

## עצים מאוזנים

משפחה של עצים נקראת מאוזנת אם מתקיים  
לכל עץ במשפחה גובה העץ הוא  $O(\log n)$

$n =$  מספר הצלמים בעץ.

### דוגמה

- עצים אדומים-שחורים
- עצים AVL

AVL עצי

ADELSON-VELSKY, LANDIS  
1962

# עצי AVL

הגדרה:

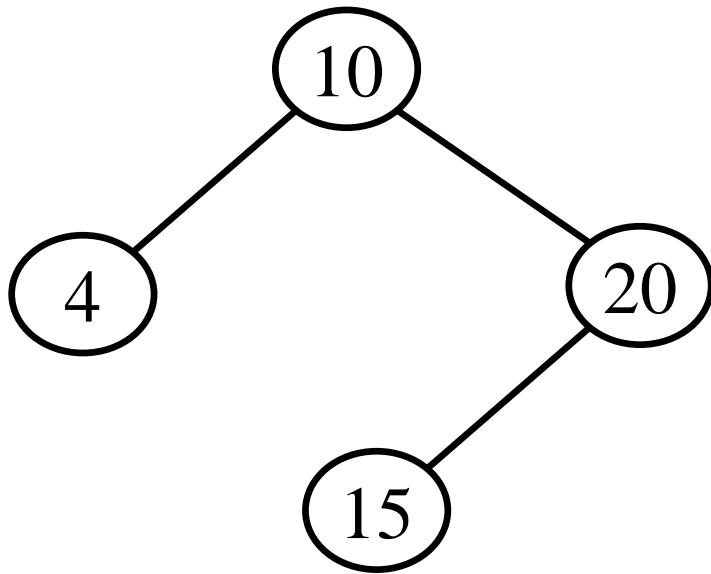
עץ AVL הוא **עץ חיפוש בינרי** שמקיים:

לכל צומת הפרש בין הגובה של תת העץ השמאלי  
ותת העץ הימני של הצומת הוא:

-1, 0, 1

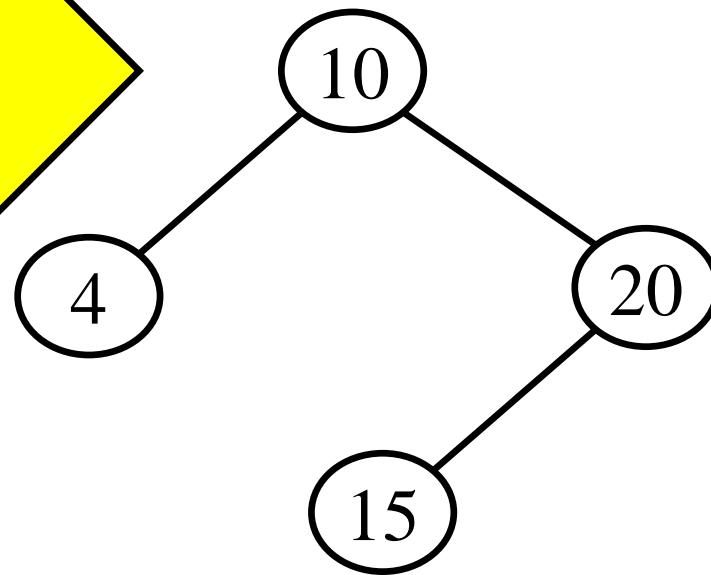
ערך זה נקרא **גורם האיזון**

# דוגמאות

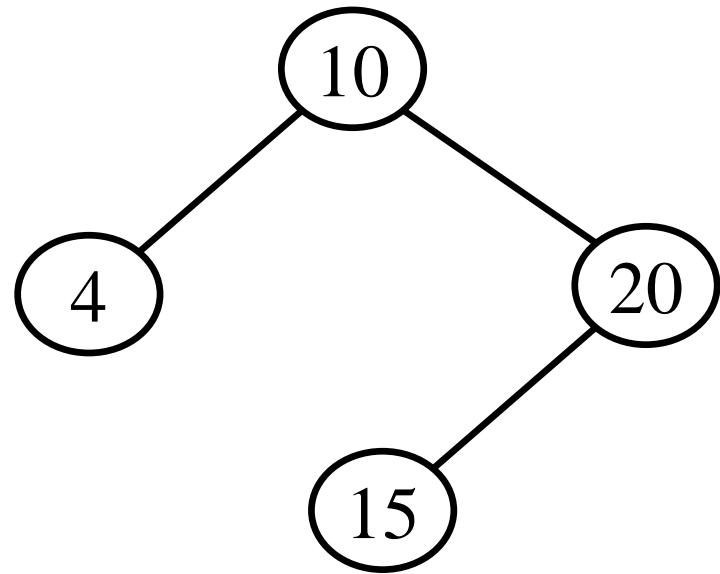


# דוגמאות

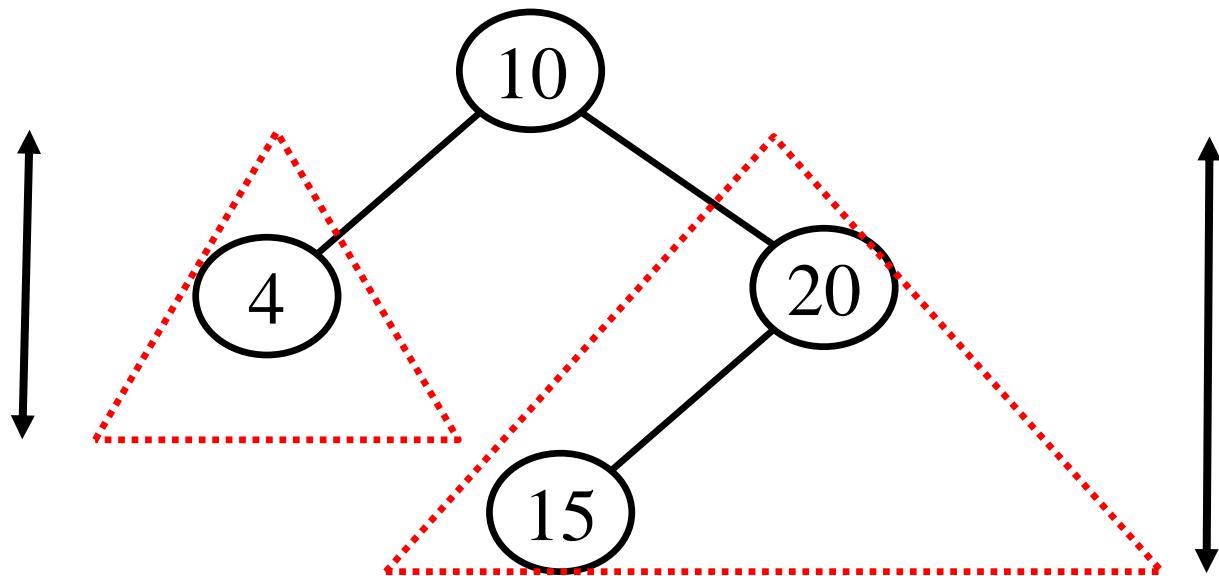
מספיק לדעת לחשב  
גורם איזון רק לשורש.  
**מדוע?**



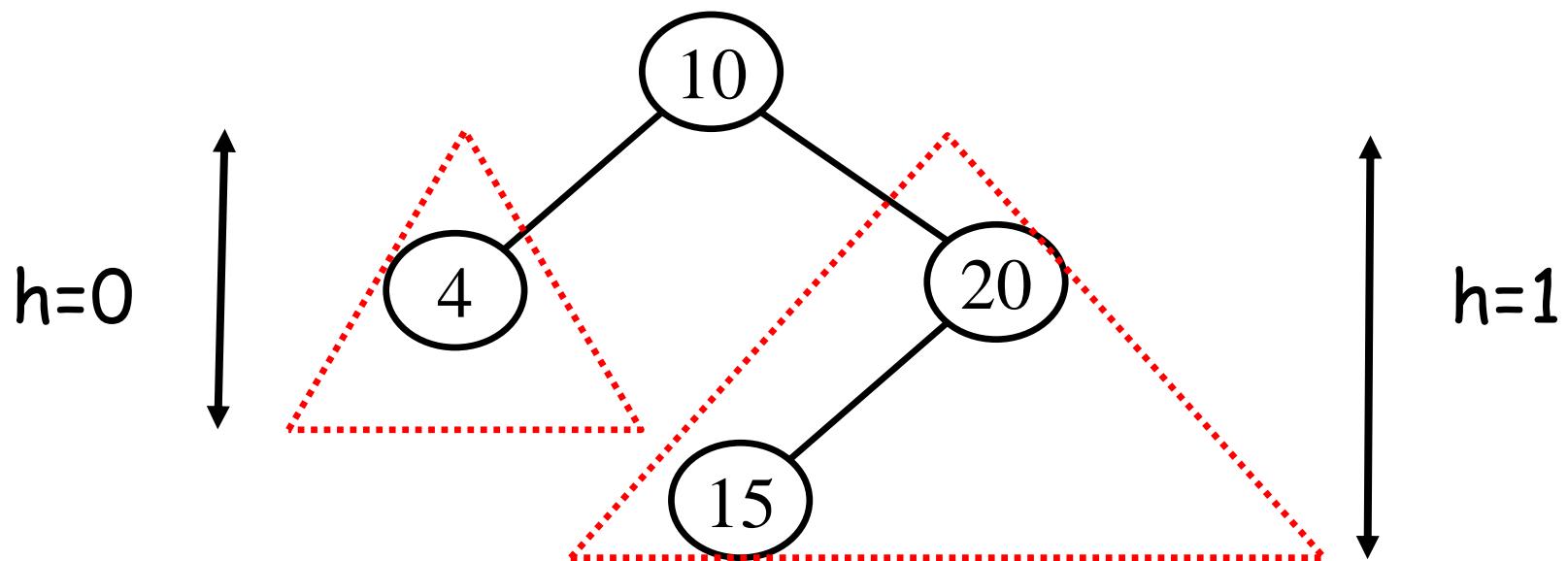
# חשב את גורם האיזון



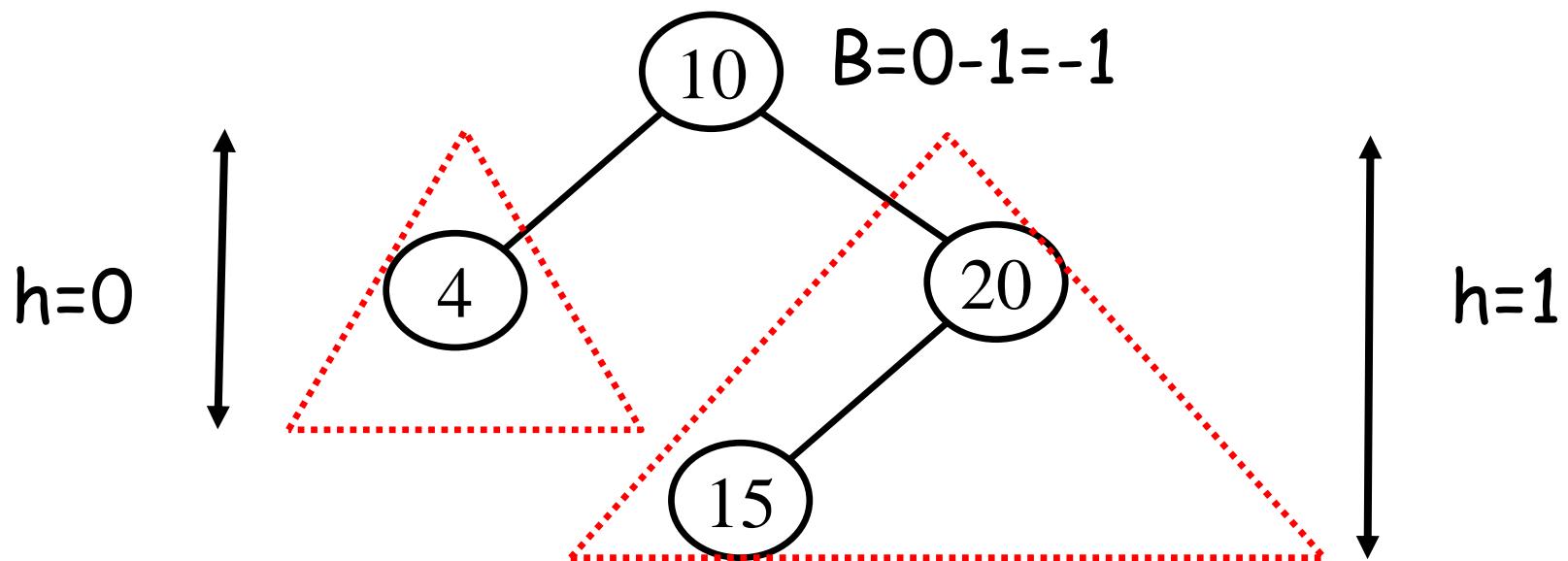
# חשב את גורם האיזון



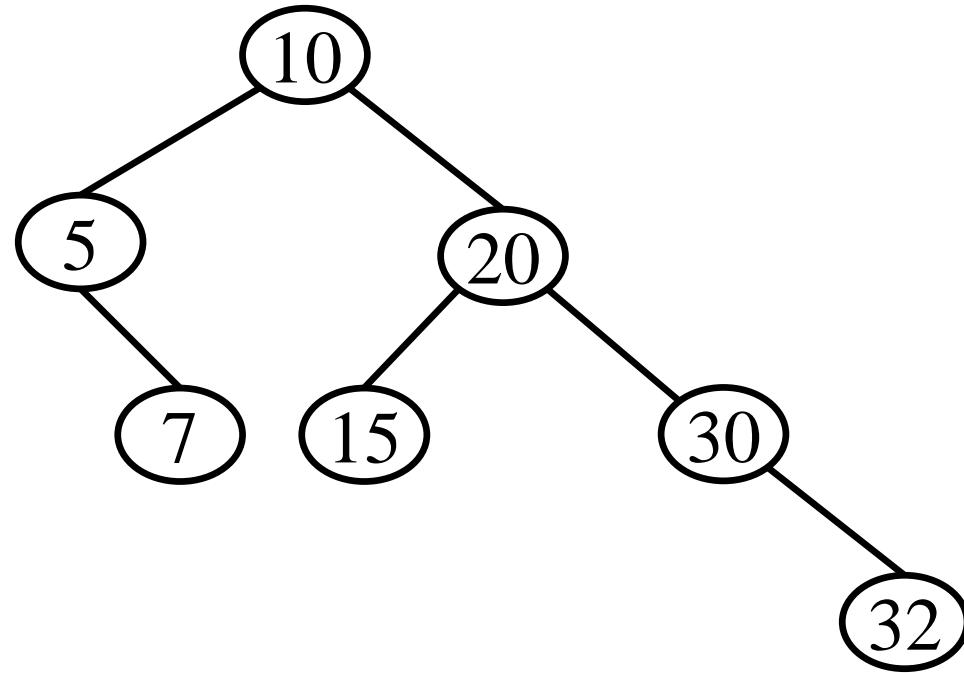
# חשב את גורם האיזון



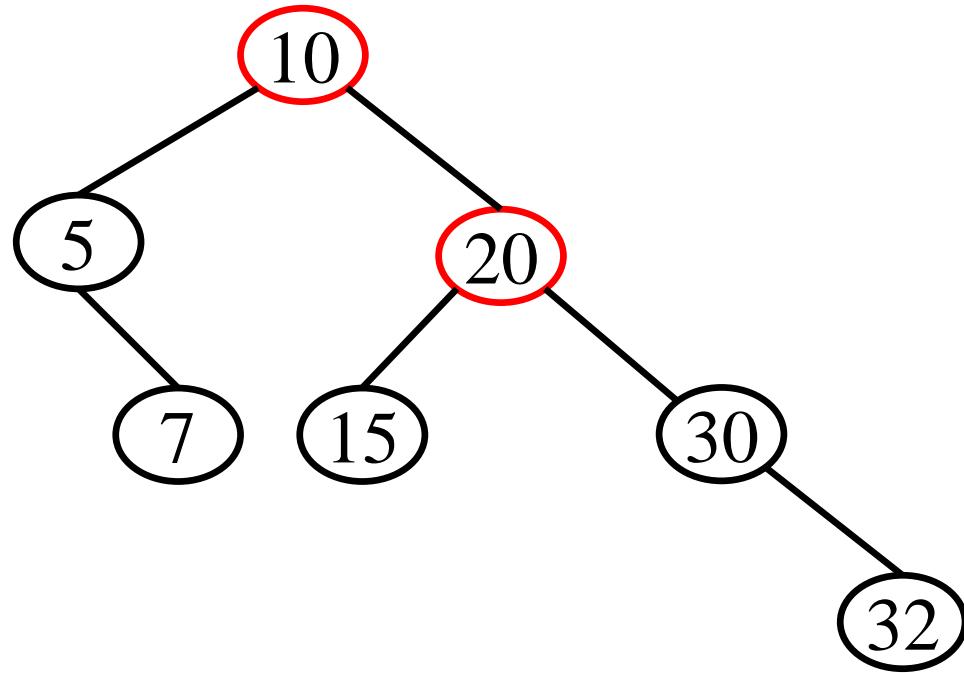
# חשב את גורם האיזון



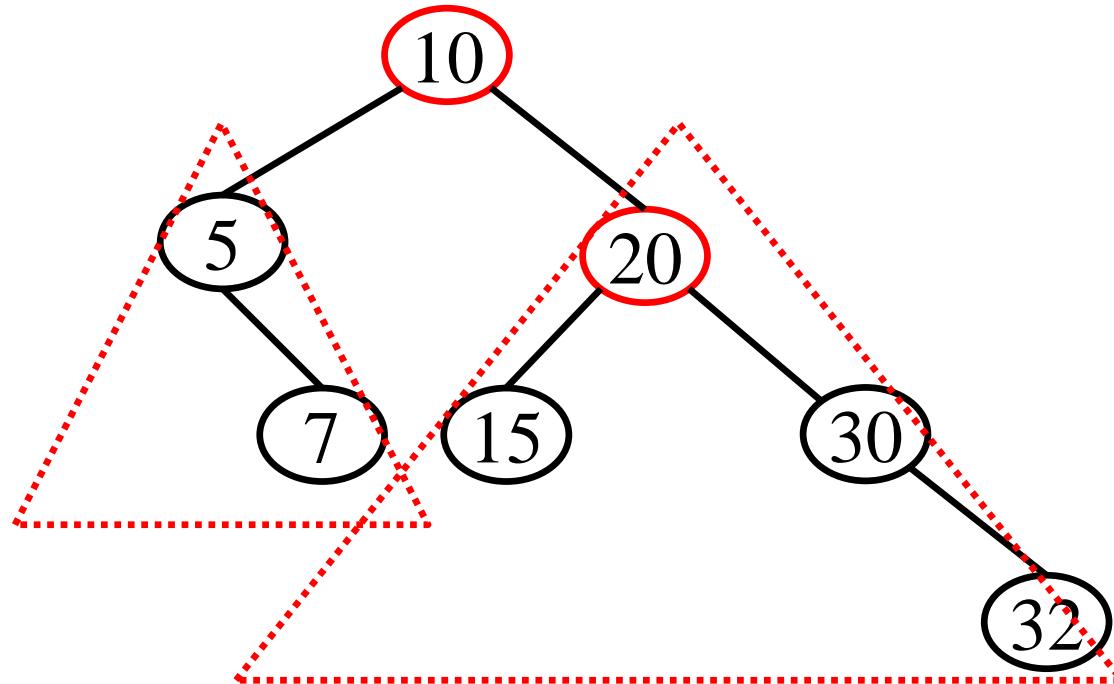
# דוגמאות



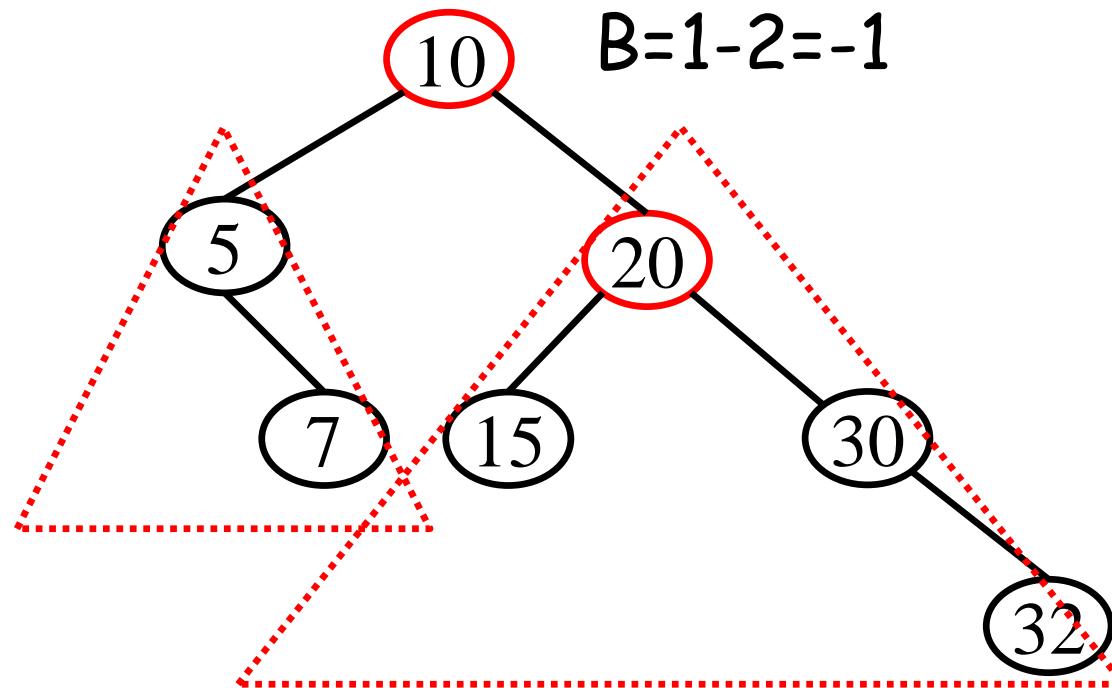
# דוגמאות



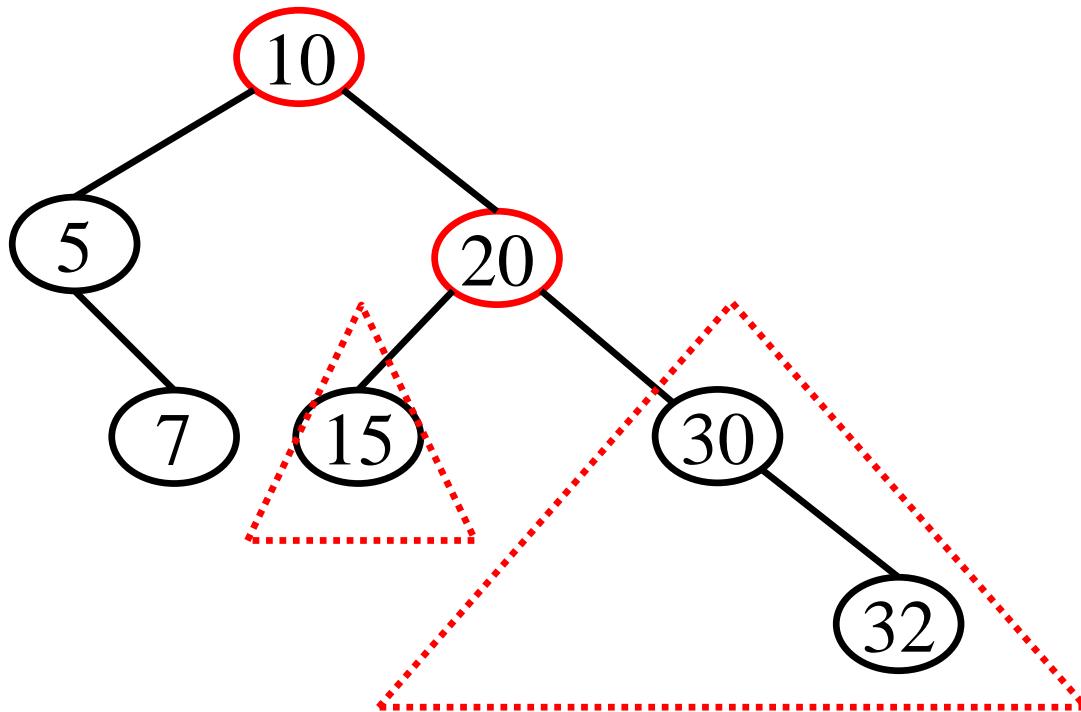
# דוגמאות



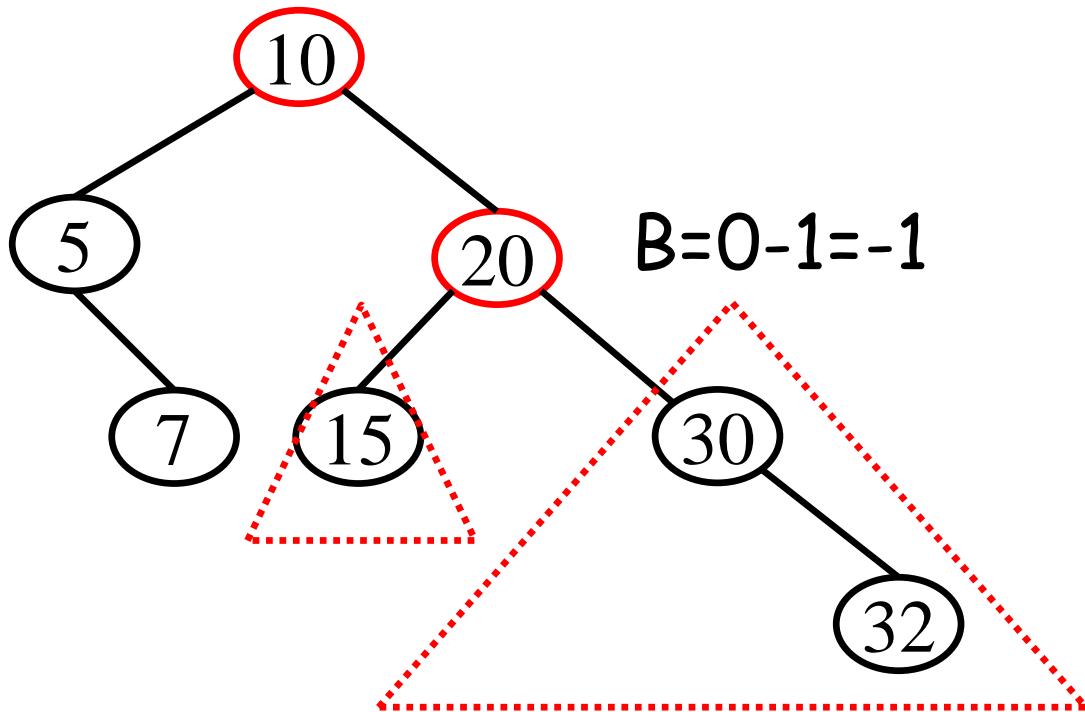
# דוגמאות



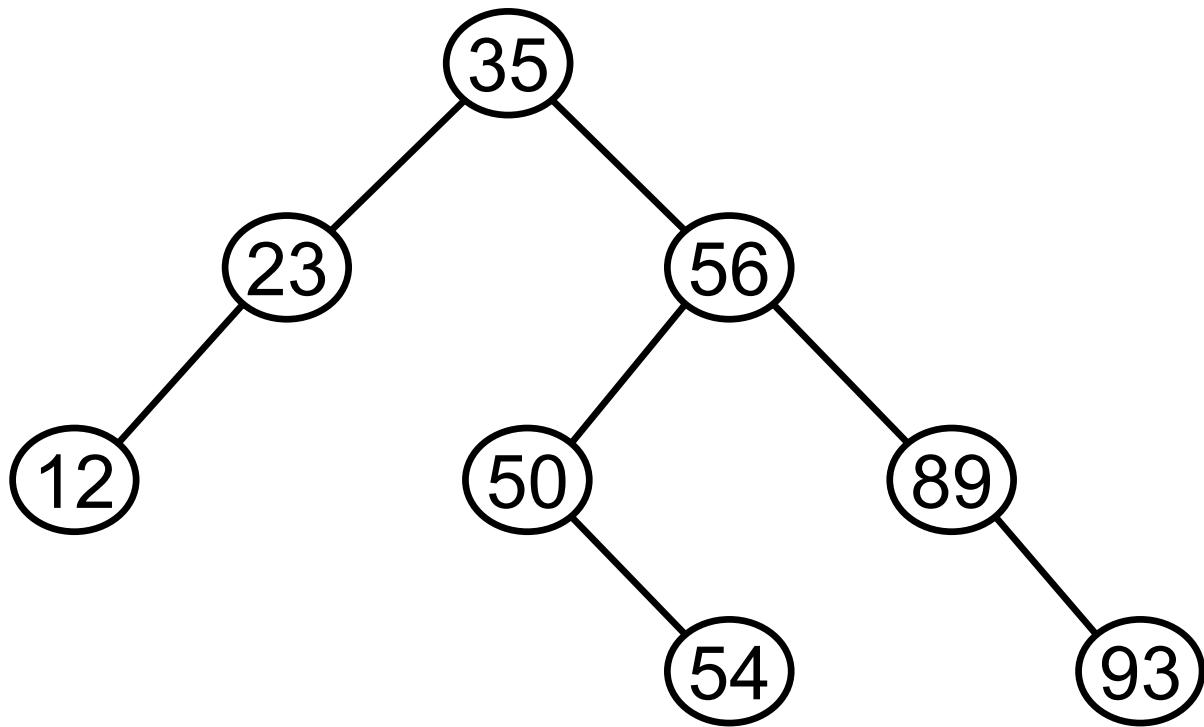
# דוגמאות



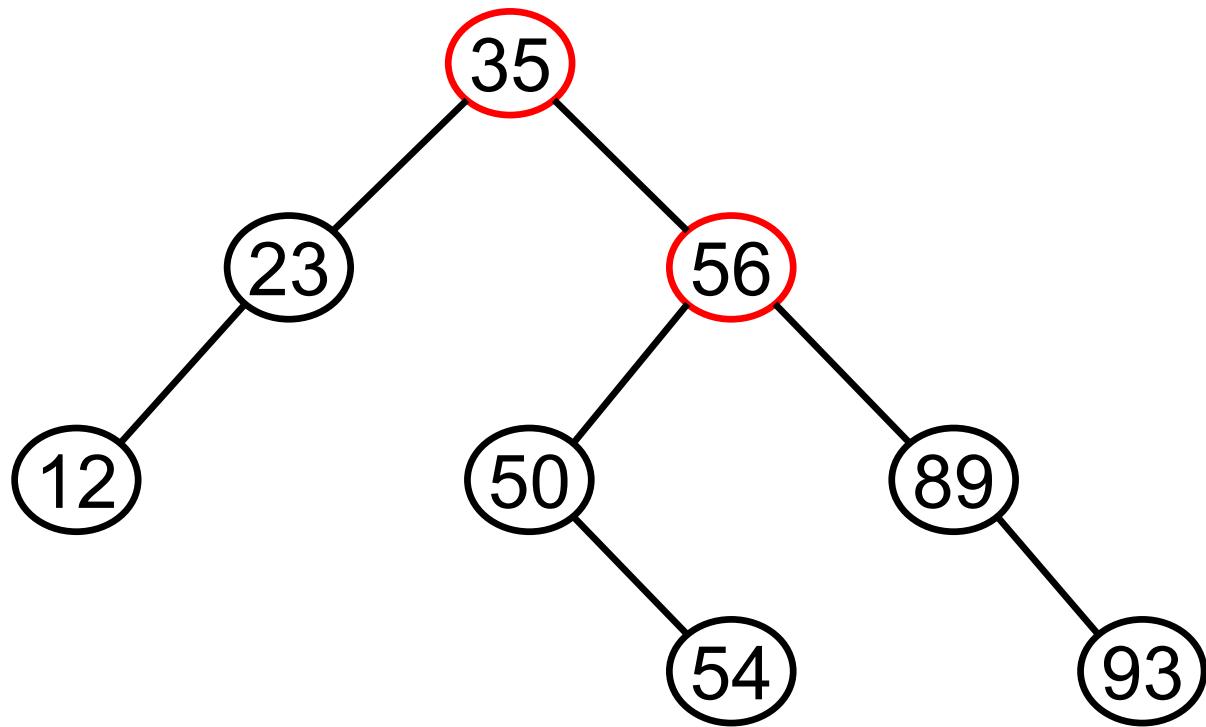
# דוגמאות



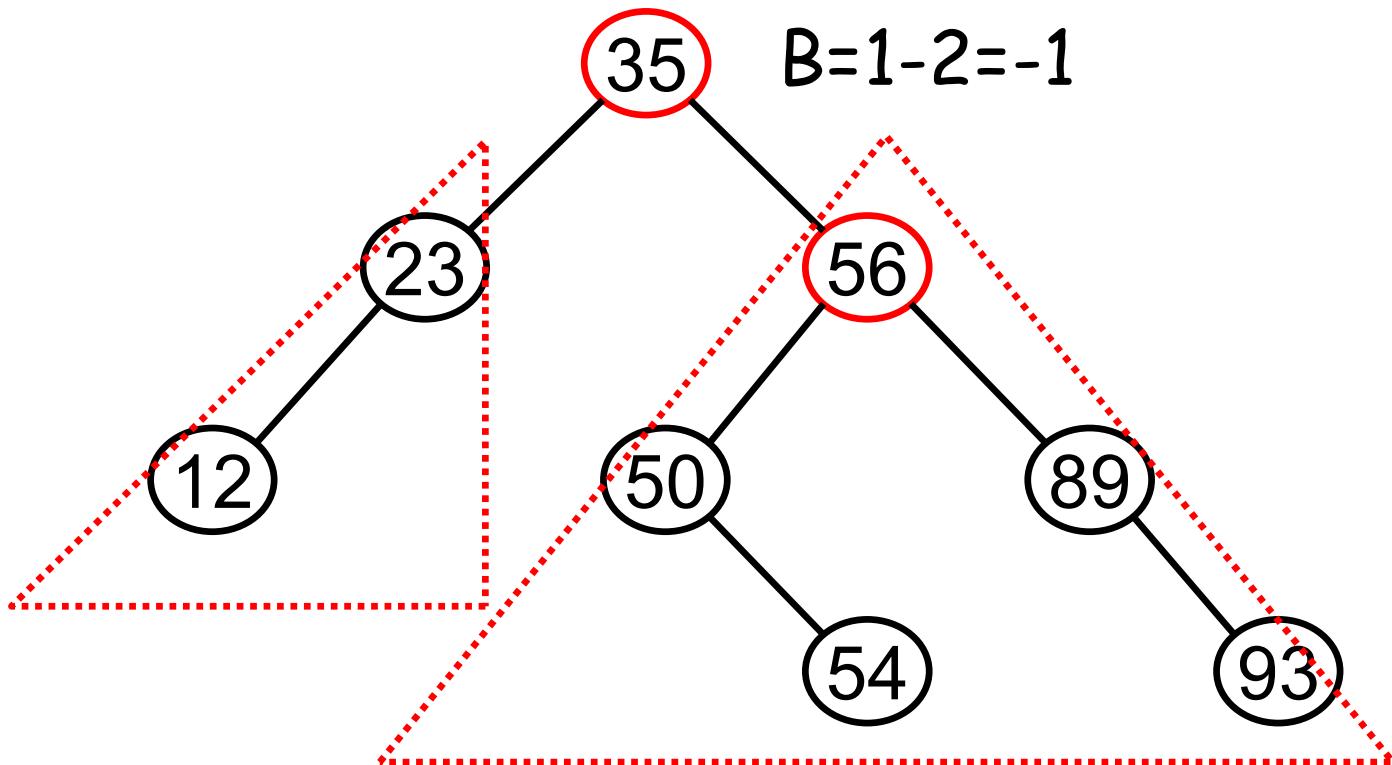
# דוגמאות



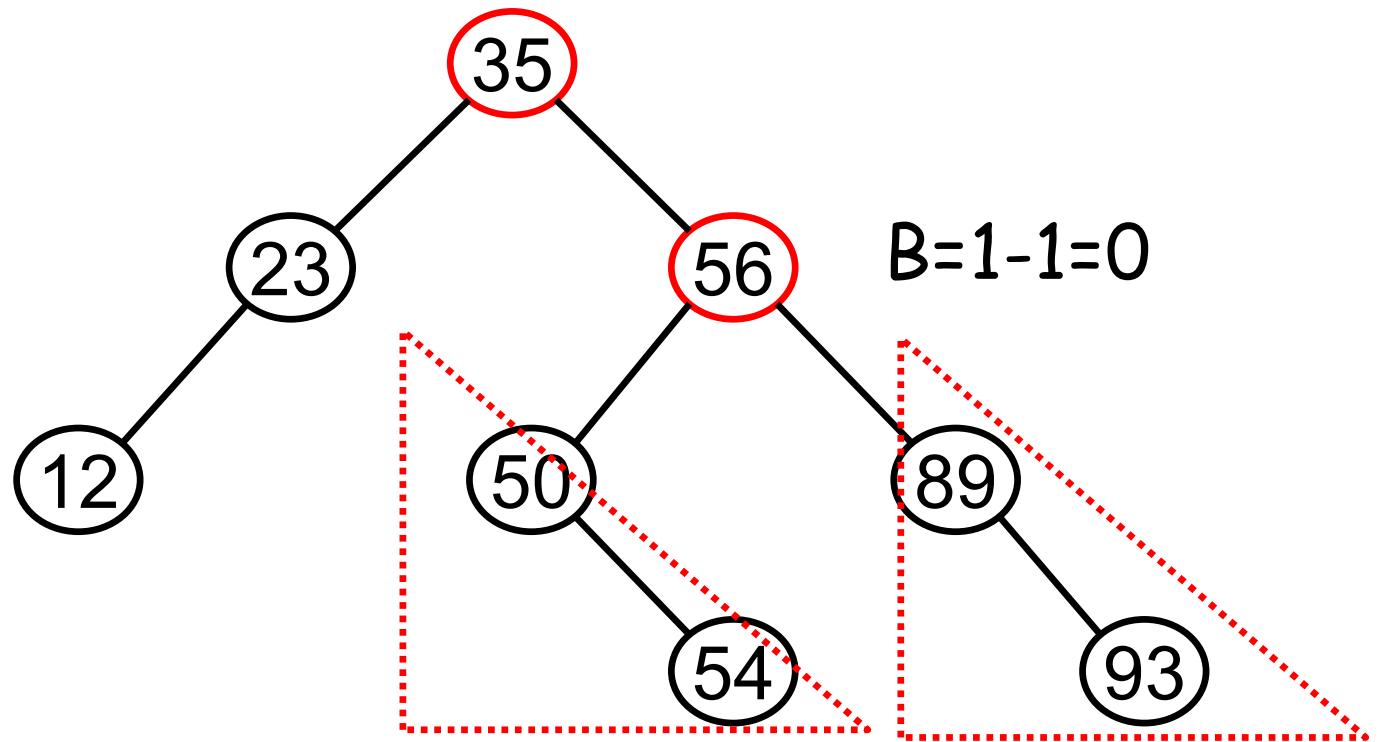
# דוגמאות



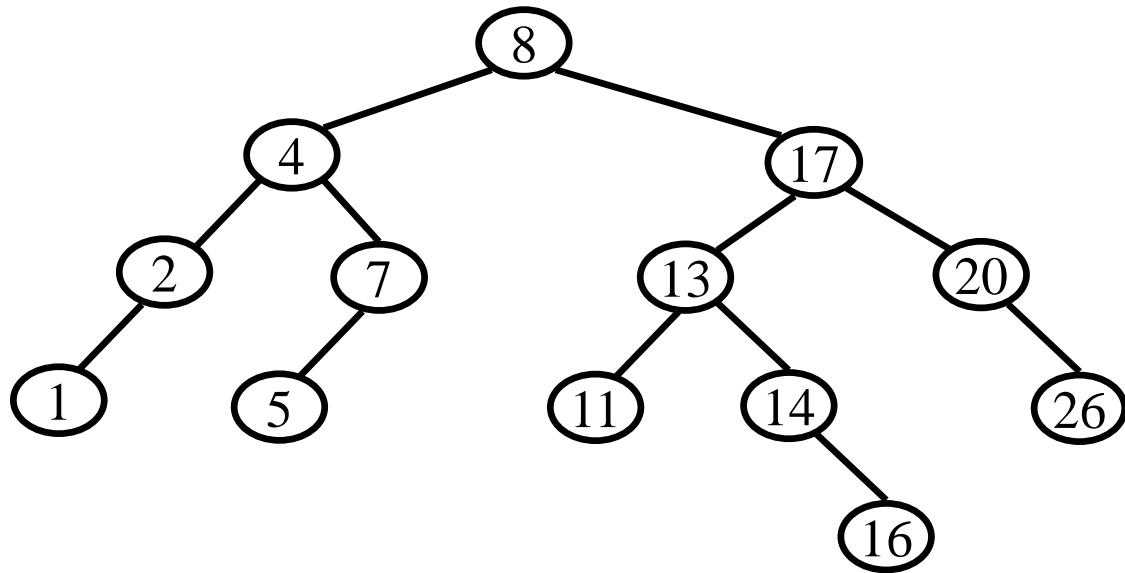
# דוגמאות



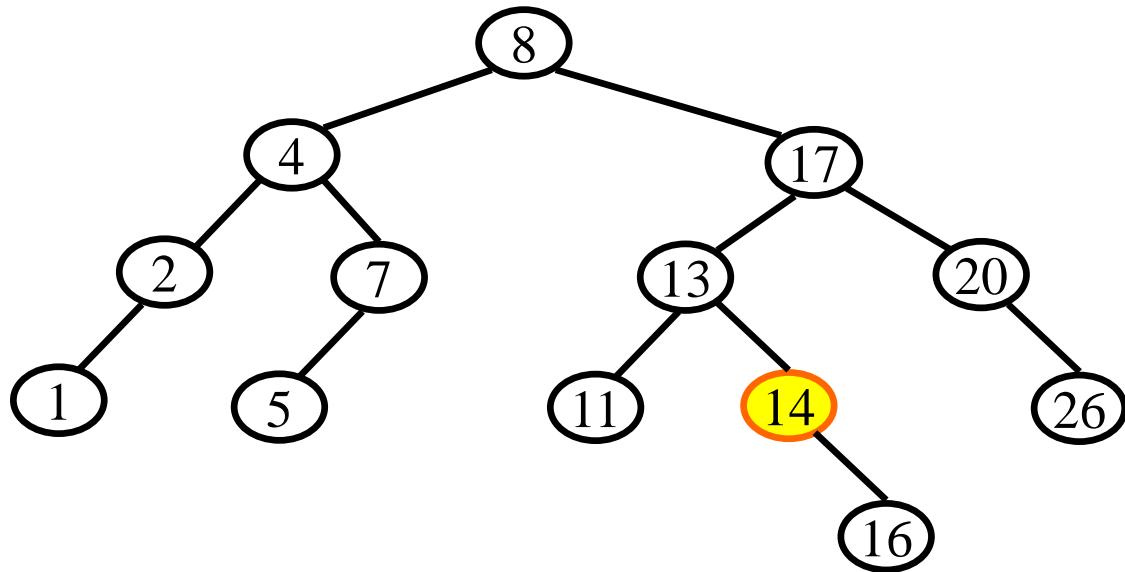
# דוגמאות



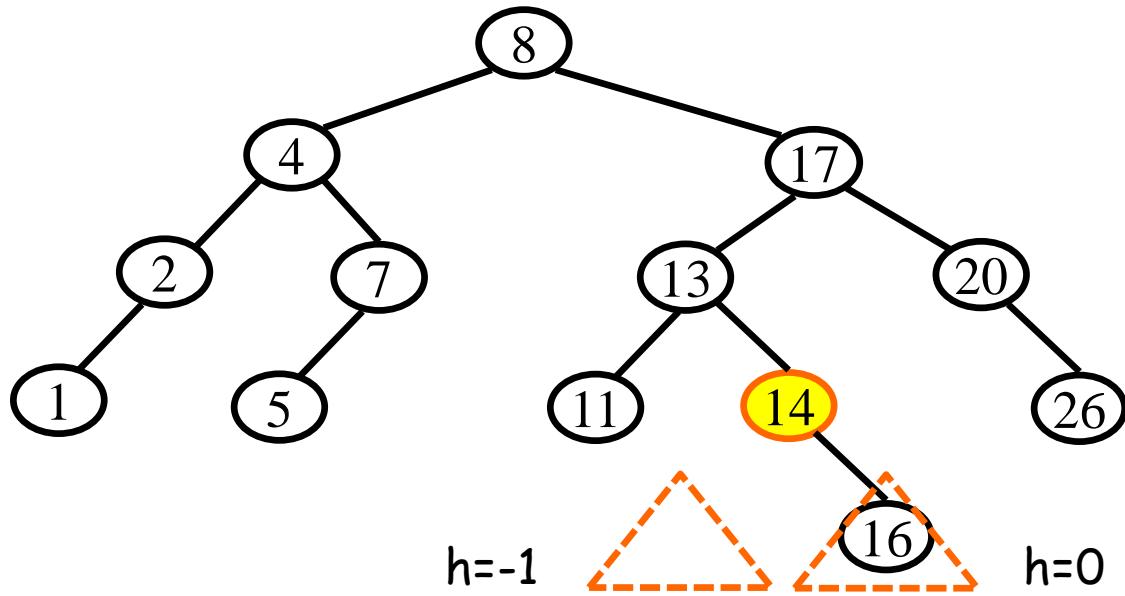
# דוגמאות



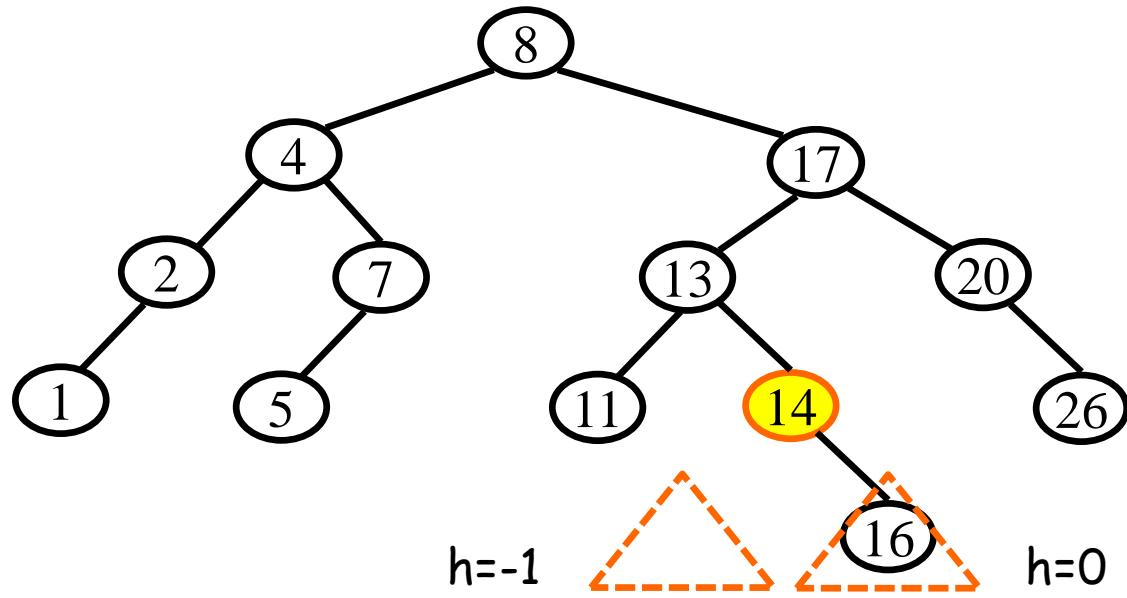
# דוגמאות



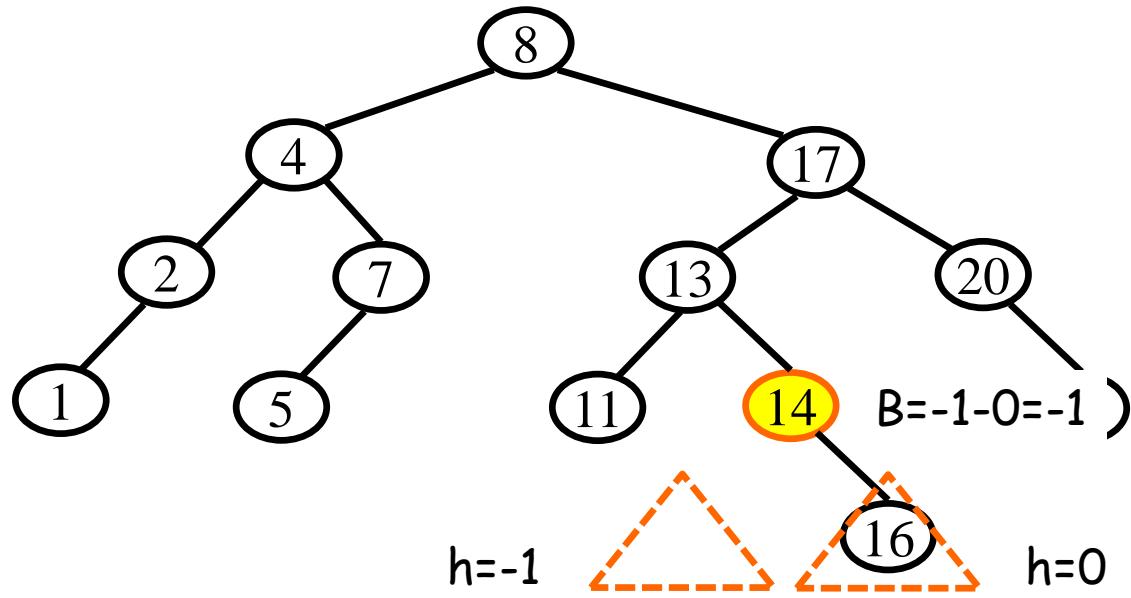
# דוגמאות



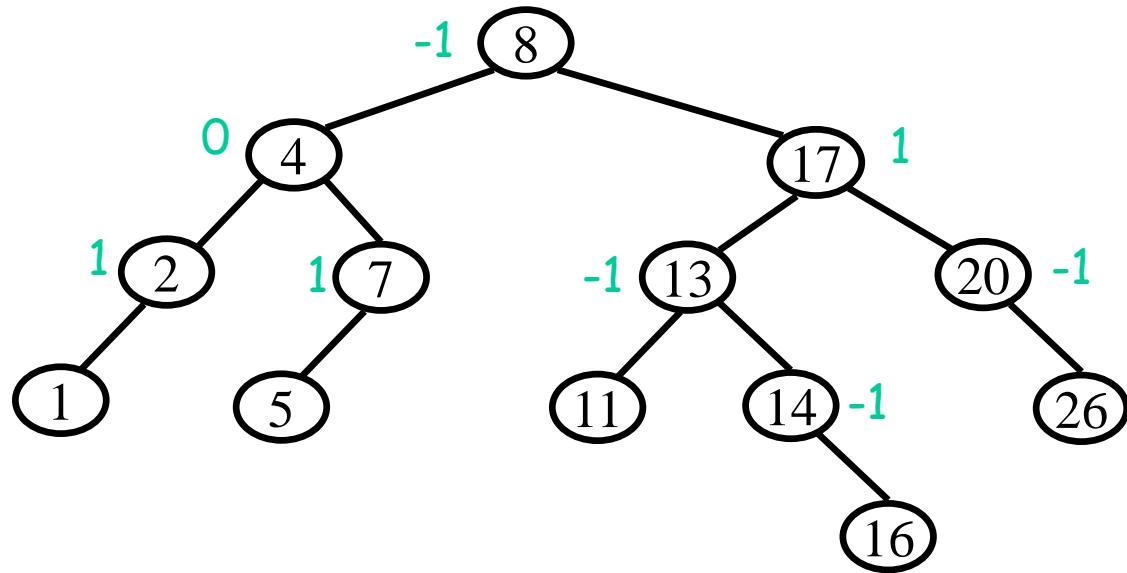
# דוגמאות



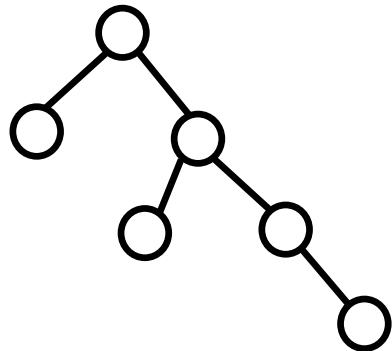
# דוגמאות



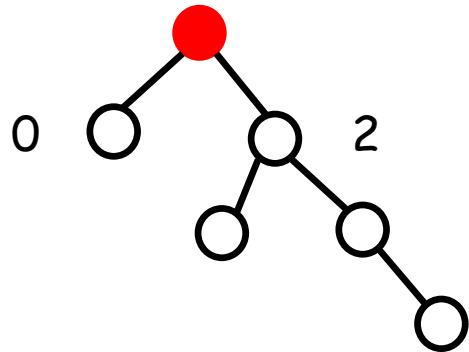
# דוגמאות



מה ניתן לומר על הדוגמאות  
הבאות:

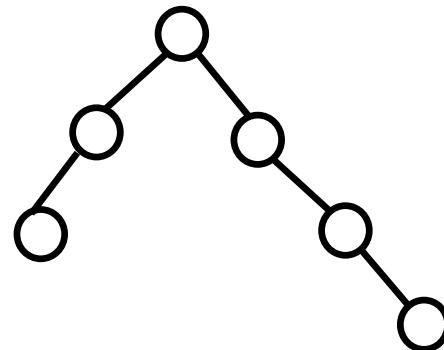
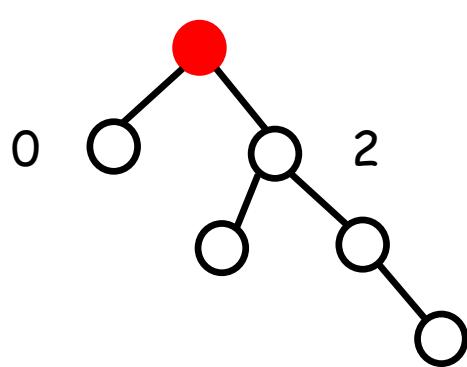


# מה ניתן לומר על הדוגמאות הבאות:



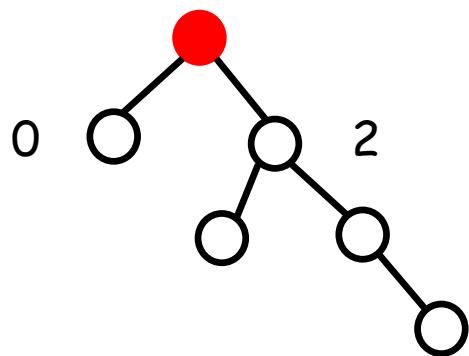
לא **AVL**

מה ניתן לומר על הדוגמאות  
הבאות:

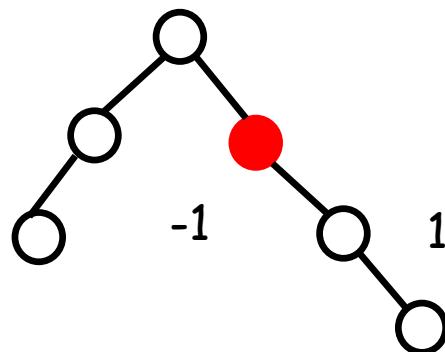


לא AVL

מה ניתן לומר על הדוגמאות  
הבאות:



לא AVL



לא AVL

# טענה: עצי AVL היא משפחה מאוזנת

## טענה:

עצי AVL היא משפחה מאוזנת

צ"ל: שלכל עץ AVL בעל  $\alpha$  צמתים גובה  
העץ הוא  $O(\log n)$

## טענה:

**עצי AVL** היא משפחה מאוזנת

צ"ל: שלכל עץ AVL בעל  $h$  צמתים גובה  
העץ הוא  $O(\log h)$

נסמן ב-  $(h)_{\text{min\_AVL}}$  את מספר הצמתים  
**המינימאלי** בעץ AVL בגובה  $h$ .

## טענה:

עץ AVL היא משפחה מאוזנת

$$\min_{\text{AVL}}(0) = 1$$

$$\min_{\text{AVL}}(1) = 2$$

$$\min_{\text{AVL}}(h) =$$

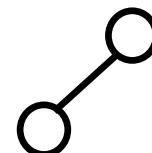
$$1 + \min_{\text{AVL}}(h-1) + \min_{\text{AVL}}(h-2)$$

הגובה העץ

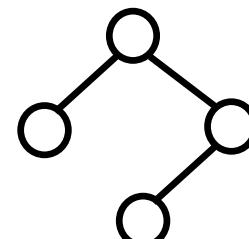
0



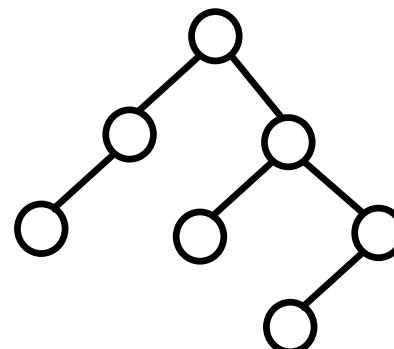
1



2



3



$$n = \min\_AVL(h) = 1 + \min\_AVL(h-1) + \min\_AVL(h-2)$$

$$n = \min\_AVL(h) = \mathbf{1} + \min\_AVL(h-1) + \min\_AVL(h-2)$$

$$n = \min_{AVL}(h) = 1 + \min_{AVL}(h-1) + \min_{AVL}(h-2)$$

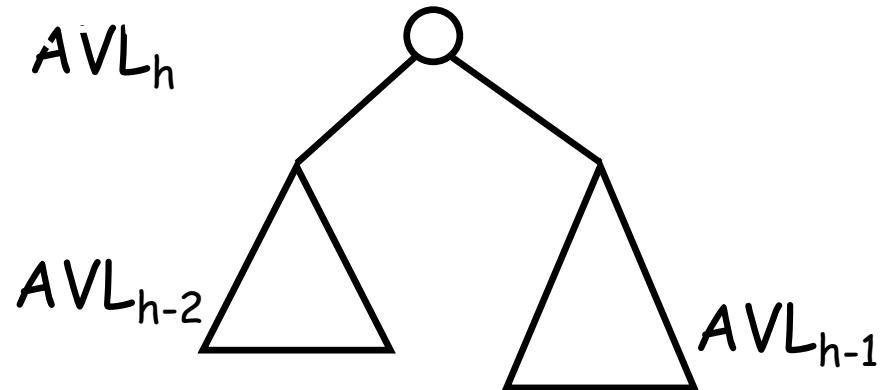
$$n = \min_{AVL}(h) = \mathbf{1} + \min_{AVL}(h-1) + \min_{AVL}(h-2)$$

$$\geq \min_{AVL}(h-1) + \min_{AVL}(h-2)$$

$$n = \min_{AVL}(h) = 1 + \min_{AVL}(h-1) + \min_{AVL}(h-2)$$

$$n = \min_{AVL}(h) = 1 + \min_{AVL}(h-1) + \min_{AVL}(h-2)$$

$$\geq \min_{AVL}(h-1) + \min_{AVL}(h-2)$$



$$n = \min_{AVL}(h) = 1 + \min_{AVL}(h-1) + \min_{AVL}(h-2)$$

$$n = \min_{AVL}(h) = 1 + \min_{AVL}(h-1) + \min_{AVL}(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot \min_{AVL}(h-2)$$

$$n = \min_{AVL}(h) \geq 2 \cdot \min_{AVL}(h-2)$$

$$n = \min_{AVL}(h) = 1 + \min_{AVL}(h-1) + \min_{AVL}(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot \underbrace{\min_{AVL}(h-2)}$$

$$\min_{AVL}(h-2) \geq 2 \cdot \min_{AVL}(h-4)$$

$$n = \min_{AVL}(h) \geq 2 \cdot \min_{AVL}(h-2)$$

$$n = \min_{AVL}(h) = 1 + \min_{AVL}(h-1) + \min_{AVL}(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot \min_{AVL}(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot \min_{AVL}(h-4))$$

$$n = \min_{AVL}(h) \geq 2 \cdot \min_{AVL}(h-2)$$

$$n = \min_{AVL}(h) = 1 + \min_{AVL}(h-1) + \min_{AVL}(h-2)$$

$$\begin{aligned} &\geq 2 \cdot \min_{AVL}(h-2) \\ &\geq 2 \cdot (2 \cdot \min_{AVL}(h-4)) \\ &\geq 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot \min_{AVL}(h-6))) \end{aligned}$$

$$n = \min_{AVL}(h) \geq 2 \cdot \min_{AVL}(h-2)$$

$$n = \min_{AVL}(h) = 1 + \min_{AVL}(h-1) + \min_{AVL}(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot \min_{AVL}(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot \min_{AVL}(h-4))$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot \min_{AVL}(h-6)))$$

...

$$\geq 2^i \cdot \min_{AVL}(h-2i)$$

$$n = \min_{AVL}(h) \geq 2 \cdot \min_{AVL}(h-2)$$

$$n = \min_{AVL}(h) = 1 + \min_{AVL}(h-1) + \min_{AVL}(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot \min_{AVL}(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot \min_{AVL}(h-4))$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot \min_{AVL}(h-6)))$$

...

$$\geq 2^i \cdot \min_{AVL}(h-2i)$$



מה תנאי העצירה ?

$$n = \min_{AVL}(h) \geq 2 \cdot \min_{AVL}(h-2)$$

$$n = \min_{AVL}(h) = 1 + \min_{AVL}(h-1) + \min_{AVL}(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot \min_{AVL}(h-2)$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot \min_{AVL}(h-4))$$

$$\geq 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot \min_{AVL}(h-6)))$$

...

$$\geq 2^i \cdot \min_{AVL}(h-2i)$$

לעומת

בהנחה ש- $h$ -זוגי:  $0 \leq h-2i \leq h$

ד"ר נעה לויינשטיין ©

עריכה: ד"ר אילית בוטמן, פרופ' אביבית לוי

$$n = \min_{\text{AVL}}(h) \geq 2^i \cdot \min_{\text{AVL}}(h-2i)$$

נציב  $i=2$  ונקבל:

$$n = \min_{\text{AVL}}(h) \geq 2^i \cdot \min_{\text{AVL}}(h-2i)$$

נציב  $i=h$  ונקבל:

$$n = \min_{\text{AVL}}(h) \geq 2^{h/2} \cdot \min_{\text{AVL}}(0)$$

$$n = \min_{AVL}(h) \geq 2^i \cdot \min_{AVL}(h-2i)$$

נציב  $i=2$  ונקבל:

$$n = \min_{AVL}(h) \geq 2^{h/2} \cdot \min_{AVL}(0)$$

-1

$$n = \min_{\text{AVL}}(h) \geq 2^i \cdot \min_{\text{AVL}}(h-2i)$$

נציב  $i=h$  ונקבל:

$$n = \min_{\text{AVL}}(h) \geq 2^{h/2} \cdot \min_{\text{AVL}}(0)$$

$$n \geq 2^{h/2}$$

$$n = \min_{\text{AVL}}(h) \geq 2^i \cdot \min_{\text{AVL}}(h-2i)$$

נציב  $i=h$  ונקבל:

$$n = \min_{\text{AVL}}(h) \geq 2^{h/2} \cdot \min_{\text{AVL}}(0)$$

$$n \geq 2^{h/2}$$

$$\log n \geq h/2$$

$$n = \min_{\text{AVL}}(h) \geq 2^i \cdot \min_{\text{AVL}}(h-2i)$$

נציב  $i=h$  ונקבל:

$$n = \min_{\text{AVL}}(h) \geq 2^{h/2} \cdot \min_{\text{AVL}}(0)$$

$$n \geq 2^{h/2}$$

$$\log n \geq h/2$$

$$2 \cdot \log n \geq h$$

$$n = \min_{\text{AVL}}(h) \geq 2^i \cdot \min_{\text{AVL}}(h-2i)$$

נציב  $i=h$  ונקבל:

$$n = \min_{\text{AVL}}(h) \geq 2^{h/2} \cdot \min_{\text{AVL}}(0)$$

$$n \geq 2^{h/2}$$

$$\log n \geq h/2$$

$$2 \cdot \log n \geq h$$

$$h = O(\log n)$$

## טענה:

עץ AVL היא משפחה מאוזנת

לxicom, קיבלנו את אי-השוויון הבא:

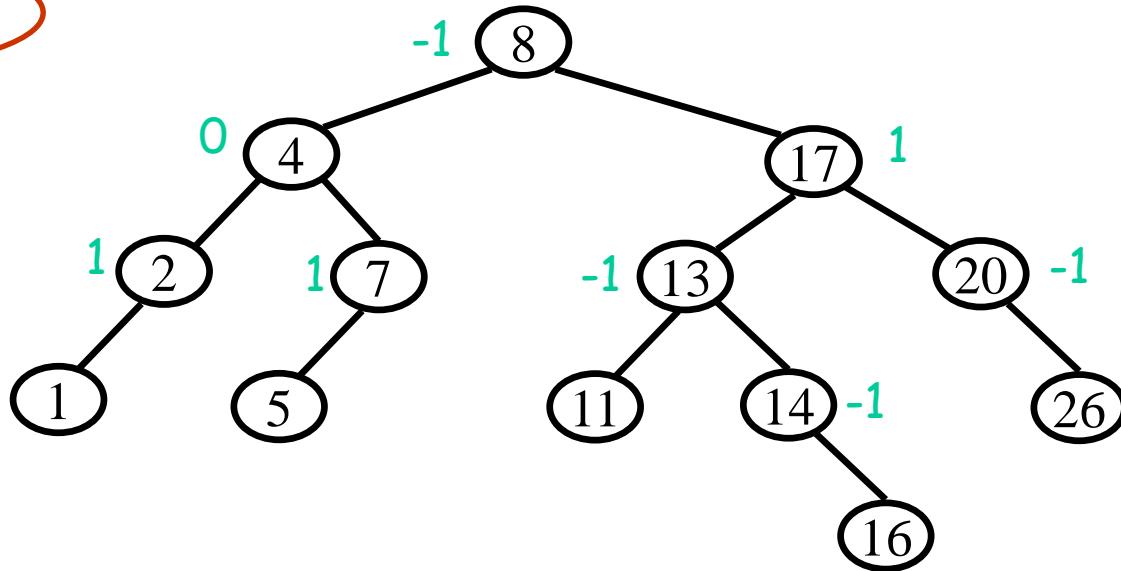
$$n \geq \min\_AVL(h) \geq 2^{h/2}$$

ולכן:

$$h = O(\log n)$$

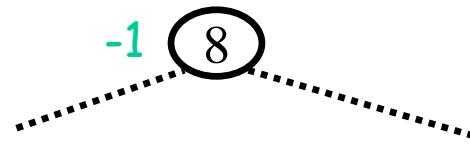
# עץ AVL: הכנסה

הכנסה(10)



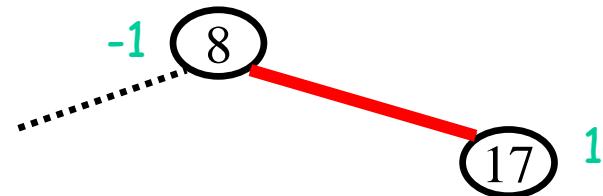
# עצי AVL: הכנסה

הכנסה(10)



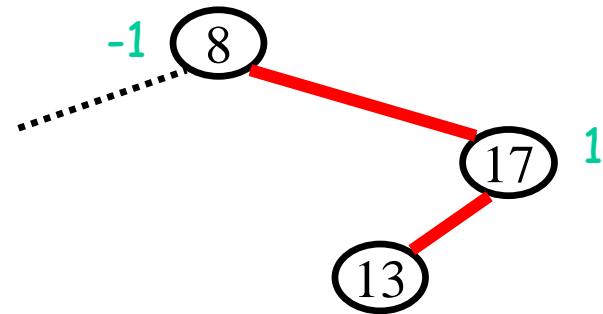
# עצים AVL: הכנסה

הכנסה(10)



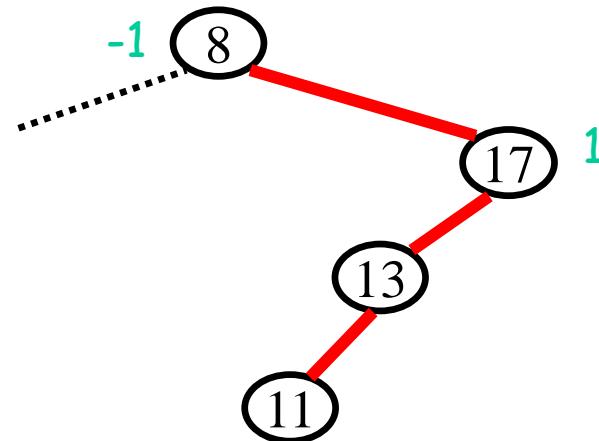
# עצים AVL: הכנסה

הכנסה(10)



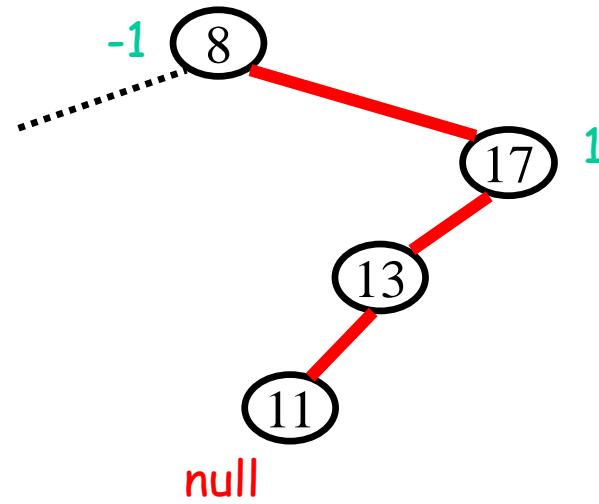
# עצים AVL: הכנסה

הכנסה(10)



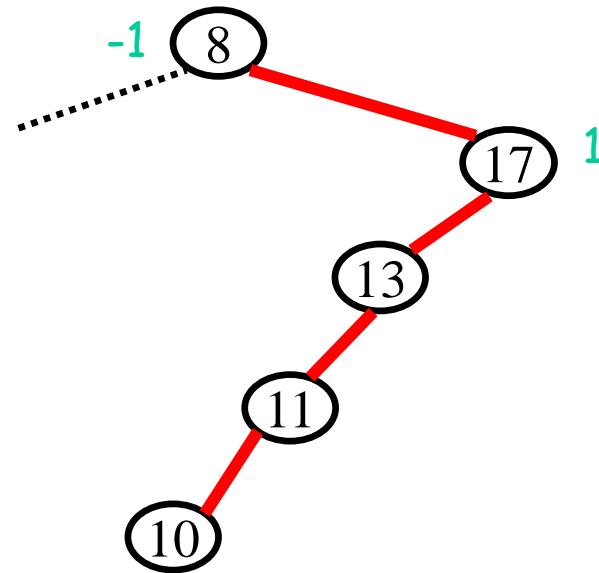
# עץ AVL: הכנסה

הכנסה(10)



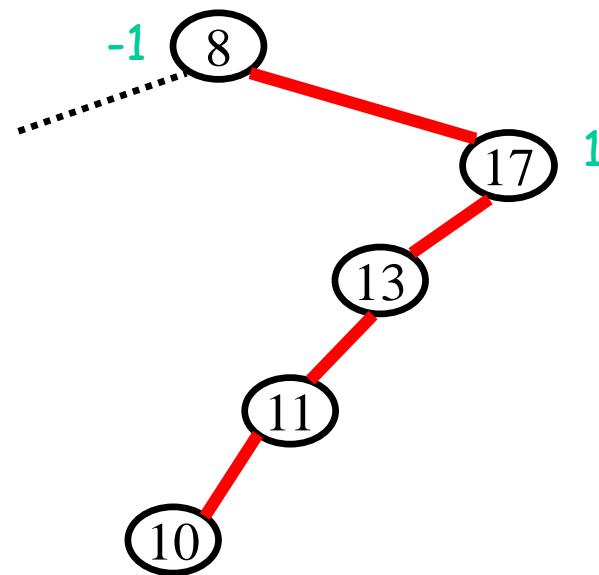
# עץ AVL: הכנסה

הכנסה(10)

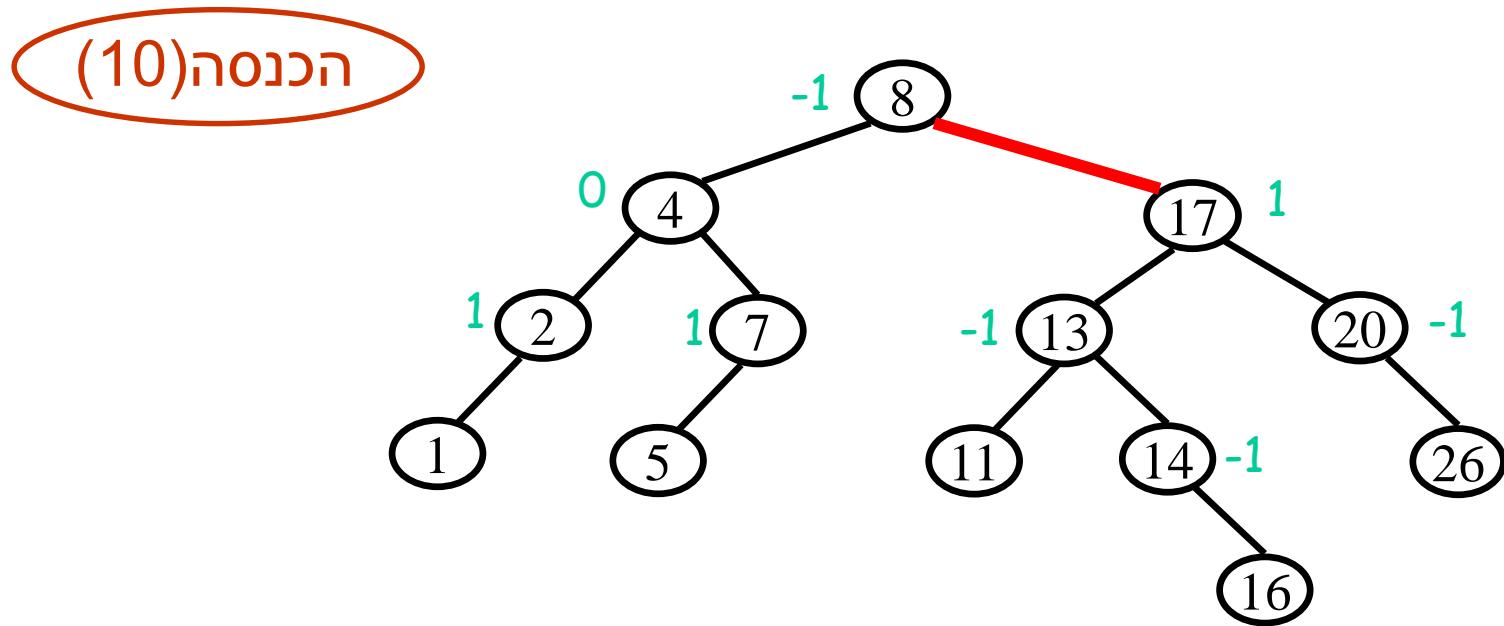


# האם העץ AVL אחרי הכנסה? כיצד נדע?

הכנסה(10)

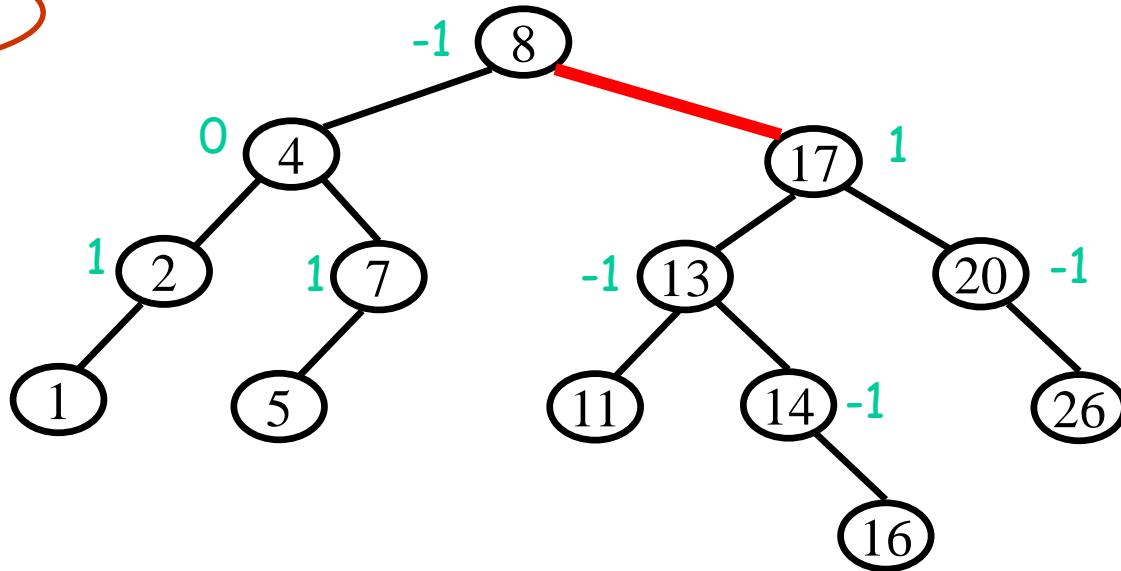


# דיין

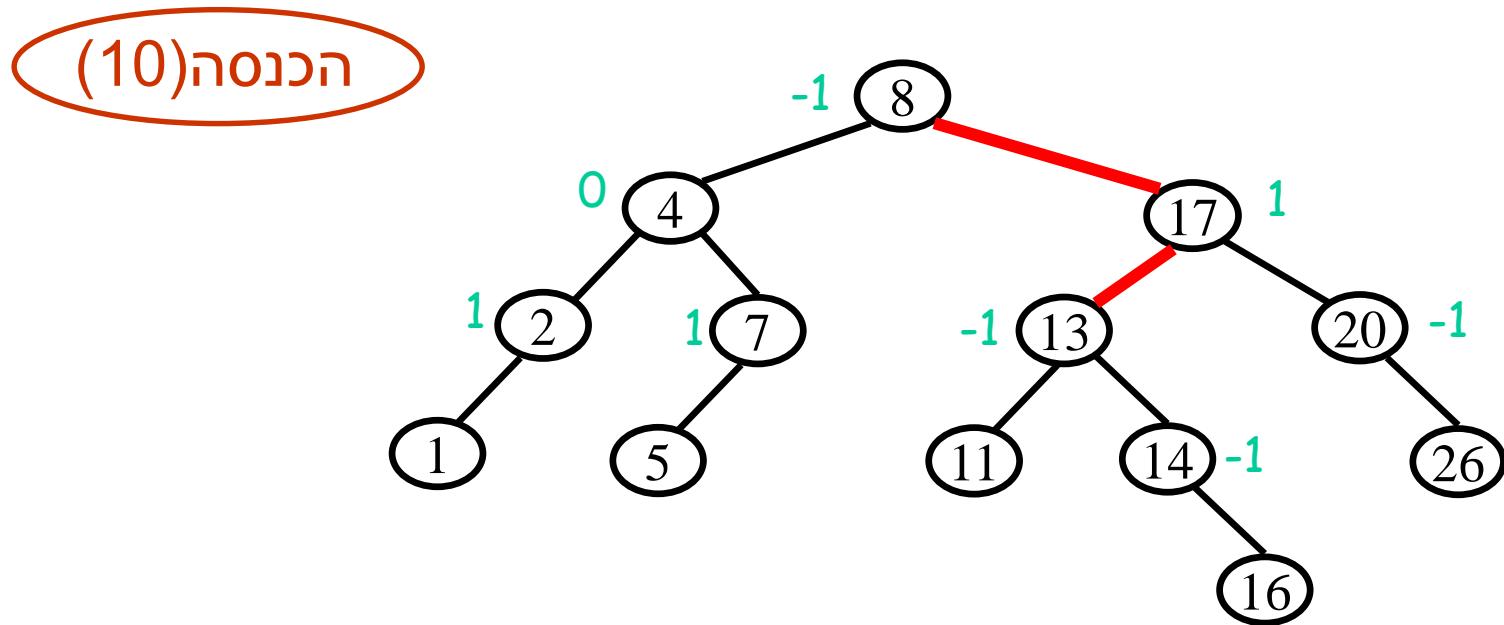


# דיאן בזמן הכנסה לא "רואים" את העץ

הכנסה(10)

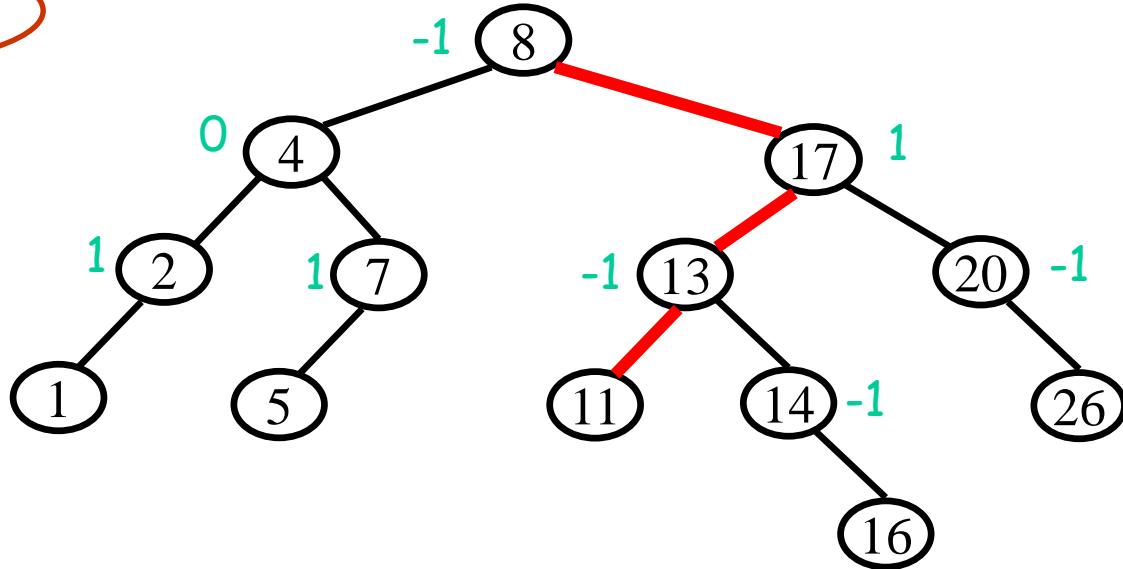


# דיי

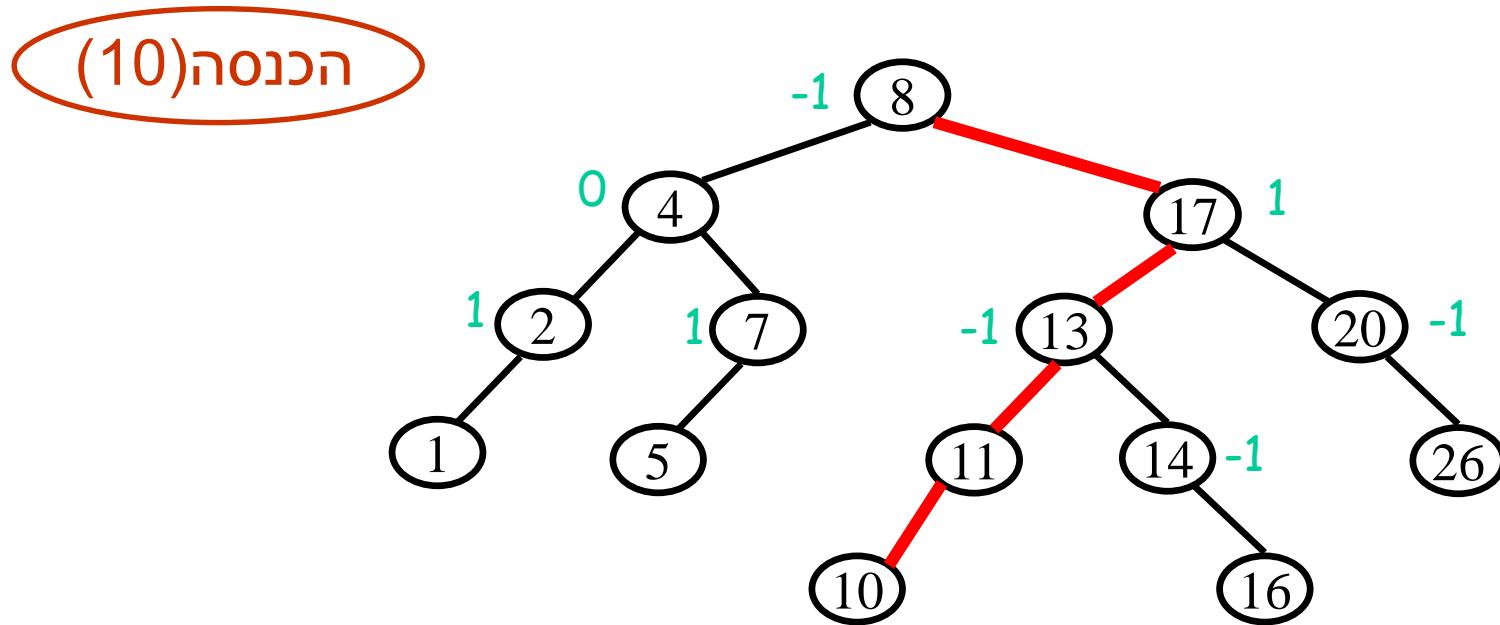


# דיין

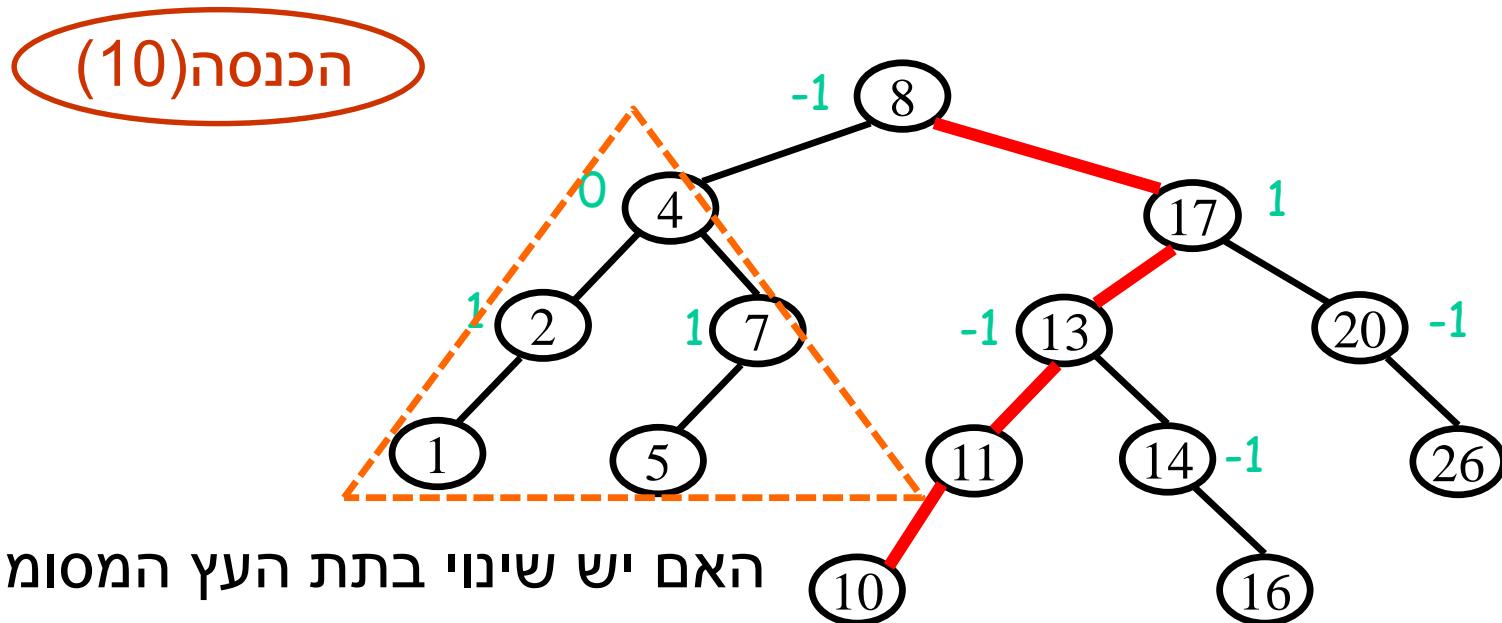
הכנסה(10)



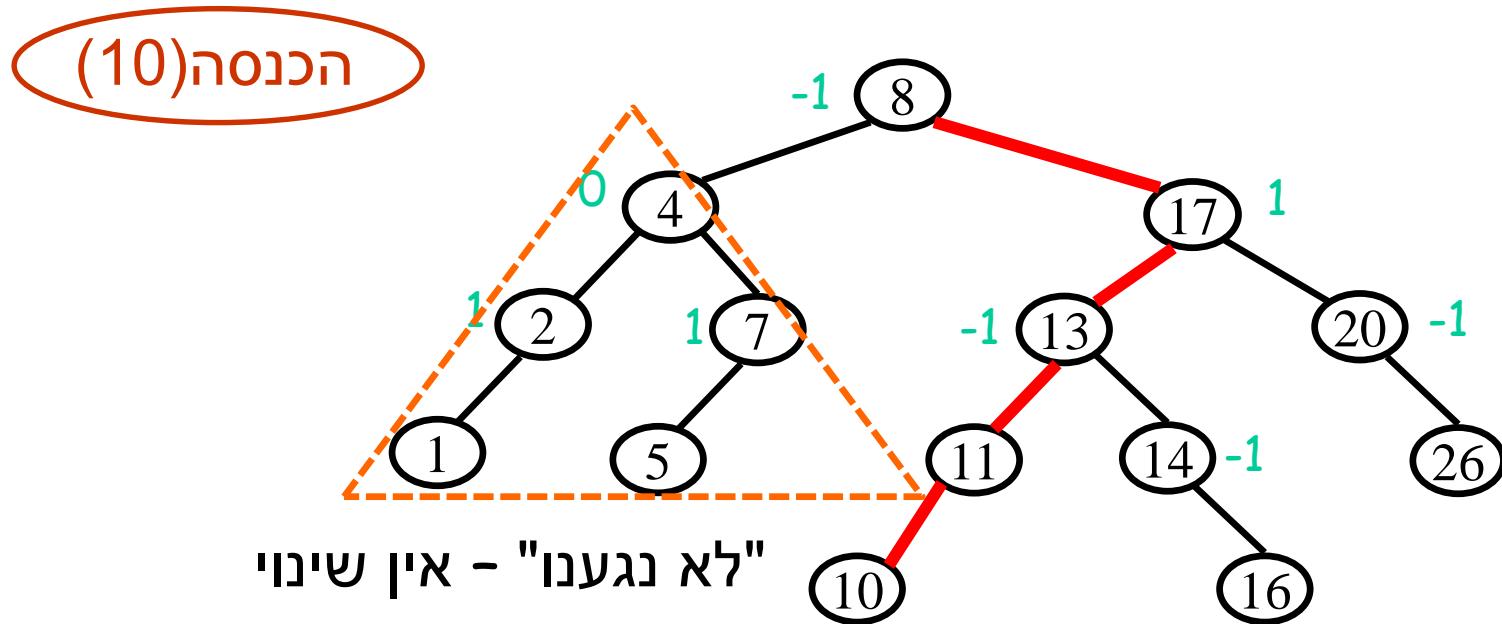
# דיאן אחרי שלב הכנסה



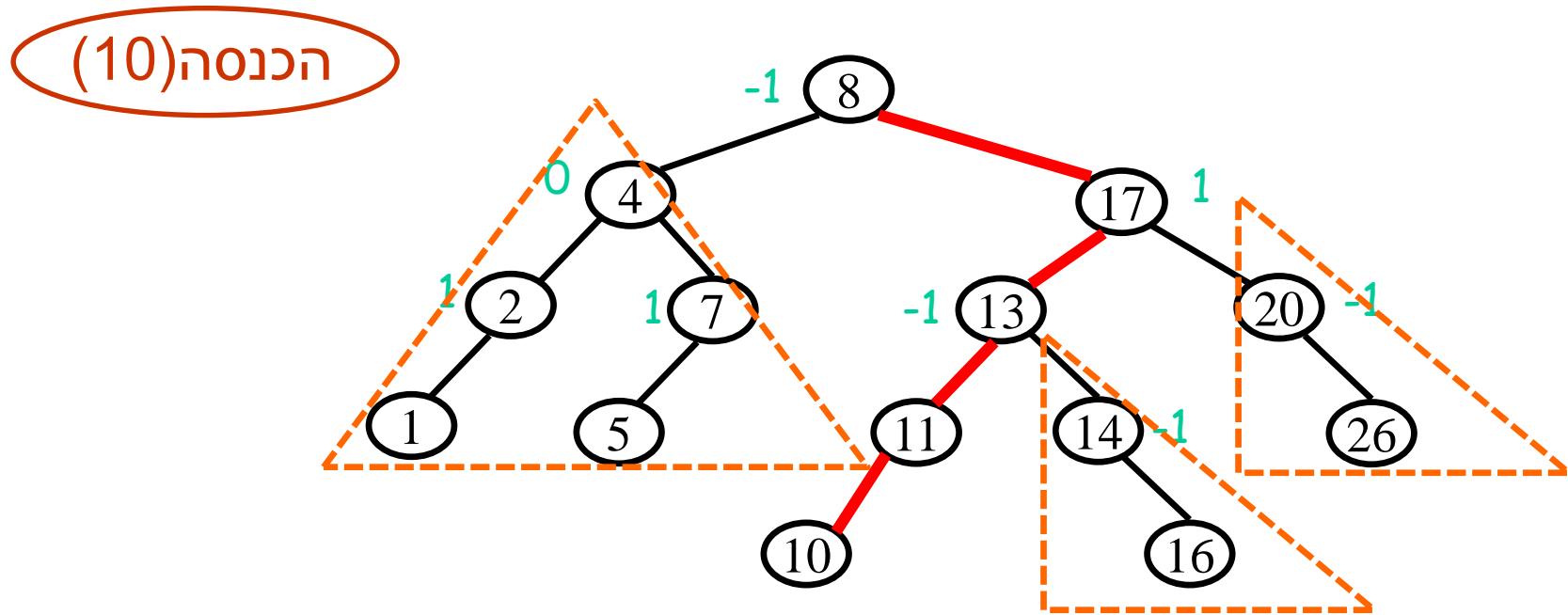
# דיאן אחרי שלב הכנסה



# דיאו אחרי שלב הכנסה



# דיאן אחרי שלב הכנסה

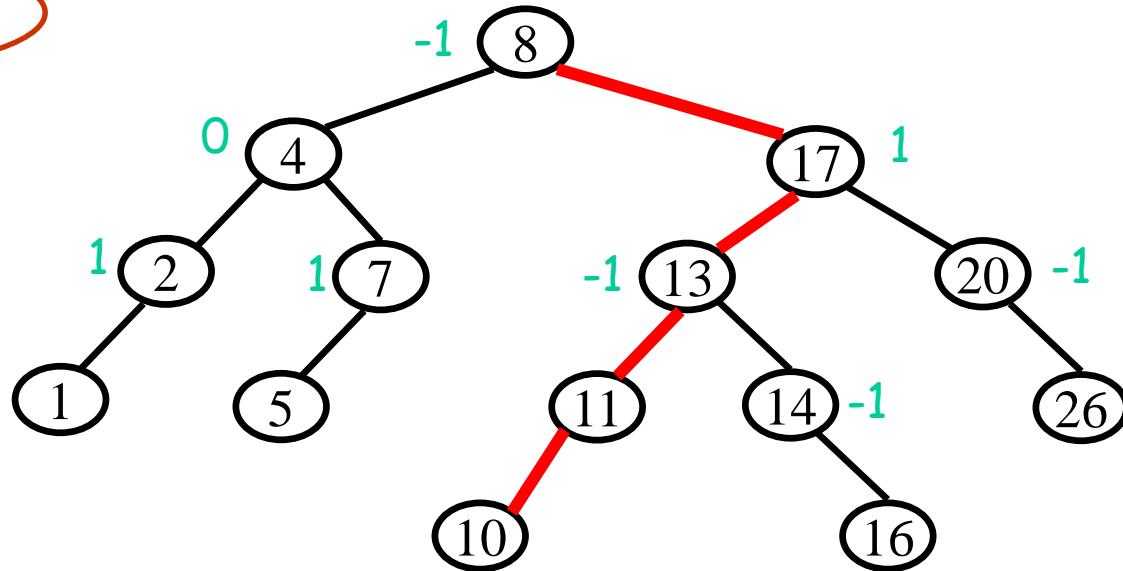


"לא נגענו" – אין שינוי

# מקנה

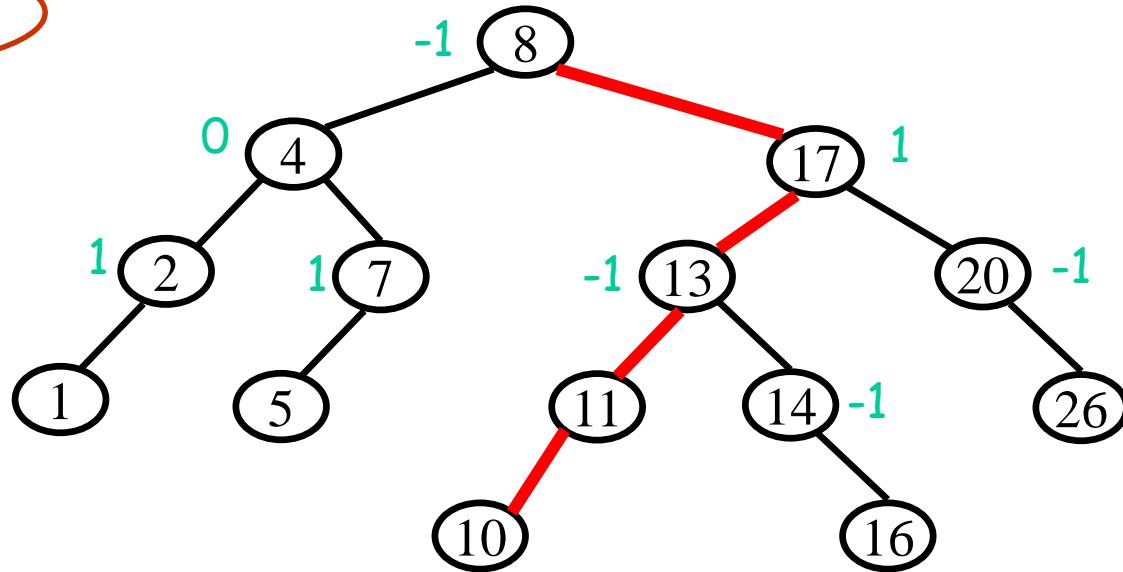
בailo קדקודים בעץ יתכן שינויים בגובה העץ וברוח האיזון?

הכנסה(10)



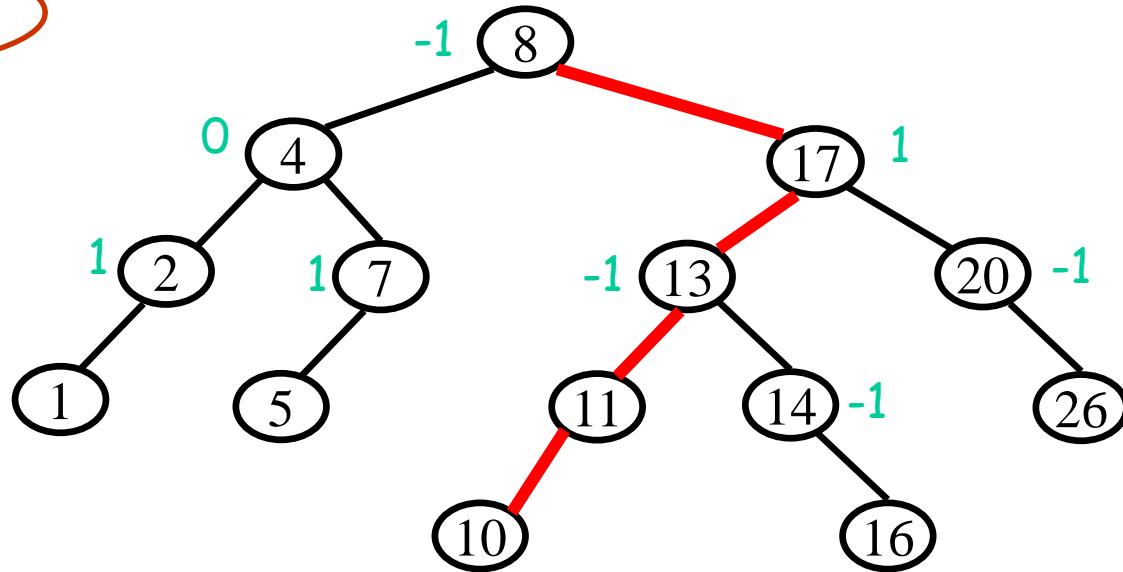
# במסלול הכנסה

הכנסה(10)



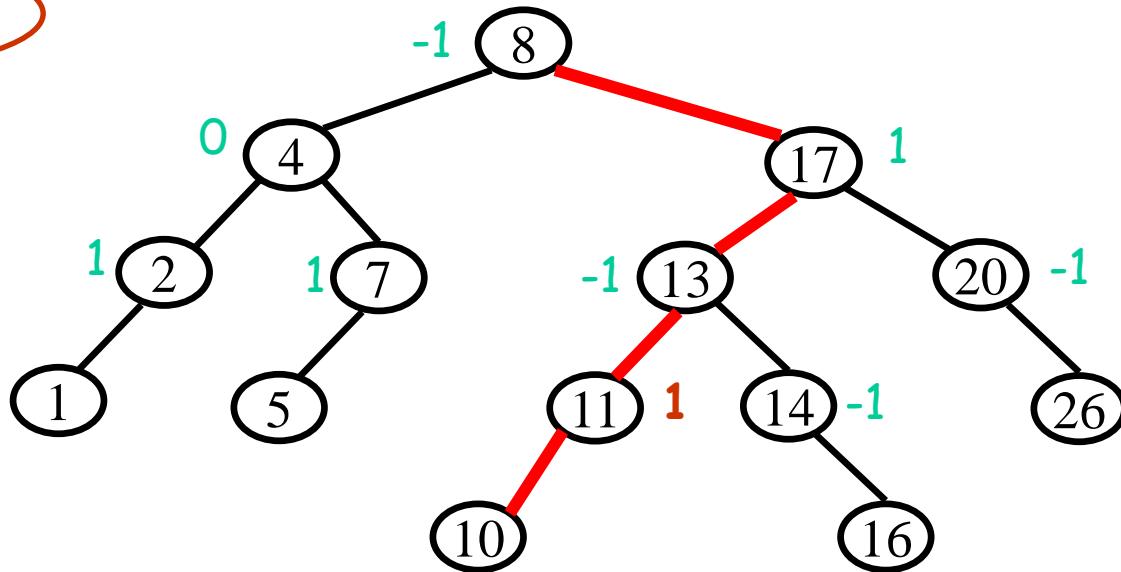
# עליה מהקדקוד הנכנו לפני השורש

הכנסה(10)



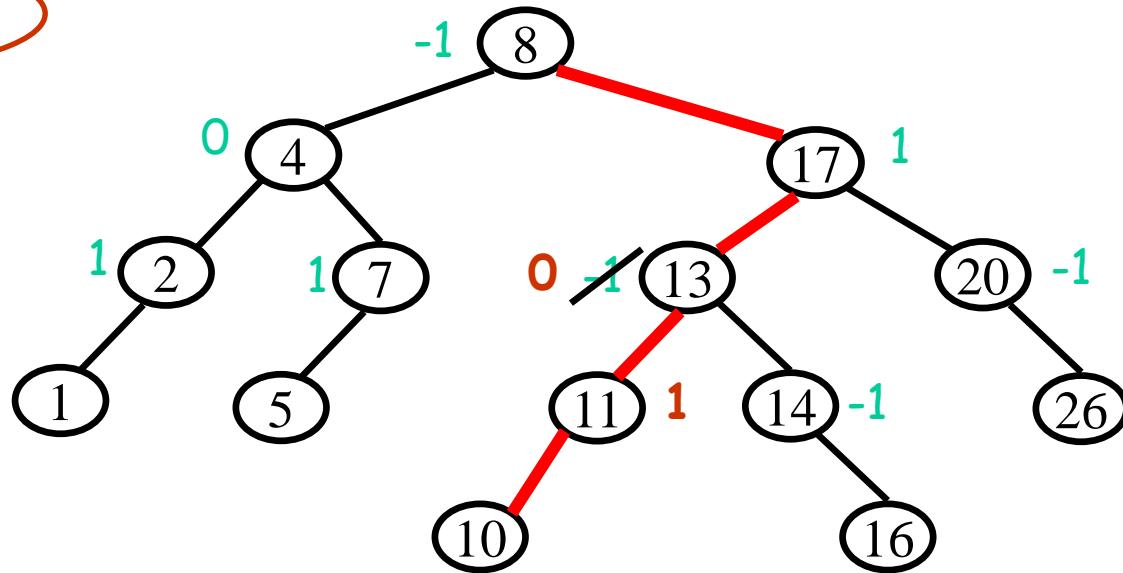
# עליה מהקדקוד הנכנו לפני השורש

הכנסה(10)



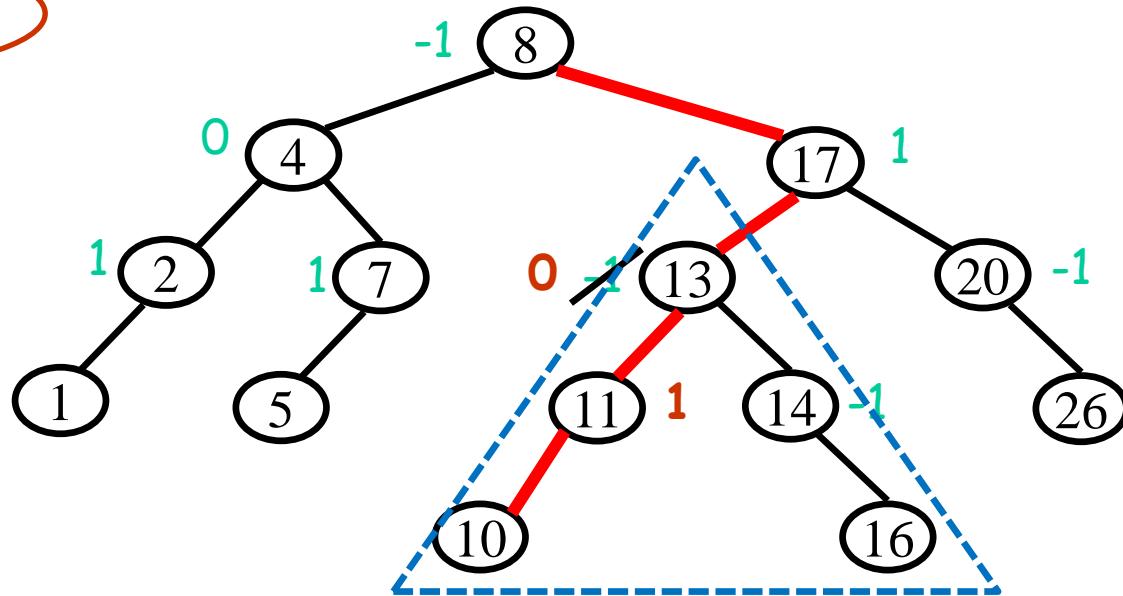
# עליה מהקדקוד הנכנו לפני השורש

הכנסה(10)



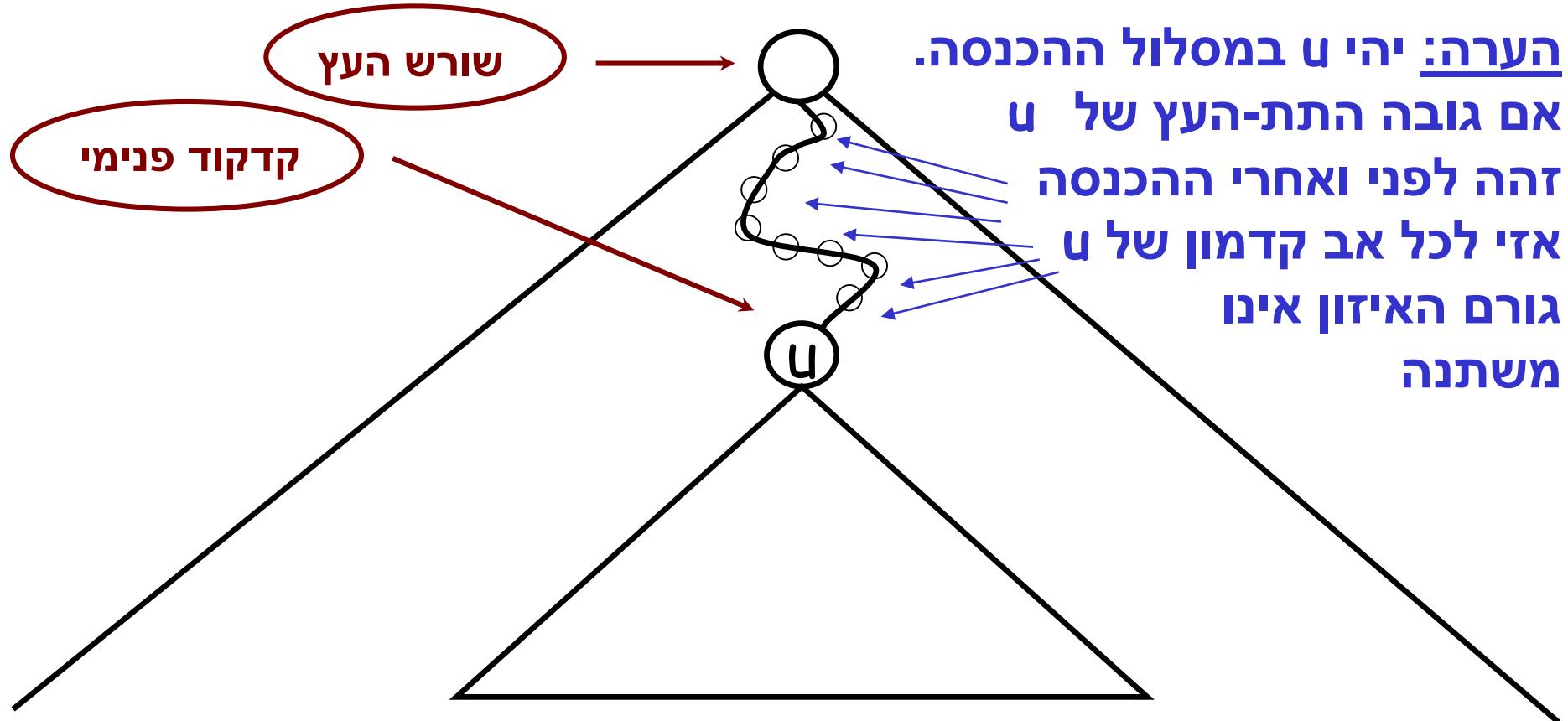
# עליה מהקדקוד הנכנו לפני השורש

הכנסה(10)

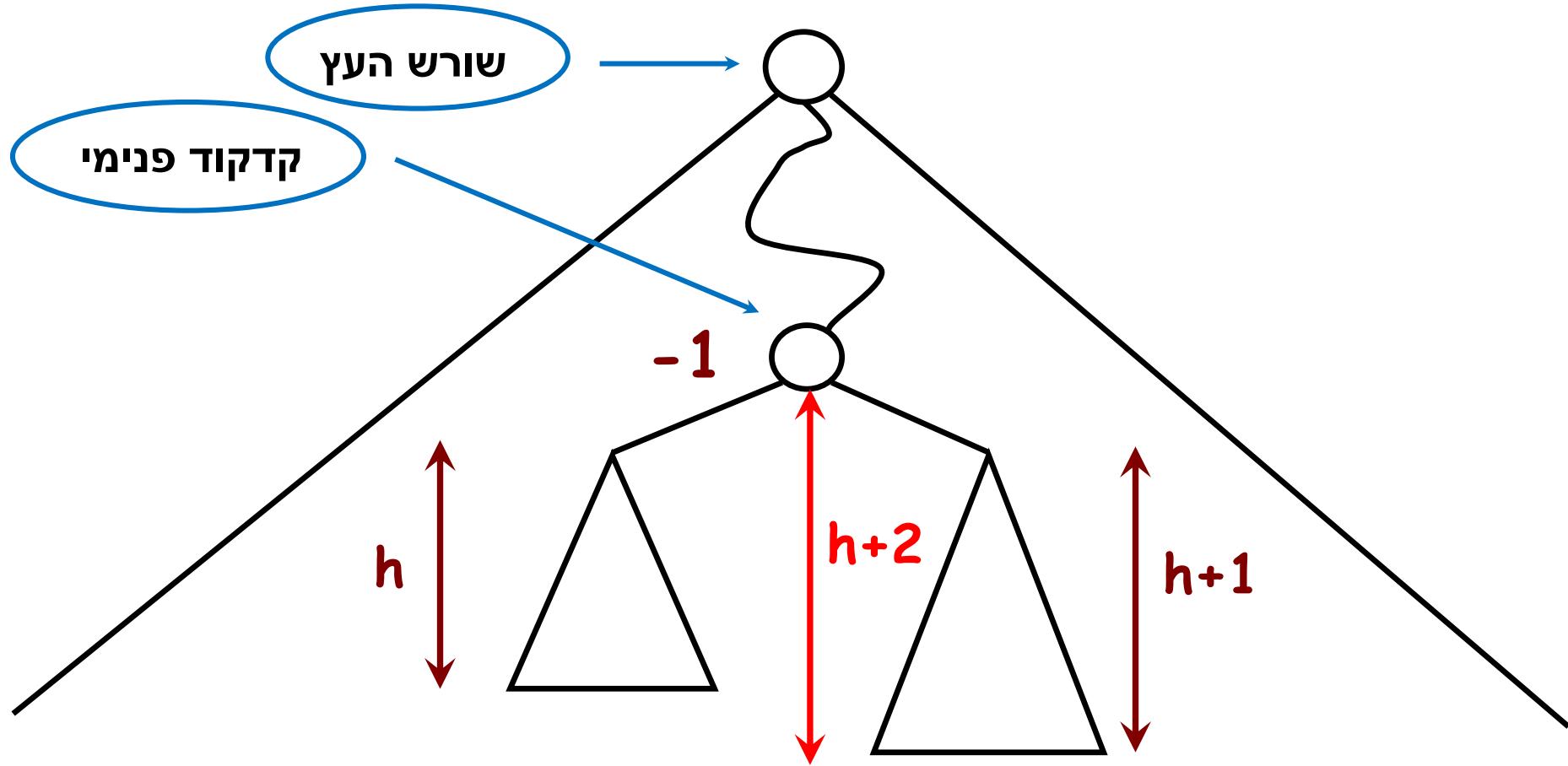


גובה תת העץ לא השתנה אחרי הכנסת האיבר !!

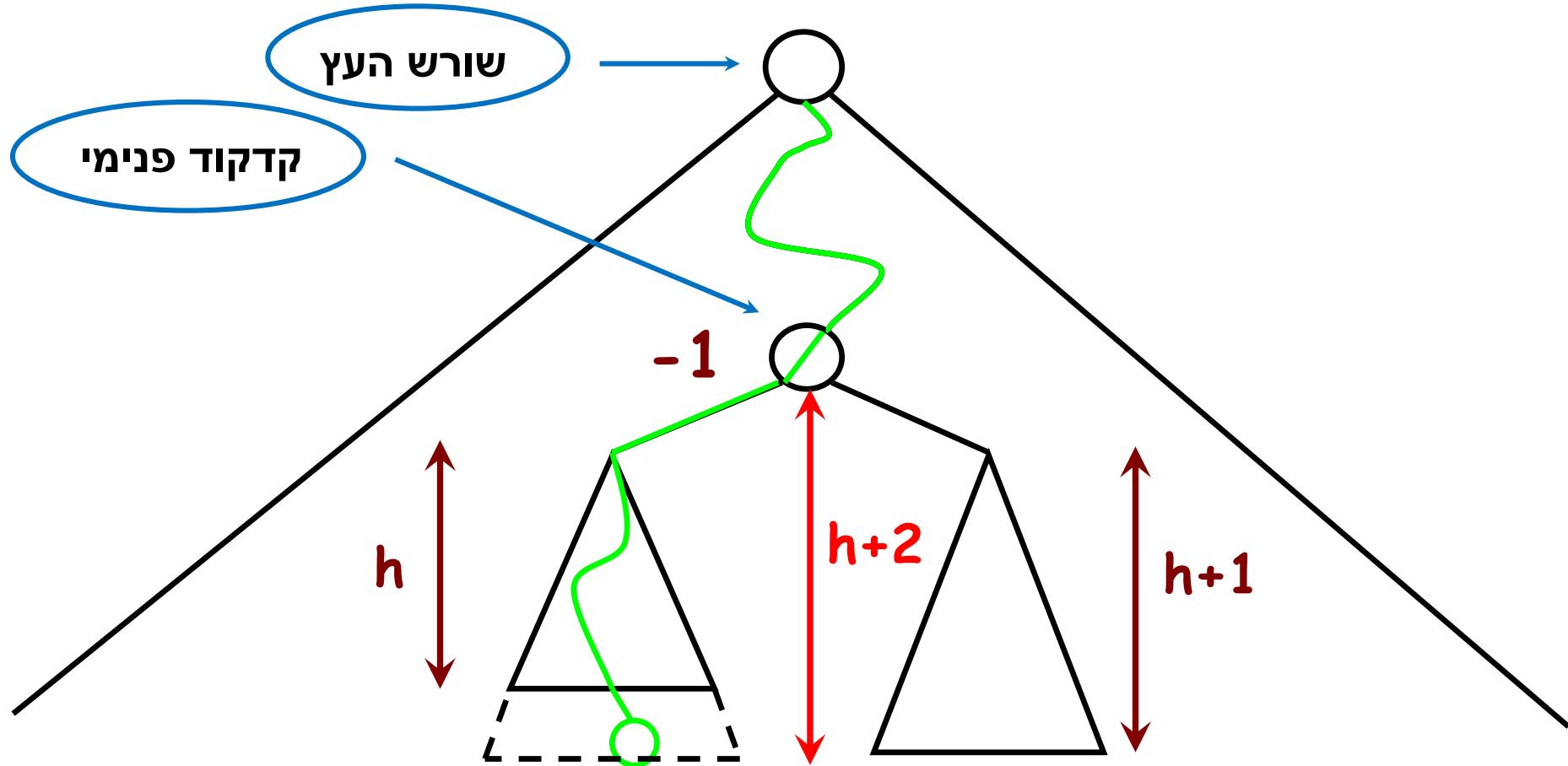
# עצי LVA: הכנסה - ניתוח



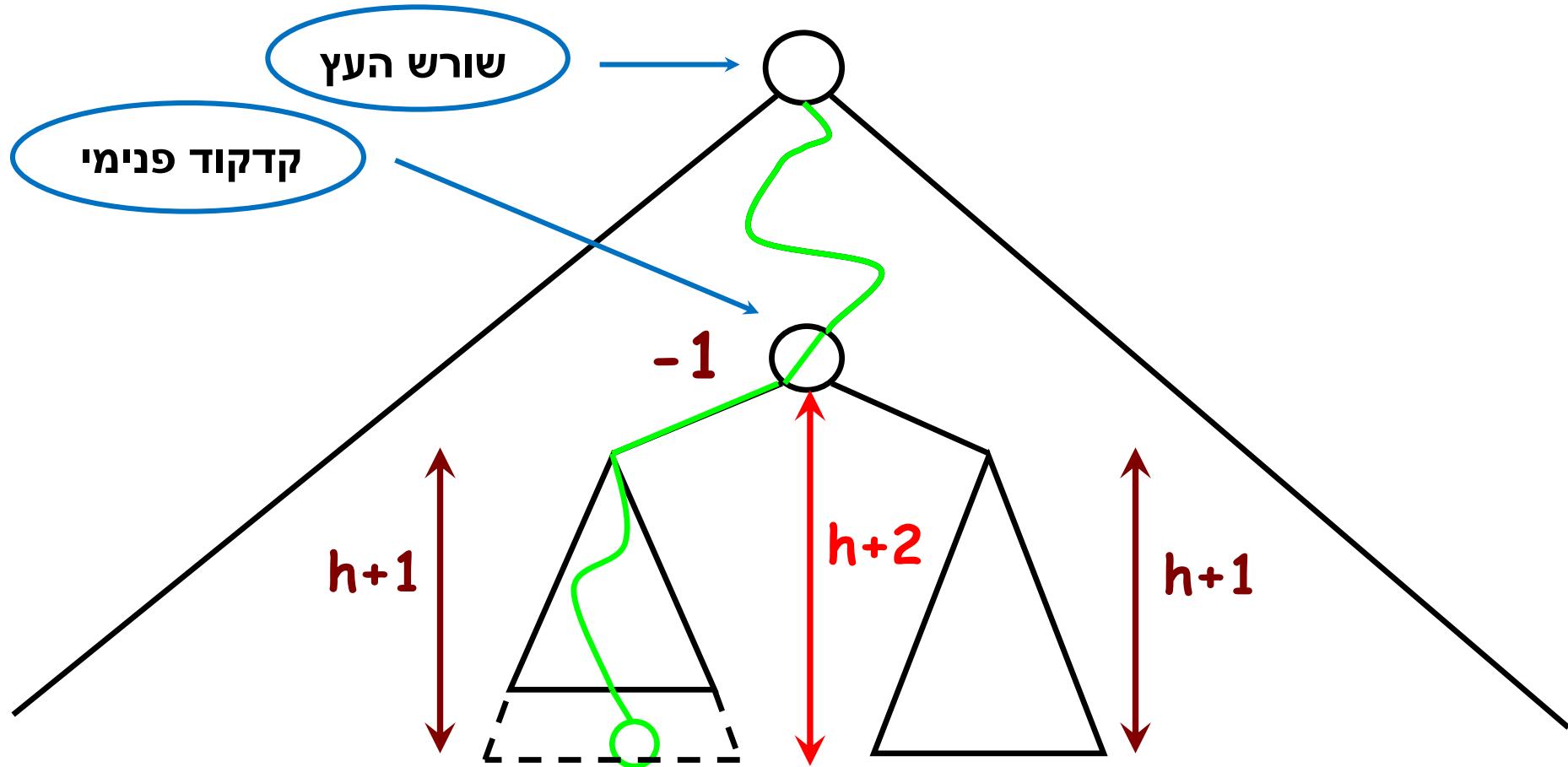
# עצי AVL: הכנסה - ניתוח



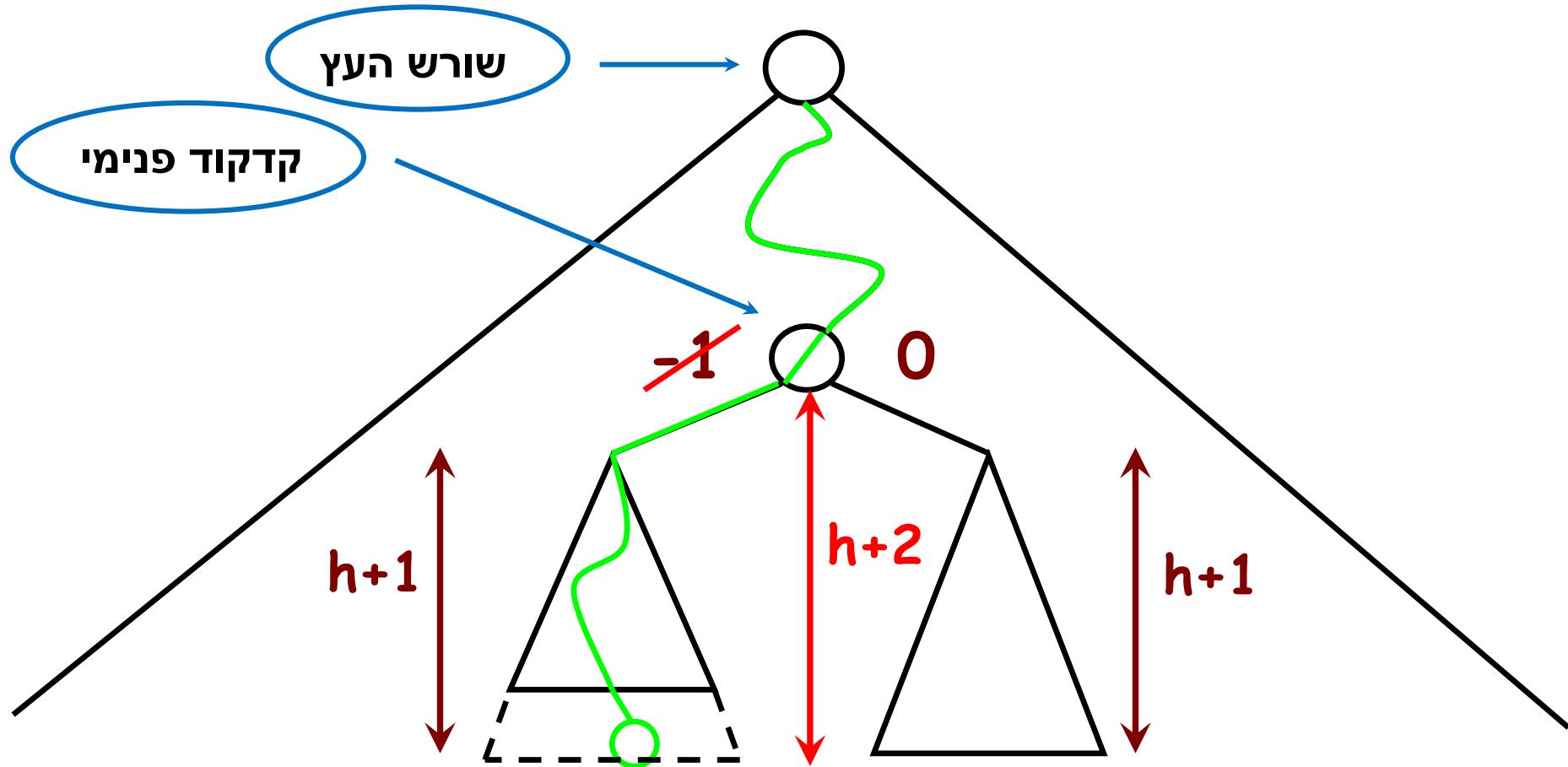
# עץ JAVA: הכנסה - ניתוח



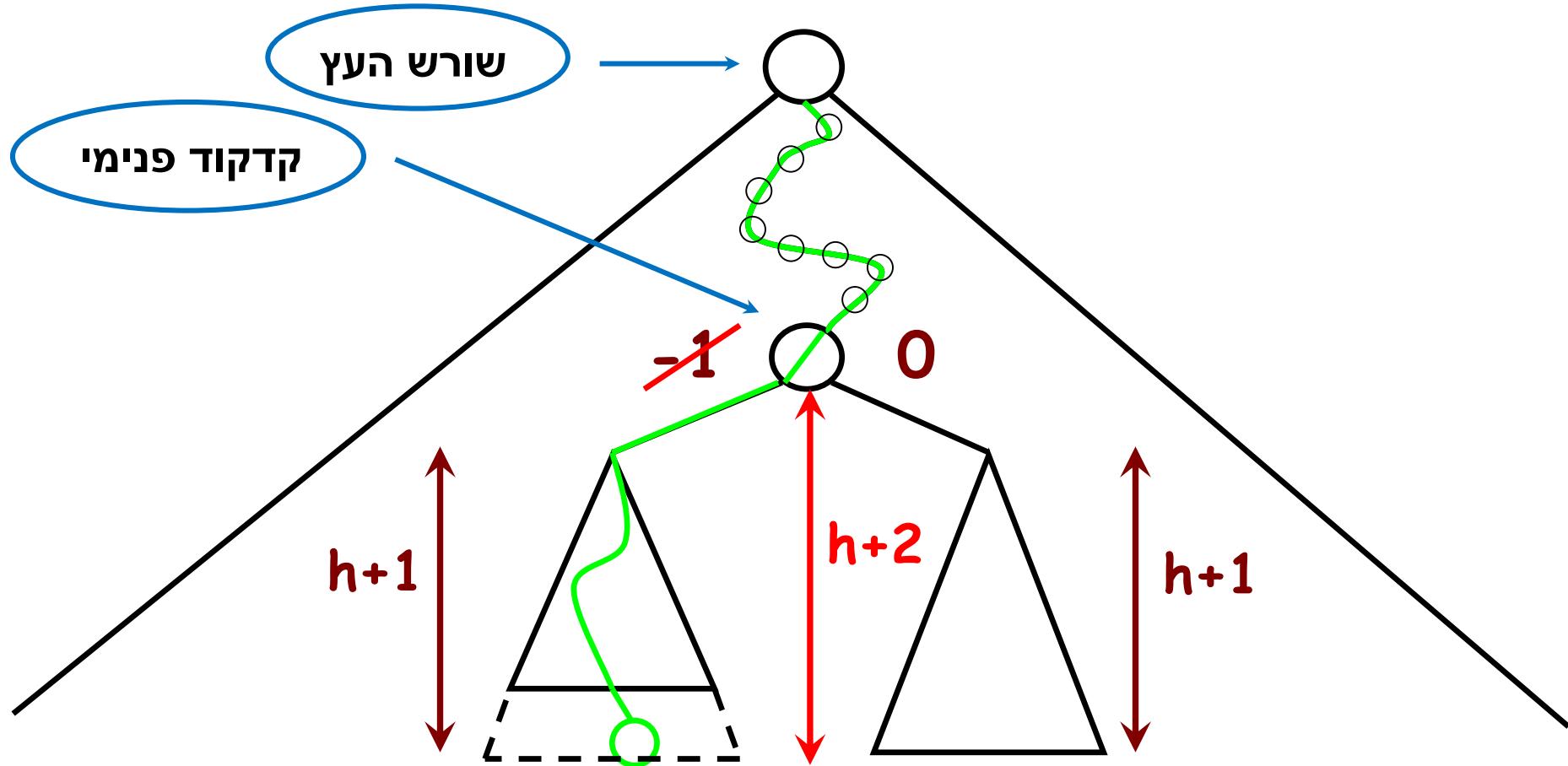
# עצי JAVA: הכנסה - ניתוח



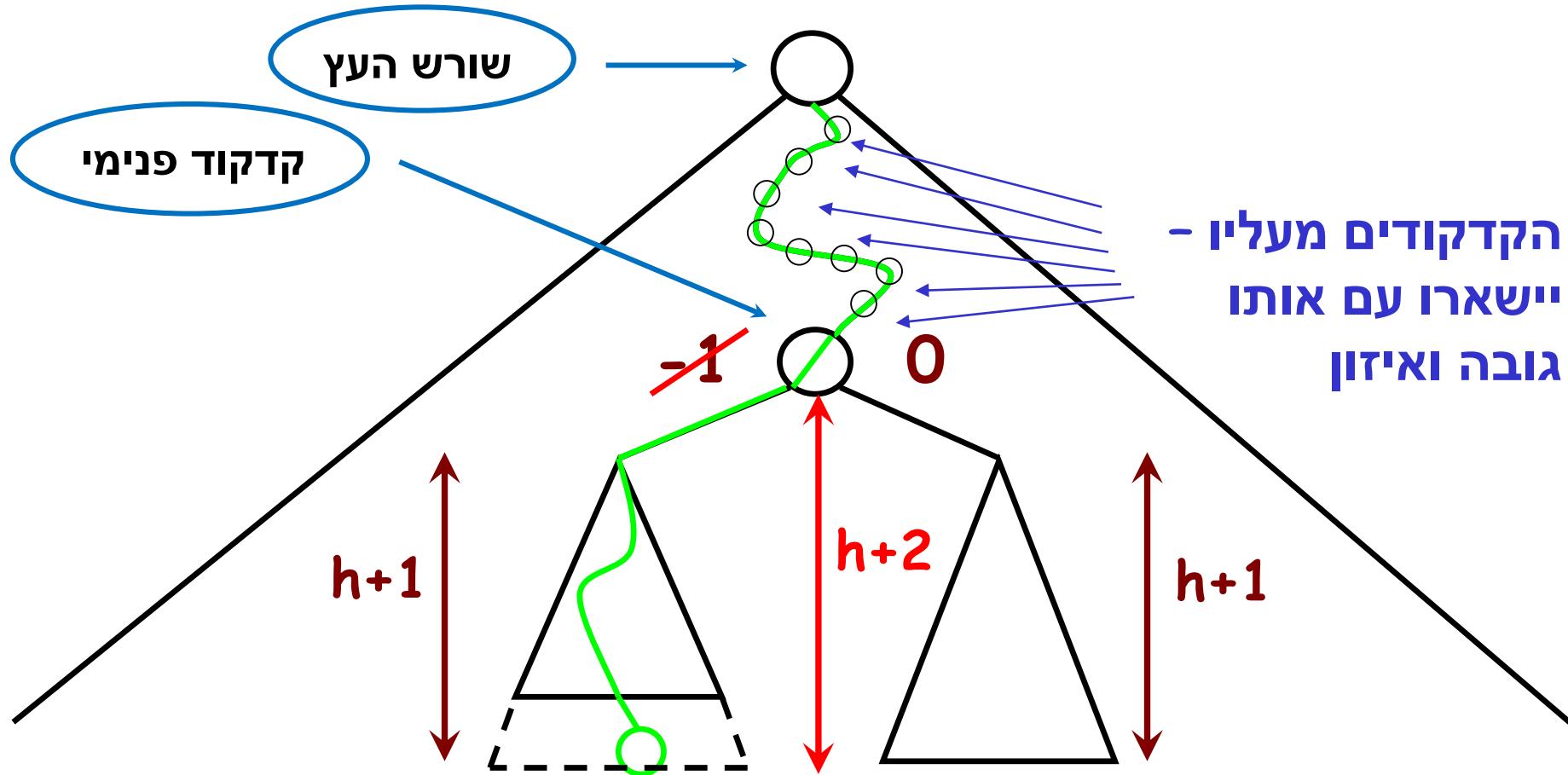
# עצי JAVA: הכנסה - ניתוח



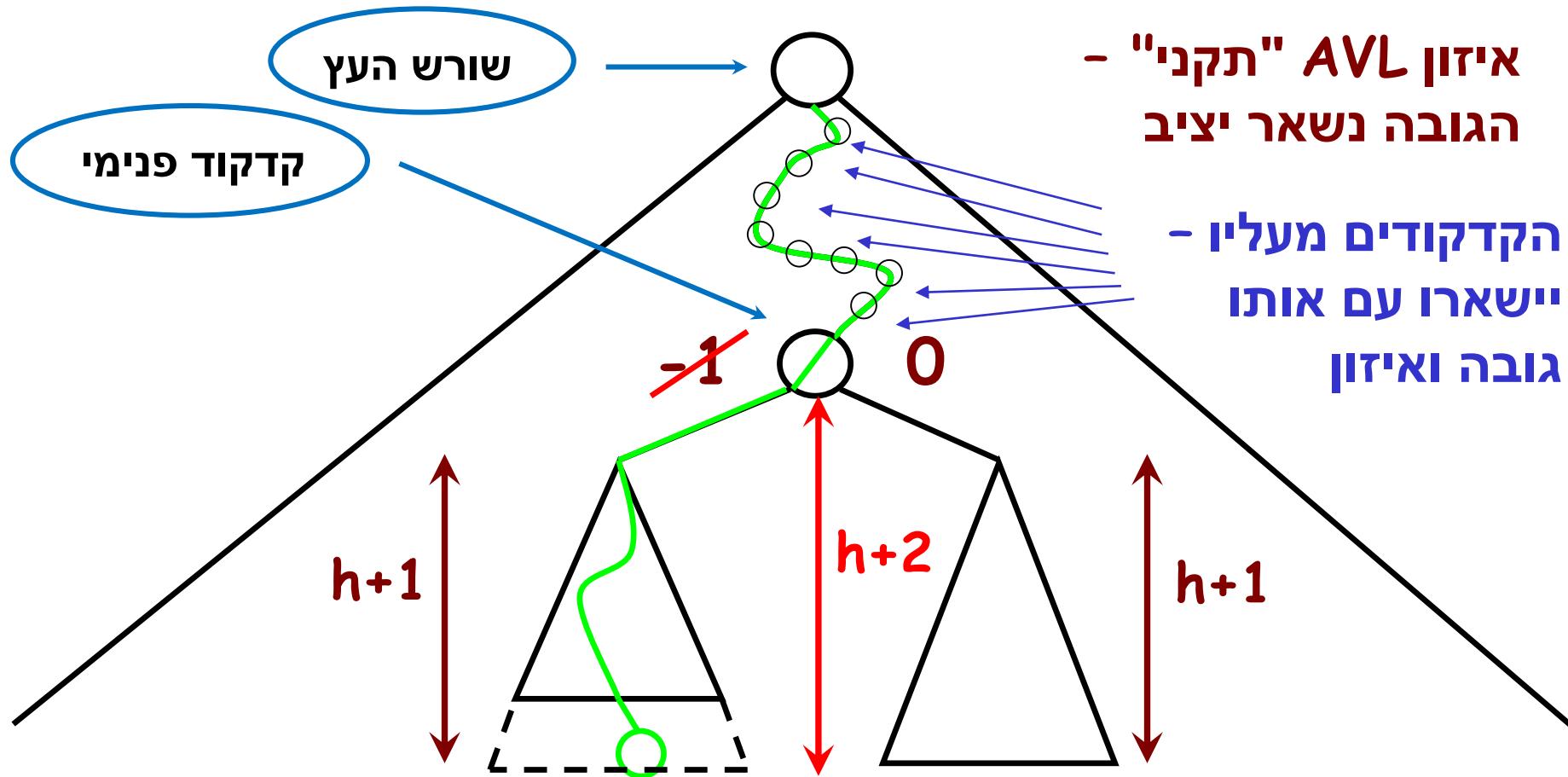
# עצי JAVA: הכנסה - ניתוח



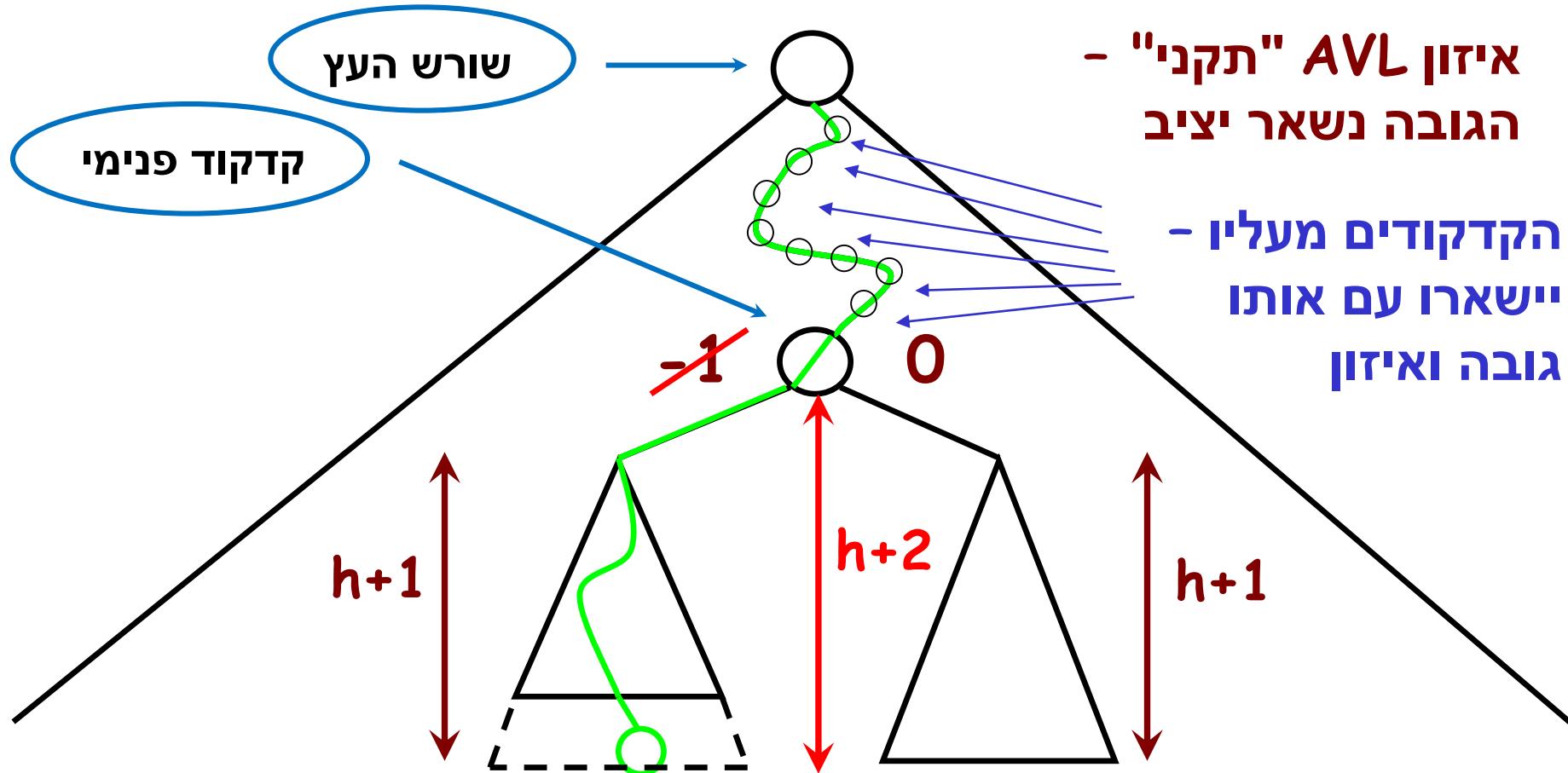
# עצי AVL: הכנסה - ניתוח



# עצי AVL: הכנסה - ניתוח

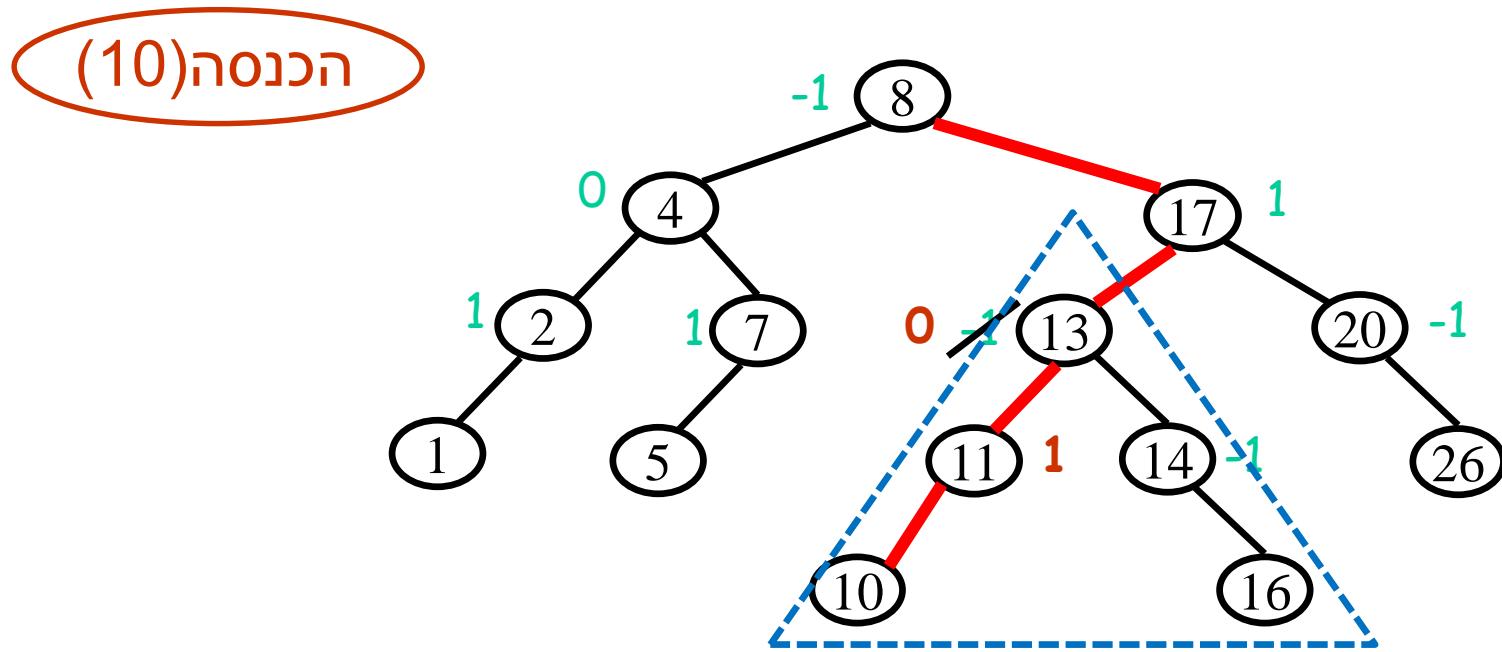


# עצי AVL: הכנסה - ניתוח



אם גורם האיזון של קדקוד על מסלול הכנסה משתנה ל-0 סיים

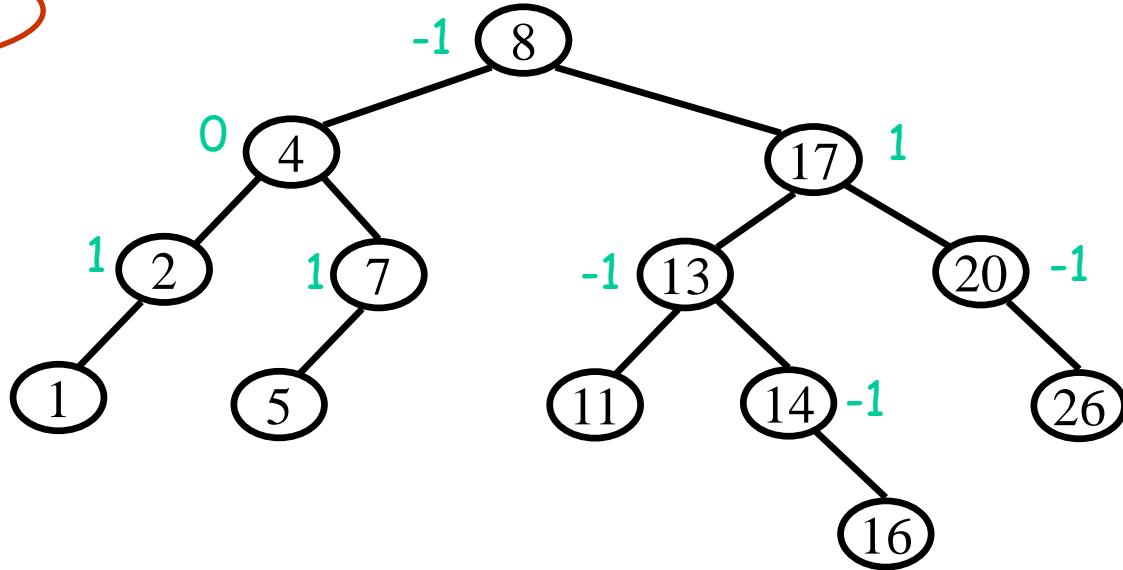
אם גורם האיזון של קדקוד על מסלול הכניסה  
משתנה ל-0 סימן



גובה תת העץ לא השתנה אחרי הכנסת האיבר !!

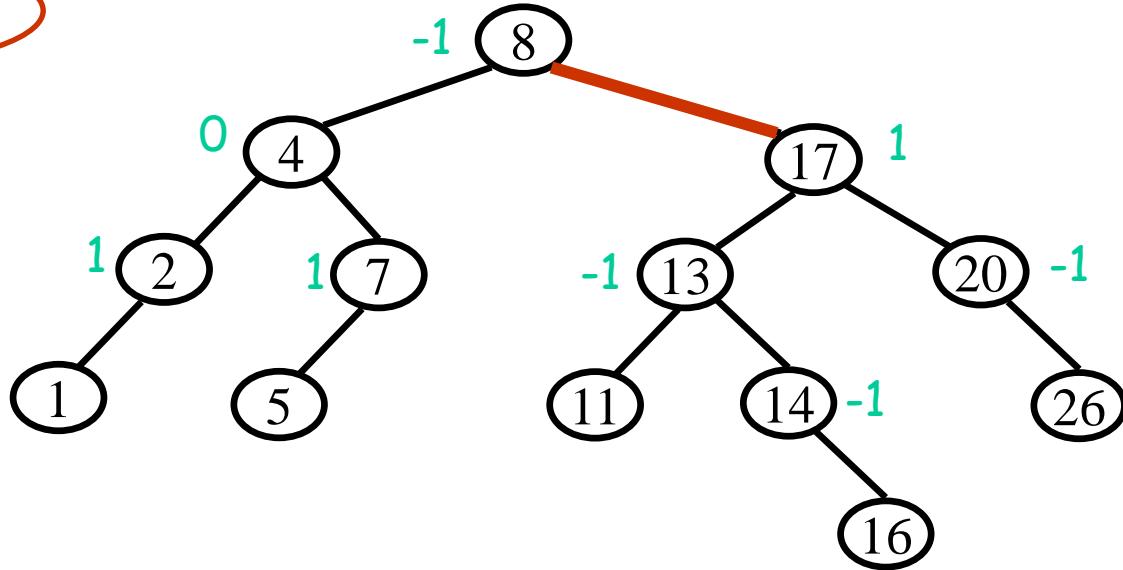
# עץ AVL: הכנסה

הכנסה(15)



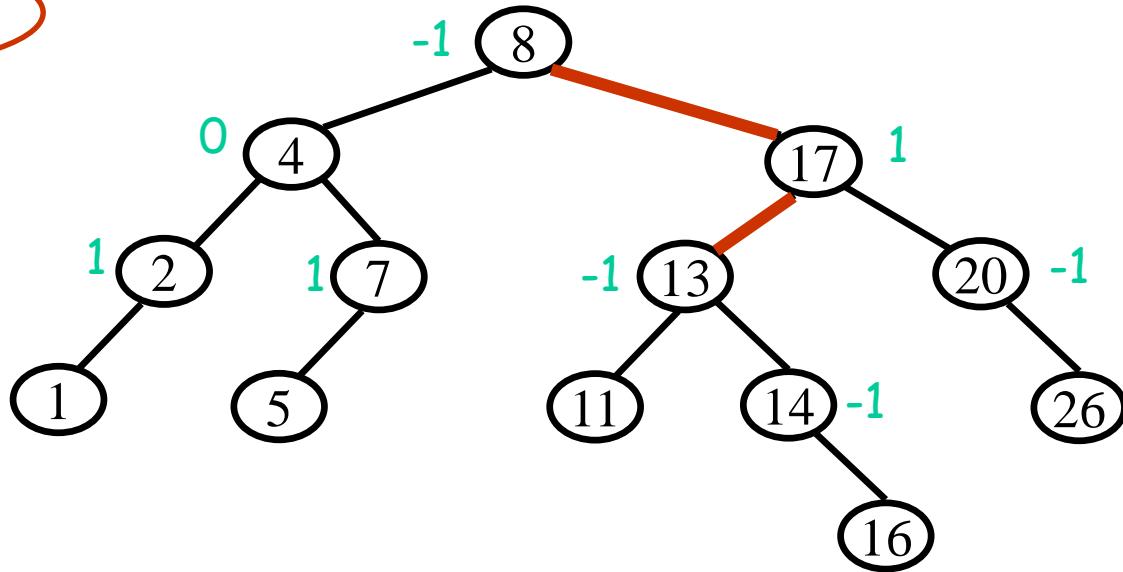
# עצים AVL: הכנסה

הכנסה(15)



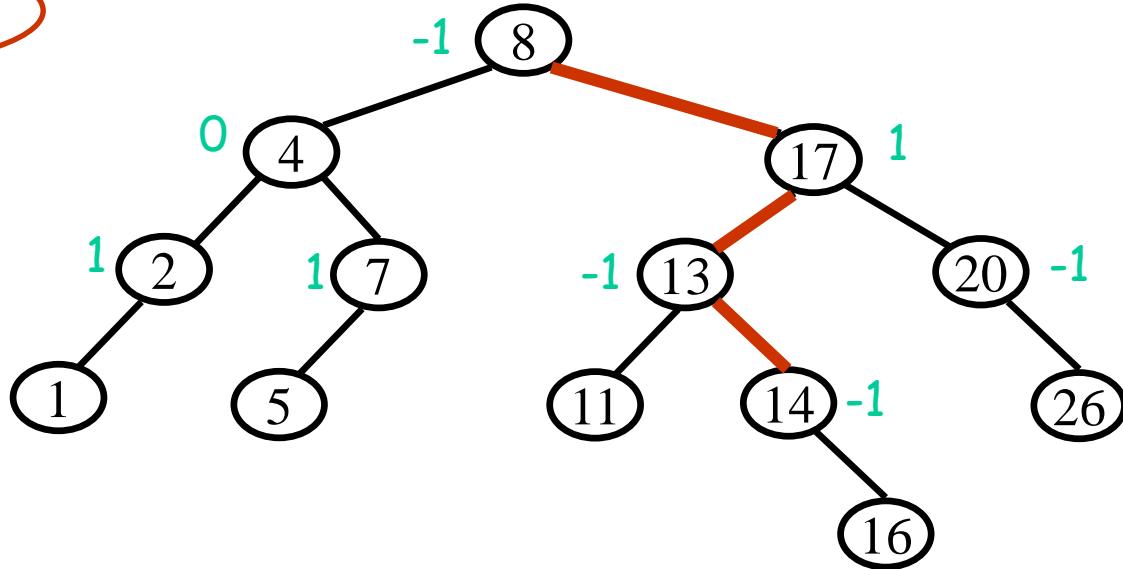
# עצים AVL: הכנסה

הכנסה(15)



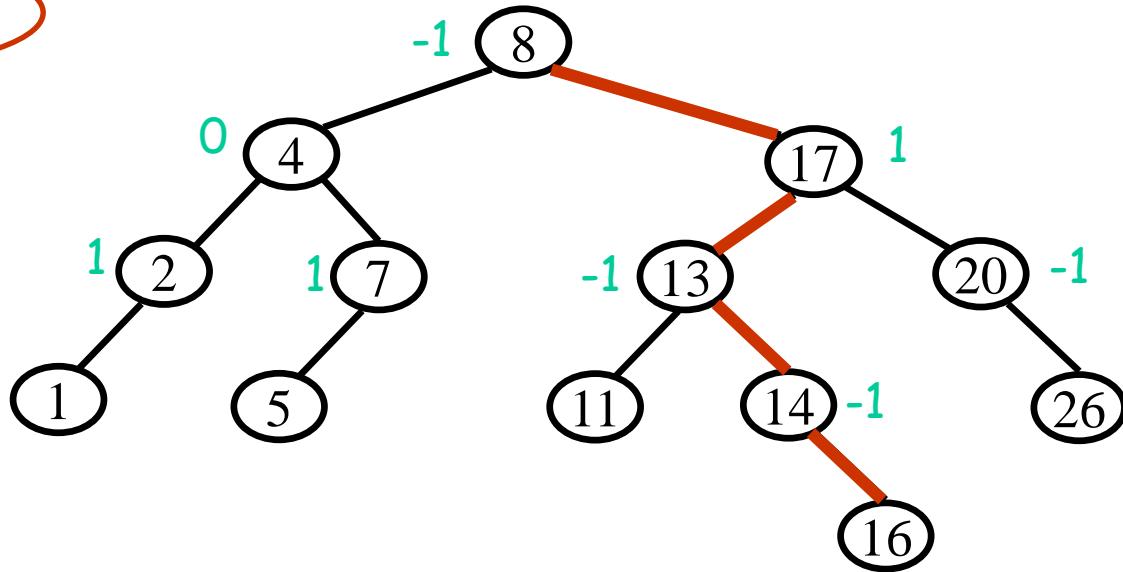
# עצים AVL: הכנסה

הכנסה(15)



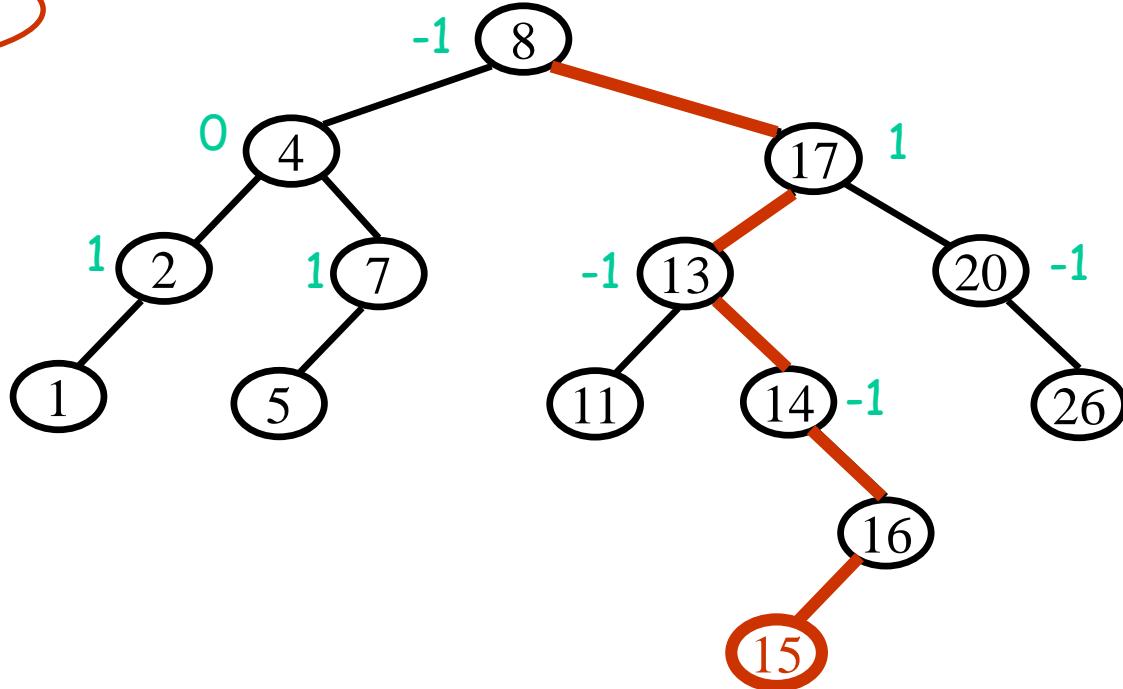
# עץ AVL: הכנסה

הכנסה(15)



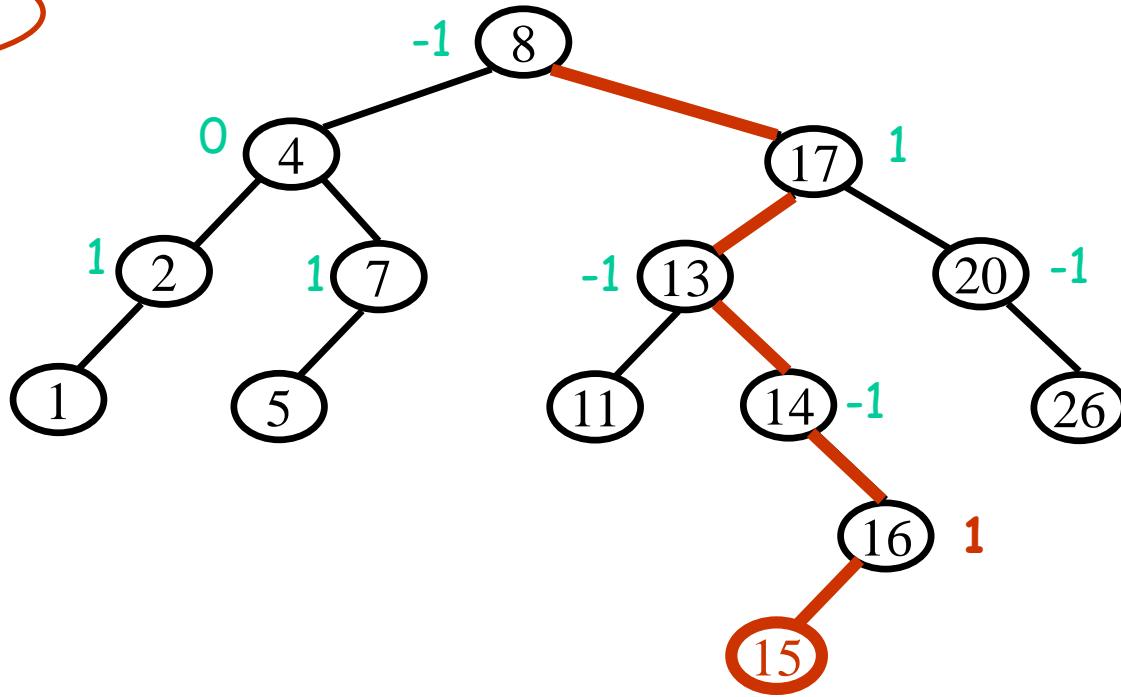
# עץ AVL: הכנסה

הכנסה(15)



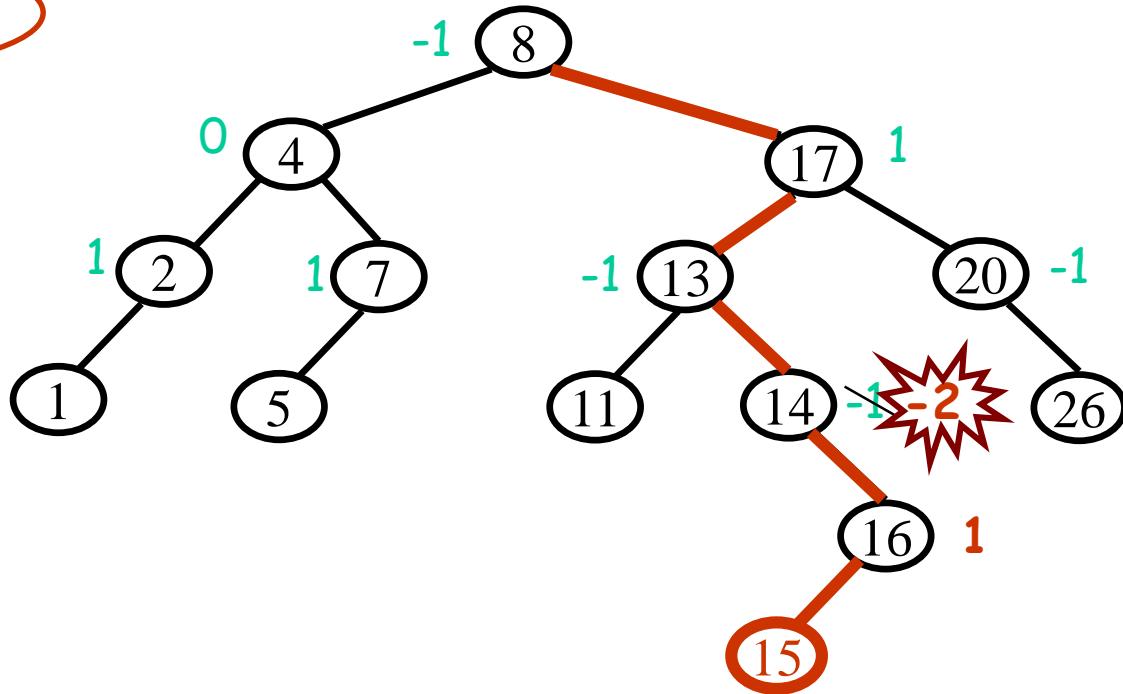
# עצים AVL: הכנסה

הכנסה(15)

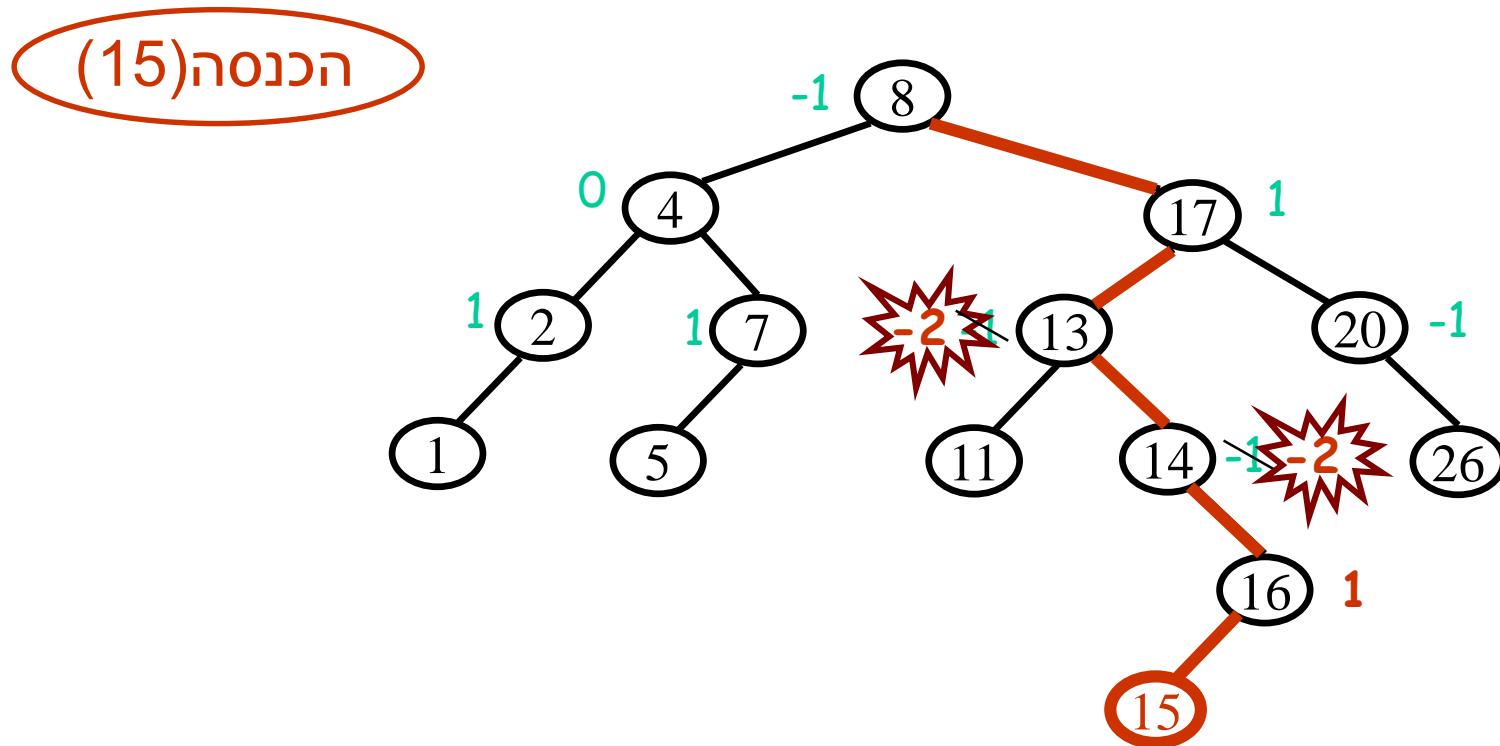


# עצים AVL: הכנסה

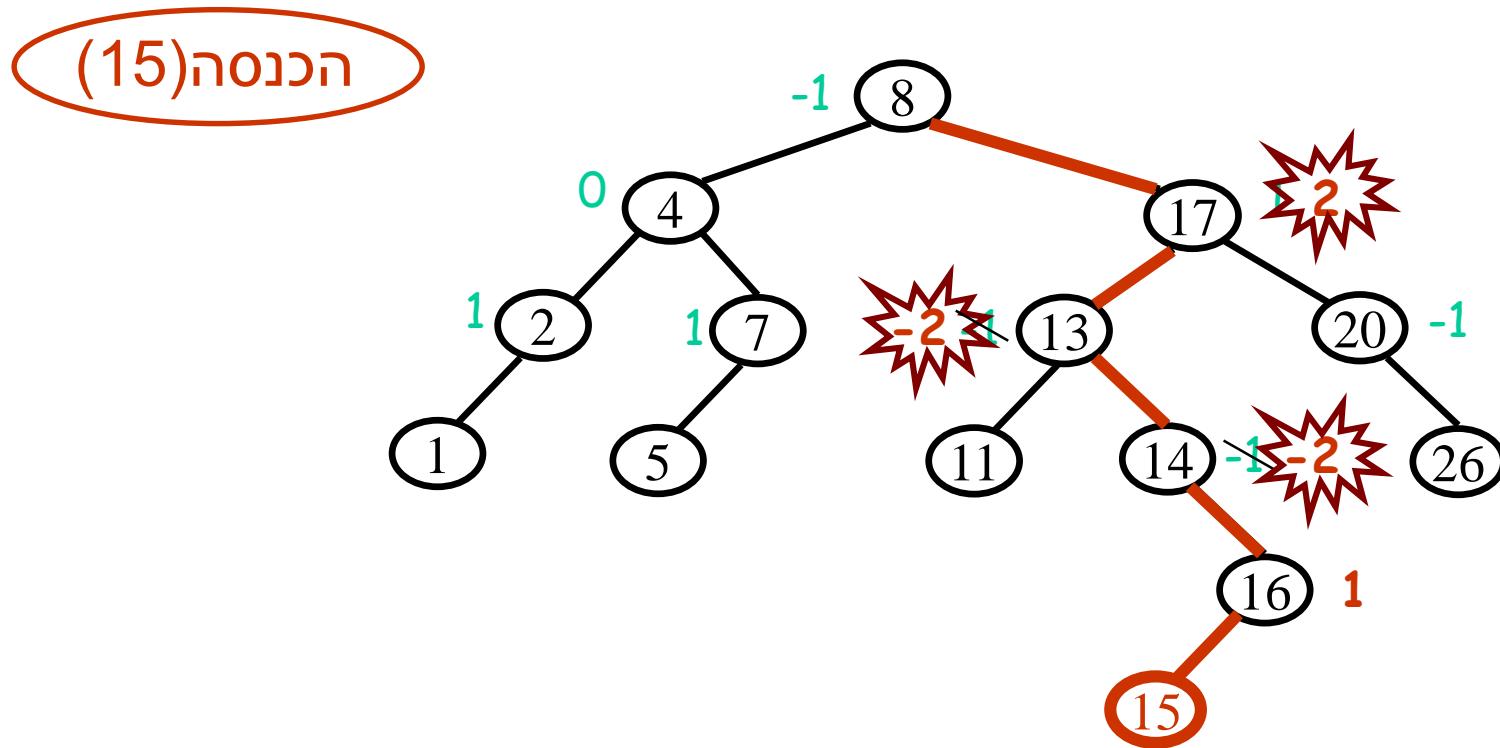
הכנסה(15)



# עצים AVL: הכנסה

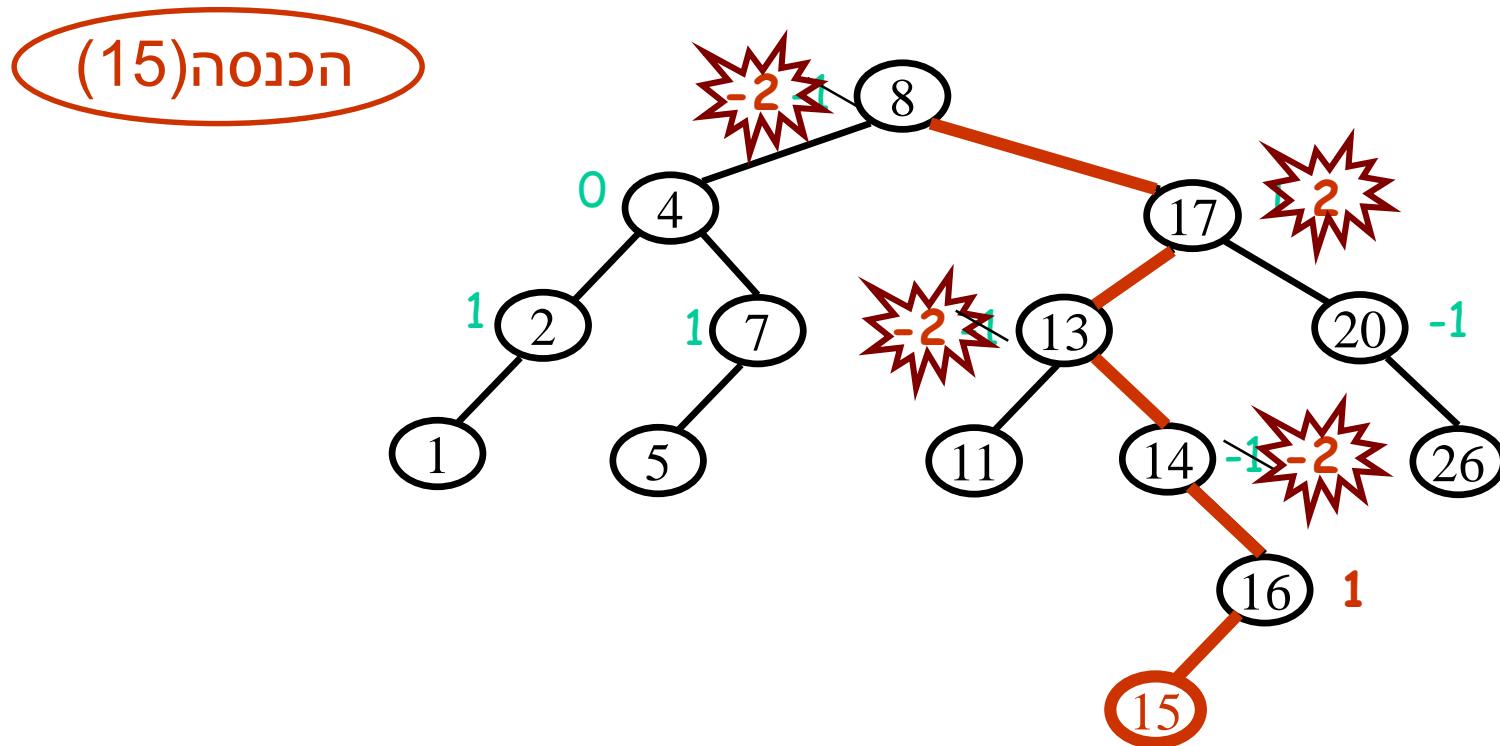


# עצים AVL: הכנסה

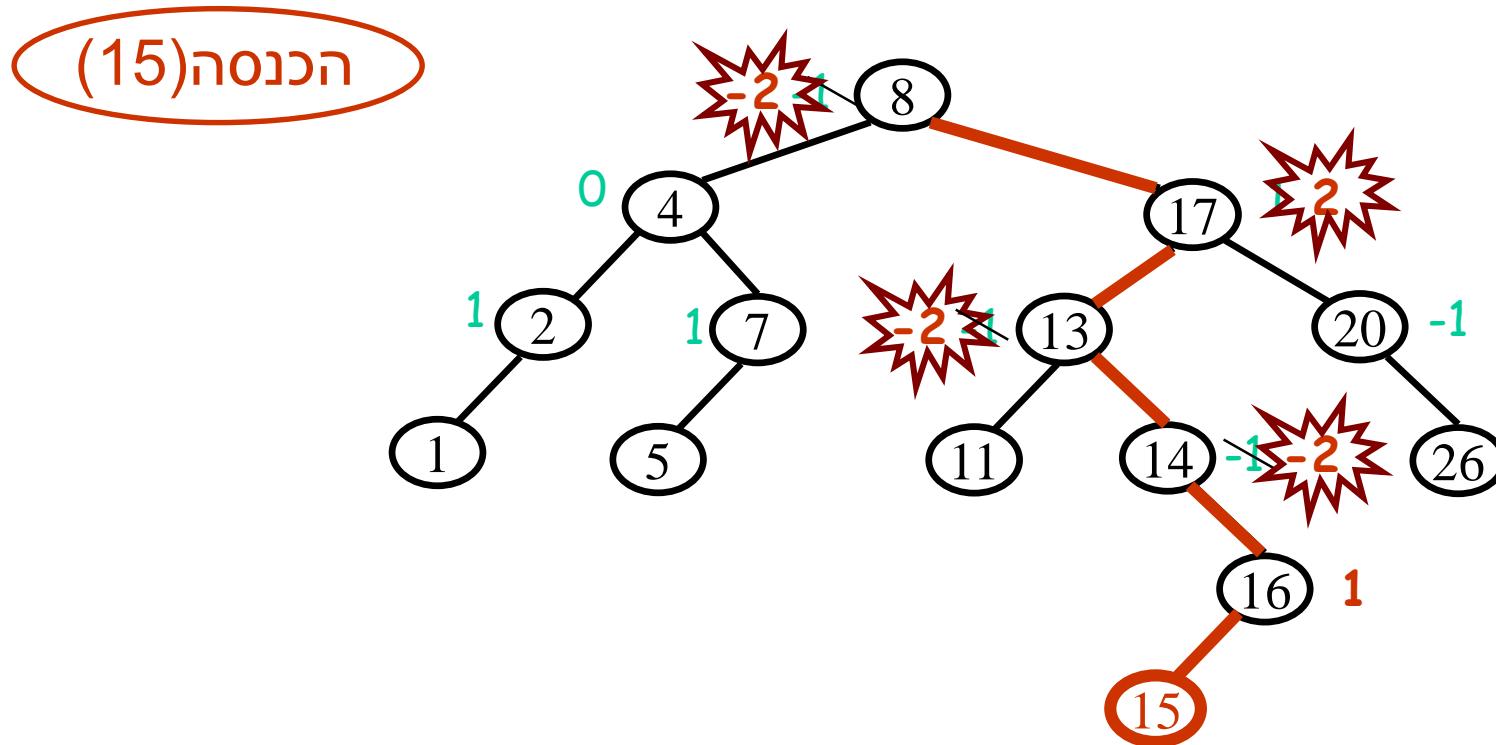


# עצים AVL: הכנסה

האם קיימים איזונים אסורים נוספים בעץ AVL?

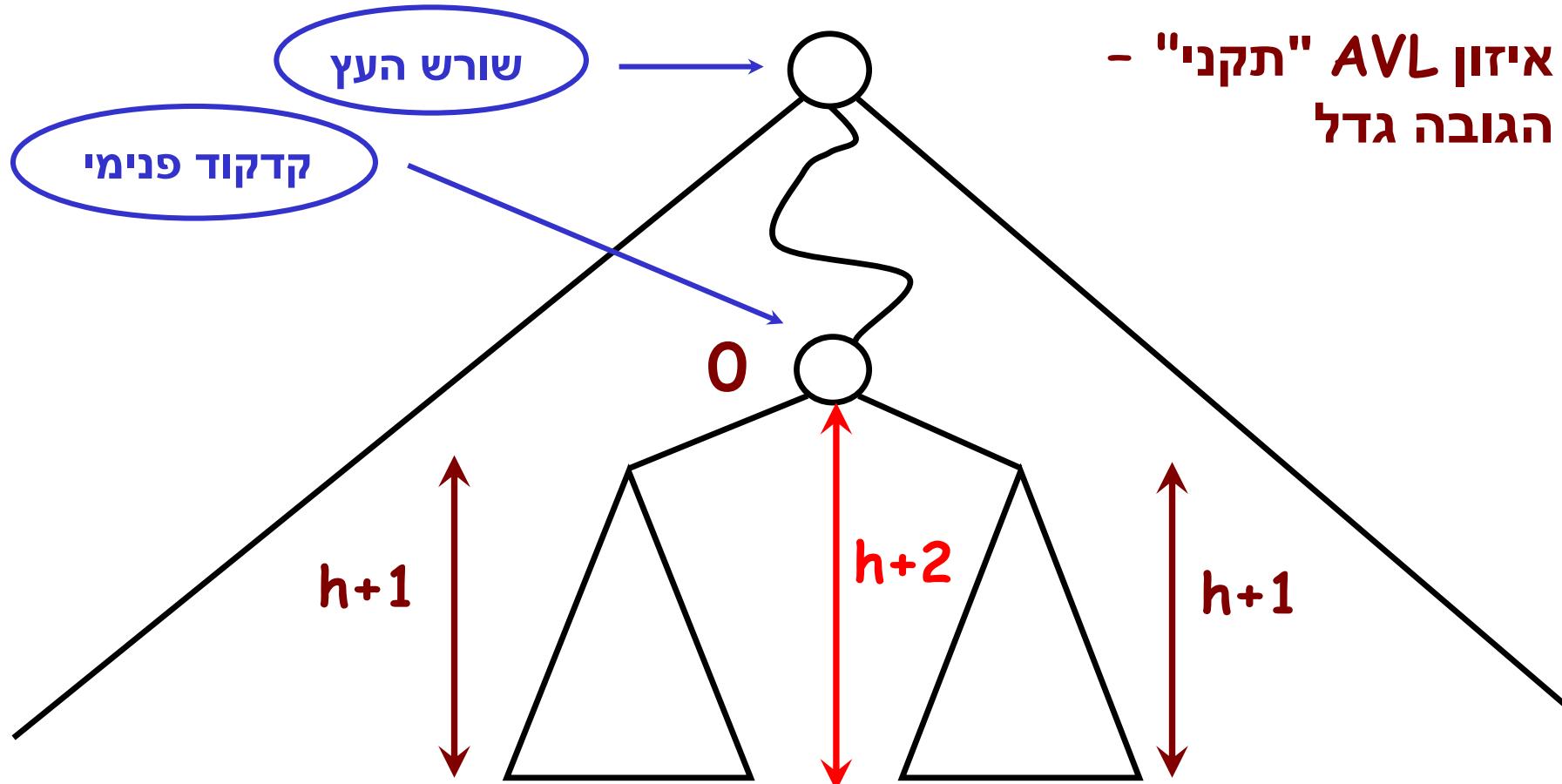


# עצי JAVA: הכנסה

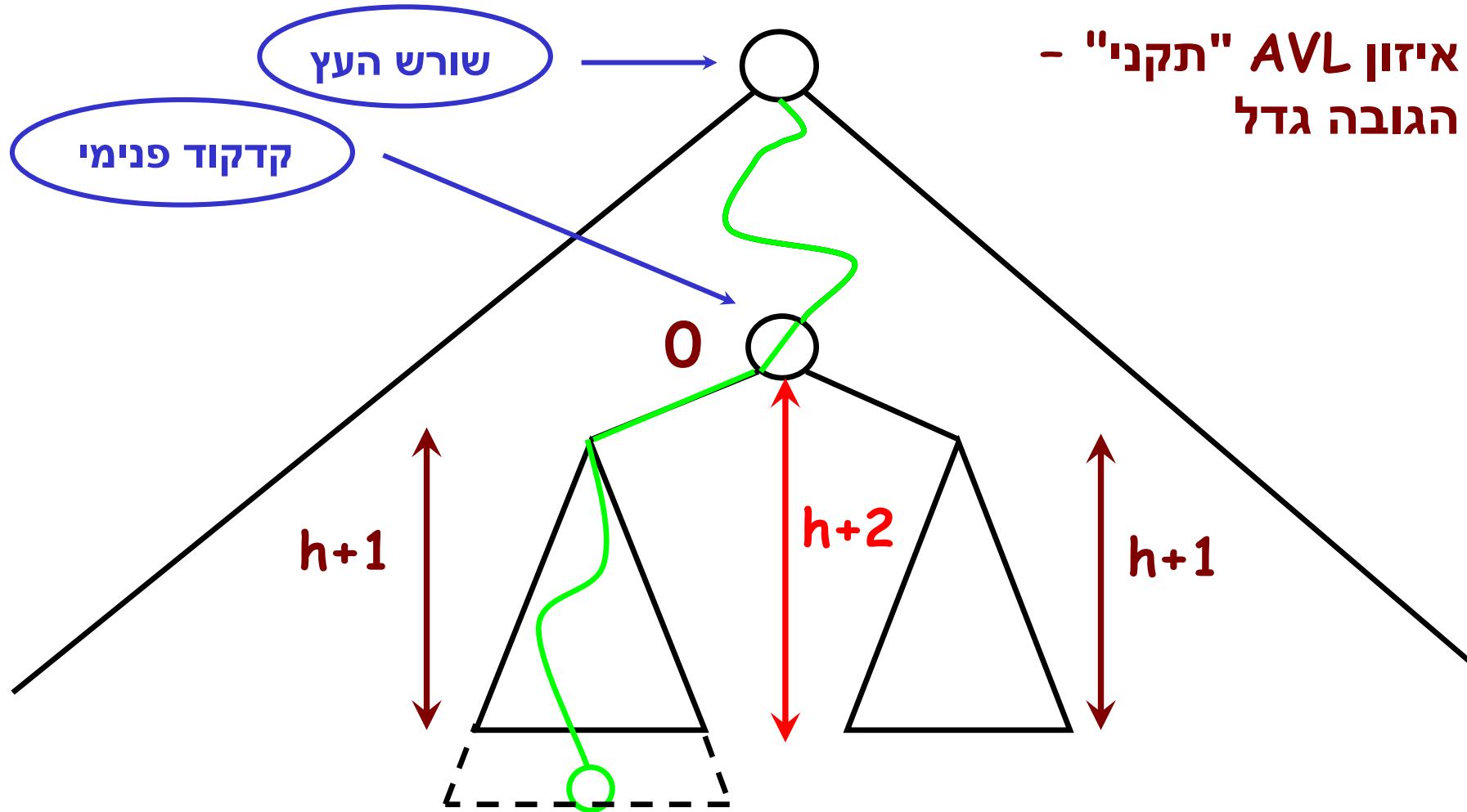


**השינויים באיזון קוראים רק במסלול הכנסה**

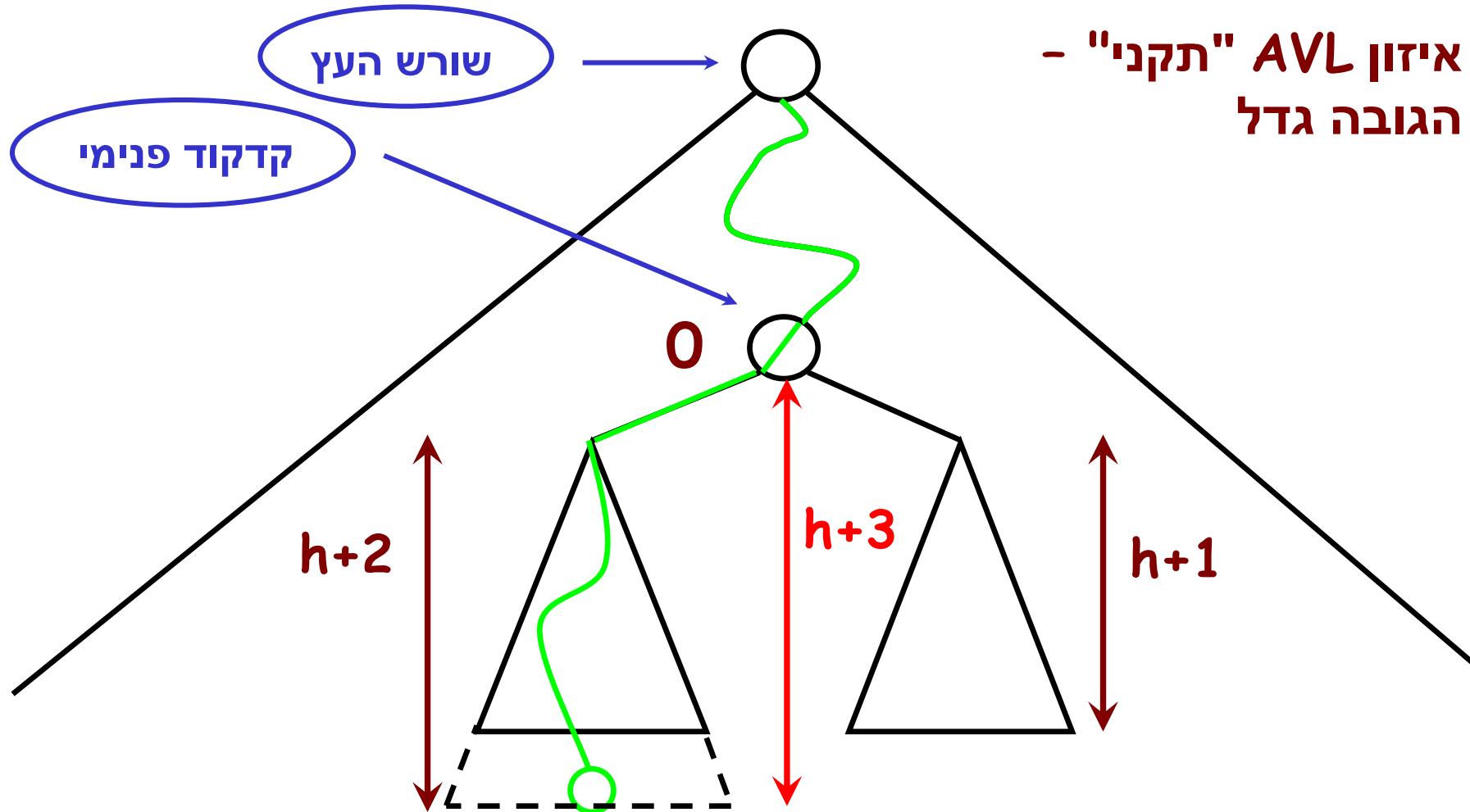
# עצי AVL: הכנסה - ניתוח



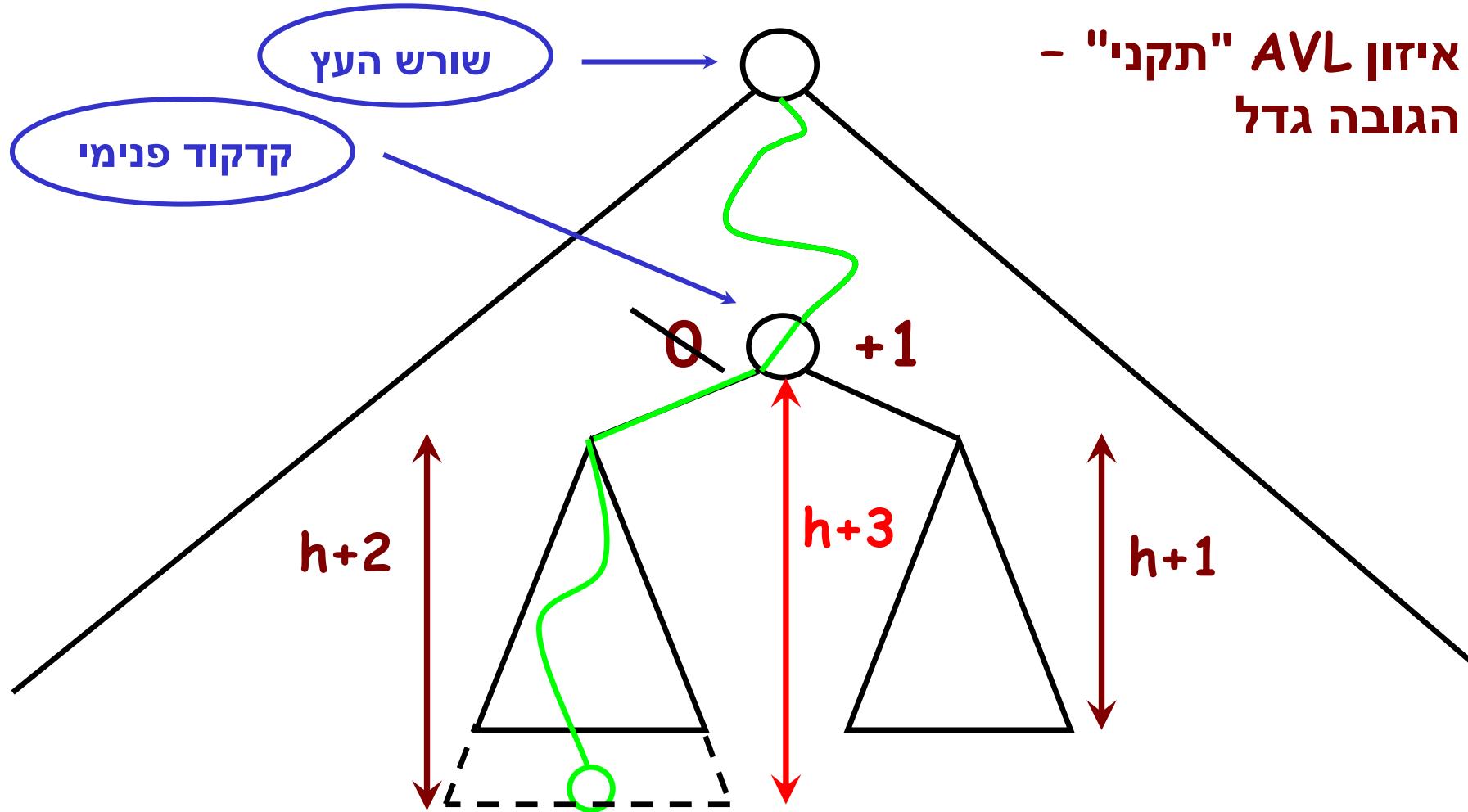
# עצי AVL: הכנסה - ניתוח



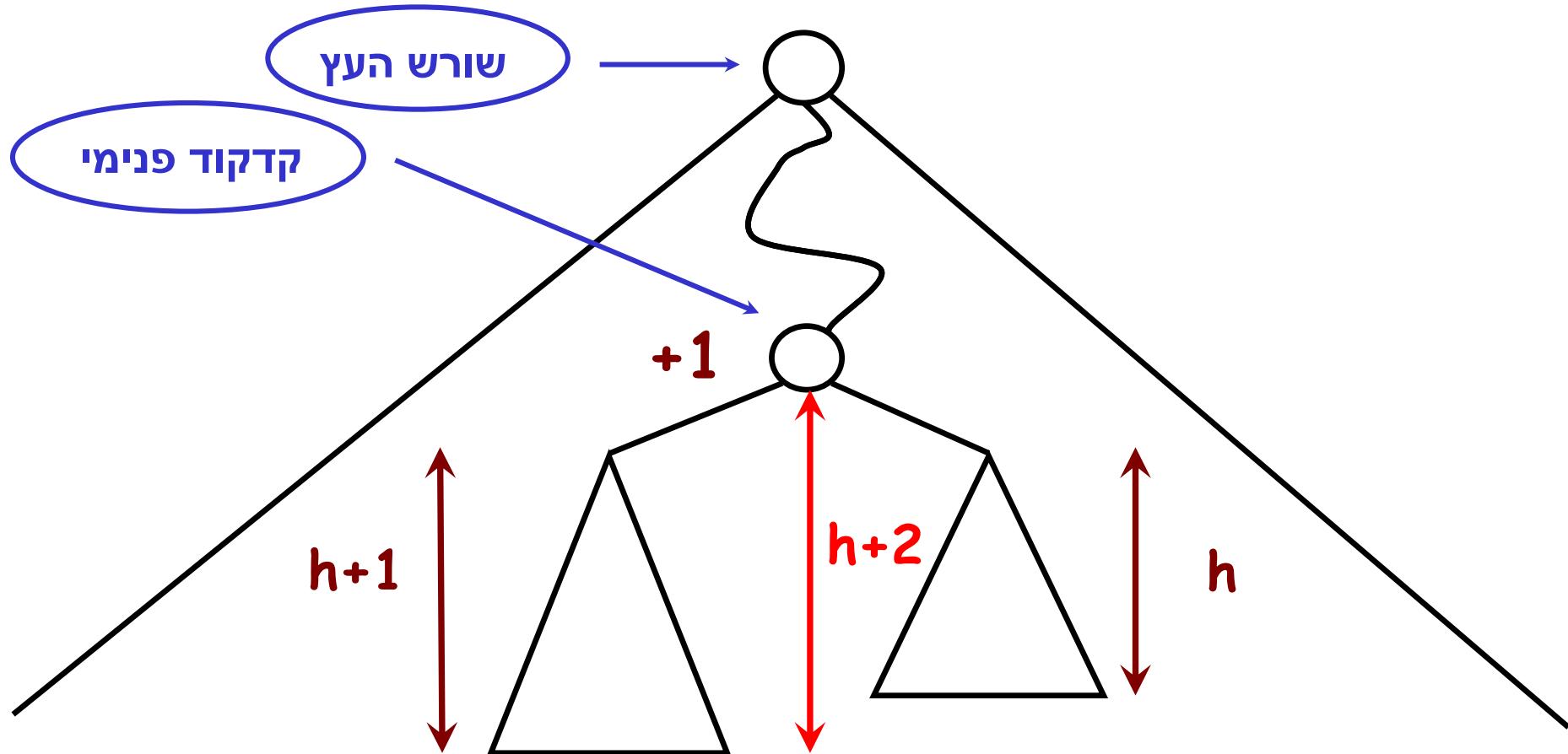
# עצי AVL: הכנסה - ניתוח



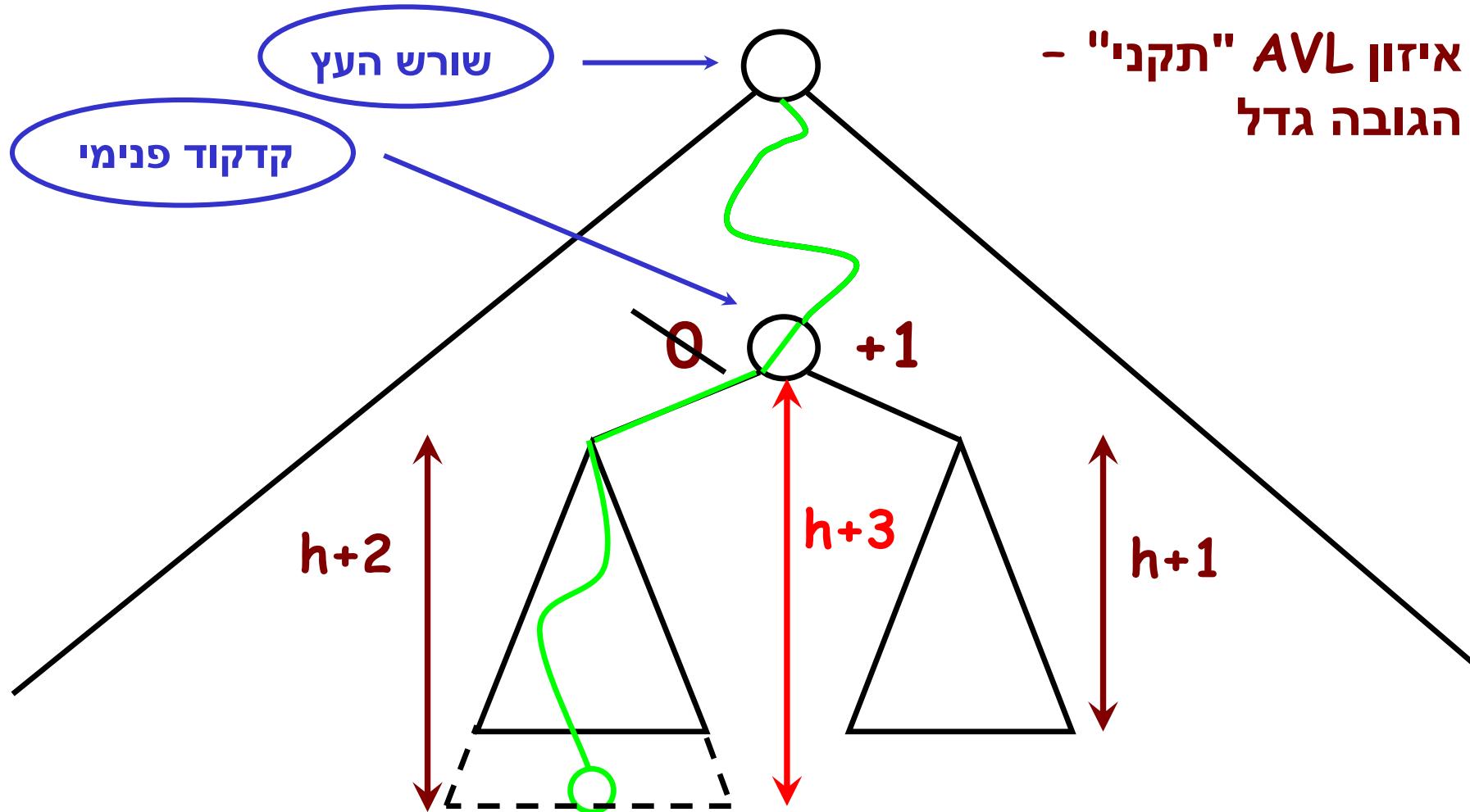
# עצי AVL: הכנסה - ניתוח



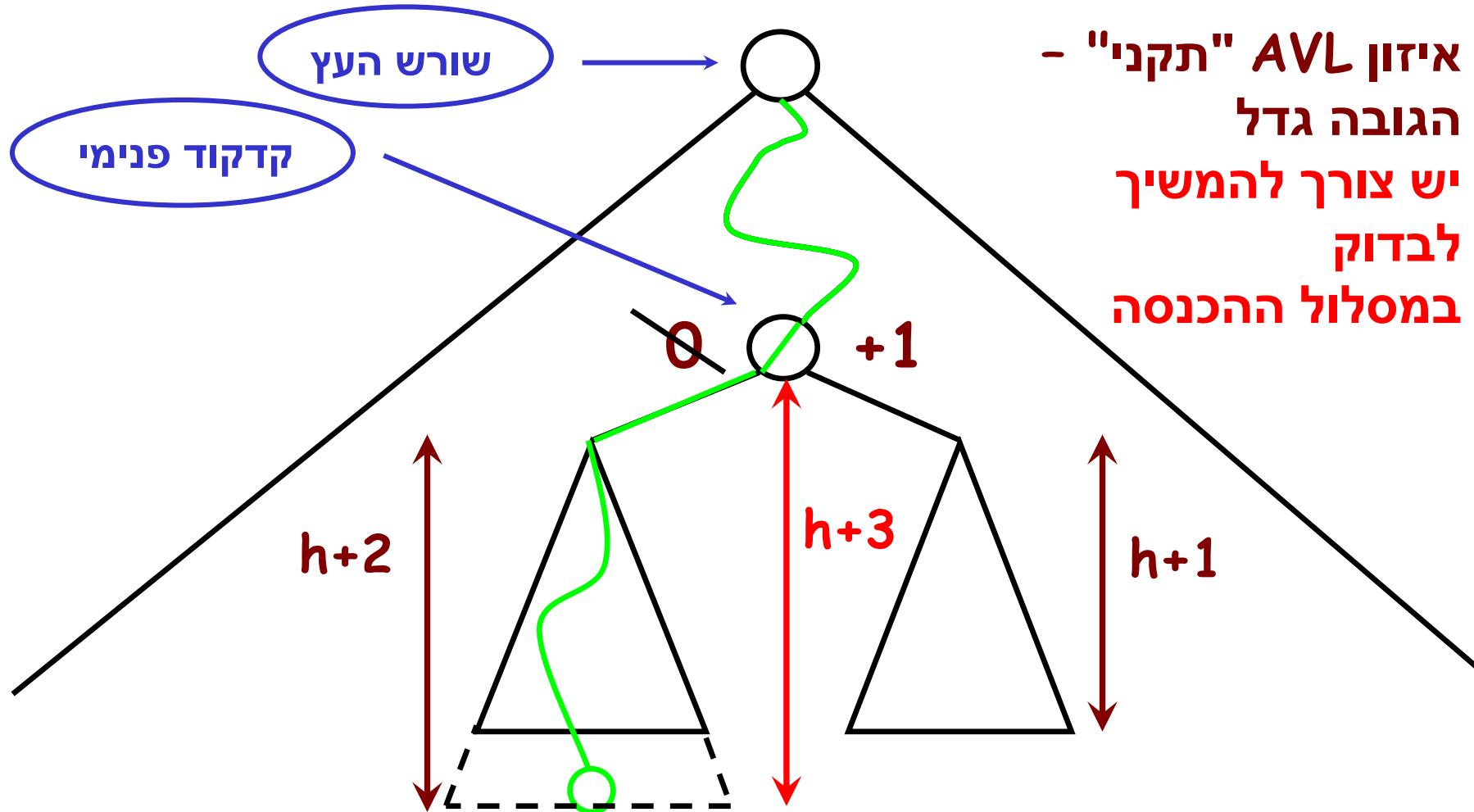
# עצי JAVA: הכנסה - ניתוח



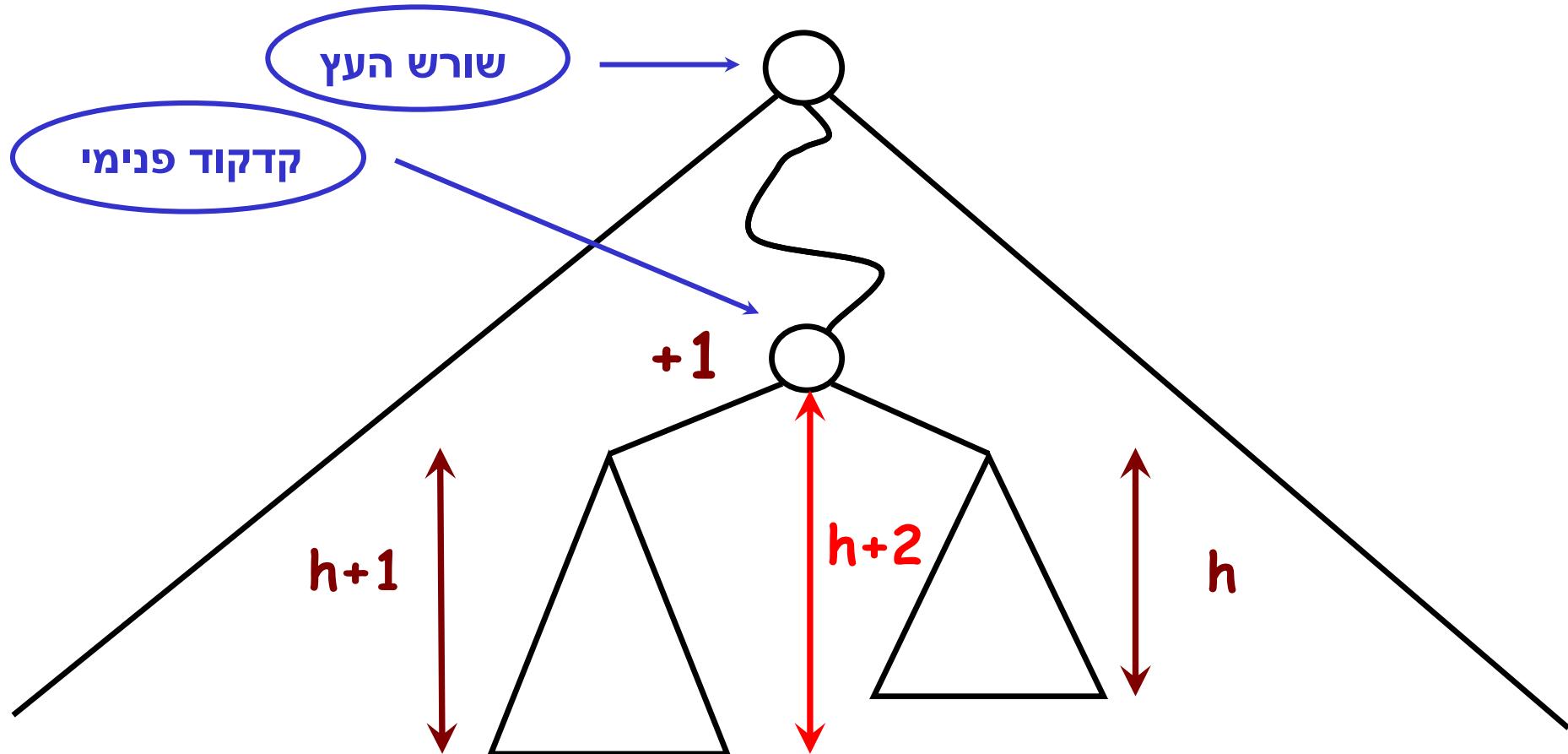
# עצי AVL: הכנסה - ניתוח



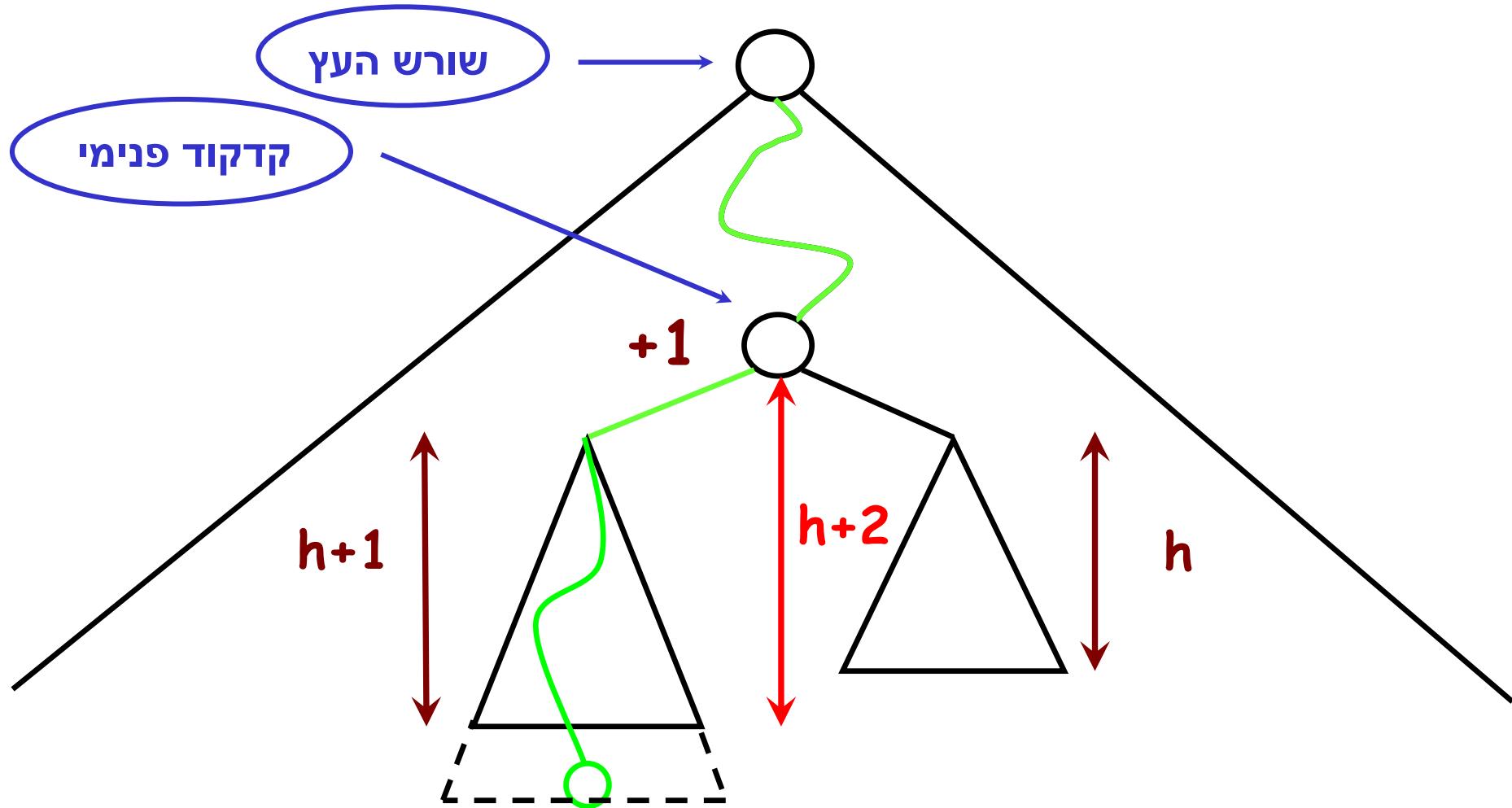
# עצי AVL: הכנסה - ניתוח



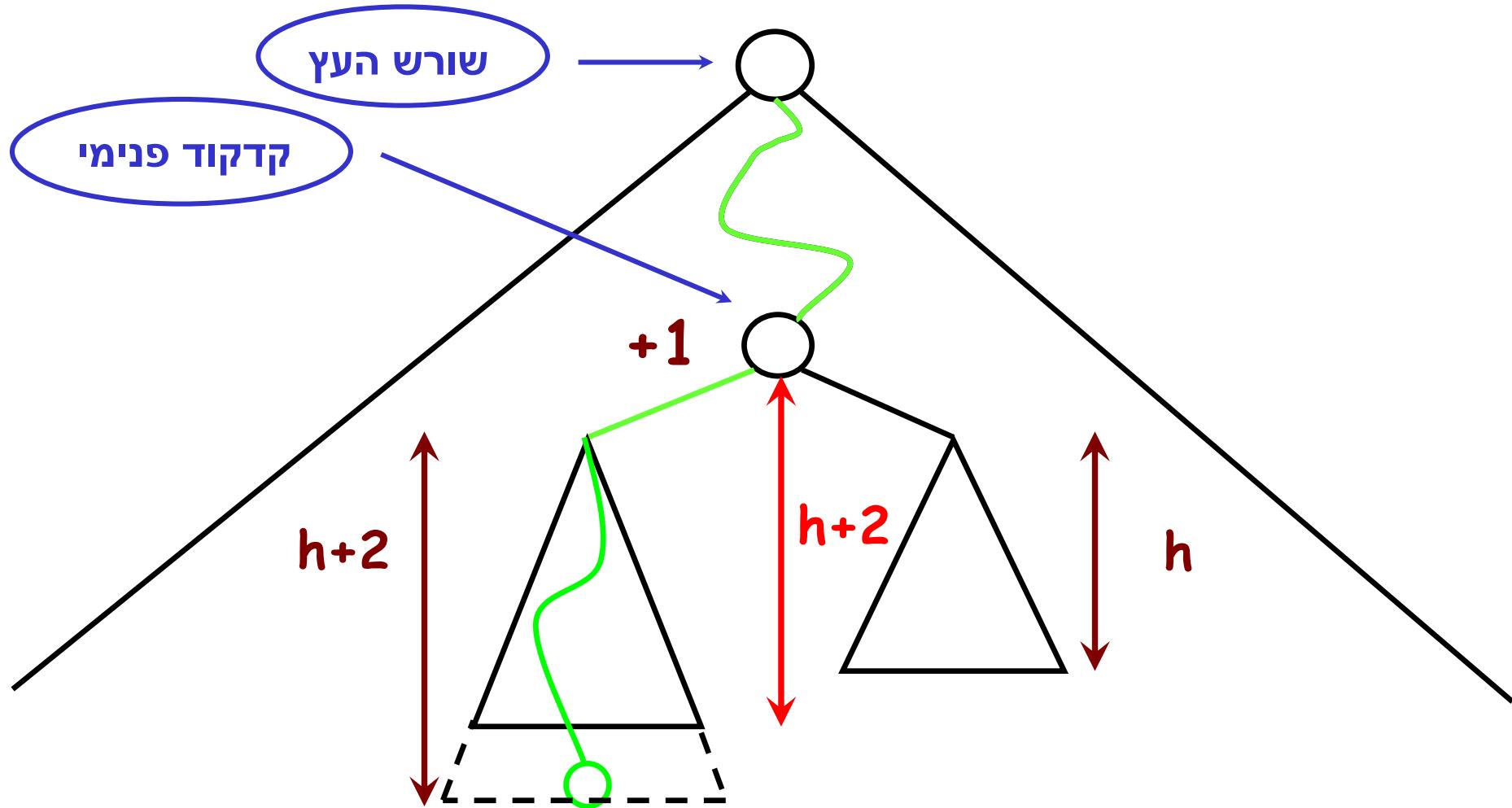
# עצי JAVA: הכנסה - ניתוח



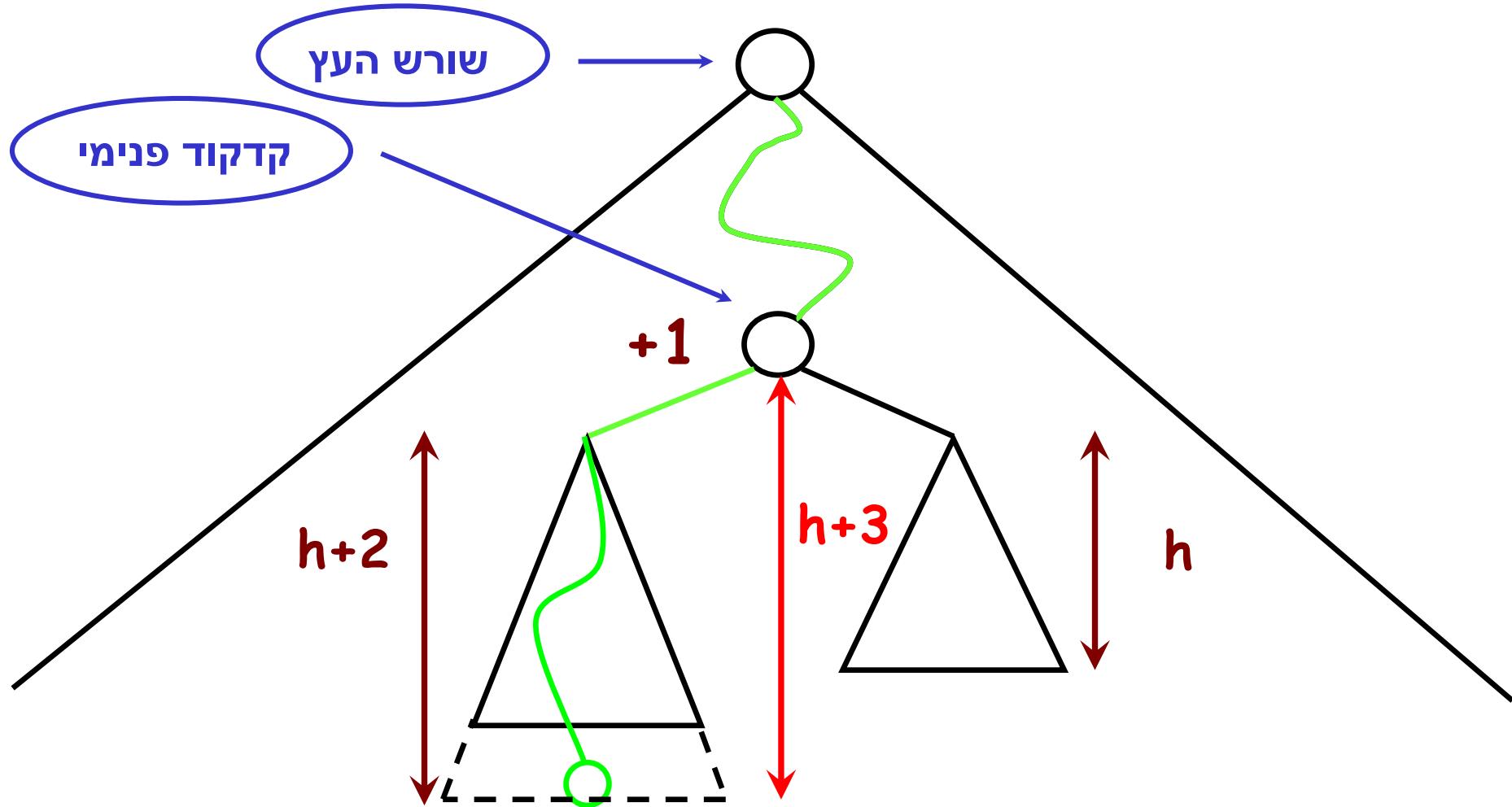
# עצי AVL: הכנסה - ניתוח



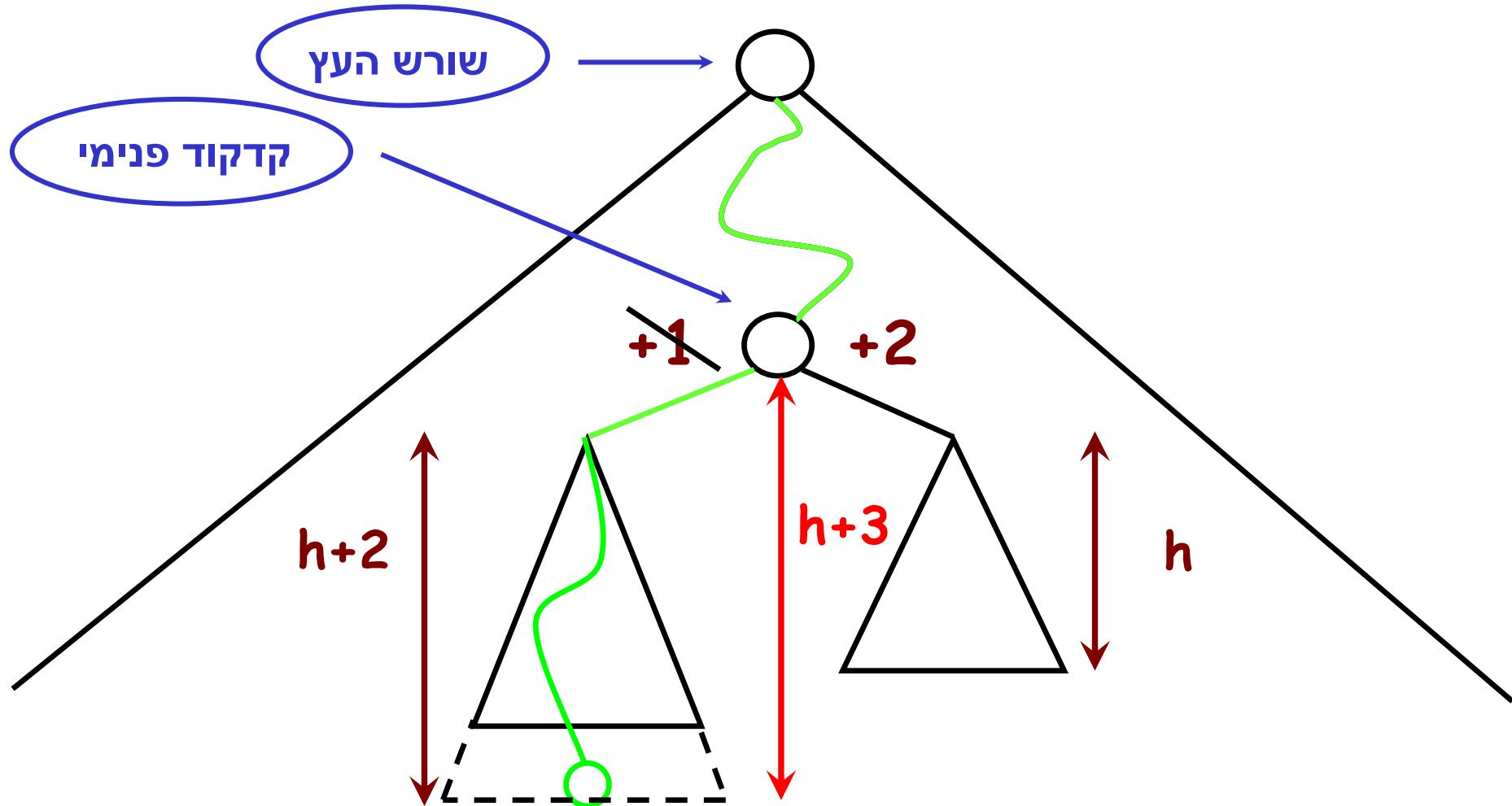
# עצי JAVA: הכנסה - ניתוח



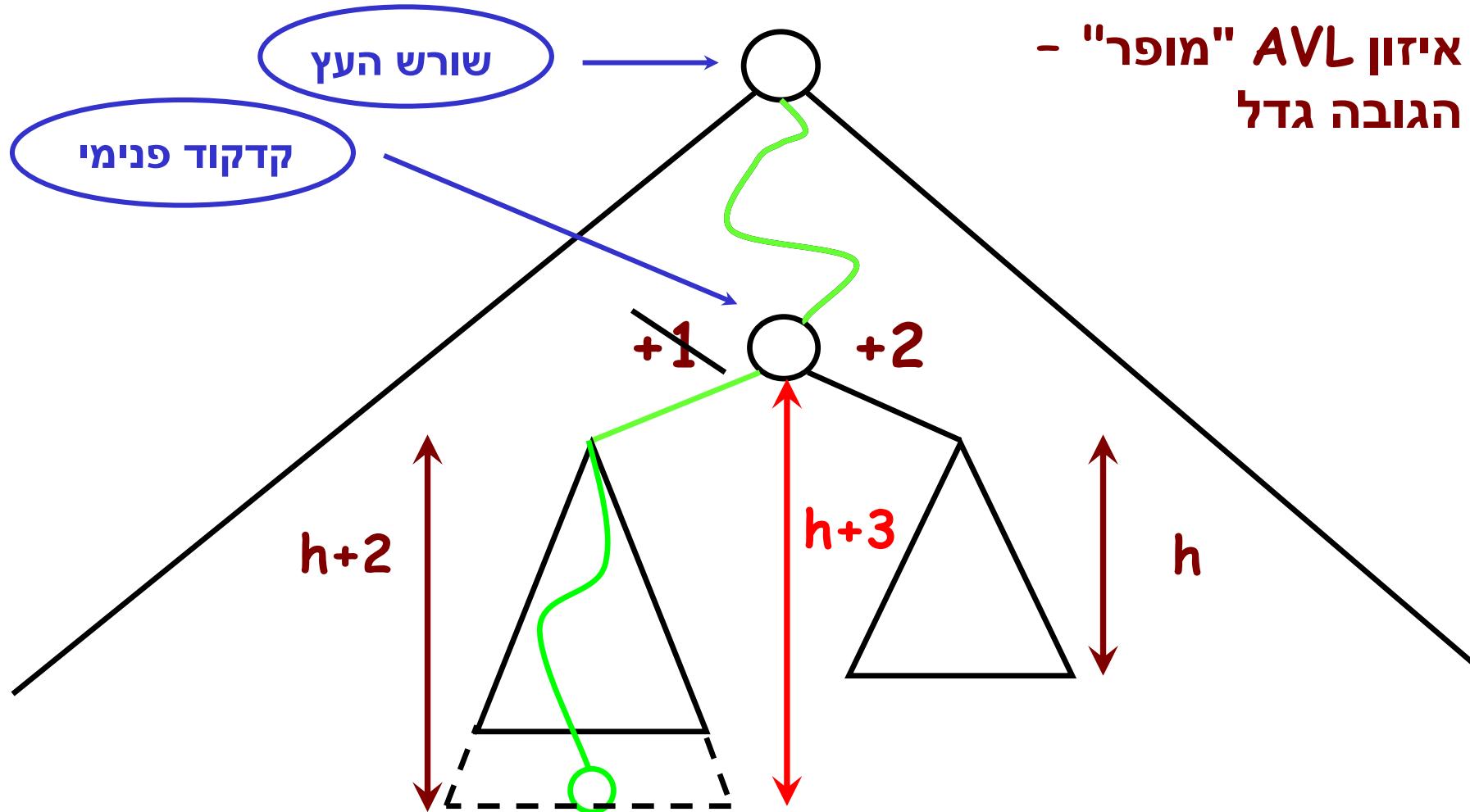
# עצי JAVA: הכנסה - ניתוח



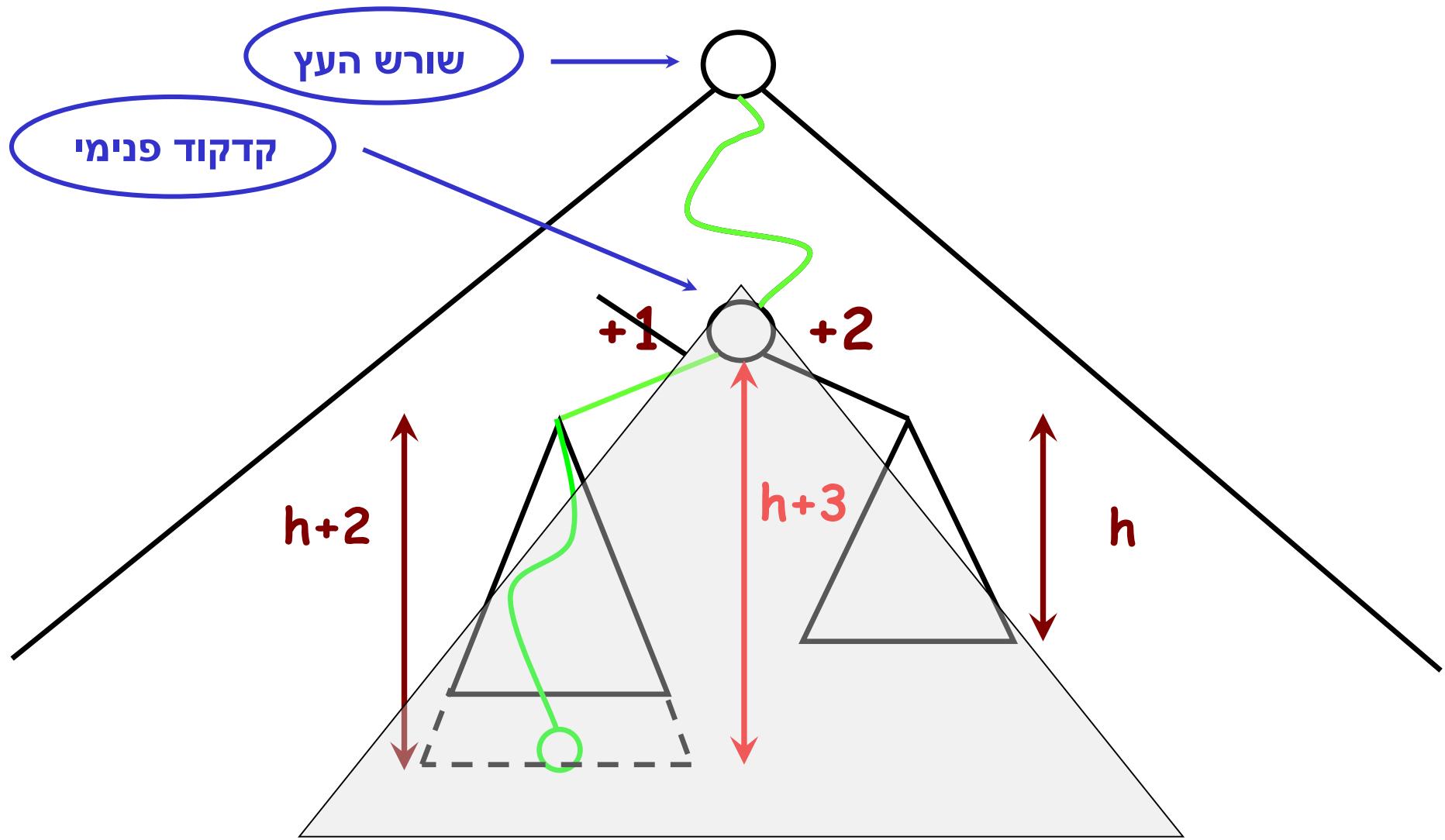
# עצי TVA: הכנסה - ניתוח



# עצי AVL: הכנסה - ניתוח

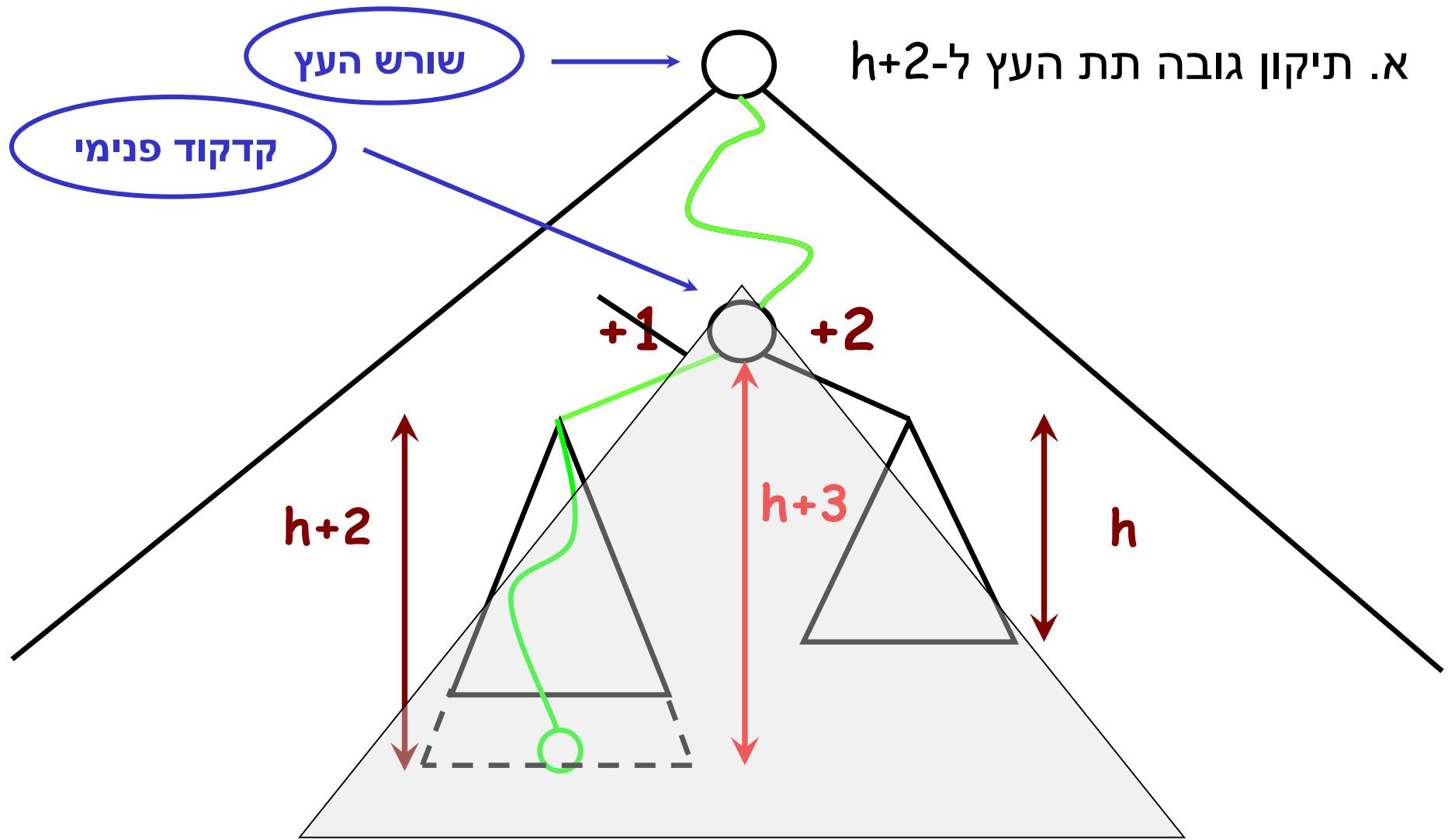


# כיצד ניתן להתגבר על הבועה?

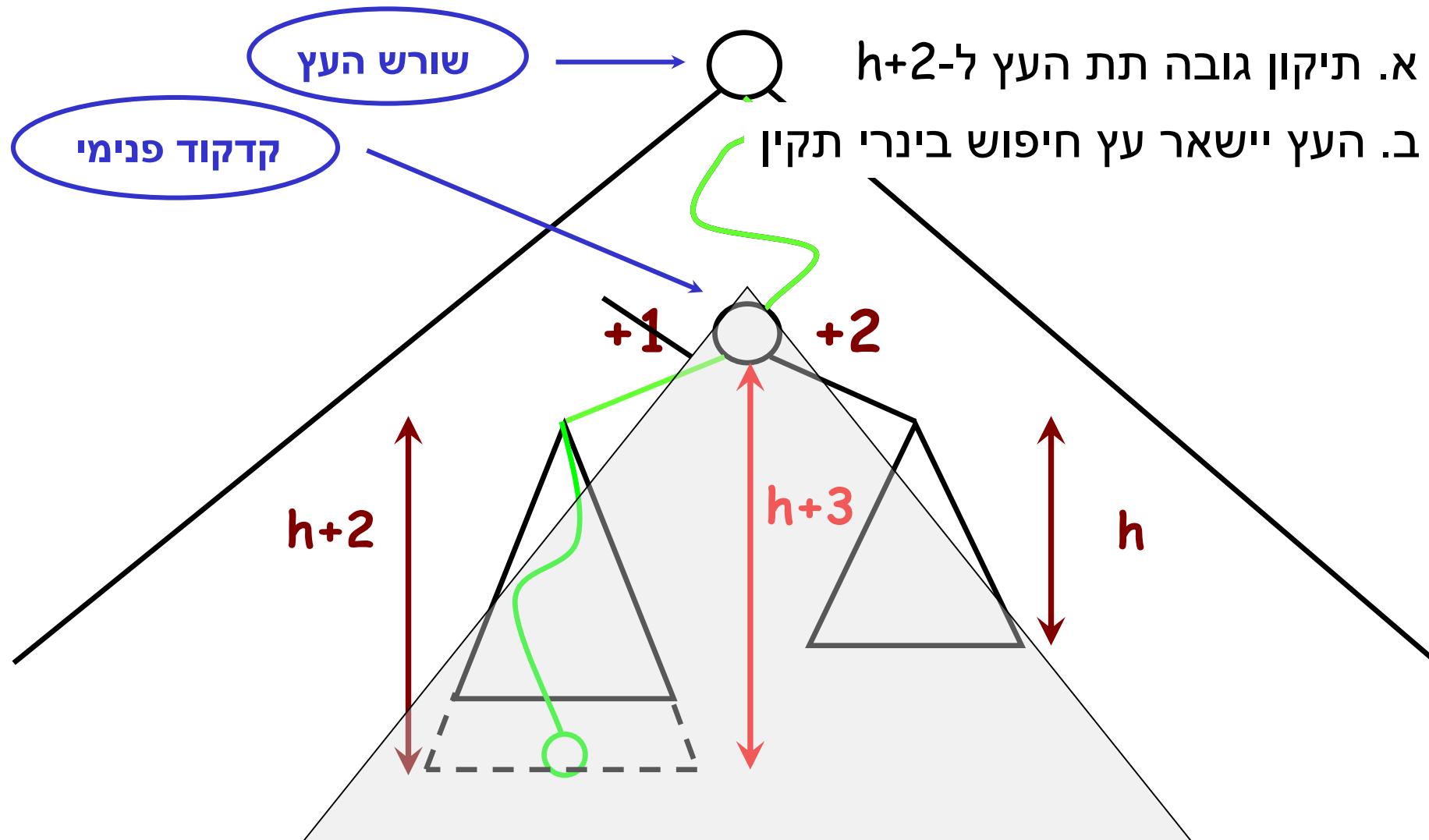


# כיצד ניתן להתגבר על הבועה?

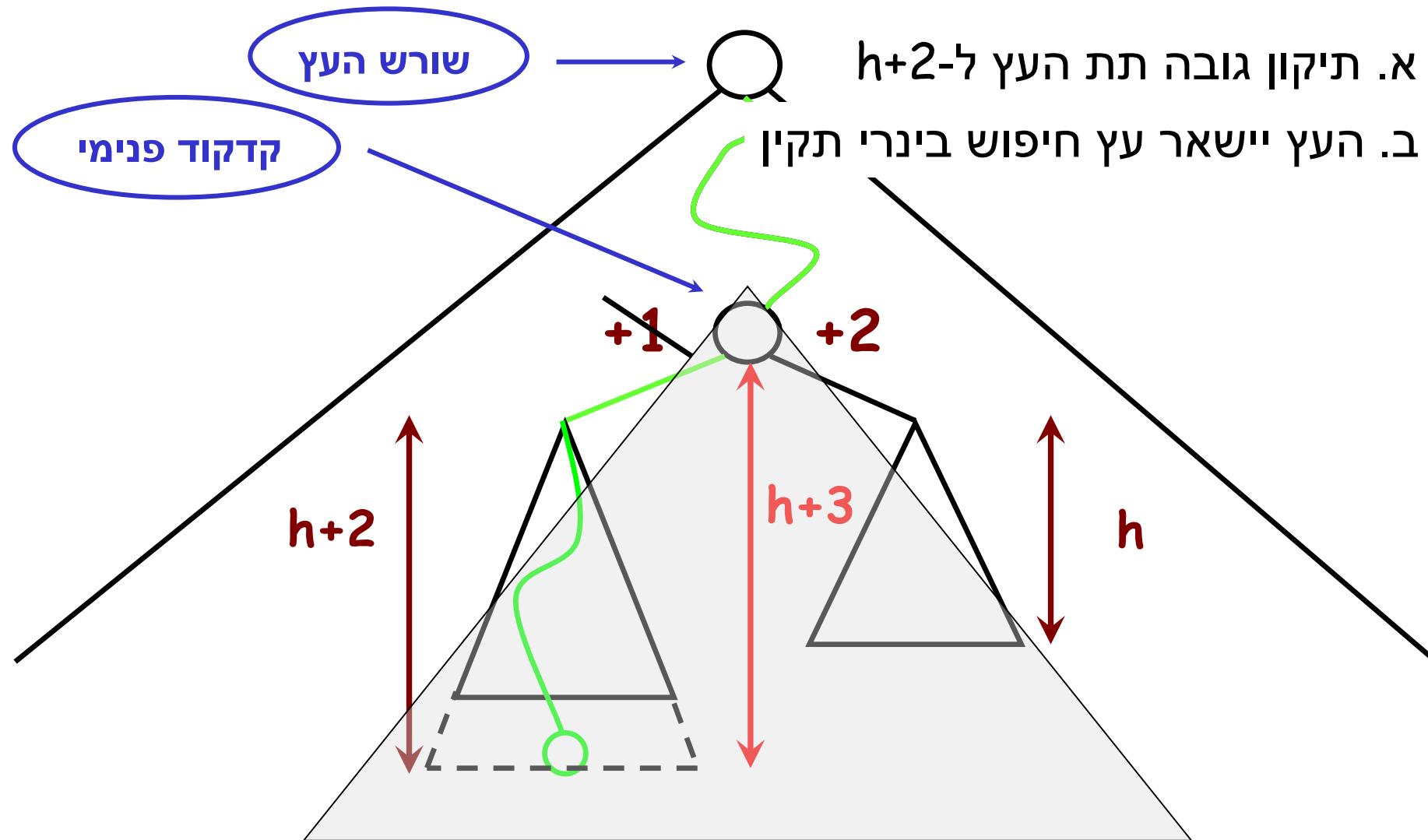
א. תיקון גובה תת העץ  $l-2-h$



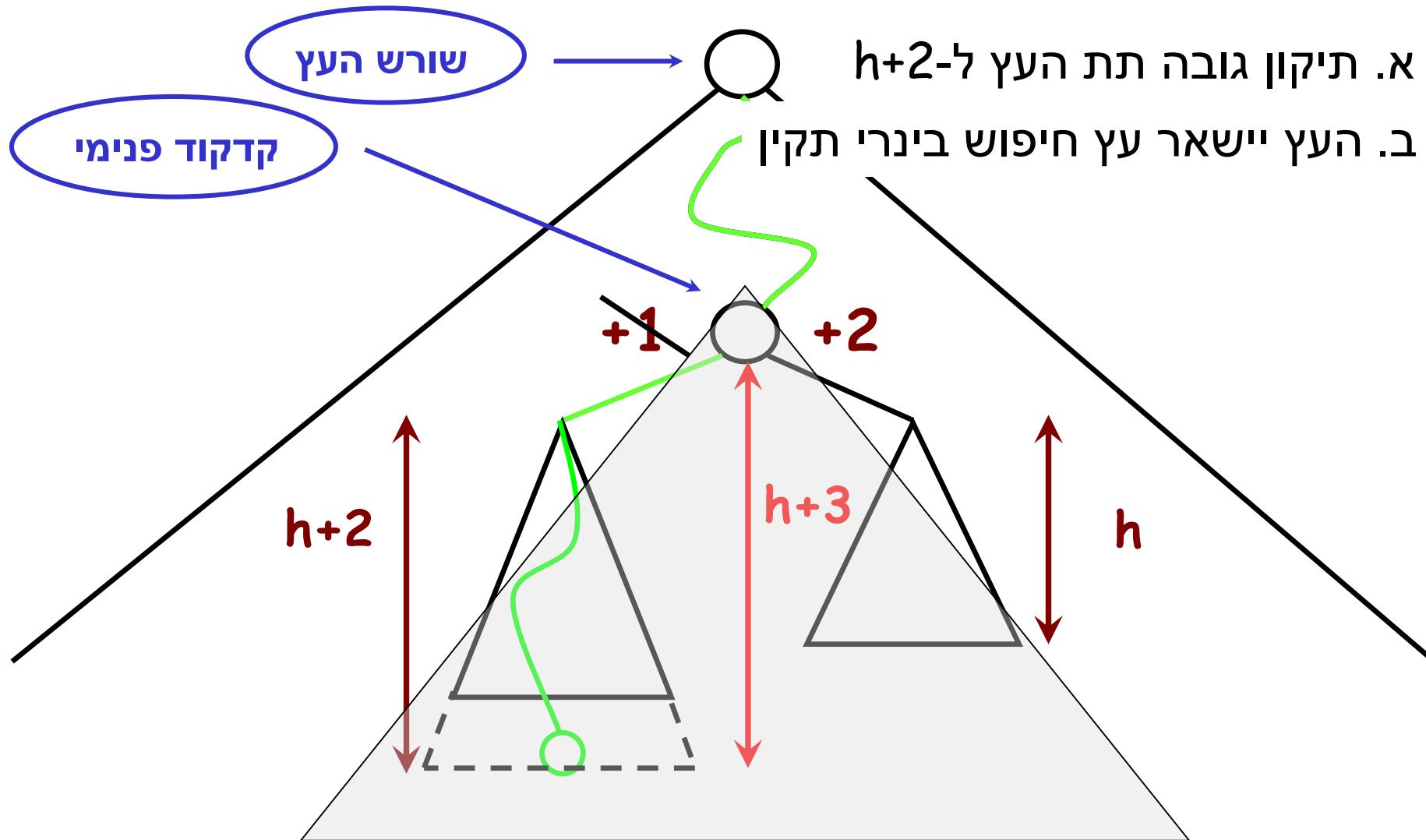
# כיצד ניתן להתגבר על הבועה?



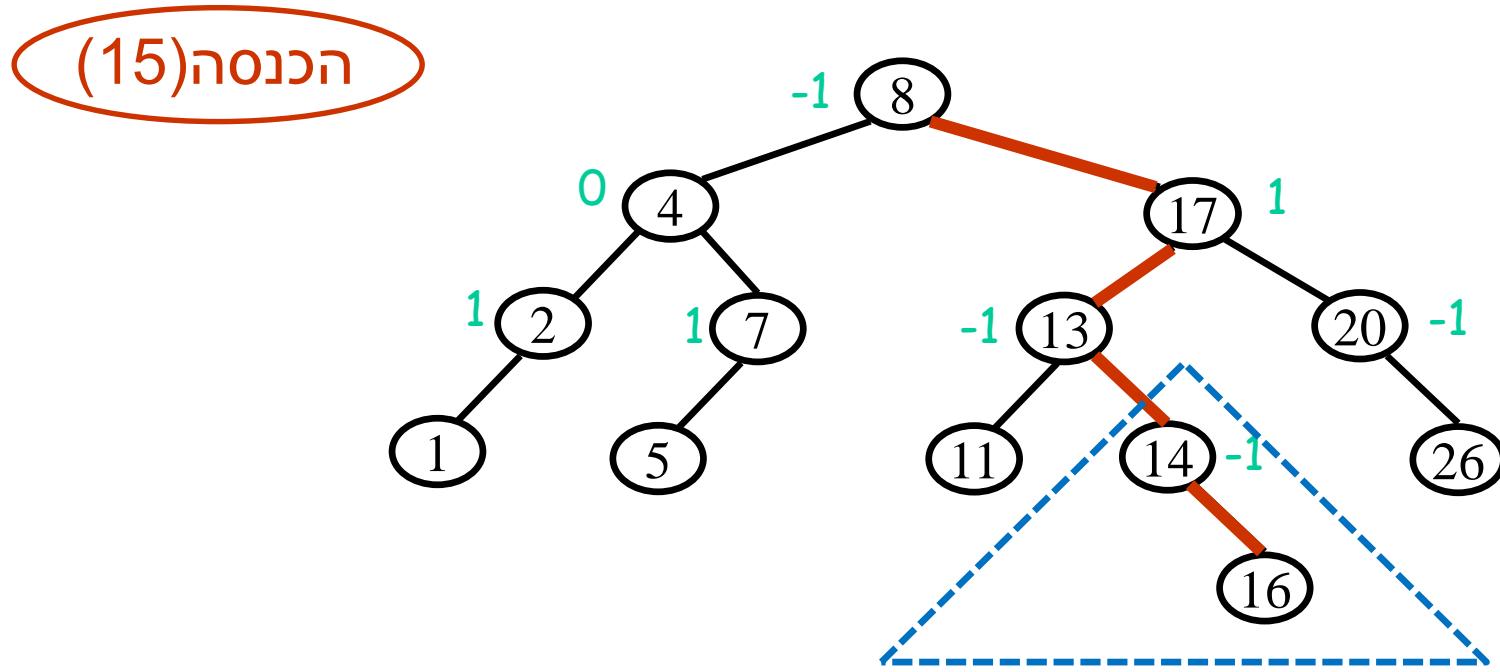
# כל הקדקודים על מסלול הכניסה שמעליו יהיו תקינים



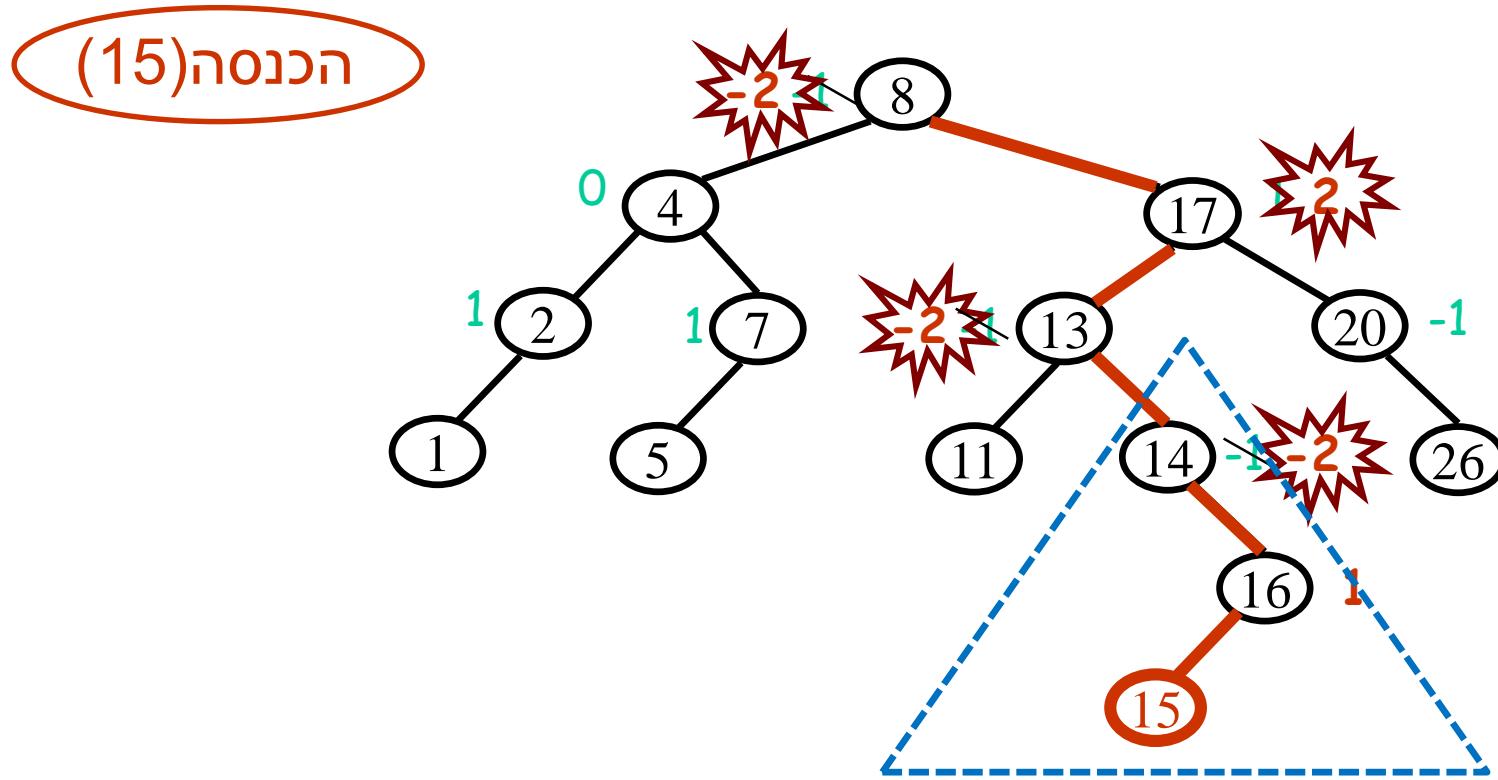
# כיצד נבצע? ומה עלות זמן הריצה לתקן?



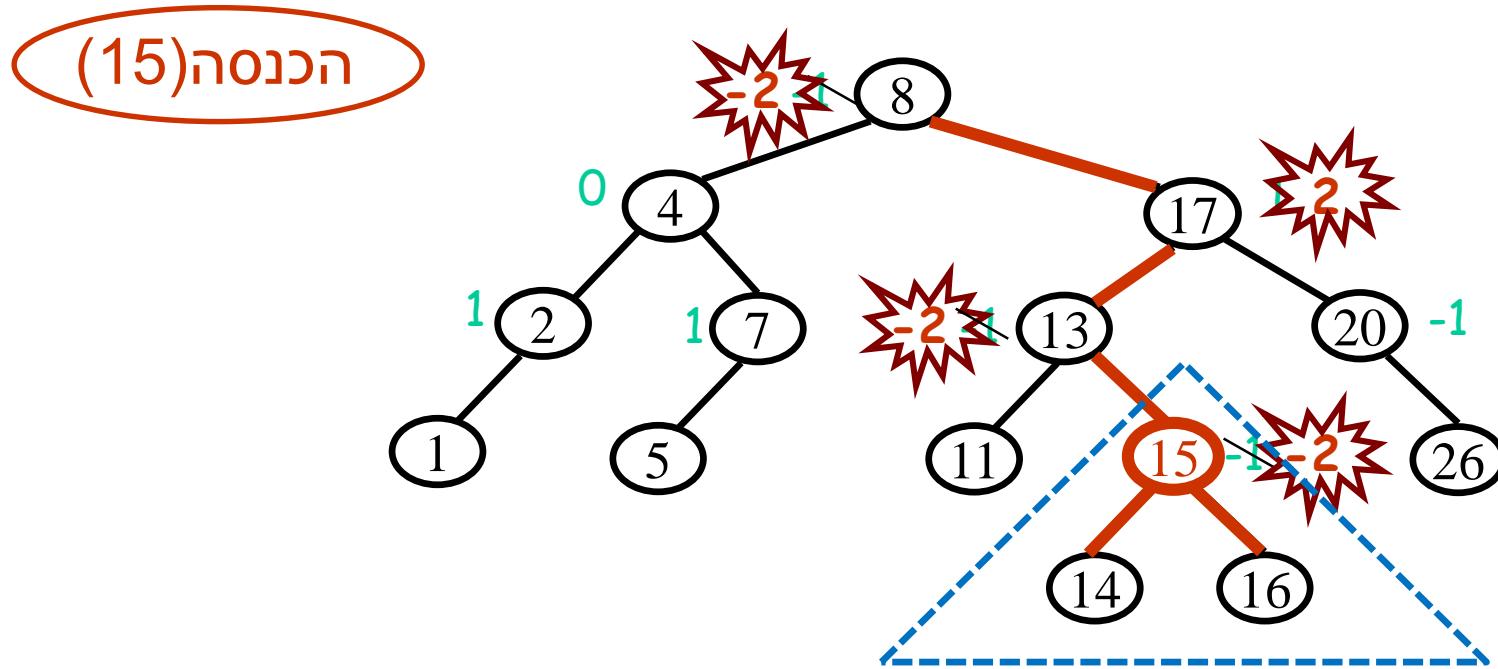
# דוגמא



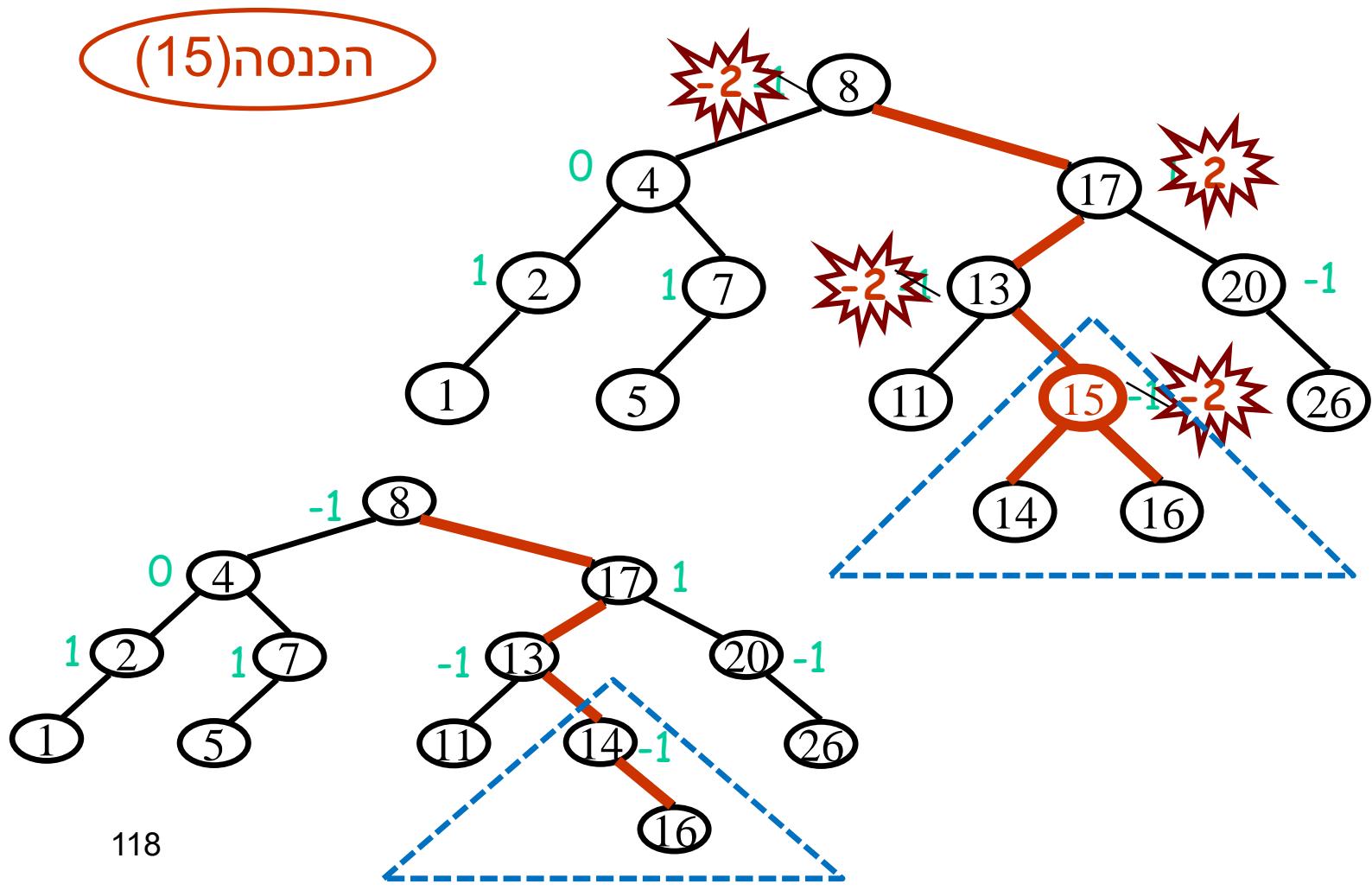
# דוגמא



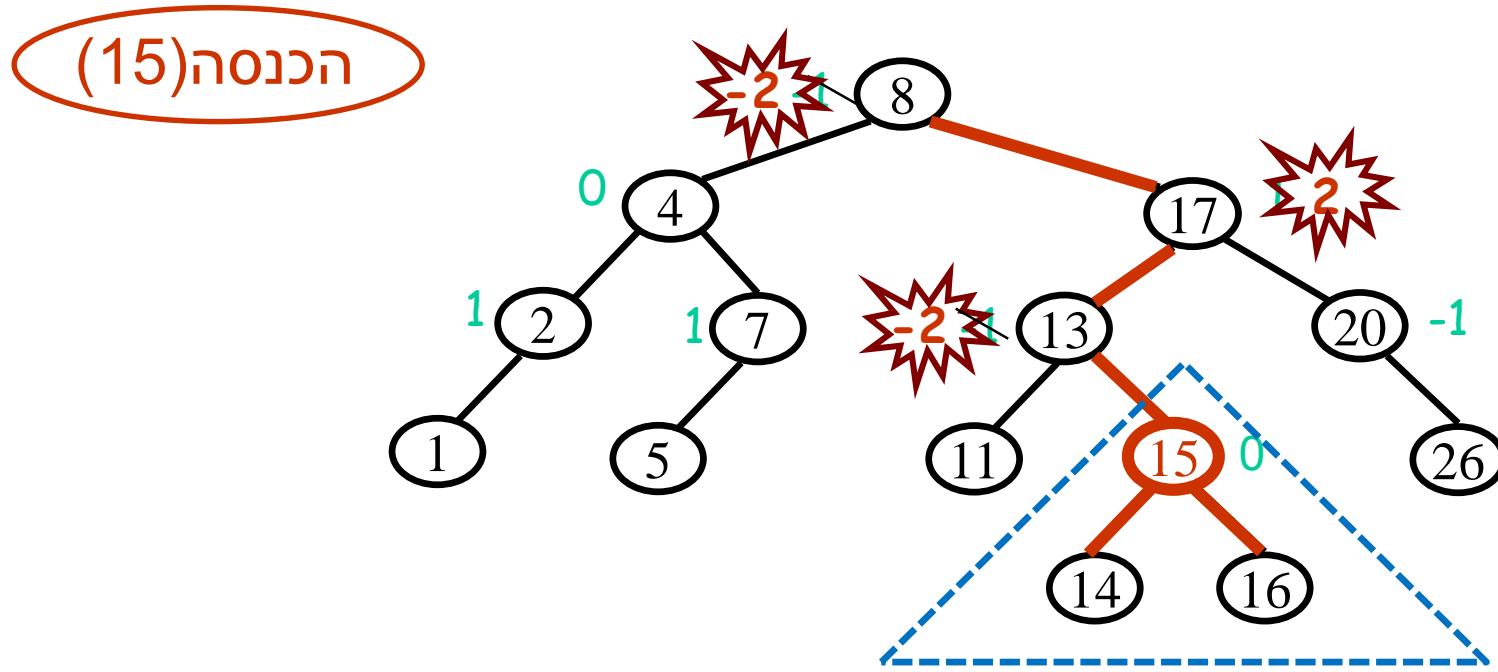
# דוגמא



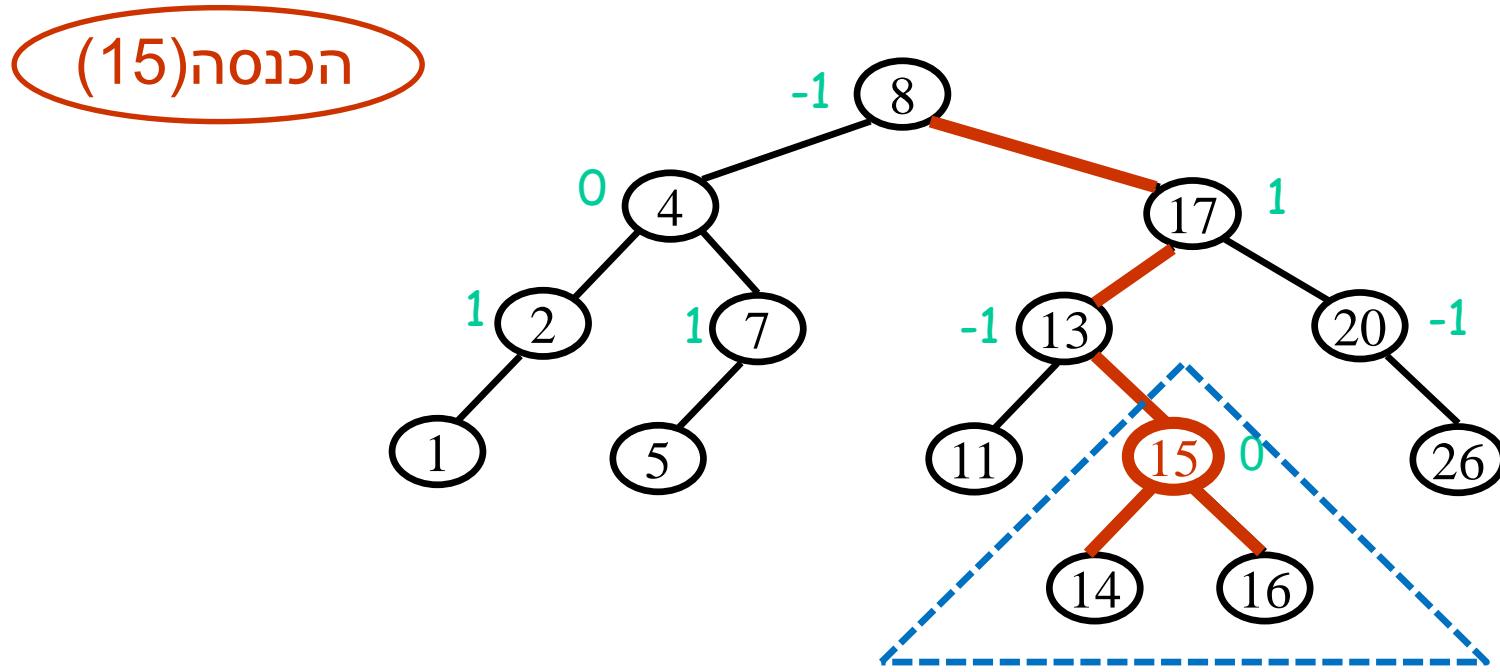
# דוגמא



# דוגמא

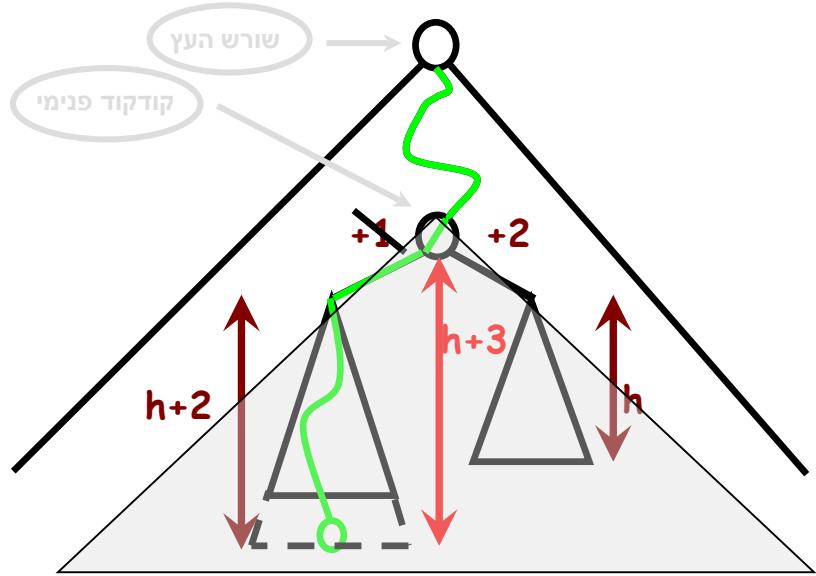


# דוגמא



# עצי AVL: הכנסה - ניתוח

## 1. איזון AVL "מודרן", 2. הגובה גדול



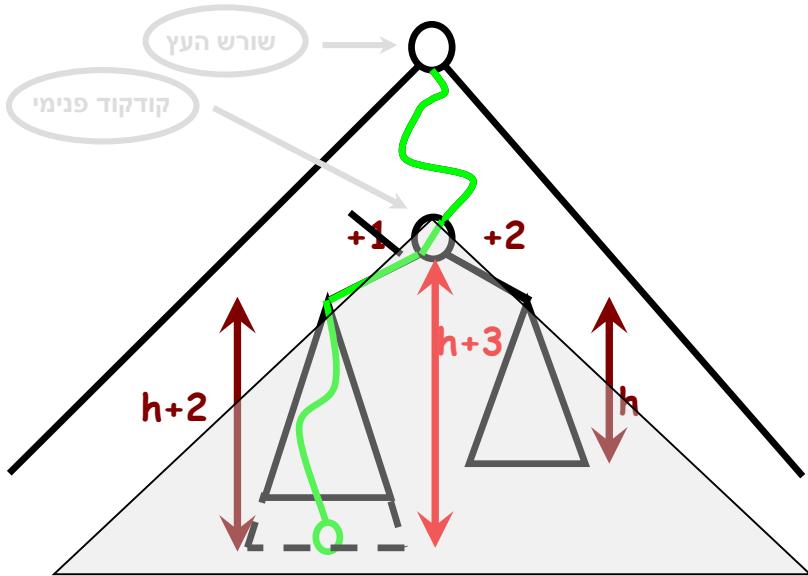
# עצי AVL: הכנסה - ניתוח

## 1. איזון AVL "מודרן", 2. הגובה גדול

רצוי: ארגון התת-עץ כך ש:

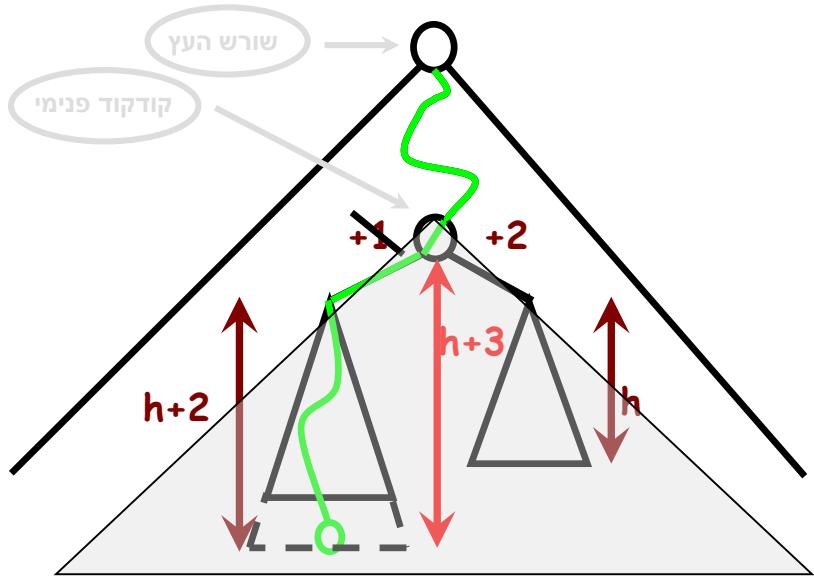
א. גובהו יהיה  $h+2$

ב. זמן לביצוע הארגון  $O(1)$



# עצי AVL: הכנסה - ניתוח

## 1. איזון AVL "מודרן", 2. הגובה גדול



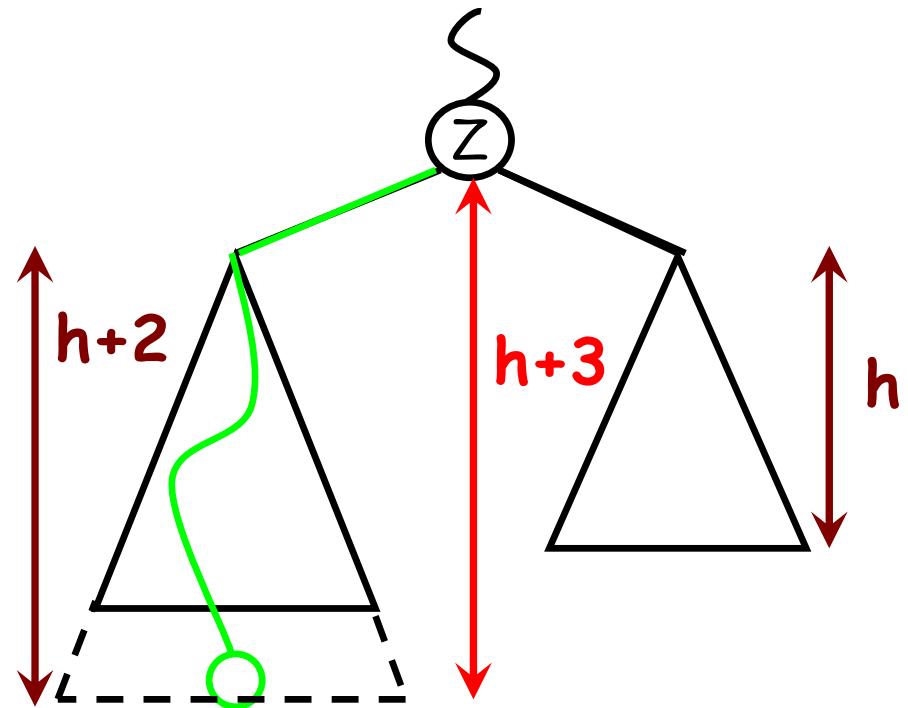
רצוי: ארגון התת-עץ כך ש:

- גובהו יהיה  $h+2$
- זמן לביצוע הארגון  $O(1)$

דבר:

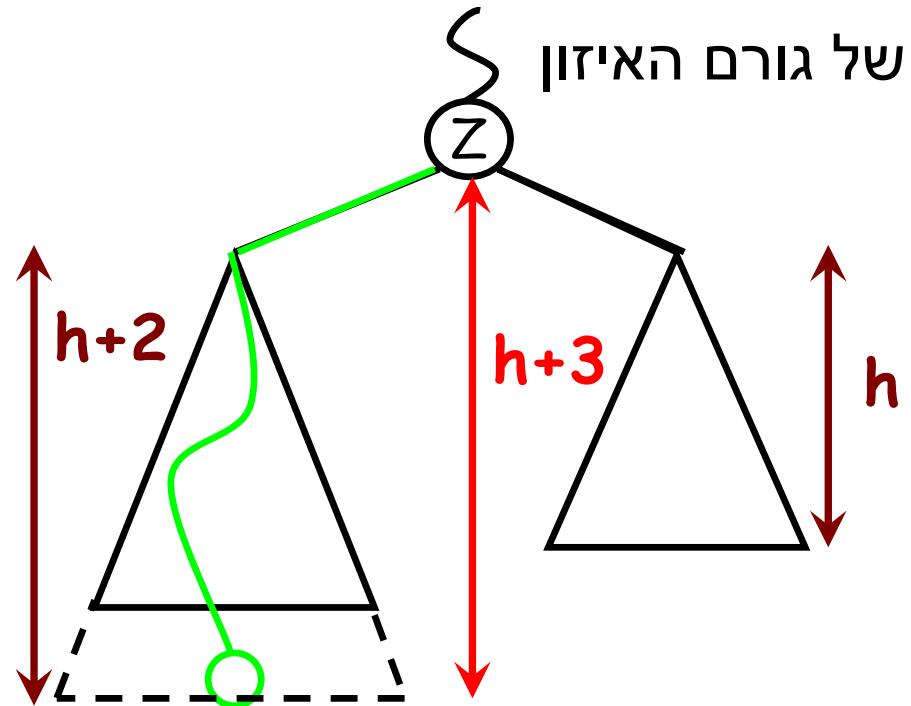
**גלגולים** של תת-העץ

# עצים AVL: גלגולים



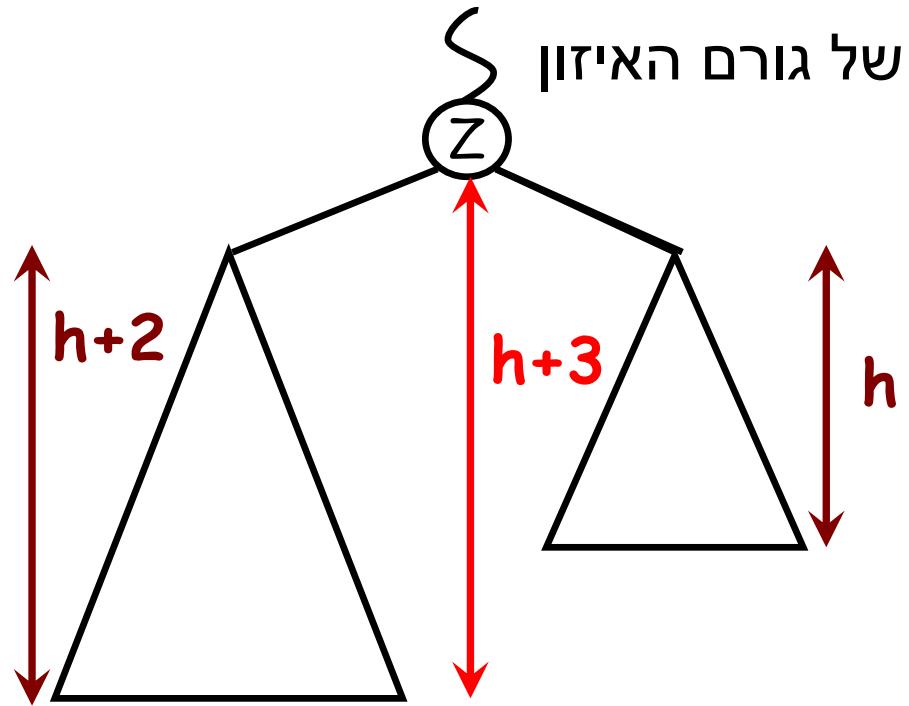
# עצי AVL: גלגולים

Z הקדקוד הראשון בו הtgtלה הפרה של גורם האיזון

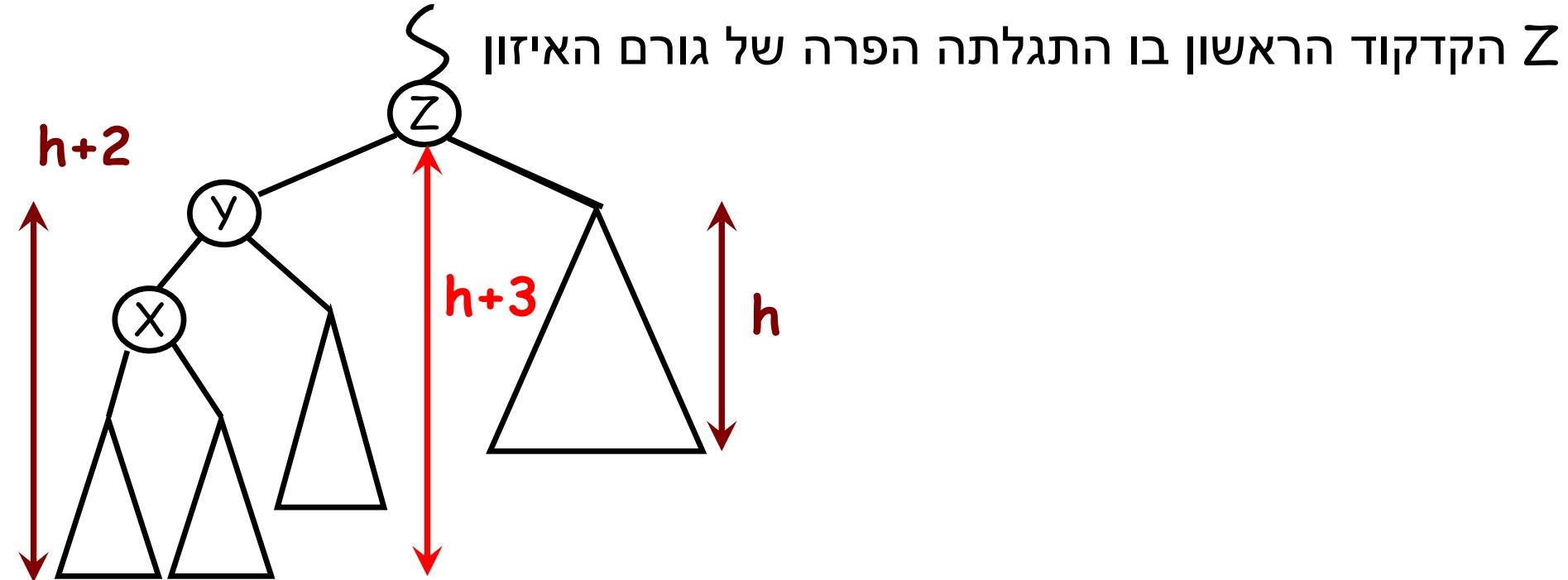


# עצי AVL: גלגולים

Z הקדקוד הראשון בו הtgtalta הפרה של גורם האיזון

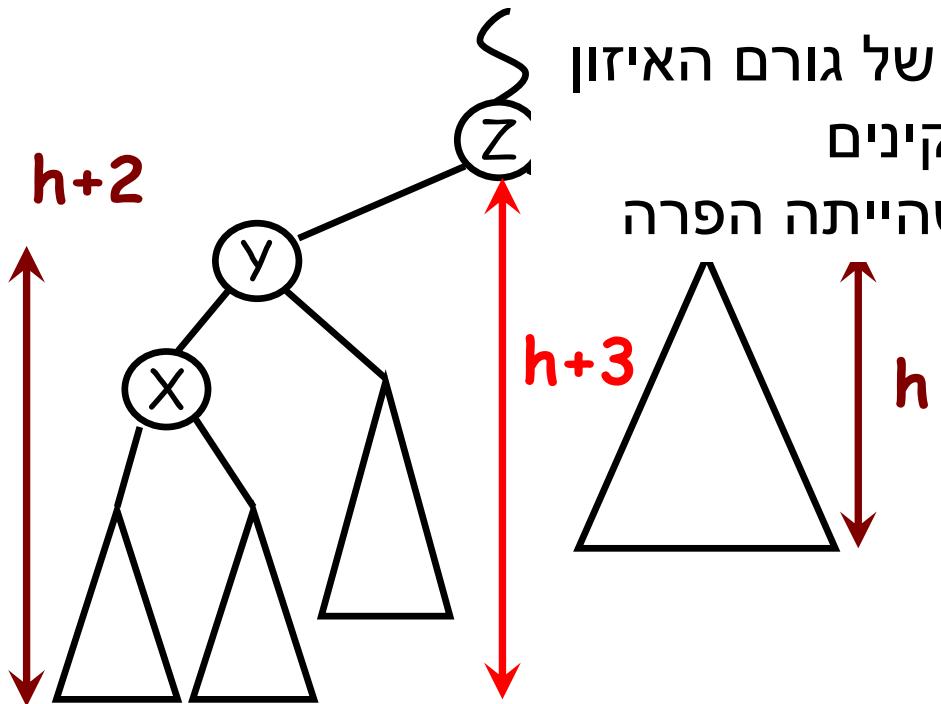


# עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1

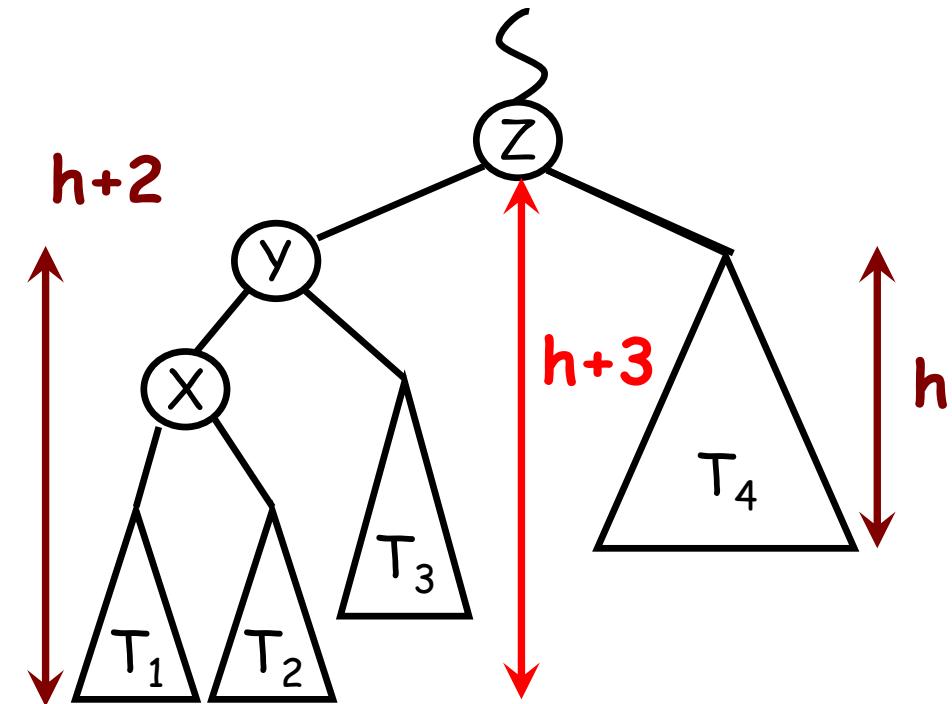


# עצי LVA: גלגולים - אפשרות 1

Ζ הקדקוד הראשון בו הtgtلتה הפרה של גורם האיזון  
לכן: גורמי האיזון של  $z$ ,  $y$ ,  $x$  תקינים  
ויש  $z$  בן ו"נכד" כי אחרת לא יתכן שהייתה הפרה

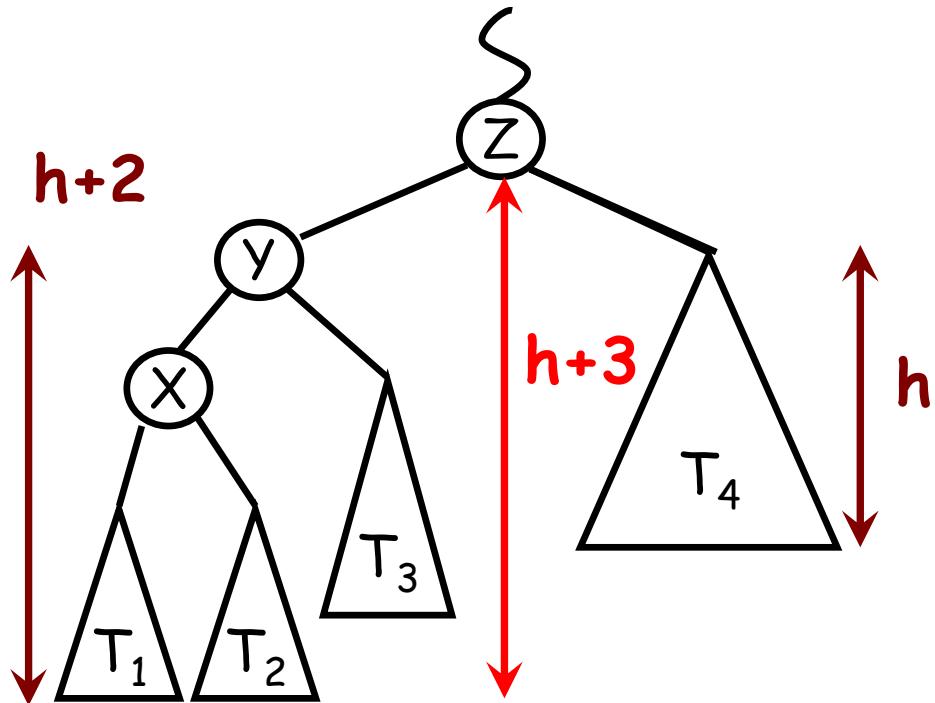


# עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1



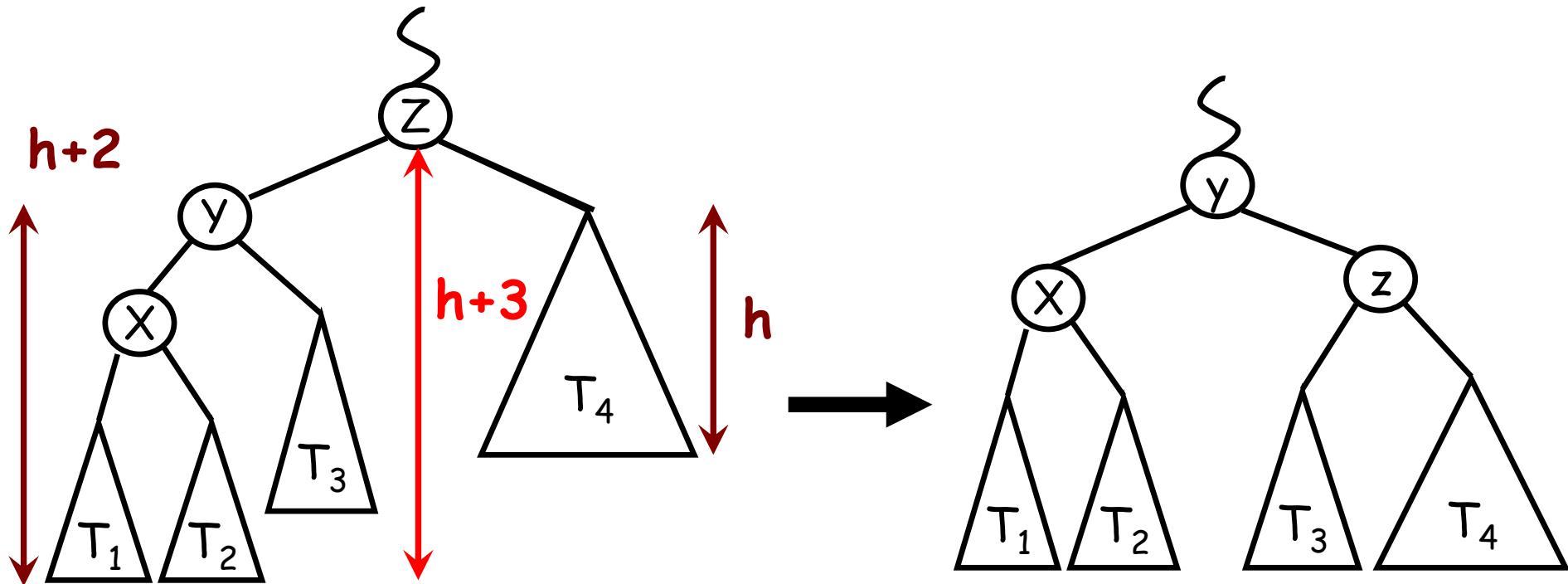
מה סדר איברי העץ?

# עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1



סדר אברי העץ:  
 $T_1, x, T_2, y, T_3, z, T_4$

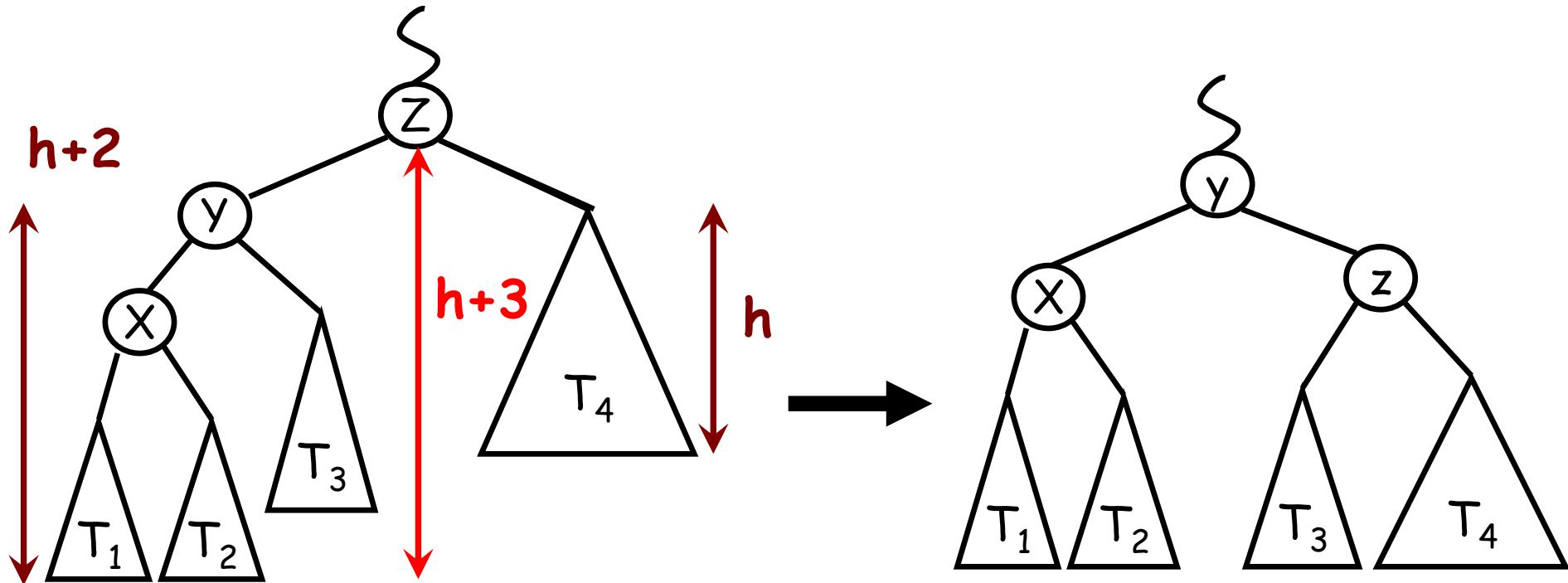
# עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1



סדר אברי העץ:

$T_1, x, T_2, y, T_3, z, T_4$

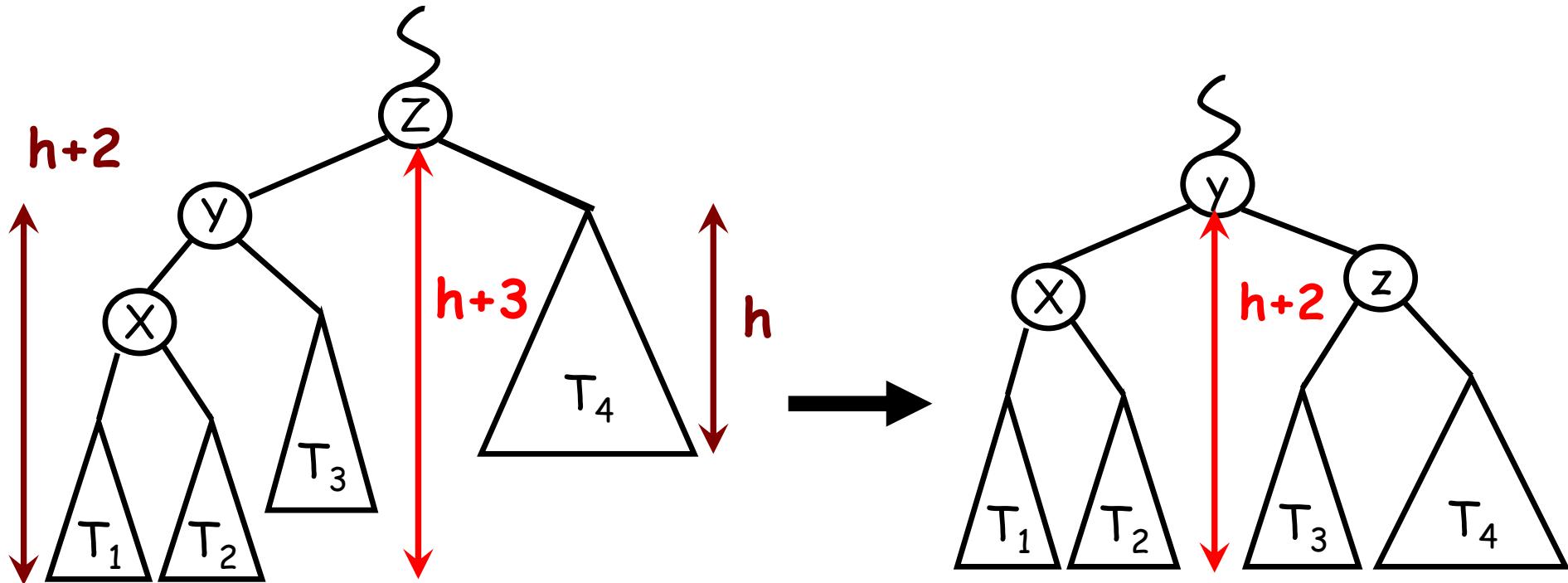
# עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1



סדר אברי העץ:  
 $T_1, x, T_2, y, T_3, z, T_4$

מה העומק ?

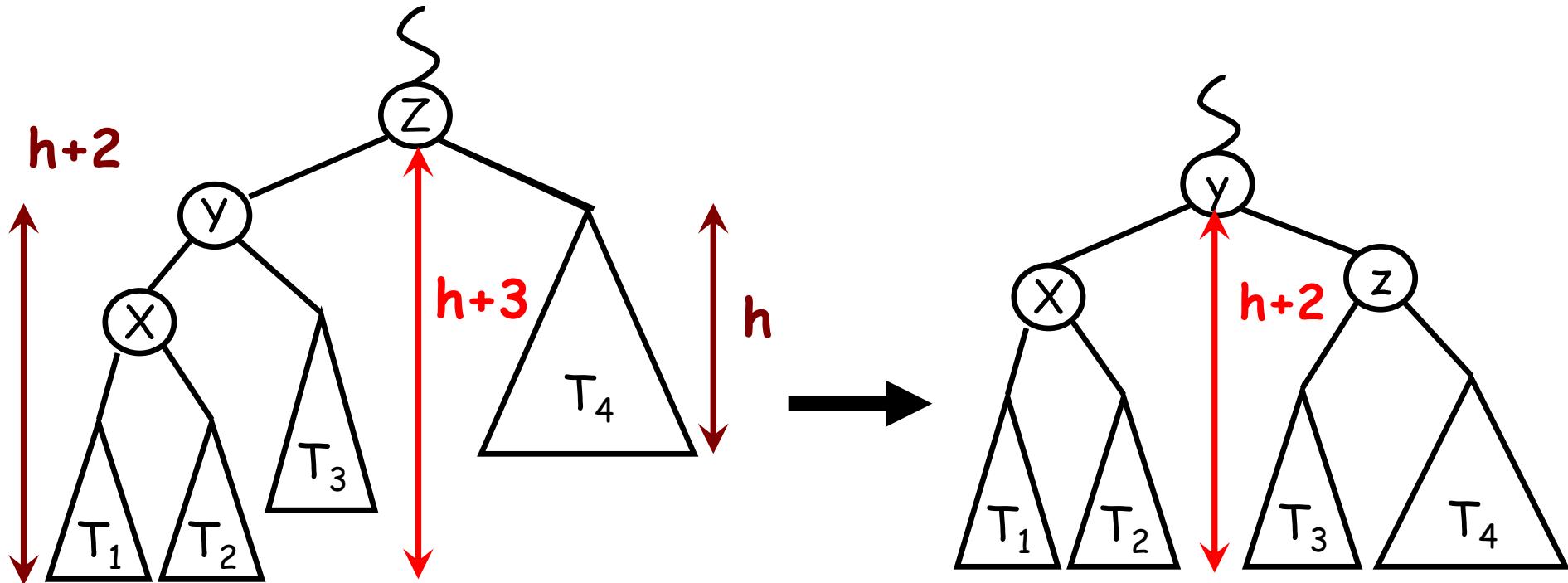
# עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1



סדר אברי העץ:  
 $T_1, x, T_2, y, T_3, z, T_4$

מה העומק ?  
 $h+2$

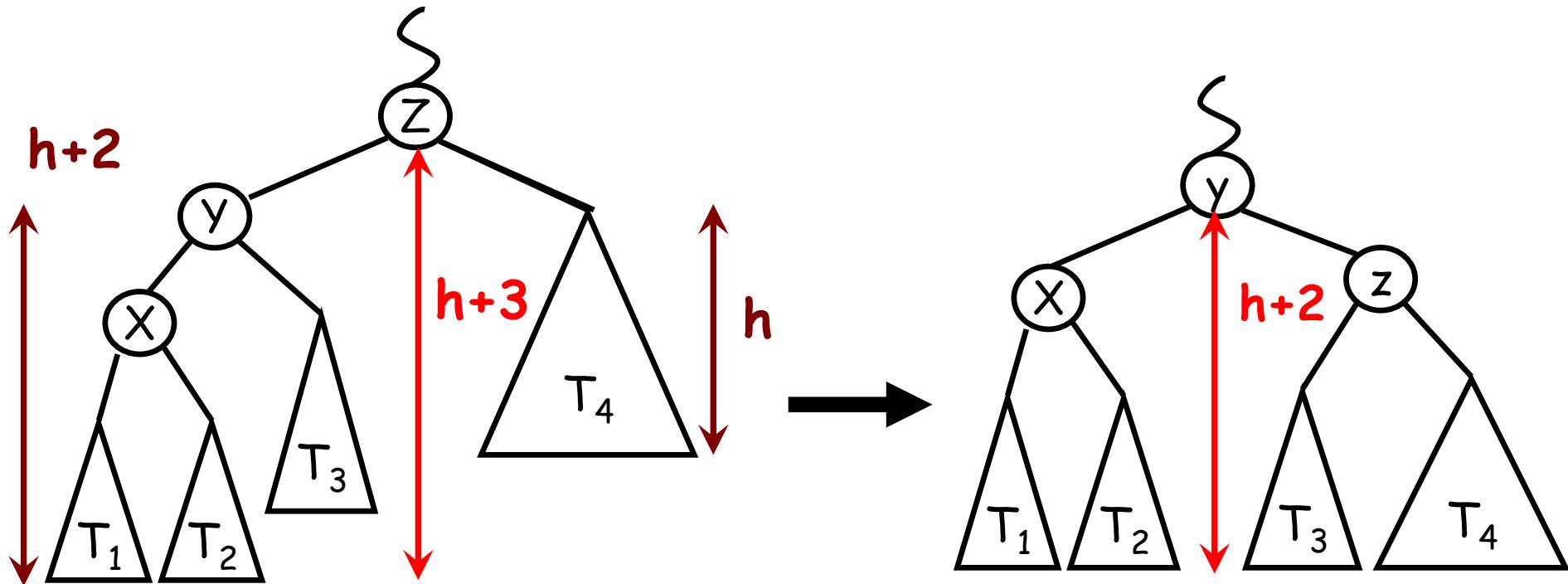
# עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1



סדר אברי העץ:  
 $T_1, x, T_2, y, T_3, z, T_4$

מה גורמי האיזון של  
 $x, y, z$   
?

# עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1

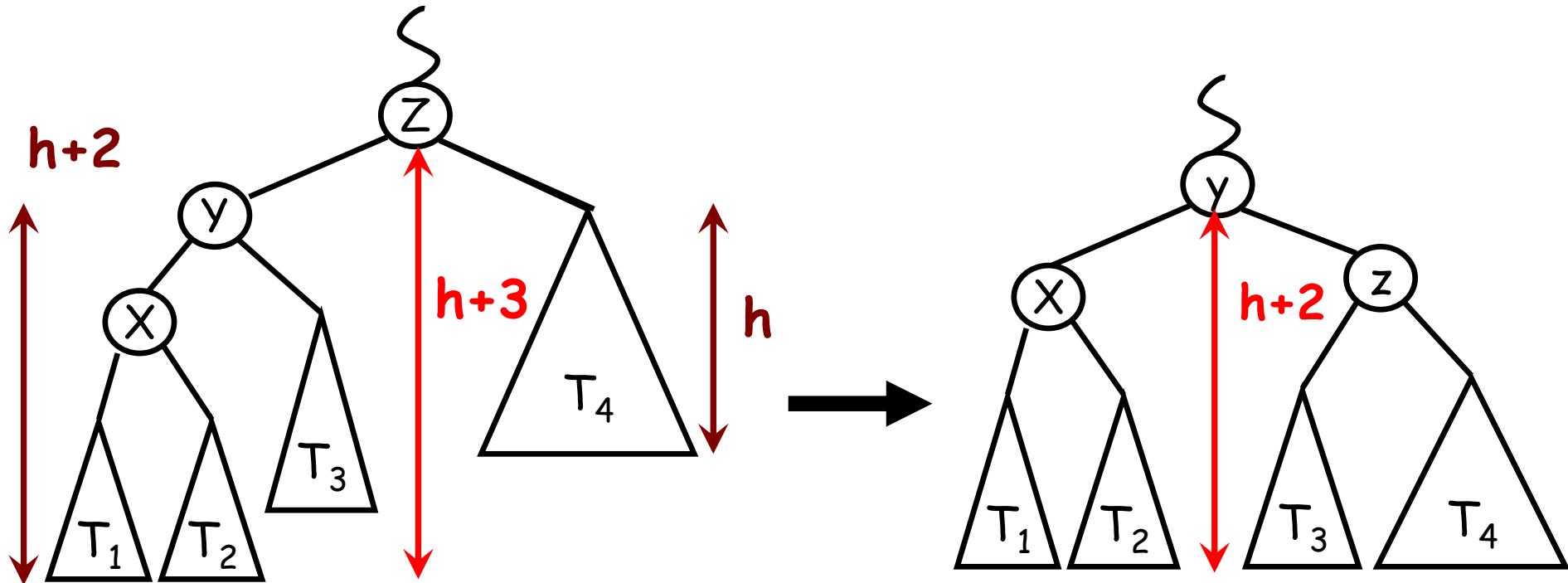


סדר אבריו העץ:

$T1, x, T2, y, T3, z, T4$

מה לגבי סדר האיברים ?

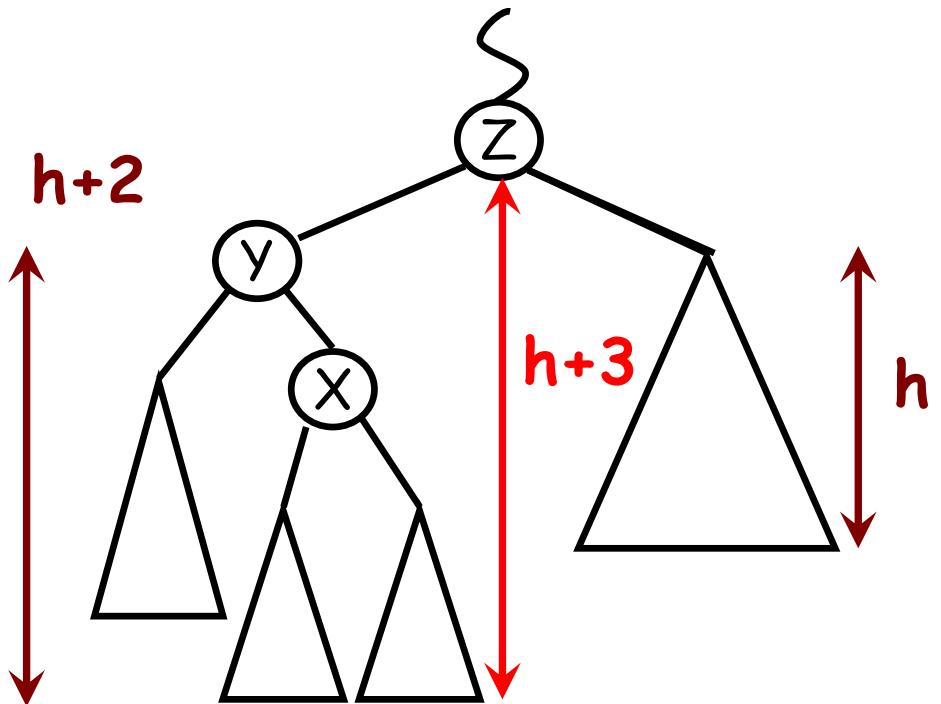
# עצי AVL: גלגולים - אפשרות 1



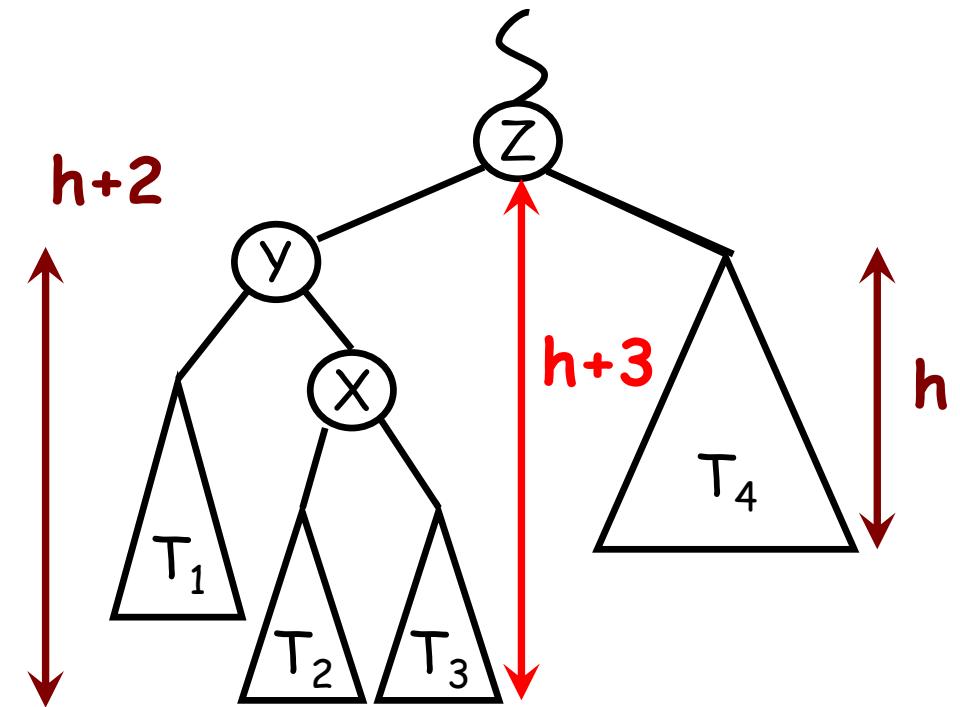
סדר אברי העץ:  
 $T_1, x, T_2, y, T_3, z, T_4$

מה לגבי סדר האיברים?  
אותו סדר !!

## עצים AVL: גלגולים - אפשרות 2

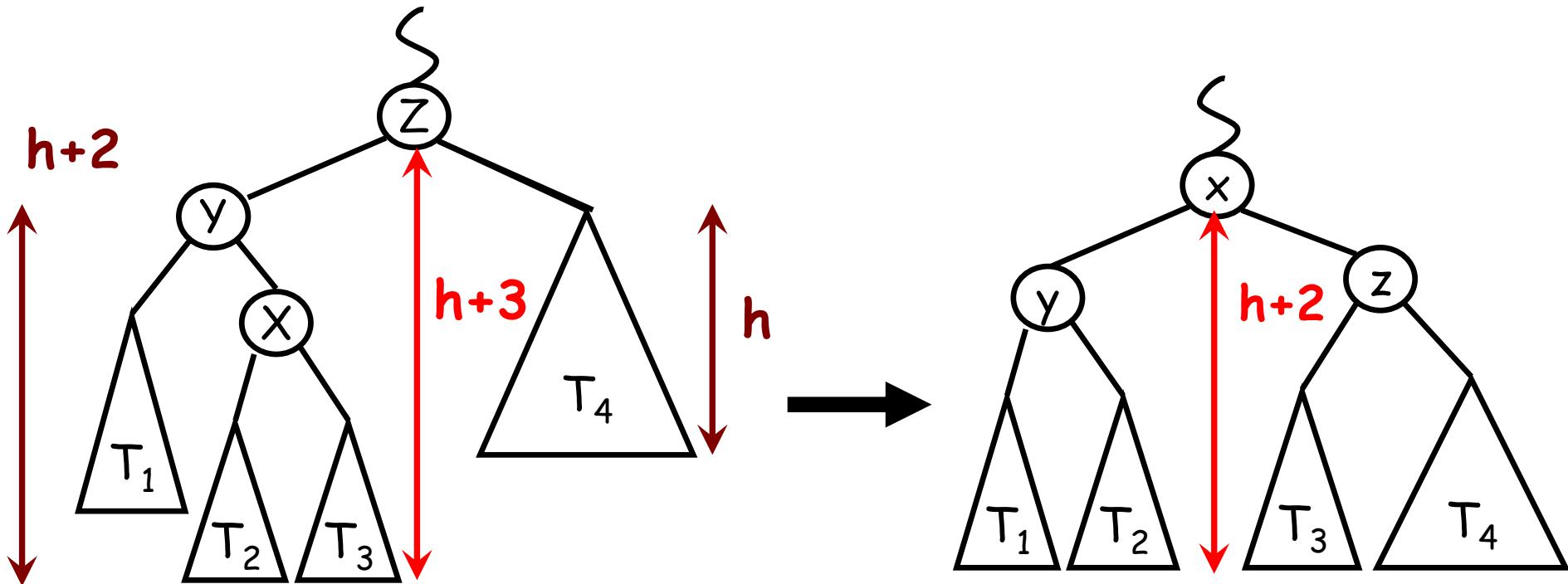


## עצים AVL: גלגולים - אפשרות 2



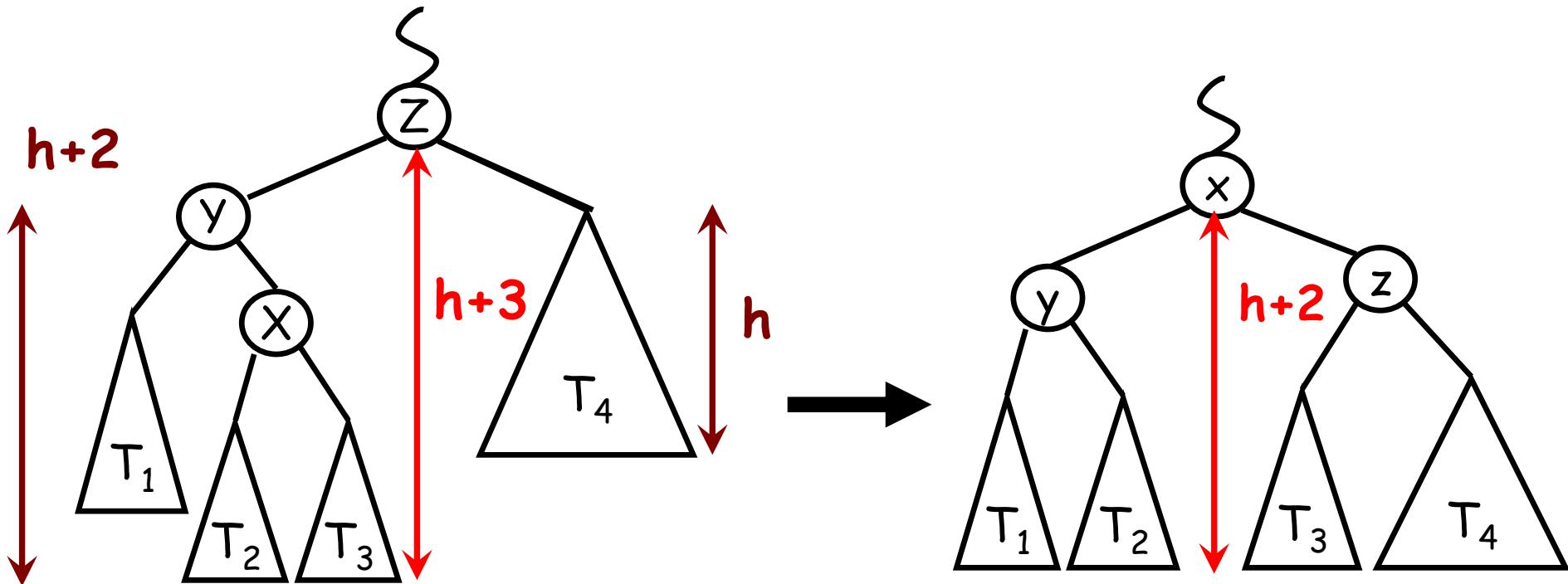
שימוש לב לסדר איברי התת-עץ:  
 $T1, y, T2, x, T3, z, T4$

## עצי AVL: גלגולים - אפשרות 2



שימוש לב לסדר איברי התת-עץ:  
 $T1, y, T2, x, T3, z, T4$

## עצי AVL: גלגולים - אפשרות 2



שימוש לב לסדר איברי התת-עץ:  
 $T_1, y, T_2, x, T_3, z, T_4$

שוב - אותו סדר  
אבל העומק  $h+2$

# עצי AVL - הכנסת ערך x לעץ

1. הכנס את x כמו לעץ חיפוש בינרי. יהיו  $v$  העלה שהוסף.
2. כל עוד  $\text{root} \neq v$  בצע:
  - א-  $v = \text{parent}(v)$
  - ב- שנה פרמטר איזון של  $v$ .
  - ג- אם גורם האיזון של  $v$  משתנה ל-0 סימן.
  - ד- אם גורם האיזון של  $v$  משתנה ל-2 (או -2) בצע גלגול מתאים וסימן.

# זמן הכניסה בעץ AVL

$O(h)$	מציאת המקום הדרוש להכנסתו
$O(1)$	הוספת הצומת
$O(h)$	מציאת המקום בו מופר האיזון
$O(1)$	תיקון האיזון

---

$$O(h) = O(\log n) \quad \text{סה"כ}$$

# דוגמאות

הכנו את האיברים הבאים לעץ AVL:

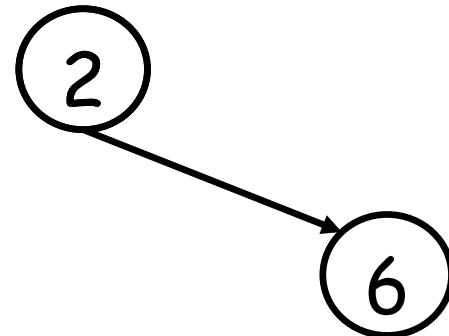
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7

**2,6,4,5,8,3,1,9,10,7**

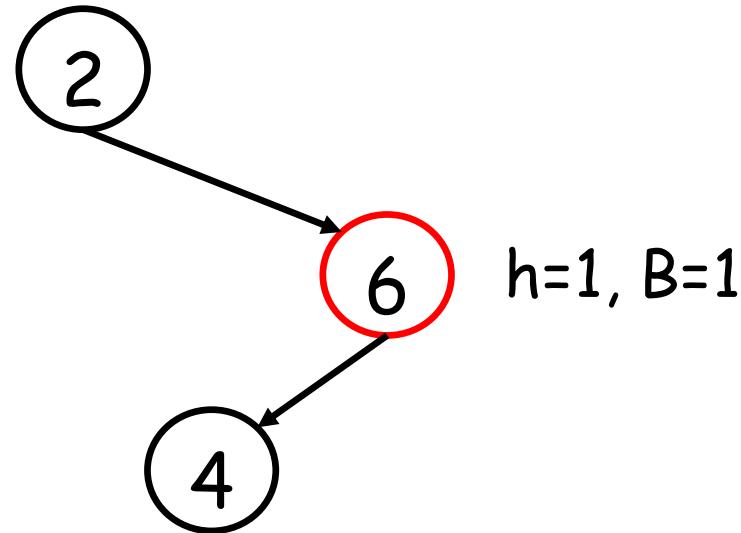
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7

2

2,6,4,5,8,3,1,9,10,7

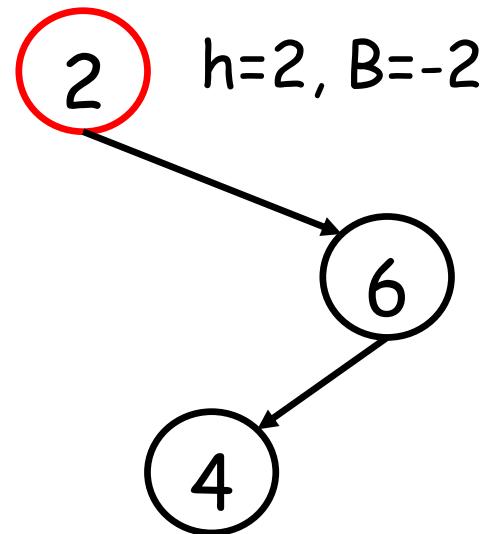


2,6,**4**,5,8,3,1,9,10,7

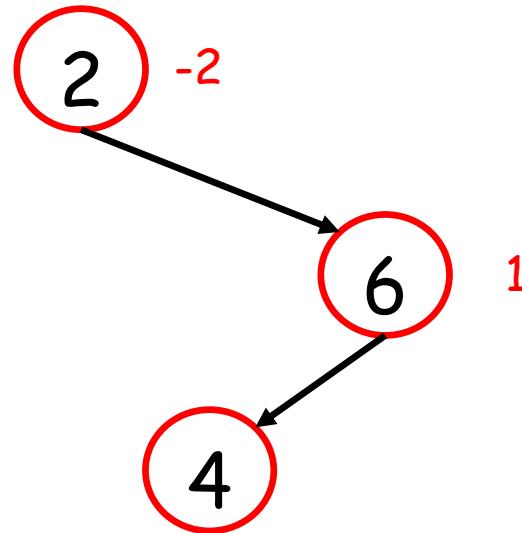


$$h=1, B=1$$

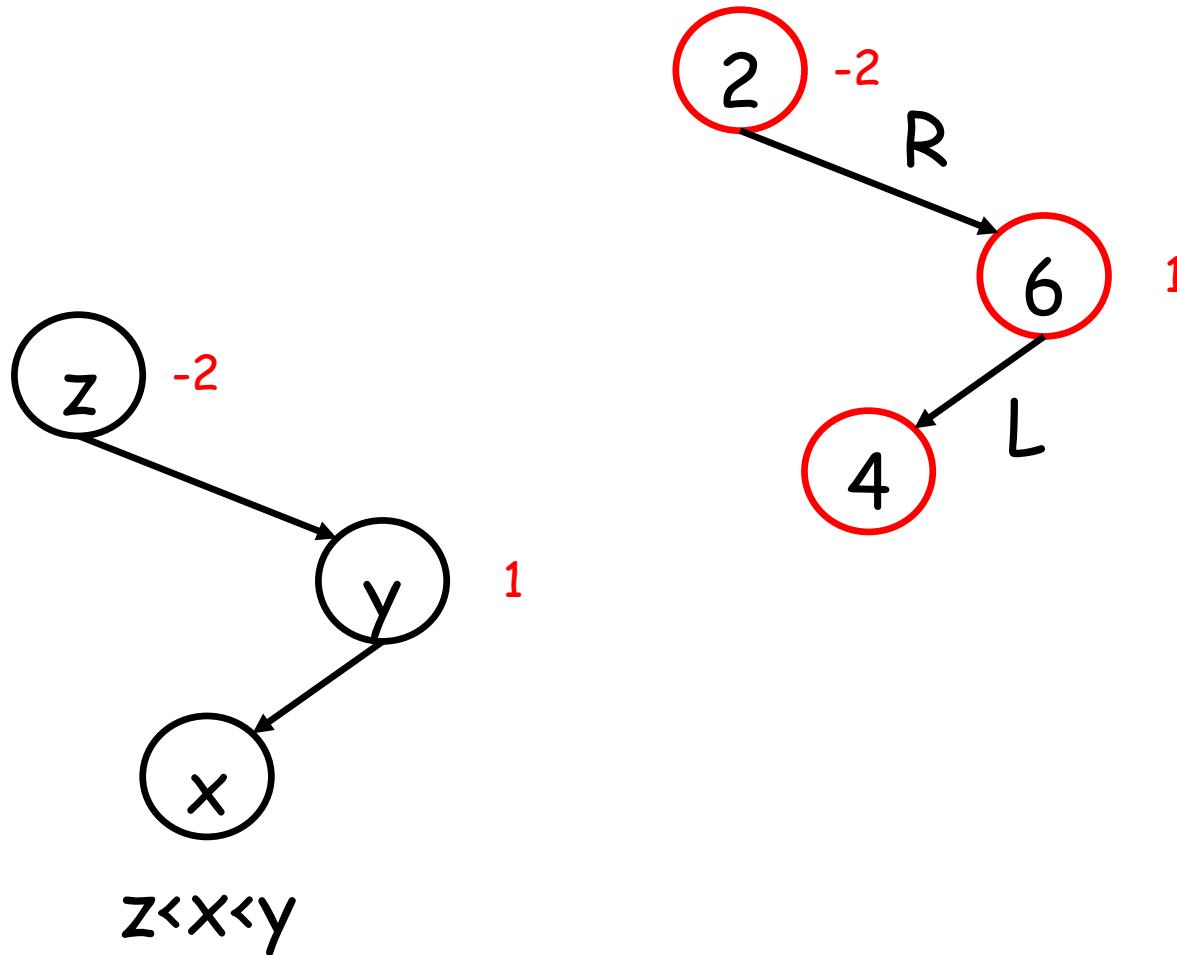
2,6,**4**,5,8,3,1,9,10,7



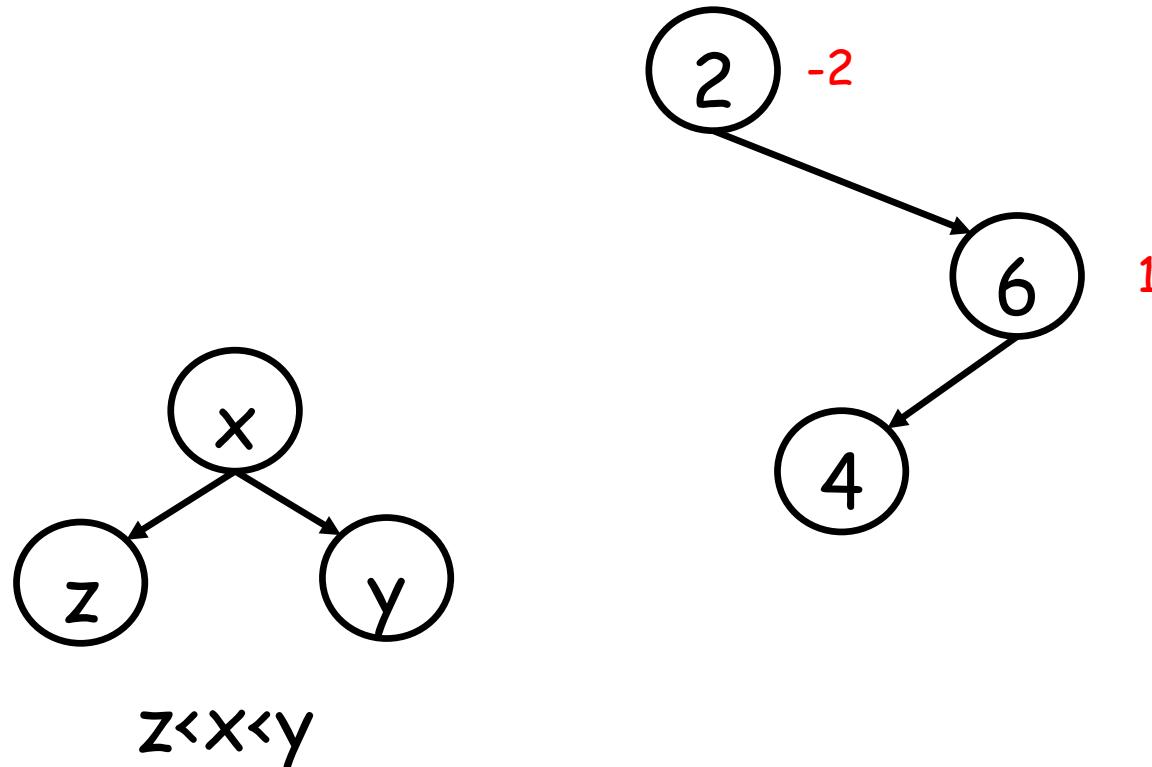
2,6,**4**,5,8,3,1,9,10,7



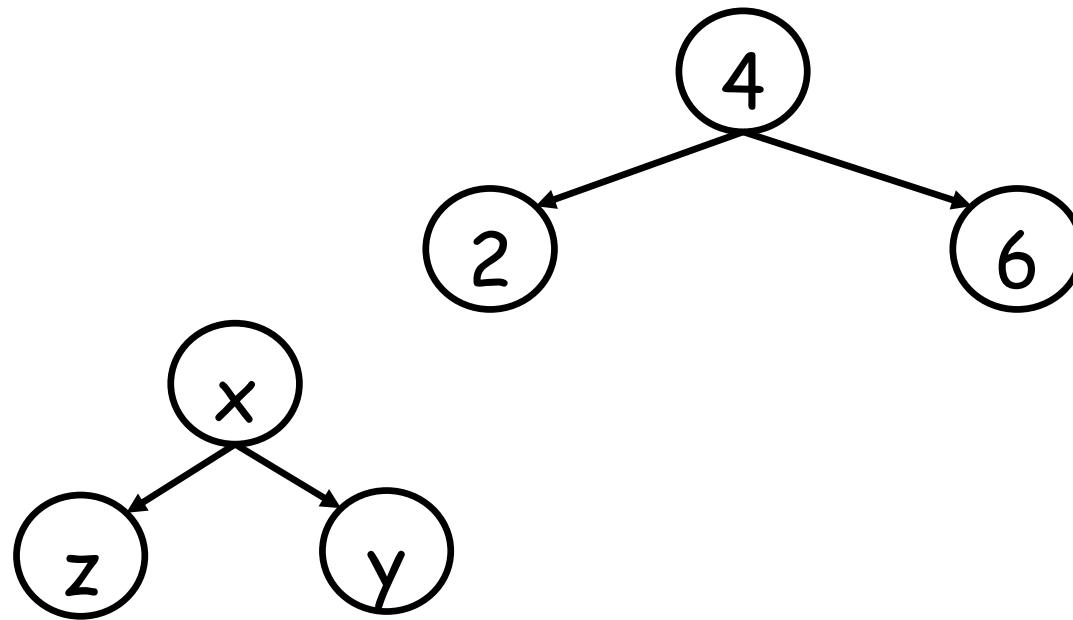
2,6,**4**,5,8,3,1,9,10,7



2,6,**4**,5,8,3,1,9,10,7

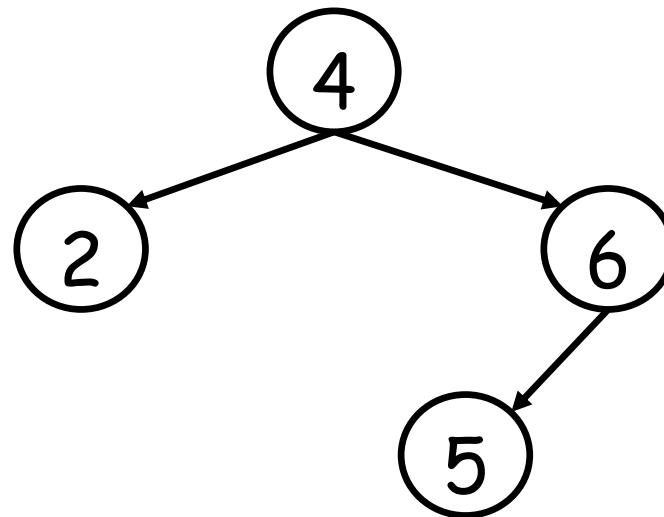


2,6,**4**,5,8,3,1,9,10,7

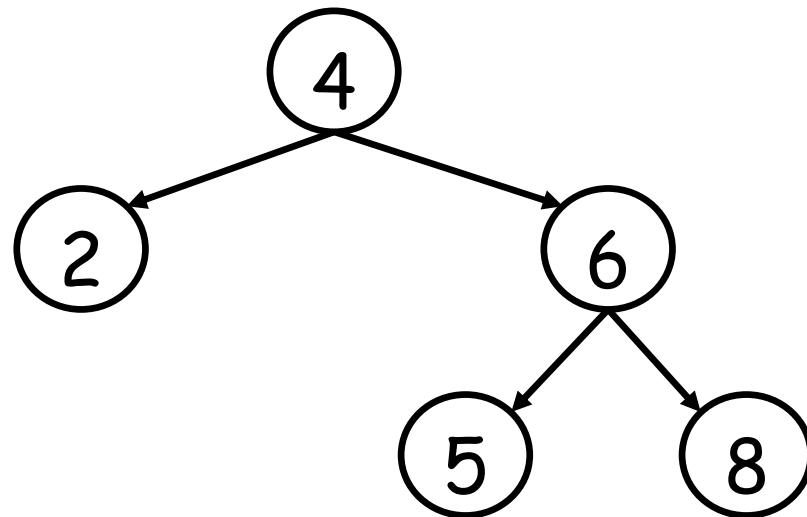


z < x < y

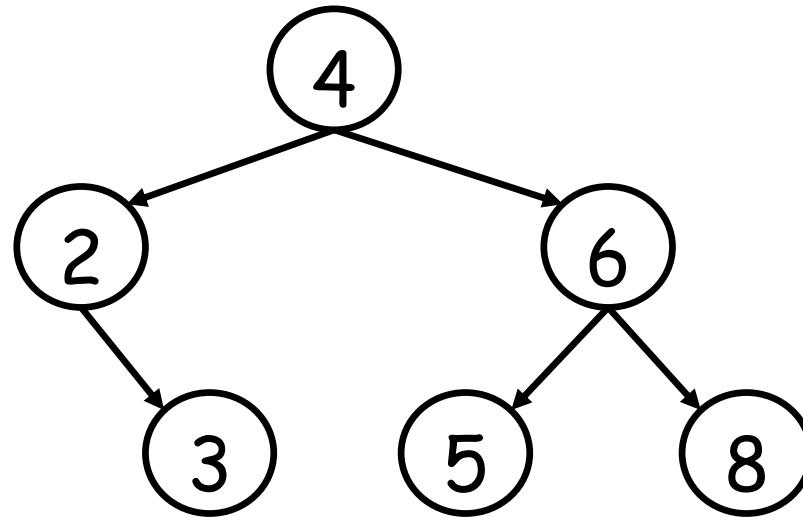
2,6,4,**5**,8,3,1,9,10,7



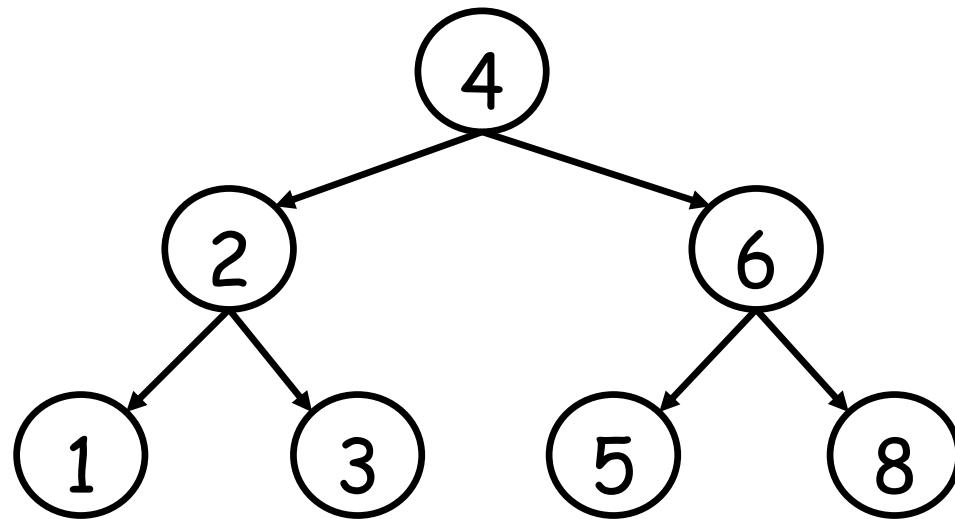
2,6,4,5,**8**,3,1,9,10,7



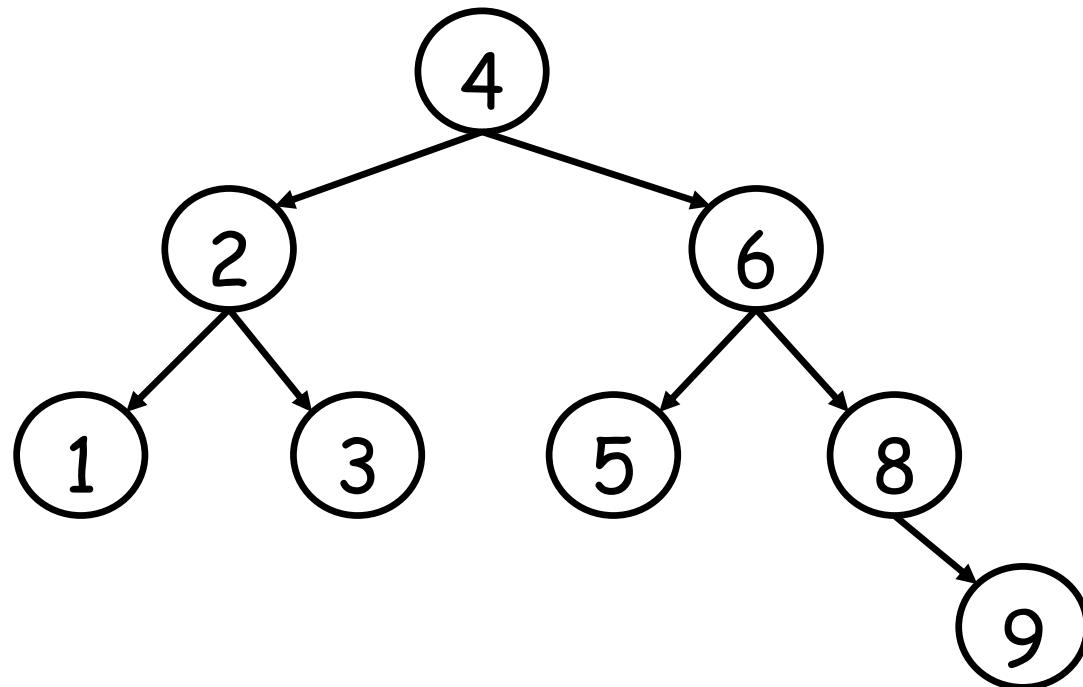
2,6,4,5,8,**3**,1,9,10,7



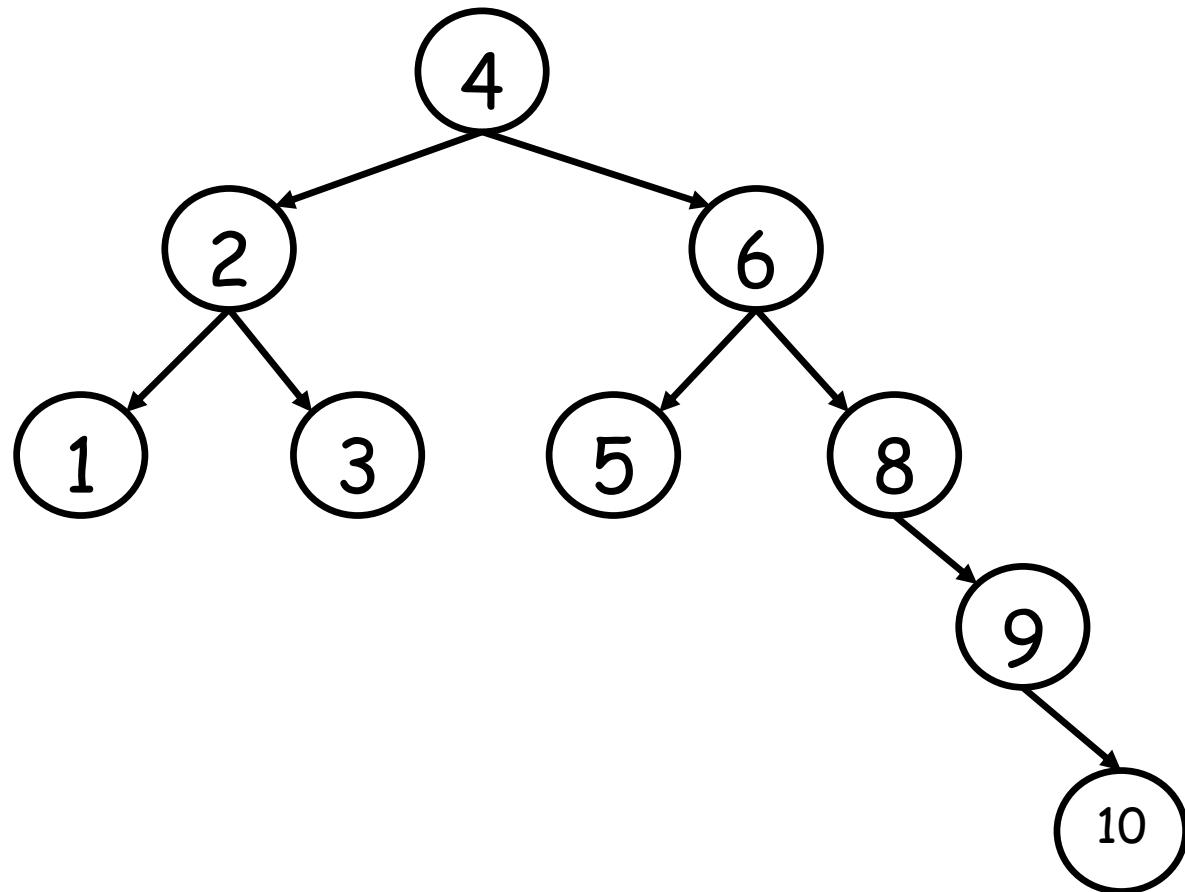
2,6,4,5,8,3,**1**,9,10,7



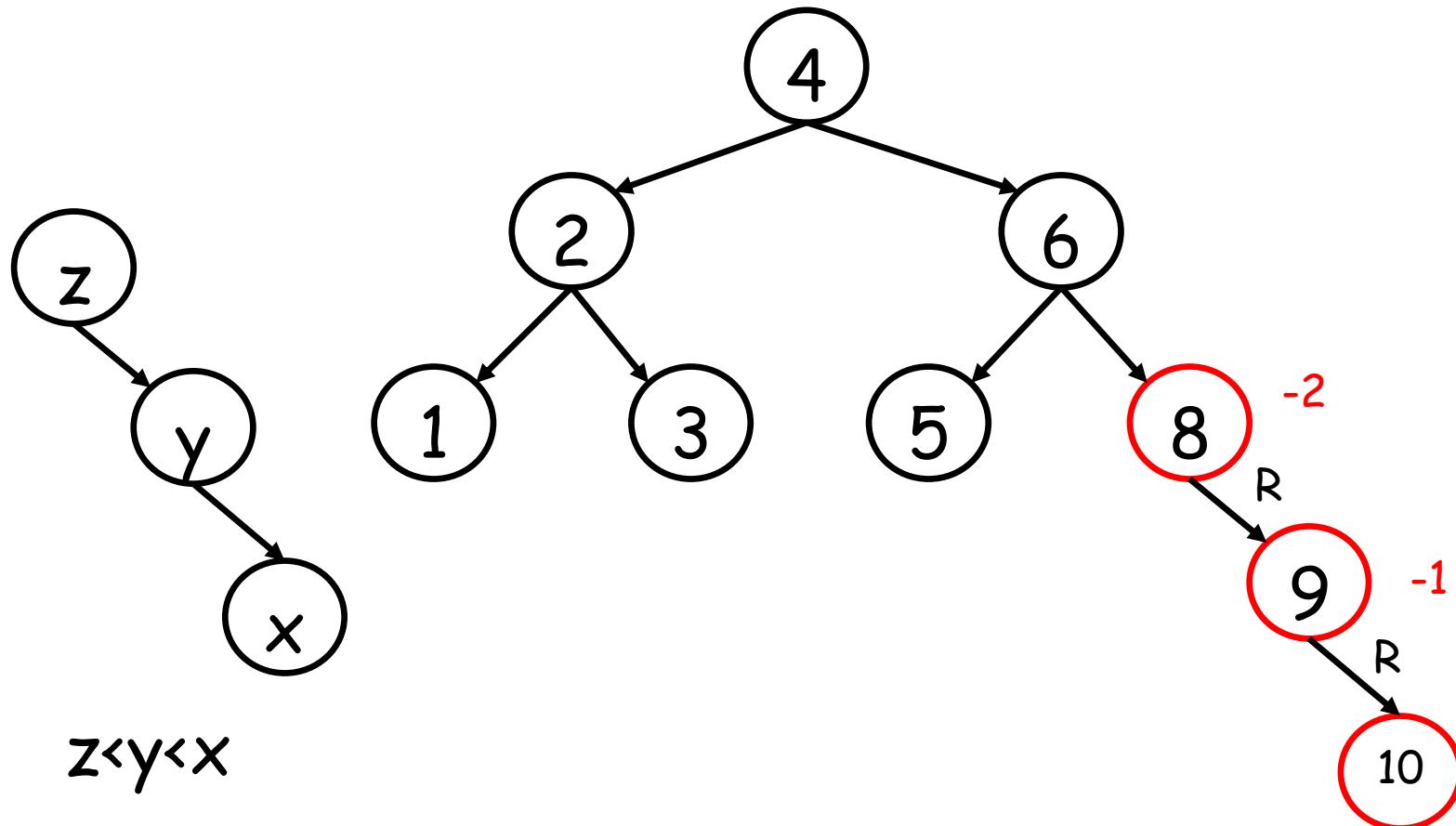
2,6,4,5,8,3,1,**9**,10,7



2,6,4,5,8,3,1,9,**10**,7

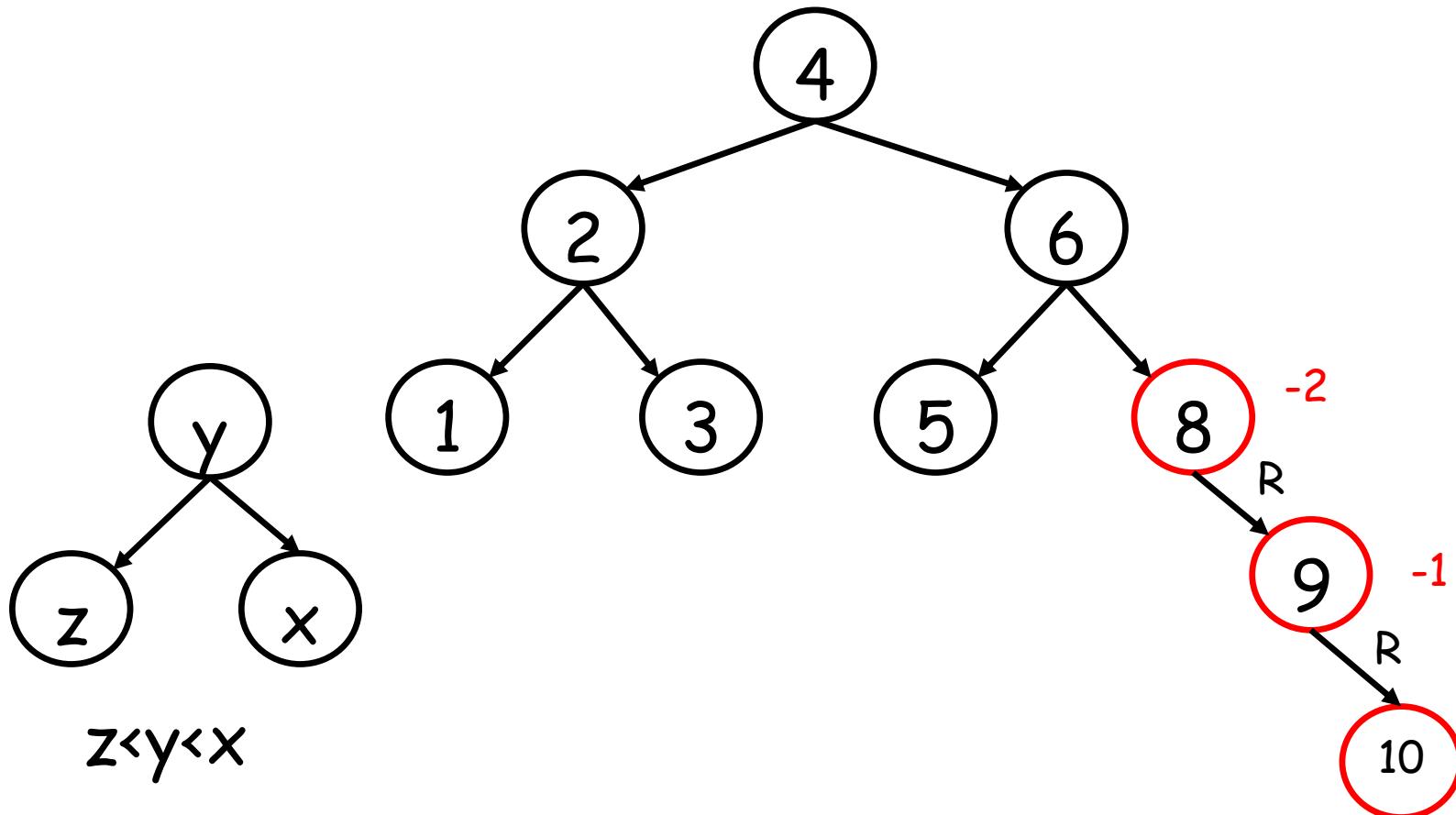


2,6,4,5,8,3,1,9,**10**,7

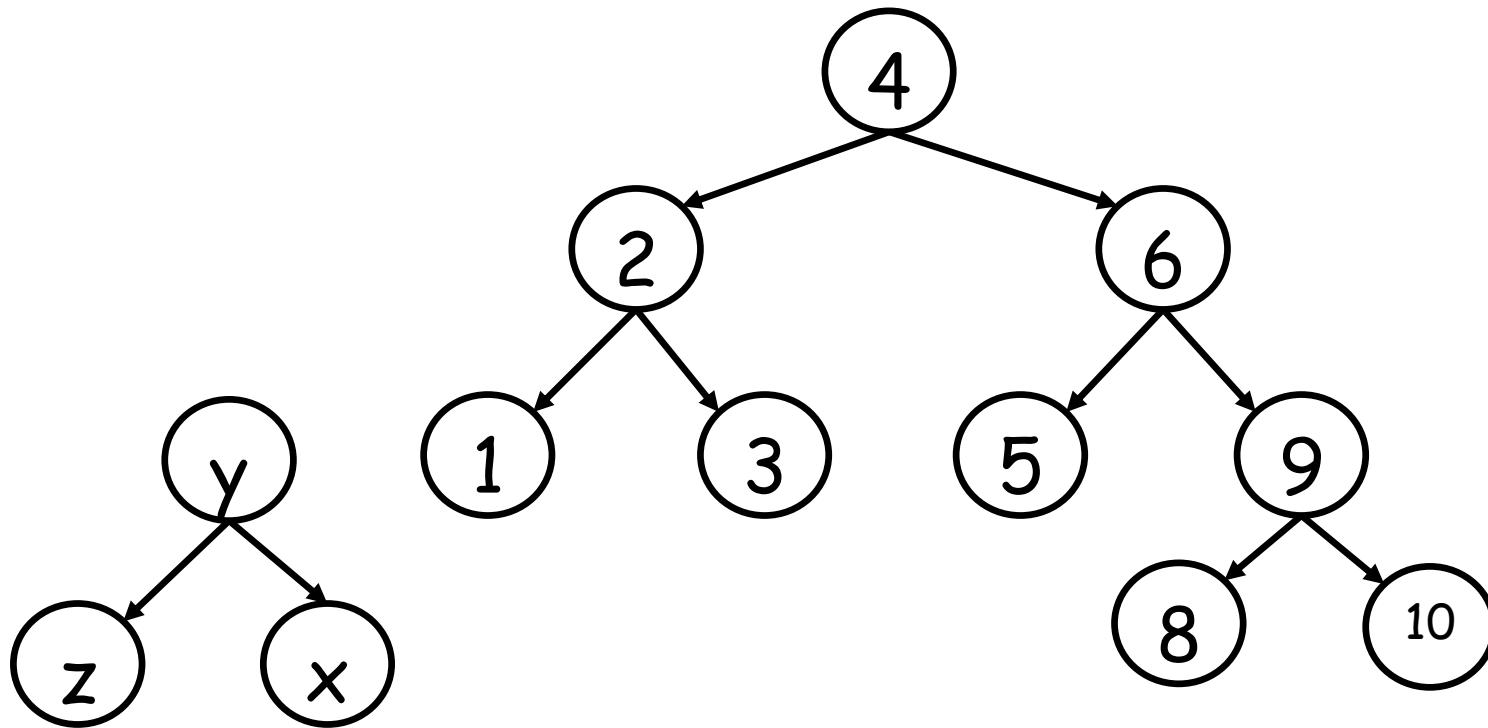


$z < y < x$

2,6,4,5,8,3,1,9,**10**,7

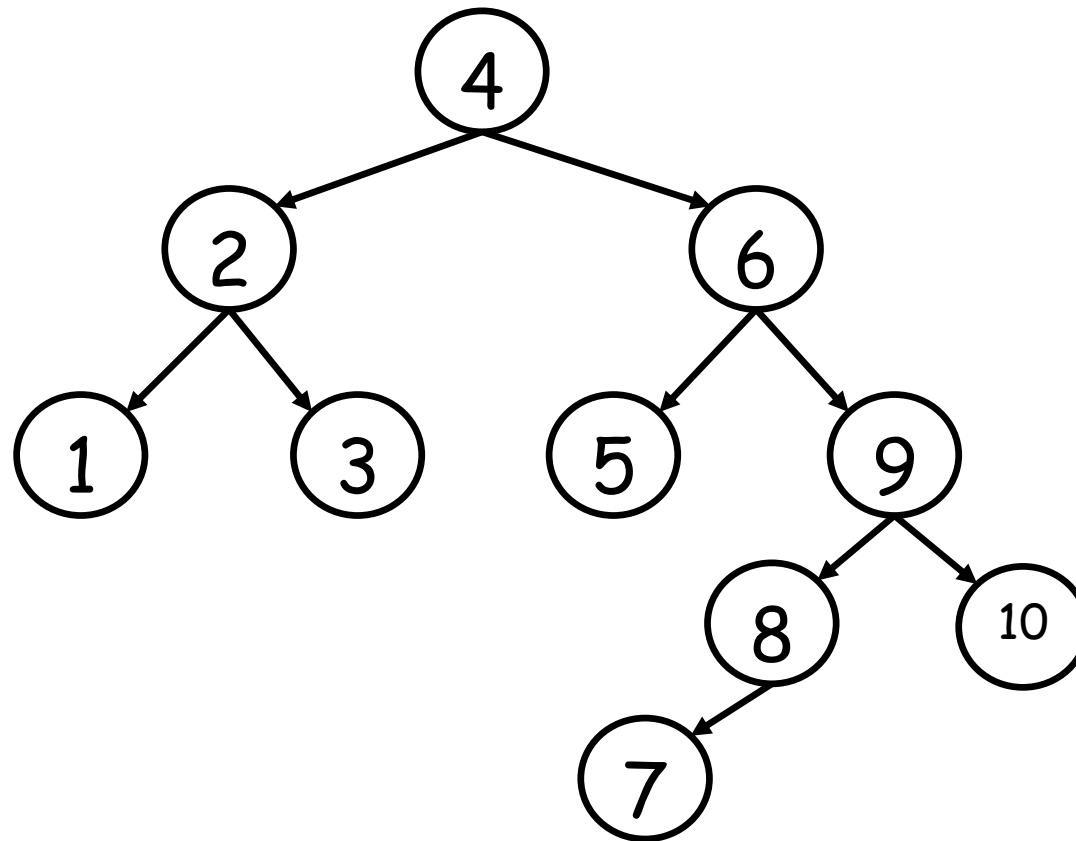


2,6,4,5,8,3,1,9,**10**,7

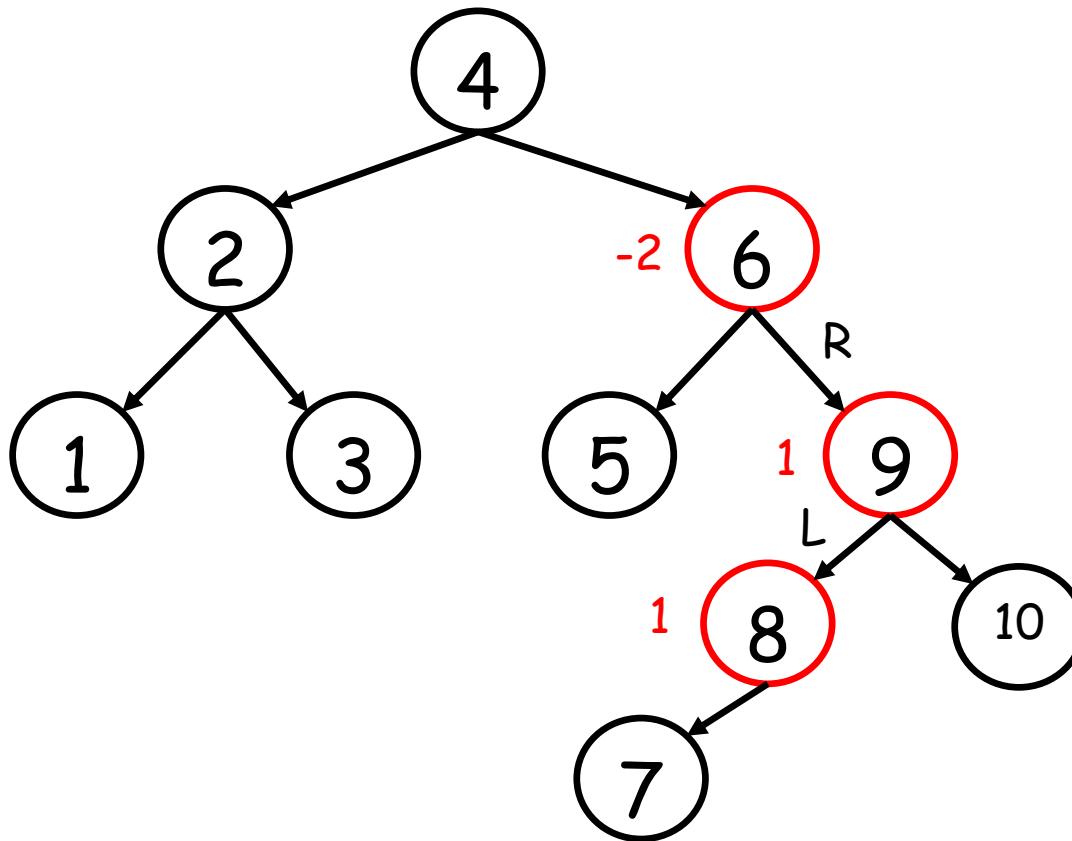


z < y < x

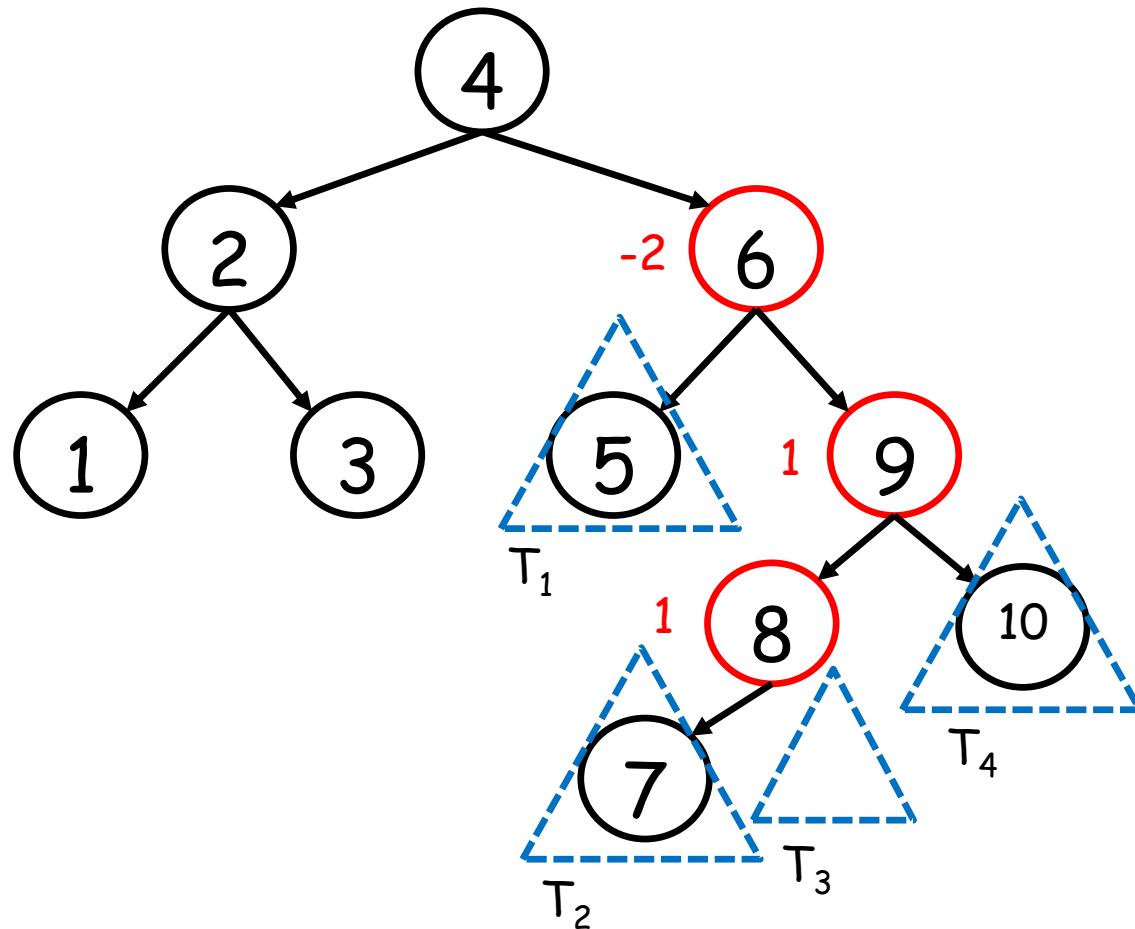
2,6,4,5,8,3,1,9,10,**7**



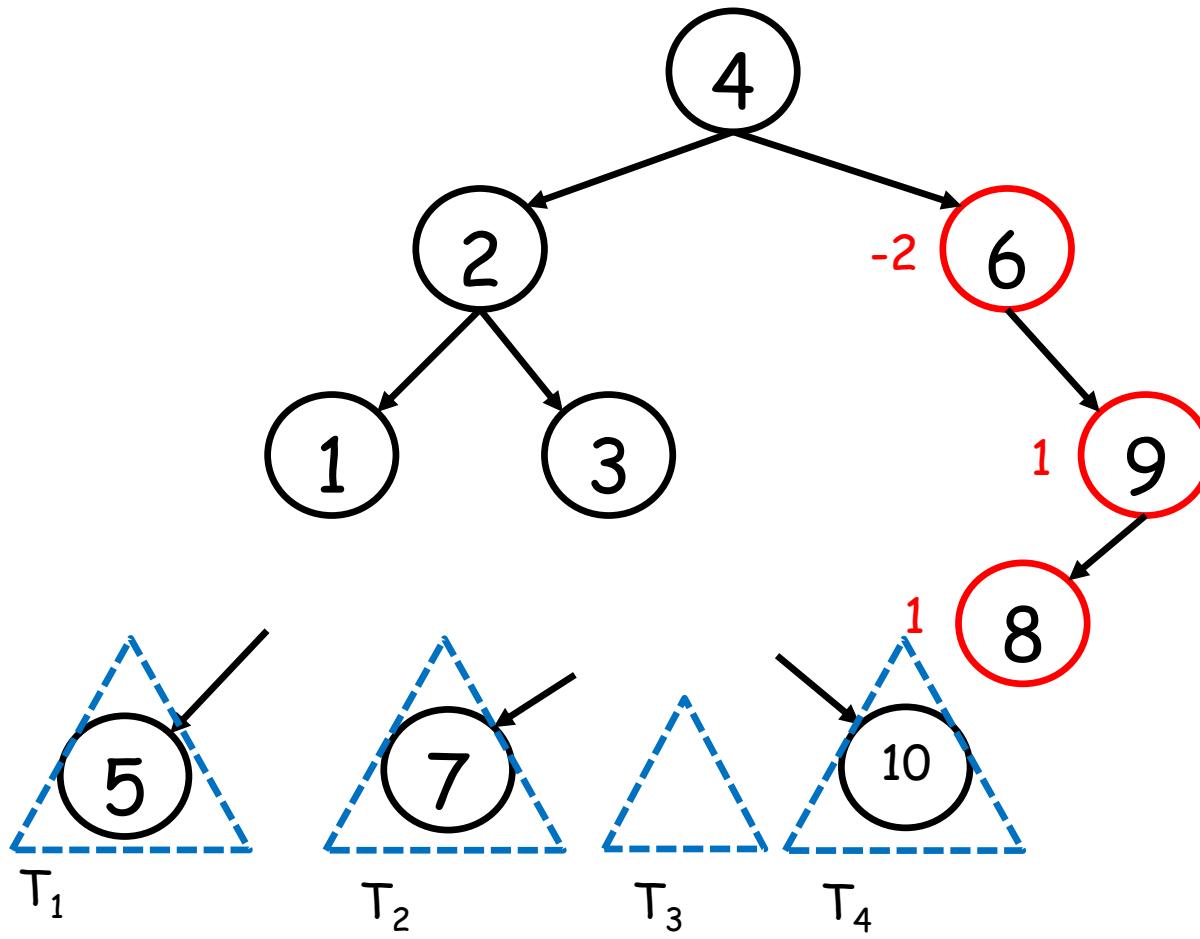
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



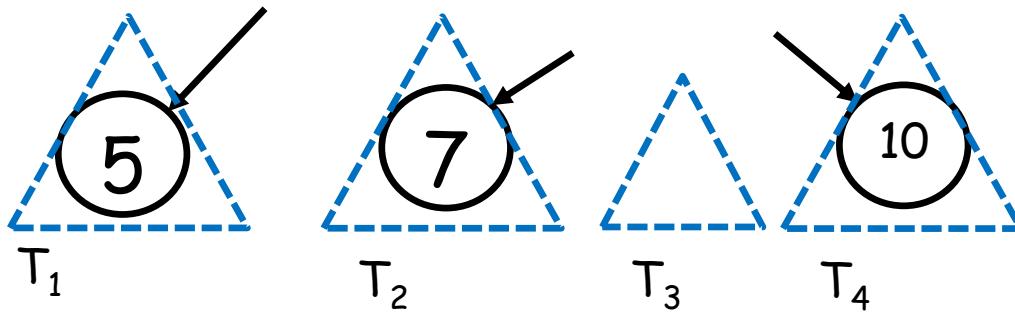
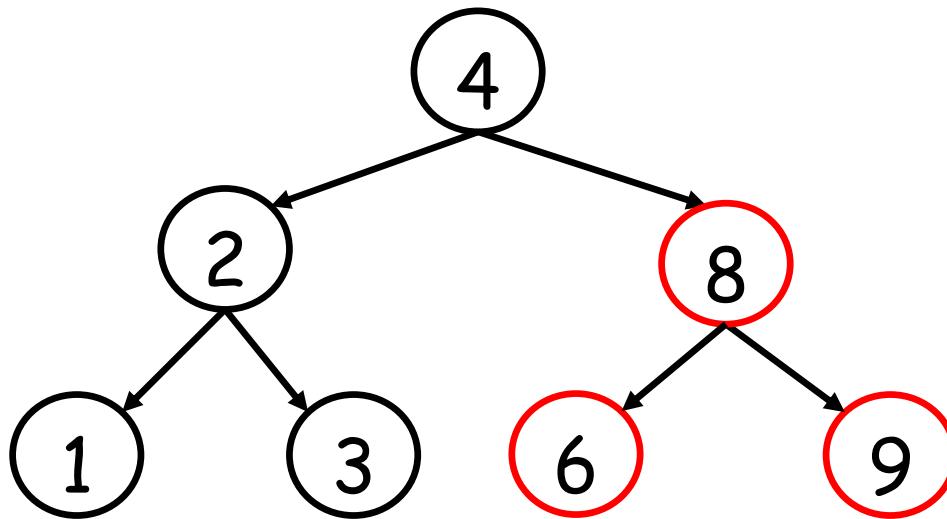
2,6,4,5,8,3,1,9,10,7



2,6,4,5,8,3,1,9,10,7

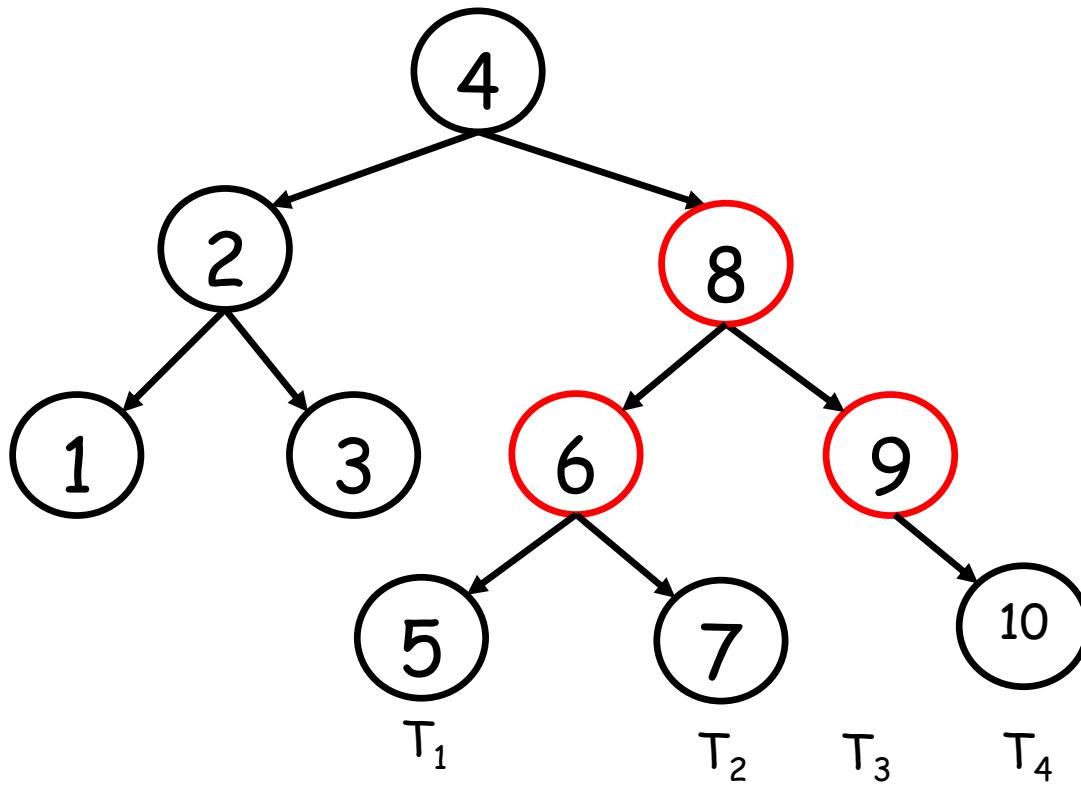


2,6,4,5,8,3,1,9,10,7

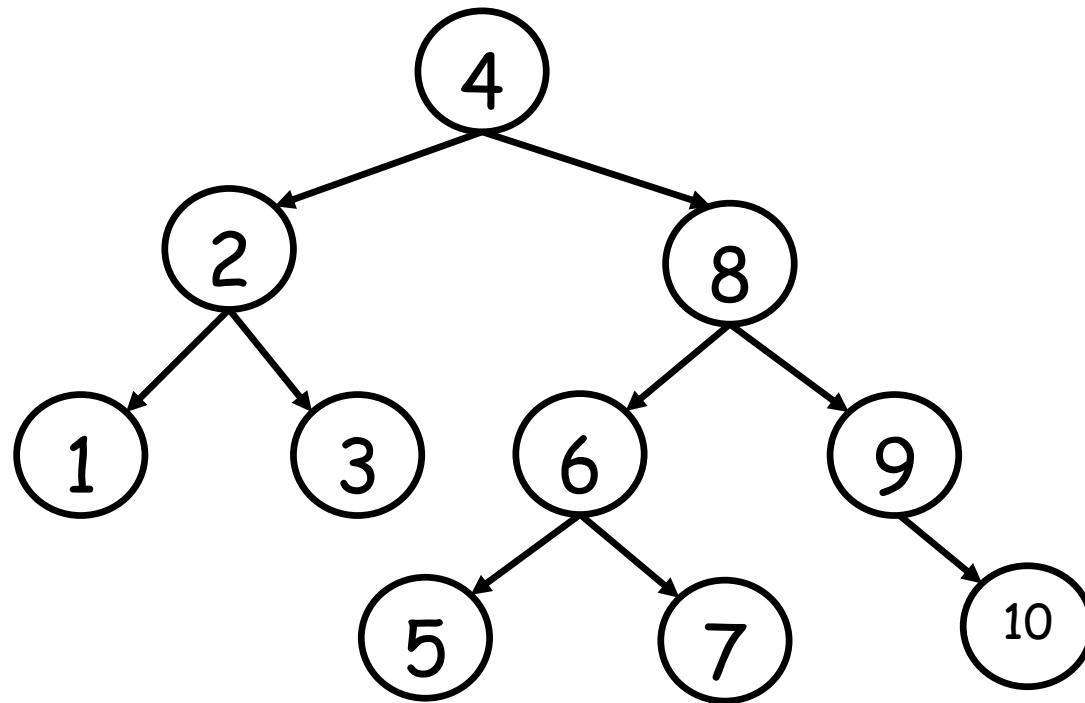


ד"ר נעה לויינשטיין ©  
עריכה: ד"ר אילת בוטמן, פרופ' אביבית לוי

2,6,4,5,8,3,1,9,10,7

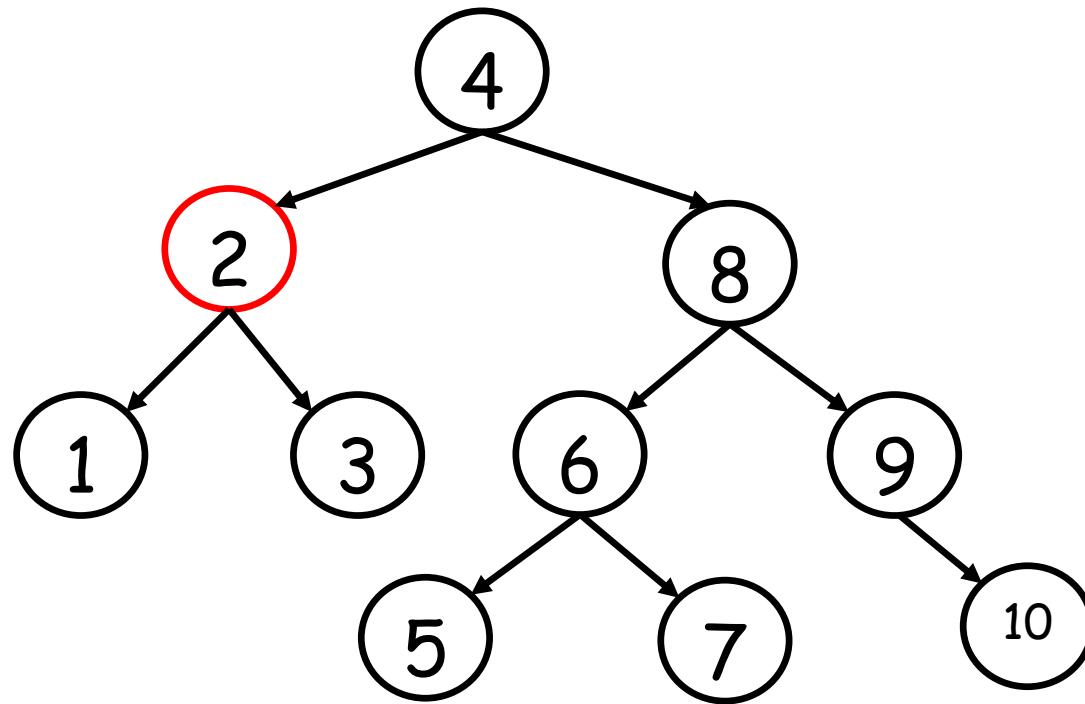


2,6,4,5,8,3,1,9,10,7

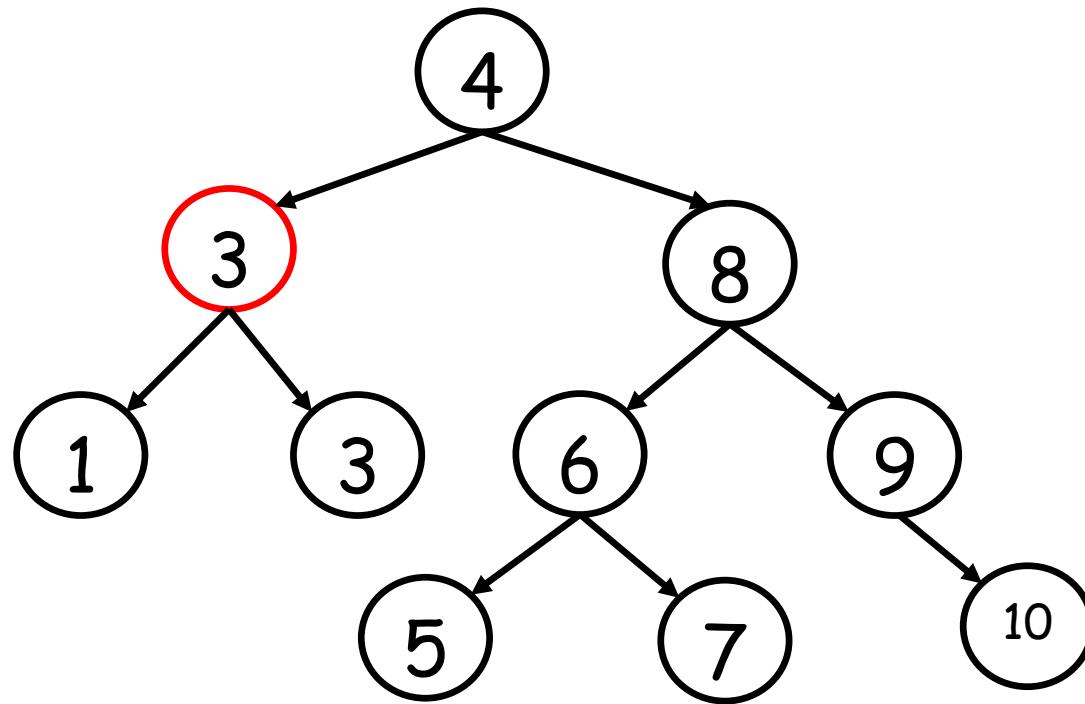


# הוצאת איבר - דין

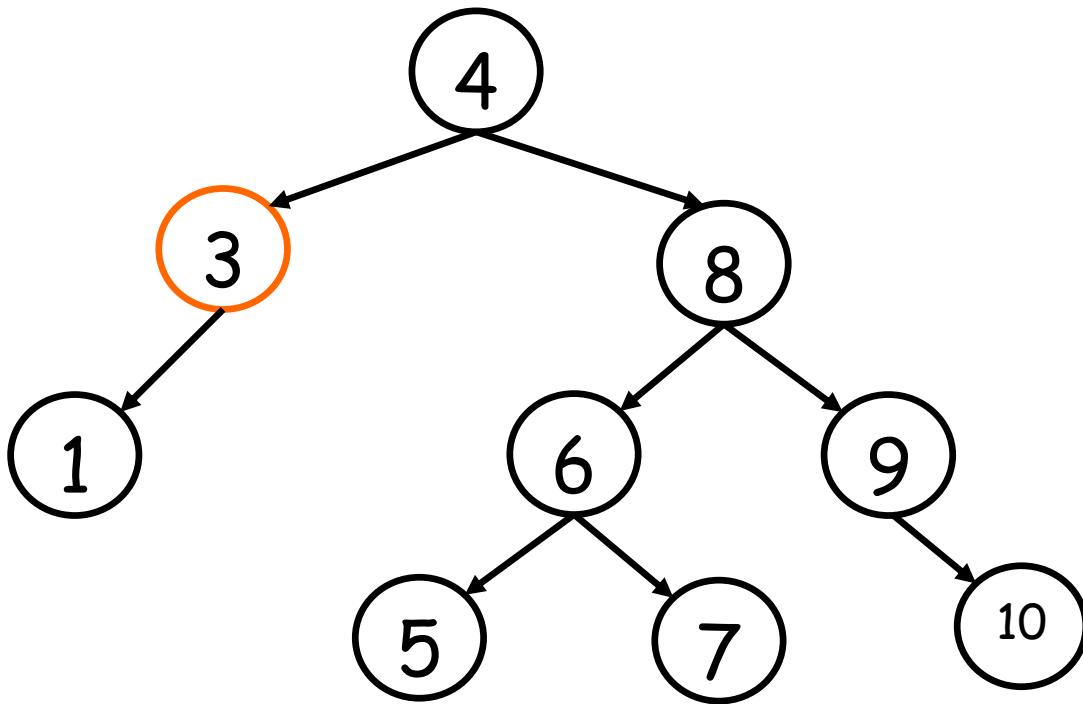
# הוצא את 2



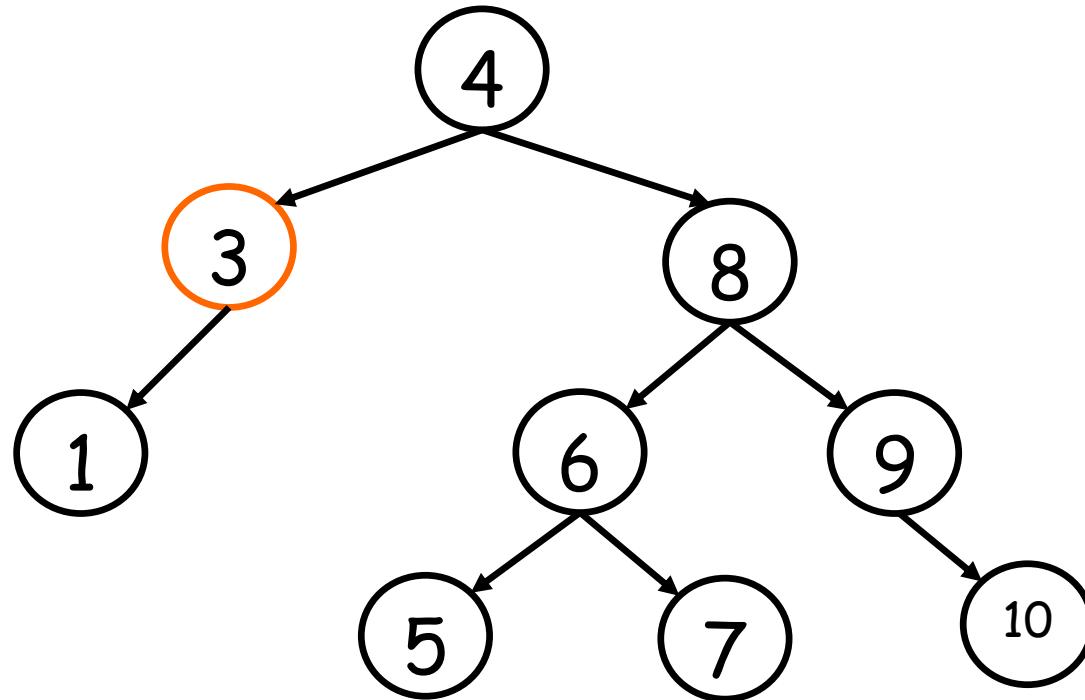
# הוצא את 2



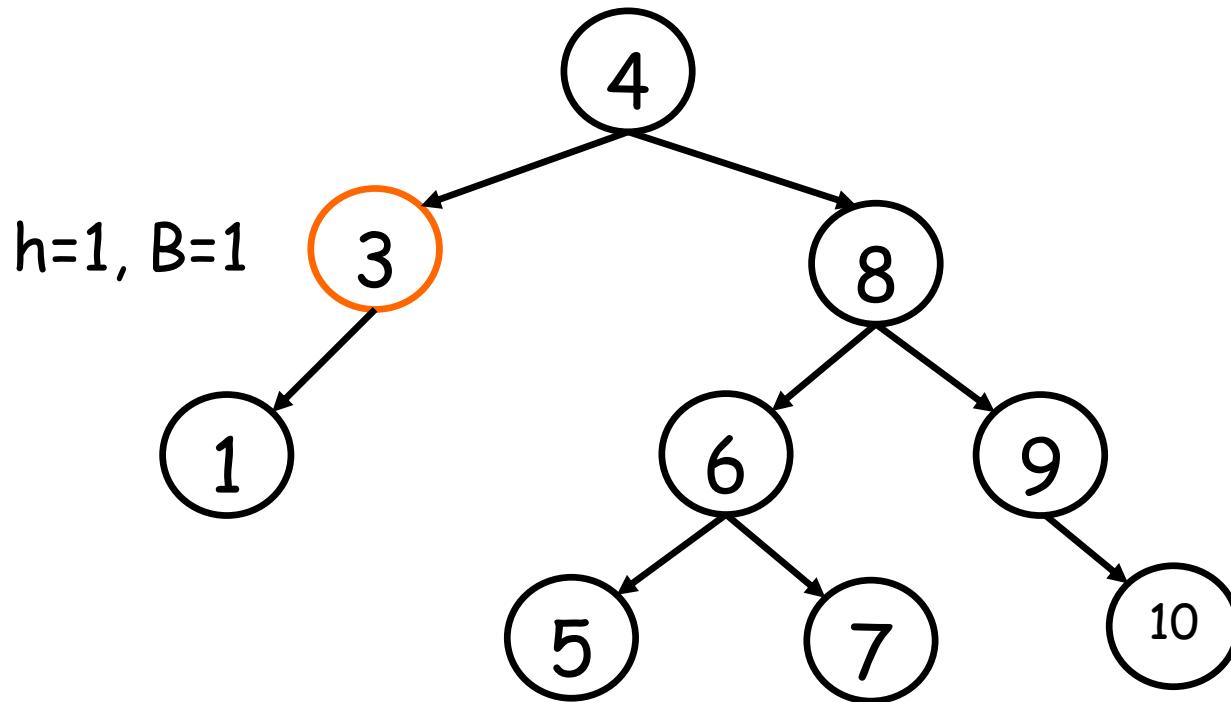
# הוצא את 2



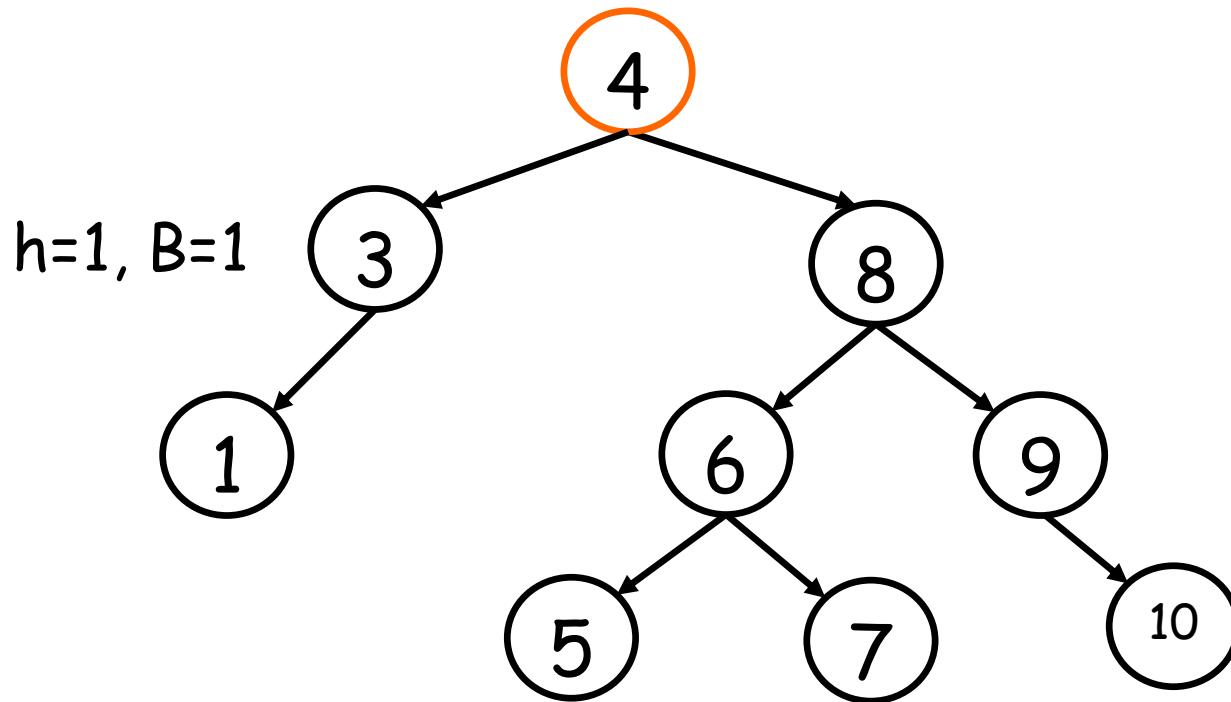
נעה במלול הוצאה,  
נחשב גובה וגורם איזון



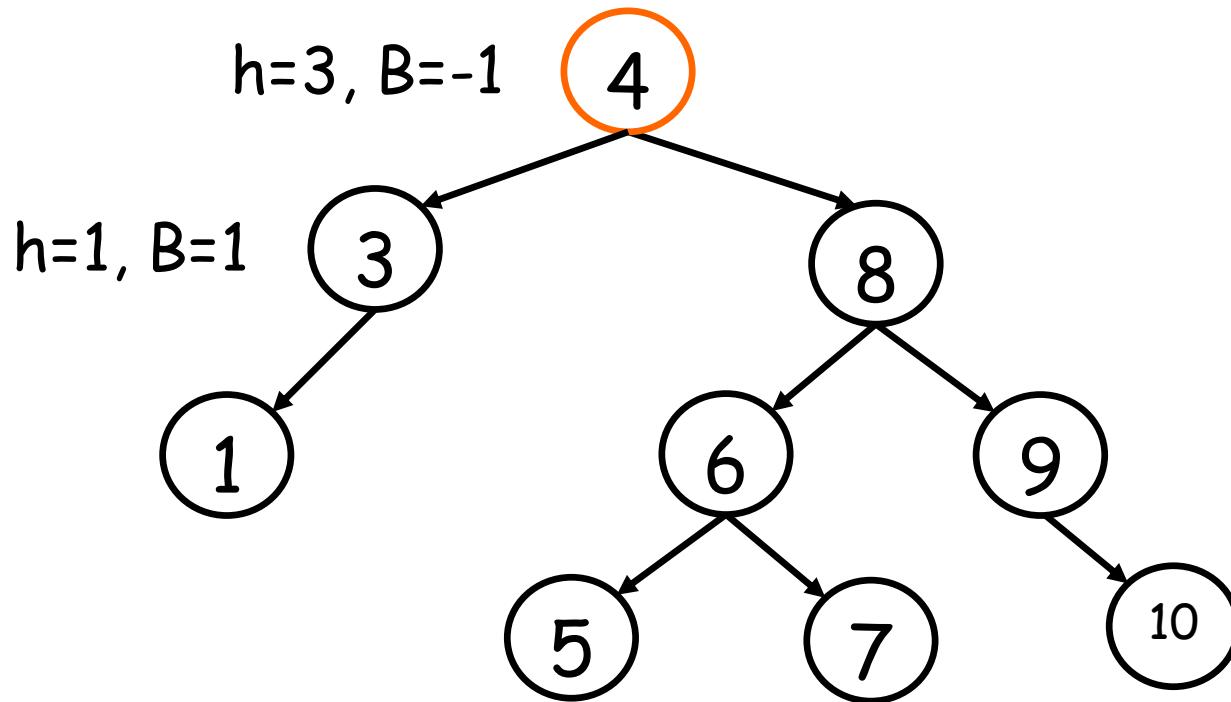
נעה במלול הוצאה,  
נחשב גובה וגורם איזון



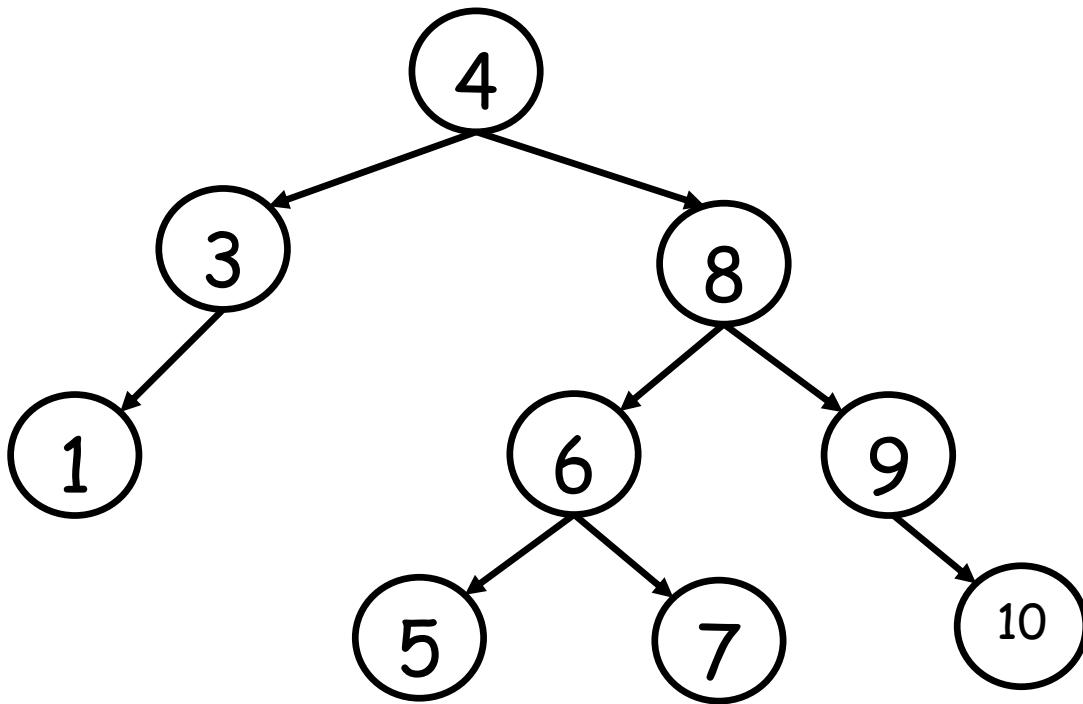
נעה במלול הוצאה,  
נחשב גובה וגורם איזון



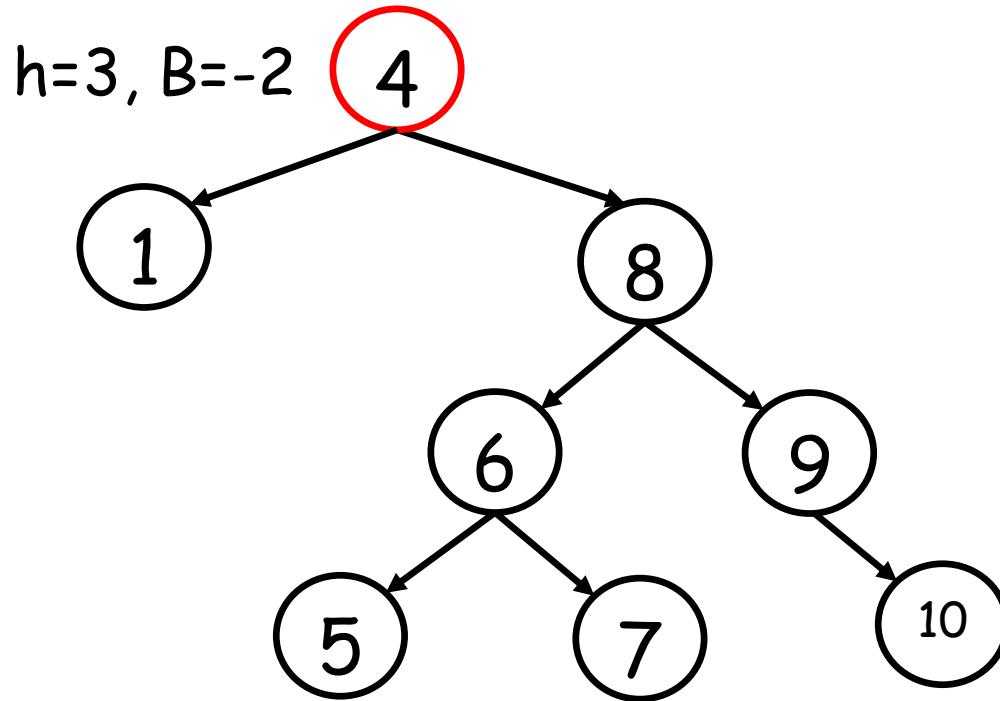
נעה במלול הוצאה,  
נחשב גובה וגורם איזון



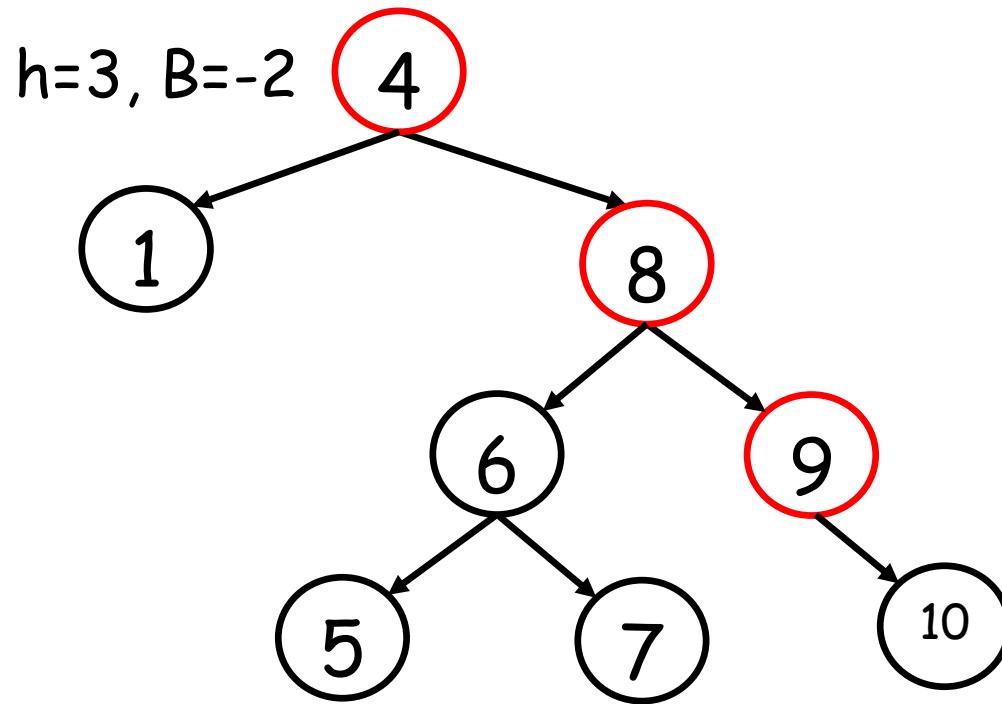
# הוצא את 3



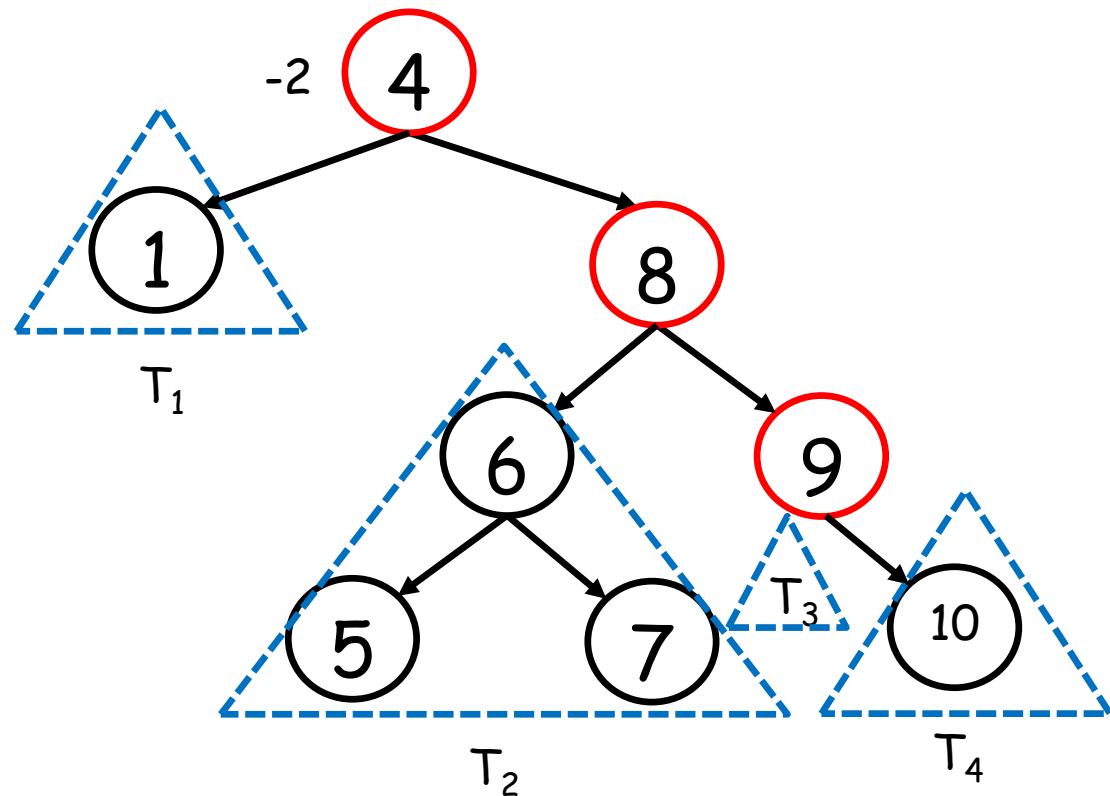
# הוצא את 3



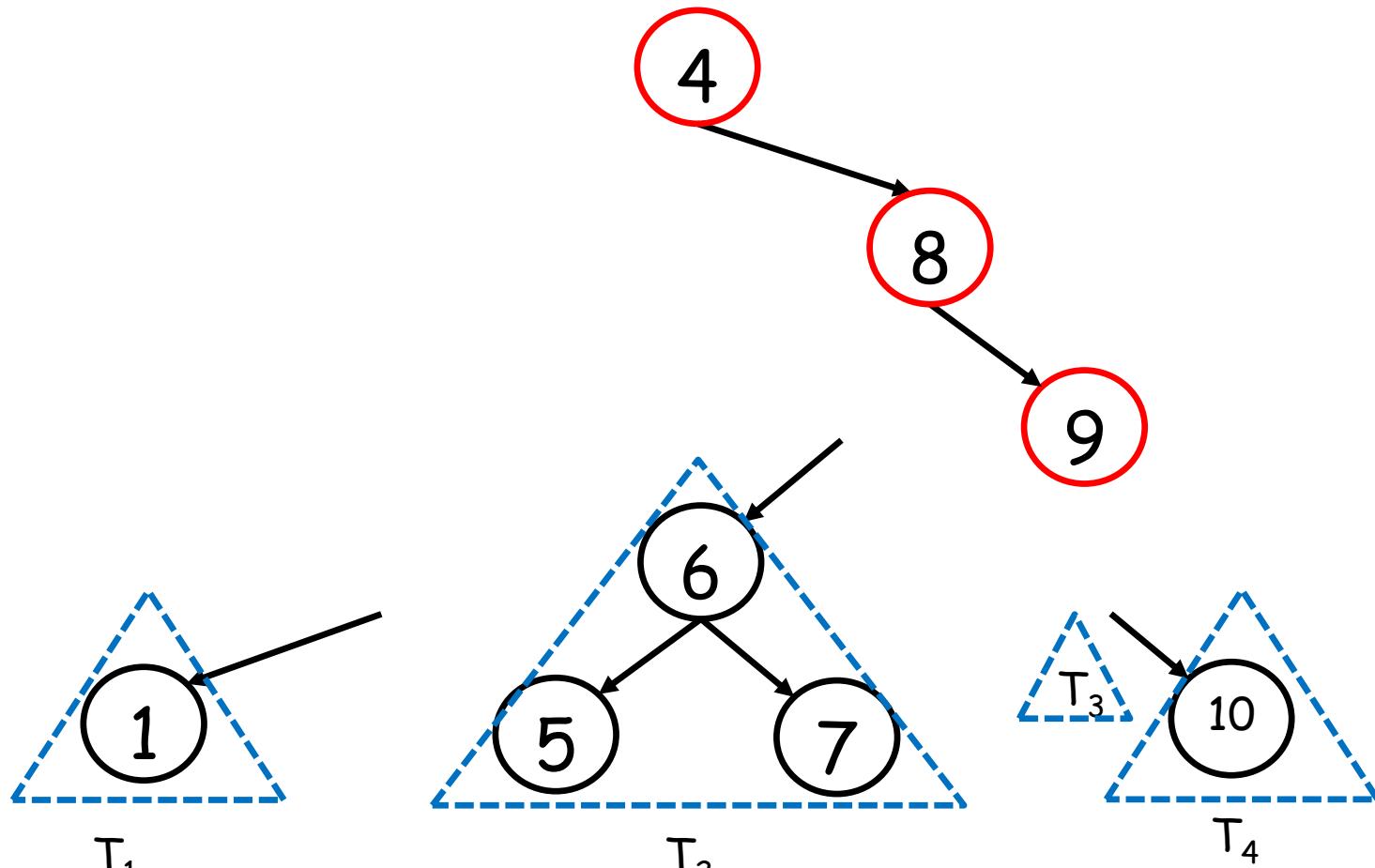
# הוצא את 3



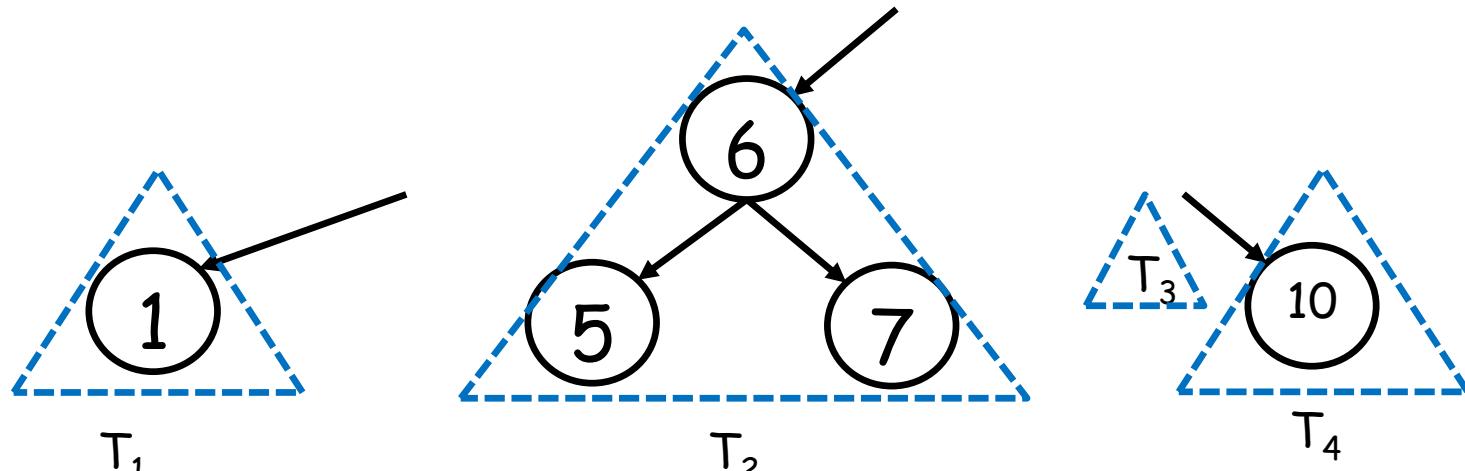
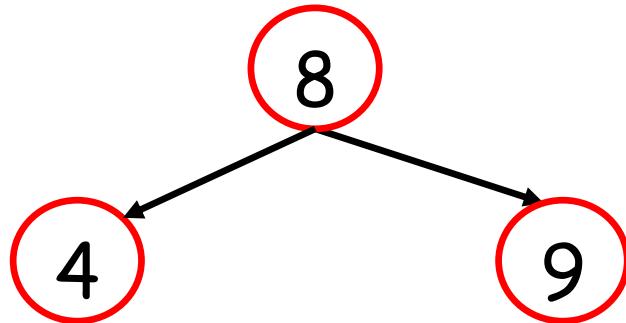
# הוצא את 3



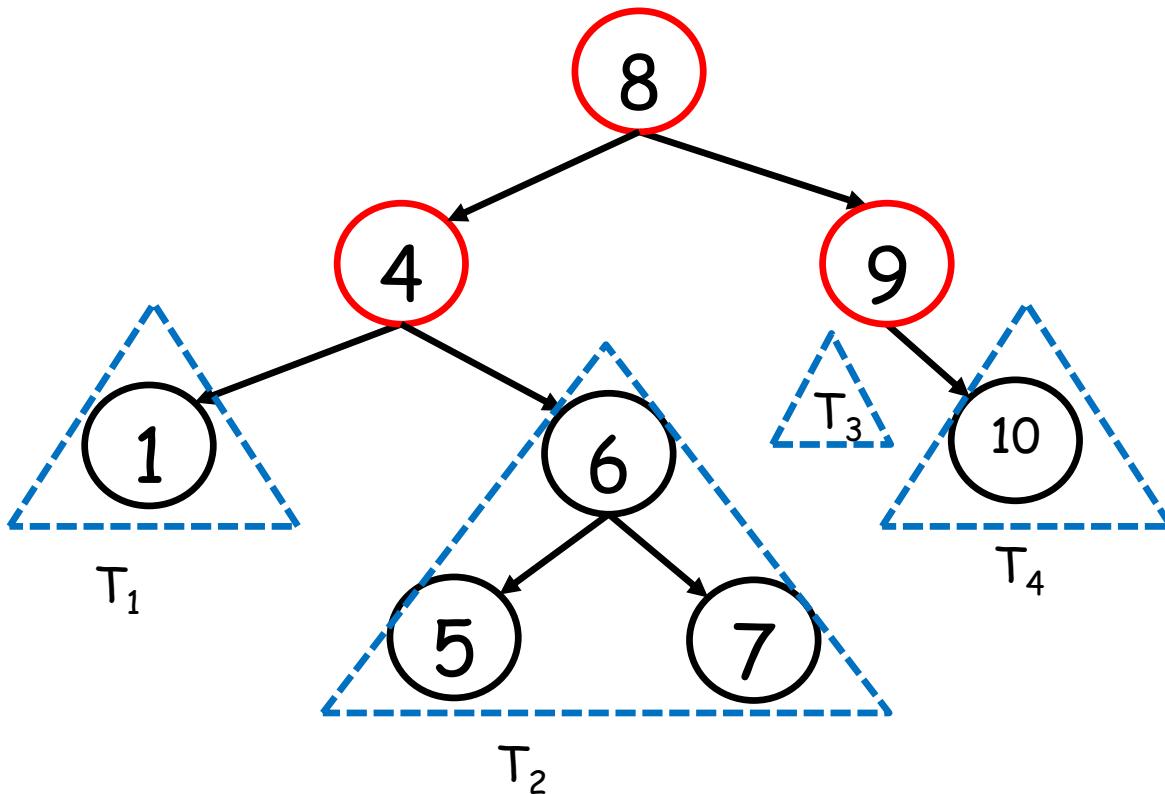
# הוצא את 3



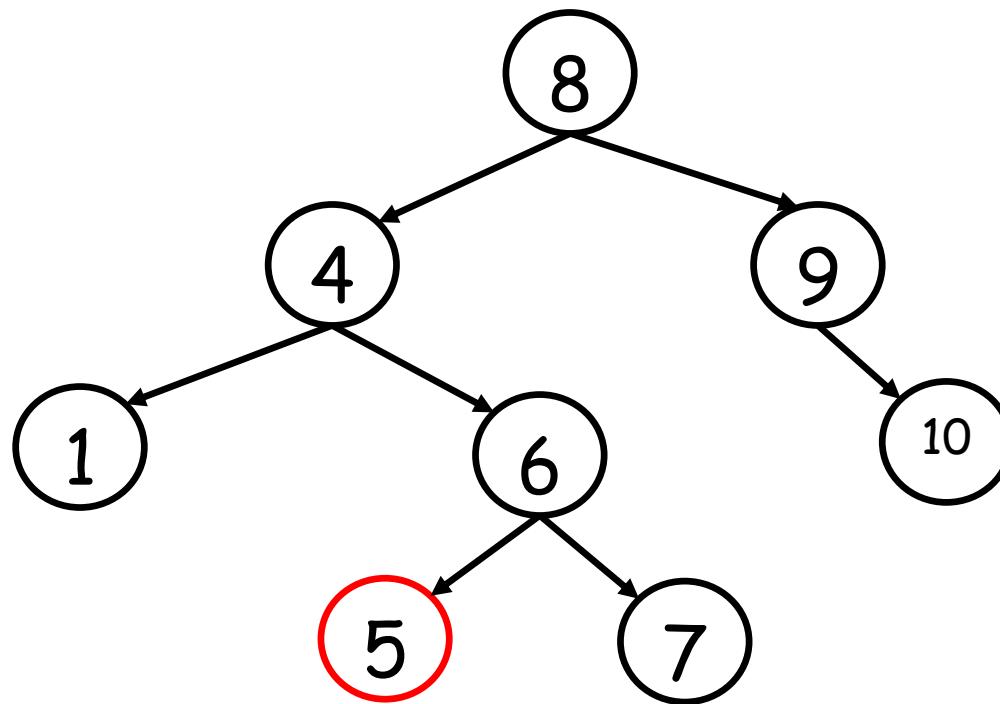
# הוצא את 3



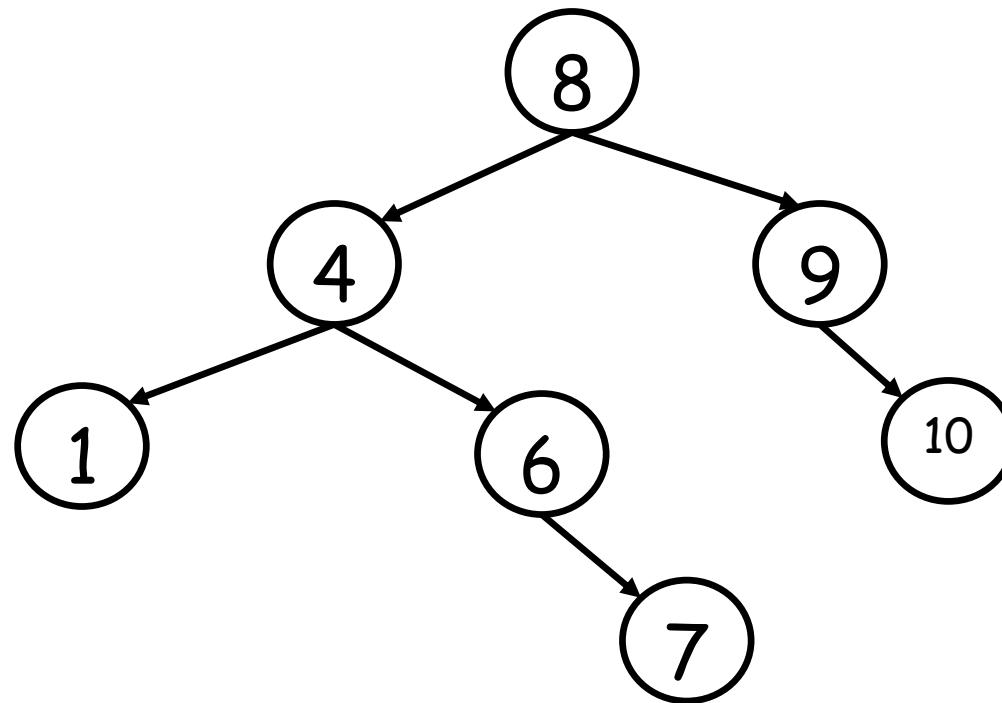
# הוצא את 3



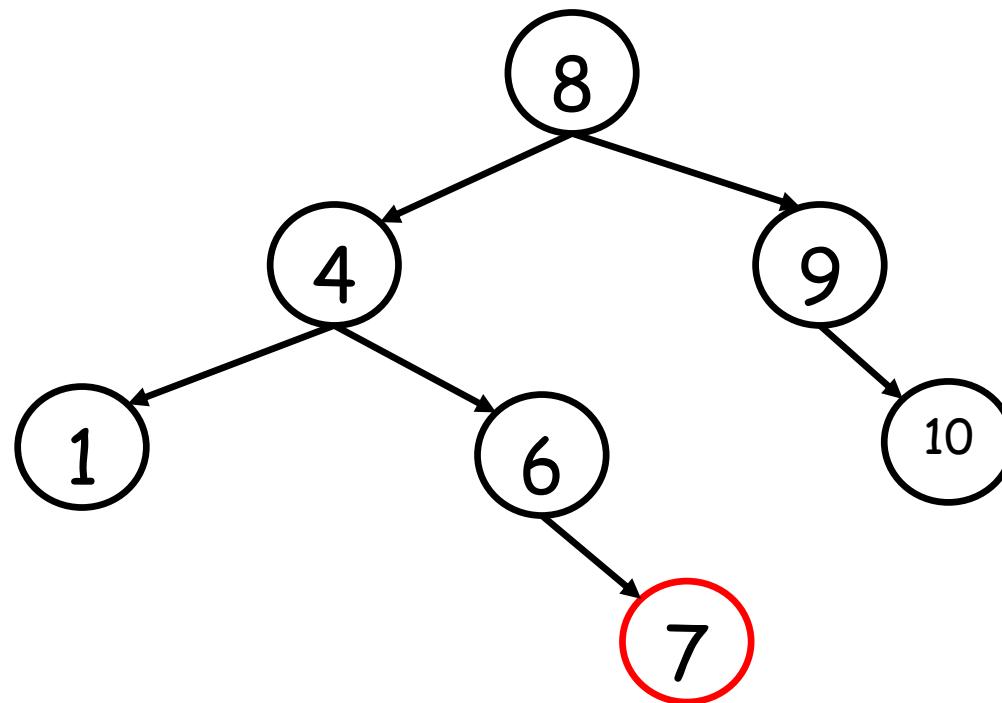
# הוצא את 5



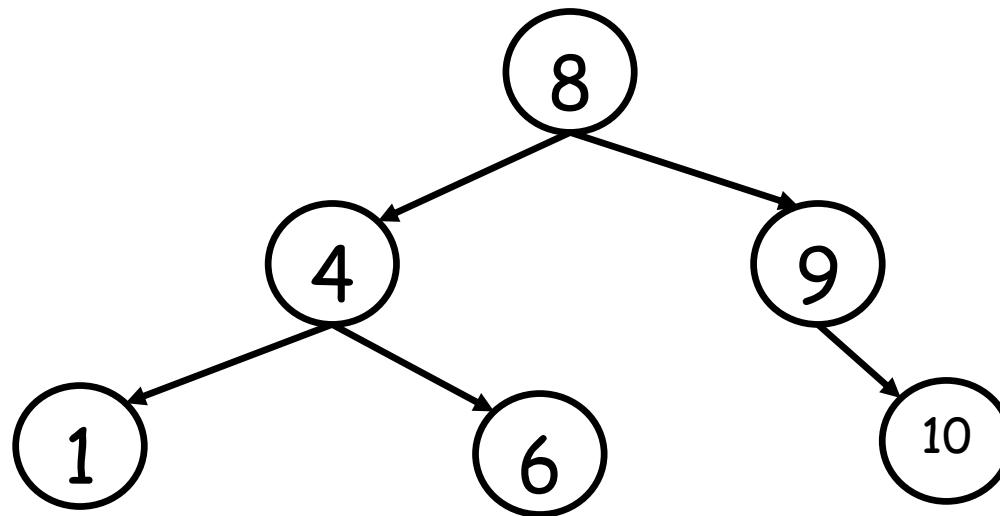
# הוצא את 5



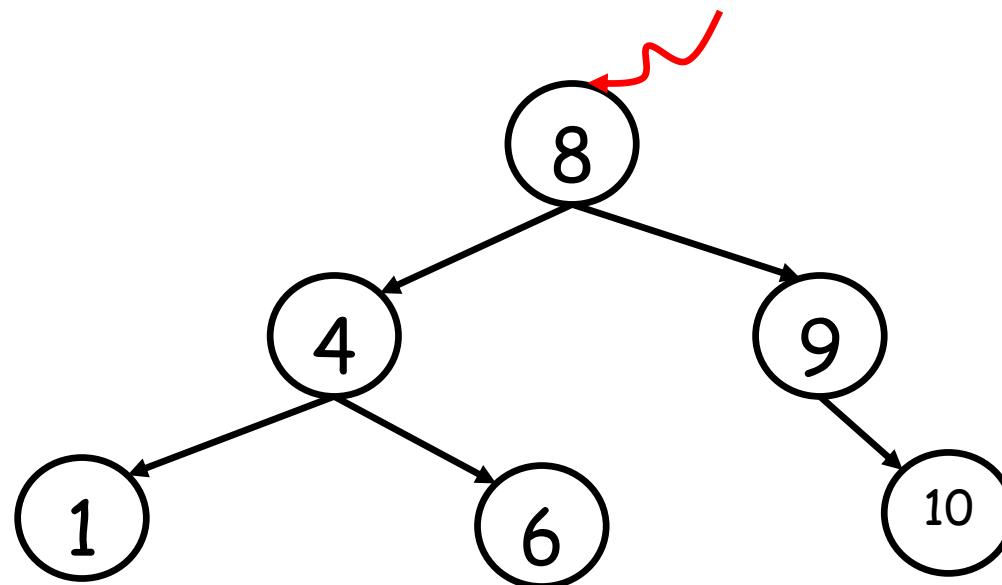
# הוצא את 7



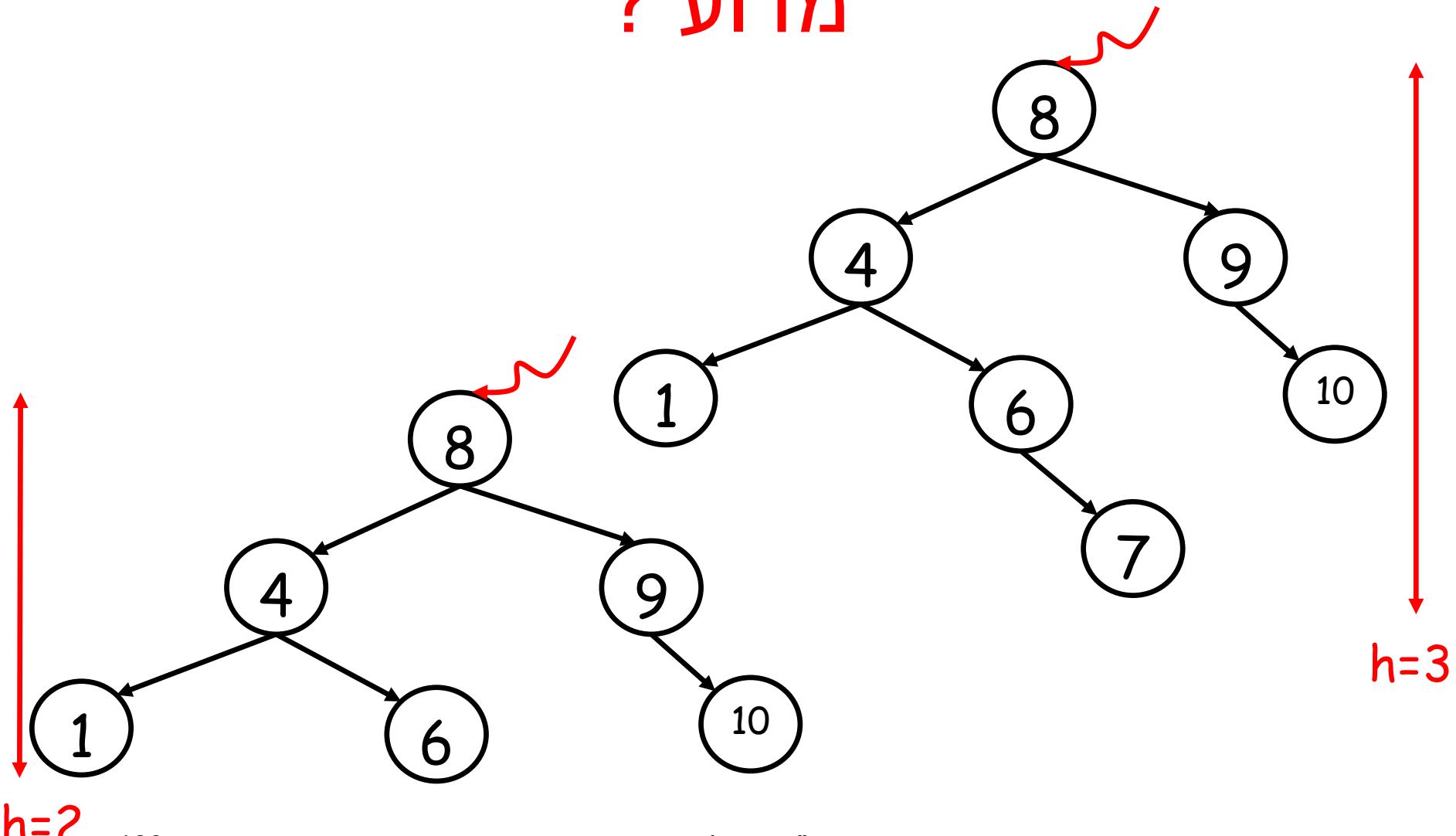
# הוצא את 7



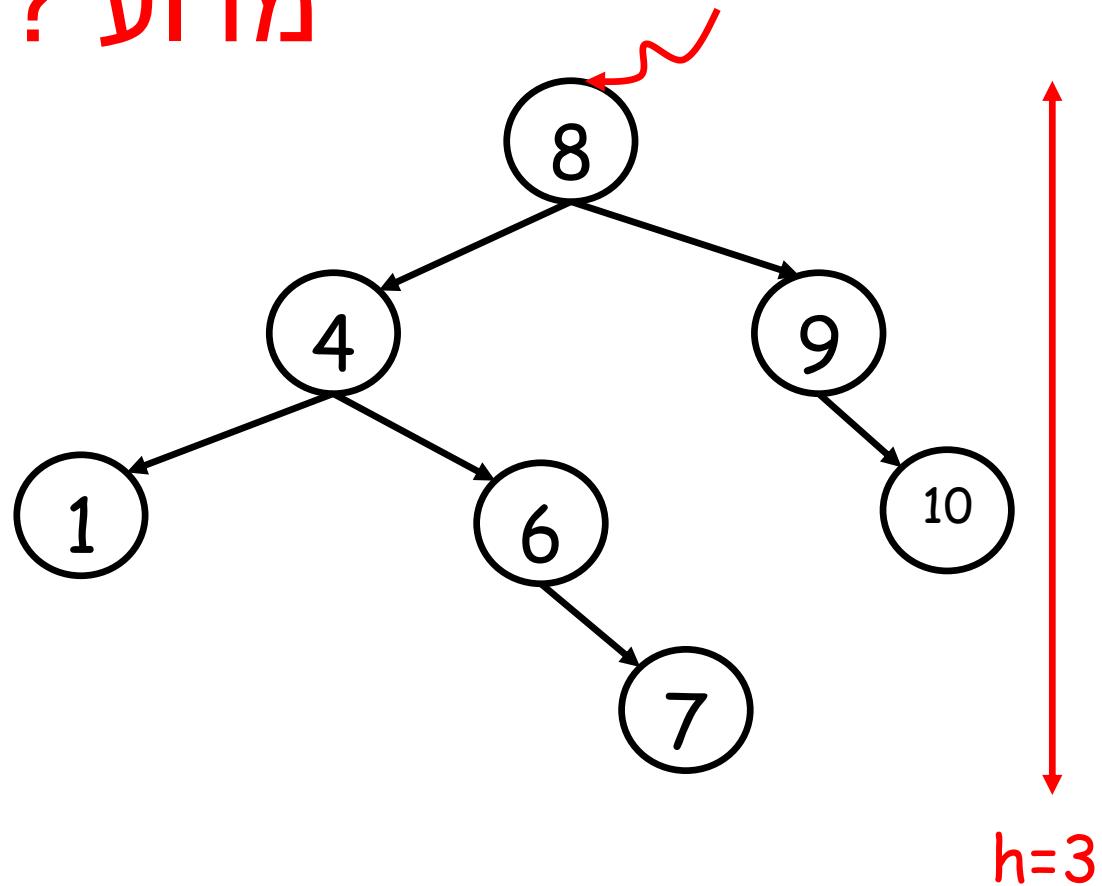
**שים לב**, כאשר זהה תת עץ, יש להמשיך  
לבדק הפרת איזון עד השורש



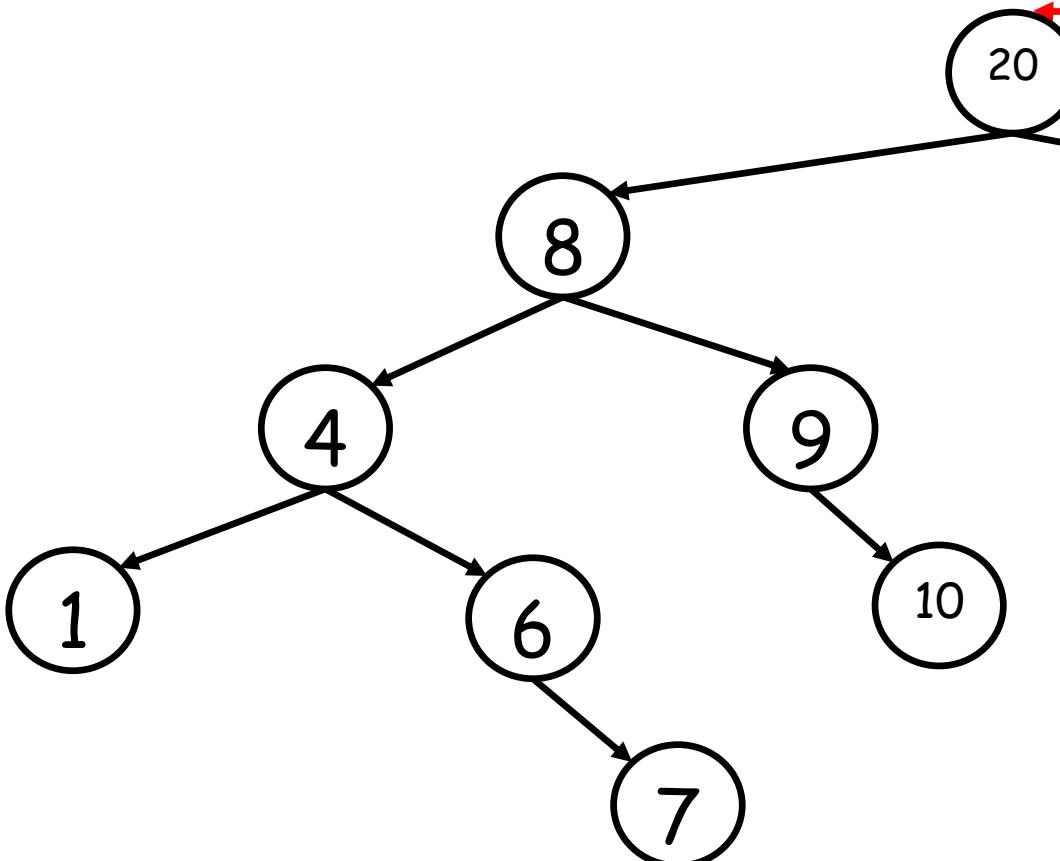
מדוע ?



מדוע ?



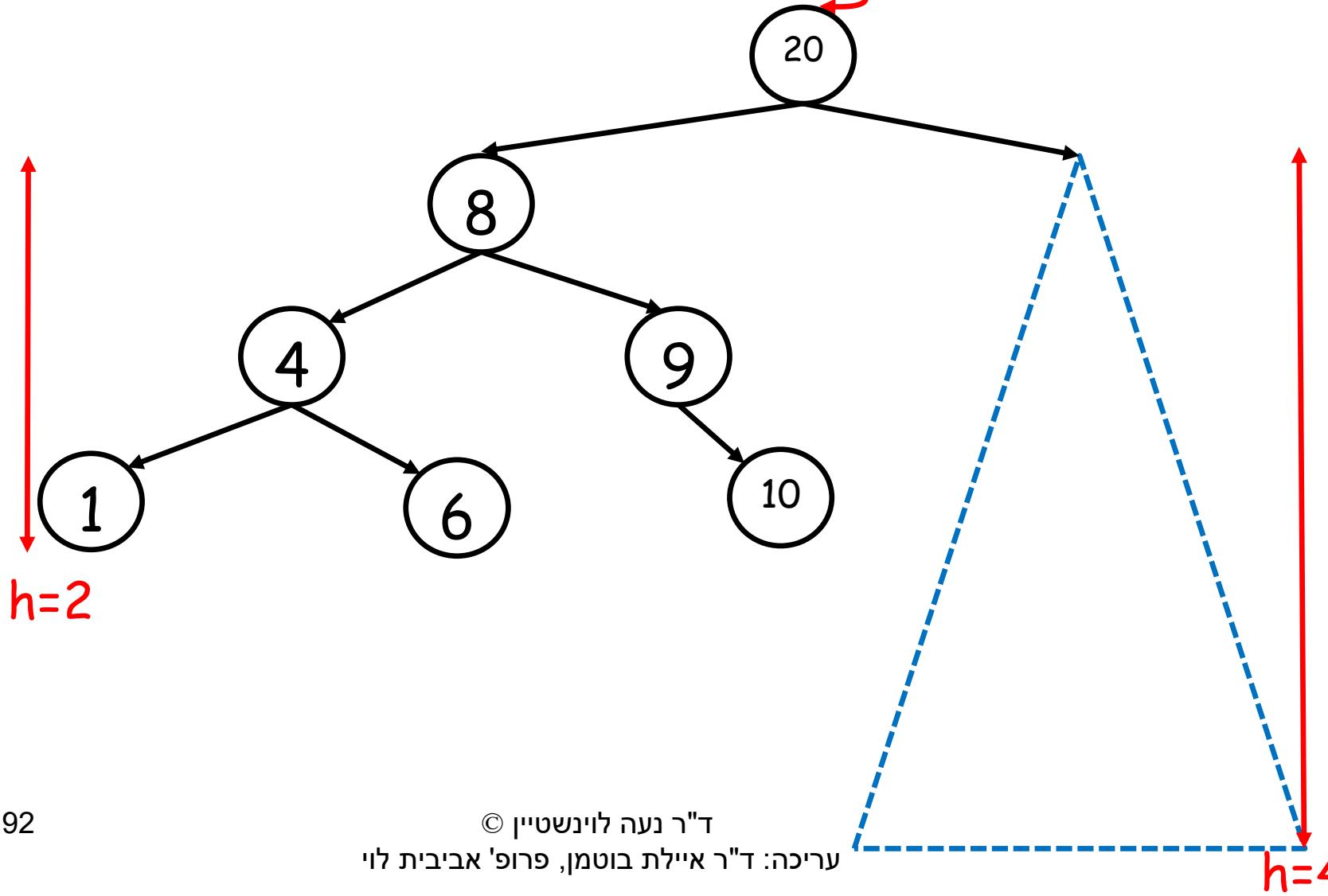
מדוע ?



$h=3$

191

מדוע ?



# עצי AVL - הוצאת ערך x לעץ

1. הוצאה את x כמו בעץ חיפוש בינרי.
2. תקן את גורמי האיזון ובצע גלגולים באופן הבא:  
לכל צומת  $v$  לאורך המסלול החל מלמטה ועד לשורש בצע:
  - א- שנה את פרמטר איזון של  $v$ .
  - ב- אם גורם האיזון של  $v$  משתנה ל-2 (או -2)  
בצע גלגול מתאים.

# הוצאת איבר מעץ AVL

$O(h)$

מציאת המקום הדרוש להוצאה

מציאת המקום בו מופר האיזון

$O(h)$

(אם מופר)

תיקון כלל פעולות האיזון שיש

$O(h)$

לבע (לכל היותר פעם בכל רמה)

---

$O(h) = O(\log n)$

סך הכל: