

# 1 Popište možné tvary dynamických systémů pro modely: spojité-diskrétní, lineární-nelineární.

Lineární spojitý systém v časové oblasti

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}$$

Lineární spojitý systém ve frekvenční oblasti

$$\begin{aligned}s\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}$$

Po úpravě  $\mathbf{x}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{B}\mathbf{u}$  můžeme dosadit

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1)$$

Dynamická poddajnost

$$\mathbf{G}(x) = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{u}} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2)$$

Lineární diskrétní systém

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{t+\Delta t} &= \mathbf{M}\mathbf{x}_t + \mathbf{N}\mathbf{u}_t \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{O}\mathbf{x}_t + \mathbf{P}\mathbf{u}_t\end{aligned}$$

diskrétní tvar lze získat z tvaru spojitého modelu v časové oblasti

$$\mathbf{M} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \doteq \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t, \mathbf{N} = \mathbf{B}, \mathbf{O} = \mathbf{C}, \mathbf{P} = \mathbf{D}$$

Nelineární systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}(\mathbf{x}) + \mathbf{d}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (4)$$

## 2 Popište postup identifikace lineárního modelu SISO systému ve tvaru ARX a OE.

### 2.1 Auto Regresive model with eXogenous inputs

Lineární filtr používající minulé vstupy a výstupy systému

$$\hat{y}(t) + a_1 y(t - \Delta t) + \dots + a_n y(t - n\Delta t) = b_0 u(t) + \dots + b_n u(t - n\Delta t) \quad (5)$$

Pro  $N$  kroků měření lze vypsát  $N - n$  rovnic

$$\begin{aligned} \hat{y}_n &= -a_1 y_{n-1} - \dots - a_n y_0 + b_0 u_n + \dots + b_n u_0 \\ &\vdots \\ \hat{y}_N &= -a_1 y_{N-1} - \dots - a_n y_{N-n} + b_0 u_N + \dots + b_n u_{N-n} \end{aligned}$$

Ty lze zapsat ve tvaru

$$\hat{\mathbf{y}} = \Phi \mathbf{p}, \quad (6)$$

kde

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} \hat{y}_n & \dots & \hat{y}_N \end{bmatrix}^T \\ \Phi &= \begin{bmatrix} y_{n-1} & \dots & y_0 & u_n & \dots & u_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & \dots & y_{N-n} & u_N & \dots & u_{N-n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} -a_1 & \dots & -a_n & b_0 & \dots & b_n \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

### 2.2 Output Error model

Lineární filtr používající minulé vstupy a výstupy modelu

$$\hat{y}(t) + a_1 \hat{y}(t - \Delta t) + \dots + a_n \hat{y}(t - n\Delta t) = b_0 u(t) + \dots + b_n u(t - n\Delta t) \quad (7)$$

zbytek obdobně jako pro ARX jen se změnou  $y$  na  $\hat{y}$ .

## 3 Popište postup identifikace lineárního modelu SISO systému ve tvaru FIR.

$$\hat{y}(t) = g_0 u(t) + g_1 u(t - \Delta t) + \dots + g_n u(t - n\Delta t) \quad (8)$$

$$\hat{y}_n = g_0 u_n + g_1 u_{n-1} + \dots + g_n u_0 \quad (9)$$

$$\vdots \quad (10)$$

$$\hat{y}_N = g_0 u_N + g_1 u_{N-1} + \dots + g_n u_{N-n} \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \Phi \mathbf{p}, \quad (12)$$

kde

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} \hat{y}_n & \dots & \hat{y}_N \end{bmatrix}^T \\ \Phi &= \begin{bmatrix} u_n & \dots & u_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N & \dots & u_{N-n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} g_0 & \dots & g_n \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

