



Opgaven LIMO 2011

Radboud Universiteit Nijmegen



Universiteit Utrecht

COM
Consultants in Quantitative Methods



KONINKLIJKE
HOLLANDSCHE MAATSCHAPPIJ
DER WETENSCHAPPEN

TU Delft
Delft University of Technology

UNIVERSITEIT TWENTE.

FLOW ■ TRADERS

ORTEC
PROFESSIONALS IN PLANNING

TU/e
Technische Universiteit
Eindhoven
University of Technology



UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM



KNAW



Universiteit Leiden



VRIJE
UNIVERSITEIT
AMSTERDAM



TOWERS WATSON



Canon

Canon Authorised Center



Canon
Business
Center
Oss

Inhoudsopgave

1.	Natuurlijke sommen	5
2.	Differentieerbaar en integreerbaar	6
3.	Het grootste nulpunt van een geïtereerd polynoom	8
4.	In elkaars macht	10
5.	Delen in ringen	12
6.	Binaire woorden	14
7.	Een rationale oplossing	16
8.	Een onorigineel volledig origineel	18
9.	Wandelen over de ribben van een blok	20
10.	Duizelige schildpadden	22
11.	Machtige polynomen	25
12.	Complexe veeltermen	27



K N A W

Colofon

Dit opgavenboekje is een uitgave van de
LIMO-commissie 2011.

e-mail: limo@math.ru.nl

internet: <http://www.desda.math.ru.nl/limo>

Tijdens de wedstrijd gelden de volgende **regels**:

- Maak iedere opgave op een apart vel, zet het nummer van de opgave en de naam van je team op elk vel;
- Hulpmiddelen zoals boeken, (grafische) rekenmachines en laptops zijn niet toegestaan;
- Er mag tijdens de wedstrijd alleen gecommuniceerd worden met teamgenoten en met de organisatie;
- Tijdens de wedstrijd wordt koffie, thee en fris rondgedeeld. Dat is het moment om vragen te stellen.

De volgende **tips** zouden je kunnen helpen tijdens de wedstrijd. Doe er je voordeel mee.

- **Volgorde van moeilijkheid.** We hebben getracht de opgaven op volgorde van moeilijkheid te sorteren. Dat wil zeggen, we denken dat er voor de n -de opgave gemiddeld meer punten zullen worden gehaald dan voor de $(n + 1)$ -de opgave. Wil je een goede score behalen, dan kun je dus beter met opgaven met lage nummers beginnen.
- **Lees goed** wat er in de opgave staat. Als je te snel begint, kun je belangrijke informatie over het hoofd zien. Soms staat in de vraagstelling een (verstopte) hint die aangeeft wat je zou kunnen doen. Als je vastloopt, kun je ook besluiten de opgave nog eens goed door te lezen. Zorg ook dat je alle gegeven informatie gebruikt die in de opgave staat en gebruik vooral slechts de informatie die er staat.
- **Wees een team.** Verdeel de opgaven, zodat je geen dubbel werk doet, en vraag elkaar om hulp als je ergens niet uit komt. Bespreek ook vooraf waar ieders kwaliteiten liggen. Bekijk tijdens de wedstrijd elkaars werk. Vaak vallen er nog foutjes uit te halen, en dat kan veel punten schelen.
- **Sprokkel puntjes.** Als je er niet uit komt, schrijf dan op wat je wél hebt bewezen dat relevant kan zijn voor het bewijzen van de betreffende opgave. Als je op de goede weg zat, kun je daar vaak nog deelscores voor krijgen. Sowieso blijkt uit resultaten van voorgaande jaren dat niet vaak voor een opgave alle punten worden gescoord. Als je niet uit een deelopgave komt, mag je het resultaat dat daarin bewezen moet worden, wel gebruiken om de volgende deelopgave op te lossen.
- **Blijf niet vastzitten** in verkeerde gedachten. Het is vaak verstandig een probleem vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Vaak helpt het gegeven termen om te schrijven of gegevens te manipuleren. Als je weinig vooruitgang boekt kun je ook aan een andere opgave gaan werken en iemand anders naar jouw opgave laten kijken.
- **Keer het om.** Probeer te bewijzen dat hetgeen je moet bewijzen niet waar is, en bedenk waarom dit niet lukt. Als je zelfs een tegenspraak kunt vinden, heb je de opgave opgelost.
- **Vind een patroon.** Als je bijvoorbeeld iets moet bewijzen voor alle $n \in \mathbb{N}$, probeer dan kleine gevallen: kijk wat er gebeurt voor $n = 1$ of $n = 2$. Ontdek een patroon en bewijs dat dit patroon doorzet bij grotere getallen.
- **Houd het gezellig.** Het is niet zeker of je er goed van gaat presteren, maar op deze manier heb je in elk geval een leuke dag.

MORE INFORMATION

Klaas Landsman
landsman@math.ru.nl
www.ru.nl/master

Mathematics (MSc)

MASTER'S PROGRAMME

The department

The department

The Mathematics department currently has 14 staff members and a fluctuating population of about 10 PhD students and postdocs. This relatively small size has considerable advantages for students. You will not drown in a large student pool, and contact with staff and fellow students is pleasant and very easy to make. We take a highly personal approach!

The combination of local courses and lectures offered by the national Dutch Master Program in Mathematics guarantees a broad and high-level range of topics to choose from.

Career prospects

Career prospects

Practically all of our graduates find employment immediately after graduating, in a very wide range of jobs including business, academia, government and ICT.

Research topics

Our Master's programme is closely related to the research carried out in the Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics (*IMAPP*), and in addition there are close research ties with the institute for Computing and Information Sciences (*iCIS*) and the Donders Centre for Neuroscience (*DCN*) at the Radboud University. Our research is embedded in the national mathematics clusters DIAMANT (websites.math.leidenuniv.nl/diamant/), GQT (www.gqt.nl) and STAR (www.eurandom.tue.nl/STAR/). As is often the case the research topics are linked to individuals. We invite you to look at the website www.ru.nl/science/math, where you can find more information.

You can choose from the following specializations:

- **Algebra and Logic**

Lattice-ordered algebras, topological dualities, algebraic logic, computer algebra in its many forms, affine algebraic geometry, intuitionistic and constructive mathematics. Furthermore, in collaboration with *iCIS* we offer an exciting interdisciplinary programme in the mathematical foundations of computer science.

- **Mathematical Physics**

Representation theory, symplectic geometry, integrable systems, special functions, and particle physics, topos theory, mathematical foundations of quantum theory, quantum probability, quantum computing, quantum field theory, quantum groups.

- **Applied Stochastics**

Interacting stochastic systems, i.e. systems consisting of a large number of interacting and stochastically evolving components, with applications to statistical physics (gases and liquids), biology (population dynamics) and neuroscience (self-organized criticality in brain activity, random graph theory, cortical networks).

Personal tutor for a tailor-made programme

Our Master's programme offers you considerable freedom to follow your own interests, at least within the range of our expertise. At the beginning of the two-year program, you declare your area of specialization and choose a personal tutor within that area, with whom you decide what your precise research area and package of courses at both the local and the national level will be. In the second year, most of your time will be spent on your MSc dissertation in the research area of your choice. In short, you will be able to develop a tailor-made programme.

1. Natuurlijke sommen

Ronald Meester, Vrije Universiteit, Amsterdam

Beschouw de vergelijking

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n,$$

waarbij n een positief geheel getal is. Hoeveel oplossingen $(x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbb{N}^r$ zijn er van deze vergelijking zodat precies k van deze x_i gelijk zijn aan 0? Bewijs je antwoord.

2. Differentieerbaar en integreerbaar

Stefaan Vaes, Katholieke Universiteit Leuven

(a) **Een schoolse vraag**

1. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Veronderstel dat $f'(x) \neq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Is f noodzakelijk injectief? Bewijs je antwoord.
2. Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$. Veronderstel dat alle partiële afgeleiden van f bestaan. Veronderstel dat voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de matrix

$$\begin{bmatrix} (\partial_1 f_1)(x, y) & (\partial_2 f_1)(x, y) \\ (\partial_1 f_2)(x, y) & (\partial_2 f_2)(x, y) \end{bmatrix}$$

inverteerbaar is. Is f noodzakelijk injectief? Bewijs je antwoord.

(b) **Een vraag die je kort kan oplossen, maar inventiviteit vergt**

Bestaat er een rij van functies $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ die aan de volgende voorwaarden voldoet?

- Voor alle $n \in \mathbb{N}$ is de functie f_n begrensd en Riemann-integreerbaar.
- De rij van integralen $\int_0^1 f_n(x) dx$ convergeert naar 0 als $n \rightarrow \infty$.
- Voor geen enkele $x \in [0, 1]$ convergeert de rij $f_n(x)$ naar 0 als $n \rightarrow \infty$.

Bewijs je antwoord.

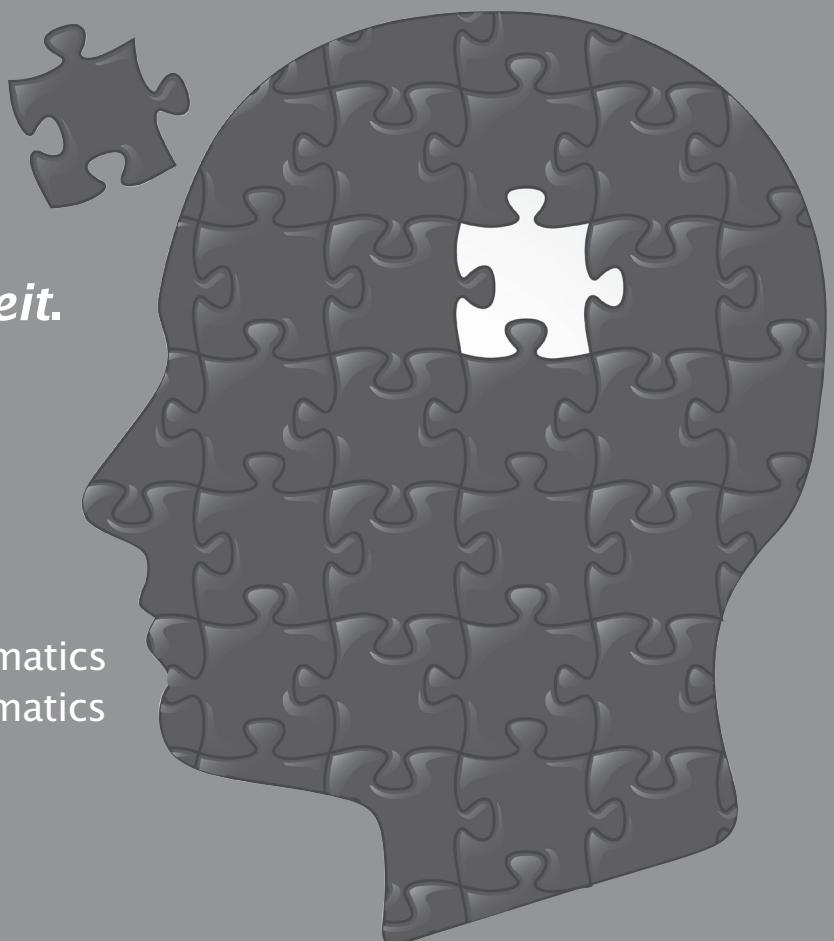
Wat ga jij na je bachelor doen?

Van *het analyseren*
van bedrijfsproblemen
tot *het zoeken naar*
patronen in hersenactiviteit.

Masteropleidingen aan de
Vrije Universiteit Amsterdam:

- Mathematics
- Business Mathematics and Informatics
- Stochastics and Financial Mathematics

www.vu.nl/masteropleidingen



3. Het grootste nulpunt van een geïtereerd polynoom

Walter Van Assche, Katholieke Universiteit Leuven

Beschouw de kwadratische polynoom $T(x) = x^2 - c$, waarbij $c > 0$. We definiëren de n -de iteratie door $T_n(x) = T_{n-1}(T(x))$ voor $n \geq 1$, waarbij $T_0(x) = x$. Merk op dat T_n een polynoom is van graad 2^n . Noem x_n dan het grootste reële nulpunt van T_n . Toon aan dat de rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeert en bepaal de limiet.



make yourmark

Ben jij een adviestalent?

's Werelds grootste multinationals kijken Towers Watson aan om belangrijke business issues voor hen te tackelen. Ontwikkel je talent en begin een uitdagende carrière bij de thought leader in Retirement Solutions, Finance en Human Resources.

werkenbijtowerswatson.nl

QR code met je



TOWERS WATSON

4. In elkaars macht

Sjoerd Boersma, Universiteit Utrecht

Geef alle paren $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ zodanig dat $0 < a < b$ en $a^b = b^a$. Bewijs tevens dat er oneindig veel van dergelijke paren zijn met zowel a als b reële getallen.

DO YOU GRASP WHAT
WE ARE SEEKING?

CAN YOU READ
THIS TAET PULS
UCHNUOPE THE
HIDDEN MESSAGE?
IT COULD BE YOU
TAHT WE ARE
SEARCHING FOR!

NEXT IN-HOUSE DAY, 27TH OF MAY 2011!

Who we are?

We are a dynamic team of traders, IT specialists, and professionals. Who are the best at what we do. We are peer - recognized as Europe's leading ETF market maker, trading on- and off-screen all day to provide the prices on which Investors trade. We train our traders in-house and use custom-built technology, which means our successes are a joint effort from which everyone can profit.

Our culture?

Work hard and play harder. We offer a performance based incentive scheme, training opportunities, luxury lifestyle perks, and an open collegial environment. In addition, we offer the opportunity to work overseas.

Interested?

For more information and in-house days at the Amsterdam headquarters contact Recruitment +31 (0)20 799 6799 or check out www.flowtraders.com.

5. Delen in ringen

Hendrik Lenstra, Universiteit Leiden

Laat A een deelring van een niet noodzakelijk commutatieve ring B zijn, met dezelfde 1. Voor deelverzamelingen S, T van B definiëren we

$$S^{-1} = \{x \in B : \text{voor alle } y \in S \text{ geldt } xy \in A\},$$
$$S \cdot T = \{xy : x \in S, y \in T\}.$$

Bewijs: voor elke deelverzameling S van B is $(S^{-1} \cdot S)^{-1}$ een deelring van B die A omvat.



Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde en iedereen die de wiskunde een warm hart toedraagt.
In 1778 opgericht onder het motto 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskunde-vakvereniging.

Het KWG:

- publiceert voor leden het kwartaalblad Nieuw Archief voor Wiskunde
- publiceert een tweewekelijkse elektronische nieuwsbrief met wiskunde-agenda
- geeft het wiskundetijdschrift voor jongeren Pythagoras uit
- organiseert jaarlijks het Nederlands Mathematisch Congres, het Wintersymposium voor leraren en het Najaarssymposium
- zorgt samen met KWG-sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde dat de jaarlijkse Studiegroep Wiskunde met de Industrie georganiseerd wordt
- sponsort Vierkant voor Wiskunde en Epsilon Uitgaven
- ondersteunt via de NOCW verschillende activiteiten voor jongeren, zoals de Wiskunde Olympiade, Wiskunde A-lympiade, Kangoeroe wedstrijden, Universitaire Olympiade en de Vierkant kampen
- reikt eens per drie jaar de Brouwermedaille uit aan een toonaangevend wiskundige
- onderhoudt een database van Nederlandse wiskundigen op de KWG-website
- verzorgt de Wiskunde PersDienst - een initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en het KWG
- helpt via het project 'nationale PR-medewerker wiskunde' de wiskunde in de media te brengen
- heeft als doel de wiskunde te bevorderen en haar beoefening en toepassingen aan te moedigen
- vertegenwoordigt de Nederlandse wiskundige gemeenschap in binnen- en buitenland.

