

A low-angle, upward-looking photograph of several modern skyscrapers. The buildings feature glass facades and white structural elements, creating a sense of height and architectural complexity. The sky is a clear, deep blue. A dark green horizontal band across the middle of the image contains the chapter title in white text.

第四章

谓词逻辑



基于知识的推理

- 假设有以下3条信息
 - ✓ 如果今天不下雨，那么A会去拜访B。
 - ✓ A今天会去拜访B或者C，但不会两者都拜访。
 - ✓ A今天拜访了C。
- 基于上述信息，可以推理出
 - ✓ A今天没有拜访B。
 - ✓ 今天下雨了。



谓词公式 (对应教材2.3.2节)



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

- **句子 (sentence)**: 一条有关世界的断言 (assertion)
- **命题符号 (propositional symbols)**: 用大写字母代表句子, 如 P, Q, R 。
- **逻辑连接词 (logical connectives)**

非
~

与
^

或
v

蕴含
→

等价
↔



谓词公式



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

- **非 (\sim):** 有的文献中称为**否定 (not)**, 也可用 \neg 表示

| P | $\sim P$ |
|-------|----------|
| False | True |
| True | False |



谓词公式



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

- 与 (\wedge): 有的文献中也叫**合取 (conjunction)**

| P | Q | $P \wedge Q$ |
|-------|-------|--------------|
| False | False | False |
| False | True | False |
| True | False | False |
| True | True | True |



谓词公式



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

- 或 (\vee): 有的文献中也叫析取 (disjunction)

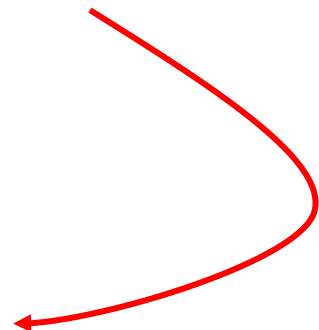
| P | Q | $P \vee Q$ |
|-------|-------|------------|
| False | False | False |
| False | True | True |
| True | False | True |
| True | True | True |



谓词公式

- **蕴涵 (\rightarrow)**: 此处指的是实质蕴涵 (material implication)
 - ✓ 不要把蕴涵和**推出**相混淆, $P \rightarrow Q$ 的意思**不是**P可以推出Q
 - ✓ 把 $P \rightarrow Q$ 记忆为: “P为True, 且Q为False” 这种情况为False
 - ✓ 简单将其理解作为一种**布尔运算符**即可

| P | Q | $P \rightarrow Q$ |
|-------|-------|-------------------|
| True | False | False |
| True | True | True |
| False | False | True |
| False | True | True |





- **实质蕴涵悖论：**直觉上，蕴涵可以等价地刻画日常生活中的条件句，但实则不然。蕴涵会制造一些违反常识的结果。
 - ✓ **例：**如果一个傻子当选了美国总统 (P)，那么美国将再次伟大 (Q)。
 - ✓ 根据常识，上述条件句为False；但根据蕴涵的定义，**由于P为假，该语句为True。**

| P | Q | $P \rightarrow Q$ |
|-------|-------|-------------------|
| True | False | False |
| True | True | True |
| False | False | True |
| False | True | True |



谓词公式

- **实质蕴涵悖论**：直觉上，蕴涵可以等价地刻画日常生活中的条件句，但实则不然。蕴涵会制造一些违反常识的结果。
 - ✓ **产生原因**：日常生活中的条件句，真假由条件和结果之间逻辑关系决定；蕴涵的真假完全由P和Q的值决定，P和Q之间不需要存在逻辑关系。
 - ✓ **例**：如果地球爆炸了，那么我会暴富。

| P | Q | $P \rightarrow Q$ |
|-------|-------|-------------------|
| True | False | False |
| True | True | True |
| False | False | True |
| False | True | True |



