第四章

命题逻辑 & 谓词逻辑

基于知识的推理

- **假设有以下3条信息**
  - ✓ 如果今天不下雨，那么A会去拜访B。
  - ✓ A今天会去拜访B或者C，但不会两者都拜访。
  - ✓ A今天拜访了C。

- **基于上述信息，可以推理出**
  - ✓ A今天没有拜访B。
  - ✓ 今天下雨了。

谓词公式 (对应教材2.3.2节)

- **句子 (sentence)**：一条有关世界的断言 (assertion)
- **命题符号 （propositional symbols）**：用大写字母代表句子，如 P, Q, R。
- **逻辑连接词 (logical connectives)**

非	**与**	**或**
~	$\wedge$	$\vee$

蕴含	**等价**
$\rightarrow$	$\leftrightarrow$

谓词公式

- **非 (~)**：有的文献中称为**否定 (not)**，也可用¬表示

P	~P
False	True
True	False

- **与 (^)**：有的文献中也叫**合取 (conjunction)**

P	Q	P ^ Q
False	False	False
False	True	False
True	False	False
True	True	True

谓词公式

- **或** (v)：有的文献中也叫**析取** **(disjunction)**

P	Q	P v Q
False	False	False
False	True	True
True	False	True
True	True	True

谓词公式

- **蕴涵 (→)**：此处指的是实质蕴涵 (material implication)
  - ✓ 不要把蕴涵和**推出**相混淆，P → Q 的意思**不是**P可以推出Q
  - ✓ 把P → Q 记忆为： “P为True，且Q为False”这种情况为False
  - ✓ 简单将其理解为一种布尔运算符即可

P	Q	P → Q
True	False	False
True	True	True
False	False	True
False	True	True

- **实质蕴涵悖论：**直觉上，蕴涵可以等价地刻画日常生活中的条件句，但实则不然。蕴涵会制造一些违反常识的结果。
  - ✓ **例：**如果一个傻子当选了美国总统 (P)，那么美国将再次伟大 (Q)。
  - ✓ 根据常识，上述条件句为False；但根据蕴涵的定义，由于P为假，该语句为True。

P	Q	$P \to Q$
True	False	False
True	True	True
False	False	True
False	True	True

谓词公式

- **实质蕴涵悖论：**直觉上，蕴涵可以等价地刻画日常生活中的条件句，但实则不然。蕴涵会制造一些违反常识的结果。
  - ✓ **产生原因：**日常生活中的条件句，真假由条件和结果之间逻辑关系决定；蕴涵的真假完全由P和Q的值决定，P和Q之间不需要存在逻辑关系。
  - ✓ **例：**如果地球爆炸了，那么我会暴富。

P	Q	$P \to Q$
True	False	False
True	True	True
False	False	True
False	True	True

谓词公式

- **等价 (↔)**：biconditional

P	Q	P ↔ Q
False	False	True
True	True	True
False	True	False
True	False	False

基于知识的推理

- **假设有以下3条信息**
  - ✓ 如果今天不下雨，那么A会去拜访B。
  - ✓ A今天会去拜访B或者C，但不会两者都拜访。
  - ✓ A今天拜访了C。

$P \rightarrow Q$ （为True）

$Q \vee R$ （为True）

$\sim(Q \wedge R)$ （为True）

R （为True）

- **基于上述信息，可以推理出**
  - ✓ A今天没有拜访B。
  - ✓ 今天下雨了。

$\sim Q$ （为True）

$\sim P$ （为True）

基于知识的推理

如果今天不下雨 (P)，那么A会去拜访B (Q)。 （已知这个条件句为True）

- 今天不下雨 (P为True)，且A拜访了B (Q为True)
- 今天下雨 (P为False)，且A没拜访B (Q为False)
- 今天下雨 (P为False)，且A拜访了B (Q为True)

$P \rightarrow Q$ （为True）

P	Q	$P \rightarrow Q$
True	False	False
True	True	True
False	False	True
False	True	True

等价关系（对应教材第2.3.2节）

- **消除双重否定**

✓ “A没有通过考试”是错误的。

等价 ✓ A通过了考试。

- **消除双重否定**

$$\sim(\sim P)$$

等价 P

- **狄•摩根定律 (De Morgan’s Law)**

✓ “A和B都通过了考试”是不正确的。

等价于 ✓ A没有通过了考试，或B没有通过考试。

等价关系

- **狄•摩根定律 (De Morgan’s Law)**

$\sim(P \vee Q)$ $\sim(P \wedge Q)$

等价于 $\sim P \wedge \sim Q$ $\sim P \vee \sim Q$

- **分配率**

$P \wedge (Q \vee R)$ $\qquad$ $P \vee (Q \wedge R)$

等价于 $\quad (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $\qquad$ $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

湖北大学 HUBEI UNIVERSITY

- **交换率**

	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
等价于	$Q \wedge P$	$Q \vee P$

等价关系

- **结合率**

$$(P \wedge Q) \wedge R \qquad (P \vee Q) \vee R$$

等价于 $$P \wedge (Q \wedge R) \qquad P \vee (Q \vee R)$$

湖北大学 HUBEI UNIVERSITY

- **消除蕴含（需重点记忆）**

✓ 如果今天下雨了，那么A会待在家里。

等价于 ✓ 今天没下雨 或 A会待在家里。

- **消除蕴含（需重点记忆）**

$$P \to Q$$

等价于 $\sim P \vee Q$

- **消除等价**

$$P \leftrightarrow Q$$

等价于 $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$

消解推理规则（对应教材第3.4.2节）

- **消除“与”**

已知 ✓ A是B和C的朋友。 (为True)

派生 ✓ A是B的朋友。 (为True)

消解推理规则

- **消除“与”**

已知 $P \wedge Q$ (为True)

派生 P (为True)

消解推理规则

- **假言推理 (modus ponens)**

已知
- ✓ 如果今天下雨了，那么A会待在家里。
- ✓ 今天下雨了。

(为True)

派生
- ✓ A会待在家里。

(为True)

- **假言推理 (modus ponens)**

$$P \to Q$$

已知 (为True)

$$P$$

派生 Q (为True)

消解推理规则

已知
- ✓ (A在教室) ∨ (B在图书馆)
- ✓ A不在教室

(为True)

派生
- ✓ B在图书馆

(为True)

消解推理规则

已知	$P \vee Q$ $\sim P$	(为True)
派生	Q	(为True)

湖北大学 HUBEI UNIVERSITY

已知 $P \vee Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n$ (为True)

$\sim P$

派生 $Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n$ (为True)

消解推理规则

已知 $P \vee Q$ (为True)

$\sim P \vee R$

派生 $Q \vee R$ (为True)

湖北大学 HUBEI UNIVERSITY

已知

$$P \vee Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n$$

$$\sim P \vee R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n$$

(为True)

派生 $Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n \vee R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n$ (为True)

湖北大学 HUBEI UNIVERSITY

$$P$$

已知 (为True)

$$\sim P$$

派生 空子句 NIL 某些文献也用 ( ) 表示 (矛盾)

基于知识的推理

- **子句（Clause）**：文字的析取 (disjunction) 组成的公式
- **文字 (literal)**：谓词符号，或谓词符号的否定

例：$P \vee Q \vee R$

湖北大学 HUBEI UNIVERSITY

- **合取范式 （Conjunctive Normal Form, CNF）**
  - ✓ 子句的合取
  - ✓ 例： $(A \vee B \vee C) \wedge (D \vee {\sim}E) \wedge (F \vee G)$

把合式公式转换为合取范式

- **消除等价：** $P \leftrightarrow Q$ 转换为 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- **消除蕴涵：** $P \rightarrow Q$ 转换为 $\sim P \vee Q$
- 使用狄·摩根定律把否定 ~ 移入括号

  $\sim(P \wedge \mathrm{Q})$ 转换为 $\sim P \vee \sim \mathrm{Q}$
- 使用分配率，分配析取 ∨

把合式公式转换为合取范式

- **例：** $(P \vee Q) \to R$
- 消除蕴涵：$\sim(P \vee Q) \vee R$
- 使用狄 · 摩根定律：$(\sim P \wedge \sim Q) \vee R$
- 使用分配率：$(\sim P \vee R) \wedge (\sim Q \vee R)$

使用消解推理规则进行推理

- **假设有以下3条信息**
  - ✓ 如果今天不下雨，那么A会去拜访B。 $P \rightarrow Q$ （为True）
  - ✓ A今天会去拜访B或者C，但不会两者都拜访。 $Q \vee R$ （为True） $\sim(Q \wedge R)$ （为True）
  - ✓ A今天拜访了C。 R （为True）

- **基于上述信息，希望查询：**
  - ✓ "今天下雨了"是否为True? $\sim P$ （是否为True？）

使用消解推理规则进行推理

- **知识库 (knowledge base)**：一组已知为True的句子
- **推理 (inference)**：基于已知的句子，派生出新的句子

使用消解推理规则进行推理

- **基于知识库KB，推理某条信息α是否为真：**
  - ✓ 用等价关系将 $KB \wedge \sim\alpha$ 转换为合取范式
  - ✓ 持续使用消解推理规则生成新的子句，并检查是否可以推出矛盾（反证法）

$P \rightarrow Q$ （为True）

$Q \vee R$ （为True）

$\sim(Q \wedge R)$ （为True）

R （为True）

假设 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \vee R) \wedge (\sim(Q \wedge R)) \wedge R \wedge P$ 为True

合取范式：$(\sim P \vee Q) \wedge (Q \vee R) \wedge (\sim Q \vee \sim R) \wedge R \wedge P$

$\sim P$ （是否为True？）

$(\sim P \vee Q)$ $(Q \vee R)$ $(\sim Q \vee \sim R)$ R P

$(\sim Q \vee \sim R),\ R \rightarrow \sim Q$

$(\sim P \vee Q),\ \sim Q \rightarrow \sim P$

$\sim P$ 和 P 推出空子句（矛盾）

说明 $\sim P$ 为True

第3次平时作业 （3月19日上课前交给班长）

湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

- 使用消解推理规则，判断：

  $(A \vee B) \wedge (\sim B \vee C) \wedge (\sim C)$ 是否可以推理出 A？

一阶谓词演算

- **命题符号（propositional symbols）**：用大写字母代表句子，如 P, Q, R。
- **命题逻辑（propositional logic）**
- **谓词逻辑 (predicate logic)**

命题逻辑的局限性

- **使用命题符号表示“某人在哪里”：**
  - 张三在教室：ZsClassroom
  - 张三在图书馆：ZsLibrary
  - 张三在宿舍：ZsDorm
  - 张三在食堂：ZsRestaurant
  - …

一阶谓词演算（对应教材第2.3.1节）

- 一阶谓词演算 (predicate calculus) 也叫一阶逻辑 (first-order logic)

- **常量符号 (constant symbols)：**
  - ✓ 张三
  - ✓ 李四
  - ✓ 王五
  - ✓ 赵六

- **谓词符号 (predicate symbols)：**
  - ✓ Person
  - ✓ Location
  - ✓ IsIn

一阶谓词演算

- **使用谓词符号和常量符号表示句子：**

✓ Person(张三)
➢ 张三是一个人。

✓ Location(教室)
➢ 教室是一个地点。

✓ ~Location(李四)
➢ 李四不是一个地点。

✓ IsIn(张三，教室)
➢ 张三在教室。

- **全称量词**

$$\forall x.IsIn(x，教室) \rightarrow \sim IsIn(x，宿舍)$$

✓ 对于所有的x，如果x在教室里，那么x不在宿舍里。

- **存在量词**

$$\exists x. Location(x) \wedge IsIn(张三，x)$$

✓ 存在一个x，满足：x是一个地点，且张三在这个地点。

一阶谓词演算

- **一个例子**

$$\forall x. Person(x) \rightarrow \big(\exists y. Location(y) \wedge IsIn(x, y)\big)$$

✓ 对于所有的x，如果x是一个人，那么存在一个y，满足：y是一个地点，且x在这个地点。

✓ 每个人都在一个地点。

结束语

湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

谢 谢!