

# LIMOO 2010

## OPGAVEN



**ORTEC** optiver



KNAW



THOMAS STIELTJES INSTITUTE  
FOR MATHEMATICS



Universiteit Utrecht



Radboud Universiteit Nijmegen



Universiteit Leiden



UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM



vrije Universiteit amsterdam

UNIVERSITEIT TWENTE.

**TU Delft** Delft  
University of  
Technology

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT  
**LEUVEN**

CAN YOU  
READ THE  
TEXT ON  
THIS SCREEN

WHILST  
SIMULTANEOUSLY  
LOOKING  
AT THIS ONE

IN ADDITION TO  
KEEPING  
AN EYE ON  
THIS SCREEN

AND WATCHING  
THIS ONE  
AS WELL?

WE ARE SCOUTING FOR **BRILLIANT** MINDS ONLY  
START YOUR CAREER IN **TRADING** → APPLY AT [WWW.OPTIVER.COM](http://WWW.OPTIVER.COM)

optiver ▲

---

## Inhoudsopgave

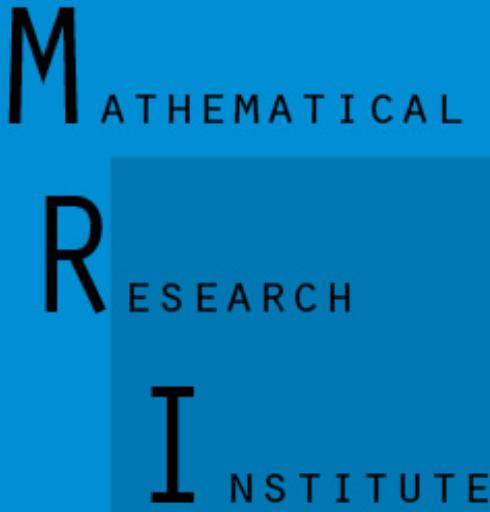
---

1.	De griep versus de Q-koorts	4
2.	De stelling van Sylvester-Gallai	6
3.	Een Islamitisch bewijs van de formules van Heron en Brahmagupta	8
4.	Geen differentiaalvergelijking	12
5.	Dubbele machten	14
6.	Van cirkels naar hyperbolen onder behoud van oppervlakte	16
7.	Een bijna-injectieve functie	20
8.	AlleMachtig!	22
9.	Bijzondere polynomen	24
10.	Nilpotente matrix	26
11.	Muntje Over	28

## Colofon

Dit opgavenboekje is een uitgave van de  
LIMO-commissie 2010.  
e-mail: limo0910@a-eskwadraat.nl  
internet: www.limo.a-eskwadraat.nl

---



**MRI** is one of the research schools in mathematics in the Netherlands. It is a cooperation of the universities of Groningen, Nijmegen, Utrecht and Twente. The school supports research activities, with special focus on (pre-)graduate students.

### **MRI Master Class**

In the one-year-long Master Class, a current topic is studied intensively and profoundly at an advanced level. The Master Class can form a significant contribution to a PhD programme or can form a preparatory year for a PhD. The programme runs from September through June and includes two full days of lectures and seminars per week and individual work on a test problem. The emphasis is on independent, individual effort, but contact with lecturers is personal and intensive. Lecturers give feedback using the work turned in by participants, as well as extensive exercise material. Regular evaluation and testing guarantees the quality of the programme. 90% of the participants finish the class with successful results and get a certificate.

#### 2010-2011 Master Class **Moduli Spaces**

[web.science.uu.nl/mri/documents/brochure2010\\_11.pdf](http://web.science.uu.nl/mri/documents/brochure2010_11.pdf)

Any mathematics student can follow individual courses from this top level programme.

Tijdens de wedstrijd gelden de volgende **regels**:

- Maak iedere opgave op een apart vel, zet het nummer van de opgave en de naam van je team op elk vel;
- Hulpmiddelen zoals boeken, (grafische) rekenmachines en laptops zijn niet toegestaan;
- Er mag tijdens de wedstrijd alleen gecommuniceerd worden met teamgenoten en met de organisatie;
- Tijdens de wedstrijd wordt koffie, thee en fris rondgedeeld. Dat is het moment om vragen te stellen.

De volgende **tips** zouden je kunnen helpen tijdens de wedstrijd. Doe er je voordeel mee.

- **Volgorde van moeilijkheid.** We hebben getracht de opgaven op volgorde van moeilijkheid te sorteren. Dat wil zeggen, we denken dat er voor de  $n$ -de opgave gemiddeld meer punten zullen worden gehaald dan voor de  $(n + 1)$ -de opgave. Wil je een goede score behalen, dan kun je dus beter met opgaven met lage nummers beginnen.
- **Lees goed** wat er in de opgave staat. Als je te snel begint, kun je belangrijke informatie over het hoofd zien. Soms staat in de vraagstelling een (verstopte) hint die aangeeft wat je zou kunnen doen. Als je vastloopt, kun je ook besluiten de opgave nog eens goed door te lezen. Zorg ook dat je alle gegeven informatie gebruikt die in de opgave staat en gebruik vooral slechts de informatie die er staat.
- **Wees een team.** Verdeel de opgaven, zodat je geen dubbel werk doet, en vraag elkaar om hulp als je ergens niet uit komt. Bespreek ook vooraf waar ieders kwaliteiten liggen. Bekijk tijdens de wedstrijd elkaars werk. Vaak vallen er nog foutjes uit te halen, en dat kan veel punten schelen.
- **Sprokkel puntjes.** Als je er niet uit komt, schrijf dan op wat je wél hebt bewezen dat relevant kan zijn voor het bewijzen van de betreffende opgave. Als je op de goede weg zat, kun je daar vaak nog deelscores voor krijgen. Sowieso blijkt uit resultaten van voorgaande jaren dat niet vaak voor een opgave alle punten worden gescoord. Als je niet uit een deelopgave komt, mag je het resultaat dat daarin bewezen moet worden, wel gebruiken om de volgende deelopgave op te lossen.
- **Blijf niet vastzitten** in verkeerde gedachten. Het is vaak verstandig een probleem vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Vaak helpt het gegeven termen om te schrijven of gegevens te manipuleren. Als je weinig vooruitgang boekt kun je ook aan een andere opgave gaan werken en iemand anders naar jouw opgave laten kijken.
- **Keer het om.** Probeer te bewijzen dat hetgeen je moet bewijzen niet waar is, en bedenk waarom dit niet lukt. Als je zelfs een tegenspraak kunt vinden, heb je de opgave opgelost.
- **Vind een patroon.** Als je bijvoorbeeld iets moet bewijzen voor alle  $n \in \mathbb{N}$ , probeer dan kleine gevallen: kijk wat er gebeurt voor  $n = 1$  of  $n = 2$ . Ontdek een patroon en bewijs dat dit patroon doorzet bij grotere getallen.
- **Houd het gezellig.** Het is niet zeker of je er goed van gaat presteren, maar op deze manier heb je in elk geval een leuke dag.

