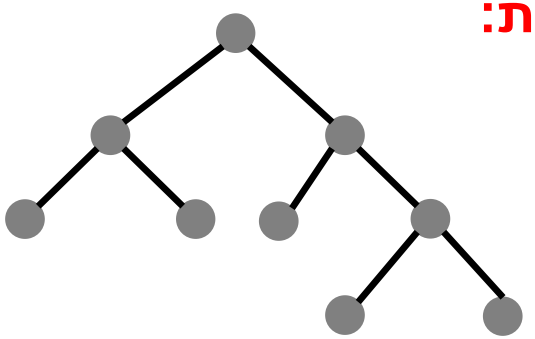
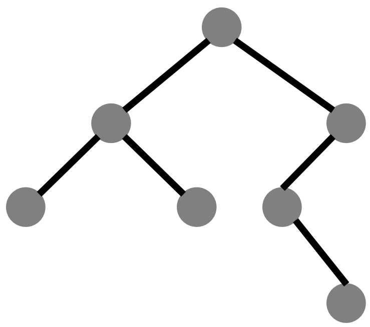
עצים בינאריים

עץ בינארי (binary tree)

עץ ריק או לכל צומת יש תת קבוצה של {ילד ימני, ילד שמאלי}

דוגמאות:





עצים בינאריים שונים

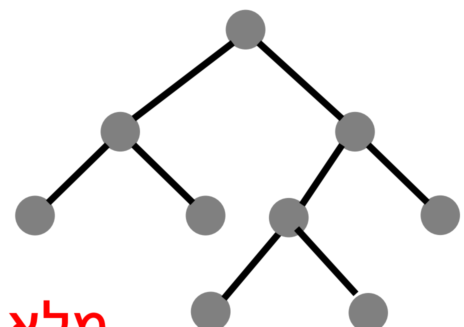
ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עצים בינאריים

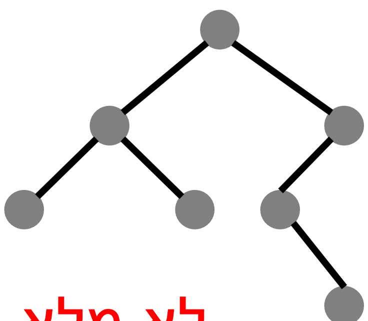
עץ בינארי מלא (full)

לכל צומת פנימי יש שני ילדים

דוגמא:



מלא



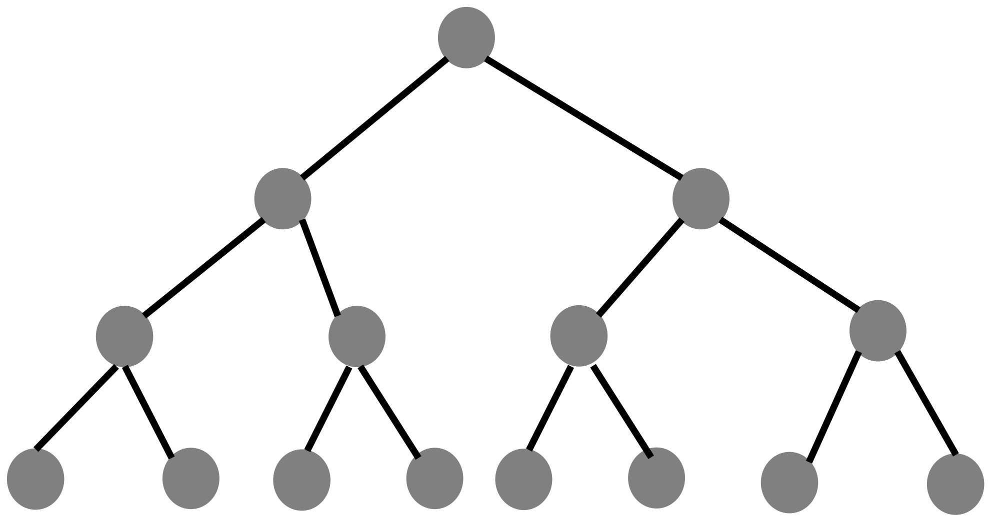
לא מלא

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עצים בינאריים

עץ בינארי שלם (complete)

עץ בינארי מלא שבו העלים באותו עומק

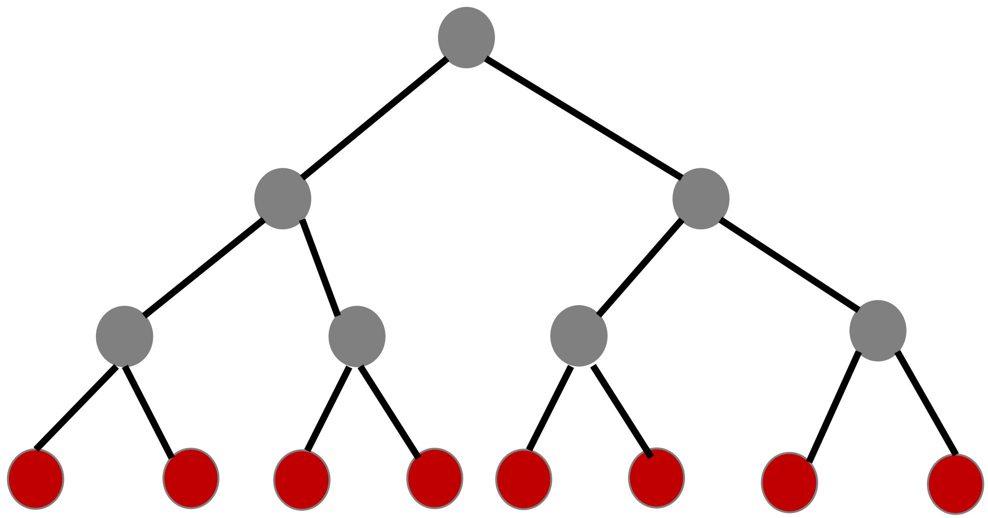


ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עצים בינאריים

עץ בינארי שלם (complete)

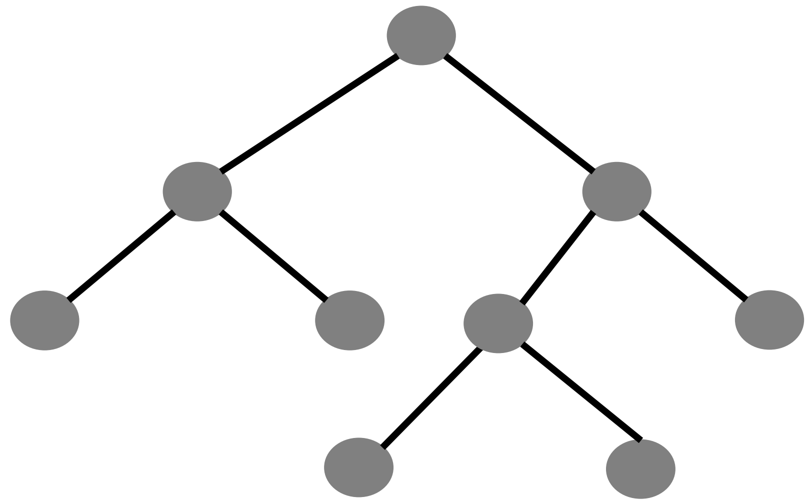
עץ בינארי מלא שבו העלים באותו עומק



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ בינארי מלא
משפט

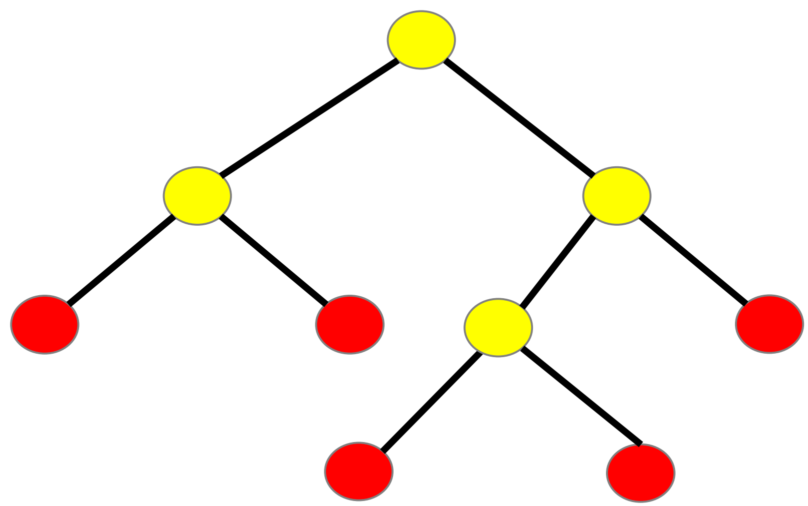
- מספר העלים בעץ מלא הוא בדיוק 1 יותר ממספר הקדקודים הפנימיים בעץ.



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ בינארי מלא

- מספר העלים בעץ מלא הוא בדיוק 1 יותר ממספר הקדקודים הפנימיים בעץ.



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

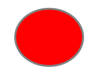
בעץ בינארי מלא עם m עלים יש $m-1$ קדקודים פנימיים

הוכחה באינדוקציה
על כמות הקדקודים

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

בסיס האינדוקציה

- $m=1$

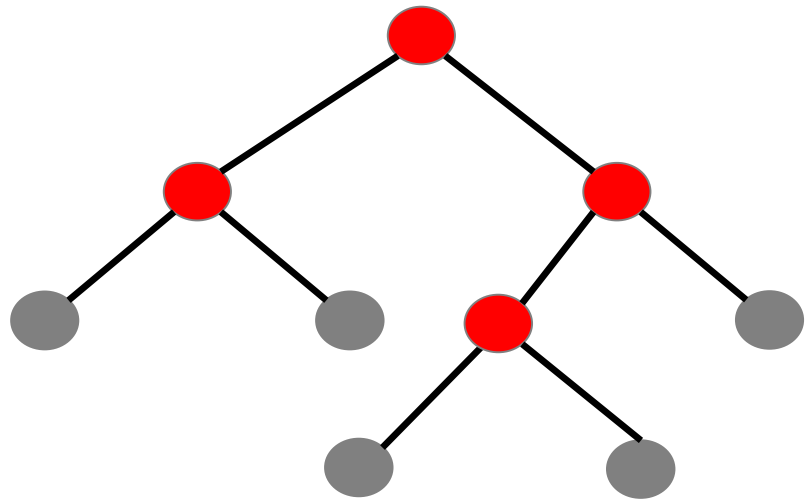


- כמות עלים = 1
- כמות קדקודים פנימיים = 0

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

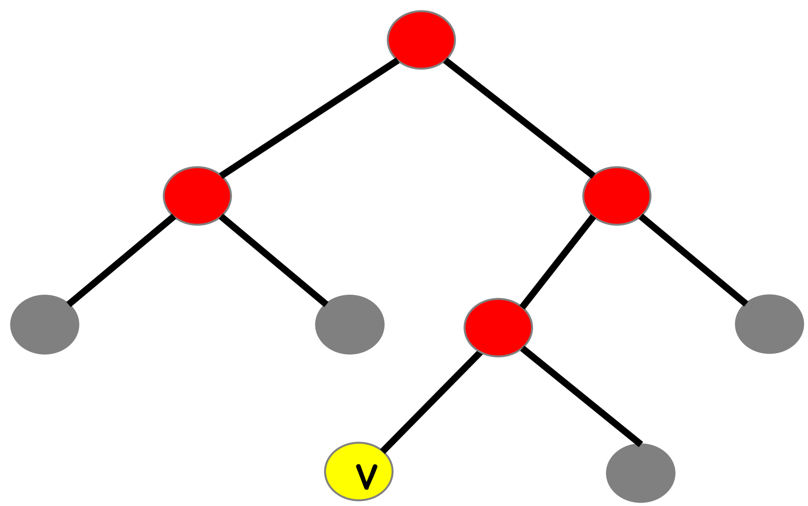
- נניח נכונות לעץ עם m עלים ונוכיח על עץ עם $m+1$ עלים.



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

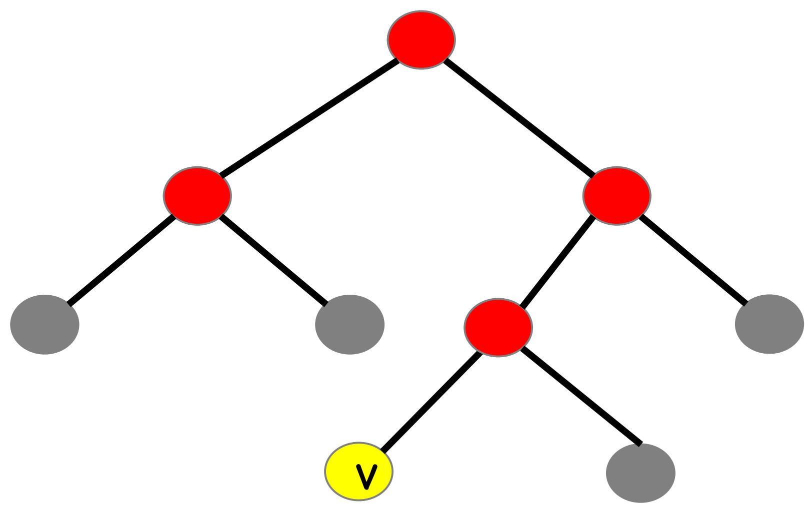
• יהי v העלה הכי עמוק בעץ



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

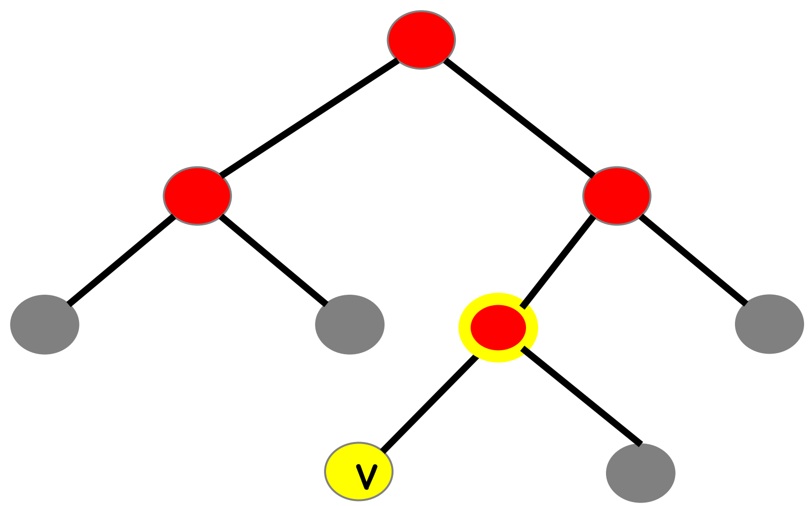
- לקדקוד v חייב להיות אבא (מדוע?)



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

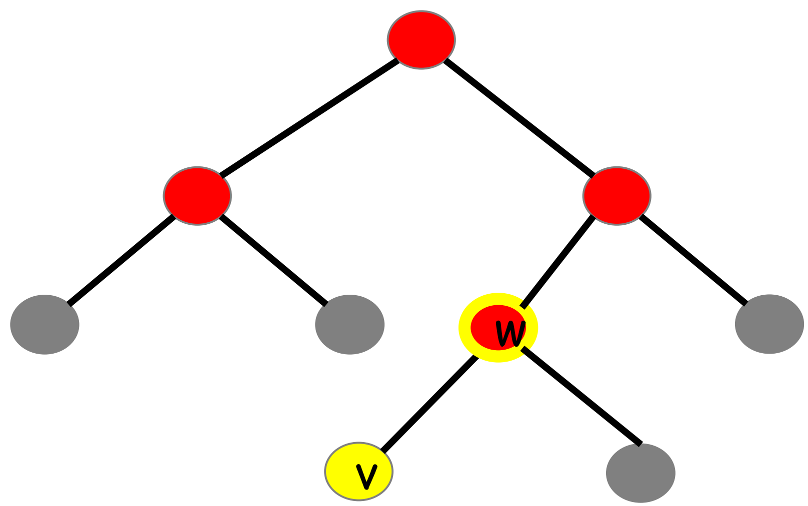
- לקדקוד v חייב להיות אבא (מדוע?)



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

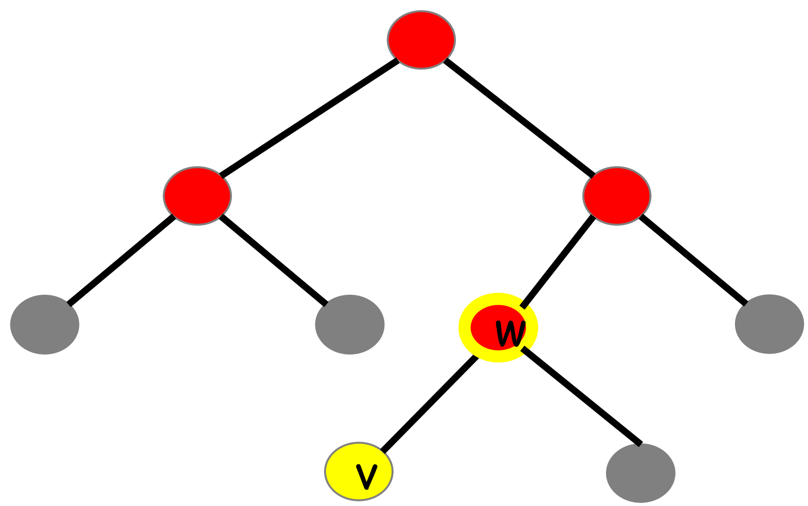
- לקדקוד v חייב להיות אבא. נסמן ב-w



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

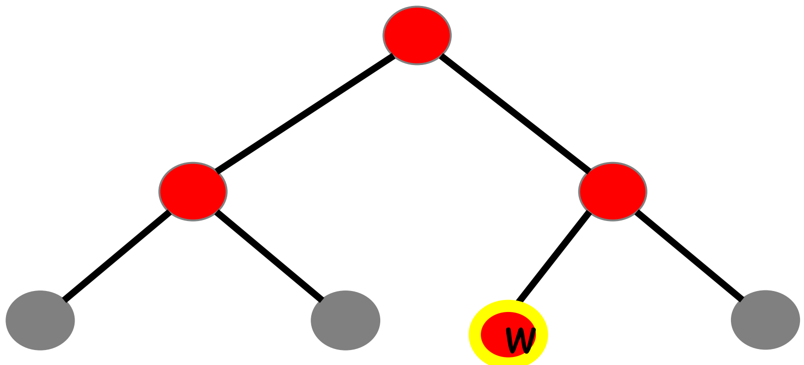
- ל-w יש שני בנים (מדוע?)



