



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE



Université de Lorraine

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

COURBES PARAMÉTRÉES DANS L'ESPACE

TIPE, L3

Auteur :
Lidia Nievas Dueñas

Mai 2024

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Exemples dans 2D	2
1.2	Exemples dans 3D	3
2	Courbes paramétrées. Courbes régulières. Longueur de l'arc	4
2.1	Courbes paramétrées	5
2.2	Courbes régulières	5
2.2.1	Exemples	6
2.3	Longueur de l'arc	9
2.3.1	Propriétés	9
2.3.2	Exemples	11
3	Théorie locale des courbes planes régulières : courbure et dièdre de Frenet.	11
3.1	Courbure	11
3.1.1	Exemples	12
3.1.2	Interprétation géométrique du signe de courbure	12
3.1.3	Propriétés	13
3.2	Rayon de courbe, centre de courbe, circonférence osculatrice et développée	15
3.2.1	Exemples	16
3.3	Dièdre de Frenet	17
3.3.1	Observations :	19
4	Théorie locale des courbes régulières dans l'espace : courbure, torsion et trièdre de Frenet	19
5	Théorème fondamental des courbes de l'espace	23
6	Bibliographie commentée	26

Courbes paramétrées dans l'espace

Lidia Nievas Dueñas

21 mai 2024

1 Introduction

Les équations paramétriques permettent d'obtenir une grande variété de courbes, certaines familières, d'autres étranges, d'autres complexes, et d'autres encore surprenantes par leur symétrie et leur beauté. Ces courbes sont générées lorsque les variables x et y sont exprimées en fonction d'une troisième variable appelée paramètre.

Si x et y sont donnés comme fonctions d'une troisième variable t (appelée paramètre) par les équations $x = f(t)$ et $y = g(t)$ (appelées équations paramétriques), alors chaque valeur de t détermine un point (x, y) qui peut être représenté dans un système de coordonnées. Lorsque t varie, le point $(x, y) = (f(t), g(t))$ varie et trace une courbe C (appelée courbe paramétrique).

Avant de commencer l'étude approfondie des courbes paramétriques, examinons quelques exemples importants dans l'histoire.

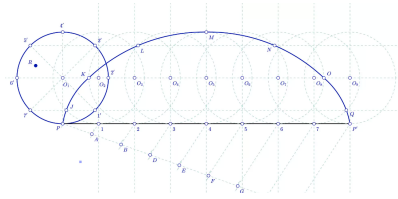
1.1 Exemples dans 2D

Regardons maintenant quelques exemples de courbes dans le plan :

1. **La cycloïde :** Ce type de courbe a été appelé "l'Hélène des géomètres". Bien que ce soit Mersenne, en 1615, qui l'ait définie comme une cycloïde, son étude a beaucoup intéressé Galilée, Torricelli, Fermat, Descartes, Huygens et Pascal (Ibid).

Les équations paramétriques qui permettent de tracer la cycloïde sont :

$$x = a(t - \sin(t)), y = a(1 - \cos(t))$$

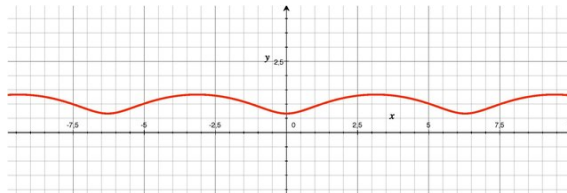


2. **Le trochoïde** : La trochoïde est une généralisation de la cycloïde : c'est la trajectoire d'un point sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite fixe. Lorsque le point est situé sur le cercle, c'est le cas particulier de la cycloïde.

Cette courbe a été étudiée par Dürer en 1525 et par Rømer en 1674.

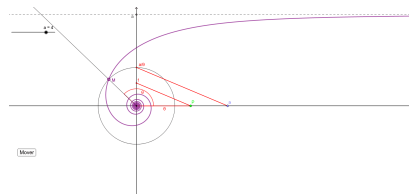
Les équations paramétriques de la trochoïde sont :

$$x(t) = rt - a\sin(t), y(t) = r - a\cos(t)$$



3. **Spirale hyperbolique** : On termine cette section avec la spirale hyperbolique, qui est définie par l'équation polaire $r\theta = a$, qui est l'inverse de la spirale d'Archimède. Cette courbe a été étudiée par Pierre Varignon, Johann Bernoulli et Roger Cotes. Ses équations paramétriques sont :

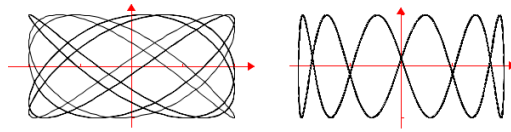
$$x = a \cdot \cos(t)/t, y = a \cdot \sin(t)/t$$



1.2 Exemples dans 3D

1. **Courbes de Lissajous 3D** : Les figures de Lissajous 3D sont des courbes paramétriques, où chacune des coordonnées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ est une fonction sinusoidale. Cette courbe est définie par :

$$x = a\cos(nt), y = a\sin(nt), z = b\cos(mt)$$



2. **Anneaux de Borromée-ellipses version :** Également connu sous le nom de "nœud de Borromée". Ils tirent leur nom d'une célèbre famille de princes italiens de la Renaissance, les Borromées, qui les ont adoptés comme symbole héraldique. Ils sont gravés dans la pierre de leur château, situé sur l'une des îles Borromées du lac Majeur (belle île), dans le nord de l'Italie. Dans cette version, les équations paramétriques de la première ellipse sont :

$$x = a \cdot \cos(t), y = b \cdot \sin(t), z = 0$$

Pour la seconde ellipse :

$$x = 0, y = a \cdot \cos(t), z = b \cdot \sin(t)$$

La troisième ellipse est facile à déduire.



2 Courbes paramétrées. Courbes régulières. Longueur de l'arc

On travaille dans R^n avec le produit scalaire $<, >$ qui induit une norme :
Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$, on définit :

$$< u, v > = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

$$\|u\| = \sqrt{< u, u >} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$$

Toutes nos fonctions seront $f : I \rightarrow R$, où I est un intervalle ouvert dans R .

On dit qu'elle est **différentiable** si en chaque point de I la fonction a des dérivées de tous ordres, c'est-à-dire lorsqu'il est de classe C^∞ .

Si f est défini dans un intervalle $J \subseteq R$ (qui n'est pas ouvert), on dira que $f : J \rightarrow R$ est différentiable si I intervalle ouvert telle que $J \subseteq I$ et $\hat{f} : I \rightarrow R$ fonction différentiable telle que $\hat{f}|_J = f$

Une fonction $f : I \rightarrow R^n$ où I est un intervalle ouvert dans R avec composants $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ est différentiable si et seulement si $f_i : I \rightarrow R$ est différentiable $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

2.1 Courbes paramétrées

Définition 1. On appelle **courbe paramétrée** dans R^n à une application $\alpha : I \rightarrow R^n, \alpha(t) = (\alpha_1'(t), \dots, \alpha_n'(t)), t \in I$, différentiable, c'est-à-dire, telle que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont différents.

À t on l'appelle **paramètre** et à l'image de α , c'est-à-dire, $\alpha(I)$, on l'appelle **trace du courbe** α .

De même, on appelle **vitesse vectorielle** de α dans t à $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \dots, \alpha_n'(t))$ et **accélération vectorielle** de α dans t à $\alpha''(t) = (\alpha_1''(t), \dots, \alpha_n''(t))$

Soit $\phi : J \rightarrow \phi(J) = Im$ un difféomorphisme d'où J est un intervalle ouvert dans R . On voit que $\beta = \alpha \cdot \phi : J \rightarrow R^n$ est autre courbe paramétrée. Aussi on a $\beta(J) = \alpha(I)$, c'est-à-dire, les deux ont la même trace.

On dira donc que β est une **reparamétrisation** de α et on appelle **changement de paramètre** à ϕ .

2.2 Courbes régulières

Définition 2. On dit qu'une courbe paramétrée $\alpha : I \rightarrow R^n$ est **régulière** si $\alpha'(t) \neq (0, \dots, 0), \forall t \in I$

Si $\alpha : I \rightarrow R^n$ est une courbe régulière on peut considérer la ligne affine $R_\alpha(t) = \{\alpha(t) + \lambda \alpha'(t) / \lambda \in R\}$ qui s'appelle **ligne tangente à α dans le point $\alpha(t)$** .

Si $\beta = \alpha \cdot \phi$ avec ϕ un changement de paramètre, on a $\beta'(t) = \alpha'(\phi(t))\phi'(t)$.

Observons que comme ϕ est un difféomorphisme, on sait que $\phi'(t) \neq 0$ dans tout point. Donc, si β est une reparamétrisation de α , β est régulière si et seulement si α est régulière.

On a que $\phi' : J \rightarrow R$, et comme J est un intervalle connexe on a que $\phi'(t) > 0$ (reparamétrisation directe) ou $\phi'(t) < 0$ (reparamétrisation inverse).

2.2.1 Exemples

Regardons maintenant quelques exemples de courbes paramétrées.

1. *Courbes constantes* : On peut définir $\alpha : I \rightarrow R^n$ telle que

$$\alpha(t) = (p_1, \dots, p_n) = p$$

On a que $\alpha'(t) = (0, \dots, 0)$, donc ils ne sont pas régulières.

2. *Lignes affines* : Soit $p \in R^n, v \in R^n \setminus \{0\}$, on peut paramétriser $\alpha : R \rightarrow R^n$ telle que $\alpha(t) = p + tv \Rightarrow \alpha'(t) = v$, donc ils sont régulières.

On peut également considérer d'autres paramétrages de la même ligne, en considérant par exemple $\beta : R \rightarrow R^n, \beta(t) = p + 3tv, \beta = \alpha \cdot \phi$, avec $\phi : R \rightarrow R, \phi(t) = 3t$. Il aurait que $\beta'(t) = 3v$.

Une autre paramétrisation peut-être $\gamma : R \rightarrow R^n, \beta(t) = p + t^4v, \beta'(t) = 3t^3v$ qui n'est pas régulière dans $t=0$, donc n'est pas une paramétrisation.

3. *Circonférences* : Soit $C(p_0, r)$, on a :

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2 \Rightarrow \frac{x - c_1}{r}^2 + \frac{y - c_2}{r}^2 = 1$$

On appellera $\cos(t) = \frac{x-c_1}{r}, \sin(t) = \frac{y-c_2}{r} \Rightarrow x = c_1 + r\cos(t), y = c_2 + r\sin(t)$

Il suffit de considérer $\alpha : R \rightarrow R^2, \alpha(t) = (c_1 + r\cos(t), c_2 + r\sin(t)) = (c_1 + c_2) + r(\cos(t), \sin(t)) \Rightarrow \alpha(R) = C(p_0, r)$

Comme $\alpha'(t) = r(-\sin(t), \cos(t))$, il est régulière.

Une reparamétrisation de α serait $\beta : R \rightarrow R^2, \beta(t) = (c_1 + c_2) + r(\cos(2t), \sin(2t))$, avec $\phi(t) = 2t, \phi'(t) = 2 > 0$ (rep. directe).

Si on considère $\gamma : R \rightarrow R^2, \gamma(t) = (c_1 + c_2) + r(\cos(t), \sin(t))$, on peut voir que $\phi(t) = \frac{\pi}{2} - t, \phi'(t) = -1 < 0$ (rep. inverse).

4. *Ellipses* : En général, décrivez une "figure géométrique" de R^2 (ou de R^3) car l'image d'une courbe paramétrée n'est pas facile et, quand cela peut être fait, la manière de le faire n'est pas unique. Nous appellerons ce processus un paramétrage de la figure considérée.

Par exemple, la circonférence de l'exemple précédent fait partie d'une famille plus large d'objets géométriques que sont les ellipses. Nous savons que une ellipse est la conique du plan de R^2 avec équation

$$\{(x, y) \in R^2 / \frac{x - c_1}{r}^2 + \frac{y - c_2}{r}^2 = 1 \Rightarrow \alpha(t) = (c_1, c_2) + (a\cos(t), b\sin(t))\}$$

5. *Graphiques* : Soit $f : I \rightarrow R^n$ une fonction différentiable, on peut définir $\alpha_f : I \rightarrow R^n + 1$, $\alpha_f(t) = (t, f(t))$ courbe paramétrée, car $\alpha'_f(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0)$, donc α_f est toujours régulière.

Pour $n=1$, on a $\alpha_f(t) = (t, t^2) = \text{Graph}(f)$

6. *Hélices cylindriques* : $\forall a, b \in R^n \setminus \{0\}$, on peut définir la courbe paramétrée $\alpha_f : R \rightarrow R^3$, $\alpha = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$. On suppose que $a > 0$, $\alpha'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b) \neq (0, 0, 0)$, donc α est régulière.

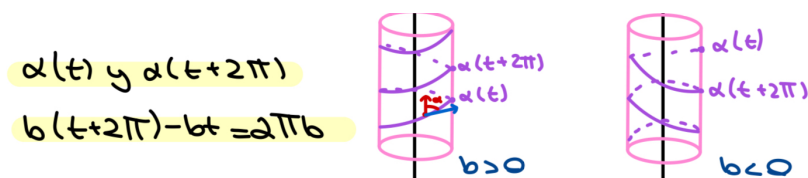
De plus, on a les propriétés suivantes pour cette courbe :

- La projection de la trace de α dans le plan $z=0$ est une circonférence de centre $(0,0)$ et rayon a . Donc la courbe est sur un cylindre avec axe l'axe x et rayon a .
- La courbe n'est pas limitée en hauteur.
- $\cos(\gamma) = \frac{\langle \alpha'(t), (0,0,1) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (cte)
- On va voir lequel c'est l'angle orienté entre $(1,0,0)$ et $(a \cos(t), a \sin(t), 0)$:

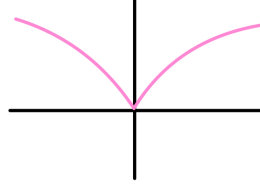
$$\cos(\sigma) = \frac{\langle (1, 0, 0), (a \cos(t), a \sin(t), 0) \rangle}{a} = \cos(t),$$

$$\sin(\sigma) = \frac{\det((1, 0), (a \cos(t), a \sin(t)))}{a} = \sin(t) \Rightarrow \sigma = t$$

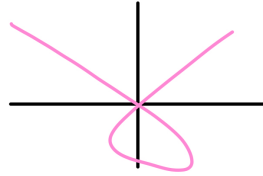
α est appelé hélice circulaire ou cylindrique de rayon a et de pas $2\pi b$



7. Soit $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t^2, t^2)$ avec $\alpha'(t) = (2t, 2t)$, donc α n'est pas régulière dans $(0,0)$.



8. Soit $\alpha : (\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^2)$, $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ avec $\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t)$, comme les deux coordonnées ne sont pas annulées en même temps, la courbe est régulière. En outre, α n'est pas injective, $\alpha(2) = (0, 0) = \alpha(-2)$, donc l'image de la courbe a des auto-intersections.



Propriété : Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe régulière. Pour tout $t_0 \in I$, il existe $\epsilon > 0$ telle que $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\subseteq I$ et $\gamma|_{]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[}$ est injective.

Démonstration. Avec le Théorème de la fonction inverse, soit $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application C^1 et $x_0 \in O$. Si $\det(Jf(x_0)) \neq 0$, il existe U, V ouverts dans \mathbb{R}^n telles que $x_0 \in U$ et $f(x_0) \in V$ telle que $f^V|_U : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme.

On sait que comme γ est régulière, $\gamma'(b) = (\gamma'_1(b), \dots, \gamma'_n(b)) \neq (0, \dots, 0)$

Supposons que $\gamma'_1(b) \neq 0$. Définissons $F : I \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable, telle que $F(t, x_2, \dots, x_n) = \gamma(t) + (0, x_2, \dots, x_n) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t) + x_2, \dots, \gamma_n(t) + x_n)$ Donc,

$$J(f(t, x_2, \dots, x_n)) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \gamma'_2(t) & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \gamma'_3(t) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma'_n(t) & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

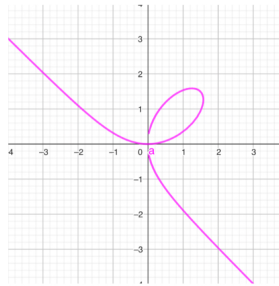
d'où son déterminant au point $(t_0, 0, \dots, 0)$ est $\det(J(f(t_0, 0, \dots, 0))) = \gamma'_1(t_0) \neq 0$ Pourtant, nous sommes dans les conditions du TFI et U, V ouverts de \mathbb{R}^n telle que $(t_0, 0, \dots, 0) \in U$ et $\gamma(t_0) \in V$ telle que $F^V|_U : U \rightarrow V$ est un

difféomorphisme. Au puls, $\epsilon > 0$, U' ouvert dans $R^n - 1$ telle que $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\times U' \subseteq U$ telle que $F^V|_{]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\times U'}$ est bijective.

Supposons que $t_1, t_2 \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ telle que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, donc $F(t_1, 0, \dots, 0) = F(t_2, 0, \dots, 0)$ et comme F est injective on a $t_1 = t_2$ \square

Le résultat précédent n'implique pas que $\gamma(I) \subseteq R^n$ soit localement homéomorphe à R

9. *Descartes Folium* : Ce n'est pas parce qu'une courbe paramétrée manque d'auto-intersections qu'elle doit être un plongement. Par exemple, le courbe $\alpha :]-1, \infty[\rightarrow R^2$ donné par $\alpha(t) = (\frac{3t}{1+t^2}, \frac{3t^2}{1+t^3})$ qui est injective mais elle ne s'imprégner pas.



2.3 Longueur de l'arc

Définition 3. Soit une courbe paramétrée $\alpha : I \rightarrow R^n$, nous définissons **la longueur de l'arc entre a et b**, $a, b \in I, a < b$ comme $L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$.

2.3.1 Propriétés

- La longueur d'une courbe paramétrée est invariant par paramétrages, c'est-à-dire, si $\phi : J \rightarrow I$ est un difféomorphisme telle que $\phi([c, d]) = [a, b] \Rightarrow L_c^d(\alpha \circ \phi) = L_a^b(\alpha)$.

Démonstration.

$$L_c^d(\alpha \circ \phi) = \int_c^d \|(\alpha \circ \phi)'(t)\| dt = \int_c^d \|\alpha'(\phi'(t))\phi'(t)\| dt = \int_c^d \|\alpha'(\phi'(t))\| \cdot |\phi'(t)| dt$$

$$\text{Supposons } \phi'(t) > 0 \Rightarrow \int_c^d \|\alpha'(\phi'(t))\| \cdot |\phi'(t)| dt = \int_c^d \|\alpha'(\phi'(t))\| \cdot \phi'(t) dt = \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds = L_a^b(\alpha)$$

D'autre part, si $\phi'(t) < 0 \Rightarrow \int_c^d \|\alpha'(\phi'(t))\| \cdot |\phi'(t)| dt = - \int_c^d \|\alpha'(\phi'(t))\| \cdot \phi'(t) dt = - \int_c^d \|\alpha'(s)\| ds = \int_c^d \|\alpha'(s)\| ds = L_a^b(\alpha)$

□

- La courbe la plus courte reliant deux points est le segment de droite, c'est-à-dire, on a $L_a^b(\alpha) \geq \|\alpha(b) - \alpha(a)\|$

Démonstration.

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \Rightarrow \|\alpha(b) - \alpha(a)\| = \left\| \int_a^b \alpha'(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = L_a^b(\alpha)$$

□

- La longueur de l'arc est invariante pour les mouvements rigides.

Démonstration. C'est facile à voir que soit $\beta = f \cdot \alpha : I \rightarrow R^n$, on a que $\beta'(t) = f(\alpha(t)) \neq (0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha$ est régulière $\Leftrightarrow \beta$ est régulière.

$$L_a^b(\beta) L_a^b(f \cdot \alpha) = \int_c^d \|(f(\alpha'(t)))'(t)\| dt = \int_c^d \|\alpha'(t)\| dt = L_a^b(\alpha)$$

On dirait donc que α et β sont courbes congruentes.

□

- Si $\alpha : I \rightarrow R^n$ est une courbe paramétrée régulière telle que $\|\alpha'(t)\| = 1$, alors $L_a^b(\alpha) = b - a$.

Démonstration. Directe.

□

- Toute courbe régulière peut être paramétrée par sa longueur de l'arc.

Démonstration. Soit $\alpha : I \rightarrow R^n$ courbe régulière et $t_0 \in I$. Définissons $S_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$

On soit que $S_{t_0}(t_0) = 0$, $\frac{ds_0}{dt}(t) = \|\alpha'(t)\| > 0, \forall t \in I$, où $S_{t_0} : I \rightarrow J_{t_0}$ est un difféomorphisme.

Soit $\phi_{t_0} : J_{t_0} \rightarrow I$, telle que $\phi_{t_0} = S_{t_0}^{-1}$. On veut que $\beta_{t_0} = \alpha \cdot \phi_{t_0}$ est une reparamétrisation par l'arc de α .

$$\beta'_{t_0}(s) = \alpha'(\phi_{t_0}(s)) \phi'_{t_0}(s) = \alpha'(\phi_{t_0}(s)) \frac{1}{\|\alpha'(\phi_{t_0}(s))\|}$$

Donc $\|\beta'_{t_0}(s)\| = 1$

□

- Le paramètre de longueur d'arc d'une courbe régulière est unique, sauf en cas de changement de direction et de translation.

Démonstration. Soit $\alpha : I \rightarrow R^n$ courbe régulière, soit β_1 et β_2 deux reparamétrisées de α pour la longueur de l'arc, $\beta_1 = \alpha \cdot \phi_1$ et $\beta_2 = \alpha \cdot \phi_2$, on a $\beta_1^{-1} \cdot \phi_1^{-1} = \beta_2^{-1} \cdot \phi_2^{-1} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 \cdot \phi_2^{-1} \cdot \phi_1 \Rightarrow \beta_1(t) = \beta_2(t) \cdot \psi(t)$ (on a utilisé $\psi(t) = \phi_2^{-1} \cdot \phi_1$).

Si on dérive, on a $\beta_1'(t) = \beta_2'(\psi(t))\psi'(t)$, et en normalisant, on a $\|\beta_1'(t)\| = \|\beta_2'(\psi(t))\| \cdot |\psi'(t)|$, et comme $\|\beta_1'(t)\| = \|\beta_2'(\psi(t))\| = 1$, on a $\psi'(t) = 1$ ou $\psi'(t) = -1$.

En intégrant, on obtient $\psi(t) = t + c$ ou bien $\psi(t) = -t + c$, $c \in R$ \square

2.3.2 Exemples

Regardons maintenant quelques exemples du calcul de longueur de l'arc.

1. *Lignes affines* : Soit $p \in R^n, v \in R^n \setminus \{0\}$, $\alpha : R \rightarrow R^n$, $\alpha(t) = p + tv \Rightarrow \alpha'(t) = v$. On aura :

$$S(t) = \int_0^t \|v\| dt = \|v\|t, t = \frac{s}{\|v\|} \Rightarrow \alpha(s) = \frac{s}{\|v\|}v + p$$

2. *Hélices cylindriques* : $\forall a, b \in R \setminus \{0\}, \alpha_f : R \rightarrow R^3, \alpha = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$.
On suppose que $a \neq 0$, $\alpha'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$, $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2}t, t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

3 Théorie locale des courbes planes régulières : courbure et dièdre de Frenet.

3.1 Courbure

On va analyser des courbes $\alpha : I \rightarrow R^2$.

Par courbure, on entend deux choses :

1. C'est la mesure de ce qui sépare la trace de la courbe de la ligne droite.
2. C'est la mesure de la vitesse à laquelle la courbe s'infléchit.

On appelle $J : R^2 \rightarrow R^2$ la rotation de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, $J(x, y) = (-y, x)$. On écrira $Jv = J(v)$.

Définition 4. Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe. Définissons la **courbure** de α dans $t \in I$ comme $k(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3}$

Observations :

- Si α est paramétrée par l'arc, $k(t) = \langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle$
- Si $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ est une courbe régulière, on pourrait aussi écrire $k(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}$

3.1.1 Exemples

Regardons maintenant quelques exemples du calcul de longueur de l'arc.

1. *Lignes affines* : Soit $p \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \alpha(t) = p + tv \Rightarrow \alpha'(t) = v$. On aura :

$$\alpha'(t) = v, \alpha''(t) = 0 \Rightarrow \det(\alpha'(t), \alpha''(t)) = 0 \Rightarrow k(t) = 0$$

2. *Circonférences* : Soit $c \in \mathbb{R}^2, r > 0, \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = c + r(\cos(t), \sin(t))$. On aura :

$$\alpha'(t) = r(-\sin(t), \cos(t)), \alpha''(t) = -r(\sin(t), \cos(t)) \Rightarrow k(t) = \frac{1}{r}$$

3. *Graffes* : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonction différentiable et $\alpha_f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, avec $\alpha_f(t) = (t, f(t))$. On aura :

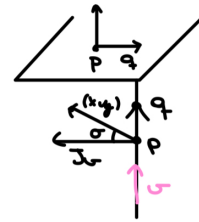
$$\alpha'(t) = (1, f'(t)), \alpha''(t) = (0, f''(t)) \Rightarrow k(t) = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}$$

3.1.2 Interprétation géométrique du signe de courbure

Soit $R = p + \lambda v / \lambda \in \mathbb{R}$ une ligne affine. On peut écrire $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \langle (x, t) - p, Jv \rangle = 0\}$ On sait que $\mathbb{R}^2 \setminus R$ a deux les composants connexes qui sont :

$$H^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \langle (x, t) - p, Jv \rangle > 0\}$$

$$H^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \langle (x, t) - p, Jv \rangle < 0\}$$



De plus, H^+ est le demi-plan sur lequel pointe Jv :

Démonstration. Soit σ l'angle que forment les vecteurs $\overrightarrow{(x, y) - p}$ et $\overrightarrow{Jv} \Rightarrow \cos(\sigma) = \frac{\langle (x, y) - p, Jv \rangle}{\|(x, y) - p\| \cdot \|Jv\|} > 0$ si $(x, y) \in H^+ \Rightarrow \sigma \in [0, \frac{\pi}{2}[$ \square

De même, H^- est le demi-plan vers lequel pointe $-Jv$.

Soit $\alpha : I \rightarrow R^2$ une courbe régulière, on peut considérer pour chaque $t_0 \in I$ la droite tangente à α en $\alpha(t_0)$

$$R_{\alpha(t_0)} = \{(x, y) \in R^2 / \langle (x, t) - \alpha(t_0), J\alpha'(t_0) \rangle = 0\}$$

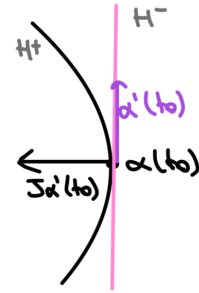
On veut savoir dans quel demi-plan se trouve $\alpha(t)$ dans un voisinage de $\alpha(t_0)$. Pour ce faire, on va étudier la fonction $h : I \rightarrow R$ donnée par

$$h(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), J\alpha'(t_0) \rangle, h'(t) = \langle \alpha'(t), J\alpha'(t_0) \rangle$$

$$h''(t) = \langle \alpha''(t), J\alpha'(t_0) \rangle$$

Si on évalue dans t_0 , on aura $h(t_0) = h'(t_0) = 0$ (point critique dans t_0)
 $h''(t_0) = k(t_0) \|\alpha'(t_0)\|^3$ (donc le signe de $h''(t)$ dépend de $k(t)$) :

- Si $k(t_0) < 0 \Rightarrow h''(t_0) > 0 \Rightarrow h$ a un minimum local dans $t_0 \Rightarrow$ comme $h(t_0) = 0$, donc $\delta > 0$ telle que $h(t) > 0$ dans $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, c'est-à-dire, pour $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $\alpha(t)$ est dans le demi-plan vers lequel $J\alpha'(t_0)$ pointe.
- Si $k(t_0) > 0 \Rightarrow h''(t_0) < 0 \Rightarrow h$ a un maximum local dans $t_0 \Rightarrow$ comme $h(t_0) = 0$, donc $\delta > 0$ telle que dans $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $\alpha(t)$ est dans le demi-plan vers lequel $-J\alpha'(t_0)$ pointe.



3.1.3 Propriétés

Soit $\alpha : I \rightarrow R^2$ une courbe régulière, on a :

1. Si $f : R^2 \rightarrow R^2$ est un mouvement rigide et $\beta = f \cdot \alpha$, alors $k_\beta = k_\alpha$ si f est un mouvement rigide direct et $k_\beta = -k_\alpha$ si f est un mouvement rigide inverse.

Démonstration. On sait que F peut s'écrire comme $F(x) = \vec{F}(x) + v$, avec $\vec{F} : R^n \rightarrow R^n$ une isométrie vectorielle et $v \in R^n$. On a alors

$$\beta'(t) = \vec{F}(\alpha'(t)), \quad \beta''(t) = \vec{F}(\alpha''(t)).$$

D'où

$$\kappa_\beta(t) = \frac{\langle \beta''(t), J\beta'(t) \rangle}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{\langle \vec{F}(\alpha''(t)), J\vec{F}(\alpha'(t)) \rangle}{\|\vec{F}(\alpha'(t))\|^3}.$$

On a que pour que $\vec{F} : R^2 \rightarrow R^2$ soit une isométrie, \vec{F} doit être une rotation ou une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle $S = \text{Lin}(\{v\})$ pour $v \in R^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Si \vec{F} est une rotation, nous avons par le fait que J est aussi une rotation que $J \circ \vec{F} = \vec{F} \circ J$. Vérifions maintenant que si \vec{F} est la symétrie orthogonale

par rapport à L alors $J \circ \vec{F} = -\vec{F} \circ J$. Pour cela, considérons $\mathcal{B} = \{v, Jv\}$ une base orthogonale de R^2 . Observons que

$$\begin{cases} (J \circ \vec{F})(v) = Jv \\ (\vec{F} \circ J)(v) = -Jv \end{cases}, \quad \begin{cases} (J \circ \vec{F})(Jv) = J(-Jv) = v \\ (\vec{F} \circ J)(Jv) = \vec{F}(-v) = -v \end{cases}.$$

En utilisant ceci dans l'équation antérieur, on a

$$\kappa_\beta(t) = \pm \frac{\langle \vec{F}(\alpha''(t)), \vec{F}(J\alpha'(t)) \rangle}{\|\vec{F}(\alpha'(t))\|^3} = \pm \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = \pm \kappa_\beta(t).$$

□

2. Si $\alpha = \beta \cdot \phi$ pour ϕ difféomorphisme, on aura $k_\beta = k_\alpha$ si $\phi'(t) > 0 \forall t \in I$ et $k_\beta = -k_\alpha$ si $\phi'(t) < 0 \forall t \in I$.

Démonstration.

$$k_\alpha(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\phi'(t)^3 \langle \beta''(\phi(t)), J\beta'(\phi(t)) \rangle}{|\phi'(t)|^3 \|\beta'(\phi(t))\|^3} =_\beta (\phi(t))$$

□

3. Si $K = cte$, alors la trace de α est soit un segment de droite si $K=0$, soit un arc de cercle si $k = cte \neq 0$.

Démonstration. Supposons que $\kappa(t) = k$, pour tout $t \in I$, $k \in R$. D'après la propriété 2, on peut supposer que la courbe est paramétré par l'arc, on a alors que $\alpha''(t) = \kappa(t)J\alpha'(t) = kJ\alpha'(t)$, $\forall t \in I$.

Si $k = 0$ alors $\alpha'' \equiv (0, 0)$ et par conséquent en intégrant on a que $\alpha(t) = vt + p$, où $v \in R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $p \in R^2$.

Supposons maintenant que $k \neq 0$. On peut alors définir l'application différentiable $c : I \rightarrow R^2$ donnée par

$$c(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k}J\alpha'(t).$$

Vérifions que $c(t)$ est constante. En effet, si on calcule la dérivée, on aura

$$c'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k}J\alpha''(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k}J(kJ\alpha'(t)) = \alpha'(t) + \frac{1}{k}k(-\alpha'(t)) = (0, 0).$$

Ainsi, $c(t) = c_0$ pour tout $t \in I$. Considérons maintenant la fonction différentiable $g : I \rightarrow R$ donnée par :

$$g(t) = \|\alpha(t) - c_0\|^2 = \langle \alpha(t) - c_0, \alpha(t) - c_0 \rangle$$

La dérivée de g est donnée par

$$g'(t) = 2\langle \alpha'(t), \alpha(t) - c_0 \rangle = 2\langle \alpha'(t), -\frac{1}{k}J\alpha'(t) \rangle = 0,$$

où dans la deuxième égalité on a utilisé la définition de $c(t) = c_0$. Donc g est une constante positive, car si $g = 0$, on aura que la courbe α serait constante et donc non régulière, ce qui contredirait nos hypothèses sur α .

On conclue alors que $g(t) = r^2$ pour $r > 0$ ce qui implique que

$$\|\alpha(t) - c_0\|^2 = r^2,$$

c'est-à-dire que la trace de α est contenue dans le cercle de centre c_0 et de rayon r . \square

3.2 Rayon de courbe, centre de courbe, circonference osculatrice et développée

Soit $\alpha : I \rightarrow R^2$ une courbe. Soit $t_0 \in I$ telle que $k(t_0) > 0, \forall \lambda \in R$ on peut considérer $c : I \rightarrow R^2$ donnée par $c(\lambda) = \alpha(t_0) + J\left(\frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|}\right), \lambda \in R$

Pour chaque $\lambda \in R$, considérons la fonction $g_\lambda : R \rightarrow R$ donnée par

$$g_\lambda(t) = \|\alpha(t) - c(\lambda)\|^2,$$

où $c(\lambda) = \alpha(t_0) + \lambda J\alpha'(t_0)$, c'est-à-dire, une paramétrisation de la droite normale à la courbe α en t_0 . Il est clair que g_λ est dérivable et ses premières et deuxièmes dérivées sont données par

$$g'_\lambda(t) = 2\langle \alpha'(t), \alpha(t) - c(\lambda) \rangle, \quad g''_\lambda(t) = 2\langle \alpha''(t), \alpha(t) - c(\lambda) \rangle + 2\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle.$$

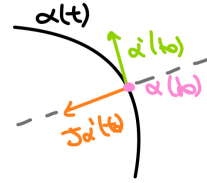
De plus,

$$g_\lambda(t_0) = \|\alpha(t_0) - \alpha(t_0) - \lambda J\alpha'(t_0)\|^2 = \lambda^2,$$

$$g'_\lambda(t_0) = 2\langle \alpha'(t_0), -\lambda J\alpha'(t_0) \rangle = 0,$$

$$g''_\lambda(t_0) = 2\langle \alpha''(t_0), -\lambda J\alpha'(t_0) \rangle + 2 = 2(1 - \lambda\kappa(t_0)).$$

- Si $\lambda < \frac{1}{k(t_0)}$, on a que $g''_\lambda(t_0) > 0$ et on aura donc un minimum local de g_λ dans t_0 . À partir de là, on a que $\delta > 0$ telle que $\alpha(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ est à l'extérieur du cercle de centre $c(\lambda)$ et de rayon λ .



- Si $\lambda > \frac{1}{k(t_0)}$, on a que $g''_\lambda(t_0) < 0$ et on aura donc un maximum local de g_λ dans t_0 . À partir de là, on a que $\delta > 0$ telle que $\alpha(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ est à l'intérieur du cercle de centre $c(\lambda)$ et de rayon λ .

Définition 5. On appelle **rayon de courbe** à $\lambda = \frac{1}{k(t_0)}$.

Définition 6. On appelle **centre de courbe** à $c(\frac{1}{k(t_0)}) = \alpha(t_0) + \frac{1}{k(t_0)} J(\frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|})$.

Définition 7. Le cercle de centre $c(\frac{1}{k(t_0)})$ et de rayon $\lambda = \frac{1}{k(t_0)}$ est appelé **cercle oscillant de α en t_0** .

Ce cercle passe par $\alpha(t_0)$ et est tangent à la droite tangente à α en t_0 qui approxime au mieux α dans un environnement de t_0 .

Définition 8. Si $k(t) \neq 0 \forall t \in I$, on peut définir la courbe formé par les centres de courbure, c'est-à-dire la courbe $e(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} J(\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|})$. Cette courbe est appelée **courbe développée**.

-Vitesse du développée : Soit $\alpha(t)$ courbe paramétrée par l'arc, on a :

$$\begin{aligned} e'(t) &= \alpha'(t) + \left(\frac{1}{k(t)}\right)' J\alpha'(t) + \frac{1}{k(t)} J\alpha''(t) = \alpha'(t) + \left(\frac{1}{k(t)}\right)' J\alpha'(t) - \alpha'(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow e'(t) = \left(\frac{1}{k(t)}\right)' J\alpha'(t) \end{aligned}$$

3.2.1 Exemples

1. *Circonférences* : Soit $c \in \mathbb{R}^2, r > 0, \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = c + r(\cos(t), \sin(t))$. On aura :

$$\alpha'(t) = r(-\sin(t), \cos(t)), J\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{r}r(-\cos(t), -\sin(t)), \|\alpha'(t)\| = r$$

$$e(t) = c + r(\cos(t), \sin(t)) + r(-\cos(t), -\sin(t)) = c$$

Le développée d'un cercle est une courbe constante.

2. L'développée d'une *ellipse* est un astroïde.
3. L'développée d'une *spirale logarithmique* est une autre spirale logarithmique.

3.3 Dièdre de Frenet

Soit $\alpha \in R \rightarrow R^2$ courbe paramétrée par l'arc, on peut considérer $T(t) = \alpha'(t)$ et $N'(t) = J\alpha'(t)$ telles que $T(t), N(t)$ forme une base orthonormée de $R^2 \forall t \in I$

On appelle **dièdre de Frenet** à cette base.

Si α n'est pas paramétrée par l'arc on peut considérer une base orthonormée $\left\{ \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right\}$.

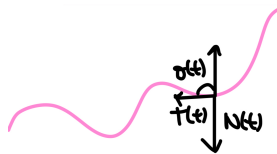
Si α est paramétrée par l'arc on a $T'(t) = \alpha''(t) = k(t)J\alpha'(t) = k(t)N(t)$ et $N'(t) = J\alpha''(t) = J(k(t)J\alpha'(t)) = -k(t)\alpha'(t) = -k(t)T(t)$.

On peut en déduire les équations de Frenet :

$$T'(t) = k(t)N(t)$$

$$N'(t) = -k(t)T(t)$$

Proposition 1. Soit $\alpha : I \rightarrow R^2$ une courbe paramétrée par l'arc et $v \in R^2, \|v\| = 1$. On appelle $\sigma(t)$ à l'angle orientée formée par v et $T(t)$. Donc $k(t) = \sigma'(t)$.



Démonstration. Supposons que $v = (v_1, v_2)$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Alors l'angle orienté $\theta(t) \in [0, 2\pi[$ est donné par

$$\cos \theta(t) = \langle v, \alpha'(t) \rangle = \langle v, T(t) \rangle, \quad \sin \theta(t) = \det(v, \alpha'(t)),$$

où $\det(v, \alpha'(t)) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ \alpha'_1(t) & \alpha'_2(t) \end{pmatrix} = -\langle v, J\alpha'(t) \rangle = -\langle v, N(t) \rangle$.

En dérivant les deux équations précédentes et en utilisant les équations de Frenet, on a

$$-\theta'(t) \sin \theta(t) = \langle v, T'(t) \rangle = \langle v, \kappa(t)N(t) \rangle = -\kappa(t) \sin \theta(t),$$

$$\theta'(t) \cos \theta(t) = -\langle v, N'(t) \rangle = \langle v, \kappa(t)T(t) \rangle = \kappa(t) \cos \theta(t).$$

Pour tout t tel que $\theta(t) \neq 0, \pi$, il se produit que $\sin \theta(t) \neq 0$, et par conséquent, la première équation nous dit que $\kappa(t) = \theta'(t)$. Si $t_0 \in I$ est tel que $\theta(t_0) = 0$ ou $\theta(t_0) = \pi$ alors $\cos \theta(t_0) = 1$ ou $\cos \theta(t_0) = -1$, ce qui signifie que la deuxième équation on dit $\kappa(t_0) = \theta'(t_0)$, ce qui conclut la preuve. \square

Théorème 1. Théorème fondamental des courbes planes

Soit $k : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable définie sur un intervalle ouvert I . Il existe alors $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par l'arc telle que $k_\alpha(t) = k(t) \forall t \in I$. De plus, α est unique à une translation rigide près.

Démonstration. On commence par prouver l'unicité. Supposons que on a $\alpha, \beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ des courbes régulières paramétrées par l'arc telles que $\kappa_\alpha = \kappa_\beta = \kappa$. On note $\{T_\alpha, N_\alpha\}$ et $\{T_\beta, N_\beta\}$ les dièdres de Frenet de α et β , respectivement. Étant donné $t_0 \in I$, il existe un mouvement rigide direct F tel que $F(\alpha(t_0)) = \beta(t_0)$, $\vec{T}(T_\alpha(t_0)) = T_\beta(t_0)$ et $\vec{F}(N_\alpha(t_0)) = N_\beta(t_0)$. Observons que $F \circ \alpha$ est une courbe paramétrée par l'arc telle que $\kappa_{F \circ \alpha} = \kappa_\alpha = \kappa$ et $\{T_{F \circ \alpha}, N_{F \circ \alpha}\} = \{\vec{F} \circ T_\alpha, \vec{F} \circ N_\alpha\}$. On va considérer la fonction dérivable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(t) = \|T_{F \circ \alpha}(t) - T_\beta(t)\|^2 + \|N_{F \circ \alpha}(t) - N_\beta(t)\|^2.$$

La dérivée de cette fonction est donnée par :

$$f'(t) = 2(\langle T'_{F \circ \alpha}(t) - T'_\beta(t), T_{F \circ \alpha}(t) - T_\beta(t) \rangle + \langle N'_{F \circ \alpha}(t) - N'_\beta(t), N_{F \circ \alpha}(t) - N_\beta(t) \rangle)$$

En utilisant les équations de Frenet, on aura :

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2(\langle \kappa_{F \circ \alpha}(t) N_{F \circ \alpha}(t) - \kappa_\beta(t) N_\beta(t), T_{F \circ \alpha}(t) - T_\beta(t) \rangle - \\ &\quad - \langle \kappa_{F \circ \alpha}(t) T_{F \circ \alpha}(t) - \kappa_\beta(t) T_\beta(t), N_{F \circ \alpha}(t) - N_\beta(t) \rangle) = \\ &= 2\kappa(t)(-\langle N_{F \circ \alpha}(t), T_\beta(t) \rangle - \langle N_\beta(t), T_{F \circ \alpha}(t) \rangle + \langle T_\beta(t), N_{F \circ \alpha}(t) \rangle + \langle T_{F \circ \alpha}(t), N_\beta(t) \rangle) = 0 \end{aligned}$$

D'où $f(t)$ est constant. De plus, $f(t_0) = \|T_{F \circ \alpha}(t_0) - T_\beta(t_0)\|^2 + \|N_{F \circ \alpha}(t_0) - N_\beta(t_0)\|^2 = 0$. Donc $T_{F \circ \alpha}(t) = T_\beta(t)$ et $N_{F \circ \alpha}(t) = N_\beta(t)$ pour tout $t \in I$. D'où $F \circ \alpha = \beta$ et F est unique.

Voyons maintenant l'existence. Soit $t_0 \in I$. De la Proposition 1 vue précédemment, il est sensé de définir la fonction

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t \kappa(x) dx.$$

Choisissons maintenant $p_0 \in \mathbb{R}^2$ et $\{T_0, N_0\}$ une base orthonormée positivement orientée. Définissons l'application $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ comme

$$\alpha(t) = p_0 + \int_{t_0}^t \cos(\theta(x)) dx \cdot T_0 + \int_{t_0}^t \sin(\theta(x)) dx \cdot N_0.$$

Tout d'abord, observons que α est une courbe paramétrée. En outre, du Théorème fondamental du Calcul, on a

$$\alpha'(t) = \cos(\theta(t)) \cdot T_0 + \sin(\theta(t)) \cdot N_0.$$

De là, on observe que α est régulière et est paramétrée par l'arc. Il est clair que

$$N(t) = -\sin(\theta(t)) \cdot T_0 + \cos(\theta(t)) \cdot N_0$$

est un champ normal unitaire à α et que $\{\alpha'(t), N(t)\}$ est une base orthonormale positive de R^2 . Ensuite, c'est le dièdre de Frenet de α . Observons que

$$\alpha''(t) = -\theta'(t) \sin(\theta(t)) \cdot T_0 + \theta'(t) \cos(\theta(t)) \cdot N_0 = \kappa(t)N(t).$$

Par conséquent, la courbure de α est donnée par

$$\kappa_\alpha(t) = \langle \alpha''(t), N(t) \rangle = \kappa(t).$$

Notons de plus que $\alpha(t_0) = p_0, \alpha'(t_0) = T_0$ et $N(t_0) = N_0$. □

3.3.1 Observations :

- Le mouvement rigide F ne dépend pas du point t_0 .
- Avec la démonstration du théorème on a une façon explicite pour calculer α .
- Si α et $\beta : I \rightarrow R^2$ sont deux courbes telles que $k_\alpha(t_1) \neq k_\beta(t_1)$ pour certain $t_1 \in I$. Pour le théorème on sait que n'existe pas F mouvement rigide directe telle que $F \cdot \alpha = \beta$.

4 Théorie locale des courbes régulières dans l'espace : courbure, torsion et trièdre de Frenet

Dans cette section, on va étudier les courbes régulières de l'espace tridimensionnel. Soit $\alpha : I \subseteq R \rightarrow R^3$ une courbe régulière paramétrée par l'arc.

Définissons le **vecteur tangent de α dans t** comme : $T(t) = \alpha'(t)$.

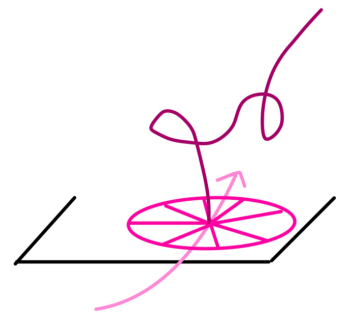
Définissons la **courbure** de α comme $k(t) = \|T'(t)\|, \forall t \in I$.

Si $k \neq 0$ ($\|T'(t)\| \neq 0$), la fonction k est dérivable et on peut définir

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{T'(t)}{k(t)} = \frac{\alpha''(t)}{k(t)}$$

Avec $\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 1$ et $\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$.

On a que $N(t)$ est un vecteur unitaire et perpendiculaire à $T(t)$. Il en résulte que $T'(t) = k(t)N(t)$.



Le plan passant par $\alpha(t)$ et ayant pour vecteur directeur un vecteur perpendiculaire à $T(t)$ et $N(t)$ est appelé **plan osculateur**.

Définissons $B(t) = T(t) \times N(t)$ qui est un vecteur unitaire et perpendiculaire à $T(t)$ et $N(t)$. Donc $T(t), N(t), B(t)$ est une base orthonormée de R^3 orientée positivement. À cette base on l'appelle **trièdre de Frenet** et à $B(t)$ on l'appelle **vecteur trinormal de α dans t** .

Si α est dans un plan, on aura que tous les plans oscillants seraient égaux à ce plan et le vecteur trinormal serait donc constant :

$$B'(t) = T'(t) \times N(t) + T(t) \times N'(t) = \kappa(t)N(t) \times N(t) + T(t) \times N'(t) = T(t) \times N'(t)$$

Donc on aura $\langle B'(t), T(t) \rangle = 0$. D'autre part, comme $\langle B(t), B(t) \rangle = 1$, si on dérive on obtient $\langle B'(t), B(t) \rangle = 0$, donc on aura $B'(t) = \tau(t)N(t), \forall t$. Observons que $\tau = \langle B'(t), N(t) \rangle$ est différentiable ; on l'appellera **torsion de α dans t** .

Observons qu'une courbe avec une courbure strictement positive a une torsion identiquement nulle si $B'(t) = 0$ pour tout $t \in I$, c'est-à-dire si $B(t) = v_0$. Comme $\langle \alpha'(t), v_0 \rangle = 0$ on a que $\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), v_0 \rangle = 0$, c'est-à-dire que $\alpha(I)$ est contenu dans le plan affine qui passe par $\alpha(t_0)$ et a pour vecteur directeur v_0 . Réciproquement, si $\alpha(I)$ est contenu dans le plan qui passe par p_0 avec le vecteur directeur v_0 , alors ce plan coïncide avec tous les plans osculateurs et ainsi $B(t)$ serait constant.

Il manque calculer $N'(t)$ pour tout $t \in I$. Comme le trièdre de Frenet est une base orthonormale, nous avons

$$\begin{aligned} N'(t) &= \langle N'(t), T(t) \rangle T(t) + \langle N'(t), N(t) \rangle N(t) + \langle N'(t), B(t) \rangle B(t) \\ &= -\langle N(t), T'(t) \rangle T(t) - \langle N(t), B'(t) \rangle B(t) = -\kappa(t)T(t) - \tau(t)B(t). \end{aligned}$$

En résumé, si $\alpha : I \subseteq R \rightarrow R^3$ est une courbe de classe \mathcal{C}^2 avec une courbure $\kappa(t) > 0$ et une torsion τ , alors on a les équations suivantes :

$$\begin{cases} T'(t) &= \kappa(t)N(t) \\ N'(t) &= -\kappa(t)T(t) - \tau(t)B(t) \\ B'(t) &= \tau(t)N(t) \end{cases}$$

On appelle ce système d'équations différentielles les **équations de Frenet**.

Les expressions ci-dessus pour la courbure et la torsion ont été données pour les courbes paramétrées par l'arc. Voyons comment définir ces concepts pour une courbe régulière qui n'est pas paramétrée par l'arc.

Proposition 2. Soit $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^2$ une courbe régulière. Soit $\beta = \alpha \cdot \phi : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ reparamétrisation par l'arc directe de α , alors :

$$k_\beta \cdot \phi^{-1} = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Au plus, si $k_\beta(t) > 0 \Rightarrow \tau_\beta \cdot \phi^{-1} = -\frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$ et le trièdre de Frenet serait :

$$\begin{cases} T_\beta \cdot \phi^{-1} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \\ B_\beta \cdot \phi^{-1} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \\ N_\beta \cdot \phi^{-1} = (B_\beta \cdot \phi^{-1}) \cdot (T_\beta \cdot \phi^{-1}) \end{cases}$$

Une autre façon de calculer le vecteur normal serait de normaliser le vecteur $\|\alpha'\|^2 \alpha'' - \langle \alpha', \alpha'' \rangle \alpha'$.

Démonstration. On peut écrire $\alpha = \beta \circ \psi$ où $\psi = \phi^{-1}$. De là, on a :

$$\alpha'(t) = \frac{d\beta}{ds}(\psi(t))\psi'(t)$$

En prenant les normes des deux côtés de l'égalité précédente, on aura :

$$\|\alpha'(t)\| = \left\| \frac{d\beta}{ds}(\psi(t)) \right\| \|\psi'(t)\| = \|\psi'(t)\|.$$

Donc $\psi'(t) = \|\alpha'(t)\|$. En dérivant, on a :

$$\begin{cases} \alpha''(t) = \frac{d^2\beta}{ds^2}(\psi(t))\psi'(t)^2 + \frac{d\beta}{ds}(\psi(t))\psi''(t), \\ \alpha'''(t) = \frac{d^3\beta}{ds^3}(\psi(t))\psi'(t)^3 + 3\frac{d^2\beta}{ds^2}(\psi(t))\psi'(t)\psi''(t) + \frac{d\beta}{ds}(\psi(t))\psi'''(t). \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= \psi'(t)^3 \frac{d^3\beta}{ds^3}(\psi(t)) \times \frac{d^2\beta}{ds^2}(\psi(t)) = \|\alpha'(t)\|^3 \left(T_\beta(\psi(t)) \times \frac{dT_\beta}{ds}(\psi(t)) \right) = \\ &= \|\alpha'(t)\|^3 (T_\beta(\psi(t)) \times \kappa_\beta(\psi(t))N_\beta(\psi(t))) = \|\alpha'(t)\|^3 \kappa_\beta(\psi(t)) (T_\beta(\psi(t)) \times N_\beta(\psi(t))) = \\ &= \|\alpha'(t)\|^3 \kappa_\beta(\psi(t))B_\beta(\psi(t)) \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)) &= \det \left(\frac{d\beta}{ds}(\psi(t))\psi'(t), \frac{d^2\beta}{ds^2}(\psi(t))\psi'(t)^2, \frac{d^3\beta}{ds^3}(\psi(t))\psi'(t)^3 \right) = \\ &= \|\alpha'(t)\|^6 \det \left(T_\beta(\psi(t)), \kappa_\beta(\psi(t))N_\beta(\psi(t)), \frac{d(\kappa_\beta N_\beta)}{ds}(\psi(t)) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|\alpha'(t)\|^6 \det \left(T_\beta(\psi(t)), \kappa_\beta(\psi(t))N_\beta(\psi(t)), \frac{d\kappa_\beta}{ds}(\psi(t))N_\beta + \kappa_\beta(\psi(t))\frac{dN_\beta}{ds}(\psi(t)) \right) = \\
&= \|\alpha'(t)\|^6 \kappa_\beta(\psi(t))^2 \det (T_\beta(\psi(t)), N_\beta(\psi(t)), -\tau_\beta(\psi(t))B_\beta(\psi(t))) = \\
&= -\|\alpha'(t)\|^6 \kappa_\beta(\psi(t))^2 \tau_\beta(\psi(t))
\end{aligned}$$

En résolvant la torsion à partir de là, on aura l'expression demandée pour la torsion.

Pour le trièdre de Frenet, on a que $T_\beta \cdot \psi = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$.

Regardons maintenant que $N_\beta \cdot \psi$ est le résultat de normaliser le vecteur $\|\alpha'\|^2 \alpha'' - \langle \alpha', \alpha'' \rangle \alpha'$. Par définition,

$$\begin{aligned}
N_\beta \cdot \psi &= \left(\frac{1}{k_\beta} \frac{dT_\beta}{ds} \right) \cdot \psi = \frac{1}{k_\beta \cdot \psi} \left(\frac{dT_\beta}{ds} \cdot \psi \right) = \frac{1}{(k_\beta \cdot \psi) \psi' dt} \left(\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \right) = \\
&= \frac{1}{(k_\beta \cdot \psi) \|\alpha'\|^4} (\|\alpha'\|^2 \alpha'' - \langle \alpha', \alpha'' \rangle \alpha')
\end{aligned}$$

On a aussi que $B_\beta \psi = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$ car il est proportionnel en chaque point au vecteur $\alpha' \times \alpha''$

Finalement, comme $\{T_\beta \cdot \psi, N_\beta \cdot \psi, B_\beta \cdot \psi\}$ est une base orthonormée positivement orientée de R^3 , on en déduit que $N_\beta \cdot \psi = B_\beta \cdot \psi \times T_\beta \cdot \psi$ \square

Avec cette proposition on peut définir la courbure d'une courbe régulière pas forcément paramétrée.

Définition 9. Soit $\beta = \alpha \cdot \phi : J \rightarrow R^3$ une reparamétrisation directe par l'arc de α . On peut définir la **courbure** de α comme

$$K_\alpha(t) = k_\beta(\phi^{-1}(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, t \in I$$

De même, si $k_\alpha > 0$ dans I , on définit la **torsion** de α et son **trièdre de Frenet** pour tout $t \in I$ comme

$$\tau_\alpha(t) = \tau_\beta(\phi^{-1}(t)) = -\frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

$$\begin{cases} T_\alpha(t) = T_\beta(\phi^{-1}(t)) = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \\ B_\alpha(t) = B_\beta(\phi^{-1}(t)) = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \\ N_\alpha(t) = N_\beta(\phi^{-1}(t)) = \frac{\|\alpha'\|^2 \alpha'' - \langle \alpha', \alpha'' \rangle \alpha'}{\|\|\alpha'\|^2 \alpha'' - \langle \alpha', \alpha'' \rangle \alpha'\|} \end{cases}$$

5 Théorème fondamental des courbes de l'espace

Théorème 2. Soit $k, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}, k > 0$ deux fonctions différentiables définies sur un intervalle ouvert I . Il existe alors $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par l'arc telle que $k_\alpha(t) = k(t), \tau_\alpha(t) = \tau(t), \forall t \in I$. De plus, α est unique sauf pour les mouvements rigides.

Démonstration. **1. Existence**

On va d'abord prouver l'existence de α . Observons que le trièdre de Frenet $\{T, N, B\}$ de la courbe $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ qu'on cherche doit satisfaire les équations de Frenet. C'est-à-dire, si on note $T = (T_1, T_2, T_3)$, $N = (N_1, N_2, N_3)$, et $B = (B_1, B_2, B_3)$, les fonctions $\{T_i, N_i, B_i \mid i = 1, 2, 3\}$ doivent vérifier le système d'équations différentielles ordinaires (EDO) suivant :

$$\begin{cases} T'_i(t) = \kappa(t)N_i(t) \\ N'_i(t) = -\kappa(t)T_i(t) - \tau(t)B_i(t) \\ B'_i(t) = \tau(t)N_i(t) \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

On a donc un système linéaire (avec coefficients non nécessairement constants) avec 9 équations et 9 inconnues. La théorie générale des EDO nous assure l'existence d'une unique solution pour chaque choix de conditions initiales.

Pour les conditions initiales, on choisit $t_0 \in I$ et une base orthonormale positivement orientée $\{T_0, N_0, B_0\}$ de \mathbb{R}^3 . Donc il existe des fonctions vectorielles uniques $T, N, B : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui sont solution du système antérieur avec les conditions initiales

$$T(t_0) = T_0, \quad N(t_0) = N_0, \quad B(t_0) = B_0.$$

On va donc à prouver que pour tout $t \in I$, les vecteurs $\{T(t), N(t), B(t)\}$ forment une base orthonormale positivement orientée de \mathbb{R}^3 . Considérons les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \langle T(t), T(t) \rangle, \\ f_2(t) &= \langle T(t), N(t) \rangle, \\ f_3(t) &= \langle T(t), B(t) \rangle, \\ f_4(t) &= \langle N(t), N(t) \rangle, \\ f_5(t) &= \langle N(t), B(t) \rangle, \\ f_6(t) &= \langle B(t), B(t) \rangle. \end{aligned}$$

Observons que pour que $\{T(t), N(t), B(t)\}$ soit une base orthonormale pour tout $t \in I$, on doit vérifier que

$$\begin{aligned} f_1 &= f_4 = f_6 \equiv 1, \\ f_2 &= f_3 = f_5 \equiv 0. \end{aligned}$$

En dérivant ces fonctions, on a :

$$\begin{cases} f'_1 = 2\langle T', T \rangle = 2\kappa\langle N, T \rangle, \\ f'_2 = \langle T', N \rangle + \langle T, N' \rangle = \kappa\langle N, N \rangle - \kappa\langle T, T \rangle - \tau\langle T, B \rangle, \\ f'_3 = \langle T', B \rangle + \langle T, B' \rangle = \kappa\langle N, B \rangle + \tau\langle N, N \rangle, \\ f'_4 = 2\langle N', N \rangle = -2\kappa\langle T, N \rangle - 2\tau\langle B, N \rangle, \\ f'_5 = \langle N', B \rangle + \langle N, B' \rangle = -\kappa\langle T, B \rangle - \tau\langle B, B \rangle + \tau\langle N, N \rangle, \\ f'_6 = 2\langle B', B \rangle = 2\tau\langle N, B \rangle. \end{cases}$$

Observons que $\{f_i \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ vérifient le système de EDO suivant :

$$\begin{cases} y'_1 = 2\kappa y_2, \\ y'_2 = -\kappa y_1 - \tau y_3 + \kappa y_4, \\ y'_3 = \tau y_2 + \kappa y_5, \\ y'_4 = -2\kappa y_2 - 2\tau y_5, \\ y'_5 = -\kappa y_3 + \tau y_4 + \tau y_6, \\ y'_6 = 2\tau y_5. \end{cases}$$

Ce système, comme le précédent, est linéaire et donc il existe une solution unique du système avec les valeurs initiales $y_1(t_0) = y_4(t_0) = y_6(t_0) = 1$ et $y_2(t_0) = y_3(t_0) = y_5(t_0) = 0$. Notons que $g_1 = g_4 = g_6 \equiv 1$ et $g_2 = g_3 = g_5 \equiv 0$ est une solution du système qui vérifie ces conditions initiales, et donc c'est la solution unique de ce problème de valeurs initiales. On a donc que $f_i = g_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, c'est-à-dire que $\{T(t), N(t), B(t)\}$ est une base orthonormale pour chaque $t \in I$.

Voyons maintenant que $\{T(t), N(t), B(t)\}$ est positivement orientée. Considérons la fonction $d : I \rightarrow \{\pm 1\}$ définie par

$$d(t) = \det(T(t), N(t), B(t))$$

qui est une fonction continue. Comme $\{T_0, N_0, B_0\}$ est une base positivement orientée, on a que $d(t_0) = \det(T(t_0), N(t_0), B(t_0)) = \det(T_0, N_0, B_0) = 1$. Étant donné que I est connexe et que d est continue, on a que $d(t) = \det(T(t), N(t), B(t)) = 1$ pour tout $t \in I$ et donc $\{T(t), N(t), B(t)\}$ est une base positivement orientée de R^3 pour tout $t \in I$. En particulier, on a que $B = T \times N$ en I .

On choisit maintenant $p_0 \in R^3$ et définissons la courbe $\alpha : I \rightarrow R^3$ comme

$$\alpha(t) = p_0 + \int_{t_0}^t T(s) ds.$$

Par le Théorème Fondamental du Calcul, on a que $\alpha' = T_\alpha = T$ et ainsi α est une courbe régulière paramétrée par l'arc. De plus, en utilisant les trois premières équations du système, on a que

$\kappa_\alpha = \|T'\| = \|kN\| = \kappa$, et le normal unitaire N_α de la courbe α vient donné par $N_\alpha = \frac{T_\alpha}{\kappa_\alpha} = \frac{T'}{\kappa} = N$.

En outre, $B_\alpha = T_\alpha \times N_\alpha = T \times N = B$. En utilisant maintenant les trois dernières équations du système, on peut calculer la torsion de α comme

$$\tau_\alpha = \langle B'_\alpha, N_\alpha \rangle = \langle B', N \rangle = \tau.$$

2. Unicité

Supposons que $\beta : I \rightarrow R^3$ est une autre courbe paramétrée par l'arc telle que $\kappa_\alpha = \kappa_\beta = \kappa$ et $\tau_\alpha = \tau_\beta = \tau$. Considérons le trièdre de Frenet $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ de β . Comme $\{T_0, N_0, B_0\}$ et $\{T_\beta(t_0), N_\beta(t_0), B_\beta(t_0)\}$ sont deux bases orthonormales positivement orientées de R^3 , on sait qu'il existe un unique mouvement rigide direct $F : R^3 \rightarrow R^3$ tel que

$$F(\beta(t_0)) = \alpha(t_0), \quad \vec{F}(T_\beta(t_0)) = T_0, \quad \vec{F}(N_\beta(t_0)) = N_0, \quad \vec{F}(B_\beta(t_0)) = B_0.$$

D'autre part, on a que la courbe $F \circ \beta$ est une courbe paramétrée par l'arc telle que $\kappa_{F \circ \beta} = \kappa$, $\tau_{F \circ \beta} = \tau$, $T_{F \circ \beta} = \vec{F}(T_\beta)$, $N_{F \circ \beta} = \vec{F}(N_\beta)$, $B_{F \circ \beta} = \vec{F}(B_\beta)$.

Observons alors que

$$T_{F \circ \beta}(t_0) = T_0, \quad N_{F \circ \beta}(t_0) = N_0, \quad B_{F \circ \beta}(t_0) = B_0.$$

D'ici, les fonctions composantes de $\{T_{F \circ \beta}, N_{F \circ \beta}, B_{F \circ \beta}\}$ sont des solutions du système avec les valeurs initiales. Par l'unicité de la solution de ce système de EDO, on a que

$$(F \circ \beta)' = T_{F \circ \beta} = T_\alpha = \alpha' \quad \text{en } I.$$

De ce fait, $F \circ \beta - \alpha = c$, $c \in R^3$. Mais comme $(F \circ \beta)(t_0) = \alpha(t_0)$, on en déduit que $F \circ \beta - \alpha = 0$. Ainsi, $F \circ \beta = \alpha$ dans I . \square

Corolaire 1. Soit $\alpha : I \rightarrow R^3$ une courbe paramétrée par l'arc avec courbure $k \equiv k_0 \in R$ et $\tau \equiv \tau_0 \in R$. On aura :

- Si $k_0 = 0$, donc la trace est un segment de ligne.
- Si $k_0 > 0$ et $t_0 = 0$, donc la trace de α est dans un arc de cercle.
- Si $k_0 > 0$ et $t_0 \neq 0$, donc la trace de α est dans une hélix circulaire.

6 Bibliographie commentée

Tout d'abord, commençons par étudier quelques définitions et propriétés des courbes paramétrées et des courbes régulières, des aspects que nous pouvons voir dans [1] et dans le premier chapitre de [4].

Ensuite, nous avons analysé d'autres concepts tels que la courbure et la torsion que nous pouvons trouver développés dans [2].

Enfin, nous avons étudié les bases orthonormales et les équations de Frenet, avec des théorèmes importants tels que le théorème fondamental des courbes dans l'espace que nous pouvons trouver dans [6].

Tout cela accompagné d'exemples et d'applications théoriques ainsi que d'un peu de contexte historique tiré de [3] et [5].

Références

- [1] M. G. A. F. Costa and A. Porto. Notas de geometría diferencial de curvas y superficies. *Sanz y Torres*, 2005.
- [2] M. P. do Carmo. Differential geometry of curves and surfaces. *Prentice Hall*, 1976.
- [3] M. F. y. A. G. L. A. Cordero. Geometría diferencial de curvas y superficies (con mathematica). *Addison-Wesley Iberoamericana*, Wilmington, 1995.
- [4] A. M. A. Lázaro. Curso básico de curvas y superficies. *Editorial Sanz y Torres*, Madrid, 2001.
- [5] J. P. Muñoz. Curvas y superficies. Granada, 2014.
- [6] S. M. y A. Ros. Curves and surfaces. american mathematical society, graduate studies in mathematics. 2005.