---

## 1. De griep versus de Q-koorts

*G.W.Q. Puite, Technische Universiteit Eindhoven*

---

In deze opgave vergelijken we twee ziektes met elkaar: de *griep* en de *Q-koorts*. Zij  $p$  een reëel getal waarvoor geldt  $0 < p < 1$ , en zij  $q = 1 - p$ . Bij de griep gaan we ervan uit dat de kans dat een zieke na 1 dag weer beter is gelijk is aan  $p$ , en dat elke dag opnieuw. Anders gezegd, gegeven dat iemand na  $n$  of meer dagen pas beter is, is de kans dat hij daadwerkelijk na  $n$  dagen beter is, gelijk aan  $p$ , terwijl  $q$  de kans is dat hij na  $n+1$  of meer dagen pas beter is.

De Q-koorts lijkt op de griep, behalve dat je alleen op kwadratische dagen (na aanvang van de ziekte) beter kunt worden (vandaar ook die Q, van *quadratic*). De kans dat iemand die net is ziek geworden na 1 dag weer beter is, is nog steeds  $p$ . Maar na precies 2 of 3 dagen beter worden is onmogelijk. Dus  $q$  is nu de kans dat iemand na 4 of meer dagen pas beter is. En meer algemeen, gegeven dat iemand na  $n^2$  of meer dagen pas beter is, is de kans dat hij daadwerkelijk na  $n^2$  dagen beter is, gelijk aan  $p$ , terwijl  $q$  de kans is dat hij na  $(n+1)^2$  of meer dagen pas beter is.

Veronderstel dat mensen met de Q-koorts gemiddeld 10 keer zo lang ziek zijn als mensen met de griep. Hoeveel dagen duurt de griep dan gemiddeld?



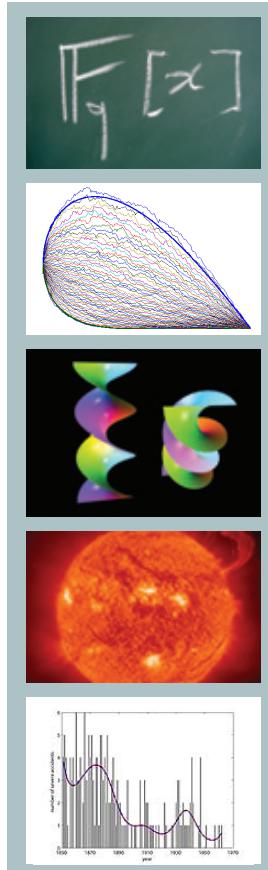
De K.U.Leuven, gesticht in 1425, is de oudste universiteit van de lage landen. Meer dan 4.500 onderzoekers zijn er actief in wetenschappelijk onderzoek en onderwijs. Op 1 februari 2010 telde de K.U.Leuven in totaal 37.021 ingeschreven studenten. Van de ingeschreven studenten heeft ongeveer 86% de Belgische nationaliteit, terwijl 7% een andere EU-nationaliteit heeft en nog eens 7% van buiten de EU komt. Dit maakt van de gezellige provinciehoofdstad Leuven een bruisende studentenstad met een rijk sociocultureel aanbod.

## Onderzoek aan het Departement Wiskunde

Het onderzoek aan het departement Wiskunde is georganiseerd op het niveau van de onderzoeksafdelingen:

- Afdeling Algebra: het onderzoek situeert zich in de algebraïsche meetkunde, getaltheorie, algebraïsche topologie en groepentheorie.
- Afdeling Analyse: in deze afdeling doet men onderzoek in de klassieke analyse (reële en complexe analyse) en in de functionaalanalyse.
- Afdeling Meetkunde: het onderzoek is geцentreerd rond differentiaalmeetkunde, in het bijzonder Riemannse en pseudo-Riemannse meetkunde en deelvariëteiten.
- Afdeling Plasma-astrofysica: het onderzoeksgebied van deze afdeling is de wiskunde van vloeistoffen en plasma's, het voornaamste studieobject is de zon. Dit onderzoek is gesitueerd in de toegepaste en computationele wiskunde.
- Afdeling Statistiek: deze afdeling is actief in de wiskundige statistiek, in het bijzonder de theorie van extreme waarden, robuuste statistiek en niet-parametrische methoden. Ook stochastische processen en financiële wiskunde komen aan bod. De afdeling is bovendien ook actief in toegepaste consultatie voor bedrijven.

Meer info op <http://wis.kuleuven.be>



---

## 2. De stelling van Sylvester-Gallai

*F. Dillen, Katholieke Universiteit Leuven*

---

In 1893 formuleerde J. Sylvester het volgende probleem:

**Stelling:** *Stel dat  $\mathcal{P}$  een eindige verzameling punten in het (reëel) Euclidisch vlak  $\mathbb{E}^2$  is, waarvoor geldt dat elke rechte die twee punten van  $\mathcal{P}$  bevat, ook door een derde punt van  $\mathcal{P}$  gaat. Toon aan dat alle punten van  $\mathcal{P}$  op dezelfde rechte liggen.*

Deze stelling is bekend onder de naam “de stelling van Sylvester-Gallai”. Bewijs deze stelling.

De stelling van Sylvester-Gallai impliceert onmiddellijk de volgende bekende stelling van Erdös-de Bruijn.

