Variační princip

Oblast tělesa

Těleso reprezentujeme jako oblast Ω v euklidovském prostoru $\mathbb{E}_3$ s hranicí $\partial\Omega$:

$$\partial\Omega_\sigma \cup \partial\Omega_u = \partial\Omega \qquad \partial\Omega_\sigma \cap \partial\Omega_u = \emptyset$$

$\partial\Omega_\sigma$ - část se silovou okrajovou podmínkou

$\partial\Omega_u$ - část s kinematickou okrajovou podmínkou

Celková potenciální energie

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\, dV - \left(\int\limits_{\Omega} X_i u_i\, dV + \int\limits_{\partial\Omega_\sigma} p_i u_i\, dS \right) , \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

U - deformační energie

W - potenciál vnějších sil

$\vec{\vec{\sigma}}$ - tenzorové pole napjatostí

$\vec{\vec{\varepsilon}}$ - Cauchyho tenzor deformací

$\vec{X}$ - pole vnějších objemových sil

$\vec{u}$ - pole posuvů

$\vec{p}$ - vektor vnějších povrchových sil

Staticky přípustné pole napětí

Staticky přípustné pole napětí je každé tensorové pole $\vec{\vec{\sigma}}(x, y, z)$, které splňuje rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \ , \quad \sigma_{ij} \in \mathbb{C}^1_\Omega$$

a silové okrajové podmínky:

$$\sigma_{ij} n^0_j = p_i \ , \quad \forall\, [x, y, z] \in \partial\Omega_\sigma$$

kde $\vec{n}^0$ je normála na hranici $\partial\Omega$

Kinematicky přípustné pole posuvů

Kinematicky přípustné pole posuvů je každé vektorové pole $\vec{u}(x, y, z)$, které je spojitě diferencovatelné a splňuje kinematické okrajové podmínky

$$\vec{u}(x, y, z) = \vec{u}_{\partial\Omega}(x, y, z) \ , \quad \forall\, [x, y, z] \in \partial\Omega$$

kde $\vec{u}_{\partial\Omega}$ jsou vynucené posuvy.

Princip virtuálních prací

Platí identita

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\, dV - \int\limits_{\Omega} X_i u_i\, dV - \int\limits_{\partial\Omega_\sigma} p_i u_i\, dS - \int\limits_{\partial\Omega_u} \sigma_{ij} n_j^0 u_i\, dS = 0\ , \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

pokud:

$\vec{\vec{\sigma}}$ - staticky přípustné pole napjatosti

$\vec{u}$ - kinematicky přípustné pole posuvů

Princip virtuálních posuvů

Platí identita

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}^0 \delta\varepsilon_{ij}\, dV - \int\limits_{\Omega} X_i \delta u_i\, dV - \int\limits_{\partial\Omega_\sigma} p_i \delta u_i\, dS = 0\ , \quad \delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}\right)$$

pokud $\vec{u}^0 + \delta\vec{u}$ je kinematicky přípustné pole posuvů

$$\vec{u}^0 + \delta\vec{u} = \vec{u}_{\partial\Omega}(x,y,z)\ ,\ \forall\,[x,y,z] \in \partial\Omega \quad \Rightarrow \quad \delta\vec{u} = \vec{0}\ ,\ \forall\,[x,y,z] \in \partial\Omega_u$$

kde

$\vec{u}^0, \vec{\vec{\sigma}}^0$ - řešení úlohy pružnosti

$\delta\vec{\vec{\varepsilon}}$ - Cauchyho tenzor virtuálních deformací

$\delta\vec{u}$ - pole virtuálních posuvů

MKP

1D element

Obecný posuv $u(\xi)$ a deformace $\varepsilon(\xi)$ elementu

$$u(\xi) = \underline{N}^e(\xi)\,\underline{\delta}^e\,, \quad \underline{N}^e = \begin{bmatrix} 1-\frac{\xi}{l} \\ \frac{\xi}{l} \end{bmatrix} \text{ – matice tvarových funkcí}$$

$$\varepsilon(\xi) = \underline{B}^e(\xi)\,\underline{\delta}^e\,, \quad \underline{B}^e = \frac{\partial \underline{N}^e}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} \text{ – operátor z uzlových posuvů na deformace}$$

kde

$\underline{\delta}^e = [\,u_1^e\, u_2^e\,]^T$ - vektor posuvů uzlových bodů

Deformační energie elementu U^e

$$U^e = \frac{1}{2}\int_0^l E\varepsilon^2(\xi)A d\xi = \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int_0^l \underline{B}^{e^T} EA\,\underline{B}^e d\xi}_{\underline{\underline{K}}^e}\;\underline{\delta}^e = \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T}\underline{\underline{K}}^e\,\underline{\delta}^e\,, \quad \underline{\underline{K}}^e \text{ – matice tuhosti elementu}$$