Lid worden?

Pas afgestudeerden en studenten die net hun propedeuse hebben gehaald, kunnen eenmalig een jaar lang gratis lid worden.
Kijk op www.wiskgenoot.nl of stuur een e-mail aan de ledenadministratie, admin@wiskgenoot.nl

6. Binaire woorden

Frans Keune, Radboud Universiteit Nijmegen

We beschouwen woorden bestaande uit enen en nullen. Het aantal enen minus het aantal nullen in zo'n woord w noteren we als $d(w)$.

Bepaal een formule voor het aantal woorden w van lengte $2n$ (met n een natuurlijk getal) bestaande uit enen en nullen die voldoen aan:

- (1) $|d(v)| \leq 3$ voor alle beginstukken v van w ,
- (2) $d(w) = 0$.



CHOOSE YOUR MASTER IN TWENTE!

MASTER APPLIED MATHEMATICS

TRACKS:

- MATHEMATICAL PHYSICS AND COMPUTATIONAL MECHANICS
- FINANCIAL ENGINEERING
- INDUSTRIAL ENGINEERING AND OPERATIONS RESEARCH
- MATHEMATICS AND APPLICATIONS OF SIGNALS AND SYSTEMS

3TU MASTER SYSTEMS & CONTROL

WWW.GRADUATE.UTWENTE.NL/AM

WWW.GRADUATE.UTWENTE.NL/SC

UNIVERSITEIT TWENTE.

7. Een rationale oplossing

Frans Oort, Universiteit Utrecht

- (a) Geef alle $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ zodanig dat

$$y^2 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

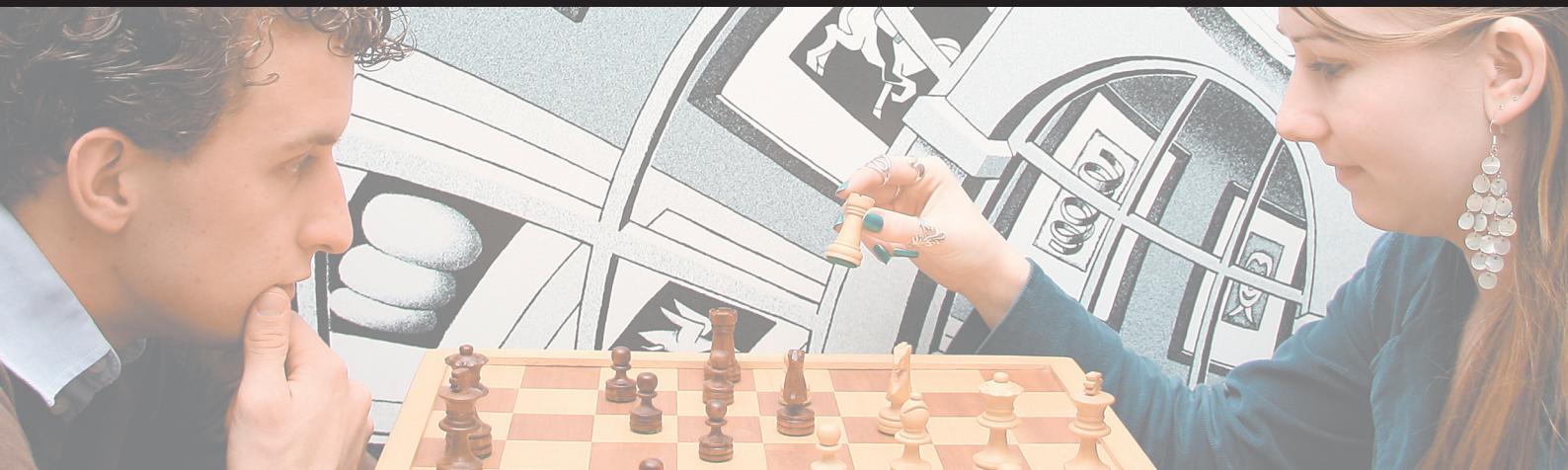
- (b) Bewijs dat er niet een paar $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ bestaat zodanig dat

$$x^3 + y^4 = 2613527.$$



Faculty of Science

Knap staaltje denkwerk



Weet jij al wat je na je bachelor gaat doen? Wil jij...

- ...onderdeel uitmaken van een toonaangevende onderzoeksgroep?
- ...een internationaal netwerk opbouwen, bijvoorbeeld via het 'ALGANT study program'?
- ...kennis maken met verschillende disciplines?
- ...zelf bepalen welke vakken je volgt?

Dan is een wiskunde master aan Universiteit Leiden iets voor jou!

