Divide and Conquer שיטת הפרד ומשול

- הפרד: פצל את הבעיה לכמה תת-בעיות זרות.
- משול: פתור את תתי-הבעיות באופן רקורסיבי.
- צרף: צרף את הפתרונות של תתי-הבעיות לפתרון לבעיה המקורית.

עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

דוגמא פשוטה

הקלט: סדרה S של n איברים.

$f(s_1, \ldots, s_n, n)$

    if $n>1$ then

        $f(s_1, \ldots, s_{n/2}, n/2)$

        $f(s_{(n/2)+1}, \ldots, s_n, n/2)$

    print(s_n)

<u>האלגוריתם</u>:

- הפרד: פצל את S לשתי סדרות S_1, S_2 כל אחת עם $n/2$ איברים.
- משול: קרא ל- f עם S_1 ו- S_2 באופן רקורסיבי.
- צרף: אין.

דוגמא פשוטה

הקלט: סדרה S של **n** איברים.

$f(s_1, \ldots, s_n, n)$
  if $n>1$ then
    $f(s_1, \ldots, s_{n/2}, n/2)$
    $f(s_{(n/2)+1}, \ldots, s_n, n/2)$
  print(s_n)

<u>ניתוח</u>: מהו זמן הריצה? איך מנתחים?

דוגמא פשוטה

הקלט: סדרה S של n איברים.

$T(n)$ $f(s_1, \ldots, s_n, n)$

1   if $n>1$ then

$T(n/2)$ $f(s_1, \ldots, s_{n/2}, n/2)$

$T(n/2)$ $f(s_{(n/2)+1}, \ldots, s_n, n/2)$

1   print(s_n)

<u>ניתוח</u>: מהו זמן הריצה? איך מנתחים?

דוגמא פשוטה

הקלט: סדרה S של n איברים.

```
f(s_1, ..., s_n, n)
  if n>1 then
     f(s_1, ..., s_{n/2}, n/2)
     f(s_{(n/2)+1}, ..., s_n, n/2)
  print(s_n)
```

ניתוח: מהו זמן הריצה? איך מנתחים?

נסמן:

$T(n)$ הוא זמן הריצה של f על סדרה באורך n

ולכן

$$T(n) = \begin{cases} 2 & \text{אורך הסדרה 1} \\ 2T(n/2)+2 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פתרון נוסחת נסיגה

$T(n)$ הוא זמן הריצה של f על סדרה באורך n

$$T(n) = \begin{cases} 2 & \text{אורך הסדרה 1} \\ 2T(n/2)+2 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פתרון נוסחת נסיגה

$T(n)$ הוא זמן הריצה של f על סדרה באורך n

$$T(n) = \begin{cases} 2 & \text{אורך הסדרה } 1 \\ 2T(n/2)+2 & \text{אחרת} \end{cases}$$

רוצים למצוא נוסחא **סגורה**, לא נוסחא התלויה בעצמה

דוגמא: $T(n)=n,\ T(n)=5\log n,\ T(n)=7n^2$

פתרון נוסחת נסיגה

$T(n)$ הוא זמן הריצה של f על סדרה באורך n

$$T(n) = \begin{cases} 2 & \text{אורך הסדרה 1} \\ 2T(n/2)+2 & \text{אחרת} \end{cases}$$

רוצים למצוא נוסחא **סגורה**, לא נוסחא התלויה בעצמה

דוגמא: $T(n)=n,\ T(n)=5\log n,\ T(n)=7n^2$

איך פותרים נוסחת נסיגה?

כלומר - איך הופכים אותה לנוסחא סגורה?

פתרון נוסחת נסיגה

$T(n)$ הוא זמן הריצה של f על סדרה באורך n

$$T(n) = \begin{cases} 2 & \text{1 אורך הסדרה} \\ 2T(n/2)+2 & \text{אחרת} \end{cases}$$

<u>כמה אפשרויות:</u>

1. עץ רקורסיה
2. שיטת האיטרציה
3. שיטת האב
4. שיטת החלפת משתנים
5. ...

