

A low-angle, upward-looking photograph of several modern skyscrapers. The buildings feature glass facades and white structural elements, creating a sense of height and architectural complexity. The sky is a clear, deep blue. A solid green horizontal band is superimposed across the middle of the image, containing the chapter title.

# 第五章

# 概率推理

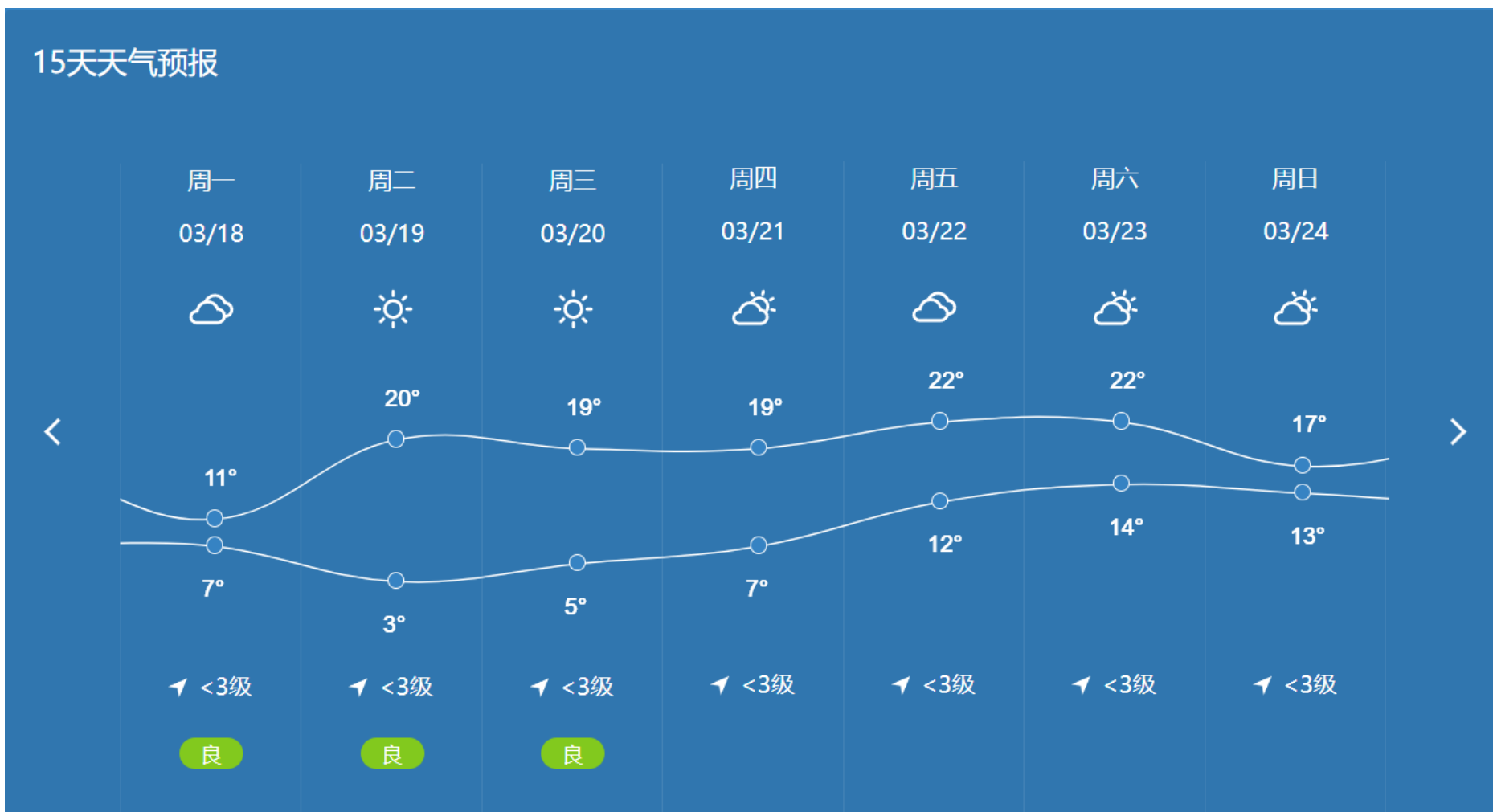


# 不确定性 (Uncertainty)



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

- 天气预报：根据过去的天气，推理未来的天气





# 不确定性 (Uncertainty)



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

- 图像分类问题



- 狗: 95%
- 猫: 3%
- 鼠: 1%
- 猪: 1%



# 概率的基本性质 (对应教材3.7.1节)



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

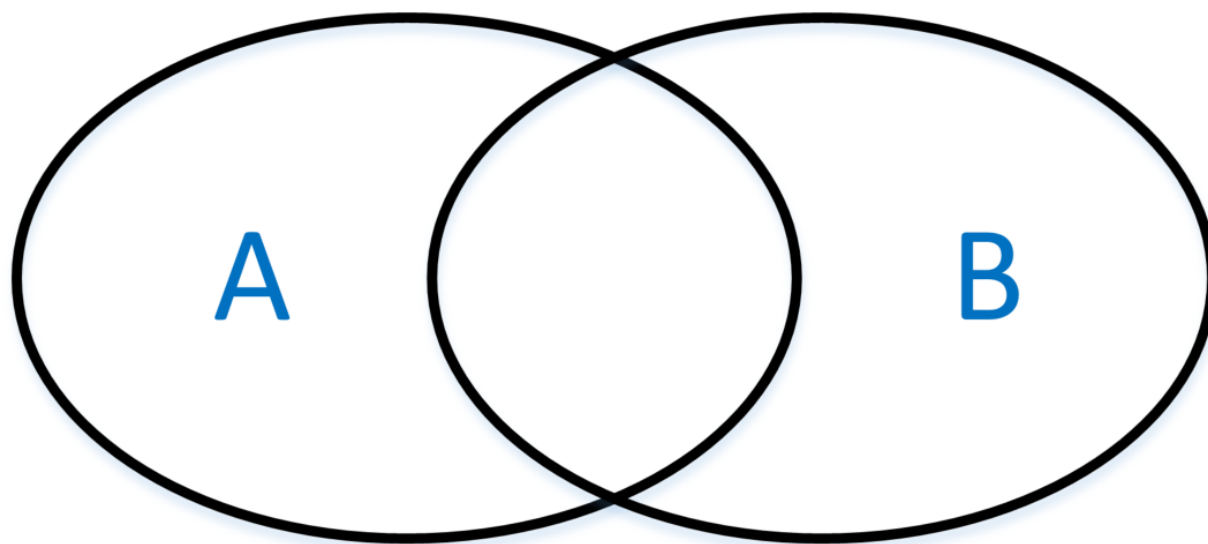
- **随机事件**：可能发生也可能不发生的实验结果，可以用大写字母A, B, C等表示
- **事件A发生的概率**：  $P(A)$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



- 韦恩图(Venn diagram):



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

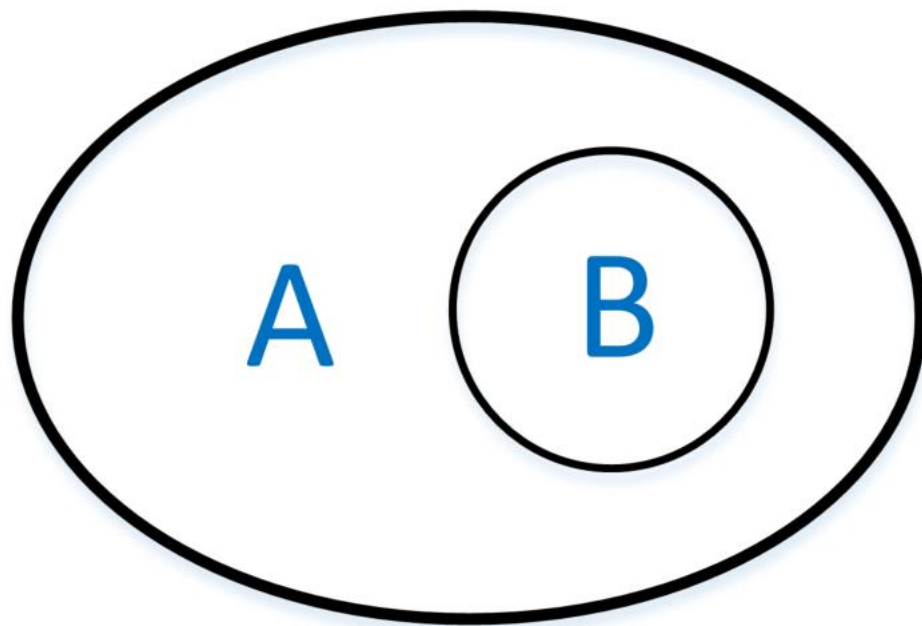


# 概率的基本性质



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

- 韦恩图(Venn diagram):



$$P(A/B) = P(A) - P(B)$$



# 概率的基本性质



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

- 不可能事件是否等价于概率为0的事件？
- 事件A：在 $[0,1]$ 任取一个实数，恰好取到0.5

$$P(A) = 0$$

但A不是不可能事件





# 概率的基本性质



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

- 例：丢1个骰子



$$\sum_i P(\text{点数} = i) = 1$$





# 概率的基本性质



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

- 例：丢2个骰子



$$P(\text{点数和} = 12) = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{点数和} = 7) = \frac{1}{6}$$