4 Vysvětlete jak se sestavují Markovovy parametry a Hankelovy matice pro diskretní stavový model.

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{B}\mathbf{u}_0 \qquad \mathbf{y}_0 = \mathbf{D}\mathbf{u}_0 \qquad (13)$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}\mathbf{u}_1 \qquad (14)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^k \mathbf{A}^{k-i} \mathbf{B} \mathbf{u}_i \qquad \mathbf{y}_k = \sum_{i=1}^k \underbrace{\mathbf{C} \mathbf{A}^{k-i} \mathbf{B}}_{h_i} \mathbf{u}_i + \underbrace{\mathbf{D}}_{h_0} \mathbf{u}_k \qquad (15)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{H} \qquad (16)$$

kde  $\mathbf{Y}$  je matice tvořena výstupy,  $\mathbf{U}$  matice vstupů a matice  $\mathbf{H}$  Markovovy parametry.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_0 & \dots & \mathbf{y}_q \end{bmatrix} \qquad (17)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_q \\ \mathbf{0} & \mathbf{u}_0 & \dots & \mathbf{u}_{q-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & & \mathbf{u}_{q-p} \end{bmatrix} \qquad (18)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_p \end{bmatrix} \qquad (19)$$

#### 4.1 Hankelovy matice

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_p \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_p & h_{p+1} & \dots & h_{2p-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & \dots & h_{p+1} \\ h_3 & h_4 & \dots & h_{p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{p+1} & h_{p+2} & \dots & h_{2p} \end{bmatrix} \qquad (20)$$

5 Popište identifikaci diskretního stavového modelu pomocí metody ERA při znalosti Hankelových matic a Markovových parametrů. Co je to balancovaný tvar modelu ?

Hankelovy matice  $\mathbf{H}_1$  a  $\mathbf{H}_2$  lze zapsat jako

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{P}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q} \qquad (21)$$

kde  $\mathbf{P}$  je matice pozorovatelnosti a  $\mathbf{Q}$  matice říditelnosti.

Balancovaný tvar zajistíme SVD rozkladem  $\mathbf{H}_1$  na

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{V}\mathbf{\Gamma}^2\mathbf{U}^T \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{V}\mathbf{\Gamma}, \mathbf{Q} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{U}^T \quad (22)$$

Matice identifikovaného systému pak jsou

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^+ \mathbf{H}_2 \mathbf{Q}^+ \quad (23)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}[:, 1 : s] \quad (24)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}[1 : r, :] \quad (25)$$

kde  $s$  je počet vstupů,  $r$  počet výstupů a  $\mathbf{P}^+$ ,  $\mathbf{Q}^+$  pseudo-inverze, které lze získat přímo z SVD rozkladu

$$\mathbf{P}^+ = \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{V}^T, \mathbf{Q}^+ = \mathbf{U} \mathbf{\Gamma}^{-1} \quad (26)$$

## 6 Vysvětlete rozdíl mezi modelem MDOF tlumeného mechanického systému s viskózním a strukturním tlumením. V čem je model se strukturním tlumením problematický pro časovou simulaci ?

Pohybové rovnice systému buzeného harmonickou funkcí

- s viskózním tlumením

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (27)$$

- se strukturním tlumením

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + j\mathbf{H})\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (28)$$

Strukturní model tlumení se speciálně orientovaný na analýzu ve frekvenční oblasti, jelikož v časové oblasti zanáší do simulace komplexní čísla.

Ve frekvenční oblasti  $\mathbf{B}\omega = \mathbf{H}$

## 7 Popište modální transformaci mechanického systému, vysvětlete pojem proporcionálního tlumení.

Pro systém ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}$$

je základem modální transformace nalezení řešení problému vlastních čísel

$$\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{M}\mathbf{V}$$

kde  $\phi_i$  jsou vlastní vektory a  $\Omega_i$  vlastní frekvence tvořící matice  $\mathbf{V}$  a  $\mathbf{\Omega}$

$$\mathbf{V} = [\phi_1 \quad \dots \quad \phi_N], \mathbf{\Omega}^2 = \text{diag}(\Omega_i^2), \quad i \in \langle 1, N \rangle$$

Po té platí

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{\Omega}^2$$

lze zavedením modální souřadnic  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{q}$  a vynásobením transponovanou maticí modální transformace  $\mathbf{V}^T$  zleva, převést do tvaru

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}^2\mathbf{q} = \mathbf{V}^T\mathbf{F}, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V}, \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{V}^T\mathbf{B}\mathbf{V}$$

O systému můžeme říct, že má proporční tlumení, je-li matice  $\mathbf{\Gamma}$  diagonální s prvky  $\beta_{ii} = 2b_{r_i}\Omega_i$ , kde  $b_{r_i}$  jsou poměrné útlumy.