עץ רקורסיה

$$T(n) = 2T(n/2)+2$$

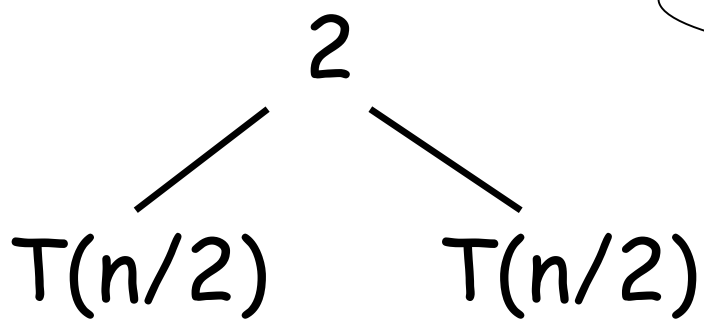
עץ רקורסיה

$$T(n) = 2T(n/2)+2$$

2

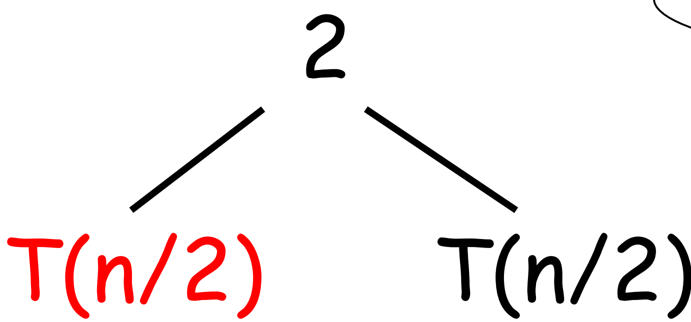
עץ רקורסיה

$$T(n) = 2T(n/2)+2$$



עץ רקורסיה

$$T(n) = 2T(n/2)+2$$



עץ רקורסיה

$$T(n) = 2T(n/2)+2$$

$$T(n/2) = 2T(n/4)+2$$

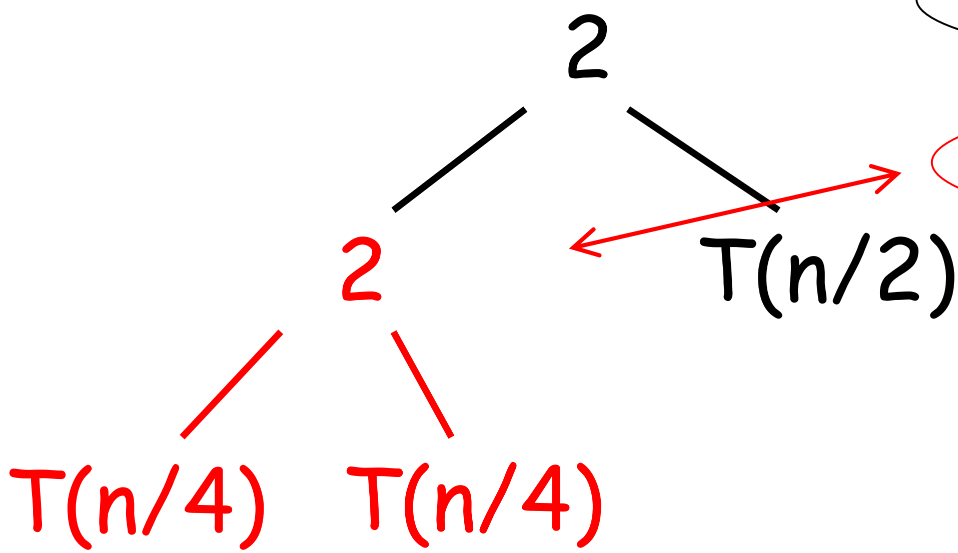
$$2$$

$$T(n/2) \qquad T(n/2)$$

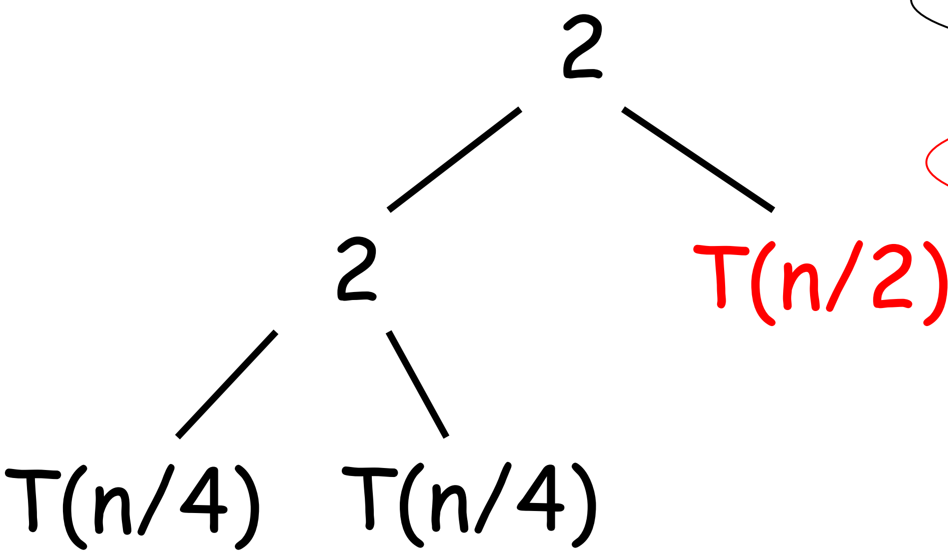
עץ רקורסיה

$$T(n) = 2T(n/2)+2$$

$$T(n/2) = 2T(n/4)+2$$



עץ רקורסיה



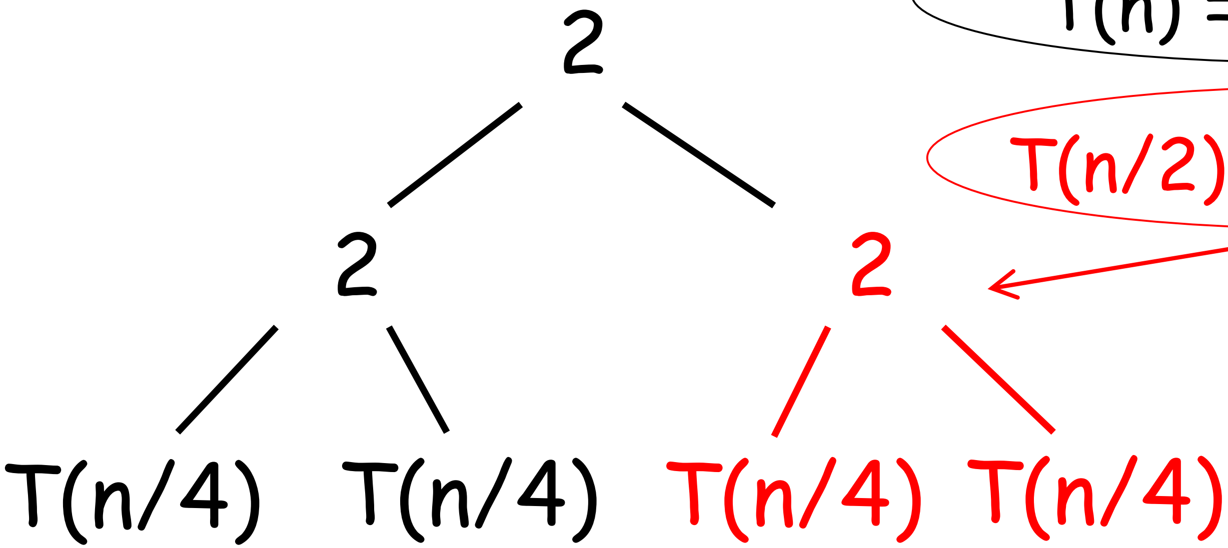
$$T(n) = 2T(n/2)+2$$

$$T(n/2) = 2T(n/4)+2$$

עץ רקורסיה

$$T(n) = 2T(n/2)+2$$

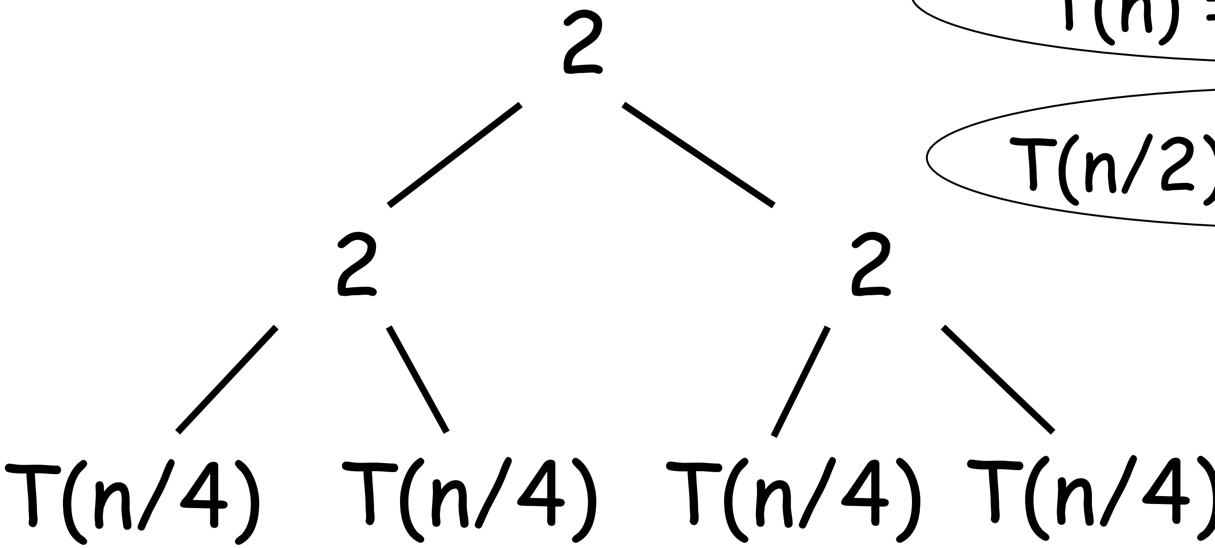
$$T(n/2) = 2T(n/4)+2$$



עץ רקורסיה

$T(n) = 2T(n/2)+2$

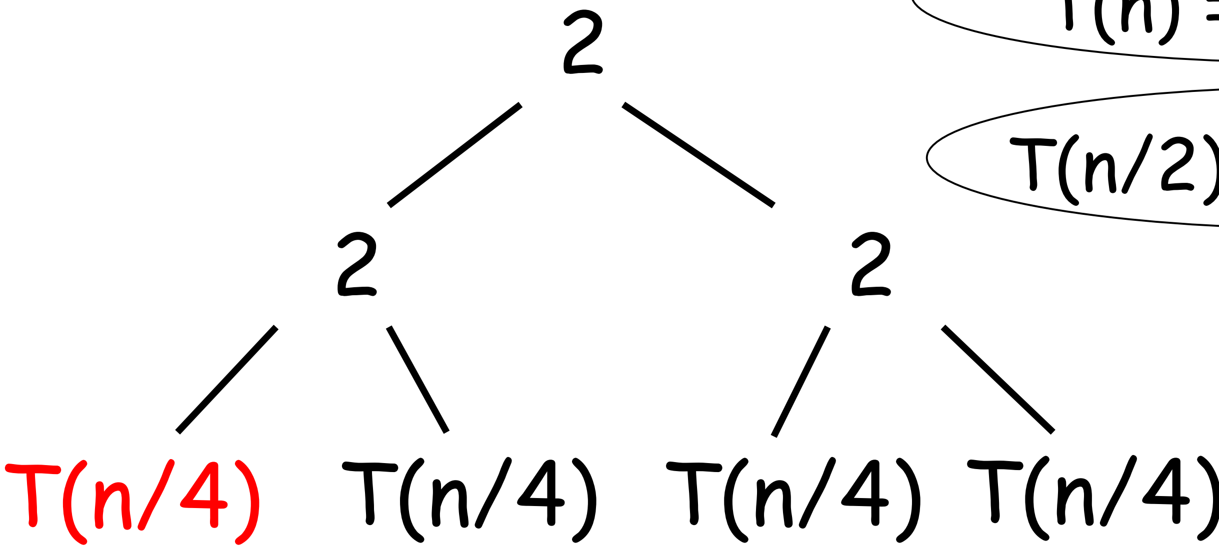
$T(n/2) = 2T(n/4)+2$



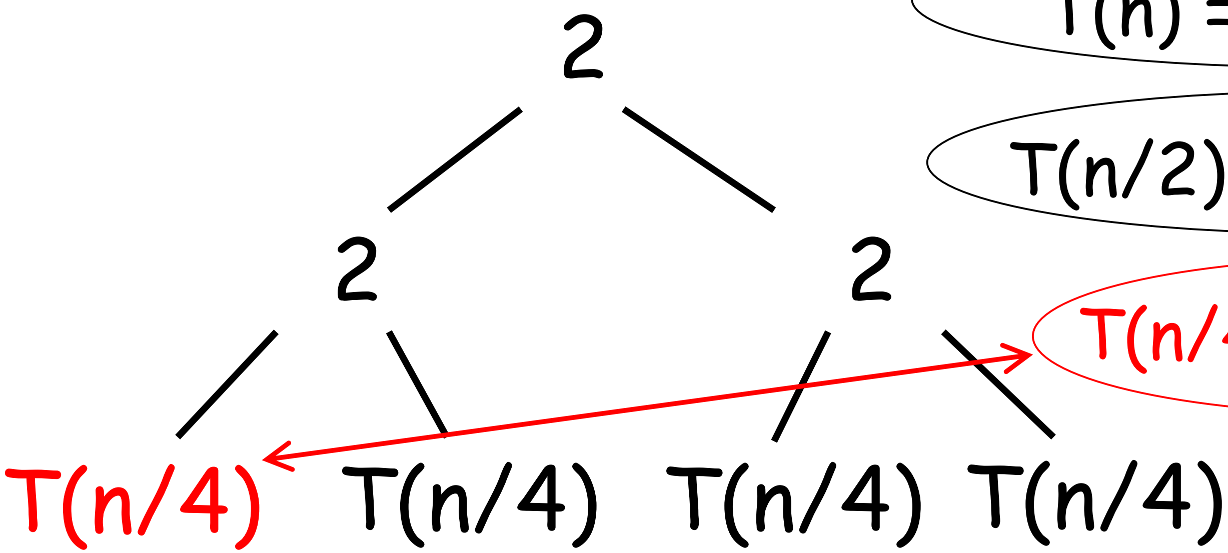
עץ רקורסיה

$$T(n) = 2T(n/2)+2$$

$$T(n/2) = 2T(n/4)+2$$



עץ רקורסיה



$T(n) = 2T(n/2)+2$

$T(n/2) = 2T(n/4)+2$

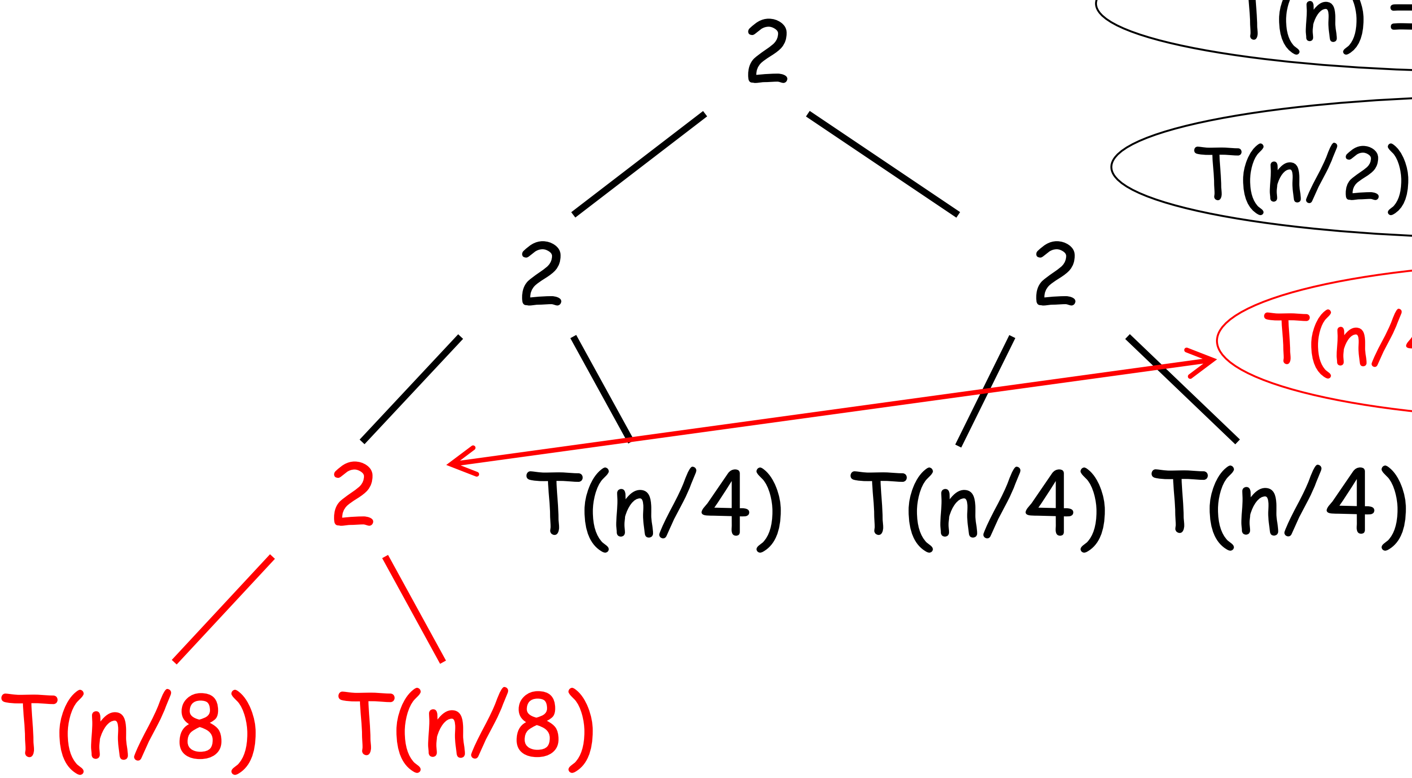
$T(n/4) = 2T(n/8)+2$

עץ רקורסיה

$T(n) = 2T(n/2)+2$

$T(n/2) = 2T(n/4)+2$

$T(n/4) = 2T(n/8)+2$

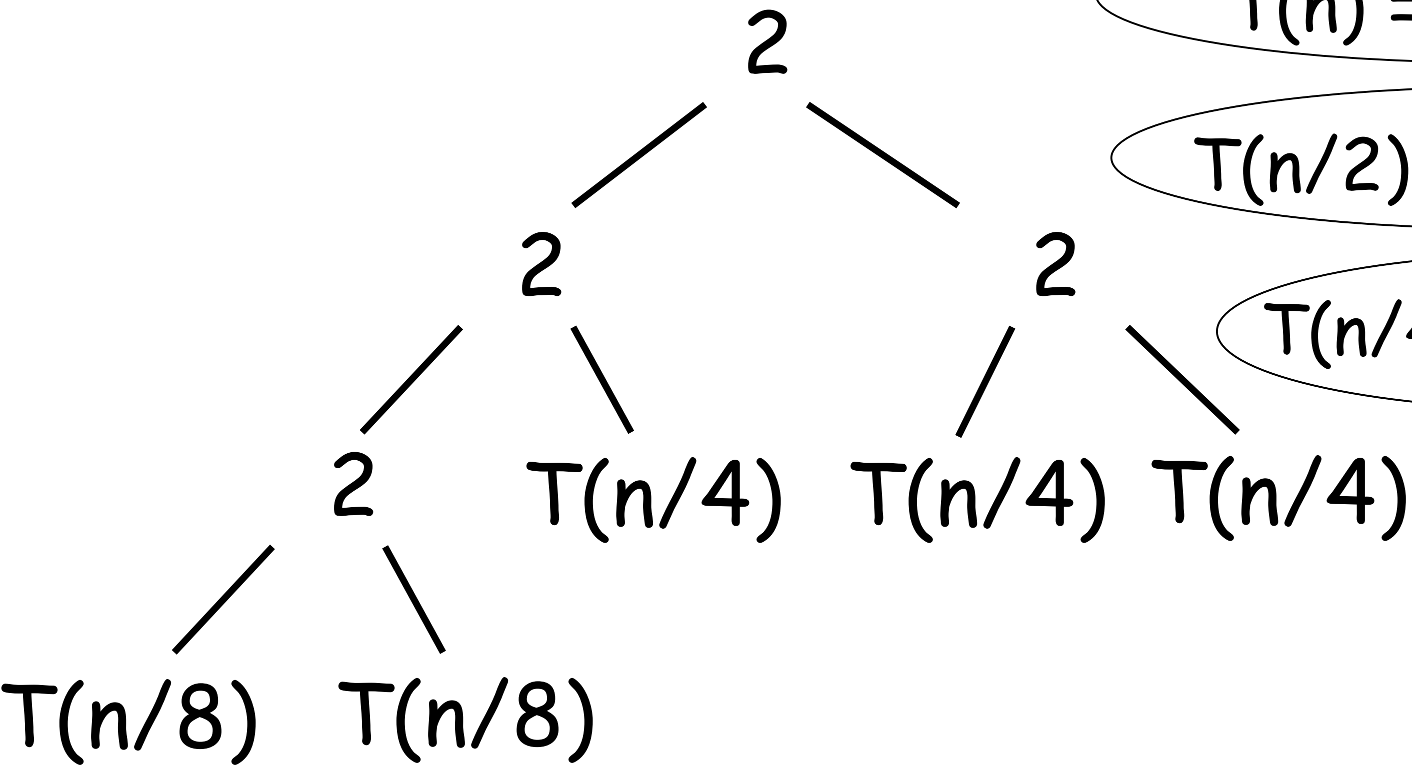


עץ רקורסיה

$$T(n) = 2T(n/2)+2$$

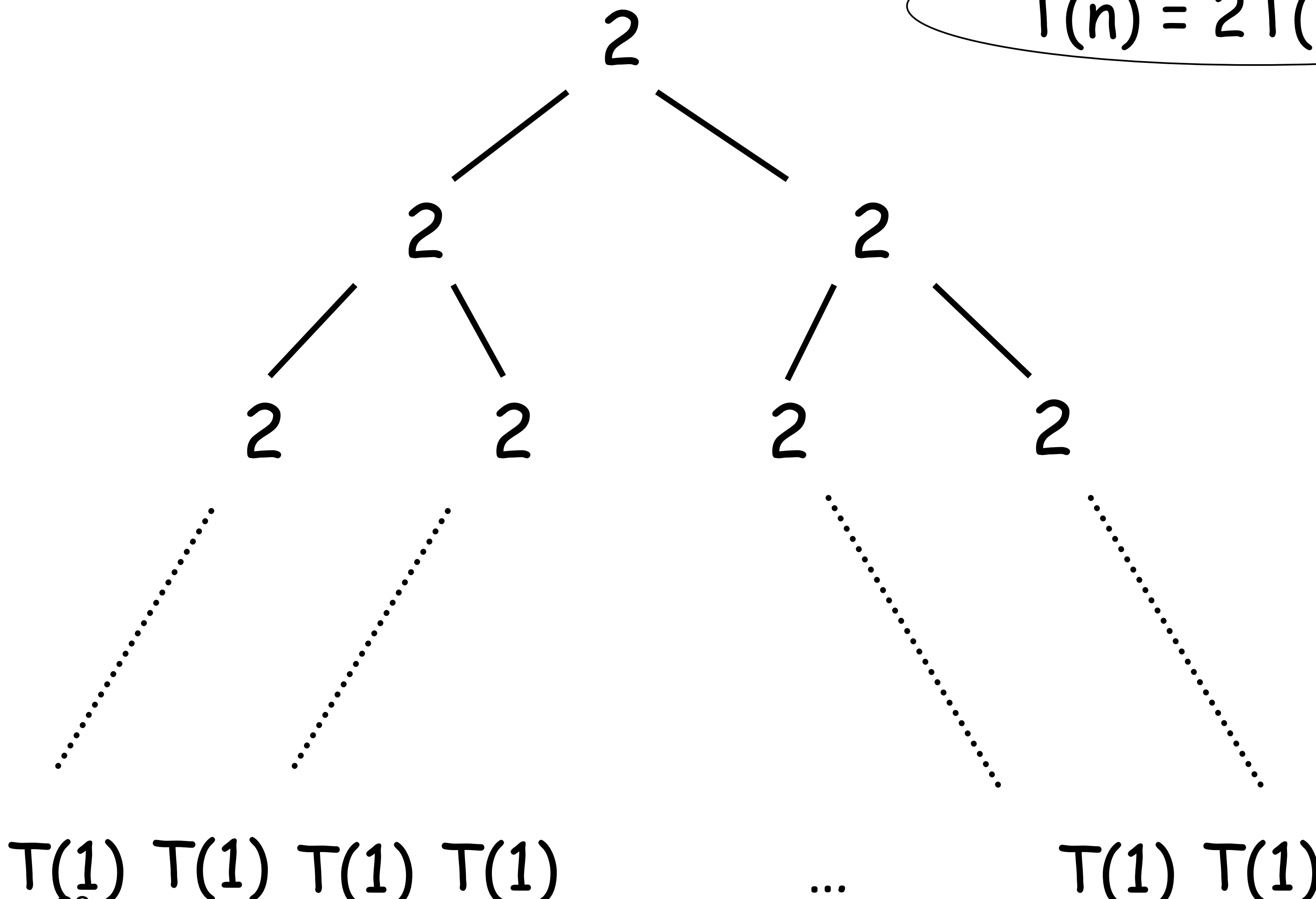
$$T(n/2) = 2T(n/4)+2$$

$$T(n/4) = 2T(n/8)+2$$



עץ רקורסיה

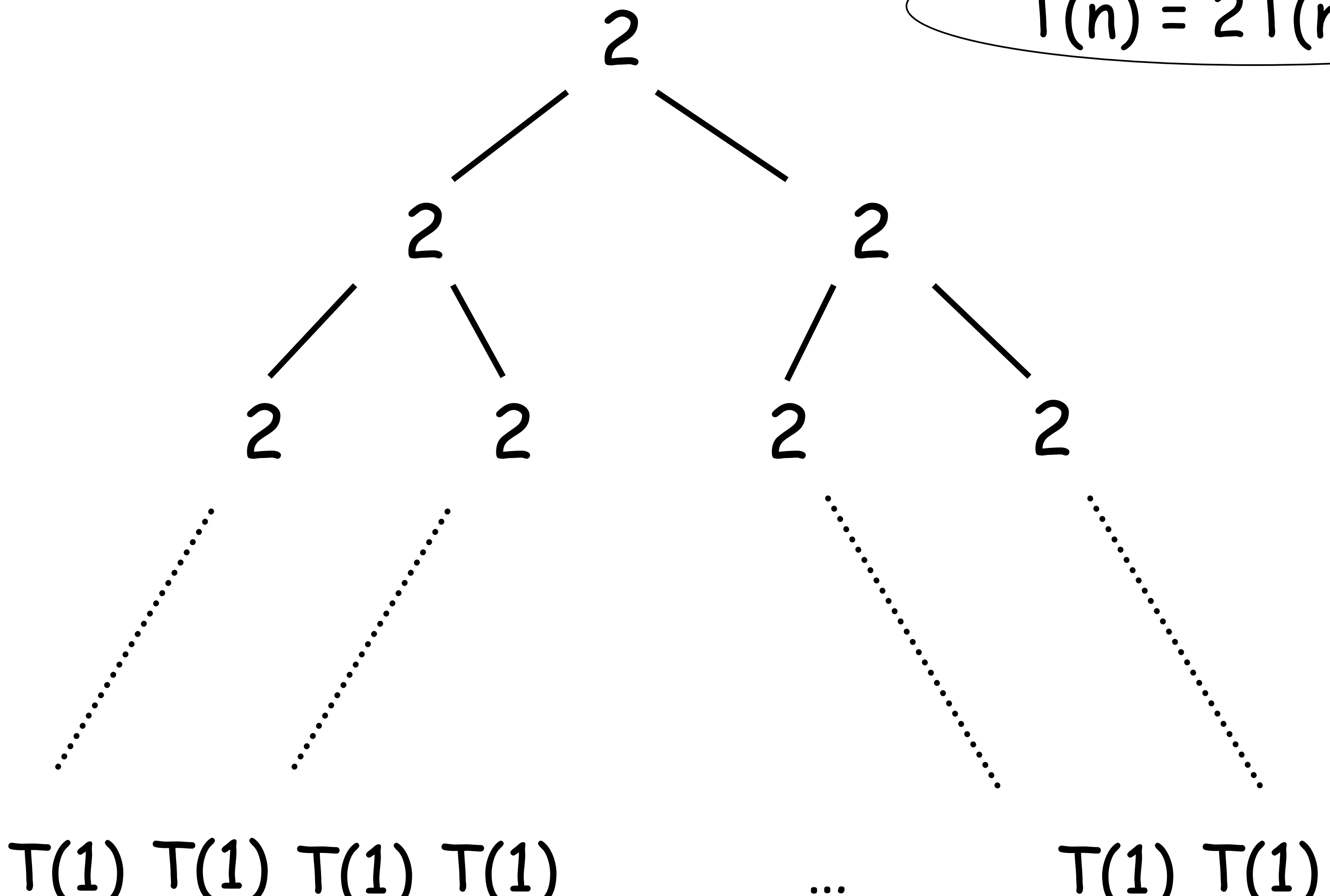
$$T(n) = 2T(n/2)+2$$



עץ רקורסיה

$T(1) = 2$

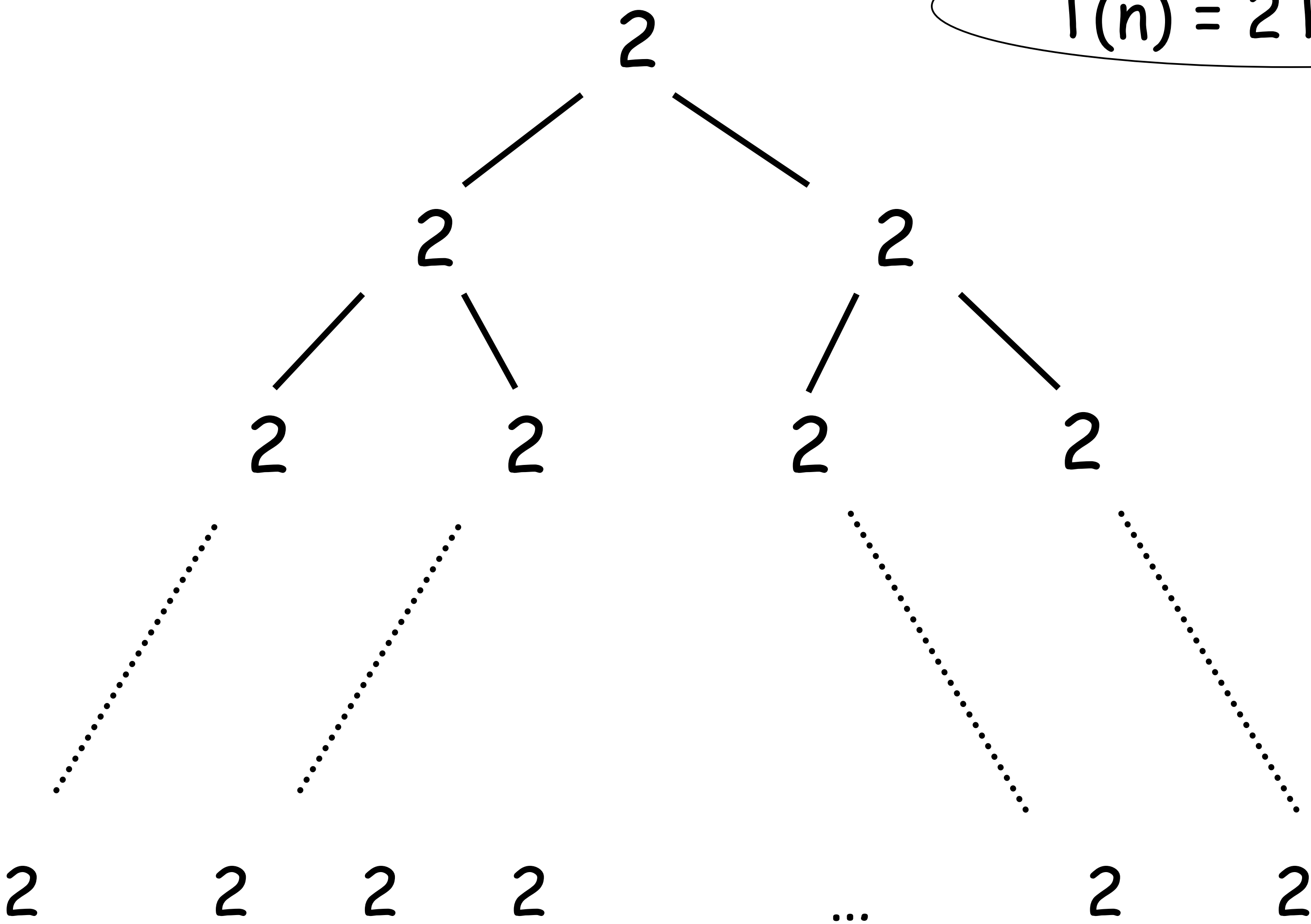
$T(n) = 2T(n/2)+2$



עץ רקורסיה

$T(1) = 2$

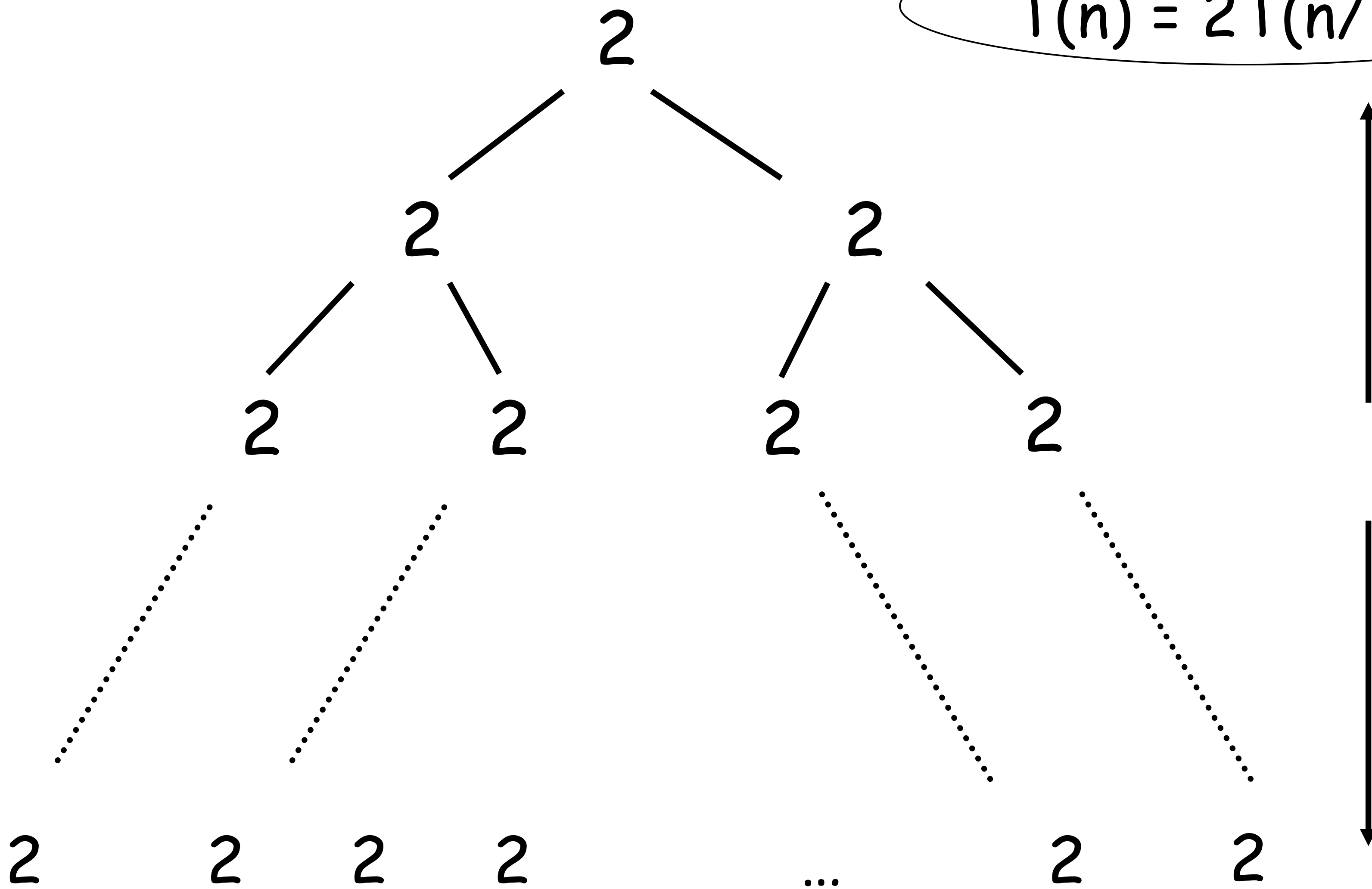
$T(n) = 2T(n/2)+2$



עץ רקורסיה

$$T(1) = 2$$

$$T(n) = 2T(n/2)+2$$

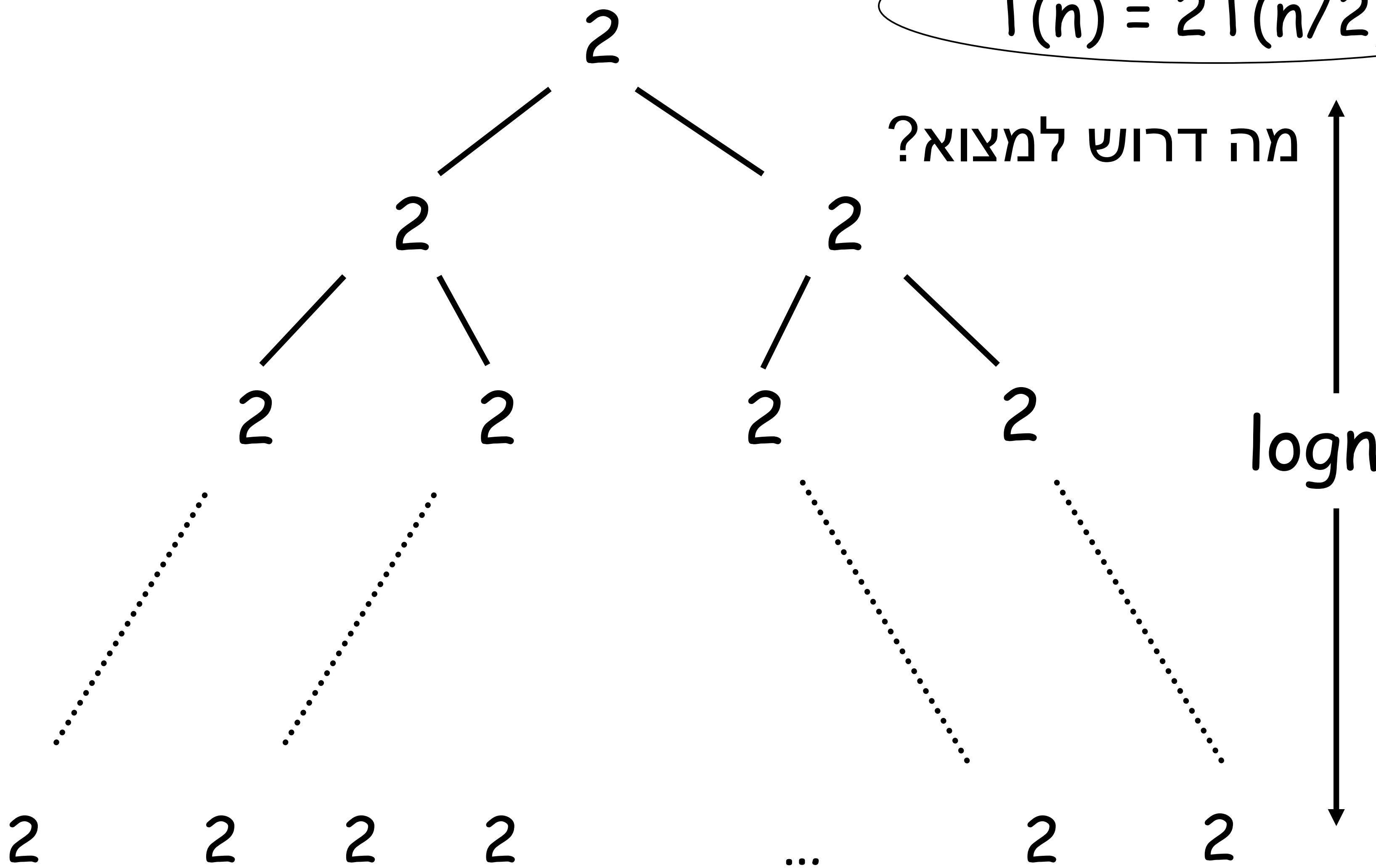


עץ רקורסיה

$T(1) = 2$

$T(n) = 2T(n/2)+2$

מה דרוש למצוא?

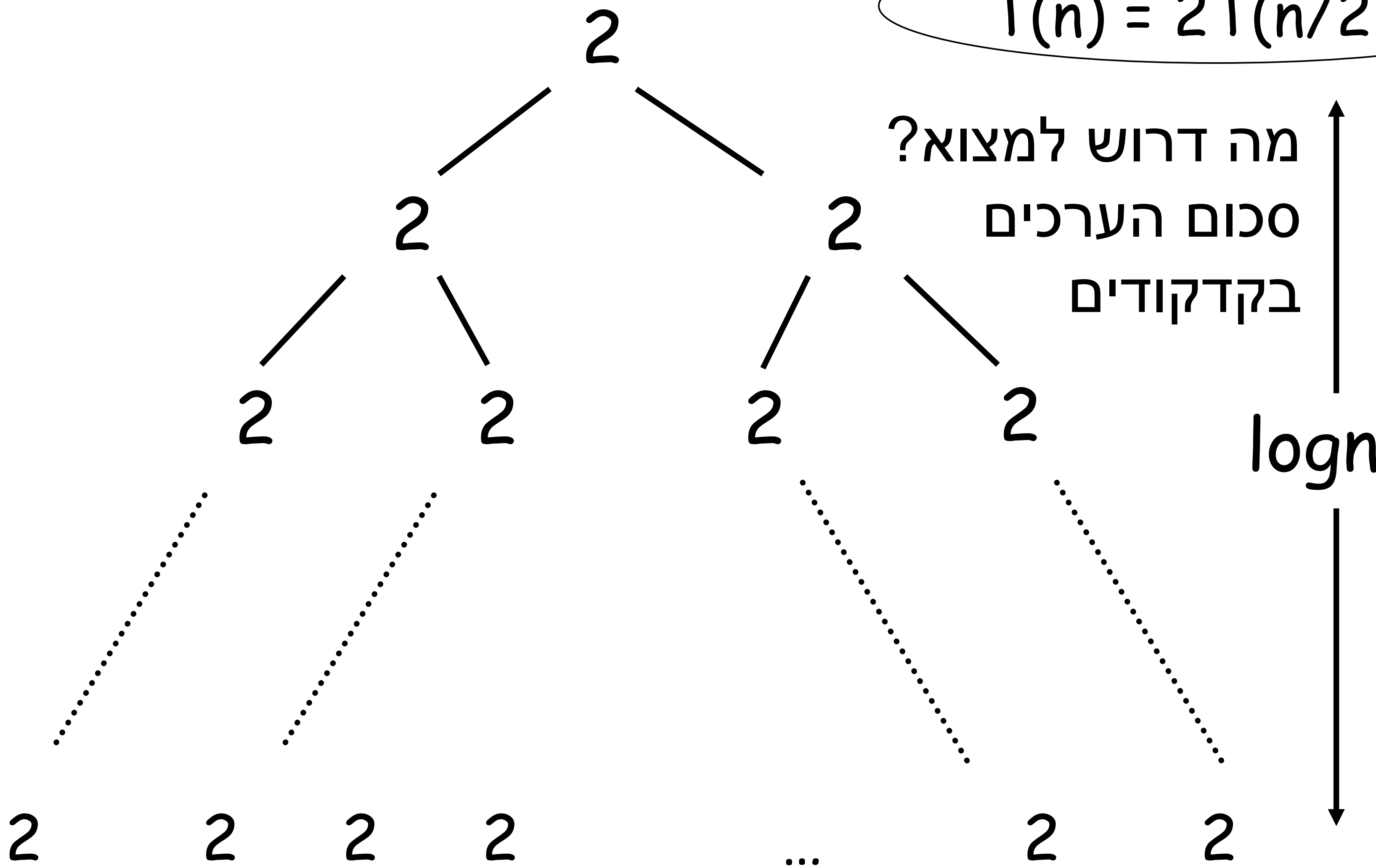


עץ רקורסיה

$T(1) = 2$

$T(n) = 2T(n/2)+2$

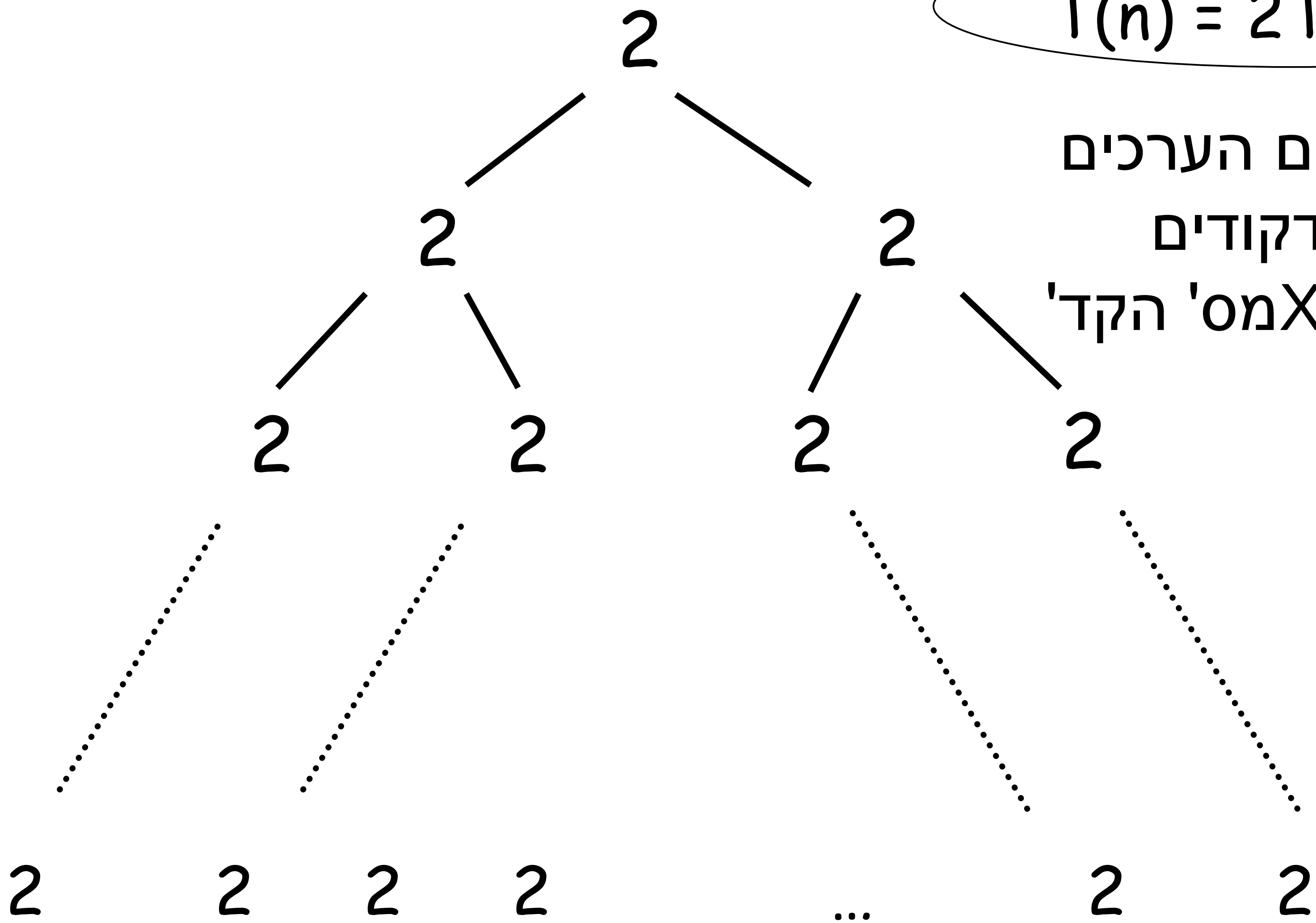
מה דרוש למצוא?
סכום הערכים
בקדקודים



עץ רקורסיה

$T(1) = 2$

$T(n) = 2T(n/2)+2$



סכום הערכים
בקדקודים
=2Xמס' הקד'

