

# 1 Popište možné tvary dynamických systémů pro modely: spojité-diskrétní, lineární-nelineární.

Lineární spojité systém v časové oblasti

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}$$

Lineární spojité systém ve frekvenční oblasti

$$\begin{aligned}s\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}$$

Po úpravě  $\mathbf{x}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{B}\mathbf{u}$  můžeme dosadit

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1)$$

Dynamická poddajnost

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{u}} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2)$$

Lineární diskrétní systém

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{t+\Delta t} &= \mathbf{M}\mathbf{x}_t + \mathbf{N}\mathbf{u}_t \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{O}\mathbf{x}_t + \mathbf{P}\mathbf{u}_t\end{aligned}$$

diskrétní tvar lze získat z tvaru spojitého modelu v časové oblasti

$$\mathbf{M} = e^{\mathbf{A}\Delta t}, \mathbf{N} = (e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{O} = \mathbf{C}, \mathbf{P} = \mathbf{D}$$

Nelineární systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}(\mathbf{x}) + \mathbf{d}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (4)$$

## 2 Popište postup identifikace lineárního modelu SISO systému ve tvaru ARX a OE.

### 2.1 Auto Regresive model with eXogenous inputs

Lineární filtr používající minulé vstupy a výstupy systému

$$\hat{y}(t) + a_1 y(t - \Delta t) + \dots + a_n y(t - n\Delta t) = b_0 u(t) + \dots + b_n u(t - n\Delta t) \quad (5)$$

Pro  $N$  kroků měření lze vypsát  $N - n$  rovnic

$$\begin{aligned} \hat{y}_n &= -a_1 y_{n-1} - \dots - a_n y_0 + b_0 u_n + \dots + b_n u_0 \\ &\vdots \\ \hat{y}_N &= -a_1 y_{N-1} - \dots - a_n y_{N-n} + b_0 u_N + \dots + b_n u_{N-n} \end{aligned}$$

Ty lze zapsat ve tvaru

$$\hat{\mathbf{y}} = \Phi \mathbf{p}, \quad (6)$$

kde

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} &= [\hat{y}_n \quad \dots \quad \hat{y}_N]^T \\ \Phi &= \begin{bmatrix} y_{n-1} & \dots & y_0 & u_n & \dots & u_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & \dots & y_{N-n} & u_N & \dots & u_{N-n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{p} &= [-a_1 \quad \dots \quad -a_n \quad b_0 \quad \dots \quad b_n]^T \end{aligned}$$

### 2.2 Output Error model

Lineární filtr používající minulé vstupy a výstupy modelu

$$\hat{y}(t) + a_1 \hat{y}(t - \Delta t) + \dots + a_n \hat{y}(t - n\Delta t) = b_0 u(t) + \dots + b_n u(t - n\Delta t) \quad (7)$$

zbytek obdobně jako pro ARX jen se změnou  $y$  na  $\hat{y}$ .

## 3 Popište postup identifikace lineárního modelu SISO systému ve tvaru FIR.

$$\hat{y}(t) = g_0 u(t) + g_1 u(t - \Delta t) + \dots + g_n u(t - n\Delta t) \quad (8)$$

$$\hat{y}_n = g_0 u_n + g_1 u_{n-1} + \dots + g_n u_0 \quad (9)$$

$$\vdots \quad (10)$$

$$\hat{y}_N = g_0 u_N + g_1 u_{N-1} + \dots + g_n u_{N-n} \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \Phi \mathbf{p}, \quad (12)$$

kde

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} \hat{y}_n & \dots & \hat{y}_N \end{bmatrix}^T \\ \Phi &= \begin{bmatrix} u_n & \dots & u_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N & \dots & u_{N-n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} g_0 & \dots & g_n \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

#### 4 Vysvětlete jak se sestavují Markovovy parametry a Hankelovy matice pro diskrétní stavový model.

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{B}\mathbf{u}_0 \qquad \mathbf{y}_0 = \mathbf{D}\mathbf{u}_0 \qquad (13)$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}\mathbf{u}_1 = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{D}\mathbf{u}_1 \qquad (14)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^k \mathbf{A}^{k-i} \mathbf{B}\mathbf{u}_i \qquad \mathbf{y}_k = \sum_{i=1}^k \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{A}^{k-i}\mathbf{B}}_{h_i} \mathbf{u}_i + \underbrace{\mathbf{D}}_{h_0} \mathbf{u}_k \qquad (15)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{U} \qquad (16)$$

kde  $\mathbf{Y}$  je matice tvořena výstupy,  $\mathbf{U}$  matice vstupů a matice  $\mathbf{H}$  je Hankelova matice či matice *Markovových parametrů*.  $q$  je voleno dle času ustálení impulzní odezvy tak, aby  $\mathbf{y}_q \approx \mathbf{0}$ .