Soustava se pak rozpadá na rovnice ve tvaru

$$\ddot{q}_i + 2\Omega_i\xi_i\dot{q}_i + \Omega_i^2q_i = f_i, \quad f_i = \phi_i \cdot \mathbf{F}, \quad i \in \langle 1, N \rangle$$

## 8 Napište a vysvětlete MAC kritérium pro porovnání vlastních tvarů modelu a vlastních tvarů naměřených.

*Modal Assurance Criterion*

$$M_{rq} = \frac{\phi_{A_r}^T \phi_{X_r}}{(\phi_{A_r}^T \phi_{A_r})(\phi_{X_r}^T \phi_{X_r})}, \quad r = 1, \dots, n, \quad q = 1, \dots, m \quad (29)$$

kde  $n$  a  $m$  je počet módů,  $\phi_{A_r}$  měřené vlastní vektory a  $\phi_{X_r}$  vlastní vektory modelu.

MAC kritérium se užívá pro zhodnocení shody vlastních vektorů modelu a měřeného systému. Při dokonalé shodě  $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ .

## 9 Popište metodu SDOF identifikace mechanického systému z naměřených přenosových funkcí.

## 10 Popište princip LSCF metody MDOF identifikace mechanického systému z naměřených přenosových funkcí. K čemu slouží stabilizační diagram ?

*Least Squares Complex Frequency domain estimator*

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{B}(s)}{\mathbf{A}(s)} \quad (30)$$

kde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}(s) & \mathbf{B}_{12}(s) & \dots & \mathbf{B}_{1N_i}(s) \\ \mathbf{B}_{21}(s) & \mathbf{B}_{22}(s) & \dots & \mathbf{B}_{2N_i}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{N_o1}(s) & \mathbf{B}_{N_o2}(s) & \dots & \mathbf{B}_{N_oN_i}(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}(s) & \mathbf{A}_{12}(s) & \dots & \mathbf{A}_{1N_i}(s) \\ \mathbf{A}_{21}(s) & \mathbf{A}_{22}(s) & \dots & \mathbf{A}_{2N_i}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N_o1}(s) & \mathbf{A}_{N_o2}(s) & \dots & \mathbf{A}_{N_oN_i}(s) \end{bmatrix} \quad (31)$$

a

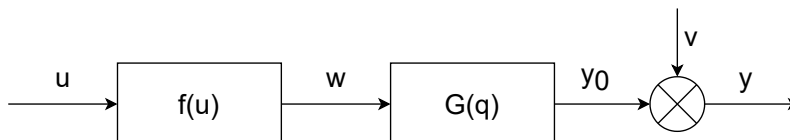
$$\mathbf{B}_{ii} = \sum_{j=0}^m b_{ii_j} s^j, \quad \mathbf{A}_{ii} = \sum_{j=0}^n a_{ii_j} s^j \quad (32)$$

Stabilizační diagram slouží k identifikaci fyzikálních pólů, které se nemění při postupném zvyšování řádu modelu.

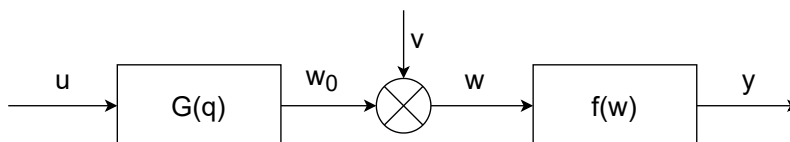
## 11 Co je nelineární model Hammersteinova typu a nelineární model Wienerova typu.

Modely skládající se z dynamického lineárního přenosu  $G(q)$  a statické nelineární funkce  $f$

### Model Hammersteinova typu



### Model Wienerova typu



## 12 Uved'te strukturu nelineární identifikace používající koncept LOLI-MOT.

*Local Linear Models Tree*

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^M \hat{y}_i \phi_i(\mathbf{u}) \quad (33)$$

kde  $\hat{y}_i$  jsou lokální lineární modely (typu FIR?)

$$\hat{y}_i = w_{i0} + w_{i1}u_1 + w_{i2}u_2 + \dots \quad (34)$$

a  $\phi_i(u)$  jejich platnostní funkce, které splňují

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(u) = 1, \quad \phi_i(u) = \frac{\mu_i(u)}{\sum_{i=1}^n \mu_i(u)}, \quad \mu_i = \exp(-\frac{1}{2}(\dots)) \quad (35)$$