**Gevolg:** *Stel dat  $\mathcal{P}$  een verzameling van  $n \geq 3$  punten in het Euclidisch vlak  $\mathbb{E}^2$  is, die niet allemaal op dezelfde rechte liggen. Dan zijn er tenminste  $n$  rechten van  $\mathbb{E}^2$  die elk door tenminste 2 punten van  $\mathcal{P}$  gaan.*

Bewijs dit gevolg.

# Realize your master plan

Universiteit Utrecht



[Faculty of Science  
Mathematics]

**Master's programmes**

**Mathematical Sciences**

**Scientific Computing**

**Stochastics &**

**Financial Mathematics**

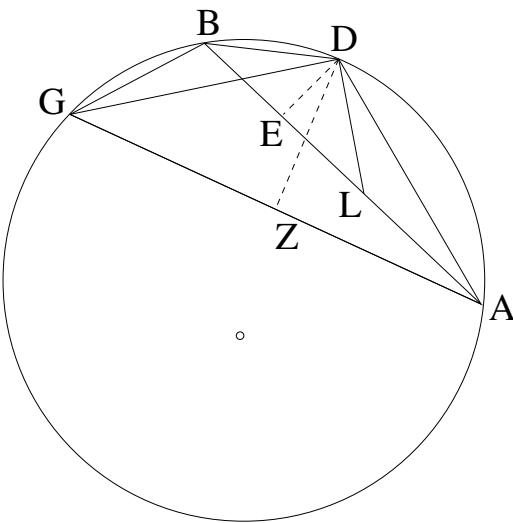
**[www.math.uu.nl](http://www.math.uu.nl)**

---

### 3. Een Islamitisch bewijs van de formules van Heron en Brahmagupta

*J.P. Hogendijk, Universiteit Leiden en Universiteit Utrecht*

---



We bekijken een driehoek  $ABG$  met ongelijke zijden, zodat  $AG > AB > BG$ , en de omgeschreven cirkel.  $D$  is het middelpunt van boog  $ABG$  (zie figuur). Kies  $L$  op  $AB$  zodat  $AL = BG$  en trek  $DL$ . We noteren de oppervlakte van een driehoek  $PQR$  als  $\Delta PQR$ .

**1.** Laat zien:

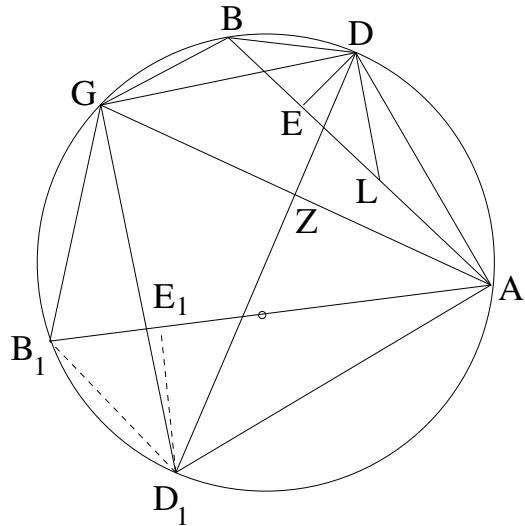
- (i) driehoek  $DBG$  is congruent met driehoek  $DLA$
- (ii)  $\Delta ADG = \Delta ABG + \Delta LDB$
- (iii) Driehoeken  $ADG$  en  $LDB$  zijn gelijkvormig.

**Hint:** als punten  $P, Q, R$  op een cirkel liggen dan is hoek  $PQR$  de helft van de boog waarop hij staat.

**2.** Stel  $E$  is het midden van  $BL$  en  $Z$  het midden van  $AG$ . Merk op dat de driehoeken  $GDZ$  en  $BDE$  ook gelijkvormig zijn. Laat zien:

- (i)  $DZ^2 : 2\Delta GDZ = 2\Delta GDZ : GZ^2$
- (ii)  $(DZ^2 - DE^2) : \Delta ABG = \Delta ABG : (GZ^2 - BE^2)$ . [Bewijs dit precies!]
- (iii)  $\Delta ABG = \sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c))}$ .

Hierbij zijn  $a, b, c$  de lengtes van de zijden van de driehoek  $ABG$  en  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ . Hint:  $DZ^2 + AZ^2 = DE^2 + AE^2$ . Deze methode was al bekend uit de Griekse oudheid, en is vermoedelijk ontdekt door Archimedes (ca. 250 v.C.). De bewijsmethode in deze opgave is tiende-eeuws Islamitisch. **De opgave gaat door op de volgende pagina!**

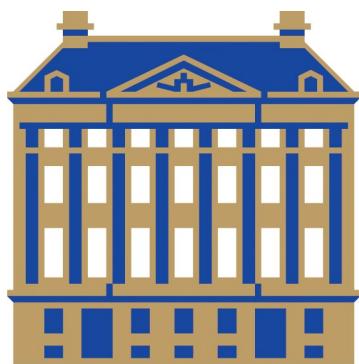


**3.** Bekijk nu een cyclische vierhoek met zijden  $ABGB_1$ . Cyclisch betekent dat de veelhoek kan worden ingeschreven in een cirkel. We noteren de oppervlakte van deze veelhoek als  $[ABGB_1]$ . We proberen het bewijs hierboven te generaliseren.  $D_1$  is het midden van boog  $AB_1G$  en  $D_1E_1$  is de loodlijn uit  $D_1$  op  $AB_1$ .

Laat zien:

- (i) De vier driehoeken  $BDE$ ,  $GDZ$ ,  $D_1GZ$  en  $D_1B_1E_1$  zijn alle gelijkvormig.
- (ii)  $(AE^2 - B_1E_1^2) : [ABGB_1] = [ABGB_1] : (AE_1^2 - BE^2)$ .
- (iii) De oppervlakte van een cyclische vierhoek met zijden  $a, b, c, d$  en halve omtrek  $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$  is gelijk aan  $\sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$ .

Deze regel wordt in verzen voor algemene vierhoeken gegeven door de Indiase wiskundige Brahmagupta (ca. 625). De regel is in de tiende eeuw voor cyclische vierhoeken bewezen door de Iraanse wiskundige Abū ‘Abdallāh al-Shānnī. Zijn bewijsidee is als in deze opgave. De regel is niet geldig voor vierhoeken die niet cyclisch zijn.



