Variační princip

Oblast tělesa

Těleso reprezentujeme jako oblast Ω v euklidovském prostoru $\mathbb{E}_3$ s hranicí $\partial\Omega$:

$$\partial\Omega_\sigma \cup \partial\Omega_u = \partial\Omega \qquad \partial\Omega_\sigma \cap \partial\Omega_u = \emptyset$$

$\partial\Omega_\sigma$ - část se silovou okrajovou podmínkou
$\partial\Omega_u$ - část s kinematickou okrajovou podmínkou

Celková potenciální energie

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sigma_{ij}\epsilon_{ij}\, dV - \left(\int\limits_\Omega X_i u_i\, dV + \int\limits_{\partial\Omega_\sigma} p_i u_i\, dS \right) , \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

U - deformační energie
W - potenciál vnějších sil
$\vec{\vec{\sigma}}$ - tenzorové pole napjatostí
$\vec{\vec{\epsilon}}$ - Cauchyho tenzor deformací
$\vec{X}$ - pole vnějších objemových sil
$\vec{u}$ - pole posuvů
$\vec{p}$ - vektor vnějších povrchových sil

Staticky přípustné pole napětí

Staticky přípustné pole napětí je každé tensorové pole $\vec{\vec{\sigma}}(x, y, z)$, které splňuje rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 , \quad \sigma_{ij} \in \mathbb{C}^1_\Omega$$

a silové okrajové podmínky:

$$\sigma_{ij} n^0_j = p_i , \quad \forall\, [x, y, z] \in \partial\Omega_\sigma$$

kde $\vec{n}^0$ je normála na hranici $\partial\Omega$

Kinematicky přípustné pole posuvů

Kinematicky přípustné pole posuvů je každé vektorové pole $\vec{u}(x, y, z)$, které je spojitě diferencovatelné a splňuje kinematické okrajové podmínky

$$\vec{u}(x, y, z) = \vec{u}_{\partial\Omega}(x, y, z) , \quad \forall\, [x, y, z] \in \partial\Omega$$

kde $\vec{u}_{\partial\Omega}$ jsou vynucené posuvy.

Princip virtuálních prací

Platí identita

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}\epsilon_{ij}\,dV - \int\limits_{\Omega} X_i u_i\,dV - \int\limits_{\partial\Omega_\sigma} p_i u_i\,dS - \int\limits_{\partial\Omega_u} \sigma_{ij} n_j^0 u_i\,dS = 0$$

pokud:

$\vec{\vec{\sigma}}$ - staticky přípustné pole napjatosti

$\vec{u}$ - kinematicky přípustné pole posuvů

Princip virtuálních posuvů

Platí identita

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}^0 \delta\epsilon_{ij}\,dV - \int\limits_{\Omega} X_i \delta u_i\,dV - \int\limits_{\partial\Omega_\sigma} p_i \delta u_i\,dS = 0\ , \quad \delta\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}\right)$$

pokud $\vec{u}^0 + \delta\vec{u}$ je kinematicky přípustné pole posuvů

$$\vec{u}^0 + \delta\vec{u} = \vec{u}_{\partial\Omega}(x,y,z)\ ,\ \forall\,[x,y,z] \in \partial\Omega \quad \Rightarrow \quad \delta\vec{u} = \vec{0}\ ,\ \forall\,[x,y,z] \in \partial\Omega_u$$

kde

$\vec{u}^0, \vec{\vec{\sigma}}^0$ - řešení úlohy pružnosti

$\delta\vec{\vec{\epsilon}}$ - Cauchyho tenzor virtuálních deformací

$\delta\vec{u}$ - pole virtuálních posuvů

MKP

1D element

Obecný posuv $u(\xi)$ a deformace $\epsilon(\xi)$ elementu

$$u(\xi) = \underline{N}^e(\xi)\,\underline{\delta}^e\,, \quad \underline{N}^e = \begin{bmatrix} 1-\frac{\xi}{l} \\ \frac{\xi}{l} \end{bmatrix} \text{ – matice tvarových funkcí}$$

$$\epsilon(\xi) = \underline{B}^e(\xi)\,\underline{\delta}^e\,, \quad \underline{B}^e = \frac{\partial \underline{N}^e}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} \text{ – operátor z uzlových posuvů na deformace}$$

kde

$\underline{\delta}^e = [\,u_1^e\,u_2^e\,]^T$ - vektor posuvů uzlových bodů

Deformační energie elementu U^e

$$U^e = \frac{1}{2}\int_0^l E\epsilon^2(\xi)Ad\xi = \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T}\underbrace{\int_0^l \underline{B}^{e^T} EA\,\underline{B}^e d\xi}_{\underline{\underline{K}}^e}\,\underline{\delta}^e = \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T}\underline{\underline{K}}^e\,\underline{\delta}^e\,, \quad \underline{\underline{K}}^e \text{ – matice tuhosti elementu}$$

Objemová síla $X(\xi)$ v místě ξ

$$X(\xi) = \underline{N}^e(\xi)\underline{X}^e\,, \quad \underline{X}^e \text{ – pole uzlových objemových sil}$$

Potenciál vnější objemové síly W^e

$$W^e = \int_0^l u(\xi)X(\xi)Ad\xi = \underline{\delta}^{e^T}\underbrace{\int_0^l \underline{N}^{e^T}\underline{N}^e A\,d\xi\,\underline{X}^e}_{\underline{F}^e} = \underline{\delta}^{e^T}\underline{F}^e\,, \quad \underline{F}^e \text{ – vektor ekvivalentních uzlových sil}$$

Celková potenciální energie elementu

$$\Pi^e = U^e - W^e = \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T}\underbrace{\int_0^l \underline{B}^{e^T}EA\,\underline{B}^e d\xi}_{\underline{\underline{K}}^e}\,\underline{\delta}^e - \underline{\delta}^{e^T}\underbrace{\int_0^l \underline{N}^{e^T}\underline{N}^e A\,d\xi\,\underline{X}^e}_{\underline{F}^e} = \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T}\underline{\underline{K}}^e\,\underline{\delta}^e - \underline{\delta}^{e^T}\underline{F}^e$$

Celková potenciální energie modelu

$$\Pi = \sum_{e=1}^{N_e}\Pi^e = \sum_{e=1}^{N_e}\left(\frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T}\underline{\underline{K}}^e\,\underline{\delta}^e - \underline{\delta}^{e^T}\underline{F}^e\right) = \sum_{e=1}^{N_e}\left(\frac{1}{2}\underline{\Delta}^T\underline{\underline{\tilde{K}}}^e\,\underline{\Delta} - \underline{\Delta}^T\underline{\tilde{F}}^e\right) = \frac{1}{2}\underline{\Delta}^T\underline{\underline{K}}\,\underline{\Delta} - \underline{\Delta}^T\underline{F}$$

kde

$\underline{\Delta}$ - vektor globálních uzlových posuvů

$\underline{\underline{K}}$ - globální matice tuhosti

$\underline{\underline{\tilde{K}}}^e$ - matice tuhosti elementu o rozměru $\underline{\underline{K}}$

$\underline{F}$ - globální vektor ekvivalentních uzlových sil

$\underline{\tilde{F}}^e$ - vektor ekvivalentních uzlových sil elementu o rozměru $\underline{F}$

Princip minima celkové potenciální energie

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_m} = 0\,; \quad m = 1, \ldots, N_{DOF}\,; \quad N_{DOF} \text{ – počet stupňů volnosti úlohy}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}K_{ij}\Delta_i\Delta_j - \Delta_i F_i}{\partial \Delta_m} = \frac{1}{2}K_{mj}\Delta_j + \frac{1}{2}K_{im}\Delta_i - F_m = K_{mj}\Delta_j - F_m = 0$$

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{\Delta} = \underline{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_m} = 0$$

2D element

x, y - souřadnice v prostoru
$\underline{\delta}^e$ - pole posuvů elementu

$\underline{u}$ - pole posuvů elementu
$\underline{\epsilon}$ - pole deformací elementu

$\underline{\alpha}$ - Parametry pole posuvů
$\underline{\underline{A}}$ -
$\underline{\underline{S}}$ -
$\underline{\underline{D}}$ - Diferenciální operátor mezi posuvy a deformacemi

$\underline{\underline{N}}^e$ - Matice tvarových funkcí
$\underline{\underline{B}}^e$ - Operátor uzlových posunů na deformace

$\underline{\epsilon}_0$ - pole deformací elementu vlivem teploty
$\underline{\epsilon}_\sigma$ - pole deformací elementu vlivem napětí

U - Deformační energie
$\underline{\underline{E}}^e$ - matice bůhví čeho
$\underline{\underline{K}}^e$ - matice tuhosti elementu

Π - Celková potenciální energie
$\underline{p}$ - pole vnějších povrchových sil ???
$\underline{X}$ - pole vnějších objemových sil ???

$\underline{\tilde{F}}^{eE}$ - objemová síla (konstantní)
$\underline{F}^l$ - liniová vnější síla (abstrakce tlaku)

Pole posuvů $\underline{u}(x,y)$ a deformací $\underline{\epsilon}(x,y)$ elementu

$$\underline{u}(x,y) = \underline{\underline{A}}(x,y)\,\underline{\alpha} = \underline{\underline{A}}(x,y)\,\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\delta}^e = \underline{\underline{N}}^e(x,y)\,\underline{\delta}^e$$
$$\underline{\epsilon}(x,y) = \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{N}}^e(x,y)\,\underline{\delta}^e = \underline{\underline{B}}^e(x,y)\,\underline{\delta}^e$$

Změna pole deformací $\underline{\epsilon}$ vlivem teploty

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}_\sigma + \underline{\epsilon}_0\,, \quad \underline{\epsilon}_0 = \alpha \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hustota deformační energie Λ

$$\Lambda = \frac{1}{2}\,\underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} = \frac{1}{2}\,\underline{\epsilon}^T \underline{\underline{E}}\,\underline{\epsilon}_\sigma = \frac{1}{2}\,\underline{\epsilon}^T \underline{\underline{E}}\,(\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}_0) = \frac{1}{2}\,\underline{\epsilon}^T \underline{\underline{E}}\,\underline{\epsilon} - \frac{1}{2}\,\underline{\epsilon}^T \underline{\underline{E}}\,\underline{\epsilon}_0$$

Deformační energie U

$$U = \int\limits_\Omega \Lambda\; dV = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \underline{\epsilon}^T \underline{\underline{E}}\,\underline{\epsilon}\; dV + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \underline{\epsilon}^T \underline{\underline{E}}\,\underline{\epsilon}_0\; dV = \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int\limits_\Omega \underline{\underline{B}}^{e^T} \underline{\underline{E}}\;\underline{\underline{B}}^e\; dV}_{\underline{\underline{K}}^e}\,\underline{\delta}^e - \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int\limits_\Omega \underline{\underline{B}}^{e^T} \underline{\underline{E}}\;\underline{\epsilon}_0\; dV}_{\underline{F}^{ET}}$$

Celková potenciální energie

$$\Pi = \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int\limits_\Omega \underline{\underline{B}}^{e^T} \underline{\underline{E}}\;\underline{\underline{B}}^e\; dV}_{\underline{\underline{K}}^e}\,\underline{\delta}^e - \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int\limits_\Omega \underline{\underline{B}}^{e^T} \underline{\underline{E}}\;\underline{\epsilon}_0\; dV}_{\underline{F}^{ET}} - \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int\limits_\Omega \underline{\underline{N}}^{e^T} \underline{X}\; dV}_{\underline{F}^{ef}} - \frac{1}{2}\,\underline{\delta}^{e^T} \underbrace{\int\limits_{\partial\Omega} \underline{\underline{N}}^{e^T} \underline{p}\; dS}_{\underline{F}^{ep}}$$

Desky a skořepiny

Kružnice s největším R_{max} a nejmenším R_{min} poloměrem křivosti leží v navzájem kolmých hlavních rovinách křivosti

Reissner-Mindlinova teorie skořepin

Předpoklad: Hmotná normála ke střednici v nedeformovaném stavu zůstává po deformaci přímá

Kirchhofova teorie skořepin

Předpoklad: Hmotná normála ke střednici v nedeformovaném stavu přejde po deformaci v normálu k deformované střednici

Typy deformací tenkostěnných těles

Membránová deformace

- Řez střednicí se prodlouží, ale nezmění se křivost
- Hmotné normály zůstavají kolmé na deformovanou střednici
- Konstantní po tloušťce

Ohybová deformace

- Řez střednicí se neprodlouží, ale změní se křivost
- Hmotné normály zůstavají kolmé na deformovanou střednici
- Lineární po tloušťce

Smyková příčná deformace

- Řez střednicí se neprodlouží, nezmění se křivost
- Hmotné normály zůstávají přímé, ale ne obecně kolmé na deformovanou střednici
- Konstantní po tloušťce

Klasifikace skořepinových prvků

- Membrány - "nemají ohybová ani příčná smyková napětí"
- Desky - nemají membránová napětí
- Skořepiny - "mají ohybová napětí"
  - tenké (thin) - obvykle se míní Kirchhoffovské
  - tlusté (thick) - obvykle mindlinovské
  - obecné (general/universal) - obvykle mindlinovské se smykovou závorou