

1 Popište možné tvary dynamických systémů pro modely: spojitě-diskrétní, lineární-nelineární.

Lineární spojitý systém v časové oblasti

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}$$

Lineární spojitý systém ve frekvenční oblasti

$$\begin{aligned}s\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}$$

Po úpravě $\mathbf{x}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{B}\mathbf{u}$ můžeme dosadit

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1)$$

Dynamická poddajnost

$$\mathbf{G}(x) = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{u}} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2)$$

Lineární diskrétní systém

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{t+\Delta t} &= \mathbf{M}\mathbf{x}_t + \mathbf{N}\mathbf{u}_t \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{O}\mathbf{x}_t + \mathbf{P}\mathbf{u}_t\end{aligned}$$

diskrétní tvar lze získat z tvaru spojitého modelu v časové oblasti

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \doteq \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t \\ \mathbf{N} &= \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{B} \doteq \mathbf{B}\Delta t \\ \mathbf{O} &= \mathbf{C} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{D}\end{aligned}$$

Nelineární systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}(\mathbf{x}) + \mathbf{d}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (4)$$

2 Popište postup identifikace lineárního modelu SISO systému ve tvaru ARX a OE.

2.1 Auto Regresive model with eXogenous inputs

Lineární filtr používající minulé vstupy a výstupy systému

$$\hat{y}(t) + a_1 y(t - \Delta t) + \dots + a_n y(t - n\Delta t) = b_0 u(t) + \dots + b_n u(t - n\Delta t) \quad (5)$$

Pro N kroků měření lze vypsát $N - n$ rovnic

$$\begin{aligned} \hat{y}_n &= -a_1 y_{n-1} - \dots - a_n y_0 + b_0 u_n + \dots + b_n u_0 \\ &\vdots \\ \hat{y}_N &= -a_1 y_{N-1} - \dots - a_n y_{N-n} + b_0 u_N + \dots + b_n u_{N-n} \end{aligned}$$

Ty lze zapsat ve tvaru

$$\hat{\mathbf{y}} = \Phi \mathbf{p}, \quad (6)$$

kde

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} \hat{y}_n & \dots & \hat{y}_N \end{bmatrix}^T \\ \Phi &= \begin{bmatrix} y_{n-1} & \dots & y_0 & u_n & \dots & u_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & \dots & y_{N-n} & u_N & \dots & u_{N-n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} -a_1 & \dots & -a_n & b_0 & \dots & b_n \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

2.2 Output Error model

Lineární filtr používající minulé vstupy a výstupy modelu

$$\hat{y}(t) + a_1 \hat{y}(t - \Delta t) + \dots + a_n \hat{y}(t - n\Delta t) = b_0 u(t) + \dots + b_n u(t - n\Delta t) \quad (7)$$

zbytek obdobně jako pro ARX jen se změnou y na \hat{y} .

3 Popište postup identifikace lineárního modelu SISO systému ve tvaru FIR.

$$\hat{y}(t) = g_0 u(t) + g_1 u(t - \Delta t) + \dots + g_n u(t - n\Delta t) \quad (8)$$

$$\hat{y}_n = g_0 u_n + g_1 u_{n-1} + \dots + g_n u_0 \quad (9)$$

$$\vdots \quad (10)$$

$$\hat{y}_N = g_0 u_N + g_1 u_{N-1} + \dots + g_n u_{N-n} \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \Phi \mathbf{p}, \quad (12)$$

kde

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} \hat{y}_n & \dots & \hat{y}_N \end{bmatrix}^T \\ \Phi &= \begin{bmatrix} u_n & \dots & u_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N & \dots & u_{N-n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} g_0 & \dots & g_n \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

4 Vysvětlete jak se sestavují Markovovy parametry a Hankelovy matice pro diskrétní stavový model.

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{B}\mathbf{u}_0 \qquad \mathbf{y}_0 = \mathbf{D}\mathbf{u}_0 \qquad (13)$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}\mathbf{u}_1 = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{D}\mathbf{u}_1 \qquad (14)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad (15)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^k \mathbf{A}^{k-i} \mathbf{B} \mathbf{u}_i \qquad \mathbf{y}_k = \sum_{i=1}^k \underbrace{\mathbf{C} \mathbf{A}^{k-i} \mathbf{B}}_{h_i} \mathbf{u}_i + \underbrace{\mathbf{D}}_{h_0} \mathbf{u}_k \qquad (16)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{U} \qquad (17)$$

kde \mathbf{Y} je matice tvořena výstupy, \mathbf{U} matice vstupů a matice \mathbf{H} je Hankelova matice či matice *Markovových parametrů*. q je voleno dle času ustálení impulzové odezvy tak, aby $\mathbf{y}_q \approx \mathbf{0}$.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_0 & \dots & \mathbf{y}_q \end{bmatrix} \qquad (18)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_p \end{bmatrix} \qquad (19)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_q \\ \mathbf{0} & \mathbf{u}_0 & \dots & \mathbf{u}_{q-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & & \mathbf{u}_{q-p} \end{bmatrix} \qquad (20)$$

4.1 Hankelovy matice

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_p \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_p & h_{p+1} & \dots & h_{2p-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & \dots & h_{p+1} \\ h_3 & h_4 & \dots & h_{p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{p+1} & h_{p+2} & \dots & h_{2p} \end{bmatrix} \qquad (21)$$

5 Popište identifikaci diskrétního stavového modelu pomocí metody ERA při znalosti Hankelových matic a Markovových parametrů. Co je to balancovaný tvar modelu ?

Hankelovy matice \mathbf{H}_1 a \mathbf{H}_2 lze zapsat jako

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{P}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q} \qquad (22)$$

kde \mathbf{P} je matice pozorovatelnosti a \mathbf{Q} matice říditelnosti.

Balancovaný tvar zajistíme SVD rozkladem \mathbf{H}_1 na

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{V}\mathbf{\Gamma}^2\mathbf{U}^T \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{V}\mathbf{\Gamma}, \mathbf{Q} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{U}^T \quad (23)$$

Matice identifikovaného systému pak jsou

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^+ \mathbf{H}_2 \mathbf{Q}^+ \quad (24)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}[:, 1 : s] \quad (25)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}[1 : r, :] \quad (26)$$

kde s je počet vstupů, r počet výstupů a \mathbf{P}^+ , \mathbf{Q}^+ pseudo-inverze, které lze získat přímo z SVD rozkladu

$$\mathbf{P}^+ = \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{V}^T, \mathbf{Q}^+ = \mathbf{U} \mathbf{\Gamma}^{-1} \quad (27)$$

6 Vysvětlete rozdíl mezi modelem MDOF tlumeného mechanického systému s viskózním a strukturním tlumením. V čem je model se strukturním tlumením problematický pro časovou simulaci ?

Pohybové rovnice systému buzeného harmonickou funkcí

- s viskózním tlumením

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (28)$$

- se strukturním tlumením

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (j\mathbf{H} + \mathbf{K})\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (29)$$

Strukturní model tlumení se speciálně orientovaný na analýzu ve frekvenční oblasti, jelikož v časové oblasti zanáší do simulace komplexní čísla.

Ve frekvenční oblasti $\mathbf{B}\omega = \mathbf{H}$

7 Popište modální transformaci mechanického systému, vysvětlete pojem proporcionálního tlumení.

Pro systém ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}$$

je základem modální transformace nalezení řešení zobecněného problému vlastních čísel

$$\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{M}\mathbf{V}$$

kde ϕ_i jsou vlastní vektory a Ω_i vlastní frekvence tvořící matice \mathbf{V} a $\mathbf{\Omega}$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_N \end{bmatrix}, \mathbf{\Omega}^2 = \text{diag}(\Omega_i^2), \quad i \in \langle 1, N \rangle$$

Pro navzájem ortogonální vlastní vektory s vahou matice hmotnosti (získané příslušnou normalizací) platí

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{\Omega}^2$$

lze zavedením modální souřadnic \mathbf{q} , $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{q}$ a vynásobením transponovanou maticí modální transformace \mathbf{V}^T zleva, převést do tvaru

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}^2\mathbf{q} = \mathbf{V}^T\mathbf{F}, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V}, \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{V}^T\mathbf{B}\mathbf{V}$$

O systému můžeme říct, že má proporční tlumení, je-li matice \mathbf{C} lineární kombinací matic \mathbf{M} a \mathbf{K} . Pak je tato matice diagonalizovatelná modální transformací \mathbf{V} a matice $\mathbf{\Gamma}$ je diagonální s prvky $(\mathbf{\Gamma})_{ii} = 2\zeta_i\Omega_i$, kde ζ_i jsou poměrné útlumy. Soustava se pak rozpadá na samostatně řešitelné rovnice ve tvaru

$$\ddot{q}_i + 2\Omega_i\zeta_i\dot{q}_i + \Omega_i^2q_i = f_i, \quad f_i = \phi_i \cdot \mathbf{F}, \quad i \in \langle 1, N \rangle$$

8 Napište a vysvětlete MAC kritérium pro porovnání vlastních tvarů modelu a vlastních tvarů naměřených.

Modal Assurance Criterion

$$M_{rq} = \frac{(\phi_{A_r}^T \phi_{X_r})^2}{(\phi_{A_r}^T \phi_{A_r})(\phi_{X_r}^T \phi_{X_r})}, \quad r = 1, \dots, n, \quad q = 1, \dots, m \quad (30)$$

kde n a m je počet módů, ϕ_{A_q} měřené vlastní vektory a ϕ_{X_r} vlastní vektory modelu.

MAC kritérium se užívá pro zhodnocení shody vlastních vektorů modelu a měřeného systému. Při dokonalé shodě $\mathbf{M} = \mathbf{I}$.

9 Popište metodu SDOF identifikace mechanického systému z naměřených přenosových funkcí.

Tato metoda je použitelná pouze pro lineární identifikaci. Často v kombinaci s *chirp* buzením. Výhoda reprezentace dat ve frekvenční oblasti je hustota informace a relativně nízká míra její ztráty oproti časové oblasti, kde mohou být data uložena pouze jako série diskretních datových bodů [Matlab].

$$g = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n} \quad (31)$$

- provedeme měření pro $\omega_1, \dots, \omega_p$ s odezvou $g(j\omega_1), \dots, g(j\omega_p)$
- rozšíříme pro $-\omega_1, \dots, -\omega_p$ s odezvou $g(-j\omega_k) = g(j\omega_k)^*$

$$e = g - \hat{g} \quad (32)$$

$$\hat{e} = \sum_{k=1}^m a_k p_k - \hat{g} \sum_{k=1}^n b_k p_k, \quad p_k = j\omega^k, \quad \hat{e} = \sum_{k=1}^n b_k p_k \quad (33)$$

minimalizujeme

$$J = \hat{\mathbf{E}}^T \hat{\mathbf{E}}, \quad \hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \hat{e}(\omega_1) \\ \vdots \\ \hat{e}(\omega_N) \end{bmatrix} \quad (34)$$

10 Popište princip LSCF metody MDOF identifikace mechanického systému z naměřených přenosových funkcí. K čemu slouží stabilizační diagram ?

Least Squares Complex Frequency domain estimator

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{B}(s)}{\mathbf{A}(s)} \quad (35)$$

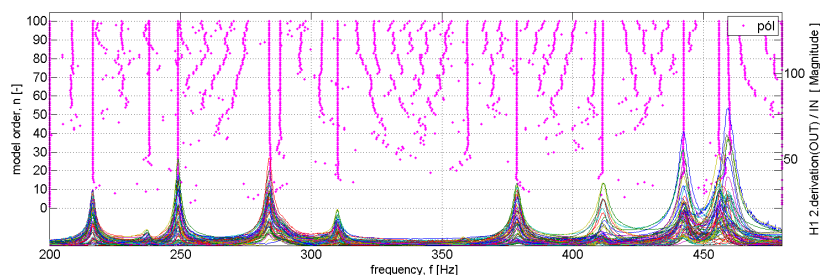
kde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11}(s) & B_{12}(s) & \dots & B_{1N_i}(s) \\ B_{21}(s) & B_{22}(s) & \dots & B_{2N_i}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N_o1}(s) & B_{N_o2}(s) & \dots & B_{N_oN_i}(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11}(s) & A_{12}(s) & \dots & A_{1N_i}(s) \\ A_{21}(s) & A_{22}(s) & \dots & A_{2N_i}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N_o1}(s) & A_{N_o2}(s) & \dots & A_{N_oN_i}(s) \end{bmatrix} \quad (36)$$

a

$$B_{kl} = \sum_{j=0}^m b_{klj} s^j, \quad A_{kl} = \sum_{j=0}^n a_{klj} s^j \quad (37)$$

Stabilizační diagram slouží k identifikaci fyzikálních pólů, které se nemění při postupném zvyšování řádu modelu.

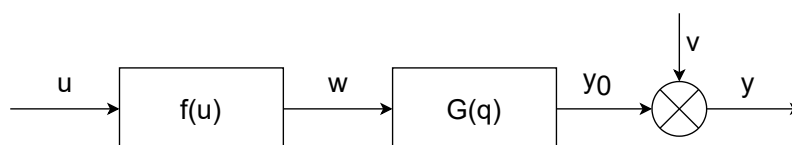


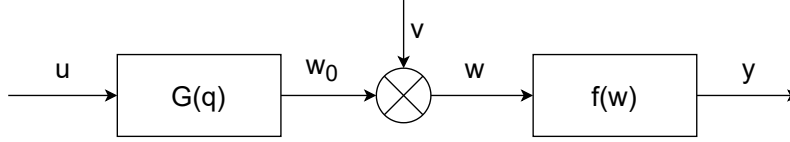
Obrázek 1: Stabilizační diagram

11 Co je nelineární model Hammersteinova typu a nelineární model Wienerova typu.

Modely skládající se z dynamického lineárního přenosu $G(q)$ a statické nelineární funkce f

Model Hammersteinova typu





Model Weinerova typu

12 Uveďte strukturu nelineární identifikace používající koncept LOLI-MOT.

LOcal LInear MOdels Tree

The main idea is to approximate a generally nonlinear multivariable function describing a dynamic system output with the scalar product of the vector of linear functions of the system inputs and the vector of so-called validity functions.

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^M \hat{y}_i(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{z}) \quad (38)$$

kde \hat{y}_i jsou *lokální lineární modely*

$$\hat{y}_i = w_{i0} + w_{i1}x_1 + w_{i2}x_2 + \dots + w_{in}x_n \quad (39)$$

a $\phi_i(u)$ jejich platnostní funkce, formulovány jako normalizované ortogonální Gaussové rozdělení, které splňují

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(u) = 1, \quad \phi_i(u) = \frac{\mu_i(u)}{\sum_{i=1}^n \mu_i(u)}, \quad \mu_i = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \frac{(u_j - c_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2} \right) \quad (40)$$

kde M je počet LLM a c_{ij} a σ_{ij}^2 , která jsou volitelná, jsou popořadě střední hodnota a rozptyl i -tého rozdělení pro j -tý LLM. Vektory zobecněných vstupů, neboli *regresorů*, \mathbf{x} a \mathbf{z} obecně obsahují okamžité vstupy systému $u_j(k)$, minulé vstupy systému $u_j(k-r)$ a minulé výstupy systému $y(k-s)$, kde r a s jsou horizonty závislosti na vstupech a výstupech, popořadě. \mathbf{z} je nazýván vektor premis (premises) a \mathbf{x} vektor konsekventů (consequents).

- Vnitřní cyklus: výpočet koeficientů w_i LLM při daném rozložení platnostních funkcí (exaktní - LSQ)
- Vnější cyklus: hledání vhodného “rozdělení” oblasti (heuristika)

13 Uveďte postup identifikace nelineárního diskrétního dynamického modelu LOLIMOT typu NARX.

LOLIMOT typu NARX (Nonlinear Auto Regressive with Exogenous inputs) se liší od modelu v otázce 12 pouze ve tvaru lokálních modelů, který lze obecně zapsat jako

$$\hat{y}_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots) \quad (41)$$

a způsobu jejich identifikace.

14 Vysvětlete pojmy testování a trénování identifikovaného modelu.

Trénování

Při trénování jsou parametry identifikovaného modelu upravovány tak, aby chování systému co nejvíce odpovídalo *trénovacím datům*.

Testování

Při testování porovnáváme chování identifikovaného modelu k nové sadě *testovacích dat*, abychom ověřili, že nedošlo k přetrénování modelu, tzn. přizpůsobení ke konkrétním trénovacím datům, nikoliv obecnému chování.

15 Vysvětlete rozdíl mezi simulačním a predikčním trénováním a použitím LOLIMOT modelu a souvislost těchto pojmů s NARX a NOE modely.

Simulační trénování

Identifikovaný model je odpojený od reálného systému a pracuje pouze s jeho vstupy, kde chyba výstupu se kumuluje.

Odpovídá schématu NOE (Nonlinear Output Error)

$$\hat{y}_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, \hat{y}_{k-1}, \hat{y}_{k-2}, \dots) \quad (42)$$

Predikční trénování

Model je připojen k výstupům modelu reálného systému

Odpovídá schématu NARX

$$\hat{y}_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots) \quad (43)$$

- 16 Uved'te příklad identifikace ad-hoc sestaveného dynamického modelu soustavy s pomocí obecných optimalizačních metod.
- 17 Uved'te základní postup identifikace fyzikálního modelu získaného např. z MKP po transformaci do redukovaného modálního tvaru. V čem tato redukce usnadní postup identifikace ?

Na základě naměřených/navržených vlastností materiálu vytvořím mkp model ve tvaru

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F$$

Ten následně transformuju do modálních souřadnic

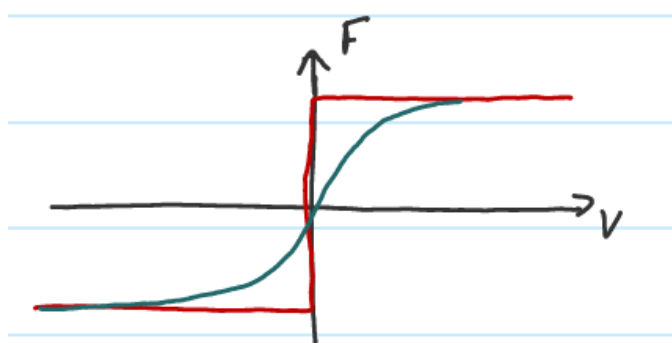
$$I\ddot{q} + \Gamma\dot{q} + \Omega^2q = V^T F, \quad \Omega = V^T K V, \quad \Gamma = V^T B V$$

a oříznu mimodiagonální prvky transformované matice tlumení Γ , přičemž prvky na diagonále lze vyjádřit jako $\beta_{ii} = 2b_{r_i}\Omega_i$. Dále můžu provést redukci, odstraněním tvarů odpovídajících vyšším frekvencím systému.

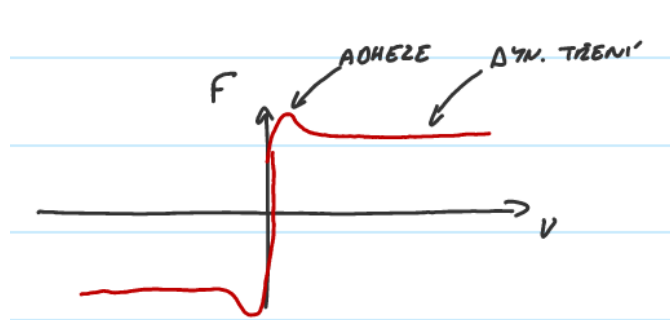
Výsledkem je model závislý pouze na parametrech ω_i, b_{r_i} pro každý zanechaný tvar, které můžu dále optimalizovat. Oproti black-box identifikaci nehrozí vznik umělých artefaktů.

- 18 Uved'te příklad využití fenomenologického identifikovaného modelu pro simulaci.

Fenomenologicky například identifikujeme tření nebo nelineární chování tlumiče.



(a) Coulomb



(b) Stribeck

- 19 Popište použití identifikovaného modelu soustavy v regulátoru s prediktivním řízením. Jak souvisí s pojmy NARX a NOE modelů ?

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (44)$$

$$y_k = Cx_k \quad (45)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (46)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+2} = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_k + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k+1} \quad (47)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+n} = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_k + \sum_{i=1}^n \mathbf{A}^{n-i}\mathbf{B}\mathbf{u}_{k+i-1} \quad (48)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+n} = \mathbf{C}\mathbf{A}^n\mathbf{x}_k + \sum_{i=1}^n \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-i}\mathbf{B}\mathbf{u}_{k+i} \quad (49)$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{f} + \mathbf{G}\mathbf{U} \quad (50)$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}_{k+N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^N \end{bmatrix} \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{B} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+N-1} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\mathbf{J}_k = (\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{W})^T \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{W}) + \mathbf{U}^T \mathbf{P} \mathbf{U} \quad (52)$$