K N A W

# Een niet te kraken digitaal slot?

**Explore your mind,  
be THE INNOVATOR.**

Faculteit Wiskunde en Informatica

*Kies voor de masteropleiding Industrial and Applied Mathematics.*

[www.theinnovator.nl](http://www.theinnovator.nl)



Technische Universiteit  
Eindhoven  
University of Technology

Where innovation starts

---

#### 4. Geen differentiaalvergelijking

*G.J. Woeginger, Technische Universiteit Eindhoven*

---

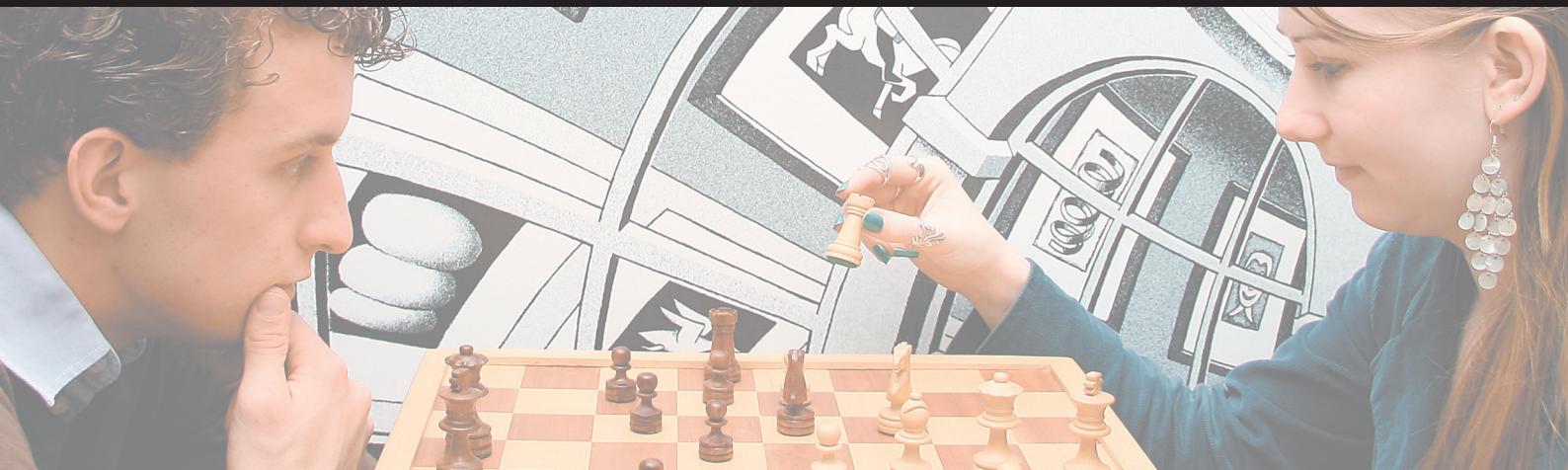
Zij  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  een differentieerbare functie. Bewijs dat er een  $x \in \mathbb{R}$  bestaat met

$$f'(x) = \left( \frac{2}{1-x} - \frac{2}{x} \right) f(x).$$



# Faculty of Science

# Knap staaltje denkwerk



Weet jij al wat je na je bachelor gaat doen? Wil jij...

- ...onderdeel uitmaken van een toonaangevende onderzoeksgroep?
- ...een internationaal netwerk opbouwen, bijvoorbeeld via het 'ALGANT study program'?
- ...kennis maken met verschillende disciplines?
- ...zelf bepalen welke vakken je volgt?

**Dan is een wiskunde master aan Universiteit Leiden iets voor jou!**

Of je ambitie nu ligt bij een multinational in een internationale omgeving of je verdieping zoekt in een PhD program, in Leiden bieden wij je de mogelijkheid je kennis verder te verdiepen in een persoonlijke en inspirerende omgeving. Kies je programma op maat binnen één van de tracks en na je master in Leiden ligt de wereld aan je voeten!

**[www.mastersinleiden.nl](http://www.mastersinleiden.nl)**



Universiteit Leiden

---

## 5. Dubbele machten

*H.W. Lenstra, Universiteit Leiden*

---

Laten  $u$  en  $v$  twee onderling ondeelbare positieve gehele getallen zijn. Bewijs dat er gehele getallen  $a$  en  $b$  groter dan 1 zijn, en positieve gehele getallen  $n$  en  $m$ , zodanig dat geldt

$$a^{n^u} = b^{m^v} \text{ en } a^u = b^v.$$



## Koninklijk Wiskundig Genootschap

**Het Koninklijk Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde en iedereen die de wiskunde een warm hart toedraagt.**

**In 1778 opgericht onder het motto 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskunde-vakvereniging.**

### **Het KWG:**

- publiceert voor leden het kwartaalblad Nieuw Archief voor Wiskunde
- publiceert een tweewekelijkse elektronische nieuwsbrief met wiskunde-agenda
- geeft het wiskundetijdschrift voor jongeren Pythagoras uit
- organiseert jaarlijks het Nederlands Mathematisch Congres, het Wintersymposium voor leraren en het Najaarssymposium
- zorgt samen met KWG-sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde dat de jaarlijkse Studiegroep Wiskunde met de Industrie georganiseerd wordt
- sponsort Vierkant voor Wiskunde en Epsilon Uitgaven
- ondersteunt via de NOCW verschillende activiteiten voor jongeren, zoals de Wiskunde Olympiade, Wiskunde A-lympiade, Kangoeroe wedstrijden, Universitaire Olympiade en de Vierkant kampen
- reikt eens per drie jaar de Brouwermedaille uit aan een toonaangevend wiskundige
- onderhoudt een database van Nederlandse wiskundigen op de KWG-website
- verzorgt de Wiskunde PersDienst - een initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en het KWG
- helpt via het project 'nationale PR-medewerker wiskunde' de wiskunde in de media te brengen
- heeft als doel de wiskunde te bevorderen en haar beoefening en toepassingen aan te moedigen
- vertegenwoordigt de Nederlandse wiskundige gemeenschap in binnen- en buitenland.

