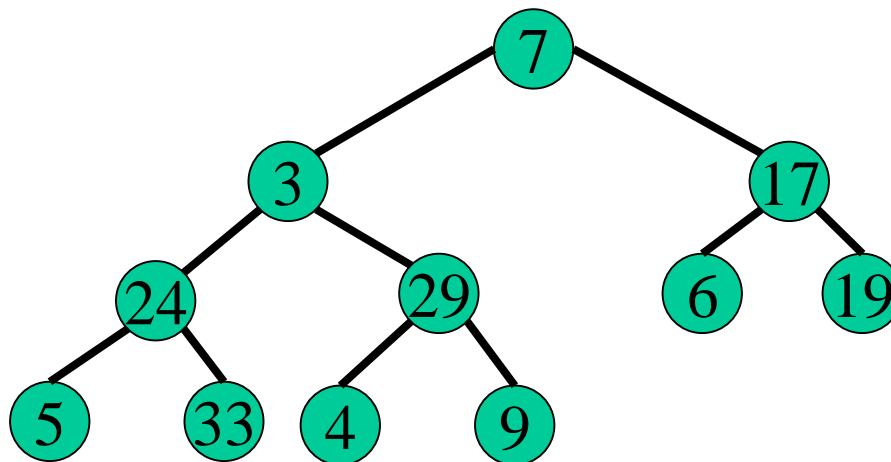
Q	7	3	17	24	29	6	19	5	33	4	9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

האיברים מאוחסנים ברצף מלמעלה למטה משמאל לימין

# הגובה של עץ ביניי כמעט שלים $h = \lfloor \log(n) \rfloor$ עם א' צמתים:

עץ שבו כל הרמות מלאות, פרט אולי לרמה התחתונה בה קיים רצף ברמה התחתונה משמאלי לימין.

דוגמה:



יצוג בעזרת מערך:

Q	7	3	17	24	29	6	19	5	33	4	9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

האיברים מאוחסנים ברכף מלמעלה למטה משמאלי לימין

# מימוש עץ ביניי כמעט שלם בעזרת מערך סיכום

$\text{Left}(i) = 2i+1$

- בן שמאלי של צומת ?

$\text{Right}(i) = 2i+2$

- בן ימני של צומת ?

$\text{Parent}(i) = \lfloor (i-1)/2 \rfloor$

- הורה של צומת ?

יצוג בעזרת מערך:

$Q$	7	3	17	24	29	6	19	5	33	4	9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

**מבנה נתונים**

**ערימה**

# ערימת מינימום

מבנה נתונים מופשט המוגדר על-ידי הפעולות:

`create-heap()`

`insert(x,Q)`

`min(Q)`

`delete-min(Q)`

• **אתחול** יוצר ערימה ריקה

• **הכנסת איבר x** לערימה

• **מציאת האיבר** עם המפתח הקטן **ב一口气**

• **הוצאת האיבר** עם המפתח הקטן **ב一口气**

# ערימת מינימום

מבנה נתונים מופשט המוגדר ע"י הפעולות:

`create-heap()`

`insert(x,Q)`

`min(Q)`

`delete-min(Q)`

• אתחול יוצר ערימה ריקה

• הכנסת איבר x לערימה

• מציאת האיבר עם המפתח הקטן ביותר

• הוצאת האיבר עם המפתח הקטן ביותר

## הצע רעיון למימוש ?

# ערימה מינימום

מבנה נתונים מופשט המוגדר ע"י הפעולות:

`create-heap()`

`insert(x,Q)`

`min(Q)`

`delete-min(Q)`

• אתחול יוצר ערימה ריקה

• הכנסת איבר x לערימה

• מציאת האיבר עם המפתח הקטן ביותר

• הוצאת האיבר עם המפתח הקטן ביותר

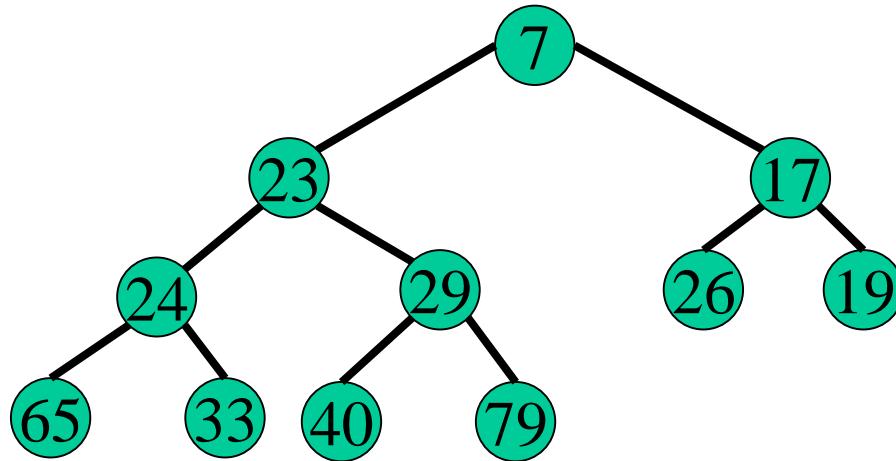
**מימוש ערימה בעזרת עצ חיפוש מאוזן:**

**כל אחת מהפעולות בזמן  $(n \log n)$**

# ערימת מינימום - מימוש

- א. עץ ביניי כמעט שלם
- ב. לכל צומת  $v$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $v$ .

דוגמא:



"צוג בעזרת מערך:

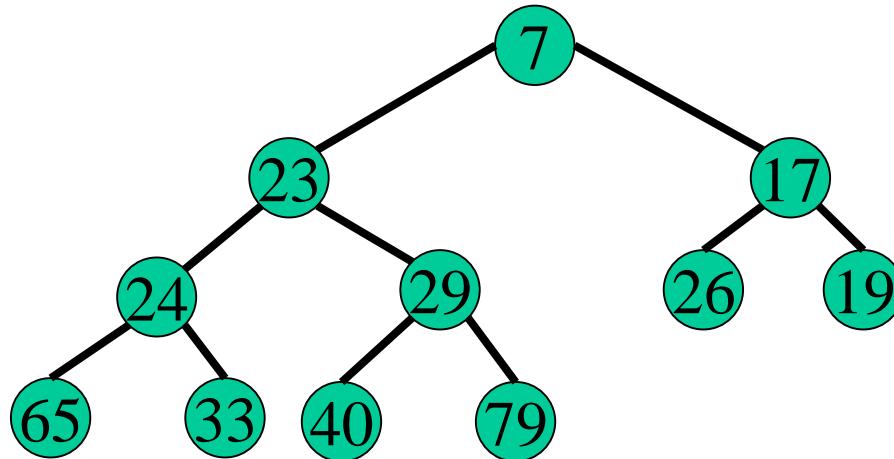
Q	7	23	17	24	29	26	19	65	33	40	79
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

# האיברים מאוחסנים ברכף מלמעלה למטה משמאל לימין

א. עץ בינרי כמעט שלם

ב. לכל צומת  $\tau$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $\tau$ .

דוגמא:

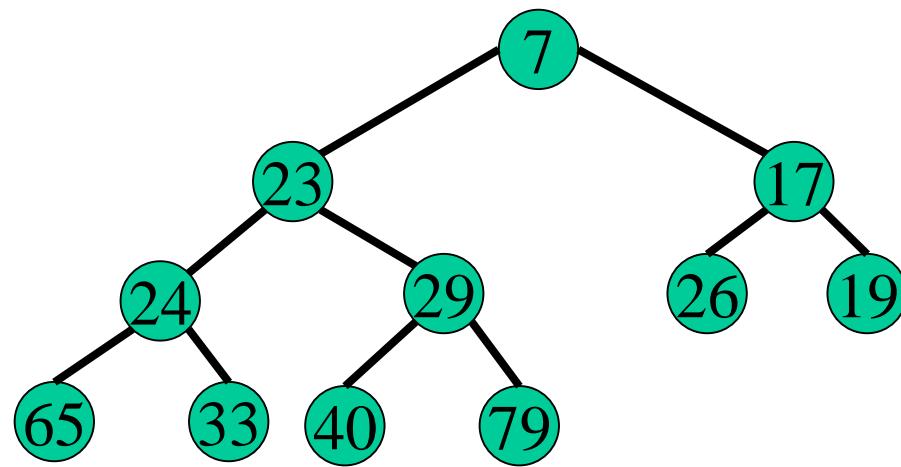


יצוג בעזרת מערך:

Q	7	23	17	24	29	26	19	65	33	40	79
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

# מיושם הפעולות בערימה

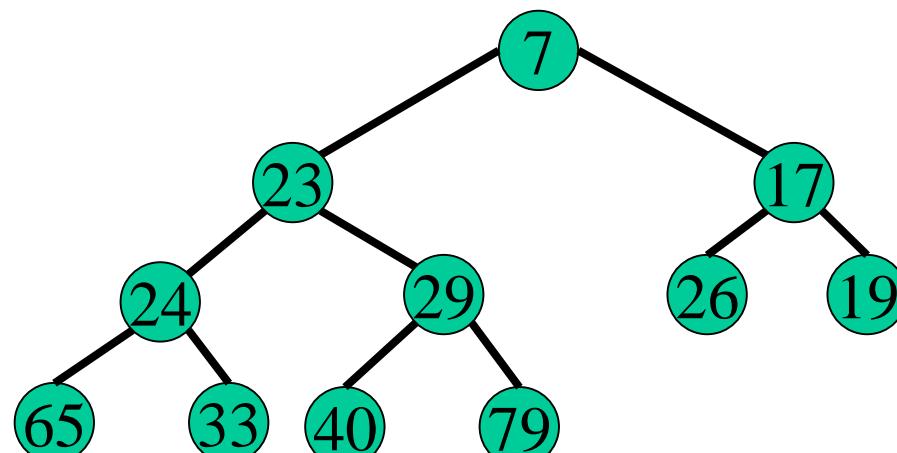
# מציאת מינימום



Q

7	23	17	24	29	26	19	65	33	40	79
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

# מציאת מינימום



Q

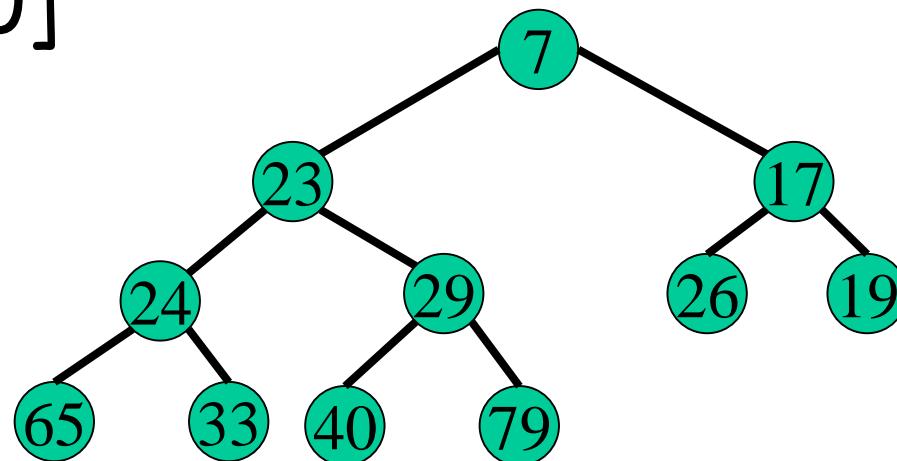
7	23	17	24	29	26	19	65	33	40	79
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

19

# מציאת מינימום

$\min(Q)$

`return Q[0]`



Q

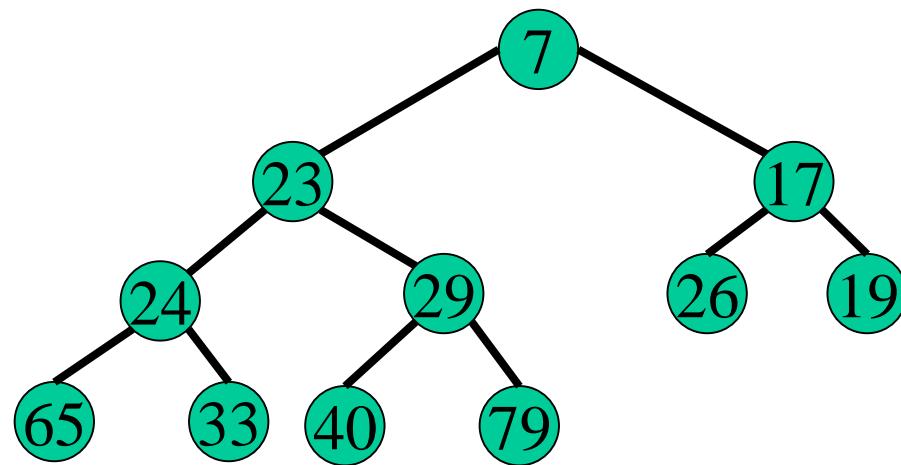
7	23	17	24	29	26	19	65	33	40	79
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

20

ד"ר נעה לוינשטיין ©

עריכה: ד"ר אילית בוטמן, פרופ' אביבית לוי

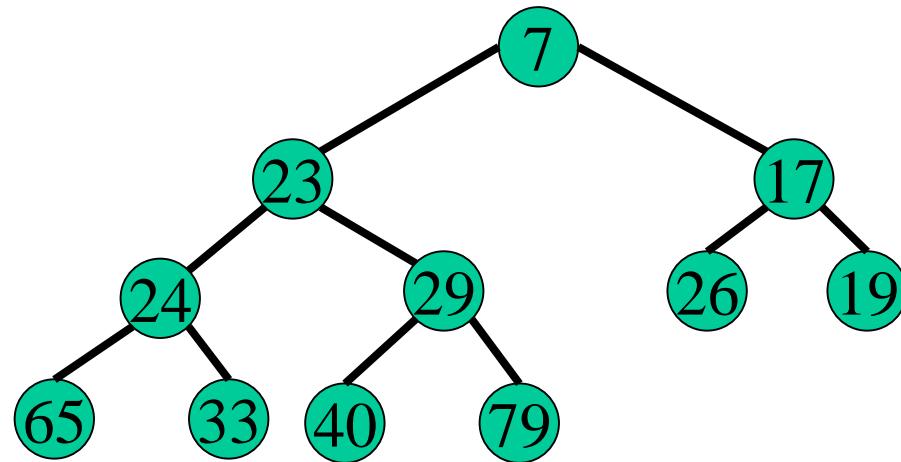
# הוצאת המינימום



Q

7	23	17	24	29	26	19	65	33	40	79
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

# הוצאת המינימום



Q

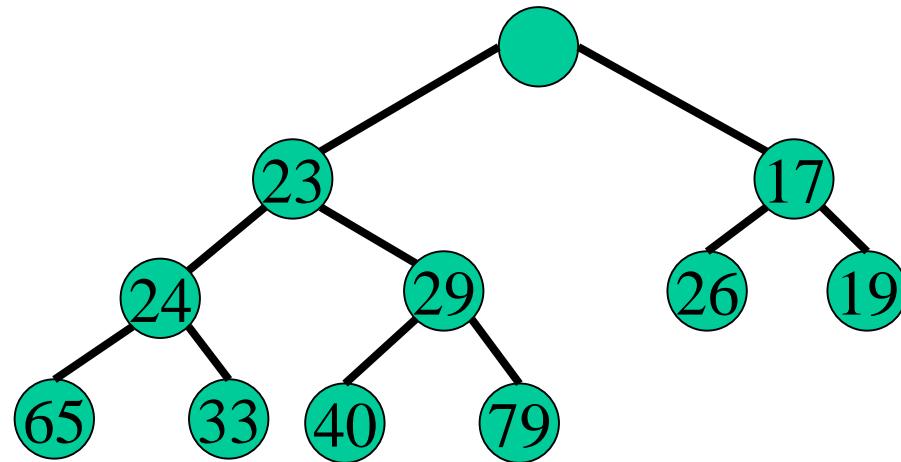
7	23	17	24	29	26	19	65	33	40	79
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

22

ד"ר נעה לויינשטיין ©

עריכה: ד"ר אילית בוטמן, פרופ' אביבית לוי

# הוצאת המינימום



Q

	23	17	24	29	26	19	65	33	40	79
--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

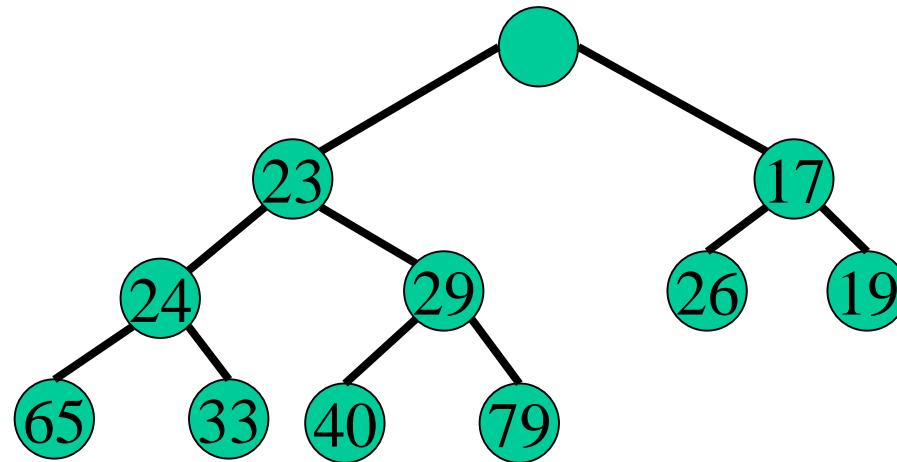
23

ד"ר נעה לויינשטיין ©

עריכה: ד"ר אילית בוטמן, פרופ' אביבית לוי

# "יש להתגבר על שתי בעיות":

- א. עץ ביניי כמעט שלם
- ב. לכל צומת  $v$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $v$ .



Q

	23	17	24	29	26	19	65	33	40	79
--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

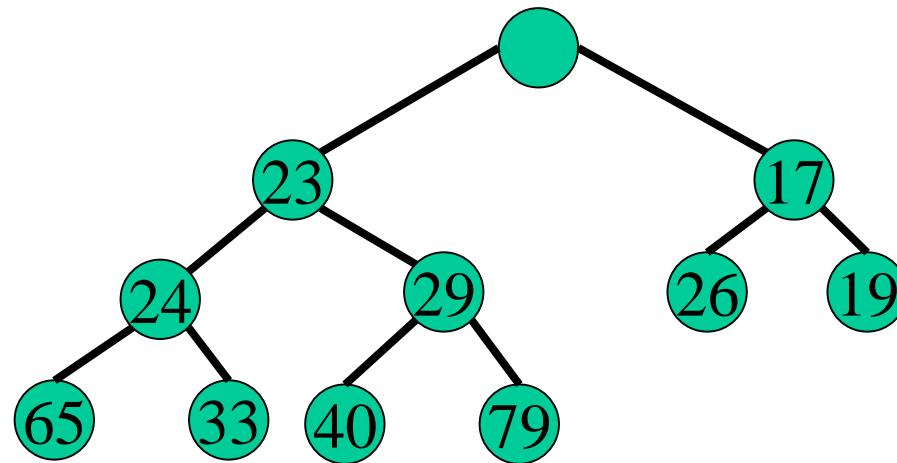
24

ד"ר נעה לויינשטיין ©

עריכה: ד"ר אילית בוטמן, פרופ' אביבית לוי

# על איזה בעיה קל להתגבר

- א. עץ בינירי כמעט שלם
- ב. לכל צומת  $v$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $v$ .



Q

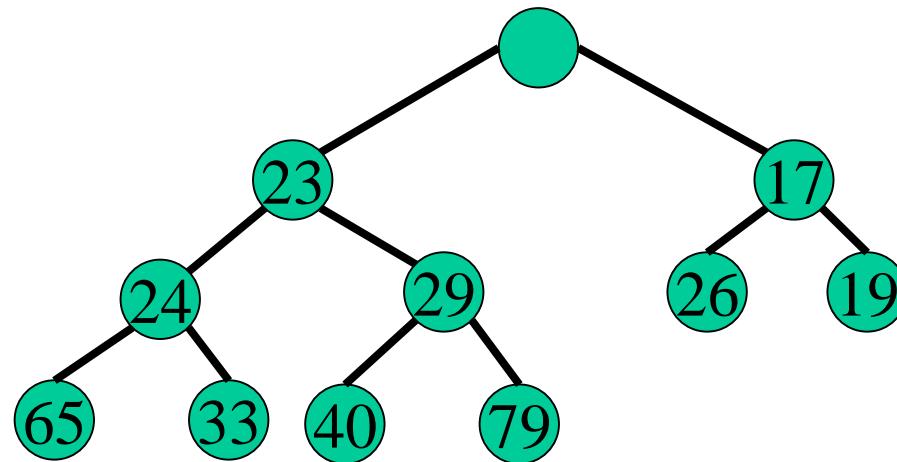
	23	17	24	29	26	19	65	33	40	79
--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

25

# על איזה בעיה קל להתגבר

א. עץ ביניי כמעט שלם

ב. לכל צומת  $v$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $v$ .



Q

	23	17	24	29	26	19	65	33	40	79
--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

26

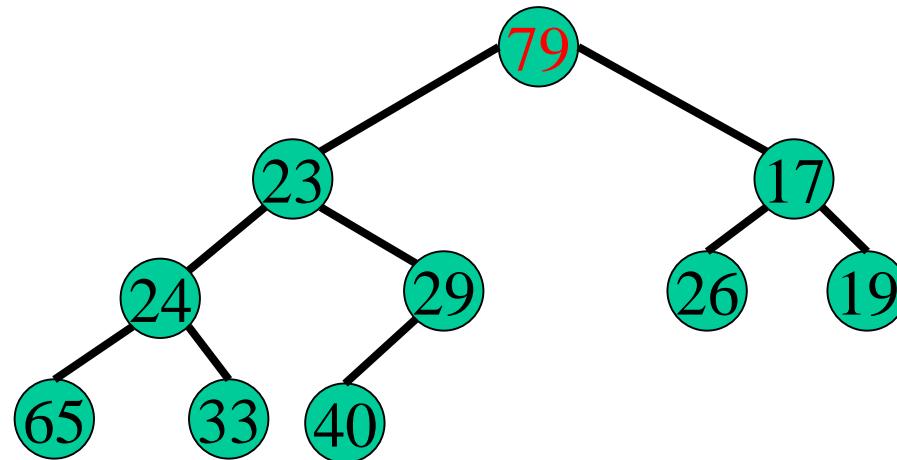
ד"ר נעה לויינשטיין ©

עריכה: ד"ר אילית בוטמן, פרופ' אביבית לוי

# על איזה בעיה קל להתגבר

א. עץ ביניי כמעט שלם

ב. לכל צומת  $v$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $v$ .



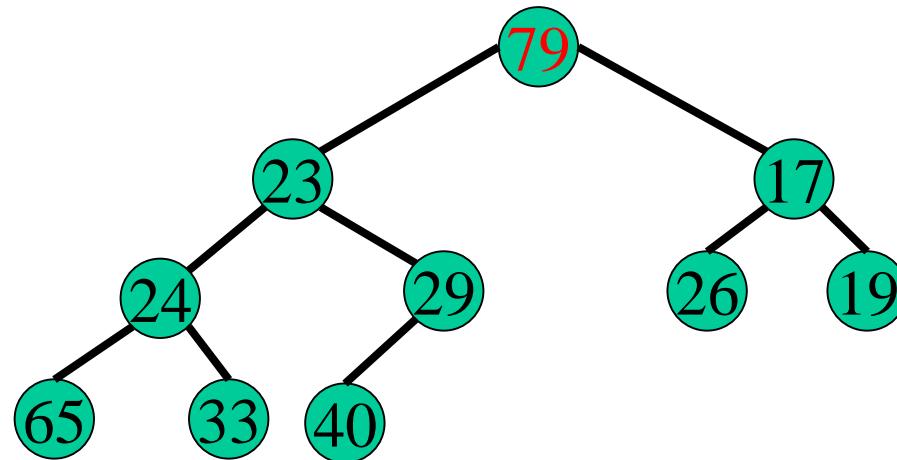
Q

79	23	17	24	29	26	19	65	33	40	
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--

# "חלוקת" האיבר בmorph הערימה

א. עץ בינרי כמעט שלם

ב. לכל צומת  $v$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $v$



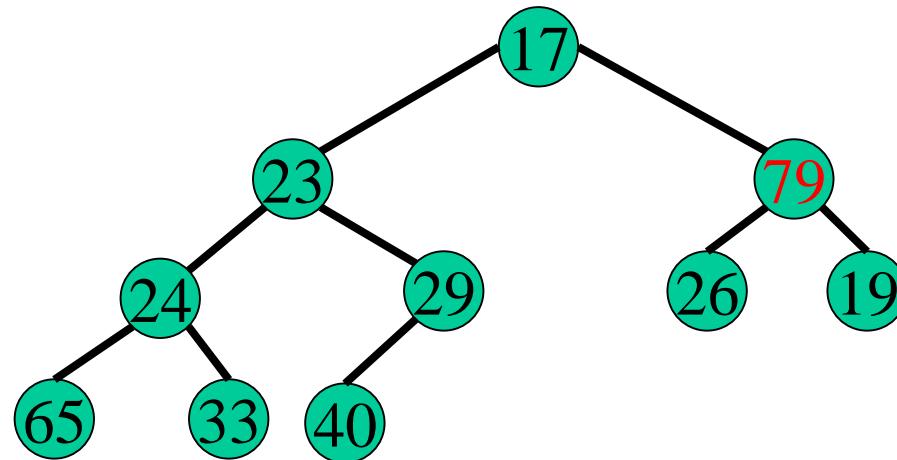
Q

79	23	17	24	29	26	19	65	33	40	
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--

# "חלוקת" האיבר במודד הערימה

א. עץ בינרי כמעט שלם

ב. לכל צומת  $v$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $v$



Q

17	23	79	24	29	26	19	65	33	40	
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--

29

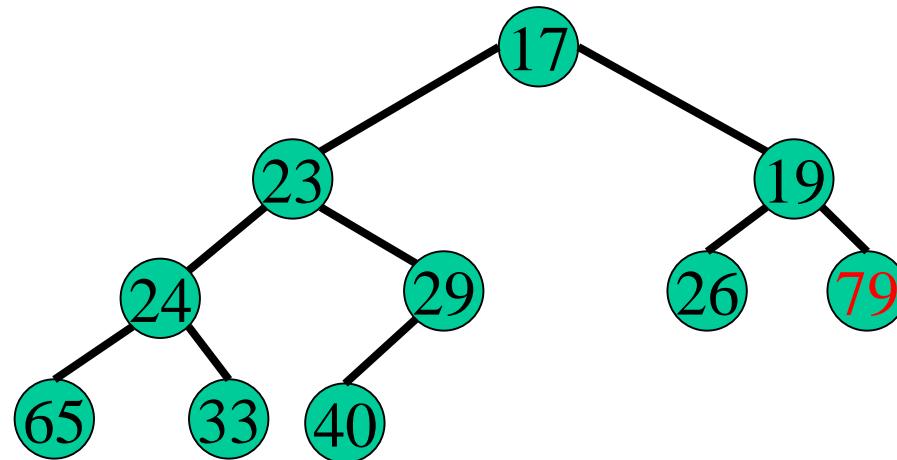
ד"ר נעה לוינשטיין ©

עריכה: ד"ר אילית בוטמן, פרופ' אביבית לוי

# "חלוקת" האיבר במודד הערימה

א. עץ בינרי כמעט שלם

ב. לכל צומת  $v$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $v$



Q

17	23	19	24	29	26	79	65	33	40	
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--

30

ד"ר נעה לויינשטיין ©

עריכה: ד"ר אילית בוטמן, פרופ' אביבית לוי

# הוצאת המינימום

delete-min(Q)

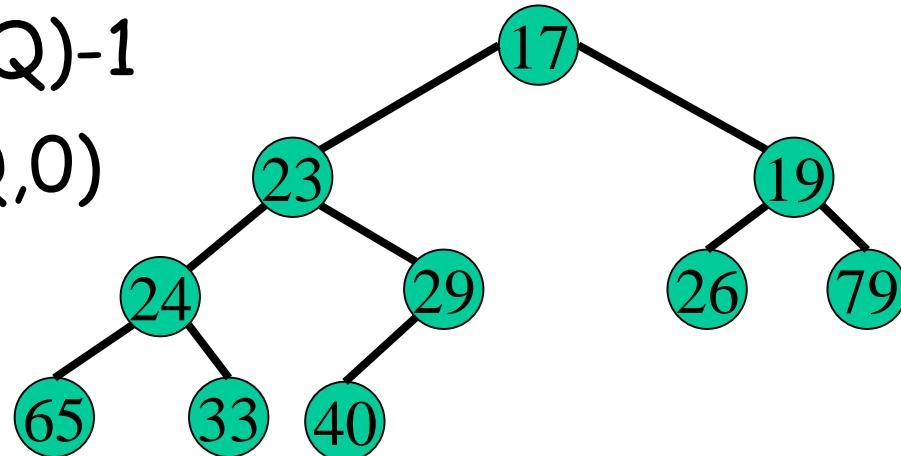
temp  $\leftarrow Q[0]$

$Q[0] \leftarrow Q[\text{size}(Q)-1]$

$\text{size}(Q) \leftarrow \text{size}(Q)-1$

Heapify-down(Q,0)

Return temp



Q	17	23	19	24	29	26	79	65	33	40	
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--

# Heapify-down(Q,i)

## Heapify-down(Q, i)

$l \leftarrow \text{left}(i)$

$r \leftarrow \text{right}(i)$

$\text{smallest} \leftarrow i$

**if**  $l < \text{size}(Q)$  **and**  $Q[l] < Q[\text{smallest}]$  **then**  $\text{smallest} \leftarrow l$

**if**  $r < \text{size}(Q)$  **and**  $Q[r] < Q[\text{smallest}]$  **then**  $\text{smallest} \leftarrow r$

**if**  $\text{smallest} > i$  **then**

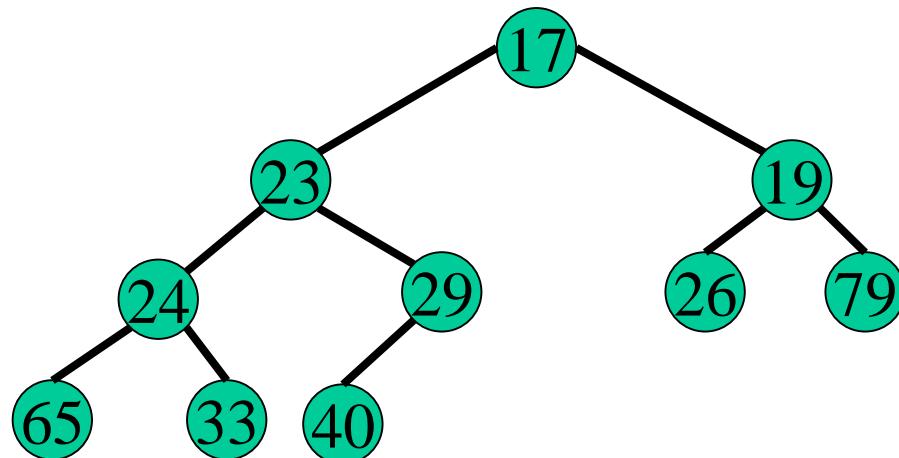
$Q[i] \leftrightarrow Q[\text{smallest}]$

Heapify-down(Q, smallest)

# הכנסת איבר

א. עץ ביניי כמעט שלם

ב. לכל צומת  $v$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $v$ .



Q

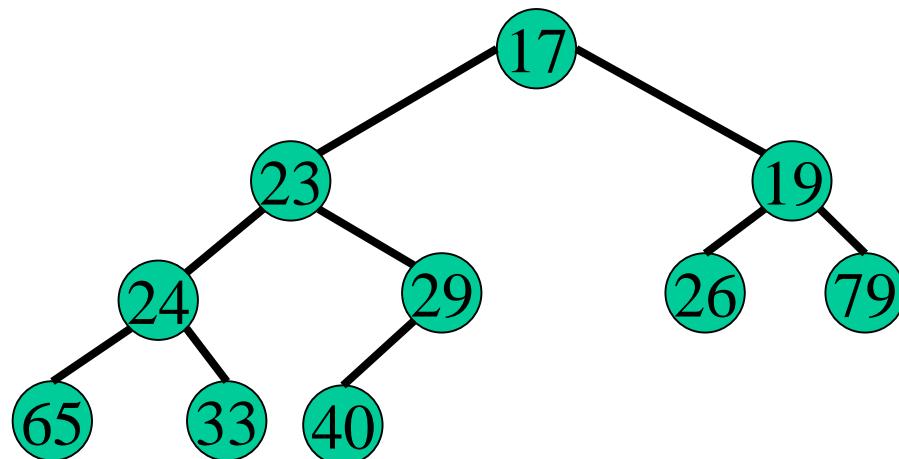
17	23	19	24	29	26	79	65	33	40	
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--

# הכנסת איבר

א. עץ ביניי כמעט שלם

ב. לכל צומת  $v$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $v$ .

insert(15,Q)



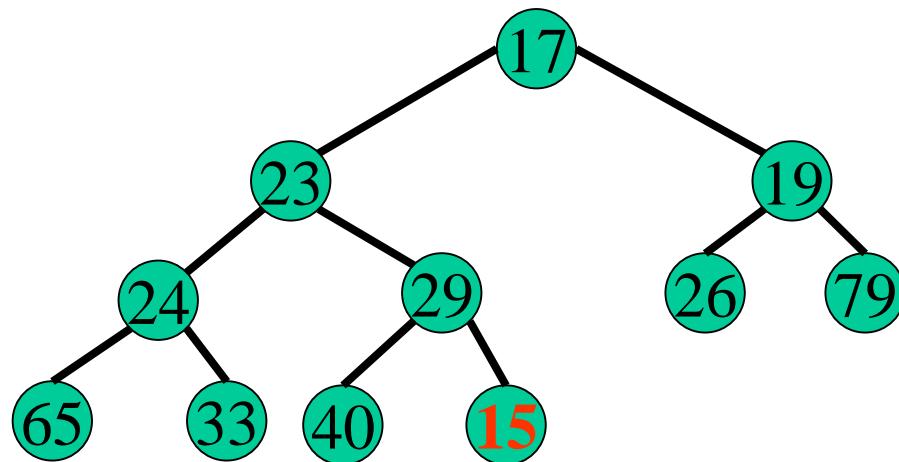
Q	17	23	19	24	29	26	79	65	33	40	
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--

# הכנסת איבר

א. עץ ביניי כמעט שלם

ב. לכל צומת  $v$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $v$ .

insert(15,Q)



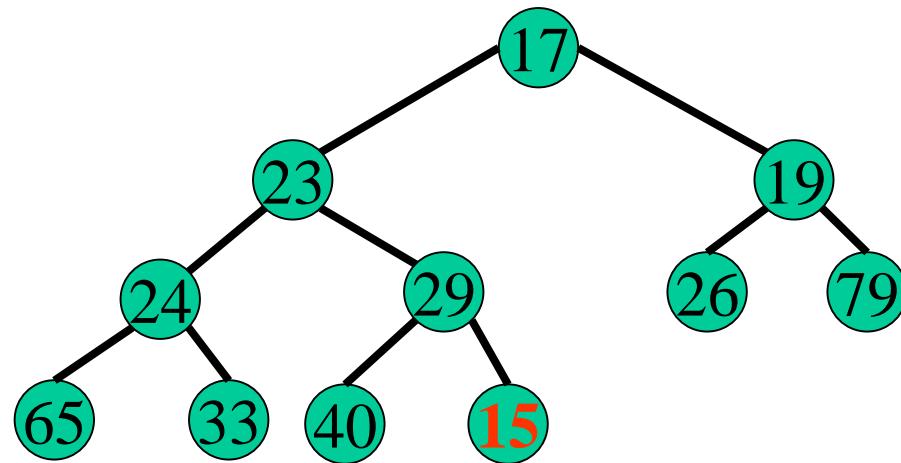
Q	17	23	19	24	29	26	79	65	33	40	15
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

# הכנסת איבר

א. עץ ביניי כמעט שלם

ב. לכל צומת  $v$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $v$ .

insert(15,Q)



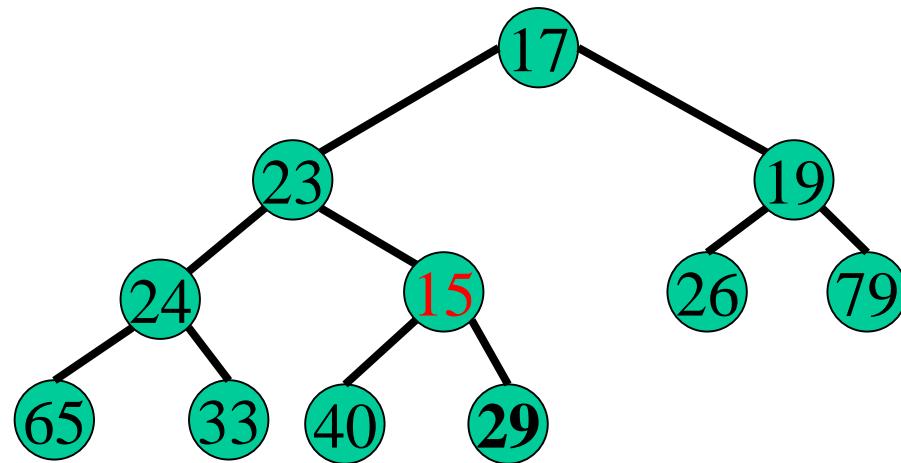
Q	17	23	19	24	29	26	79	65	33	40	15
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

# הכנסת איבר

א. עץ ביניי כמעט שלם

ב. לכל צומת  $v$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $v$ .

insert(15,Q)



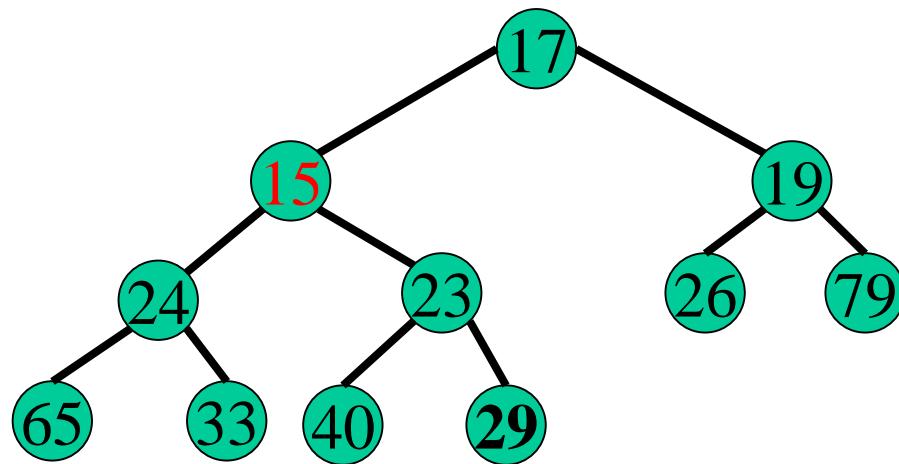
Q	17	23	19	24	15	26	79	65	33	40	29
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

# הכנסת איבר

א. עץ ביניי כמעט שלם

ב. לכל צומת  $v$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $v$ .

insert(15,Q)



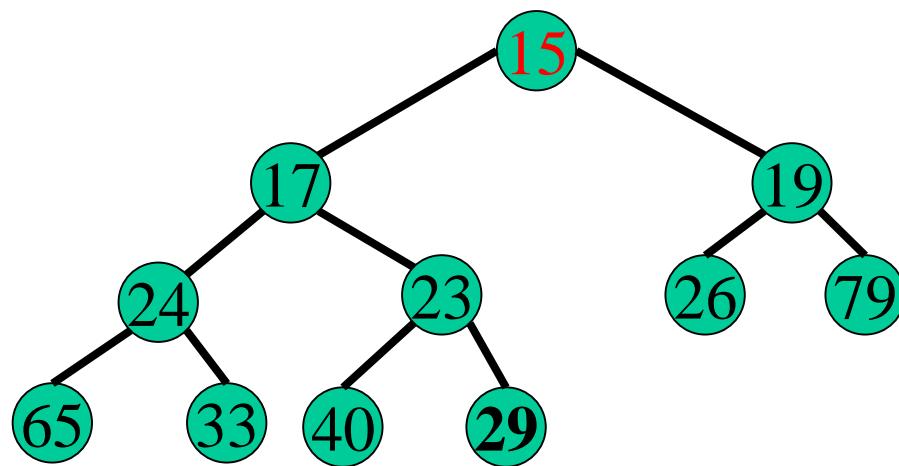
Q	17	15	19	24	23	26	79	65	33	40	29
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

# הכנסת איבר

א. עץ ביניי כמעט שלם

ב. לכל צומת  $v$  המפתחות של שני הבנים גדולים מהמפתח של  $v$ .

insert(15,Q)



Q	15	17	19	24	23	26	79	65	33	40	29
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

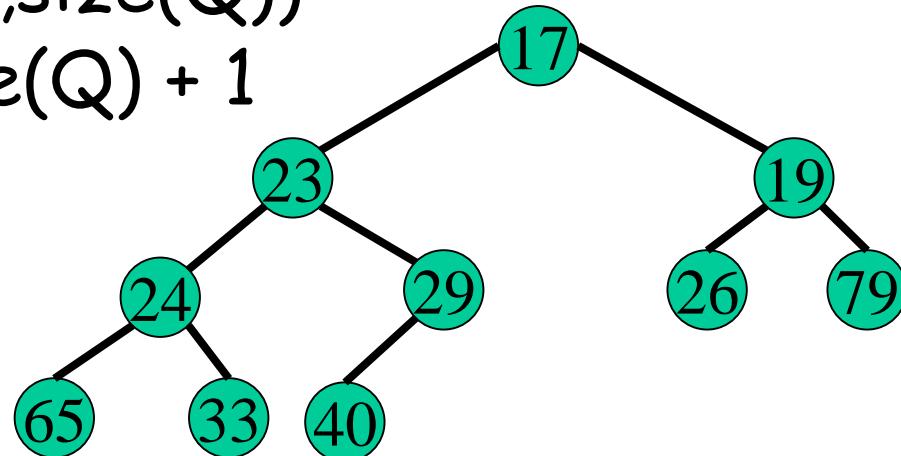
# הכנסת איבר

`insert(k,Q)`

$Q[\text{size}(Q)] \leftarrow k$

`Heapify-up(Q,size(Q))`

$\text{size}(Q) \leftarrow \text{size}(Q) + 1$



Q	17	23	19	24	29	26	79	65	33	40	
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--

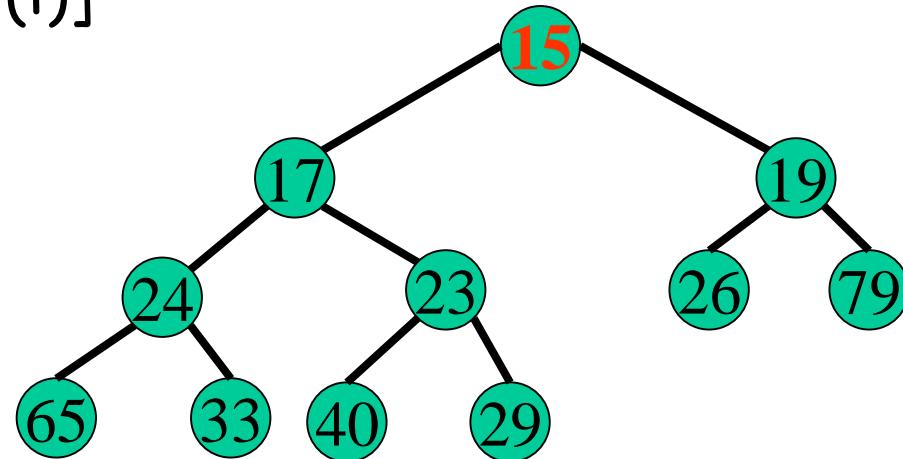
# Heapify-up

Heapify-up( $A, i$ )

while  $i > 0$  and  $A[i] < A[\text{parent}(i)]$  do

$A[i] \leftrightarrow A[\text{parent}(i)]$

$i \leftarrow \text{parent}(i)$

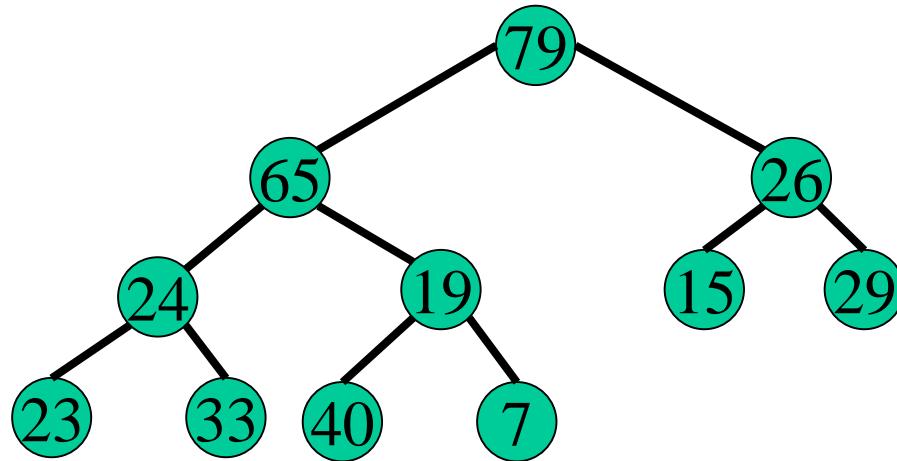


Q	15	17	19	24	23	26	79	65	33	40	29
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

# מיון ערים (Williams, Floyd, 1964)

- הכנס את האיברים למערך
- צור ערים **מקסימום** במערך
- כל עוד הערים לא ריקה  
**בצע הוצאת מקסימום**  
והכנס אותו למקום האחרון במערך.

# הכנס את האיברים לערך



Q

79	65	26	24	19	15	29	23	33	40	7
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---

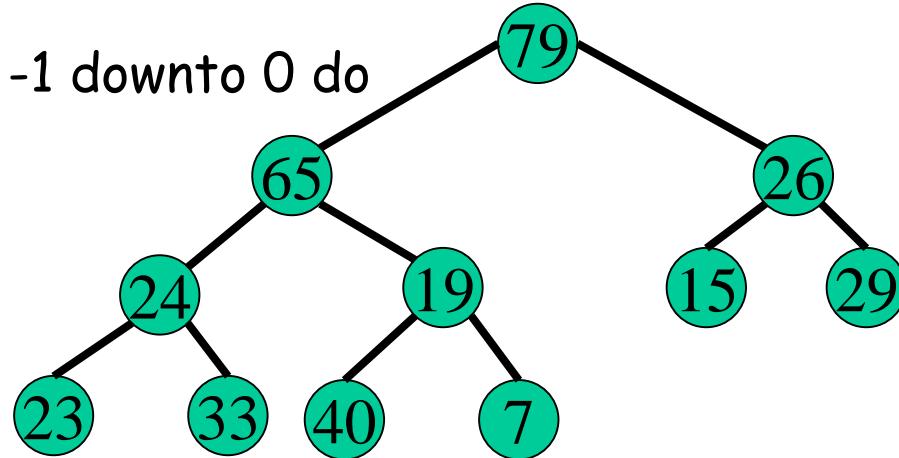
# צור ערימה במערך

**build-heap(Q)**

$\text{size}(Q) \leftarrow \text{length}(Q)$

for  $i \leftarrow \lfloor \text{length}(Q) / 2 \rfloor - 1$  downto 0 do

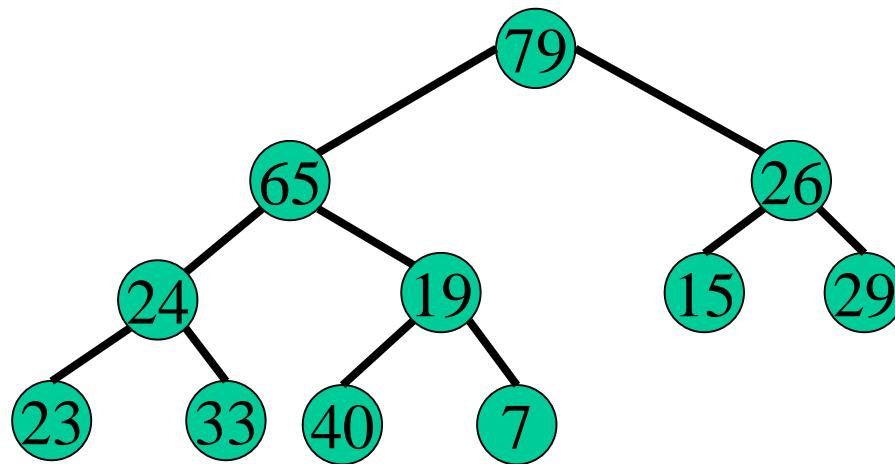
    Heapify-down(Q,i)



Q	79	65	26	24	19	15	29	23	33	40	7
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---

# צור עירימה במערך

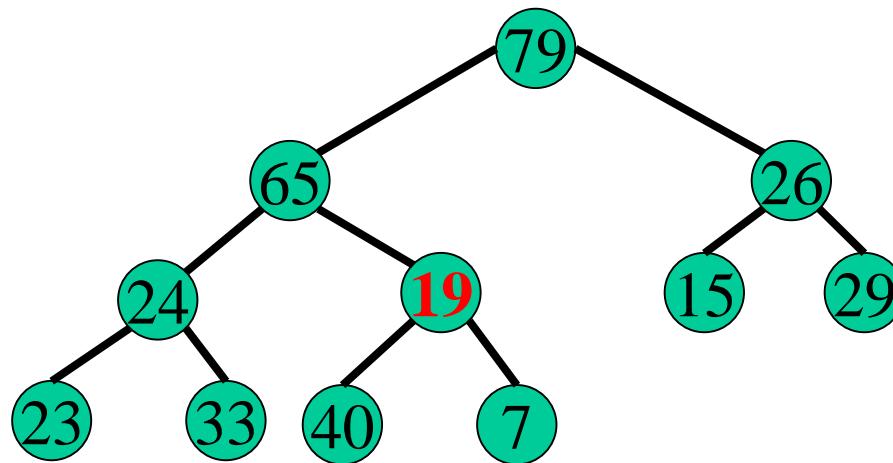
Heapify-down(Q,4)



Q	79	65	26	24	19	15	29	23	33	40	7
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---

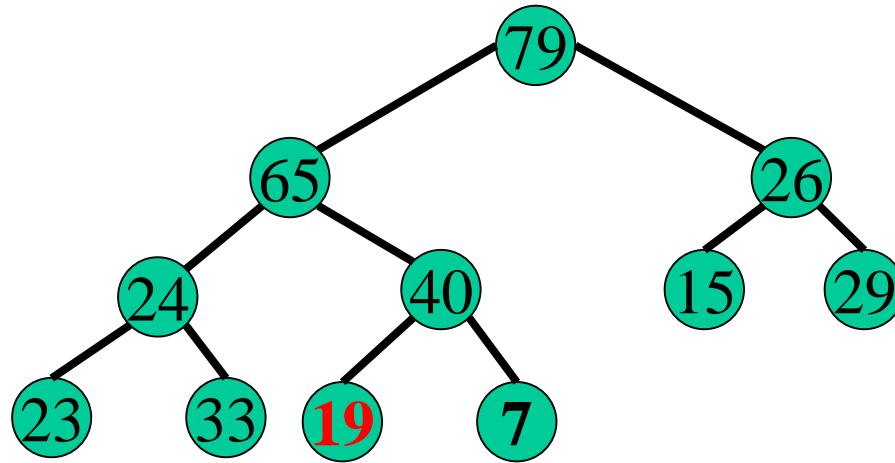
# צור עירימה במערך

Heapify-down(Q,4)



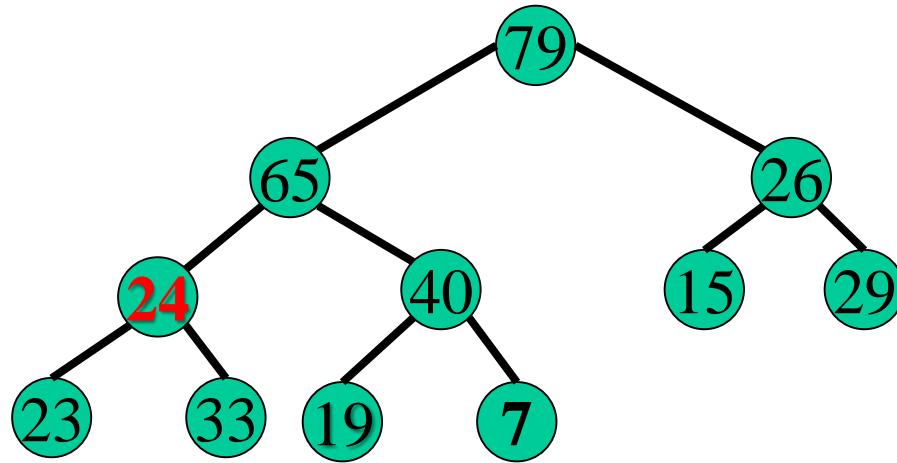
Q	79	65	26	24	19	15	29	23	33	40	7
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---

## Heapify-down(Q,4)



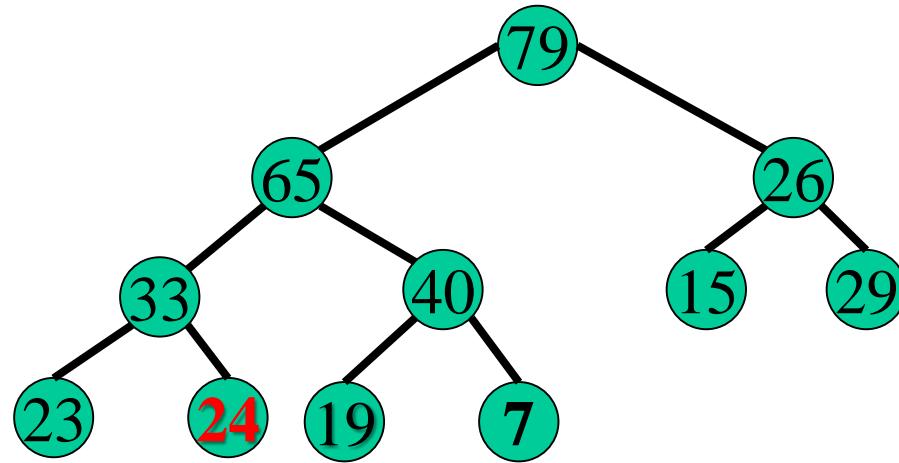
Q	79	65	26	24	40	15	29	23	33	19	7
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---

## Heapify-down(Q,3)



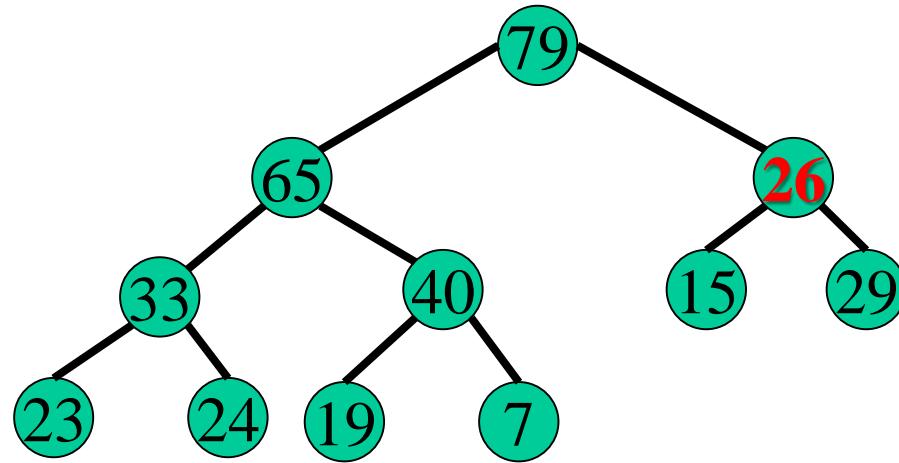
Q	79	65	26	24	40	15	29	23	33	19	7
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---

## Heapify-down(Q,3)



Q	79	65	26	33	40	15	29	23	24	19	7
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---

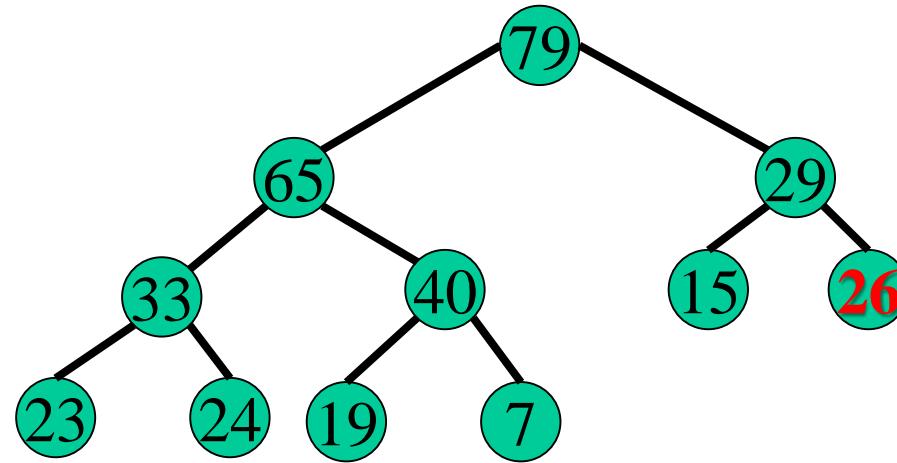
## Heapify-down(Q,2)



Q

79	65	26	33	40	15	29	23	24	19	7
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---

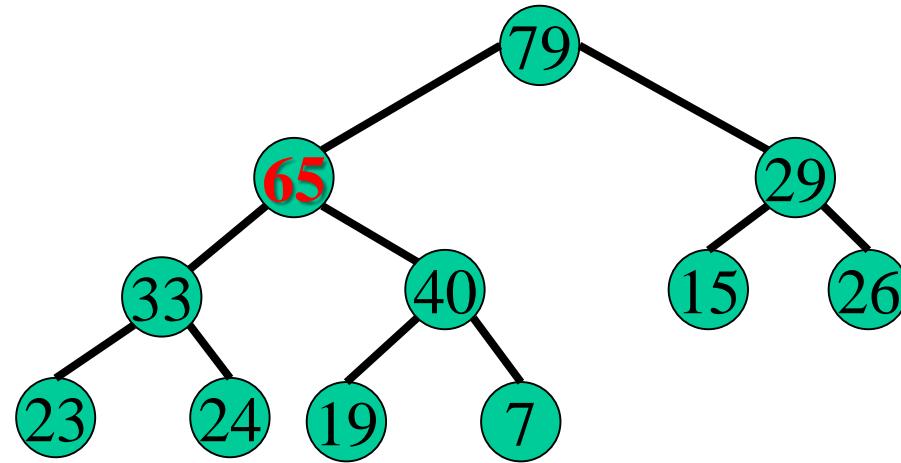
## Heapify-down(Q,2)



Q

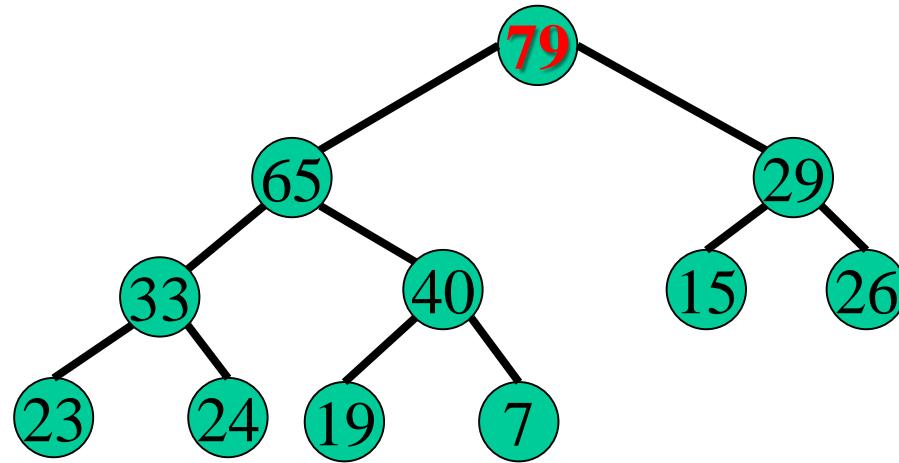
79	65	29	33	40	15	26	23	24	19	7
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---

## Heapify-down(Q,1)



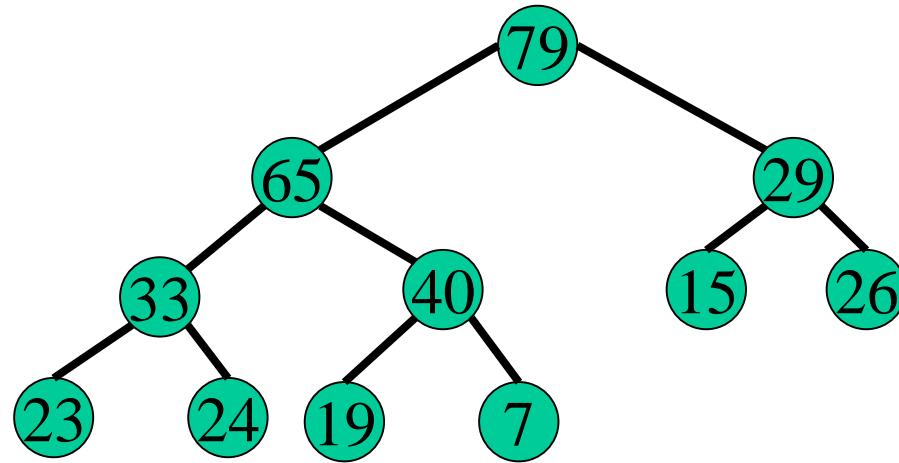
Q	79	65	29	33	40	15	26	23	24	19	7
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---

## Heapify-down(Q,0)



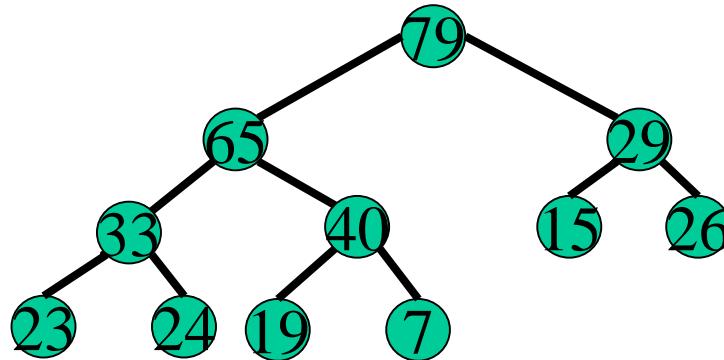
Q	79	65	29	33	40	15	26	23	24	19	7
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---

## Heapify-down(Q,0)



Q	79	65	29	33	40	15	26	23	24	19	7
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---

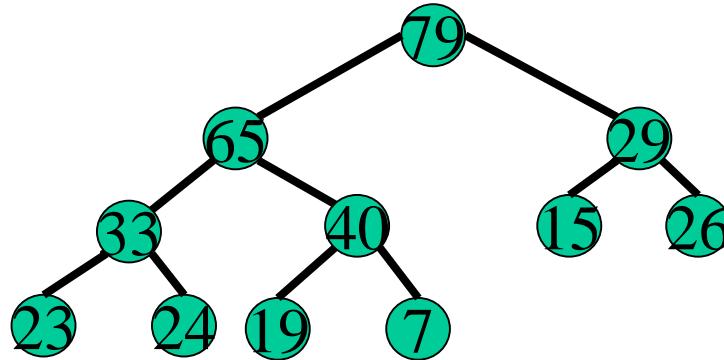
# כמה זמן לוקח לבנות עירימה בדרכו זו



יש לכל היוטר  $\frac{2}{n}$  איברים שעלייהם מבצעים `heapify` בגובה 1

$$O\left(\frac{n}{2} \times 1 + \frac{n}{4} \times 2 + \frac{n}{8} \times 3 + \dots\right) = O\left(n \sum_1^{\infty} \frac{h}{2^h}\right) = O(n)$$

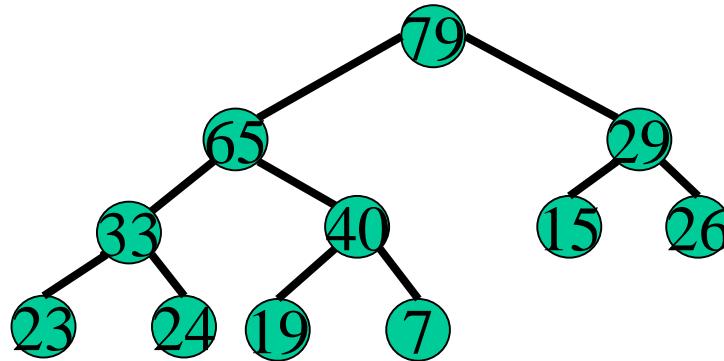
# כמה זמן לוקח לבנות עירימה בדרכו זו



יש לכל היוטר  $2/n$  איברים שעליהם מבצעים `heapify` בגובה 1

יש לכל היוטר  $4/n$  איברים שעליהם מבצעים `heapify` בגובה 2

# כמה זמן לוקח לבנות עירימה בדרכו זו

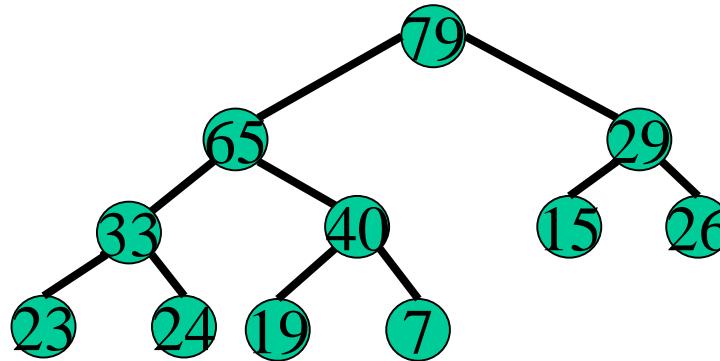


יש לכל היוטר  $2/n$  איברים שעלייהם מבצעים `heapify` בגובה 1

יש לכל היוטר  $4/n$  איברים שעלייהם מבצעים `heapify` בגובה 2

יש לכל היוטר  $8/n$  איברים שעלייהם מבצעים `heapify` בגובה 3

# כמה זמן לוקח לבנות עירימה בדרכו זו



יש לכל היותר  $2/n$  איברים שעלייהם מבצעים `heapify` בגובה 1

יש לכל היותר  $4/n$  איברים שעלייהם מבצעים `heapify` בגובה 2

יש לכל היותר  $8/n$  איברים שעלייהם מבצעים `heapify` בגובה 3

$$O\left(\frac{n}{2} \times 1 + \frac{n}{4} \times 2 + \frac{n}{8} \times 3 + \dots\right) = O\left(n \sum_1^{\infty} \frac{h}{2^h}\right) = O(n)$$

# כמה זמן לוקח לבנות עריםה בדרכן?

נבדוק כמה שווה הסכום:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h}$$

# כמה זמן לוקח לבנות עריםה בדרך זו

נבדוק כמה שווה הסכום:

$$\sum_{h=0}^{\infty} x^h = \frac{1}{1-x} \quad -1 < x < 1$$

נוסחת טור אינסופי:

# כמה זמן לוקח לבנות עריםה בדרך זו

נבדוק כמה שווה הסכום:

$$\sum_{h=0}^{\infty} x^h = \frac{1}{1-x} \quad -1 < x < 1$$

נוסחת טור אינסופי:

$$\sum_{h=0}^{\infty} h x^{h-1} = -(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

נגזר את שני האגפים:

# כמה זמן לוקח לבנות עריםה בדרך זו

נבדוק כמה שווה הסכום:

$$\sum_{h=0}^{\infty} x^h = \frac{1}{1-x} \quad -1 < x < 1$$

נוסחת טור אינסופי:

$$\sum_{h=0}^{\infty} h x^{h-1} = -(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

נגזר את שני האגפים:

$$\sum_{h=0}^{\infty} h x^h = \frac{x}{(1-x)^2}$$

נכפיל את שני האגפים פי א' :

# כמה זמן לוקח לבנות עריםה בדרכן?

נבדוק כמה שווה הסכום:

$$\sum_{h=0}^{\infty} x^h = \frac{1}{1-x} \quad -1 < x < 1$$

נוסחת טור אינסופי:

$$\sum_{h=0}^{\infty} h x^{h-1} = -(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

נגזר את שני האגפים:

$$\sum_{h=0}^{\infty} h x^h = \frac{x}{(1-x)^2}$$

נכפיל את שני האגפים פי א' :

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

נצח

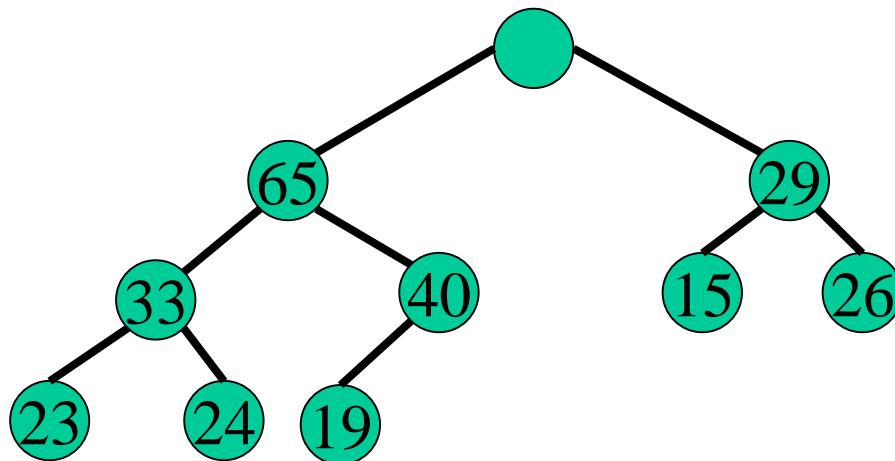
# Heapsort (Williams, Floyd, 1964)

מיון עריםה

- הכנס את האיברים למערך
- צור עריםה **מקסימום** במערך
- כל עוד גודל העריםה $>1$

בצע הוצאת **מקסימום**  
והכנס אותו למקום האחרון במערך.

- בצע הוצאת **מקסימום**  
והכנס אותו למקום האחרון במערך.

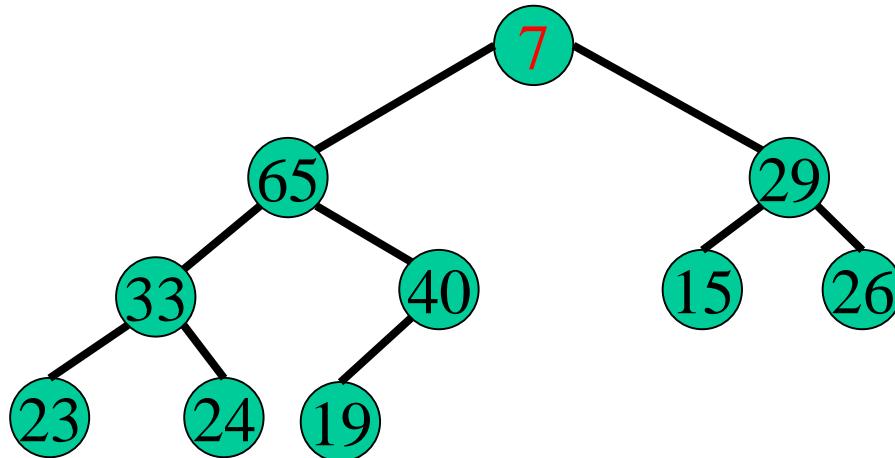


item

Q		65	29	33	40	15	26	23	24	19	79
---	--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

65

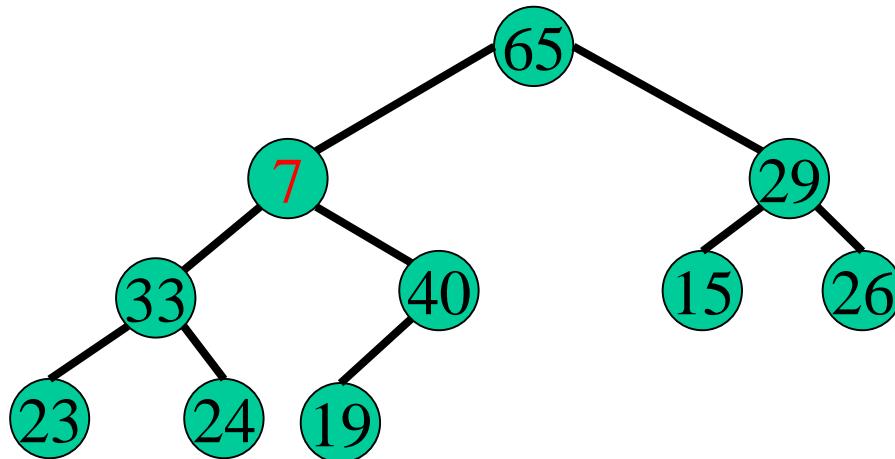
- בצע הוצאת **מקסימום**  
והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q	7	65	29	33	40	15	26	23	24	19	79
---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

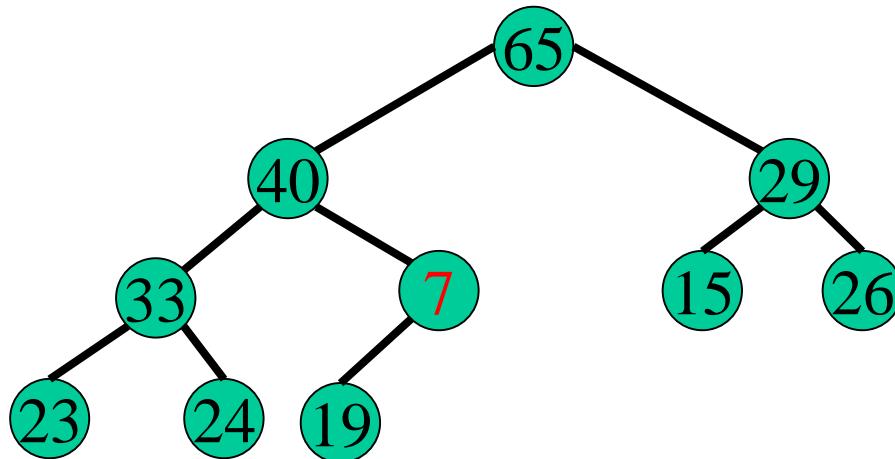
- בצע הוצאת **מקסימום**  
וכנסו אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q	65	7	29	33	40	15	26	23	24	19	79
---	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

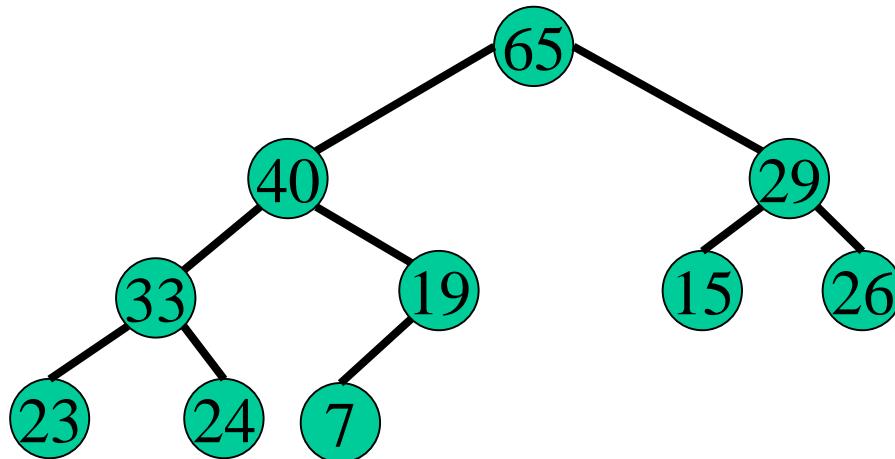
- בצע הוצאת **מקסימום**  
והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q	65	40	29	33	7	15	26	23	24	19	79
---	----	----	----	----	---	----	----	----	----	----	----

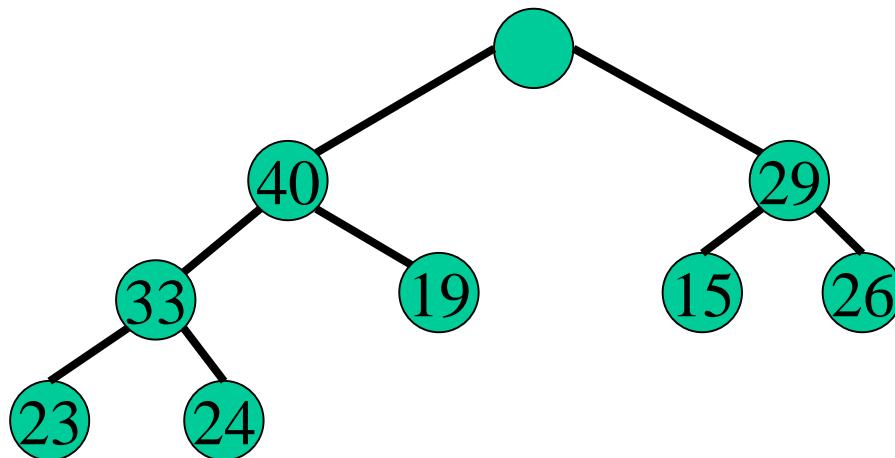
- בצע הוצאת **מקסימום**  
והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q	65	40	29	33	19	15	26	23	24	7	79
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----

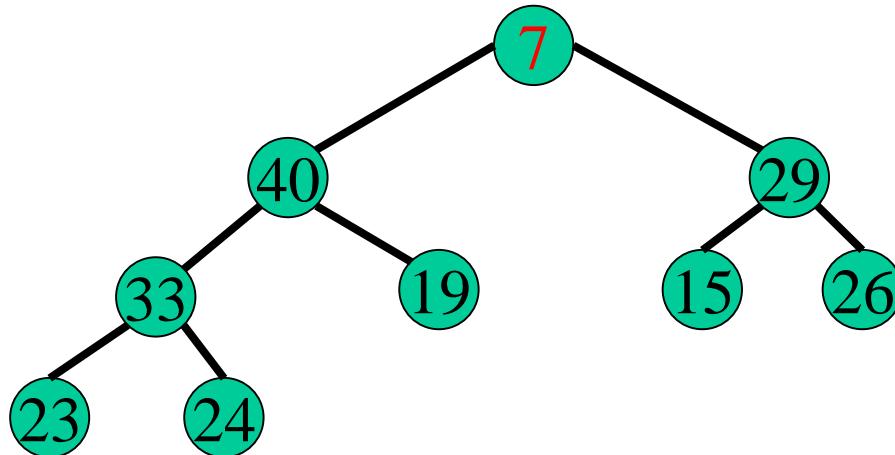
- בצע הוצאת **מקסימום**  
והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item

Q		40	29	33	19	15	26	23	24	65	79
---	--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

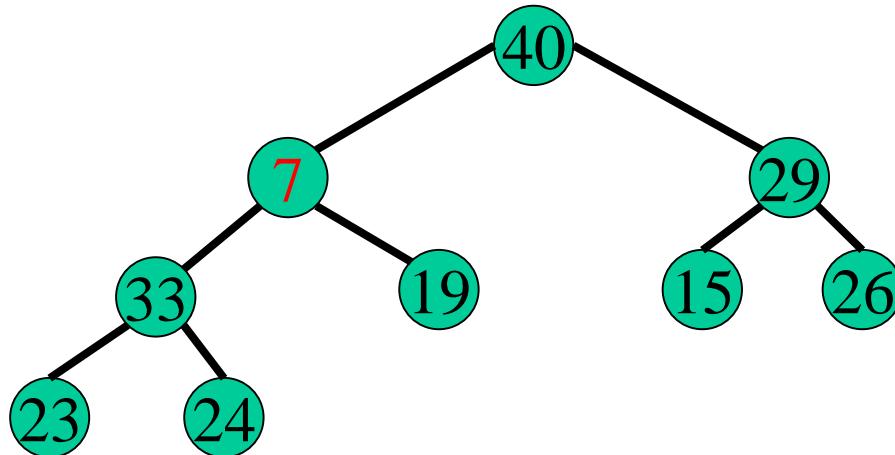
- בצע הוצאת **מקסימום**  
והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q	7	40	29	33	19	15	26	23	24	65	79
---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

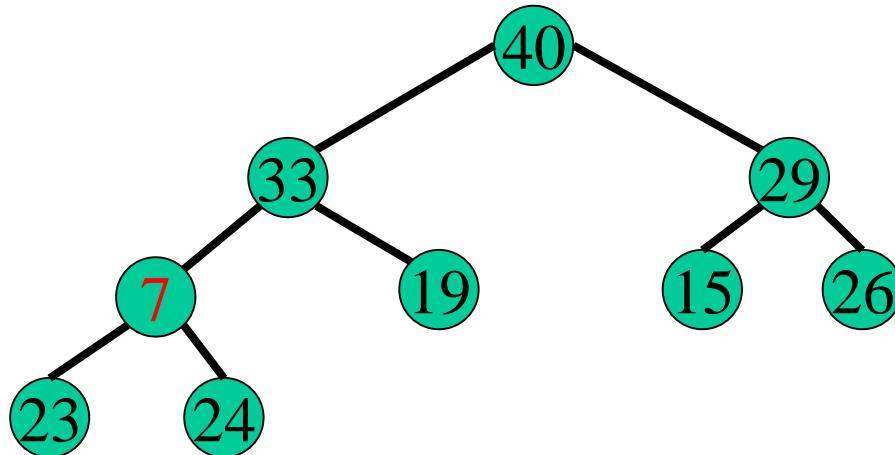
- בצע הוצאת **מקסימום**  
וכנסו אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q	40	7	29	33	19	15	26	23	24	65	79
---	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

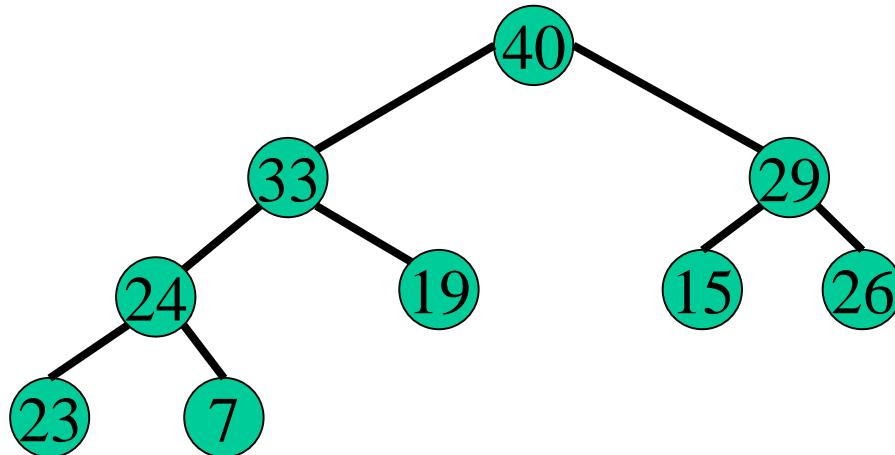
- בצע הוצאת **מקסימום**  
והכנסו אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q	40	33	29	7	19	15	26	23	24	65	79
---	----	----	----	---	----	----	----	----	----	----	----

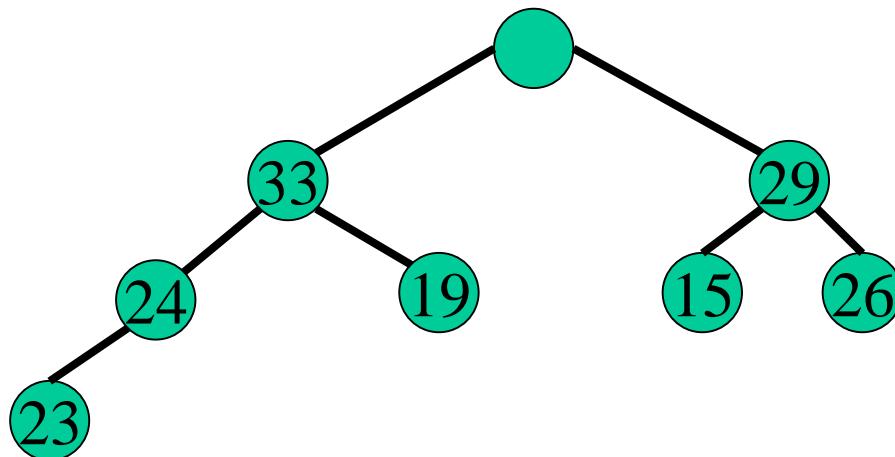
- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item

Q	40	33	29	24	19	15	26	23	7	65	79
---	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	----

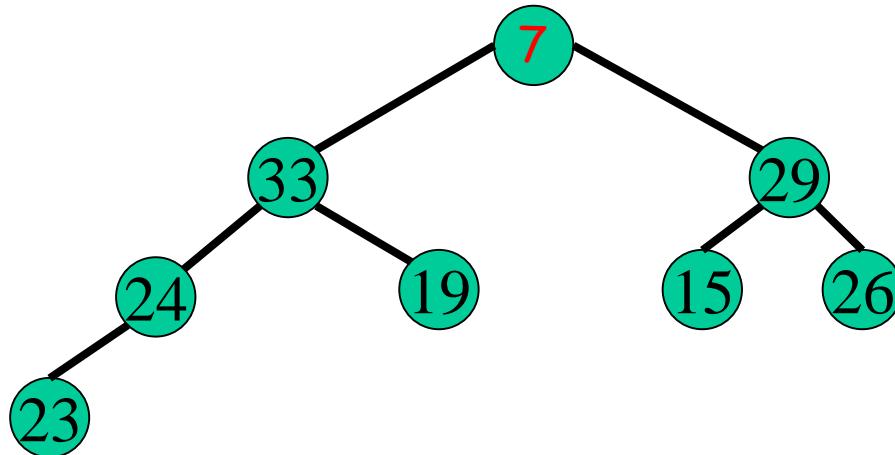
- בצע הוצאת **מקסימום**  
והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q		33	29	24	19	15	26	23	40	65	79
---	--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

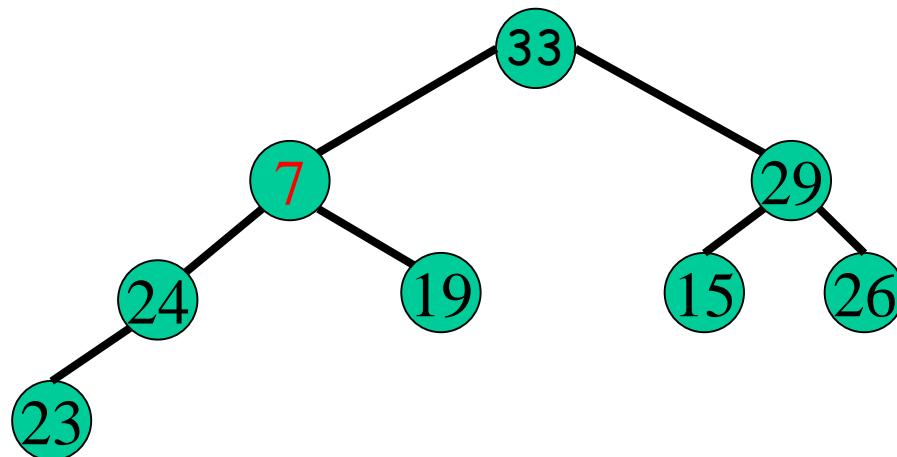
- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q	7	33	29	24	19	15	26	23	40	65	79
---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

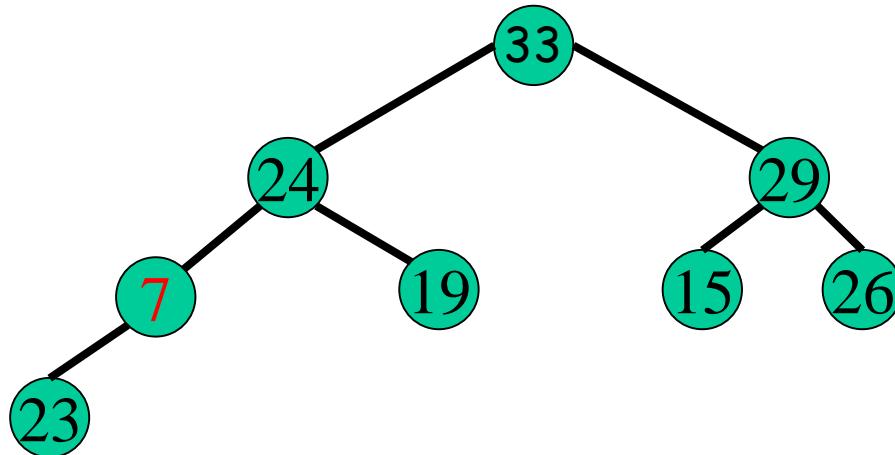
- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q	33	7	29	24	19	15	26	23	40	65	79
---	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

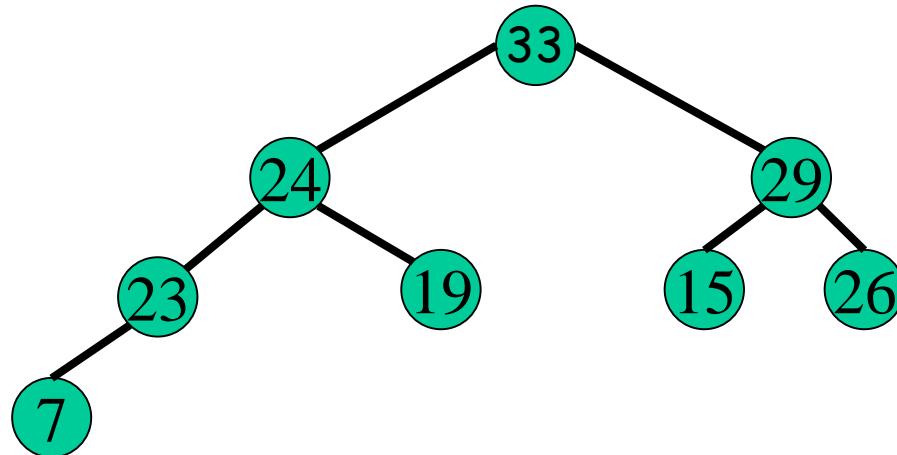
- בצע הוצאת **מקסימום**  
והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q	33	24	29	7	19	15	26	23	40	65	79
---	----	----	----	---	----	----	----	----	----	----	----

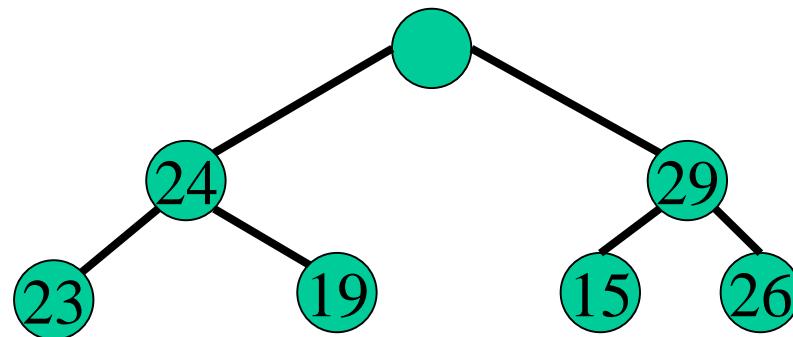
- בצע הוצאת **מקסימום**  
והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q	33	24	29	23	19	15	26	7	40	65	79
---	----	----	----	----	----	----	----	---	----	----	----

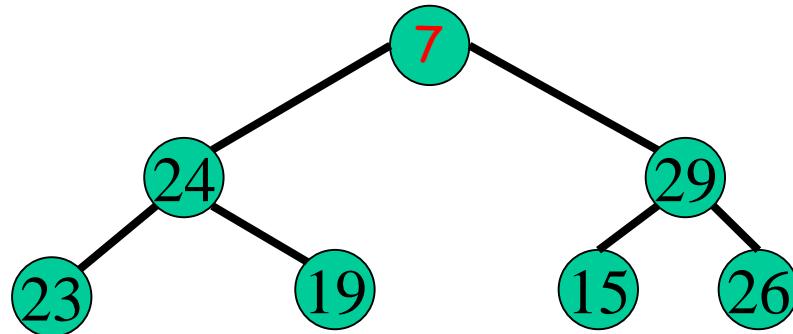
- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item

Q		24	29	23	19	15	26	33	40	65	79
---	--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

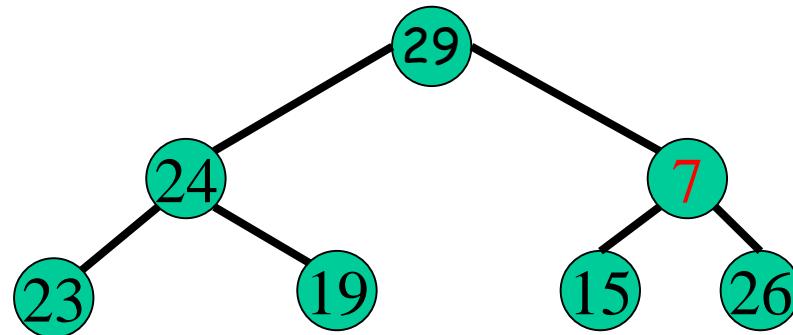
- בצע הוצאת **מקסימום**  
והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q	7	24	29	23	19	15	26	33	40	65	79
---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

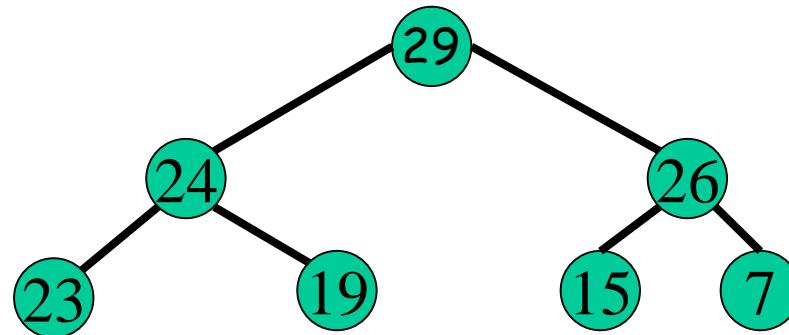
- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q	29	24	<span style="color: red;">7</span>	23	19	15	26	<span style="color: blue;">33</span>	<span style="color: blue;">40</span>	<span style="color: blue;">65</span>	<span style="color: blue;">79</span>
---	----	----	------------------------------------	----	----	----	----	--------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------

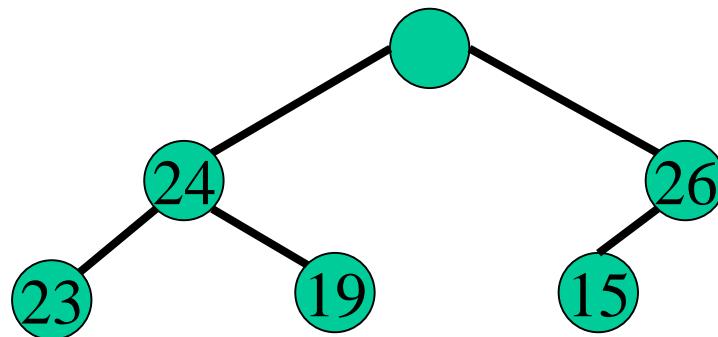
- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item

Q	29	24	26	23	19	15	7	33	40	65	79
---	----	----	----	----	----	----	---	----	----	----	----

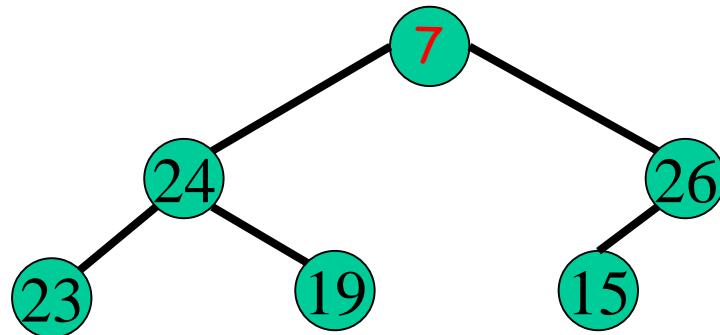
- בצע הוצאת **מקסימום**  
והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item

Q		24	26	23	19	15	29	33	40	65	79
---	--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.

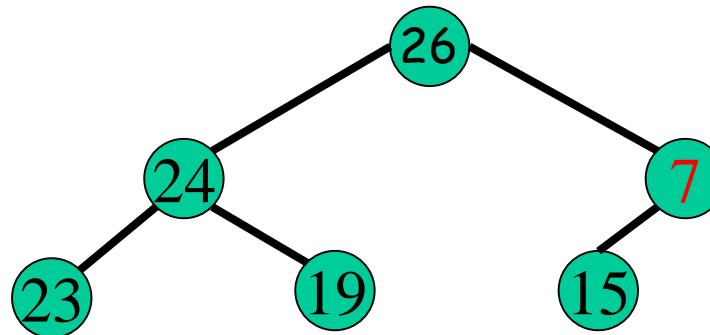


item 7

Q	7	24	26	23	19	15	29	33	40	65	79
---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----



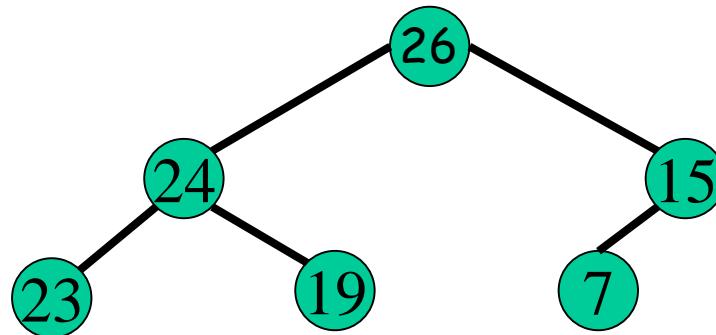
- בצע הוצאת **מקסימום**  
והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item

Q	26	24	7	23	19	15	29	33	40	65	79
---	----	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----

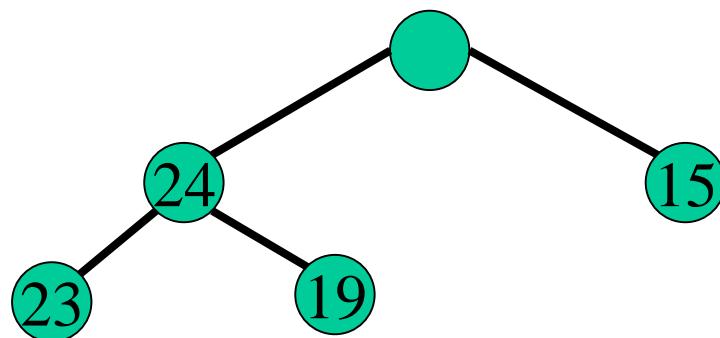
- בצע הוצאת **מקסימום**  
והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item

Q	26	24	15	23	19	7	29	33	40	65	79
---	----	----	----	----	----	---	----	----	----	----	----

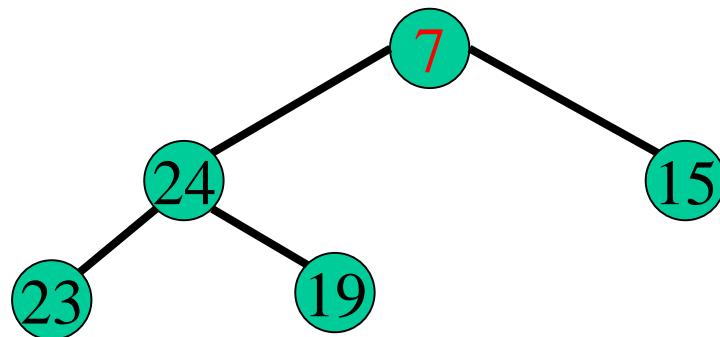
- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item

Q		24	15	23	19	26	29	33	40	65	79
---	--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.