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_0 & \dots & \mathbf{y}_q \end{bmatrix} \qquad (17)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_q \\ \mathbf{0} & \mathbf{u}_0 & \dots & \mathbf{u}_{q-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & & \mathbf{u}_{q-p} \end{bmatrix} \qquad (18)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_p \end{bmatrix} \qquad (19)$$

##### 4.1 Hankelovy matice

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_p \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_p & h_{p+1} & \dots & h_{2p-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & \dots & h_{p+1} \\ h_3 & h_4 & \dots & h_{p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{p+1} & h_{p+2} & \dots & h_{2p} \end{bmatrix} \qquad (20)$$

## 5 Popište identifikaci diskrétního stavového modelu pomocí metody ERA při znalosti Hankelových matic a Markovových parametrů. Co je to balancovaný tvar modelu ?

Hanklovy matice  $H_1$  a  $H_2$  lze zapsat jako

$$H_1 = PQ, \quad H_2 = PAQ \quad (21)$$

kde  $P$  je matice pozorovatelnosti a  $Q$  matice říditelnosti.

Balancovaný tvar zajistíme SVD rozkladem  $H_1$  na

$$H_1 = V\Gamma^2U^T \Rightarrow P = V\Gamma, \quad Q = \Gamma U^T \quad (22)$$

Matice identifikovaného systému pak jsou

$$A = P^+ H_2 Q^+ \quad (23)$$

$$B = Q[:, 1 : s] \quad (24)$$

$$C = P[1 : r, :] \quad (25)$$

kde  $s$  je počet vstupů,  $r$  počet výstupů a  $P^+$ ,  $Q^+$  pseudo-inverze, které lze získat přímo z SVD rozkladu

$$P^+ = \Gamma^{-1}V^T, \quad Q^+ = U\Gamma^{-1} \quad (26)$$

## 6 Vysvětlete rozdíl mezi modelem MDOF tlumeného mechanického systému s viskózním a strukturním tlumením. V čem je model se strukturním tlumením problematický pro časovou simulaci ?

Pohybové rovnice systému buzeného harmonickou funkcí

- s viskózním tlumením

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F \quad (27)$$

- se strukturním tlumením

$$M\ddot{x} + (jH + K)x = F \quad (28)$$

Strukturní model tlumení se speciálně orientovaný na analýzu ve frekvenční oblasti, jelikož v časové oblasti zanáší do simulace komplexní čísla.

Ve frekvenční oblasti  $B\omega = H$

## 7 Popište modální transformaci mechanického systému, vysvětlete pojem proporcionálního tlumení.

Pro systém ve tvaru

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{F}$$

je základem modální transformace nalezení řešení zobecněného problému vlastních čísel

$$KV = \Omega^2 MV$$

kde  $\phi_i$  jsou vlastní vektory a  $\Omega_i$  vlastní frekvence tvořící matice  $V$  a  $\Omega$

$$V = \begin{bmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_N \end{bmatrix}, \quad \Omega^2 = \text{diag}(\Omega_i^2), \quad i \in \langle 1, N \rangle$$

Pro navzájem ortogonální vlastní vektory s vahou matice hmotnosti (získané příslušnou normalizací) platí

$$V^T M V = I, \quad V^T K V = \Omega^2$$

lze zavedením modální souřadnic  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{x} = V\mathbf{q}$  a vynásobením transponovanou maticí modální transformace  $V^T$  zleva, převést do tvaru

$$\ddot{\mathbf{q}} + \Gamma \dot{\mathbf{q}} + \Omega^2 \mathbf{q} = V^T \mathbf{F}, \quad \Omega = V^T K V, \quad \Gamma = V^T B V$$

O systému můžeme říct, že má proporční tlumení, je-li matice  $C$  lineární kombinací matic  $M$  a  $K$ . Pak je tato matice diagonalizovatelná modální transformací  $V$  a matice  $\Gamma$  je diagonální s prvky  $(\Gamma)_{ii} = 2\zeta_i \Omega_i$ , kde  $\zeta_i$  jsou poměrné útlumy. Soustava se pak rozpadá na samostatně řešitelné rovnice ve tvaru

$$\ddot{q}_i + 2\Omega_i \zeta_i \dot{q}_i + \Omega_i^2 q_i = f_i, \quad f_i = \phi_i \cdot \mathbf{F}, \quad i \in \langle 1, N \rangle$$

## 8 Napište a vysvětlete MAC kritérium pro porovnání vlastních tvarů modelu a vlastních tvarů naměřených.

*Modal Assurance Criterion*

$$M_{rq} = \frac{(\phi_{A_r}^T \phi_{X_r})^2}{(\phi_{A_r}^T \phi_{A_r})(\phi_{X_r}^T \phi_{X_r})}, \quad r = 1, \dots, n, \quad q = 1, \dots, m \quad (29)$$

kde  $n$  a  $m$  je počet módů,  $\phi_{A_r}$  měřené vlastní vektory a  $\phi_{X_r}$  vlastní vektory modelu.

MAC kritérium se užívá pro zhodnocení shody vlastních vektorů modelu a měřeného systému. Při dokonalé shodě  $M = I$ .

## 9 Popište metodu SDOF identifikace mechanického systému z naměřených přenosových funkcí.

Tato metoda je použitelná pouze pro lineární identifikaci. Často v kombinaci s *chirp* buzením. Výhoda reprezentace dat ve frekvenční oblasti je hustota informace a relativně nízká míra její ztráty oproti časové oblasti, kde mohou být data uložena pouze jako série diskrétních datových bodů [Matlab].

## 10 Popište princip LSCF metody MDOF identifikace mechanického systému z naměřených přenosových funkcí. K čemu slouží stabilizační diagram ?

*Least Squares Complex Frequency domain estimator*

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{B}(s)}{\mathbf{A}(s)} \quad (30)$$

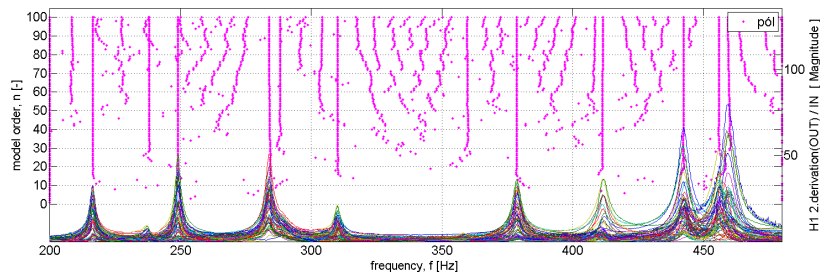
kde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11}(s) & B_{12}(s) & \dots & B_{1N_i}(s) \\ B_{21}(s) & B_{22}(s) & \dots & B_{2N_i}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N_o1}(s) & B_{N_o2}(s) & \dots & B_{N_oN_i}(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11}(s) & A_{12}(s) & \dots & A_{1N_i}(s) \\ A_{21}(s) & A_{22}(s) & \dots & A_{2N_i}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N_o1}(s) & A_{N_o2}(s) & \dots & A_{N_oN_i}(s) \end{bmatrix} \quad (31)$$

a

$$B_{ii} = \sum_{j=0}^m b_{ii_j} s^j, \quad A_{ii} = \sum_{j=0}^n a_{ii_j} s^j \quad (32)$$

Stabilizační diagram slouží k identifikaci fyzikálních pólů, které se nemění při postupném zvyšování řádu modelu.

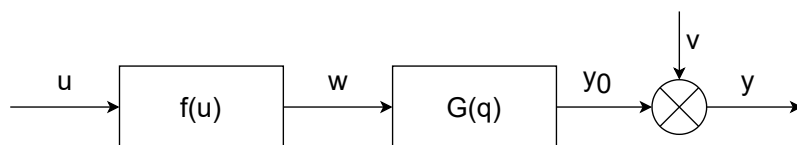


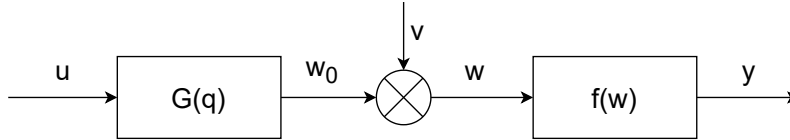
Obrázek 1: Stabilizační diagram

## 11 Co je nelineární model Hammersteinova typu a nelineární model Wienerova typu.

Modely skládající se z dynamického lineárního přenosu  $G(q)$  a statické nelineární funkce  $f$

**Model Hammersteinova typu**





Model Wienerova typu

## 12 Uved'te strukturu nelineární identifikace používající koncept LOLI-MOT.

*Local Linear Models Tree*

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^M \hat{y}_i \phi_i(\mathbf{u}) \quad (33)$$

kde  $\hat{y}_i$  jsou *lokální lineární modely* (typu FIR?)

$$\hat{y}_i = w_{i0} + w_{i1}u_1 + w_{i2}u_2 + \dots \quad (34)$$

a  $\phi_i(u)$  jejich platnostní funkce, které splňují

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(u) = 1, \quad \phi_i(u) = \frac{\mu_i(u)}{\sum_{i=1}^n \mu_i(u)}, \quad \mu_i = \exp(-\frac{1}{2}(\dots)) \quad (35)$$

- Vnitřní cyklus: výpočet koeficientů  $w_i$  LLM při daném rozložení platnostních funkcí (exaktní - LSQ)
- Vnější cyklus: hledání vhodného "rozdělení" oblasti (heuristika)

## 13 Uved'te postup identifikace nelineárního diskrétního dynamického modelu LOLIMOT typu NARX.

LOLIMOT typu NARX (Nonlinear Auto Regressive with Exogenous inputs) se liší od modelu v otázce 12 pouze ve tvaru lokálních modelů, který lze obecně zapsat jako

$$\hat{y}_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots) \quad (36)$$

a způsobu jejich identifikace.

## 14 Vysvětlete pojmy testování a trénování identifikovaného modelu.

### Trénování

Při trénování jsou parametry identifikovaného modelu upravovány tak, aby chování systému co nejvíce odpovídalo *trénovacím datům*.

### Testování

Při testování porovnáváme chování identifikovaného modelu k nové sadě *testovacích dat*, abychom ověřili, že nedošlo k přetrénování modelu, tzn. přizpůsobení ke konkrétním trénovacím datům, nikoliv obecnému chování.

- 15 Vysvětlete rozdíl mezi simulačním a predikčním trénováním a použitím LOLIMOT modelu a souvislost těchto pojmů s NARX a NOE modely.**

### **Simulační trénování**

Identifikovaný model je odpojený od reálného systému a pracuje pouze s jeho vstupy, kde chyba výstupu se kumuluje.

Odpovídá schématu NOE (Nonlinear Output Error)

$$\hat{y}_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, \hat{y}_{k-1}, \hat{y}_{k-2}, \dots) \quad (37)$$

### **Predikční trénování**

Model je připojen k výstupům modelu reálného systému

Odpovídá schématu NARX

$$\hat{y}_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots) \quad (38)$$

- 16 Uveďte příklad identifikace ad-hoc sestaveného dynamického modelu soustavy s pomocí obecných optimalizačních metod.**
- 17 Uveďte základní postup identifikace fyzikálního modelu získaného např. z MKP po transformaci do redukovaného modálního tvaru. V čem tato redukce usnadní postup identifikace ?**

Na základě naměřených/navržených vlastností materiálu vytvořím mkp model ve tvaru

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F$$

Ten následně transformuju do modálních souřadnic

$$I\ddot{q} + \Gamma\dot{q} + \Omega^2q = V^T F, \quad \Omega = V^T K V, \quad \Gamma = V^T B V$$

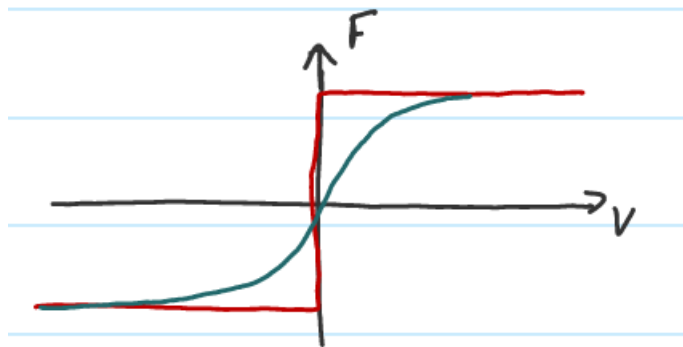
a oříznu mimodiagonální prvky transformované matice tlumení  $\Gamma$ , přičemž prvky na diagonále lze vyjádřit jako  $\beta_{ii} = 2b_{r_i}\Omega_i$ . Dále můžu provést redukci, odstraněním tvarů odpovídajících vyšším frekvencím systému.

Výsledkem je model závislý pouze na parametrech  $\omega_i$ ,  $b_{r_i}$  pro každý zanechaný tvar, které můžu dále optimalizovat. Oproti black-box identifikaci nehrozí vznik umělých artefaktů.

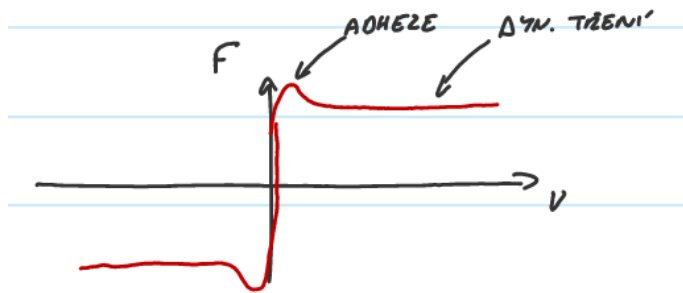
- 18 Uveďte příklad využití fenomenologického identifikovaného modelu pro simulaci.**

Fenomenologicky například identifikujeme tření nebo nelineární chování tlumiče.





Obrázek 2: Coulomb



Obrázek 3: Stribeck

- 19 Popište použití identifikovaného modelu soustavy v regulátoru s prediktivním řízením. Jak souvisí s pojmy NARX a NOE modelů ?