1 Popište možné tvary dynamických systémů pro modely: spojité-diskrétní, lineární-nelineární.

Lineární spojitý systém v časové oblasti

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}
\end{aligned}
$$

Lineární spojitý systém ve frekvenční oblasti

$$
\begin{aligned}
s\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}
\end{aligned}
$$

Po úpravě $\boldsymbol{x}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ můžeme dosadit

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{1}$$

Dynamická poddajnost

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \tag{2}$$

Lineární diskrétní systém

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{t+\Delta t} &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}_t \\
\boldsymbol{y}_t &= \boldsymbol{O}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}_t
\end{aligned}
$$

diskrétní tvar lze získat z tvaru spojitého modelu v časové oblasti

$$\boldsymbol{M} = e^{\mathbf{A}\Delta t}\,,\ \boldsymbol{N} = \left(e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\,,\ \boldsymbol{O} = \boldsymbol{C}\,,\ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$$

Nelineární systém

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{4}$$

2 Popište postup identifikace lineárního modelu SISO systému ve tvaru ARX a OE.

2.1 Auto Regresive model with eXogenous inputs

Lineární filtr používajíci minulé vstupy a výstupy systému

$$\hat{y}(t) + a_1 y(t - \Delta t) + \dots + a_n y(t - n\Delta t) = b_0 u(t) + \dots + b_n u(t - n\Delta t) \tag{5}$$

Pro N kroků měření lze vypsat $N - n$ rovnic

$$\begin{aligned} \hat{y}_n &= -a_1 y_{n-1} - \ldots - a_n y_0 + b_0 u_n + \dots + b_n u_0 \\ &\vdots \\ \hat{y}_N &= -a_1 y_{N-1} - \ldots - a_n y_{N-n} + b_0 u_N + \dots + b_n u_{N-n} \end{aligned}$$

Ty lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\hat{y}} = \boldsymbol{\Phi p} \,, \tag{6}$$

kde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\hat{y}} &= \begin{bmatrix} \hat{y}_n & \dots & \hat{y}_N \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{\Phi} &= \begin{bmatrix} y_{n-1} & \dots & y_0 & u_n & \dots & u_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & \dots & y_{N-n} & u_N & \dots & u_{N-n} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{p} &= \begin{bmatrix} -a_1 & \dots & -a_n & b_0 & \dots & b_n \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

2.2 Output Error model

Lineární filtr používajíci minulé vstupy a výstupy modelu

$$\hat{y}(t) + a_1 \hat{y}(t - \Delta t) + \dots + a_n \hat{y}(t - n\Delta t) = b_0 u(t) + \dots + b_n u(t - n\Delta t) \tag{7}$$

zbytek obdobně jako pro ARX jen se změnou y na $\hat{y}$.

3 Popište postup identifikace lineárního modelu SISO systému ve tvaru FIR.

$$\hat{y}(t) = g_0 u(t) + g_1 u(t - \Delta t) + \dots + g_n u(t - n\Delta t) \tag{8}$$

$$\hat{y}_n = g_0 u_n + g_1 u_{n-1} + \dots + g_n u_0 \tag{9}$$

$$\vdots \tag{10}$$

$$\hat{y}_N = g_0 u_N + g_1 u_{N-1} + \dots + g_n u_{N-n} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\hat{y}} = \boldsymbol{\Phi p} \,, \tag{12}$$

kde

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{y}} &= \begin{bmatrix} \hat{y}_n & \dots & \hat{y}_N \end{bmatrix}^T \\
\boldsymbol{\Phi} &= \begin{bmatrix} u_n & \dots & u_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N & \dots & u_{N-n} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{p} &= \begin{bmatrix} g_0 & \dots & g_n \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

4 Vysvětlete jak se sestavují Markovovy parametry a Hankelovy matice pro diskrétní stavový model.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1 &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0 & \boldsymbol{y}_0 &= \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_0 && (13) \\
\boldsymbol{x}_2 &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u_0} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u_1} && (14) \\
\boldsymbol{x}_{k+1} &= \sum_{i=0}^{k} \boldsymbol{A}^{k-i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i & \boldsymbol{y}_k &= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-i}\boldsymbol{B}}_{h_i}\boldsymbol{u}_i + \underbrace{\boldsymbol{D}}_{h_0}\boldsymbol{u}_k && (15)
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{U} \tag{16}
$$

kde $\boldsymbol{Y}$ je matice tvořena výstupy, $\boldsymbol{U}$ matice vstupů a matice $\boldsymbol{H}$ je Hankelova matice či matice *Markovových parametrů*. q je voleno dle času ustálení impulzové odezvy tak, aby $\boldsymbol{y_q} \approx \boldsymbol{0}$.

$$
\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{y}_0 & \dots & \boldsymbol{y}_q \end{bmatrix} \tag{17}
$$

$$
\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_0 & \boldsymbol{u}_1 & \dots & \boldsymbol{u}_q \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{u}_0 & \dots & \boldsymbol{u}_{q-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \dots & & \boldsymbol{u}_{q-p} \end{bmatrix} \tag{18}
$$

$$
\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_0 & \boldsymbol{h}_1 & \dots & \boldsymbol{h}_p \end{bmatrix} \tag{19}
$$

4.1 Hankelovy matice

$$
\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_p \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_p & h_{p+1} & \dots & h_{2p-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & \dots & h_{p+1} \\ h_3 & h_4 & \dots & h_{p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{p+1} & h_{p+2} & \dots & h_{2p} \end{bmatrix} \tag{20}
$$

5 Popište identifikaci diskrétního stavového modelu pomocí metody ERA při znalosti Hankelových matic a Markovových parametrů. Co je to balancovaný tvar modelu ?

Hanklovy matice $\boldsymbol{H}_1$ a $\boldsymbol{H}_2$ lze zapsat jako

$$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\,, \quad \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} \tag{21}$$

kde $\boldsymbol{P}$ je matice pozorovatelnosti a $\boldsymbol{Q}$ matice řiditelnosti.

Balancovaný tvar zajistíme SVD rozkladem $\boldsymbol{H}_1$ na

$$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Gamma}^2\boldsymbol{U}^T \Rightarrow \boldsymbol{P} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Gamma}\,,\ \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{U}^T \tag{22}$$

Matice identifikovaného systému pak jsou

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^+\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{Q}^+ \tag{23}$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}[:, 1 : s] \tag{24}$$
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}[1 : r, :] \tag{25}$$

kde s je počet vstupů, r počet výstupů a $\boldsymbol{P}^+$, $\boldsymbol{Q}^+$ pseudo-inverze, které lze získat přímo z SVD rozkladu

$$\boldsymbol{P}^+ = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{V}^T\,,\ \boldsymbol{Q}^+ = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \tag{26}$$

6 Vysvětlete rozdíl mezi modelem MDOF tlumeného mechanického systému s viskózním a strukturním tlumením. V čem je model se strukturním tlumením problematický pro časovou simulaci ?

Pohybové rovnice systému buzeného harmonickou funkcí

- s viskózním tlumením

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \tag{27}$$

- se strukturním tlumením

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + (j\boldsymbol{H} + \boldsymbol{K})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \tag{28}$$

Strukturní model tlumení se speciálně orientovaný na analýzu ve frekvenčí oblasti, jelikož v časové oblasti zanáší do simulace komplexní čísla.

Ve frekvenční oblasti $\boldsymbol{B}\omega = \boldsymbol{H}$

7 Popište modální transformaci mechanického systému, vysvětlete pojem proporcionálního tlumení.

Pro systém ve tvaru

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}$$

je základem modální trasformace nalezení řešení zobecněného problému vlastních čísel

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}$$

kde $\boldsymbol{\phi}_i$ jsou vlastní vektory a Ω_i vlastní frekvence tvořící matice $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{\Omega}$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_i & \dots & \boldsymbol{\phi}_N \end{bmatrix} \, , \; \boldsymbol{\Omega}^2 = \mathrm{diag}(\Omega_i^2) \, , \quad i \in \langle 1, N \rangle$$

Pro navzájem ortogonální vlastní vektory s vahou matice hmotnosti (získané příslušnou normalizací) platí

$$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{1} \, , \quad \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega}^2$$

lze zavedením modální souřadnic $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{q}$ a vynásobením transponovanou maticí modální transformace $\boldsymbol{V}^T$ zleva, převést do tvaru

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{q} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{F} \, , \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{V} \, , \; \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}$$

O systému můžeme říct, že má proporční tlumení, je-li matice $\boldsymbol{C}$ lineární kombinací matic $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{K}$. Pak je tato matice diagonalizovatelná modální transformací $\boldsymbol{V}$ a matice $\boldsymbol{\Gamma}$ je diagonální s prvky $(\boldsymbol{\Gamma})_{ii} = 2\zeta_i\Omega_i$, kde ζ_i jsou poměrné útlumy. Soustava se pak rozpadá na samostatně řešitelné rovnice ve tvaru

$$\ddot{q}_i + 2\,\Omega_i\xi_i\dot{q} + \Omega_i^2 q = f_i \, , \quad f_i = \boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{F} \, , \quad i \in \langle 1, N \rangle$$

8 Napište a vysvětlete MAC kritérium pro porovnání vlastních tvarů modelu a vlastních tvarů naměřených.

Modal Assurance Criterion

$$M_{rq} = \frac{(\phi_{A_r}^T\phi_{X_r})^2}{(\phi_{A_r}^T\phi_{A_r})(\phi_{X_r}^T\phi_{X_r})} \, , \quad r = 1, \dots, n \, , \; q = 1, \dots, m \tag{29}$$

kde n a m je počet módů, ϕ_{A_q} měřené vlastní vekotry a ϕ_{X_r} vlastní vektory modelu.

MAC kritérium se užívá pro zhodnocení shody vlastních vektorů modelu a měřeného systému. Při dokonalé shodě $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}$.

9 Popište metodu SDOF identifikace mechanického systému z naměřených přenosových funkcí.

Tato metoda je použitelná pouze pro lineární identifikaci. Často v kombinaci s *chirp* buzením. Výhoda reprezentace dat ve frekvenční oblasti je hustota informace a relativně nízká míra její ztráty oproti časové oblasti, kde mohou být data uložena pouze jako série diskrétních datových bodů [Matlab].

10 Popište princip LSCF metody MDOF identifikace mechanického systému z naměřených přenosových funkcí. K čemu slouží stabilizační diagram ?

Least Squares Complex Frequency domain estimator

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{\boldsymbol{B}(s)}{\boldsymbol{A}(s)} \tag{30}$$

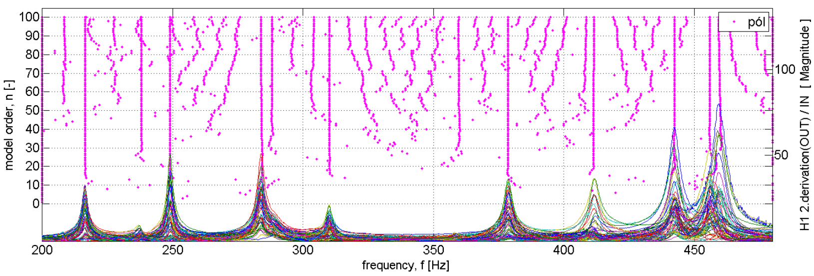
kde

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_{11}(s) & B_{12}(s) & \dots & B_{1N_i}(s) \\ B_{21}(s) & B_{22}(s) & \dots & B_{2N_i}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N_o1}(s) & B_{N_o2}(s) & \dots & B_{N_oN_i}(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11}(s) & A_{12}(s) & \dots & A_{1N_i}(s) \\ A_{21}(s) & A_{22}(s) & \dots & A_{2N_i}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N_o1}(s) & A_{N_o2}(s) & \dots & A_{N_oN_i}(s) \end{bmatrix} \tag{31}$$

a

$$B_{ii} = \sum_{j=0}^{m} b_{ii_j} s^j \ , \quad A_{ii} = \sum_{j=0}^{n} a_{ii_j} s^j \tag{32}$$

Stabilizační diagram slouží k identifikaci fyzikálních pólů, které se nemění při postupném zvyšování řádu modelu.

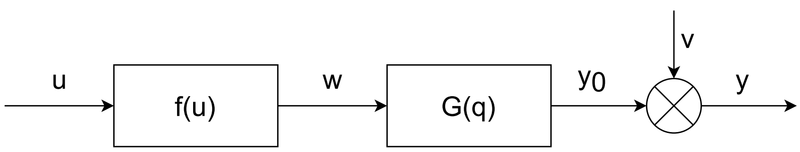


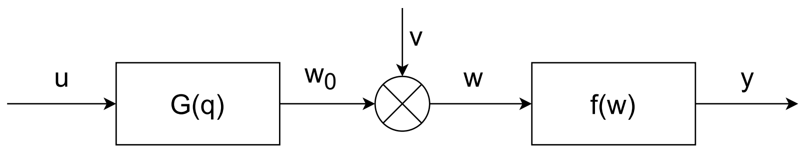
Obrázek 1: Stabilizační diagram

11 Co je nelineární model Hammersteinova typu a nelineární model Wienerova typu.

Modely skládající se z dynamického lineárního přenosu $G(q)$ a statické nelineární funkce f

Model Hammersteinova typu





Model Weinerova typu

12 Uveďte strukturu nelineární identifikace používající koncept LOLIMOT.

LOcal LInear MOdels Tree
The main idea is to approximate a generally nonlinear multivariable function describing a dynamic system output with the scalar product of the vector of linear functions of the system inputs and the vector of so-called validity functions.

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{M} \hat{y}_i(\boldsymbol{x})\phi_i(\boldsymbol{z}) \tag{33}$$

kde $\hat{y}_i$ jsou *lokální lineární modely*

$$\hat{y}_i = w_{i0} + w_{i1}x_1 + w_{i2}x_2 + \cdots + w_{in}x_n \tag{34}$$

a $\phi_i(u)$ jejich platnostní funkce, formulovány jako normalizované ortogonální Gaussovské rozdělení, které splňují

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(u) = 1\ , \quad \phi_i(u) = \frac{\mu_i(u)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(u)}\ , \quad \mu_i = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} \frac{(u_j - c_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2}\right) \tag{35}$$

kde M je počet LLM a c_{ij} a σ_{ij}^2, která jsou volitelná, jsou popořadě střední hodnota a rozptyl i-tého rozdělení pro j-tý LLM. Vektory zobecněných vstupů, neboli *regresorů*, $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{z}$ obecně obsahují okamžité vstupy systému $u_j(k)$, minulé vstupy systému $u_j(k-r)$ a minulé výstupy systému $y(k-s)$, kde r a s jsou horizonty závislosti na vstupech a výstupech, popořadě. $\boldsymbol{z}$ je nazýván vektor premis (premises) a $\boldsymbol{x}$ vektor konsekventů (consequents).

- Vnitřní cyklus: výpočet koeficientů w_i LLM při daném rozložení platnostních funkcí (exaktní - LSQ)
- Vnější cyklus: hledání vhodného "rozdělení"oblasti (heuristika)

13 Uveďte postup identifikace nelineárního diskrétního dynamického modelu LOLIMOT typu NARX.

LOLIMOT typu NARX (Nonlinear Auto Regressive with Exogenous inputs) se liší od modelu v otázce 12 pouze ve tvaru lokálních modelů, který lze obecně zapsat jako

$$\hat{y}_k = f(u_k, u_{k-1}, \ldots, y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots) \tag{36}$$

a způsobu jejich identifikace.

14 Vysvětlete pojmy testování a trénování identifikovaného modelu.

Trénování

Při trénování jsou parametry identifikovaného modelu upravovány tak, aby chování systému co nejvíce odpovídalo *trénovacím datům.*

Testování

Při testování porovnáváme chování identifikovaného modelu k nové sadě *testovacích dat*, abychom ověřili, že nedošlo k přetrénovaní modelu, tzn. přizpůsobení ke konkrétním trénovacím datům, nikoliv obecnému chování.

15 Vysvětlete rozdíl mezi simulačním a predikčním trénováním a použitím LOLIMOT modelu a souvislost těchto pojmů s NARX a NOE modely.

Simulační trénování

Identifikovaný model je odpojený od reálného systému a pracuje pouze s jeho vstupy, kde chyba výstupu se kumuluje.

Odpovídá schématu NOE (Nonlinear Output Error)

$$\hat{y}_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, \hat{y}_{k-1}, \hat{y}_{k-2}, \dots) \tag{37}$$

Predikční trénování

Model je připojen k výstupům modelu realného systému

Odpovídá schématu NARX

$$\hat{y}_k = f(u_k, u_{k-1}, \dots, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots) \tag{38}$$

16 Uveďte příklad identifikace ad-hoc sestaveného dynamického modelu soustavy s pomocí obecných optimalizačních metod.

17 Uveďte základní postup identifikace fyzikálního modelu získaného např. z MKP po transformaci do redukovaného modálního tvaru. V čem tato redukce usnadní postup identifikace ?

Na základě naměřených/navržených vlastností materiálu vytvořím mkp model ve tvaru

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}$$

Ten následně transformuju do modálních souřadnic

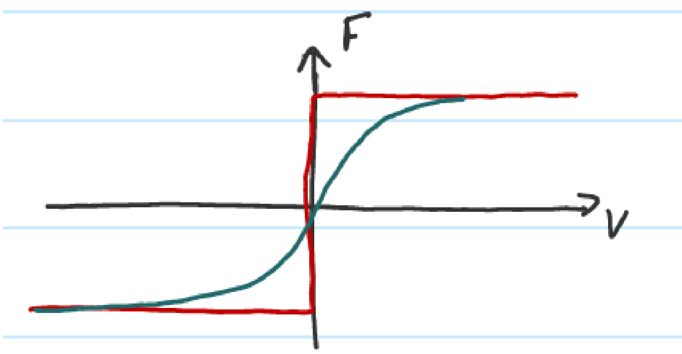
$$\boldsymbol{I}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{q} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{F}\ , \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{V}\ , \ \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}$$

a oříznu mimodiagonální prvky transformované matice tlumení $\boldsymbol{\Gamma}$, přičemž prvky na diagonále lze vyjádřit jako $\beta_{ii} = 2b_{r_i}\Omega_i$. Dále můžu provést redukci, ostraněním tvarů odpovídajících vyšším frekvencím systému.

Vyslédkem je model závislý pouze na parametrech ω_i, b_{r_i} pro každý zanechaný tvar, které můžu dále optimalizovat. Oproti black-box identifikaci nehrozí vznik umělých artefaktů.

18 Uveďte příklad využití fenomenologického identifikovaného modelu pro simulaci.

Fenomenologicky například inentifikujeme tření nebo nelineární chování tlumiče.



Obrázek 2: Coulomb

19 Popište použití identifikovaného modelu soustavy v regulátoru s prediktivním řízením. Jak souvisí s pojmy NARX a NOE modelů ?

Obrázek 3: Streibeck