

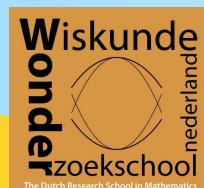
Hoofdsponsor



# Opgaven

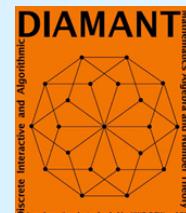


Radboud Universiteit



Universiteit Utrecht

2015



Universiteit Leiden

Maastricht University *Leading in Learning!*

**ASML**

For students who think ahead



KU LEUVEN



UNIVERSITEIT TWENTE.





Dit opgavenboekje is een uitgave  
van de **LIMO-commissie 2015:**

Franziska van Dalen, Merlijn Staps,  
Jan-Willem van Ittersum, Wicorel van  
der Pol, Marieke van der Wegen, Daniël  
Kroes, Bas Nieraeth, Michael van den  
Hoogenband.

e-mail: limo1415@a-eskwadraat.nl

website: limo.a-eskwadraat.nl

Opgaven: Roberto Fernandez, Karma  
Dajani, Willem Pranger, Harold de Boer,  
Josse van Dobben de Bruyn, Jaap Top,  
Hendrik Lenstra, Fokko van de Bult,  
Sjoerd Boersma, Michiel Hochstenbach,  
Tom Verhoeff, Moritz Schauer, Christos  
Pelekis, Richard Kraaij, Daniël Kroes.

---

---

## Inhoudsopgave

---

1.	Vazen, knikkers en een oneerlijke munt	4
2.	Product van cosinussen	7
3.	Driehoeken tellen	8
4.	Ondubbelzinnige functies	11
5.	Begincijfers van machten	12
6.	Fermat modulo Fermat	13
7.	Divergente reeksen	14
8.	Kaarten kleuren	16
9.	Inverteerbare matrices	18
10.	Antiprisma's stapelen	21
11.	Toevallige oriëntaties van grafen	23
12.	Een deelruimte van niet-inverteerbare matrices	24



---

## Regels en tips

---

Tijdens de wedstrijd gelden de volgende **regels**:

- Maak iedere opgave op een apart vel en voorzie deze van teamnaam en opgavenummer. Verzamel het werk per opgave in het daarvoor bestemde mapje.
- Hulpmiddelen zoals boeken, grafische rekenmachines, mobiele telefoons en laptops zijn niet toegestaan. Niet-grafische rekenmachines mogen gebruikt worden. Uiteraard mag er alleen gecommuniceerd worden met teamgenoten en met de organisatie.
- Voor drinken wordt tijdens de wedstrijd gezorgd. Er komt regelmatig iemand langs om vragen aan te kunnen stellen.

**Tips** die je kunnen helpen tijdens de wedstrijd:

- **Notatie.** Bij diverse opgaven is onderaan schuingedrukt de notatie en/of de terminologie toegelicht. Verder wordt met de natuurlijke getallen de verzameling  $\{1, 2, 3, \dots\}$  bedoeld, die we noteren met  $\mathbb{N}$ .
- **Volgorde van moeilijkheid.** We hebben getracht de opgaven op volgorde van moeilijkheid te sorteren. Dat wil zeggen, we denken dat er voor de eerste opgaven gemiddeld meer punten zullen worden gehaald dan voor de latere opgaven. Besteed dus gemiddeld meer tijd aan opgaven met lagere nummers.
- **Lees goed wat er in de opgave staat.** Als je te snel begint, kun je belangrijke informatie over het hoofd zien. Soms staat in de vraagstelling een (verstoppe) hint die aangeeft wat je zou kunnen doen. Als je vastloopt, kun je ook besluiten de opgave nog eens goed door te lezen. Zorg ook dat je alle gegeven informatie gebruikt die in de opgave staat en vooral slechts de informatie die gegeven is.
- **Wees een team.** Verdeel de opgaven, zodat je geen dubbel werk doet, en vraag elkaar om hulp als je ergens niet uit komt. Bedenk waar ieders kwaliteiten liggen. Bekijk tijdens de wedstrijd elkaars werk; vaak vallen er nog foutjes uit te halen.
- **Sprokkel puntjes.** Als je er niet uit komt, schrijf dan op wat je wel hebt bewezen. Dat kan relevant zijn voor het bewijzen van de betreffende opgave. Als je op de goede weg zat, kun je daar vaak nog deelscores voor krijgen. Sowieso blijkt uit resultaten van voorgaande jaren dat niet vaak voor een opgave alle punten worden gescoord. Als je niet uit een deelopgave komt, mag je het resultaat dat daarin bewezen moet worden wel gebruiken om de volgende deelopgave op te lossen.
- **Blijf niet vastzitten in verkeerde gedachten.** Het is vaak verstandig een probleem vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Vaak helpt het gegeven termen om te schrijven of gegevens te manipuleren. Als je weinig vooruitgang boekt, kun je ook aan een andere opgave gaan werken en iemand anders naar jouw opgave laten kijken.
- **Vind een patroon.** Als je bijvoorbeeld iets moet bewijzen voor alle  $n \in \mathbb{N}$ , probeer dan kleine gevallen: kijk wat er gebeurt voor  $n = 1$  of  $n = 2$ . Ontdek een patroon en bewijs dat dit patroon doorzet bij grotere getallen.
- **Houd het gezellig.** Het is niet zeker of je er goed van gaat presteren, maar op deze manier heb je in elk geval een leuke dag.

---

## 1. Vazen, knikkers en een oneerlijke munt

*Prof. dr. Roberto Fernandez en dr. Karma Dajani, Universiteit Utrecht*

---

Deze opgave bestaat uit twee ongerelateerde vraagstukken die onafhankelijk van elkaar gemaakt kunnen worden.

- (a) Zij  $k$  een niet-negatief geheel getal. Een vaas bevat  $k$  zwarte knikkers en één rode knikker. Om beurten pakken Peter en Paula een knikker uit deze vaas (zonder terug te leggen), totdat één van hen de rode knikker pakt. Degene die de rode knikker pakt wint het spel. Aangezien Peter een echte heer is, laat hij Paula kiezen of ze wil beginnen. Paula vermoedt dat ze het beste kan beginnen; wie weet pakt ze immers direct de rode knikker. Aan de andere kant nemen Peters kansen om de rode knikker te pakken toe als ze toevallig een zwarte knikker pakt, want dan zitten er als Peter zijn eerste knikker pakt minder zwarte knikkers in de vaas. Wat moet Paula kiezen om haar winstkansen te maximaliseren?
- (b) We gooien herhaaldelijk met een munt. Deze munt landt op kop met kans  $p$  en op munt met kans  $1 - p$ , waarbij  $0 < p < 1$ . De uitkomsten van de worpen worden genoteerd, wat er bijvoorbeeld zo uit ziet:

$$K \ K \ K \ M \ M \ M \ M \ M \ K \ M \dots$$

We delen dit op in *blokken* van opeenvolgende gelijke uitkomsten. In het bovenstaande voorbeeld heeft het eerste blok lengte 3 ( $3 \times$  kop), het tweede blok lengte 5 ( $5 \times$  munt) en het derde blok lengte 1 ( $1 \times$  kop). Wat is groter: de gemiddelde lengte van het eerste blok of de gemiddelde lengte van het tweede blok?



A photograph of a person's hands writing mathematical equations on a whiteboard. The whiteboard is covered with various mathematical concepts, including PDEs, boundary conditions, and matrix operations. The person is wearing glasses and a green shirt. In the bottom left corner, there is a large, bold, black text overlay that reads "Ten reasons to choose our mathematics master:".

# Seven reasons to choose our mathematics master:

- **Many options, e.g. courses in seminar form outside of the MasterMath programme**
  - **A choice from 8 different specializations**
  - **A programme tailored to your requirements**
  - **Interaction with other fields, such as physics and biology**
  - **Excellent international staff**
  - **Honours programme at the Utrecht Geometry Centre**
  - **Honours programme in both Mathematics and Theoretical Physics**



# MASTER YOUR FUTURE

AT Utrecht University

**More information:**  
**[www.uu.nl/masters/mathsci](http://www.uu.nl/masters/mathsci)**



## Het Koninklijk Wiskundig Genootschap

### **Wat is het KWG ?**

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde en iedereen die de wiskunde een warm hart toedraagt. De vereniging is in 1778 opgericht en is 's werelds oudste nationale wiskunde genootschappen. Zie website <http://www.wiskgenoot.nl/>

### **Wat doet het KWG ?**

Het genootschap heeft als doel de wiskunde te bevorderen, en haar beoefening en toepassingen aan te moedigen. Daarnaast vertegenwoordigt het KWG de Nederlandse wiskundige gemeenschap in binnen- en buitenland.

Het KWG steunt diverse wiskundige zusterorganisaties, zoals [Vierkant voor Wiskunde](#), en [Epsilon Uitgaven](#). Daarnaast ondersteunt het KWG via de [PW-NOCW](#) verschillende activiteiten voor jongeren, zoals de Wiskunde Olympiade, Wiskunde A-lympiade, Kangoeroe-wedstrijden, Universitaire Olympiade en de Vierkant-kampen.

Het KWG organiseert jaarlijks het [Wintersymposium](#) dat bestemd is voor docenten en aankomende docenten in het voortgezet onderwijs en het [Nederlands Mathematisch Congres](#) voor alle beoefenaars en liefhebbers van de wiskunde. In 2016 is de 52e editie van het NMC, dit keer gezamenlijk met België en Luxemburg.

Een aantal van de wiskundige werkzaamheden die verbonden zijn met het KWG:

- [Het Nieuw Archief voor Wiskunde](#) is het lijfblad van het KWG en verschijnt vier keer per jaar.
- [Indagationes Mathematicae](#) is een internationaal wiskundig tijdschrift van het KWG.
- [Pythagoras - wiskundetijdschrift voor jongeren](#) stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.
- [Platform Wiskunde Nederland](#) is een gezamenlijk platform opgericht door KWG en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren met als doel de positie van de wiskunde in Nederland te verbeteren.

### **Het lidmaatschap**

Wilt u op de hoogte blijven van nieuwe ontwikkelingen in de wiskunde in Nederland?

Wilt u met vakgenoten discussiëren over wiskundige problemen die u tegenkomt, of zoekt u advies?

Wilt u samen (het plezier in) de wiskunde uitdragen in Nederland, of bijdragen aan de nationale wiskunde-agenda?

#### **Wordt dan nu lid!**

Leden van het KWG ontvangen vier keer per jaar het tijdschrift Nieuw Archief voor Wiskunde en elke twee weken de elektronische nieuwsbrief met een uitgebreide agenda van wiskundige activiteiten en vacatures op wiskundig gebied. Leden krijgen korting op de toegangsprijs van het Nederlands Mathematisch Congres en het Wintersymposium.

### **Studenten**

Het KWG biedt aan studenten wiskunde (inclusief lerarenopleiding) een gratis lidmaatschap van één jaar aan, direct na het behalen van hun Bachelordiploma. Ook is er tijdens de studietijd een laag tarief voor het lidmaatschap.

Aanmelden kan met het formulier dat tijdens het examen is uitgereikt, of via de website [www.wiskgenoot.nl](http://www.wiskgenoot.nl) van het KWG.

---

## 2. Product van cosinussen

Willem Pranger BSc., Universiteit Utrecht

---

- (a) Laat  $0 < x < \pi$  een reëel getal zijn en definieer

$$A_n = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{8}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

voor elk natuurlijk getal  $n$ . Bewijs dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  bestaat en gelijk is aan  $\frac{\sin(x)}{x}$ . Met andere woorden, er geldt dat

$$\frac{\sin(x)}{x} = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{8}\right) \cdots .$$

- (b) Gebruik bovenstaand resultaat om Viète's formule aan te tonen:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \cdots = \frac{2}{\pi}.$$

---

### 3. Driehoeken tellen

*Ir. Harold de Boer, Transtrend BV*

---

Zij  $N \geq 3$  een geheel getal. Op de middelbare school wordt onderwezen dat je, gebruikmakend van drie van de hoekpunten van een regelmatige  $N$ -hoek,  $\binom{N}{3}$  verschillende driehoeken kunt tekenen. Maar hoe verschillend zijn die driehoeken eigenlijk? Als we alle congruente driehoeken als gelijk beschouwen, dan blijft er van die  $\binom{4}{3} = 4$  driehoeken in een vierkant maar één verschillende over. In een regelmatige vijfhoek zitten slechts twee verschillende, en in een regelmatige zeshoek slechts drie.

Hoe groot is het verschil tussen het aantal verschillende driehoeken in een regelmatige 2016-hoek en het aantal verschillende driehoeken in een regelmatige 2015-hoek?

# Wiskunde onderzoekschool



nederland

The Dutch Research School in Mathematics

program and training of (prospective) PhD students.

see <http://web.science.uu.nl/wonder>

WONDER is the *Dutch Research School in Mathematics*, coordinating the national master and graduate

- > In for a challenge? Take up a **WONDER advanced course in mastermath**. In 2015-2016 we offer courses on complex networks, Hamiltonian dynamics, rigid geometry, queues & Levy fluctuation theory, computational dynamics, hypergeometric functions and topics in algebraic surfaces.
- > Take part in a **WONDER school for graduate students**. In 2015-2016 we expect to have schools on financial mathematics, geometry and quantum theory, nonlinear dynamics, stochastics, etc.
- > Take part in a **WONDER minicourse**. Monitor the website for announcements.
- > All graduated students automatically participate in a competition for the **Stieltjes prize** for the best Dutch PhD thesis in mathematics.

# Knap staaltje denkwerk!



**Weet jij al wat je na je bachelor gaat doen? Wil jij...**

- ... zelf bepalen hoe je master eruit komt te zien, zonder verplichte vakken?
- ... alvast vooruitlopen op je toekomstige baan, met combinatiemasters bijvoorbeeld richting bedrijfsleven of onderwijs?
- ... over de grenzen van Nederland heen kijken, zoals met het ALGANT uitwisselingsprogramma voor algebra, meetkunde en getaltheorie?
- ... persoonlijk contact met je docenten in een kleinschalige opleiding?
- ... studeren aan een instituut dat toonaangevend is, zowel in de fundamentele als in de toegepaste wiskunde?

**Dan is een master Wiskunde aan de Universiteit Leiden iets voor jou!**

Kijk voor meer informatie op [www.math.leidenuniv.nl/master](http://www.math.leidenuniv.nl/master).



**Universiteit  
Leiden**

Bij ons leer je de wereld kennen

---

#### 4. Ondubbelzinnige functies

*Josse van Dobben de Bruyn BSc., Universiteit Leiden*

---

Voor functies  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wordt met het kwadraat  $f^2$  soms het puntsgewijs product  $f \cdot f$  bedoeld, gegeven door  $x \mapsto f(x) \cdot f(x)$ , maar soms ook de samenstelling  $f \circ f$  gegeven door  $x \mapsto f(f(x))$ . Functies waarvoor deze twee kwadraten overeenkomen noemen we *ondubbelzinnig*.

- (a) Bestaat er een ondubbelzinnige functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die strikt dalend en continu is?
- (b) Bestaat er een ondubbelzinnige functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die strikt stijgend en continu is?
- (c) Zij  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  een ondubbelzinnige functie zo dat  $f^2$  continu is. Is  $f$  noodzakelijkerwijs continu?

---

## 5. Begincijfers van machten

*Prof. dr. Jaap Top, Rijksuniversiteit Groningen*

---

Deze opgave gaat over het eerste getal in de decimale ontwikkeling van natuurlijke getallen. Elk natuurlijk getal  $n$  heeft een unieke schrijfwijze in de vorm  $n = 10^m a_m + \dots + 10a_1 + a_0$ , waarbij  $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  en  $a_m \neq 0$ . We schrijven  $\langle n \rangle = a_m$ . Er geldt bijvoorbeeld  $\langle 5 \rangle = 5$ ,  $\langle 5^2 \rangle = 2$  en  $\langle 5^3 \rangle = 1$ . Voor elk niet-negatief geheel getal  $n$  definiëren we het geordende drietal  $v_n = (\langle 2^n \rangle, \langle 4^n \rangle, \langle 5^n \rangle)$ .

- (a) Zij  $n$  een niet-negatief geheel getal. Bewijs dat uit  $v_n = v_0$  volgt dat  $n = 0$  en dat uit  $v_n = v_1$  volgt dat  $n = 1$ .
- (b) Bestaat er een positief geheel getal  $n$  zo dat  $v_n$  uit drie dezelfde getallen bestaat?

---

**6. Fermat modulo Fermat**

*Prof. dr. Hendrik Lenstra, Universiteit Leiden*

---

Voor een geheel getal  $n \geq 1$  schrijven we  $F_n = 2^{2^n} + 1$  voor het  $n$ -de Fermat-getal. Zij  $k$  een positief geheel getal. Bewijs dat er een positief geheel getal  $m$  bestaat zodat  $F_k^m \equiv 1 \pmod{F_{k+1}}$ . Bepaal bovendien de kleinste  $m$  met deze eigenschap.