谓词公式



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

- 等价 (\leftrightarrow): biconditional

| P | Q | $P \leftrightarrow Q$ |
|-------|-------|-----------------------|
| False | False | True |
| True | True | True |
| False | True | False |
| True | False | False |



基于知识的推理

- 假设有以下3条信息

- ✓ 如果今天不下雨，那么A会去拜访B。
- ✓ A今天会去拜访B或者C，但不会两者都拜访。
- ✓ A今天拜访了C。

$P \rightarrow Q$ (为True)

$Q \vee R$ (为True)

$\sim(Q \wedge R)$ (为True)

R (为True)

- 基于上述信息，可以推理出

- ✓ A今天没有拜访B。
- ✓ 今天下雨了。

$\sim Q$ (为True)

$\sim P$ (为True)



基于知识的推理

如果今天不下雨 (P), 那么A会去拜访B (Q)。 (已知这个条件句为True)

- 今天不下雨 (P为True), 且A拜访了B (Q为True)
 - 今天下雨 (P为False), 且A没拜访B (Q为False)
 - 今天下雨 (P为False), 且A拜访了B (Q为True)
- } $P \rightarrow Q$ (为True)

| P | Q | $P \rightarrow Q$ |
|-------|-------|-------------------|
| True | False | False |
| True | True | True |
| False | False | True |
| False | True | True |



等价关系（对应教材第2.3.2节）



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

- 消除双重否定

✓ “A没有通过考试” 是错误的。

等价 ✓ A通过了考试。



等价关系

- 消除双重否定

$$\sim(\sim P)$$

等价

P



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY



等价关系

- 狄·摩根定律 (De Morgan's Law)

✓ “A和B都通过了考试” 是不正确的。

等价于 ✓ A没有通过了考试，或B没有通过考试。



等价关系



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

- 狄·摩根定律 (De Morgan's Law)

$$\sim(P \vee Q)$$

$$\sim(P \wedge Q)$$

等价于

$$\sim P \wedge \sim Q$$

$$\sim P \vee \sim Q$$



等价关系

- 分配率



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

$$P \wedge (Q \vee R)$$

$$P \vee (Q \wedge R)$$

等价于

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$



等价关系

- 交换率



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

$$P \wedge Q$$

$$P \vee Q$$

等价于

$$Q \wedge P$$

$$Q \vee P$$



等价关系

- 结合率



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

$$(P \wedge Q) \wedge R$$

$$(P \vee Q) \vee R$$

等价于

$$P \wedge (Q \wedge R)$$

$$P \vee (Q \vee R)$$



等价关系



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

- 消除蕴含（需重点记忆）

✓ 如果今天下雨了，那么A会待在家里。

等价于 ✓ 今天没下雨 或 A会待在家里。



等价关系

- 消除蕴含（需重点记忆）

$$P \rightarrow Q$$

等价于

$$\sim P \vee Q$$



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY



等价关系

- 消除等价



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

$$P \leftrightarrow Q$$

等价于 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$



消解推理规则（对应教材第3.4.2节）



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

- 消除“与”

已知

✓ A是B和C的朋友。

(为True)

派生

✓ A是B的朋友。

(为True)



消解推理规则



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

- 消除“与”

已知

$$P \wedge Q$$

(为True)

派生

$$P$$

(为True)



消解推理规则

- 假言推理 (modus ponens)

已知

- ✓ 如果今天下雨了，那么A会待在家里。
- ✓ 今天下雨了。

(为True)

派生

- ✓ A会待在家里。

(为True)

