1 Popište možné tvary dynamických systémů pro modely: spojité-diskrétní, lineární-nelineární.

Lineární spojitý systém v časové oblasti

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

Lineární spojitý systém ve frekvenční oblasti

$$s\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

Po úpravě $\boldsymbol{x}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ můžeme dosadit

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{1}$$

Dynamická poddajnost

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \tag{2}$$

Lineární diskrétní systém

$$\boldsymbol{x}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}_t$$
$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{O}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}_t$$

diskrétní tvar lze získat z tvaru spojitého modelu v časové oblasti

$$\boldsymbol{M} = e^{\boldsymbol{A}\Delta t} \doteq \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}\Delta t\,,\ \boldsymbol{N} = \boldsymbol{B}\,,\ \boldsymbol{O} = \boldsymbol{C}\,,\ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$$

Nelineární systém

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{3}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{4}$$

2 Popište postup identifikace lineárního modelu SISO systému ve tvaru ARX a OE.

2.1 Auto Regresive model with eXogenous inputs

Lineární filtr používajíci minulé vstupy a výstupy systému

$$\hat{y}(t) + a_1 y(t-\Delta t) + \cdots + a_n y(t-n\Delta t) = b_0 u(t) + \cdots + b_n u(t-n\Delta t) \tag{5}$$

Pro N kroků měření lze vypsat $N-n$ rovnic

$$\begin{aligned} \hat{y}_n &= -a_1 y_{n-1} - \ldots - a_n y_0 + b_0 u_n + \cdots + b_n u_0 \\ &\vdots \\ \hat{y}_N &= -a_1 y_{N-1} - \ldots - a_n y_{N-n} + b_0 u_N + \cdots + b_n u_{N-n} \end{aligned}$$

Ty lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\hat{y}} = \boldsymbol{\Phi p} \ , \tag{6}$$

kde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\hat{y}} &= \begin{bmatrix} \hat{y}_n & \ldots & \hat{y}_N \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{\Phi} &= \begin{bmatrix} y_{n-1} & \cdots & y_0 & u_n & \cdots & u_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & \cdots & y_{N-n} & u_N & \cdots & u_{N-n} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{p} &= \begin{bmatrix} -a_1 & \ldots & -a_n & b_0 & \ldots & b_n \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

2.2 Output Error model

Lineární filtr používajíci minulé vstupy a výstupy modelu

$$\hat{y}(t) + a_1 \hat{y}(t-\Delta t) + \cdots + a_n \hat{y}(t-n\Delta t) = b_0 u(t) + \cdots + b_n u(t-n\Delta t) \tag{7}$$

zbytek obdobně jako pro ARX jen se změnou y na $\hat{y}$.

3 Popište postup identifikace lineárního modelu SISO systému ve tvaru FIR.

$$\hat{y}(t) = g_0 u(t) + g_1 u(t-\Delta t) + \cdots + g_n u(t-n\Delta t) \tag{8}$$

$$\hat{y}_n = g_0 u_n + g_1 u_{n-1} + \cdots + g_n u_0 \tag{9}$$

$$\vdots \tag{10}$$

$$\hat{y}_N = g_0 u_N + g_1 u_{N-1} + \cdots + g_n u_{N-n} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\hat{y}} = \boldsymbol{\Phi p} \ , \tag{12}$$

kde

$$
\hat{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_n & \dots & \hat{y}_N \end{bmatrix}^T
$$

$$
\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} u_n & \dots & u_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N & \dots & u_{N-n} \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} g_0 & \dots & g_n \end{bmatrix}^T
$$

4 Vysvětlete jak se sestavují Markovovy parametry a Hankelovy matice pro diskrétní stavový model.

$$
\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0 \qquad \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_0 \tag{13}
$$

$$
\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_1 \qquad \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_1 \tag{14}
$$

$$
\boldsymbol{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} \boldsymbol{A}^{k-i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i \qquad \boldsymbol{y}_k = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-i}\boldsymbol{B}}_{h_i}\boldsymbol{u}_i + \underbrace{\boldsymbol{D}}_{h_0}\boldsymbol{u}_k \tag{15}
$$

$$
\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{H} \tag{16}
$$

kde $\boldsymbol{Y}$ je matice tvořena výstupy, $\boldsymbol{U}$ matice vstupů a matice $\boldsymbol{H}$ *Markovovy parametry.*

$$
\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{y}_0 & \dots & \boldsymbol{y}_q \end{bmatrix} \tag{17}
$$

$$
\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_0 & \boldsymbol{u}_1 & \dots & \boldsymbol{u}_q \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{u}_0 & \dots & \boldsymbol{u}_{q-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \dots & & \boldsymbol{u}_{q-p} \end{bmatrix} \tag{18}
$$

$$
\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_0 & \boldsymbol{h}_1 & \dots & \boldsymbol{h}_p \end{bmatrix} \tag{19}
$$

