

# 1 pohybová rovnice diskretizované soustavy

“Zapište pohybovou rovnici diskretizované soustavy (analogicky rovnici rovnováhy ze statiky ve tvaru  $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ . Vysvětlete význam jednotlivých členů.”

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$\boldsymbol{\delta}$  - vektor uzlových posuvů

$\mathbf{M}$  - matice hmotnosti

$\mathbf{C}$  - matice tlumení

$\mathbf{K}$  - matice tuhosti

$\mathbf{F}$  - vektor vnějších sil

## 2 diferenční operátor

“Vysvětlete pojem **diferenční operátor** (diferenční schéma). Jako příklad navrhněte diferenční schéma pro diferenciální operátory  $\frac{d\mathbf{U}}{dt}$ ,  $\frac{d^2\mathbf{U}}{dt^2}$ .”

Diferenční operátor je takový operátor, kterým dokážeme aproximovat derivaci funkce v daném bodě pomocí hodnot funkce v jeho okolí (moje definice).

Vychází z taylorova rozvoje

$$\mathbf{U}(t_0 + \Delta t) \approx \mathbf{U}(t_0) + \frac{d\mathbf{U}(t_0)}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{U}(t_0)}{dt^2}\Delta t^2 + \dots \quad (2)$$

První derivaci lze aproximovat jako

$$\frac{d\mathbf{U}(t_0)}{dt} \approx \frac{\mathbf{U}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{U}(t_0)}{\Delta t} \quad (3)$$

Pro druhou derivaci nejdříve dosadíme do taylorova rozvoje

$$\frac{d\mathbf{U}(t_0)}{dt} \approx \frac{\mathbf{U}(t_0 + 2\Delta t) - \mathbf{U}(t_0)}{2\Delta t} \quad (4)$$

Tím získáme

$$\mathbf{U}(t_0 + \Delta t) \approx \mathbf{U}(t_0) + \frac{\mathbf{U}(t_0 + 2\Delta t) - \mathbf{U}(t_0)}{2} + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{U}(t_0)}{dt^2}\Delta t^2 + \dots \quad (5)$$

což lze upravit na

$$\frac{d^2\mathbf{U}(t_0)}{dt^2} \approx \frac{-\mathbf{U}(t_0 + 2\Delta t) + 2\mathbf{U}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{U}(t_0)}{\Delta t^2} \quad (6)$$

Dopředná diference prvního řádu

$$\frac{d\mathbf{U}_{t_0}^+}{dt} = \frac{\mathbf{U}_{t_0+\Delta t} - \mathbf{U}_{t_0}}{\Delta t} \quad (7)$$

Zpětná diference prvního řádu

$$\frac{d\mathbf{U}_{t_0}^-}{dt} = \frac{\mathbf{U}_{t_0} - \mathbf{U}_{t_0-\Delta t}}{\Delta t} \quad (8)$$

Centrální diference druhého řádu

$$\frac{d^2\mathbf{U}_{t_0}}{dt^2} = \frac{\frac{d\mathbf{U}_{t_0}^+}{dt} - \frac{d\mathbf{U}_{t_0}^-}{dt}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{U}_{t_0+\Delta t} - 2\mathbf{U}_{t_0} + \mathbf{U}_{t_0-\Delta t}}{\Delta t^2} \quad (9)$$

### 3 Konzistence matice hmotnosti

*“Vysvětlete pojmy konzistentní a nekonzistentní matice hmotnosti a vztah k explicitnímu integračnímu schématu. Jakou výhodu přináší užití nekonzistentní matice a za jakou cenu?”*

Konzistentní matice hmotnosti vzniká sestavením z matic hmotnosti elementů ve tvaru  $\mathbf{M}^e = \int_{(V_e)} \mathbf{N}^T \rho dV$  (konzistentním s energetickým přístupem), které obsahují i mimo diagonální prvky. Pak se rovnice netlumeného systému řeší rozkladem matice  $\mathbf{M}$  do diagonálního tvaru.

Existuje přístup ke konstrukci matice hmotnosti, který rozdělí hmotu elementu do uzlů (aproximace). Pak má matice hmotnosti systému (stejně jako jednotlivé matice elementů) pouze diagonální členy a nazýváme ji nekonzistentní.

### 4 Modální transformace

*“Definujte operátor (matici) modální transformace  $\Phi$ , popište jeho vlastnosti a naznačte transformaci rovnice (\*) do modálních souřadnic.”*

Je-li matice  $\Phi$  řešením problému vlastních čísel

$$\mathbf{K}\Phi = \Omega^2 \mathbf{M}\Phi \quad (10)$$

kde  $\phi_i$  jsou vlastní vektory a  $\omega_i$  vlastní frekvence tvořící matice  $\Phi$  a  $\Omega$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_N \end{bmatrix}, \quad \Omega^2 = \text{diag}(\omega_i^2), \quad i \in \langle 1, N \rangle \quad (11)$$

platí

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{1}, \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega^2 \quad (12)$$

Soustavu pohybových rovnic systému s proporčním tlumením

$$\mathbf{M}\ddot{\delta} + \mathbf{C}\dot{\delta} + \mathbf{K}\delta = \mathbf{F} \quad (13)$$

lze zavedením modální souřadnice  $\mathbf{q} = \Phi\delta$  a vynásobením transponovanou maticí modální transformace  $\Phi^T$  zleva, převést do tvaru

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{q}} + \Omega^2 \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{\Gamma} = \text{diag}(2\omega_i \xi_i), \quad i \in \langle 1, N \rangle \quad (14)$$

kde  $\xi_i$  jsou poměrné útlumy.

Soustava se pak rozpadá na rovnice ve tvaru

$$\ddot{q}_i + 2\omega_i \xi_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = f_i, \quad f_i = \phi_i \cdot \mathbf{F}, \quad i \in \langle 1, N \rangle \quad (15)$$

### 5 Deformační gradient

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (16)$$

přičemž  $\mathbf{F}$  je regulární tzn.  $\det(\mathbf{F}) > 0$  a dále platí

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad (17)$$

také lze rozložit jako

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{X}, t) \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \quad (18)$$

kde  $\mathbf{R}$  je tenzor rotace (ortonormální) a  $\mathbf{U}$  tenzor ryzí deformace (symetrický).

## 5.1 Greenův-Langrangeův tenzor deformace

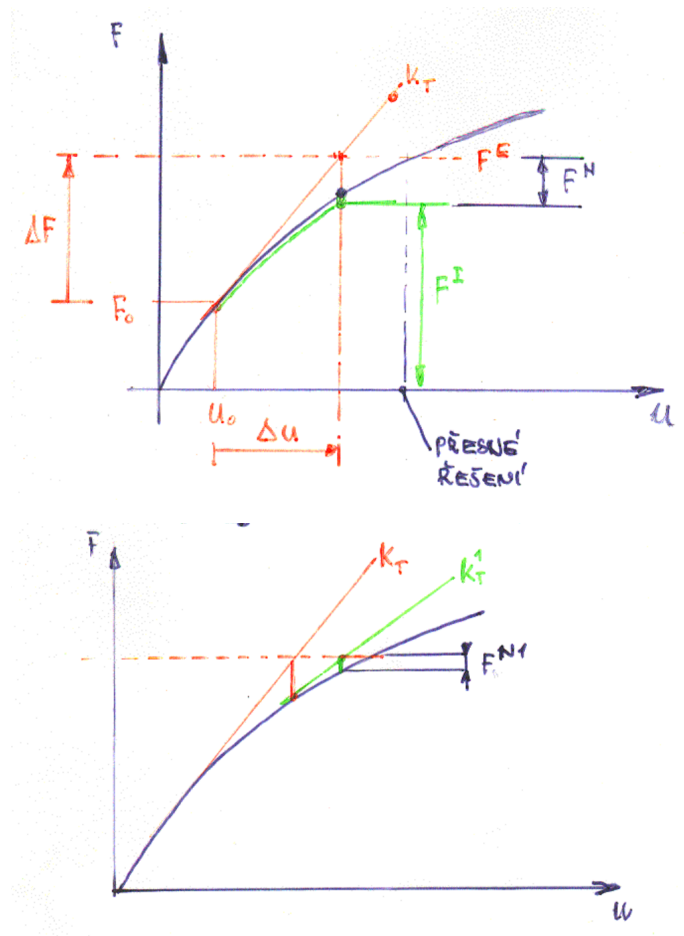
Pomocí deformačního gradientu lze definovat Greenův-Langrangeův tenzor deformace

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^T \mathbf{U} - \mathbf{1}) \quad (19)$$

## 6 Newton–Raphsonovo schéma

“Popište princip Newton–Raphsonova iteračního schématu v přírůstkové metodě. Využijte grafické znázornění pro jeden stupeň volnosti a pro soustavu s mnoha stupni volnosti naznačte vývojový diagram.”

1.  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$
2.  $\mathbf{F}^I = \mathbf{K}_T(\mathbf{u}) \mathbf{u}$
3.  $\mathbf{F}^N = \mathbf{F}^E - \mathbf{F}^I$
4.  $\|\mathbf{F}^N\| < \varepsilon$  ? return : nothing
5.  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_T(\mathbf{u})^{-1} \mathbf{F}^N$
6.  $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}$
7. zpět na 2.



## 7 Nelineární model

## 8 Zpevnňování

Trojosá napjatost je obecně popsána bodem v 6D hyper-prostoru. Vzhledem k symetrii tenzoru napětí lze množinu všech možných stavů napětí zakreslit jako oblast v prostoru hlavních napětí.

Průmět oblasti do deviatorické roviny budeme nazývat plochou plasticity, přičemž na její hranici se budou nacházet průměty napětí elasto-plastické deformace, zatímco uvnitř stavy elastické deformace.

Při zpevnňování bude docházet k plastickému tečení, v jehož průběhu se mění plocha plasticity. Pro ideální plastický materiál se tvar plochy nemění (nejsem si jistý), pouze se zvětšuje (**isotropní zpevnňování**) nebo posouvá (**kinematické zpevnňování**).