Of je ambitie nu ligt bij een multinational in een internationale omgeving of je verdieping zoekt in een PhD program, in Leiden bieden wij je de mogelijkheid je kennis verder te verdiepen in een persoonlijke en inspirerende omgeving. Kies je programma op maat binnen één van de tracks en na je master in Leiden ligt de wereld aan je voeten!

www.mastersinleiden.nl



Universiteit Leiden

8. Een onorigineel volledig origineel

L.D. Molag, Universiteit Utrecht

Zij U een deelverzameling van \mathbb{C} met $\#U > 1$ en zij P een monisch complex polynoom dat voldoet aan $P^{-1}(U) = U$, maar niet gelijk is aan de identiteit op \mathbb{C} . Toon aan dat voor elke $a \in U$ geldt dat $\sup_{b \in U} |a - b| \geq 1$.

Opmerking: Een polynoom heet monisch als de hoogstegraadscoëfficiënt 1 is.



Aan de UvA maak je werk van je master

WWW.UVA.NL/SCIENCE-MASTERS

**Kies voor één van de wiskundige masters aan de
Universiteit van Amsterdam!**

- Mathematics
- Mathematical Physics
- Stochastics and Financial Mathematics

9. Wandelen over de ribben van een blok

Gert Vegter, Rijksuniversiteit Groningen

- (a) Een lichaamsdiagonaal van een blok in \mathbb{R}^d ligt binnen een bol. Toon aan dat de eindpunten van deze lichaamsdiagonaal verbonden kunnen worden door een pad dat geheel bestaat uit ribben van het blok die binnen de gegeven bol liggen.

Toelichting van de begrippen Een blok in \mathbb{R}^d is het beeld van de eenheids-hyperkubus $[0, 1]^d$ onder een schaling van de vorm $x_1, \dots, x_d \rightarrow (l_1 x_1, \dots, l_d x_d)$ met positieve schaalfactoren l_1, \dots, l_d . De hoekpunten van het blok zijn dus van de vorm (v_1, \dots, v_d) met $v_i = 0$ of $v_i = l_i$. De ribben van het blok zijn de beelden van de ribben van de hyperkubus onder deze schaling en verbinden dus twee hoekpunten die in slechts een coordinaat verschillen. Een lichaamsdiagonaal van het blok is een lijnsegment tussen twee hoekpunten die in alle coordinaten verschillen, dus tussen een hoekpunt (v_1, \dots, v_d) en het tegenoverliggende hoekpunt $(l_1 - v_1, \dots, l_d - v_d)$. Onder een bol verstaan we hier een bol-hyperoppervlak, d.w.z., de verzameling punten met dezelfde positieve afstand tot een gegeven punt (het middelpunt van de bol).

- (b) **Binnen of buiten een boloppervlak?** In \mathbb{R}^d zijn $d + 1$ punten p^0, \dots, p^d gegeven. In cartesische coordinaten worden de punten gegeven door $p^i = (p_1^i, \dots, p_d^i)$. De punten liggen in algemene positie, d.w.z., er is geen hypervlak in \mathbb{R}^d dat alle punten bevat. Toon aan dat een punt $q = (q_1, \dots, q_d)$ binnen de d -sfeer door de gegeven punten ligt d.e.s.d. als $\Delta \cdot \Pi < 0$ waarbij Δ en Π de volgende determinanten zijn:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & p_1^0 & \cdots & p_d^0 & (p_1^0)^2 + \cdots + (p_d^0)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & p_d^d & \cdots & p_d^d & (p_1^d)^2 + \cdots + (p_d^d)^2 \\ 1 & q_1 & \cdots & q_d & (q_1)^2 + \cdots + (q_d)^2 \end{vmatrix}, \quad \Pi = \begin{vmatrix} 1 & p_1^0 & \cdots & p_d^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & p_1^d & \cdots & p_d^d \end{vmatrix}.$$

Rethink your own career path!

Enroll in the Master's program Industrial and Applied Mathematics at TU/e, the Netherlands



Why TU/e?

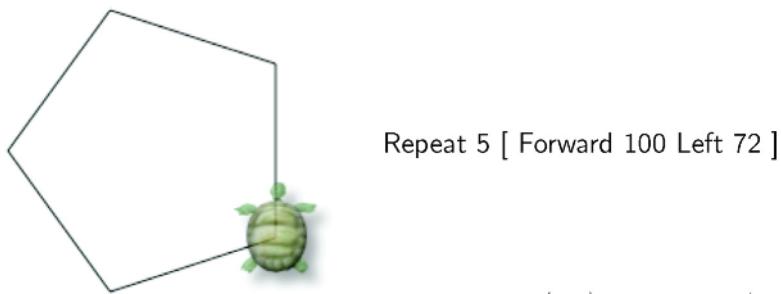
- English programs in:
- Computational Science and Engineering
- Discrete Mathematics and Applications
- Statistics, Probability, and Operations Research
- focus on industrial mathematics
- special Honors Programs
- intensive contacts with industry
- located in a prominent high-tech region
- strong international networks
- high international rankings
- associated with institutes like EURANDOM

More information: www.tue.nl/masterprograms/iam

10. Duizelige schildpadden

Tom Verhoeff, Technische Universiteit Eindhoven

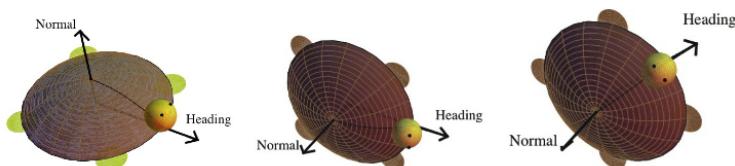
Deze opgave gaat over zogenaamde *turtle graphics*, oftewel schildpad-tekeningen. In twee dimensies houdt dit in dat we een schildpad met behulp van zekere commando's over een vel papier laten lopen, waarbij de schildpad onderweg met een pen een figuur tekent. Figuur 10.1 toont een 2D schildpad-programma dat een regelmatige vijfhoek tekent.



Figuur 10.1: 2D schildpad-programma voor een regelmatige vijfhoek.

We breiden dit uit naar drie dimensies. Het pad wat de schildpad aflegt, zien we dan als een tekening. De schildpad begint in de oorsprong, kijkend langs de positieve x-as en met zijn lichaam evenwijdig aan het xy-vlak (zie figuur 10.2, linkerkant). De schildpad luistert naar de volgende basiscommando's:

- *Move(d)*: de schildpad beweegt afstand d in de huidige richting
- *Turn(ϕ)*: de schildpad beweegt zijn hoofd met de klok mee over een hoek ϕ met als draaiingsas zijn normaalvector (die initieel richting de positieve z-as wijst)
- *Roll(ψ)*: de schildpad rolt zijn lichaam met de klok mee over een hoek ψ met als zijn richtingsvector (die initieel richting de positieve x-as wijst).

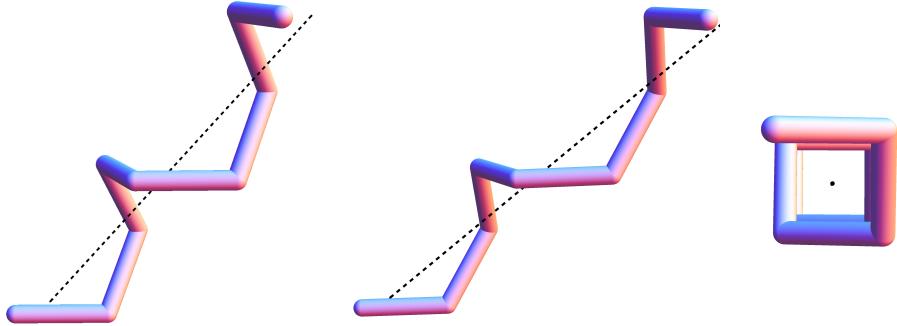


Figuur 10.2: 3D schildpad in beginpositie (links), na $Roll(90^\circ)$ (midden), en na $Roll(90^\circ)$ gevolgd door $Turn(45^\circ)$ (rechts).

Zij nu $H(\psi, \phi)$ het programma gegeven door de oneindige herhaling van

$$Move(1); Roll(\psi); Turn(\phi)$$

waarbij ; staat voor sequentiële compositie; oftewel de commando's worden precies in die volgorde uitgevoerd. In figuur 10.3 staan enkele voorbeelden.



Figuur 10.3: Helices $H(60^\circ, \arccos(1/3))$ (links); $H(\arccos(1/3), 60^\circ)$ (midden); $H(60^\circ, \arccos(1/3))$ gezien langs zijn as

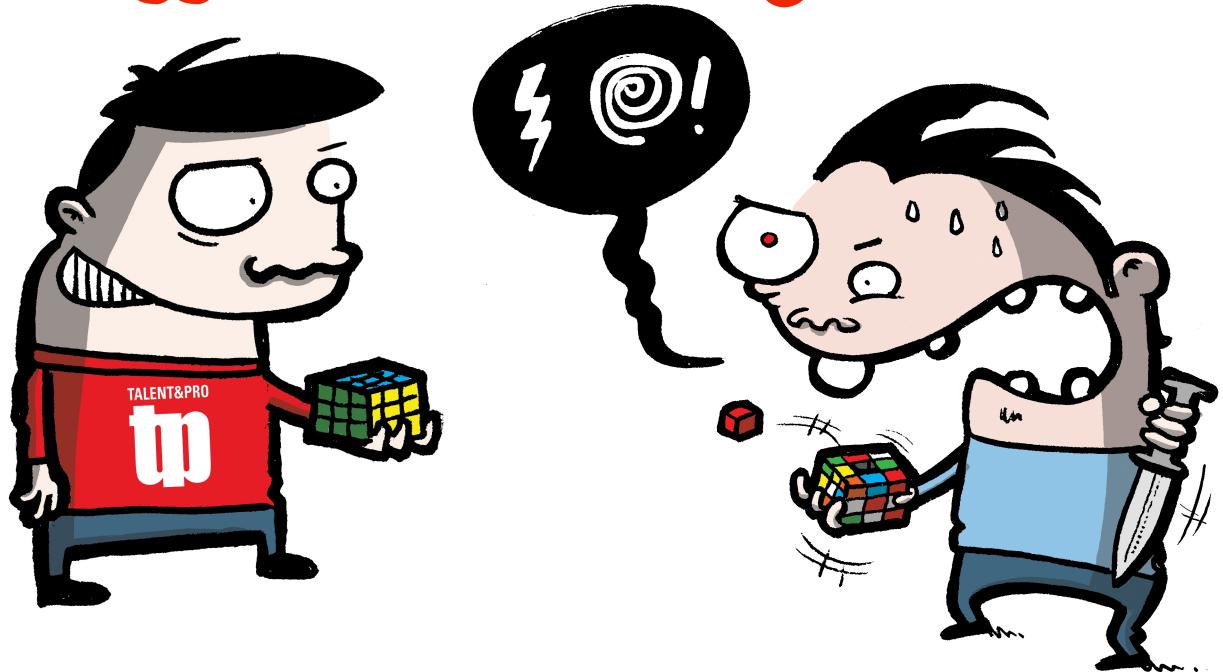
Het is bekend dat het getekende figuur (oftewel het afgelegde pad) een **helix** vormt; dat wil zeggen: er is een lijn m , de **as** van de helix, zodat alle lijnstukken van de figuur dezelfde hoek maken met de as m . Er geldt dan ook dat alle lijnstukken dezelfde afstand hebben tot de as. Het is ook bekend dat de parallelle projectie van $H(\psi, \phi)$ langs deze as een regelmatige veelhoek is (mogelijk oneindig). Zie de rechterkant van figuur 10.3 voor een voorbeeld. Merk op dat de projectie zelfdoorsnijdingen kan bevatten. Al deze feiten mogen zonder bewijs gebruikt worden in het bewijs.

We definiëren nu $\theta(\psi, \phi)$ als de buitenhoek van bovengenoemde veelhoek (de **buitenhoek** van een hoek α is gelijk aan $180^\circ - \alpha$). Bewijs:

$$\theta(\psi, \phi) = \theta(\phi, \psi) \tag{10.1}$$

Dat wil zeggen: de buitenhoek van de projectie is invariant onder het omwisselen van de rolhoek en de draaihoek.

Heb jij wél wiskundig inzicht?!



www.talentomtekiezen.nl

11. Machtige polynomen

Gerhard Woeginger, Technische Universiteit Eindhoven

Decide whether there exist seven real polynomials in variables x, y, z such that the sum of their forth powers equals

$$Q(x, y, z) = (x^2 - 1)^4 + (y^2 - 1)^4 + (z^2 - 1)^4 + \frac{1}{8}(x + 1)^2(y + 1)^2(z + 1)^2$$

Prove your answer.



Bij ORTEC zit je goed!

Bij ORTEC wordt wereldwijd gewerkt aan complexe optimalisatievraagstukken in diverse logistieke sectoren. Onze medewerkers helpen klanten gefundeerde beslissingen te nemen met gebruik van wiskundige modellen en het toepassen van simulatie- en optimalisatie-technieken.

ORTEC is een professionele, jonge organisatie met volop doorgroeimogelijkheden. Tijdens of na je studie kun je bij ons aan de slag. Je wordt direct op projecten ingezet en krijgt veel eigen verantwoordelijkheid. Wij bieden een werkomgeving met voldoende ruimte om je talenten te ontwikkelen binnen jouw interessegebied, zowel nationaal als internationaal.

Spreekt dit je aan en volg je een studie Econometrie, Operationele Research, Informatica of Wiskunde of heb je deze voltooid en heb je affiniteit met statistische modellen en de logistieke of financiële wereld, dan zit je bij ORTEC goed!

Vertel ons hoe jij je talent wilt inzetten voor de verbetering van onze producten en diensten en de verdere internationale groei van ORTEC.

Op onze website www.werkenbijortec.com vind je meer informatie over werken bij ORTEC en een actueel overzicht van vacatures en stage- of afstudeermogelijkheden. Zit jouw ideale functie of onderwerp er niet bij, stuur dan een open sollicitatie.

ORTEC Logistics
Groningenweg 6k
2803 PV Gouda
Tel.: 0182-540 500
recruitment@ortec.com

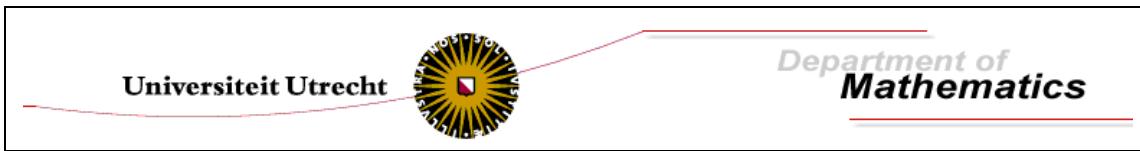
www.werkenbijortec.com

12. Complexe veeltermen

Arno van der Essen, Radboud Universiteit Nijmegen

Zij $P(t)$ een veelterm met complexe coëfficiënten zodat $\int_0^1 P(t)^m dt = 0$ voor alle strikt positieve gehele getallen m . Laat zien dat $P(t) = 0$.