### **Lid worden?**

**Pas afgestudeerden en studenten die net hun propedeuse hebben gehaald, kunnen eenmalig een jaar lang gratis lid worden.**

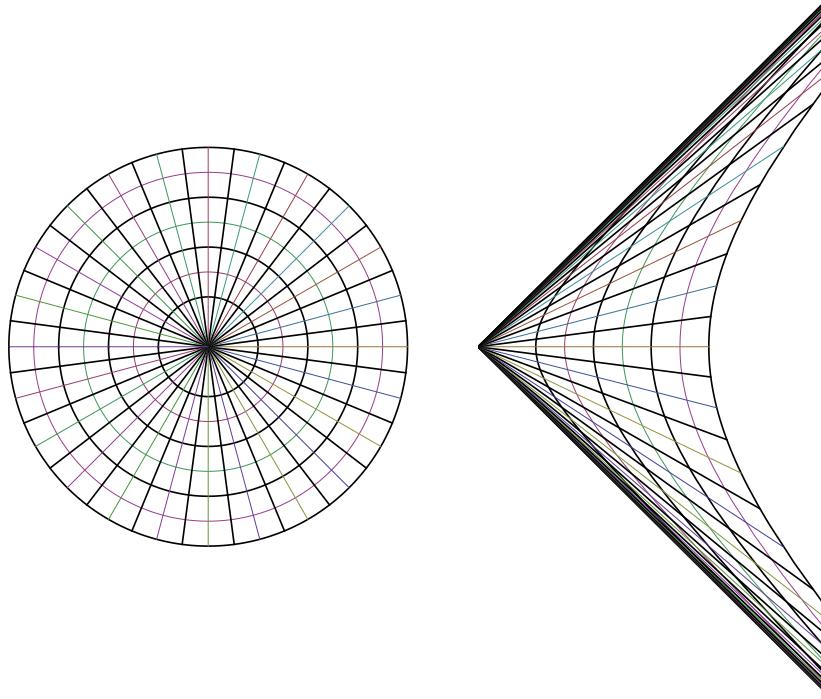
**Kijk op [www.wiskgenoot.nl](http://www.wiskgenoot.nl) of stuur een e-mail aan de ledenadministratie, [admin@wiskgenoot.nl](mailto:admin@wiskgenoot.nl)**

---

## 6. Van cirkels naar hyperbolen onder behoud van oppervlakte

*J.A.C. Kolk, Universiteit Utrecht*

---



Figuur 6.1: Beeld onder oppervlaktebehoudend diffeomorfisme  $\Phi$ .

We herinneren aan de hyperbolische functies  $\cosh$ ,  $\sinh$  en  $\tanh$ , die voor  $\alpha \in \mathbb{R}$  en  $e = 2,718\,281\dots$  worden gegeven door

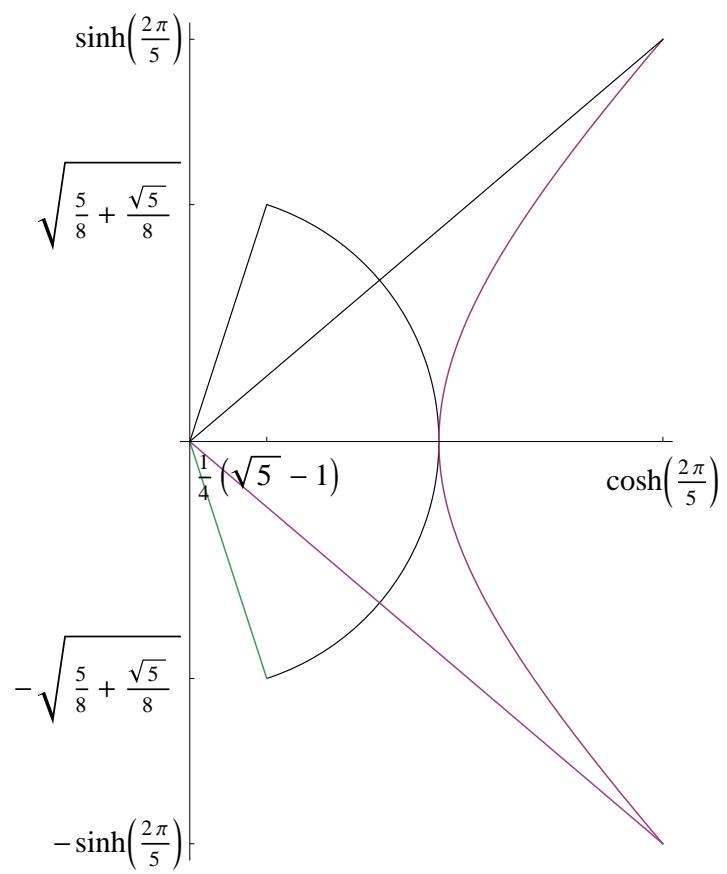
$$\cosh \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}, \quad \sinh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}, \quad \tanh = \frac{\sinh}{\cosh}.$$

I.h.b. is  $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$  een monotoon strikt stijgende functie. Introduceer ook

$$\begin{aligned} C_{r,\alpha} &= \{ \rho(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \rho < r, |t| < \alpha \} & (0 < r, 0 < \alpha \leq \pi), \\ H_{r,\alpha} &= \{ \rho(\cosh t, \sinh t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \rho < r, |t| < \alpha \} & (0 < r, 0 < \alpha). \end{aligned}$$

Bewijs het bestaan van open deelverzamelingen  $U$  en  $V$  van  $\mathbb{R}^2$  en van een afbeelding  $\Phi : U \rightarrow V$  die voldoet aan  $\Phi(C_{r,\alpha}) = H_{r,\alpha}$ , voor alle  $0 < r$  en  $0 < \alpha \leq \pi$ , terwijl  $\Phi$  ook een oppervlaktebehoudend diffeomorfisme is (zie Fig. 6.1 en 6.2). Geef een beschrijving van  $U$  en  $V$  in termen van Cartesische coördinaten.

Hierbij heet  $\Phi$  een diffeomorfisme indien  $\Phi$  bijectief en continu differentieerbaar is en de inverse  $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$  ook continu differentieerbaar is. Verder heet  $\Phi$  oppervlaktebehoudend indien voor elke Riemannintegreerbare open deelverzameling  $A$  van  $U$  geldt dat  $A$  en  $\Phi(A)$  dezelfde oppervlakte hebben.