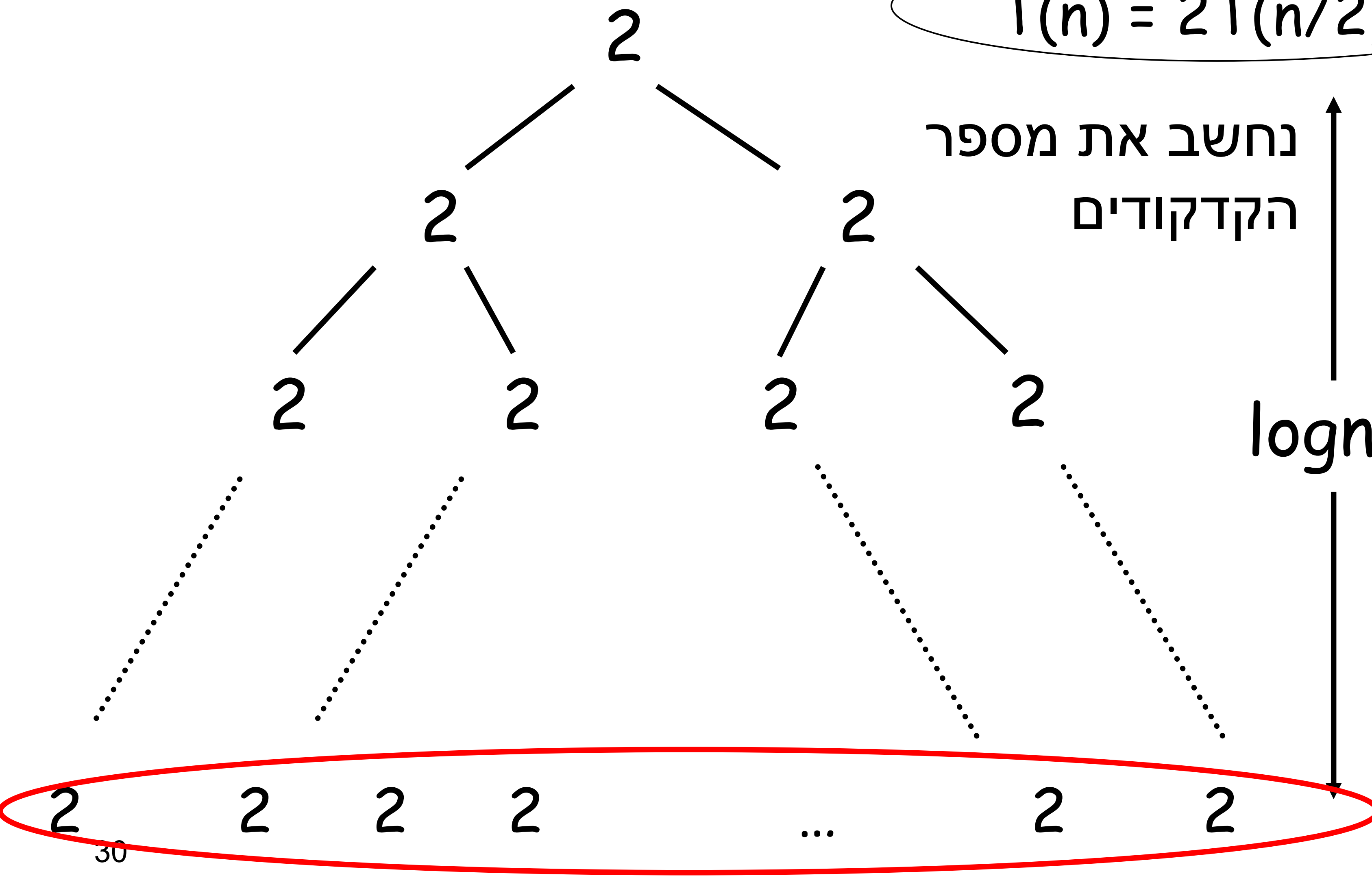
logn

עץ רקורסיה

$T(1) = 2$

$T(n) = 2T(n/2)+2$

נחשב את מספר הקדקודים

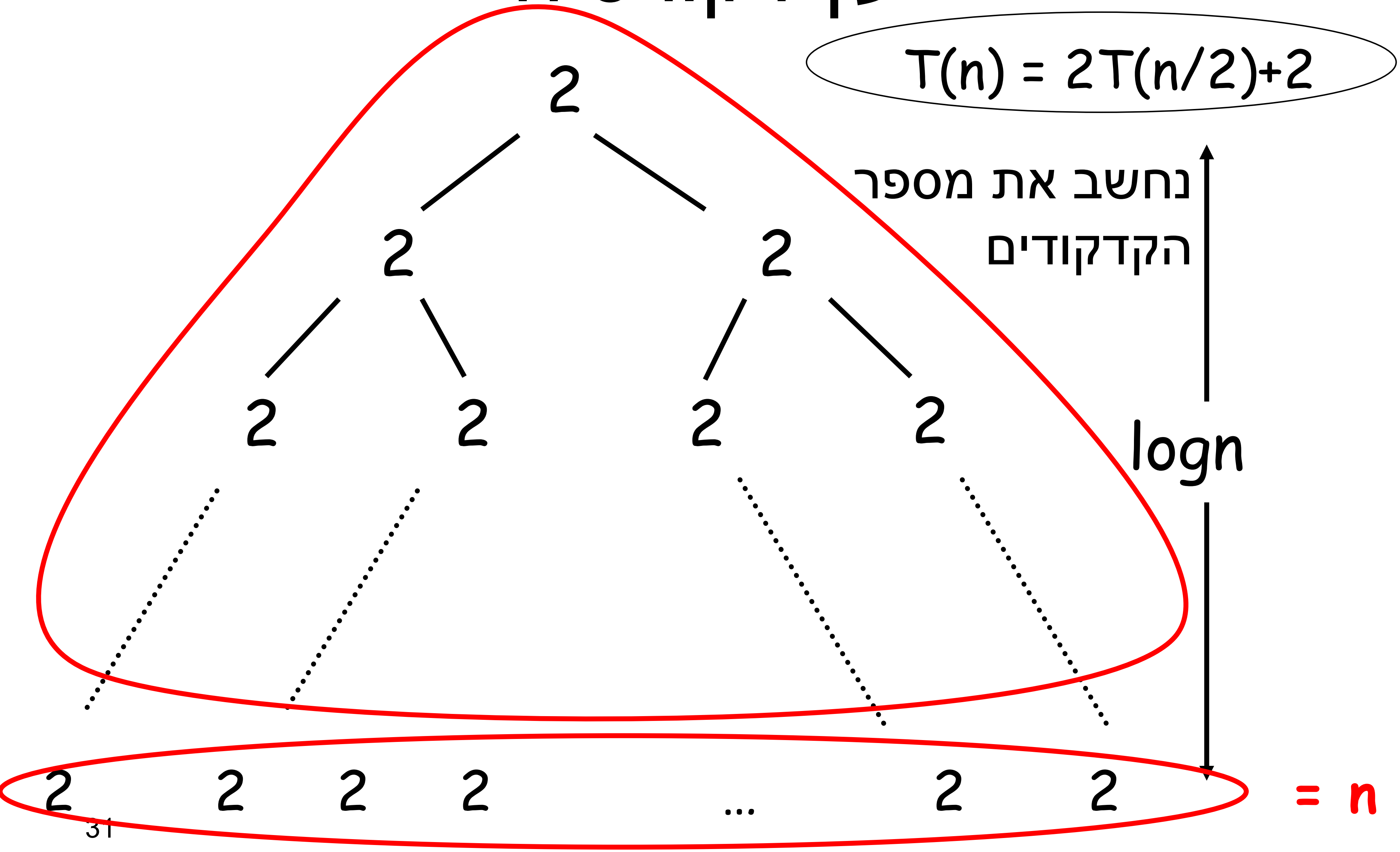


$= n$

עץ רקורסיה

$T(1) = 2$

$T(n) = 2T(n/2)+2$

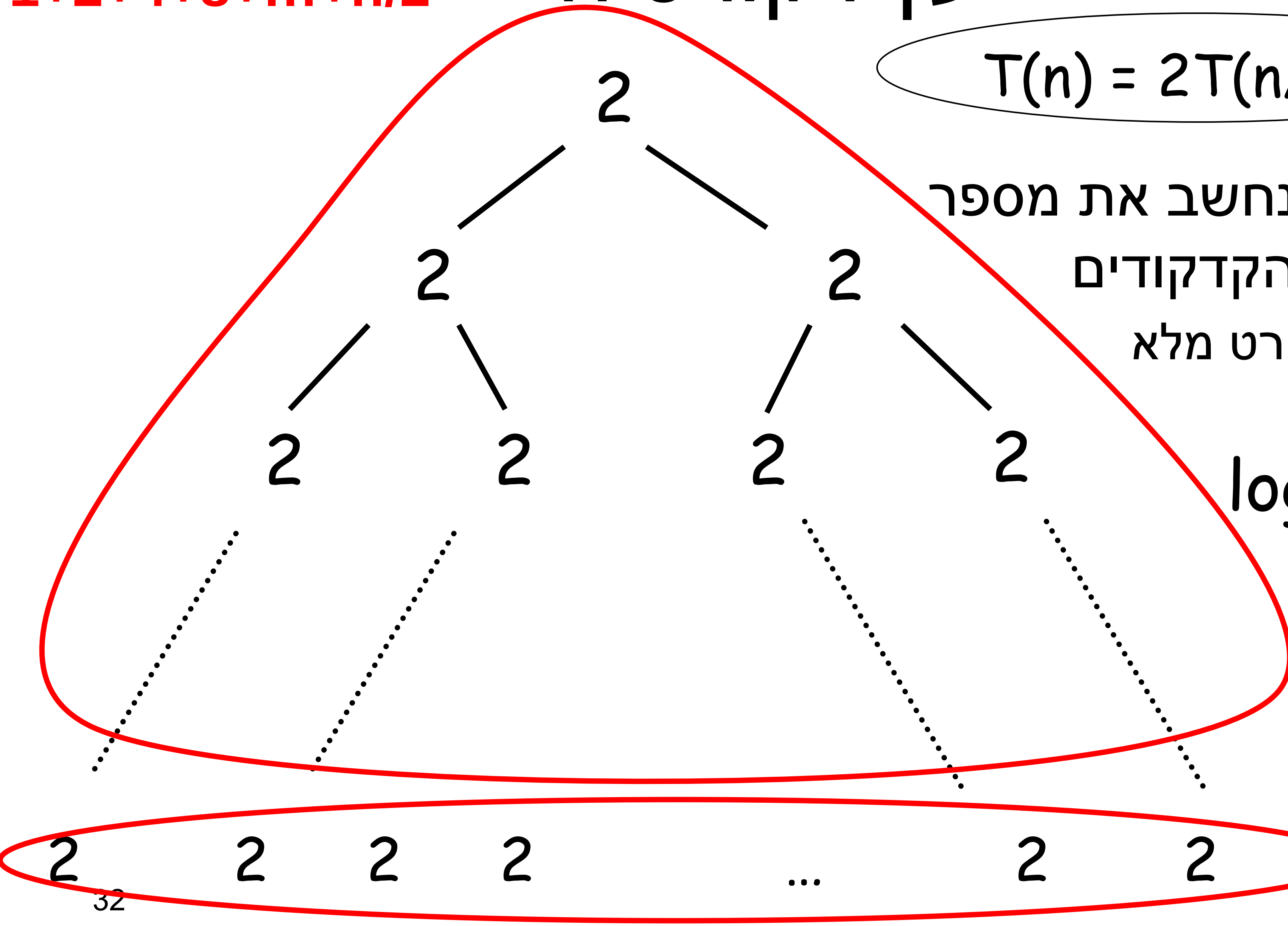


עץ רקורסיה

$1+2+4+8+\ldots+n/2 \;=$

$T(1) = 2$

$T(n) = 2T(n/2)+2$



נחשב את מספר הקדקודים $= n-1$

עץ שלם בפרט מלא

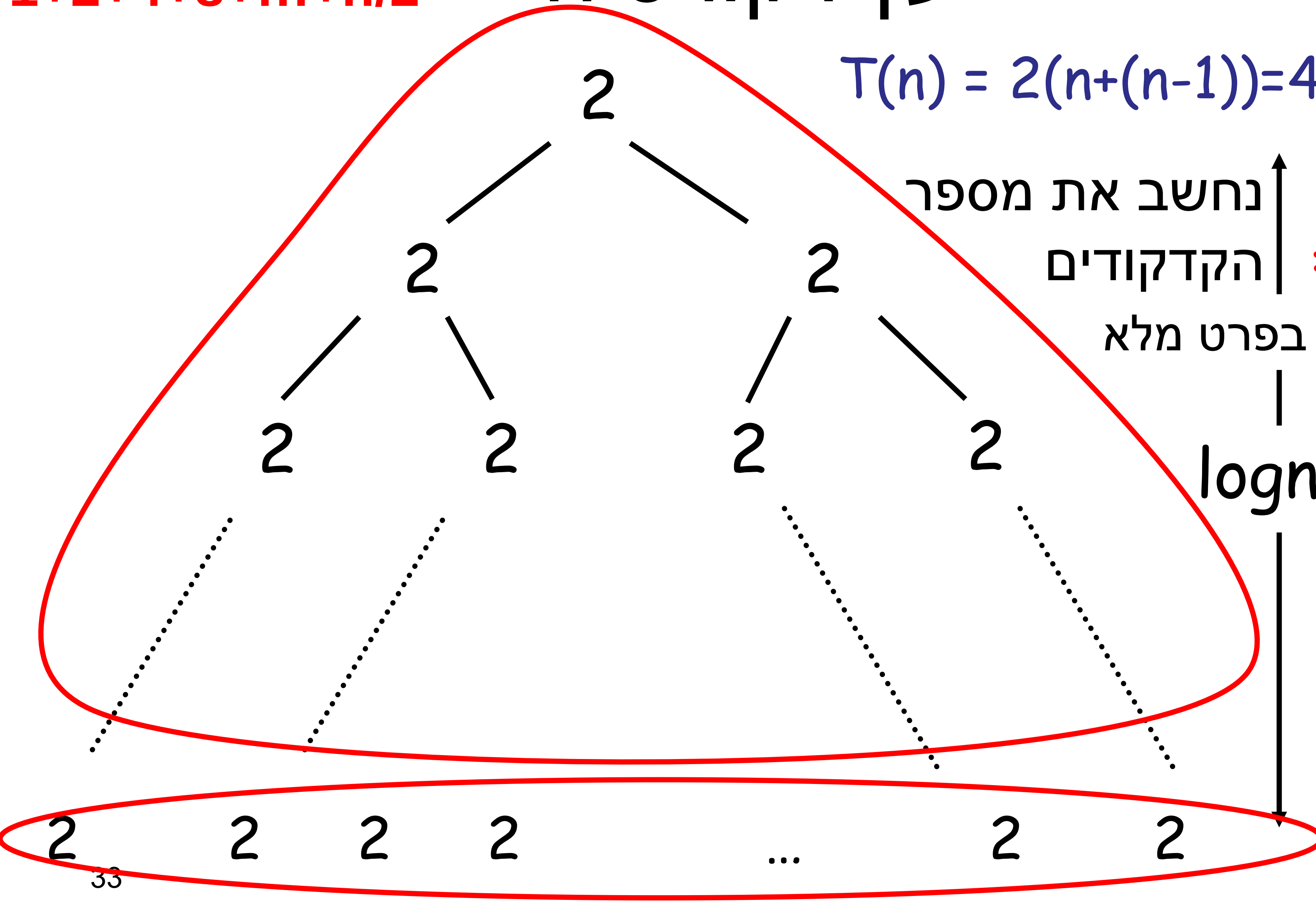
$\log n$

$= n$

עץ רקורסיה

$1+2+4+8+\ldots+n/2$ =

$T(n) = 2(n+(n-1))=4n-2$



נחשב את מספר הקדקודים **= n-1**

עץ שלם בפרט מלא

logn

= n

טענה: $T(n) = 4 \cdot n - 2$

טענה: $T(n) = 4 \cdot n - 2$

הוכחה באינדוקציה על n.

טענה: $T(n) = 4 \cdot n - 2$

הוכחה באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה: $n=1$ הטענה נכונה, שכן:

$$T(1) = 4 \cdot 1 - 2 = 2$$

טענה: $T(n) = 4 \cdot n-2$

הוכחה באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה: $n=1$ הטענה נכונה, שכן:

$$T(1) = 4 \cdot 1-2 = 2$$

נניח נכונות לכל גודל קטן מ n ונוכיח עבור n:

טענה: $T(n) = 4\cdot n-2$

הוכחה באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה: $n=1$ הטענה נכונה, שכן:

$T(1) = 4\cdot 1-2 = 2$

נניח נכונות לכל גודל קטן מ n ונוכיח עבור n:

$T(n)=2\cdot T(n/2)+2 =$

טענה: $T(n) = 4\cdot n-2$

הוכחה באינדוקציה שלמה על n.

בסיס האינדוקציה: $n=1$ הטענה נכונה, שכן:

$$T(1) = 4\cdot 1-2 = 2$$

נניח נכונות לכל גודל קטן מ n ונוכיח עבור n:

$$T(n)=2\cdot T(n/2)+2 = 2\cdot(4\cdot(n/2)-2)+2 =$$

הנחת האינדוקציה

טענה: $T(n) = 4 \cdot n-2$

הוכחה באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה: $n=1$ הטענה נכונה, שכן:

$T(1) = 4 \cdot 1-2 = 2$

נניח נכונות לכל גודל קטן מ n ונוכיח עבור n:

$T(n)=2 \cdot T(n/2)+2 = 2 \cdot (4 \cdot (n/2)-2)+2 = 4 \cdot n-2$

Master's Theorem - משפט האב

משפט: עבור נוסחאות נסיגה במבנה:

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - משפט האב

משפט: עבור נוסחאות נסיגה במבנה:

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

1. אם $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Master's Theorem - משפט האב

משפט: עבור נוסחאות נסיגה במבנה:

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \ge d \end{cases}$$

1. אם $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

Master's Theorem - משפט האב

משפט: עבור נוסחאות נסיגה במבנה:

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

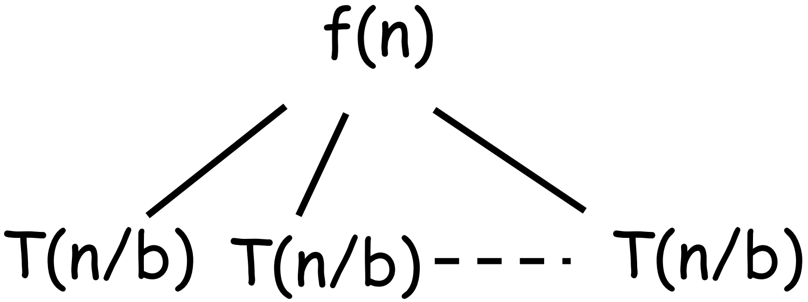
1. אם $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. אם $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$

ואם $af(n/b) \leq cf(n)$ עבור קבוע $c < 1$ ועבור n גדולים אזי

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

עץ הרקורסיה

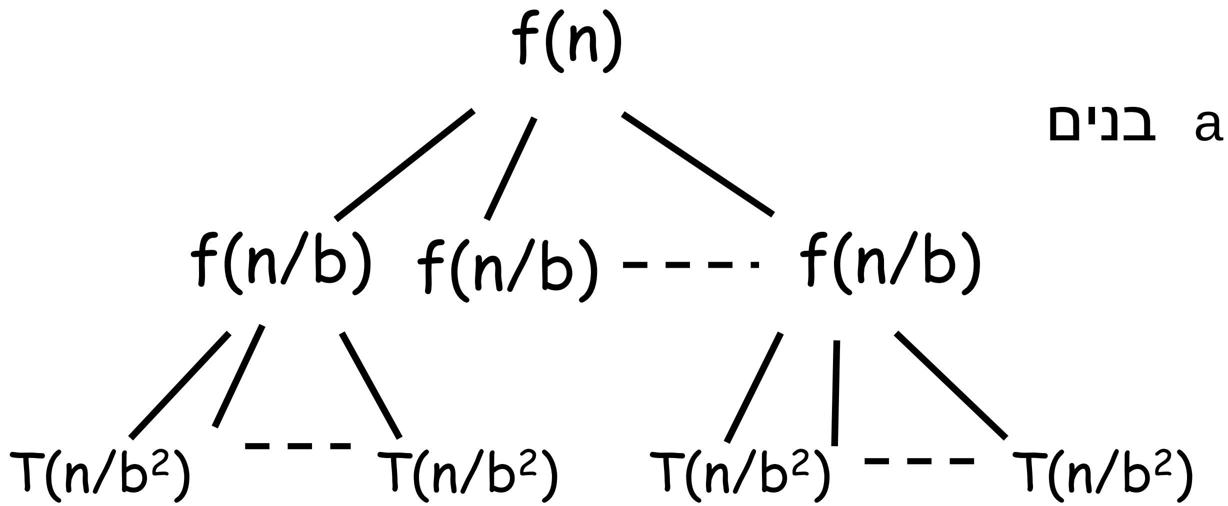
$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$



a בנים

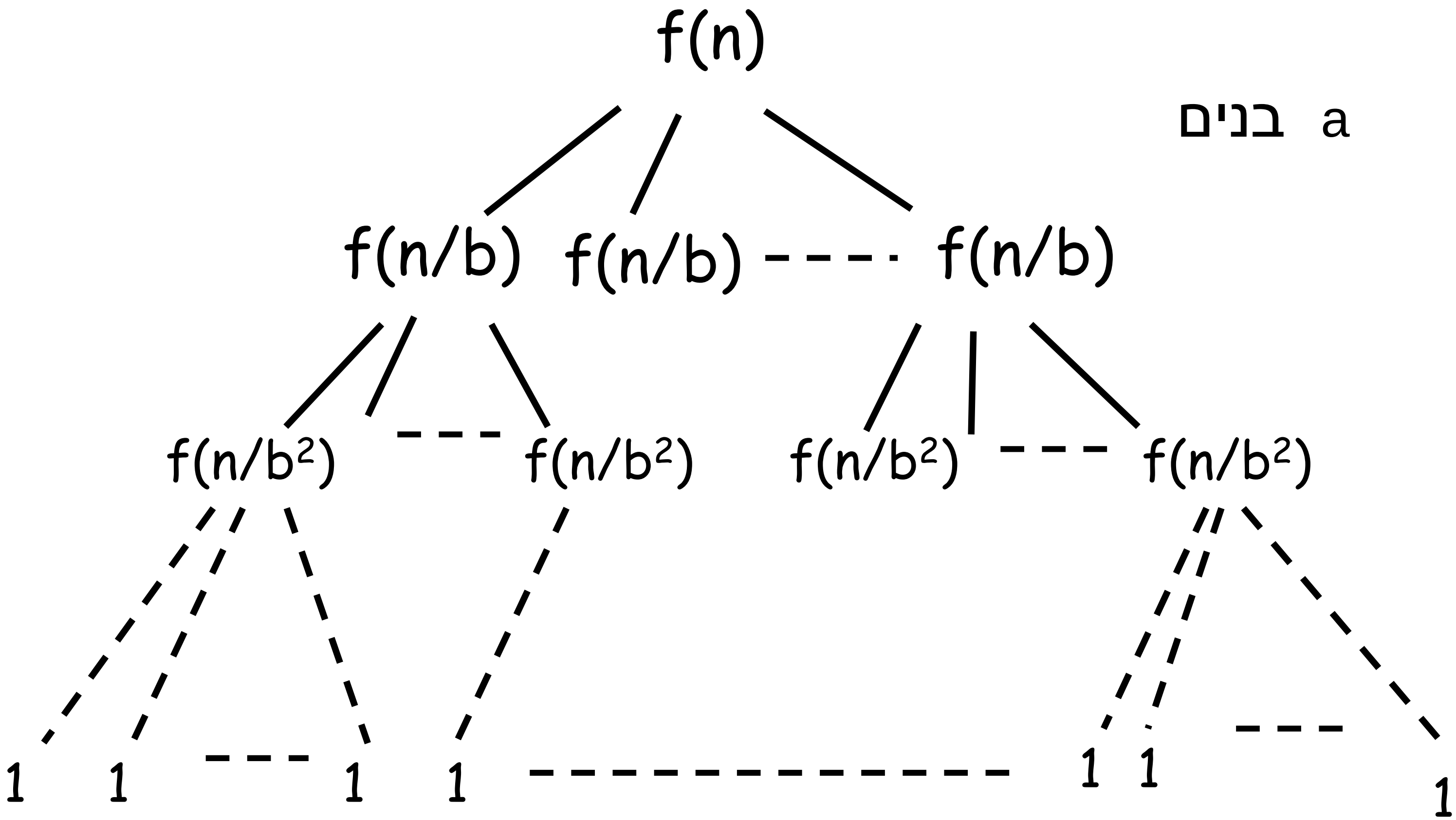
עץ הרקורסיה

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \ge d \end{cases}$$



עץ הרקורסיה

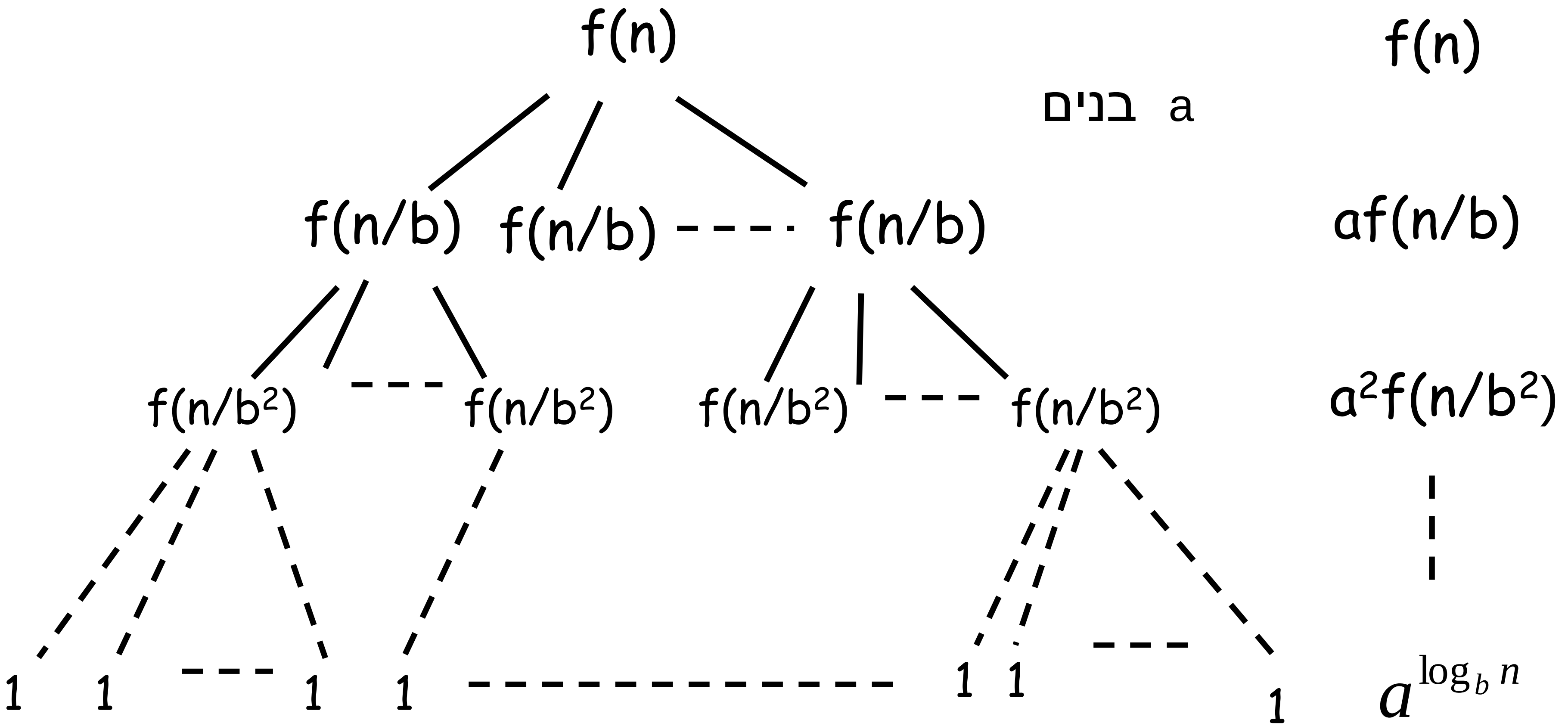
$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$



עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ הרקורסיה

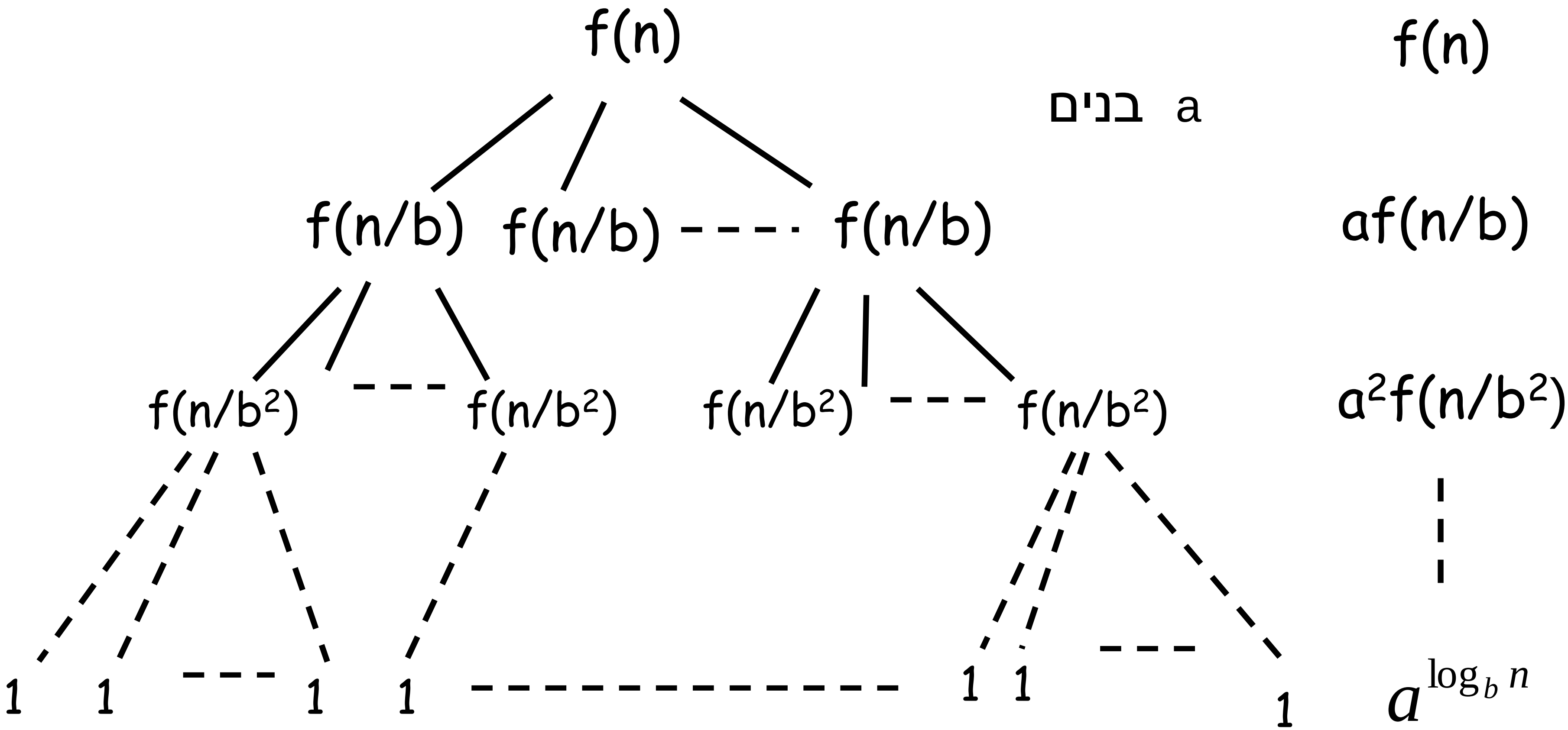
$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \ge d \end{cases}$$



$a^{\log_b n}$

עץ הרקורסיה

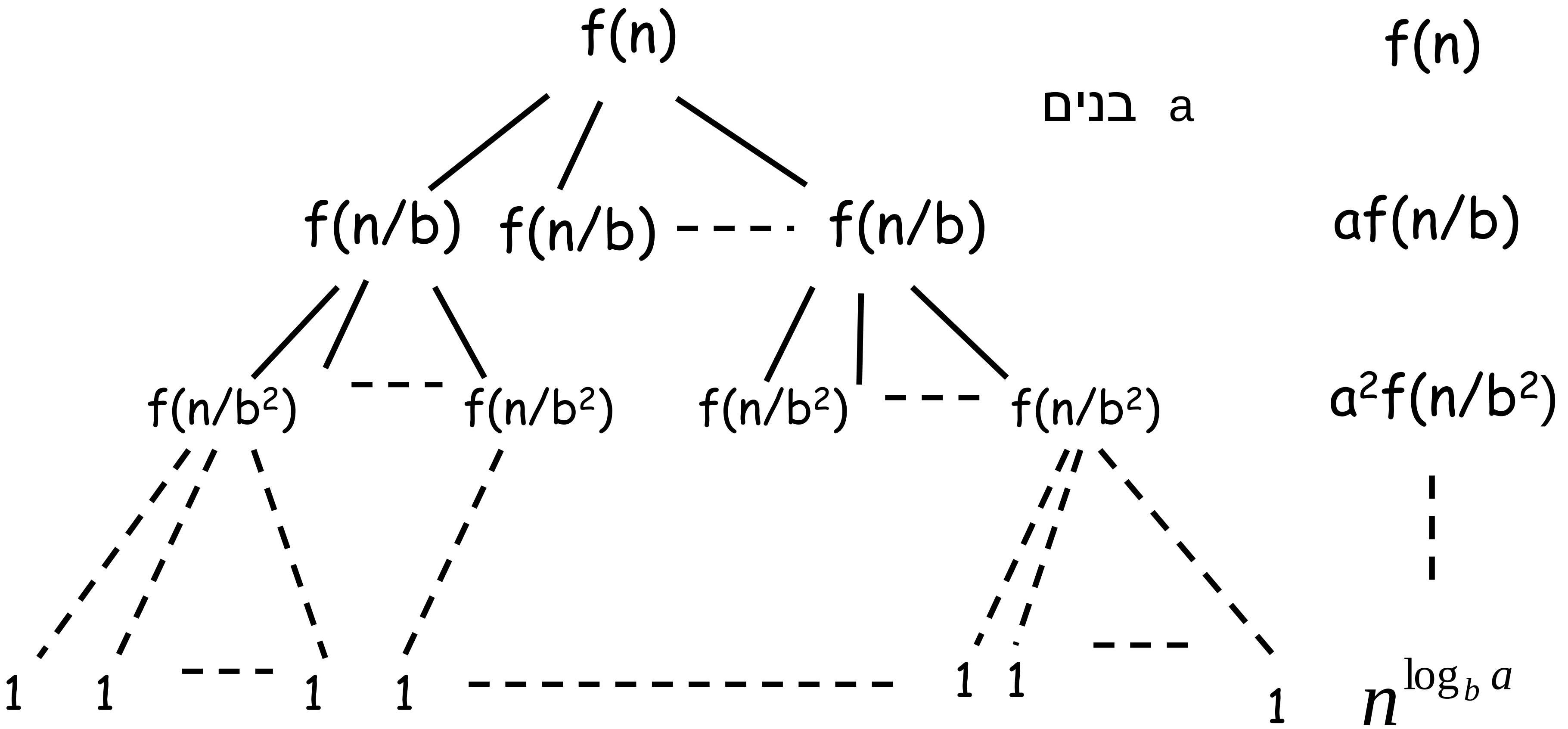
$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$



$n^{\log_b a}$

עץ הרקורסיה

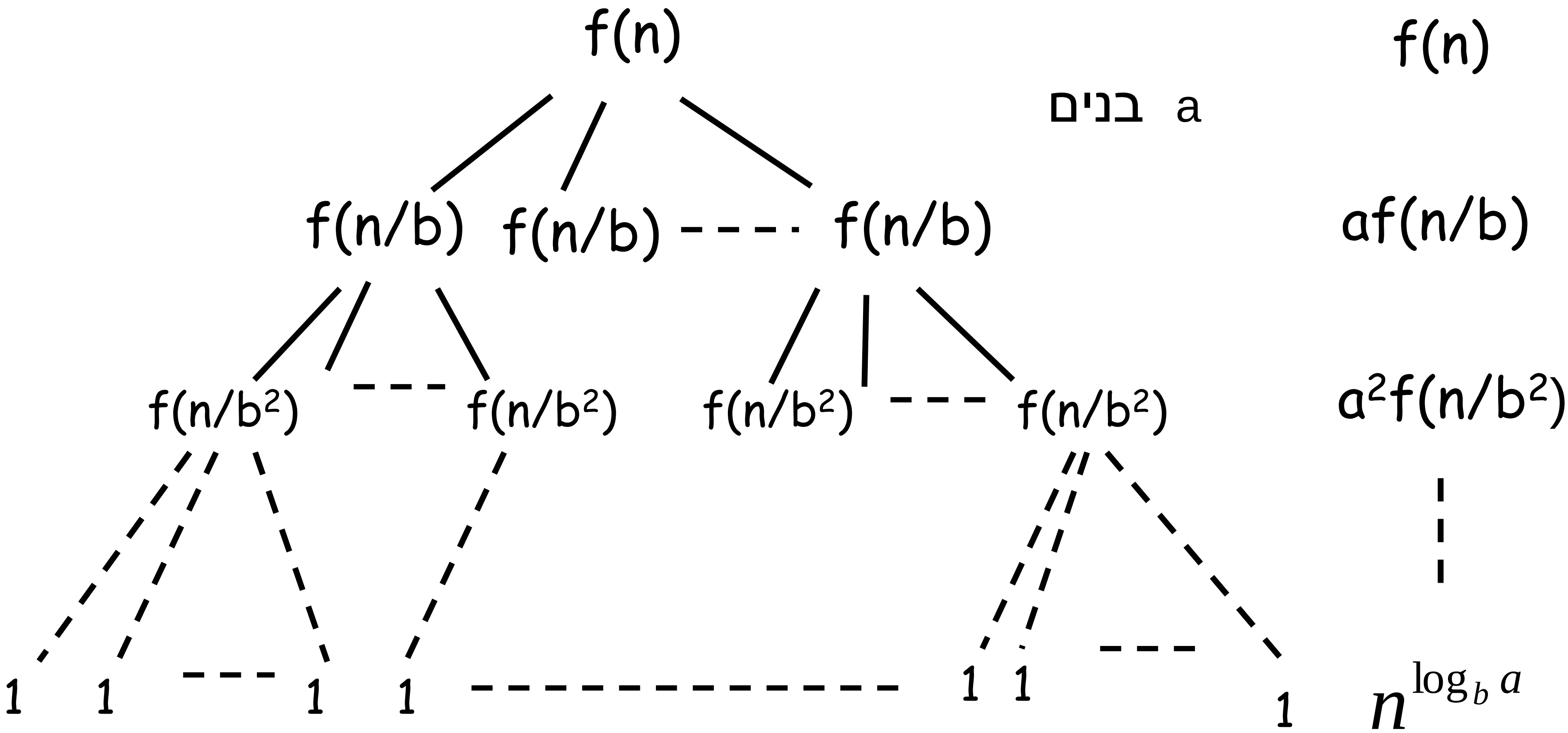
$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$



עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

עץ הרקורסיה

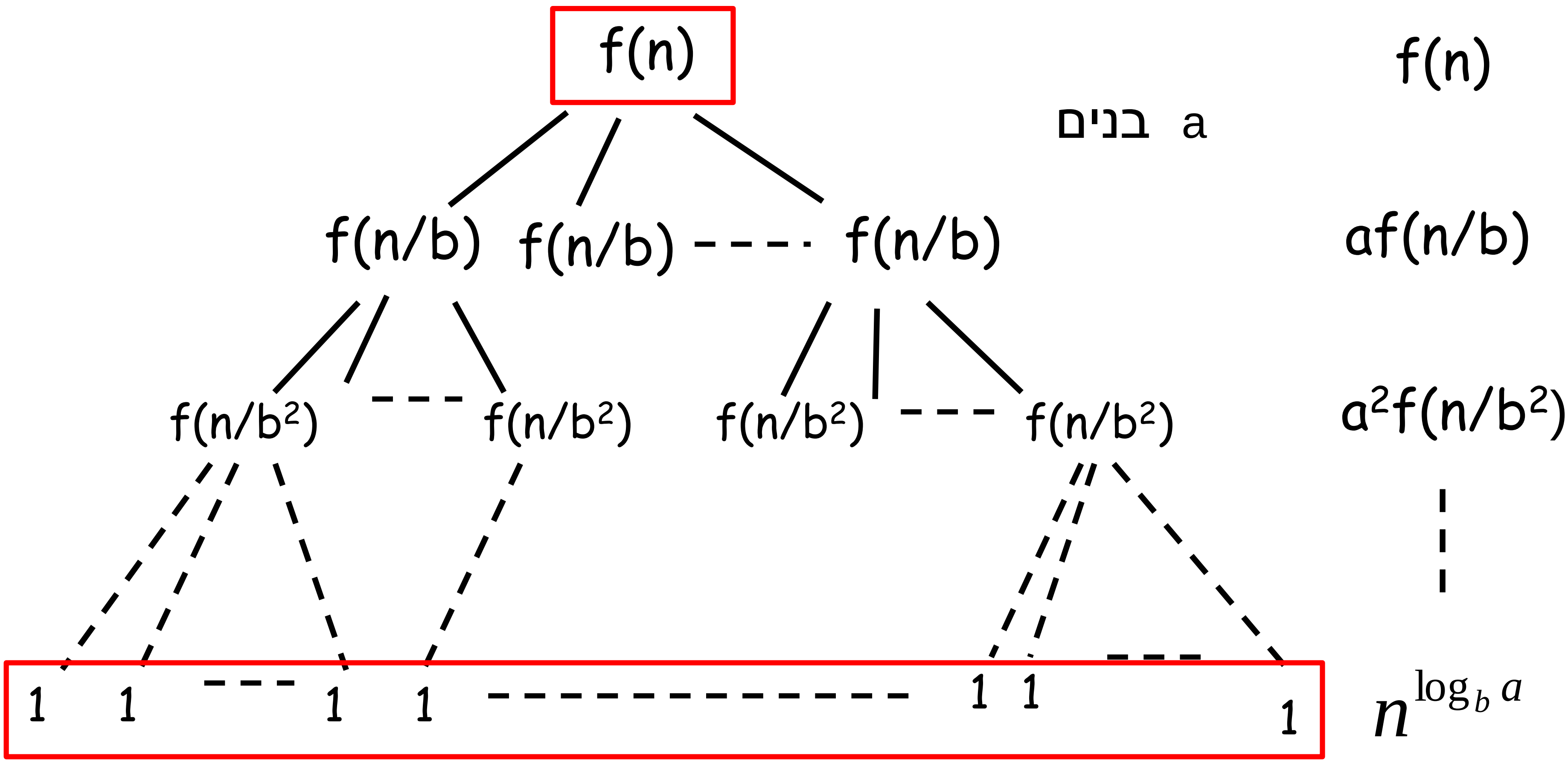
$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \ge d \end{cases}$$



1.אם $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

עץ הרקורסיה

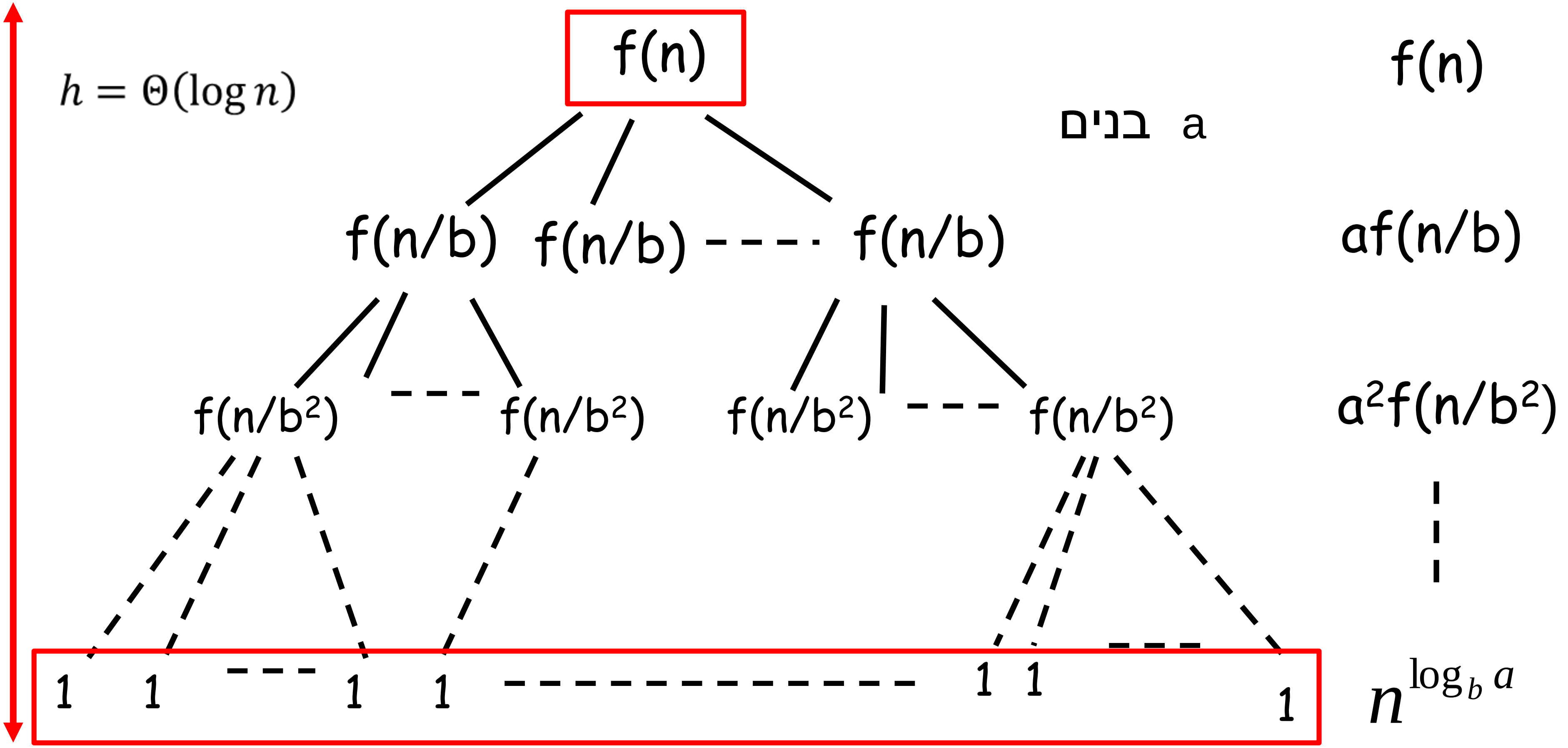
$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$



1.אם $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

עץ הרקורסיה

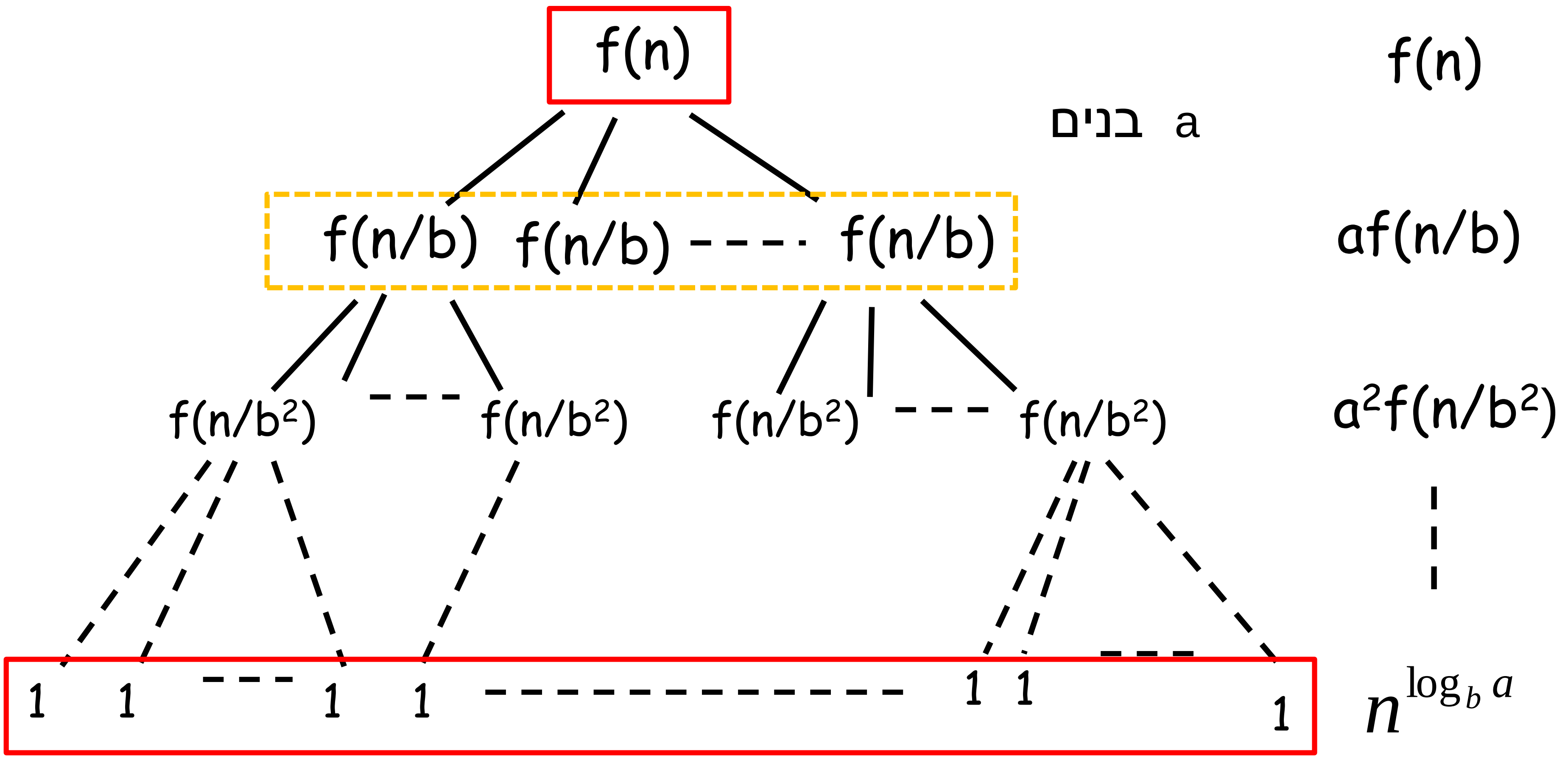
$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$



