1 Popište možné tvary dynamických systémů pro modely: spojité-diskrétní, lineární-nelineární.

Lineární spojitý systém v časové oblasti

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

Lineární spojitý systém ve frekvenční oblasti

$$\begin{aligned}s\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

Po úpravě $\boldsymbol{x}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ můžeme dosadit

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{1}$$

Dynamická poddajnost

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \tag{2}$$

Lineární diskrétní systém

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{t+\Delta t} &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}_t\\ \boldsymbol{y}_t &= \boldsymbol{O}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}_t\end{aligned}$$

diskrétní tvar lze získat z tvaru spojitého modelu v časové oblasti

$$\boldsymbol{M} = e^{\boldsymbol{A}\Delta t} \doteq \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}\Delta t\,,\ \boldsymbol{N} = \boldsymbol{B}\,,\ \boldsymbol{O} = \boldsymbol{C}\,,\ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$$

Nelineární systém

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{3}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{4}$$

2 Popište postup identifikace lineárního modelu SISO systému ve tvaru ARX a OE.

2.1 ARX

Lineární filtr používajíci minulé vstupy a výstupy systému

$$\hat{y}(t) + a_1 y(t-\Delta t) + \cdots + a_n y(t-n\Delta t) = b_0 u(t) + \cdots + b_n u(t-n\Delta t) \tag{5}$$

Pro N kroků měření lze vypsat $N-n$ rovnic

$$\begin{aligned}
\hat{y}_n &= -a_1 y_{n-1} - \ldots - a_n y_0 + b_0 u_n + \cdots + b_n u_0 \\
&\vdots \\
\hat{y}_N &= -a_1 y_{N-1} - \ldots - a_n y_{N-n} + b_0 u_N + \cdots + b_n u_{N-n}
\end{aligned}$$

Ty lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\hat{y}} = \boldsymbol{\Phi p} \,, \tag{6}$$

kde

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\hat{y}} &= \begin{bmatrix} \hat{y}_n & \ldots & \hat{y}_N \end{bmatrix}^T \\
\boldsymbol{\Phi} &= \begin{bmatrix} y_{n-1} & \ldots & y_0 & u_n & \ldots & u_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & \ldots & y_{N-n} & u_N & \ldots & u_{N-n} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{p} &= \begin{bmatrix} -a_1 & \ldots & -a_n & b_0 & \ldots & b_n \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

2.2 EO

Lineární filtr používajíci minulé vstupy a výstupy modelu

$$\hat{y}(t) + a_1 \hat{y}(t-\Delta t) + \cdots + a_n \hat{y}(t-n\Delta t) = b_0 u(t) + \cdots + b_n u(t-n\Delta t) \tag{7}$$

zbytek obdobně jako pro ARX jen se změnou y na $\hat{y}$.

3 Popište postup identifikace lineárního modelu SISO systému ve tvaru FIR.

$$\hat{y}(t) = g_0 u(t) + g_1 u(t-\Delta t) + \cdots + g_n u(t-n\Delta t) \tag{8}$$

$$\hat{y}_n = g_0 u_n + g_1 u_{n-1} + \cdots + g_n u_0 \tag{9}$$

$$\vdots \tag{10}$$

$$\hat{y}_N = g_0 u_N + g_1 u_{N-1} + \cdots + g_n u_{N-n} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\hat{y}} = \boldsymbol{\Phi p} \,, \tag{12}$$

kde

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_n & \dots & \hat{y}_N \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} u_n & \dots & u_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N & \dots & u_{N-n} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} g_0 & \dots & g_n \end{bmatrix}^T$$

4 Vysvětlete jak se sestavují Markovovy parametry a Hankelovy matice pro diskrétní stavový model.

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0 \qquad \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_0 \tag{13}$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_1 \qquad \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_1 \tag{14}$$

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} \boldsymbol{A}^{k-i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i \qquad \boldsymbol{y}_k = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-i}\boldsymbol{B}}_{h_i}\boldsymbol{u}_i + \underbrace{\boldsymbol{D}}_{h_0}\boldsymbol{u}_k \tag{15}$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{H} \tag{16}$$

kde $\boldsymbol{Y}$ je matice tvořena výstupy, $\boldsymbol{U}$ matice vstupů a matice $\boldsymbol{H}$ *Markovovy parametry.*

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{y}_0 & \dots & \boldsymbol{y}_q \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_0 & \boldsymbol{u}_1 & \dots & \boldsymbol{u}_q \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{u}_0 & \dots & \boldsymbol{u}_{q-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \dots & & \boldsymbol{u}_{q-p} \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_0 & \boldsymbol{h}_1 & \dots & \boldsymbol{h}_p \end{bmatrix} \tag{19}$$

4.1 Hankelovy matice

$$\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_p \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_p & h_{p+1} & \dots & h_{2p-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & \dots & h_{p+1} \\ h_3 & h_4 & \dots & h_{p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{p+1} & h_{p+2} & \dots & h_{2p} \end{bmatrix} \tag{20}$$

5 Popište identifikaci diskrétního stavového modelu pomocí metody ERA při znalosti Hankelových matic a Markovových parametrů. Co je to balancovaný tvar modelu ?

6 Vysvětlete rozdíl mezi modelem MDOF tlumeného mechanického systému s viskózním a strukturním tlumením. V čem je model se strukturním tlumením problematický pro časovou simulaci ?

6.1 Pohybové rovnice systému buzeného harmonickou funkcí

- s viskózním tlumením

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \tag{21}$$

- se strukturním tlumením

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{K} + j\boldsymbol{H})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \tag{22}$$

Strukturní model tlumení se speciálně orientovaný na analýzu ve frekvenčí oblasti, jelikož v časové oblasti zanáší do simulace komplexní čísla.

Ve frekvenční oblasti $\boldsymbol{B}\omega = \boldsymbol{H}$

7 Popište modální transformaci mechanického systému, vysvětlete pojem proporcionálního tlumení.

Základem modální trasformace je nalezení řešení problému vlastních čísel

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}$$

kde $\boldsymbol{\phi}_i$ jsou vlastní vektory a ω_i vlastní frekvence tvořící matice $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{\Omega}$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}_i & \dots & \boldsymbol{\phi}_N\end{bmatrix}\,,\ \boldsymbol{\Omega}^2 = \mathrm{diag}(\omega_i^2)\ , \quad i \in \langle 1, N\rangle$$

Po té platí

$$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{1}\ , \quad \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega}^2$$

Soustavu pohybovných rovnic systému s proporčním tlumením

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}$$

lze zavedením modální souřadnice $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}$ a vynásobením transponovanou maticí modální transformace $\boldsymbol{V}^T$ zleva, převést do tvaru

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{q} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{F}\ , \quad \boldsymbol{\beta} = \mathrm{diag}(2\,b_{r_i}\omega_i)\ , \quad i \in \langle 1, N\rangle$$

kde b_{r_i} jsou poměrné útlumy.

Soustava se pak rozpadá na rovnice ve tvaru

$$\ddot{q}_i + 2\,\omega_i\xi_i\dot{q} + \omega_i^2 q = f_i\ , \quad f_i = \boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{F}\ , \quad i \in \langle 1, N\rangle$$

8 Napište a vysvětlete MAC kritérium pro porovnání vlastních tvarů modelu a vlastních tvarů naměřených.

Modal Assurance Criterion

$$M_{rq} = \frac{\phi_{A_r}^T \phi_{X_r}}{(\phi_{A_r}^T \phi_{A_r})(\phi_{X_r}^T \phi_{X_r})} \ , \quad r = 1, \ldots, n \ , \ q = 1, \ldots, m \tag{23}$$

kde n a m je počet módů, ϕ_{A_q} měřené vlastní vekotry a ϕ_{X_r} vlastní vektory modelu.

MAC kritérium se užívá pro zhodnocení shody vlastních vektorů modelu a měřeného systému. Při dokonalé shodě $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}$.

9 Popište metodu SDOF identifikace mechanického systému z naměřených přenosových funkcí.

10 Popište princip LSCF metody MDOF identifikace mechanického systému z naměřených přenosových funkcí. K čemu slouží stabilizační diagram ?

11 Co je nelineární model Hammersteinova typu a nelineární model Wienerova typu.

12 Uveďte strukturu nelineární identifikace používající koncept LOLIMOT.

Local Linear Models Tree

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{M} \hat{y}_i \phi_i(\boldsymbol{u}) \tag{24}$$

kde $\hat{y}_i = w_{i0} + w_{i1}u_1 + w_{i2}u_2 + \ldots$ jsou lokální lineární modely a $\phi_i(u)$ jejich platnostní funkce. Ty splňují

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(u) = 1 \ , \quad \phi_i(u) = \frac{\mu_i(u)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(u)} \ , \quad \mu_i = \exp(-\frac{1}{2}(...)) \tag{25}$$

13 Uveďte postup identifikace nelineárního diskrétního dynamického modelu LOLIMOT typu NARX.

14 Vysvětlete pojmy testování a trénování identifikovaného modelu.

15 Vysvětlete rozdíl mezi simulačním a predikčním trénováním a použitím LOLIMOT modelu a souvislost těchto pojmů s NARX a NOE modely.

16 Uveďte příklad identifikace ad-hoc sestaveného dynamického modelu soustavy s pomocí obecných optimalizačních metod.

17 Uveďte základní postup identifikace fyzikálního modelu získaného např. z MKP po transformaci do redukovaného modálního tvaru. V čem tato redukce usnadní postup identifikace ?

18 Uveďte příklad využití fenomenologického identifikovaného modelu pro simulaci.

19 Popište použití identifikovaného modelu soustavy v regulátoru s prediktivním řízením. Jak souvisí s pojmy NARX a NOE modelů ?