Figuur 6.2: Sectoren  $C_{1, \frac{2\pi}{5}}$  en  $H_{1, \frac{2\pi}{5}}$  met gelijke oppervlakte  $\frac{2\pi}{5}$ .

# Thomas Stieltjes Institute for Mathematics

---

The Thomas Stieltjes Institute for Mathematics is a Dutch research institute in mathematics and carries out research in four main areas of fundamental and applied mathematics:

- Algebra & Geometry
- Analysis
- Stochastics
- Operation Research

In the Institute participate:

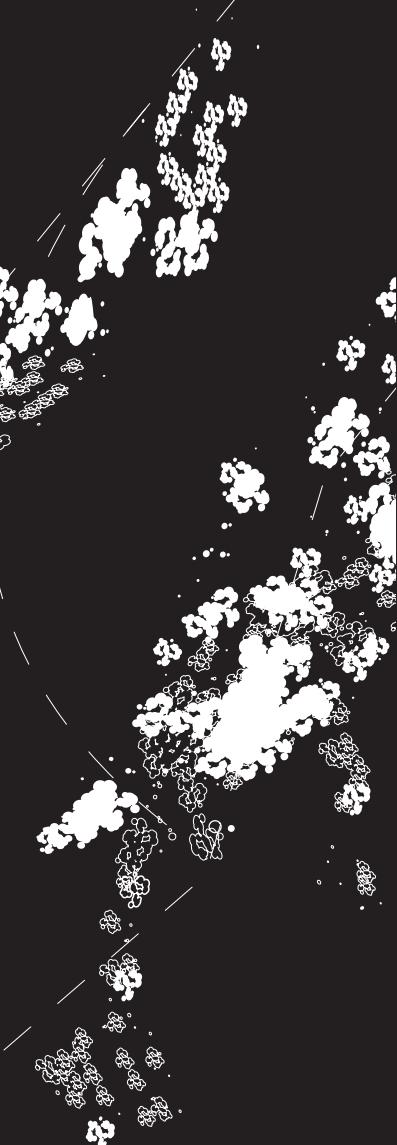
- University of Amsterdam (UvA)
- Free University Amsterdam (VUA)
- Delft University of Technology (TUD)
- Eindhoven University of Technology (TUE)
- University of Leiden (UL)
- Tilburg University (UvT)

The Institute collaborates with

- the Centre for Mathematics and Computer Science (CWI) in Amsterdam.
- the European Institute for the Study of Randomness (EURANDOM) in Eindhoven.

For master- and Ph.D.-students the Stieltjes Institute organises each year a Stieltjesweek about a central theme in mathematics. Faculty members of the different universities present the lectures about such a new theme. Each Stieltjes phd-student receives a contribution of 250 euro in the printing costs of the thesis.

Each year a Stieltjes Prize is presented for the best Stieltjes thesis and the winner receives an amount of 1200 euro.

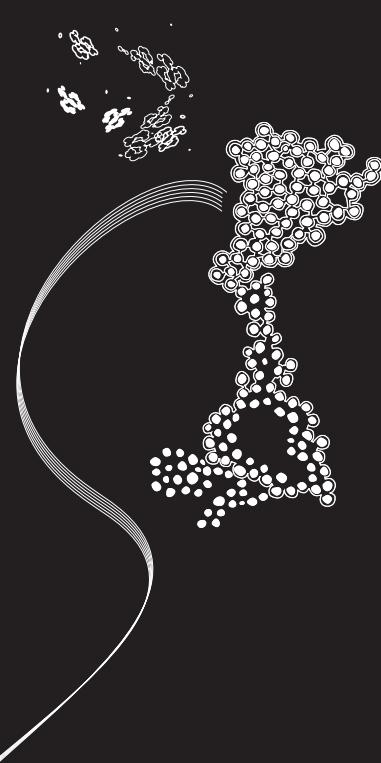


# CHOOSE YOUR MASTER IN TWENTE!

## MASTER APPLIED MATHEMATICS

### TRACKS:

- MATHEMATICAL PHYSICS AND COMPUTATIONAL MECHANICS
- FINANCIAL ENGINEERING
- INDUSTRIAL ENGINEERING AND OPERATIONS RESEARCH
- SYSTEMS AND CONTROL



## 3TU MASTER SYSTEMS & CONTROL

[WWW.GRADUATE.UTWENTE.NL/AM](http://WWW.GRADUATE.UTWENTE.NL/AM)

[WWW.GRADUATE.UTWENTE.NL/SC](http://WWW.GRADUATE.UTWENTE.NL/SC)

UNIVERSITEIT TWENTE.

---

## 7. Een bijna-injectieve functie

B. van Dalen, Universiteit Leiden

---

Zij de functie  $f : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$  gedefinieerd door

$$f(x, y, z) = (x^2 + y, y^2 + z, z^2 + x).$$

Voor een drietal  $(a, b, c)$  van gehele getallen zeggen we dat  $f$  injectief is op  $(a, b, c)$  als er hoogstens één  $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$  is zodat  $f(x, y, z) = (a, b, c)$ .

1. Bewijs dat als  $a, b$  en  $c$  drie verschillende gehele getallen zijn,  $f$  injectief is op  $(a, b, c)$ .
2. Vind oneindig veel drietallen  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$  zodat  $a, b$  en  $c$  niet alledrie gelijk zijn en  $f$  niet injectief is op  $(a, b, c)$ .



# Mathematics MSc programmes

- Mathematical Physics
- Mathematics
- Stochastics and Financial Mathematics



---

## 8. AlleMachtig!

*L.D. Molag, Universiteit Utrecht*

---

Zij  $n$  een natuurlijk getal groter dan één. Bepaal alle  $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  met de eigenschap dat er voor alle natuurlijke getallen  $k$  met  $1 \leq k < n$  geldt dat  $z_1^k + z_2^k + \dots + z_n^k = 0$ .