- Vnitřní cyklus: výpočet koeficientů  $w_i$  LLM při daném rozložení platnostních funkcí (exaktní - LSQ)
- Vnější cyklus: hledání vhodného "rozdělení" oblasti (heuristika)

## 13 Uved'te postup identifikace nelineárního diskrétního dynamického modelu LOLIMOT typu NARX.

LOLIMOT typu NARX se liší od modelu v otázce 12 pouze ve tvaru lokálních modelů, který lze obecně zapsat jako

$$\hat{y}_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots) \quad (36)$$

a způsobu jejich identifikace.

## 14 Vysvětlete pojmy testování a trénování identifikovaného modelu.

### Trénování

Při trénování jsou parametry identifikovaného modelu upravovány tak, aby chování systému co nejvíce odpovídalo *trénovacím datům*.

### Testování

Při testování porovnáváme chování identifikovaného modelu k nové sadě *testovacích dat*, abychom ověřili, že nedošlo k přetrénování modelu, tzn. přizpůsobení ke konkrétním trénovacím datům, nikoliv obecnému chování.

## 15 Vysvětlete rozdíl mezi simulačním a predikčním trénováním a použitím LOLIMOT modelu a souvislost těchto pojmů s NARX a NOE modely.

### Simulační trénování

Identifikovaný model je odpojený od reálného systému a pracuje pouze s jeho vstupy, kde chyba výstupu se kumuluje.

Odpovídá schématu NOE

$$\hat{y}_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, \hat{y}_{k-1}, \hat{y}_{k-2}, \dots) \quad (37)$$

### Predikční trénování

Model je připojen k výstupům modelu reálného systému

Odpovídá schématu NARX

$$\hat{y}_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots) \quad (38)$$

## 16 Uveďte příklad identifikace ad-hoc sestaveného dynamického modelu soustavy s pomocí obecných optimalizačních metod.

## 17 Uveďte základní postup identifikace fyzikálního modelu získaného např. z MKP po transformaci do redukováného modálního tvaru. V čem tato redukce usnadní postup identifikace ?

Na základě naměřených/navržených vlastností materiálu vytvořím mkp model ve tvaru

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F$$

Ten následně transformuju do modálních souřadnic

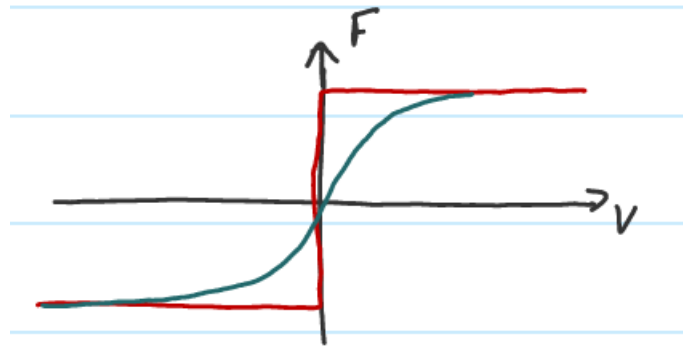
$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}^2\mathbf{q} = \mathbf{V}^T\mathbf{F}, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V}, \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{V}^T\mathbf{B}\mathbf{V}$$

a oříznu mimodiagonální prvky transformované matice tlumení  $\mathbf{\Gamma}$ , přičemž prvky na diagonále lze vyjádřit jako  $\beta_{ii} = 2b_{r_i}\Omega_i$ . Dále můžu provést redukci, odstraněním tvarů odpovídajících vyšším frekvencím systému.

Výsledkem je model závislý pouze na parametrech  $\omega_i$ ,  $b_{r_i}$  pro každý zanechaný tvar, které můžu dále optimalizovat. Oproti black-box identifikaci nehrozí vznik umělých artefaktů.

## 18 Uveďte příklad využití fenomenologického identifikovaného modelu pro simulaci.

Fenomenologicky například identifikujeme tření nebo nelineární chování tlumiče.



Obrázek 1: Coulomb



Obrázek 2: Stribeck

## 19 Popište použití identifikovaného modelu soustavy v regulátoru s prediktivním řízením. Jak souvisí s pojmy NARX a NOE modelů ?