---

## 7. Divergente reeksen

*Dr. Fokko van de Bult, Technische Universiteit Delft*

---

Wedstrijdtip: lees de inleiding na de wedstrijd. De echte opgave begint bij de geletterde delen.

Inleiding: Een onderwerp dat aan bod komt in het eerste jaar van de studie wiskunde is de convergentie van reeksen  $\sum a_n$ . We leren allemaal toetsen om te zien wanneer de reeks convergeert, vaak onder de conditie  $a_n \geq 0$ . Het idee is dat de reeks convergeert als de termen “snel genoeg” klein worden. Wat we bedoelen met snel genoeg is moeilijk om precies te maken. Je zou je kunnen afvragen of er een soort randgeval is: een divergente reeks  $\sum a_n$  zodat voor elke divergente reeks  $\sum b_n$  er geldt dat  $b_n \geq a_n$ . Dat dit niet gaat werken is echter meteen duidelijk door te kijken naar de divergente reeksen  $1 + 0 + 1 + 0 + 1 + \dots$  en  $0 + 1 + 0 + 1 + 0 + \dots$ , omdat elke rij die kleiner is dan beide rijen uit alleen maar nullen moet bestaan. Daarom kijken we nu naar rijen  $b_n$  die nog een extra conditie hebben die ze mooi maakt, om te kijken hoeveel we dan kunnen komen.

- (a) Gegeven is een niet-stijgende rij  $(a_n)$  van positieve termen (oftewel  $a_n > 0$  en  $a_{n+1} \leq a_n$  voor alle  $n \geq 1$ ). Laat zien dat er een niet-stijgende rij  $(b_n)$  van positieve termen bestaat zo dat  $\sum b_n$  divergeert en er bovendien oneindig veel  $N \in \mathbb{N}$  bestaan met  $b_N \leq a_N$ .
- (b) Een rij  $(c_n)$  noemen we convex als voor alle  $1 \leq n < k < m$  de ongelijkheid

$$\frac{c_m - c_k}{m - k} \geq \frac{c_k - c_n}{k - n}$$

geldt. Bekijk een niet-stijgende, convexe rij  $(a_n)$  van positieve termen. Laat zien dat er een niet-stijgende, convexe rij  $(b_n)$  van positieve termen bestaat zo dat  $\sum b_n$  divergeert en er oneindig veel  $N$  bestaan met  $b_N \leq a_N$ .

- (c) Een rij  $(c_n)$  van positieve termen noemen we log-convex als  $(\log(c_n))$  een convexe rij is. Laat zien dat er een niet-stijgende, log-convexe rij  $(a_n)$  van positieve termen is, zo dat voor elke divergente reeks  $\sum b_n$  met  $(b_n)$  positief, niet-stijgend en log-convex er een constante  $C > 0$  is met  $b_n \geq Ca_n$  voor alle  $n$ . (Hint: De reeks  $\sum a_n$  hoeft zelf niet te divergeren.)

Merk op dat de rijen  $(1/n^p)$  positief, niet-stijgend en log-convex zijn voor  $p > 0$ ; we beschouwen dus heel natuurlijk voorkomende condities.

*In deze opgave wordt met een rij  $(a_n)$  een oneindige rij  $a_1, a_2, a_3, \dots$  bestaande uit reële getallen bedoeld.*

# Wiskunde aan UGent

Aan de samenvloeiing van Leie en Schelde ligt de historische stad Gent, de provinciehoofdstad van Oost-Vlaanderen en met 65 000 studenten de grootste Vlaamse studentenstad. De Universiteit Gent is vandaag één van de belangrijkste universiteiten in het Nederlandse taalgebied.



De Gentse universiteit heeft een rijke wiskundige traditie en visitatiecommissies beoordeelden haar bachelor- en masteropleiding wiskunde als uitstekend. De studentenvereniging PRIME zorgt voor een stimulerende dynamiek onder wiskundestudenten.

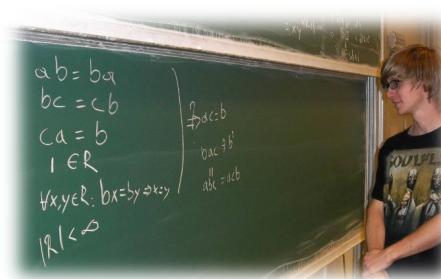
Het masterprogramma wiskunde biedt een grote individuele keuzevrijheid. Naast zuivere en toegepaste wiskunde is er ook een afstudeerrichting wiskundige natuurkunde en sterrenkunde, uniek in Vlaanderen.

Basisvakken (30 ECTS)	Minor (30 ECTS)
Zuivere wiskunde of Wisk. natuurkunde en sterrenkunde of Toegepaste wiskunde	Onderwijs of Onderzoek of Economie & verzekeringen
Masterproef (30 ECTS)	Keuzevakken (30 ECTS)
Tweede masterjaar	≥18 ECTS wiskundevakken

De gekozen minor bereidt voor op de arbeidsmarkt. Door de minor onderwijs kan de hele theoretische component van de lerarenopleiding in het masterprogramma worden opgenomen. De minor onderzoek staat voor verdiepende specialisatie en laat toe vakken te kiezen uit de lijst links op de pagina. De minor economie en verzekeringen omvat het voorbereidingsprogramma tot de master Actuariële wetenschappen.

Meer weten?