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

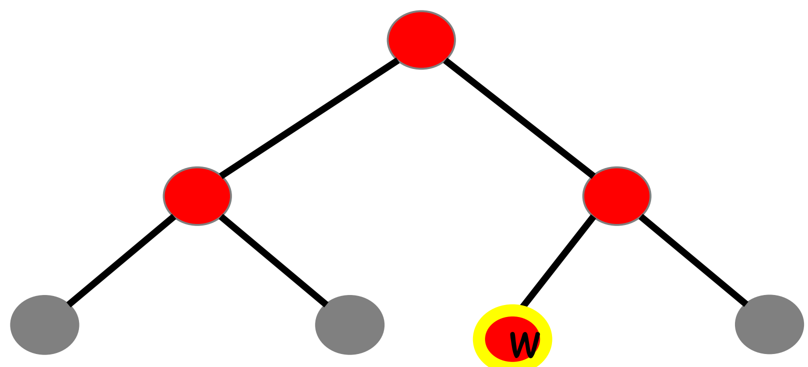
- נסתכל על העץ המתקבל מהסרת שני הבנים של w.



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

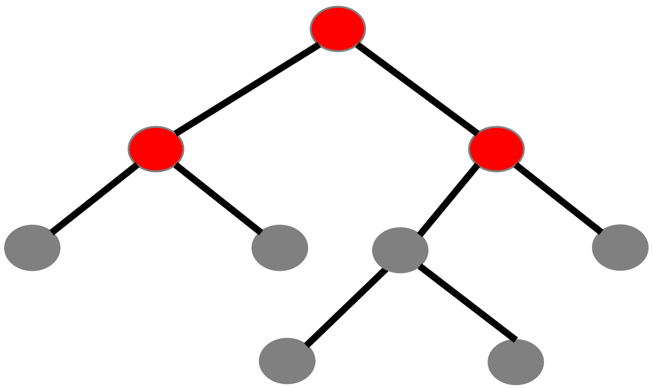
- כמות העלים בעץ m (מדוע?)

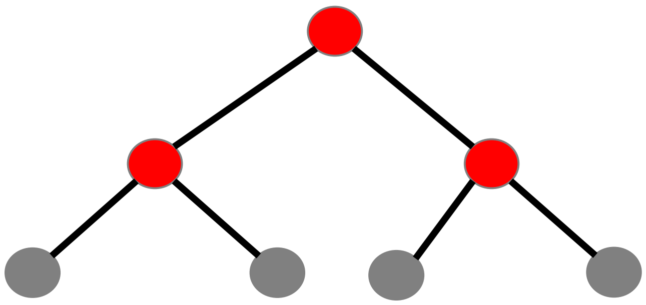


ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

- מה ההבדל בין עץ זה לעץ הנתון?



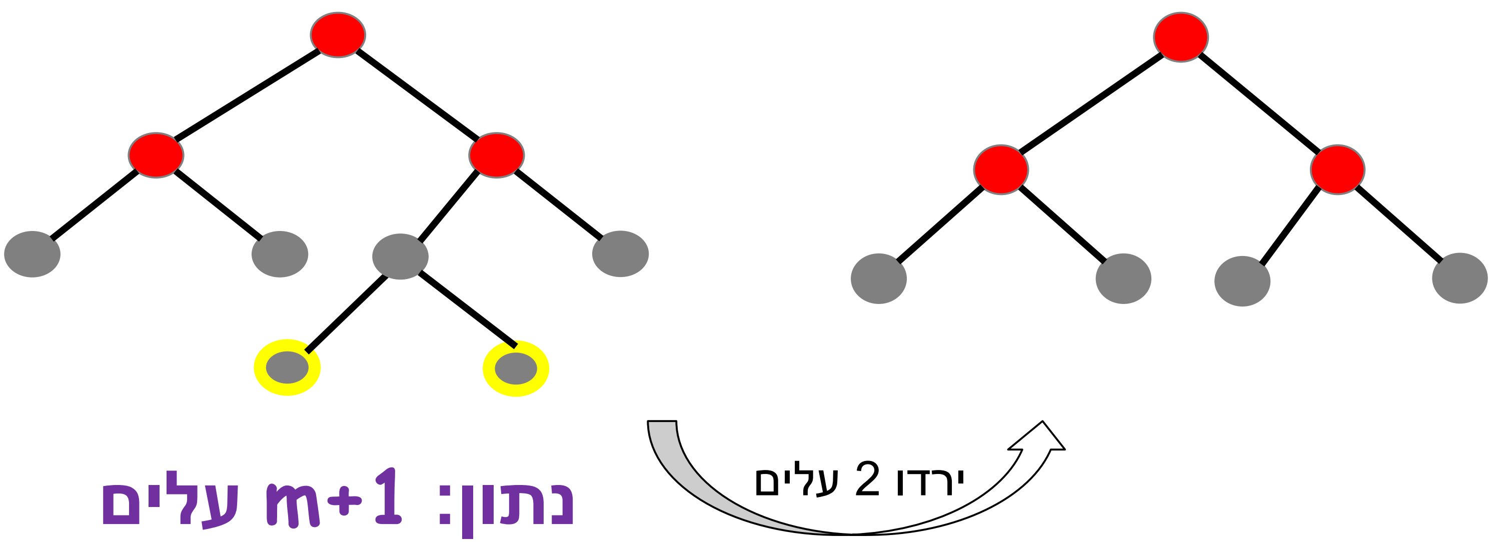


נתון: m+1 עלים

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

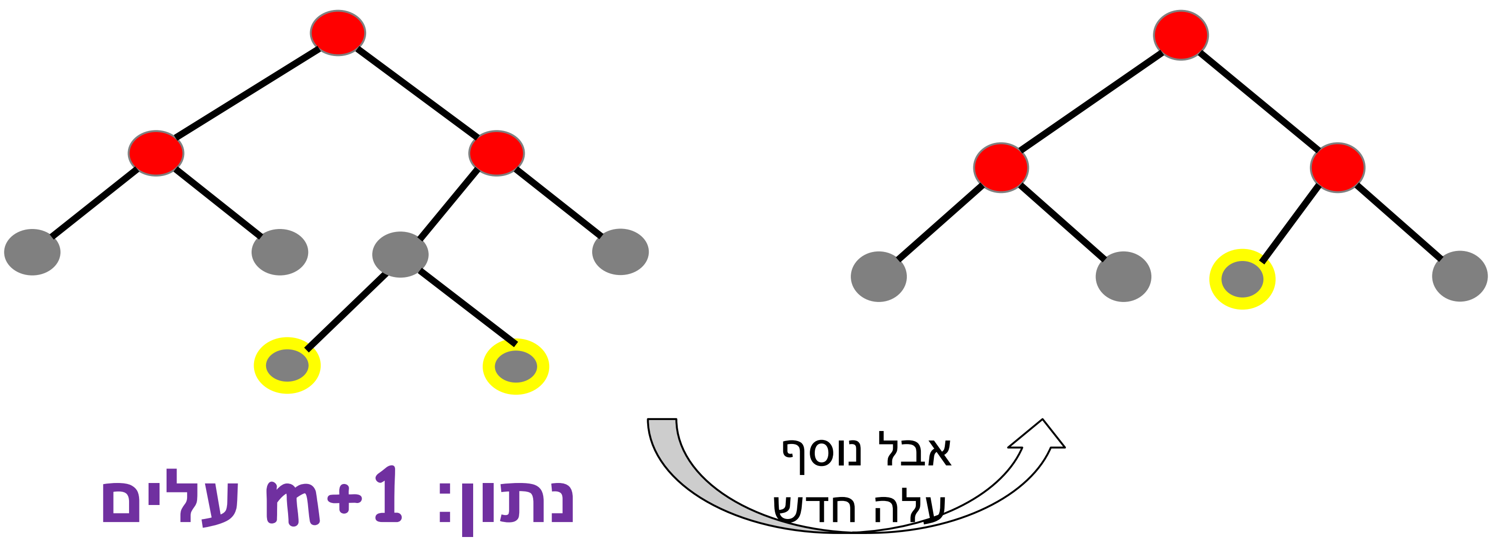
- מה ההבדל בין עץ זה לעץ הנתון?