**Nota Bene:** *In je uitwerking hoef je geen onderscheid te maken tussen vectoren die na verwisseling van componenten gelijk zijn aan elkaar.*

# You can't change the world in an hour. But you can start here.

[www.master.tudelft.nl](http://www.master.tudelft.nl)



## Faculty of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science MSc Programmes

### Applied Mathematics

### Computer Engineering

### Computer Science

- Information Architecture

### Electrical Engineering

- Electrical Power Engineering
- Microelectronics
- Telecommunications

### Embedded Systems

### Media and Knowledge Engineering

- Bioinformatics

---

## 9. Bijzondere polynomen

*A. Smeets, Katholieke Universiteit Leuven*

---

Bestaat er een polynoom  $p(X) \in \mathbb{Z}[X]$  zodanig dat

$$p\left(a - \frac{1}{a}\right) = a^n - \frac{1}{a^n} \quad \text{voor alle } a \in \mathbb{R} \text{ met } a \neq 0$$

- (a) wanneer  $n = 2009$ ?
- (b) wanneer  $n = 2010$ ?

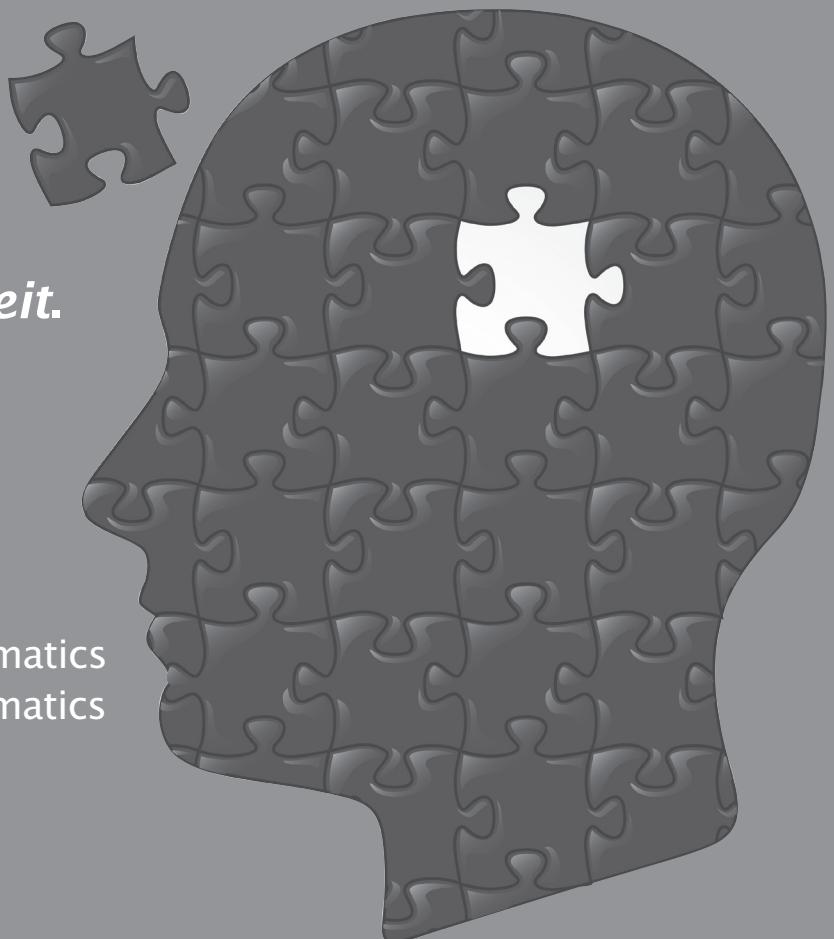
# Wat ga jij na je bachelor doen?

Van *het analyseren*  
*van bedrijfsproblemen*  
tot *het zoeken naar*  
*patronen in hersenactiviteit.*

Masteropleidingen aan de  
Vrije Universiteit Amsterdam:

- Mathematics
- Business Mathematics and Informatics
- Stochastics and Financial Mathematics

[www.vu.nl/masteropleidingen](http://www.vu.nl/masteropleidingen)



---

## 10. Nilpotente Matrix

*J. Top, Rijksuniversiteit Groningen*

---

Gegeven is een positief geheel getal  $m$ , en  $n = 2^m - 1$ . De  $n \times n$  matrix  $A = (a_{i,j})$  over  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  is gegeven door  $a_{i,j} = 1$  als  $|i - j| = 1$  en  $a_{i,j} = 0$  anders. Laat zien dat  $A$  nilpotent is.

**Opmerking:** Een matrix  $A$  heet nilpotent als een macht van  $A$  gelijk is aan de nulmatrix.

## MORE INFORMATION

Klaas Landsman  
landsman@math.ru.nl  
[www.ru.nl/master](http://www.ru.nl/master)

# Mathematics (MSc)

## MASTER'S PROGRAMME

### The department

#### The department

The Mathematics department currently has 14 staff members and a fluctuating population of about 10 PhD students and postdocs. This relatively small size has considerable advantages for students. You will not drown in a large student pool, and contact with staff and fellow students is pleasant and very easy to make. We take a highly personal approach!

The combination of local courses and lectures offered by the national Dutch Master Program in Mathematics guarantees a broad and high-level range of topics to choose from.

### Career prospects

#### Career prospects

Practically all of our graduates find employment immediately after graduating, in a very wide range of jobs including business, academia, government and ICT.

### Research topics

Our Master's programme is closely related to the research carried out in the Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics (*IMAPP*), and in addition there are close research ties with the institute for Computing and Information Sciences (*iCIS*) and the Donders Centre for Neuroscience (*DCN*) at the Radboud University. Our research is embedded in the national mathematics clusters DIAMANT ([websites.math.leidenuniv.nl/diamant/](http://websites.math.leidenuniv.nl/diamant/)), GQT ([www.gqt.nl](http://www.gqt.nl)) and STAR ([www.eurandom.tue.nl/STAR/](http://www.eurandom.tue.nl/STAR/)). As is often the case the research topics are linked to individuals. We invite you to look at the website [www.ru.nl/science/math](http://www.ru.nl/science/math), where you can find more information.

You can choose from the following specializations:

- **Algebra and Logic**

Lattice-ordered algebras, topological dualities, algebraic logic, computer algebra in its many forms, affine algebraic geometry, intuitionistic and constructive mathematics. Furthermore, in collaboration with *iCIS* we offer an exciting interdisciplinary programme in the mathematical foundations of computer science.

- **Mathematical Physics**

Representation theory, symplectic geometry, integrable systems, special functions, and particle physics, topos theory, mathematical foundations of quantum theory, quantum probability, quantum computing, quantum field theory, quantum groups.

