

# 1 pohybová rovnice diskretizované soustavy

“Zapište pohybovou rovnici diskretizované soustavy (analogicky rovnici rovnováhy ze statiky ve tvaru  $KU = F$ . Vysvětlete význam jednotlivých členů.”

$$M\ddot{\delta} + C\dot{\delta} + K\delta - F = 0 \quad (1)$$

$\delta$  - vektor uzlových posuvů

$M$  - matice hmotnosti

$C$  - matice tlumení

$K$  - matice tuhosti

$F$  - vektor vnějších sil

## 2 diferenční operátor

“Vysvětlete pojem **diferenční operátor** (diferenční schéma). Jako příklad navrhněte diferenční schéma pro diferenciální operátory  $\frac{dU}{dt}$ ,  $\frac{d^2U}{dt^2}$ .”

Diferenční operátor je takový operátor, kterým dokážeme aproximovat derivaci funkce v daném bodě pomocí hodnot funkce v jeho okolí (moje definice).

Vychází z Taylorova rozvoje

$$U(t_0 + \Delta t) \approx U(t_0) + \frac{dU(t_0)}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2U(t_0)}{dt^2}\Delta t^2 + \dots \quad (2)$$

kde první derivaci lze tímpádem aproximovat jako

$$\frac{dU(t_0)}{dt} \approx \frac{U(t_0 + \Delta t) - U(t_0)}{\Delta t} \quad (3)$$

Dopředná difference prvního řádu

$$\frac{dU_{t_0}^+}{dt} = \frac{U_{t_0+\Delta t} - U_{t_0}}{\Delta t} \quad (4)$$

Zpětná difference prvního řádu

$$\frac{dU_{t_0}^-}{dt} = \frac{U_{t_0} - U_{t_0-\Delta t}}{\Delta t} \quad (5)$$

Centrální difference druhého řádu

$$\frac{d^2U_{t_0}}{dt^2} = \frac{\frac{dU_{t_0}^+}{dt} - \frac{dU_{t_0}^-}{dt}}{\Delta t} = \frac{U_{t_0+\Delta t} - 2U_{t_0} + U_{t_0-\Delta t}}{\Delta t^2} \quad (6)$$

## 3 Konzistence matice hmotnosti

“Vysvětlete pojmy konzistentní a nekonzistentní matice hmotnosti a vztah k explicitnímu integračnímu schématu. Jakou výhodu přináší užití nekonzistentní matice a za jakou cenu?”

Konzistentní matice hmotnosti vzniká sestavením z matic hmotnosti elementů ve tvaru  $\mathbf{M}^e = \int_{(V_e)} \mathbf{N}^T \rho dV$  (konzistentním s energetickým přístupem), které obsahují i mimo diagonální prvky. Pak se rovnice netlumeného systému řeší rozkladem matice  $\mathbf{M}$  do diagonálního tvaru.

Existuje přístup ke konstrukci matice hmotnosti, který rozdělí hmotu elementu do uzlů (aproximace). Pak má matice hmotnosti systému (stejně jako jednotlivé matice elementů) pouze diagonální členy a nazýváme ji nekonzistentní.

## 4 Modální transformace

*“Definujte operátor (matici) modální transformace  $\Phi$ , popište jeho vlastnosti a naznačte transformaci rovnice (\*) do modálních souřadnic.”*

Je-li matice  $\Phi$  řešením problému vlastních čísel

$$\mathbf{K}\Phi = \Omega^2 \mathbf{M}\Phi \quad (7)$$

kde  $\phi_i$  jsou vlastní vektory a  $\omega_i$  vlastní frekvence tvořící matice  $\Phi$  a  $\Omega$

$$\Phi = [\phi_1 \quad \dots \quad \phi_N], \quad \Omega^2 = \text{diag}(\omega_i^2), \quad i \in \langle 1, N \rangle \quad (8)$$

platí

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{1}, \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega^2 \quad (9)$$

Soustavu pohybových rovnic systému s proporčním tlumením

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{F} \quad (10)$$

lze zavedením modální souřadnice  $\mathbf{q} = \Phi\boldsymbol{\delta}$  a vynásobením transponovanou maticí modální transformace  $\Phi^T$  zleva, převést do tvaru

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{q}} + \Omega^2 \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{\Gamma} = \text{diag}(2\omega_i \xi_i), \quad i \in \langle 1, N \rangle \quad (11)$$

kde  $\xi_i$  jsou poměrné útlumy.

Soustava se pak rozpadá na rovnice ve tvaru

$$\ddot{q}_i + 2\omega_i \xi_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = f_i, \quad f_i = \phi_i \cdot \mathbf{F}, \quad i \in \langle 1, N \rangle \quad (12)$$

## 5

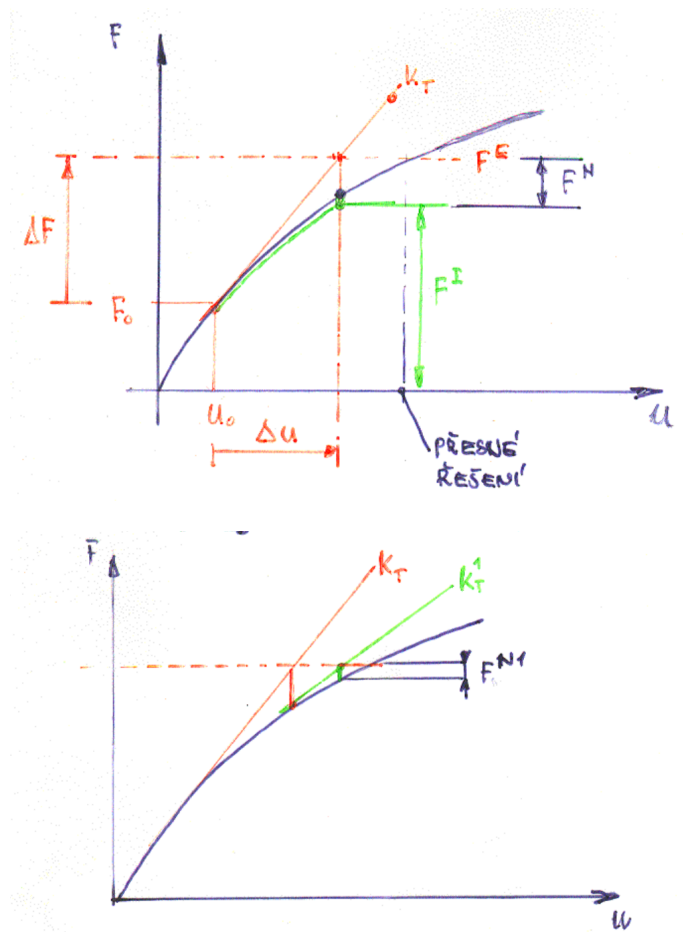
$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (13)$$

přičemž  $\mathbf{F}$  je regulární tzn.  $\det(\mathbf{F}) > 0$  a dále platí

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad (14)$$

## 6

*“Popište princip Newton–Raphsonova iteračního schématu v přírůstkové metodě. Využijte grafické znázornění pro jeden stupeň volnosti a pro soustavu s mnoha stupni volnosti naznačte vývojový diagram.”*



1.  $u = u_0$
2.  $F^I = K_T(u) u$
3.  $F^N = F^E - F^I$
4.  $\|F^N\| < \varepsilon$  ? return : nothing
5.  $\Delta u = K_T(u)^{-1} F^N$
6.  $u = u + \Delta u$
7. zpět na 2.