



Technische Universiteit
Eindhoven
University of Technology



Universiteit
Leiden

Opgaven



Landelijke
Interuniversitaire
Mathematische
Olympiade
2014



UNIVERSITEIT TWENTE.

FLOW ■ TRADERS



Quinity
.com



KONINKLIJKE
HOLLANDSCHE MAATSCHAPPIJ
DER WETENSCHAPPEN



K N A W

ASML



IMC

financial markets &
asset management



Maastricht University *Leading in Learning!*

Nagedacht over je carrière?



Gebruik je bachelordiploma Technische Wiskunde en stroom door naar de **masteropleiding Industrial and Applied Mathematics (IAM)** in Eindhoven, in een high-tech omgeving

Als master of science in IAM speel je een essentiële rol bij nieuwe en innovatieve technologie omdat die steeds vaker gebruik maakt van wiskundige modellen.

Industrial and Applied Mathematics

- **Computational Science and Engineering**

Complexe natuurkundige en technische processen analyseren en simuleren

- **Discrete Mathematics and Applications**

Van crystallografische roosters tot optimalisering van netwerken en chips, van computeralgebra tot cryptografische schema's

- **Statistics, Probability, and Operations Research**

Modellering, analyse en optimalisatie van deterministische en toevallige processen

Meer info: www.tue.nl/masterprograms/iam

Inhoudsopgave

1. Graafhomomorphismen	3
2. Frobeniusnorm	4
3. 2014 lijnstukjes	7
4. Kumar-conditie	8
5. Covariantieparadox	13
6. Pythagoreïsche driehoeken	14
7. Bovengrens	17
8. Verzamelingen	18
9. Vreemd(e) middelen	19
10. Niet allemaal priem	20
11. Rijen	21

Colofon

Dit opgavenboekje is een uitgave van de

LIMO-commissie 2014.

e-mail: limo@gewis.nl

internet: www.gewis.nl\limo

Omslagontwerp: Ylona Meeuwenberg
Opgaven: Michel Dekking, Michiel Hochstenbach, Arne Smeets, Simeon Nieman, Tom Verhoeff, Jan van Neerven, Josse van Dobben de Bruyn, Rob Tijdeman, Fokko van de Bult, Hendrik Lenstra, Gerhard Woeginger

Regels en tips

Tijdens de wedstrijd gelden de volgende **regels**:

- Maak iedere opgave op een apart vel en voorzie deze van teamnaam en opgavenummer. Verzamel het werk per opgave in het daarvoor bestemde mapje.
- Hulpmiddelen zoals boeken, grafische rekenmachines, mobiele telefoons en laptops zijn niet toegestaan. Uiteraard mag er alleen gecommuniceerd worden met teamgenoten en met de organisatie.
- Voor drinken wordt tijdens de wedstrijd gezorgd. Er komt regelmatig iemand langs om vragen aan te kunnen stellen.

Tips die je kunnen helpen tijdens de wedstrijd:

- **Notatie.** Bij diverse opgaven is een definitie gegeven in een voetnoot. Verder wordt met \mathbb{N} de verzameling van strikt positieve gehele getallen bedoeld, dat wil zeggen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- **Volgorde van moeilijkheid.** We hebben getracht de opgaven op volgorde van moeilijkheid te sorteren. Dat wil zeggen, we denken dat er voor de eerste opgaven gemiddeld meer punten zullen worden gehaald dan voor de latere opgaven. Besteed dus gemiddeld meer tijd aan opgaven met lagere nummers.
- **Lees goed wat er in de opgave staat.** Als je te snel begint, kun je belangrijke informatie over het hoofd zien. Soms staat in de vraagstelling een (verstoppe) hint die aangeeft wat je zou kunnen doen. Als je vastloopt, kun je ook besluiten de opgave nog eens goed door te lezen. Zorg ook dat je alle gegeven informatie gebruikt die in de opgave staat en vooral slechts de informatie die gegeven is.
- **Wees een team.** Verdeel de opgaven, zodat je geen dubbel werk doet, en vraag elkaar om hulp als je ergens niet uit komt. Bespreek ook vooraf waar ieders kwaliteiten liggen. Bekijk tijdens de wedstrijd elkaars werk. Vaak vallen er nog foutjes uit te halen.
- **Sprokkel puntjes.** Als je er niet uit komt, schrijf dan op wat je wel hebt bewezen dat relevant kan zijn voor het bewijzen van de betreffende opgave. Als je op de goede weg zat, kun je daar vaak nog deelscores voor krijgen. Sowieso blijkt uit resultaten van voorgaande jaren dat niet vaak voor een opgave alle punten worden gescoord. Als je niet uit een deelopgave komt, mag je het resultaat dat daarin bewezen moet worden, wel gebruiken om de volgende deelopgave op te lossen.
- **Blijf niet vastzitten in verkeerde gedachten.** Het is vaak verstandig een probleem vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Vaak helpt het gegeven termen om te schrijven of gegevens te manipuleren. Als je weinig vooruitgang boekt kun je ook aan een andere opgave gaan werken en iemand anders naar jouw opgave laten kijken.
- **Vind een patroon.** Als je bijvoorbeeld iets moet bewijzen voor alle $n \in \mathbb{N}$, probeer dan kleine gevallen: kijk wat er gebeurt voor $n = 1$ of $n = 2$. Ontdek een patroon en bewijs dat dit patroon doorzet bij grotere getallen.
- **Houd het gezellig.** Het is niet zeker of je er goed van gaat presteren, maar op deze manier heb je in elk geval een leuke dag.

1. Graafhomomorphismen

Prof. dr. F.M. (Michel) Dekking, Technische Universiteit Delft

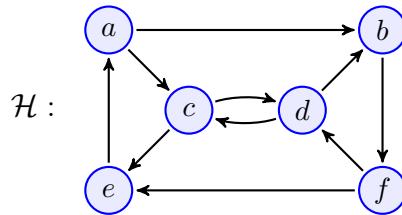
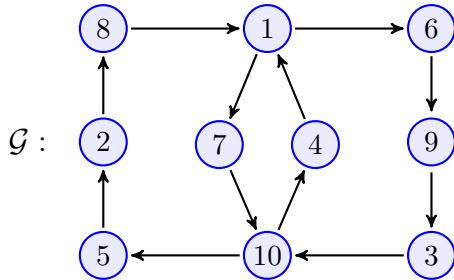
Een gerichte graaf is een paar verzamelingen (V, E) . Hier heten de elementen van V de knopen, en de elementen van E de pijlen. De pijlen E zijn een deelverzameling van $V \times V$; (v, v') heet de pijl van v naar v' . Als we twee gerichte grafen $\mathcal{G} = (V, E)$, en $\mathcal{H} = (W, F)$, hebben dan is een graafhomomorfisme φ een afbeelding $\varphi : V \rightarrow W$, die de ‘pijlen behoudt’:

$(v, v') \in E$ impliceert dat $(\varphi(v), \varphi(v')) \in F$.

Er hoeven tussen twee grafen geen graafhomomorfismen te bestaan, bijvoorbeeld als \mathcal{G} een lus, d.w.z. een pijl (v, v) , heeft en \mathcal{H} niet.

Construeer alle surjectieve graafhomomorfismen van \mathcal{G} naar \mathcal{H} als hieronder, of bewijs dat zulke homomorfismen niet bestaan.

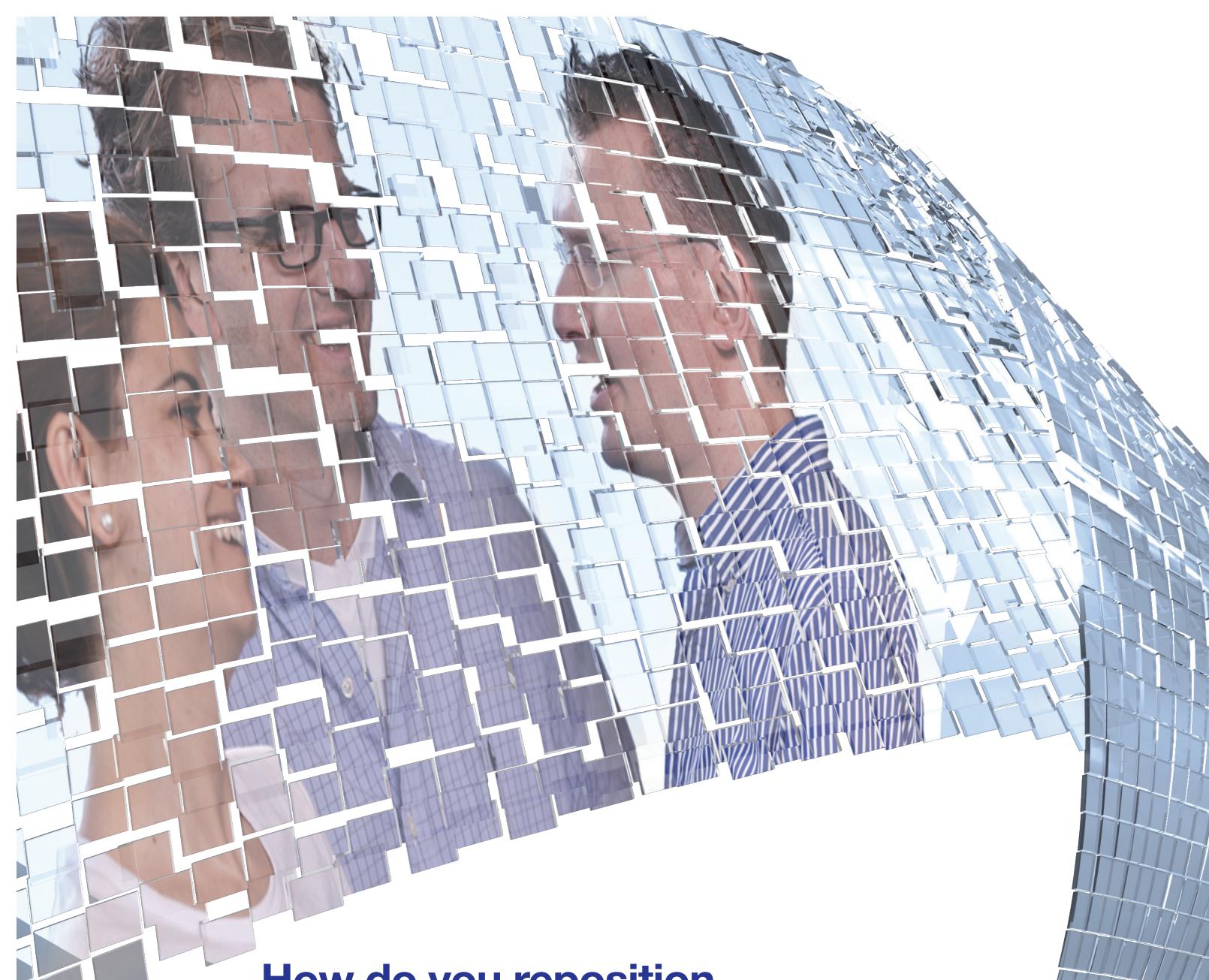
N.B. Surjectief betekent dat $\varphi(V) = W$.



2. Frobeniusnorm

Dr. M.E. (Michiel) Hochstenbach, Technische Universiteit Eindhoven

Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en $B = Q^T A Q$, waarbij $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonaal is, d.w.z. $QQ^T = Q^T Q = I$. Bewijs dat $\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2$.



How do you reposition thousands of mirrors, to dozens of microradian accuracy, hundreds of times a second?

Join ASML as a Computer Scientist and help push the boundaries of technology.

At ASML we bring together the most creative minds in science and technology to develop lithography machines that are key to producing cheaper, faster, more energy-efficient microchips.

As a result, our machines image billions of sub-microscopic structures in mere seconds. And to reach the required accuracy of a few silicon atoms, the uniformity distribution of the photo light source has to be software-controlled using the latest computerized techniques. Only then can the system accurately position thousands of mirrors, hundreds of times a second.

To take that feat even further, we need talented technologists who relish a challenge. So if you have a PhD or Master's degree in mathematics or computer science and enjoy working in a multi-platform environment, in multidisciplinary teams, then a job at ASML could be for you. You'll find ASML a highly rewarding place with complex technical problems, critical real-time applications, and demanding deadlines. But most of all you'll find the freedom to develop your skills and achieve great things.

www.asml.com/careers

ASML

Knap staaltje denkwerk!



Weet jij al wat je na je bachelor gaat doen? Wil jij:

- zelf bepalen hoe je master eruit komt te zien, zonder verplichte vakken?
- alvast vooruitlopen op je toekomstige baan, met combinatiemasters bijvoorbeeld richting bedrijfsleven, onderwijs of wetenschapscommunicatie?
- over de grenzen van Nederland heen kijken, zoals met het ALGANT-uitwisselingsprogramma voor algebra en getaltheorie?
- persoonlijk contact met je docenten in een kleinschalige opleiding?
- studeren aan een instituut dat toonaangevend is, zowel in de fundamentale als in de toegepaste wiskunde?

Dan is een master Wiskunde aan de Universiteit Leiden iets voor jou!

Kijk voor meer informatie op www.math.leidenuniv.nl/master



**Universiteit
Leiden**

Bij ons leer je de wereld kennen

3. 2014 lijnstukjes

A. (Arne) Smeets, K.U. Leuven

Binnen een cirkel met straal 1 liggen 2014 lijnstukjes. De som van de lengten van deze lijnstukjes is minstens 90. Bewijs dat er een cirkel bestaat die concentrisch is met de gegeven cirkel en die minstens twee van deze lijnstukjes snijdt.

4. Kumar-conditie

H.S. (Simeon) Nieman MSc., Westfälische Wilhelms-Universität Münster

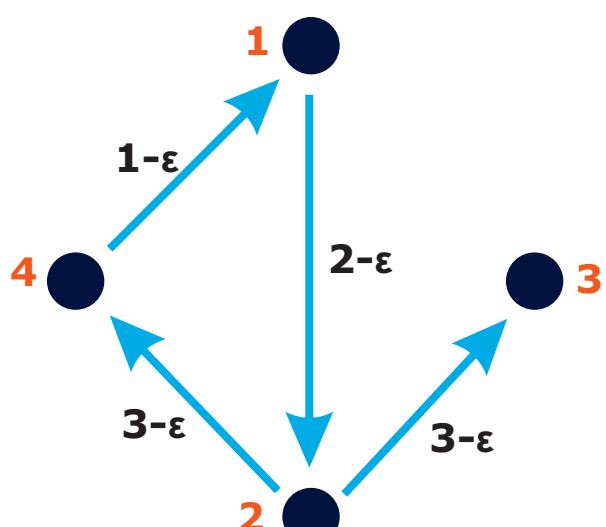
We bekijken rijtjes $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ van getallen $a_i \in \mathbb{C}$. Een dergelijk rijtje voldoet aan de zogeheten *Kumar-conditie*, wanneer voor elk natuurlijk getal n de aaneengesloten deelrijtjes van lengte n , $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+n-1})$, de vectorruimte \mathbb{C}^n opspannen. (merk op dat deze deelrijtjes hier als vectoren van lengte n opgevat worden) Bewijs dat het rijtje $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$ aan de Kumar-conditie voldoet.

Master Operations Research

Department of Knowledge Engineering Operations Research met een *couleur locale*

Operations Research

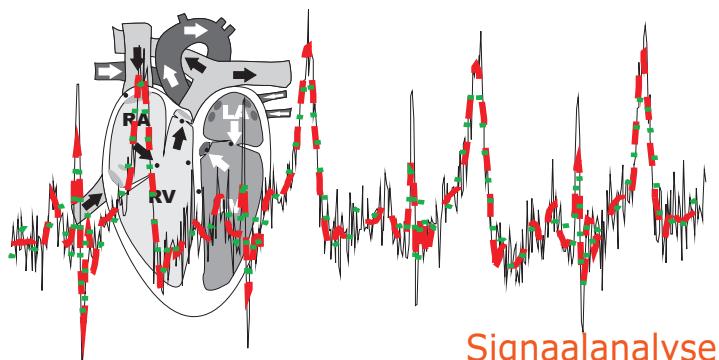
is de studie waarin je leert hoe je wiskundige kennis gebruiken om de beste keuzes te maken! Dat kan gaan om klassieke problemen als het bepalen van de kortste route tussen twee punten of om de ideale verdeling van taken over een aantal teamleden. Maar...



Strategische beslissingen

Come check us out!

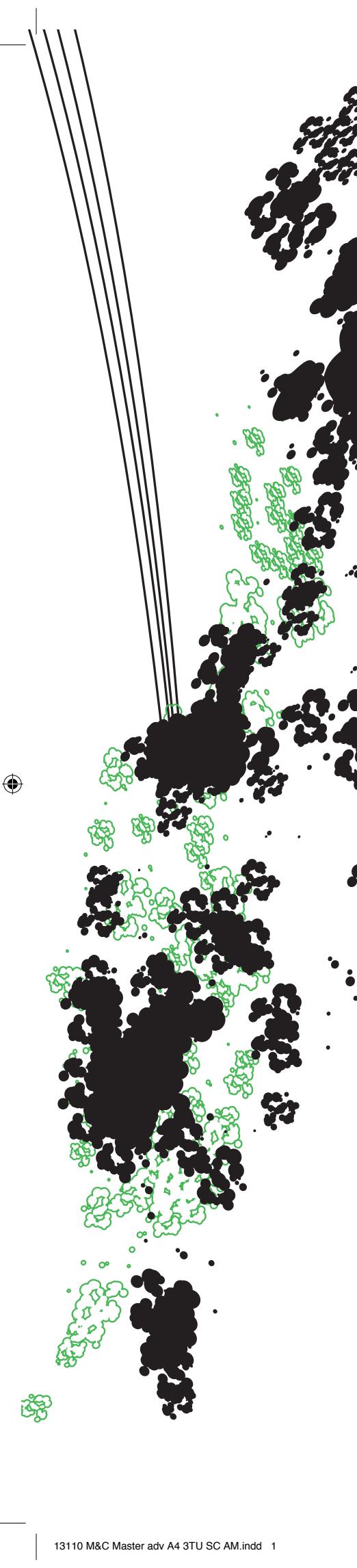
Wil je meer weten? Bezoek een Open Dag!
Of neem contact op met: info-dke@maastrichtuniversity.nl
<http://www.maastrichtuniversity.nl/dke>
<https://project.dke.maastrichtuniversity.nl/nsr>
<https://project.dke.maastrichtuniversity.nl/bmi>



Signaalanalyse

...je leert bijvoorbeeld ook om specifieke hartproblemen te detecteren op basis van een hartfilmpje, om afwijkende structuren in DNA sequenties te ontdekken, om de beste keuzes te bepalen onder strategische omstandigheden, of zelfs om stabiliteitsvraagstukken in dynamische evolutionaire processen te beantwoorden. In de Maastrichtse master Operations Research komen deze en gerelateerde vraagstukken aan de orde. Onze bachelor Knowledge Engineering biedt hiertoe een ideale voorbereiding. Ook met je bachelor wiskunde of economie ben je hierop prima voorbereid.





CHOOSE YOUR MASTER IN TWENTE!

MASTER APPLIED MATHEMATICS

Specializations

- Operations Research
- Mathematical Physics and Computational Mechanics
- Mathematics and Applications of Signals and Systems

3TU MASTER SYSTEMS & CONTROL

www.utwente.nl/master/am
www.utwente.nl/master/sc

UNIVERSITY OF TWENTE.



Aan de UvA maak je werk van je master

WWW.UVA.NL/SCIENCE-MASTERS

**Kies voor één van de wiskundige masters aan de
Universiteit van Amsterdam!**

- Mathematics
- Mathematical Physics
- Stochastics and Financial Mathematics



The Dutch Research School in Mathematics

WONDER is the *Dutch Research School in Mathematics*, coordinating the national master and graduate program and training of (prospective) PhD students.

see <http://web.science.uu.nl/wonder>

- > In for a challenge? Take up a **WONDER advanced course in mastermath**. In 2014-2015 we offer courses on abelian varieties, advanced algebraic geometry, analytic methods in discrete mathematics, percolation and topological methods for differential equations
- > Take part in a **WONDER school for graduate students**. In 2014-2015 we expect to have schools on financial mathematics, geometry and quantum theory, nonlinear dynamics, stochastics, etc.
- > Take part in the **WONDER minicourse**. In 2014-2015 it will be about non-archimedean geometry.
- > All graduated students automatically participate in a competition for the **Stieltjes prize** for the best Dutch PhD thesis in mathematics.

5. Covariantieparadox

Dr. ir. T. (Tom) Verhoeff, Technische Universiteit Eindhoven

De covariantie $cov(X, Y)$ tussen twee stochastische variabelen X en Y (zie verderop voor een definitie) is een maat voor de afhankelijkheid tussen die twee variabelen. Een positieve covariantie betekent dat grotere waarden van X neigen samen te gaan met grotere waarden van Y . Bij een negatieve covariantie is het verband omgekeerd: een grotere waarde van X neigt samen te gaan met een kleinere waarde van Y .

- (a) Definieer drie identiek verdeelde stochastische variabelen X_i ($i = 1, 2, 3$) met verwachting 0, zodanig dat geldt

$$cov(X_i, X_j) < 0 \text{ voor } i \neq j$$

en geef ook de covarianties $cov(X_i, X_j)$. De X_i zijn derhalve onderling *afhankelijk*. Ze mogen discreet of continu verdeeld zijn.

Het paradoxale is dat als X_1 een grotere uitkomst heeft, dan neigt X_2 naar een kleinere uitkomst. Terwijl als X_2 een kleinere uitkomst heeft, X_3 weer neigt naar een grotere uitkomst. En toch is het ook zo dat als X_1 een grotere uitkomst heeft, dat dan X_3 juist neigt naar een kleinere uitkomst.

Ter herinnering het volgende.

- De verwachting van X wordt genoteerd als EX .
- Verwachting is linear:

$$E(aX + bY) = aEX + bEY$$

- De covariantie $cov(X, Y)$ tussen X en Y is gedefinieerd door

$$cov(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY))$$

- Er geldt (vanwege lineariteit van verwachting):

$$cov(X, Y) = E(XY) - EXEY$$

6. Pythagoreïsche driehoeken

Prof. dr. J.M.A.M. (Jan) van Neerven, Technische Universiteit Delft

Laat zien dat de oppervlakte van een rechthoekige driehoek waarvan alle zijden geheeltallige lengte hebben geen kwadraat kan zijn.

NOTHING BEATS WINNING



**Do you thrive on outsmarting
your competition?**

Flow Traders is looking for Junior Traders with excellent mathematical and analytical skills combined with an interest in global financial markets. In this challenging position you manage and optimize our daily position in a wide range of financial products.

If you want to be part of our winning team, don't hesitate to apply for the Junior Trader position via our website:
www.flowtraders.com

For more information please email:
careers.amsterdam@nl.flowtraders.com
or call Floor de Wit on +31 (0)20 7996799.

Flow Traders is an international leading trading house.

FLOW ■ TRADERS

Amsterdam • New York • Singapore



Topicus zoekt: TopTalent

Wat heeft Topicus jou te bieden?

- ▶ Startersfuncties
- 🎓 Afstudeeropdrachten
- ⚒️ Bijbanen



Vraag naar de mogelijkheden of stuur je CV naar
info@topicus.nl

Het kunnen binden van goede mensen is een voorwaarde voor succes, en ons belangrijkste asset. Het enorme succes van Topicus in de afgelopen jaren trekt dat talent aan. **Talent werkt immers graag met talent en zo hoort dat ook.** Ons strategisch medewerkersbeleid bestaat vooral uit het willen laten groeien van werknemers, zowel in kennis als in effectiviteit en uitstraling. Wij doen er alles aan om ervoor te zorgen dat onze medewerkers de lat voor zichzelf hoog leggen. En we doen er ook alles aan om ervoor te zorgen dat die lat bereikt wordt. Dat dit werkt hebben we gemerkt: Topicus kent nauwelijks verloop, heeft een goede instroom van jong talent en een organisatie die met de dag professioneler wordt.

Topicus staat voor Ketenintegratie en SaaS oplossingen.



7. Bovengrens

Josse van Dobben de Bruyn BSc., Universiteit Leiden

In deze opgave gaan we ervan uit dat $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. We beschouwen de verzameling $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ van alle functies $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Zoals je wellicht weet, geldt $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$. Een functie $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ noemen we een *bijna-bovengrens* voor een deelverzameling $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ als de verzameling $X_f \subseteq \mathbb{N}$ gegeven door

$$X_f = \{n \in \mathbb{N} : f(n) > g(n)\}$$

eindig is voor alle $f \in \mathcal{F}$. We eisen hierbij niet dat g een element is van \mathcal{F} . Een verzameling Y heet bovendien *aftelbaar* als een van de volgende (equivalente) eigenschappen geldt:

- Er geldt ofwel $|Y| = |\mathbb{N}|$, dan wel $|Y| = k$ voor een of andere $k \in \mathbb{N}$.
- Er bestaat een surjectieve functie $h_1 : \mathbb{N} \rightarrow Y$.
- Er bestaat een injectieve functie $h_2 : Y \rightarrow \mathbb{N}$.

Geef een bewijs of vind een tegenvoorbeeld voor de volgende uitspraken:

- (a) Als $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ een bijna-bovengrens is voor \mathcal{F} , dan is \mathcal{F} aftelbaar.
- (b) Als \mathcal{F} aftelbaar is, dan bestaat er een bijna-bovengrens voor \mathcal{F} .

Je mag alle welbekende eigenschappen van aftelbare verzamelingen (zonder bewijs) gebruiken: het product van eindig veel aftelbare verzamelingen is aftelbaar, de aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen is aftelbaar, enzovoort. (Let daarbij wel op dat je geen eigenschap claimt die niet waar is.) Daarnaast mag je gebruiken dat de verzamelingen $2^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ en \mathbb{R} allemaal overaftelbaar zijn.

8. Verzamelingen

Prof. dr. R. (Rob) Tijdeman, Universiteit Leiden

- (a) Bepaal alle $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ zodanig dat $|3x^2 - 7xy + 3y^2 - 6| \leq 1$. (3 punten)
- (b) Bepaal alle $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ zodanig dat $|x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2| \leq 4$. (7 punten)

9. Vreemd(e) middelen

Dr. F.J. (Fokko) van de Bult, Technische Universiteit Delft

Gegeven twee positieve getallen a en b en een $p \in \mathbb{R}$ definiëren we het p -gemiddelde als

$$m_p(a, b) = \begin{cases} \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p} & p \neq 0 \\ \sqrt{ab} & p = 0 \end{cases}$$

Merk op dat de vreemde definitie van m_0 verklaard wordt door de vergelijking $m_0(a, b) = \lim_{p \rightarrow 0} m_p(a, b)$.¹ Je mag de standaardongelijkheden gebruiken die zeggen dat als $p < q$ dan

$$\min(a, b) \leq m_p(a, b) \leq m_q(a, b) \leq \max(a, b).$$

Kies nu twee getallen $p < q$. Dan definiëren we recursief de rijen a_k en b_k , door $a_0 = a$ en $b_0 = b$ en verder $a_k = m_p(a_{k-1}, b_{k-1})$, $b_k = m_q(a_{k-1}, b_{k-1})$ voor $k \geq 1$.

- (a) Laat zien dat de rijen a_k en b_k convergeren en dat ze dezelfde limiet hebben.

Deze gezamelijke limiet van de rijen noemen we het p, q -gemiddelde $m_{p,q}(a, b)$.

- (b) Laat zien dat $m_{-p,p}(a, b) = m_0(a, b)$.
- (c) Laat zien dat $m_{0,2}(a, b) \leq m_1(a, b)$.

¹Net zo kan men $m_{\pm\infty}(a, b)$ definiëren als $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} m_p(a, b)$, maar vandaag bekijken we alleen reële p .

10. Niet allemaal priem

Prof. dr. H.W. (Hendrik) Lenstra, Universiteit van Amsterdam

Laat $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een rij positieve gehele getallen zijn met de eigenschap dat voor elke $n \geq 0$ geldt $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Bewijs dat de getallen a_n niet allemaal priem zijn.

11. Rijen

Prof. dr. G.J. (Gerhard) Woeginger, Technische Universiteit Eindhoven

Karakteriseer alle rijen (x_0, x_1, x_2, \dots) van reële getallen die voldoen aan $x_0 = 1$ en

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - x_{n+1})^2 = 2.$$