Opmerking: Je mag gebruiken: als een stelletje veeltermen over een algebraisch afgesloten lichaam k geen gemeenschappelijk nulpunt hebben in k^n , dan is 1 bevat in het ideaal voortgebracht door deze veeltermen.



Zeven goede redenen

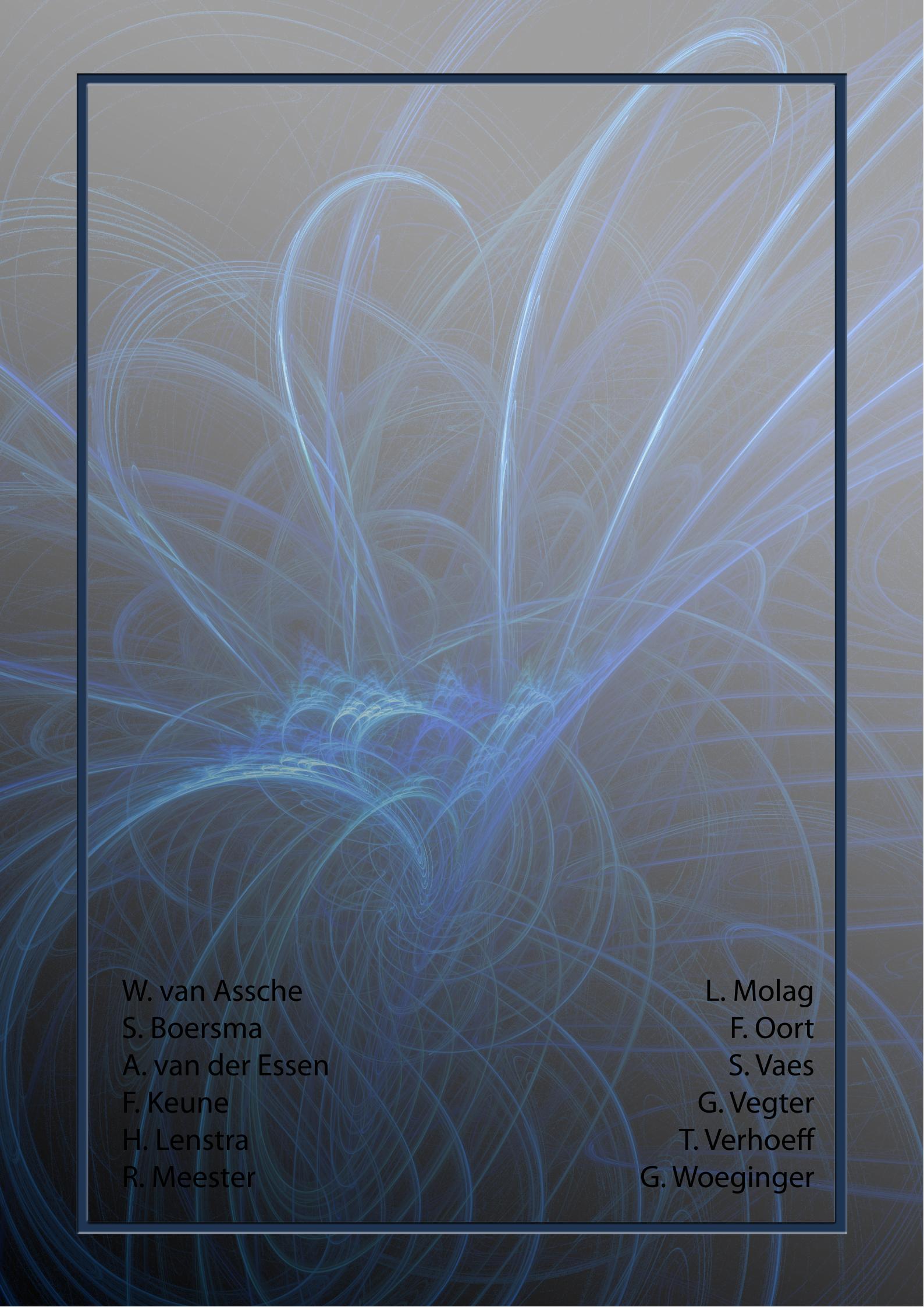
Zeven goede redenen om Wiskunde te studeren in Utrecht:

1. Breedste pakket aan keuzevakken
2. Dubbele majors met Natuurkunde en Informatica
3. Major Wiskunde en toepassingen
4. Aansluiting op masters uit andere vakgebieden
5. Hoog aangeschreven wetenschappelijke staf
6. Goede kans op een promotieplaats na je masters
7. Geschiedenis van de Wiskunde

Meer informatie:

- www.uu.nl/bachelor
- www.uu.nl/master
- Studieadviseur Marian Brands m.m.brands@uu.nl
- Onderwijsmanager Thijs Ruijgrok m.ruijgrok@uu.nl

En succes met de LIMO 2011



A complex, abstract fractal pattern serves as the background for the entire page. It consists of numerous thin, light blue and white lines that curve and twist in a self-similar, recursive manner, creating a sense of depth and motion. The lines are set against a dark, solid background.

W. van Assche
S. Boersma
A. van der Essen
F. Keune
H. Lenstra
R. Meester

L. Molag
F. Oort
S. Vaes
G. Vegter
T. Verhoeff
G. Woeginger