- [www.UGent.be](http://www.UGent.be)
- [www.wiskunde.UGent.be](http://www.wiskunde.UGent.be)
- [PRIME.UGent.be](http://PRIME.UGent.be)



[www.wiskunde.UGent.be](http://www.wiskunde.UGent.be)

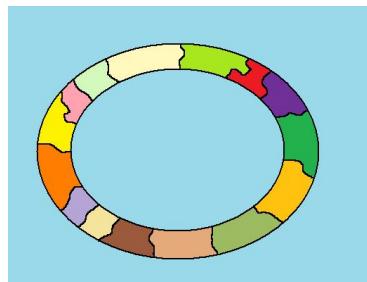
---

## 8. Kaarten kleuren

Sjoerd Boersma, Universiteit Utrecht

---

Gegeven is een continent, genaamd Romerika, met daarop een eindig aantal, minstens 3, landen. Het continent is omgeven door een oceaan, en midden in het continent ligt een groot meer. De landen bestaan elk uit één stuk en grenzen zowel aan de oceaan als aan het meer. Het gevolg is dat elk land aan precies twee andere landen grenst en ze gezamenlijk in een rondje liggen. Een voorbeeld is te zien in figuur 8.1.



Figuur 8.1: Een mogelijk continent Romerika.

- (a) Er geldt dat sommige landen op Romerika met elkaar *bevriend* zijn, waarbij elk land met hooguit één ander land bevriend is. Bovendien zijn aangrenzende landen nooit bevriend. Cartografen krijgen de opdracht de landen van Romerika te kleuren, waarbij aangrenzende landen verschillende kleuren moeten krijgen. Verder moeten ze ervoor zorgen dat elke twee bevriende landen dezelfde kleur krijgen. Het is hierbij niet erg als er nog meer landen zijn die ook deze kleur krijgen. Wat is het minimum aantal kleuren waarmee dit altijd mogelijk is?
- (b) Beantwoord dezelfde vraag als er nu hele groepen van bevriende landen kunnen zijn, waarbij elke groep een grootte van hooguit  $n$  heeft. Hierbij is  $n \geq 2$  een natuurlijk getal, moeten alle landen in dezelfde groep wederom dezelfde kleur krijgen en geldt nog steeds dat in elke groep geen twee landen aangrenzend zijn.
- (c) Stel nu dat er tussen twee landen een kanaal wordt gegraven dat het meer en de oceaan verbindt. Het gevolg hiervan is dat de landen aan weerszijden van het kanaal niet meer aangrenzend zijn. Deze landen grenzen nu dus nog maar aan precies één ander land, terwijl alle andere landen nog steeds aan precies twee landen grenzen. Beantwoord vragen (a) en (b) voor deze nieuwe situatie. Merk op dat de twee landen aan weerszijden van het kanaal nu bevriend kunnen zijn.



## Katholieke Universiteit Leuven

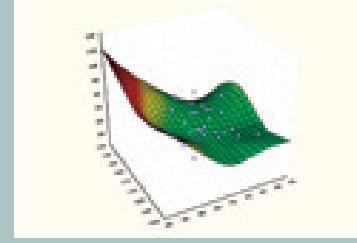
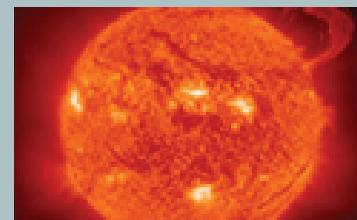
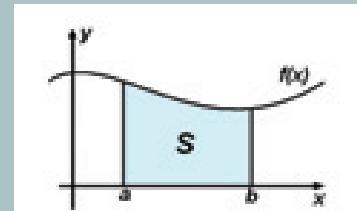
De K.U.Leuven, gesticht in 1425, is de oudste universiteit van de lage landen. Meer dan 4.500 onderzoekers zijn er actief in wetenschappelijk onderzoek en onderwijs. Op 1 februari 2006 telde de K.U.Leuven in totaal 31.447 ingeschreven studenten. Van de ingeschreven studenten heeft ongeveer 88% de Belgische nationaliteit, terwijl 6% een andere EU-nationaliteit heeft en nog eens 6% van buiten de EU komt. Dit maakt van de gezellige provinciehoofdstad Leuven een bruisende studentenstad met een rijk sociocultureel aanbod.

## Onderzoek aan het Departement Wiskunde

Het onderzoek aan het departement Wiskunde is georganiseerd op het niveau van de onderzoeksafdelingen:

- Afdeling Algebra: het onderzoek situeert zich in de algebraïsche meetkunde, getaltheorie, algebraïsche topologie en groepentheorie.
- Afdeling Analyse: in deze afdeling doet men onderzoek in de klassieke analyse (reële en complexe analyse) en in de functionaalanalyse.
- Afdeling Meetkunde: het onderzoek is gecentreerd rond differentiaalmeetkunde, in het bijzonder Riemannse en pseudo-Riemannse meetkunde en deelvariëteiten.
- Afdeling Plasma-astrofysica: het onderzoeksgebied van deze afdeling is de wiskunde van vloeistoffen en plasma's, het voornaamste studieobject is de zon. Dit onderzoek is gesitueerd in de toegepaste en computationele wiskunde.
- Afdeling Statistiek: deze afdeling is actief in de wiskundige statistiek, in het bijzonder de theorie van extreme waarden, robuuste statistiek en niet-parametrische methoden. Ook stochastische processen en financiële wiskunde komen aan bod. De afdeling is bovendien ook actief in toegepaste consultatie voor bedrijven.