- **Applied Stochastics**

Interacting stochastic systems, i.e. systems consisting of a large number of interacting and stochastically evolving components, with applications to statistical physics (gases and liquids), biology (population dynamics) and neuroscience (self-organized criticality in brain activity, random graph theory, cortical networks).

### Personal tutor for a tailor-made programme

Our Master's programme offers you considerable freedom to follow your own interests, at least within the range of our expertise. At the beginning of the two-year program, you declare your area of specialization and choose a personal tutor within that area, with whom you decide what your precise research area and package of courses at both the local and the national level will be. In the second year, most of your time will be spent on your MSc dissertation in the research area of your choice. In short, you will be able to develop a tailor-made programme.

---

## 11. Muntje Over

*S. Boersma, Universiteit Utrecht*

---

We leggen  $n \geq 3$  munten in een cirkel. We zeggen dat een munt  $x$  *direct rechts* van een andere munt  $y$  ligt als munt  $x$  de eerste munt is die je tegenkomt als je vanaf munt  $y$  tegen de klok in gaat. We voeren het volgende proces uit:

Pak een munt en spring ermee over de munt die er direct rechts van ligt, op de munt die daar direct rechts van ligt. Dit noemen we een 'zet'. Voer nu een zet uit met de munt die direct rechts ligt van de nieuw gevormde stapel. Blijf op deze manier doorgaan met zetten doen, waarbij je stapels net zo behandelt als munten, totdat er slechts twee stapels over zijn en het proces is afgelopen.

Definieer  $a_n$  als het aantal munten dat op de (of een) laagste stapel ligt aan het einde van bovenstaand proces, wanneer er begonnen is met een cirkel van  $n$  munten ( $n \geq 3$ ).

1. Bewijs dat  $a_{n+1} = a_n$  of  $a_{n+1} = a_n + 1$  voor alle  $n \geq 3$ .
2. Bewijs dat  $\{a_n | n \geq 3\} = \mathbb{N}$ .



# Bij ORTEC zit je goed!

Bij ORTEC wordt wereldwijd gewerkt aan complexe optimalisatievraagstukken in diverse logistieke en financiële sectoren. Onze medewerkers helpen klanten gefundeerde beslissingen te nemen met gebruik van wiskundige modellen en het toepassen van simulatie- en optimalisatietechnieken.

ORTEC is een professionele, jonge organisatie met volop doorgroeimogelijkheden. Tijdens of na je studie kun je bij ons aan de slag. Je wordt direct op projecten ingezet en krijgt veel eigen verantwoordelijkheid. Wij bieden een werkomgeving met voldoende ruimte om je talenten te ontwikkelen binnen jouw interessegebied, zowel nationaal als internationaal.

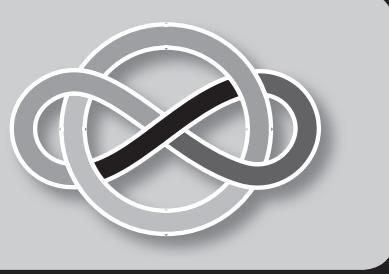
Spreekt dit je aan en volg je een studie Econometrie, Operationele Research, Informatica of Wiskunde of heb je deze voltooid en heb je affiniteit met statistische modellen en de logistieke of financiële wereld, dan zit je bij ORTEC goed!

Vertel ons hoe jij je talent wilt inzetten voor de verbetering van onze producten en diensten en de verdere internationale groei van ORTEC.

Op onze website [www.werkenbijortec.com](http://www.werkenbijortec.com) vind je meer informatie over werken bij ORTEC en een actueel overzicht van vacatures en stage- of afstudeermogelijkheden. Zit jouw ideale functie of onderwerp er niet bij, stuur dan een open sollicitatie.

- ORTEC Logistics  
Groningenweg 6k  
2803 PV Gouda  
Tel.: 0182-540 500  
[recruitment@ortec.com](mailto:recruitment@ortec.com)

- ORTEC Finance  
Max Euwelaan 78  
3062 MA Rotterdam  
Tel.: 010-498 66 66  
[hr@ortec-finance.com](mailto:hr@ortec-finance.com)



## Internationale Wiskunde Olympiade 2011 in Nederland

De Internationale Wiskunde Olympiade is een prestigieuze wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren. Het is de oudste en grootste van de wetenschapsolympiades die internationaal worden georganiseerd. De 52e Internationale Wiskunde Olympiade zal van 12 tot 24 juli in Amsterdam worden gehouden. In totaal worden ongeveer 600 deelnemers uit meer dan 100 landen verwacht (en daarnaast nog een paar honderd begeleiders). De wedstrijd bestaat uit het oplossen van zes pittige wiskundeopgaven verdeeld over twee wedstrijddagen.

# Vrijwilliger zijn bij het grootste internationale Wiskunde-evenement?

## Word gids of wedstrijdbegeleider bij de International Mathematical Olympiad in 2011

### Vrijwilligers nodig

Rond de wedstrijd worden excursies en activiteiten voor de internationale groep deelnemers georganiseerd. Ook is er een officiële opening- en sluitingsceremonie. De deelnemers zijn negen dagen in Nederland en worden vanaf hun aankomst tot vertrek begeleid door een gids van het organiserende land. Naast de in totaal 1.000 buitenlandse gasten nemen er ook zo'n 300 vrijwilligers aan het evenement deel, die ervoor zorgen dat alles goed loopt. Dit zal een onvergetelijke ervaring zijn. Wil jij ook je handen uit je mouwen steken in 2011?

Er zijn allerlei taken die door vrijwilligers tijdens de IMO worden verricht.

- De gidsen begeleiden elk een team van zes deelnemers uit één land en helpen hen met praktische zaken. Voor deze functie zijn we vooral op zoek naar studenten die hun buitenlandse talen goed spreken.
- De wedstrijdbegeleiders zorgen dat de wedstrijd vlekkeloos verloopt. Voor deze functie zijn we vooral op zoek naar docenten.
- De crewleden regelen alles op de accommodaties.
- De coördinatoren kijken het werk van de deelnemers na en stellen in overleg met de teamleiders de scores vast.

**Meer informatie? Aanmelden voor een van de functies?  
Kijk op [www.imo2011.nl](http://www.imo2011.nl).**