4.1 Hankelovy matice

$$
\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_p \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_p & h_{p+1} & \dots & h_{2p-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & \dots & h_{p+1} \\ h_3 & h_4 & \dots & h_{p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{p+1} & h_{p+2} & \dots & h_{2p} \end{bmatrix} \tag{20}
$$

5 Popište identifikaci diskrétního stavového modelu pomocí metody ERA při znalosti Hankelových matic a Markovových parametrů. Co je to balancovaný tvar modelu ?

Hanklovy matice $\boldsymbol{H}_1$ a $\boldsymbol{H}_2$ lze zapsat jako

$$
\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\,, \quad \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} \tag{21}
$$

kde $\boldsymbol{P}$ je matice pozorovatelnosti a $\boldsymbol{Q}$ matice řiditelnosti.

Balancovaný tvar zajistíme SVD rozkladem $\boldsymbol{H}_1$ na

$$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{U}^T \Rightarrow \boldsymbol{P} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Gamma}\,,\ \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{U}^T \tag{22}$$

Matice identifikovaného systému pak jsou

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{+}\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{Q}^{+} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}[:, 1 : s] \tag{24}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}[1 : r, :] \tag{25}$$

kde s je počet vstupů, r počet výstupů a $\boldsymbol{P}^{+}$, $\boldsymbol{Q}^{+}$ pseudo-inverze, které lze získat přímo z SVD rozkladu

$$\boldsymbol{P}^{+} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{V}^T\,,\ \boldsymbol{Q}^{+} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \tag{26}$$

6 Vysvětlete rozdíl mezi modelem MDOF tlumeného mechanického systému s viskózním a strukturním tlumením. V čem je model se strukturním tlumením problematický pro časovou simulaci ?

Pohybové rovnice systému buzeného harmonickou funkcí

- s viskózním tlumením

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \tag{27}$$

- se strukturním tlumením

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{K} + j\boldsymbol{H})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \tag{28}$$

Strukturní model tlumení se speciálně orientovaný na analýzu ve frekvenčí oblasti, jelikož v časové oblasti zanáší do simulace komplexní čísla.

Ve frekvenční oblasti $\boldsymbol{B}\omega = \boldsymbol{H}$

7 Popište modální transformaci mechanického systému, vysvětlete pojem proporcionálního tlumení.

Pro systém ve tvaru

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}$$

je základem modální trasformace nalezení řešení problému vlastních čísel

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}$$

kde $\boldsymbol{\phi}_i$ jsou vlastní vektory a Ω_i vlastní frekvence tvořící matice $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{\Omega}$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}_i & \dots & \boldsymbol{\phi}_N\end{bmatrix}\,,\ \boldsymbol{\Omega}^2 = \mathrm{diag}(\Omega_i^2)\,, \quad i \in \langle 1, N\rangle$$

Po té platí

$$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{V} = \mathbf{1}\,, \quad \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega}^2$$

lze zavedením modální souřadnic $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{q}$ a vynásobením transponovanou maticí modální transformace $\boldsymbol{V}^T$ zleva, převést do tvaru

$$\boldsymbol{I}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{q} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{F}\ , \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{V}\ , \ \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}$$

O systému můžeme říct, že má proporční tlumení, je-li matice $\boldsymbol{\Gamma}$ diagonální s prvky $\beta_{ii} = 2b_{r_i}\Omega_i$, kde b_{r_i} jsou poměrné útlumy.

Soustava se pak rozpadá na rovnice ve tvaru

$$\ddot{q}_i + 2\,\Omega_i\xi_i\dot{q} + \Omega_i^2 q = f_i\ , \quad f_i = \boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{F}\ , \quad i \in \langle 1, N\rangle$$

8 Napište a vysvětlete MAC kritérium pro porovnání vlastních tvarů modelu a vlastních tvarů naměřených.

Modal Assurance Criterion

$$M_{rq} = \frac{(\phi_{A_r}^T\phi_{X_r})^2}{(\phi_{A_r}^T\phi_{A_r})(\phi_{X_r}^T\phi_{X_r})}\ , \quad r = 1, \dots, n\ ,\ q = 1, \dots, m \tag{29}$$

kde n a m je počet módů, ϕ_{A_q} měřené vlastní vekotry a ϕ_{X_r} vlastní vektory modelu.

MAC kritérium se užívá pro zhodnocení shody vlastních vektorů modelu a měřeného systému. Při dokonalé shodě $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}$.