Objemová síla $X(\xi)$ v místě ξ

$$X(\xi) = \underline{N}^e(\xi)\underline{X}^e\,, \quad \underline{X}^e \text{ – pole uzlových objemových sil}$$

Potenciál vnější objemové síly W^e

$$W^e = \int_0^l u(\xi)X(\xi)A d\xi = \underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int_0^l \underline{N}^{e^T}\underline{N}^e A\,d\xi\;\underline{X}^e}_{\underline{F}^e} = \underline{\delta}^{e^T}\underline{F}^e\,, \quad \underline{F}^e \text{ – vektor ekvivalentních uzlových sil}$$

Celková potenciální energie elementu

$$\Pi^e = U^e - W^e = \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int_0^l \underline{B}^{e^T} EA\,\underline{B}^e d\xi}_{\underline{\underline{K}}^e}\;\underline{\delta}^e - \underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int_0^l \underline{N}^{e^T}\underline{N}^e A\,d\xi\;\underline{X}^e}_{\underline{F}^e} = \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T}\underline{\underline{K}}^e\,\underline{\delta}^e - \underline{\delta}^{e^T}\underline{F}^e$$

Celková potenciální energie modelu

$$\Pi = \sum_{e=1}^{N_e}\Pi^e = \sum_{e=1}^{N_e}\left(\frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T}\underline{\underline{K}}^e\,\underline{\delta}^e - \underline{\delta}^{e^T}\underline{F}^e\right) = \sum_{e=1}^{N_e}\left(\frac{1}{2}\underline{\Delta}^T\underline{\underline{\tilde{K}}}^e\,\underline{\Delta} - \underline{\Delta}^T\underline{\tilde{F}}^e\right) = \frac{1}{2}\underline{\Delta}^T\underline{\underline{K}}\,\underline{\Delta} - \underline{\Delta}^T\underline{F}$$

kde

$\underline{\Delta}$ - vektor globálních uzlových posuvů

$\underline{\underline{K}}$ - globální matice tuhosti

$\underline{\underline{\tilde{K}}}^e$ - matice tuhosti elementu o rozměru $\underline{\underline{K}}$

$\underline{F}$ - globální vektor ekvivalentních uzlových sil

$\underline{\tilde{F}}^e$ - vektor ekvivalentních uzlových sil elementu o rozměru $\underline{F}$

Princip minima celkové potenciální energie

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_m} = 0\,; \quad m = 1,\ldots,N_{DOF}\,; \quad N_{DOF} \text{ – počet stupňů volnosti úlohy}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}K_{ij}\Delta_i\Delta_j - \Delta_i F_i}{\partial \Delta_m} = \frac{1}{2}K_{mj}\Delta_j + \frac{1}{2}K_{im}\Delta_i - F_m = K_{mj}\Delta_j - F_m = 0$$

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{\Delta} = \underline{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_m} = 0$$

2D element

x, y - souřadnice v prostoru
$\underline{\delta}^e$ - pole uzlových posuvů elementu

$\underline{u}$ - pole posuvů elementu
$\underline{\varepsilon}$ - pole deformací elementu

$\underline{\alpha}$ - Parametry pole posuvů
$\underline{\underline{A}}$ - Matice koeficientů
$\underline{\underline{S}}$ - Operátor parametrů $\underline{\alpha}$ na pole posuvů
$\underline{\underline{D}}$ - Diferenciální operátor mezi posuvy a deformacemi

$\underline{\underline{N}}^e$ - Matice tvarových funkcí
$\underline{\underline{B}}^e$ - Operátor uzlových posunů na deformace

$\underline{\varepsilon}_0$ - pole deformací elementu vlivem teploty
$\underline{\varepsilon}_\sigma$ - pole deformací elementu vlivem napětí

U - Deformační energie
$\underline{\underline{E}}^e$ - matice elastických konstant
$\underline{\underline{K}}^e$ - matice tuhosti elementu

Π - Celková potenciální energie
$\underline{p}$ - pole vnějších povrchových sil ???
$\underline{X}$ - pole vnějších objemových sil ???

$\underline{\tilde{F}}^{eE}$ - objemová síla (konstantní)
$\underline{F}^l$ - liniová vnější síla (abstrakce tlaku)

Pole posuvů $\underline{u}(x, y)$ a deformací $\underline{\varepsilon}(x, y)$ elementu

$$\underline{u}(x,y) = \underline{\underline{A}}(x,y)\,\underline{\alpha} = \underline{\underline{A}}(x,y)\,\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\delta}^e = \underline{\underline{N}}^e(x,y)\,\underline{\delta}^e$$

$$\underline{\varepsilon}(x,y) = \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{N}}^e(x,y)\,\underline{\delta}^e = \underline{\underline{B}}^e(x,y)\,\underline{\delta}^e\,, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Změna pole deformací $\underline{\varepsilon}$ vlivem teploty

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_\sigma + \underline{\varepsilon}_0\,, \quad \underline{\varepsilon}_0 = \alpha \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hustota deformační energie Λ

$$\Lambda = \frac{1}{2}\,\underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} = \frac{1}{2}\,\underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{E}}\,\underline{\varepsilon}_\sigma = \frac{1}{2}\,\underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{E}}\,(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_0) = \frac{1}{2}\,\underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{E}}\,\underline{\varepsilon} - \frac{1}{2}\,\underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{E}}\,\underline{\varepsilon}_0$$

Deformační energie U

$$U = \int\limits_\Omega \Lambda\; dV = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{E}}\,\underline{\varepsilon}\; dV + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{E}}\,\underline{\varepsilon}_0\; dV = \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int\limits_\Omega \underline{\underline{B}}^{e^T} \underline{\underline{E}}\;\underline{\underline{B}}^e\, dV}_{\underline{\underline{K}}^e} \underline{\delta}^e - \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int\limits_\Omega \underline{\underline{B}}^{e^T} \underline{\underline{E}}\;\underline{\varepsilon}_0\; dV}_{\underline{F}^{ET}}$$

Celková potenciální energie

$$\Pi = \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int\limits_\Omega \underline{\underline{B}}^{e^T} \underline{\underline{E}}\;\underline{\underline{B}}^e\, dV}_{\underline{\underline{K}}^e} \underline{\delta}^e - \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int\limits_\Omega \underline{\underline{B}}^{e^T} \underline{\underline{E}}\;\underline{\varepsilon}_0\; dV}_{\underline{F}^{ET}} - \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int\limits_\Omega \underline{\underline{N}}^{e^T} \underline{X}\; dV}_{\underline{F}^{ef}} - \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int\limits_{\partial\Omega} \underline{\underline{N}}^{e^T} \underline{p}\; dS}_{\underline{F}^{ep}}$$

Desky a skořepiny

Kružnice s největším R_{max} a nejmenším R_{min} poloměrem křivosti leží v navzájem kolmých hlavních rovinách křivosti

Reissner-Mindlinova teorie skořepin

Předpoklad: Hmotná normála ke střednici v nedeformovaném stavu zůstává po deformaci přímá

Kirchhofova teorie skořepin

Předpoklad: Hmotná normála ke střednici v nedeformovaném stavu přejde po deformaci v normálu k deformované střednici

Typy deformací tenkostěnných těles

Membránová deformace ε_m

- Řez střednicí se prodlouží, ale nezmění se křivost
- Hmotné normály zůstavají kolmé na deformovanou střednici
- Konstantní po tloušťce

Ohybová deformace ε_o

- Řez střednicí se neprodlouží, ale změní se křivost
- Hmotné normály zůstavají kolmé na deformovanou střednici
- Lineární po tloušťce

Smyková příčná deformace γ_t

- Řez střednicí se neprodlouží, nezmění se křivost
- Hmotné normály zůstávají přímé, ale ne obecně kolmé na deformovanou střednici
- Konstantní po tloušťce

Klasifikace skořepinových prvků

- Membrány - "nemají ohybová ani příčná smyková napětí" ε_m
- Desky - "nemají membránová napětí" ε_o, γ_t
- Skořepiny - "mají ohybová napětí" $\varepsilon_m, \varepsilon_o, (\gamma_t$ - thick, general/universal)
  - tenké (thin) - obvykle se míní Kirchhoffovské
  - tlusté (thick) - obvykle Mindlinovské
  - obecné (general/universal) - obvykle mindlinovské se smykovou závorou

Numerická integrace

Lagrangeův interpolační polynom

$$l_j = \frac{(r-r_0)(r-r_1)\dots(r-r_{j-1})(r-r_{j+1})\dots(r-r_n)}{(r_j-r_0)(r_j-r_1)\dots(r_j-r_{j-1})(r_j-r_{j+1})\dots(r_j-r_n)}\,; \quad l_j(r_j)=1\,;\ l_j(r_{k\neq j})=0\,;\ l_j \text{ je řádu } n \text{ v } r \tag{1}$$

Polynomická interpolační funkce

$$\psi(r) = f_0 l_0(r) + f_1 l_1(r) + \dots + f_n l_n(r)\,; \quad \psi(r_i) = f(r_i) = f_i\,;\ \psi \in p^n \tag{2}$$