Meer info op <http://wis.kuleuven.be>



---

## 9. Inverteerbare matrices

*Dr. Michiel Hochstenbach, Technische Universiteit Eindhoven*

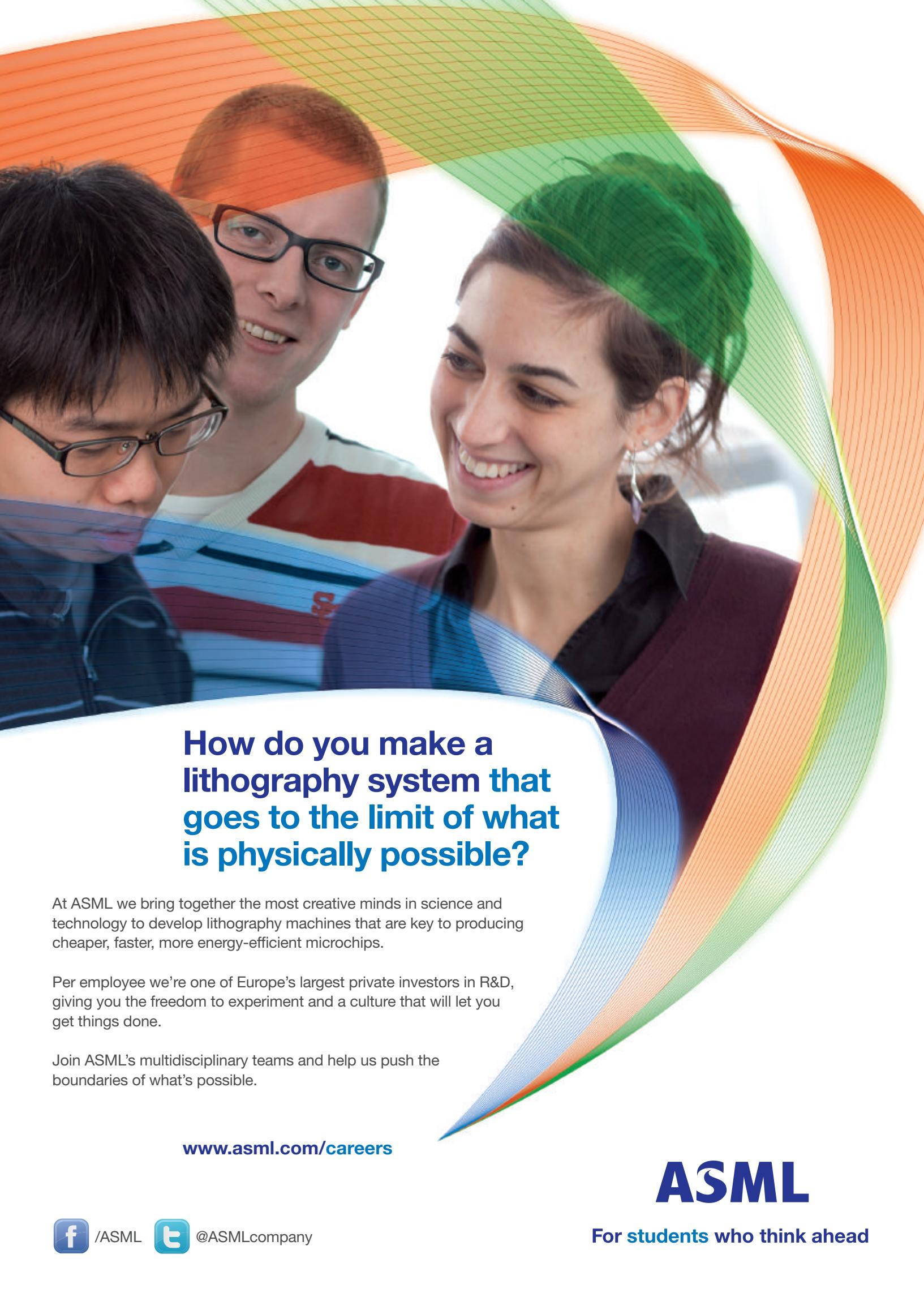
---

Zij  $n \geq 2$  een geheel getal. Voor een reële  $n \times n$ -matrix  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  definiëren we  $r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$  voor alle  $1 \leq i \leq n$ .

- (a) Neem aan dat  $|a_{ii}| > r_i$  voor alle  $1 \leq i \leq n$ . Bewijs dat  $A$  inverteerbaar is.
- (b) Neem aan dat  $|a_{ii}| \cdot |a_{jj}| > r_i \cdot r_j$  voor alle  $1 \leq i < j \leq n$ . Bewijs dat  $A$  inverteerbaar is.
- (c) Laat  $k \geq 3$  een geheel getal zijn. Bewijs dat er een  $n \geq k$  en een niet-inverteerbare matrix  $n \times n$ -matrix  $A$  bestaan zo dat

$$|a_{i_1 i_1}| \cdots |a_{i_k i_k}| > r_{i_1} \cdots r_{i_k}$$

voor alle  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ .



## How do you make a lithography system that goes to the limit of what is physically possible?

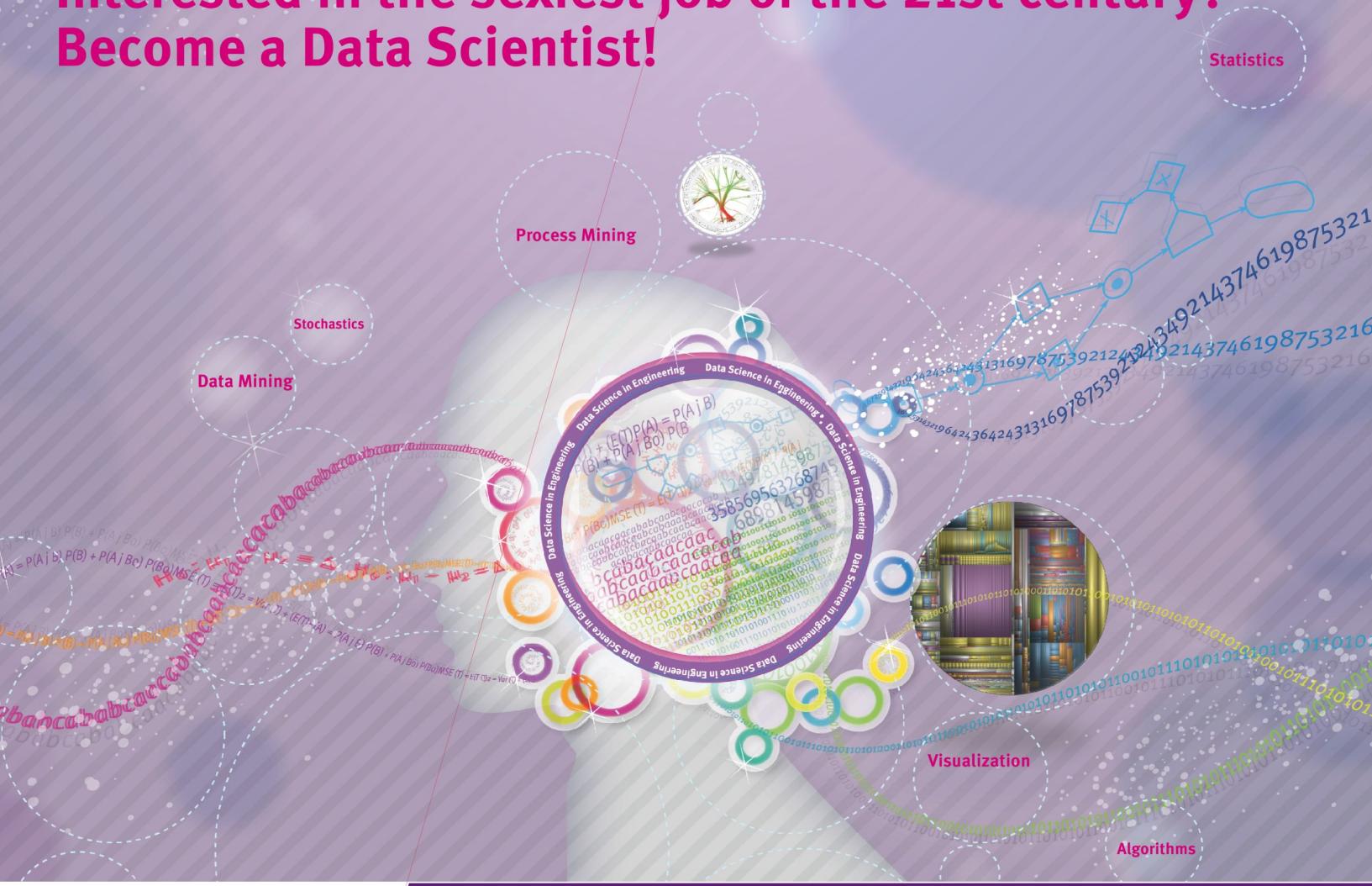
At ASML we bring together the most creative minds in science and technology to develop lithography machines that are key to producing cheaper, faster, more energy-efficient microchips.

Per employee we're one of Europe's largest private investors in R&D, giving you the freedom to experiment and a culture that will let you get things done.

Join ASML's multidisciplinary teams and help us push the boundaries of what's possible.

[www.asml.com/careers](http://www.asml.com/careers)

# Interested in the sexiest job of the 21st century? Become a Data Scientist!



## Master Data Science in Engineering

A joint master program of Mathematics and Computer Science which can be studied as a special track of either the Computer Science and Engineering Master or the Industrial and Applied Mathematics Master.

Program Structure (120 ECTS) taught in English:

Core program 30 ECTS

Electives 45 ECTS

International Experience 15 ECTS

Final Project 30 ECTS

Want to know more? Check out our website [www.tue.nl/masterprograms/dse](http://www.tue.nl/masterprograms/dse)

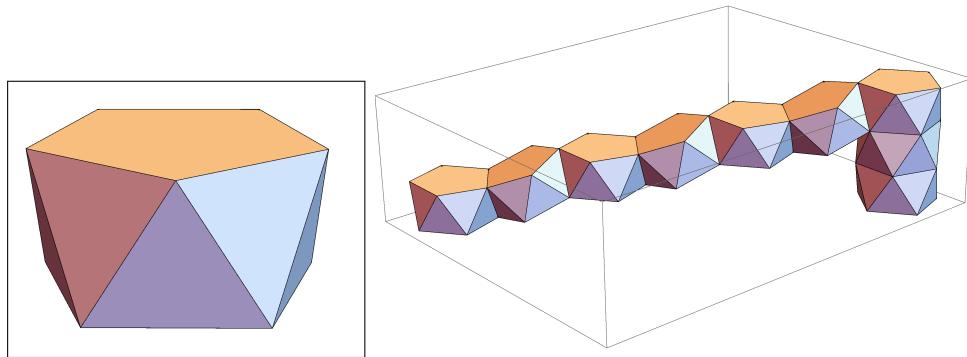
---

## 10. Antiprisma's stapelen

*Dr. ir. Tom Verhoeff, Technische Universiteit Eindhoven*

---

Zij  $n \geq 3$  een oneven geheel getal en beschouw het antiprisma dat we krijgen door twee regelmatige  $n$ -hoeken middels  $2n$  gelijkzijdige driehoeken te verbinden tot een veelvlak (zie links in figuur 10.1). Deze antiprisma's zijn via diagonaal overliggende driehoeken te koppelen tot een zigzagketen, en via de  $n$ -hoeken te stapelen tot een toren (zie rechts in figuur 10.1).



Figuur 10.1: Vijfhoekig antiprisma (links); zigzagketen en stapel ervan (rechts)

Bewijs, voor elke oneven  $n \geq 3$ , dat de diagonale keten van zeven zulke antiprisma's precies net zo hoog komt als een stapel van drie antiprisma's.