9 Popište metodu SDOF identifikace mechanického systému z naměřených přenosových funkcí.

10 Popište princip LSCF metody MDOF identifikace mechanického systému z naměřených přenosových funkcí. K čemu slouží stabilizační diagram ?

Least Squares Complex Frequency domain estimator

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{\boldsymbol{B}(s)}{\boldsymbol{A}(s)} \tag{30}$$

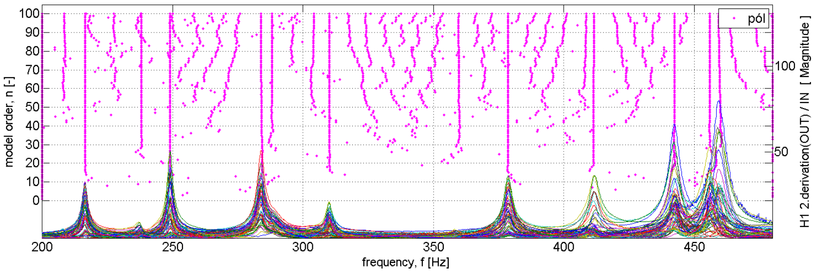
kde

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_{11}(s) & B_{12}(s) & \dots & B_{1N_i}(s) \\ B_{21}(s) & B_{22}(s) & \dots & B_{2N_i}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N_o1}(s) & B_{N_o2}(s) & \dots & B_{N_oN_i}(s) \end{bmatrix}\ , \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11}(s) & A_{12}(s) & \dots & A_{1N_i}(s) \\ A_{21}(s) & A_{22}(s) & \dots & A_{2N_i}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N_o1}(s) & A_{N_o2}(s) & \dots & A_{N_oN_i}(s) \end{bmatrix} \tag{31}$$

a

$$B_{ii} = \sum_{j=0}^{m} b_{ii_j} s^j\ , \quad A_{ii} = \sum_{j=0}^{n} a_{ii_j} s^j \tag{32}$$

Stabilizační diagram slouží k identifikaci fyzikálních pólů, které se nemění při postupném zvyšování řádu modelu.

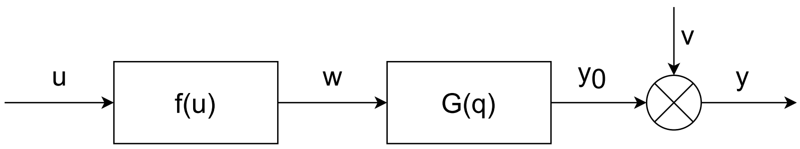


Obrázek 1: Stabilizační diagram

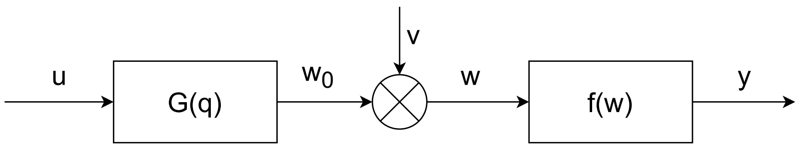
11 Co je nelineární model Hammersteinova typu a nelineární model Wienerova typu.

Modely skládající se z dynamického lineárního přenosu $G(q)$ a statické nelineární funkce f

Model Hammersteinova typu



Model Weinerova typu



12 Uveďte strukturu nelineární identifikace používající koncept LOLIMOT.

LOcal LInear MOdels Tree

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{M} \hat{y}_i \phi_i(\boldsymbol{u}) \tag{33}$$

kde $\hat{y}_i$ jsou *lokální lineární modely* (typu FIR?)

$$\hat{y}_i = w_{i0} + w_{i1}u_1 + w_{i2}u_2 + \dots \tag{34}$$

a $\phi_i(u)$ jejich platnostní funkce, které splňují

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(u) = 1 \ , \quad \phi_i(u) = \frac{\mu_i(u)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(u)} \ , \quad \mu_i = \exp(-\frac{1}{2}(...)) \tag{35}$$

- Vnitřní cyklus: výpočet koeficientů w_i LLM při daném rozložení platnostních funkcí (exaktní - LSQ)
- Vnější cyklus: hledání vhodného "rozdělení"oblasti (heuristika)

13 Uveďte postup identifikace nelineárního diskrétního dynamického modelu LOLIMOT typu NARX.

LOLIMOT typu NARX se liší od modelu v otázce 12 pouze ve tvaru lokálních modelů, který lze obecně zapsat jako

$$\hat{y}_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots) \tag{36}$$

a způsobu jejich identifikace.

14 Vysvětlete pojmy testování a trénování identifikovaného modelu.

Trénování

Při trénování jsou parametry identifikovaného modelu upravovány tak, aby chování systému co nejvíce odpovídalo *trénovacím datům.*

Testování

Při testování porovnáváme chování identifikovaného modelu k nové sadě *testovacích dat*, abychom ověřili, že nedošlo k přetrénovaní modelu, tzn. přizpůsobení ke konkrétním trénovacím datům, nikoliv obecnému chování.

15 Vysvětlete rozdíl mezi simulačním a predikčním trénováním a použitím LOLIMOT modelu a souvislost těchto pojmů s NARX a NOE modely.

Simulační trénování

Identifikovaný model je odpojený od reálného systému a pracuje pouze s jeho vstupy, kde chyba výstupu se kumuluje.

Odpovídá schématu NOE

$$\hat{y}_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, \hat{y}_{k-1}, \hat{y}_{k-2}, \dots) \tag{37}$$

Predikční trénování

Model je připojen k výstupům modelu realného systému

Odpovídá schématu NARX

$$\hat{y}_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots) \tag{38}$$

16 Uveďte příklad identifikace ad-hoc sestaveného dynamického modelu soustavy s pomocí obecných optimalizačních metod.

17 Uveďte základní postup identifikace fyzikálního modelu získaného např. z MKP po transformaci do redukovaného modálního tvaru. V čem tato redukce usnadní postup identifikace ?

Na základě naměřených/navržených vlastností materiálu vytvořím mkp model ve tvaru

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}$$

Ten následně transformuju do modálních souřadnic

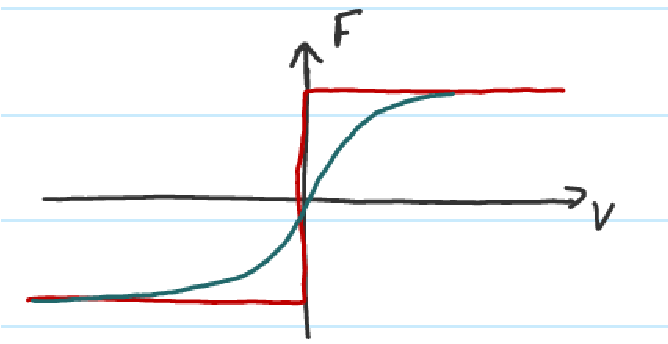
$$\boldsymbol{I}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{q} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{F}\ , \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{V}\ , \ \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}$$

a oříznu mimodiagonální prvky transformované matice tlumení $\boldsymbol{\Gamma}$, přičemž prvky na diagonále lze vyjádřit jako $\beta_{ii} = 2b_{r_i}\Omega_i$. Dále můžu provést redukci, ostraněním tvarů odpovídajících vyšším frekvencím systému.

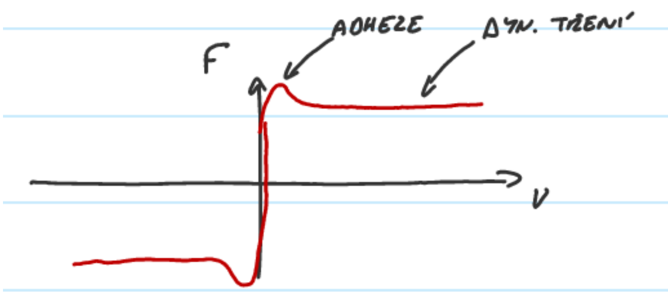
Vyslédkem je model závislý pouze na parametrech ω_i, b_{r_i} pro každý zanechaný tvar, které můžu dále optimalizovat. Oproti black-box identifikaci nehrozí vznik umělých artefaktů.

18 Uveďte příklad využití fenomenologického identifikovaného modelu pro simulaci.

Fenomenologicky například inentifikujeme tření nebo nelineární chování tlumiče.



(a) Coulomb



(b) Streibeck

19 Popište použití identifikovaného modelu soustavy v regulátoru s prediktivním řízením. Jak souvisí s pojmy NARX a NOE modelů ?

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k \tag{39}$$

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_k \tag{40}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k \tag{41}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+2} = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{k+1} \tag{42}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+n} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}_k + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}^{n-i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{k+i-1} \tag{43}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{k+n} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}_k + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{k+i} \tag{44}$$

$$\hat{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{U} \tag{45}$$

$$\hat{\boldsymbol{Y}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{y}}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{y}}_{k+N} \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^N \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_k , \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}\boldsymbol{B} & & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{B} & \dots & \boldsymbol{C}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_k \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{k+N-1} \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$\boldsymbol{J}_k = (\hat{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{W})^T\boldsymbol{Q}(\hat{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{W}) + \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{U} \tag{47}$$