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

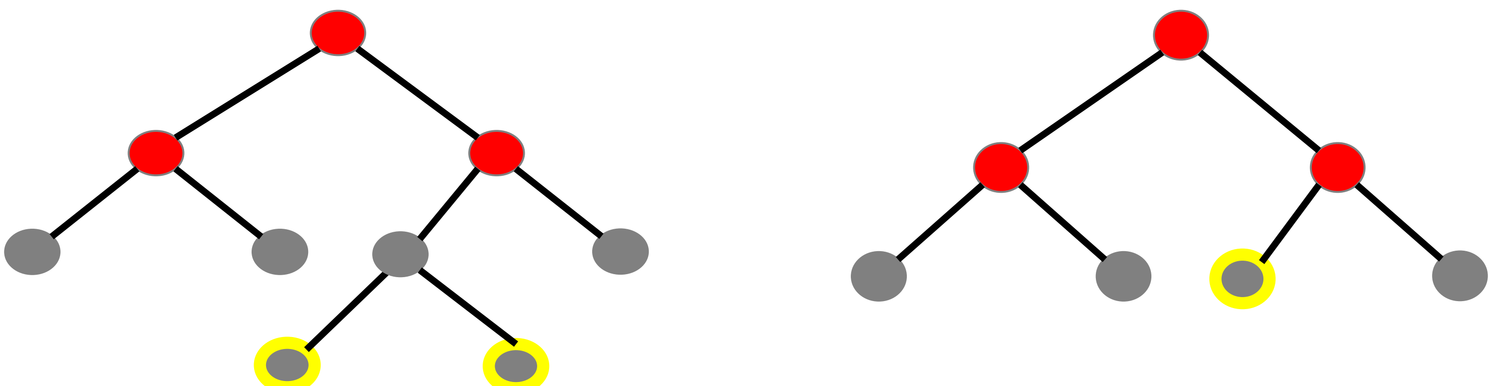
- מה ההבדל בין עץ זה לעץ הנתון?



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

- מה ההבדל בין עץ זה לעץ הנתון?

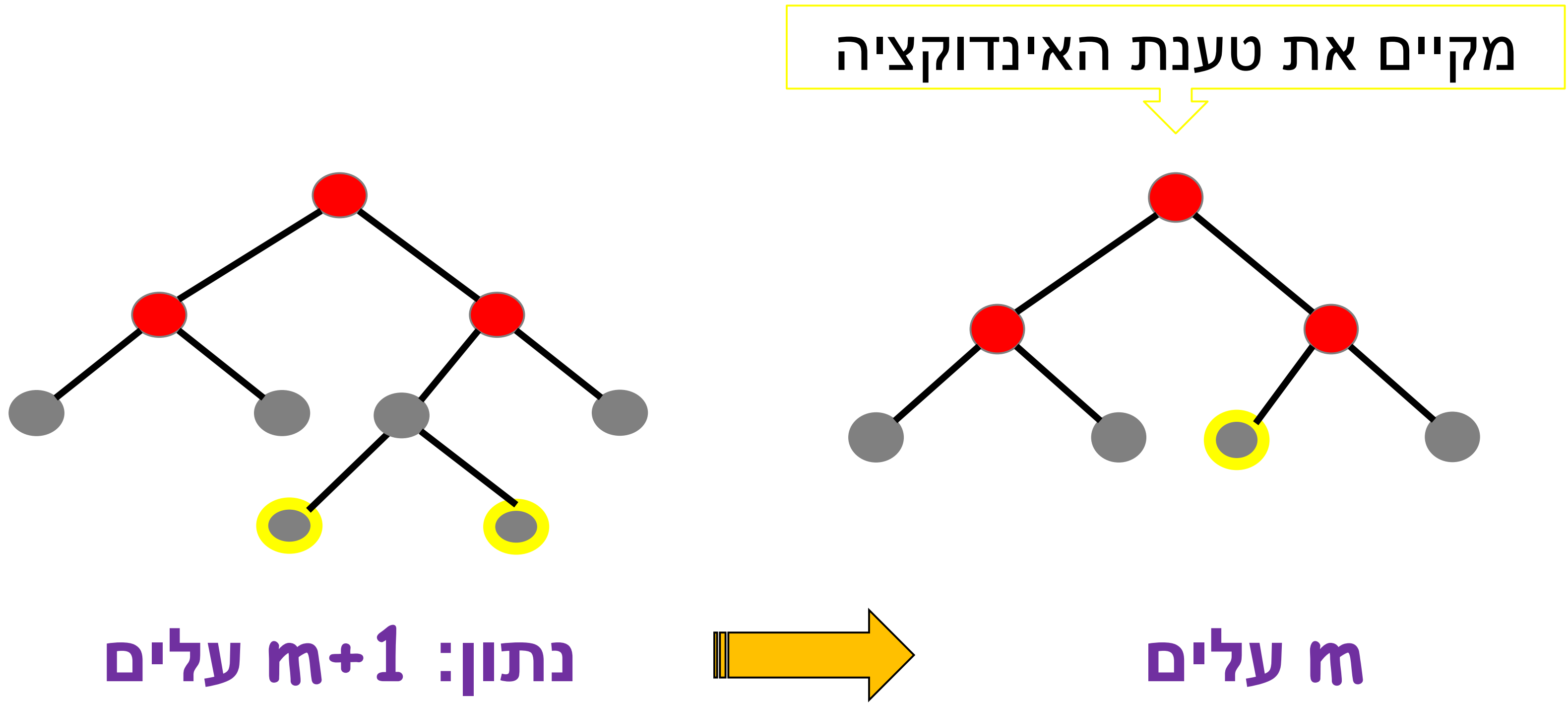


m עלים ⟸ **נתון: m+1 עלים**

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

- מה ההבדל בין עץ זה לעץ הנתון?

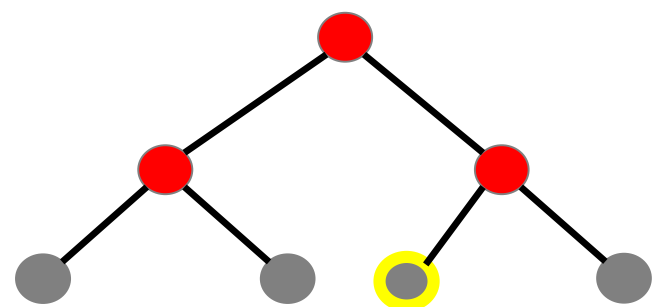


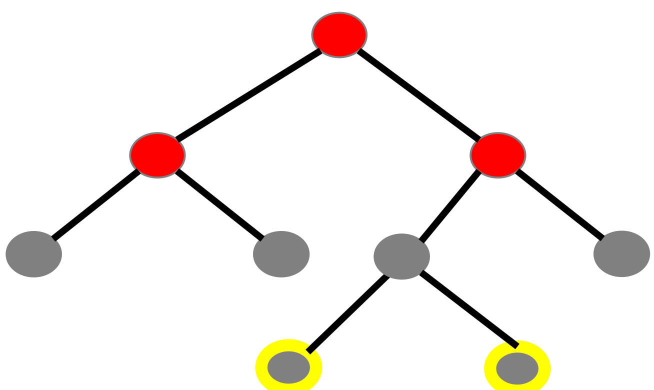
21

צעד האינדוקציה

- מה ההבדל בין עץ זה לעץ הנתון?

מקיים את טענת האינדוקציה





m עלים
m-1 פנימיים

נתון: m+1 עלים

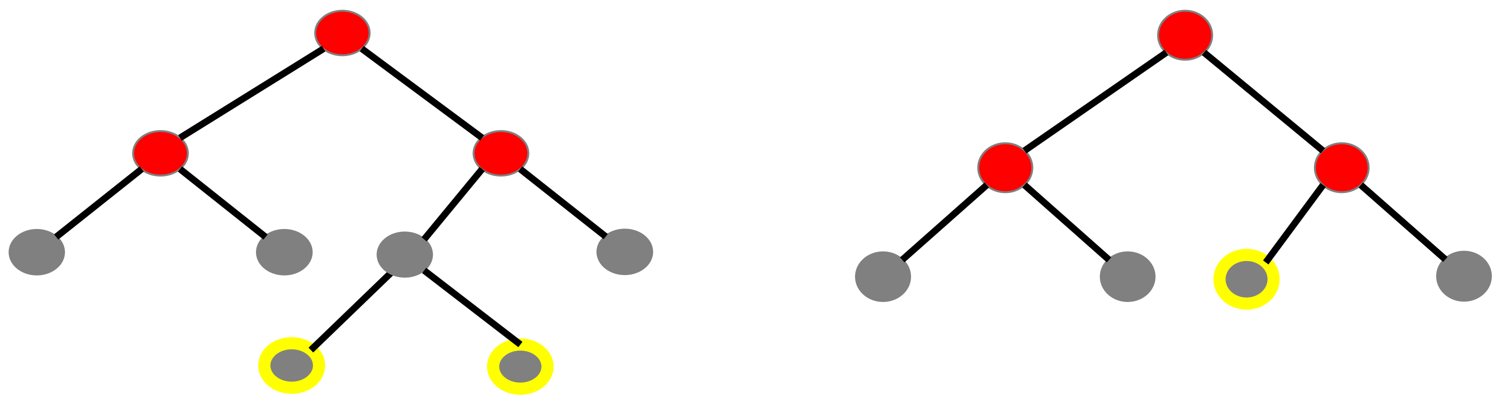
ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

- מה ההבדל בין עץ זה לעץ הנתון?