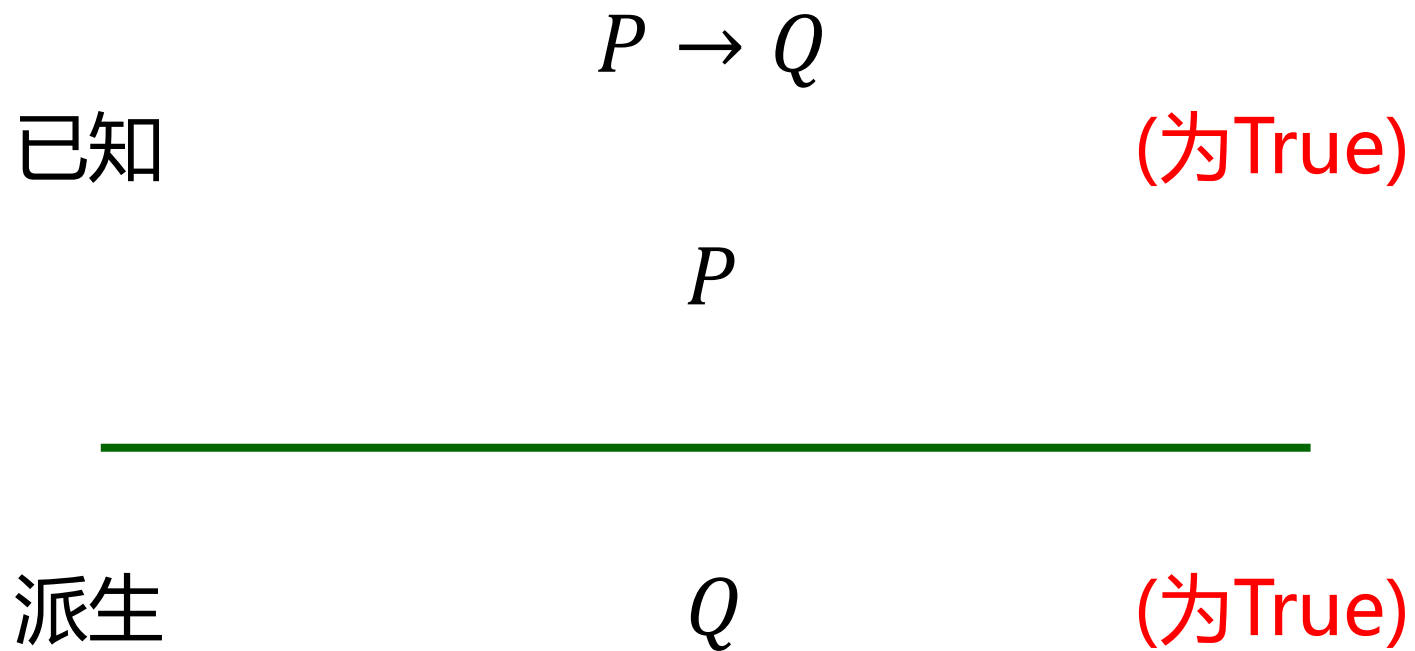


消解推理规则



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

- 假言推理 (modus ponens)





已知

- ✓ $(A \text{在教室}) \vee (B \text{在图书馆})$
- ✓ A不在教室

(为True)

派生

- ✓ B在图书馆

(为True)



消解推理规则



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

已知

$$P \vee Q$$

(为True)

$$\sim P$$

派生

$$Q$$

(为True)



消解推理规则

已知 $P \vee Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n$ (为True)

$\sim P$

派生 $Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n$ (为True)



消解推理规则



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

已知

$$P \vee Q$$

(为True)

$$\sim P \vee R$$

派生

$$Q \vee R$$

(为True)



已知

$$P \vee Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n$$

$$\sim P \vee R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n$$

(为True)

派生

$$Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n \vee R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n$$

(为True)



已知

P

$\sim P$

(为True)

派生

空子句 NIL

某些文献也用 $()$ 表示

(矛盾)



- **子句 (Clause)** : 文字的析取 (disjunction) 组成的公式
- **文字 (literal)**: 谓词符号, 或谓词符号的否定

例: $P \vee Q \vee R$



- **合取范式 (Conjunctive Normal Form, CNF)**
 - ✓ 子句的合取
 - ✓ 例: $(A \vee B \vee C) \wedge (D \vee \sim E) \wedge (F \vee G)$



