



# Antwoorden 2008

Deloitte.



Universiteit Leiden

FACULTEIT DER NATUURWETENSCHAPPEN,  
WISKUNDE EN INFORMATICA



All you need is LUFI!



Centraal Bureau voor de Statistiek

**TOPdesk**  
[www.topdesk.nl/werk](http://www.topdesk.nl/werk)

**TU Delft**

TALENT&PRO



# Master Mathematics

Het Mathematisch Instituut streeft naar excellentie in onderzoek én onderwijs.

Als student maak je deel uit van een van de toonaangevende onderzoeksgroepen van het instituut, met persoonlijke en informele begeleiding van de staf.

Zo maken studenten en docenten samen onze opleiding, gedreven door hun interesse, expertise en goede contacten in de wetenschappelijke wereld en het bedrijfsleven.

Voor een Master Mathematics is Leiden een uitstekende keuze!

De Universiteit Leiden biedt vijf mastertracks aan binnen de Master Mathematics:

**Algebra, Geometry and Number Theory**

**Applied Mathematics**

**Mathematics and Science Based Business**

**Mathematics and Education**

**Mathematics and Communication**

Een internationale of interdisciplinaire invulling, bijvoorbeeld met natuurkunde, astronomie of levenswetenschappen, kun je in overleg realiseren.

Meer weten?

[voorlichting@math.leidenuniv.nl](mailto:voorlichting@math.leidenuniv.nl)



Universiteit Leiden

[www.mastersinleiden.nl](http://www.mastersinleiden.nl)

Universiteit Leiden. Universiteit om te ontdekken.

# 1 Dobbelen & Legen zonder morsen

*Prof.dr. J.M.A.M. van Neerven, TU Delft*

## Dobbelen

Nee. Stel dat het kon. De som der ogen is een van de elf getallen  $n = 2, \dots, 12$ , en iedere  $n$  heeft gelijke kans  $1/11$ . Zij  $p_1$  de kans dat de eerste dobbelsteen op een  $i$  valt, en  $q_j$  de kans dat de tweede dobbelsteen op een  $j$  valt. Dan geldt

$$p_1 q_1 = p_6 q_6 = \frac{1}{11}.$$

Ook is de kans op  $n = 7$  minstens  $p_1 q_6 + p_6 q_1$ , hetgeen de ongelijkheid

$$p_1 q_6 + p_6 q_1 \leq \frac{1}{11}$$

oplevert. Combinatie van deze gegevens leidt tot de tegenspraak

$$\frac{1}{11} \geq p_1 q_6 + p_6 q_1 = \frac{p_1}{11 p_6} + \frac{p_6}{11 p_1} = \frac{1}{11} \left( \frac{p_1}{p_6} + \frac{p_6}{p_1} \right) \geq \frac{2}{11},$$

waarbij de laatste ongelijkheid volgt uit de ongelijkheid  $x + 1/x \geq 2$ , geldig voor alle  $x > 0$ .

## Legen zonder morsen

Noem de glazen respectievelijk  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . We mogen aannemen dat  $0 < a \leq b \leq c$ . Allereerst merken we op dat het genoeg is om aan te tonen dat we kunnen bereiken dat één der glazen op een zeker moment strikt minder dan  $a$  ml bevat (want dan itereren we de procedure en komen vanzelf bij 0 uit). Zij  $r$  de rest bij deling van  $b$  door  $a$ , zodat  $b = qa + r$  met gehele getallen  $q, r$  met  $0 \leq r < a$ . We zullen aantonen dat  $qa$  ml van  $B$  naar  $A$  geschenken kunnen worden; er blijft dan  $r < a$  ml over in  $B$ .

Als  $q = 2^k - 1$  voor een of andere integer  $k$ , dan verdubbelen we  $k$  maal de inhoud van  $A$  met behulp van  $B$ . We hebben dan  $a + 2a + \dots + 2^{k-1}a = qa$  ml overgegoten, zoals verlangd.

Als  $q$  niet van deze vorm is, dan gieten we steeds vanuit  $B$  of  $C$  naar  $A$ . We nemen de binaire representatie van  $q$ , dus  $q = \sum_{i=0}^n q_i 2^i$  met de  $q_i$  gelijk aan 0 of 1, en  $q_n = 1$  (zodat  $q \geq 2^n$  en  $b \geq qa \geq 2^n a$ ). Als  $q_i = 0$ , verdubbel dan de inhoud van  $A$  vanuit  $C$ ; als  $q_i = 1$ , verdubbel dan de inhoud van  $A$  vanuit  $B$ . Na de  $i$ -de beurt bevat  $A$  precies  $2^i a$  ml. Op deze wijze gieten we in totaal  $\sum_{i=0}^n q_i 2^i a = qa$  ml over van  $B$  naar  $A$ . Merk op dat dit inderdaad kan, want  $qa \leq b$ .

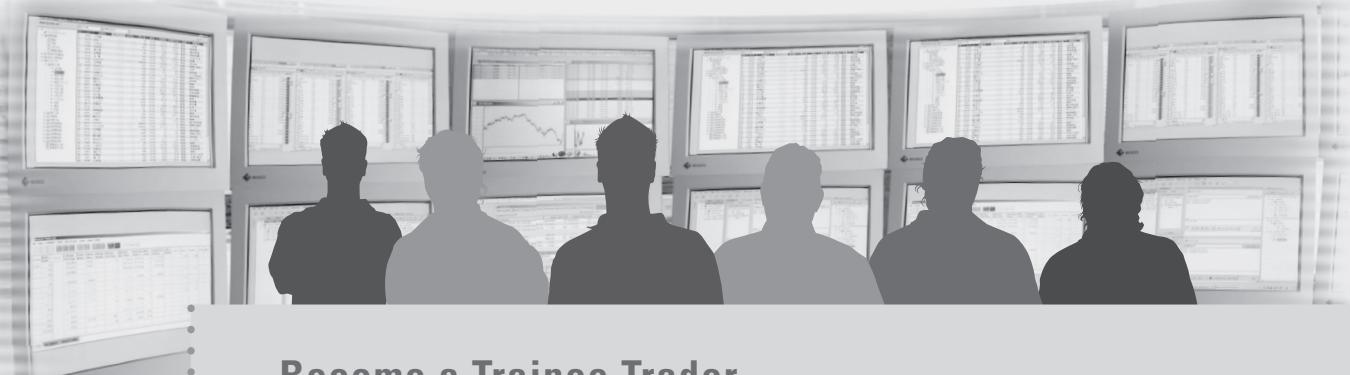
Resteert ons te bewijzen dat er ook genoeg vloeistof in  $C$  zit voor deze procedure. Als we in de  $(i + 1)$ -e beurt vanuit  $C$  schenken, dan is er in de  $i$  beurten daarvóór in totaal al  $(2^i - 1)a$  ml naar  $A$  overgeschenken en bevat  $A$  dus  $2^i a \leq 2^{n-1}a$  ml (want  $i + 1 \leq n$ ). In  $C$  zit dan nog minstens  $c - (2^i - 1)a \geq b - (2^i - 1)a \geq (2^n - 2^i + 1)a \geq (2^{n-1} + 1)a$ , genoeg voor een volgende beurt vanuit  $C$  (de laatst mogelijke beurt vanuit  $C$  is beurt  $n - 1$ ).

*Bron:* Beide opgaven staan in Béla Bollobás, “The Art of Mathematics”, Cambridge 2006



## Trading On The Next Level

**Saen Options** is a mid-size independent trading company headquartered in the centre of Amsterdam. We trade options and equities on most of the major financial markets in the world. Our employees have academic backgrounds in a variety of fields and are trained to further specialize in trading, research and/or software engineering. Within Saen we highly value personal development, which is based on the employee's unique combination of knowledge, capabilities and interests. Consider an environment where your decisions have direct impact on financial markets and where drive, discipline, creativity, teamwork and perseverance are recognized, appreciated and rewarded.



### Become a Trainee Trader

You will receive an intensive training in option theory. Within a couple of weeks you have to be able to put the theory into practice. Once you start trading you will be coached and monitored closely. It is important that you are able to focus on the markets but also perform research in order to maximize your profits and to discover new trading opportunities.

**Is this your Profile** \_Strong academic background (preferably quantitative, economics or computer science) \_Highly interest in financial markets \_Good analytical skills \_Drive and capacity to quickly master the option theory \_Interest in working in a multidisciplinary environment \_Programming skills

**and are these your Characteristics** \_Good communicator \_Result driven \_Urge to be in control \_Self-confidence in taking decisions \_Quick learner \_Winner's mentality

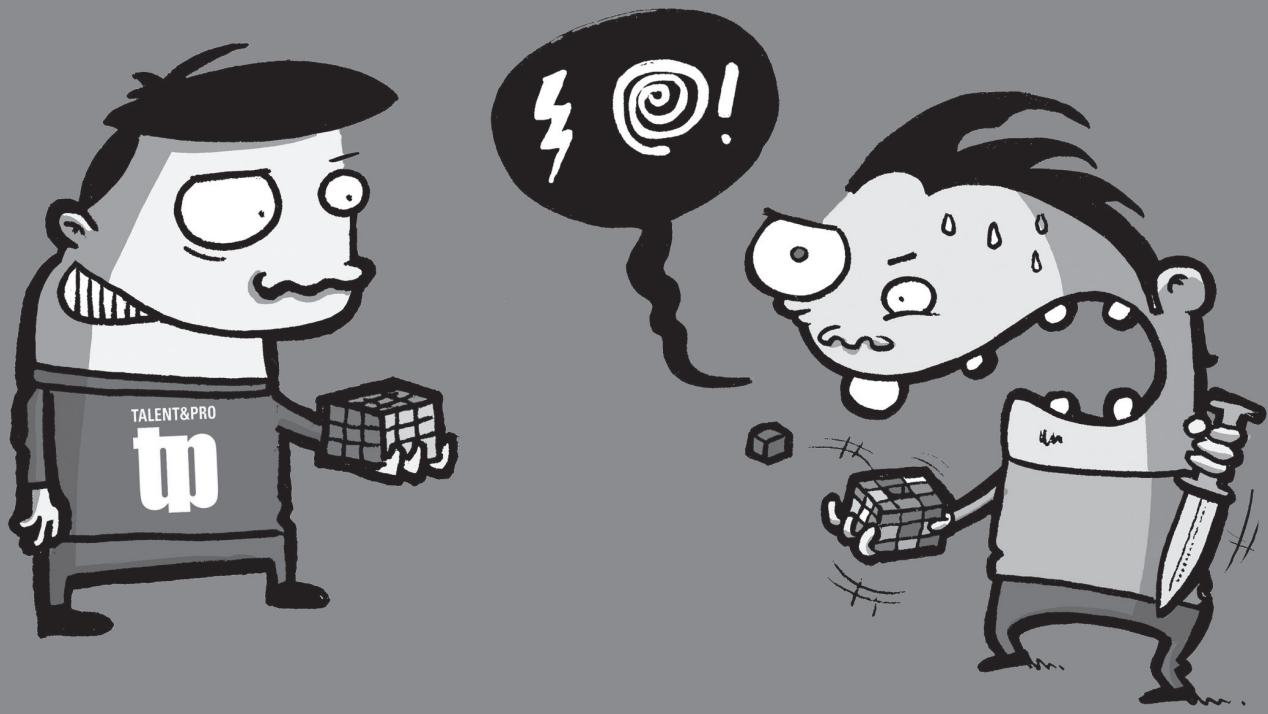
**then** please send your resume to Sabine Vioen at [career@saen.nl](mailto:career@saen.nl)

Check our website [www.saen.nl](http://www.saen.nl) for more information about our company.

## 2 Percolatieroosters

*Prof.dr. R.W.J. Meester, Vrije Universiteit Amsterdam*

- a) Het is eenvoudig in te zien dat er ofwel binnen de rechthoek een verbinding van links naar rechts in het gewone rooster is, ofwel een verbinding van boven naar beneden in de bijbehorende rechthoek van het duale rooster, maar niet beide - zie de rechter figuur. Verder hebben deze twee gebeurtenissen dezelfde kans, en concluderen we dus dat de kans wel  $1/2$  moet zijn. Dit beantwoordt a).
- b) Voor b) doen we iets dergelijks. Allereerst kan er een directe verbinding zijn tussen de genoemde punten - dit gebeurt met kans  $1/2$ . Als er geen directe verbinding is, dan kijken we naar enerzijds  $(0, 0)$  en  $(1, 0)$  in het gewone rooster, en anderzijds naar  $(1/2, -1/2)$  en  $(1/2, 1/2)$  in het duale rooster. Als we de bestaande verbinding tussen  $(1/2, -1/2)$  en  $(1/2, 1/2)$  even negeren, dan volgt uit eenzelfde redenering als bij a) dat ofwel  $(0, 0)$  en  $(1, 0)$  in het oorspronkelijke rooster met elkaar verbonden zijn, ofwel  $(1/2, -1/2)$  en  $(1/2, 1/2)$  in het duale rooster, maar niet allebei. Kortom, de kans dat  $(0, 0)$  en  $(1, 0)$  ‘buitenom’ met elkaar verbonden zijn is  $1/2$ . De gevraagde kans is dus  $1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1/2 = 3/4$ , waarbij de eerste  $1/2$  slaat op de kans dat ze rechtsstreeks verbonden zijn, etcetera. Merk tenslotte op dat we gebruik hebben gemaakt van het feit dat er geen oneindige clusters zijn - hierdoor weten we zeker dat een van de twee paren met elkaar verbonden is (ga dit na!).



## Talent om te kiezen

E-mail: [recruitment@talent-pro.com](mailto:recruitment@talent-pro.com)

Tel: 033-7999022

Web: [www.talentomtekiezen.nl](http://www.talentomtekiezen.nl)

TALENT&PRO



### 3 Eén van de twaalf!

*Prof.dr.ir. H.C.A. van Tilborg, TU Eindhoven*

Iedere rij van  $H_{3,12}$  bevat evenveel 1-en als  $-1$ -en, anders geeft de balans geen evenwicht aan als alle ballen hetzelfde gewicht hebben. We merken ook op dat er  $3^3 = 27$  mogelijke weeguitkomsten zijn en dat er  $1 + 12 \times 2 = 25$  mogelijke gewichtstoekenningen over de ballen zijn (allemaal van hetzelfde gewicht of bal  $B_i$  is zwaarder dan wel lichter,  $1 \leq i \leq 12$ ). Iedere gewichtstoekenning kan dus nog een eigen uitkomstrijtje van de drie wegingen hebben.

- a) Als een rij in  $H_{3,12}$  5 enen heeft en dus ook 5 min-enen, dan moet je bij een niet- evenwichtuitkomst nog onderscheid kunnen maken tussen 10 mogelijkheden (in een groep van 5 zit een zwaardere of in de andere groep zit een lichtere) met behulp van de twee overgebleven wegingen. Maar 2 wegingen leiden slechts tot  $3 \times 3 = 9$  mogelijke antwoorden. Dit lukt dus niet altijd (en zeker niet bij 6 enen in een rij). Als een rij in  $H_{3,12}$  3 enen heeft en dus ook 3 min-enen, dan moet je bij een evenwicht- uitkomst nog uit  $1 + 2 \times 6 = 13$  mogelijkheden kiezen (allen gelijk of een van de 6 is zwaarder of lichter). Maar 2 wegingen leiden slechts tot  $3 \times 3 = 9$  mogelijke antwoorden. Dit lukt dus niet altijd (en zeker niet bij < 3 enen in een rij). Iedere rij telt dus vier enen, vier min-enen en vier nullen.
- b) Als twee kolommen hetzelfde zijn, kun je nooit een onderscheid maken tussen de overeenkomstige ballen. Als een kolom gelijk is aan min de andere, dan kun je geen onderscheid maken tussen de ene bal die te zwaar is of de andere die te licht is. Elk tweetal kolommen moet dus lineair onafhankelijk zijn.
- c) We beginnen met een  $3 \times 13$  matrix waarin elk tweetal kolommen lineair onafhankelijk is over  $\mathbb{Z}_3 = \{-1, 0, 1\}$  (dit is het maximale aantal kolommen met deze eigenschap).

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & -1 & 0 & +1 & -1 & 0 & +1 & -1 & 0 & +1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Het is nu heel gemakkelijk om enige kolommen met  $-1$  te vermenigvuldigen en een geschikte kolom weg te laten om tot een juiste  $H_{3,12}$

te komen. Bijvoorbeeld, als je kolommen 3, 4, 6, 10, 12, 13 met  $-1$  vermenigvuldigt, krijg je

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & 0 & -1 & -1 & 0 & +1 & +1 & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}.$$

Laat nu kolom 9 weg en je hebt

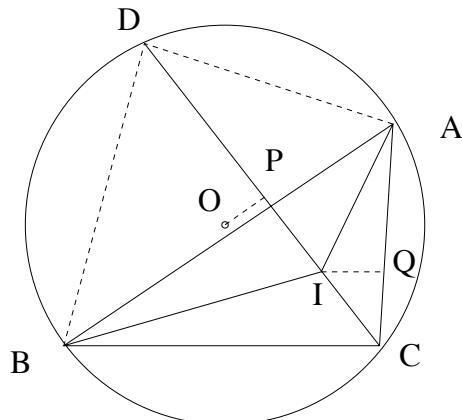
$$H_{3,12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & 0 & -1 & -1 & 0 & +1 & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

die inderdaad de eigenschap heeft dat alle kolommen paarsgewijs onafhankelijk zijn en dat rijsommen nul zijn.

Als je de uitkomsten van de drie wegingen als kolom opschrijft, krijg je de nul-kolom als alle ballen gelijk zijn, kolom  $i$  als de  $i$ -de bal zwaarder is en min kolom  $i$  als de  $i$ -de bal lichter is.

## 4 Hollandsche glorie

*Prof.dr. J.P. Hogendijk, Universiteit Utrecht & Universiteit Leiden*



### Ingeschreven cirkel

Er geldt inderdaad wel zo'n formule. Dit is enigszins verbazend, omdat  $R$ ,  $r$  en  $d$  alledrie van drie onafhankelijke parameters afhangen (de zijden  $a$ ,  $b$  en  $c$  van de driehoek). Daardoor is het a priori niet duidelijk dat  $d$  al bepaald is als alleen  $R$  en  $r$  bekend zijn.

De correcte formule is  $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ . Aan de gelijkzijdige driehoek kun je al zien dat De Geler's formule fout is, want daarvoor geldt  $d = 0$  en  $R > r$ . De formule  $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$  kun je vinden door rekenen met coördinaten, maar er zijn ook leuke synthetische bewijssjes, bijvoorbeeld het volgende (ontleend aan H. Dörrie, *100 great problems of Elementary Mathematics and their solution*, no. 39): ABC is een driehoek en  $O$  is het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Het middelpunt van de ingeschreven cirkel is  $I$  (de ingeschreven cirkel zelf niet getekend). Dan is  $I$  het snijpunt van de bissectrices van de hoeken  $A, B, C$  van de driehoek. We bekijken nu het product  $CI \cdot ID$  op twee manieren.

Eerste manier: Stel  $P$  is het midden van  $CD$ . Dan is hoek  $OPC$  recht wegens symmetrie.  $CI \cdot ID = (CP - PI) \cdot (CP + PI) = CP^2 - PI^2 = (CP^2 + PO^2) - (PI^2 + PO^2) = CO^2 - IO^2 = R^2 - d^2$ .

Tweede manier: We gebruiken de eigenschap van de cirkel: een hoek is gelijk aan de helft van de boog waarop hij staat. Stel  $\gamma = \angle ACB$ . Je kunt nu een driehoek maken (niet getekend in de figuur) met hoekpunten  $D, A$  en  $M$  waarbij  $DM$  middellijn van de omgeschreven cirkel is; in deze driehoek is  $\angle A = 90^\circ$  en dus  $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{DA}{DM}$ , dus  $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{DA}{2R}$ . Verder geldt (eigenschap van de cirkel)  $\angle DAB = \angle DCB = \frac{1}{2}\gamma$ , en verder is ook  $\angle DIA = \angle IAC + \angle ICA = \angle IAC + \frac{1}{2}\gamma = \angle IAB + \angle DAB$  (want  $AI$  is

$DA = DB$ ). En dus  $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{DI}{2R}$ . Als we  $IQ$  loodrecht op  $AC$  trekken is  $IQ = r$  en dus ook  $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{r}{CI}$ . Conclusie  $\frac{DI}{2R} = \frac{r}{CI}$  dus  $CI \cdot ID = 2Rr$ . Nu volgt  $R^2 - d^2 = 2Rr$ .



Delft University of Technology

## 5 Geordende verzamelingen uit $\mathbb{N}$

dr. K.P. Hart, TU Delft & Universiteit Leiden

- a) Kijk eerst naar de aftelbare verzameling  $\mathbb{Q}$  van rationale getallen en definieer voor  $x \in \mathbb{R}$  de verzameling  $A_x = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$ .

Dan is  $\mathcal{A}' = \{A_x : x \in \mathbb{R}\}$  als gewenst: de afbeelding  $x \mapsto A_x$  is een bijectie van  $\mathbb{R}$  naar  $\mathcal{A}'$  en als  $x < y$  dan  $A_x \subset A_y$  (immers  $A_x \subseteq A_y$  en  $A_y \setminus A_x$  is oneindig). Het enige probleem is dat  $\mathcal{A}'$  niet uit deelverzamelingen van  $\mathbb{N}$  bestaat; dit is op te lossen door een bijectie  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$  te nemen en  $\mathcal{A} = \{f[A] : A \in \mathcal{A}'\}$  te zetten.

- b) Tel de familie  $\mathcal{A}$  af als  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Merk op: als  $n \in \mathbb{N}$  dan is  $A_n \cap \cup_{i < n} A_i$  eindig en dus is  $A_n \setminus \cup_{i < n} A_i$  oneindig en dus niet leeg. Voor elke  $n$  bestaat dus  $a_n = \min A_n \setminus \cup_{i < n} A_i$ . De verzameling  $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  is als gewenst omdat  $A \cap A_n \subseteq \{a_i : i \leq n\}$  voor elke  $n$ .
- c) Als in de eerste opgave werken we in de aftelbare verzameling  $\mathbb{Q}$ . Kies voor elk reëel getal  $x$  een strikt stijgende rij rationale getallen  $\langle q_{x,n} \rangle_n$  die naar  $x$  convergeert en schrijf  $A_x = \{q_{x,n} : n \in \mathbb{N}\}$ .

- Elke verzameling  $A_x$  is oneindig,
- Als  $x < y$  dan is er een  $N$  zó dat  $q_{y,n} > x$  als  $n \geq N$ , dus  $A_x \cap A_y$  is eindig want het is een deelverzameling van  $\{q_{y,n} : n < N\}$ ,
- $x \mapsto A_x$  is dus injectief

De familie  $\{A_x : x \in \mathbb{R}\}$  is als gewenst.

OPMERKING. De laatste oplossing doet een verkapt beroep op het Keuzeaxioma, wie dat wil vermijden kan als volgt te werk gaan. Voor elk *irrationaal* getal  $x > 1$  schrijven we

$$A_x = \left\{ \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor : n \in \mathbb{N} \right\}$$

waarbij  $\lfloor z \rfloor$  het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan  $z$  is (de Entier van  $z$ ). Dan is de zo verkregen familie ook bijna disjunct en gelijkmachtig met  $\mathbb{R}$ .

Een alternatief: neem als aftelbare verzameling de roosterpunten in het vlak, dus  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{\langle m, n \rangle : m, n \in \mathbb{Z}\}$ . Voor  $a \in \mathbb{R}$  zij  $S_a$  de strook tussen de lijnen met vergelijkingen  $y = ax - 1$  en  $y = ax + 1$  en voorts zij  $A_a = S_a \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ . Als  $a \neq b$  dan is  $S_a \cap S_b$  begrensd, dus  $A_a \cap A_b$  is eindig. Verder zit er voor elke  $m \in \mathbb{Z}$  een geheel getal tussen  $am - 1$  en  $am + 1$ , dus elke  $A_a$  is oneindig.

## 6    $2 \bmod n$

*Prof.dr. H.W. Lenstra, Universiteit Leiden*

Het antwoord is NEE.

Om dit te bewijzen, nemen we aan dat  $n$  de genoemde eigenschap heeft en gaan we een tegenspraak afleiden. Uit  $2^{2n+1} \equiv 2 \bmod n$  en het feit dat  $n$  deelbaar is door 103 volgt  $2^{2n+1} \equiv 2 \bmod 103$ , en omdat 103 oneven is impliceert dit  $2^{2n} \equiv 1 \bmod 103$ . Ook is 103 priem, dus uit de kleine stelling van Fermat volgt  $2^{102} \equiv 1 \bmod 103$ . Gecombineerd met de vorige congruentie volgt nu  $2^d \equiv 1 \bmod 103$  voor  $d = \text{ggd}(2n, 102)$ , waarbij  $102 = 6 \cdot 17$ . Neem nu even aan dat  $n$  niet deelbaar is door 17. Dan is  $d$  een deler van 6 dus uit  $2^d \equiv 1 \bmod 103$  volgt  $2^6 \equiv 1 \bmod 103$ ; maar dat is niet waar, want  $2^6 = 64$  and 63 is niet deelbaar door 103. Hieruit volgt dat  $n$  wel deelbaar is door 17. Uit de oorspronkelijke congruentie  $2^{2n+1} \equiv 2 \bmod n$  volgt dan  $2^{2n+1} \equiv 2 \bmod 17$  en wegens het feit dat 17 een oneven priemgetal is krijgen we  $2^{2n} \equiv 1 \bmod 17$ . Maar  $2^4 = 16 \equiv -1 \bmod 17$  dus  $2^8 \equiv 1 \bmod 17$ . Dan voldoet  $e = \text{ggd}(2n, 8)$  aan  $2^e \equiv 1 \bmod 17$ . Ook is  $e$  een deler van 8, en omdat  $2^1, 2^2$ , en  $2^4$  geen van alle 1 modulo 17 zijn, moet  $e = 8$  gelden, dus  $2n$  is deelbaar door 8 en  $n$  is deelbaar door 4. De oorspronkelijke congruentie  $2^{2n+1} \equiv 2 \bmod n$  geeft nu  $2^{2n+1} \equiv 2 \bmod 4$ , maar dat kan niet, want de linkerkant is deelbaar door 4 maar de rechter niet. Deze tegenspraak beeindigt het bewijs.

## 7 Een stabiele numerieke methode voor stromingsproblemen

*Prof.dr.ir. B. Koren, CWI & Universiteit Leiden*

a)

Beschouw de algemene discrete vergelijking

$$\alpha u_{l+1,m} + \beta u_{l,m-1} + \gamma u_{l,m+1} = 0, \quad (1)$$

met  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  te bepalen constante coëfficiënten. Taylor-reeksontwikkeling van  $u_{l+1,m}$ ,  $u_{l,m-1}$  en  $u_{l,m+1}$  om  $u_{l,m}$  en substitutie van deze reeksontwikkelingen in (1) levert, de indices  $l$  en  $m$  voor het gemak weglatend:

$$\begin{aligned} & \alpha \left( u + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \\ & \beta \left( u - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{6} \Delta x^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + \\ & \gamma \left( u + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{6} \Delta x^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) = \text{h.o.t.} \iff \\ & (\alpha + \beta + \gamma)u + \alpha \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + (-\beta + \gamma) \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \\ & \alpha \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\beta + \gamma) \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (-\beta + \gamma) \frac{1}{6} \Delta x^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \text{h.o.t.} \end{aligned} \quad (2)$$

Om de algemene vervangende vergelijking (2) een benadering te laten zijn van onze modelvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

moet dus gelden:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha \Delta t = 1, \quad (-\beta + \gamma) \Delta x = a. \quad (4)$$

Hieruit volgt:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta t}, \quad \beta = -\frac{a}{2\Delta x} - \frac{1}{2\Delta t}, \quad \gamma = \frac{a}{2\Delta x} - \frac{1}{2\Delta t}, \quad (5)$$

en daarmee, door substitutie in (1), de gevraagde eindige-differentievergelijking:

$$\frac{u_{l+1,m} - \frac{1}{2} (u_{l,m+1} + u_{l,m-1})}{\Delta t} + a \frac{u_{l,m+1} - u_{l,m-1}}{2\Delta x} = 0. \quad (6)$$

Deze discretisatiemethode is de bekende Lax-Friedrichs methode, vernoemd naar de wiskundigen Peter Lax en Kurt Otto Friedrichs. In 2005 was Lax winnaar van de (voor zover ik weet) grootste prijs in de wiskunde: de *Abelprijs*. Voor een beknopte biografie van Lax, zie<sup>1</sup>. Friedrichs was de promotor van Lax.

b)

Substitutie van de bovenstaande uitdrukkingen voor de coëfficiënten  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  in (2) levert direct de vervangende vergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \text{h.o.t.} \quad (7)$$

Vervangende vergelijking (7) laat zien dat eindige-differentievergelijking (6) consistent is onder een voorwaarde. Voor  $\Delta t \downarrow 0$  en  $\Delta x \downarrow 0$  convergeert (7) naar (3) onder de voorwaarde dat  $\Delta t$  niet veel kleiner wordt dan  $\Delta x$ . In het geval dat  $\Delta x$  wordt vastgehouden terwijl  $\Delta t$  wordt verkleind zal de foutterm  $-\frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  alsmaar groter worden! Deze foutterm is een diffusieterm en komt, in tegenstelling tot de fouttermen  $\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  en  $a \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ , niet voor in de vervangende vergelijking voor de voorbeeld-eindige-differentiemethode uit de inleiding tot de opgaven.

c)

Substitutie van de discrete Fourier-vorm  $u_{l,m} = U \rho^l e^{ikm}$  in discrete vergelijking (6) levert als uitdrukking voor de versterkingsfactor  $\rho$ :

$$\rho = \cos k - i \frac{a \Delta t}{\Delta x} \sin k. \quad (8)$$

Aan de stabiliteitseis  $|\rho| \leq 1$  wordt dus voldaan indien

$$\left| \frac{a \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1. \quad (9)$$

De Lax-Friedrichsmethode is dus stabiel onder een voorwaarde. De methode is bruikbaar, in tegenstelling tot de methode uit de Inleiding tot de opgaven. Door iets aan nauwkeurigheid in te leveren is stabiliteit verkregen.

---

<sup>1</sup>B. Koren, Computational Fluid Dynamics: science and tool, *The Mathematical Intelligencer*, **28**, pp. 5–16 (2006). Also available as CWI-report: <http://ftp.cwi.nl/CWIreports/MAS/MAS-E0602.pdf>.



**Je kunt een land pas besturen als je de cijfers kent.**

Hoe hard groeit de Nederlandse economie? Hoe ontwikkelt de inflatie zich? In welk tempo neemt de werkloosheid af? Hoe hard groeit onze bevolking nog? Wat zijn de effecten van het milieubeleid? Hoe groot is het aantal verkeersslachtoffers in Nederland? In Nederland worden elk jaar duizenden beslissingen genomen op basis van cijfers die het CBS levert. Bij het opstellen van de Rijksbegroting bijvoorbeeld, zijn ze van groot belang. Belangrijke beslissingen vereisen een goed

fundament. Vandaar dat de cijfers die de CBS'ers met elkaar verzamelen, analyseren en publiceren betrouwbaar moeten zijn. En dat gaat niet vanzelf. Heb je een opleiding op HBO- of WO-niveau en wil je helpen Nederland cijfermatig in kaart te brengen?

Kijk voor de actuele vacatures op [www.werkenbijhetcbs.nl](http://www.werkenbijhetcbs.nl). Je vindt daar ook alles over de gunstige arbeidsvooraarden en de vele loopbaanmogelijkheden.



Centraal Bureau voor de Statistiek

[www.werkenbijhetcbs.nl](http://www.werkenbijhetcbs.nl)

## 8 Polynomen en niet-lineaire recursie

*Prof.dr. W. v. Assche, Katholieke Universiteit Leuven*

### Polynomen:

$P$  is een polynoom van graad  $n + m$  en de integralen zijn nul voor  $0 \leq k \leq m - 1$  en  $0 \leq \ell \leq n - 1$ . Aantonen doe je via partiële integratie en het feit dat  $P$  ook voldoet aan

$$P(x) = e^{x(x-a)} \left( \frac{d^m}{dx^m} e^{(a-b)x} \left( \frac{d^n}{dx^n} e^{x(b-x)} \right) \right).$$

### Niet-lineaire recursie:

Dit kan je aantonen via een transformatie  $T$  die werkt op oneindige rijen  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$  waarvoor  $x_0 = 1$  en  $0 < x_n < 1$  als  $n \geq 1$ , met

$$(Tx)_0 = 1, \quad (Tx)_n = g\left(\frac{2(x_{n+1} + x_{n-1})}{n}\right), \quad n \geq 1,$$

waarbij

$$g(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} = \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}}.$$

Dit is een contractie en het vaste punt met  $Tx = x$  voldoet aan de niet-lineaire recursie.



## Ken je TOPdesk al?

Onthoud deze werkgever voor als je straks een leuke baan of afstudeerplek zoekt! Je kunt er jezelf zijn. Je krijgt de ruimte om je te ontwikkelen, je ondernemerschap te tonen en je profiteert van de voordelen van een jonge, professionele cultuur.

Voor de tweede achtereenvolgende keer is **TOPdesk verkozen tot een van de leukste werkgevers van Nederland**. In het Intermediair-onderzoek naar de meest tevreden werknemers behaalde TOPdesk, van 71 werkgevers, de derde plaats. Wij zijn trots op onze derde plek! En nog trotser op de dikke 9 die we scoren op ‘Werksfeer’. Hieruit mogen we concluderen dat we écht de leukste werkgever van Nederland zijn!!

## Welke kansen wij je bieden?

Check voor de start van je carrière onze vacatures. Op onze site vind je ook goede én leuke voorbeelden van afstudeeropdrachten, mocht je nog inspiratie nodig hebben.

Neem voor meer informatie contact op met Anne of Rik van de afdeling P&O. Of stuur je sollicitatiebrief direct naar **vacatures@topdesk.nl**.

## 9 Weyl identiteit

*Dr. F. H. J. Redig, Universiteit Leiden*

a) Indien  $A, B$  commuteren dan geldt de klassieke binomiaalformule

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k B^{n-k} n!}{(n-k)! k!},$$

met andere woorden we kunnen met  $A, B$  rekenen alsof het getallen betreft. Dit substitueren in de Taylorreeks van de exponentiële geeft

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)! k!} A^k B^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} A^k B^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{r!} A^k B^r \\ &= e^A e^B. \end{aligned} \tag{10}$$

b) Als  $P(t) = e^{tA}$  dan geldt  $P'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$ . Immers,  $A$  commuteert met alle machten van  $A$  en dus ook met  $e^{tA}$ . Dit geeft

$$\begin{aligned} g'(t) &= -e^{-t(A+B)}(A+B)e^{tA}e^{tB} + e^{-t(A+B)}Ae^{tA}e^{tB} + e^{-t(A+B)}e^{tA}Be^{tB} \\ &= e^{-t(A+B)}(e^{tA}B - Be^{tA})e^{tB} = e^{-t(A+B)}[e^{tA}, B]e^{tB}. \end{aligned} \tag{11}$$

Vervolgens, omdat  $e^O = I$  (met  $O$  de nulmatrix) geldt duidelijk  $g(0) = e^{-O}e^Oe^O = I$

c)

$$h'(t) = e^{tA}ABe^{-tA} - e^{tA}BAe^{-tA} = e^{tA}[A, B]e^{-tA}.$$

d) We gebruiken dat indien  $C$  en  $D$  commuteren met  $A$ , dan geldt  $[A, CBD] = ACBD - CBDA = C(AB - BA)D = C[A, B]D$ . Er geldt

$$[A, h'(t)] = [A, e^{tA}[A, B]e^{-tA}] = e^{tA}[A, [A, B]]e^{-tA} = 0.$$

Verder,

$$h''(t) = e^{tA}[A, [A, B]]e^{-tA} = 0.$$

Omdat  $h(0) = B$  en  $h''(t) = 0$  geldt

$$h(t) = h(0) + th'(0) = B + t[A, B].$$

Dit geeft

$$e^{tA}Be^{-tA} = B + t[A, B],$$

In beide leden van deze gelijkheid met  $e^{tA}$  vermenigvuldigen geeft

$$e^{tA}B = Be^{tA} + t[A, B]e^{tA}$$

of

$$[e^{tA}, B] = t[A, B]e^{tA}.$$

- e) We nemen aan dat  $A, B$  beide commuteren met  $[A, B]$ . Dan commuteert  $[A, B]$  ook met  $A + B$  en met elke functie van  $A, B$  of  $A + B$ . Gebruik makend van onderdeel b) en d) krijgen we

$$\begin{aligned} g'(t) &= e^{-t(A+B)}[e^{tA}, B]e^{tB} \\ &= e^{-t(A+B)}t[A, B]e^{tA}e^{tB} \\ &= t[A, B]e^{-t(A+B)}e^{tA}e^{tB} = t[A, B]g(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Indien we stellen

$$g(t) = e^{t^2[A, B]/2}, \tag{13}$$

dan vinden we  $g'(t) = t[A, B]g(t)$  en  $g(0) = I$  dus is het rechterlid van 13 inderdaad de oplossing van 12.

- f) Combinatie van onderdeel b) en e) geeft

$$e^{-t(A+B)}e^{tA}e^{tB} = e^{\frac{t^2}{2}[A, B]}.$$

Stellen we nu  $t = 1$  en vermenigvuldigen we links met  $eA + B$  dan krijgen we

$$e^Ae^B = e^{A+B}e^{\frac{1}{2}[A, B]}.$$

Tenslotte gebruiken we het gegeven dat  $[A, B]$  commuteert met  $A, B$  en dus ook met  $e^{A+B}$ . We krijgen

$$e^Ae^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A, B]}.$$



## BIJ DE UVA MAAK JE WERK VAN JE MASTER

Kiezen voor een bètamaster aan de Universiteit van Amsterdam betekent kiezen voor een inspirerende master. Want de onderzoeksresultaten van vandaag verwerken UvA-wetenschappers in de colleges van morgen.



### Masters in Mathematics

- Mathematics
- Mathematical Physics
- Stochastics and Financial Mathematics
- Mathematics and Science Education

De masters binnen wiskunde aan de UvA duren twee jaar en zijn Engelstalig. De masters Mathematics en Stochastics and Financial Mathematics worden verzorgd in samenwerking met de Vrije Universiteit Amsterdam.

### Onderwijs door toponderzoekers

Als je instroomt in een master binnen wiskunde aan de UvA dan kun je college krijgen van toponderzoekers als Spinozaprijswinnaars prof. dr. Robbert Dijkgraaf (Mathematische fysica) en prof. dr. Lex Schrijver (Discrete

wiskunde en optimalisering). Bovendien verzorgt internationaal toponderzoeker prof. dr. Nicolai Reshetikhin van de University of California in Berkeley sinds voorjaar 2008 een college binnen de master Mathematical Physics.

### Wiskundig onderzoek aan de UvA

Het wiskundig onderzoek aan de UvA vindt plaats binnen het Korteweg-de Vries Instituut voor wiskunde (KdVI). Het onderzoek strekt zich uit van zuivere wiskunde, inclusief logica, tot toegepaste wiskunde, statistiek en financiële wiskunde. Binnen het Instituut voor Bedrijfs- en Industriële Statistiek (IBIS) dat opereert binnen het bedrijfsleven, wordt onderzoek gedaan in de industriële statistiek. Tevens is de UvA de enige algemene universiteit in Nederland met een leerstoel Numerieke wiskunde.

### Prof. dr. Robbert Dijkgraaf

Hoogleraar Mathematische fysica aan de UvA

*'Onze bètafaculteit is the place to be. Je krijgt geen saaie logaritmesommetjes, maar leert al snel om na te denken over de lekkere hapjes in de wis- en natuurkunde en komt in aanraking met het nieuwste onderzoek. Het zijn immers de twintigers die in de bètawetenschappen voor de grote doorbraken zorgen.'*

### Voor meer informatie:

[www.studeren.uva.nl/science-masters](http://www.studeren.uva.nl/science-masters)  
[www.science.uva.nl/math](http://www.science.uva.nl/math)

## 10 Gesloten in $\mathbb{C}$

*Prof.dr. J. Top, Rijksuniversiteit Groningen*

Identificeer de verzameling  $\mu_n$  van alle  $n$ -de eenheidswortels met de verzameling  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  van alle getallen modulo  $n$ , via  $\zeta^m \mapsto \overline{m} = m \bmod n$ . De verzameling  $S$  correspondeert dan met

$$S' := \bigcup_{j=0}^{\infty} \{2^j \overline{1}, 2^j \overline{2}, 2^j \overline{3}, \dots, 2^j \overline{2^a}\}$$

en  $\overline{S}$  met  $-S' := \{-s' \mid s' \in S'\}$ . Iedere  $\overline{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  met  $\overline{m} \neq 0$  heeft een unieke representant in  $\mathbb{Z}$  met een binaire ontwikkeling  $b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \dots + b_{2a} 2^{2a}$  (dus met alle  $b_j \in \{0, 1\}$ ). Het aantal coefficienten  $b_j = 1$  hierin is voor  $\overline{m}$  en  $2\overline{m}$  gelijk, want

$$2(b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \dots + b_{2a} 2^{2a}) \equiv b_{2a} + b_0 \cdot 2 + \dots + b_{2a-1} 2^{2a} \bmod 2^{2a+1} - 1.$$

Voor de elementen van  $S'$  is dit aantal minstens 1 en hoogstens  $a$ , en voor die van  $-S'$  minstens  $a+1$  en hoogstens  $2a$ .

En dus zijn  $S'$  en  $-S'$  disjunct.

Merk op, dat dit argument zelfs een sterkere uitspraak bewijst dan de in de opgave genoemde: de bewering blijft waar, als de tweede voorwaarde wordt vervangen door

(2') voor elke gehele  $k$  met  $1 \leq k \leq 2^{a+1} - 2$  geldt  $\zeta^k \in S$ .



talent

# Deloitte zoekt

Deloitte zoekt toptalent. Altijd. Want toptalent levert topprestaties. En dat is precies wat Deloitte wil: de beste zijn. In dienstverlening. En in knowhow. Toptalent zoeken we dus ook voor Consulting, Enterprise Risk Services en Financial Advisory Services. We hebben altijd ruimte voor ambitieuze starters. Nieuwsgierige studenten die grenzen kunnen verleggen en beschikken over goede analytische vaardigheden. Gedreven om de top te bereiken. Erop gebrand het beste uit henzelf te halen. Cliëntgerichte zelfstandige workers, maar tegelijkertijd teamplayers. Toppers dus. Ben jij dat? Breng dan jouw talent in de praktijk!

## Deloitte Consulting

Deloitte Consulting adviseert de top van het (inter-)nationale bedrijfsleven en veel (semi-)overheidsorganisaties over complexe strategische en organisatorische vraagstukken. We bieden waar mogelijk een totaaloplossing: van strategie tot en met implementatie. Deloitte Consulting adviseert op het gebied van Corporate Strategy, Financial Management en Change Management. Maar ook over kostenreductietrajecten, de wereldwijde uitrol van SAP- en Oracle-applicaties, CRM-oplossingen, het ontwikkelen van ICT maatwerkoplossingen en IT Strategie. Daarnaast geven onze consultants strategisch marketingadvies en ondersteunen zij organisaties bij Supply Chain Management.

## Deloitte Enterprise Risk Services

Deloitte Enterprise Risk Services (ERS) adviseert en ondersteunt multinationals, nationale bedrijven, de overheid en non-profitinstellingen bij het signaleren, analyseren, beoordelen en managen van risico's. Deze risico's variëren van boardroom risico's op strategisch niveau tot technische risico's op netwerkniveau. De betrouwbaarheid van bedrijfsprocessen, informatie en technologie is het werkterrein van ERS. Werkzaamheden lopen uiteen van vraagstukken op het gebied Corporate Governance, internal/operational auditing, IT-auditing, proces- en systeemrisico's en data-analyse tot complexe technische vraagstukken over informatiebeveiliging, infrastructuurbeveiliging, ethical hacking en identitymanagement. Tevens kan je bij ons als softwarespecialist werken aan het Deloitte INVision platform.

## Deloitte Financial Advisory Services

Deloitte Financial Advisory Services (FAS) houdt zich onder andere bezig met complexe financiële transacties, kapitaalmarktvraagstukken, vastgoed en risicobeheersing. Financiële specialisten op uiteenlopende terreinen bundelen hier hun kennis en ervaring in de volgende Service Lines: Transaction Advisory (Corporate Finance & Transaction Services), Capital Markets (Treasury, Energy & Quantitative Modelling), Actuarial & Employee Benefits en Real Estate Advisory (Strategy Advisory, Project & Portfolio Advisory en Area Development & PPP). De werkzaamheden lopen uiteen van financieel advies bij grote bedrijfsovernames tot het realiseren van financiering voor grote nieuw bouwprojecten. Maar ook IFRS, financial modelling en waardebepaling van contracten en pensioenen komen aan bod.

## Interesse?

Ben jij het toptalent dat Deloitte zoekt?  
Kijk dan op [www.treasuringtalent.com](http://www.treasuringtalent.com) of neem contact op met Olivier Wilmink (Consulting) op 020 - 454 71 31, Lisette van Alphen (Enterprise Risk Services) op 020 - 454 74 64 of Stefanie Ruyts (Financial Advisory Services) op 020 - 582 55 82.

# Deloitte.

Accountants • Belastingadviseurs • Consultants • Financieel Adviseurs.

TreasuringTalent.com





Kies je eigen weg

Hewitt

“There are no speed limits  
on the road to excellence.”

David W. Johnson

**Hewitt Associates is een wereldwijd opererende HRM-Consulting en Outsourcing-organisatie met ongeveer 23.000 mensen in bijna veertig landen. In Nederland (350 collega's) helpen wij onze klanten met actuarieel advies, pensioenuitvoering en complete HRM-consultancy. Wij doen ons werk met passie, wat bij ons staat voor intellectuele uitdagingen, optimale kwaliteit en interessante klanten. Maar ook voor plezier in je werk, groei en een eigen koers.**

## WisKids en bèta's op zoek naar een werkstudentschap

Wij zijn een bedrijf waarvan je mag verwachten dat het weet wat mensen beweegt in hun werk, en wat ze in een carrière zoeken. Daarom hier geen verhaal over targets en hoe wij telkens weer weten die te bereiken. De weg erheen vinden wij veel belangrijker, omdat die het beste in mensen boven brengt. Bij Hewitt is dat een pad dat je in hoge mate zelf uitstippelt. En waar elke bestemming een nieuw begin is.

**Wil jij al werkend verder leren?** Hewitt is op zoek naar wiskids en bèta's, die tijdens hun studie 1 à 2 dagen per week praktijkervaring willen opdoen in het actuariële vakgebied. Bij ons vind je daarom ook de ruimte voor initiatief, een informele cultuur, continue uitdagingen en mogelijkheden om werken en studeren te combineren. Ook zijn er mogelijkheden om na je bachelor bij Hewitt in dienst te komen. Bij Hewitt krijg je de mogelijkheid om door te studeren tot actuaris. Niet alleen wordt deze studie volledig vergoed, ook krijg je jaarlijks extra studieverlof en kun je de studie in je eigen tempo doen!

**Wij willen graag in jou investeren,** zodat je een goed beeld kan krijgen van het beroep actuaris en de organisatie. Bij ons mag je - sterker nog- moet je jezelf zijn, want pas dan haal je het beste uit jezelf en ben je in staat om je eigen koers te varen wanneer je bent afgestudeerd.

**Standplaats** Hewitt is gevestigd in Amsterdam, Eindhoven en Rotterdam. Op ieder kantoor hebben we op dit moment plaats voor 2 werkstudenten. Informeer voor het aantal open plaatsen op de diverse kantoren bij Laura Goeree (020 660 94 84). De sollicitatieprocedure loopt gedurende het gehele jaar door.

**Interesse?** Ben jij een vierdejaars student Wiskunde, Econometrie of Actuariële Wetenschappen en wil je naast studeren werkervaring opdoen binnen de actuariële dienstverlening, dan willen we je graag uitnodigen voor een kennismakingsgesprek. We kunnen dan de combinatie van werken en studeren verder met je bespreken. Stuur je curriculum vitae en brief met daarin een korte omschrijving van jezelf naar Hewitt Associates B.V., Afdeling Human Resources, t.a.v. Laura Goeree, Postbus 12079, 1100 AB Amsterdam, of mail deze naar [nlpz@hewitt.com](mailto:nlpz@hewitt.com).

Meer informatie over diverse functies en over werken bij Hewitt vind je op [www.hewitt.nl](http://www.hewitt.nl)