- 不一定所有事件都是等可能事件



# 概率的基本性质



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

- **非条件概率：** 没有其他事件发生的情况下





# 概率的基本性质

- **条件概率：**某些事件已经发生的情况下

$$P(A | B)$$

$$P(\text{今天会下雨} | \text{昨天下雨了})$$

$$P(\text{选择路线}A | \text{交通状况差})$$

$$P(\text{生病} | \text{检查结果为阳性})$$



# 概率的基本性质



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

- **条件概率：**某些事件已经发生的情况下

$$P(A | B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$



# 概率的基本性质

- 条件概率：丢2个骰子



$$P(\text{点数和} = 12 \wedge \text{骰子A的点数} = 6) = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{骰子A的点数} = 6) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{点数和} = 12 \mid \text{骰子A的点数} = 6) = \frac{1}{6}$$



# 概率的基本性质

- **条件概率：**某些事件已经发生的情况下（对应教材上的公式3.12）

$$P(A | B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

$$P(A \wedge B) = P(B)P(A | B)$$

$$P(A \wedge B) = P(A)P(B | A)$$



# 概率的基本性质

- **随机变量 (random variable):** 随机试验的各种结果
  - ✓ 丢骰子:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - ✓ 天气: {晴朗, 多云, 降雨, 降雪}
  - ✓ 交通: {通畅, 拥堵, 严重拥堵}
  - ✓ 航班: {正点, 晚点, 取消}





# 概率的基本性质

- **概率分布 (probability distribution):**

✓  $P(\text{航班} = \text{正点}) = 0.7$

✓  $P(\text{航班} = \text{晚点}) = 0.2$

✓  $P(\text{航班} = \text{取消}) = 0.1$

✓  $P(\text{航班}) = \langle 0.7, 0.2, 0.1 \rangle$



# 概率的基本性质



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

- **独立性 (independence):** 某些事件的发生不会影响另一个事件发生的概率

$$P(A \wedge B) = P(A)P(B | A)$$

✓ A和B相互独立时:

$$P(A \wedge B) = P(A)P(B)$$



# 概率的基本性质



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

- **独立性 (independence):** 某些事件的发生不会影响另一个事件发生的概率

**例:**

$$P(\text{骰子}A = 6 \wedge \text{骰子}B = 6)$$

$$= P(\text{骰子}A = 6)P(\text{骰子}B = 6)$$



# 概率的基本性质



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

- **独立性 (independence):** 某些事件的发生不会影响另一个事件发生的概率

**例:**

$$P(\text{骰子}A = 6 \wedge \text{骰子}A = 4)$$

$$\neq P(\text{骰子}A = 6)P(\text{骰子}A = 4)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$



# 概率的基本性质



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

- **独立性 (independence):** 某些事件的发生不会影响另一个事件发生的概率

例:

$$\begin{aligned} & P(\text{骰子}A = 6 \wedge \text{骰子}A = 4) \\ &= P(\text{骰子}A = 6)P(\text{骰子}A = 4 \mid \text{骰子}A = 6) \\ &= \frac{1}{6} \times 0 = 0 \end{aligned}$$



# 贝叶斯公式 (Bayes' Rule)



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

$$P(A \wedge B) = P(B)P(A | B)$$

$$P(A \wedge B) = P(A)P(B | A)$$

$$P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B)$$



# 贝叶斯公式 (Bayes' Rule)

$$P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B)$$



$$P(B | A) = \frac{P(B)P(A | B)}{P(A)}$$

对应教材上的公式 (3.15)





# 贝叶斯公式 (Bayes' Rule)



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

- 例：已知早上多云，问下午下雨的概率是多少？
  - ✓ 下午下雨的天数中，80%的天数早上多云；
  - ✓ 40%的天数早上多云；
  - ✓ 10%的天数下午下雨



# 贝叶斯公式 (Bayes' Rule)



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

$$\begin{aligned} P(\text{下雨} | \text{多云}) &= \frac{P(\text{下雨})P(\text{多云} | \text{下雨})}{P(\text{多云})} \\ &= \frac{0.1 \times 0.8}{0.4} \\ &= 0.2 \end{aligned}$$



# 贝叶斯公式 (Bayes' Rule)

- **意义**：根据容易获取的概率，计算不容易获取的概率

✓ **已知**:

$$P(\text{咳嗽} \mid \text{感冒})$$

✓ **可以计算**:

$$P(\text{感冒} \mid \text{咳嗽})$$



# 贝叶斯公式 (Bayes' Rule)

- **意义**：根据容易获取的概率，计算不容易获取的概率

✓ **已知**:

$P(\text{测试结果为阳性} \mid \text{疾病})$

✓ **可以计算**:

$P(\text{疾病} \mid \text{测试结果为阳性})$



# 联合概率

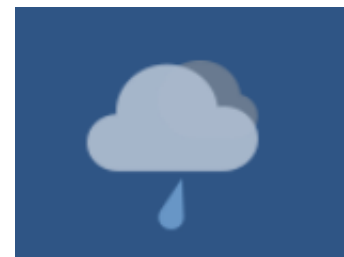


湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY



$C = \text{cloud}$	$C = \sim\text{cloud}$
0.4	0.6

$R = \text{rain}$	$R = \sim\text{rain}$
0.1	0.9



	$R = \text{rain}$	$R = \sim\text{rain}$
$C = \text{cloud}$	0.08	0.32
$C = \sim\text{cloud}$	0.02	0.58



$$\begin{aligned} P(C \mid rain) &= \frac{P(C \wedge rain)}{P(rain)} = \alpha P(C \wedge rain) \\ &= \alpha \langle 0.08, 0.02 \rangle = \langle 0.8, 0.2 \rangle \end{aligned}$$

	$R = rain$	$R = \sim rain$
$C = cloud$	0.08	0.32
$C = \sim cloud$	0.02	0.58



	$R = rain$	$R = \sim rain$
$C = cloud$	0.08	0.32
$C = \sim cloud$	0.02	0.58

$$P(C = cloud)$$

$$= P(C = cloud \wedge R = rain) + P(C = cloud \wedge R = \sim rain)$$

$$= 0.08 + 0.32$$

$$= 0.40$$





# 概率的基本性质



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

**全概率公式：** 对应教材上的公式(3.14)

$$P(A) = P(A \wedge B) + P(A \wedge \sim B)$$

$$P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i \wedge Y = y_j)$$



$$P(A) = P(A \wedge B) + P(A \wedge \sim B)$$

$$P(A) = P(A | B)P(B) + P(A | \sim B)P(B)$$

$$P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i | Y = y_j)P(Y = y_j)$$



# 概率推理方法



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

- **基于知识的推理：**根据已知信息推理未知信息，使用等价规则求得合取范式，再使用消解推理规则推出矛盾
- **概率推理：**条件概率，使用贝叶斯公式
- **教材上的例3.10：**

$$P(H_1 | E) = \frac{P(H_1)P(E | H_1)}{P(E)} \quad (\text{贝叶斯公式})$$

$$= \frac{P(H_1)P(E | H_1)}{\sum_{i=1}^3 P(E | H_i)P(H_i)} \quad (\text{对分母使用全概率公式})$$



# 贝叶斯网络 (Bayesian network)

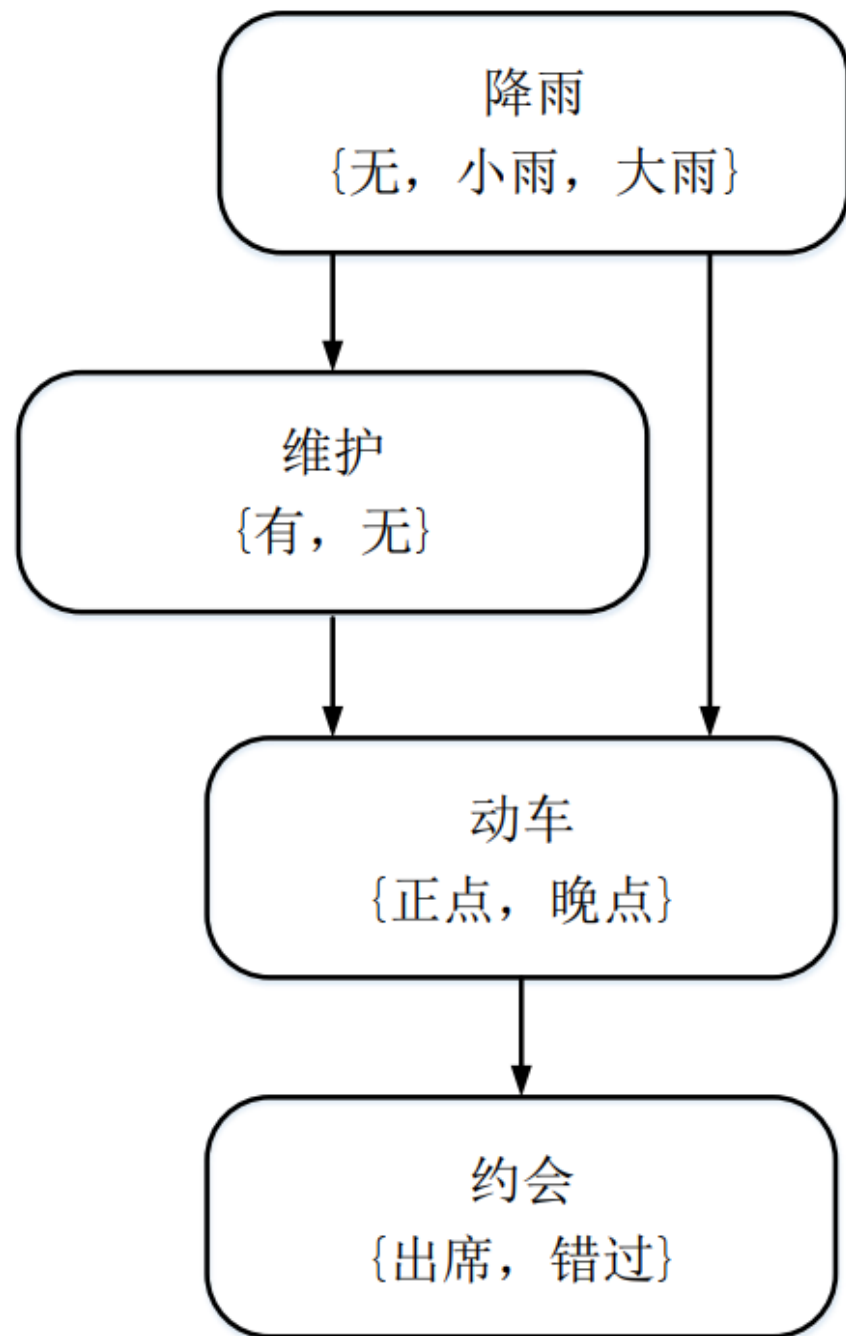
- **定义：** 使用有向无环图表示随机变量之间的依赖关系
  - ✓ 每个结点代表一个随机变量
  - ✓ 从  $X$  到  $Y$  的有向边代表  $X$  是  $Y$  的一个父结点
  - ✓ 每个结点  $X$  都有一个概率分布  $P(X \mid Parent(X))$



# 贝叶斯网络 (Bayesian network)



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY



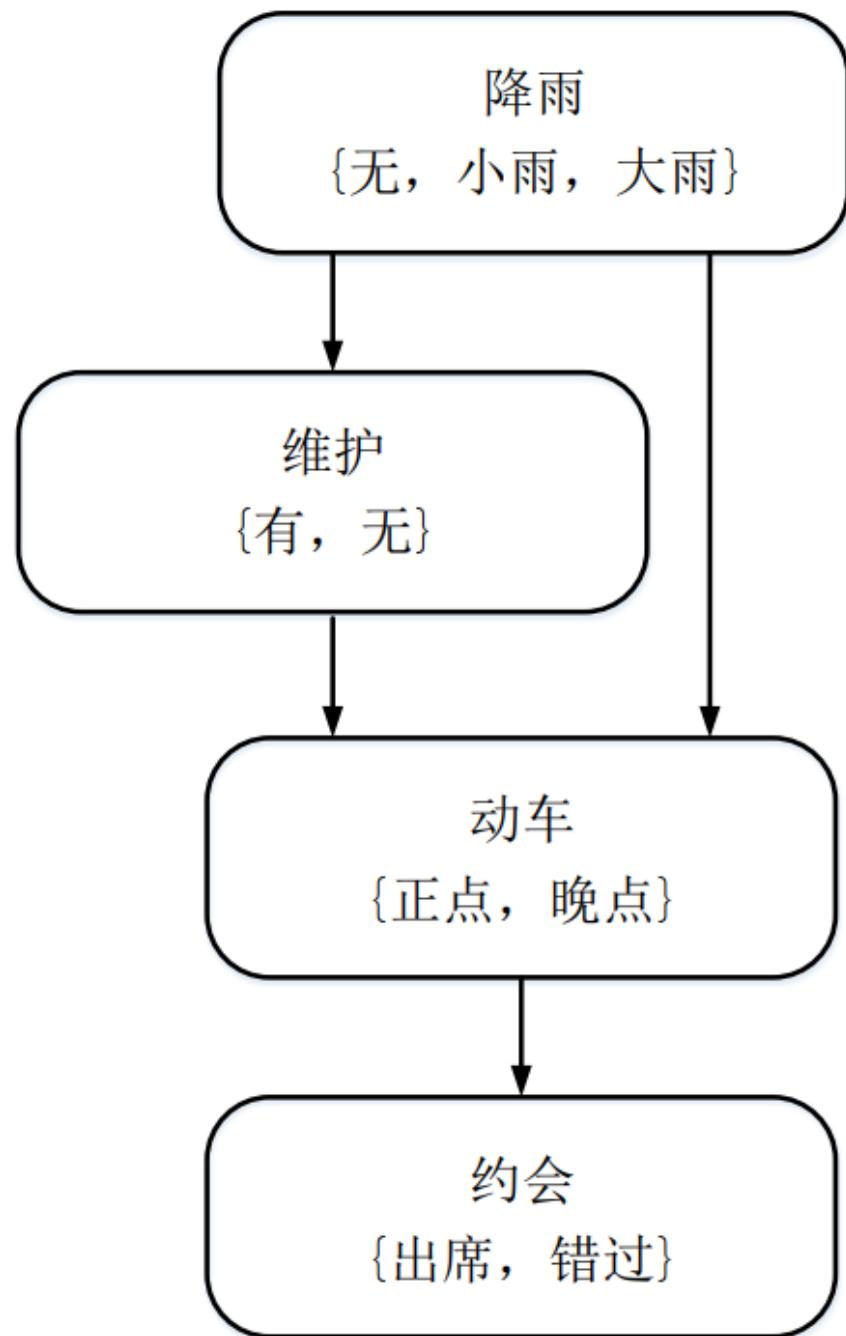
无	小雨	大雨
0.7	0.2	0.1



# 贝叶斯网络 (Bayesian network)



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY



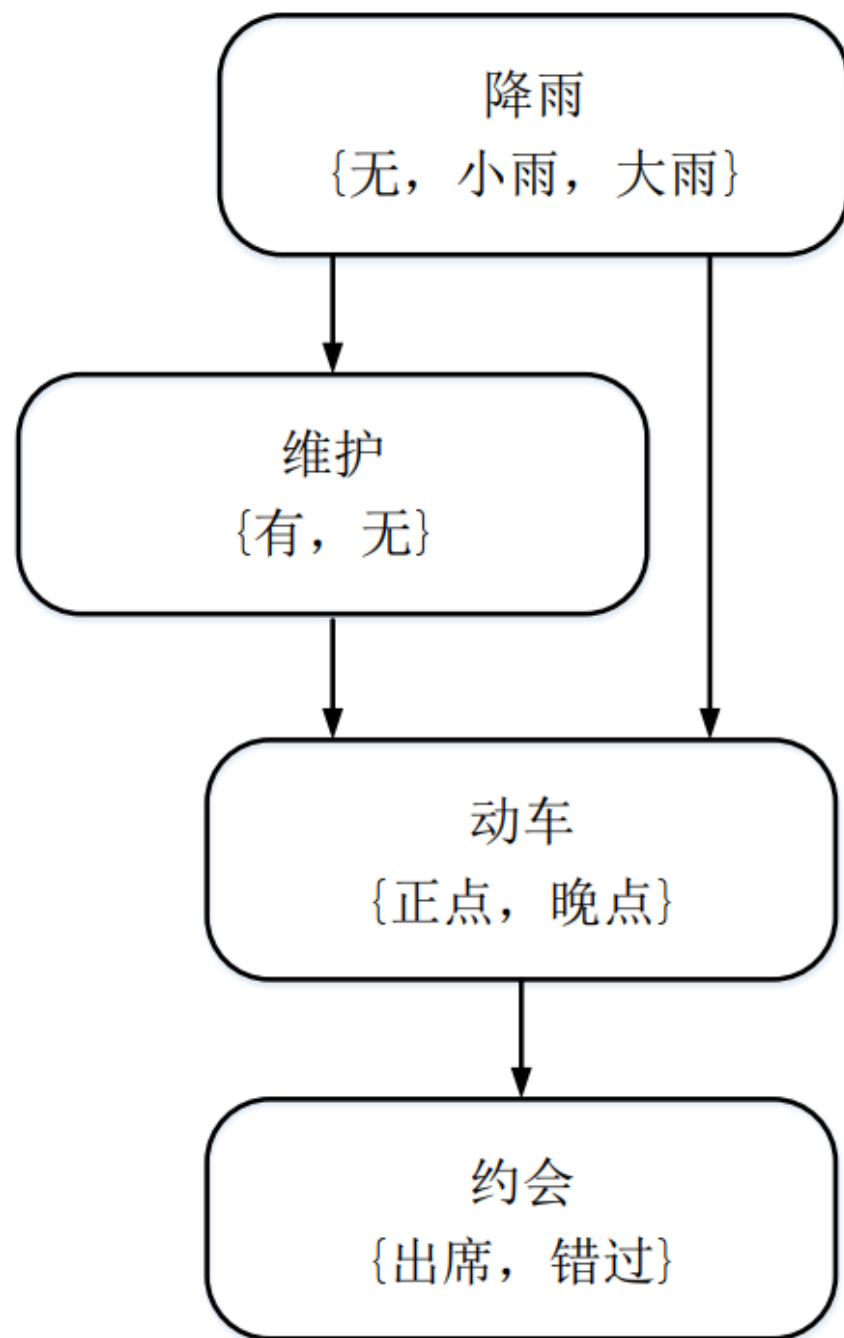
降雨	有维护	无维护
无	0.4	0.6
小雨	0.2	0.8
大雨	0.1	0.9



# 贝叶斯网络 (Bayesian network)



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY



降雨	维护	动车正点	动车晚点
无	有	0.8	0.2
无	无	0.9	0.1
小雨	有	0.6	0.4
小雨	无	0.7	0.3
大雨	有	0.4	0.6
大雨	无	0.5	0.5

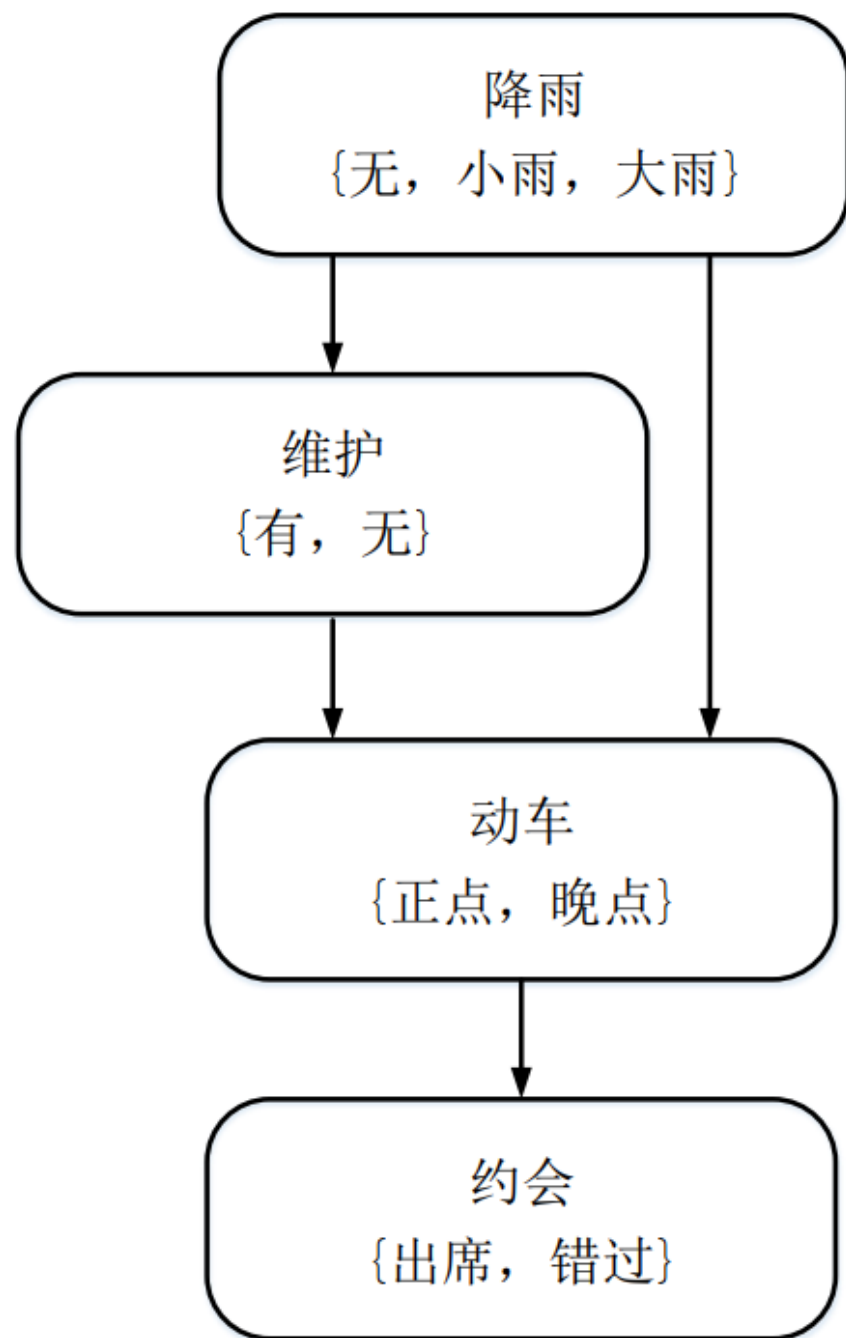




# 贝叶斯网络 (Bayesian network)



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY



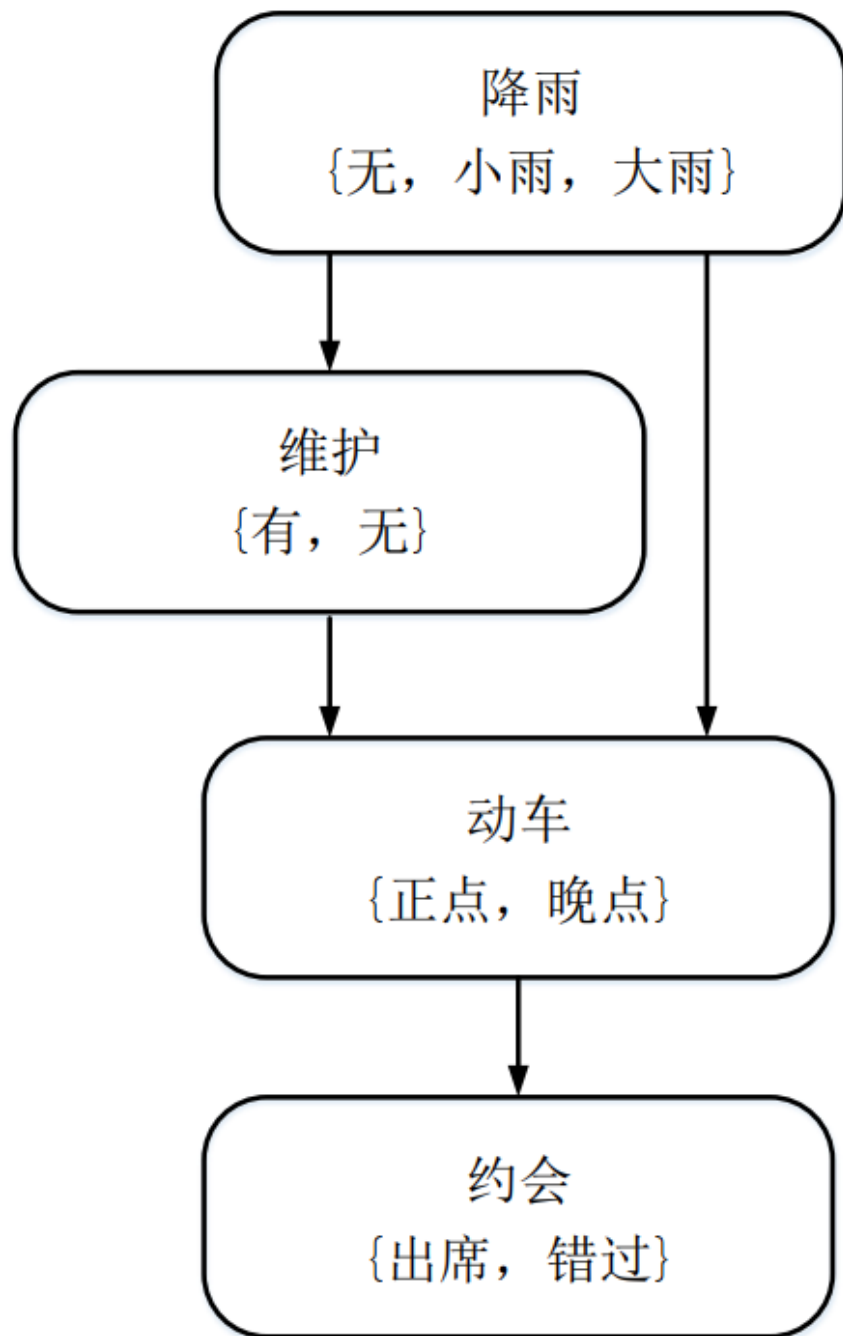
动车	出席约会	错过约会
正点	0.9	0.1
晚点	0.6	0.4



# 贝叶斯网络 (Bayesian network)



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY



- 计算联合概率

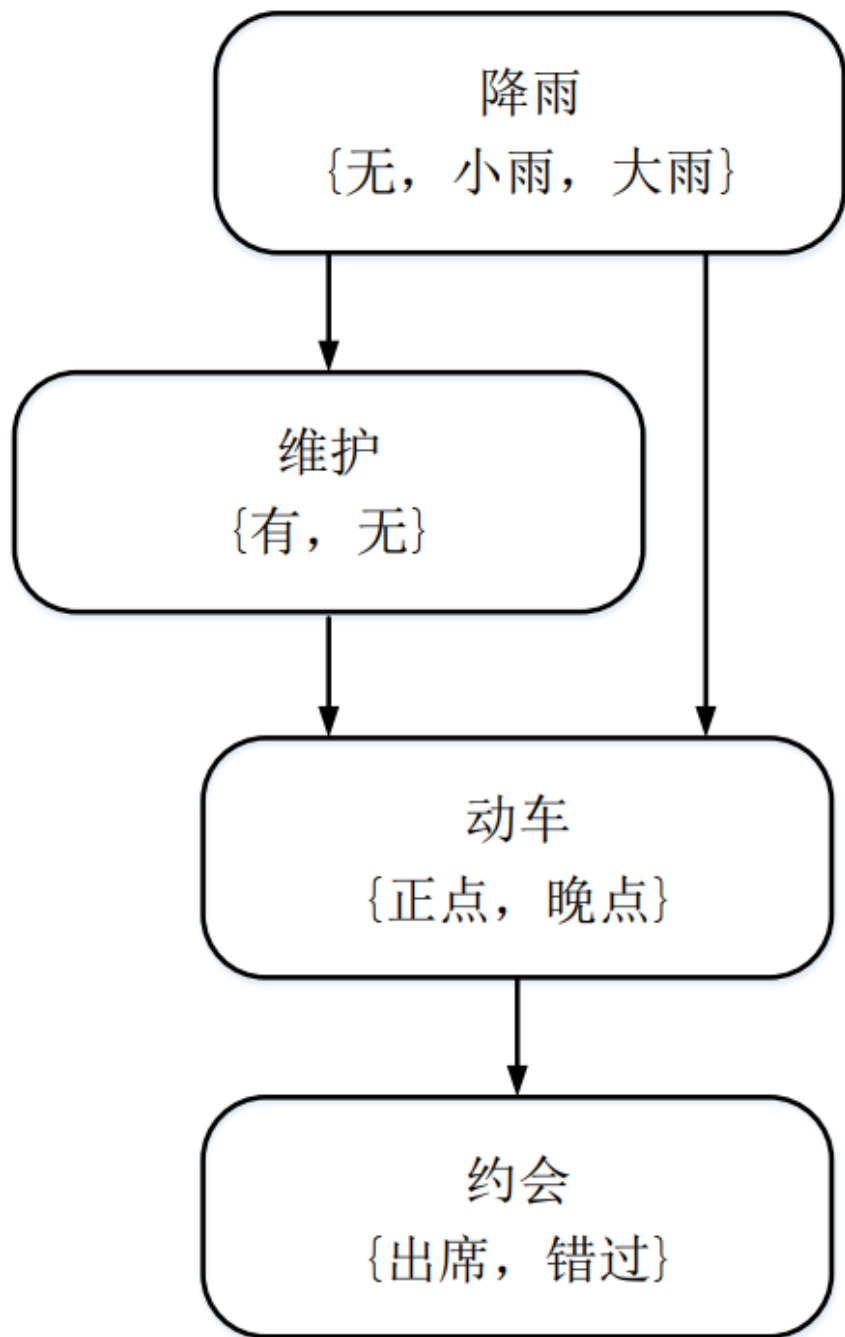
$$P(\text{小雨}, \text{无维护}) \\ = P(\text{小雨})P(\text{无维护} | \text{小雨})$$



# 贝叶斯网络 (Bayesian network)



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

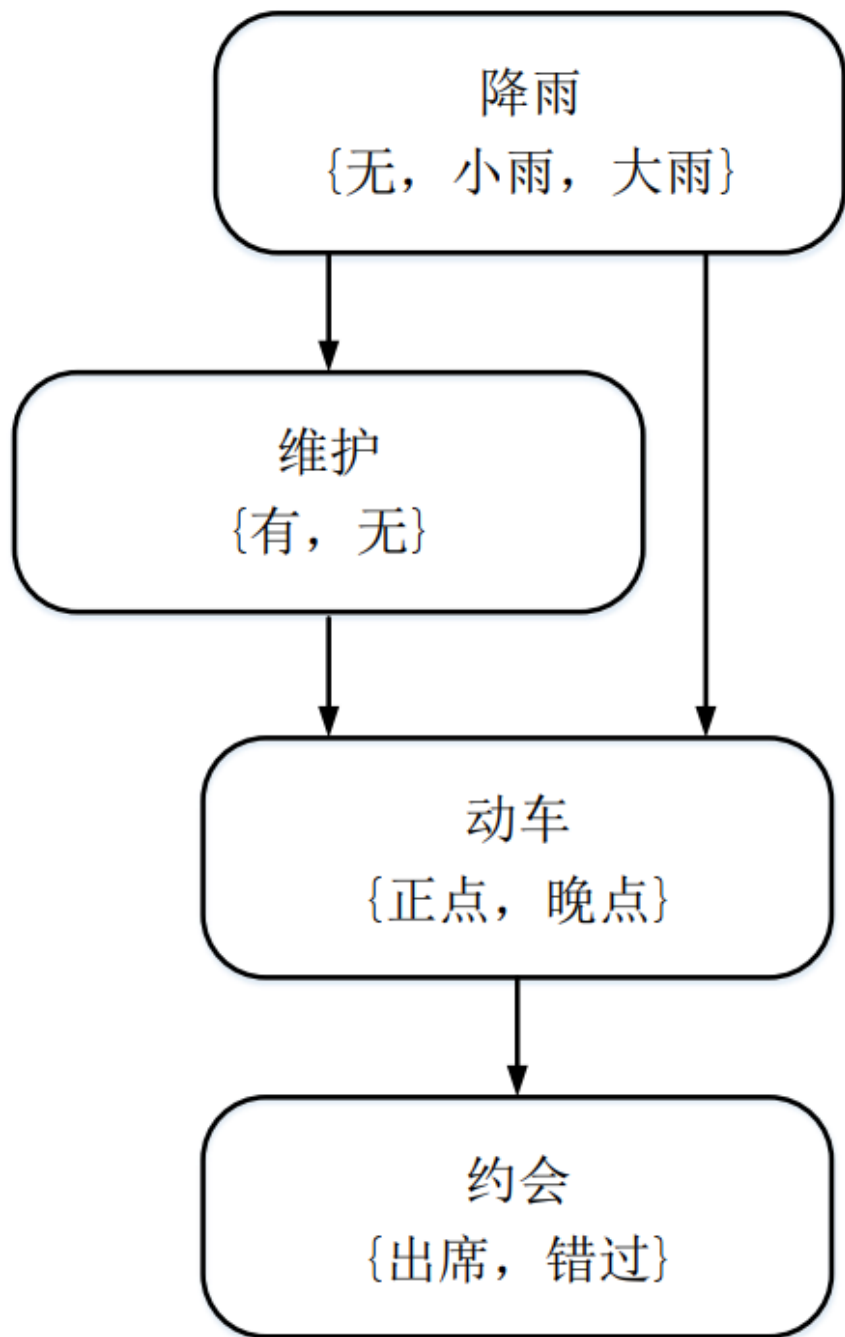


## • 计算联合概率

$$\begin{aligned} &P(\text{小雨}, \text{无维护}, \text{动车晚点}) \\ &= P(\text{小雨})P(\text{无维护} | \text{小雨})P(\text{动车晚点} | \text{小雨}, \text{无维护}) \end{aligned}$$



# 贝叶斯网络 (Bayesian network)



## • 计算联合概率

$$\begin{aligned} &P(\text{小雨, 无维护, 动车晚点, 错过约会}) \\ &= P(\text{小雨})P(\text{无维护} \mid \text{小雨})P(\text{动车晚点} \mid \text{小雨, 无维护}) \\ &P(\text{错过约会} \mid \text{动车晚点}) \end{aligned}$$



# 基于贝叶斯网络的推理

- **查询变量**  $X$ : 需要计算概率分布的变量
- **证据变量 (evidence variable)**  $E$ : 在事件  $e$  中观察到的变量
- **隐藏变量 (hidden variable)**  $Y$ : 既不是查询变量, 也不是证据变量

✓ 目标: 计算  $P(X | e)$

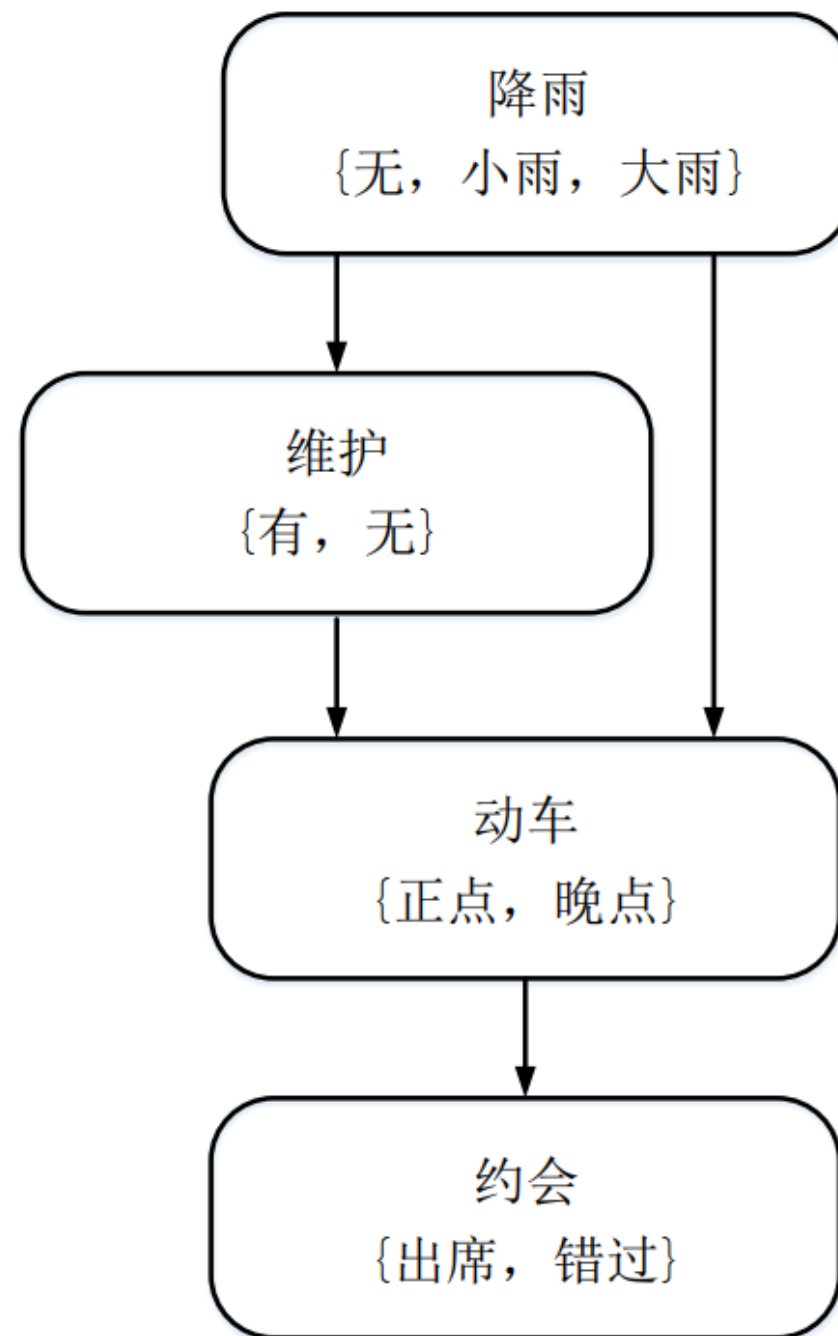


# 基于贝叶斯网络的推理



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

$$\begin{aligned} &P(\text{约会} \mid \text{小雨, 无维护}) \\ &= \alpha P(\text{约会, 小雨, 无维护}) \\ &= \alpha [P(\text{约会, 小雨, 无维护, 动车正点}) \\ &\quad + P(\text{约会, 小雨, 无维护, 动车晚点})] \end{aligned}$$





# 基于贝叶斯网络的推理

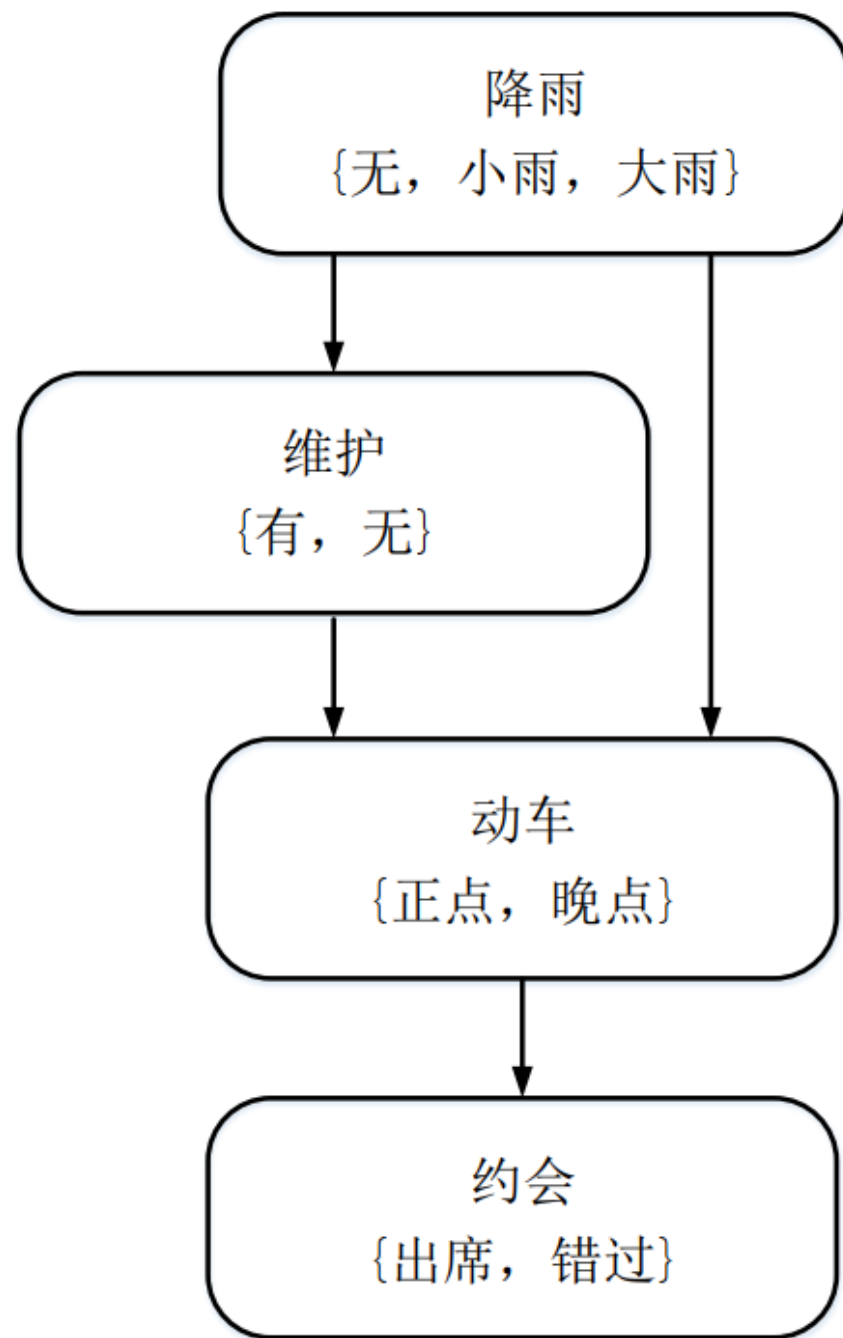


湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

$$P(X | e) = \alpha P(X, e)$$

$$= \alpha \sum_y P(X, e, y)$$

- $X$ : 需要查询的变量
- $e$ : 已经观察到的证据
- $y$ : 隐藏变量所有可能的取值





# Pomegranate



- 用于实现概率模型（如贝叶斯网络，隐马尔科夫模型）的python库
- 官网：<https://pomegranate.readthedocs.io/en/latest/index.html>

The screenshot displays the Pomegranate documentation website. On the left, a dark sidebar contains a search bar and a list of navigation links categorized under 'GETTING STARTED' (Home, Installation, The API, Code of Conduct, FAQ, Release History), 'FEATURES' (GPU Usage, Mixed Precision and Other Data Types, Out-of-Core Learning, Priors and Semi-supervised Learning), and 'MODELS' (Probability Distributions, General Mixture Models, Bayes Classifier, Hidden Markov Models, Markov Chains, Bayesian Networks, Factor Graphs). The main content area is white and features the 'pomegranate' logo, a 'docs passing' badge, and a 'Home' section. The 'Home' section includes a paragraph describing Pomegranate as a Python package for probabilistic models and a link to 'Edit on GitHub'.





# Pomegranate



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY

```
from pomegranate import *
```

```
rain = Node(DiscreteDistribution({  
    'none': 0.7,  
    'light': 0.2,  
    'heavy': 0.1  
})), name='rain')
```



# Pomegranate

```
maintenance = Node(ConditionalProbabilityTable([
    ['none', 'yes', 0.4],
    ['none', 'no', 0.6],
    ['light', 'yes', 0.2],
    ['light', 'no', 0.8],
    ['heavy', 'yes', 0.1],
    ['heavy', 'no', 0.9],
], [rain.distribution]), name='maintenance')
```



# Pomegranate



湖北大学

```
train = Node(ConditionalProbabilityTable([
    ['none', 'yes', 'on time', 0.8],
    ['none', 'yes', 'delay', 0.2],
    ['none', 'no', 'on time', 0.9],
    ['none', 'no', 'delay', 0.1],
    ['light', 'yes', 'on time', 0.6],
    ['light', 'yes', 'delay', 0.4],
    ['light', 'no', 'on time', 0.7],
    ['light', 'no', 'delay', 0.3],
    ['heavy', 'yes', 'on time', 0.4],
    ['heavy', 'yes', 'delay', 0.6],
    ['heavy', 'no', 'on time', 0.5],
    ['heavy', 'no', 'delay', 0.5],
], [rain.distribution, maintainance.distribution]), name='train')
```



# Pomegranate

```
appointment = Node(ConditionalProbabilityTable([  
    ['on time', 'attend', 0.9],  
    ['on time', 'miss', 0.1],  
    ['delay', 'attend', 0.6],  
    ['delay', 'miss', 0.4],  
], [train.distribution]), name='appointment')
```

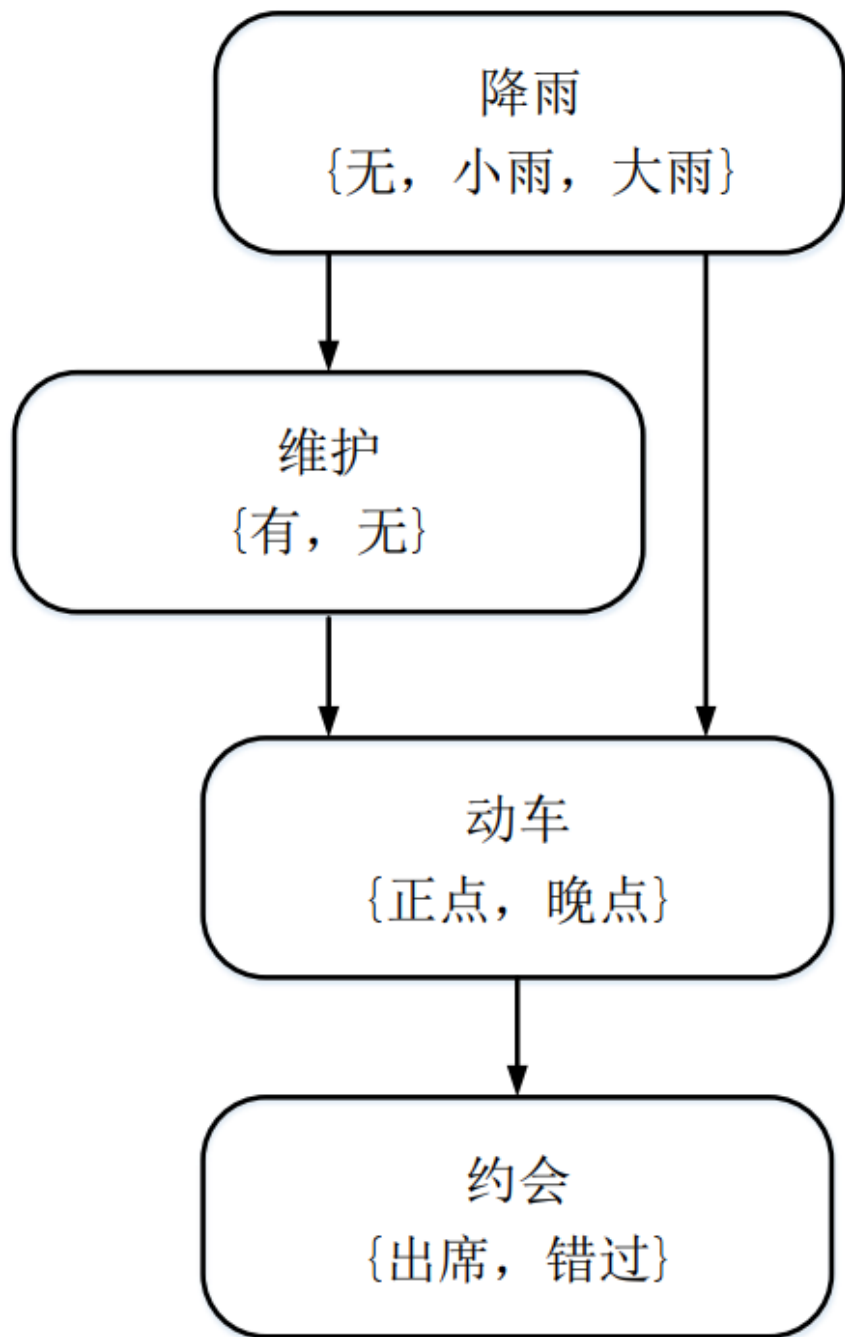


# Pomegranate

```
model = BayesianNetwork()  
# 添加贝叶斯网络中的结点  
model.add_states(rain, maintenance, train, appointment)  
  
# 添加贝叶斯网络中的有向边  
model.add_edge(rain, maintenance)  
model.add_edge(rain, train)  
model.add_edge(maintenance, train)  
model.add_edge(train, appointment)  
  
model.bake()
```



# 贝叶斯网络 (Bayesian network)



## • 计算联合概率

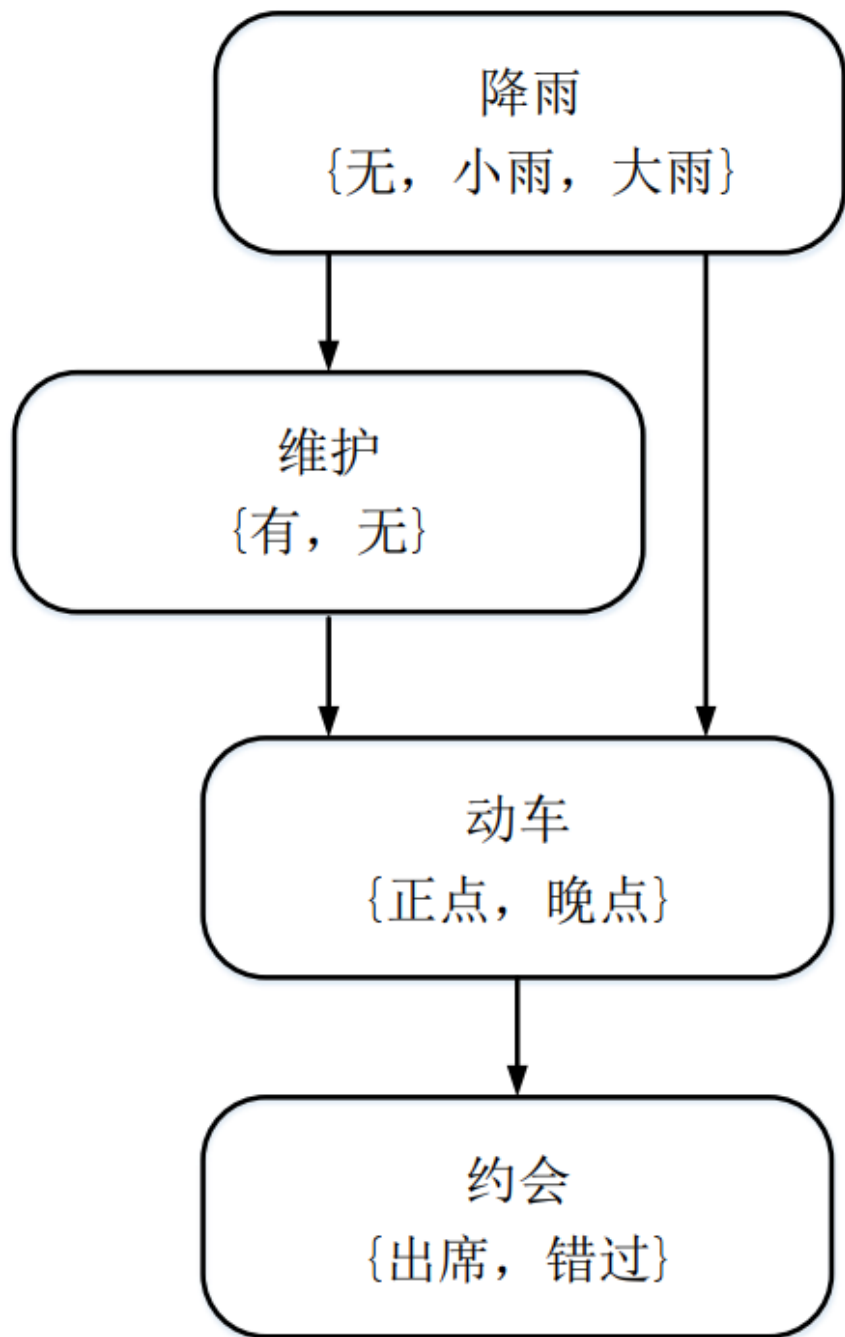
$$\begin{aligned} &P(\text{小雨, 无维护, 动车晚点, 错过约会}) \\ &= P(\text{小雨})P(\text{无维护} | \text{小雨})P(\text{动车晚点} | \text{小雨, 无维护}) \\ &\quad P(\text{错过约会} | \text{动车晚点}) \\ &= 0.2 \times 0.8 \times 0.3 \times 0.4 \\ &= 0.0192 \end{aligned}$$



# 贝叶斯网络 (Bayesian network)



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY



- 计算联合概率

```
prob = model.probability([[ 'light', 'no',  
                             'delay', 'miss']])  
print(prob)
```

- 运行结果:

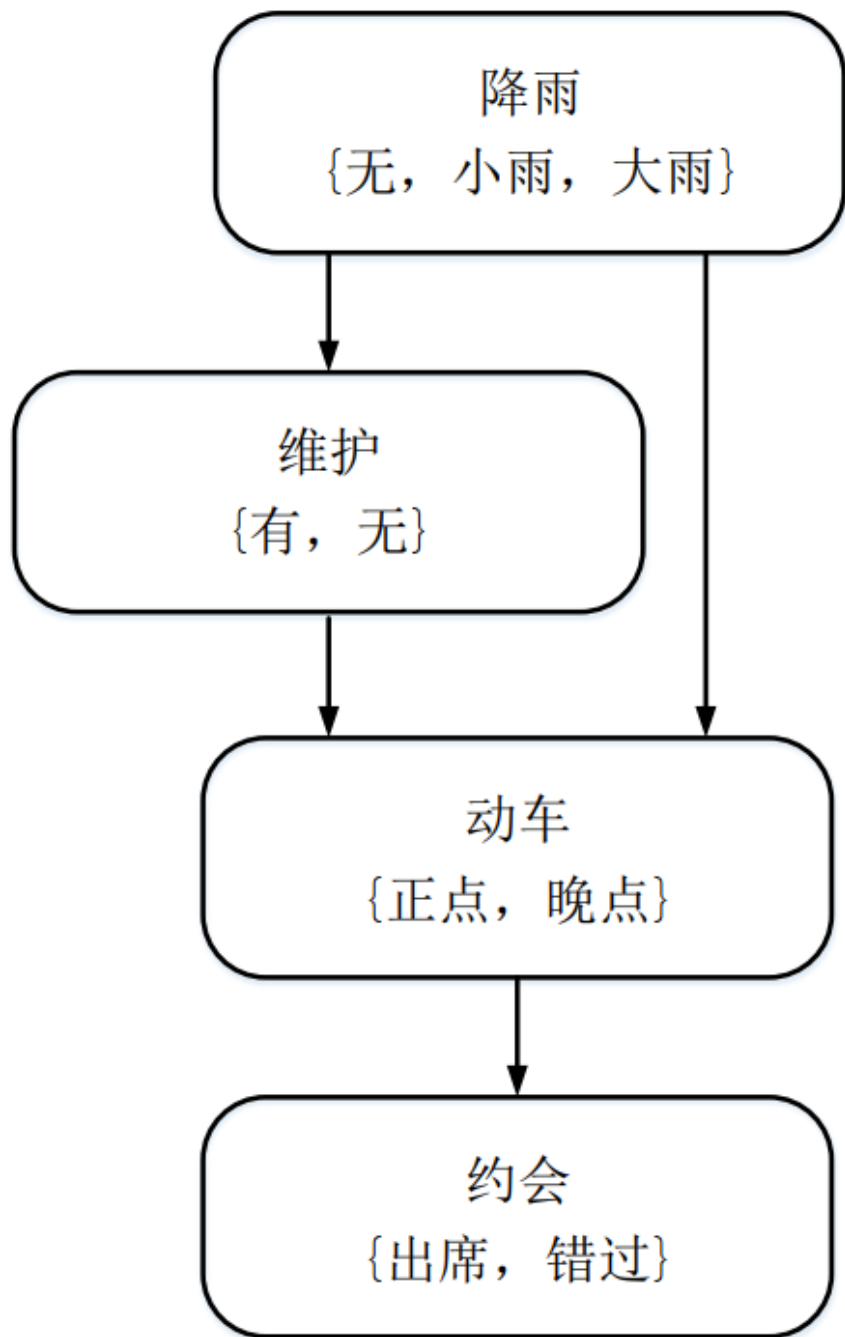
```
D:\Software\anaconda3\envs\matplotlib\python.exe  
0.0192  
  
Process finished with exit code 0
```



# 贝叶斯网络 (Bayesian network)



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY



## • 计算条件概率

$$\begin{aligned} &P(\text{约会} \mid \text{小雨, 无维护}) \\ &= \alpha P(\text{约会, 小雨, 无维护}) \\ &= \alpha [P(\text{约会, 小雨, 无维护, 动车正点}) \\ &\quad + P(\text{约会, 小雨, 无维护, 动车晚点})] \\ &= \frac{1}{0.2 \times 0.8} (0.2 \times 0.8 \times 0.7 \times 0.9 + 0.2 \times 0.8 \times 0.3 \times 0.6) \\ &= 0.81 \end{aligned}$$

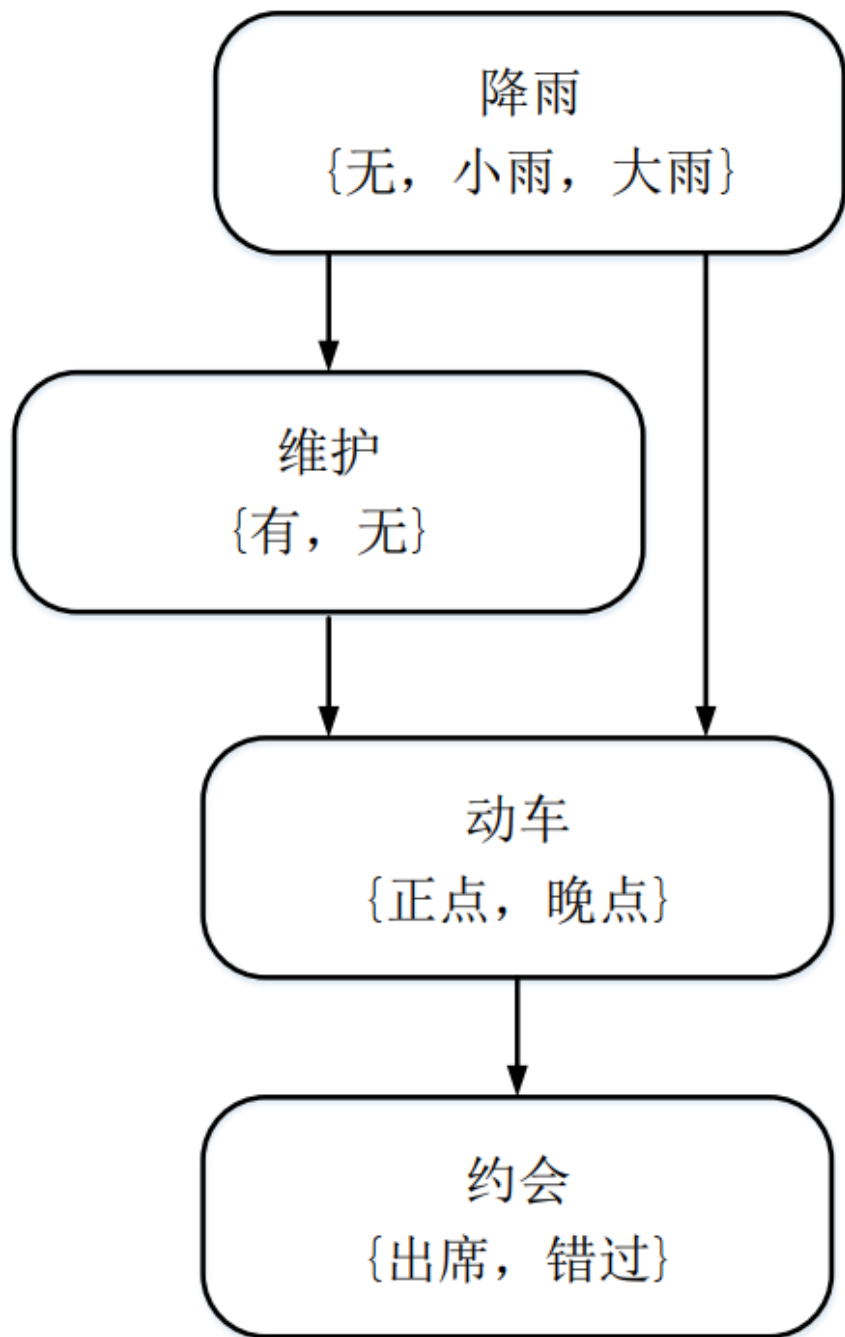




# 贝叶斯网络 (Bayesian network)



湖北大学  
HUBEI UNIVERSITY



- 计算条件概率

```
predictions = model.predict_proba({  
    'rain': 'light',  
    'maintenance': 'no'  
})
```

- 运行结果:

```
D:\Software\anaconda3\envs\matplotlib\python.exe  
rain: light  
maintenance: no  
train  
on time : 0.7000  
delay : 0.3000  
appointment  
attend : 0.8100  
miss : 0.1900
```

```
Process finished with exit code 0
```



# 理论课 第4次平时作业 (3月26日上课前交给班长)



- 编程实现PPT中的贝叶斯网络

- ✓ 在这个例子中，任选一个联合概率进行计算，将计算结果截图  
(本页中的例子除外) ;

- ✓ 手动验算

```
D:\Software\anaconda3\envs\matplotlib\python.exe  
0.0192
```

```
Process finished with exit code 0
```

$$\begin{aligned} &P(\text{小雨}, \text{无维护}, \text{动车晚点}, \text{错过约会}) \\ &= P(\text{小雨})P(\text{无维护} | \text{小雨})P(\text{动车晚点} | \text{小雨}, \text{无维护}) \\ &P(\text{错过约会} | \text{动车晚点}) \\ &= 0.2 \times 0.8 \times 0.3 \times 0.4 \\ &= 0.0192 \end{aligned}$$

# 结束语



# 谢谢!