מקיים את טענת האינדוקציה

יש קדקוד פנימי אחד יותר



m עלים
m-1 פנימיים

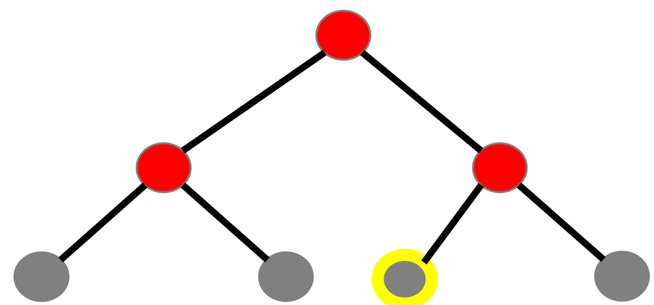
נתון: m+1 עלים

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

- מה ההבדל בין עץ זה לעץ הנתון?

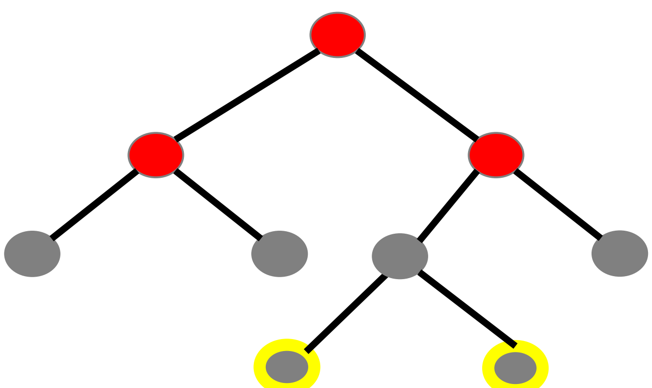
מקיים את טענת האינדוקציה



m עלים

m-1 פנימיים

יש קדקוד פנימי אחד יותר



נתון: m+1 עלים

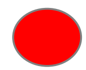
הוכחנו: (m-1)+1 פנימיים

הוכחה באינדוקציה
על מבנה העץ

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

בסיס האינדוקציה

- $m=1$

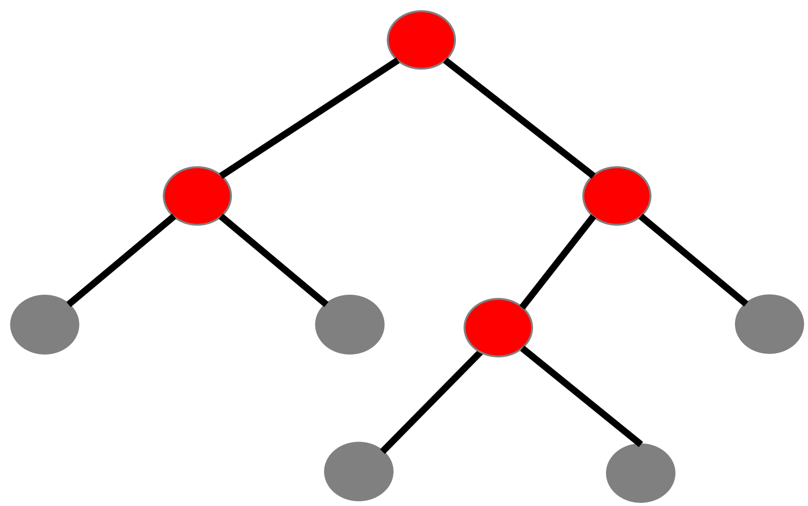


- כמות עלים = 1
- כמות קדקודים פנימיים = 0

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

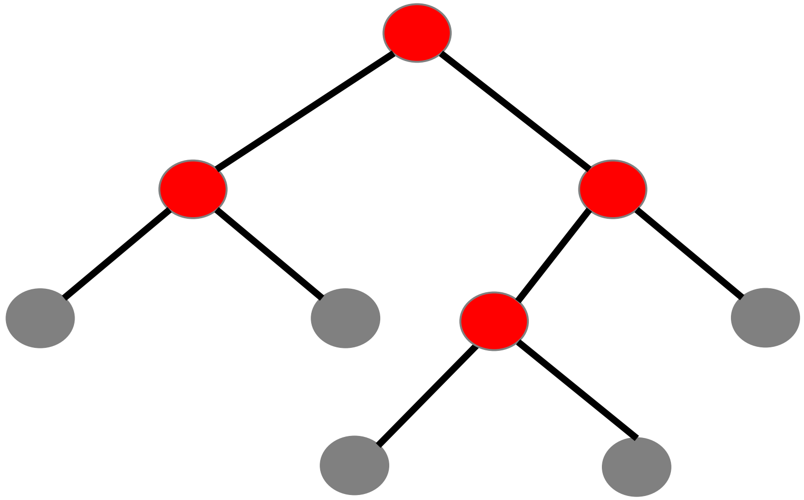
- נניח נכונות לעץ עם $m-1$ עלים או פחות ונוכיח על עץ עם m עלים.



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

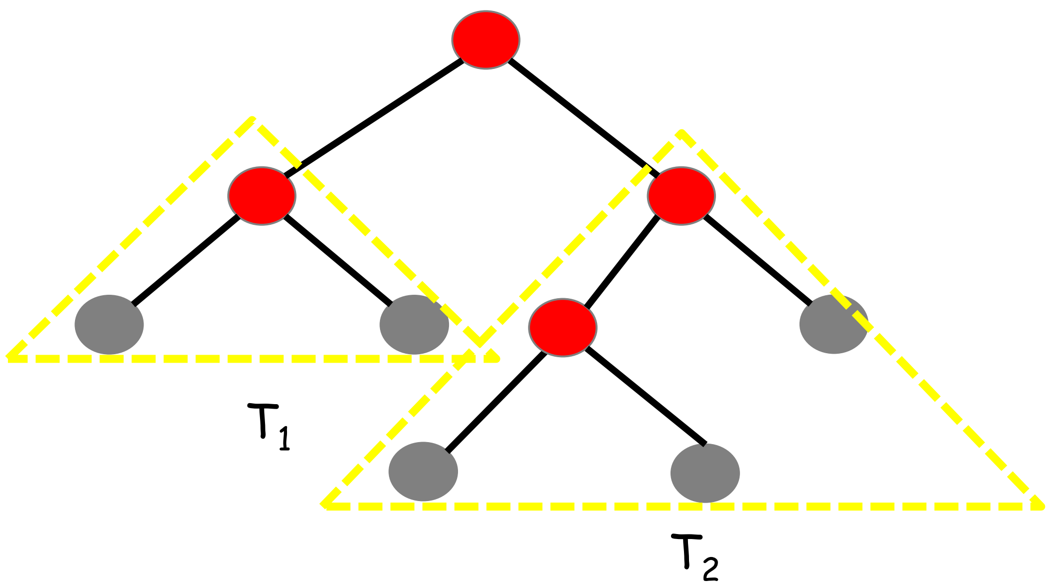
- העץ מלא ולכן לשורש שני בנים.



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

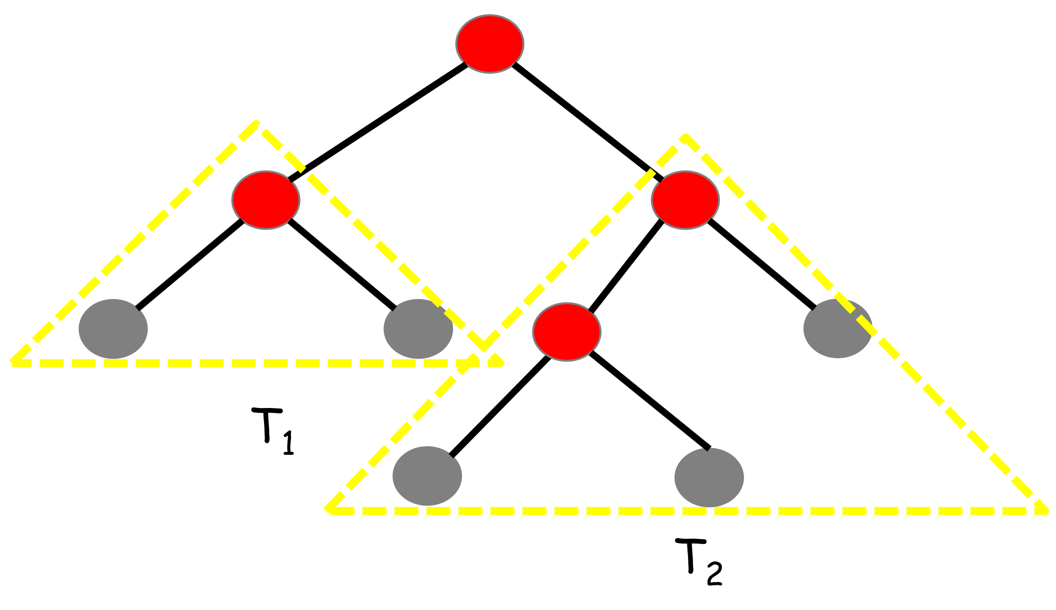
- העץ מלא ולכן לשורש שני בנים.



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

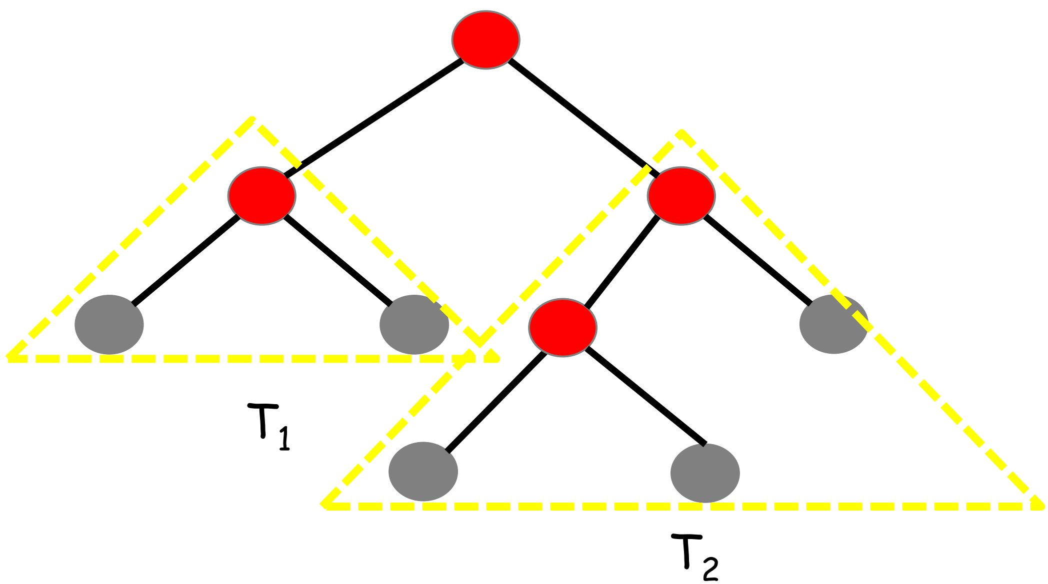
- נסמן ב-m_1 מספר העלים ב-T_1
- נסמן ב-m_2 מספר העלים ב-T_2



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

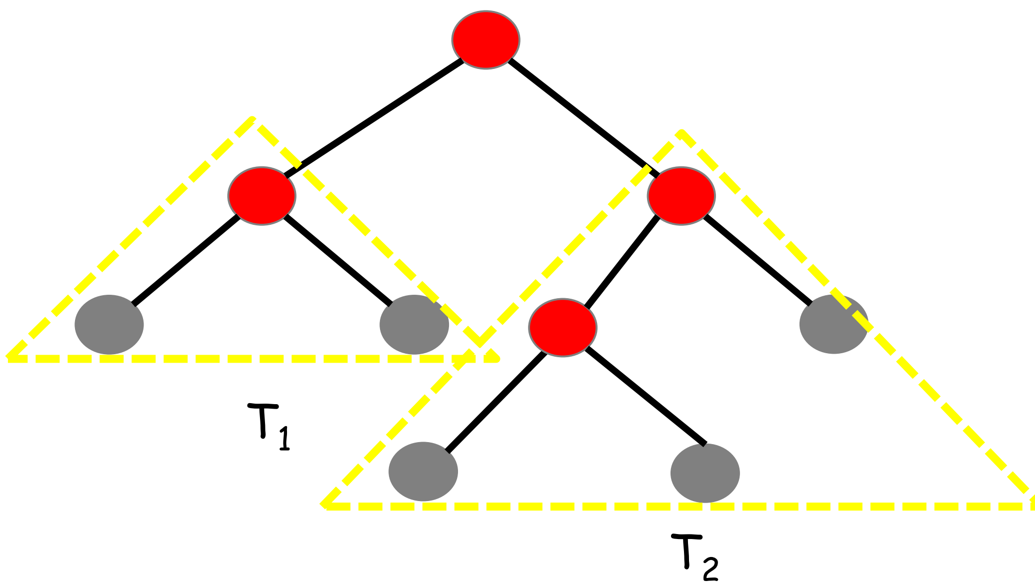
- $m_1<m$
- $m_2<m$



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

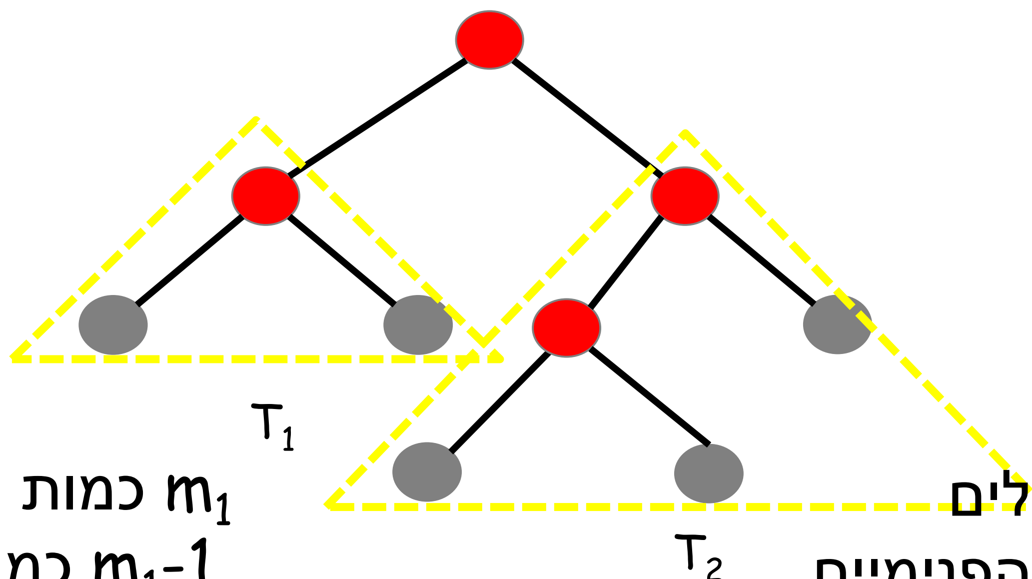
- T_1 מקיים את הנחת האינדוקציה
- T_2 מקיים את הנחת האינדוקציה



ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

- T_1 מקיים את הנחת האינדוקציה
- T_2 מקיים את הנחת האינדוקציה



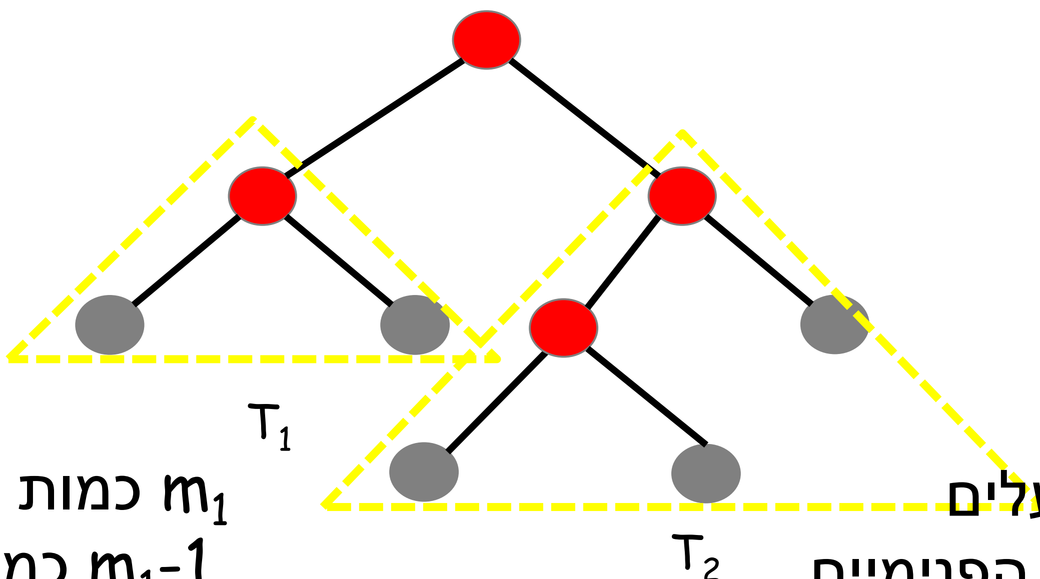
m_1 כמות העלים
m_1-1 כמות הפנימיים

m_2 כמות העלים
m_2-1 כמות הפנימיים

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

- ומה קורה בעץ T?



m_1 כמות העלים
m_1-1 כמות הפנימיים

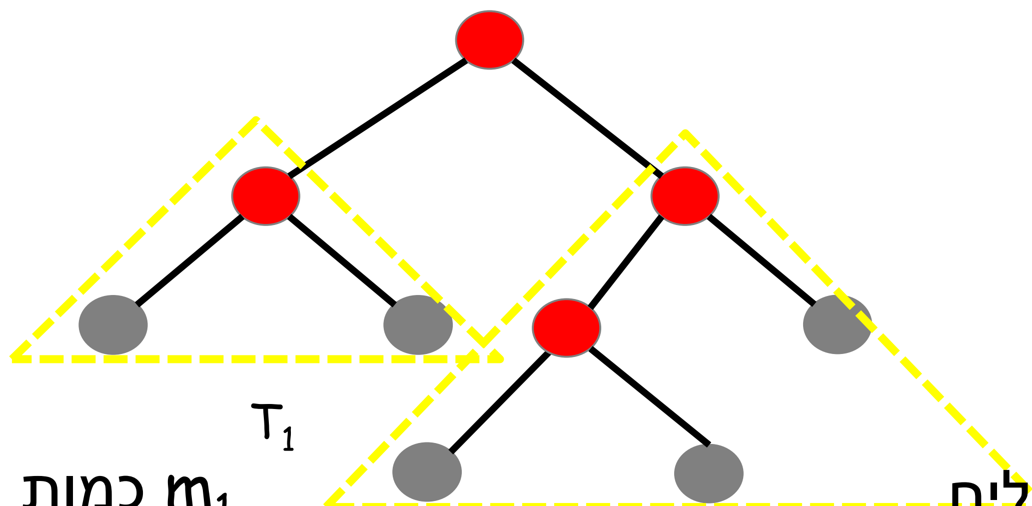
m_2 כמות העלים
m_2-1 כמות הפנימיים

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

צעד האינדוקציה

כמות העלים $= m = m_1 + m_2$

כמות פנימיים $= (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + 1 = m-1$

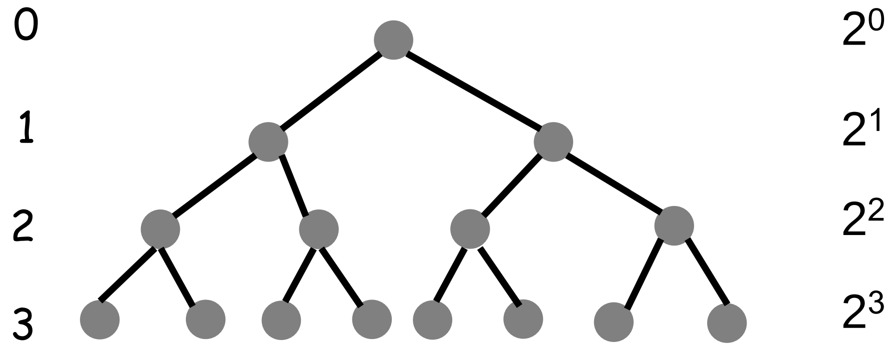


m_1 כמות העלים
m_1-1 כמות הפנימיים

m_2 כמות העלים
m_2-1 כמות הפנימיים

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ בינרי שלם

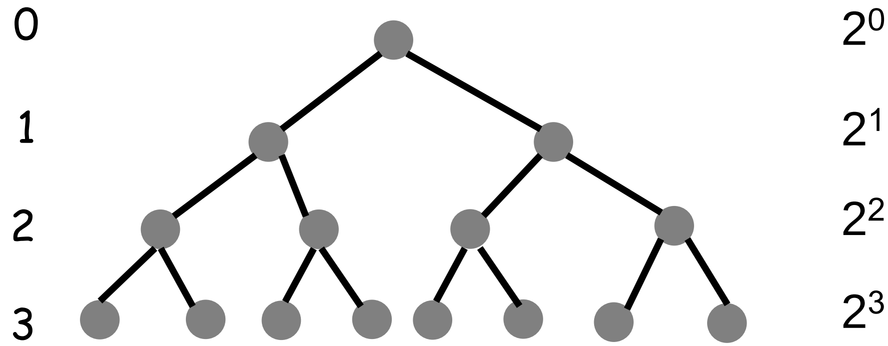


מספר הצמתים בעץ בינארי שלם בגובה h :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + . . . + 2^h = 2^{h+1}-1$$

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ בינרי שלם



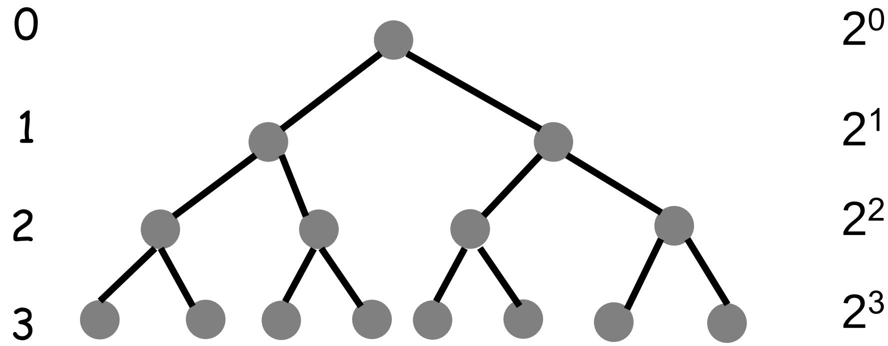
מספר הצמתים בעץ בינארי שלם בגובה h :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + . . . + 2^h = 2^{h+1}-1$$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1111_2=10000_2-1=2^4-1$$

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ בינרי שלם



מספר הצמתים בעץ בינארי שלם בגובה h :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h = 2^{h+1}-1$$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = \underbrace{1111}_2 = \underbrace{10000}_2 -1 = 2^4-1$$

+1

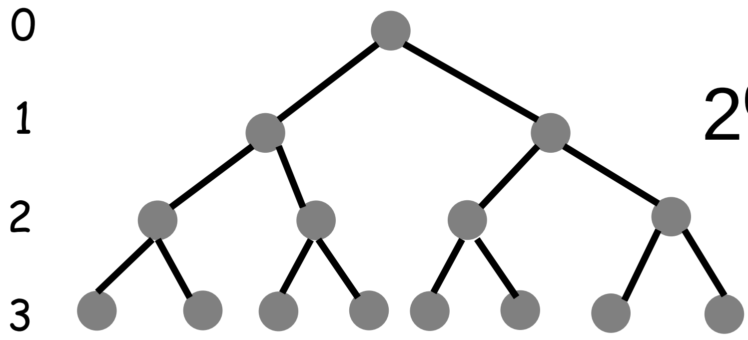
ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
		1	1	1	1	1	1	1	1	1	$=2^0 + \ldots + 2^8$
+										1	
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$=2^9$

$$2^0 + \ldots + 2^8 = 2^9 - 1$$

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ בינרי שלם



מספר הצמתים בעץ בינארי שלם בגובה h :

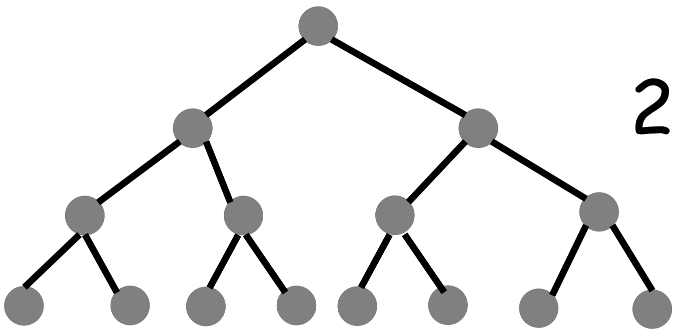
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^h = 2^{h+1}-1$$

נסמן ב-n את מספר הצמתים בעץ ונקבל: $h = log(n+1)-1$

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ בינרי שלם

0
1
2
3



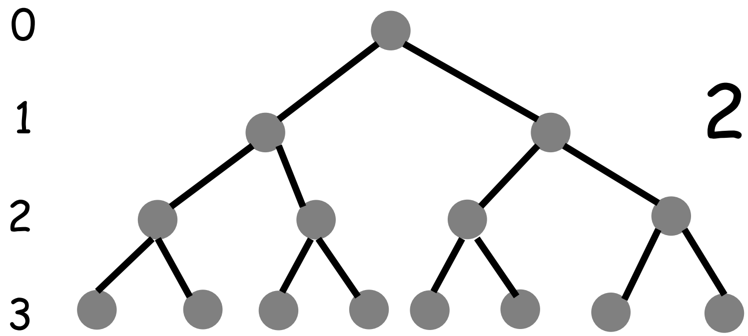
מספר הצמתים בעץ בינארי שלם בגובה h :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h = 2^{h+1}-1$$

נסמן ב-n את מספר הצמתים בעץ:

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ בינרי שלם



מספר הצמתים בעץ בינארי שלם בגובה h :

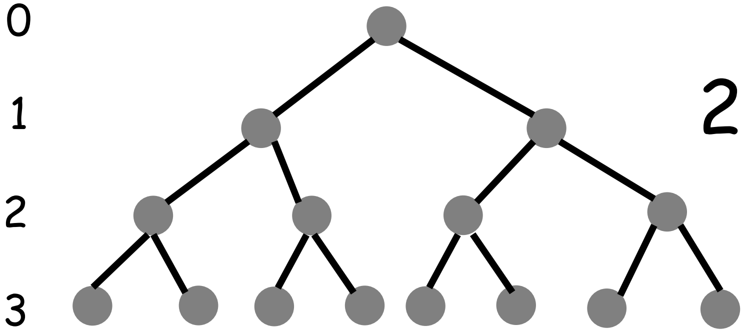
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h = 2^{h+1}-1$$

נסמן ב-n את מספר הצמתים בעץ:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h = 2^{h+1}-1 = n$$

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ בינרי שלם



מספר הצמתים בעץ בינארי שלם בגובה h :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h = 2^{h+1}-1$$

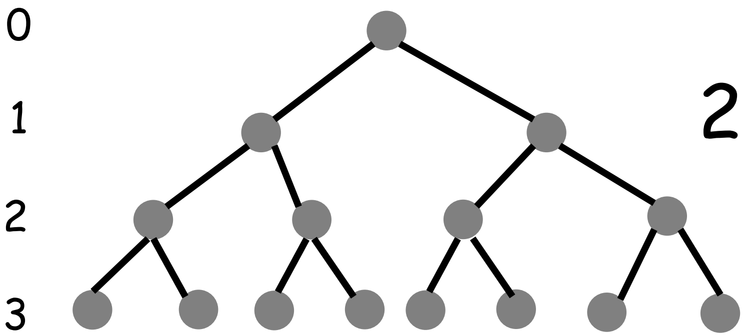
נסמן ב-n את מספר הצמתים בעץ:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h = 2^{h+1}-1 = n$$

$$2^{h+1}-1 = n$$

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ בינרי שלם



מספר הצמתים בעץ בינארי שלם בגובה h :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h = 2^{h+1}-1$$

נסמן ב-n את מספר הצמתים בעץ:

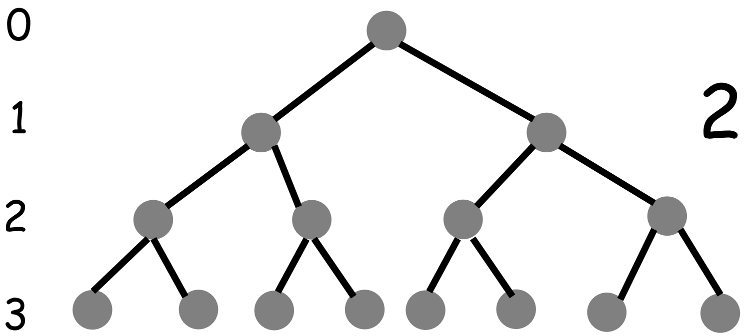
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h = 2^{h+1}-1 = n$$

$$2^{h+1}-1 = n$$

$$2^{h+1} = n + 1$$

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ בינרי שלם



מספר הצמתים בעץ בינארי שלם בגובה h :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h = 2^{h+1}-1$$

נסמן ב-n את מספר הצמתים בעץ:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h = 2^{h+1}-1 = n$$

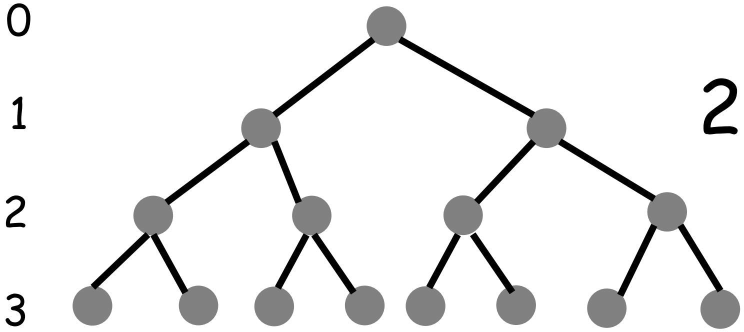
$$2^{h+1}-1 = n$$

$$2^{h+1} = n + 1$$

$$h + 1 = \log(n+1)$$

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ בינרי שלם



מספר הצמתים בעץ בינארי שלם בגובה h :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h = 2^{h+1}-1$$

נסמן ב-n את מספר הצמתים בעץ:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h = 2^{h+1}-1 = n$$

$$2^{h+1}-1 = n$$

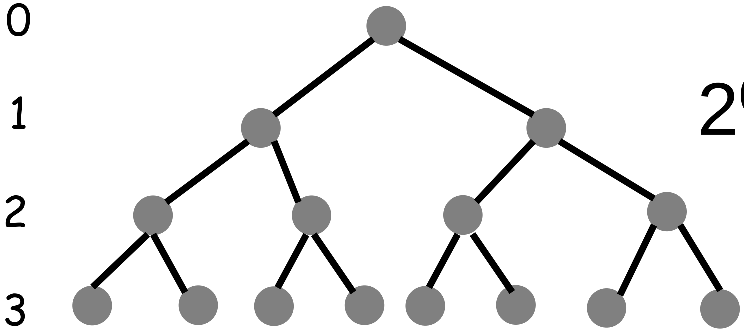
$$2^{h+1} = n + 1$$

$$h + 1 = \log(n+1)$$

$$h = \log(n+1) - 1$$

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ בינרי שלם



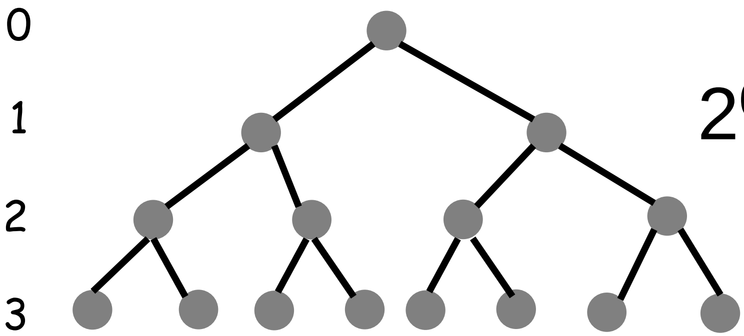
מספר הצמתים בעץ בינארי שלם בגובה h :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + . . . + 2^h = 2^{h+1}-1$$

נסמן ב-n את מספר הצמתים בעץ וקיבלנו: $h = log(n+1)-1$

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ בינרי שלם



מספר הצמתים בעץ בינארי שלם בגובה h :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h = 2^{h+1}-1$$

נסמן ב-n את מספר הצמתים בעץ וקיבלנו: $h = \log(n+1)-1$

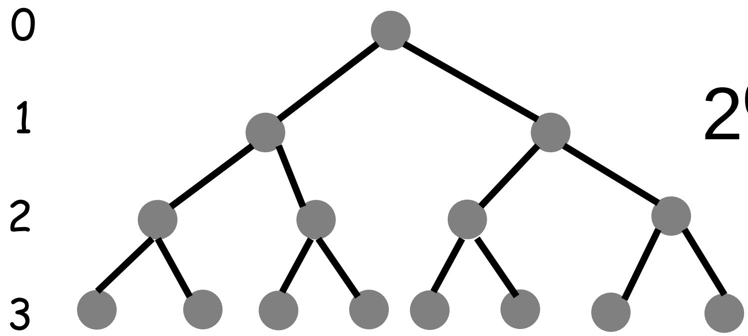
בעץ בינארי שלם מתקיים: $h=\theta(\log n)$

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ בינרי שלם

מספר הצמתים בעץ בינארי שלם בגובה h :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h = 2^{h+1}-1$$



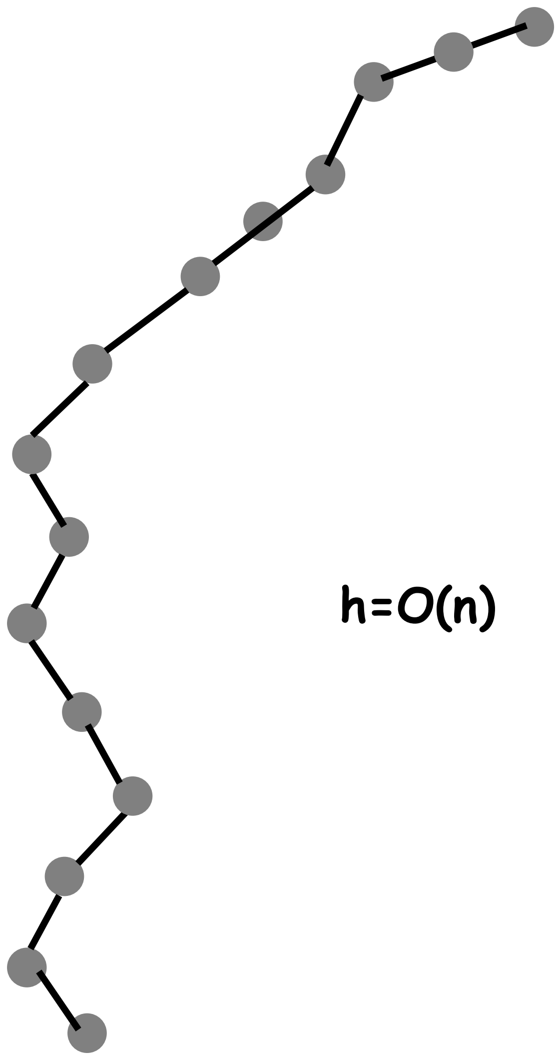
נסמן ב-n את מספר הצמתים בעץ וקיבלנו: $h = log(n+1)-1$

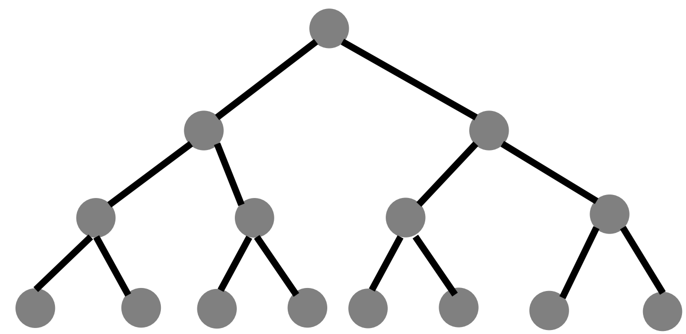
בעץ בינארי שלם מתקיים: $h=\theta(\log n)$

בעץ בינארי כלשהו מתקיים:

$h=\Omega(\log n)$ **$h=O(n)$**

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי





$h=O(n)$ **$h=\Omega(\log n)$**

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי