

עצים מאוזנים

משפחה של עצים נקראת מאוזנת אם מתקיים
לכל עץ במשפחה גובה העץ הוא $O(\log n)$
 $n =$ מספר הצמתים בעץ.

דוגמא

- עצים אדומים-שחורים
- עצי AVL

עצי AVL

ADELSON-VELSKY, LANDIS
1962

עצי AVL

הגדרה:

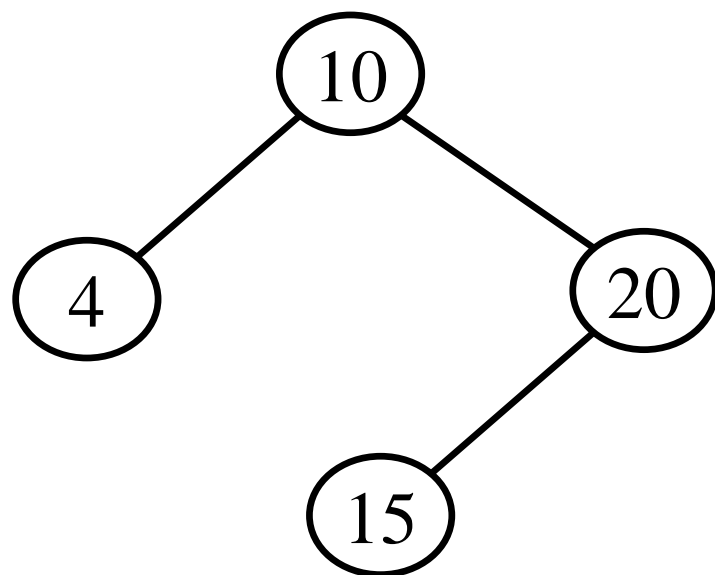
עץ AVL הוא עץ חיפוש בינרי שמקיים:

לכל צומת ההפרש בין הגובה של תת העץ השמאלי
ותת העץ הימני של הצומת הוא:

$-1, 0, 1$

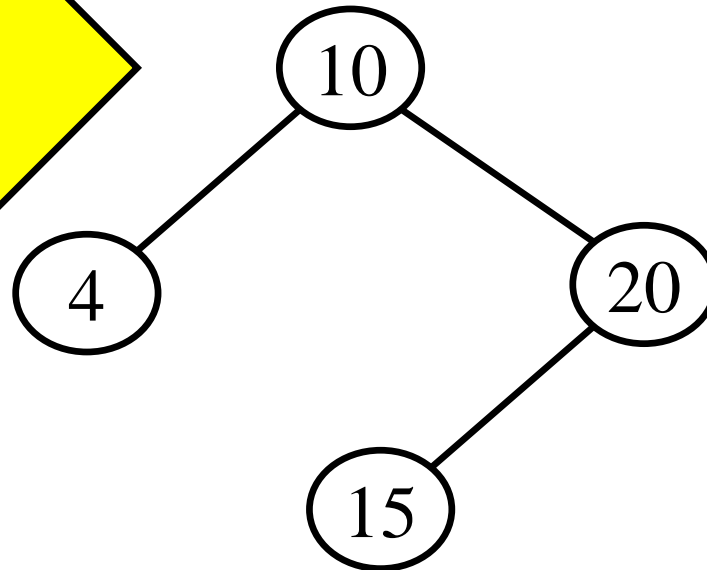
ערך זה נקרא גורם האיזון

דוגמאות

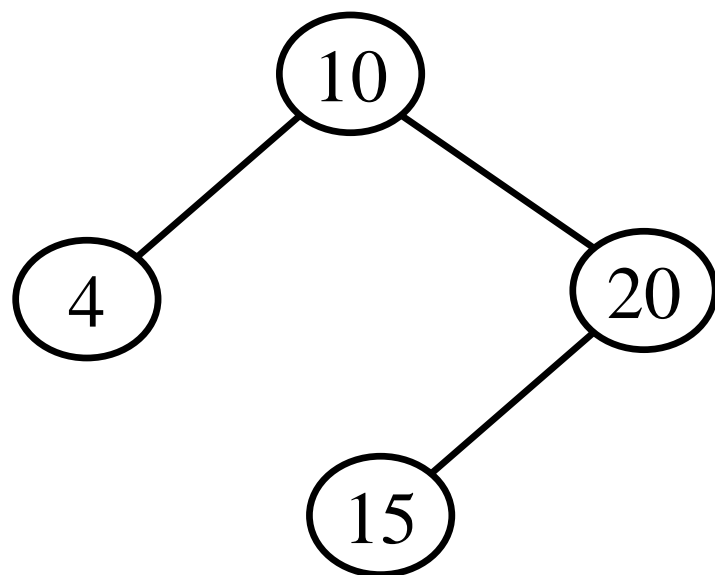


דוגמאות

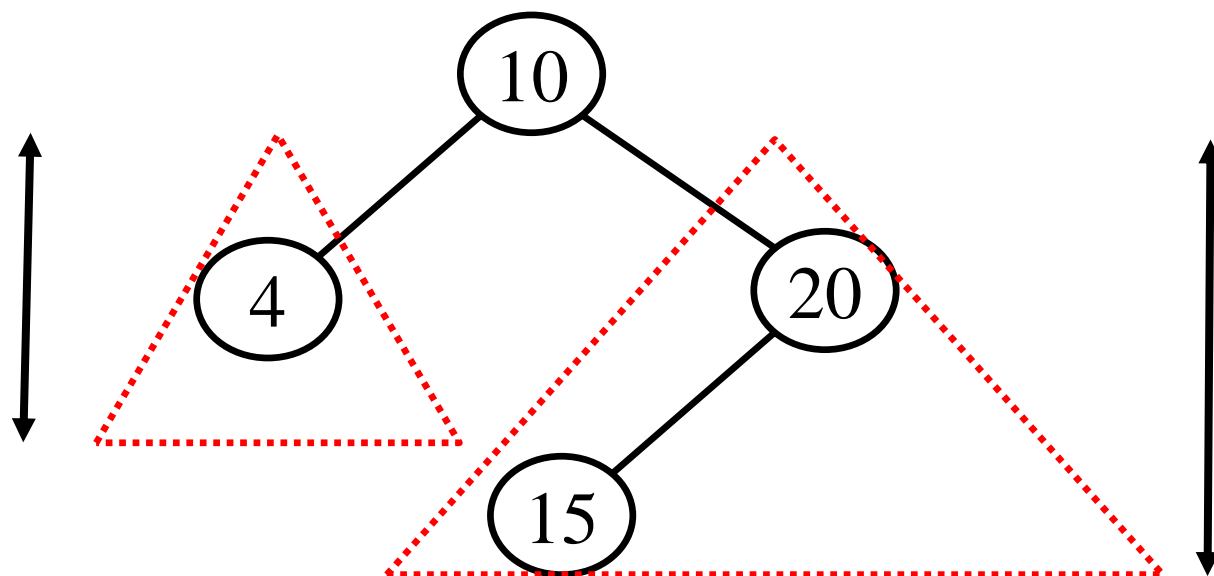
מספיק לדעת לחשב
גורם איזון רק לשורש.
מדוע?



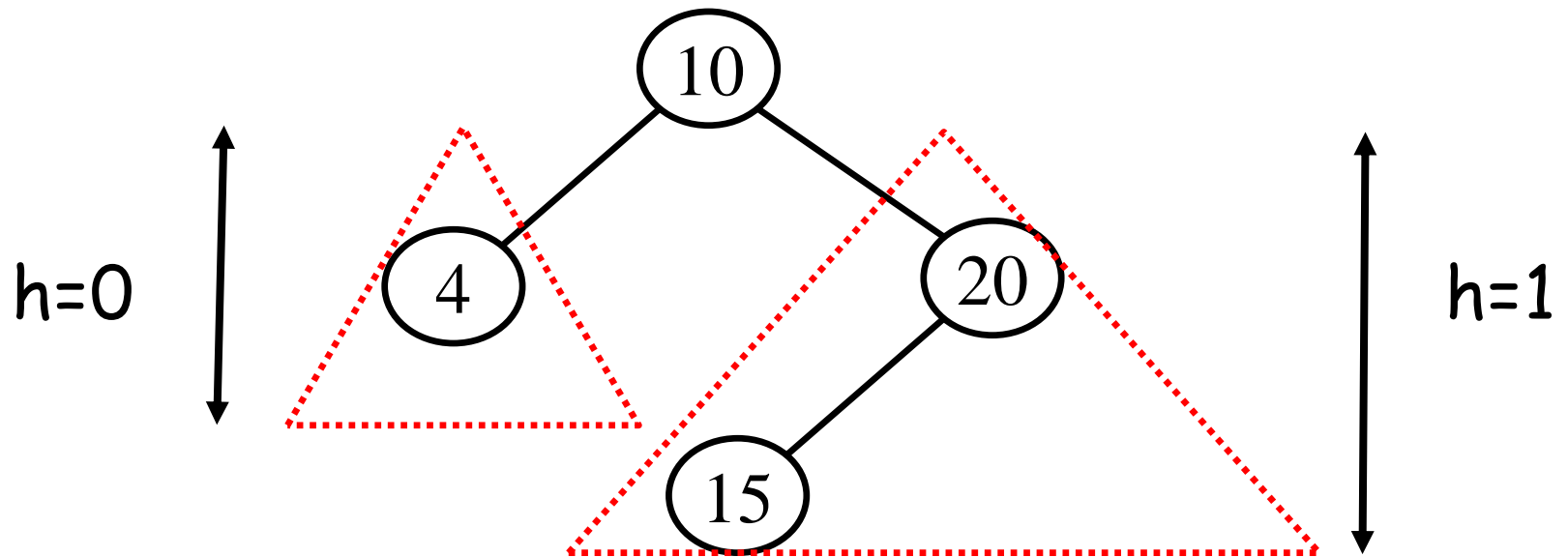
חשב את גורם האיזון



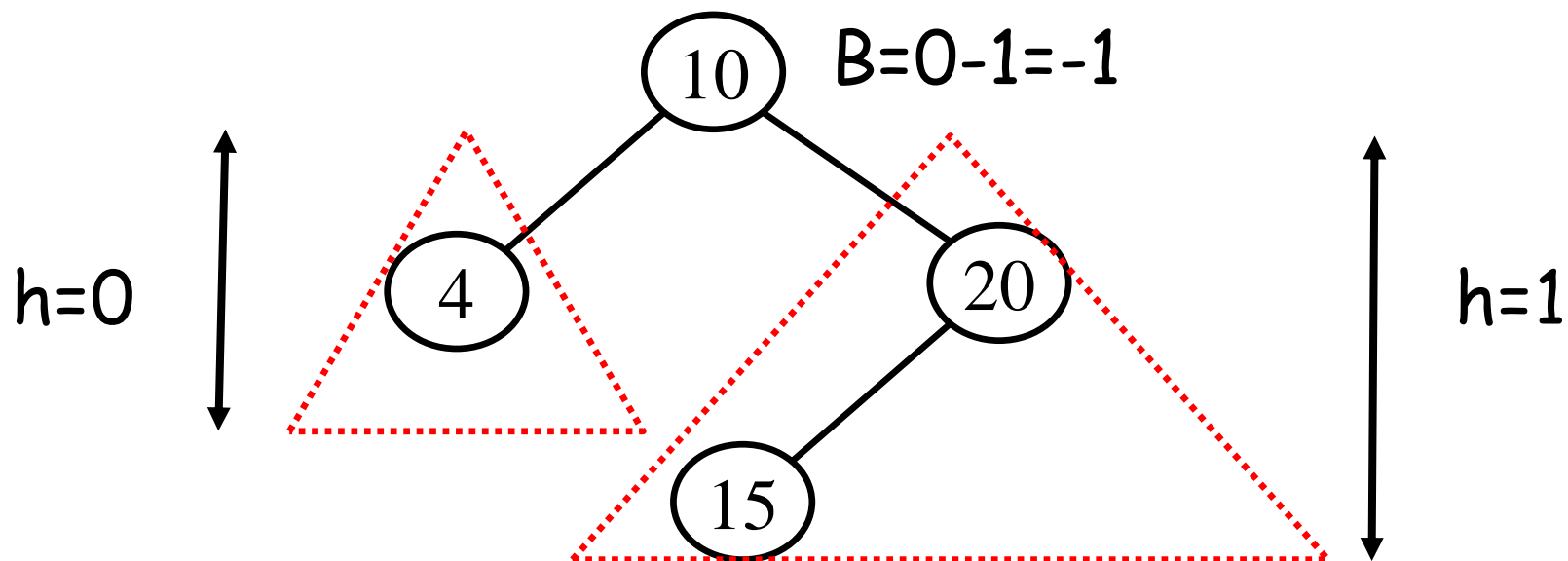
חשב את גורם האיזון



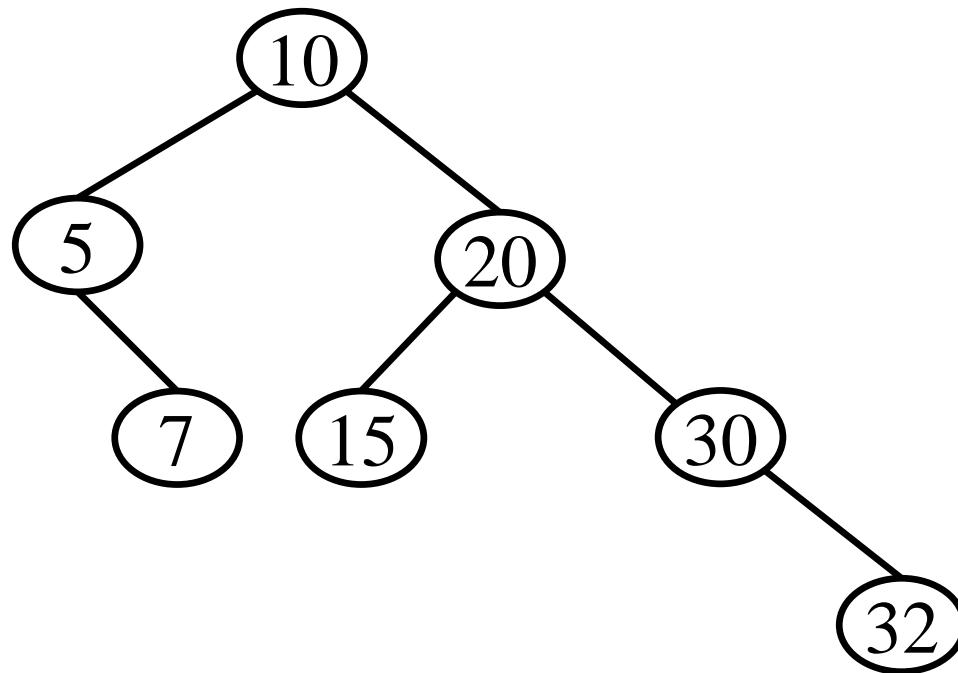
חשב את גורם האיזון



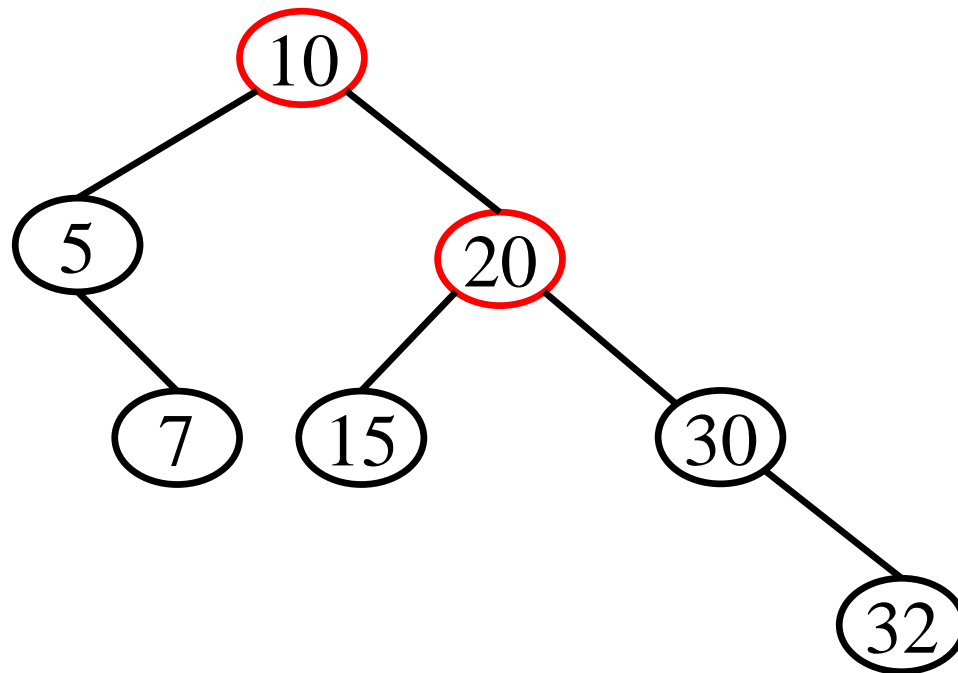
חשב את גורם האיזון



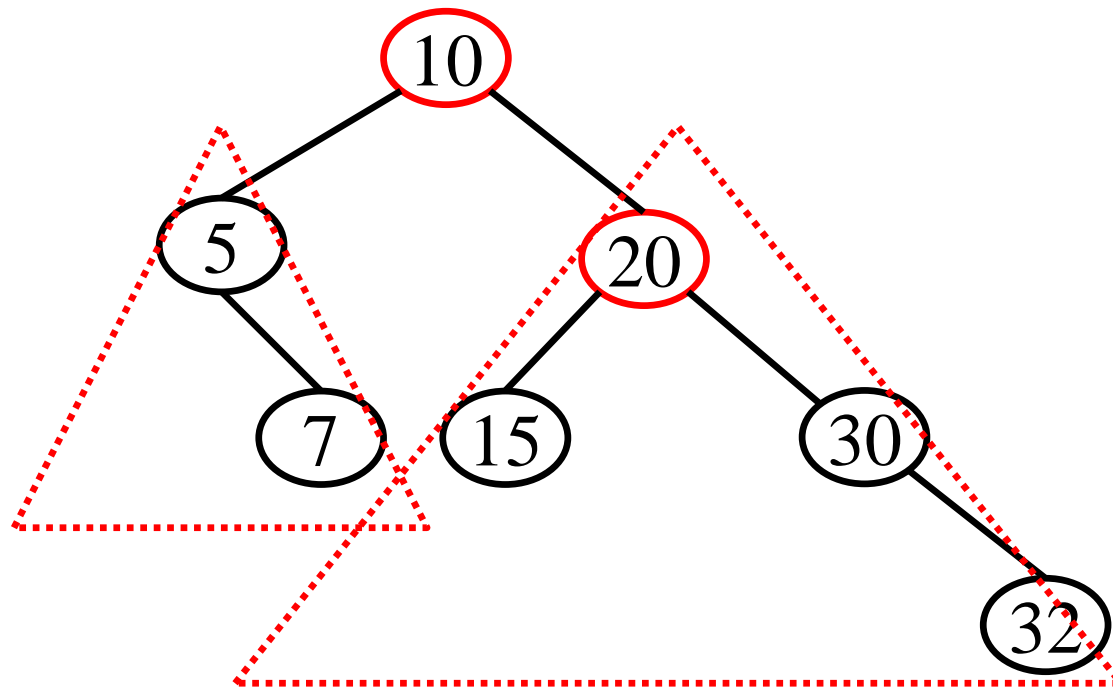
דוגמאות



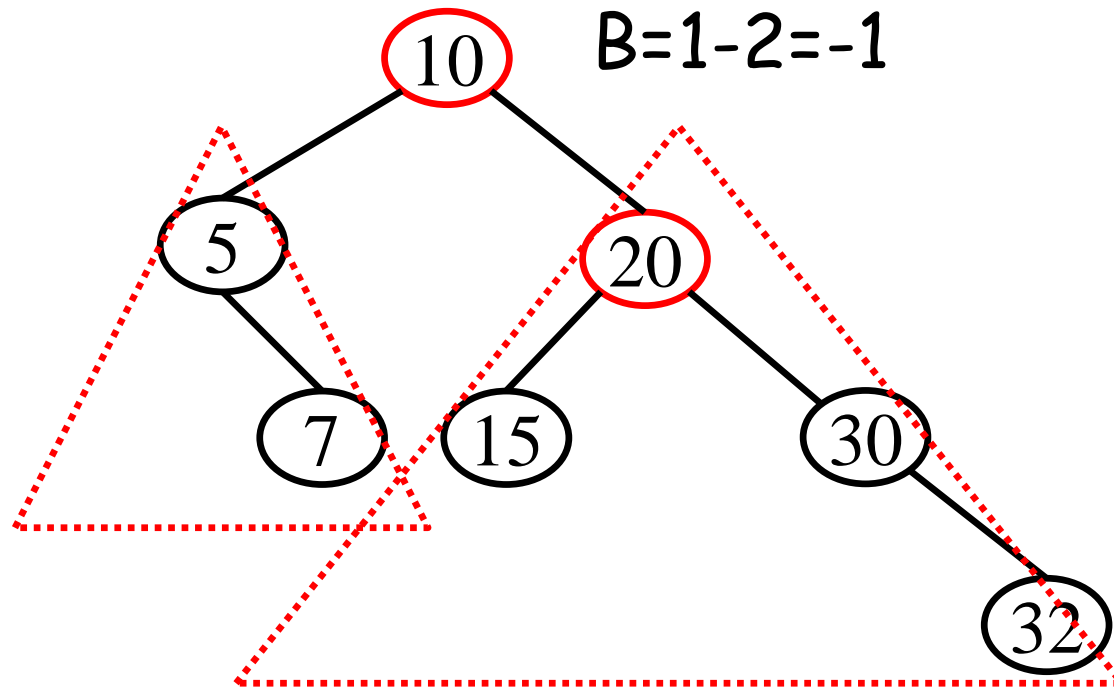
דוגמאות



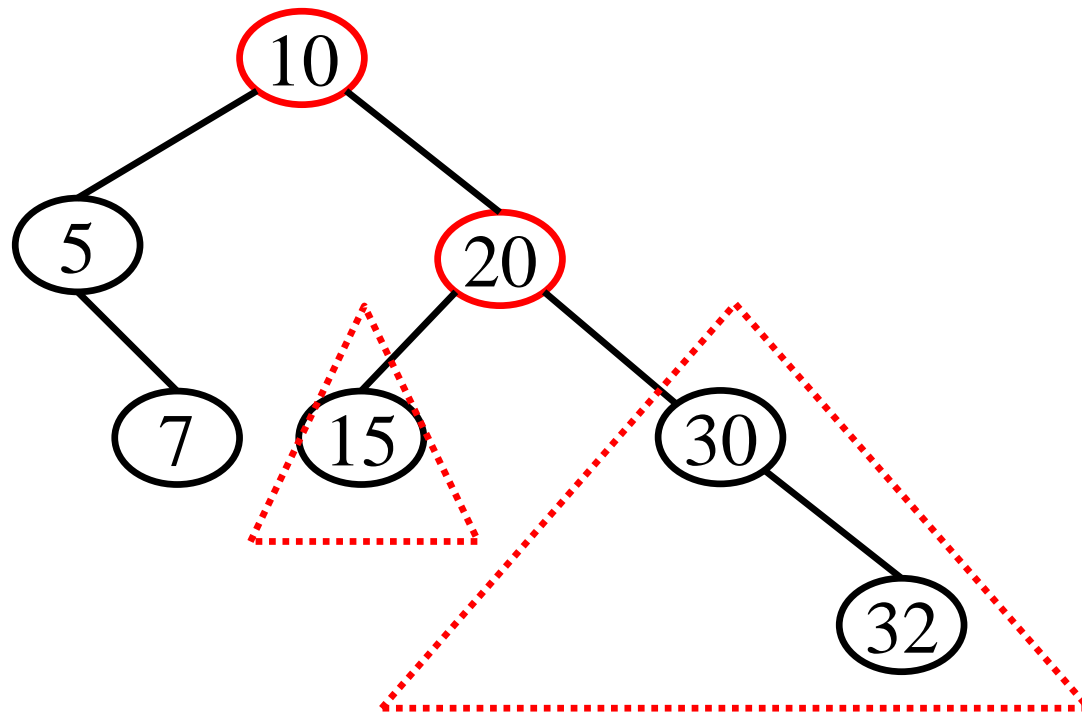
דוגמאות



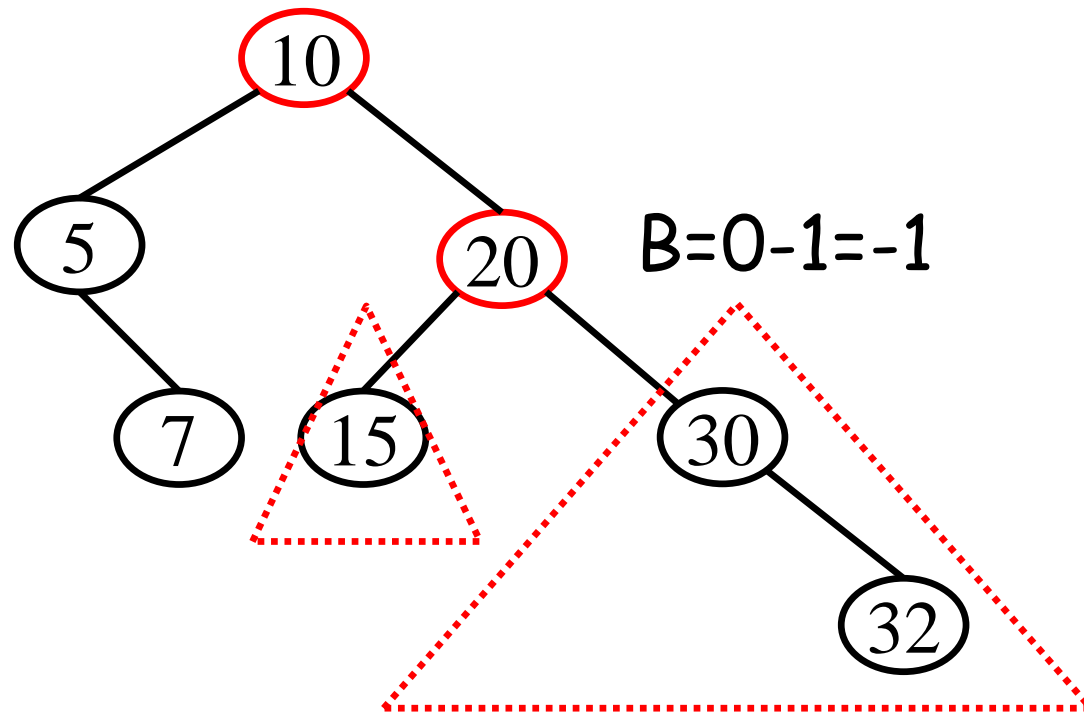
דוגמאות



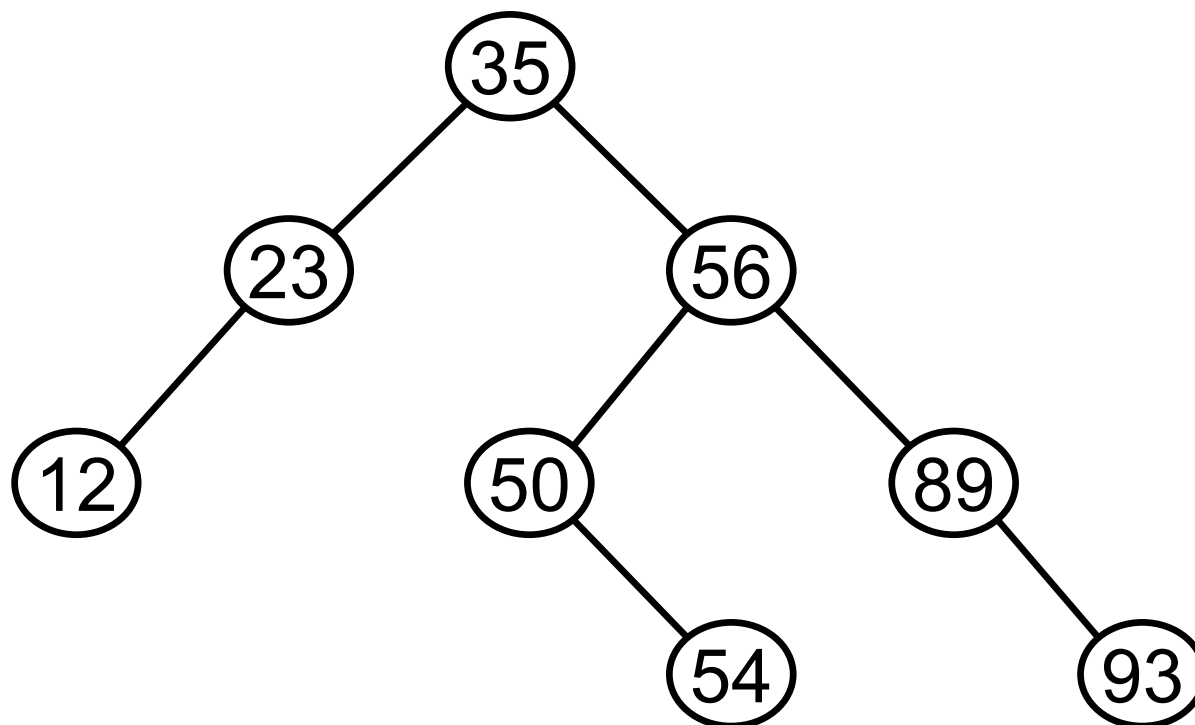
דוגמאות



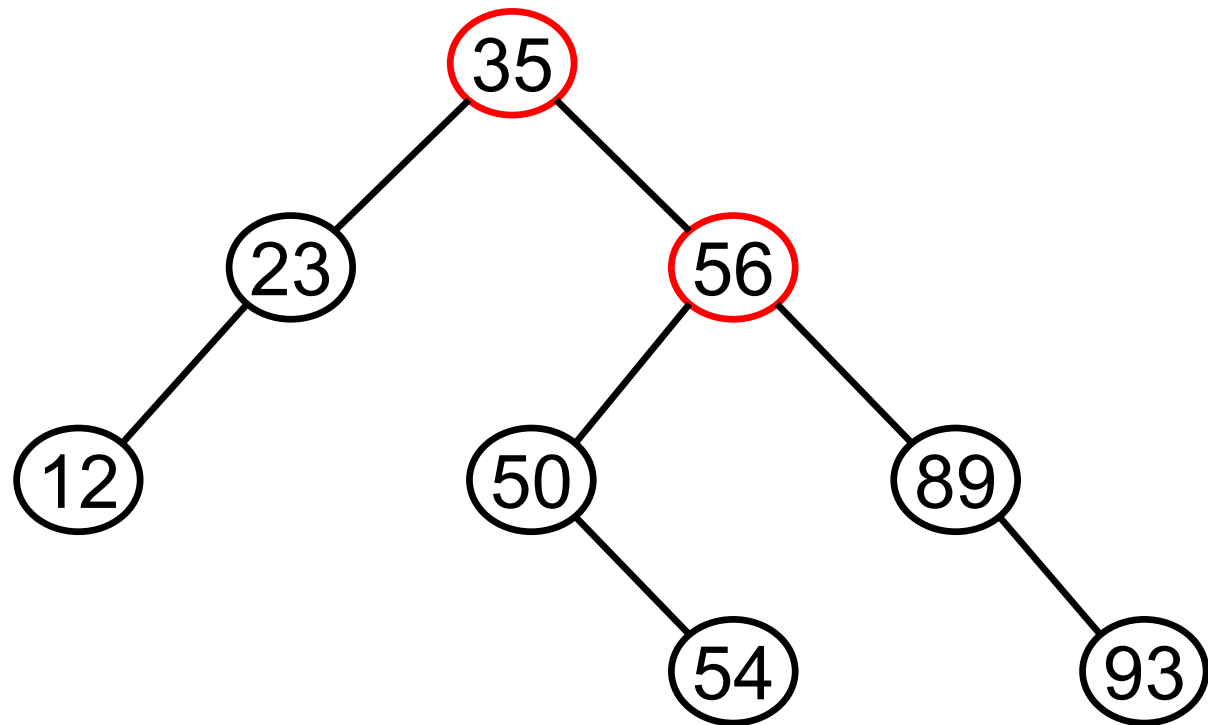
דוגמאות



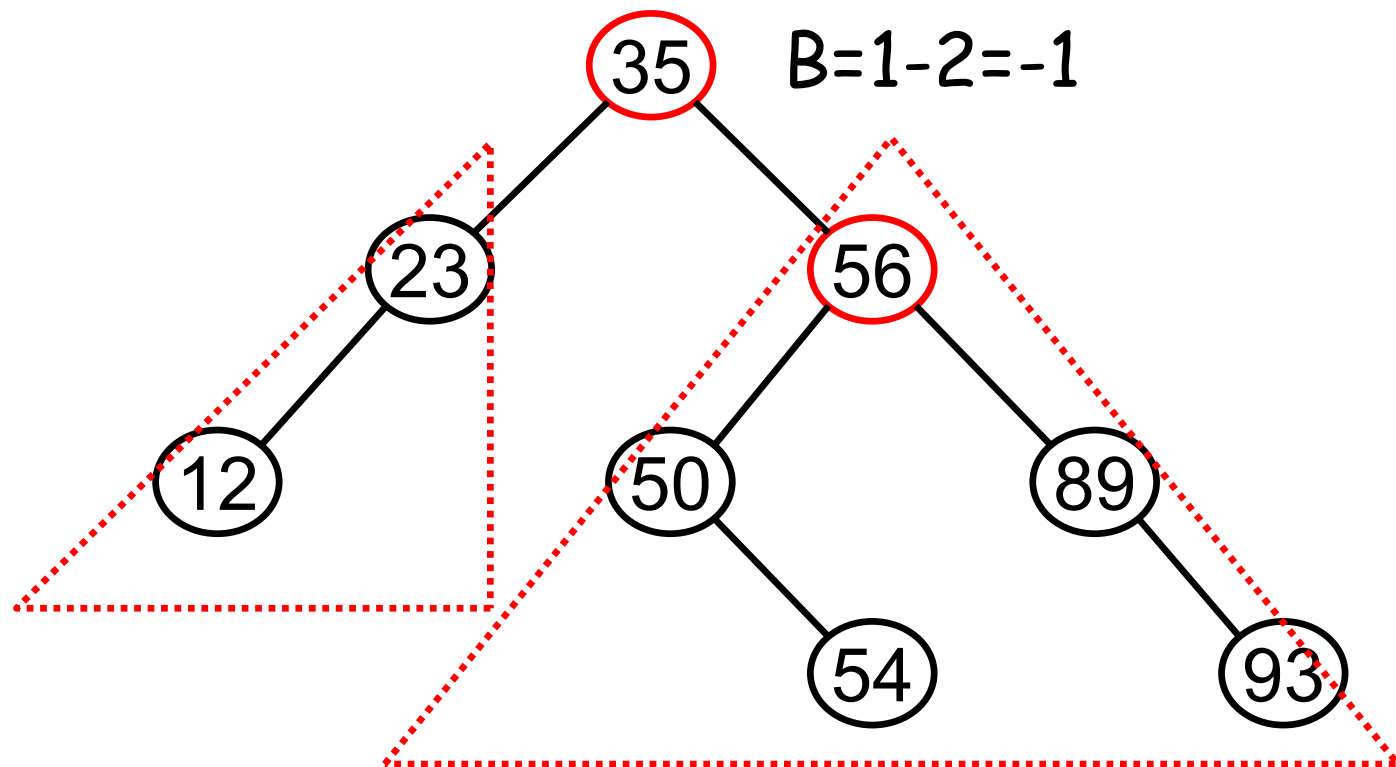
דוגמאות



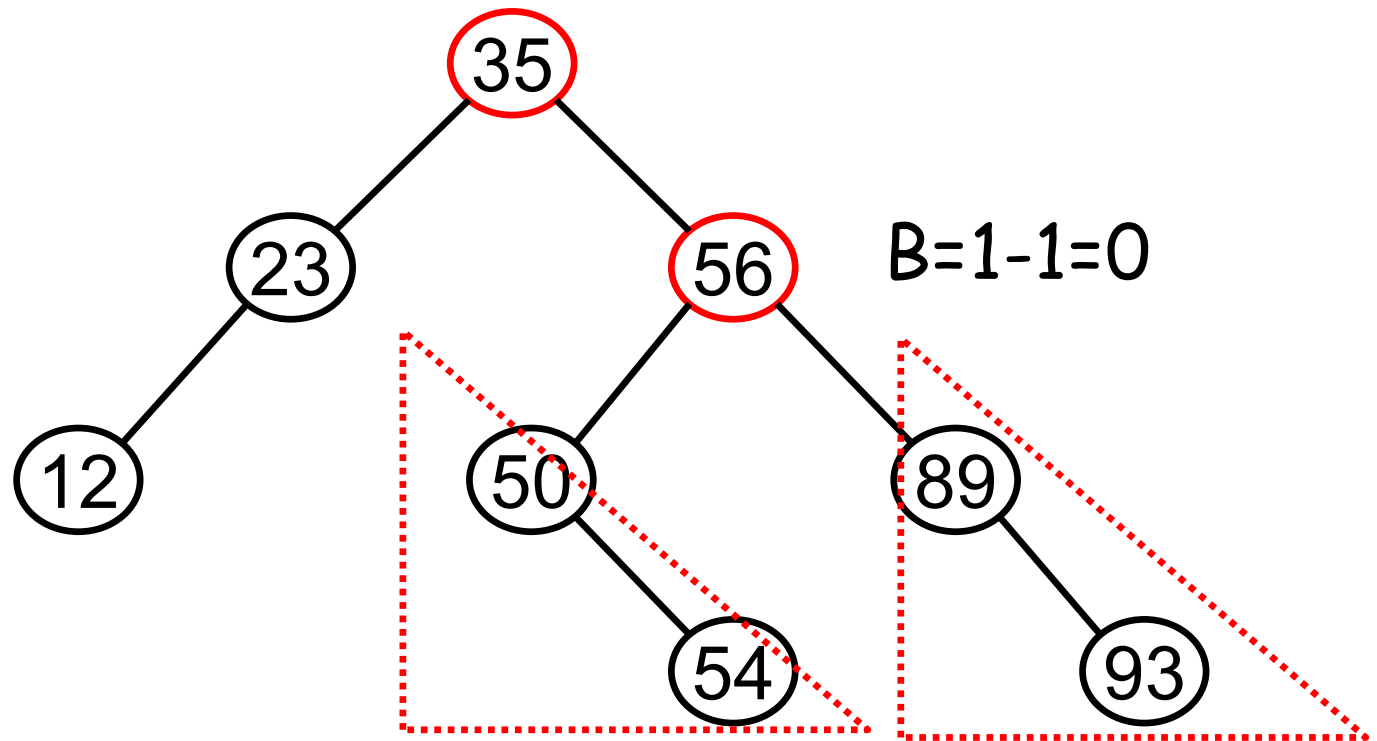
דוגמאות



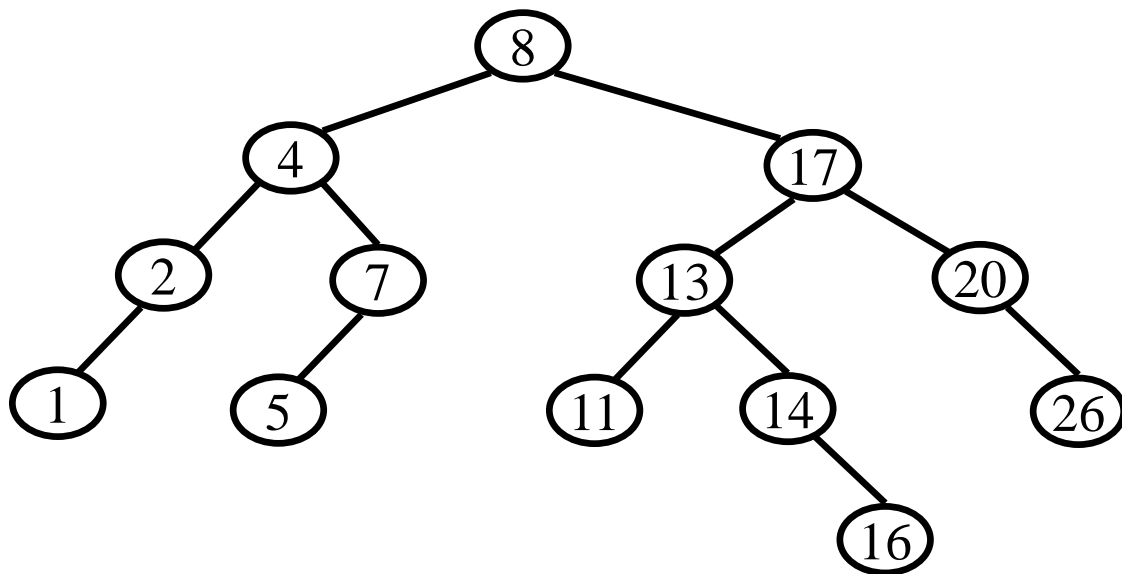
דוגמאות



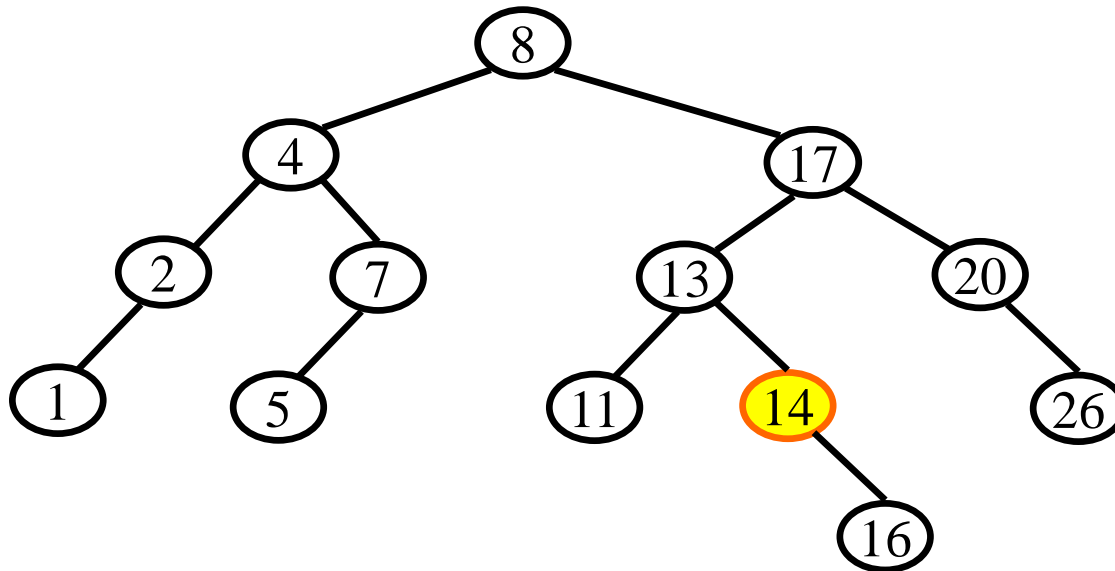
דוגמאות



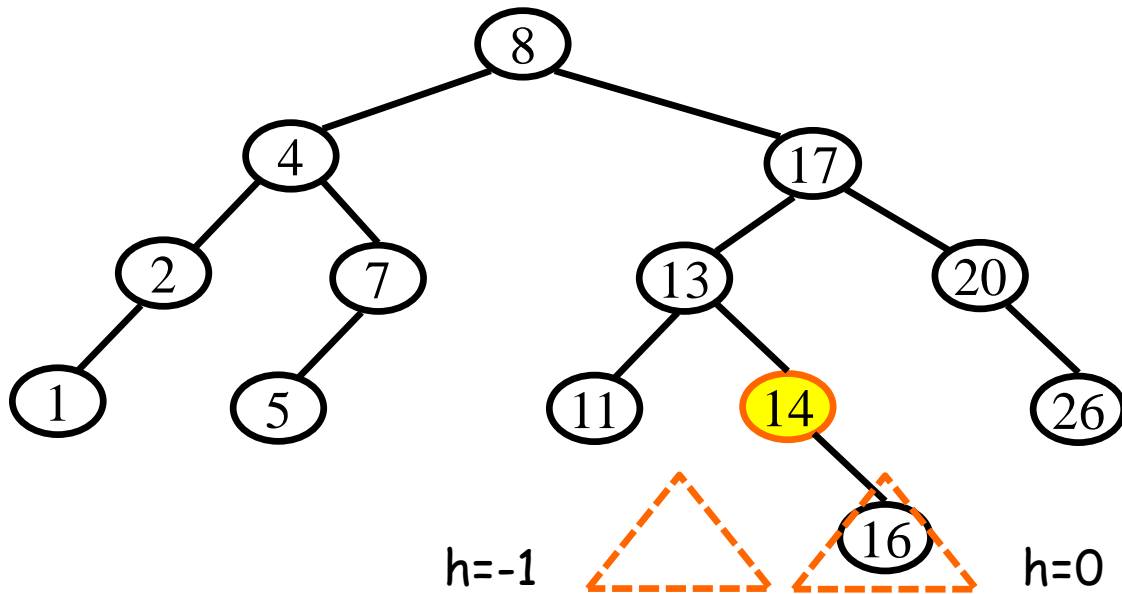
דוגמאות



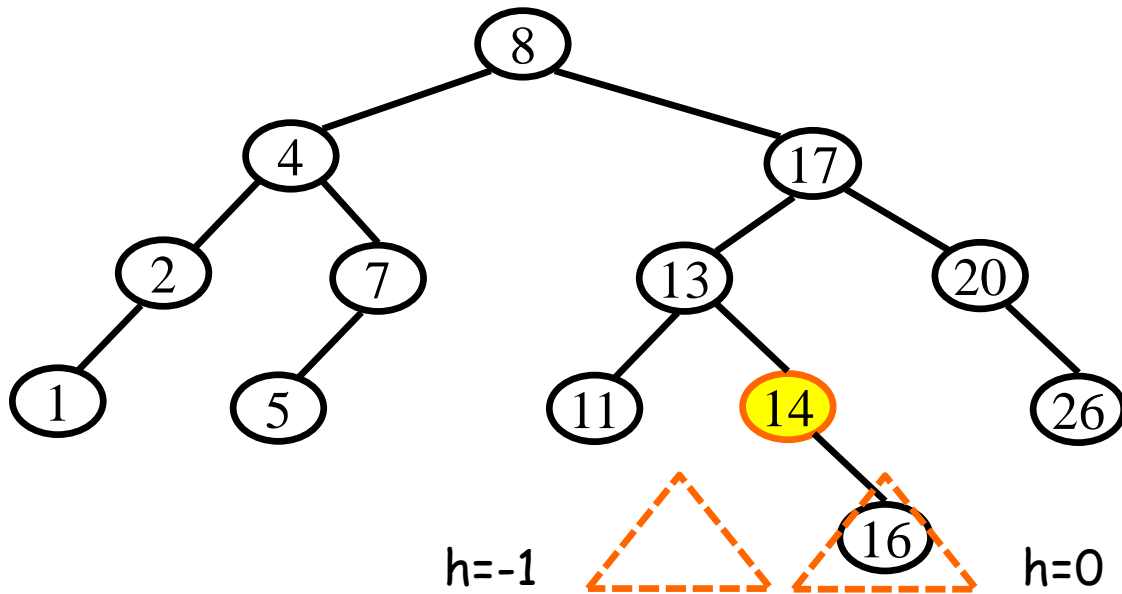
דוגמאות



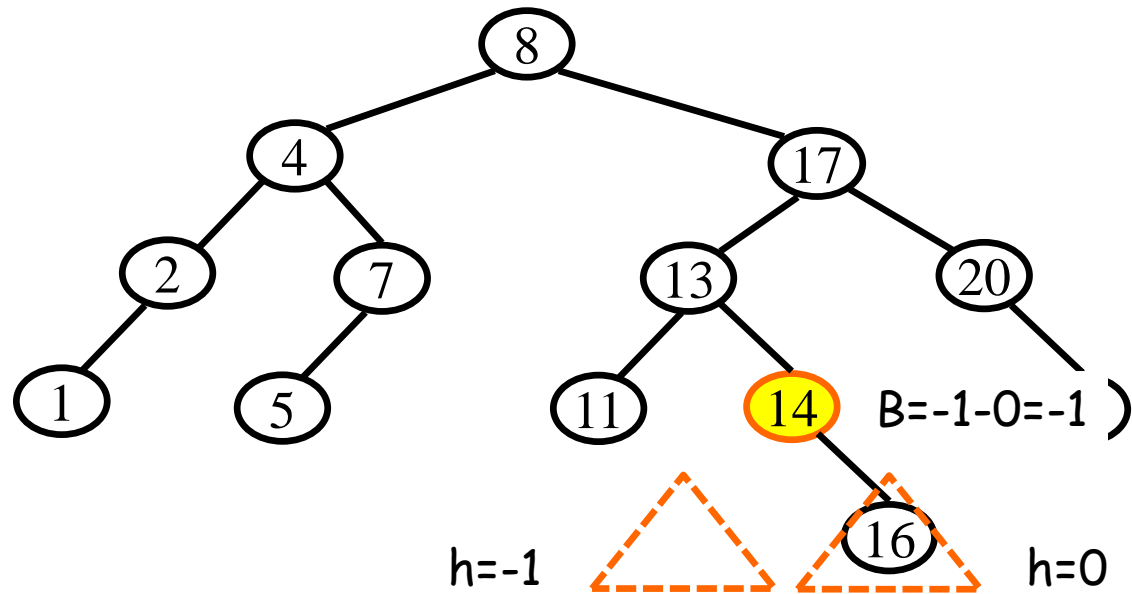
דוגמאות



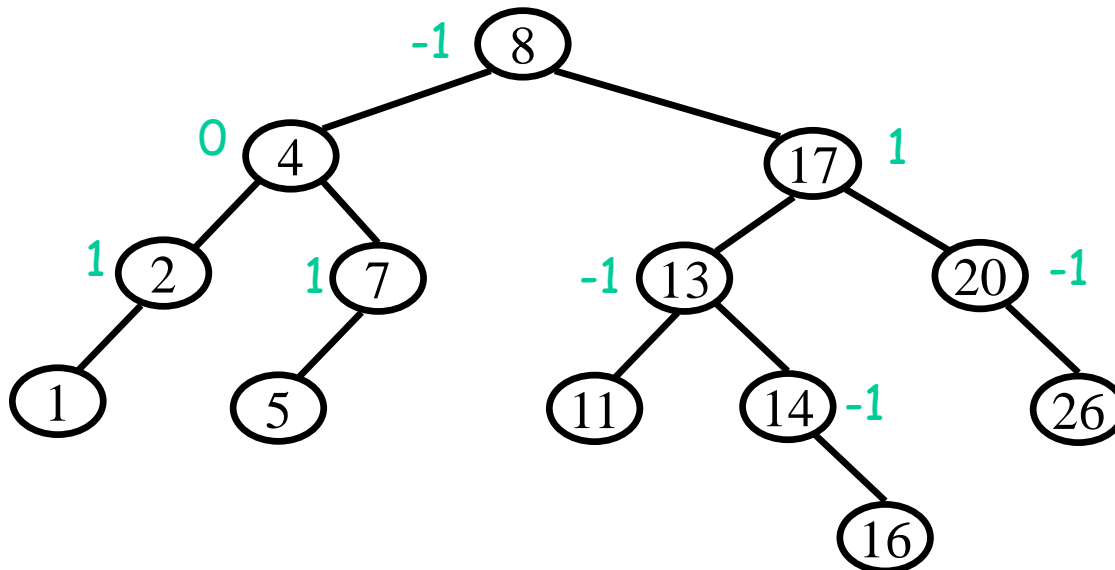
דוגמאות



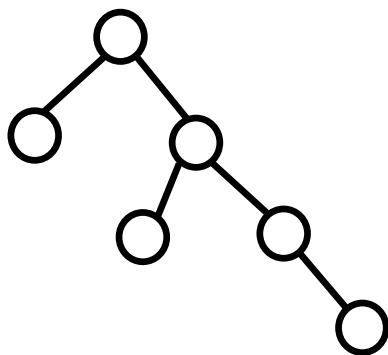
דוגמאות



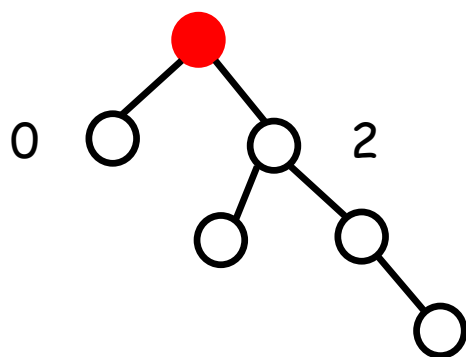
דוגמאות



מה ניתן לומר על הדוגמאות הבאות:

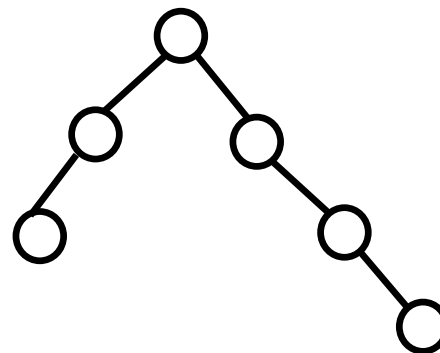
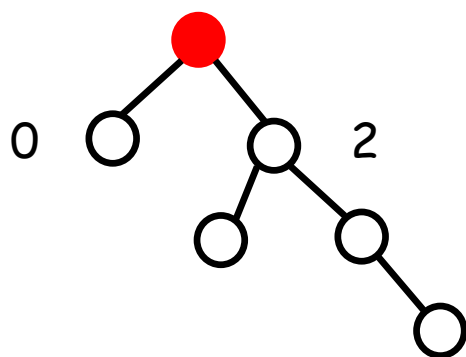


מה ניתן לומר על הדוגמאות הבאות:



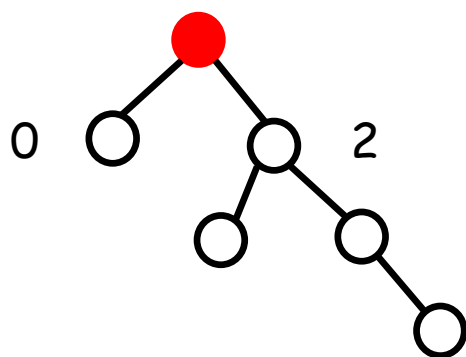
לא AVL

מה ניתן לומר על הדוגמאות הבאות:

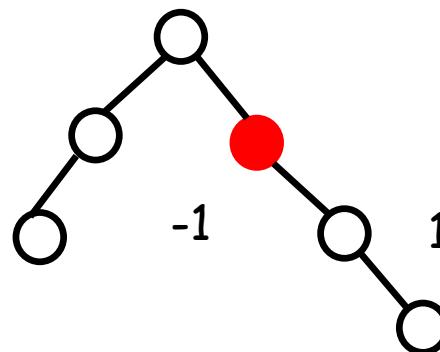


לא AVL

מה ניתן לומר על הדוגמאות הבאות:



לא AVL



לא AVL

טענה:

עצי AVL היא משפחה מאוזנת

טענה:

עצי AVL היא משפחה מאוזנת

צ"ל: שלכל עץ AVL בעל n צמתים גובה
העץ הוא $O(\log n)$

טענה:

עצי AVL היא משפחה מאוזנת

צ"ל: שלכל עץ AVL בעל n צמתים גובה
העץ הוא $O(\log n)$

נסמן ב- $\min_AVL(h)$ את מספר הצמתים
המינימאלי בעץ AVL בגובה h .

טענה:

עצי AVL היא משפחה מאוזנת

$$\text{min_AVL}(0) = 1$$

$$\text{min_AVL}(1) = 2$$

$$\text{min_AVL}(h) =$$

$$1 + \text{min_AVL}(h-1) + \text{min_AVL}(h-2)$$

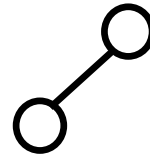
הגובה

העץ

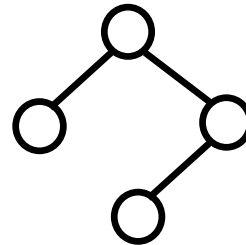
0



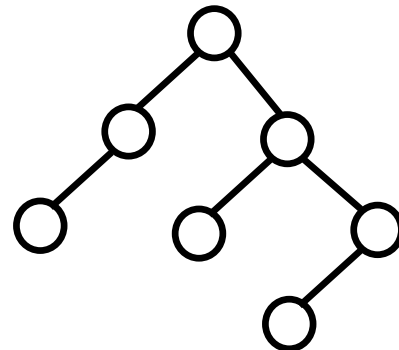
1



2



3



$$n = \text{min_AVL}(h) = 1 + \text{min_AVL}(h-1) + \text{min_AVL}(h-2)$$

$$n = \text{min_AVL}(h) = \textcolor{red}{1} + \text{min_AVL}(h-1) + \text{min_AVL}(h-2)$$

$$n = \text{min_AVL}(h) = 1 + \text{min_AVL}(h-1) + \text{min_AVL}(h-2)$$

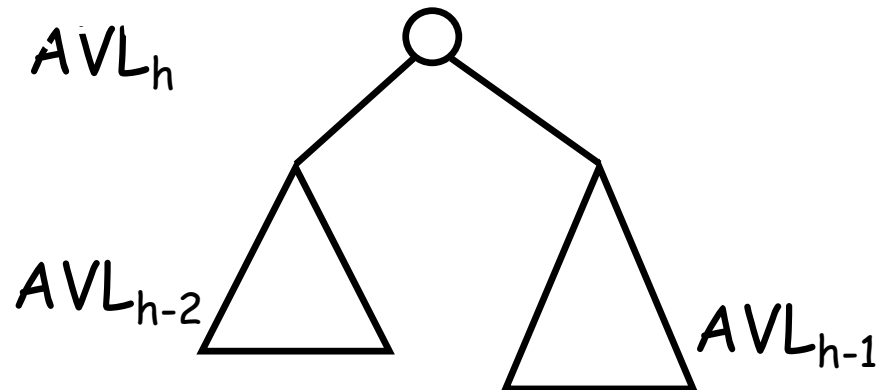
$$n = \text{min_AVL}(h) = \textcolor{red}{1} + \text{min_AVL}(h-1) + \text{min_AVL}(h-2)$$

$$\geq \text{min_AVL}(h-1) + \text{min_AVL}(h-2)$$

$$n = \text{min_AVL}(h) = 1 + \text{min_AVL}(h-1) + \text{min_AVL}(h-2)$$

$$n = \text{min_AVL}(h) = \textcolor{red}{1} + \text{min_AVL}(h-1) + \text{min_AVL}(h-2)$$

$$\geq \text{min_AVL}(h-1) + \text{min_AVL}(h-2)$$



$$n = \text{min_AVL}(h) = 1 + \text{min_AVL}(h-1) + \text{min_AVL}(h-2)$$

$$n = \text{min_AVL}(h) = 1 + \text{min_AVL}(h-1) + \text{min_AVL}(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot \text{min_AVL}(h-2)$$

$$n = \min_AVL(h) \geq 2 \cdot \min_AVL(h-2)$$

$$n = \min_AVL(h) = 1 + \min_AVL(h-1) + \min_AVL(h-2)$$

$$\geq \underbrace{2 \cdot \min_AVL(h-2)}$$

$$\min_AVL(h-2) \geq 2 \cdot \min_AVL(h-4)$$

$$n = \min_AVL(h) \geq 2 \cdot \min_AVL(h-2)$$

$$n = \min_AVL(h) = 1 + \min_AVL(h-1) + \min_AVL(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot \min_AVL(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot \min_AVL(h-4))$$

$$n = \min_AVL(h) \geq 2 \cdot \min_AVL(h-2)$$

$$n = \min_AVL(h) = 1 + \min_AVL(h-1) + \min_AVL(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot \min_AVL(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot \min_AVL(h-4))$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot \min_AVL(h-6)))$$

$$n = \min_AVL(h) \geq 2 \cdot \min_AVL(h-2)$$

$$n = \min_AVL(h) = 1 + \min_AVL(h-1) + \min_AVL(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot \min_AVL(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot \min_AVL(h-4))$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot \min_AVL(h-6)))$$

...

$$\geq 2^i \cdot \min_AVL(h-2i)$$

$$n = \min_AVL(h) \geq 2 \cdot \min_AVL(h-2)$$

$$n = \min_AVL(h) = 1 + \min_AVL(h-1) + \min_AVL(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot \min_AVL(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot \min_AVL(h-4))$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot \min_AVL(h-6)))$$

...

$$\geq 2^i \cdot \min_AVL(h-2i)$$



מה תנאי העצירה ?

$$n = \min_AVL(h) \geq 2 \cdot \min_AVL(h-2)$$

$$n = \min_AVL(h) = 1 + \min_AVL(h-1) + \min_AVL(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot \min_AVL(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot \min_AVL(h-4))$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot \min_AVL(h-6)))$$

...

$$\geq 2^i \cdot \min_AVL(h-2i)$$

בהנחה ש- $h-2i=0$ זוגי:

$$n = \text{min_AVL}(h) \geq 2^i \cdot \text{min_AVL}(h-2i)$$

נציב $h=2i$ ונקבל:

$$n = \min_AVL(h) \geq 2^i \cdot \min_AVL(h-2i)$$

נציב $h=2i$ ונקבל:

$$n = \min_AVL(h) \geq 2^{h/2} \cdot \min_AVL(0)$$

$$n = \min_AVL(h) \geq 2^i \cdot \min_AVL(h-2i)$$

נציב $h=2i$ ונקבל:

$$n = \min_AVL(h) \geq 2^{h/2} \cdot \underbrace{\min_AVL(0)}_{=1}$$

$$n = \min_AVL(h) \geq 2^i \cdot \min_AVL(h-2i)$$

נציב $h=2i$ ונקבל:

$$n = \min_AVL(h) \geq 2^{h/2} \cdot \min_AVL(0)$$

$$n \geq 2^{h/2}$$

$$n = \min_AVL(h) \geq 2^i \cdot \min_AVL(h-2i)$$

נציב $h=2i$ ונקבל:

$$n = \min_AVL(h) \geq 2^{h/2} \cdot \min_AVL(0)$$

$$n \geq 2^{h/2}$$

$$\log n \geq h/2$$

$$n = \min_AVL(h) \geq 2^i \cdot \min_AVL(h-2i)$$

נציב $h=2i$ ונקבל:

$$n = \min_AVL(h) \geq 2^{h/2} \cdot \min_AVL(0)$$

$$n \geq 2^{h/2}$$

$$\log n \geq h/2$$

$$2 \cdot \log n \geq h$$

$$n = \text{min_AVL}(h) \geq 2^i \cdot \text{min_AVL}(h-2i)$$

נציב $h=2i$ ונקבל:

$$n = \text{min_AVL}(h) \geq 2^{h/2} \cdot \text{min_AVL}(0)$$

$$n \geq 2^{h/2}$$

$$\log n \geq h/2$$

$$2 \cdot \log n \geq h$$

$$h = O(\log n)$$

טענה:

עצי AVL היא משפחה מאוזנת

לסיכום, קיבלנו את אי-השוויון הבא:

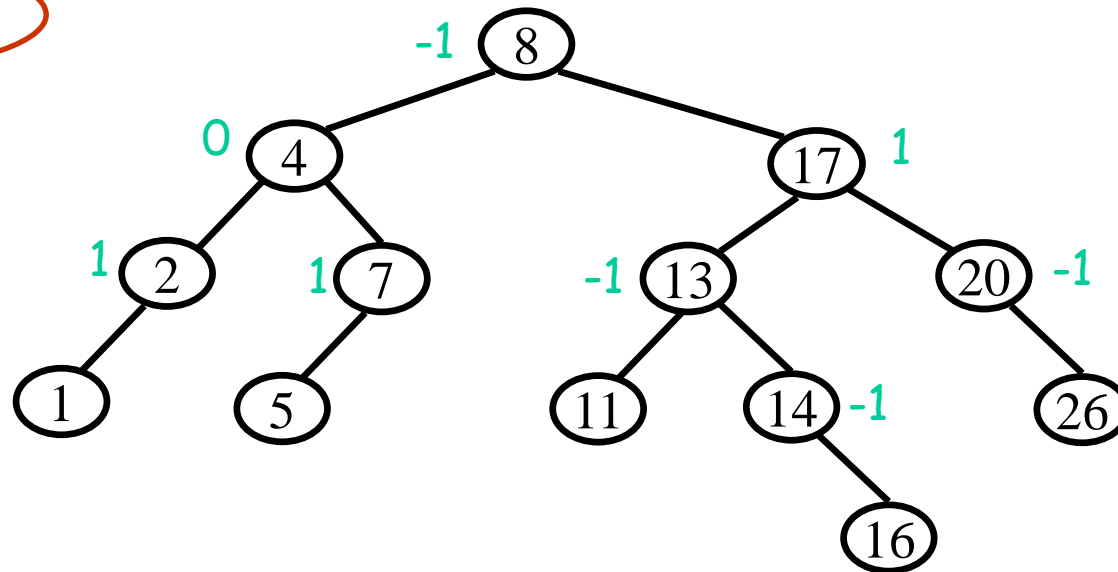
$$n \geq \min_AVL(h) \geq 2^{h/2}$$

ולכן:

$$h = O(\log n)$$

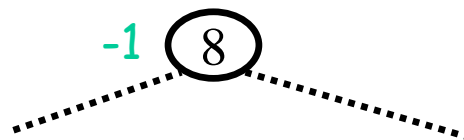
עצי AVL : הכנסה

הכנסה (10)



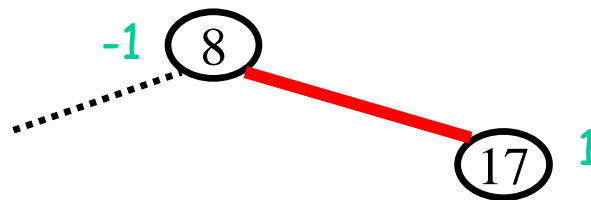
עצי AVL : הכנסה

הכנסה (10)



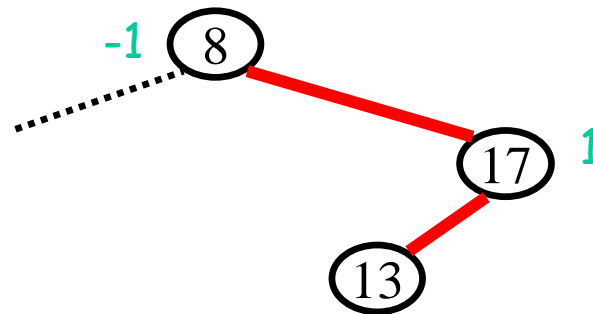
עצי AVL: הכנסה

הכנסה (10)



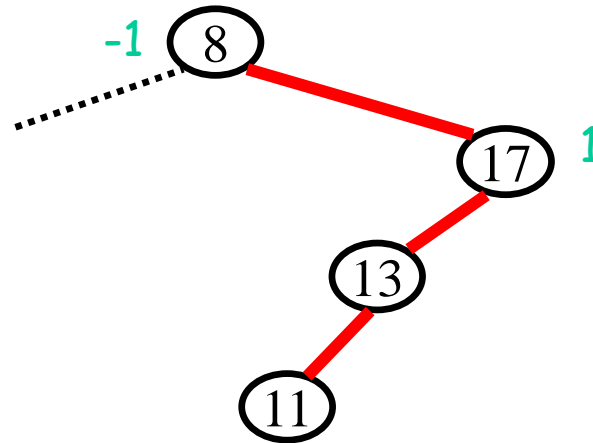
עצי AVL: הכנסה

הכנסה (10)



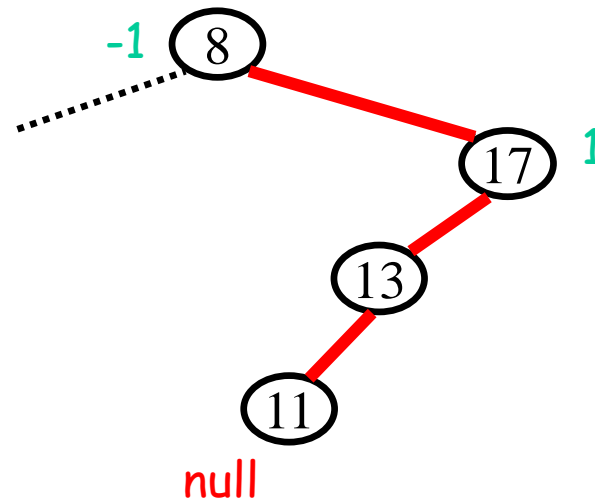
עצי AVL: הכנסה

הכנסה (10)



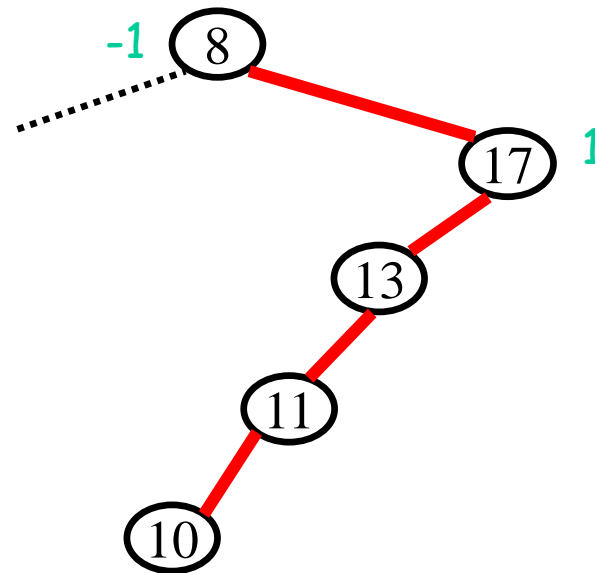
עצי AVL : הכנסה

הכנסה (10)



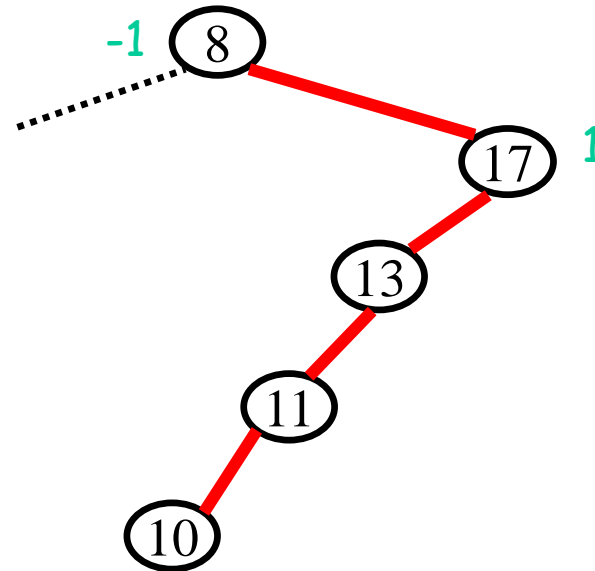
עצי AVL : הכנסה

הכנסה (10)



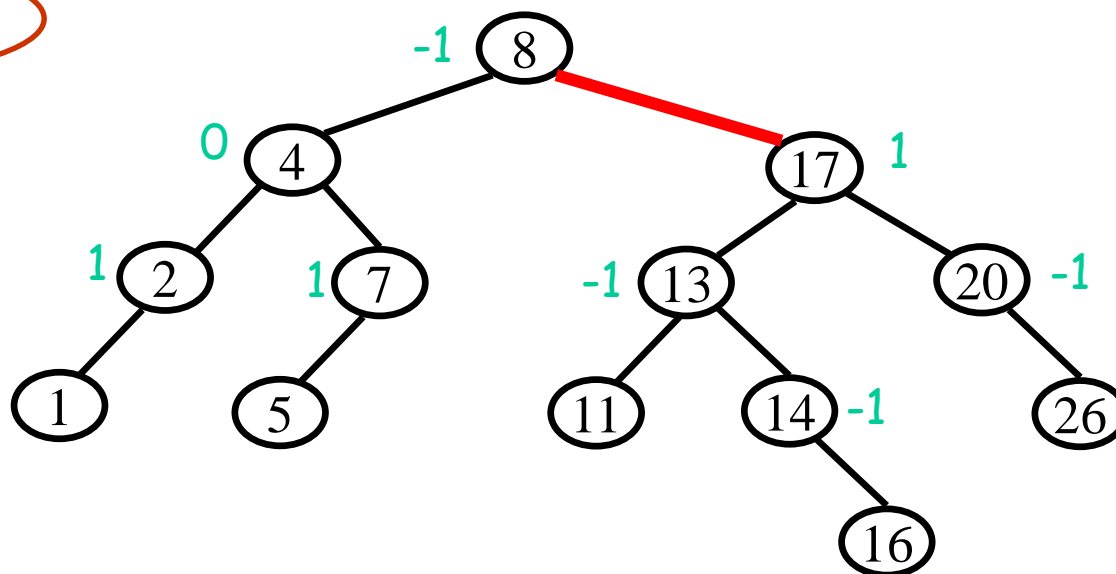
האם העץ AVL אחרי ההכנסה? כיצד נדע?

הכנסה (10)



דיון

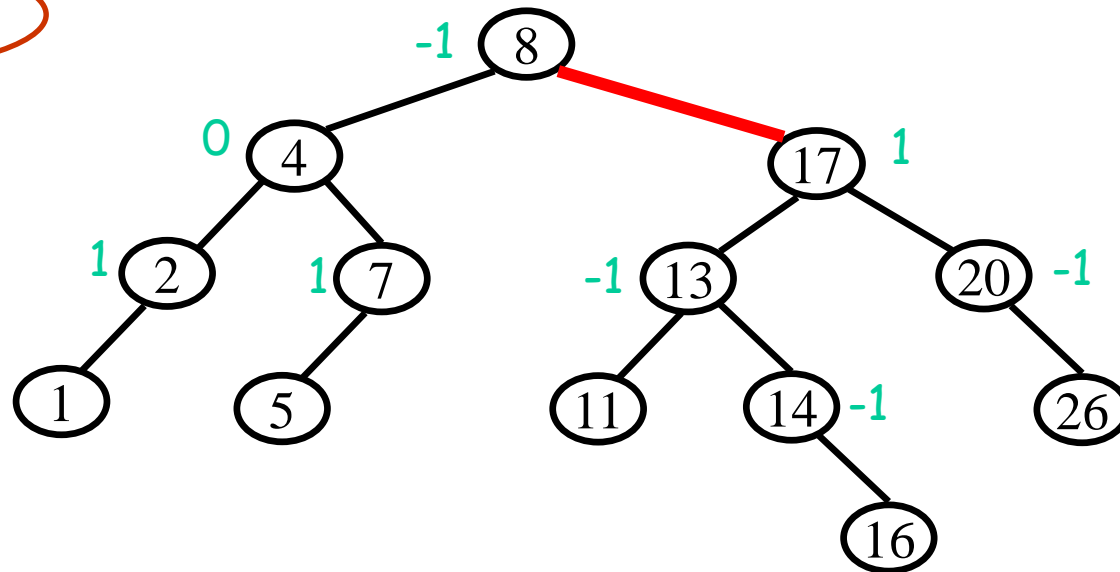
הכנסה (10)



דיון

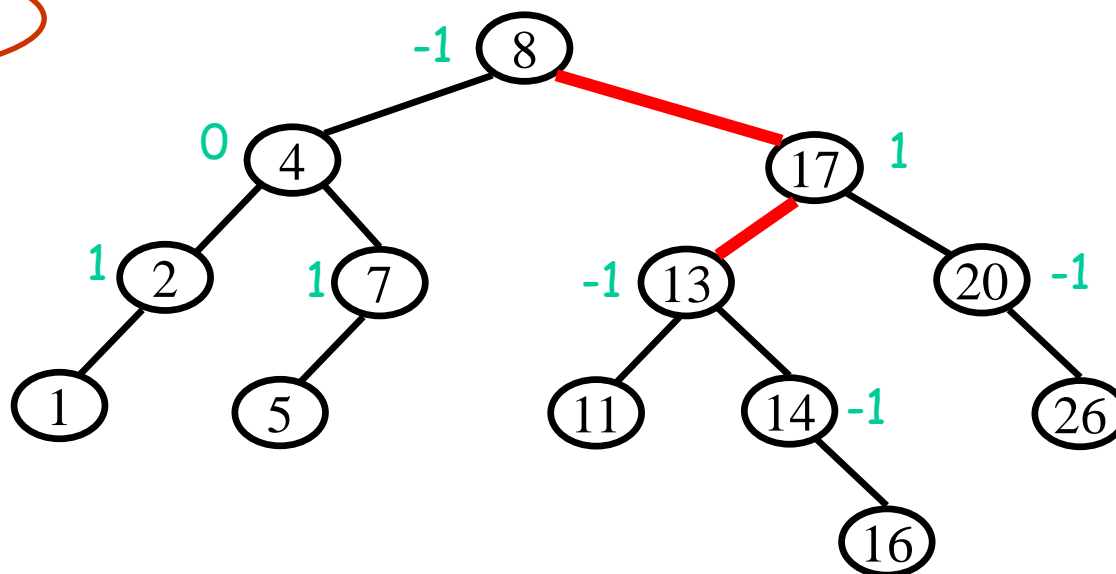
בזמן ההכנסה לא "רואים" את העץ

הכנסה (10)



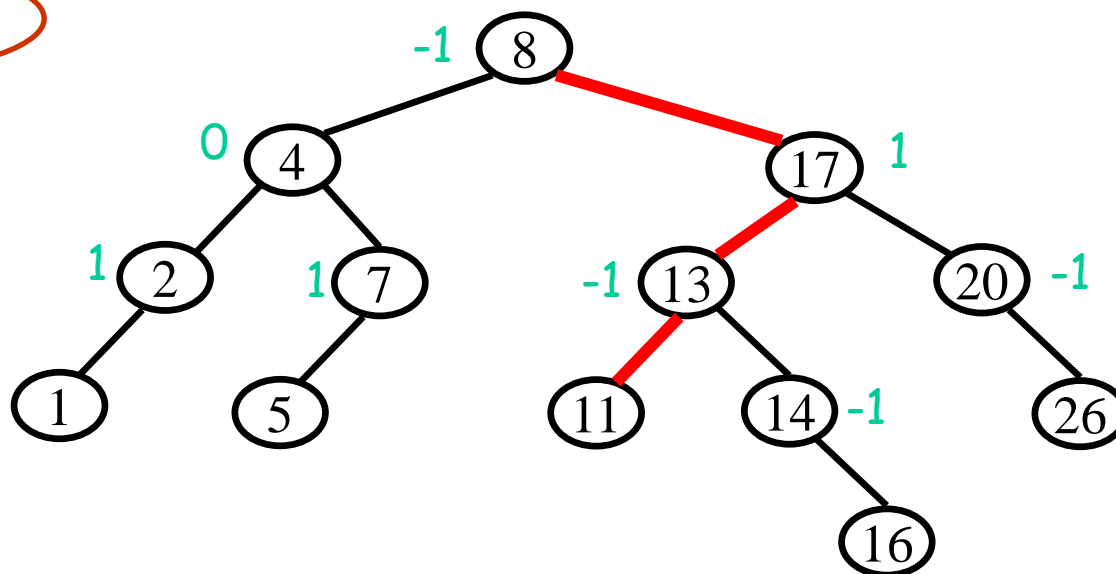
דיון

הכנסה (10)



דיון

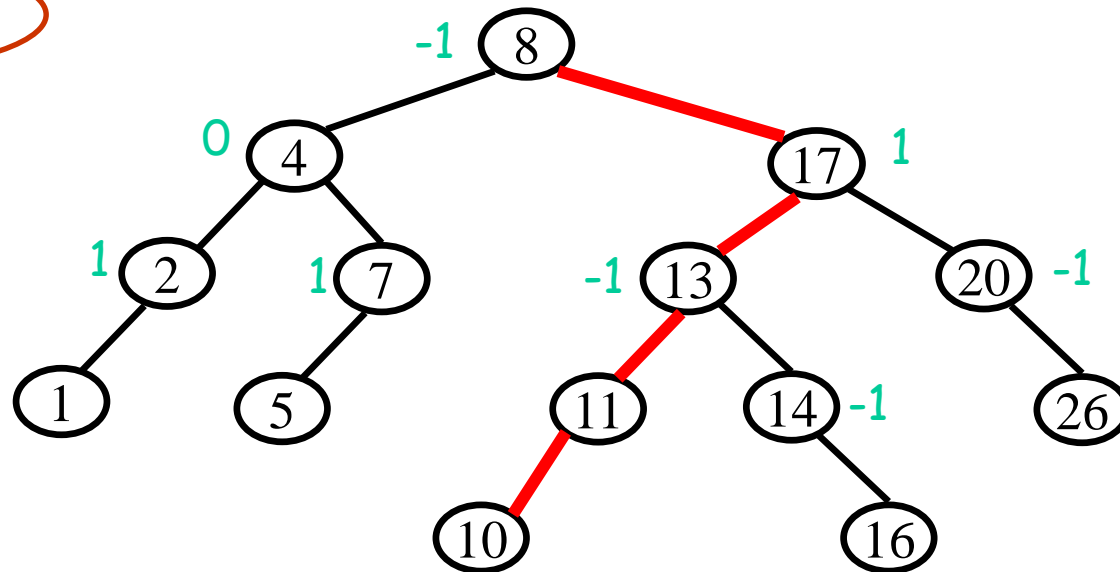
הכנסה (10)



דיון

אחרי שלב ההכנסה

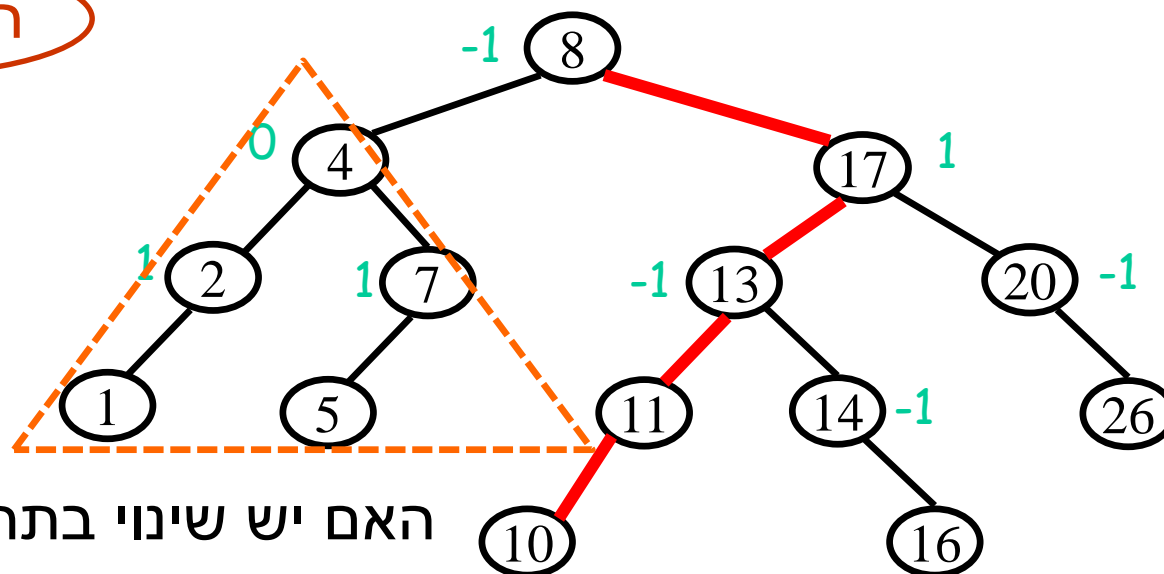
הכנסה (10)



דיון

אחרי שלב ההכנסה

הכנסה (10)

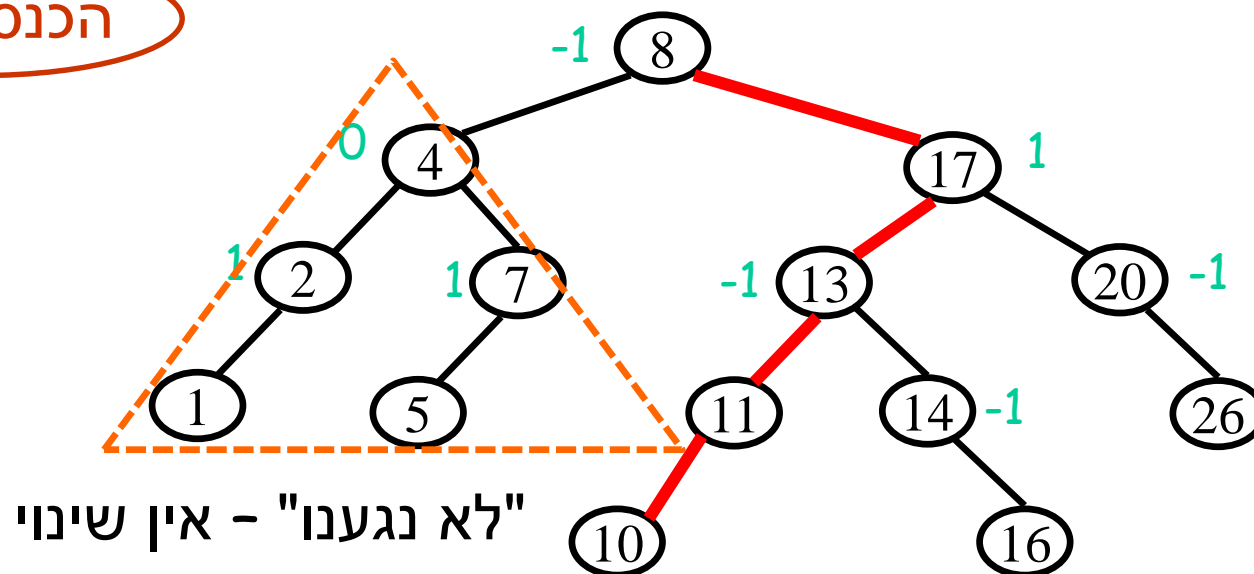


האם יש שינוי בתת העץ המסומן?

דיון

אחרי שלב ההכנסה

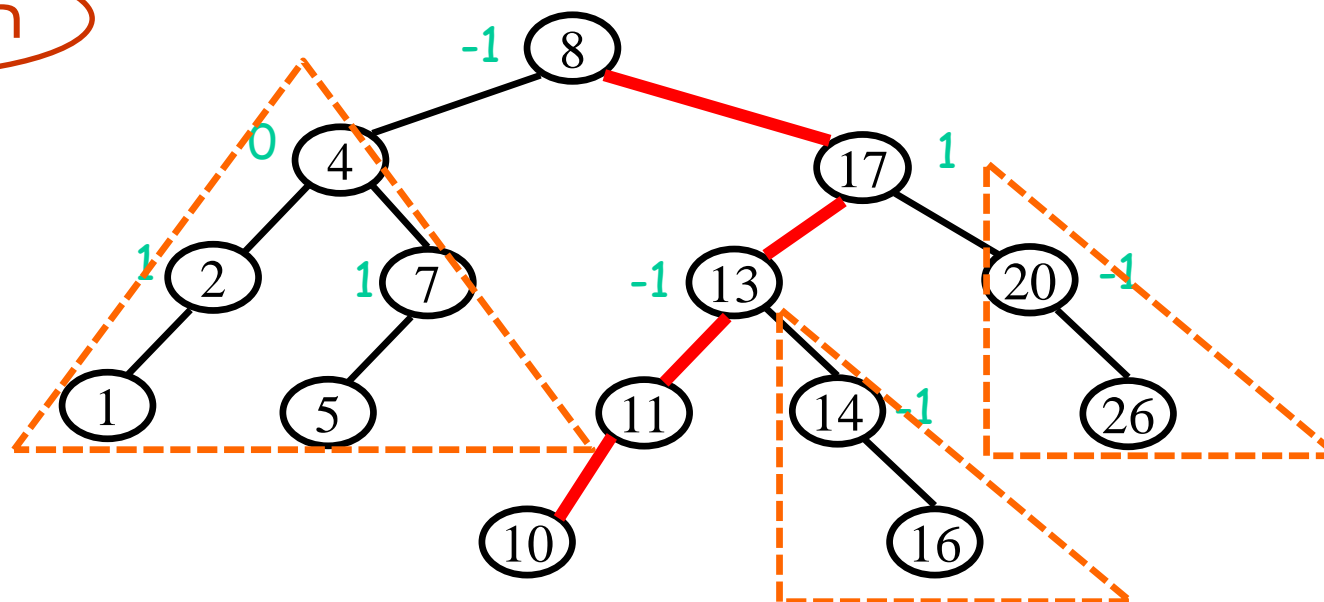
הכנסה (10)



דיון

אחרי שלב ההכנסה

הכנסה (10)

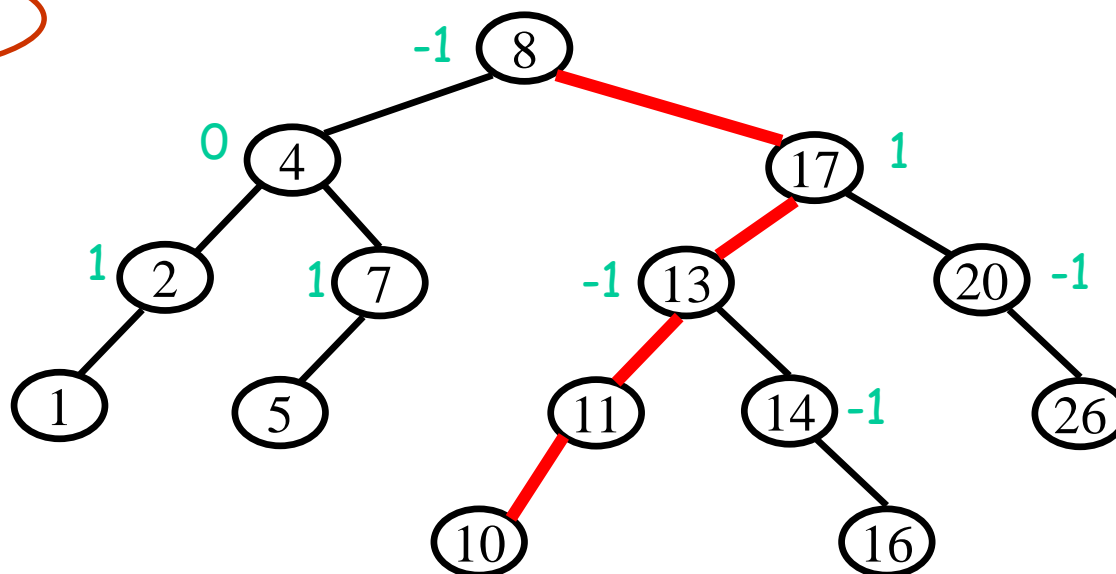


"לא נגענו" - אין שינוי

מסקנה

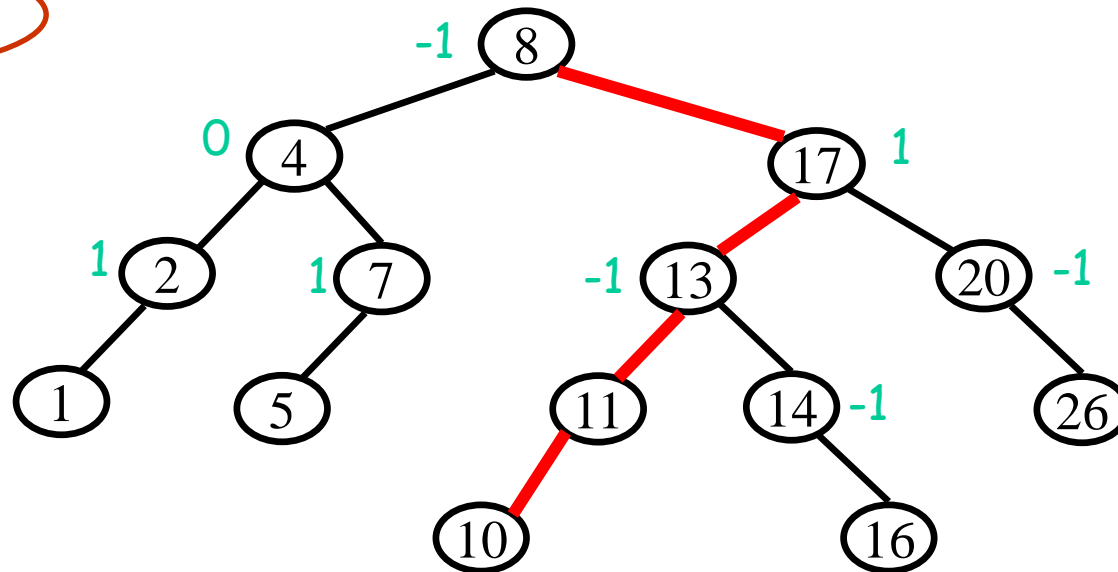
באילו קדקודים בעץ יתכן שינויים בגובה תת העץ ובגורם האיזון?

הכנסה (10)

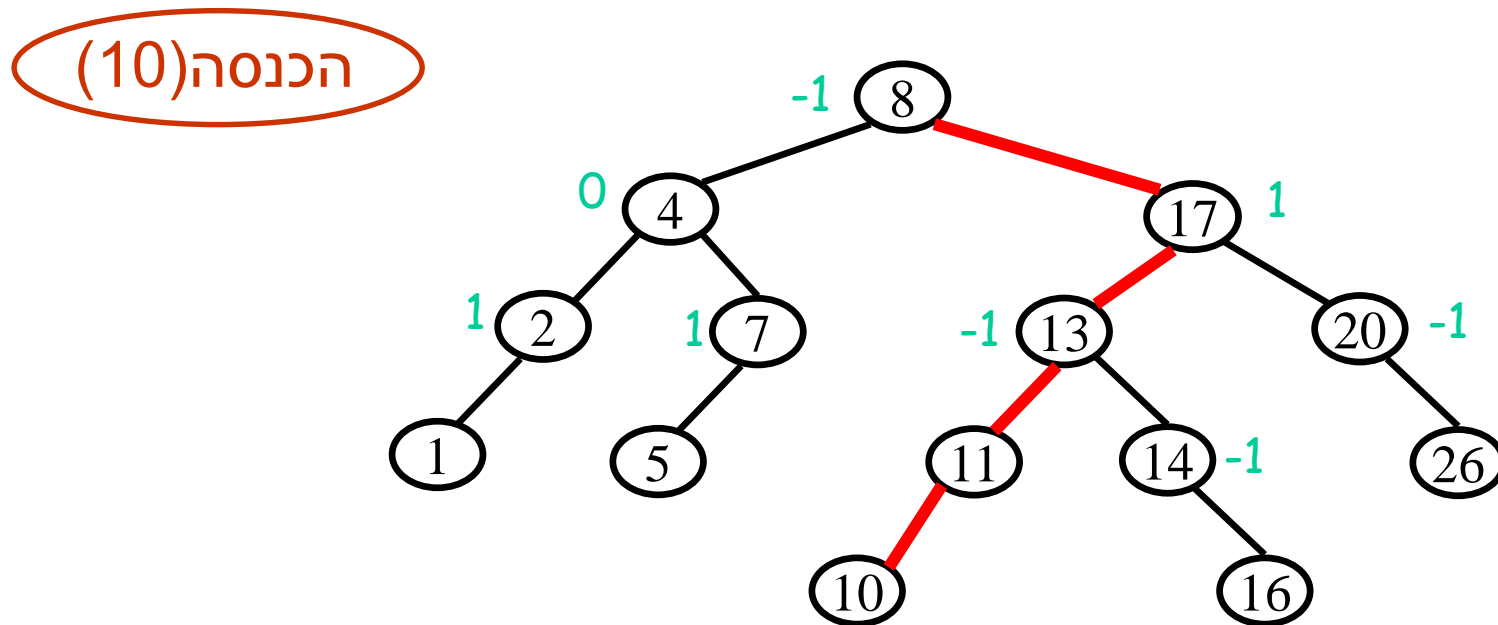


במסלול ההכנסה

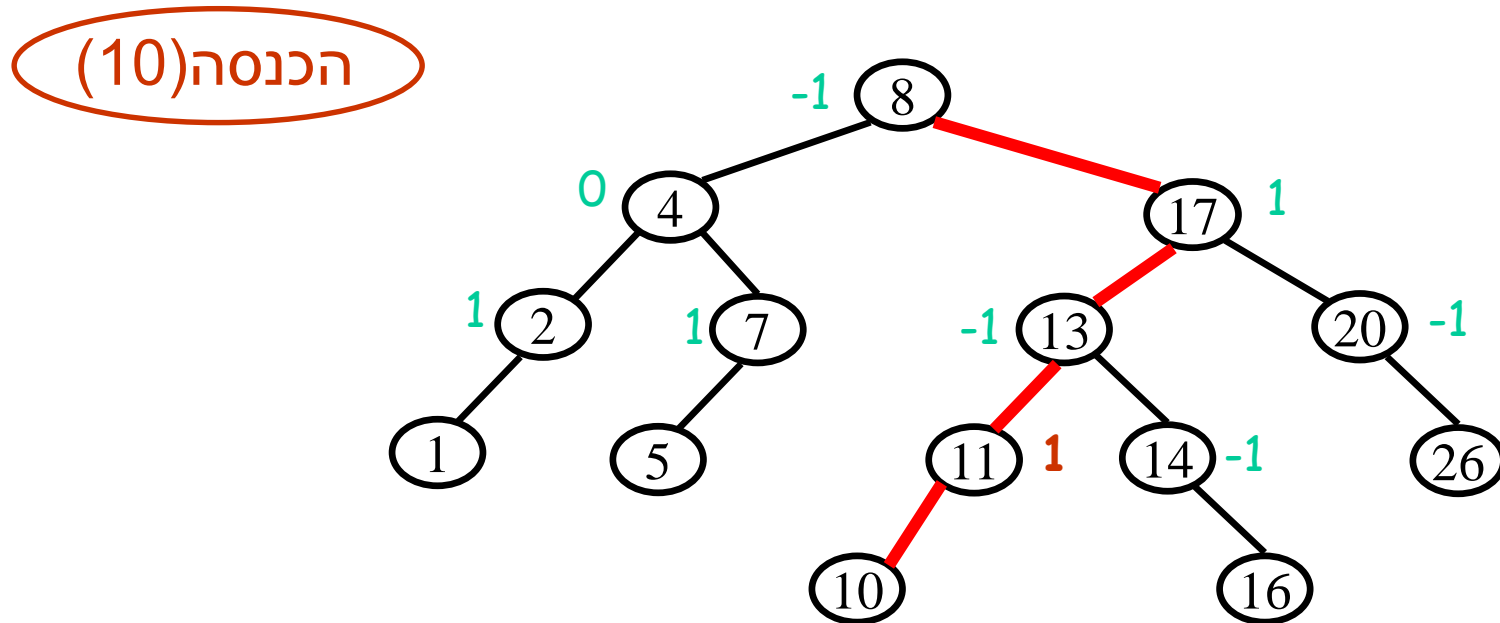
הכנסה (10)



נעלה מהקדקוד הנכנס כלפי השורש

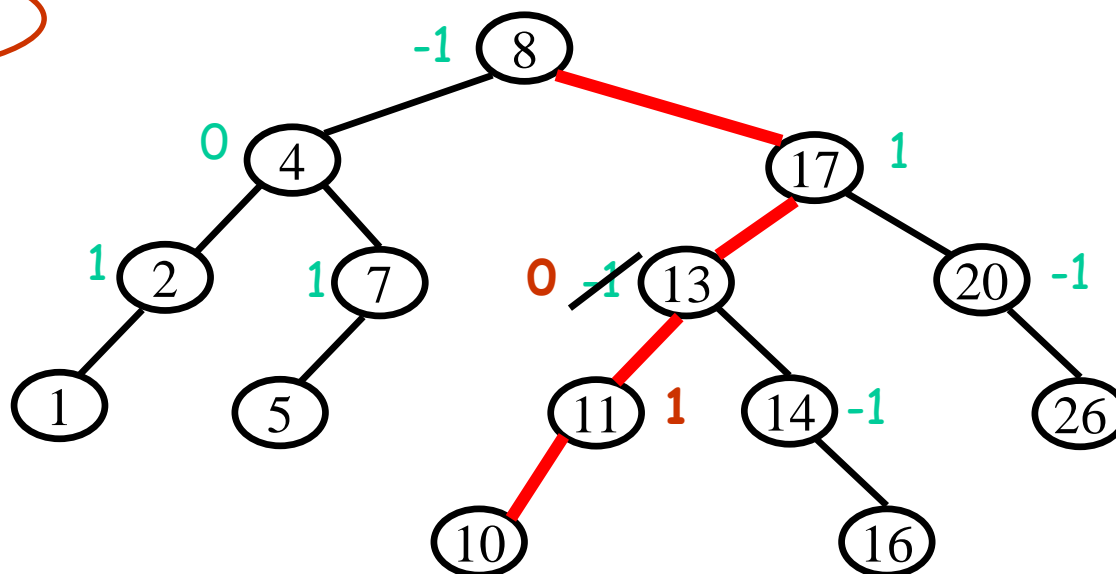


נעלה מהקדקוד הנכנס כלפי השורש



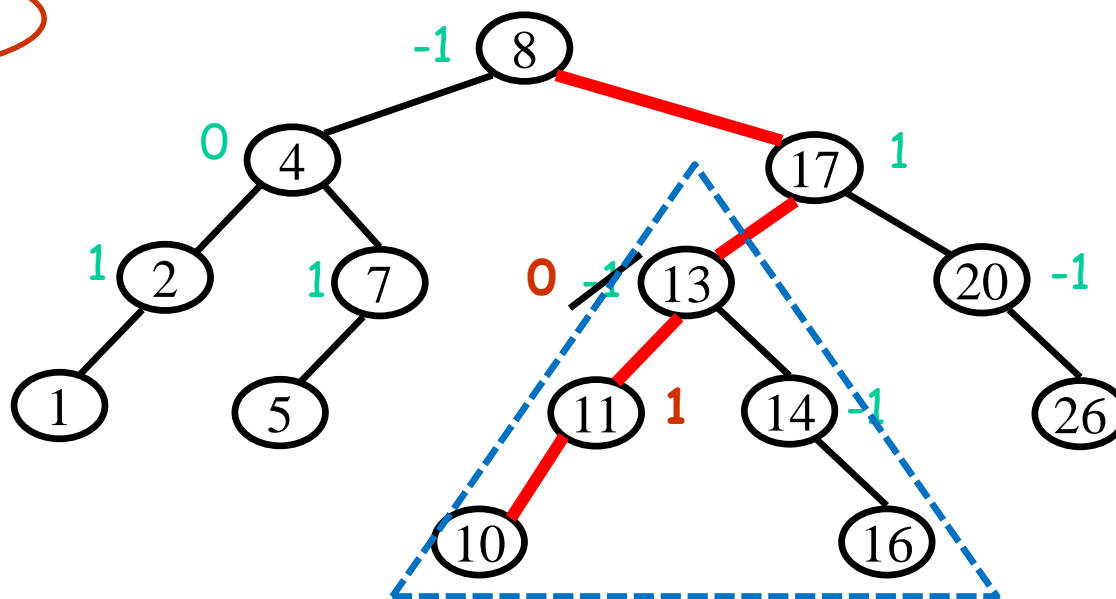
נעלה מהקדקוד הנכנס כלפי השורש

הכנסה (10)



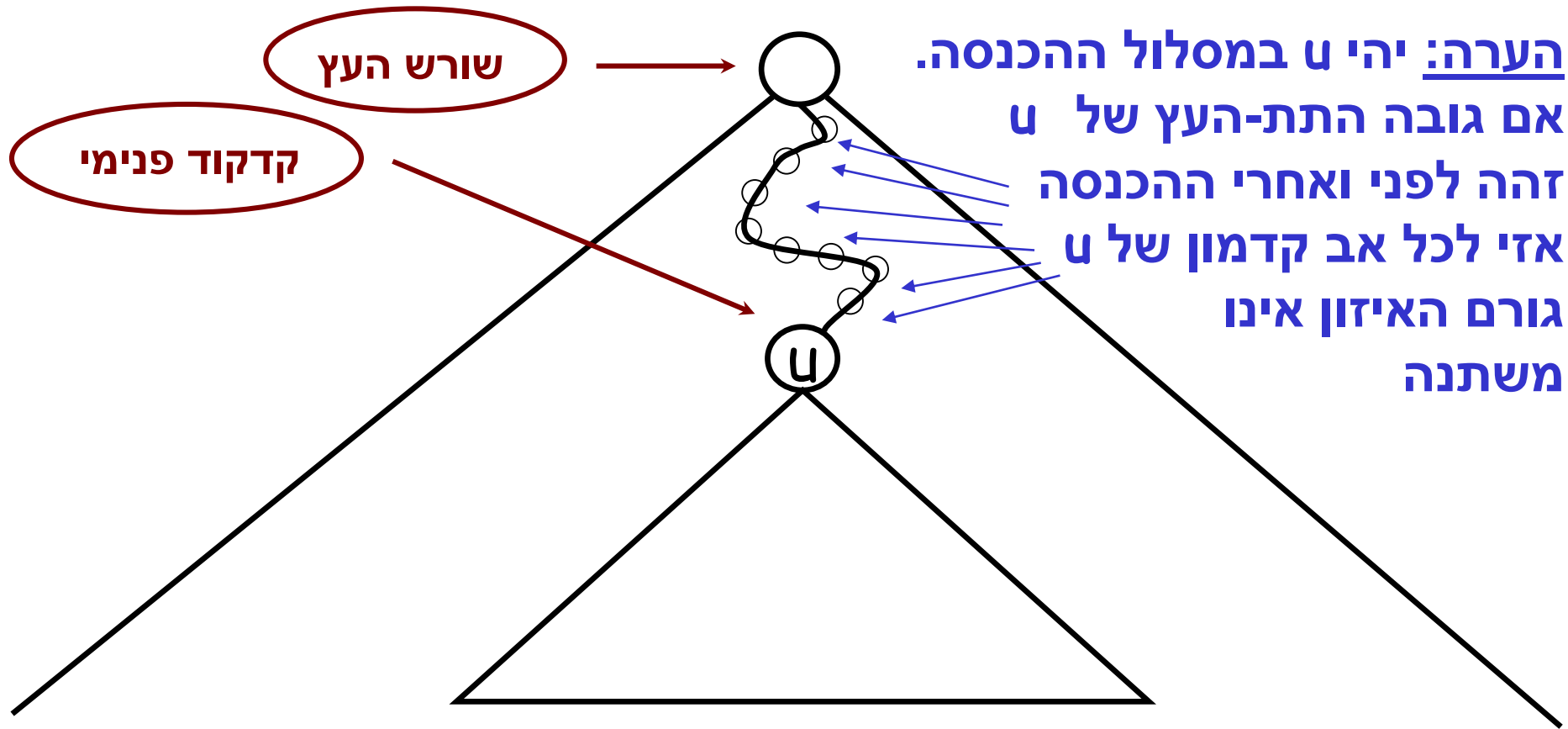
נעלה מהקדקוד הנכנס כלפי השורש

הכנסה (10)

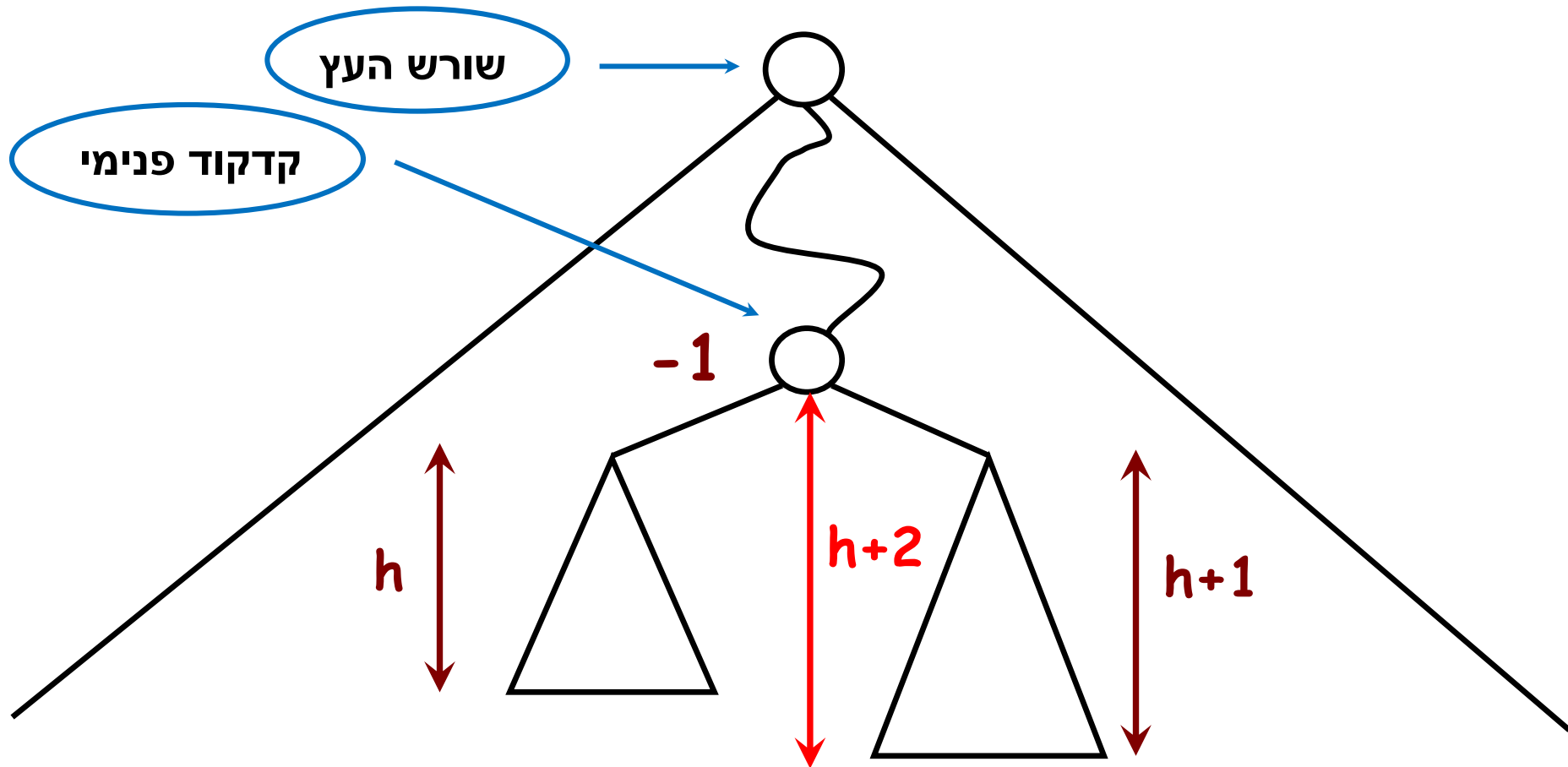


גובה תת העץ לא השתנה אחרי הכנסת האיבר !!

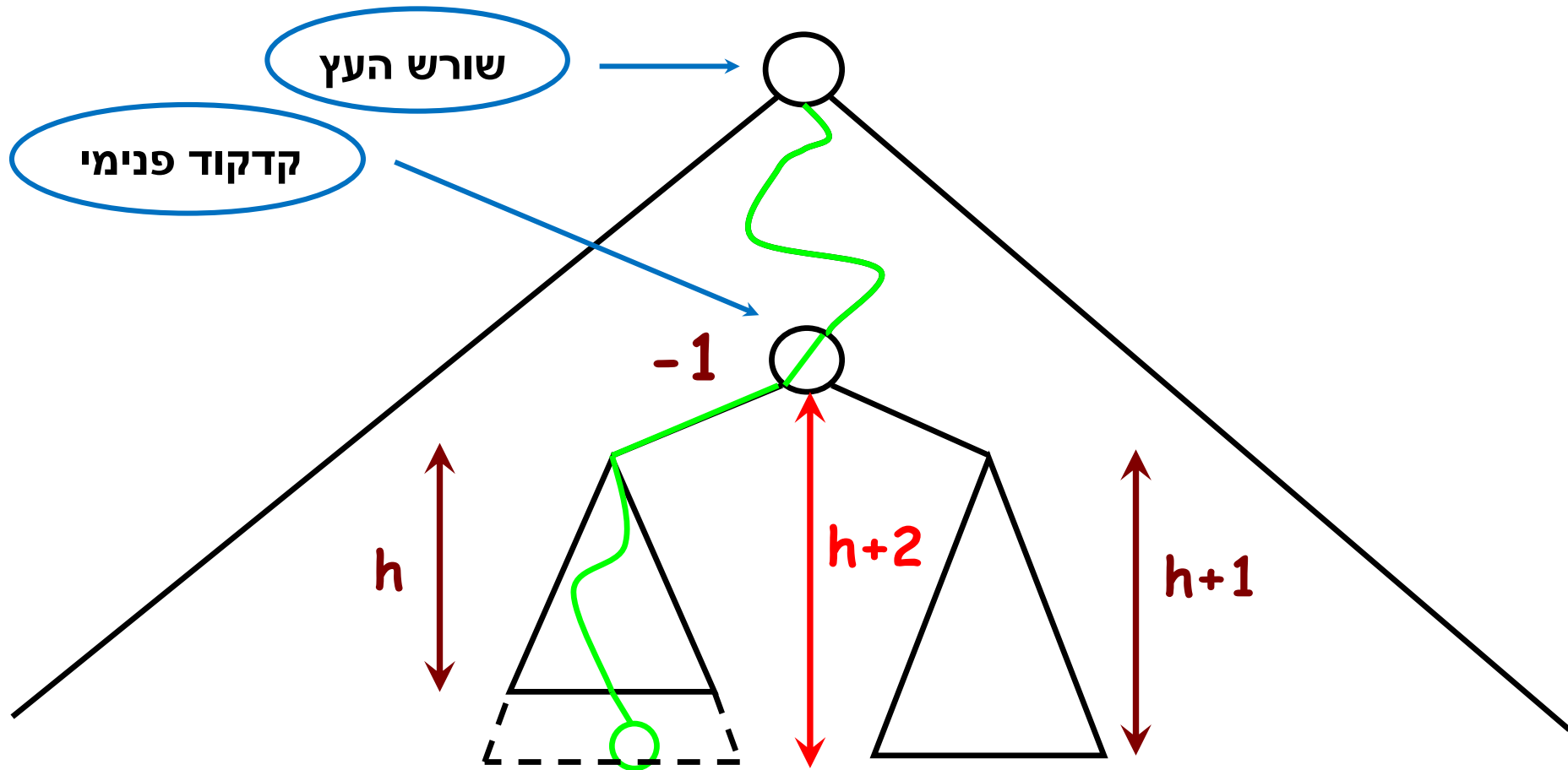
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



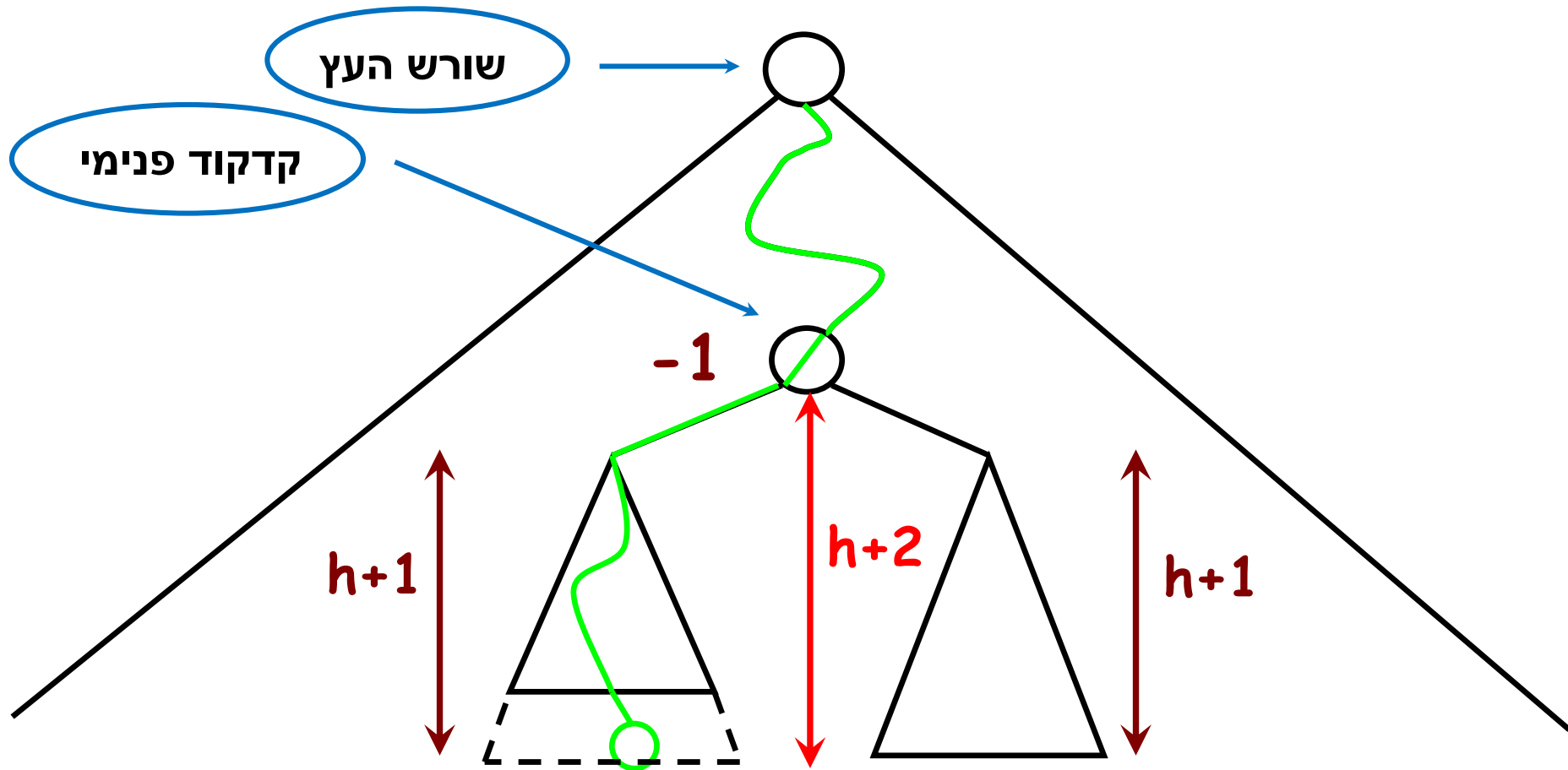
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



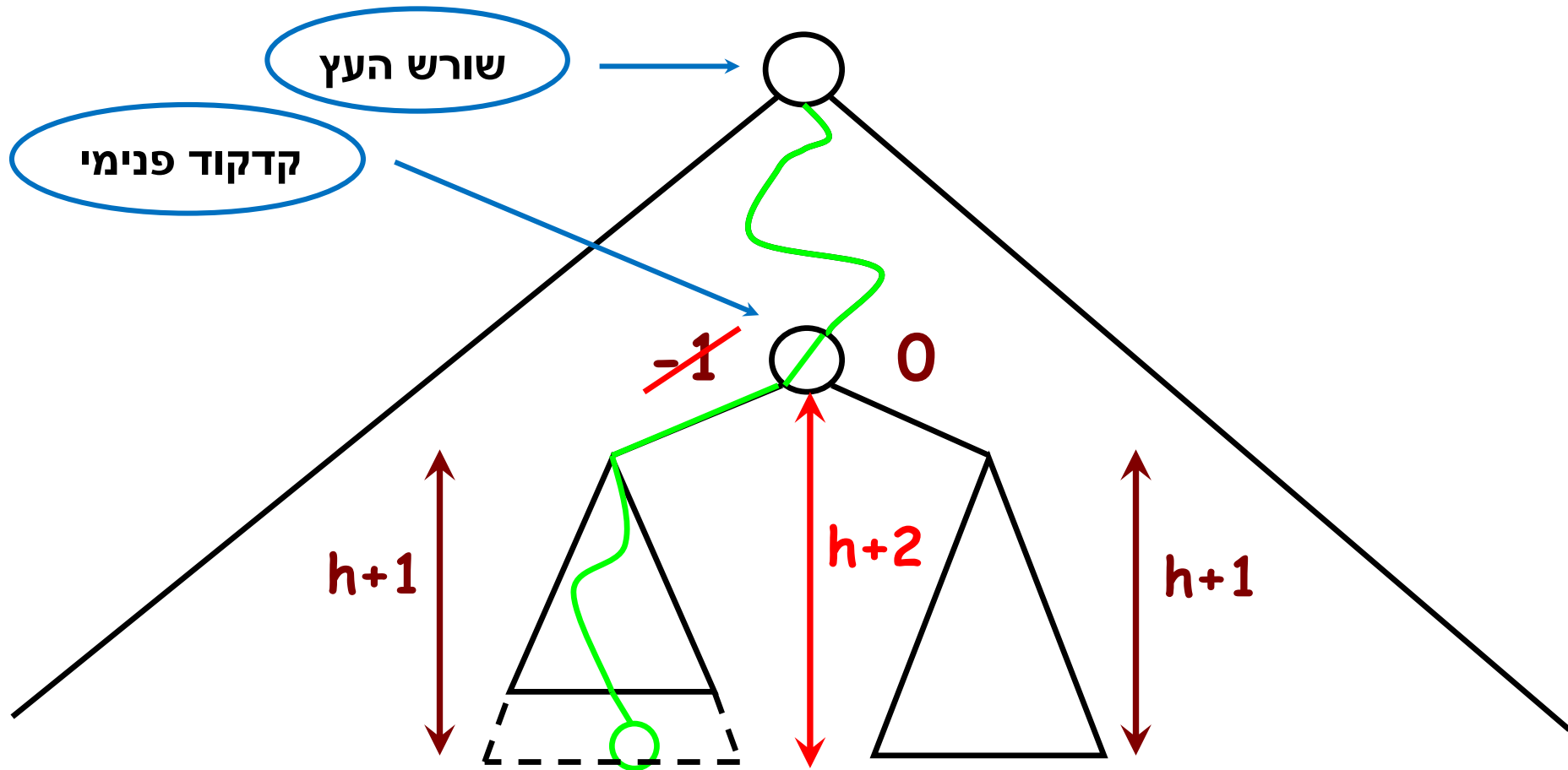
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



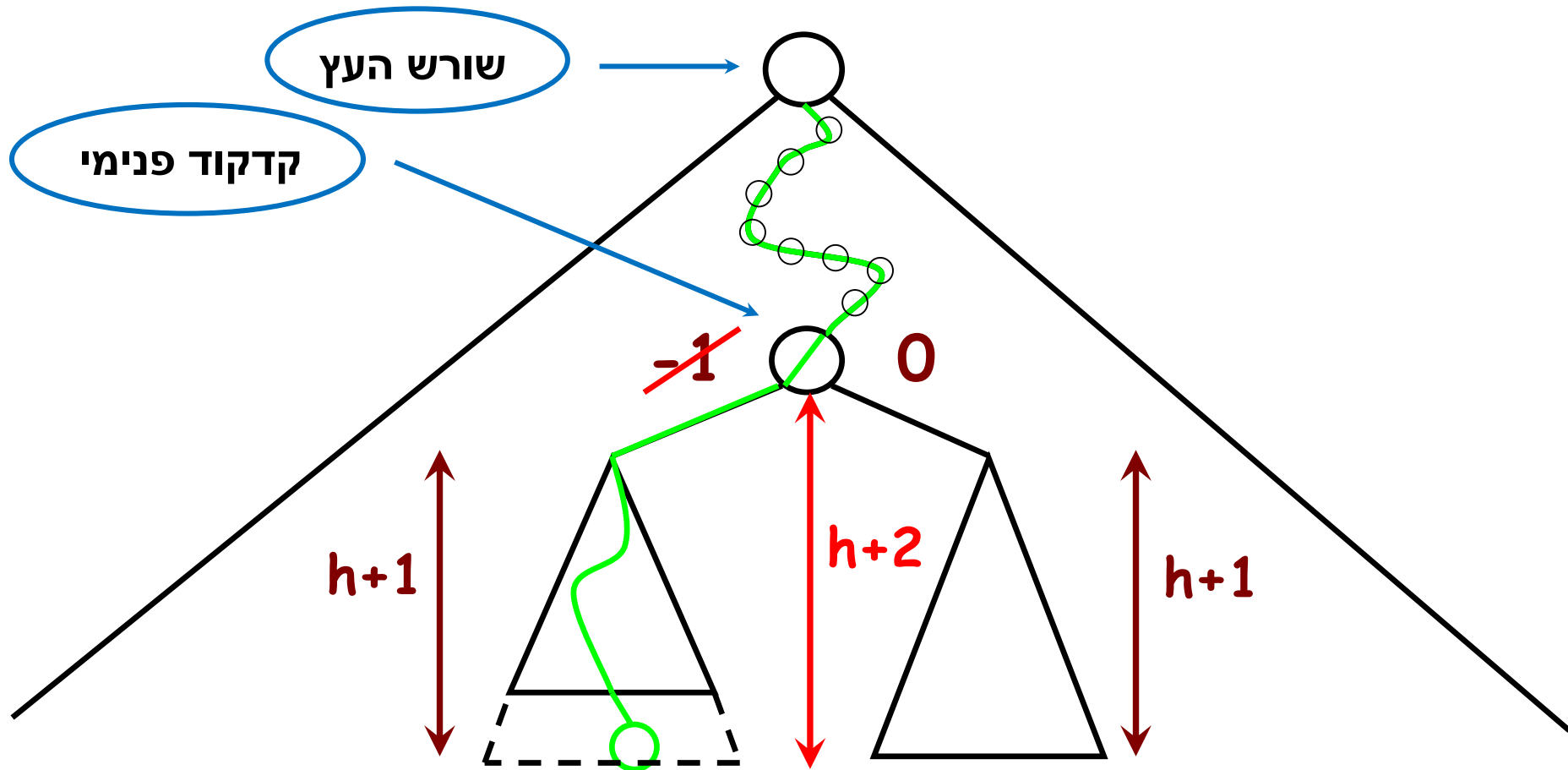
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



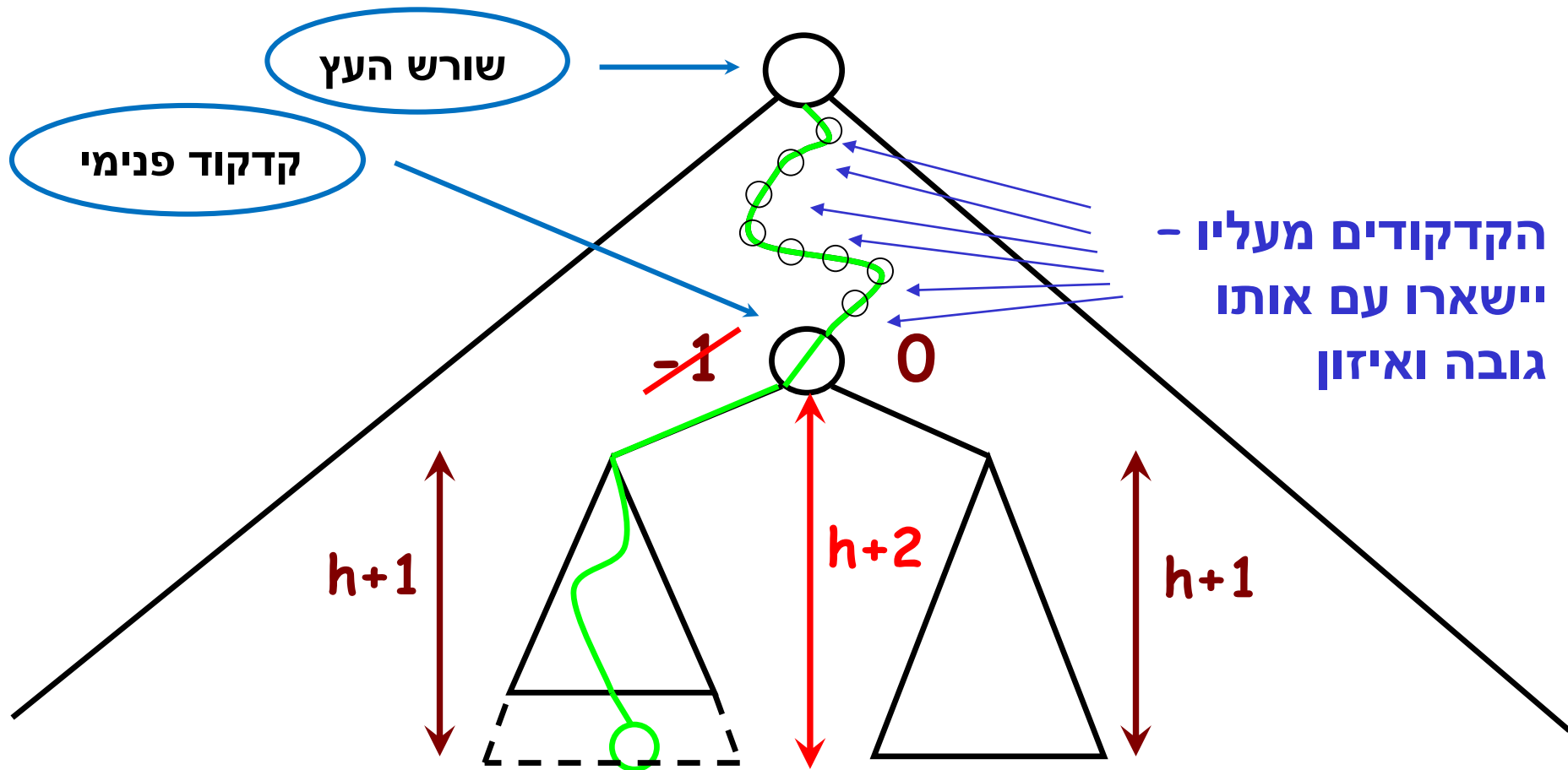
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



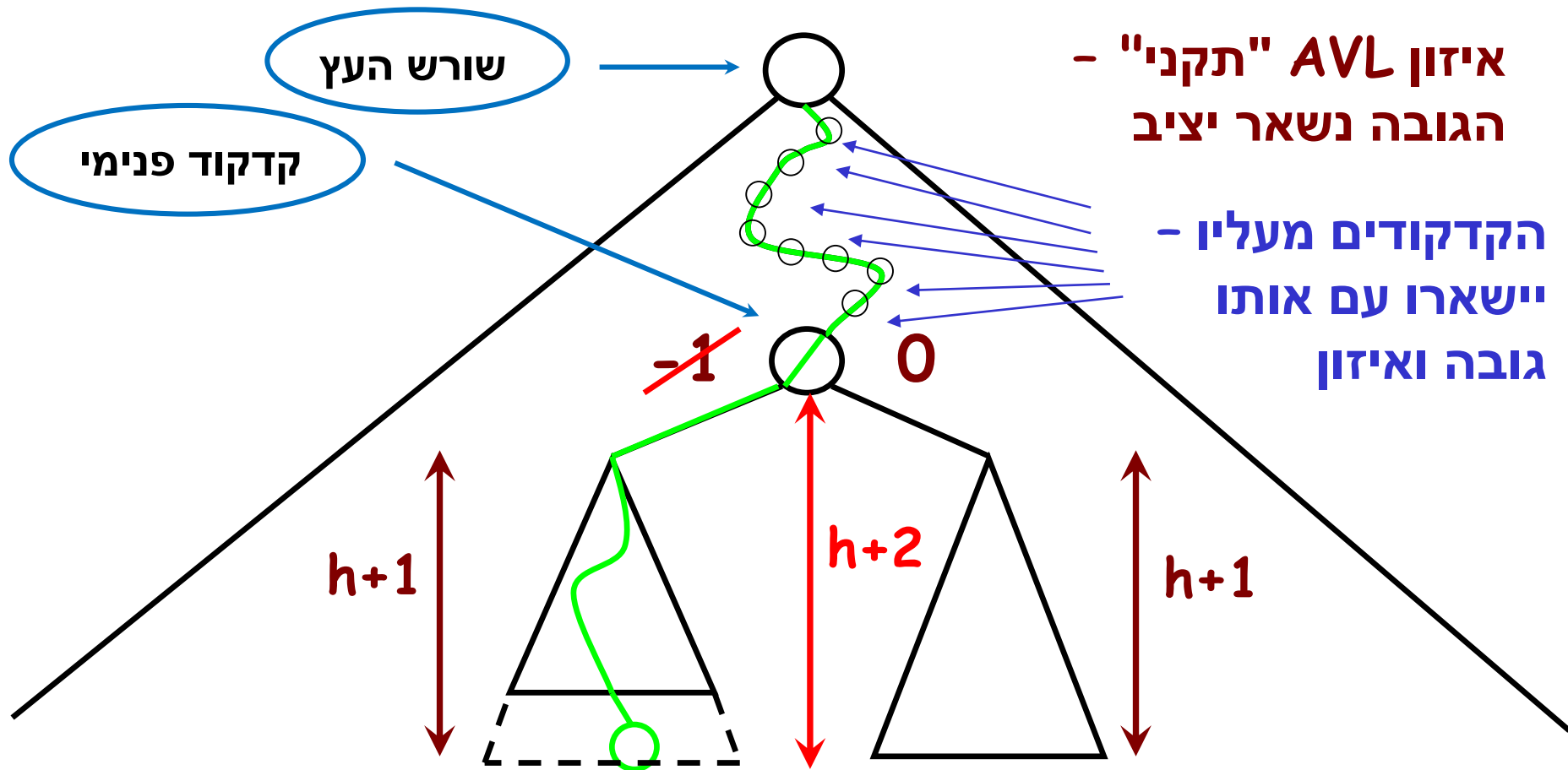
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



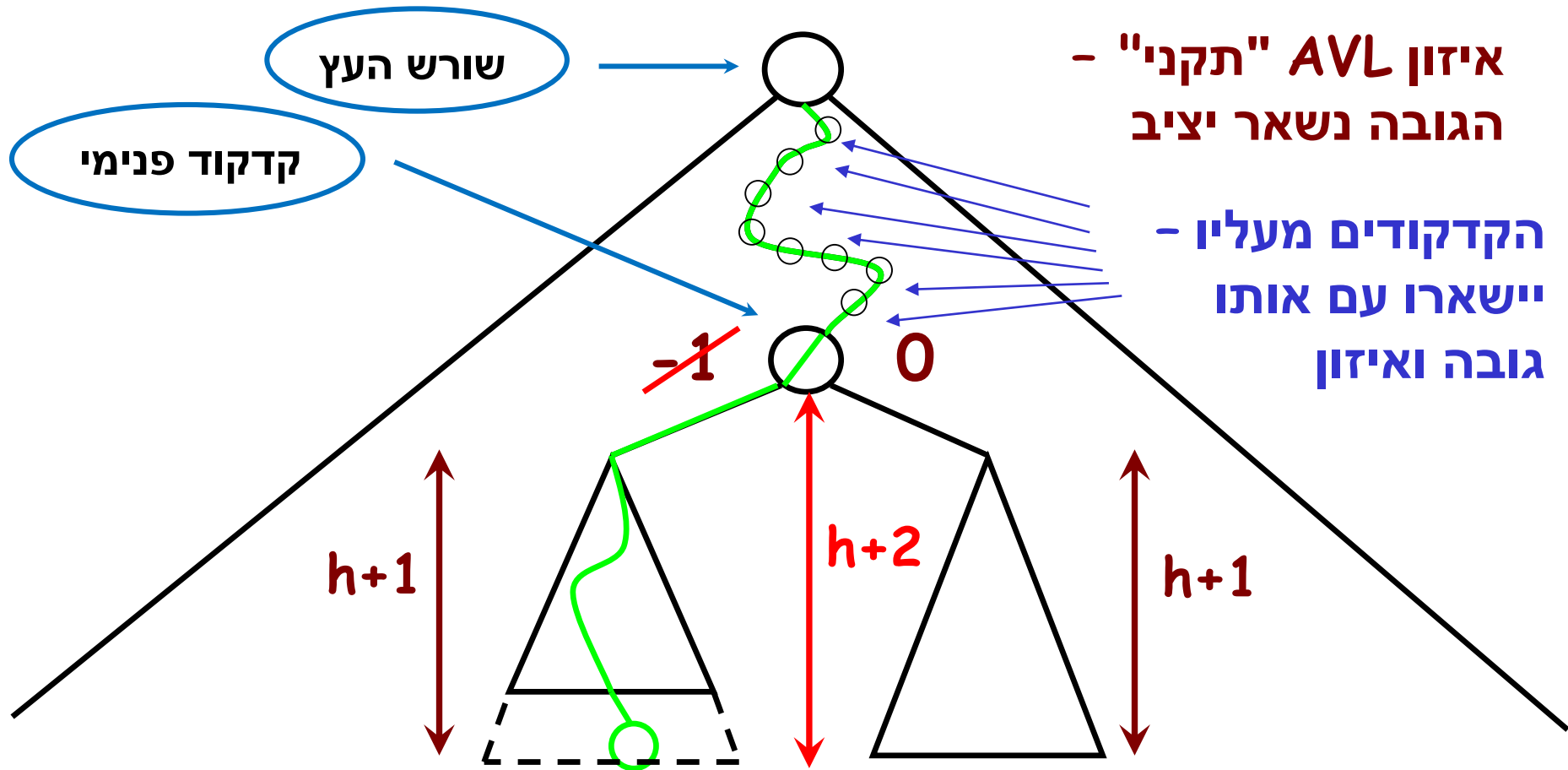
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



עצי AVL: הכנסה - ניתוח



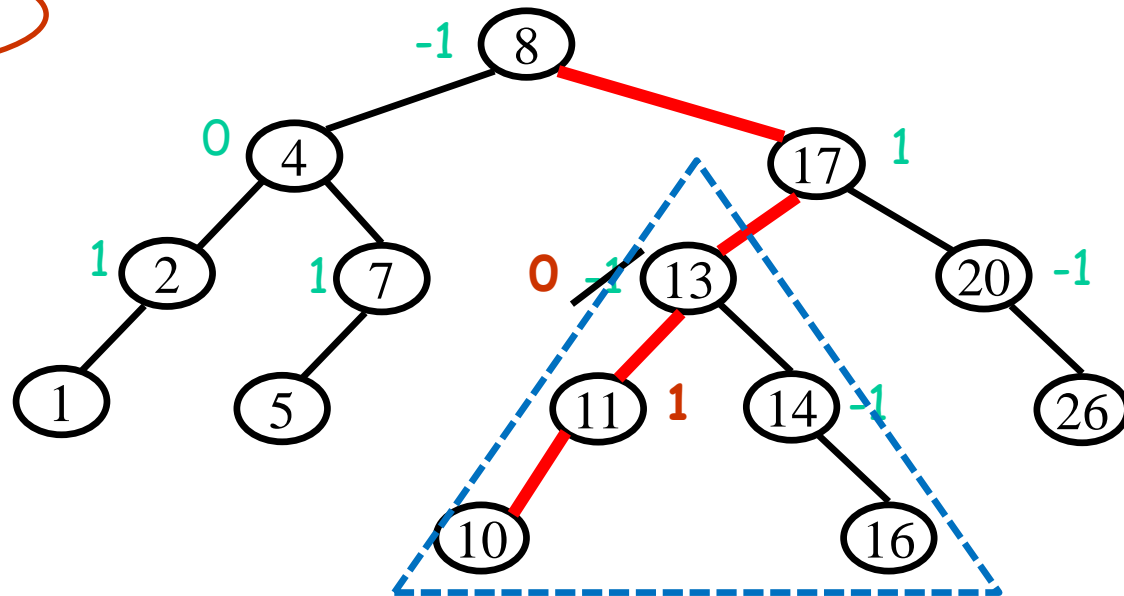
עצי AVL : הכנסה - ניתוח



אם גורם האיזון של קדקוד על מסלול ההכנסה משתנה ל-0 סיים

אם גורם האיזון של קדקוד על מסלול ההכנסה משתנה ל-0 סיים

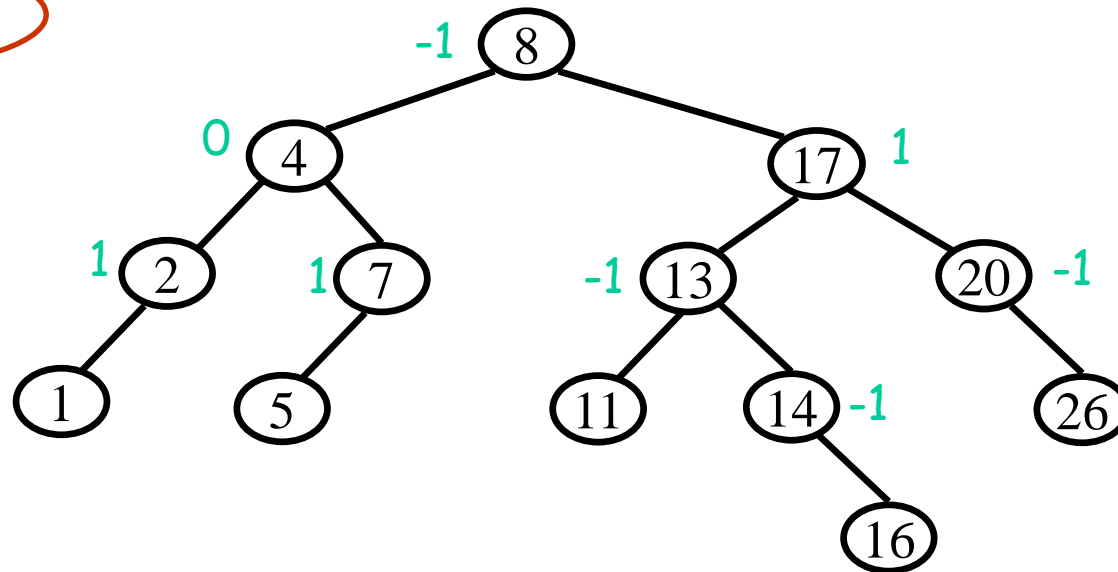
הכנסה (10)



גובה תת העץ לא השתנה אחרי הכנסת האיבר !!

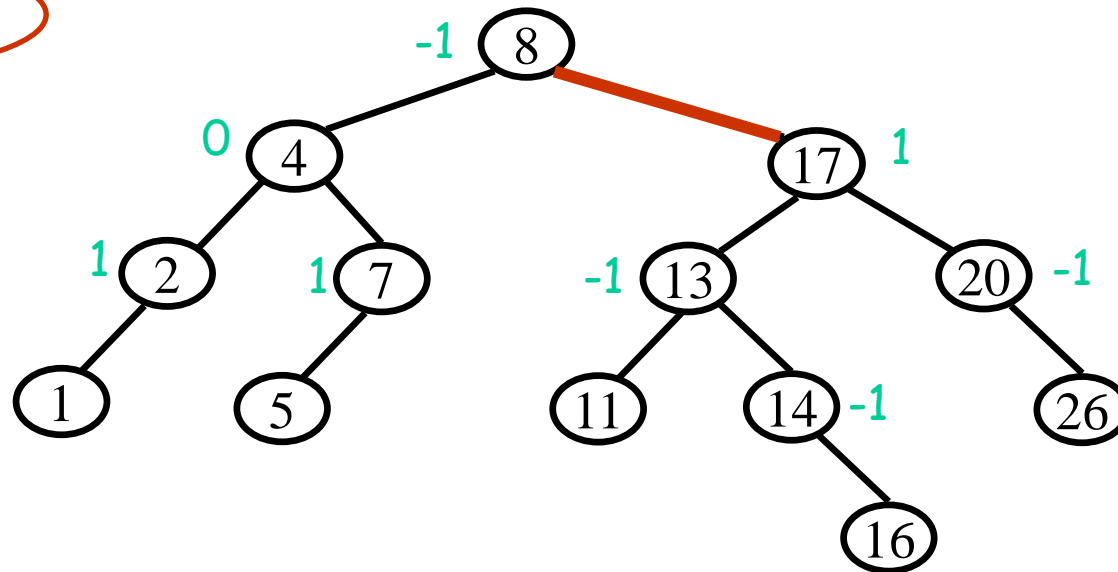
עצי AVL : הכנסה

הכנסה (15)



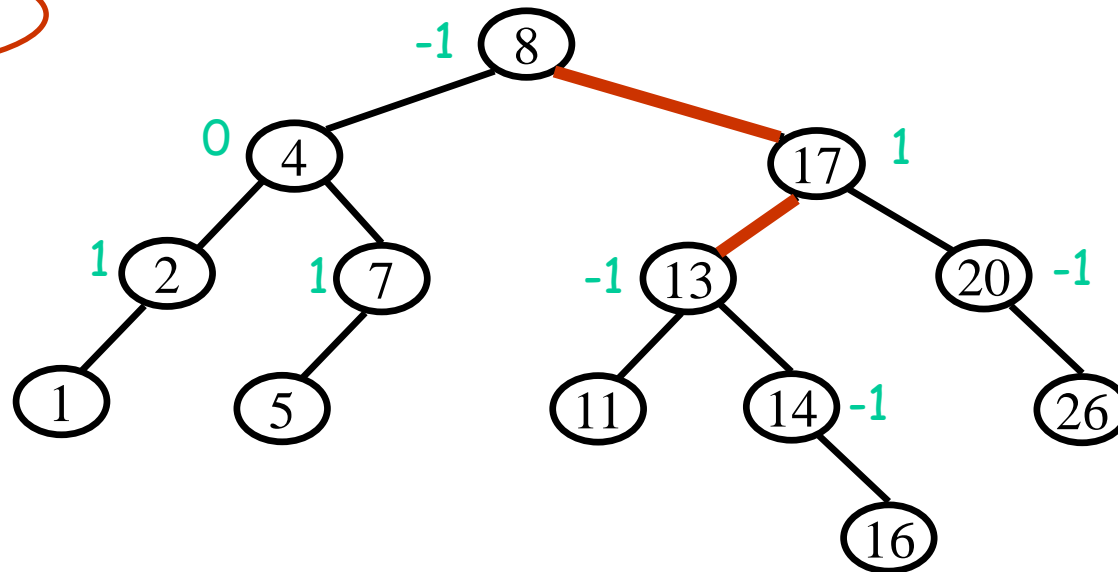
עצי AVL: הכנסה

הכנסה (15)



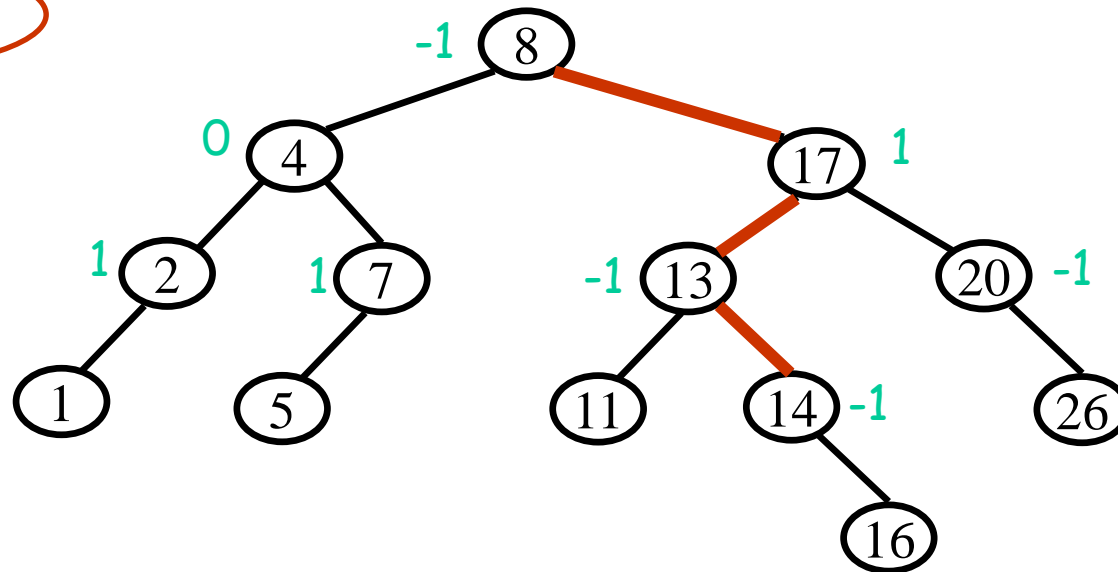
עצי AVL: הכנסה

הכנסה (15)



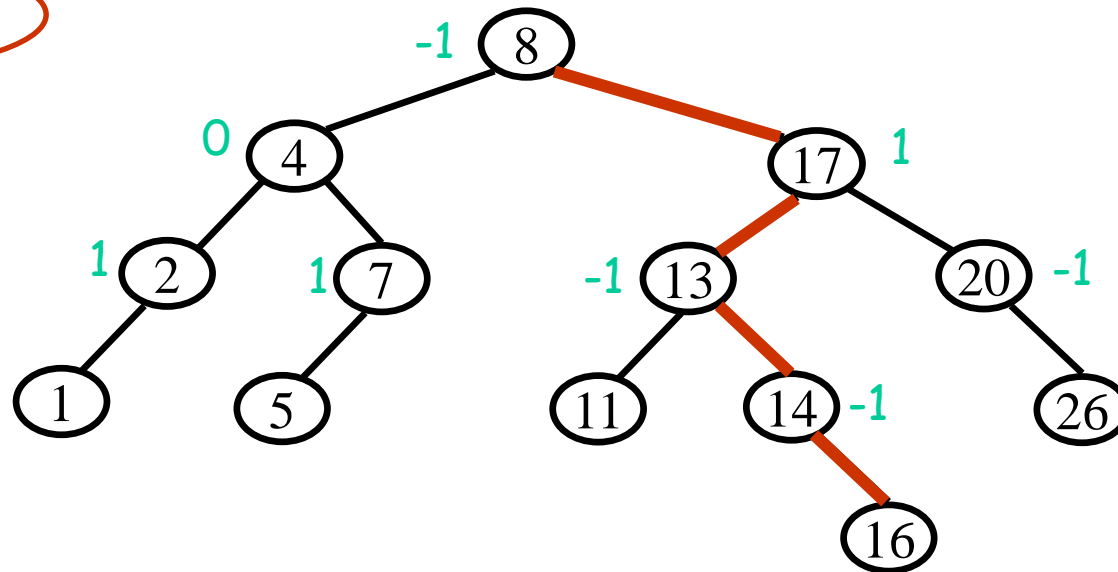
עצי AVL: הכנסה

הכנסה (15)



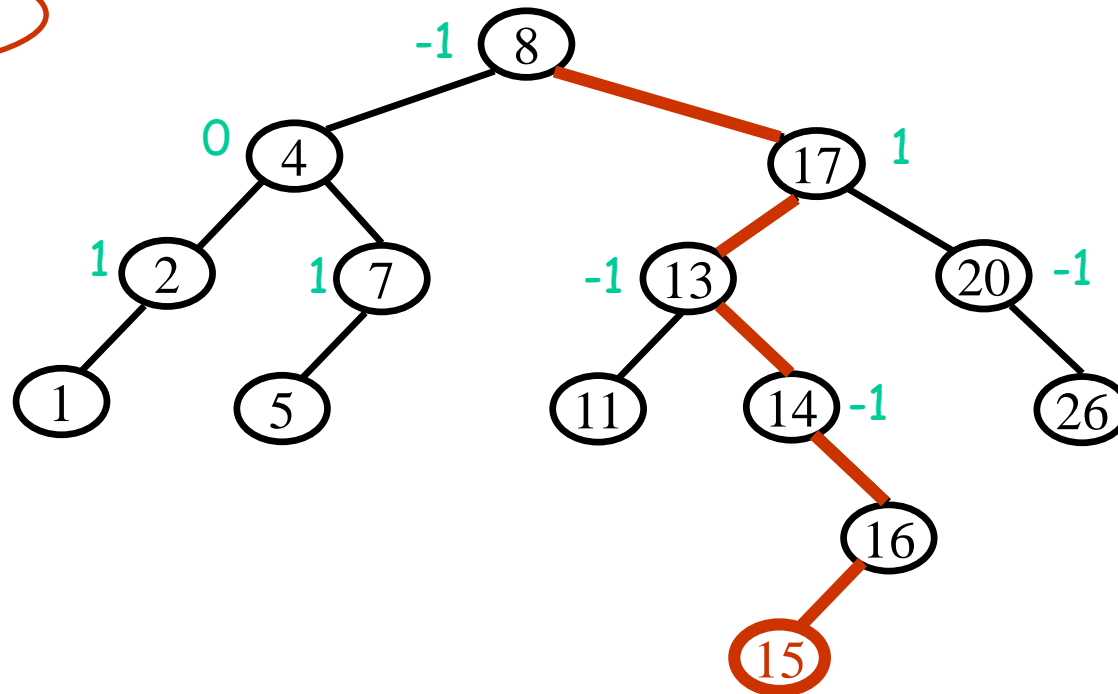
עצי AVL: הכנסה

הכנסה (15)



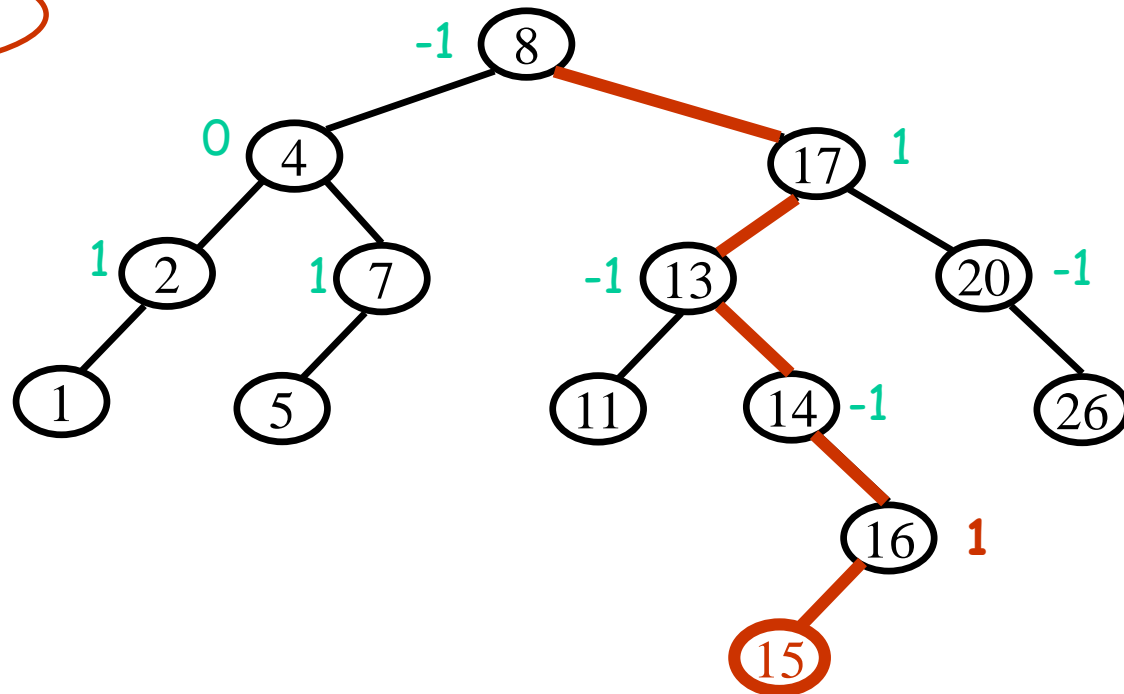
עצי AVL : הכנסה

הכנסה (15)



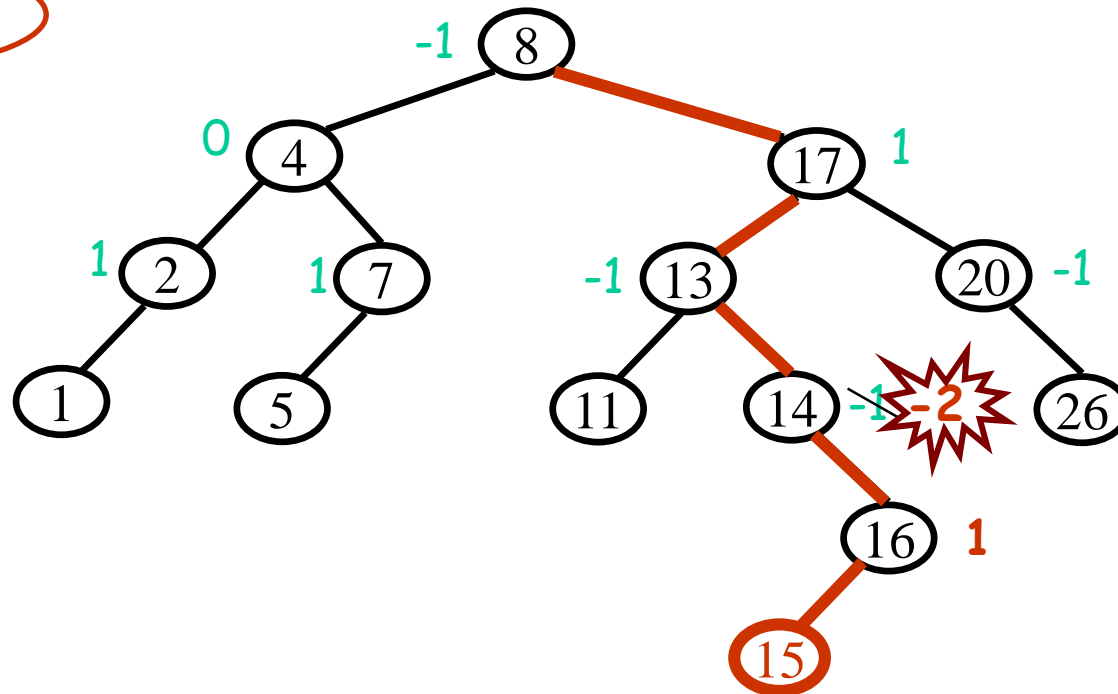
עצי AVL: הכנסה

הכנסה (15)



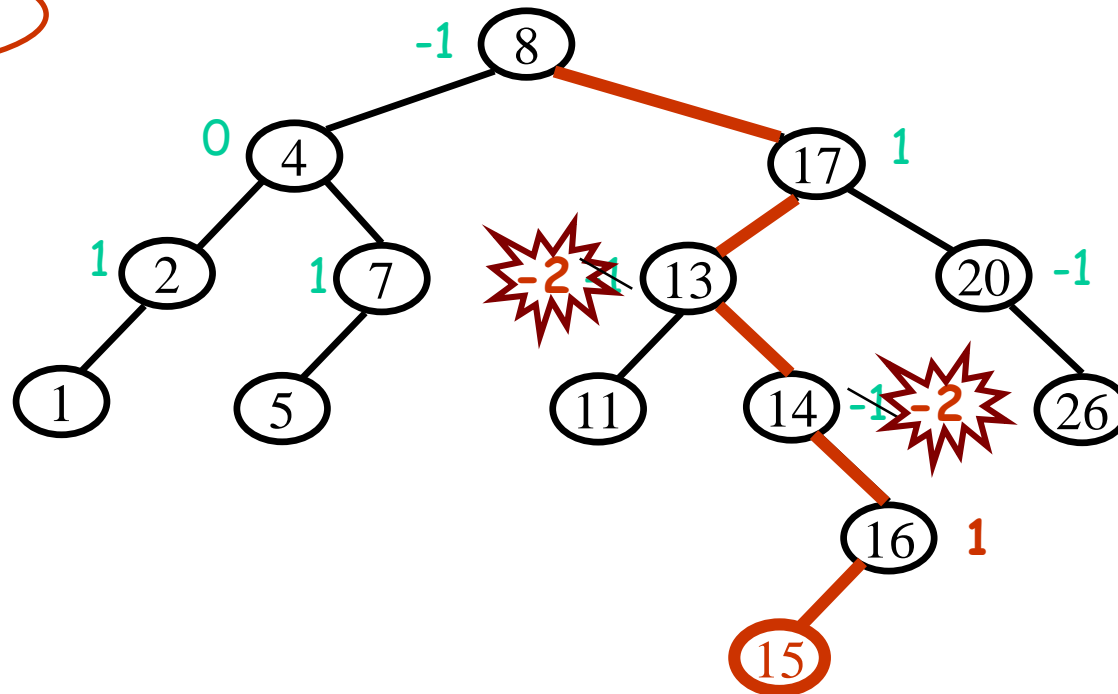
עצי AVL: הכנסה

הכנסה (15)



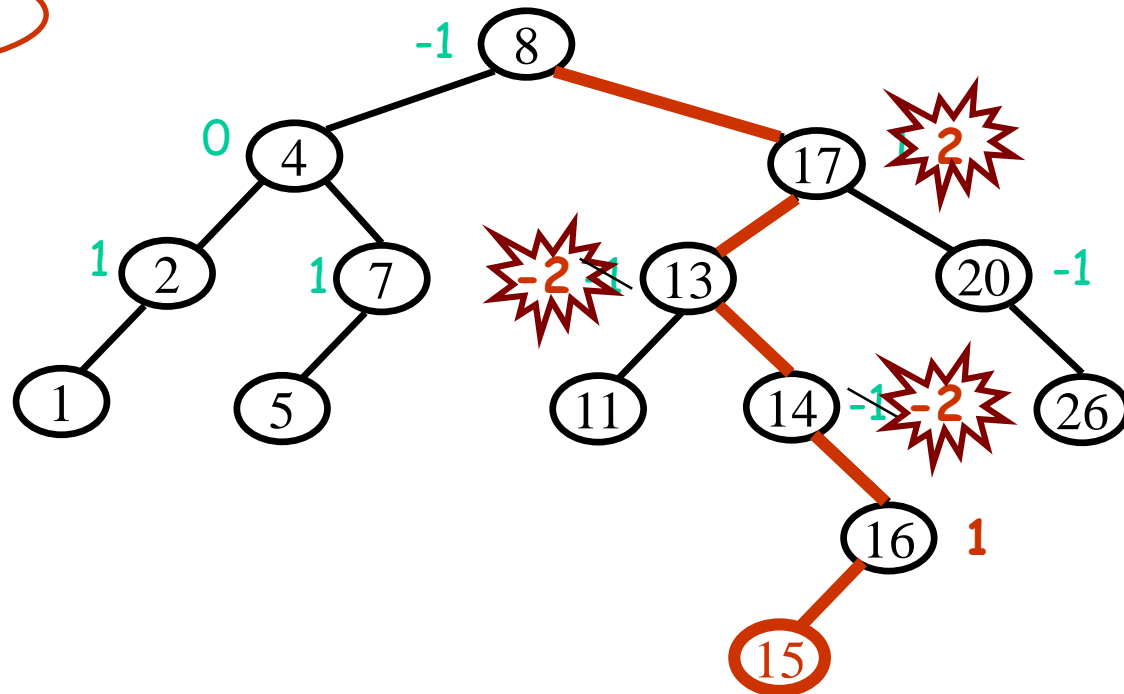
עצי AVL: הכנסה

הכנסה (15)



עצי AVL : הכנסה

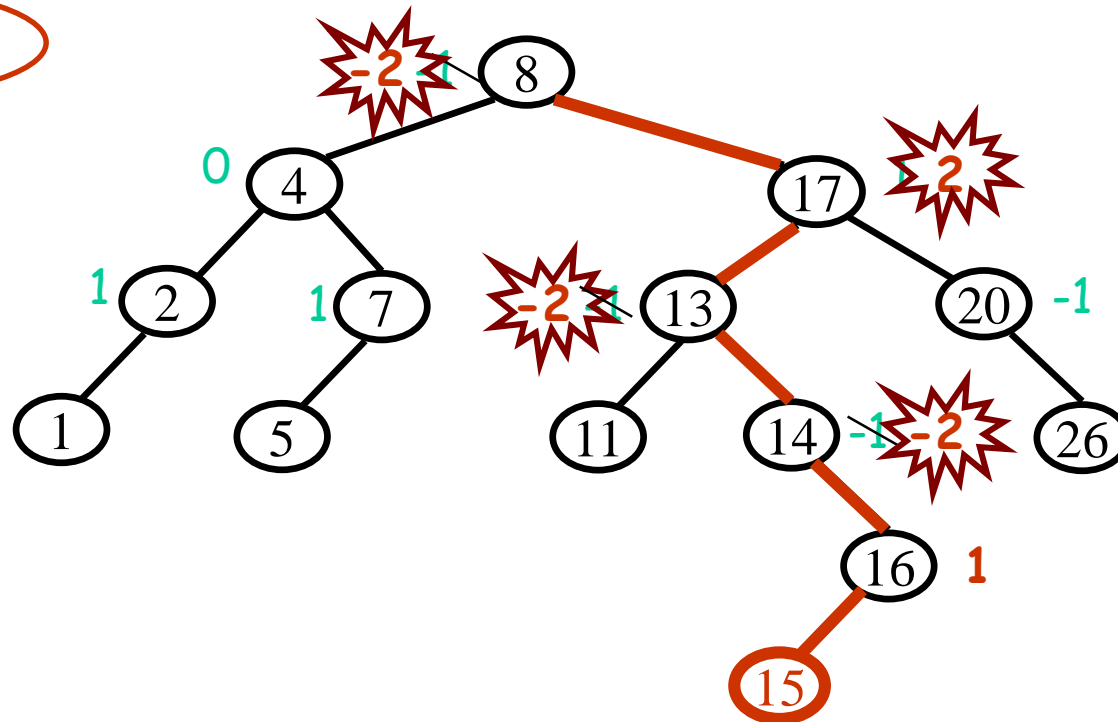
הכנסה (15)



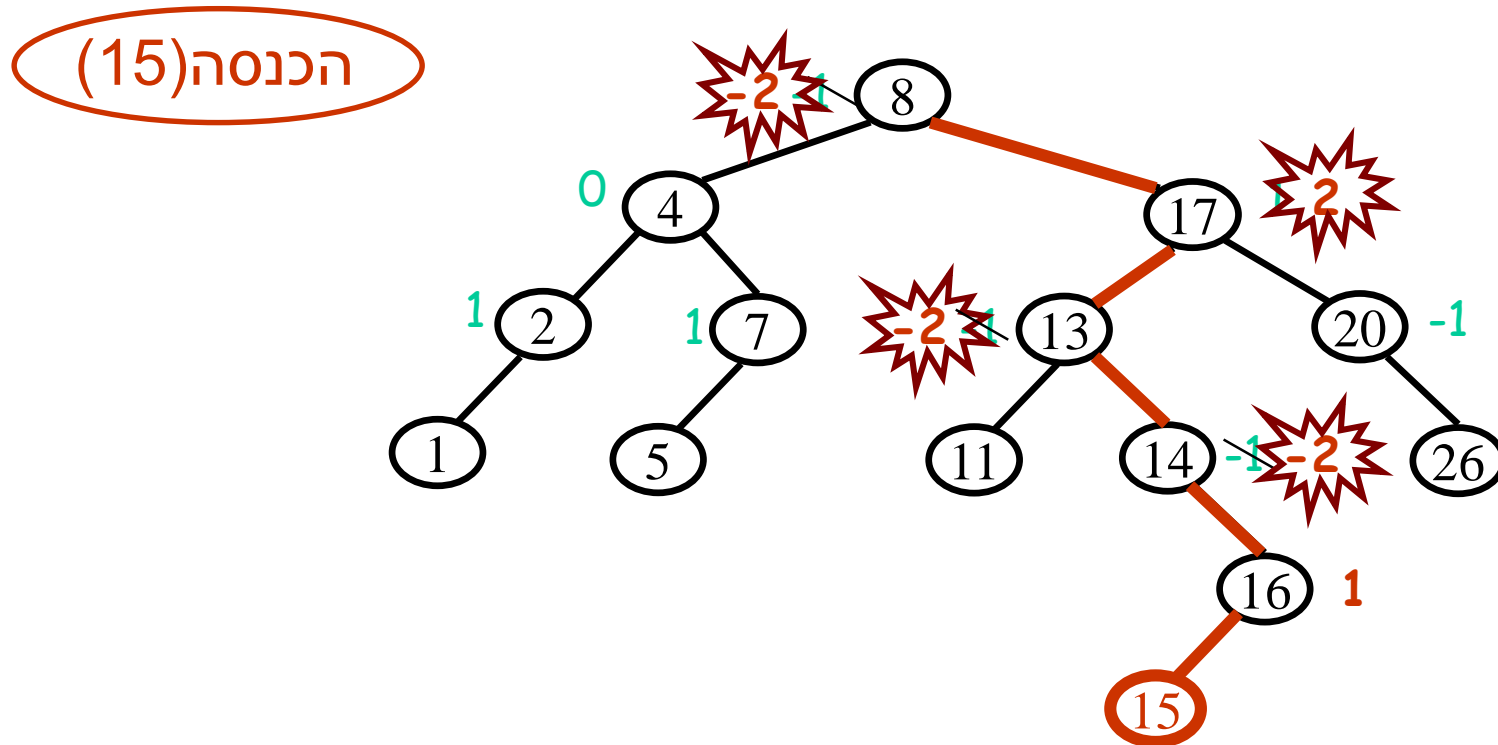
עצי AVL: הכנסה

האם קיימים איזונים אסורים נוספים בעץ AVL ?

הכנסה (15)

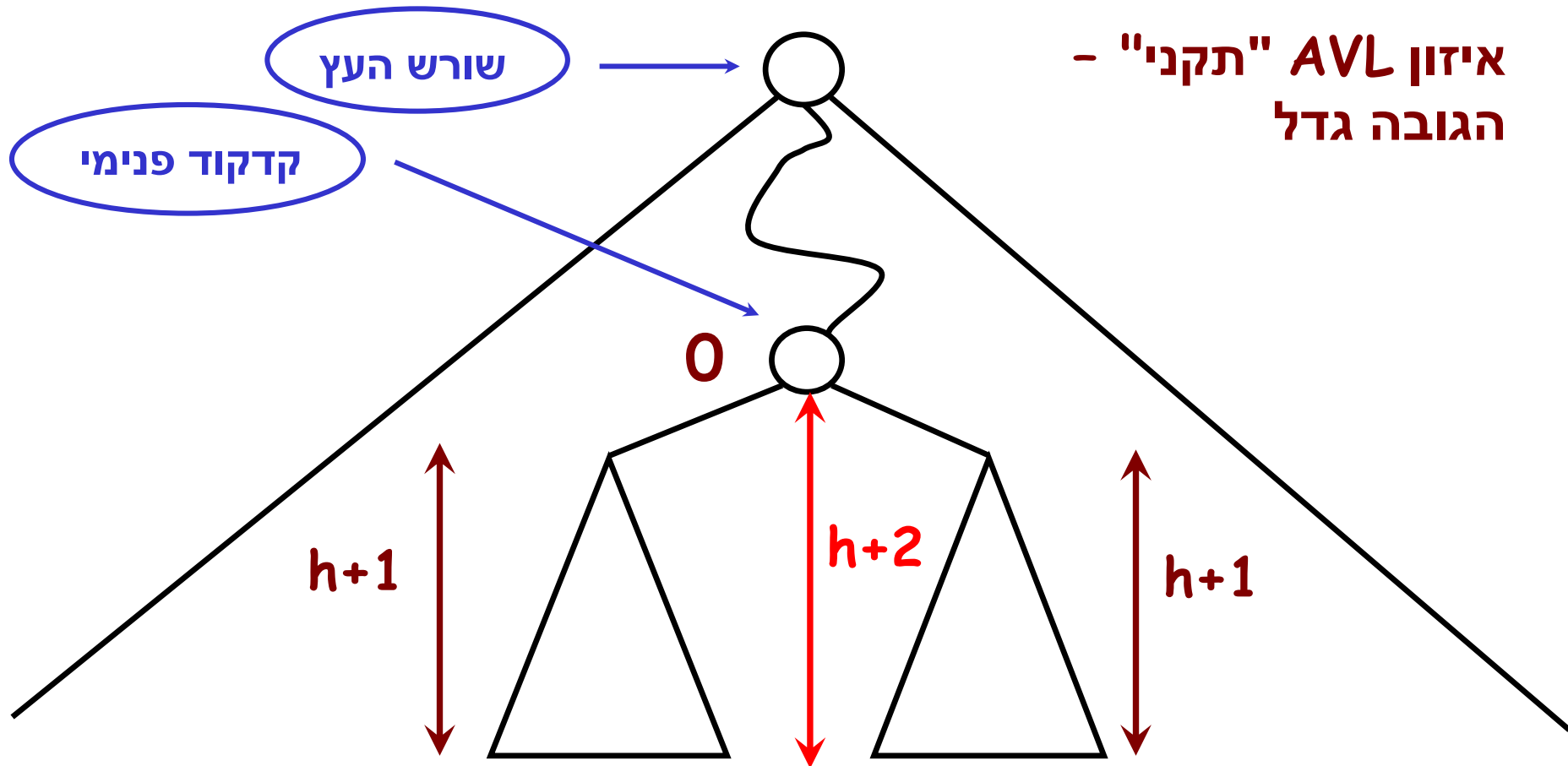


עצי AVL : הכנסה

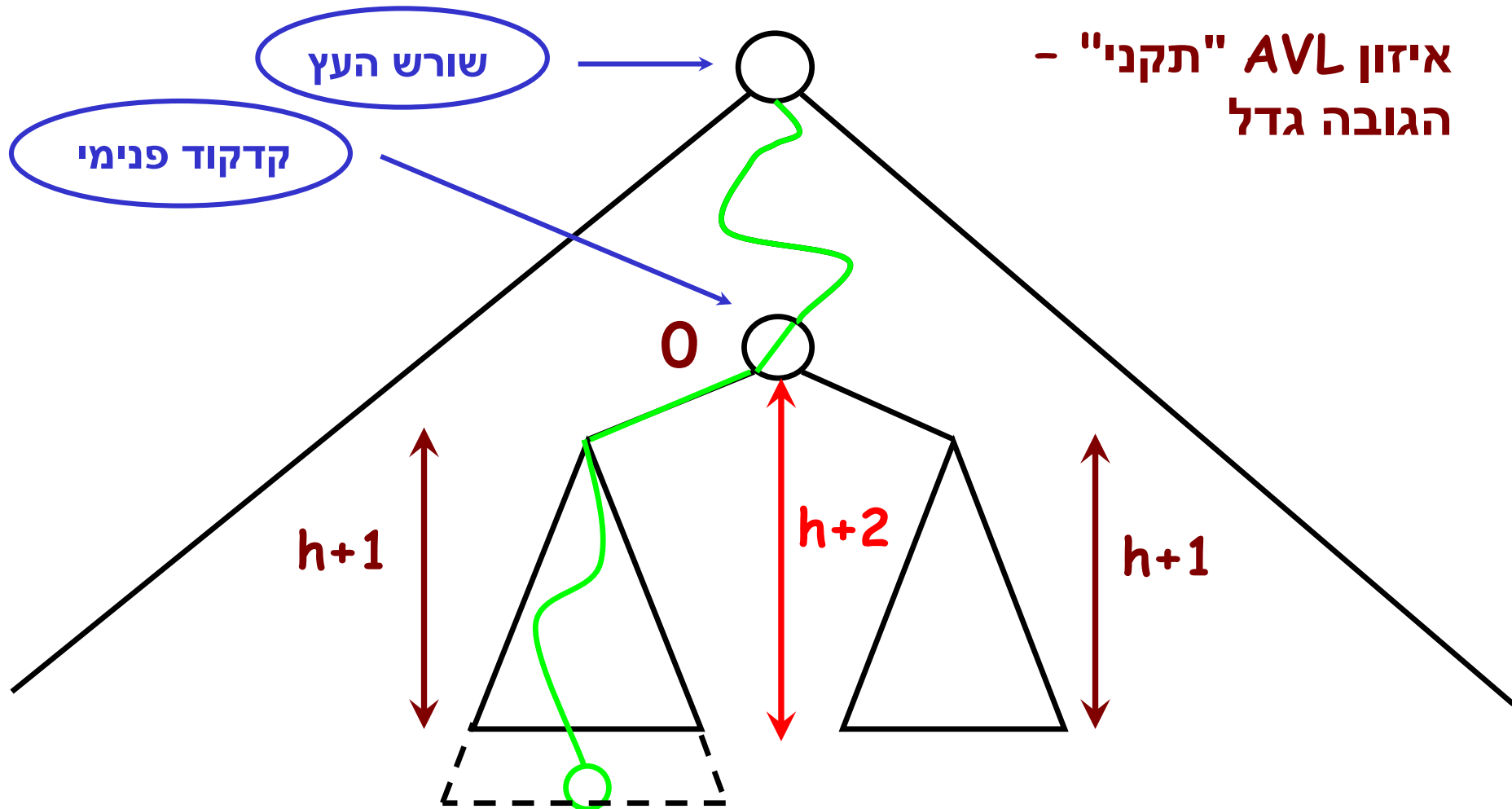


השינויים באיזון קורים רק במסלול ההכנסה

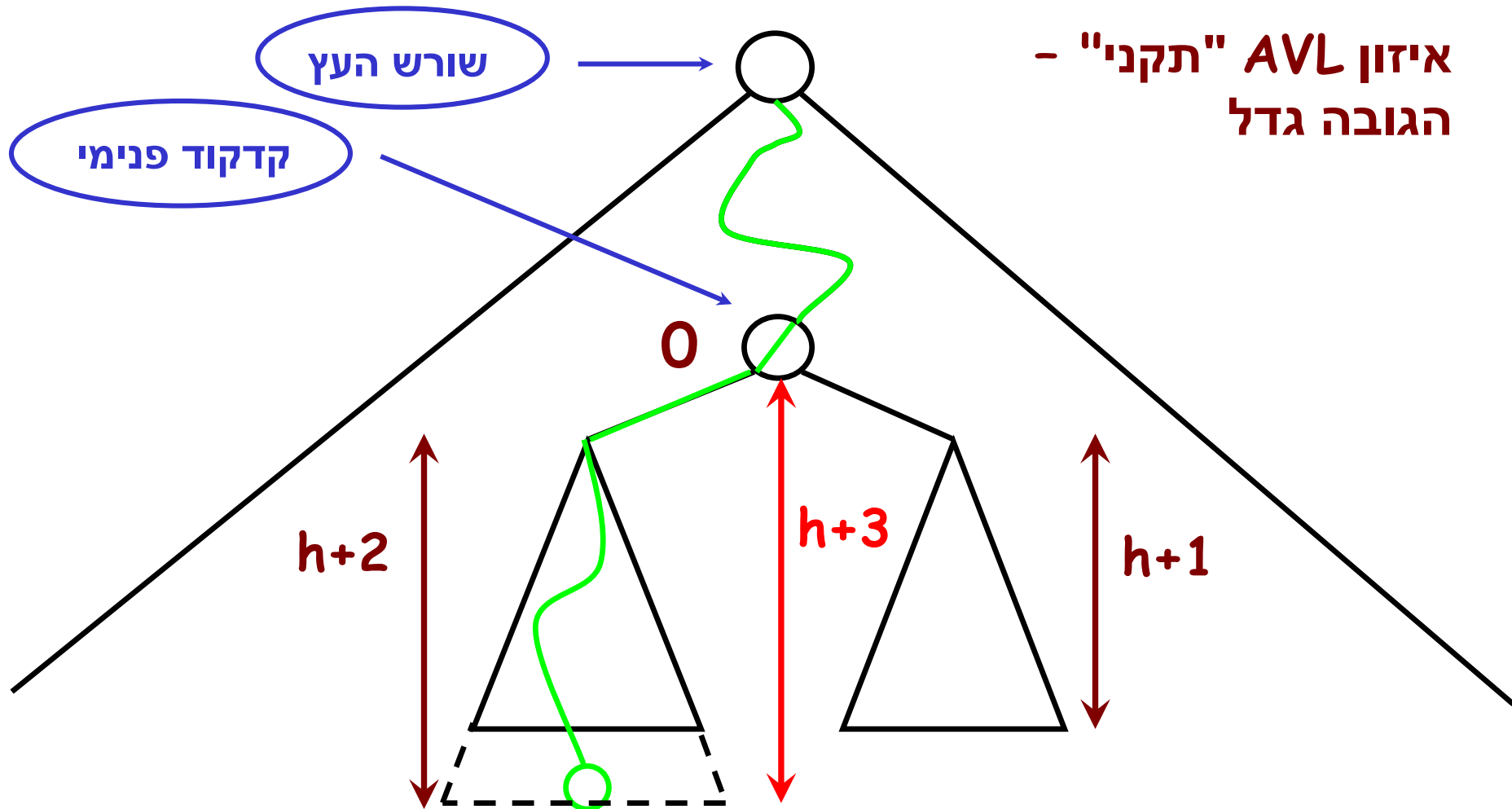
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



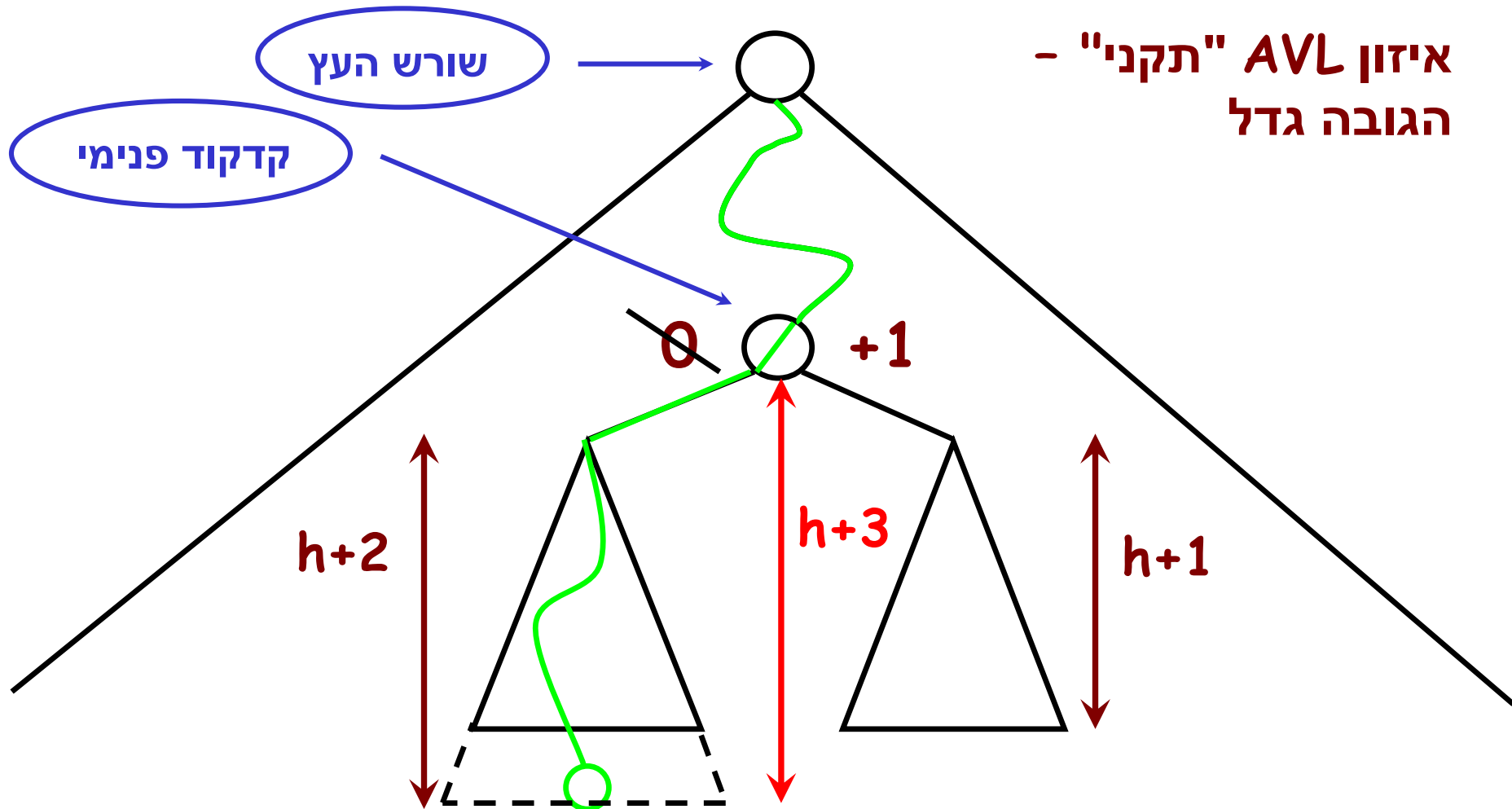
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



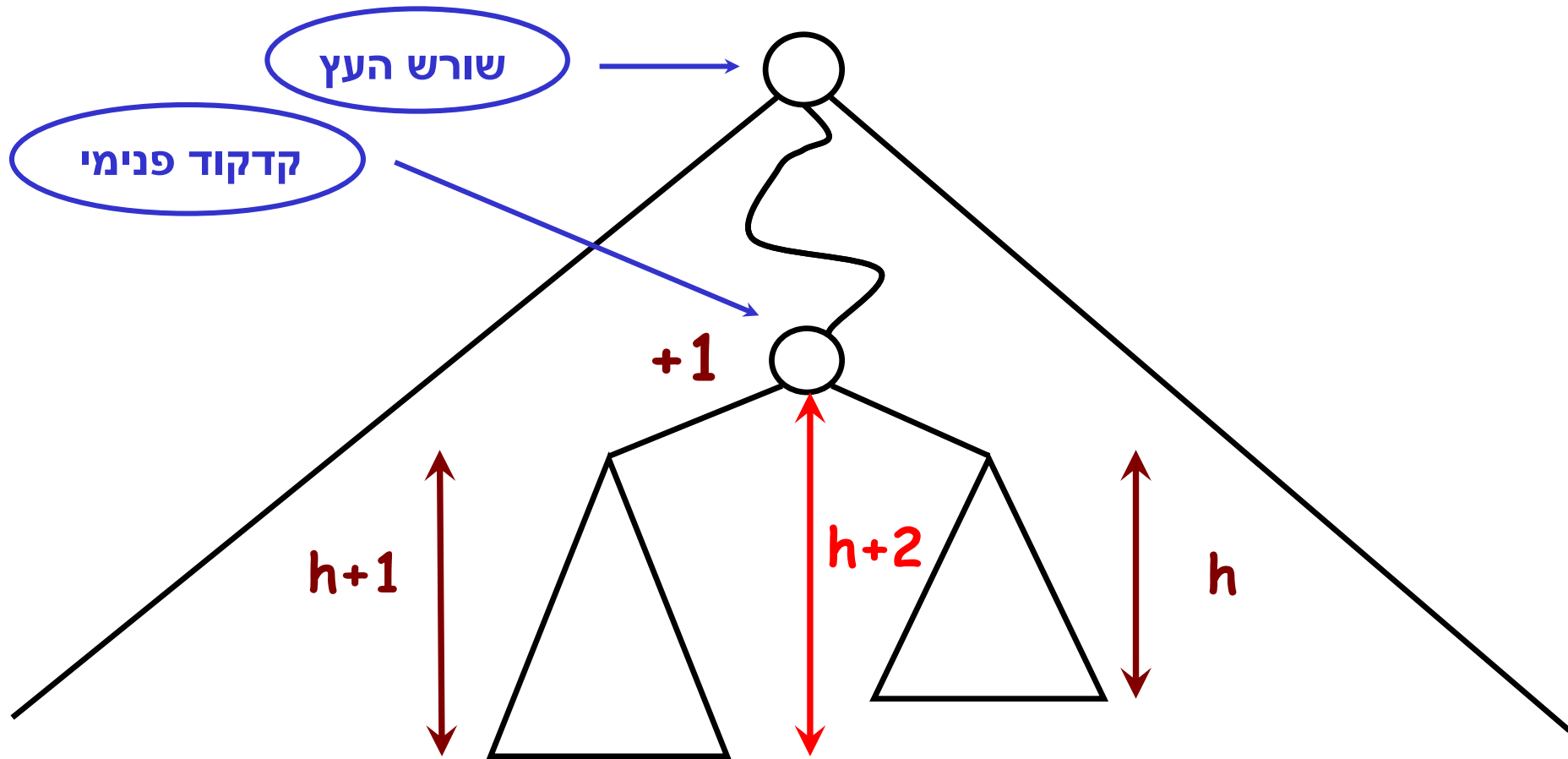
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



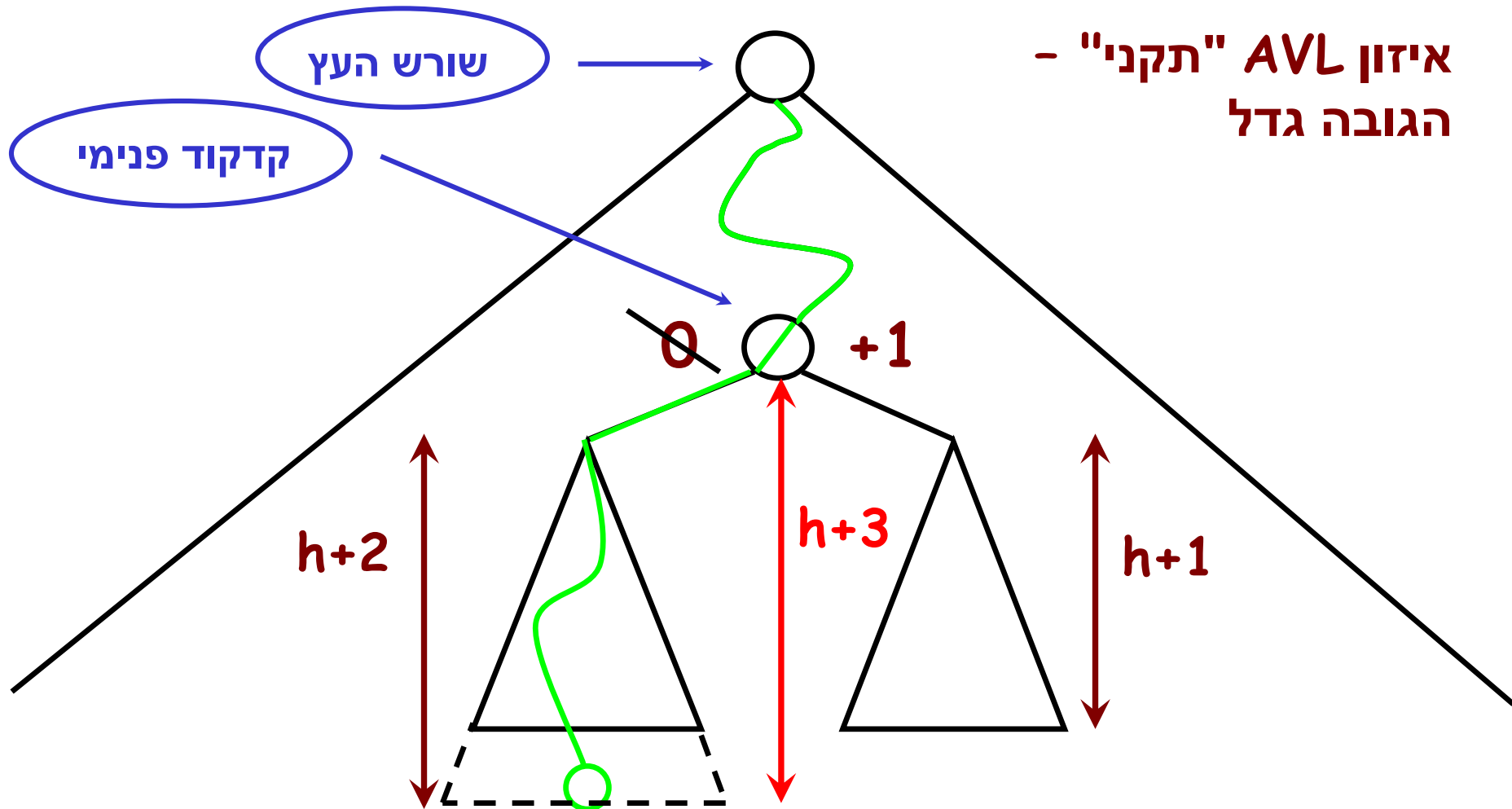
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



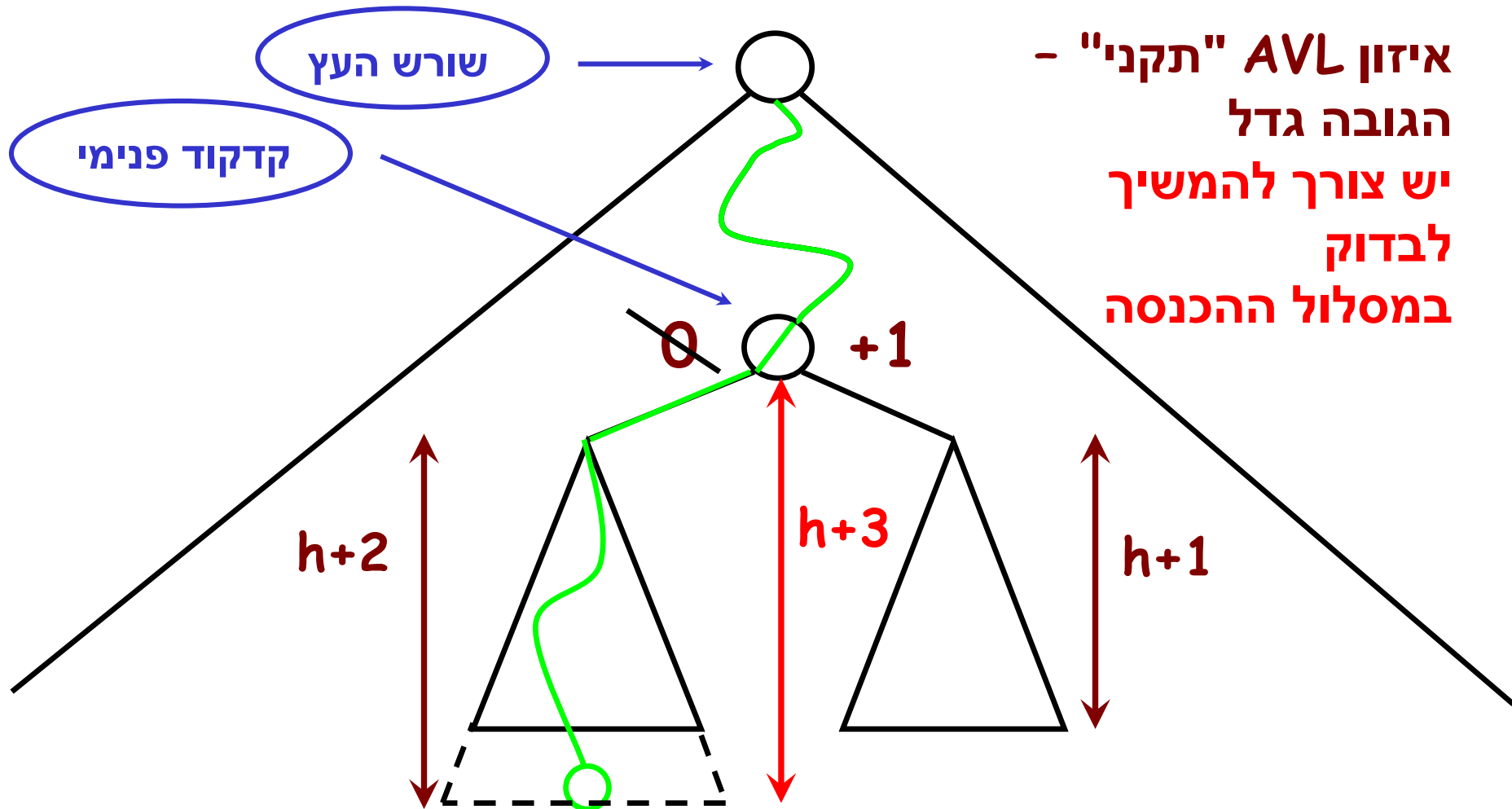
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



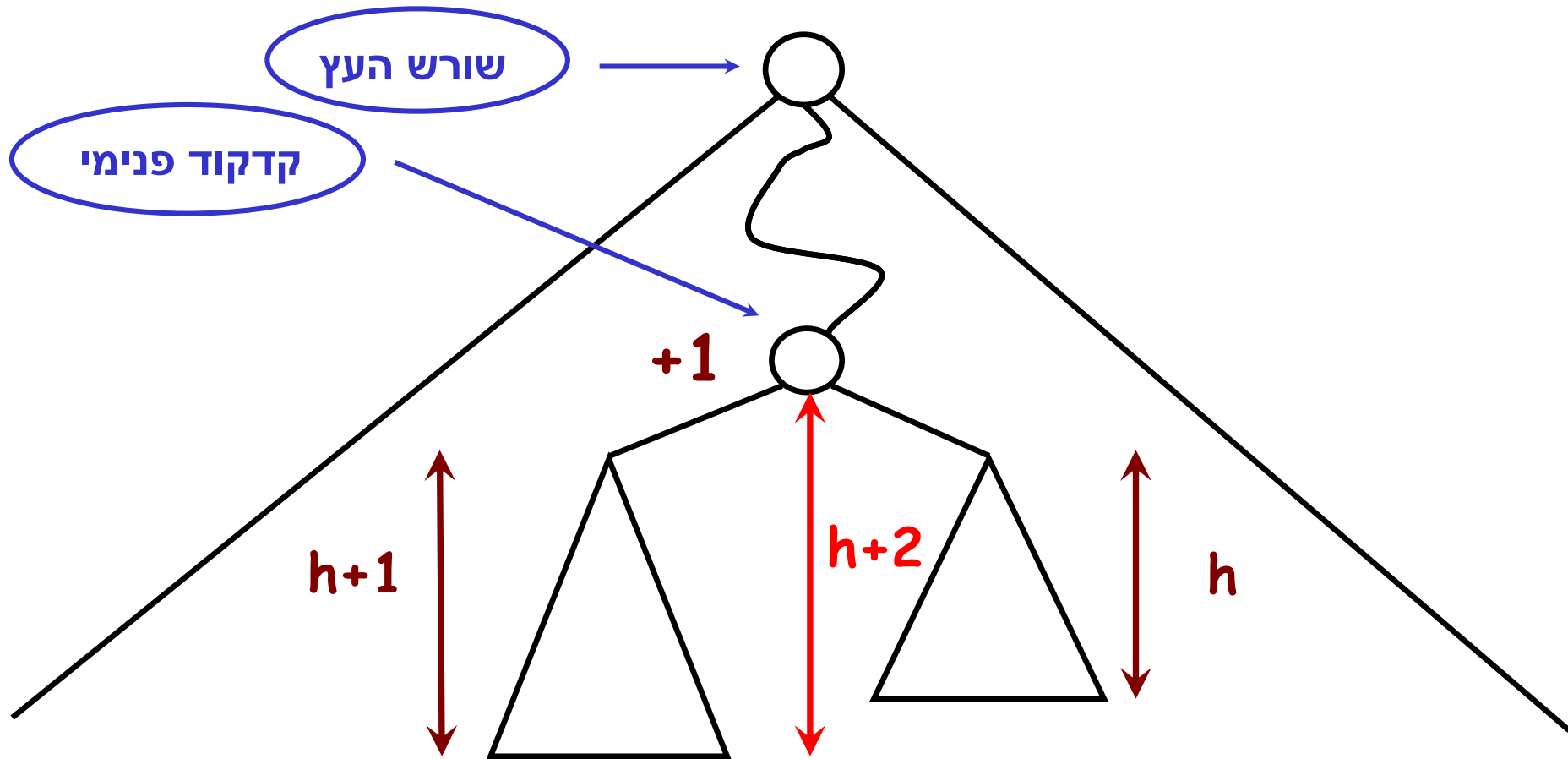
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



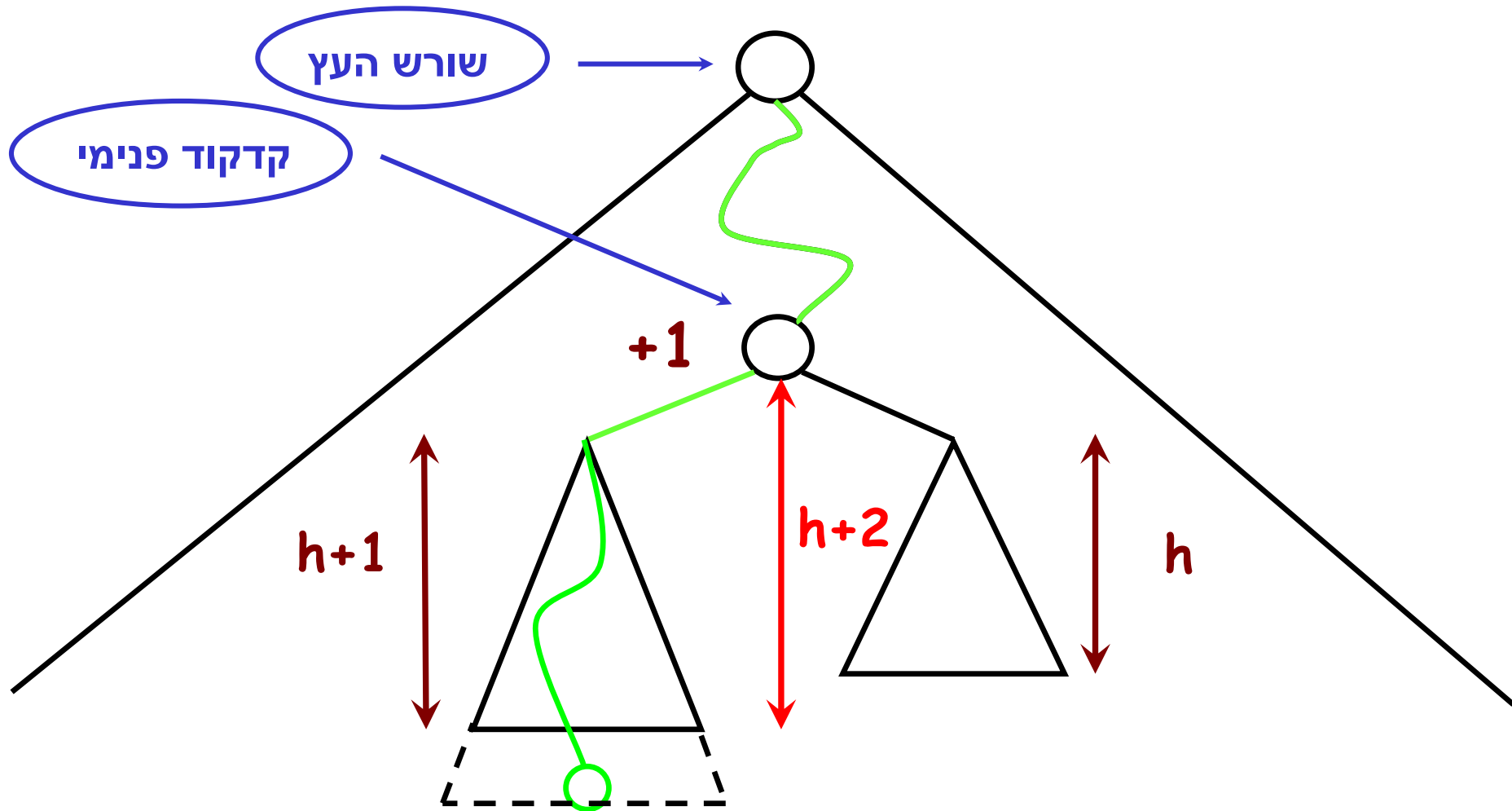
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



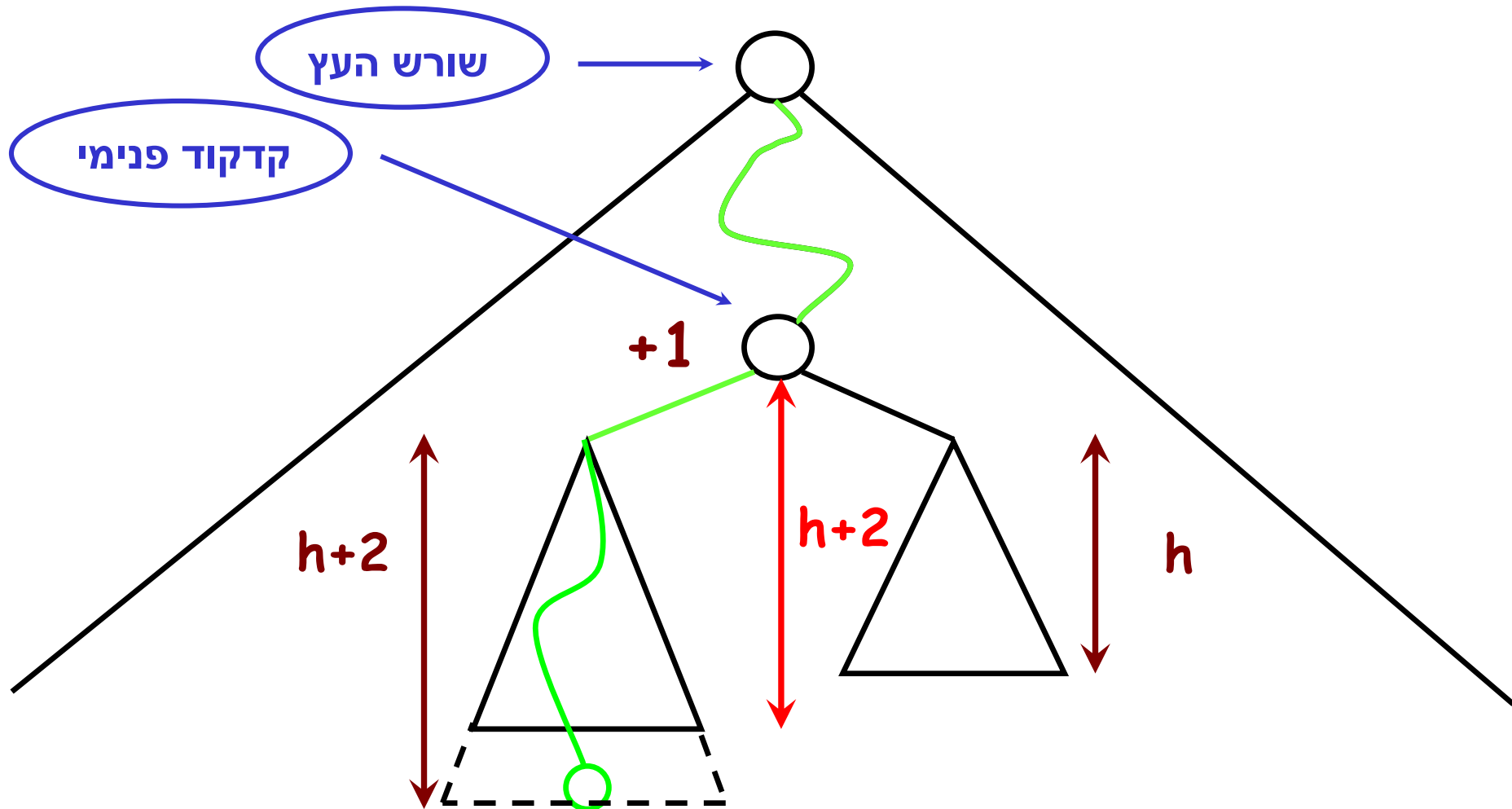
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



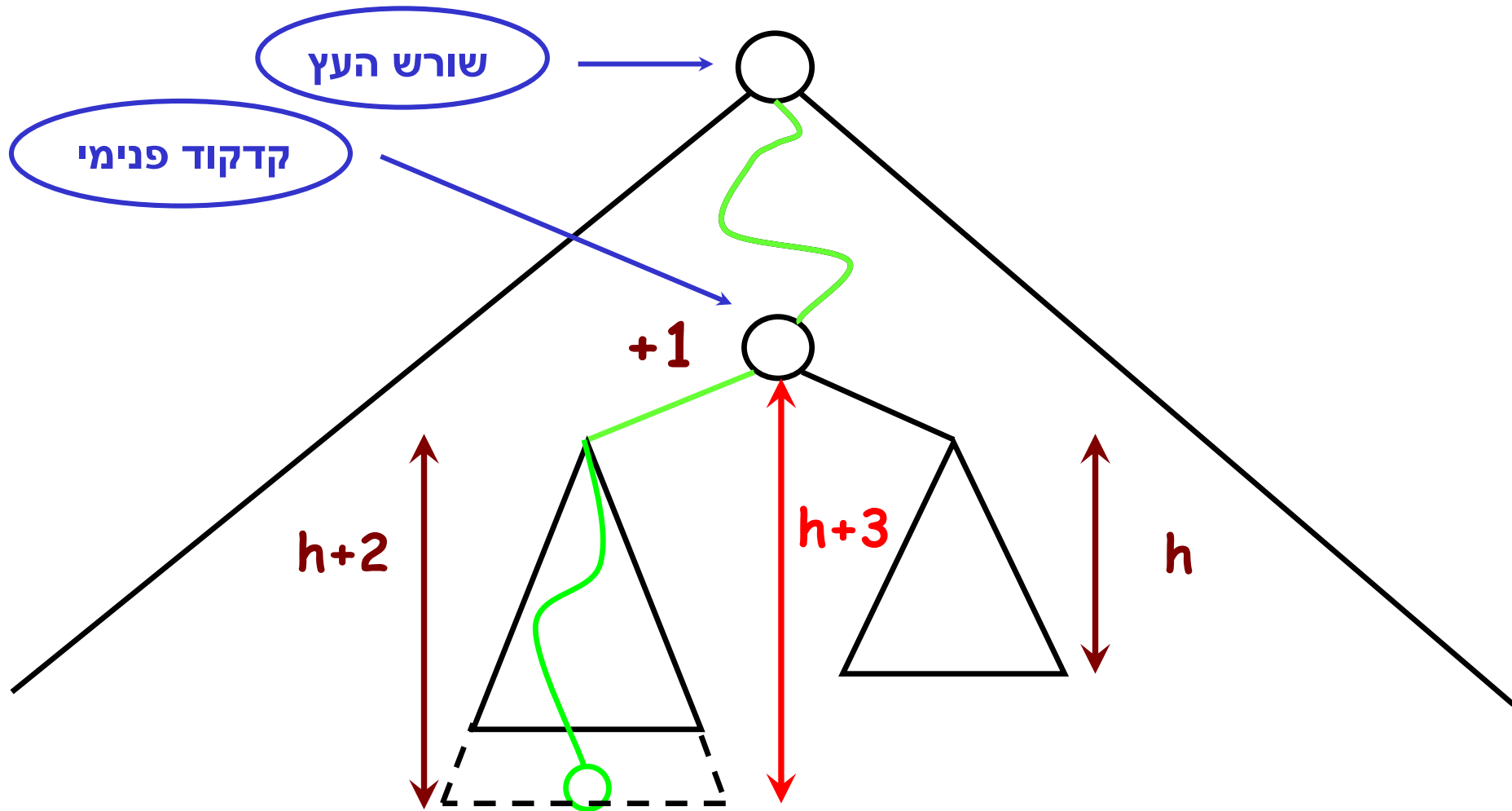
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



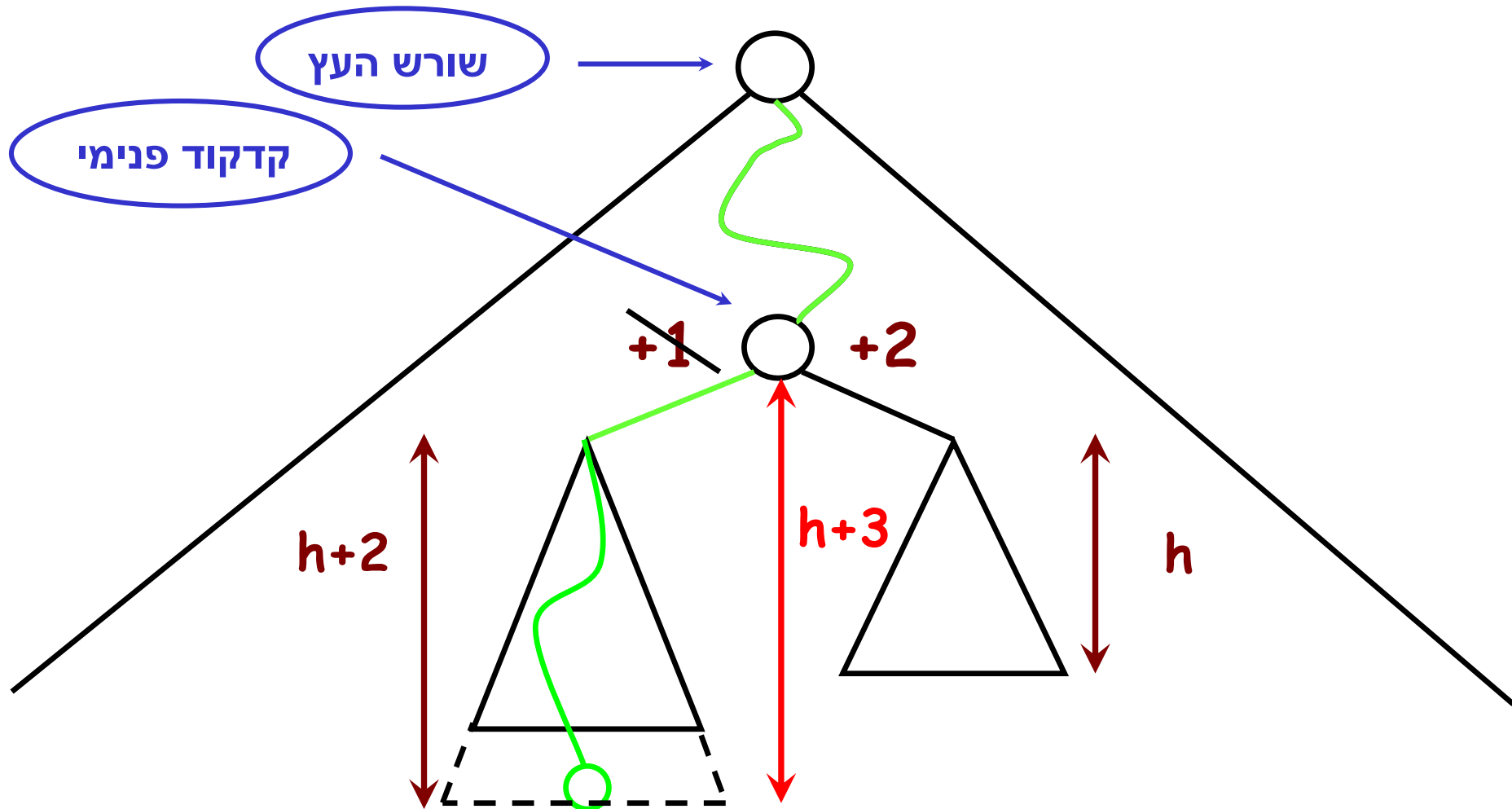
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



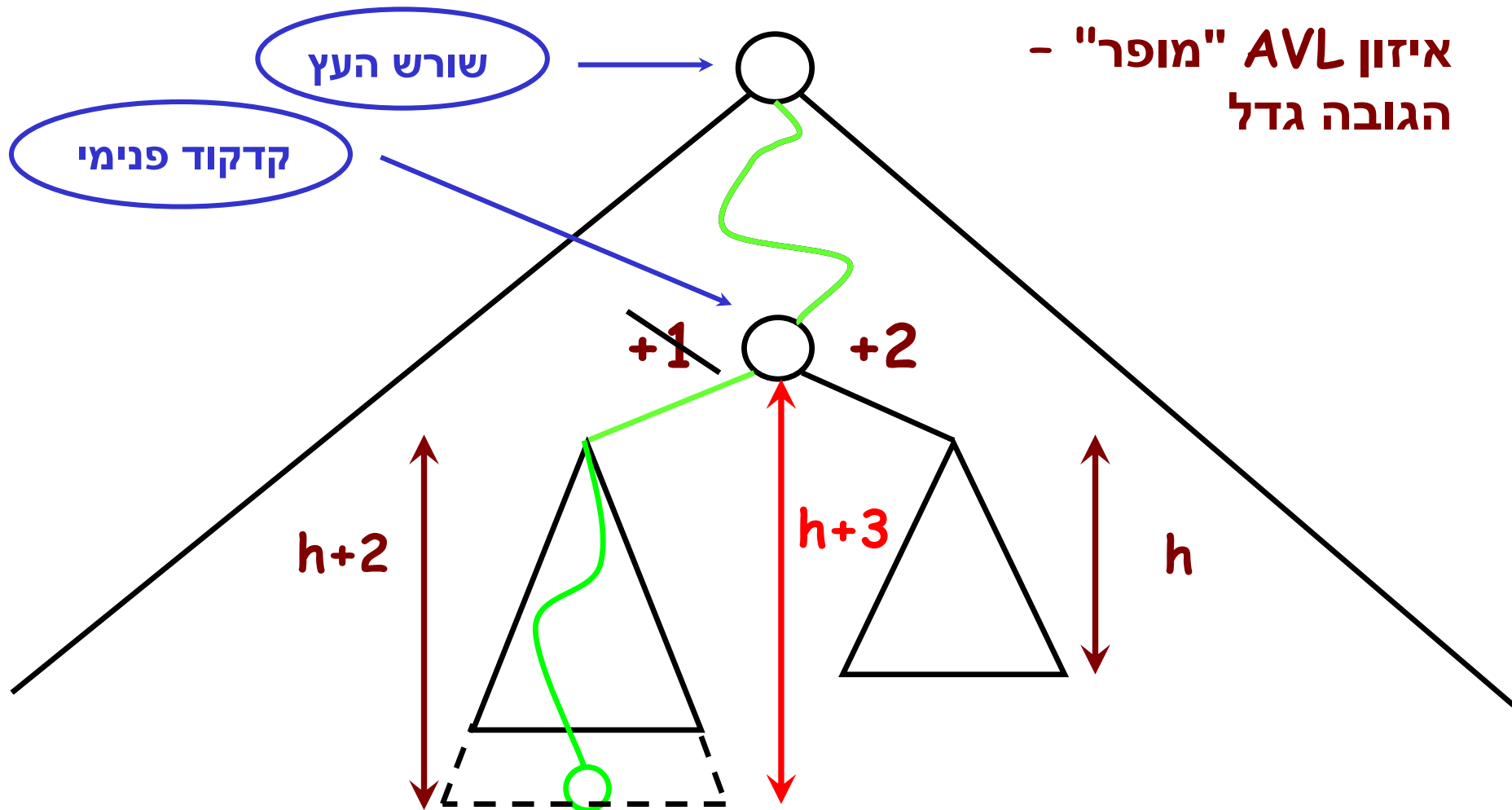
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



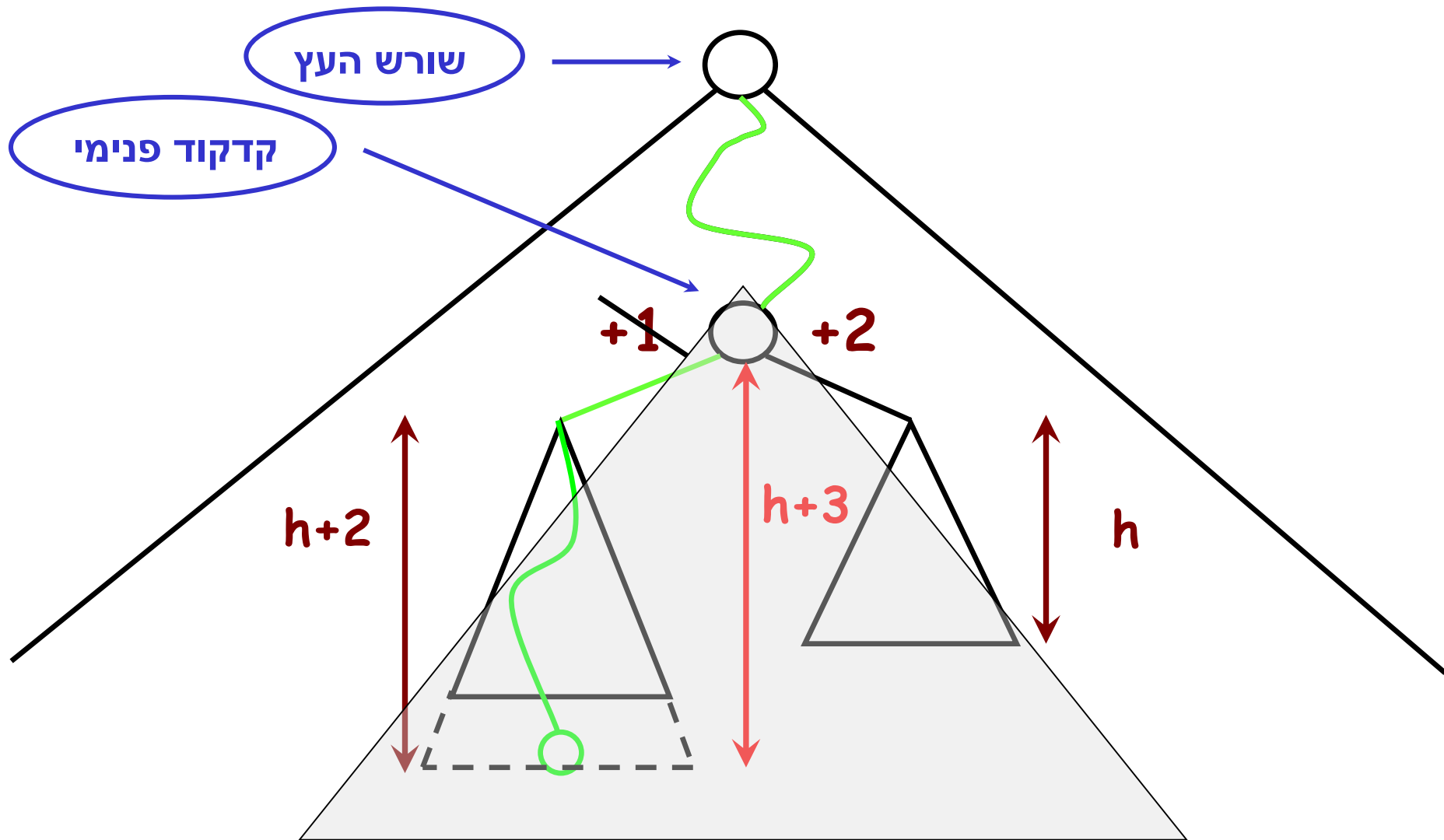
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



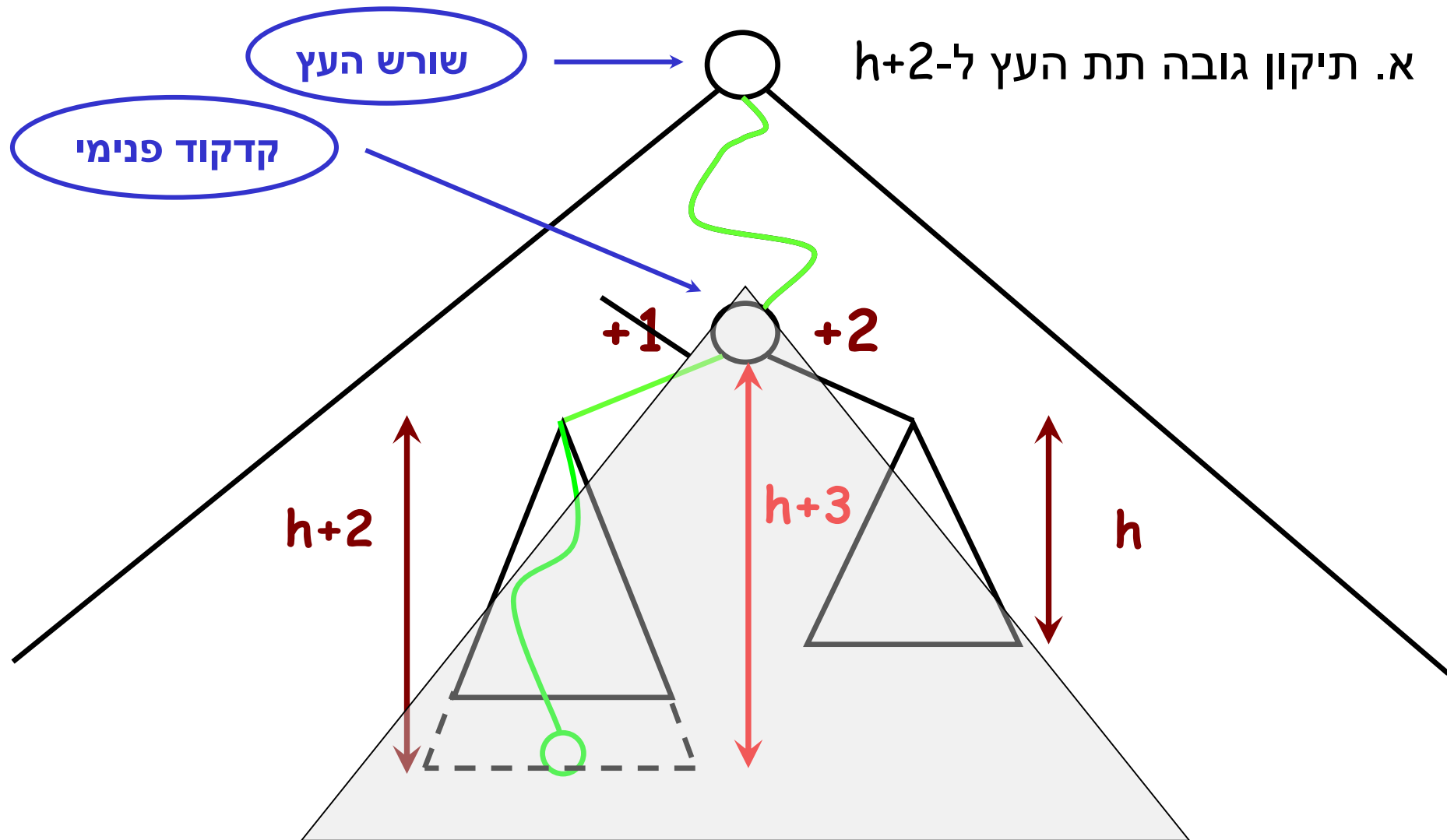
עצי AVL: הכנסה - ניתוח



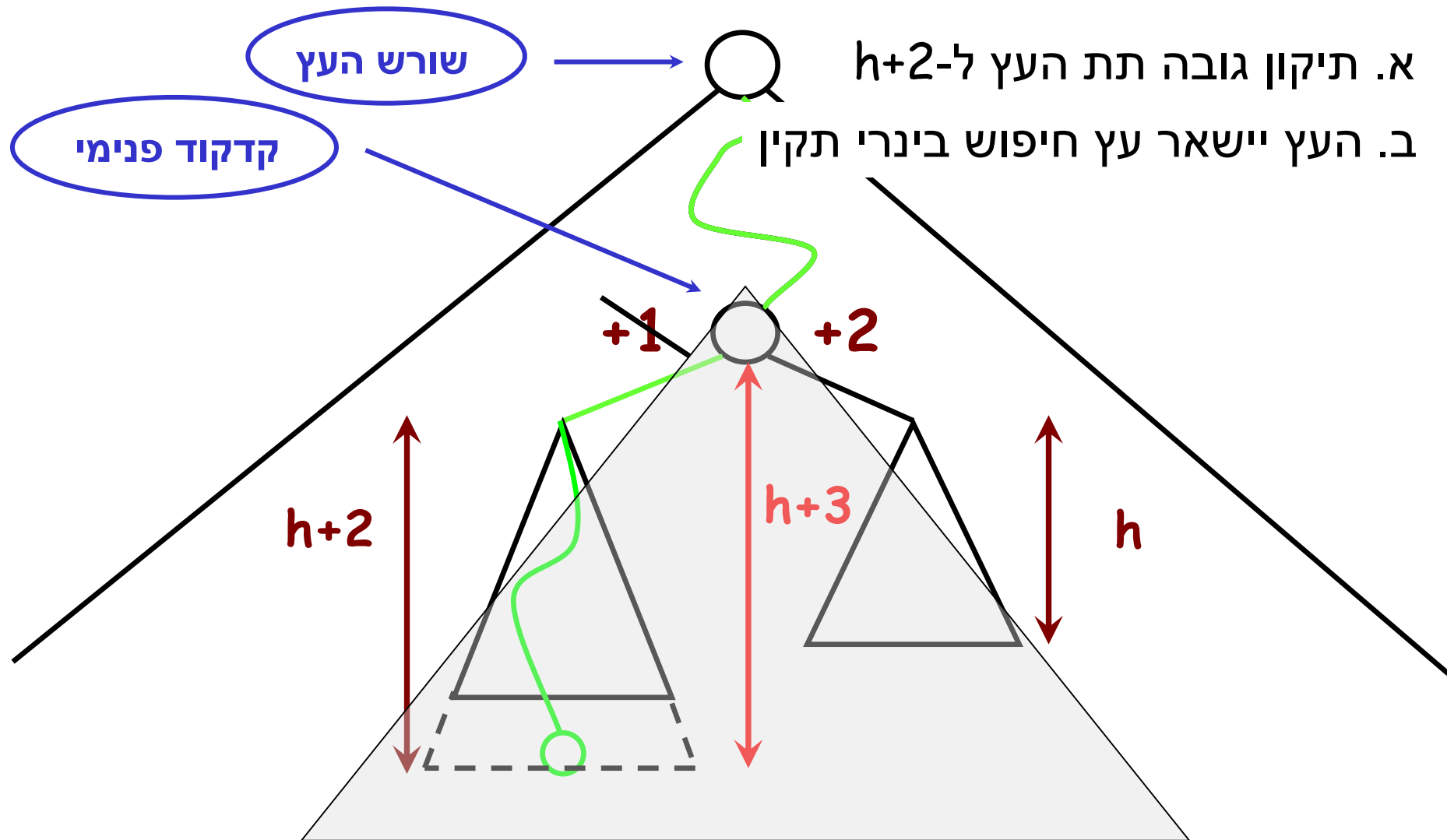
כיצד ניתן להתגבר על הבעיה?



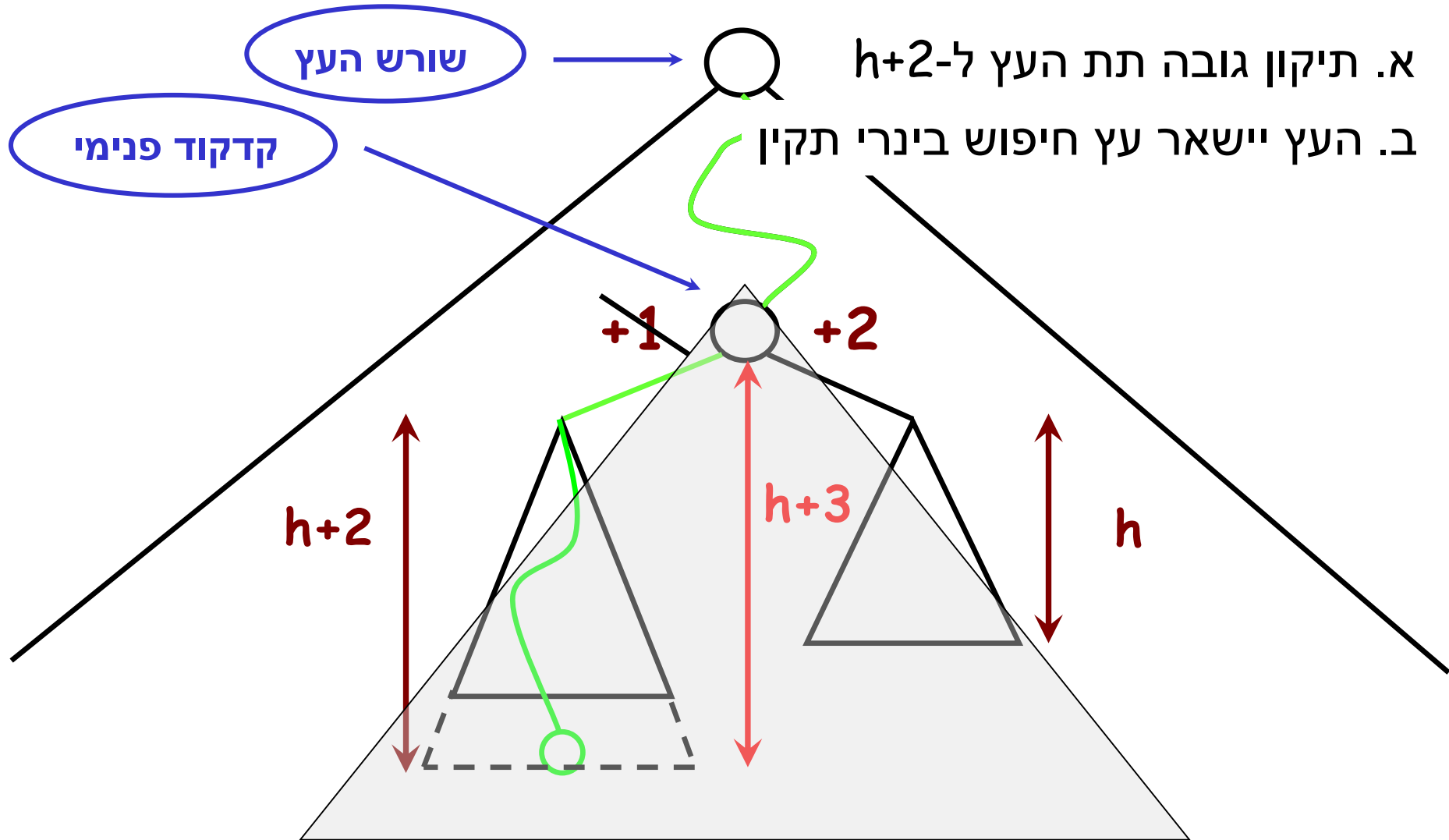
כיצד ניתן להתגבר על הבעיה?



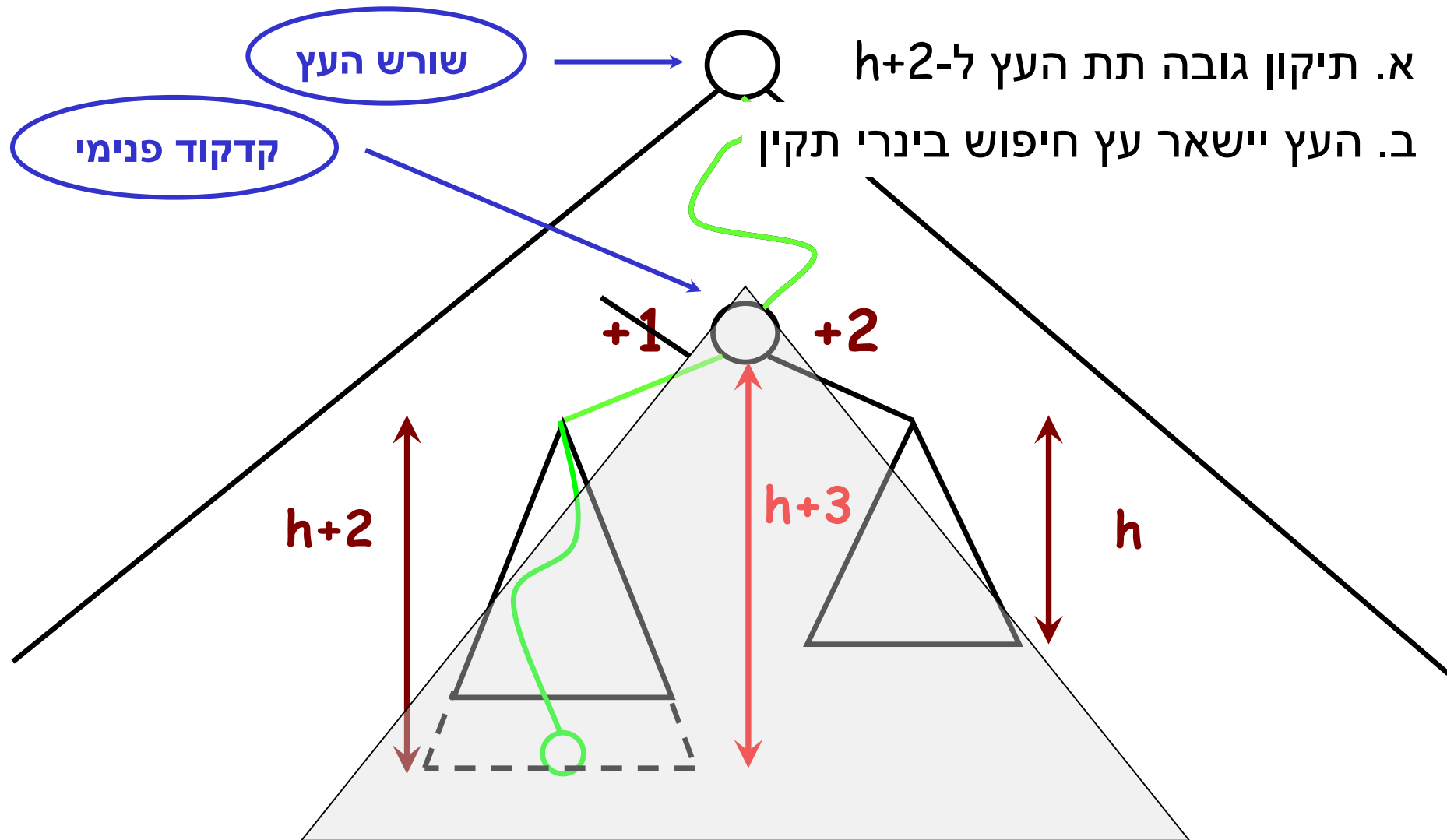
כיצד ניתן להתגבר על הבעיה?



כל הקדקודים על מסלול ההכנסה שמעליו יהיו תקינים

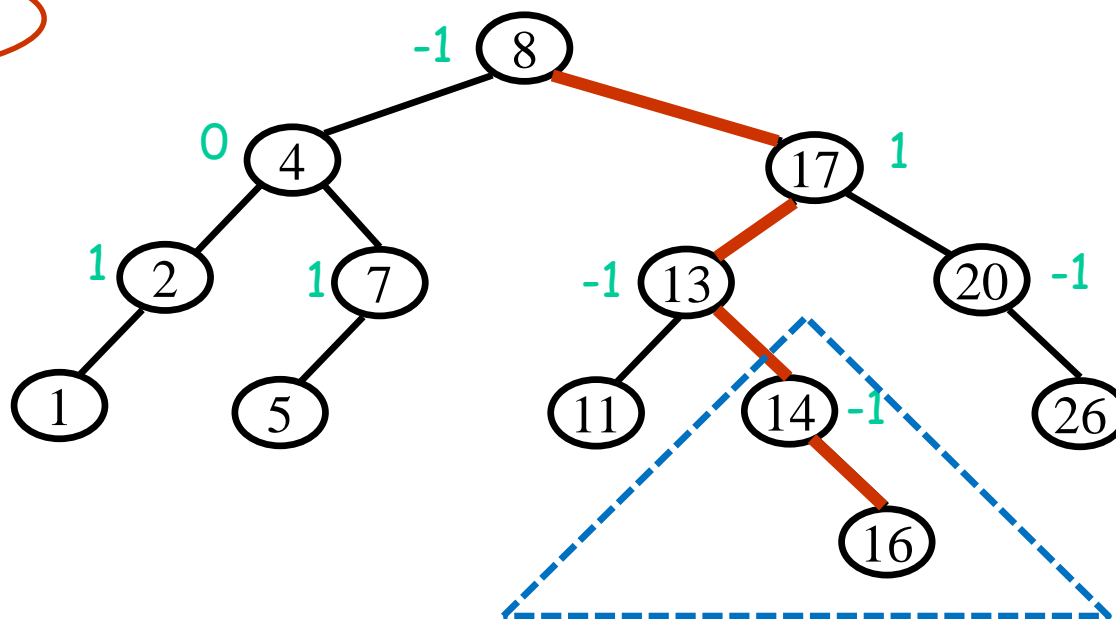


כיצד נבצע? ומה עלות זמן הריצה לתיקון?



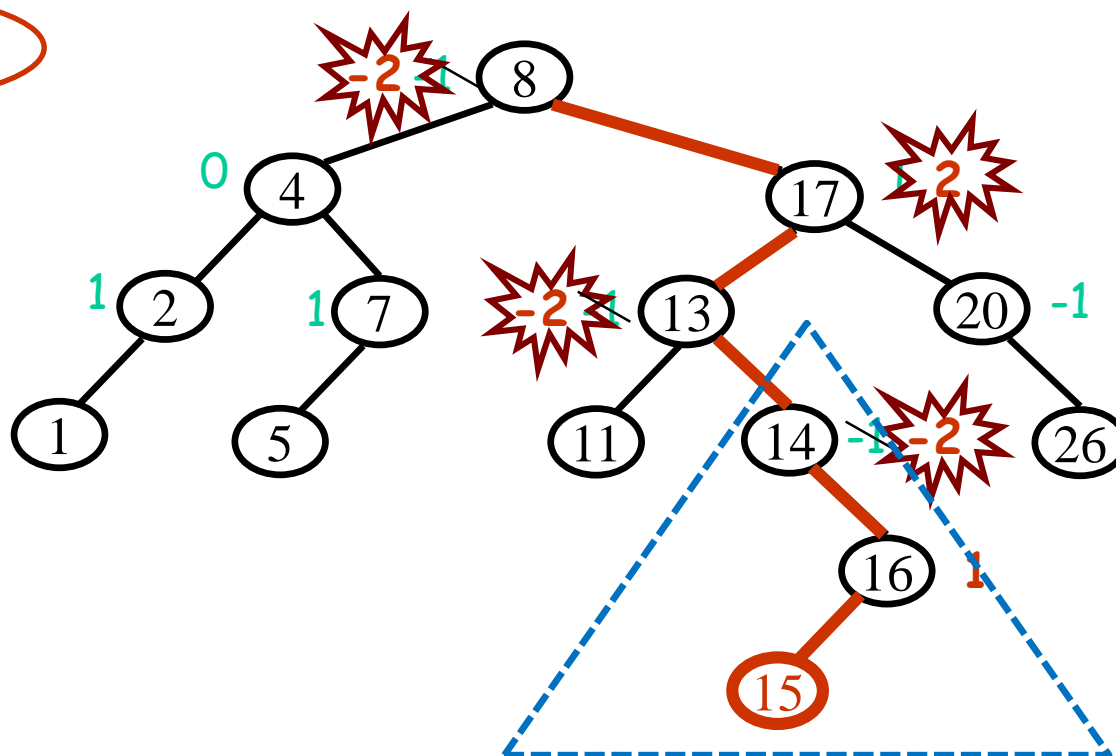
דוגמא

הכנסה (15)



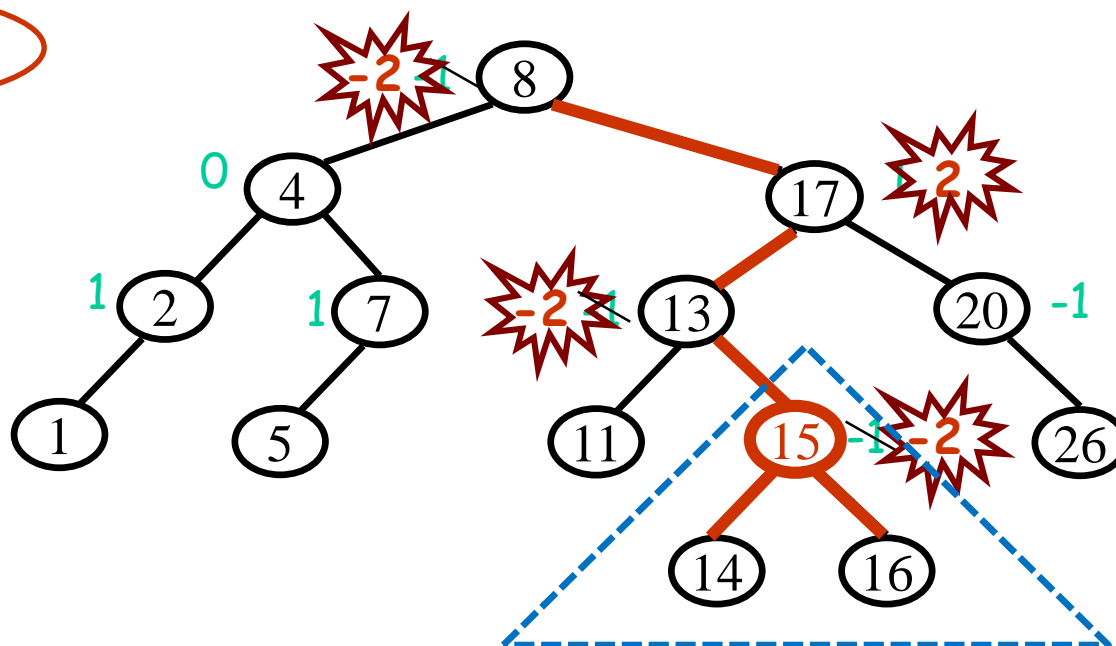
דוגמא

הכנסה (15)



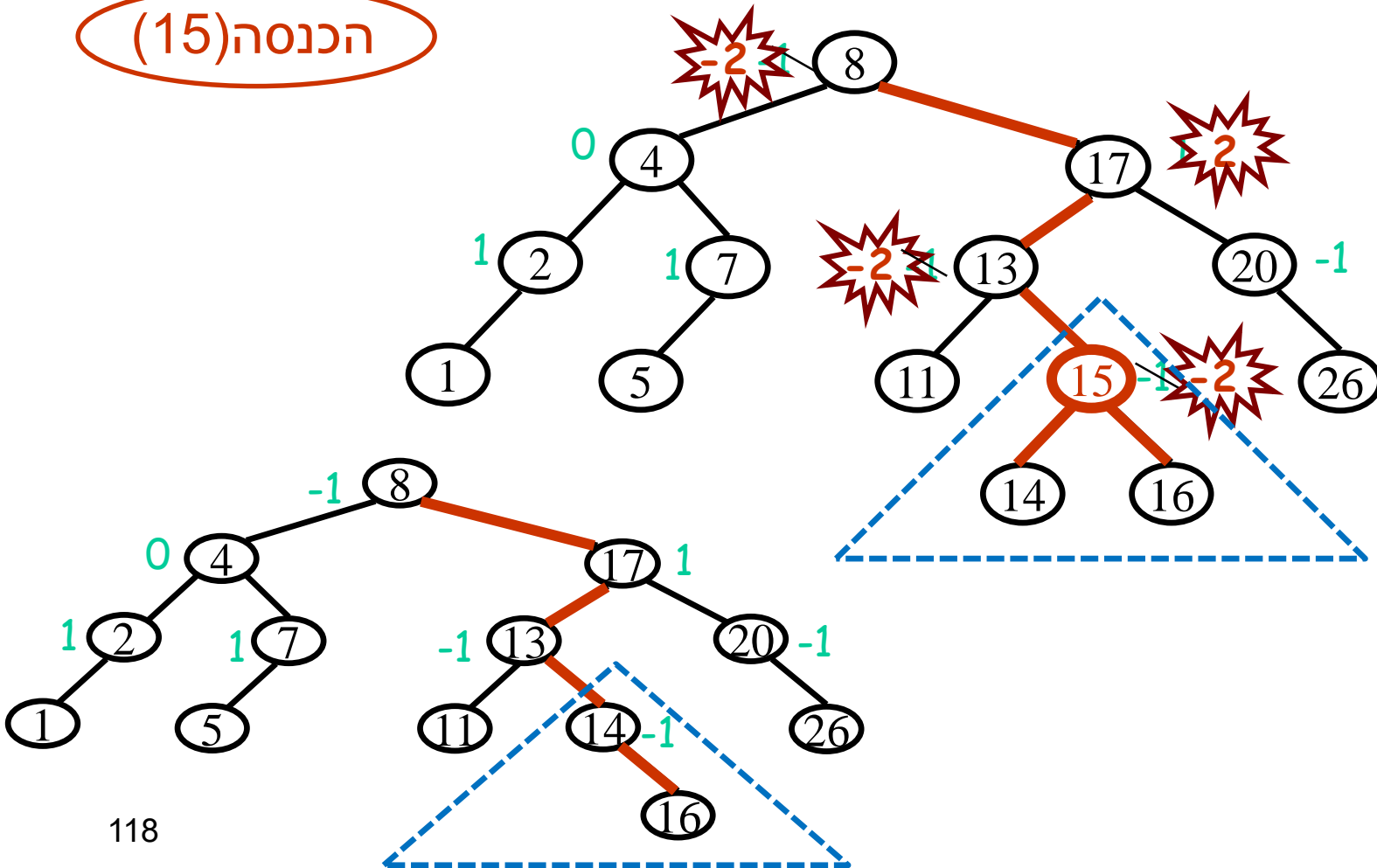
דוגמא

הכנסה (15)



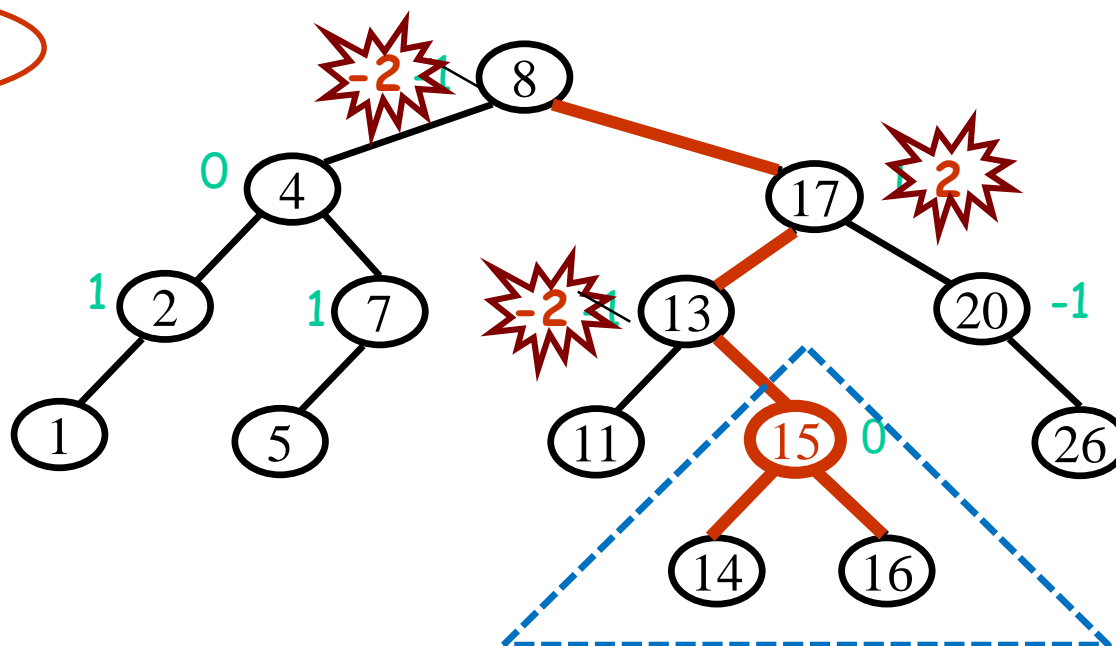
דוגמא

הכנסה (15)



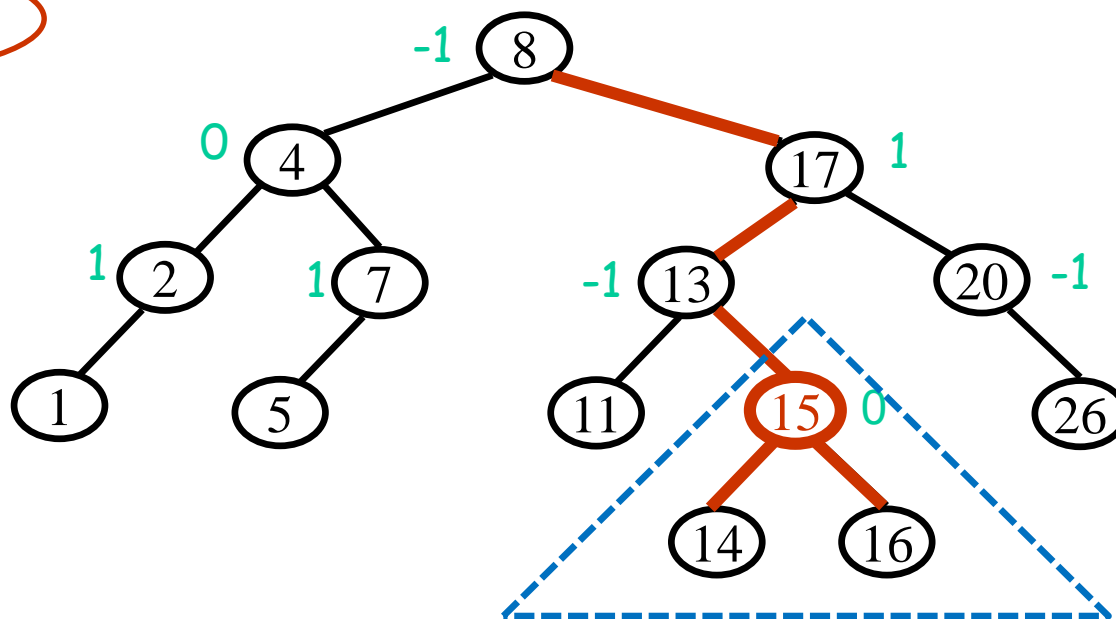
דוגמא

הכנסה (15)



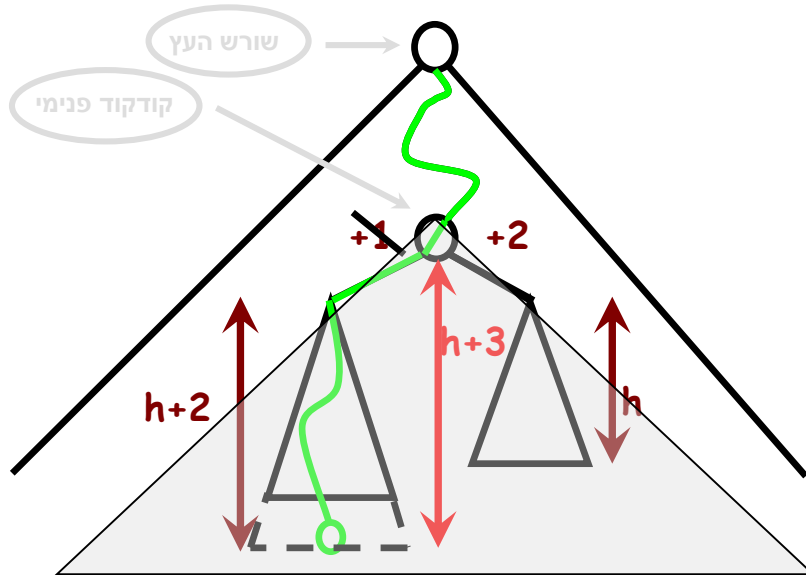
דוגמא

הכנסה (15)



עצי AVL: הכנסה - ניתוח

1. איזון AVL "מופר", 2. הגובה גדל



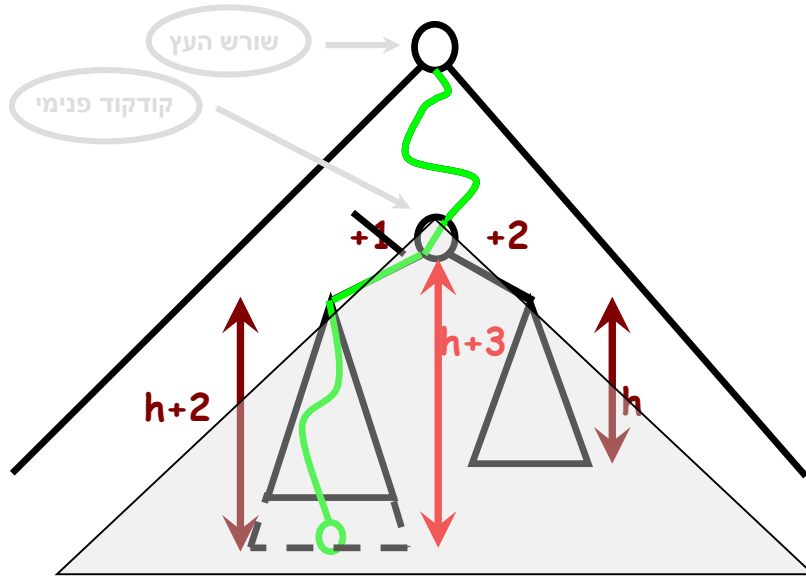
עצי AVL: הכנסה - ניתוח

1. איזון AVL "מופר", 2. הגובה גדל

רצוי: ארגון התת-עץ כך ש:

א. גובהו יהיה $h+2$

ב. זמן לביצוע הארגון $O(1)$



עצי AVL: הכנסה - ניתוח

1. איזון AVL "מופר", 2. הגובה גדל

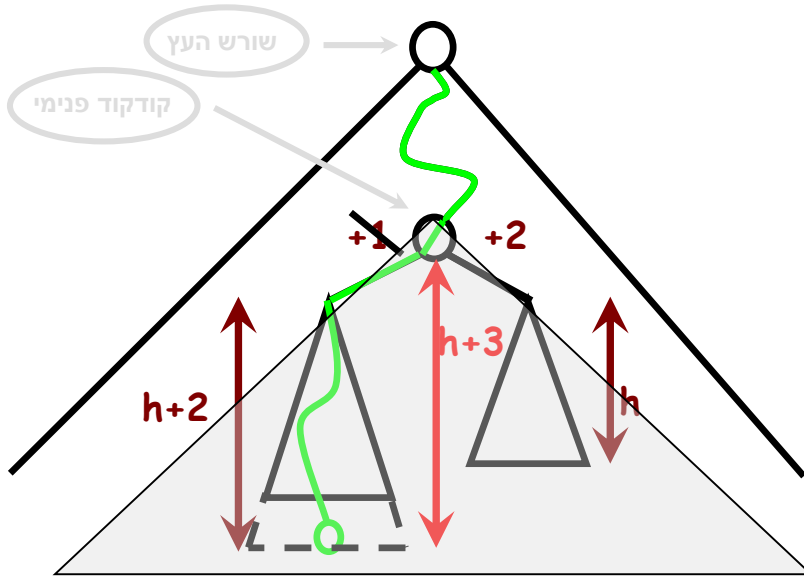
רצוי: ארגון התת-עץ כך ש:

א. גובהו יהיה $h+2$

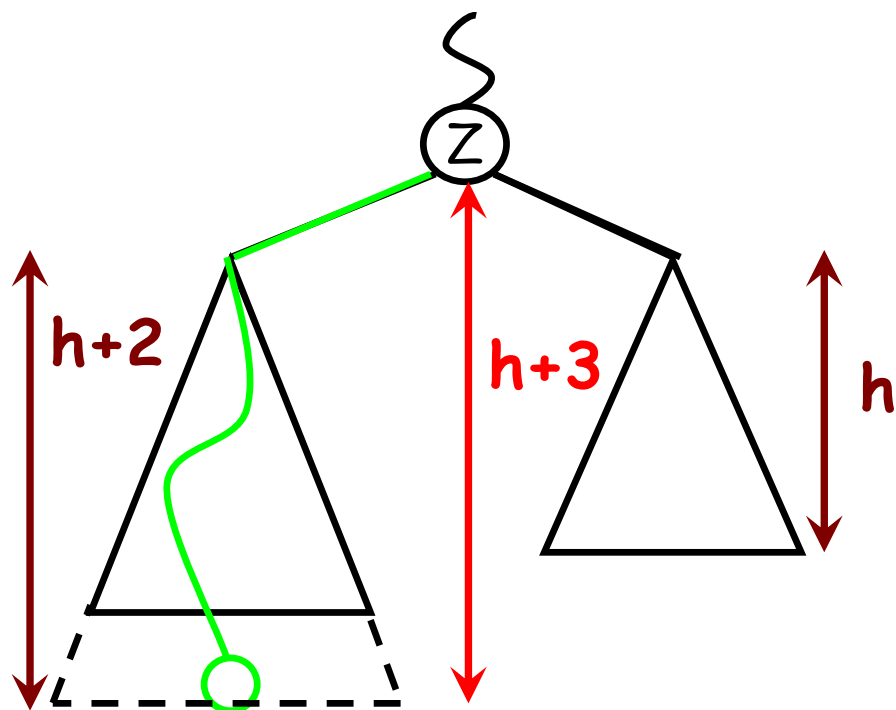
ב. זמן לביצוע הארגון $O(1)$

דבר:

גלגולים של תת-העץ

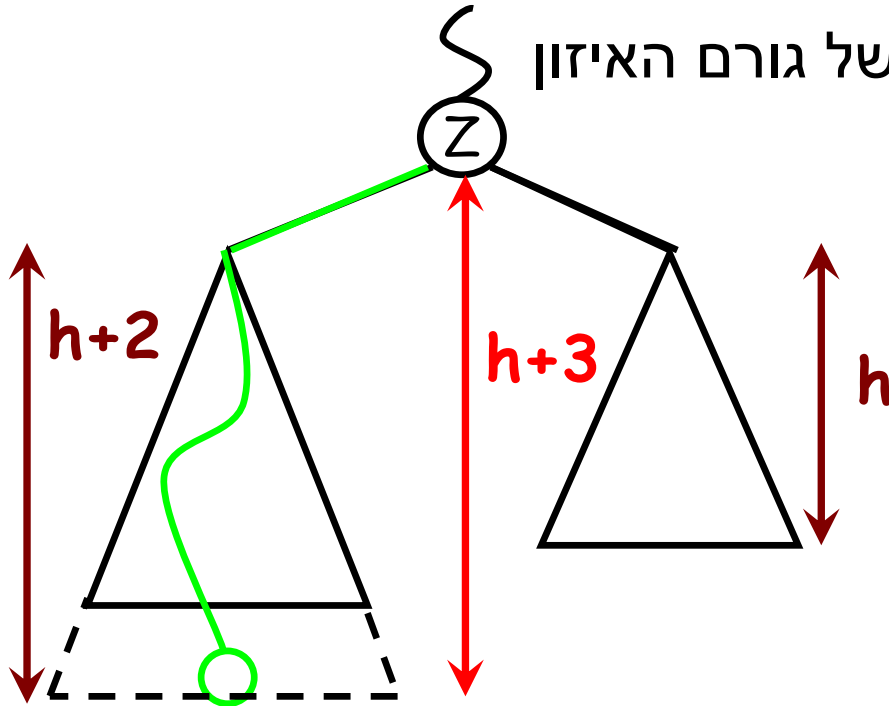


עצי AVL : גלגולים



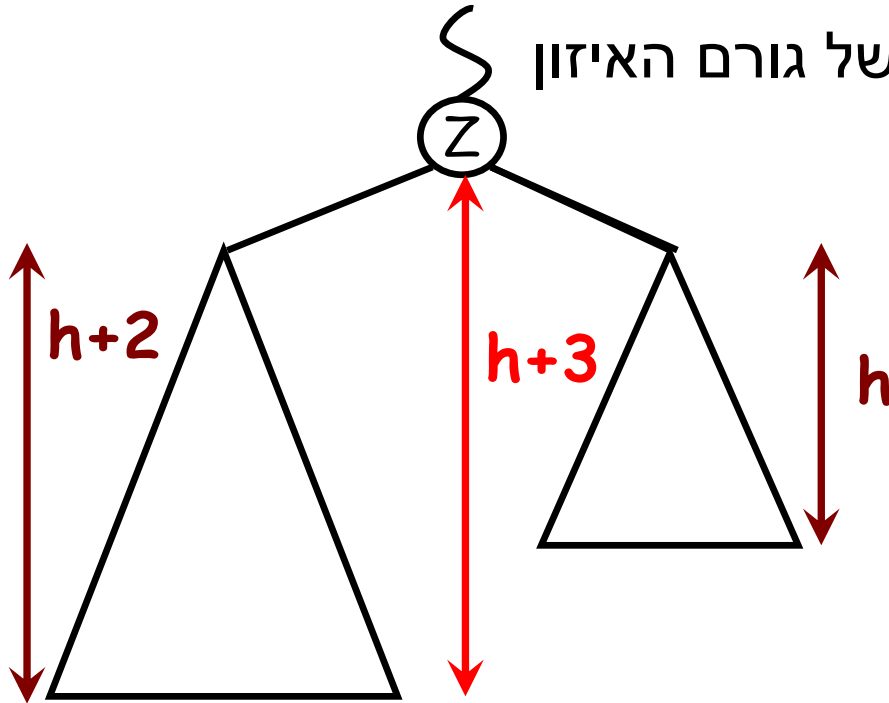
עצי AVL : גלגולים

Z הקדקוד הראשון בו התגלתה הפרה של גורם האיזון



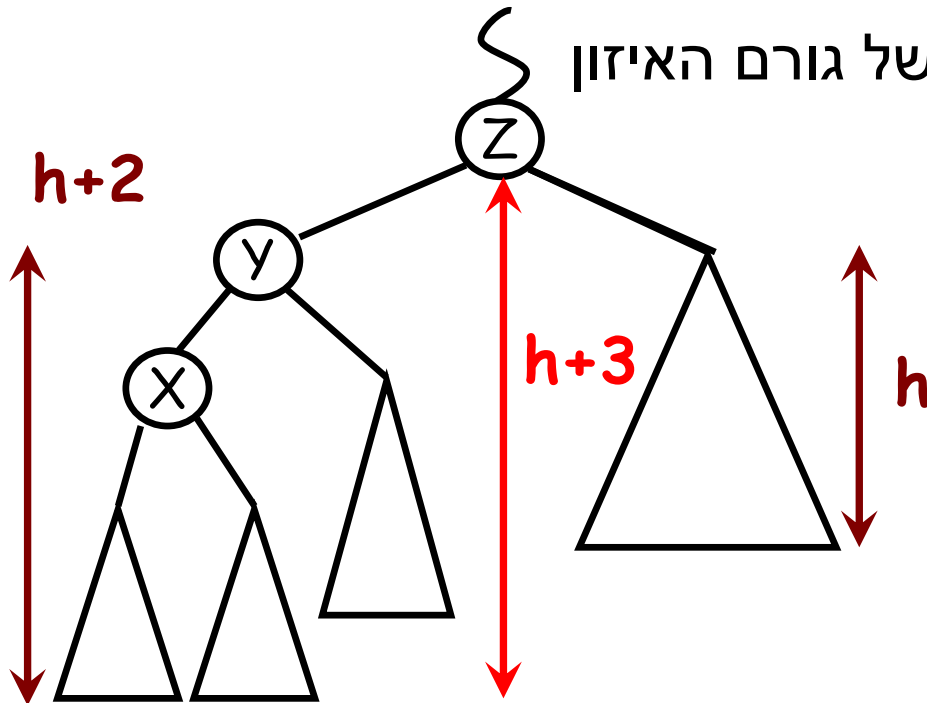
עצי AVL : גלגולים

Z הקדקוד הראשון בו התגלתה הפרה של גורם האיזון

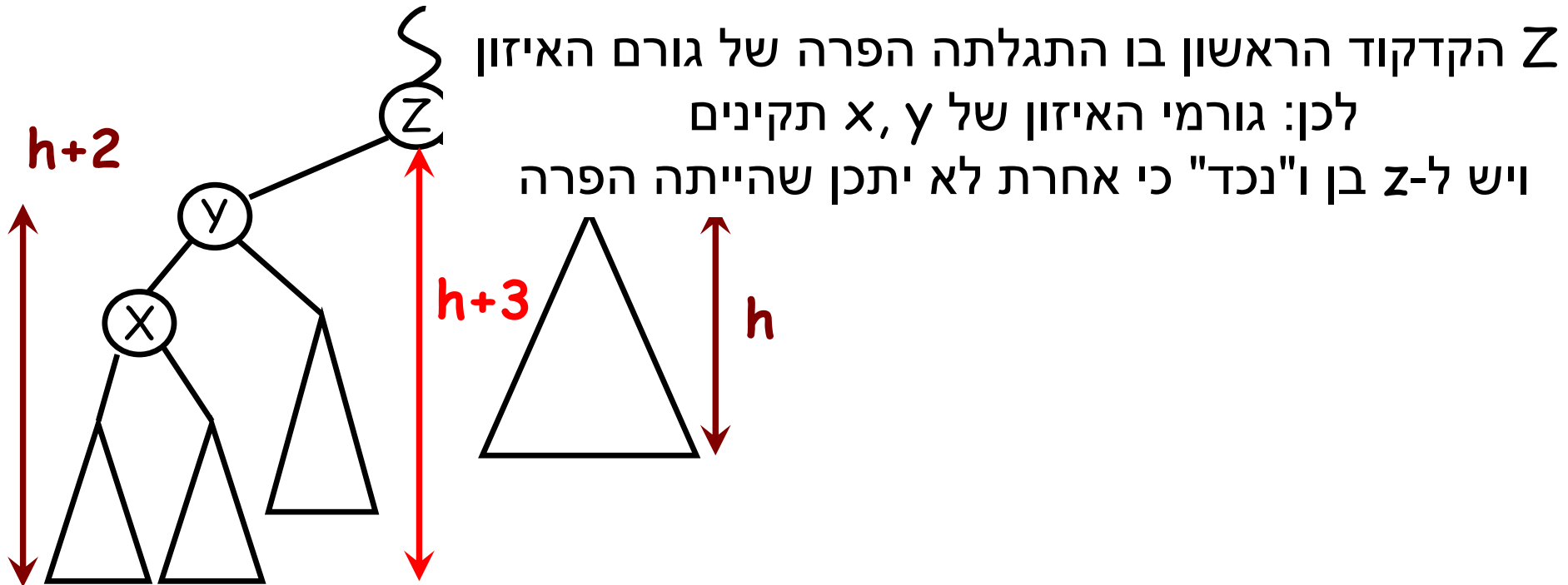


עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1

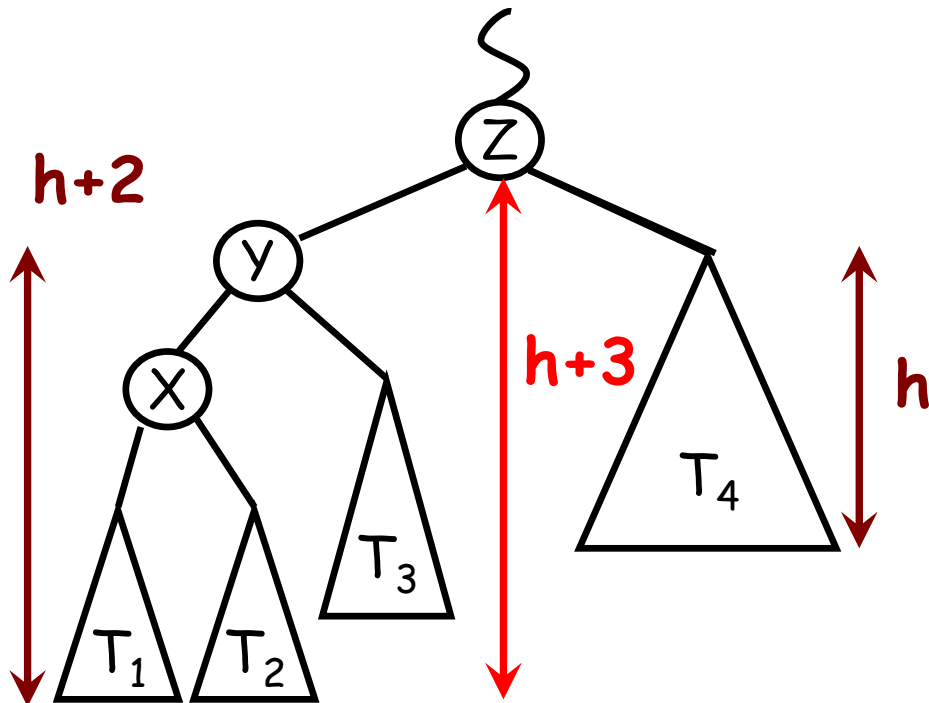
Z הקדקוד הראשון בו התגלתה הפרה של גורם האיזון



עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1

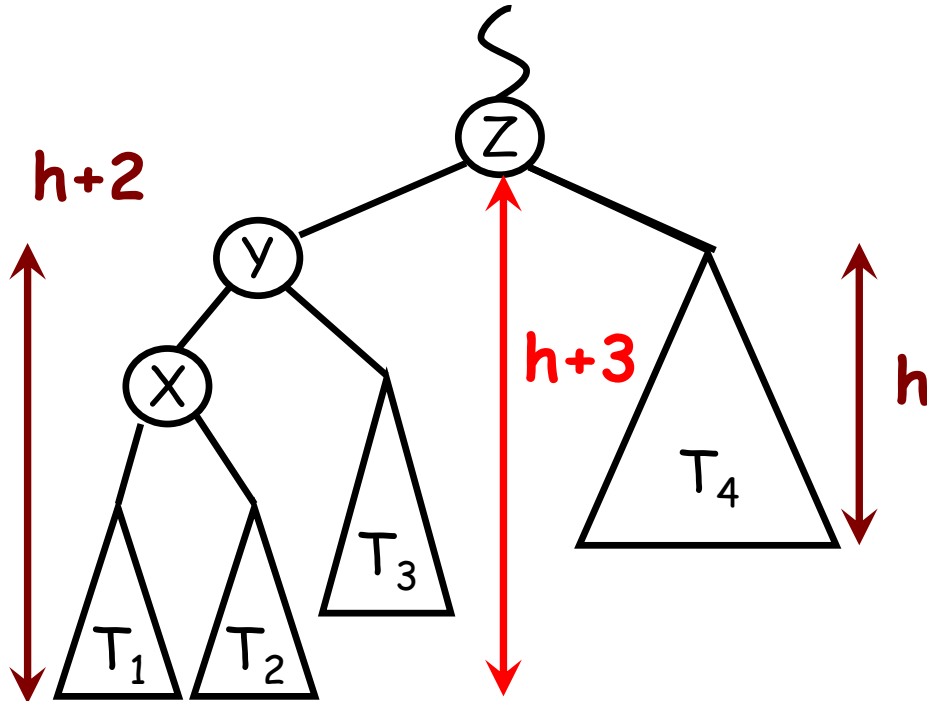


עצי AVL : גלגולים - אפשרות 1



מה סדר איברי העץ ?

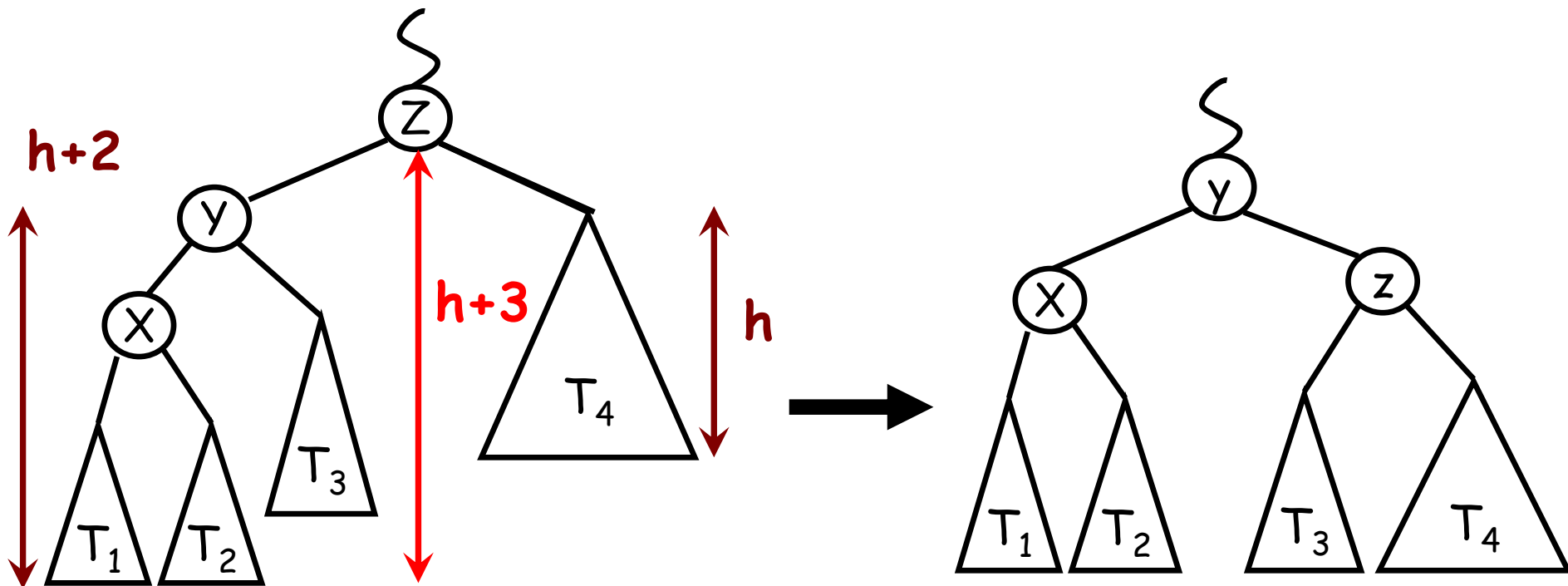
עצי AVL : גלגולים - אפשרות 1



סדר אברי העץ:

$T_1, x, T_2, y, T_3, z, T_4$

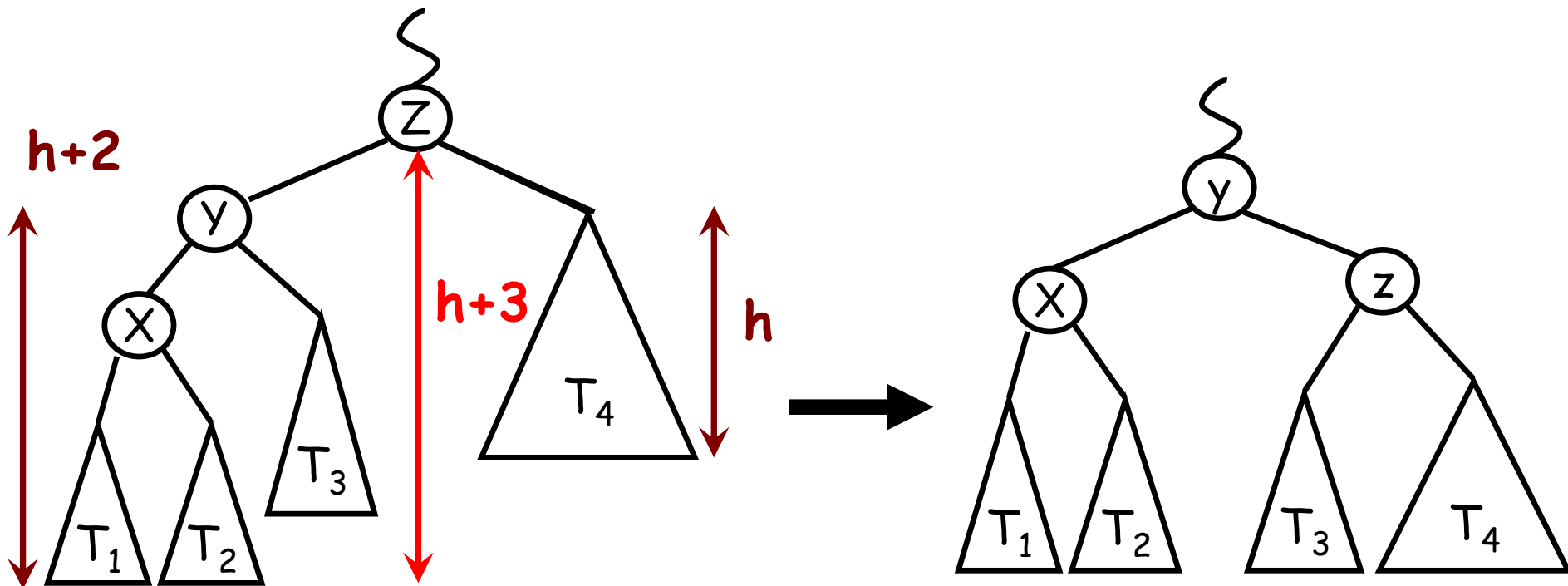
עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1



סדר אברי העץ:

$T_1, x, T_2, y, T_3, z, T_4$

עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1

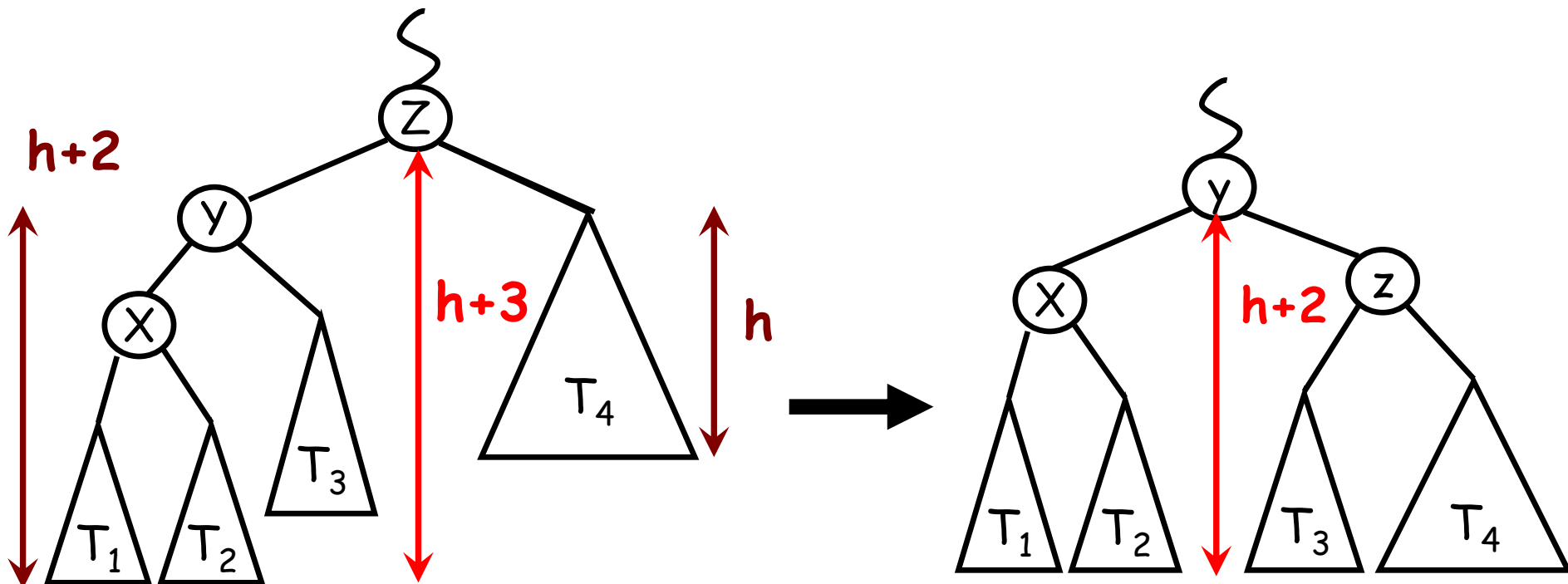


סדר אברי העץ:

$T_1, x, T_2, y, T_3, z, T_4$

מה העומק ?

עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1

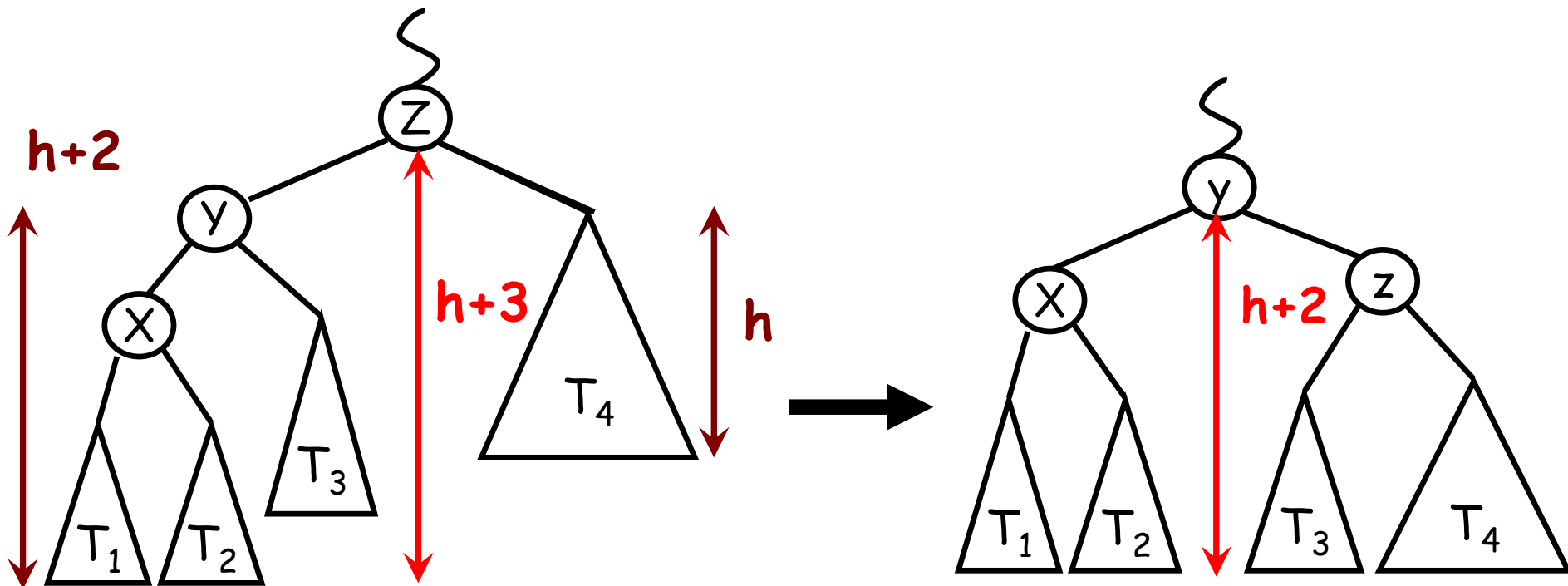


סדר אברי העץ:

$T_1, x, T_2, y, T_3, z, T_4$

מה העומק?
 $h+2$

עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1



סדר אברי העץ:

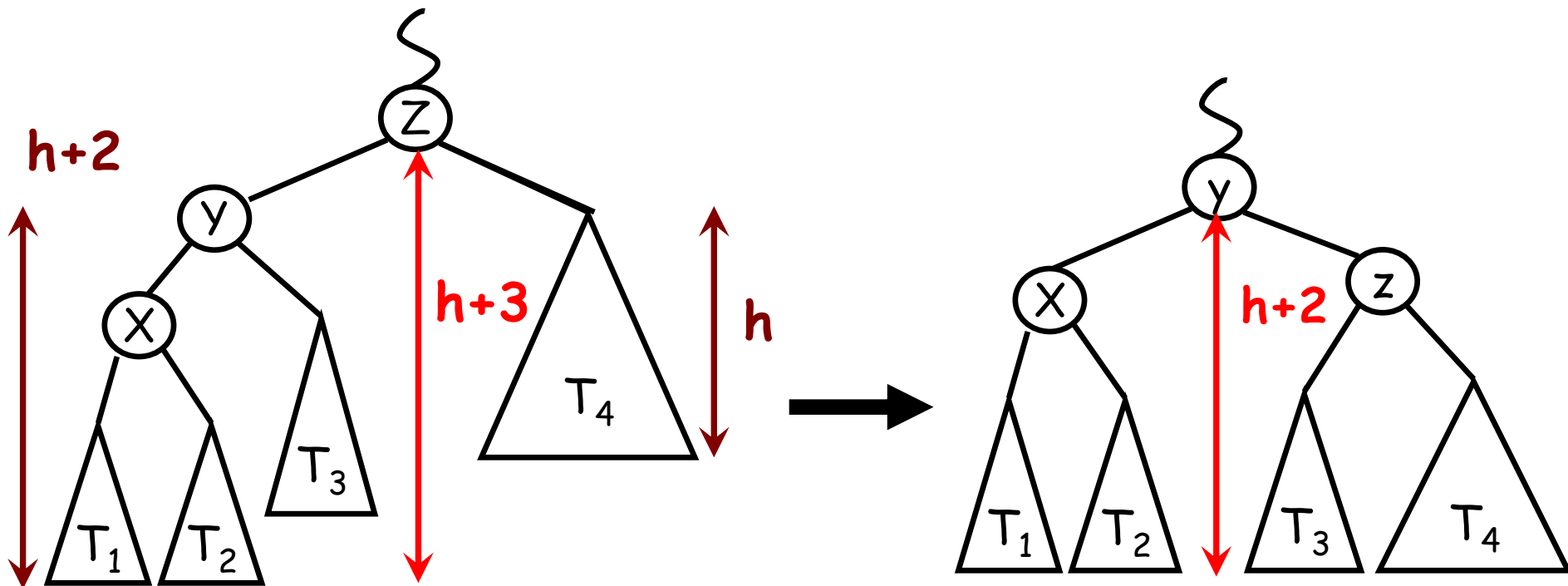
$T_1, x, T_2, y, T_3, z, T_4$

מה גורמי האיזון של

x, y, z

?

עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1

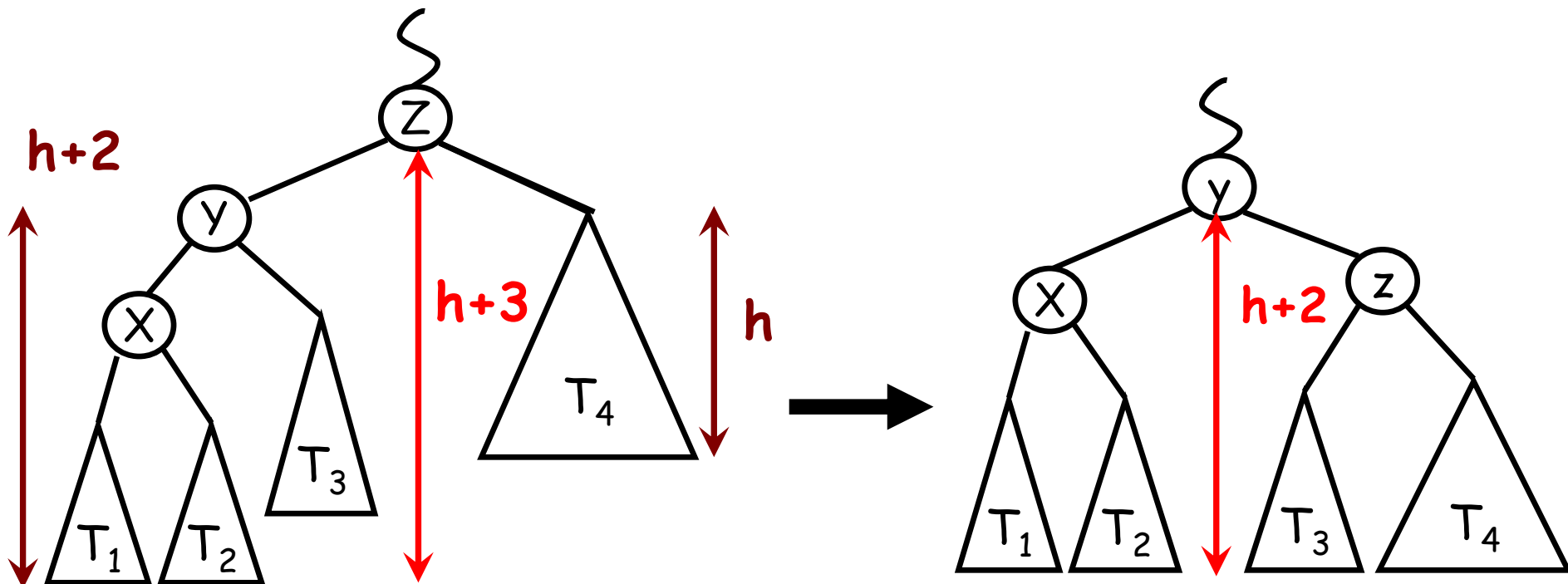


סדר אברי העץ:

$T_1, x, T_2, y, T_3, z, T_4$

מה לגבי סדר האיברים ?

עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1

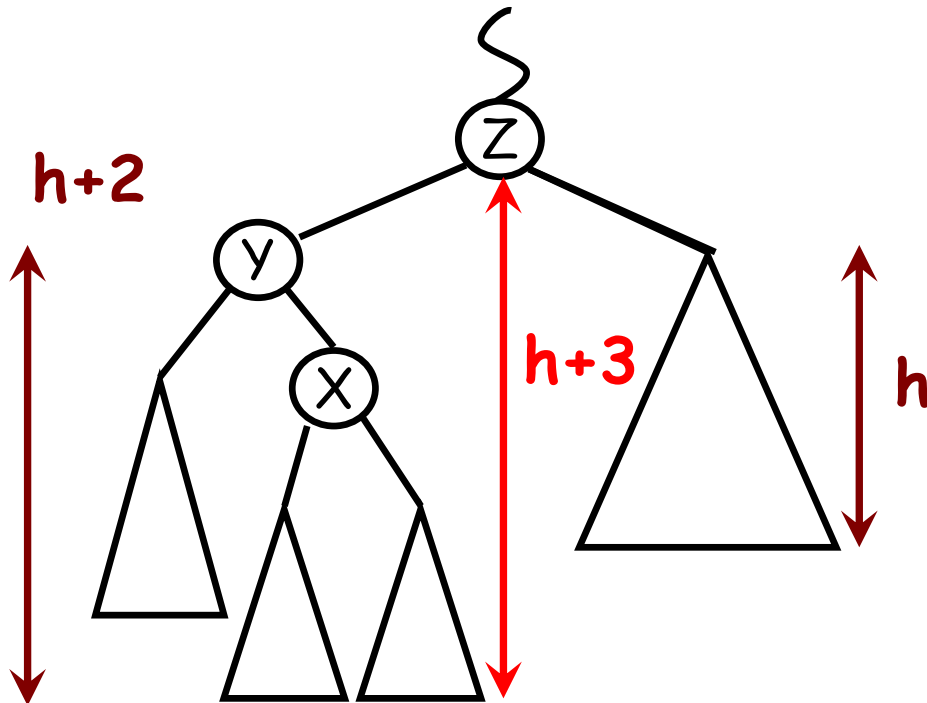


סדר אברי העץ:

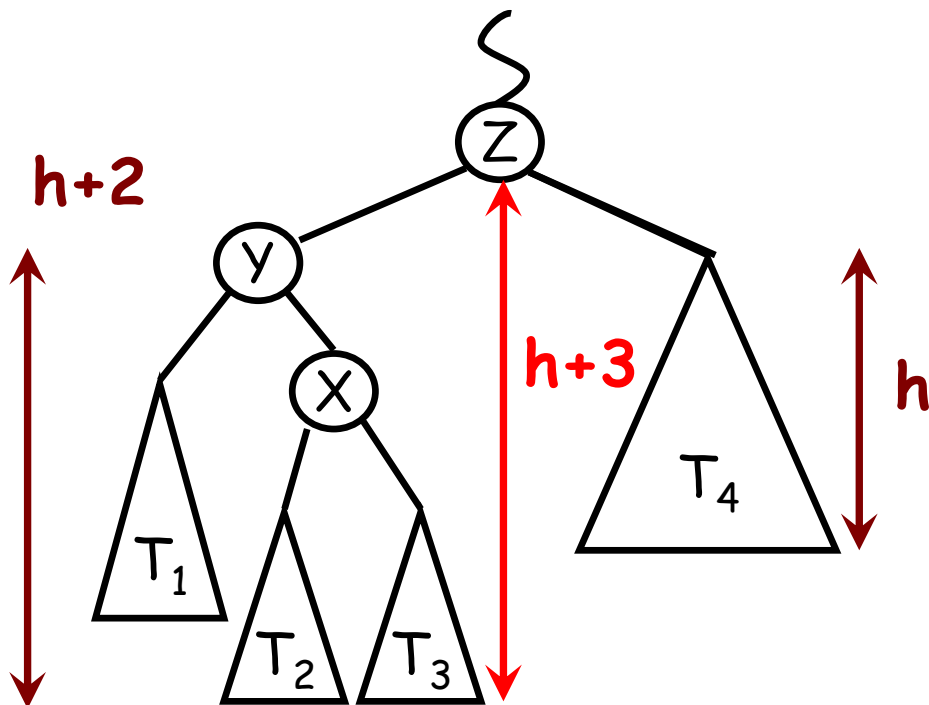
$T_1, x, T_2, y, T_3, z, T_4$

מה לגבי סדר האיברים ?
אותו סדר !!

עצי AVL: גלגולים - אפשרות 2

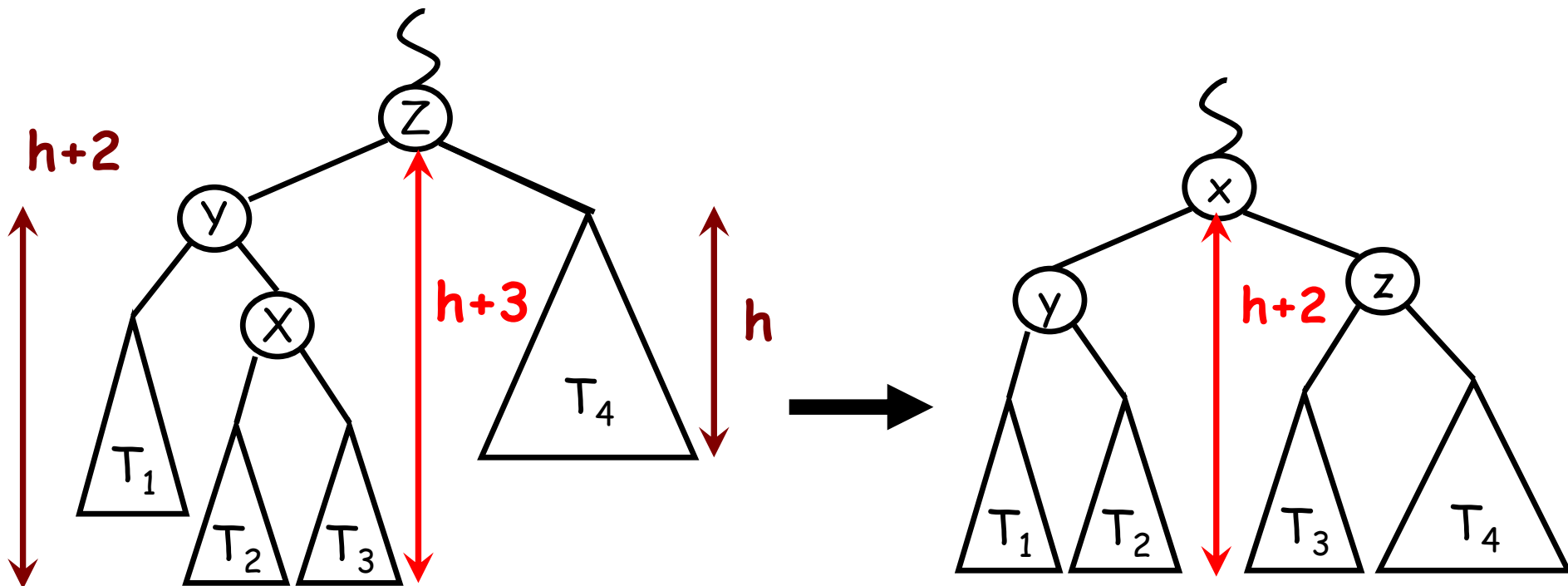


עצי AVL: גלגולים - אפשרות 2



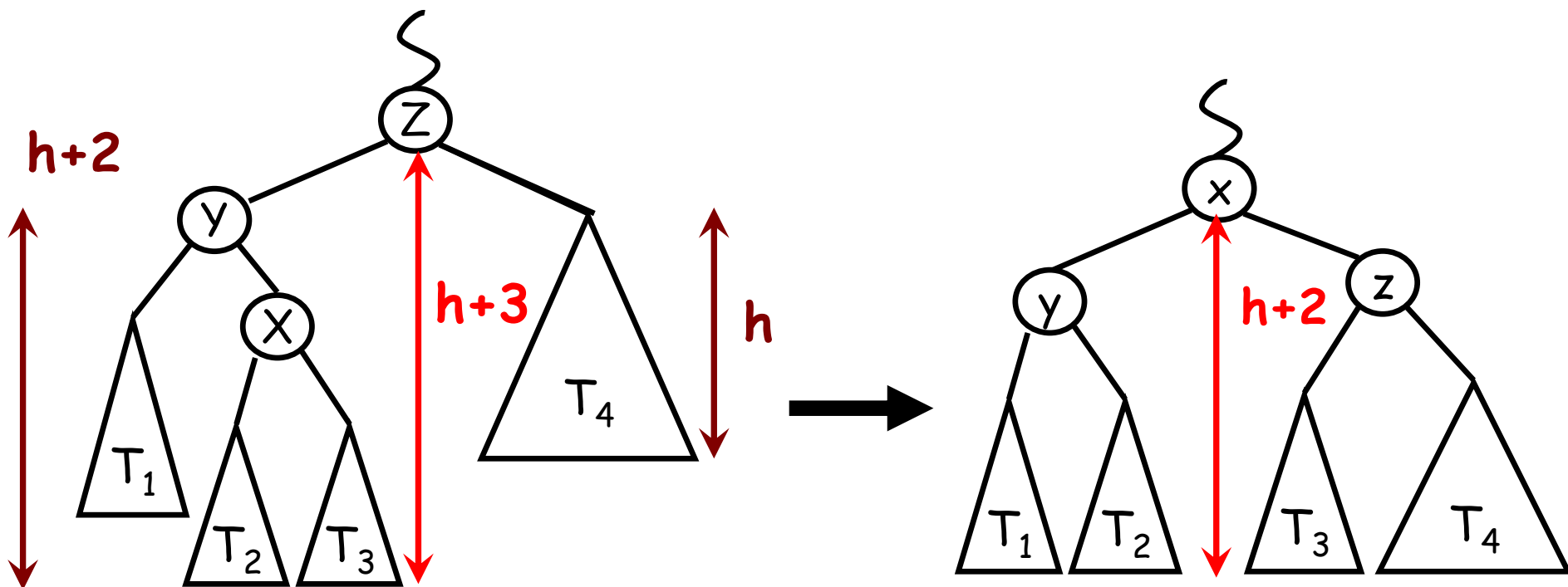
שימו לב לסדר איברי התת-עץ:
 $T_1, y, T_2, x, T_3, z, T_4$

עצי AVL: גלגולים - אפשרות 2



שימו לב לסדר איברי התת-עץ:
 $T_1, y, T_2, x, T_3, z, T_4$

עצי AVL: גלגולים - אפשרות 2



שימו לב לסדר איברי התת-עץ:
 $T_1, y, T_2, x, T_3, z, T_4$

שוב - אותו סדר
אבל העומק $h+2$

עצי AVL - הכנסת ערך x לעץ

1. הכנס את x כמו לעץ חיפוש בינרי. יהי v העלה שהוסף.

2. כל עוד $v \neq \text{root}$ בצע:

א- $v = \text{parent}(v)$

ב- שנה פרמטר איזון של v .

ג- אם גורם האיזון של v משתנה ל-0 סיים.

ד- אם גורם האיזון של p משתנה ל-2 (או -2) בצע גלגול מתאים וסיים.

זמן ההכנסה בעץ AVL

$O(h)$ מציאת המקום הדרוש להכנסה

$O(1)$ הוספת הצומת

$O(h)$ מציאת המקום בו מופר האיזון

$O(1)$ תיקון האיזון

$O(h)=O(\log n)$ סה"כ

דוגמא

הכנס את האיברים הבאים לעץ AVL:

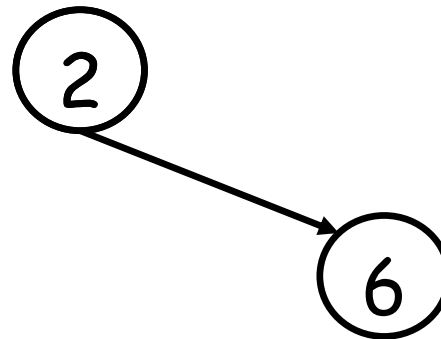
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7

2,6,4,5,8,3,1,9,10,7

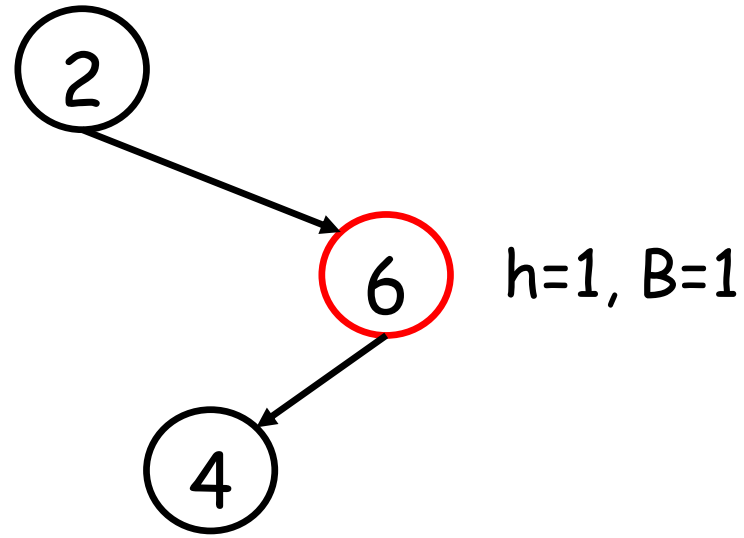
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7

②

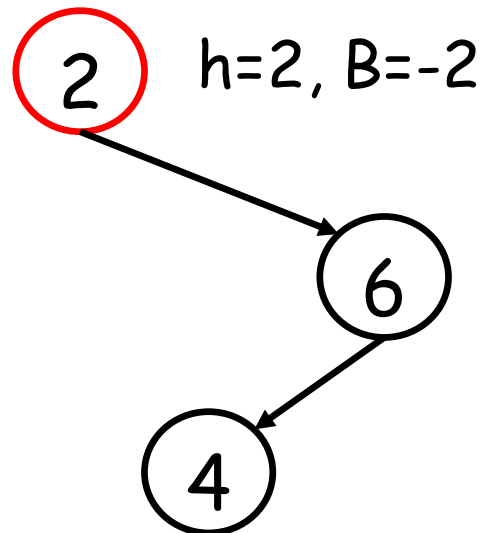
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



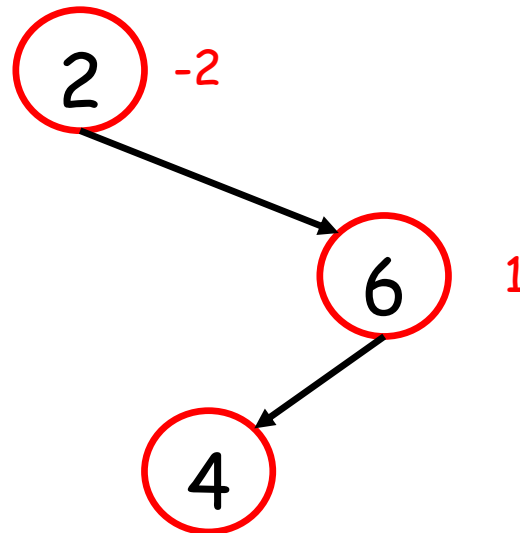
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



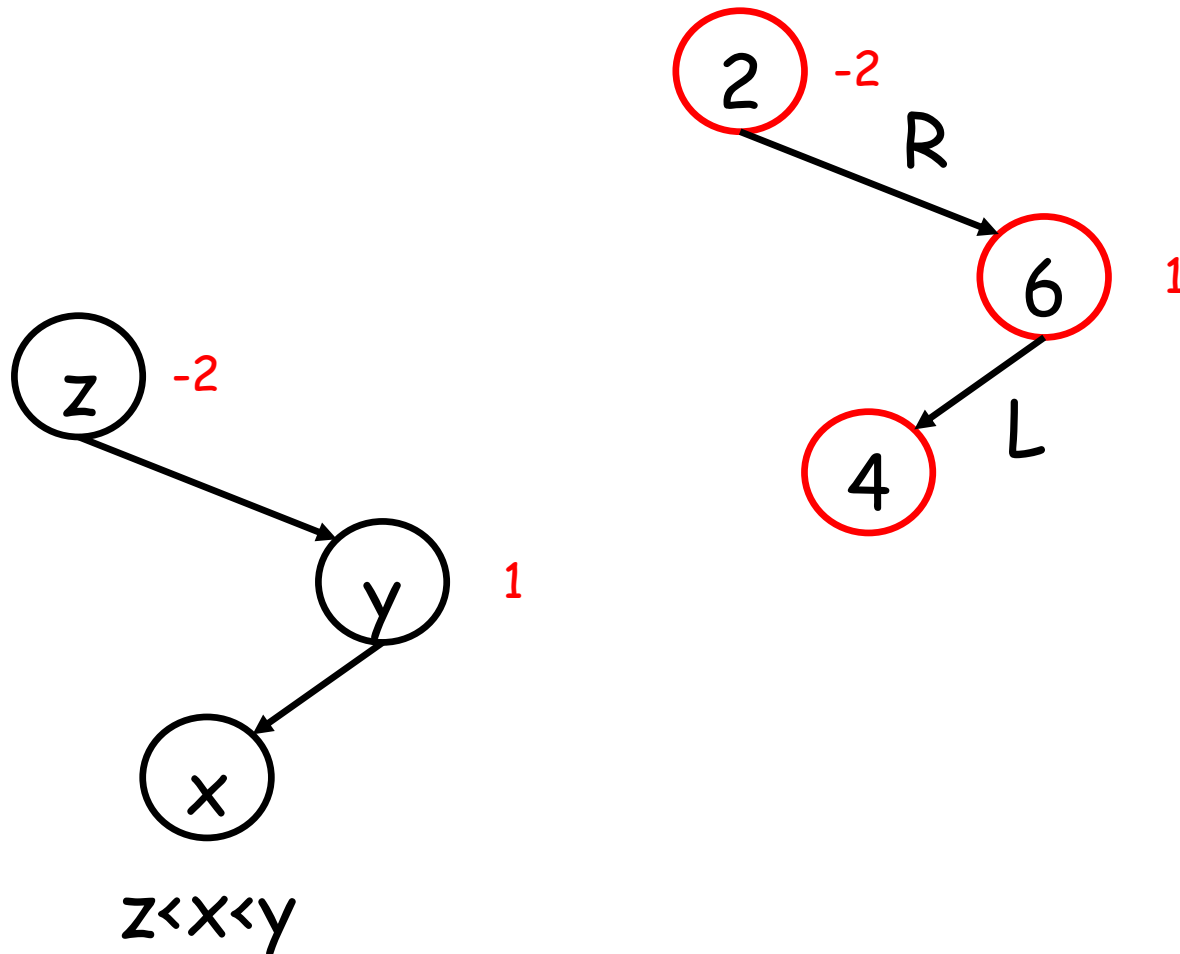
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



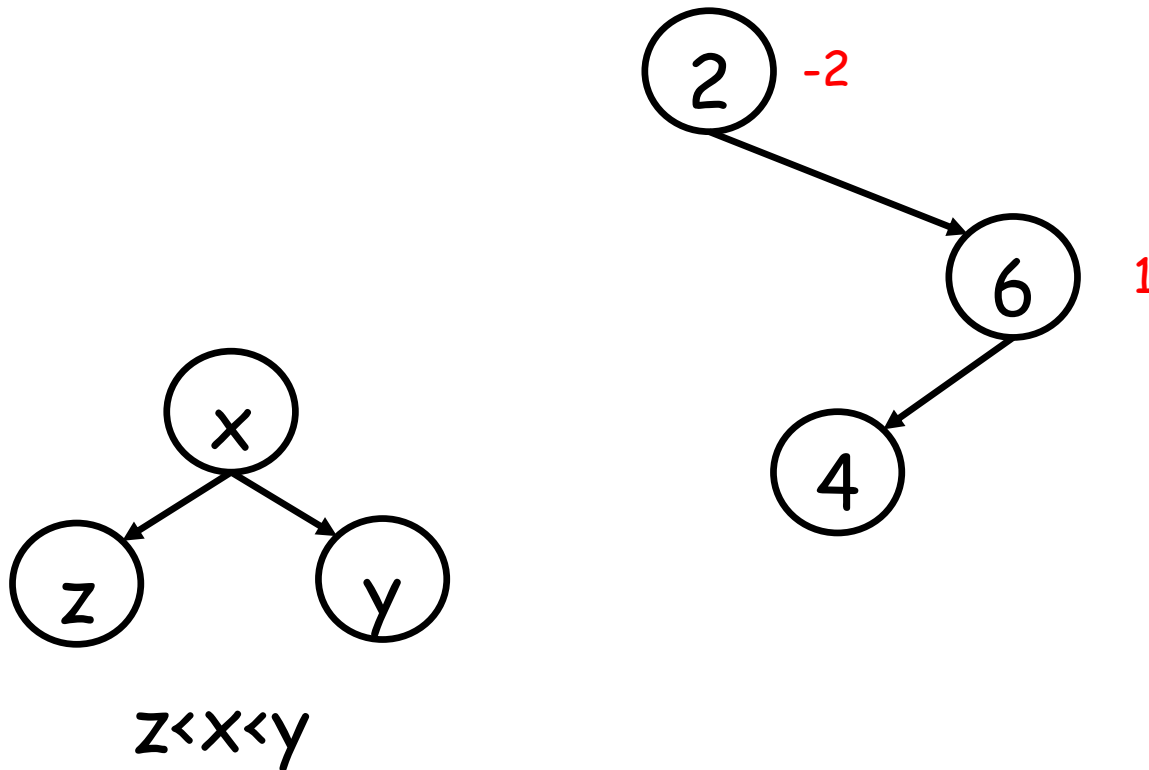
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



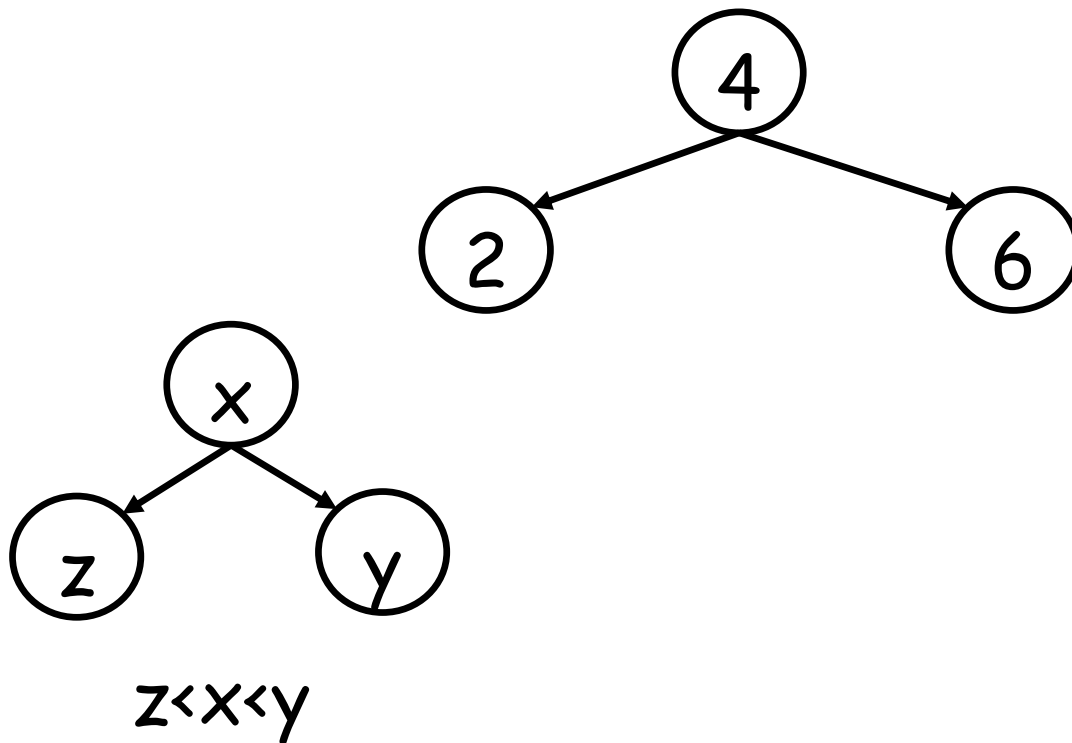
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



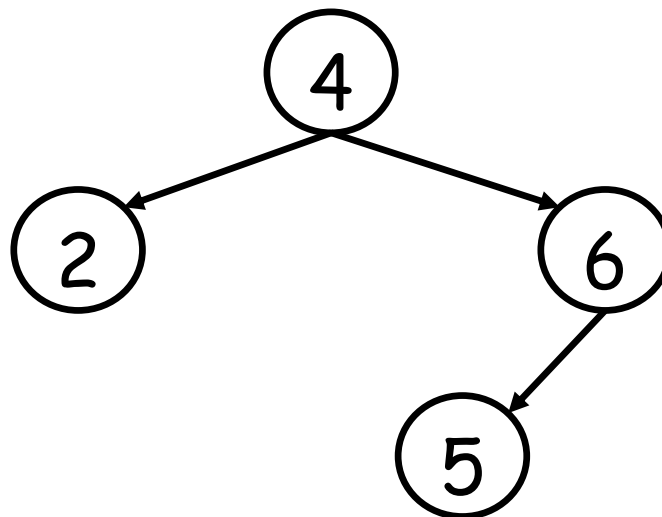
2,6,**4**,5,8,3,1,9,10,7



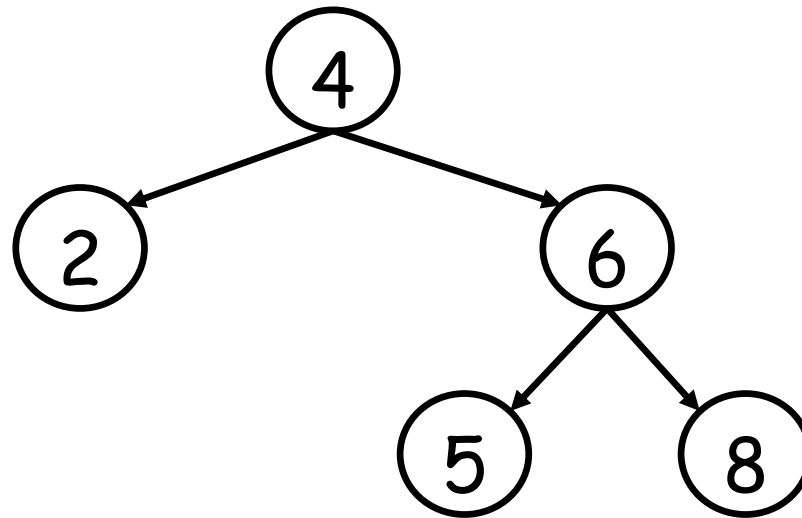
2,6,**4**,5,8,3,1,9,10,7



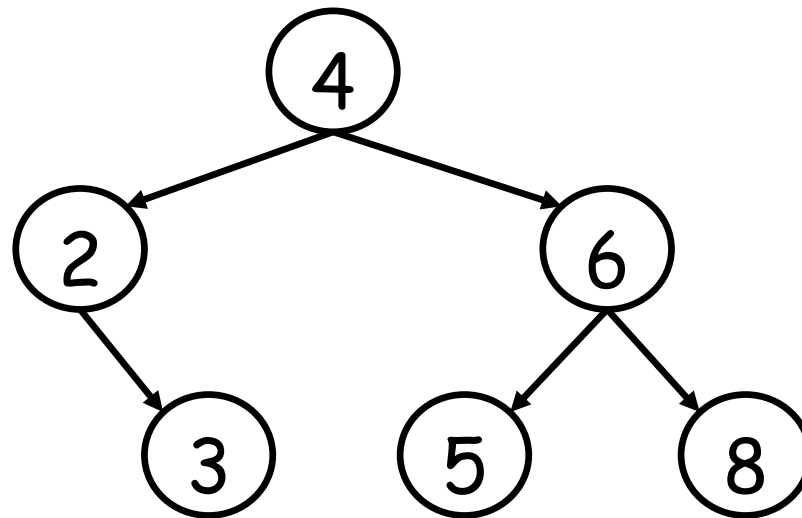
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



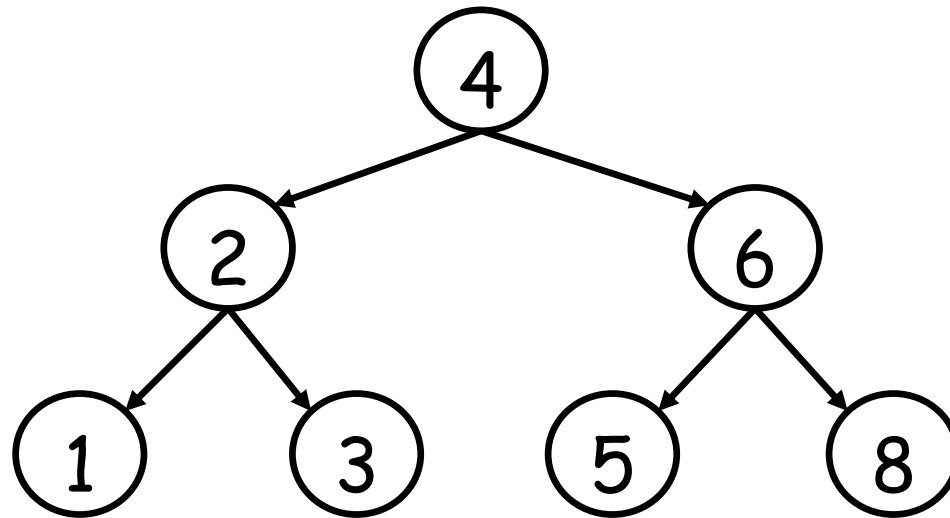
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



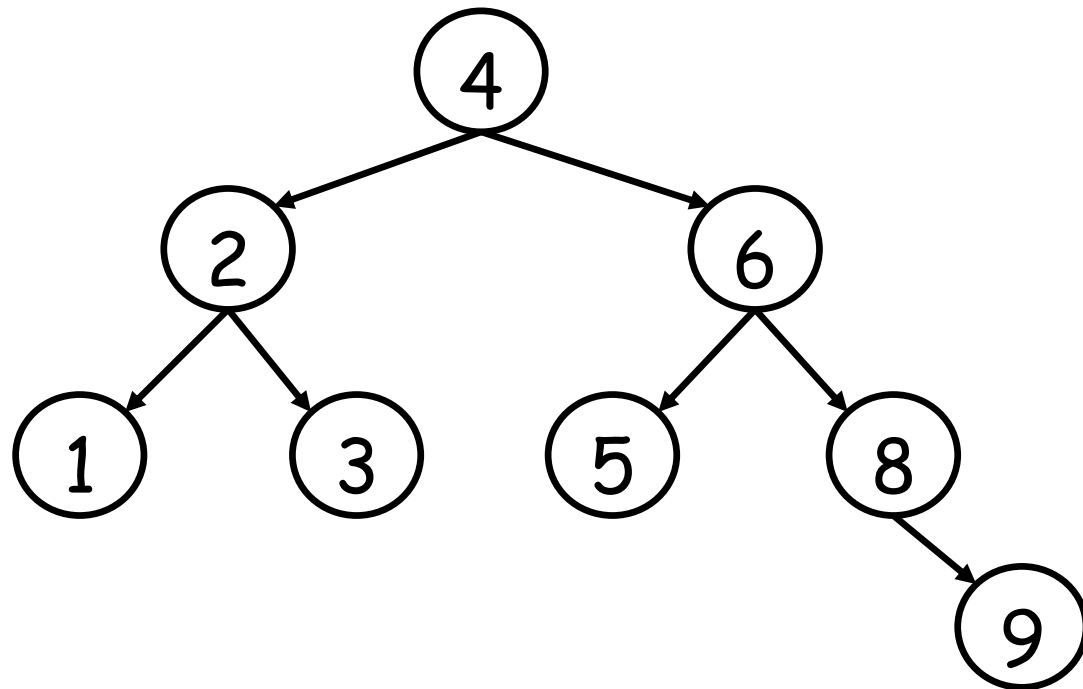
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



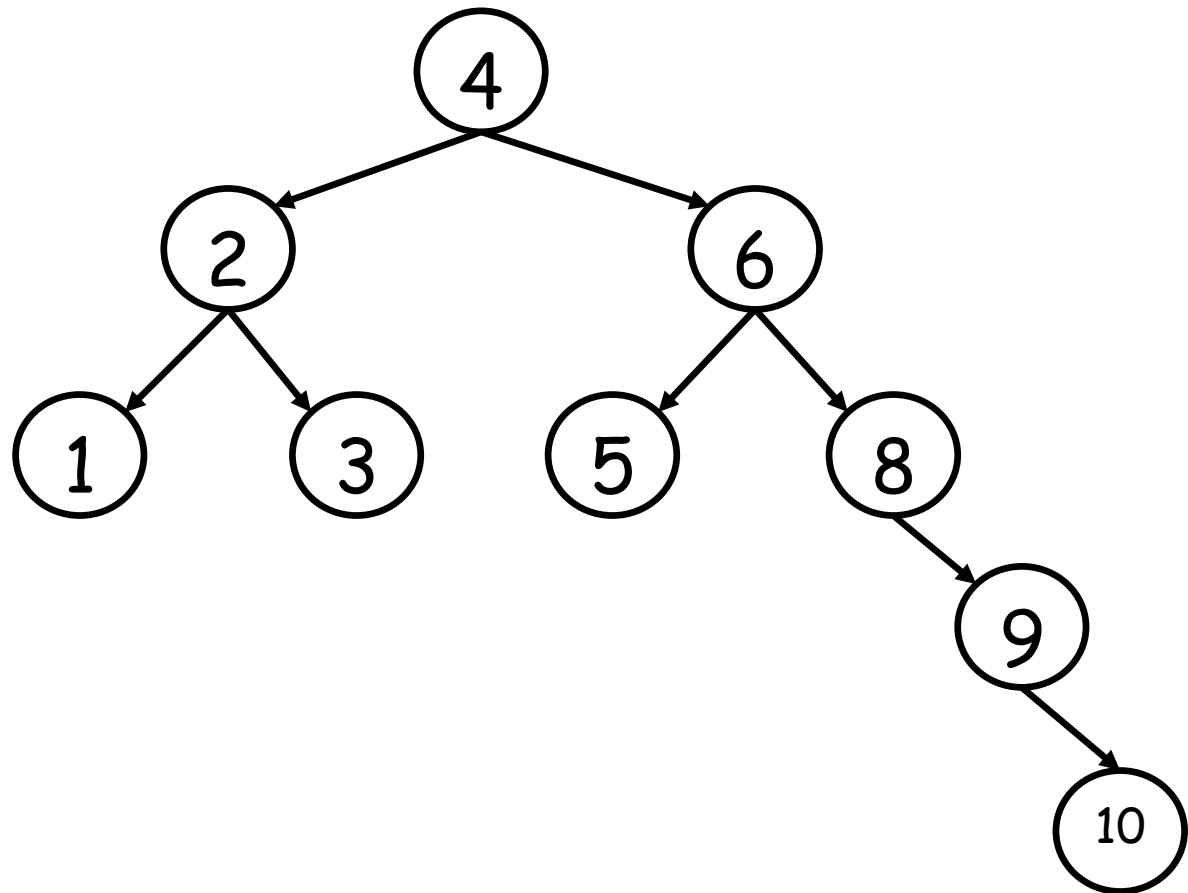
2,6,4,5,8,3,**1**,9,10,7



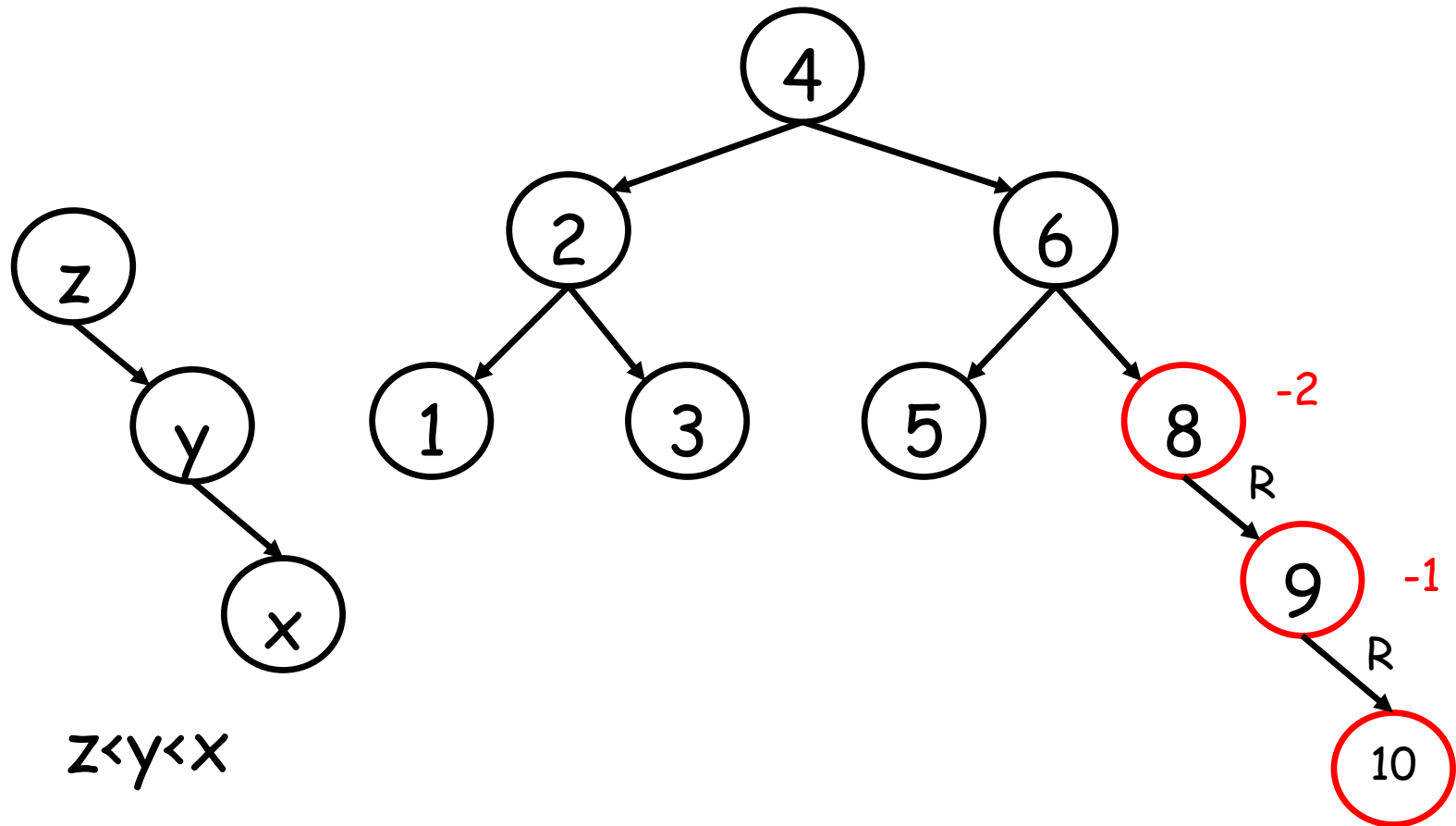
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



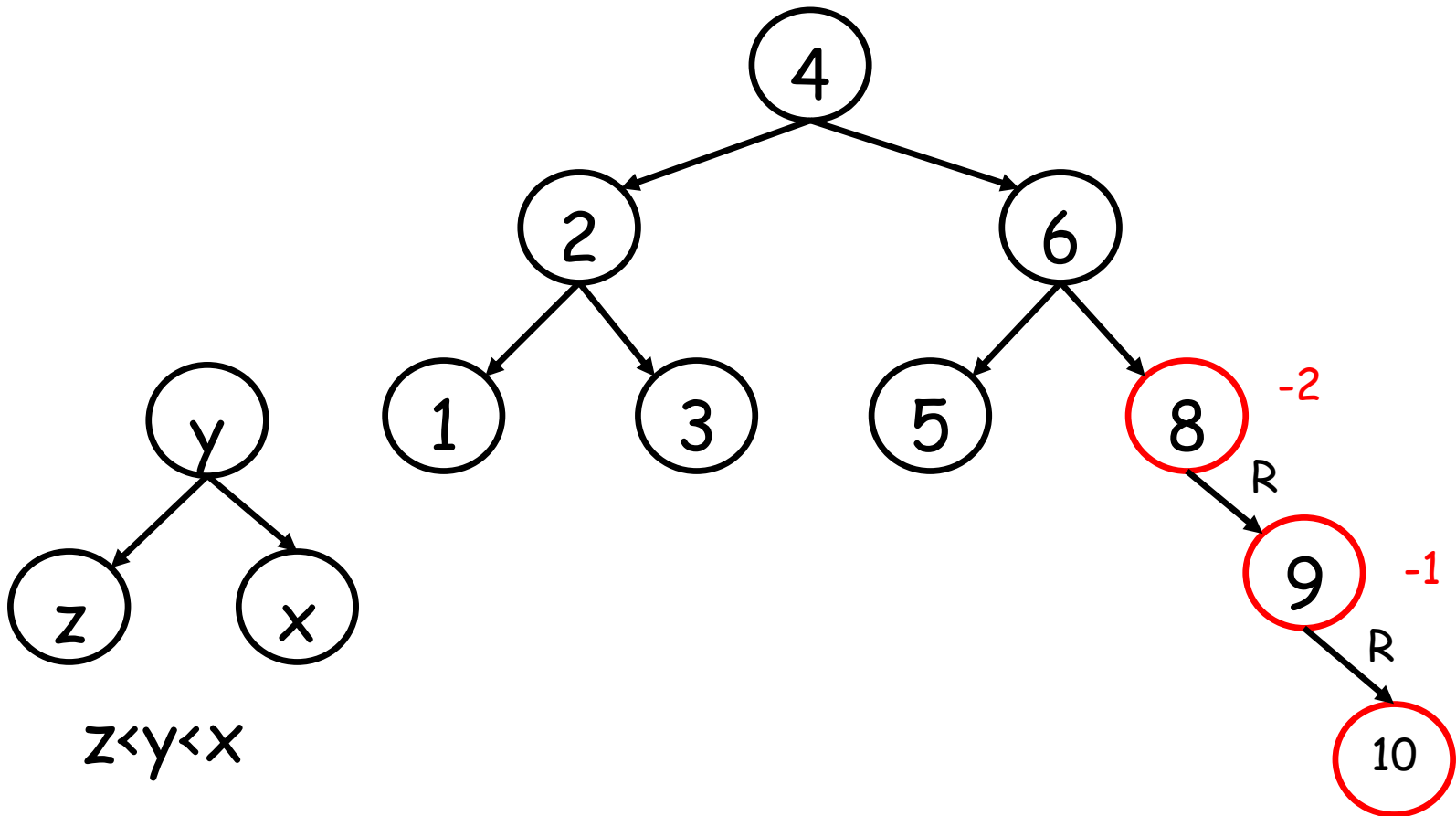
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



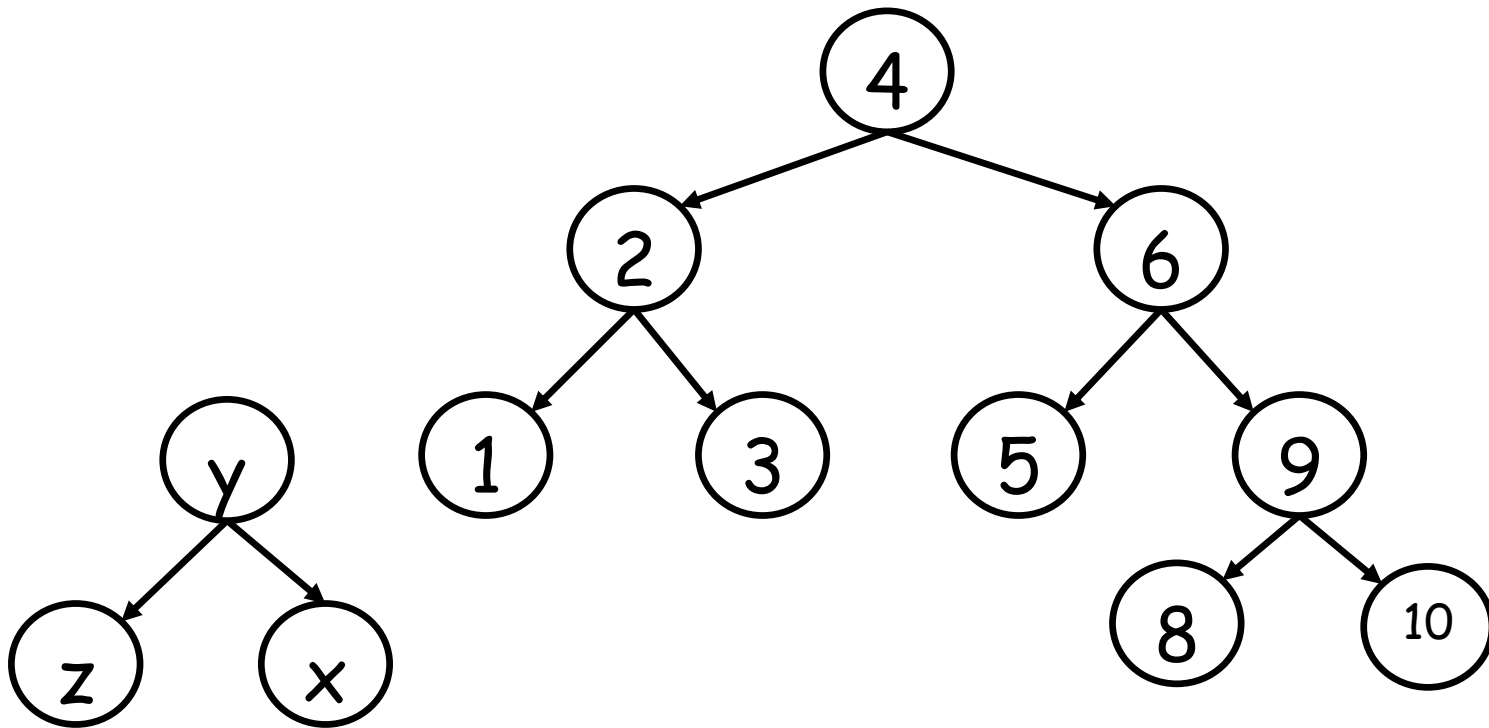
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



2,6,4,5,8,3,1,9,10,7

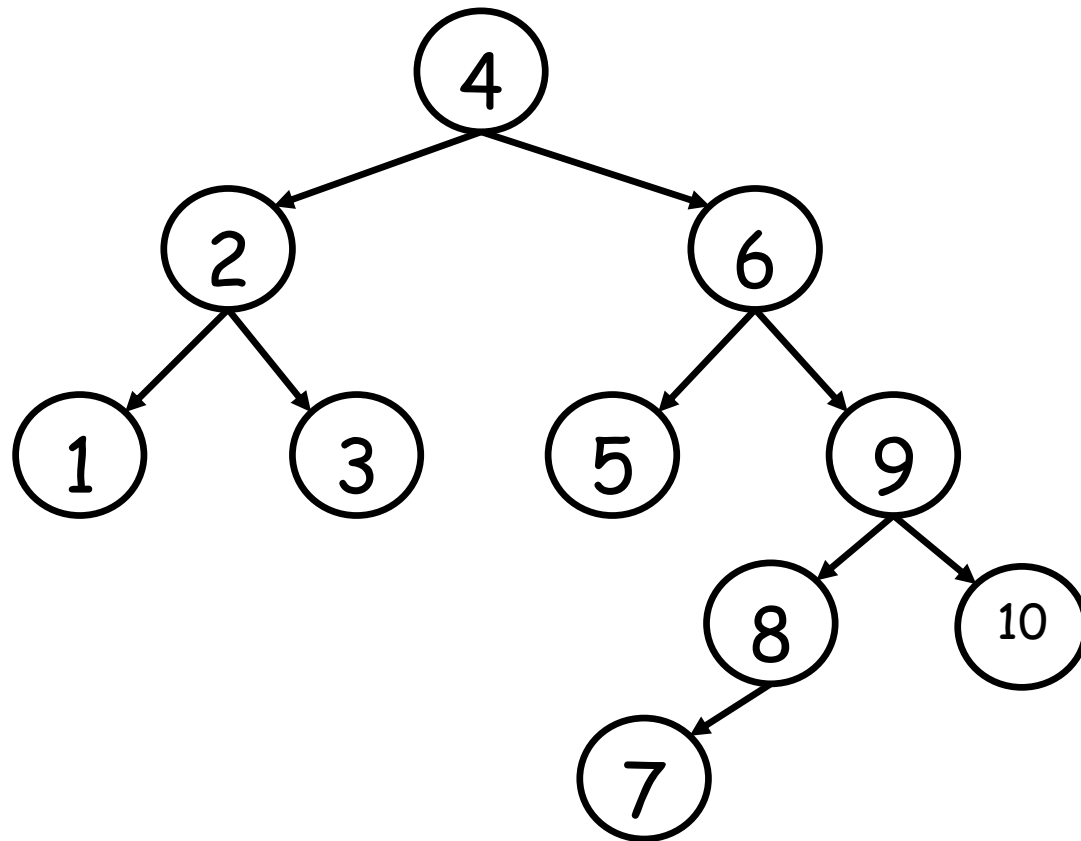


2,6,4,5,8,3,1,9,10,7

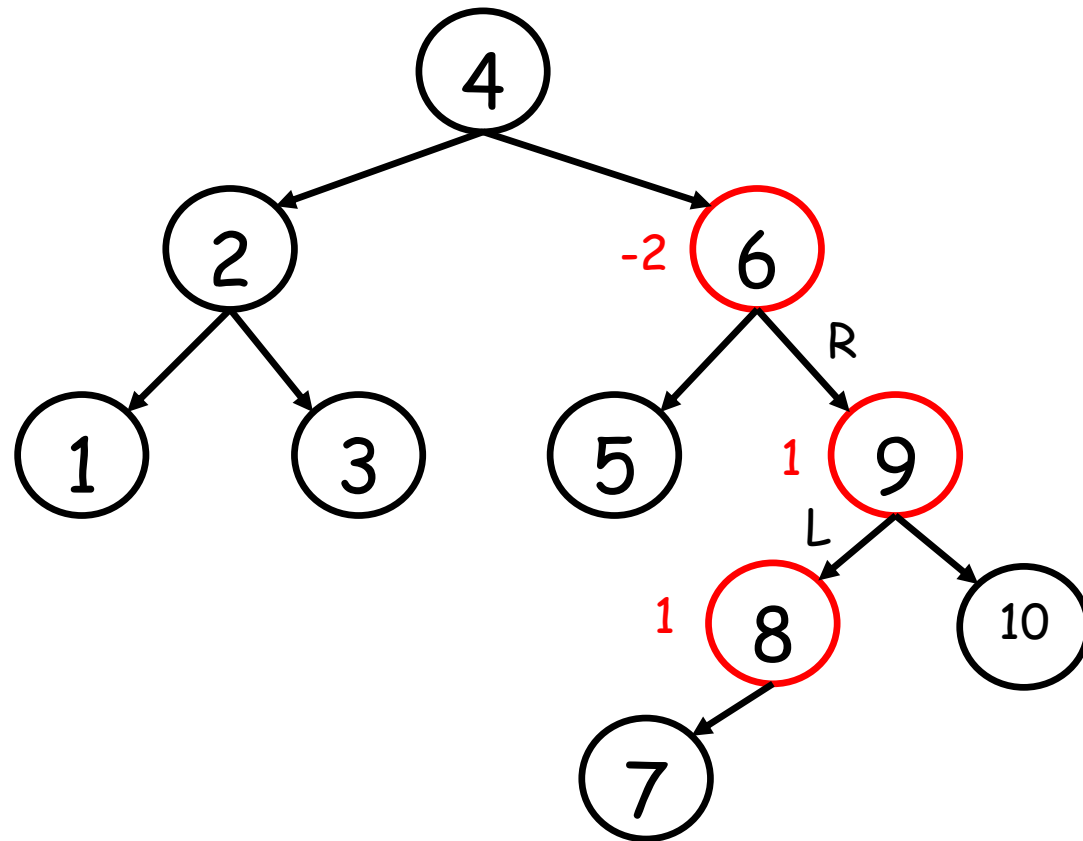


$z < y < x$

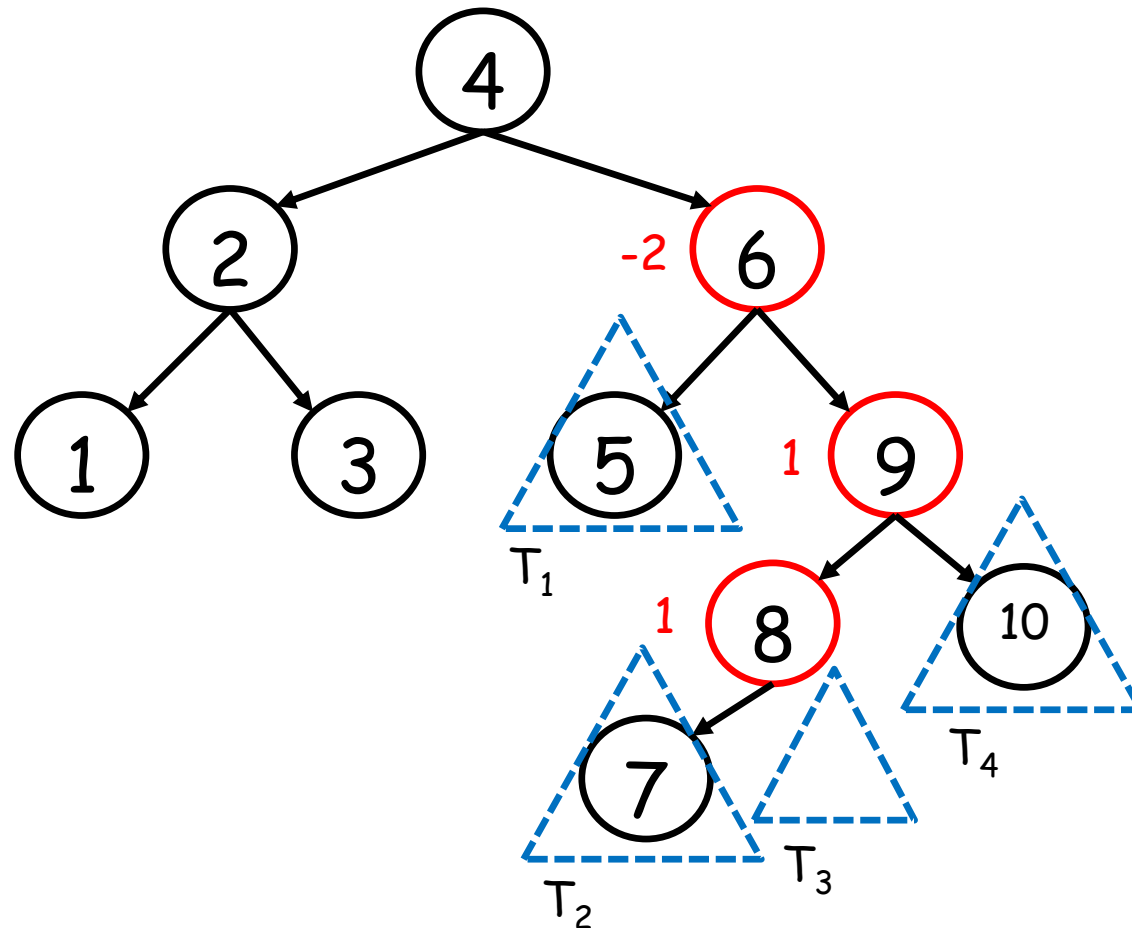
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



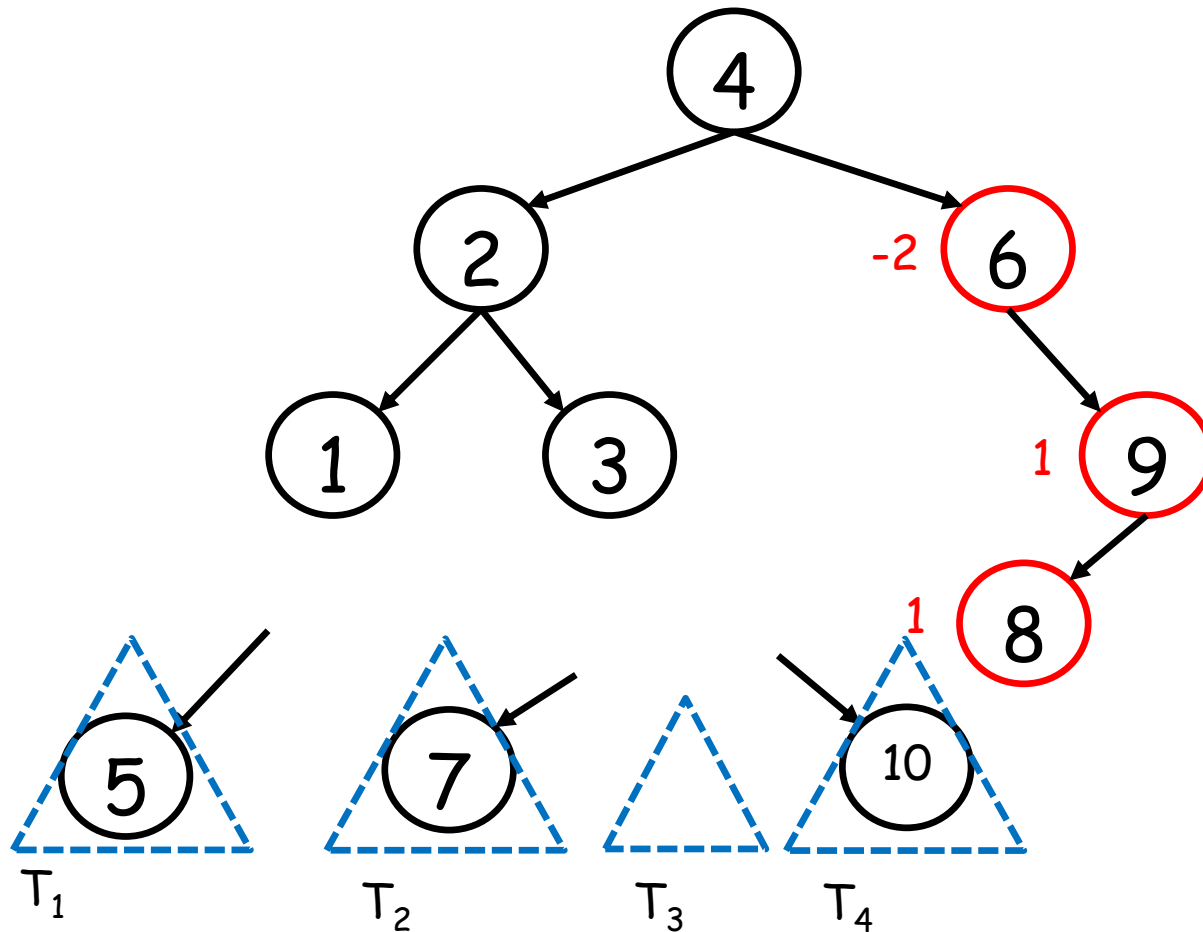
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



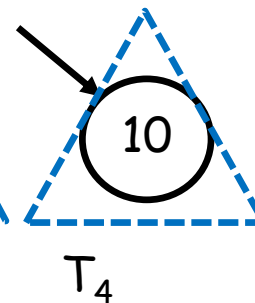
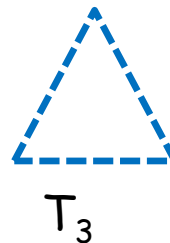
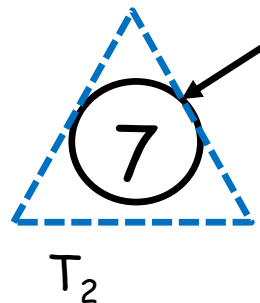
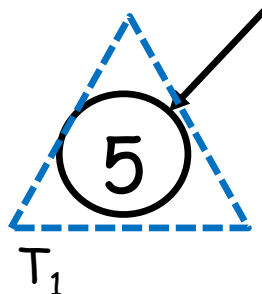
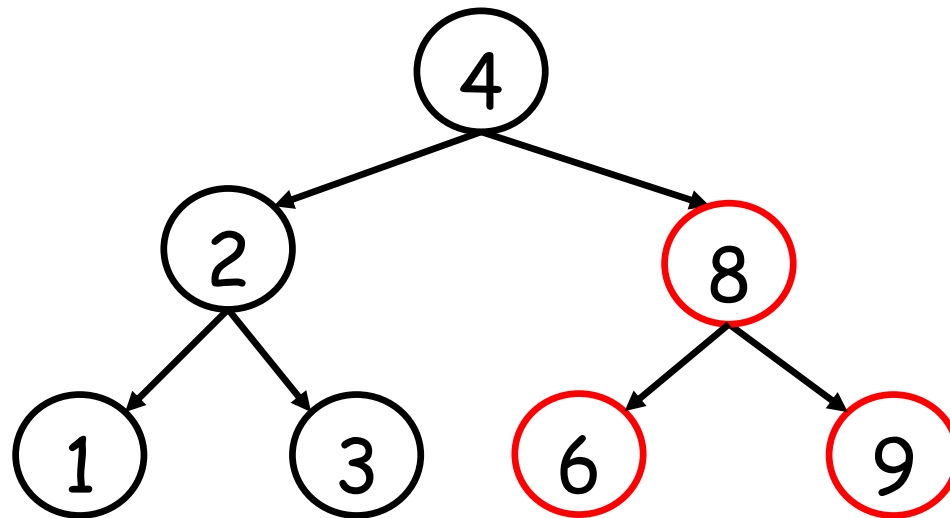
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



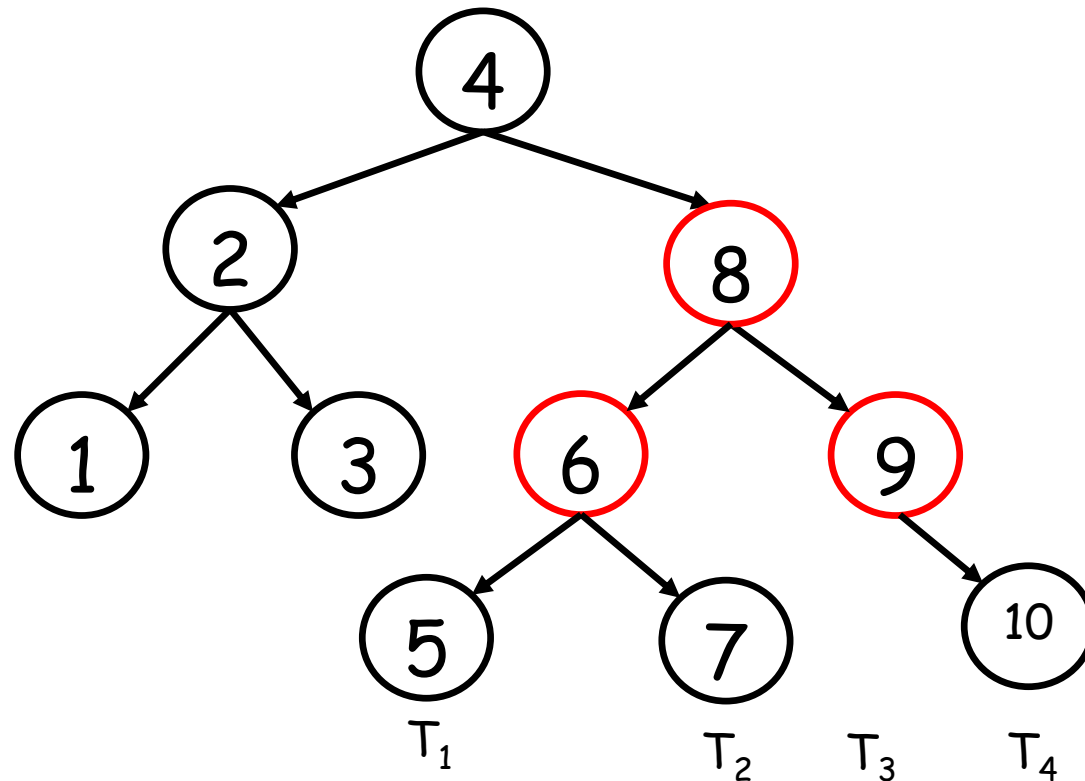
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



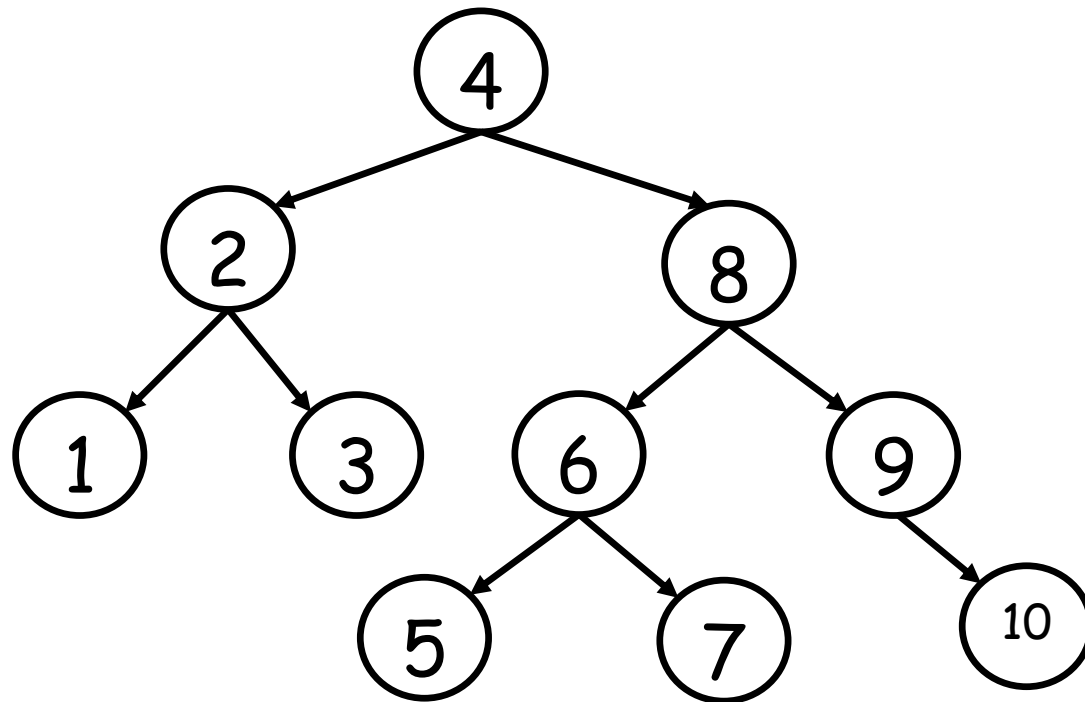
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



2,6,4,5,8,3,1,9,10,7

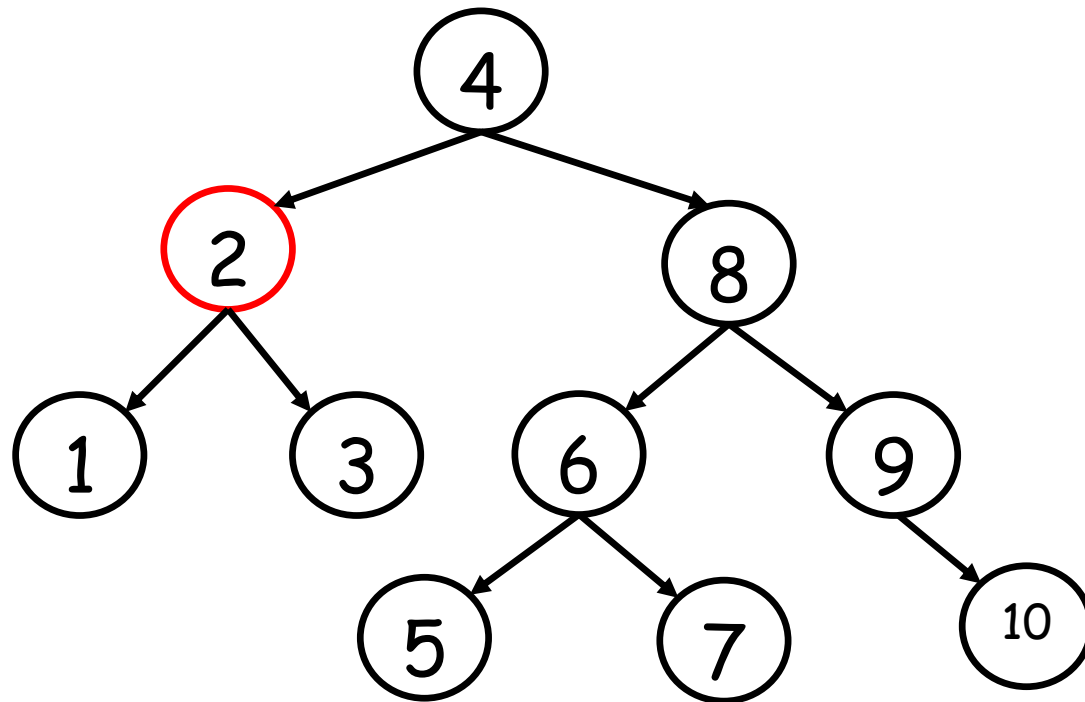


2,6,4,5,8,3,1,9,10,7

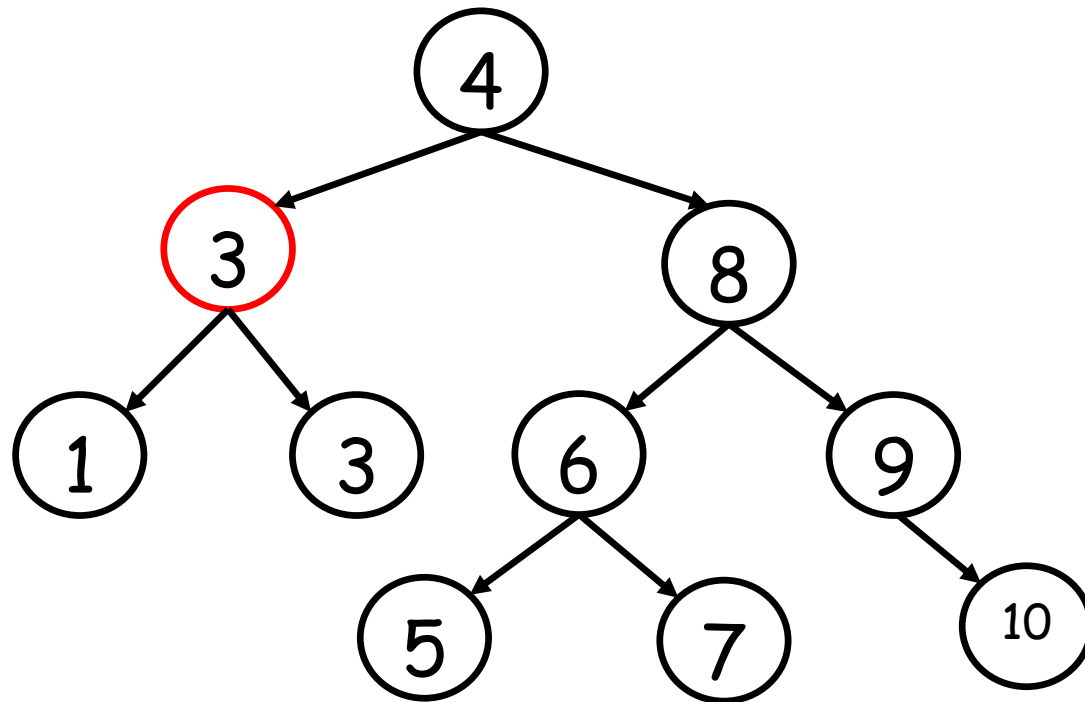


הוצאת איבר - דיון

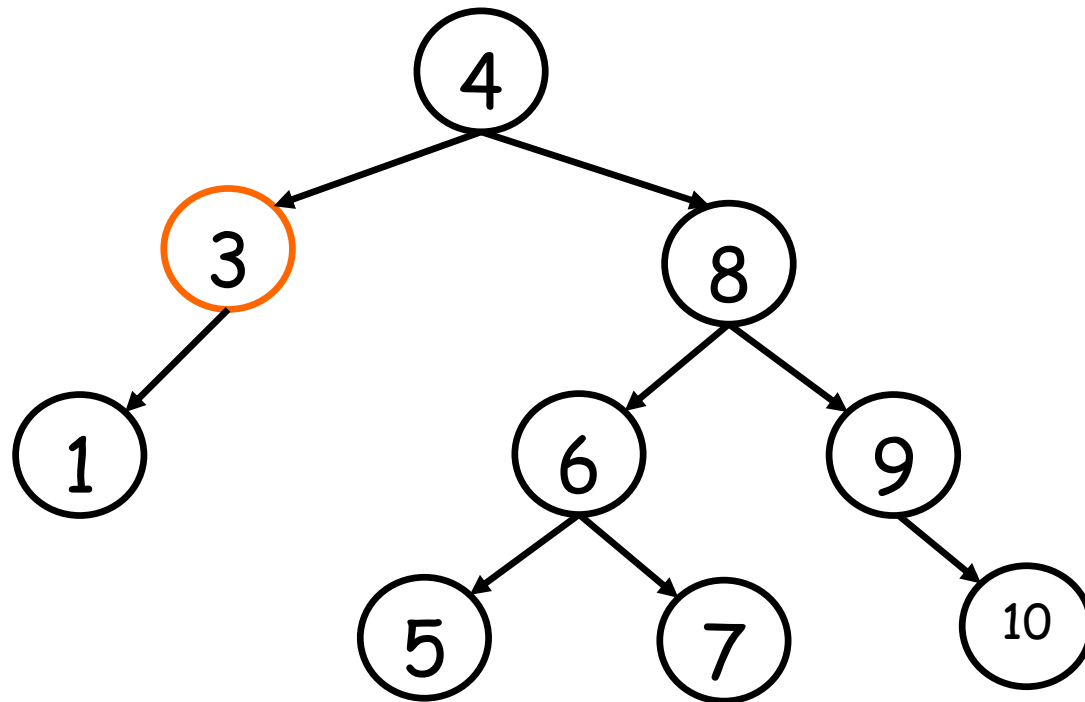
הוצא את 2



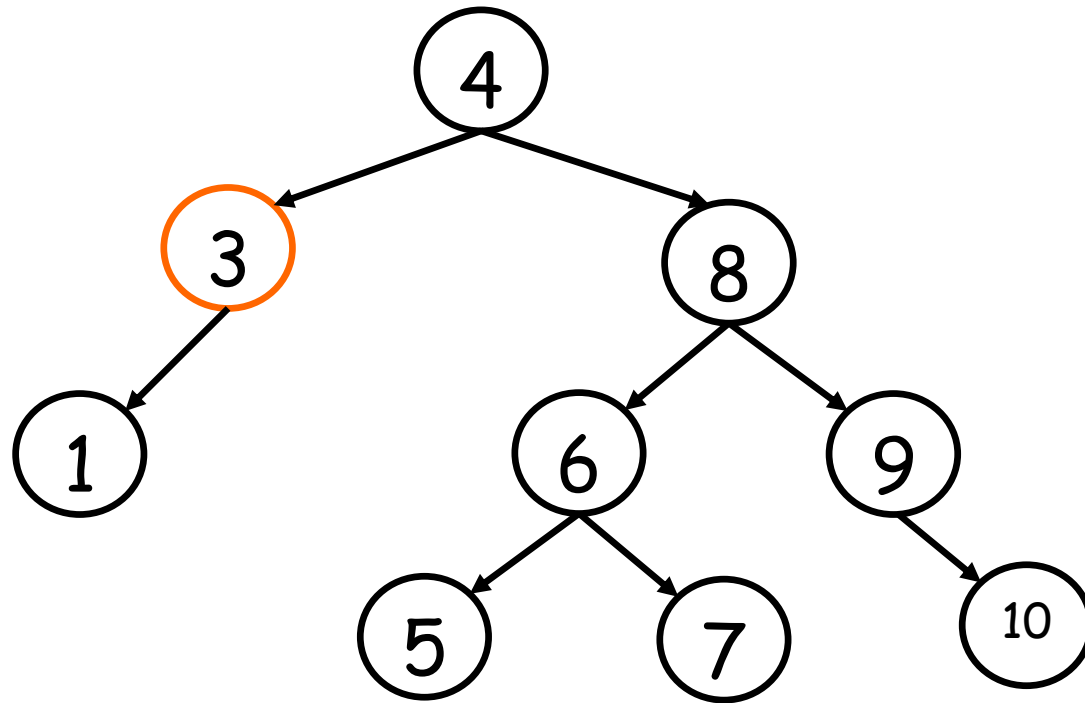
הוצא את 2



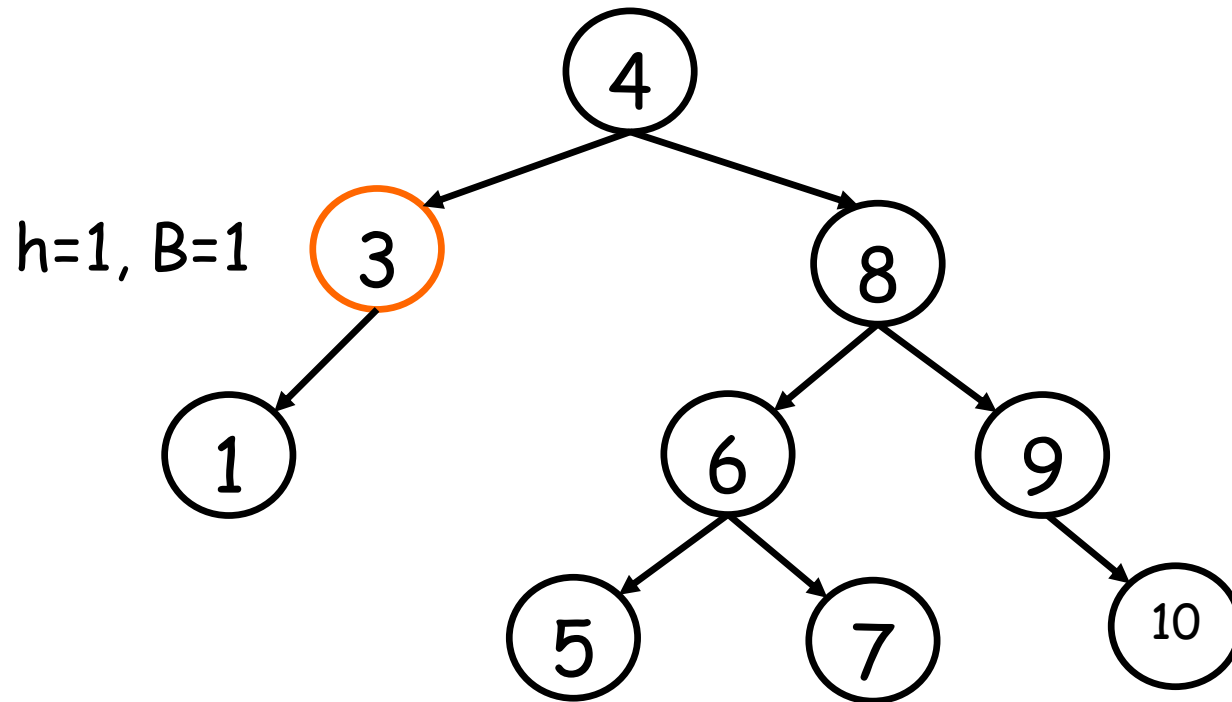
הוצא את 2



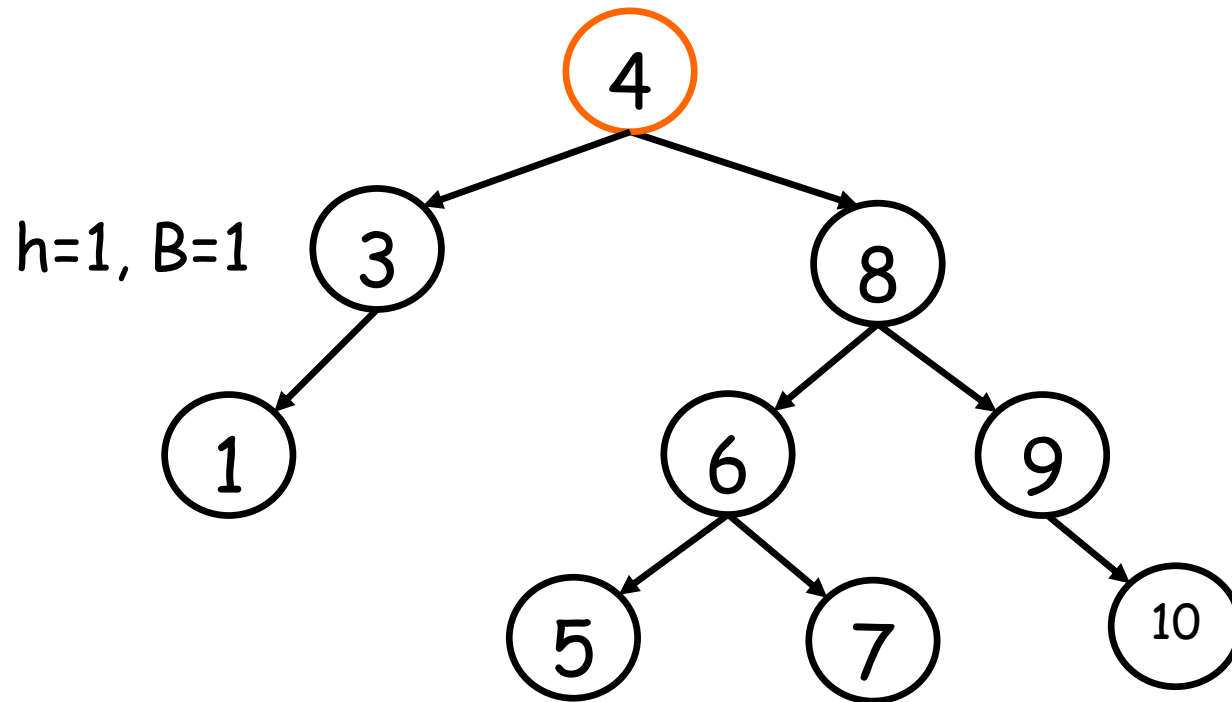
נעלה במסלול ההוצאה, נחשב גובה וגורם איזון



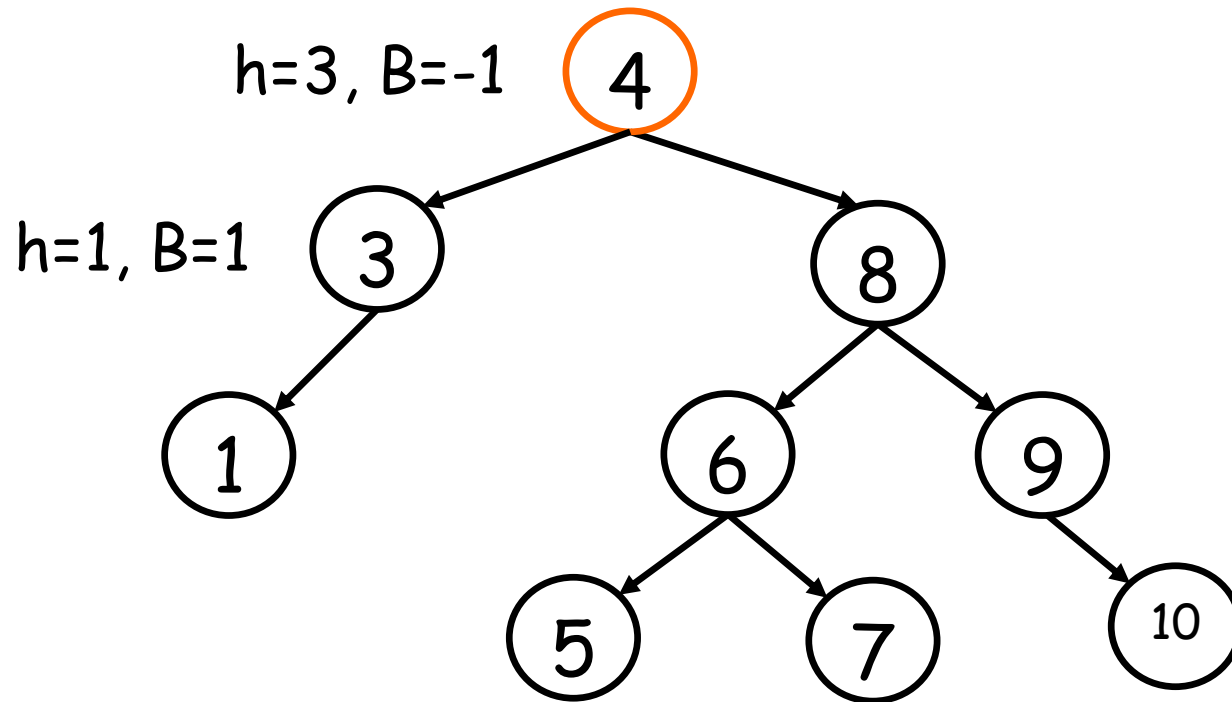
נעלה במסלול ההוצאה, נחשב גובה וגורם איזון



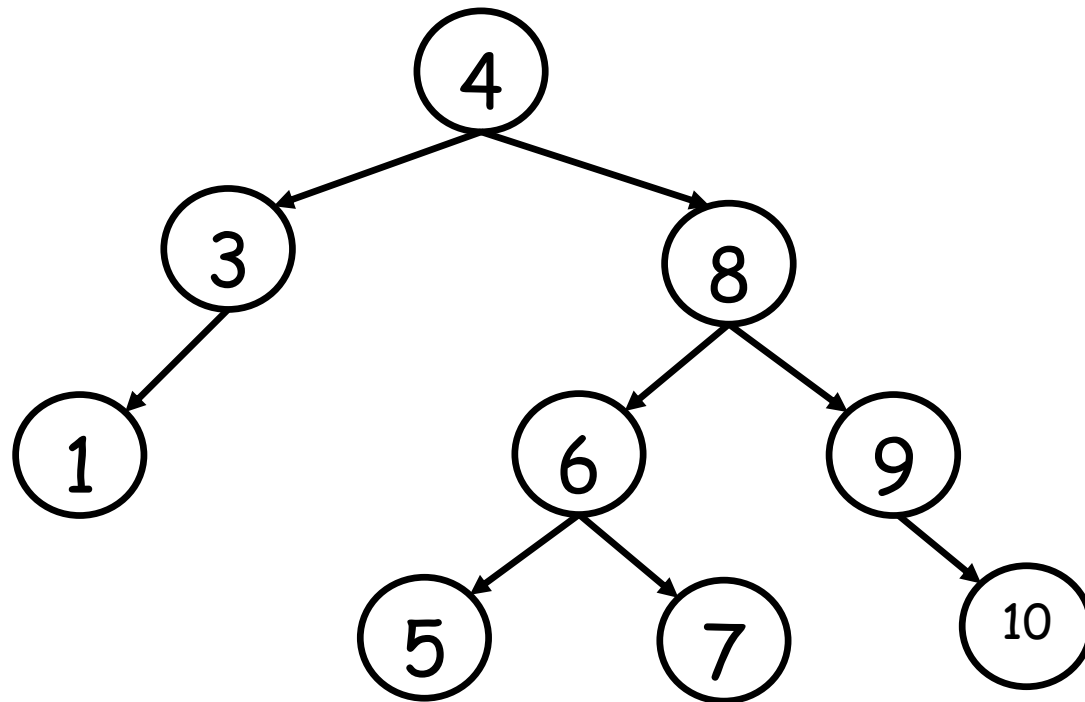
נעלה במסלול ההוצאה, נחשב גובה וגורם איזון



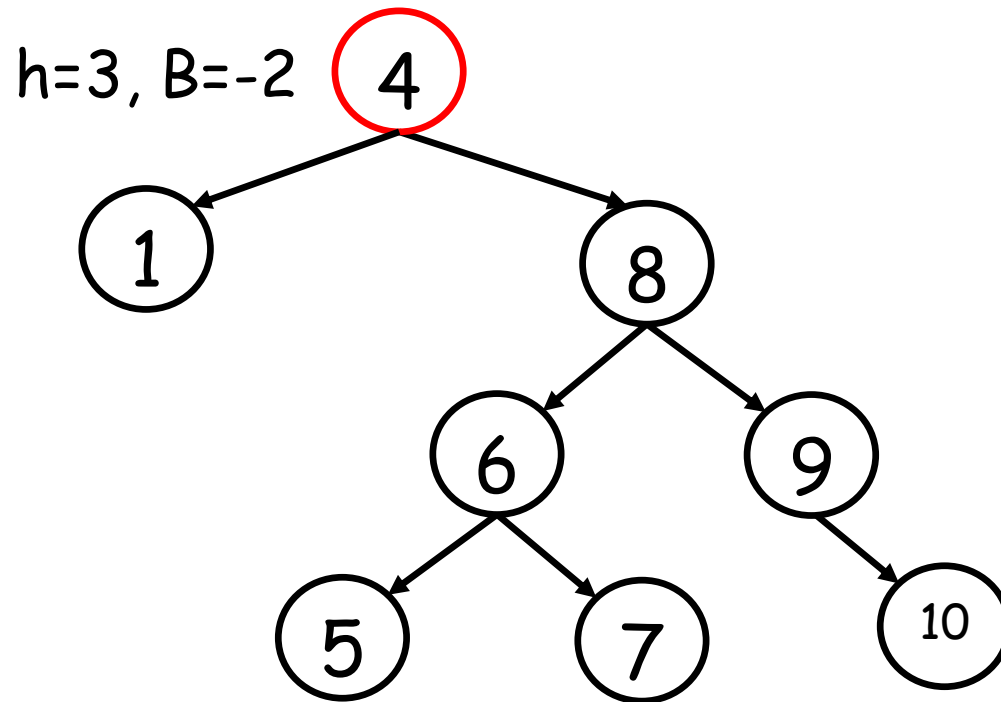
נעלה במסלול ההוצאה, נחשב גובה וגורם איזון



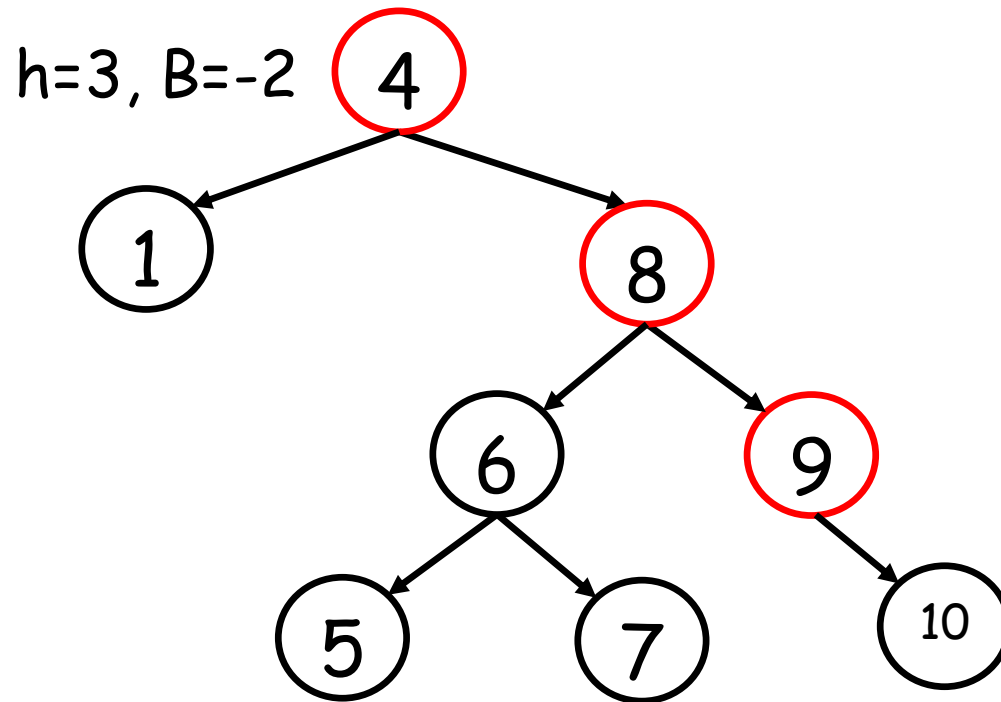
הוצא את 3



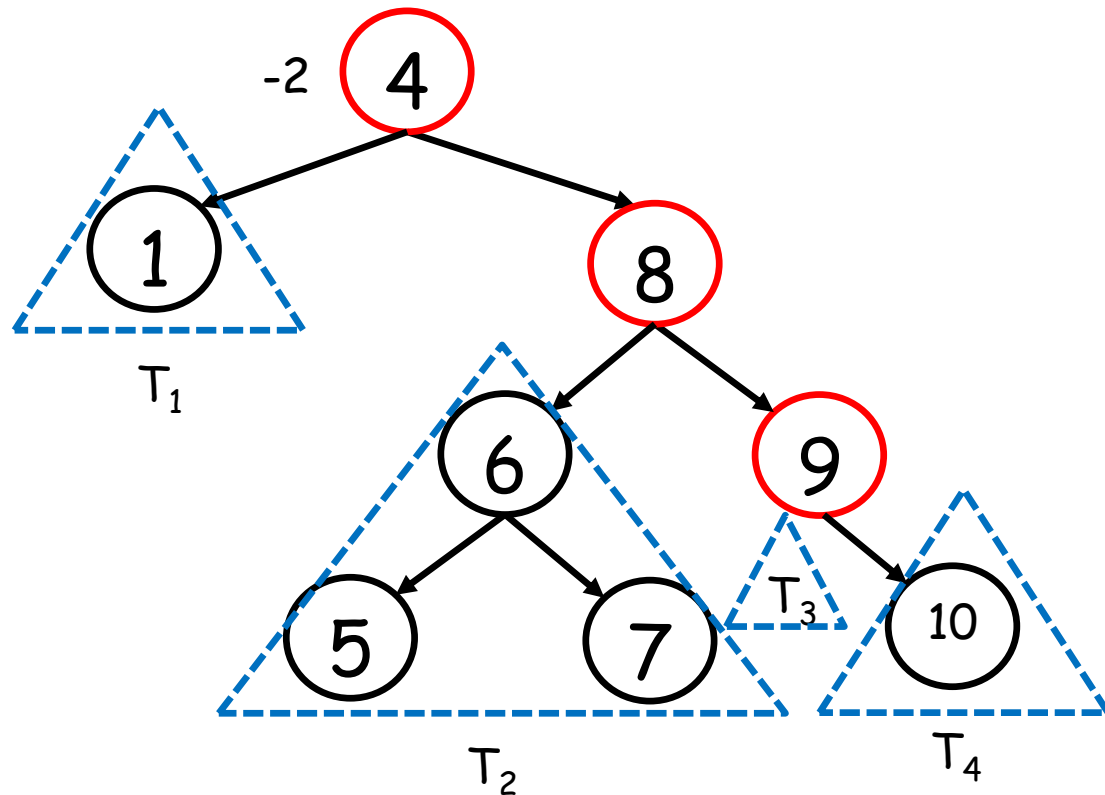
הוצא את 3



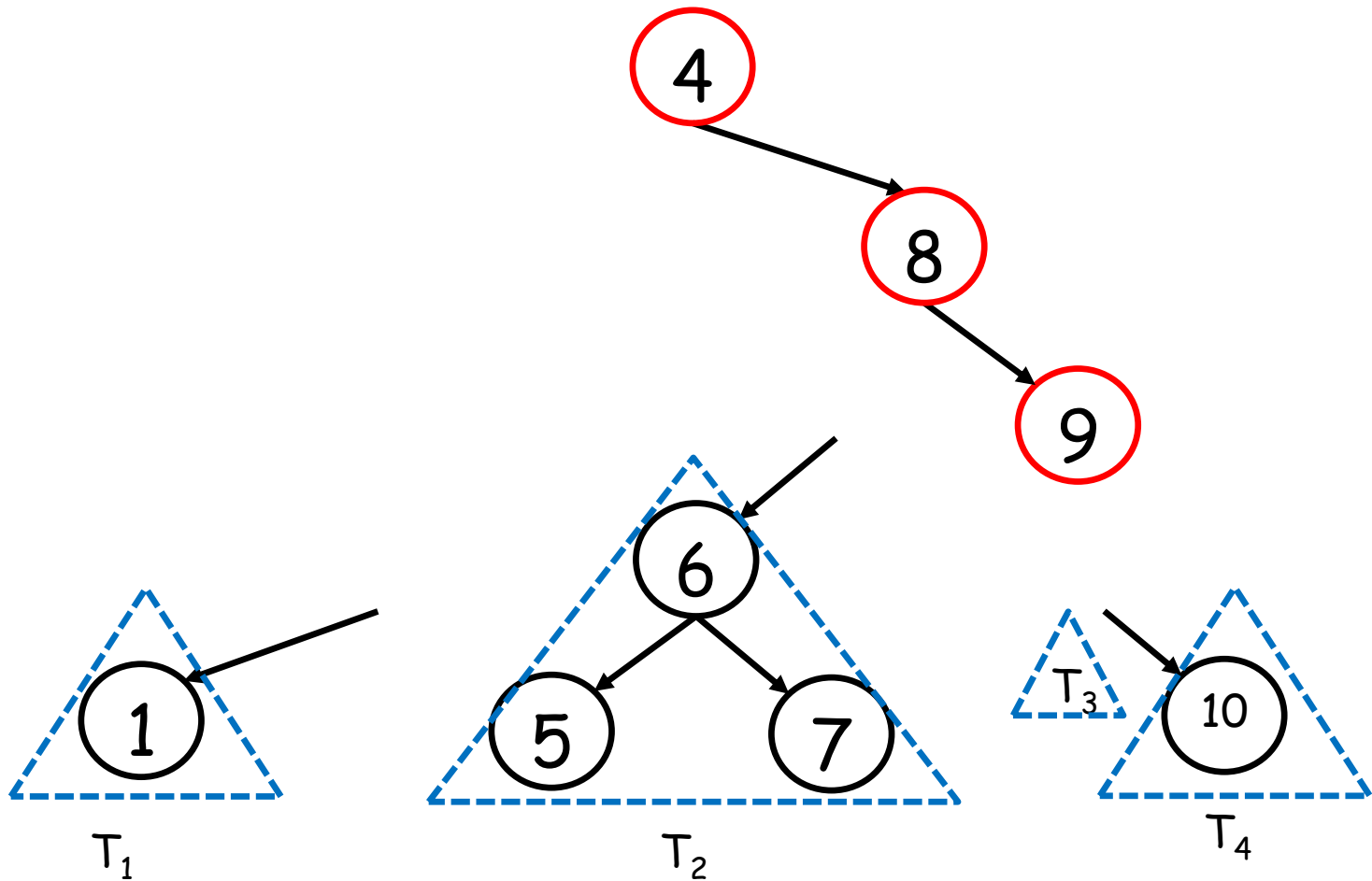
הוצא את 3



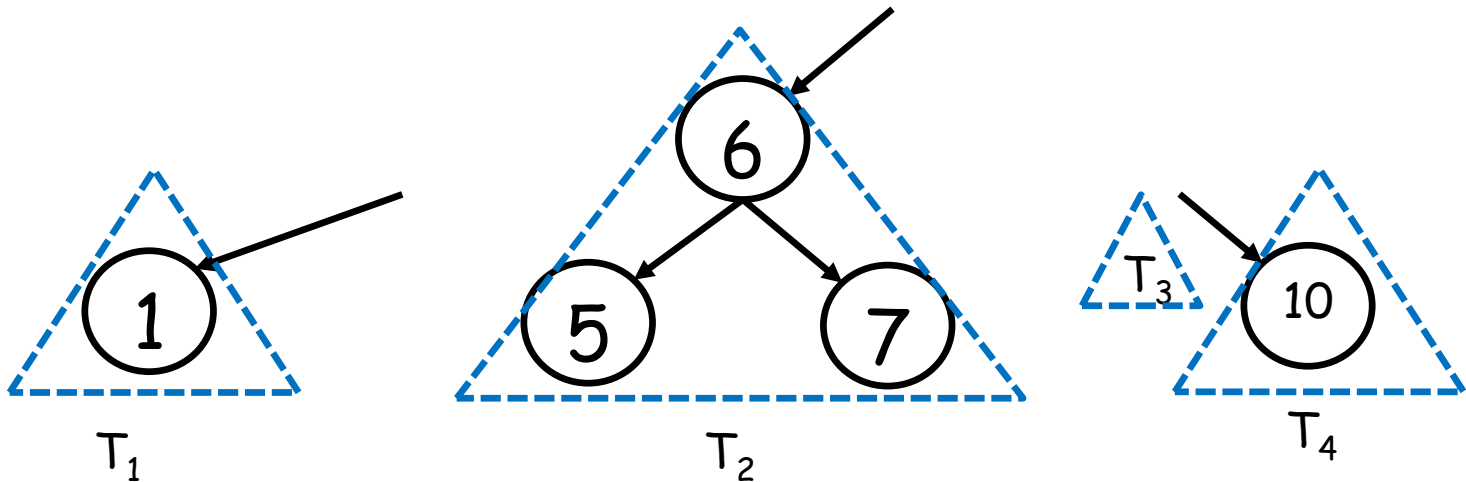
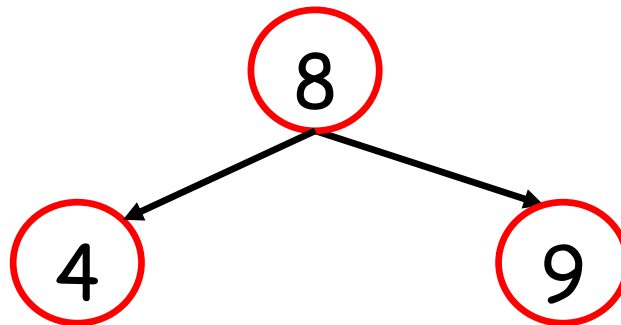
הוצא את 3



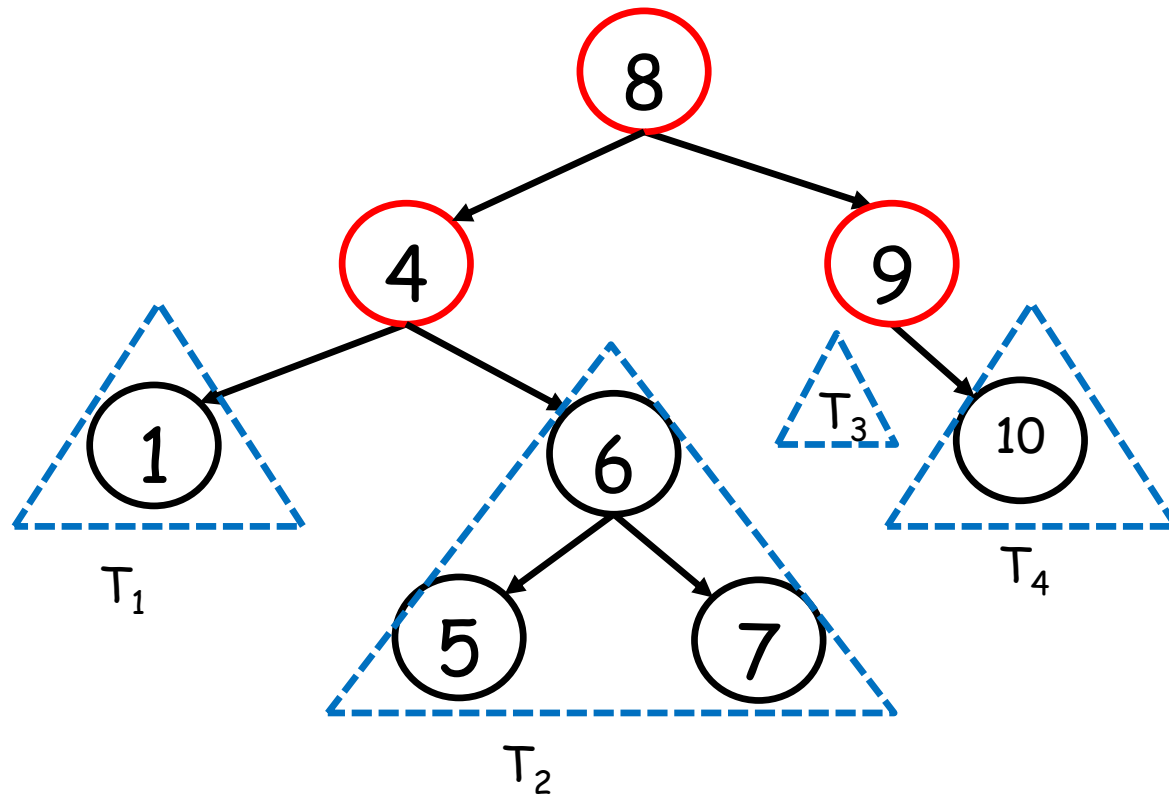
הוצא את 3



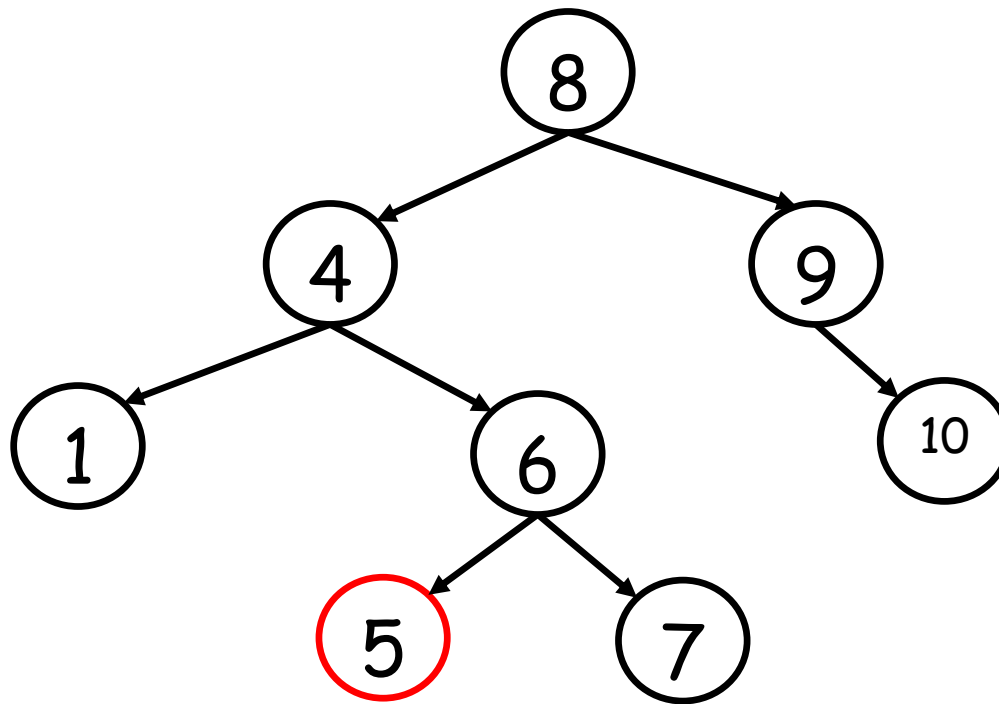
הוצא את 3



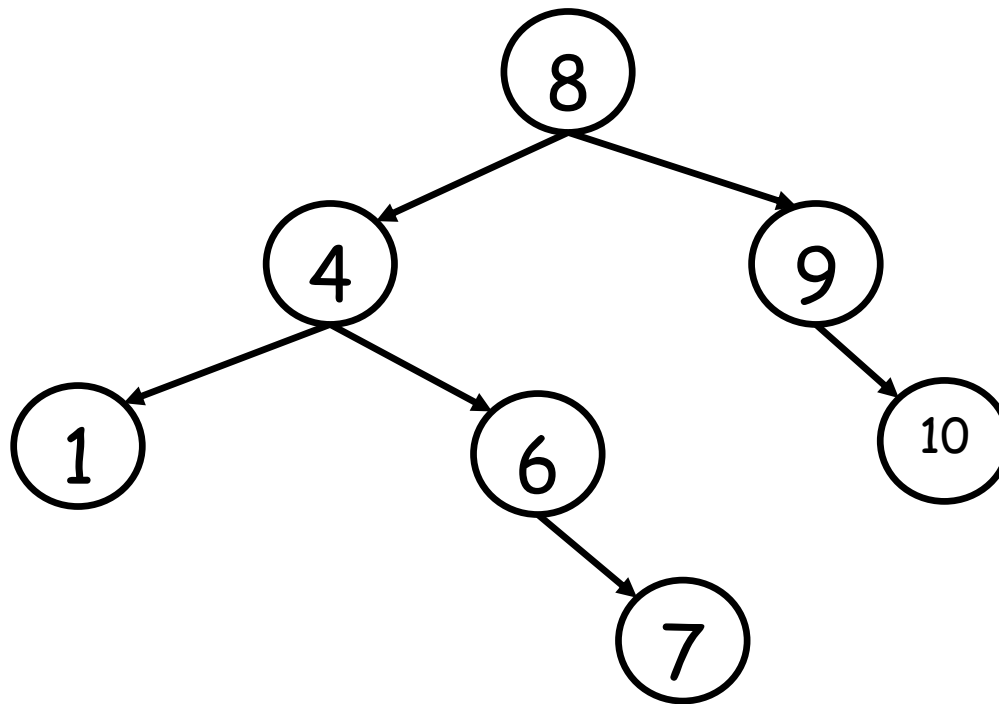
הוצא את 3



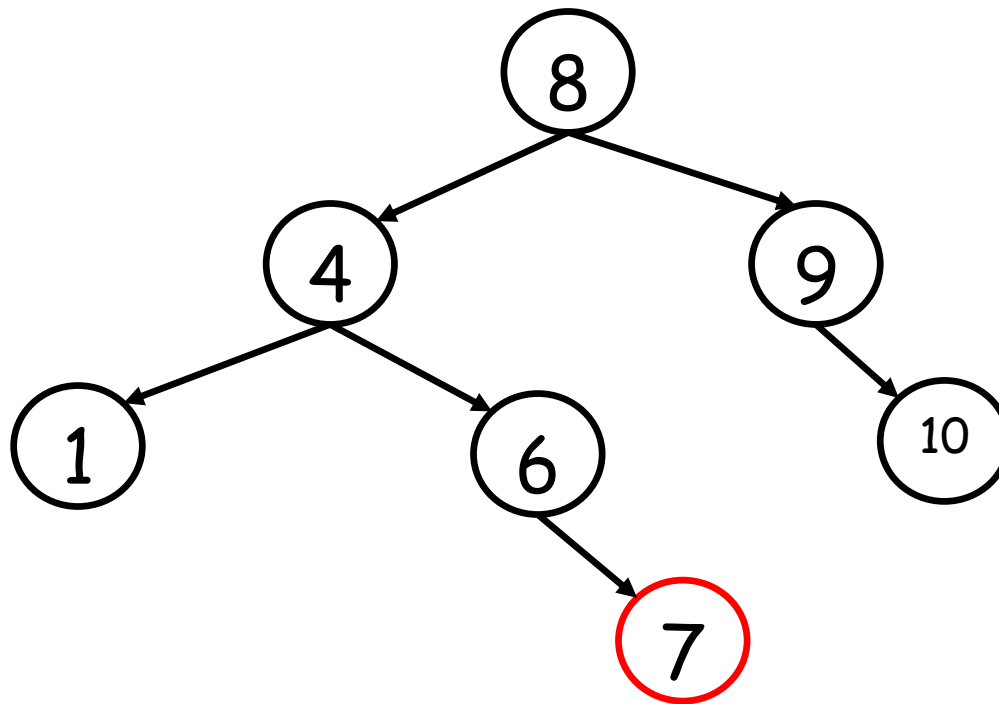
הוצא את 5



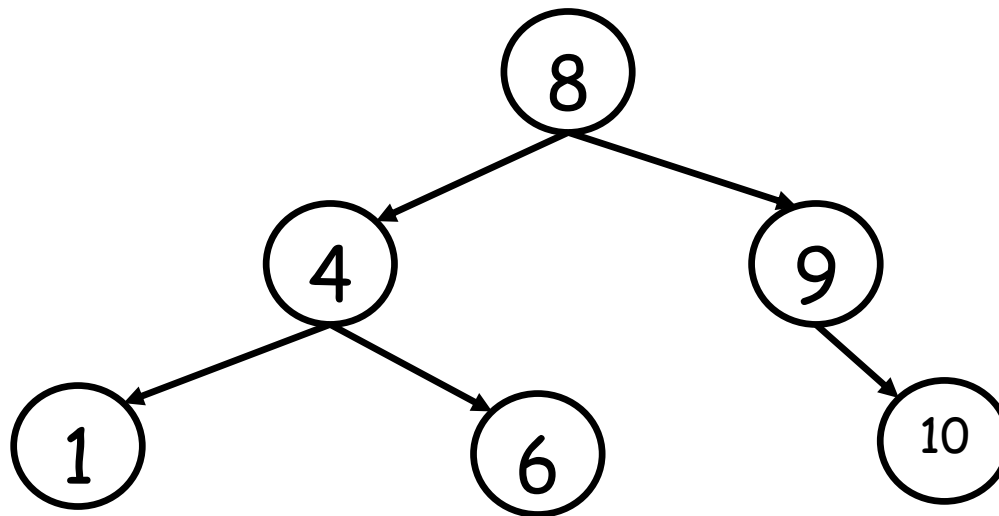
הוצא את 5



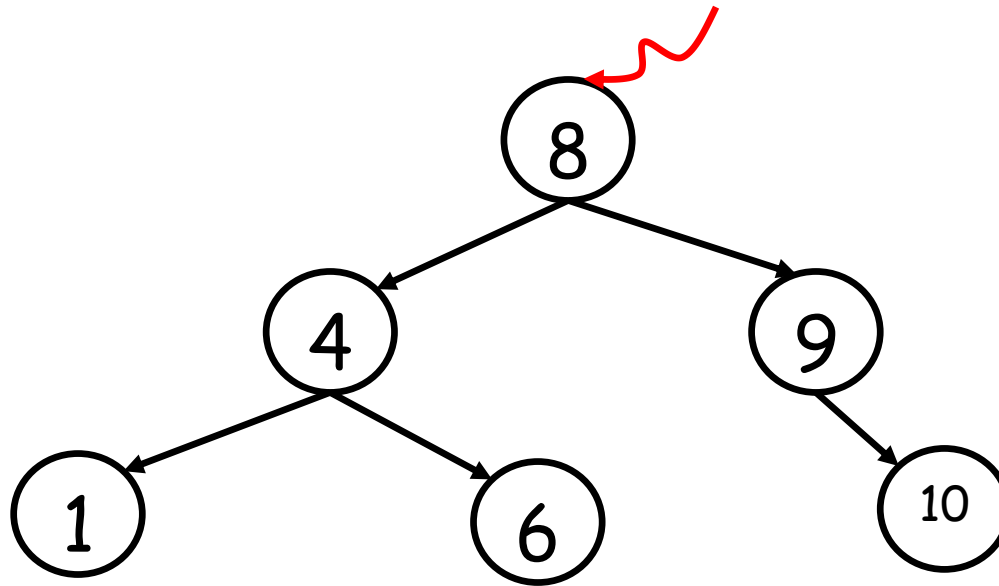
הוצא את 7



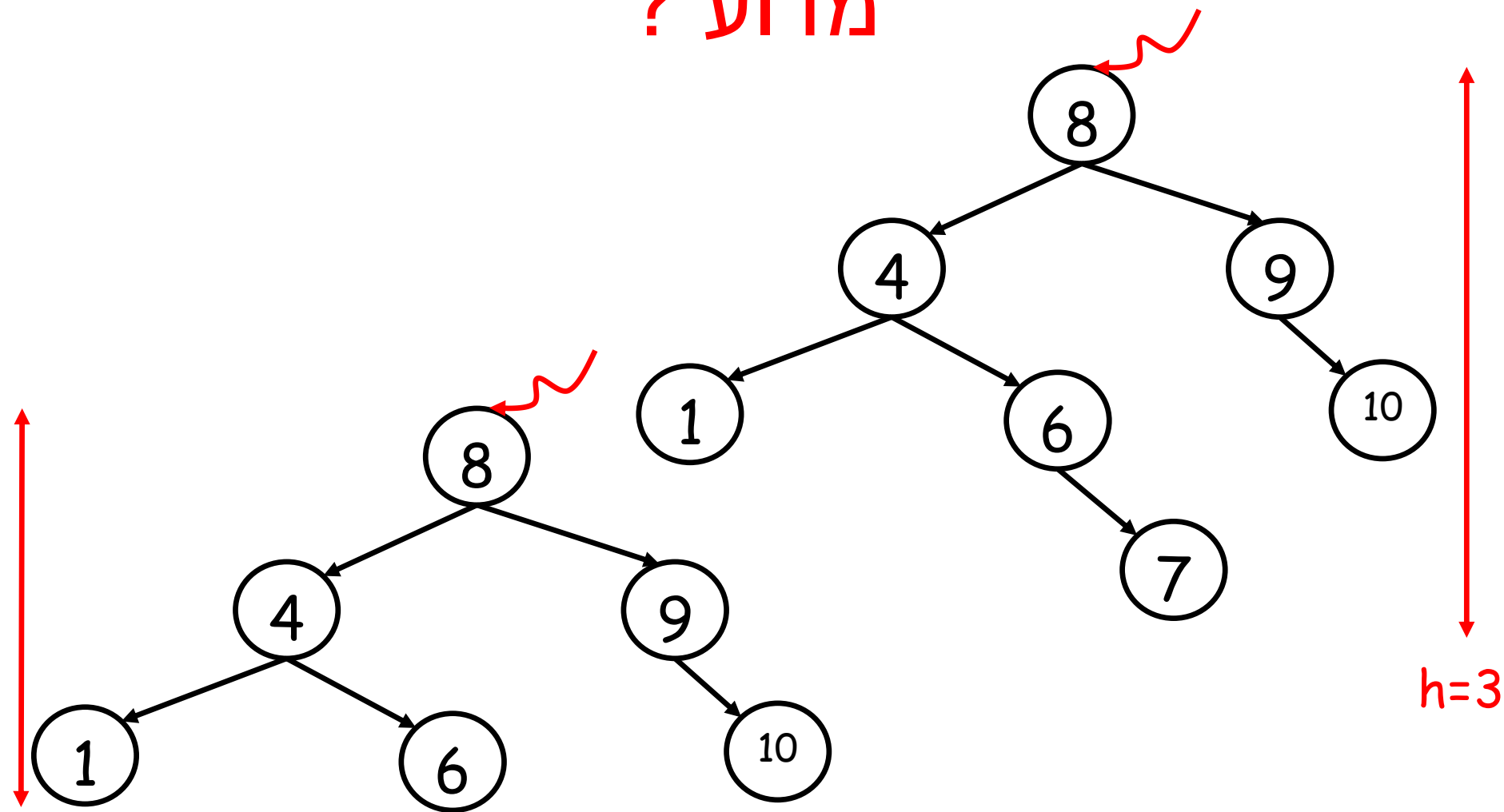
הוצא את 7



שימו לב, כאשר זהו תת עץ, יש להמשיך
לבדוק הפרת איזון עד השורש



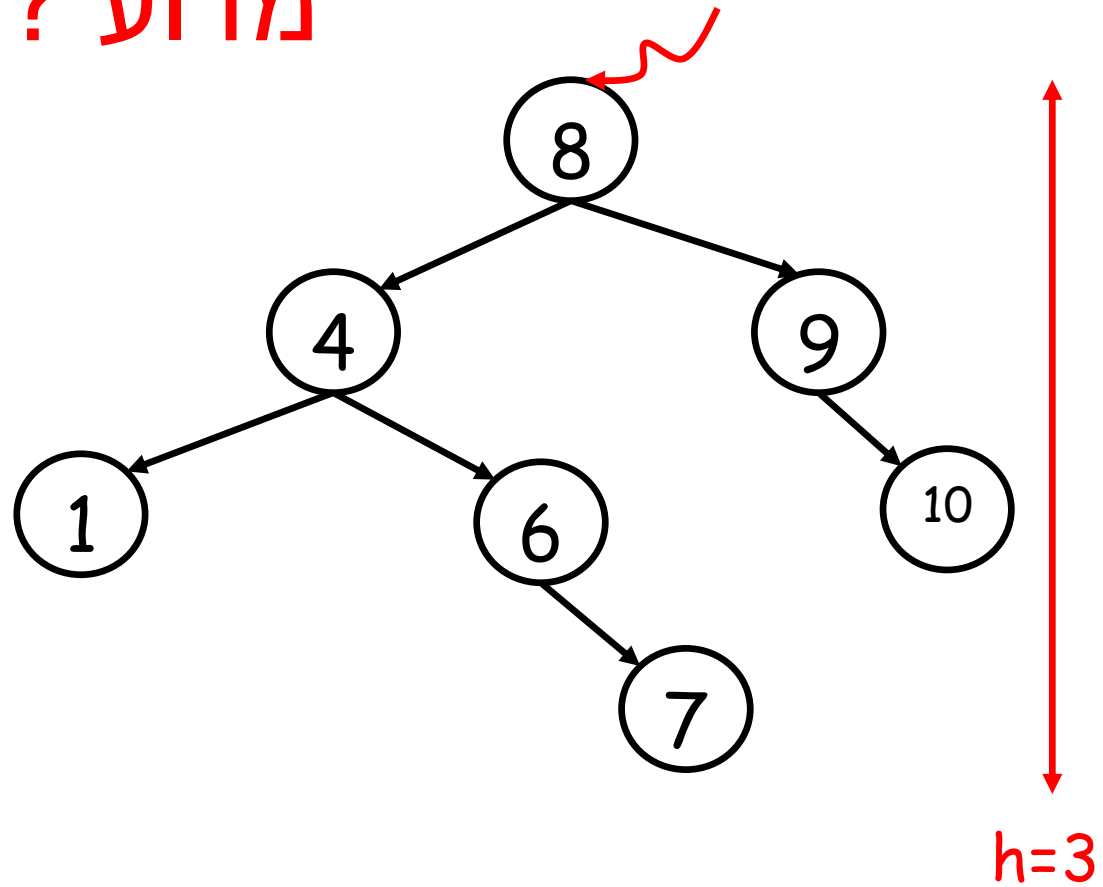
מדוע ?



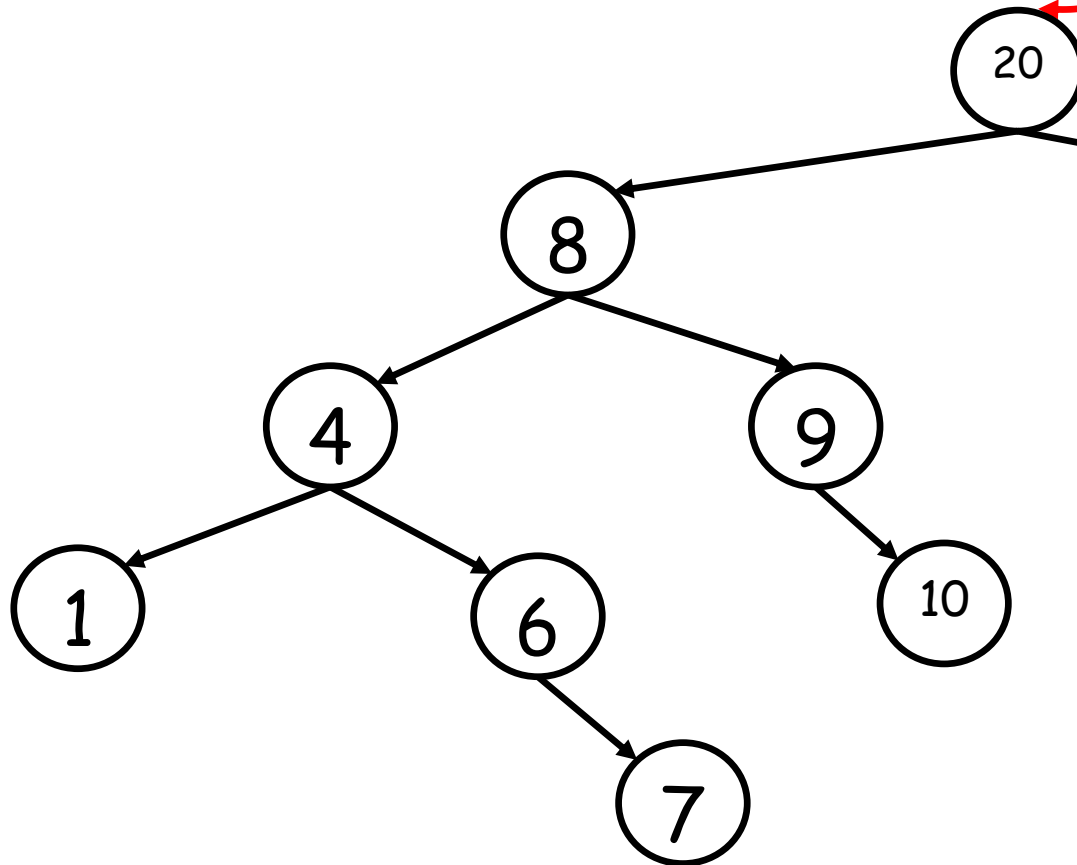
$h=2$

189

מדוע ?



מדוע ?



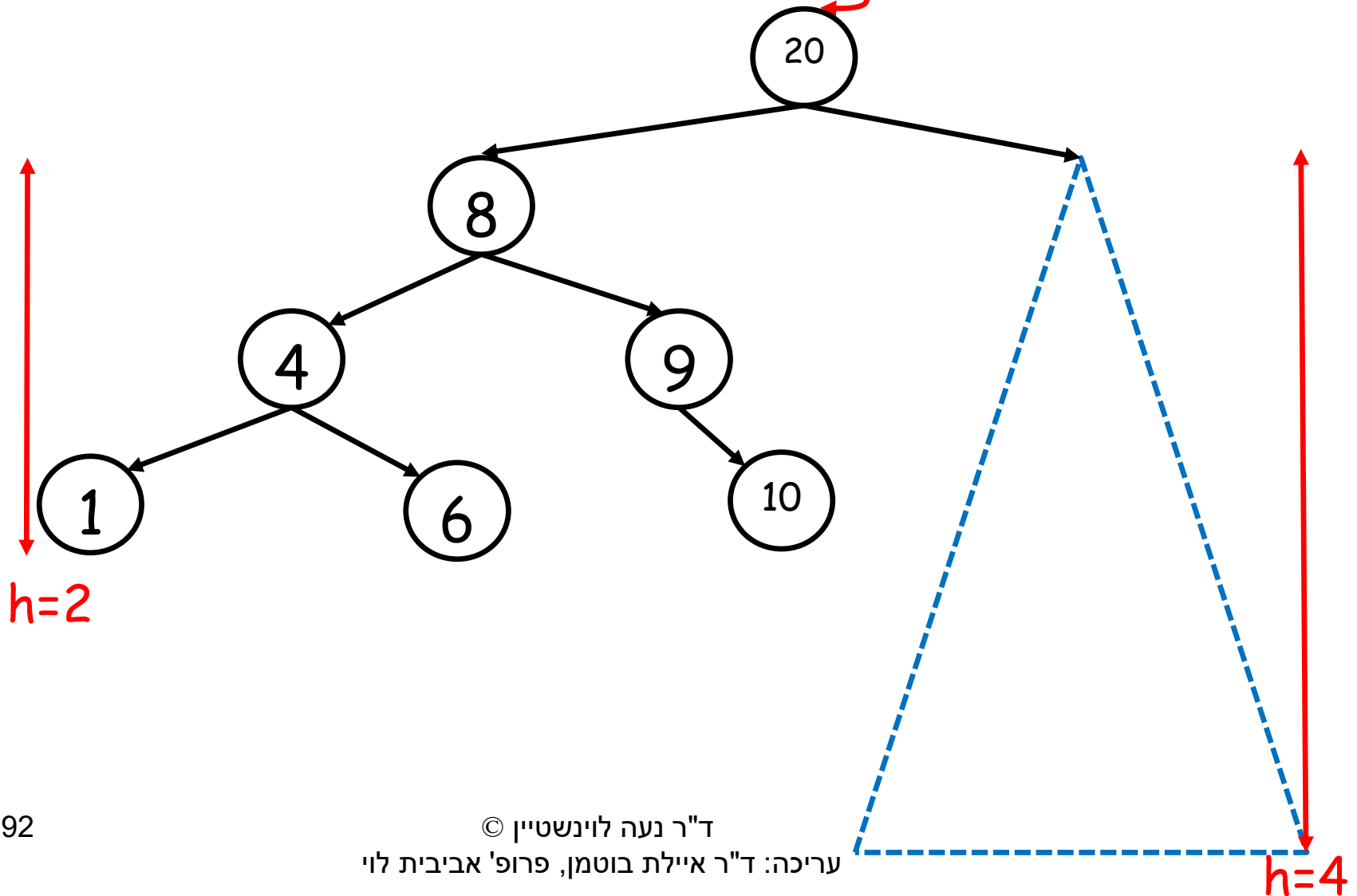
$h=3$

191

ד"ר נעה לוינשטיין ©
עריכה: ד"ר איילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

$h=4$

מדוע ?



עצי AVL - הוצאת ערך x לעץ

1. הוצא את x כמו בעץ חיפוש בינרי.
2. תקן את גורמי האיזון ובצע גלגולים באופן הבא:
לכל צומת v לאורך המסלול החל מלמטה ועד לשורש בצע:
 - א- שנה את פרמטר איזון של v.
 - ב- אם גורם האיזון של p משתנה ל-2 (או -2) בצע גלגול מתאים.

הוצאת איבר מעץ AVL

מציאת המקום הדרוש להוצאה $O(h)$

מציאת המקום בו מופר האיזון

(אם מופר) $O(h)$

תיקון כלל פעולות האיזון שיש

לבצע (לכל היותר פעם בכל רמה) $O(h)$

$O(h)=O(\log n)$ סך-הכל: