1 pohybová rovnice diskretizované soustavy

"Zapište pohybovou rovnici diskretizované soustavy (analogicky rovnici rovnováhy ze statiky ve tvaru $\boldsymbol{KU} = \boldsymbol{F}$*. Vysvětlete význam jednotlivých členů."*

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

$\boldsymbol{\delta}$ - vektor uzlových posuvů
$\boldsymbol{M}$ - matice hmotnosti
$\boldsymbol{C}$ - matice tlumení
$\boldsymbol{K}$ - matice tuhosti
$\boldsymbol{F}$ - vektor vnějších sil

2 diferenční operátor

"Vysvětlete pojem ***diferenční operátor*** *(diferenční schéma). Jako příklad navrhněte diferenční schéma pro diferenciální operátory* $\frac{d\boldsymbol{U}}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{U}}{dt^2}$*."*

Diferenční operátor je takový operátor, kterým dokážeme aproximovat derivaci funkce v daném bodě pomocí hodnot funkce v jeho okolí (moje definice).

Vychází z taylorova rozvoje

$$\boldsymbol{U}(t_0 + \Delta t) \approx \boldsymbol{U}(t_0) + \frac{d\boldsymbol{U}(t_0)}{dt}\Delta t + \frac{d^2\boldsymbol{U}(t_0)}{2\,dt^2}\Delta t^2 + \dots \tag{2}$$

Dopředná diference prvního řádu

První derivaci lze aproximovat jako

$$\frac{d\boldsymbol{U}(t_0)}{dt} \approx \frac{\boldsymbol{U}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{U}(t_0)}{\Delta t} \tag{3}$$

s výslednou diferencí

$$\frac{d\boldsymbol{U}_{t_0}}{dt} = \frac{\boldsymbol{U}_{t_0+\Delta t} - \boldsymbol{U}_{t_0}}{\Delta t} \tag{4}$$

2.1 Centrální diference druhého řádu

Centrální diferenci druhého řádu získáme dosazením centrální diference prvního řádu

$$\frac{d\boldsymbol{U}(t_0)}{dt} \approx \frac{\boldsymbol{U}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{U}(t_0 - \Delta t)}{2\Delta t} \tag{5}$$

za první derivaci. Úpravou získáme approximaci druhé derivace

$$\frac{d^2\boldsymbol{U}(t_0)}{dt^2} \approx \frac{\boldsymbol{U}(t_0 + \Delta t) - 2\boldsymbol{U}(t_0) + \boldsymbol{U}(t_0 - \Delta t)}{\Delta t^2} \tag{6}$$

ze které plyne diferenční schéma

$$\frac{d^2\boldsymbol{U}_{t_0}}{dt^2} = \frac{\boldsymbol{U}_{t_0+\Delta t} - 2\boldsymbol{U}_{t_0} + \boldsymbol{U}_{t_0-\Delta t}}{\Delta t^2} \tag{7}$$

2.2 Konzistence matice hmotnosti

"Vysvětlete pojmy konzistentní a nekonzistentní matice hmotnosti a vztah k explicitnímu integračnímu schématu. Jakou výhodu přináší užití nekonzistentní matice a za jakou cenu?"

Konzistentní matice hmotnosti vzniká sestavením z matic hmotnosti elementů ve tvaru $\boldsymbol{M}^e = \int_{(V_e)} \boldsymbol{N}^T \rho \, dV$ (konzistentním s energetickým přístupem), které obsahují i mimo diagonální prvky. Pak se rovnice netlumeného systému řeší rozkladem matice $\boldsymbol{M}$ do diagonálního tvaru.

Existuje přístup ke konstrukci matice hmotnosti, který rozdělí hmotu elementu do uzlů (aproximace). Pak má matice hmotnosti systému (stejně jako jednotlivé matice elementů) pouze diagonální členy a nazýváme ji nekonzistentní.

3 Modální transformace

"Definujte operátor (matici) modální transformace Φ, popište jeho vlastnosti a naznačte transformaci rovnice (*) do modálních souřadnic."

Je-li matice Φ řešením problému vlastních čísel

$$\boldsymbol{K\Phi} = \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{M\Phi} \tag{8}$$

kde $\boldsymbol{\phi}_i$ jsou vlastní vektory a ω_i vlastní frekvence tvořící matice $\boldsymbol{\Phi}$ a $\boldsymbol{\Omega}$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_i & \dots & \boldsymbol{\phi}_N \end{bmatrix} , \ \boldsymbol{\Omega}^2 = \mathrm{diag}(\omega_i^2) \ , \quad i \in \langle 1, N \rangle \tag{9}$$

platí

$$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M\Phi} = \mathbf{1} \ , \quad \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{K\Phi} = \boldsymbol{\Omega}^2 \tag{10}$$

Soustavu pohybových rovnic systému s proporčním tlumením

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{F} \tag{11}$$

lze zavedením modální souřadnice $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi\delta}$ a vynásobením transponovanou maticí modální transformace $\boldsymbol{\Phi}^T$ zleva, převést do tvaru

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{F} \ , \quad \boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{diag}(2\,\omega_i \xi_i) \ , \quad i \in \langle 1, N \rangle \tag{12}$$

kde ξ_i jsou poměrné útlumy.

Soustava se pak rozpadá na rovnice ve tvaru

$$\ddot{q}_i + 2\,\omega_i \xi_i \dot{q} + \omega_i^2 q = f_i \ , \quad f_i = \boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{F} \ , \quad i \in \langle 1, N \rangle \tag{13}$$

4 Deformační gradient

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{X} \tag{14}$$

přičemž $\boldsymbol{F}$ je regulární tzn. $\det(\boldsymbol{F}) > 0$ a dále platí

$$\boldsymbol{F} = \mathbf{1} + \boldsymbol{Z} \ , \quad \boldsymbol{Z} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}} \tag{15}$$

také lze rozložit jako

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, t)\, \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t) \tag{16}$$

kde $\boldsymbol{R}$ je tenzor rotace (ortonormální) a $\boldsymbol{U}$ tenzor ryzí deformace (symetrický).

4.1 Greenův-Langrangeův tenzor deformace

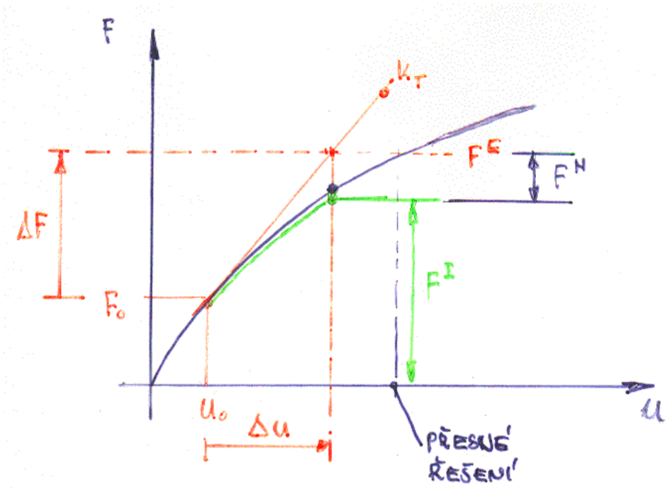
Pomocí deformačního gradientu lze definovat Greenův-Langrangeův tenzor deformace

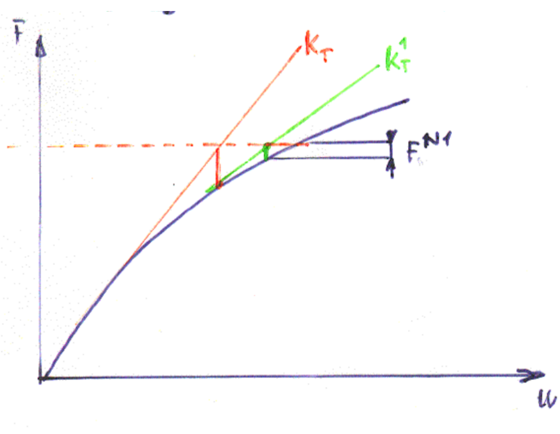
$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} - \mathbf{1}) \tag{17}$$

5 Newton–Raphsonovo schéma

"Popište princip Newton–Raphsonova iteračního schématu v přírůstkové metodě. Využijte grafické znázornění pro jeden stupeň volnosti a pro soustavu s mnoha stupni volnosti naznačte vývojový diagram."

1. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0$
2. $\boldsymbol{F}^I = \boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}$
3. $\boldsymbol{F}^N = \boldsymbol{F}^E - \boldsymbol{F}^I$
4. $\|\boldsymbol{F}^N\| < \varepsilon$ **?** return **:** nothing
5. $\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{u})^{-1}\boldsymbol{F}^N$
6. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \Delta\boldsymbol{u}$
7. zpět na 2.





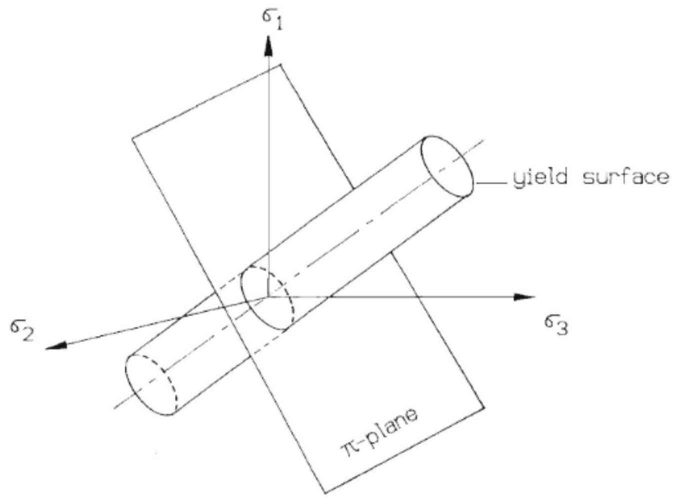
6 Nelineární model

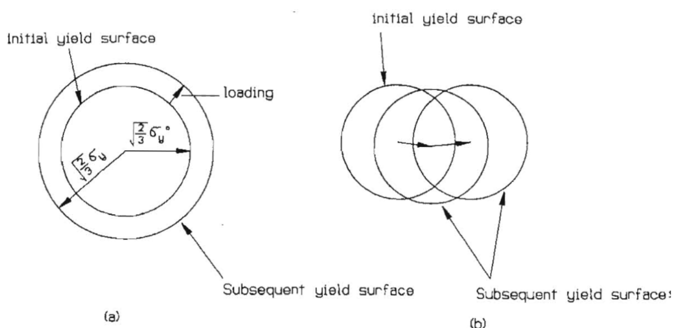
7 Zpevňování

Trojosá napjatost je obecně popsána bodem v 6D hyper-prostoru. Vzhledem k symetrii tenzoru napětí lze množinu všech možných stavů napětí zakreslit jako oblast v prostoru hlavních napětí.

Průmět oblasti do deviatorické roviny budeme nazývat plochou plasticity, přičemž na její hranici se budou nacházet průměty napětí elasto-plastické deformace, zatímco uvnitř stavy elastické deformace.

Při zpevňování bude docházet k plastickému tečení, v jehož průběhu se mění plocha plasticity. Pro ideální plastický materiál se tvar plochy nemění (nejsem si jistý), pouze se zvětšuje (**isotropní zpevňování**) nebo posouvá (**kinematické zpevňování**).





Isotropní zpevňování **kinematické zpevňování**