把合式公式转换为合取范式



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

- **消除等价**: $P \leftrightarrow Q$ 转换为 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- **消除蕴涵**: $P \rightarrow Q$ 转换为 $\sim P \vee Q$
- 使用**狄·摩根定律**把否定 \sim 移入括号

$\sim(P \wedge Q)$ 转换为 $\sim P \vee \sim Q$

- 使用**分配率**, 分配析取 \vee



把合式公式转换为合取范式



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

- 例: $(P \vee Q) \rightarrow R$
- 消除蕴涵: $\sim(P \vee Q) \vee R$
- 使用狄·摩根定律: $(\sim P \wedge \sim Q) \vee R$
- 使用分配率: $(\sim P \vee R) \wedge (\sim Q \vee R)$



使用消解推理规则进行推理

- 假设有以下3条信息

- ✓ 如果今天不下雨，那么A会去拜访B。
- ✓ A今天会去拜访B或者C，但不会两者都拜访。
- ✓ A今天拜访了C。

$P \rightarrow Q$ (为True)

$Q \vee R$ (为True)

$\sim(Q \wedge R)$ (为True)

R (为True)

- 基于上述信息，希望查询：

- ✓ "今天下雨了"是否为True?

$\sim P$ (是否为True?)



使用消解推理规则进行推理



湖北大学
HUBEI UNIVERSITY

- **知识库 (knowledge base):** 一组已知为True的句子
- **推理 (inference):** 基于已知的句子, 派生出新的句子



使用消解推理规则进行推理

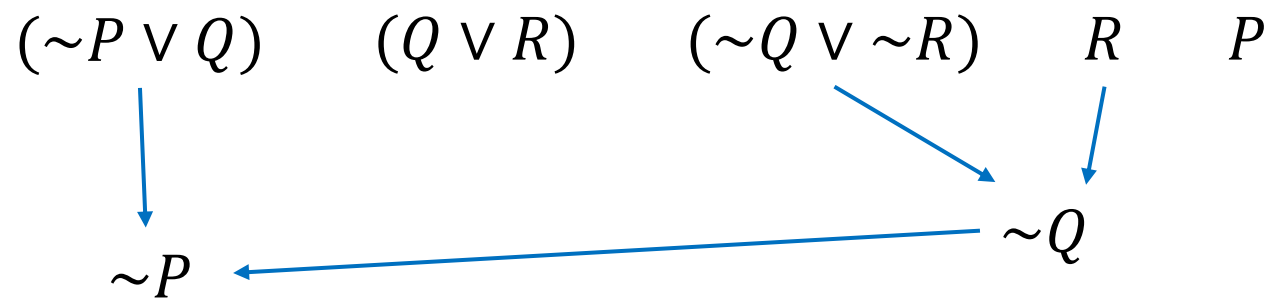
- **基于知识库 KB ，推理某条信息 α 是否为真：**

- ✓ 用等价关系将 $KB \wedge \sim \alpha$ 转换为合取范式

- ✓ 持续使用消解推理规则生成新的子句，并检查是否可以推出矛盾（反证法）

假设 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \vee R) \wedge (\sim(Q \wedge R)) \wedge R \wedge P$ 为True

合取范式: $(\sim P \vee Q) \wedge (Q \vee R) \wedge (\sim Q \vee \sim R) \wedge R \wedge P$



$P \rightarrow Q$ (为True)

$Q \vee R$ (为True)

$$\sim(Q \wedge R) \quad (\text{为True})$$

R (为True)

$\sim P$ (是否为True?)

$\sim P$ 和 P 推出空子句 (矛盾)

说明 $\sim P$ 为True



第3次平时作业 (3月19日上课前交给班长)



- 使用消解推理规则，判断：

$(A \vee B) \wedge (\sim B \vee C) \wedge (\sim C)$ 是否可以推理出 A ?

结束语



谢谢!