## Masteropleiding aan de Radboud Universiteit

Alle bacheloropleidingen van de Radboud Universiteit hebben een bijbehorende master, waar je zonder extra eisen kunt instromen. Door binnen je bachelor bepaalde keuzevakken te kiezen, kun je soms een andere master van de Radboud Universiteit volgen. Met het behalen van je masterdiploma mag je je Master of Science (MSc) noemen.

De masteropleiding Mathematics duurt twee jaar en wordt in het Engels aangeboden. In de master specialiseer je jezelf in een bepaald vakgebied en in een aantal vaardigheden. Je maakt een keuze voor een mastertrack die je goed voorbereidt op de arbeidsmarkt.

### Mastertracks

Aan de start van je master maak je een keuze voor een mastertrack. Binnen de masteropleiding Mathematics kun je kiezen uit zeven mastertracks. Onderstaande tracks sluiten aan bij het wetenschappelijk onderzoek dat plaatsvindt binnen de Radboud Universiteit en die tot de internationale top behoort. Je kiest voor één van deze tracks als je het leuk vindt om fundamenteel of toegepast onderzoek te doen in de wiskunde. Als onderdeel van je master doe je twee onderzoeksstages onder begeleiding van een wetenschappelijk onderzoeker die ook docent is. Tenminste een onderzoeksstage doe je bij een onderzoeksgroep van de Radboud Universiteit, de tweede stage kun je doen bij een universiteit of bedrijf in binnen- of buitenland. Na je master kun je een vierjarig promotieonderzoek doen aan een universiteit, waarin je verder specialiseert in het doen van wetenschappelijk onderzoek, of je gaat werken bij voorbeeld een onderzoeksinstuut, een overheidsorganisatie of in het bedrijfsleven.



### Mastertrack Algebra and Topology

Er zijn enkele specialismen binnen deze richting die elkaar wederzijds beïnvloeden en inspireren: algebraïsche Meetkunde, algebraïsche topologie, computeralgebra en logica.

### Mastertrack Mathematical Physics

De mastertrack Mathematical Physics sluit aan op een bachelor wiskunde met minor natuurkunde (of omgekeerd), en natuurlijk helemaal op een dubbele bachelor natuurkunde en wiskunde.

### Mastertrack Applied stochastics

Maatschappelijk richt deze specialisatie zich op zowel de medische wereld als het bedrijfsleven, bv via het onderdeel Statistics in Health en de Statistische Helpdesk van de Radboud universiteit.

---

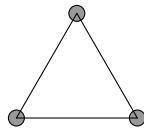
## 11. Toevallige oriëntaties van grafen

*dr. Moritz Schauer, dr. Christos Pelekis en Richard Kraaij MSc.  
Universiteit van Amsterdam, Katholieke Universiteit Leuven en Technische Universiteit Delft*

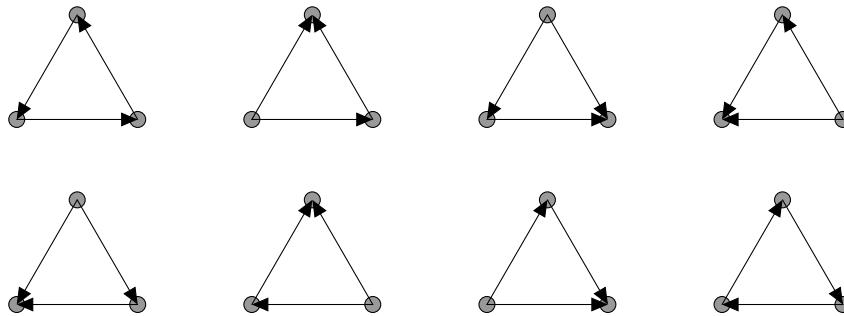
We bekijken een enkelvoudige, samenhangende graaf  $G$  met  $d$  knopen en  $m$  zijden. Door voor elke zijde onafhankelijk een eerlijke munt op te gooien, kiezen we een richting voor elk van de zijden. Op deze manier krijgen we een gerichte graaf  $G'$ . Het aantal knopen waar een even aantal zijden naar wijst noemen we  $E(G')$ . Wat is de kansverdeling die  $E(G')$  volgt?

*Hint: het blijkt dat de kansverdeling te beschrijven is in termen van  $m$  en  $d$ .*

Ter voorbeeld: bekijk het geval waarin  $G$  een graaf is met 3 knopen en alledrie de mogelijke zijden:



Bij deze graaf horen 8 mogelijke grafen  $G'$ :



Omdat voor twee van deze grafen  $G'$  geldt dat  $E(G') = 0$  en voor de andere zes grafen geldt dat  $E(G') = 2$ , vinden we in dit voorbeeld de volgende kansverdeling:

$$\mathbb{P}(E(G') = k) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{voor } k = 0, \\ \frac{3}{4} & \text{voor } k = 2, \\ 0 & \text{voor andere waarden van } k. \end{cases}$$

*Een enkelvoudige graaf bestaat uit een (eindige) verzameling knopen en een verzameling zijden, waarbij elke zijde twee verschillende knopen verbindt. Tussen twee knopen loopt hoogstens één zijde. In een gerichte graaf hebben de zijden een richting. Een (ongerichte) graaf noemen we samenhangend als er tussen elk tweetal knopen een pad is dat bestaat uit zijden van de graaf.*

---

**12. Een deelruimte van niet-inverteerbare matrices**

*Daniël Kroes BSc., Universiteit Utrecht*

---

Wat is de grootst mogelijke dimensie van een lineaire deelruimte van de vectorruimte van reële  $n \times n$ -matrices die enkel niet-inverteerbare matrices bevat?