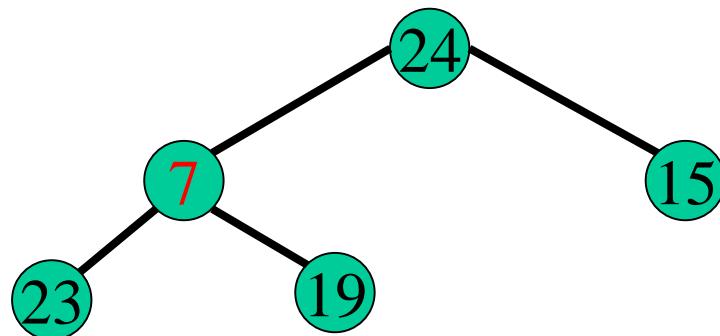


item 7

Q	7	24	15	23	19	26	29	33	40	65	79
---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----



- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.

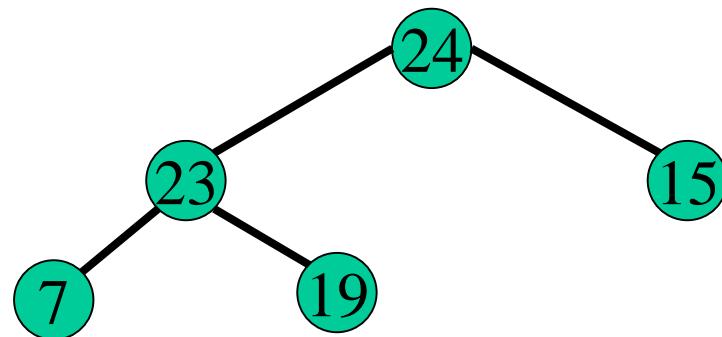


item

Q	24	7	15	23	19	26	29	33	40	65	79
---	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----



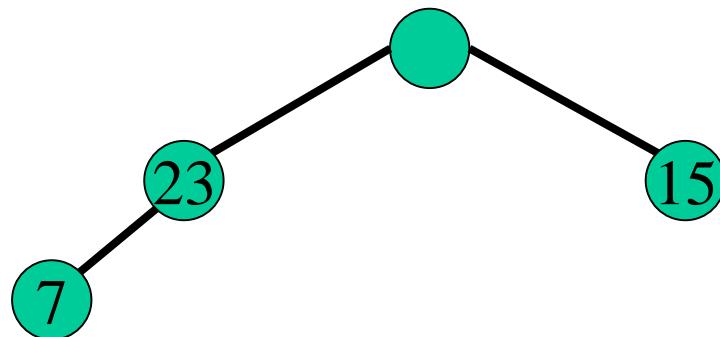
- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item

Q	24	23	15	7	19	26	29	33	40	65	79
---	----	----	----	---	----	----	----	----	----	----	----

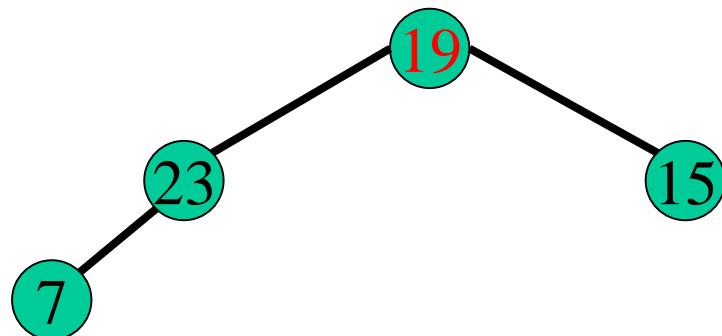
- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 19

Q  23 15 7  24 26 29 33 40 65 79

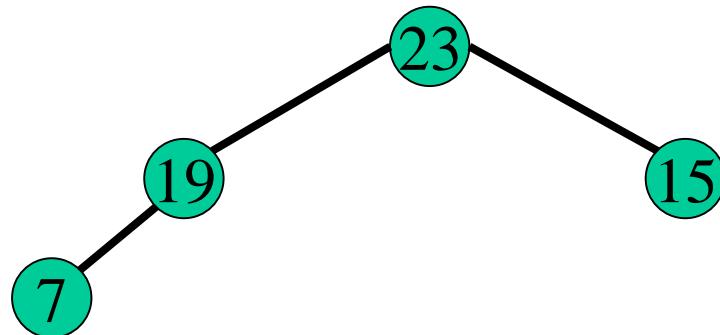
- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 19

Q 19 23 15 7 24 26 29 33 40 65 79

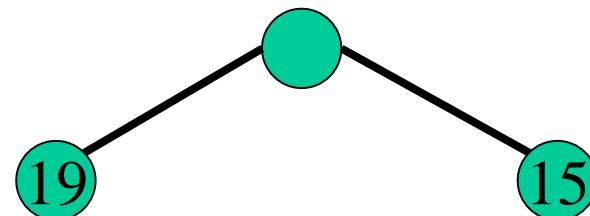
- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 19

Q	23	19	15	7	24	26	29	33	40	65	79
---	----	----	----	---	----	----	----	----	----	----	----

- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.

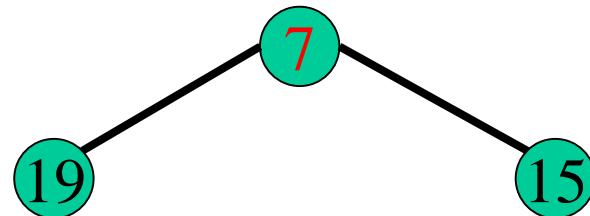


item

Q 

	19	15	23	24	26	29	33	40	65	79
--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

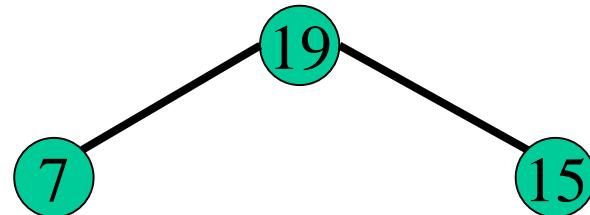
- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q 7 19 15 23 24 26 29 33 40 65 79

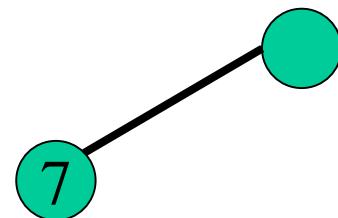
- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q	19	7	15	23	24	26	29	33	40	65	79
---	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

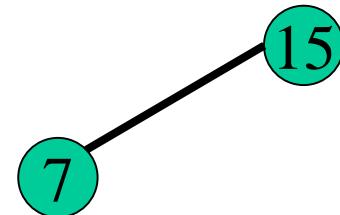
- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 15

Q  7  19  23  24  26  29  33  40  65  79

- בצע הוצאת **מִקְסִים** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 15

Q	15	7	19	23	24	26	29	33	40	65	79
---	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- בצע הוצאת **מִקְסִים** והכנס אותו למקום האחרון במערך.



item 7

Q [ ] 15 19 23 24 26 29 33 40 65 79

100

- בצע הוצאת **מִקְסִים** והכנס אותו למקום האחרון במערך.

7

item 7

Q 7 15 19 23 24 26 29 33 40 65 79

- בצע הוצאת **מקסימום** והכנס אותו למקום האחרון במערך.

item 7

Q 7 15 19 23 24 26 29 33 40 65 79

# סיבוכיות זמן של מילון ערים

- **הוצאת האיברים המקייםים אחד אחריו השני ( $O(n \log n)$ )**
- **בנית ערים המקייםים ( $O(n)$ )**
- **סך הכל: ( $O(n \log n)$ )**

# דוגמאות לשימוש במבנה נתונים עירימה

- תור עדיפויות
- אלגוריתם של Dijkstra למציאת מסלולים קצרים ביותר בגרף

# תור עדיפויות

הכנסה - כמו הכנסה לתור רגיל, לפי סדר ההגעה.

הוצאתה - מוציאים את האיבר בתור בעל המפתח הקטן ביותר.

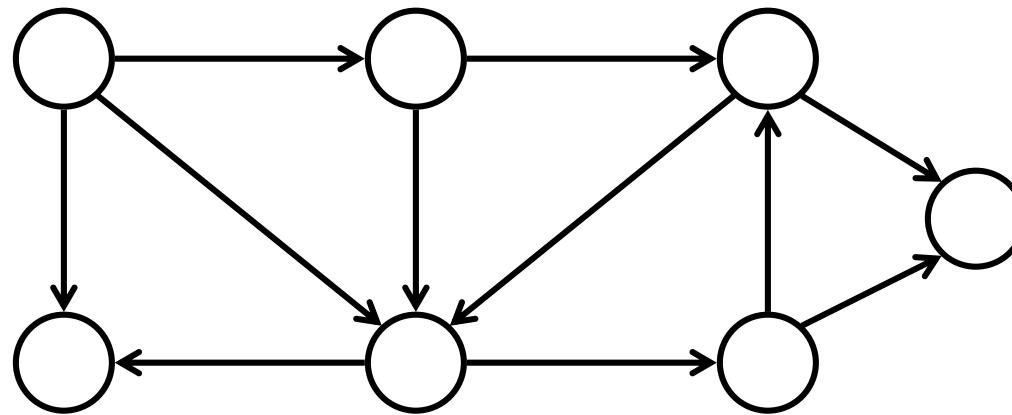
# אלגוריתם של Dijkstra למציאת מסלולים קצרים ביותר בגרף

מוטיבציה:

רוצים למצוא את המסלול הקצר ביותר מchiefa לירושלים

מייצגים את מפת הכבישים על-ידי גרף

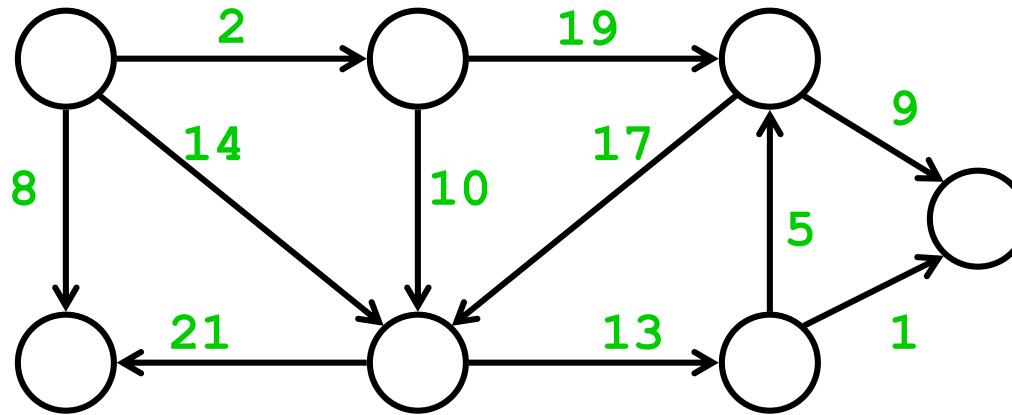
# גרף $G=(V,E)$



ו - קבוצת הקודקודים (צמתים)

ז - קבוצת הקשרות (זוגות של קודקודים)

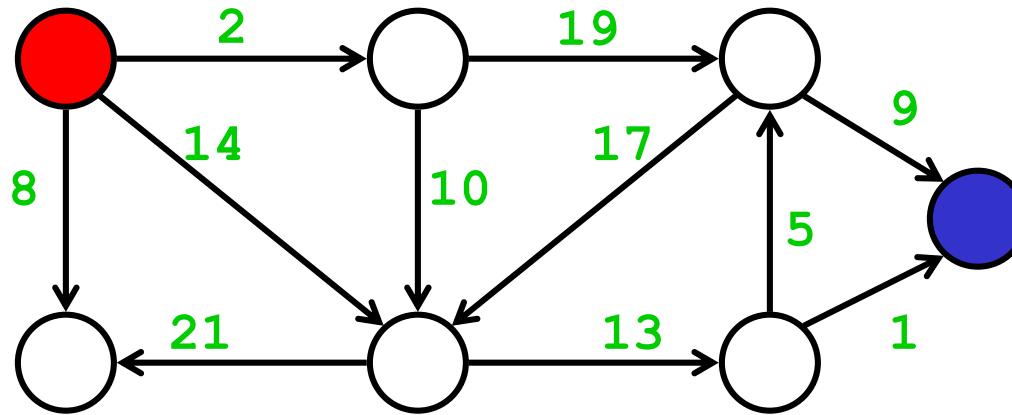
# מייצגים אורך דרר על-ידי משקל על הקשתות



ו - קבוצת הקודקודים (צמתים)

ז - קבוצת הקשתות (זוגות של קודקודים)

## מוצא - יעד



ו - קבוצת הקודקודים (צמתים)

ז - קבוצת הקשרות (זוגות של קודקודים)

# אלגוריתם של Dijkstra

מוצא את כל המסלולים בגרף מצומת מוצא מסוים לכל אחד מצמתי הגרף.

# לצורך האלגוריתם דרוש מבנה נתונים מופשט הכולל את הפעולות:

- |                                |                                     |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| insert( $x, Q$ )               | • הכנסת איבר                        |
| min( $Q$ )                     | • חיפוש איבר מינימלי                |
| deletemin( $Q$ )               | • הוצאת איבר                        |
| decrease-key( $x, Q, \Delta$ ) | • הגדל מפתח של איבר $x$ ב- $\Delta$ |