2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

עץ הרקורסיה

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$



3. אם $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ ואם $af(n/b) \leq cf(n)$ עבור קבוע $c < 1$
ועבור n גדולים אזי $T(n) = \Theta(f(n))$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא: $T(n) = T(2n/3) + 1$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא: **T(n) = T(2n/3) + 1**

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא: **T(n) = T(2n/3) + 1**

a=1, b=3/2, f(n)=1

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא: **T(n) = T(2n/3) + 1**

a=1, b=3/2, f(n)=1

$$n^{\log_b a}$$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא: **T(n) = T(2n/3) + 1**

a=1, b=3/2, f(n)=1

$$n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1}$$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא: **T(n) = T(2n/3) + 1**

a=1, b=3/2, f(n)=1

$$n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא: **T(n) = T(2n/3) + 1**

$n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$ **a=1, b=3/2, f(n)=1**

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

1. אם $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

3. אם $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$
ואם $af(n/b) \leq cf(n)$ עבור קבוע $c < 1$ ועבור n גדולים אזי

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא: $T(n) = T(2n/3) + 1$

$$\boxed{n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1}$$

$a=1$, $b=3/2$, $\boxed{f(n)=1}$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

1. אם $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

3. אם $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$

ואם $af(n/b) \leq cf(n)$ עבור קבוע $c < 1$ ועבור n גדולים אזי

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא: $T(n) = T(2n/3) + 1$

a=1, b=3/2, f(n)=1 $\quad n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

1. אם $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. אם $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$

ואם $af(n/b) \leq cf(n)$ עבור קבוע $c < 1$ ועבור n גדולים אזי

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 2: $T(n) = 9T(n/3) + n$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 2: **T(n) = 9T(n/3) + n**

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 2: $T(n) = 9T(n/3) + n$

$a=9,\ b=3,\ f(n)=n$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 2: $T(n) = 9T(n/3) + n$

a=9, b=3, f(n)=n $n^{\log_b a}$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 2: **T(n) = 9T(n/3) + n**

a=9, b=3, f(n)=n

$$n^{\log_b a} = n^{\log_3 9}$$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 2: **T(n) = 9T(n/3) + n**

a=9, b=3, f(n)=n

$$n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 2: **T(n) = 9T(n/3) + n**

a=9, b=3, f(n)=n $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

1. אם $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

3. אם $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$

ואם $af(n/b) \leq cf(n)$ עבור קבוע $c < 1$ ועבור n גדולים אזי

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 2: $T(n) = 9T(n/3) + n$

$a=9$, $b=3$, $\boxed{f(n)=n}$

$$\boxed{n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2}$$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

1. אם $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

3. אם $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$

ואם $af(n/b) \leq cf(n)$ עבור קבוע $c < 1$ ועבור n גדולים אזי

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 2: $T(n) = 9T(n/3) + n$

a=9, b=3, f(n)=n $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

1. אם $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. אם $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$

ואם $af(n/b) \leq cf(n)$ עבור קבוע $c < 1$ ועבור n גדולים אזי

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 3: $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 3: **$T(n) = 3T(n/4) + n\log n$**

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 3: **$T(n) = 3T(n/4) + n\log n$**

$a=3,\ b=4,\ f(n)=n\log n$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 3: $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$

$n^{\log_b a}$ a=3, b=4, f(n)=n log n

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 3: **T(n) = 3T(n/4) + nlog n**

a=3, b=4, f(n)=n log n

$$n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}$$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 3: **T(n) = 3T(n/4) + nlog n**

a=3, b=4, f(n)=n log n

$$n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.793\ldots}$$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 3: **T(n) = 3T(n/4) + nlog n**

$n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.793...}$ **a=3, b=4, f(n)=n log n**

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

1. אם $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. אם $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$

ואם $af(n/b) \leq cf(n)$ עבור קבוע $c < 1$ ועבור n גדולים אזי

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 3: **T(n) = 3T(n/4) + nlog n**

$$\boxed{n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.793...}}$$

a=3, b=4, $\boxed{\text{f(n)=n log n}}$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

1. אם $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. אם $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$
ואם $af(n/b) \leq cf(n)$ עבור קבוע $c < 1$ ועבור n גדולים אזי

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 3: **T(n) = 3T(n/4) + nlog n**

$n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.793...}$ **a=3, b=4, f(n)=n log n**

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

1. אם $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

3. אם $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$

ואם $af(n/b) \leq cf(n)$ עבור קבוע $c < 1$ ועבור n גדולים אזי

$3f(n/4) \leq cf(n)$

$T(n) = \Theta(f(n))$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 3: **T(n) = 3T(n/4) + nlog n**

$n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.793...}$ **a=3, b=4, f(n)=n log n**

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

1. אם $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. אם $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$

ואם $af(n/b) \leq cf(n)$ עבור קבוע $c < 1$ ועבור n גדולים אזי

$3f(n/4) \leq cf(n)$

$T(n) = \Theta(f(n))$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 4: $T(n) = 2T(n/2) + n\log n$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 4: **$T(n) = 2T(n/2) + n\log n$**

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 4: **T(n) = 2T(n/2) + nlog n**

a=2, b=2, f(n)=n log n

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 4: **$T(n) = 2T(n/2) + n\log n$**

a=2, b=2, f(n)=n log n

$n^{\log_b a}$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 4: **T(n) = 2T(n/2) + nlog n**

a=2, b=2, f(n)=n log n

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2}$$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 4: **T(n) = 2T(n/2) + nlog n**

a=2, b=2, f(n)=n log n

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

Master's Theorem - שיטת האב

דוגמא 4: $T(n) = 2T(n/2) + n\log n$

a=2, b=2, f(n)=n log n

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$$

$$T(n) = \begin{cases} e & n < d \\ aT(n/b) + f(n) & n \geq d \end{cases}$$

1. אם $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log n)$
3. אם $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ עבור קבוע $\varepsilon > 0$

ואם $af(n/b) \leq cf(n)$ עבור קבוע $c < 1$ ועבור n גדולים אזי

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

דוגמא: מיון-מיזוג

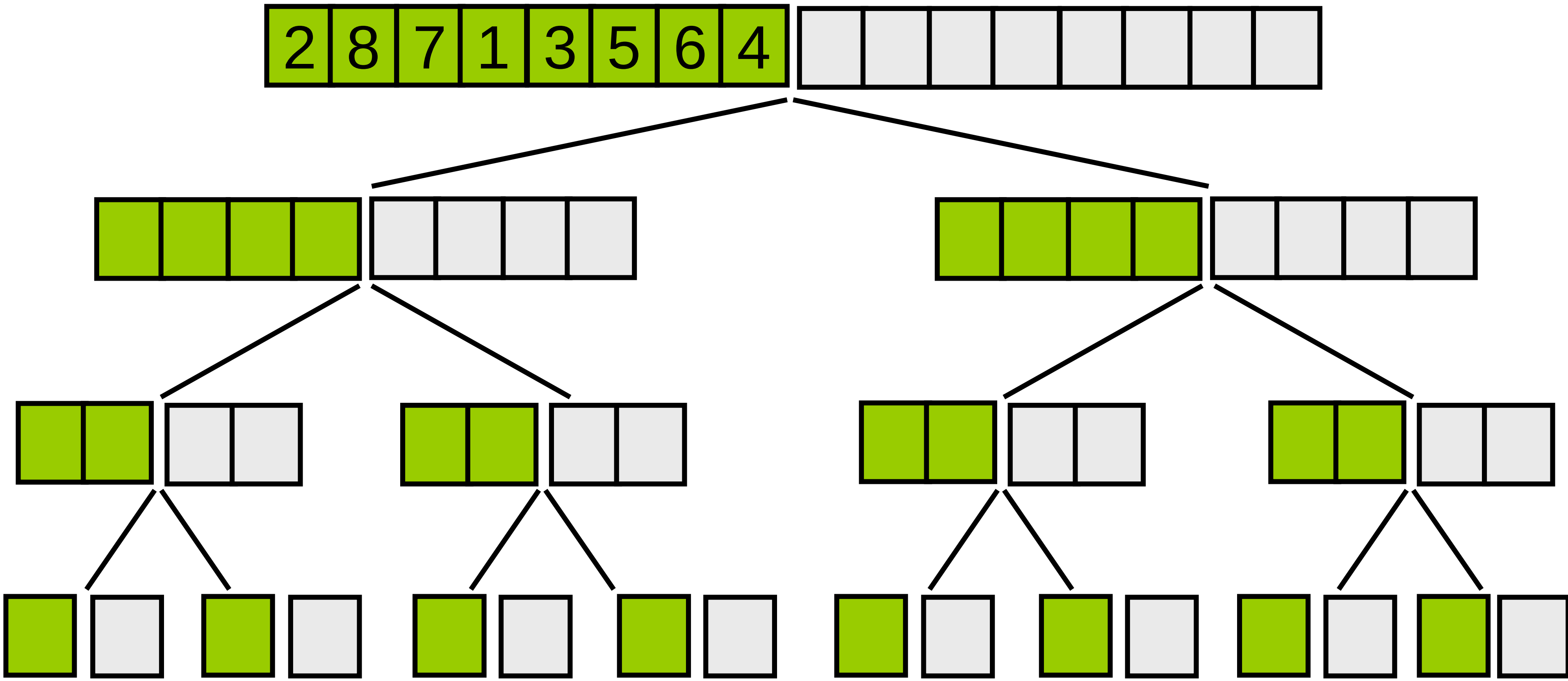
הקלט: סדרה S של n איברים.
הפלט: סדרה S ממוינת.

<u>האלגוריתם</u>:

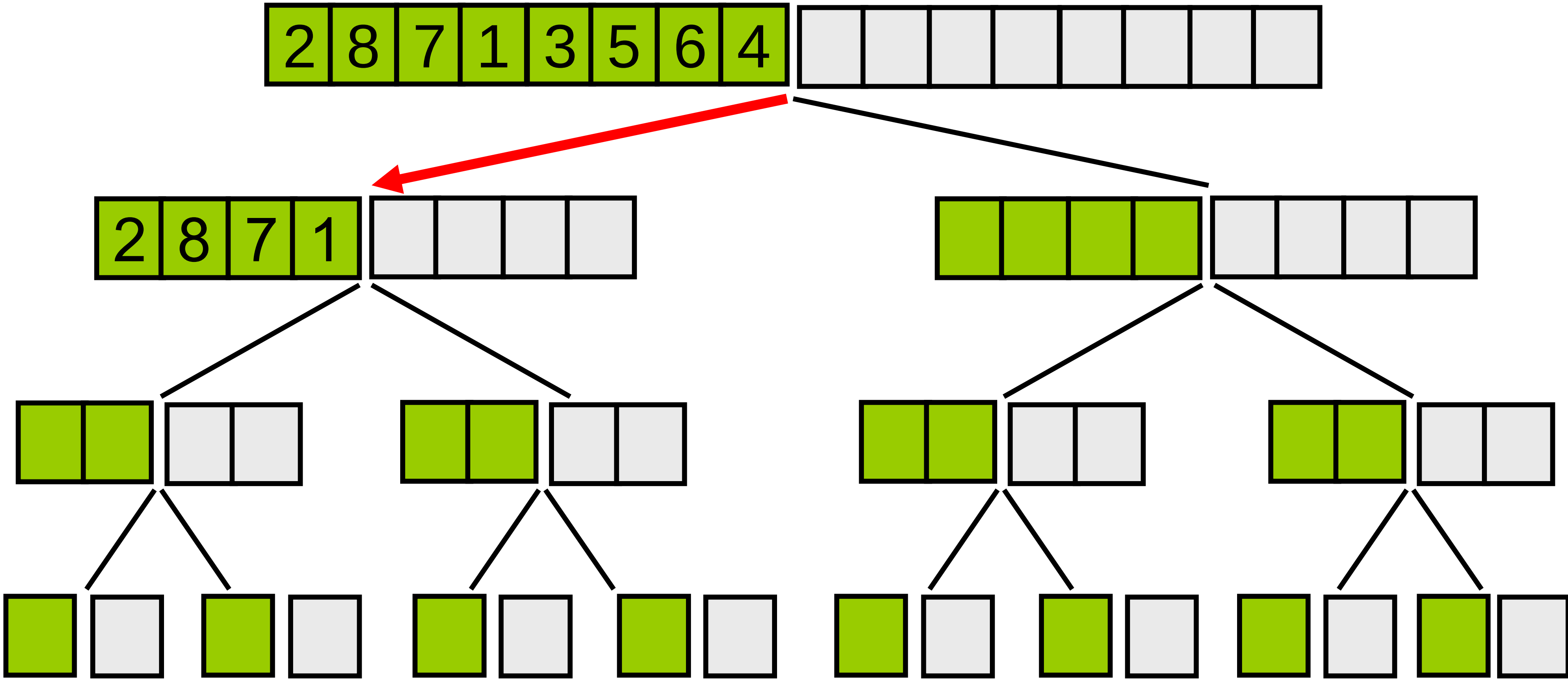
- הפרד: פצל את S לשתי סדרות S_1, S_2 כל אחת עם $n/2$ איברים.
- משול: מיין את S_1 ו- S_2 באופן רקורסיבי.
- צרף: מזג את S_1 ו-S_2 הממוינות לסדרה אחת ממוינת.

http://www.youtube.com/watch?v=XaqR3G_NVoo

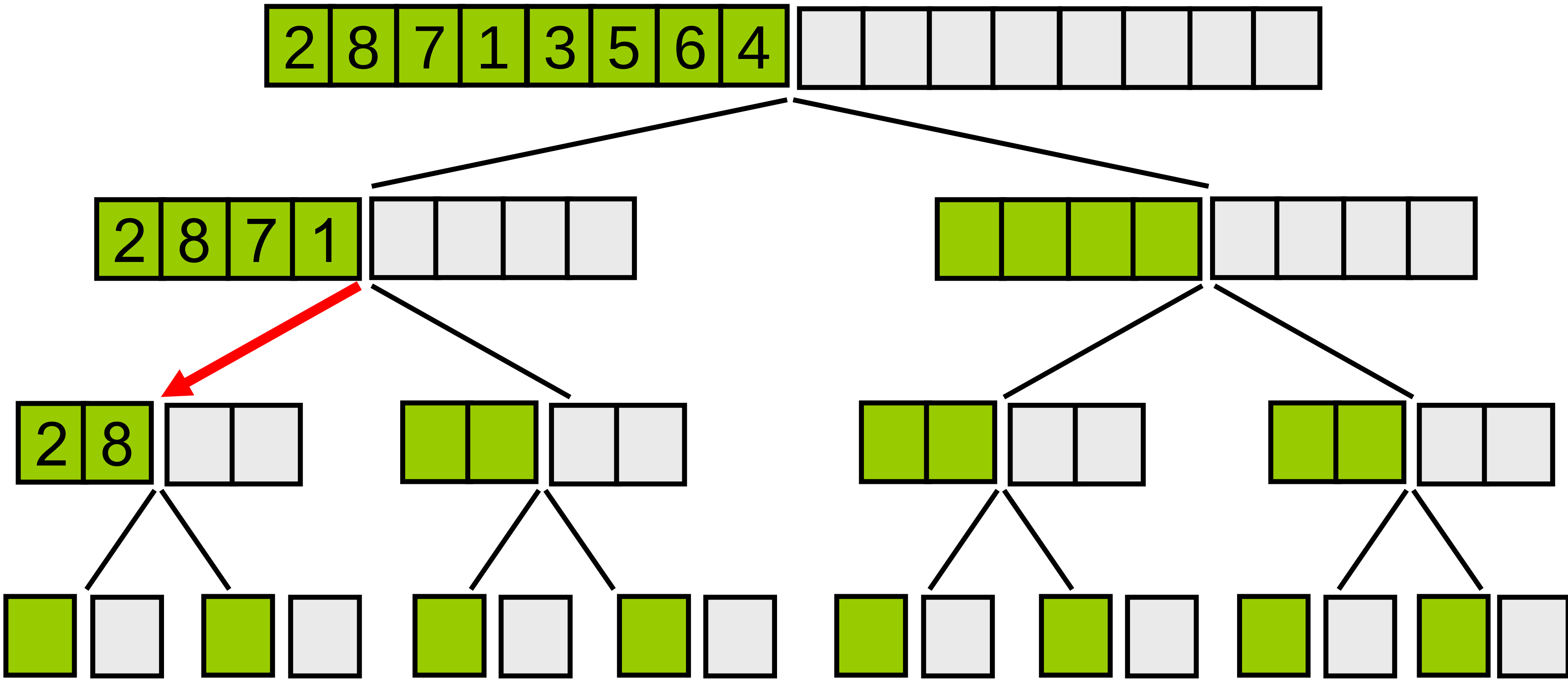
מיון מיזוג - דוגמא:



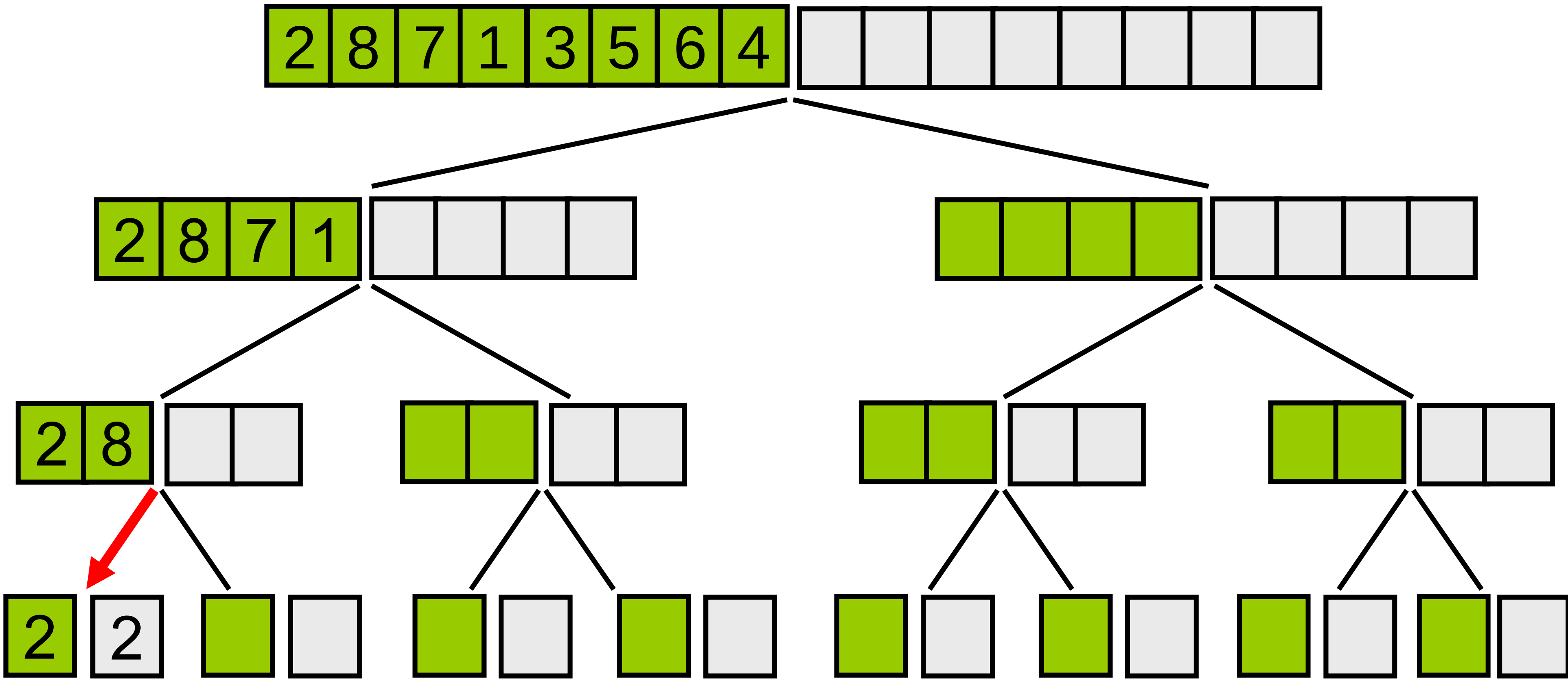
מיון מיזוג - דוגמא:



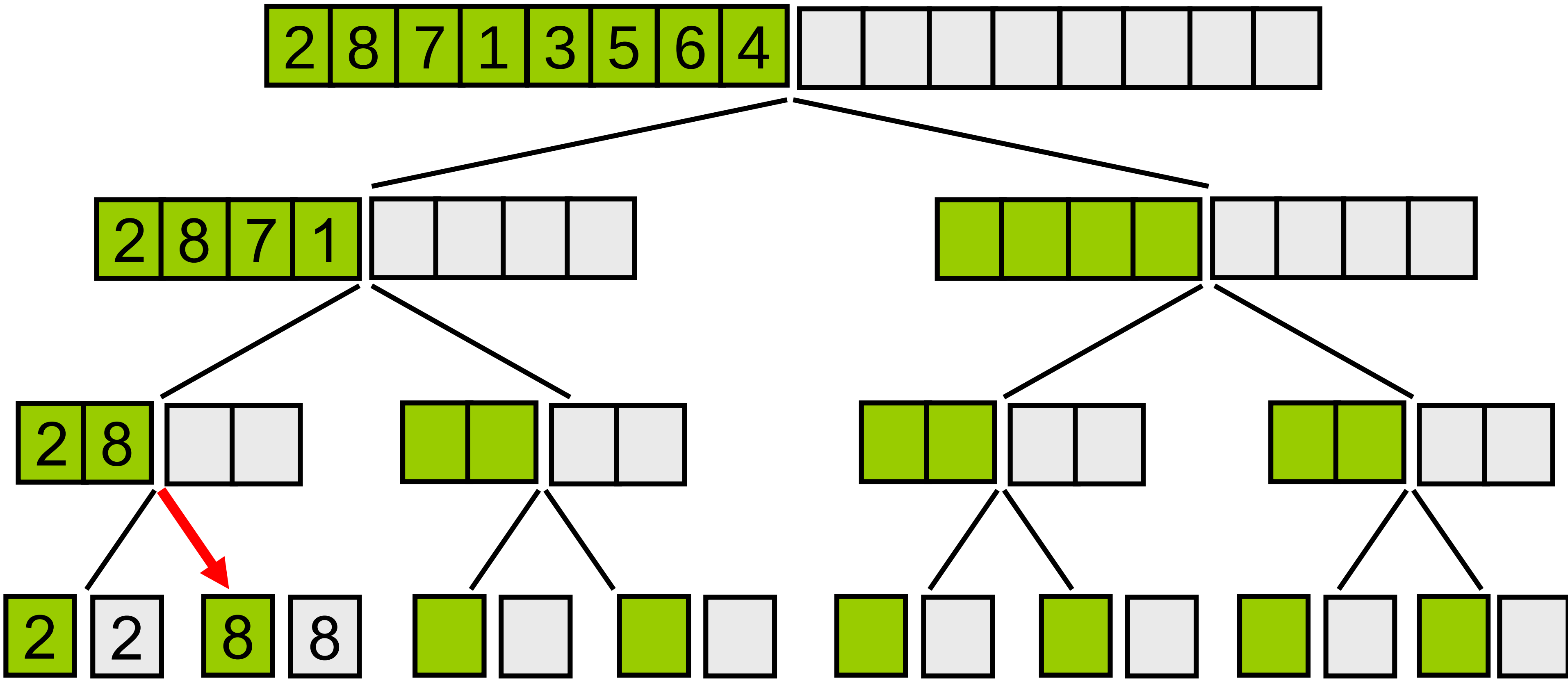
מיון מיזוג - דוגמא:



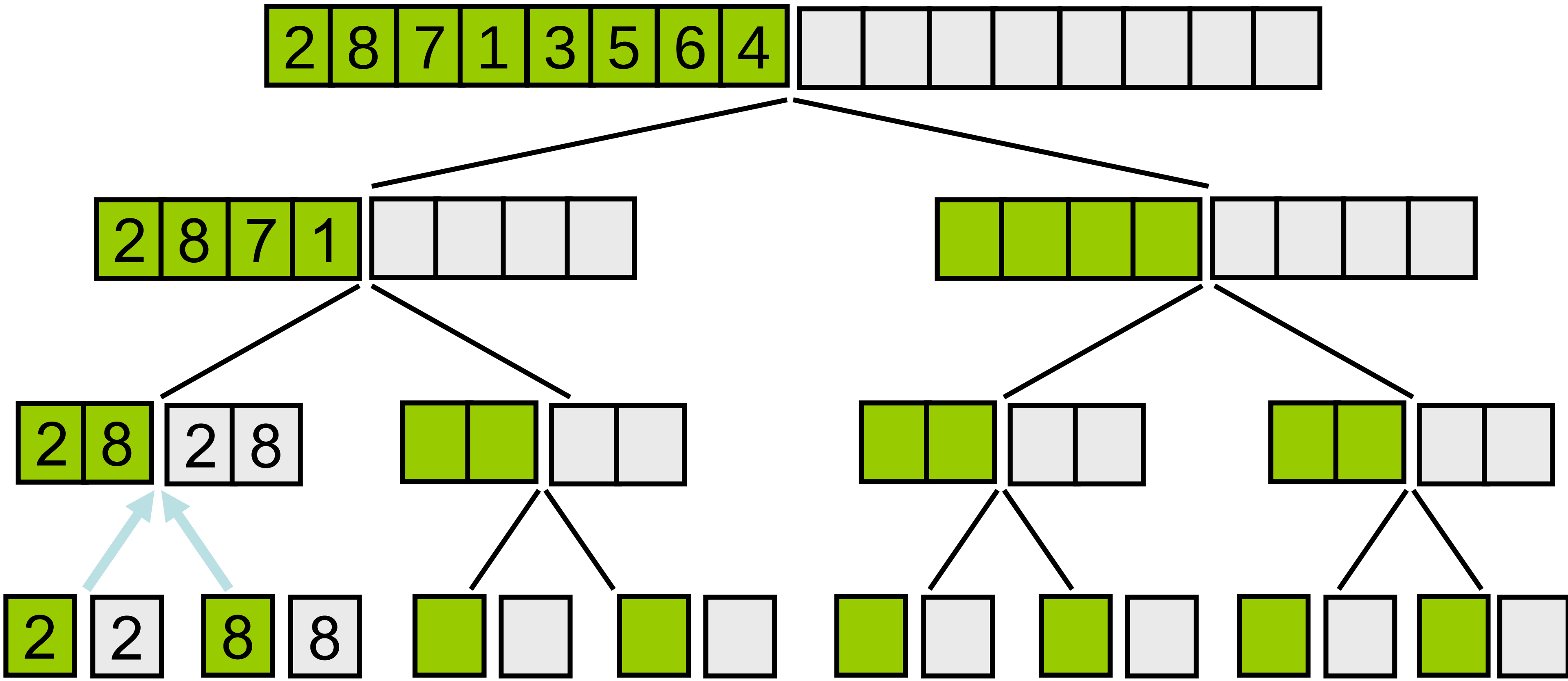
מיון מיזוג - דוגמא:



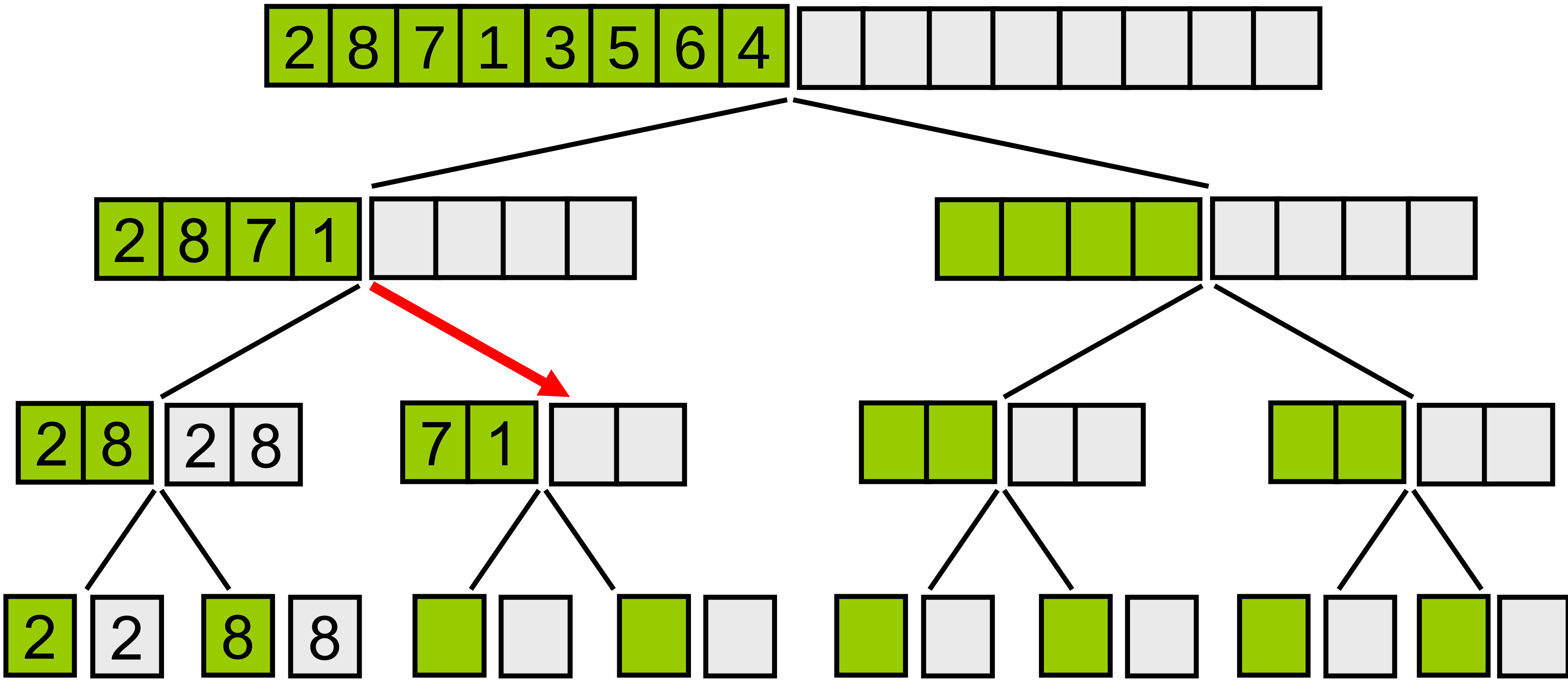
מיון מיזוג - דוגמא:



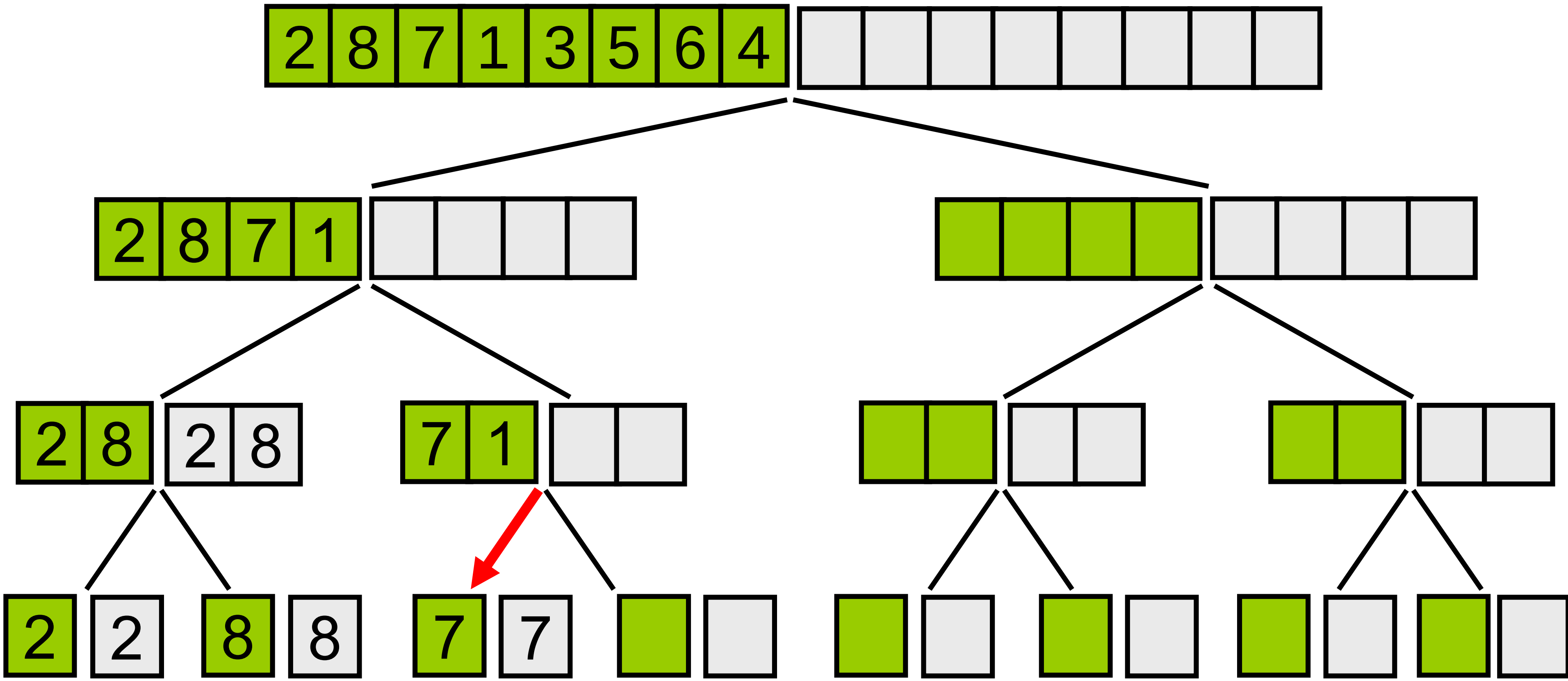
מיון מיזוג - דוגמא:



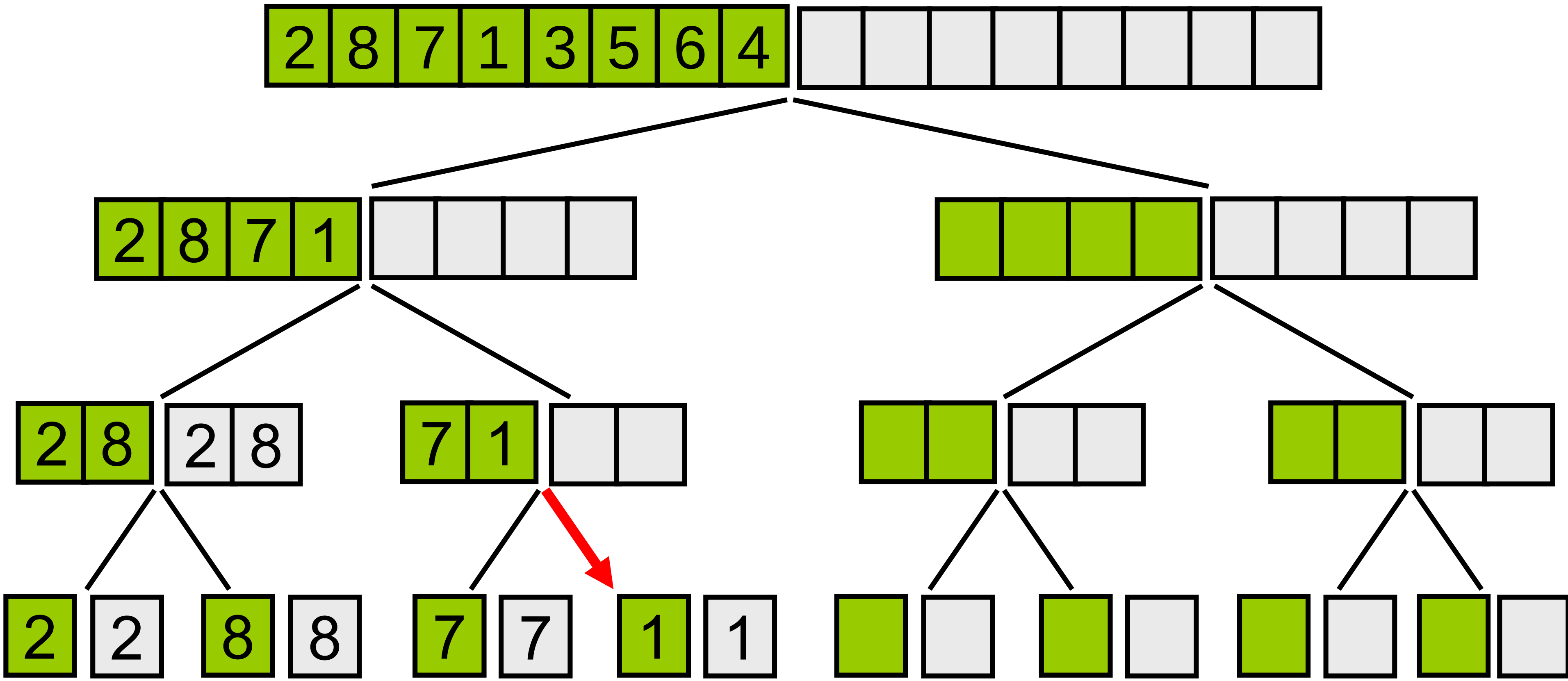
מיון מיזוג - דוגמא:



מיון מיזוג - דוגמא:

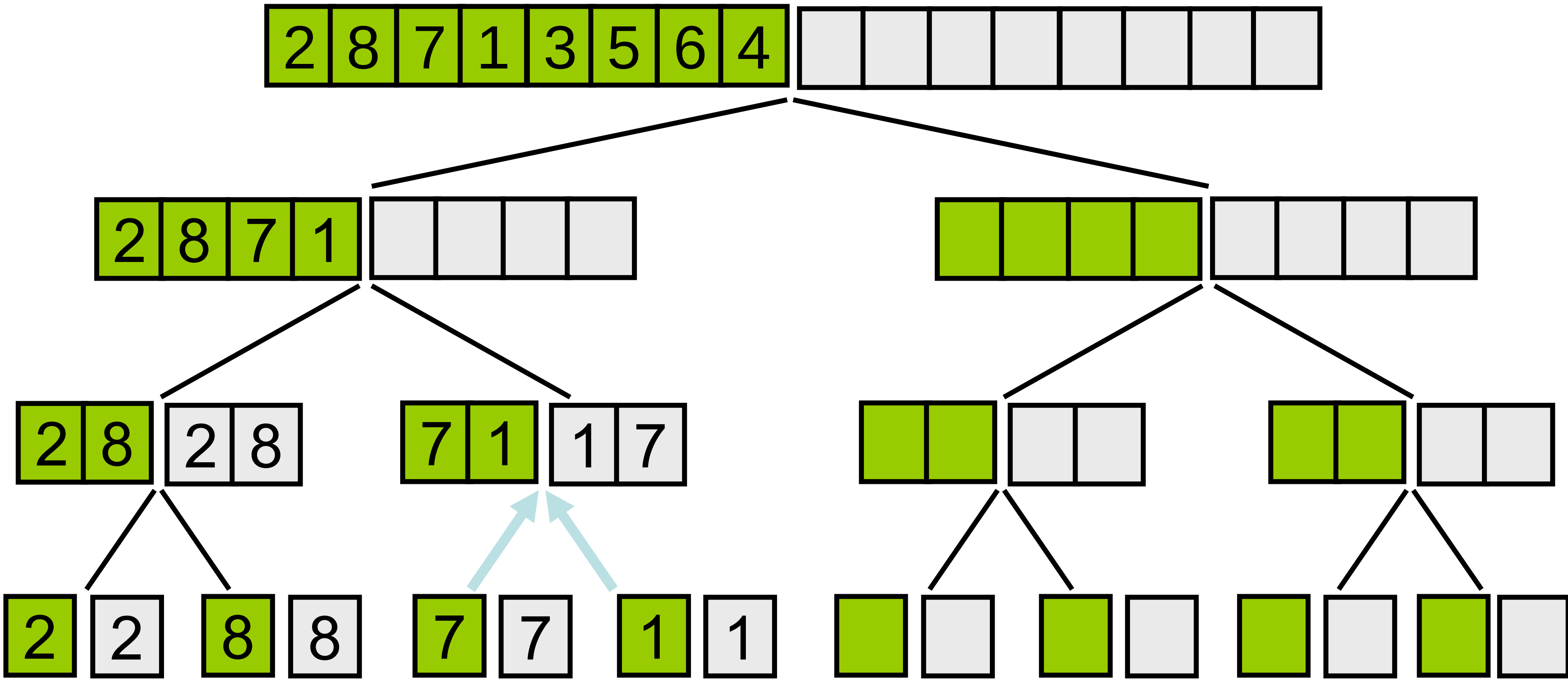


מיון מיזוג - דוגמא:

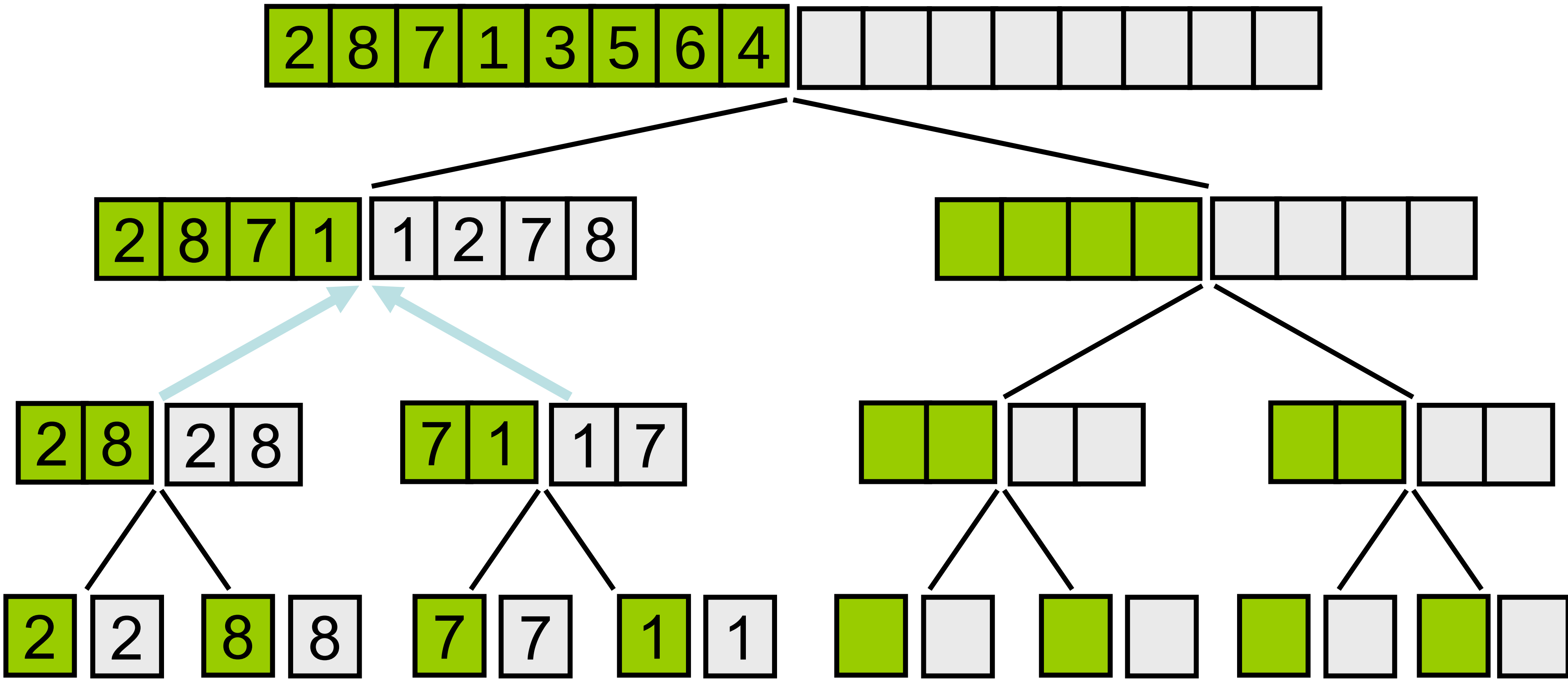


עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

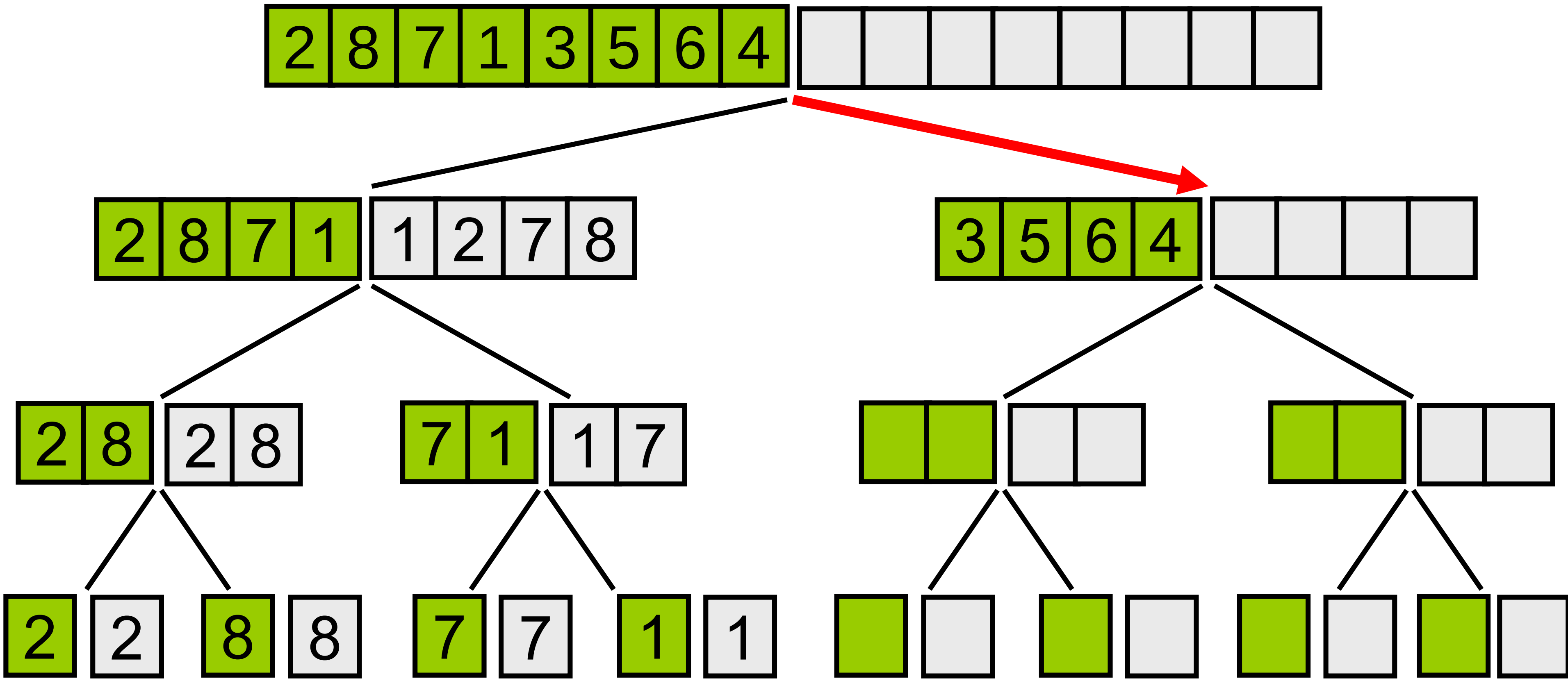
מיון מיזוג - דוגמא:



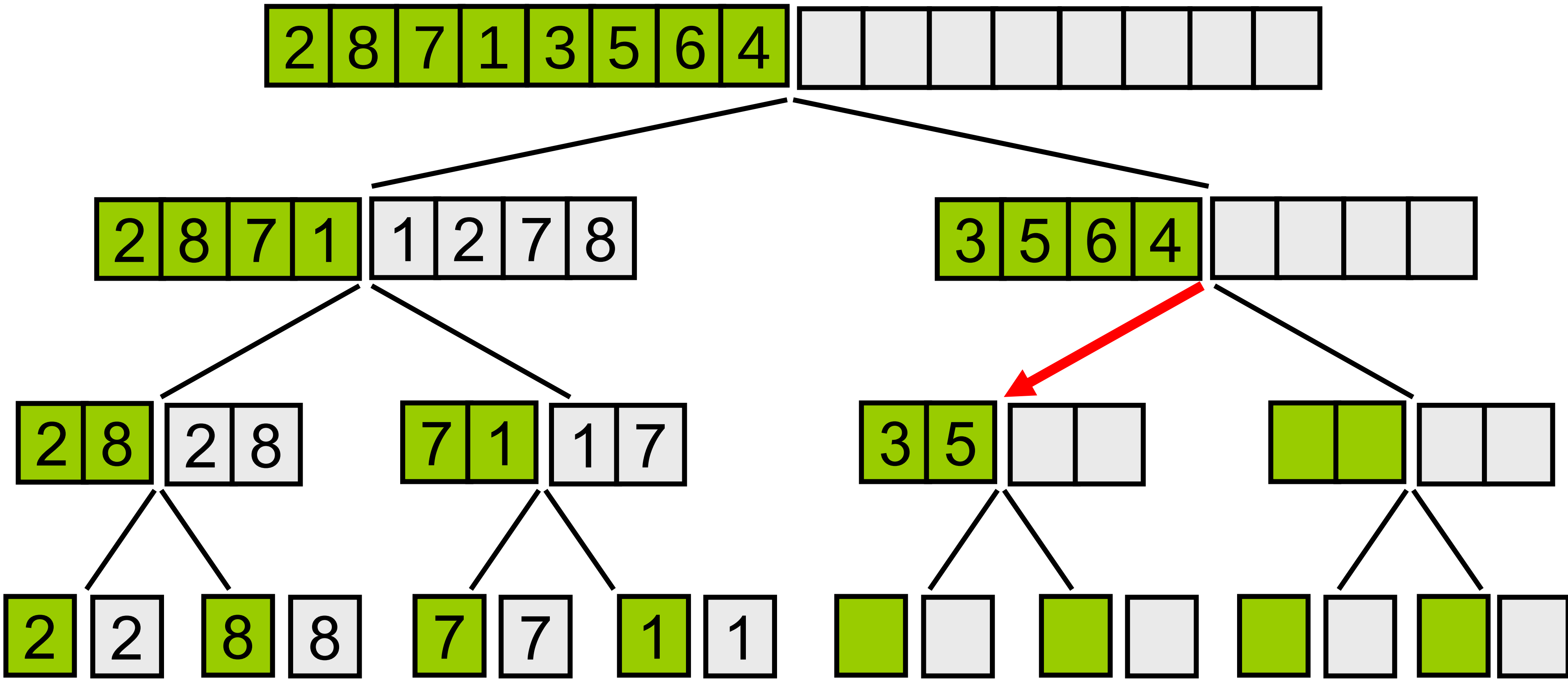
מיון מיזוג - דוגמא:



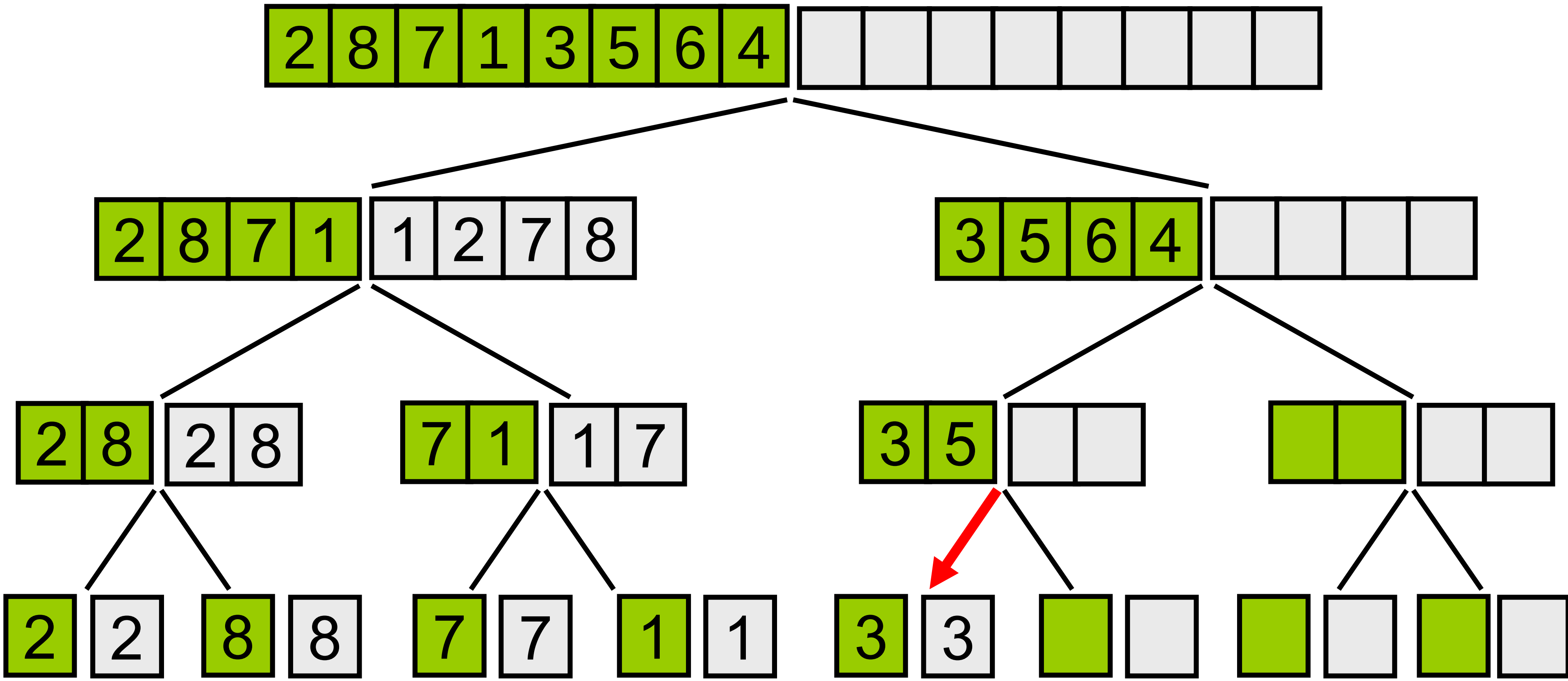
מיון מיזוג - דוגמא:



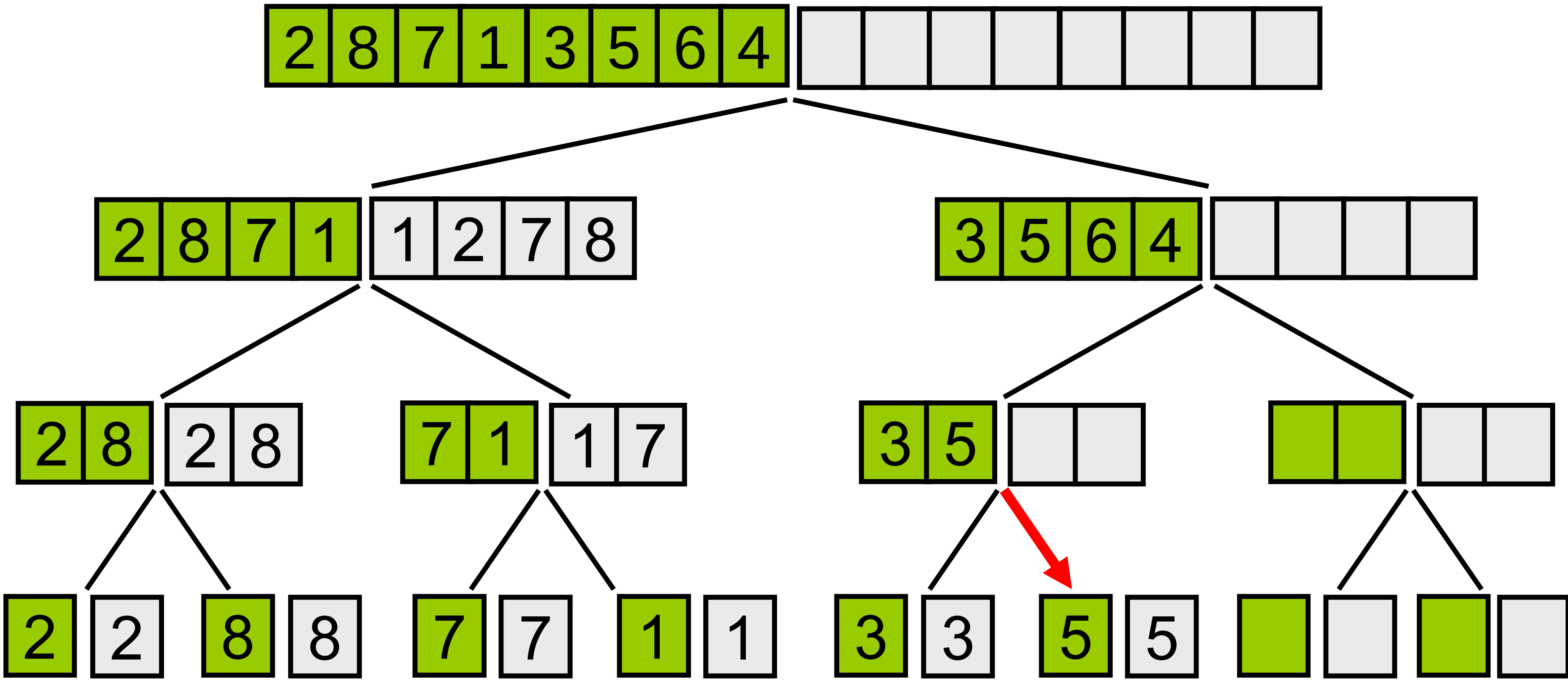
מיון מיזוג - דוגמא:



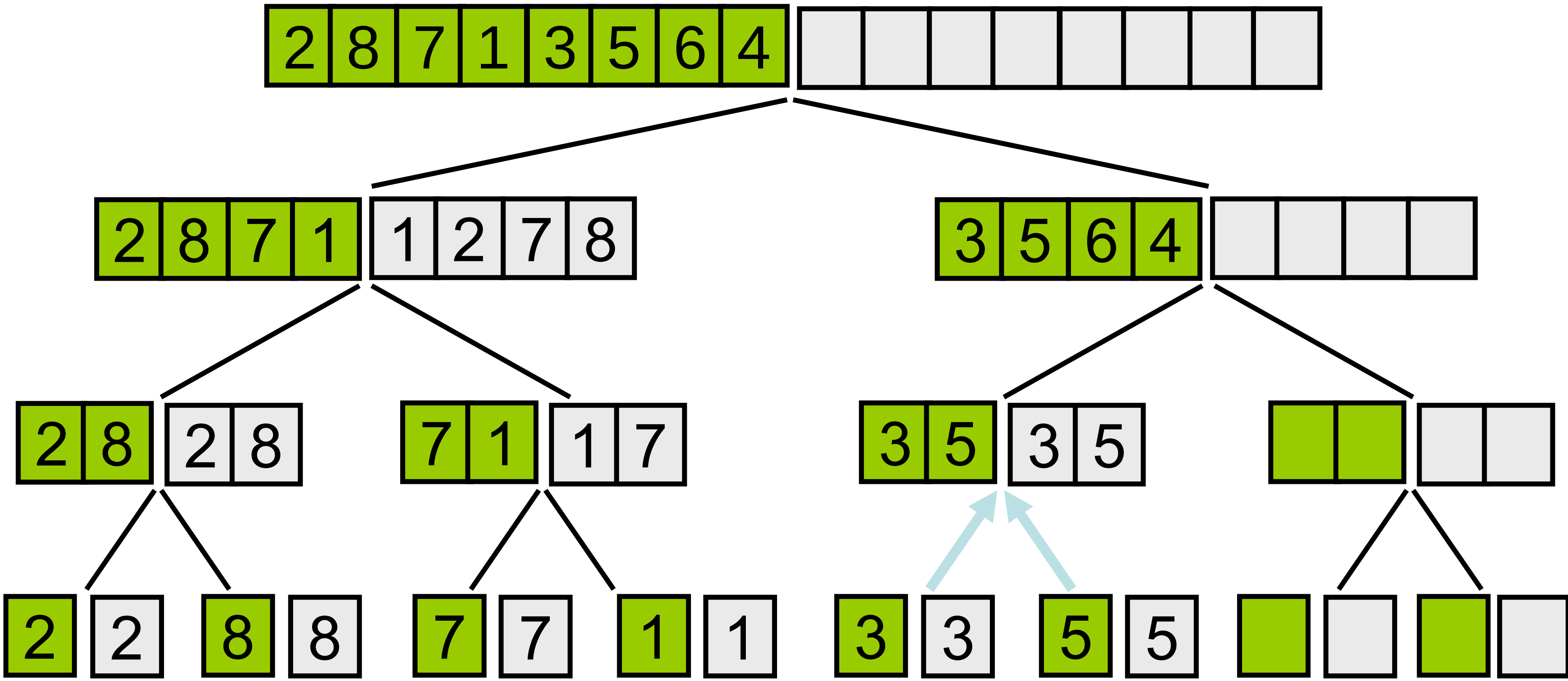
מיון מיזוג - דוגמא:



מיון מיזוג - דוגמא:

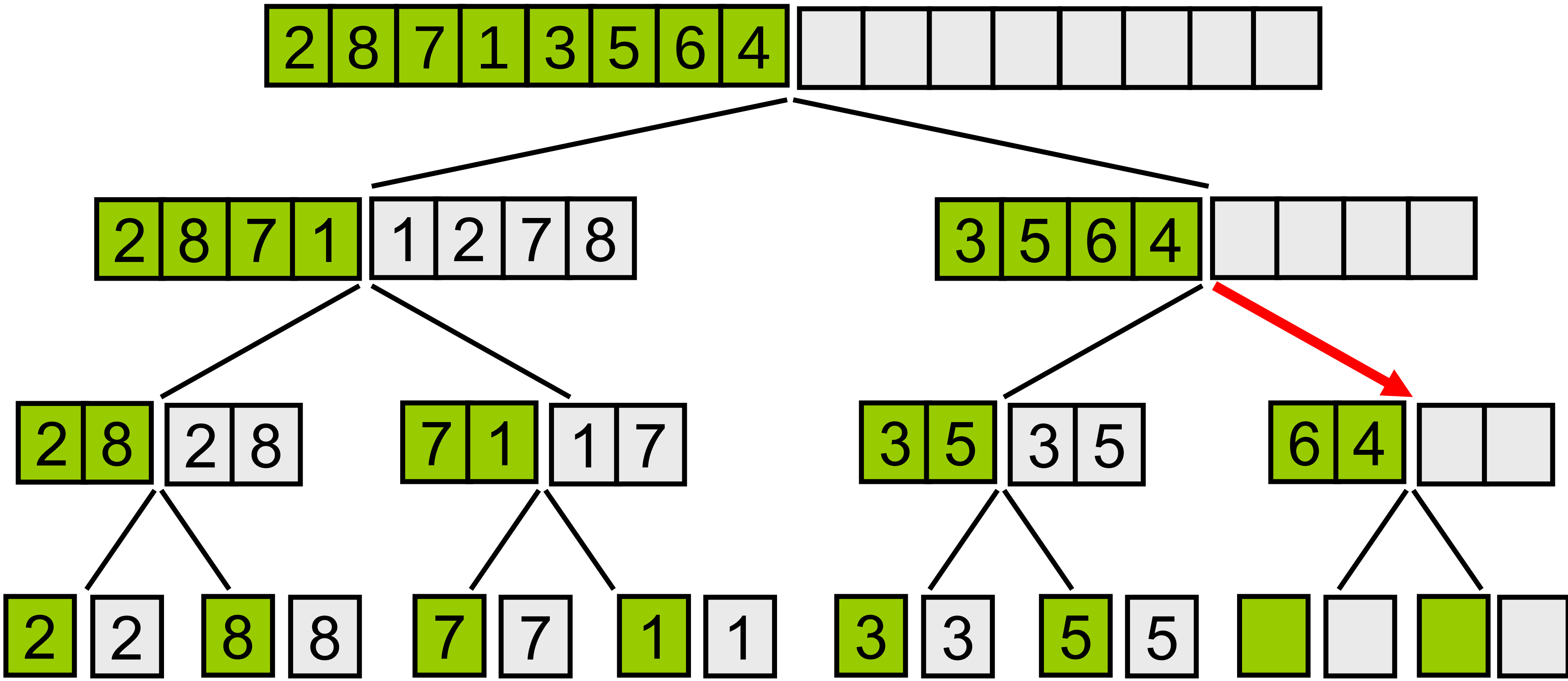


מיון מיזוג - דוגמא:

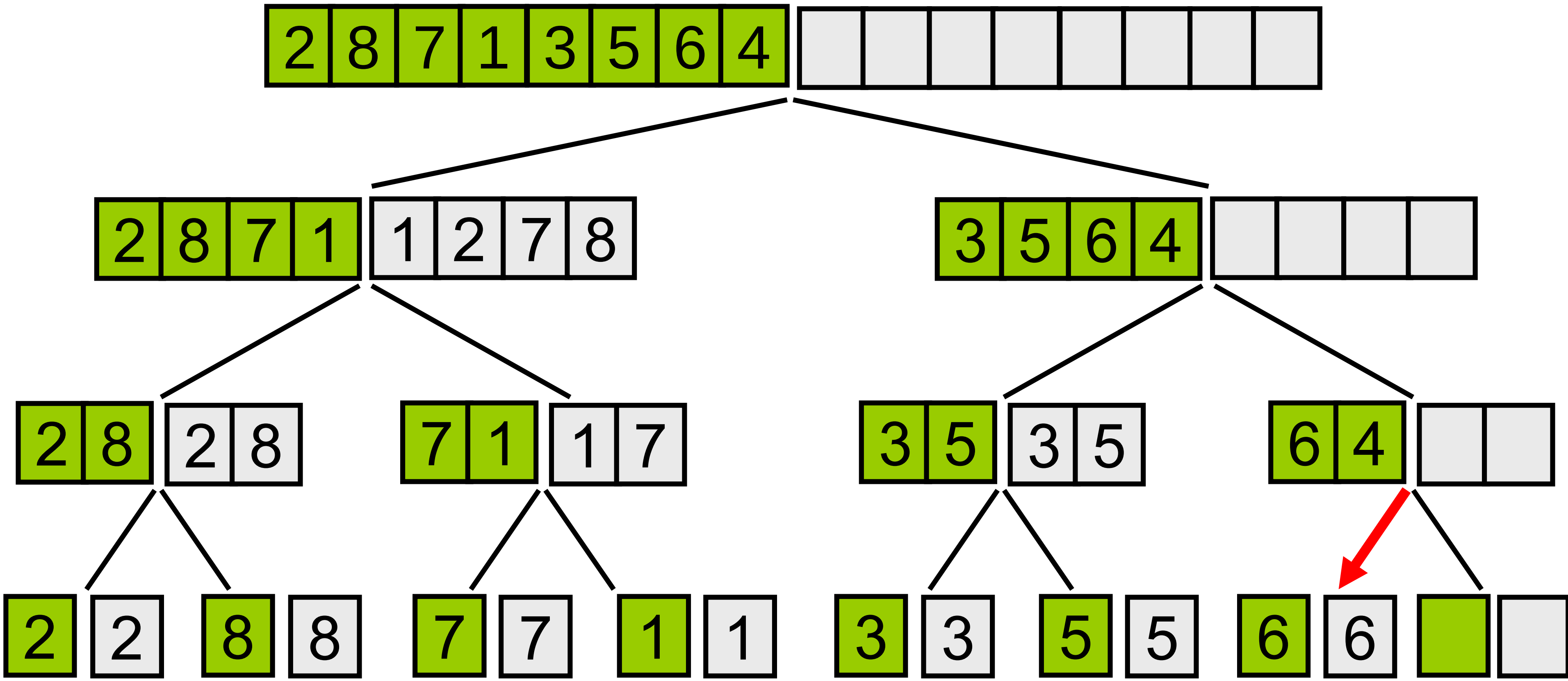


עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

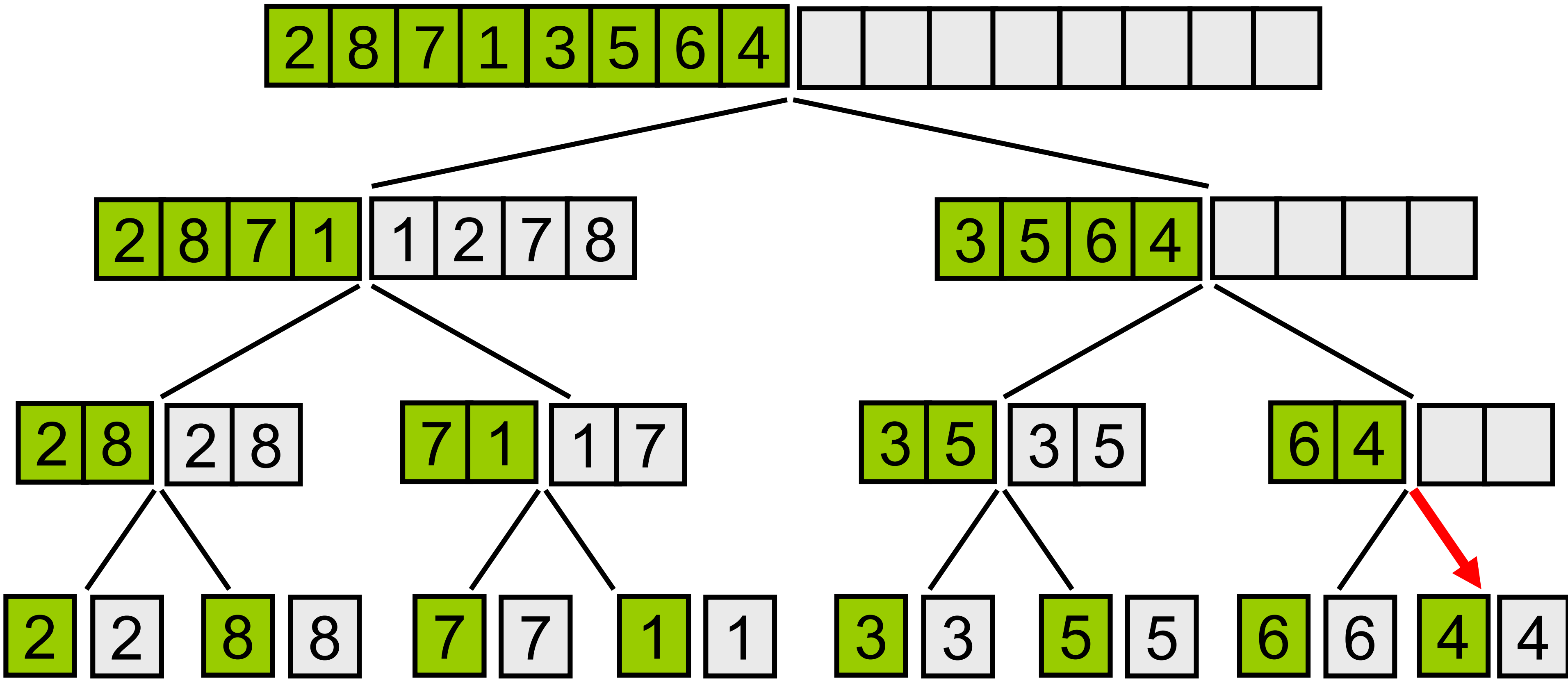
מיון מיזוג - דוגמא:



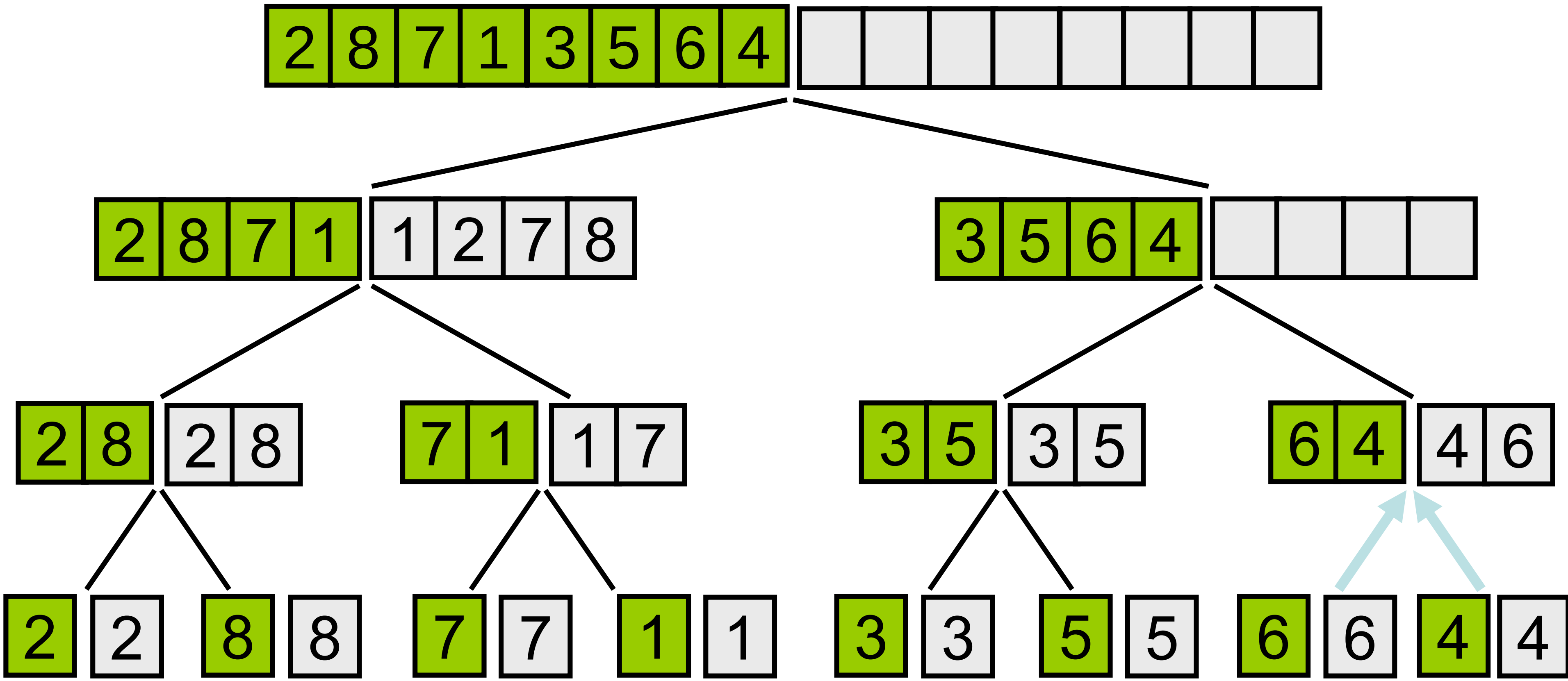
מיון מיזוג - דוגמא:



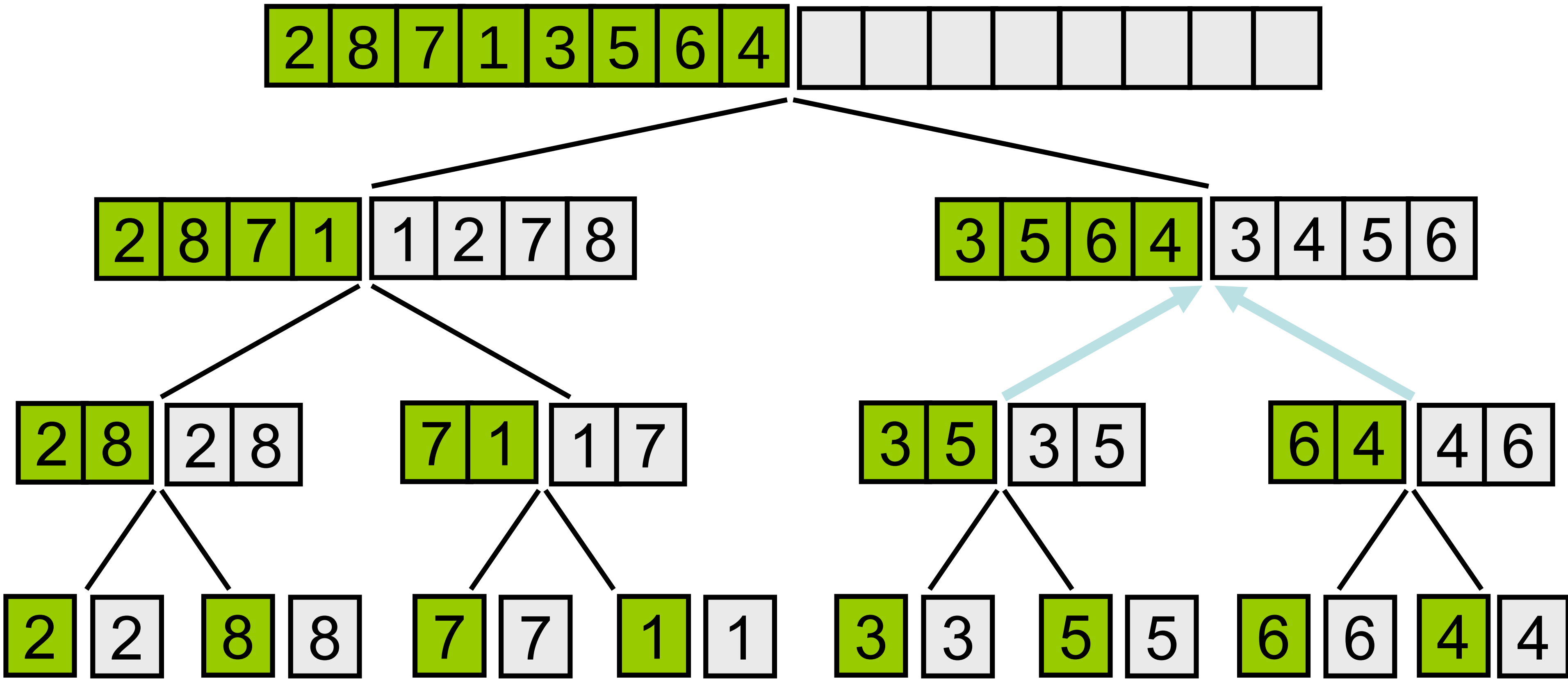
מיון מיזוג - דוגמא:



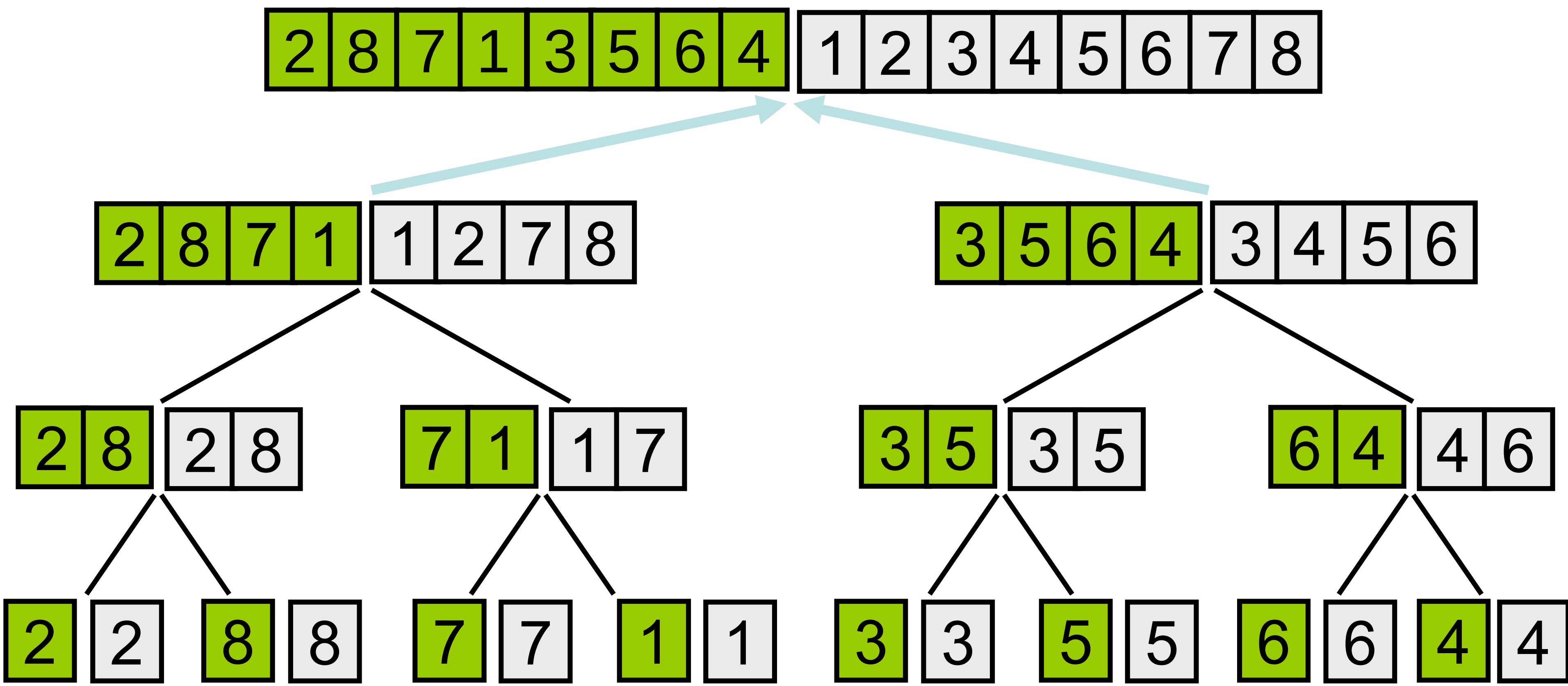
מיון מיזוג - דוגמא:



מיון מיזוג - דוגמא:



מיון מיזוג - דוגמא:



דוגמא: מיון-מיזוג

הקלט: סדרה S של *n* איברים.
הפלט: סדרה S ממוינת.

<u>האלגוריתם (פסאודו-קוד)</u>:

```
MergeSort(S)

if size(S) > 1
    (S1, S2) ← Split(S)
   MergeSort(S1)
   MergeSort(S2)
   S ← Merge(S1,S2)
```

דוגמא: מיון-מיזוג

הקלט: סדרה S של n איברים.
הפלט: סדרה S ממוינת.

<u>האלגוריתם (פסאודו-קוד)</u>:

```
MergeSort(S)

if size(S) > 1
    (S1, S2) ← Split(S)
    MergeSort(S1)
    MergeSort(S2)
    S ← Merge(S1,S2)
```

כיצד מבצעים מיזוג (Merge)?

מיזוג שני מערכים ממוינים למערך פלט:

21	56	78

13	47	85

מיזוג שני מערכים ממוינים למערך פלט:

21	56	78

13	47	85

מיזוג שני מערכים ממוינים למערך פלט:

21	56	78

13	47	85

13					

מיזוג שני מערכים ממוינים למערך פלט:

21	56	78

13	47	85

13					

מיזוג שני מערכים ממוינים למערך פלט:

21	56	78

13	47	85

13	21				

מיזוג שני מערכים ממוינים למערך פלט:

21	56	78

13	47	85

13	21				

מיזוג שני מערכים ממוינים למערך פלט:

21	56	78

13	47	85

13	21	47			

מיזוג שני מערכים ממוינים למערך פלט:

21	$\boxed{56}$	78

13	47	$\boxed{85}$

13	21	47			

מיזוג שני מערכים ממוינים למערך פלט:

21	$\boxed{56}$	78

13	47	$\boxed{85}$

13	21	47	56		

עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

מיזוג שני מערכים ממוינים למערך פלט:

21	56	78

13	47	85

13	21	47	56		

מיזוג שני מערכים ממוינים למערך פלט:

21	56	78

13	47	85

13	21	47	56	78	

מיזוג שני מערכים ממוינים למערך פלט:

21	56	$\boxed{78}$

13	47	$\boxed{85}$

13	21	47	56	78	85

מיזוג שני חלקי מערך ממוינים במקום:

כיצד מבצעים מיזוג כאשר הקלט נתון בתוך מערך אחד?
(זה בעצם מה שנדרש בתוך מיון-מיזוג)

13	47	85	21	56	78

מיזוג שני חלקי מערך ממוינים במקום:

נשתמש במערך עזר:

13	47	85	21	56	78

מיזוג שני חלקי מערך ממוינים במקום:

נעתיק למערך העזר את איברי מערך הקלט:

13	47	85	78	56	21

13	47	85	21	56	78

מיזוג שני חלקי מערך ממוינים במקום:

נשווה את איברי הקצה במערך העזר:

i					j
$\boxed{13}$	47	85	78	56	$\boxed{21}$

מיזוג שני חלקי מערך ממוינים במקום:

נעתיק את הקטן מביניהם בחזרה למערך הקלט:

	i				j
13	47	85	78	56	21

13					

מיזוג שני חלקי מערך ממוינים במקום:

נחזור על התהליך עד לסיום:

	i			j	
13	47	85	78	56	21

13	21				

מיזוג שני חלקי מערך ממוינים במקום:

נחזור על התהליך עד לסיום:

		i		j	
13	47	85	78	56	21

13	21	47			

מיזוג שני חלקי מערך ממוינים במקום:

נחזור על התהליך עד לסיום:

		i	j		
13	47	85	78	56	21

13	21	47	56		

מיזוג שני חלקי מערך ממוינים במקום:

נחזור על התהליך עד לסיום:

		i j			
13	47	$\boxed{85}$	78	56	21

13	21	47	56	78	

מיזוג שני חלקי מערך ממוינים במקום:

נחזור על התהליך עד לסיום:

		j	i		
13	47	85	78	56	21

13	21	47	56	78	85

סיבוכיות זמן מיון מיזוג

ניתוח בעזרת נוסחת נסיגה

נסמן ב- $T(n)$ את זמן הריצה של מיון-מיזוג על סדרה באורך n

סיבוכיות זמן מיון מיזוג

ניתוח בעזרת נוסחת נסיגה

נסמן ב- $T(n)$ את זמן הריצה של מיון-מיזוג על סדרה באורך n

- בסיס הרקורסיה- למיין איבר אחד: קבוע c.

עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

סיבוכיות זמן מיון מיזוג

ניתוח בעזרת נוסחת נסיגה

נסמן ב- $T(n)$ את זמן הריצה של מיון-מיזוג על סדרה באורך n

- בסיס הרקורסיה- למיין איבר אחד: קבוע c.
- הזמן שלוקח למזג שתי סדרות ממוינות לינארי בסכום אורכי הסדרות

סיבוכיות זמן מיון מיזוג

ניתוח בעזרת נוסחת נסיגה

נסמן ב- T(n) את זמן הריצה של מיון-מיזוג על סדרה באורך n

- בסיס הרקורסיה- למיין איבר אחד: קבוע c.
- הזמן שלוקח למזג שתי סדרות ממוינות לינארי בסכום אורכי הסדרות
- לכן נרשום נוסחה רקורסיבית עבור T(n) :

$$T(n) = \begin{cases} c & n = 1 \\ 2T(n/2) + bn & n \geq 2 \end{cases}$$

פתרון נוסחאות נסיגה

שיטת האיטרציה

- מפתחים את נוסחת הנסיגה עד שמתקבל סכום של איברים התלוי רק ב-n ובתנאי ההתחלה.
- חוסמים את הפתרון באמצעות שיטות למציאת ערכי סכומים

שיטת האיטרציה

$$T(n) = \quad 2T(n/2) + bn$$

שיטת האיטרציה

$$T(n) = 2T(n/2) + bn$$

$$T(n) = 2T(n/2) + bn =$$

שיטת האיטרציה

$$T(n) = 2T(n/2) + bn$$

$$T(n) = 2T(n/2) + bn =$$

$$= 2(2T(n/4) + bn/2) + bn$$

עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

שיטת האיטרציה

$$T(n) = 2T(n/2) + bn$$

$$T(n) = 2T(n/2) + bn =$$

$$= 2(2T(n/4) + bn/2) + bn = 4T(n/4) + 2(bn/2) + bn$$

שיטת האיטרציה

$$T(n) = \ 2T(n/2) + bn$$

$$T(n) = \ 2T(n/2) + bn =$$

$$= 4T(n/4) + 2bn$$

שיטת האיטרציה

$$T(n) = 2T(n/2) + bn$$

$$T(n) = 2T(n/2) + bn =$$

$$= 4T(n/4) + 2bn$$

$$= 4(2T(n/8) + (bn/4)) + 2bn$$

שיטת האיטרציה

$$T(n) = 2T(n/2) + bn$$

$$T(n) = 2T(n/2) + bn =$$

$$= 4T(n/4) + 2bn$$

$$= 4(2T(n/8) + (bn/4)) + 2bn = 8T(n/8) + 4(bn/4) + 2bn$$

שיטת האיטרציה

$$T(n) = \; 2T(n/2) + bn$$

$$T(n) = \; 2T(n/2) + bn =$$

$$= 4T(n/4) + 2bn$$

$$= 8T(n/8) + 3bn$$

שיטת האיטרציה

$$T(n) = \ 2T(n/2) + bn$$

$$T(n) = \ 2T(n/2) + bn$$

$$= 4T(n/4) + 2bn$$

$$= 8T(n/8) + 3bn$$

$$= 8(2T(n/16) + (bn/8)) + 3bn$$

שיטת האיטרציה

$$T(n) = 2T(n/2) + bn$$

$$T(n) = 2T(n/2) + bn$$

$$= 4T(n/4) + 2bn$$

$$= 8T(n/8) + 3bn$$

$$= 8(2T(n/16) + (bn/8)) + 3bn = 16T(n/16) + 8(bn/8)) + 3bn$$

שיטת האיטרציה

$$T(n) = 2T(n/2) + bn$$

$$T(n) = 2T(n/2) + bn$$

$$= 4T(n/4) + 2bn$$

$$= 8T(n/8) + 3bn$$

$$= 16T(n/16) + 4bn$$

שיטת האיטרציה

$$T(n) = 2T(n/2) + bn$$

$$T(n) = 2T(n/2) + bn$$

$$= 4T(n/4) + 2bn$$

$$= 8T(n/8) + 3bn$$

$$= 16T(n/16) + 4bn$$

$$= \bullet$$

$$= \bullet$$

$$= \bullet$$

שיטת האיטרציה

$$T(n) = 2T(n/2) + bn$$

$$T(n) = 2T(n/2) + bn$$

$$= 4T(n/4) + 2bn$$

$$= 8T(n/8) + 3bn$$

$$= 16T(n/16) + 4bn$$

$$= \quad \bullet$$

$$= \quad \bullet$$

$$= 2^i T(n/2^i) + ibn$$

שיטת האיטרציה

קיבלנו:

$$T(n) = 2^i T(\underbrace{n/2^i}_{1}) + ibn$$

כמה שלבים ידרשו עד שנגיע לתנאי ההתחלה, T(1)

שיטת האיטרציה

קיבלנו: $T(n) = \quad 2^i T(n/2^i) + ibn$

כמה שלבים ידרשו עד שנגיע לתנאי ההתחלה, T(1)

$$\lfloor n/2^i \rfloor = 1 \quad \Leftarrow \quad i = \log n$$

שיטת האיטרציה

קיבלנו: $T(n) = \ 2^i T(n/2^i) + ibn$

כמה שלבים ידרשו עד שנגיע לתנאי ההתחלה, T(1)

$$\lfloor n/2^i \rfloor = 1 \quad \Leftarrow \quad i = \log n$$

$$T(n) \le \ 2^{\log n} T(n/2^{\log n}) + \log n \ bn$$

שיטת האיטרציה

קיבלנו: $T(n) = 2^i T(n/2^i) + ibn$

כמה שלבים ידרשו עד שנגיע לתנאי ההתחלה, T(1)

$$\lfloor n/2^i \rfloor = 1 \quad \Leftarrow \quad i = \log n$$

$$T(n) \le 2^{\log n} T(n/2^{\log n}) + \log n \; bn$$

$$= nT(1) + bn \log n$$

שיטת האיטרציה

קיבלנו:
$$T(n) = 2^i T(n/2^i) + ibn$$

כמה שלבים ידרשו עד שנגיע לתנאי ההתחלה, T(1)

$$\lfloor n/2^i \rfloor = 1 \quad \Rightarrow \quad i = \log n$$

$$T(n) \le 2^{\log n} T(n/2^{\log n}) + \log n \; bn$$
$$= nT(1) + bn \log n$$
$$= nc + bn \log n$$

שיטת האיטרציה

קיבלנו: $T(n) = 2^i T(n/2^i) + ibn$

כמה שלבים ידרשו עד שנגיע לתנאי ההתחלה, T(1)

$$\lfloor n/2^i \rfloor = 1 \quad \Rightarrow \quad i = \log n$$

$$T(n) \le 2^{\log n} T(n/2^{\log n}) + \log n \; bn$$
$$= nT(1) + bn \log n$$
$$= nc + bn \log n$$
$$= O(n \; \log n)$$

שיטת האיטרציה

דוגמא 2:

$$T(n) = 3T(n/4) + n$$

שיטת האיטרציה

דוגמא 2:

$$T(n) = 3T(n/4) + n$$

$$T(n) = n + 3T(n/4)$$

שיטת האיטרציה

דוגמא 2:

$$T(n) = 3T(n/4) + n$$

$$T(n) = n + 3T(n/4)$$

$$= n + 3(n/4 + 3T(n/16))$$

שיטת האיטרציה

דוגמא 2:

$$T(n) = 3T(n/4) + n$$

$$T(n) = n + 3T(n/4)$$

$$= n + 3(n/4 + 3T(n/16)) = n + 3n/4 + 9T(n/16)$$

שיטת האיטרציה

דוגמא 2:

$$T(n) = 3T(n/4) + n$$

$$T(n) = n + 3T(n/4)$$

$$= n + 3n/4 + 9T(n/16)$$

שיטת האיטרציה

דוגמא 2:

$$T(n) = 3T(n/4) + n$$

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(n/4) \\ &= n + 3n/4 + 9T(n/16) \\ &= n + 3n/4 + 9(n/16 + 3T(n/64)) \end{aligned}$$

עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

שיטת האיטרציה

דוגמא 2:

$$T(n) = 3T(n/4) + n$$

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(n/4) \\ &= n + 3n/4 + 9T(n/16) \\ &= n + 3n/4 + 9(n/16 + 3T(n/64)) \\ &= n + 3n/4 + 9n/16 + 27T(n/64) \end{aligned}$$

שיטת האיטרציה

דוגמא 2:

$$T(n) = 3T(n/4) + n$$

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(n/4) \\ &= n + 3n/4 + 9T(n/16) \\ &= n + 3n/4 + 9n/16 + 27T(n/64) \end{aligned}$$

שיטת האיטרציה

דוגמא 2:

$$T(n) = 3T(n/4) + n$$

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(n/4) \\ &= n + 3n/4 + 9T(n/16) \\ &= n + 3n/4 + 9n/16 + 27T(n/64) \\ &= \bullet \\ &= \bullet \\ &= \bullet \end{aligned}$$

שיטת האיטרציה

דוגמא 2: $T(n) = 3T(n/4) + n$

$$T(n) = n + 3T(n/4)$$
$$= n + 3n/4 + 9T(n/16)$$
$$= n + 3n/4 + 9n/16 + 27T(n/64)$$
$$= \bullet$$
$$= \bullet$$
$$= n + \frac{3}{4}n + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \left(\frac{3}{4}\right)^3 n + \bullet \bullet \bullet + \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} n + 3^i T\left(\frac{n}{4^i}\right)$$

שיטת האיטרציה

קיבלנו:

$$T(n) = n + \frac{3}{4}n + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \left(\frac{3}{4}\right)^3 n + \bullet\ \bullet\ \bullet + \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} n + 3^i T(\frac{n}{4^i})$$

כמה שלבים ידרשו עד שנגיע לתנאי ההתחלה, n=1

$$i = \log_4 n \quad \Leftarrow \quad \lfloor n/4^i \rfloor = 1$$

$$T(n) = n + \frac{3}{4}n + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \left(\frac{3}{4}\right)^3 n + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4 n-1} n + 3^{\log_4 n} T\left(\frac{n}{4^{\log_4 n}}\right)$$

$$\le n \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i + 3^{\log_4 n} T(1)$$

שיטת האיטרציה

קיבלנו:

$$T(n) \le n \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i + 3^{\log_4 n} T(1)$$

$$\le n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + 3^{\log_4 n} T(1)$$

שיטת האיטרציה

קיבלנו:

$$T(n) \le n \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i + 3^{\log_4 n} T(1)$$

$$\le n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + 3^{\log_4 n} T(1)$$

הערה: טור הנדסי יורד = 1/1-q

שיטת האיטרציה

קיבלנו:

$$T(n) \le n \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i + 3^{\log_4 n} T(1)$$

$$\le n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + 3^{\log_4 n} T(1)$$

הערה: טור הנדסי יורד = 1/1-q

הערה: $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

שיטת האיטרציה

קיבלנו:

$$T(n) \le n \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i + 3^{\log_4 n} T(1)$$

$$\le n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + 3^{\log_4 n} T(1)$$

$$= 4n + n^{\log_4 3} = 4n + n^{0.793\ldots} = O(n)$$

הערה: טור הנדסי יורד = 1/1-q

הערה: $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

החלפת משתנים

דוגמא 1:

$$T(n) = T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + 1$$

החלפת משתנים

דוגמא 1:

$$T(n) = T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + 1$$

נסמן:

$$m = \log n$$

החלפת משתנים

דוגמא 1:

$$T(n) = T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + 1$$

נסמן:

$$m = \log n$$

$$\Leftarrow \quad n = 2^m \quad \Leftarrow \quad \sqrt{n} = 2^{\frac{m}{2}}$$

החלפת משתנים

דוגמא 1:

$$T(n) = T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + 1$$

נסמן:
$$m = \log n$$

$$\Leftarrow \quad n = 2^m \quad \Leftarrow \quad \sqrt{n} = 2^{\frac{m}{2}}$$

נציב בנוסחה:
$$T(2^m) = T(2^{\frac{m}{2}}) + 1$$

החלפת משתנים

דוגמא 1:

$$T(n)=T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)+1$$

נסמן: $m=\log n$

$\Leftarrow$ $n=2^m$ $\Leftarrow$ $\sqrt{n}=2^{\frac{m}{2}}$

נציב בנוסחה: $T(2^m)=T(2^{\frac{m}{2}})+1$

נסמן: $S(m)=T(2^m)$

ונקבל את הנוסחה: $S(m)=S(\frac{m}{2})+1$

החלפת משתנים

קיבלנו: $S(m) = S(\frac{m}{2}) + 1$

נפתור לפי שיטת האב:

$$a = 1 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad f(m) = 1$$

$$m^{\log_b a} = m^{\log_2 1} = m^0 = 1$$

מקרה 2 במשפט האב, לכן $S(m) = \Theta(m^{\log_b a} \log m) = \Theta(\log m)$

החלפת משתנים

קיבלנו: $S(m) = S(\frac{m}{2}) + 1$

נפתור לפי שיטת האב:

$$a = 1 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad f(m) = 1$$

$$m^{\log_b a} = m^{\log_2 1} = m^0 = 1$$

מקרה 2 במשפט האב, לכן $S(m) = \Theta(m^{\log_b a} \log m) = \Theta(\log m)$

נחזור ל- $T(n)$

$$\mathrm{T}(n) = T(2^m) = S(m) = \Theta(\log m) = \Theta(\log\log n)$$

$$m = \log n$$

החלפת משתנים

דוגמא 2:

$$T(n) = 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \log n$$

החלפת משתנים

דוגמא 2:

$$T(n) = 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \log n$$

נסמן: $m = \log n$

$$\Leftarrow \quad n = 2^m \quad \Leftarrow \quad \sqrt{n} = 2^{\frac{m}{2}}$$

החלפת משתנים

דוגמא 2:

$$T(n) = 2T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + \log n$$

נסמן: $m = \log n$

$\Leftarrow$ $n = 2^m$ $\Leftarrow$ $\sqrt{n} = 2^{\frac{m}{2}}$

נציב בנוסחה: $T(2^m) = 2T(2^{\frac{m}{2}}) + m$

החלפת משתנים

דוגמא 2:

$$T(n) = 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \log n$$

נסמן: $m = \log n$

$\Leftarrow$ $n = 2^m$ $\Leftarrow$ $\sqrt{n} = 2^{\frac{m}{2}}$

נציב בנוסחה: $T(2^m) = 2T(2^{\frac{m}{2}}) + m$

נסמן: $S(m) = T(2^m)$

ונקבל את הנוסחה: $S(m) = 2S(\frac{m}{2}) + m$

החלפת משתנים

$$S(m) = 2S(\frac{m}{2}) + m$$

נוסחה שכבר פתרנו: $S(m) = O(m \ \log m)$

עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

החלפת משתנים

$$S(m) = 2S(\frac{m}{2}) + m$$

נוסחה שכבר פתרנו: $S(m) = O(m \ \log m)$

נחזור ל- $T(n)$

$$T(n) = T(2^m) = S(m) = O(m \ \log m) = \Theta(\log n \ \log\log n)$$