

1 pohybová rovnice diskretizované soustavy

“Zapište pohybovou rovnici diskretizované soustavy (analogicky rovnici rovnováhy ze statiky ve tvaru $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$. Vysvětlete význam jednotlivých členů.”

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$\boldsymbol{\delta}$ - vektor uzlových posuvů

\mathbf{M} - matice hmotnosti

\mathbf{C} - matice tlumení

\mathbf{K} - matice tuhosti

\mathbf{F} - vektor vnějších sil

Matice \mathbf{M} a \mathbf{C} se skládají z matic elementů

$$\mathbf{M}^e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV, \quad \mathbf{C}^e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mu \mathbf{N} dV \quad (2)$$

2 diferenční operátor

“Vysvětlete pojem **diferenční operátor** (diferenční schéma). Jako příklad navrhněte diferenční schéma pro diferenciální operátory $\frac{d\mathbf{U}}{dt}$, $\frac{d^2\mathbf{U}}{dt^2}$.”

Diferenční operátor je takový operátor, kterým dokážeme aproximovat derivaci funkce v daném bodě pomocí hodnot funkce v jeho okolí (moje definice).

Vychází z Taylorova rozvoje

$$\mathbf{U}(t_0 + \Delta t) \approx \mathbf{U}(t_0) + \frac{d\mathbf{U}(t_0)}{dt} \Delta t + \frac{d^2\mathbf{U}(t_0)}{2dt^2} \Delta t^2 + \dots \quad (3)$$

2.1 Dopředná difference prvního řádu

První derivaci lze aproximovat jako

$$\frac{d\mathbf{U}(t_0)}{dt} \approx \frac{\mathbf{U}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{U}(t_0)}{\Delta t} \quad (4)$$

s výslednou diferencí

$$\frac{d\mathbf{U}_{t_0}}{dt} = \frac{\mathbf{U}_{t_0+\Delta t} - \mathbf{U}_{t_0}}{\Delta t} \quad (5)$$

2.2 Centrální difference druhého řádu

Centrální diferencí druhého řádu získáme dosazením centrální difference prvního řádu

$$\frac{d\mathbf{U}(t_0)}{dt} \approx \frac{\mathbf{U}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{U}(t_0 - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (6)$$

za první derivaci. Úpravou získáme aproximaci druhé derivace

$$\frac{d^2\mathbf{U}(t_0)}{dt^2} \approx \frac{\mathbf{U}(t_0 + \Delta t) - 2\mathbf{U}(t_0) + \mathbf{U}(t_0 - \Delta t)}{\Delta t^2} \quad (7)$$

ze které plyne diferenční schéma

$$\frac{d^2 \mathbf{U}_{t_0}}{dt^2} = \frac{\mathbf{U}_{t_0+\Delta t} - 2\mathbf{U}_{t_0} + \mathbf{U}_{t_0-\Delta t}}{\Delta t^2} \quad (8)$$

3 Konzistence matice hmotnosti

“Vysvětlete pojmy konzistentní a nekonzistentní matice hmotnosti a vztah k explicitnímu integračnímu schématu. Jakou výhodu přináší užití nekonzistentní matice a za jakou cenu?”

Konzistentní matice hmotnosti vzniká sestavením z matic hmotnosti elementů ve tvaru $\mathbf{M}^e = \int_{(V_e)} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV$ (konzistentním s energetickým přístupem), které obsahují i mimo diagonální prvky. Pak se rovnice netlumeného systému řeší rozkladem matice \mathbf{M} do diagonálního tvaru.

Existuje přístup ke konstrukci matice hmotnosti, který rozdělí hmotu elementu do uzlů (aproximace). Pak má matice hmotnosti systému (stejně jako jednotlivé matice elementů) pouze diagonální členy a nazýváme ji nekonzistentní.

4 Modální transformace

“Definujte operátor (matici) modální transformace Φ , popište jeho vlastnosti a naznačte transformaci rovnice () do modálních souřadnic.”*

Jsou-li matice Φ , Ω řešením problému vlastních čísel

$$\mathbf{K}\Phi = \Omega^2 \mathbf{M}\Phi \quad (9)$$

kde ϕ_i jsou vlastní vektory a ω_i vlastní frekvence tvořící matice Φ a Ω

$$\Phi = [\phi_1 \quad \dots \quad \phi_N], \quad \Omega^2 = \text{diag}(\omega_i^2), \quad i \in \langle 1, N \rangle \quad (10)$$

platí

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{1}, \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega^2 \quad (11)$$

Soustavu pohybových rovnic systému s proporčním tlumením

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{F} \quad (12)$$

lze zavedením modální souřadnice $\mathbf{q} = \Phi \boldsymbol{\delta}$ a vynásobením transponovanou maticí modální transformace Φ^T zleva, převést do tvaru

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{\Gamma} = \text{diag}(2\omega_i \xi_i), \quad i \in \langle 1, N \rangle \quad (13)$$

kde ξ_i jsou poměrné útlumy.

Soustava se pak rozpadá na rovnice ve tvaru

$$\ddot{q}_i + 2\omega_i \xi_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = f_i, \quad f_i = \phi_i \cdot \mathbf{F}, \quad i \in \langle 1, N \rangle \quad (14)$$

5 Deformační gradient

“Zapište vztah mezi elementární úsečkou v referenční konfiguraci (popsanou vektorem $d\mathbf{X}$) a toutéž úsečkou (popsanou vektorem $d\mathbf{x}$) v konfiguraci aktuální. Popište vlastnosti operátoru, který tento vztah zprostředkuje.”

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (15)$$

přičemž \mathbf{F} je regulární tzn. $\det(\mathbf{F}) > 0$ a dále platí

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad (16)$$

také lze rozložit jako

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{X}, t) \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \quad (17)$$

kde \mathbf{R} je tenzor rotace (ortonormální) a \mathbf{U} tenzor ryzí deformace (symetrický).

5.1 Greenův-Langrangeův tenzor deformace

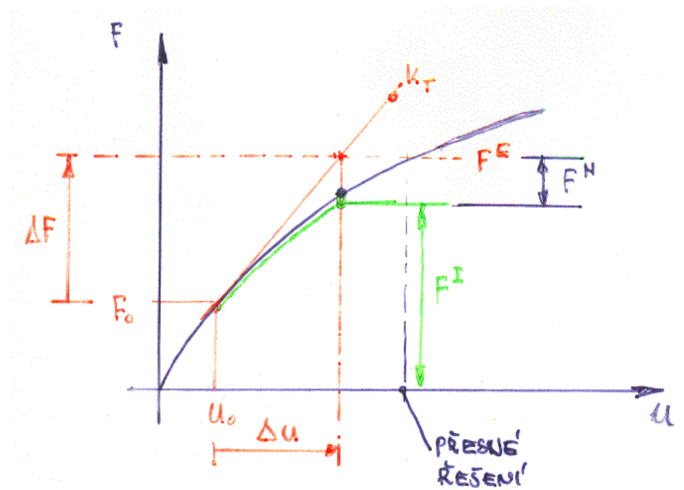
Pomocí deformačního gradientu lze definovat Greenův-Langrangeův tenzor deformace

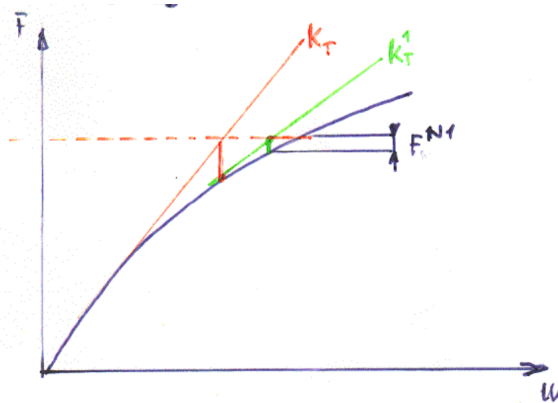
$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^T \mathbf{U} - \mathbf{1}) \quad (18)$$

6 Newton–Raphsonovo schéma

“Popište princip Newton–Raphsonova iteračního schématu v přírůstkové metodě. Využijte grafické znázornění pro jeden stupeň volnosti a pro soustavu s mnoha stupni volnosti naznačte vývojový diagram.”

1. $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$
2. $\mathbf{F}^I = \mathbf{F}^I(\mathbf{u})$
3. $\mathbf{F}^N = \mathbf{F}^E - \mathbf{F}^I$
4. $\|\mathbf{F}^N\| < \varepsilon$? return : nothing
5. $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_T(\mathbf{u})^{-1} \mathbf{F}^N$
6. $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}$
7. zpět na 2.





7 Nelineární model

“Jakou funkci kromě linearizace materiálových vlastností (tj. kromě operátoru \mathbf{E}_L , který poskytuje lineární vztah $\sigma = \mathbf{E}_L \varepsilon$) musí být vybaven materiálový model nelineárního materiálu v deformační variantě MKP a proč?

Musím mít definovanou přírůstkovou funkci $f : \Delta \varepsilon \mapsto \Delta \sigma$, kterou lze například realizovat jako $\Delta \sigma = \sigma(\varepsilon + \Delta \varepsilon) - \sigma(\varepsilon)$

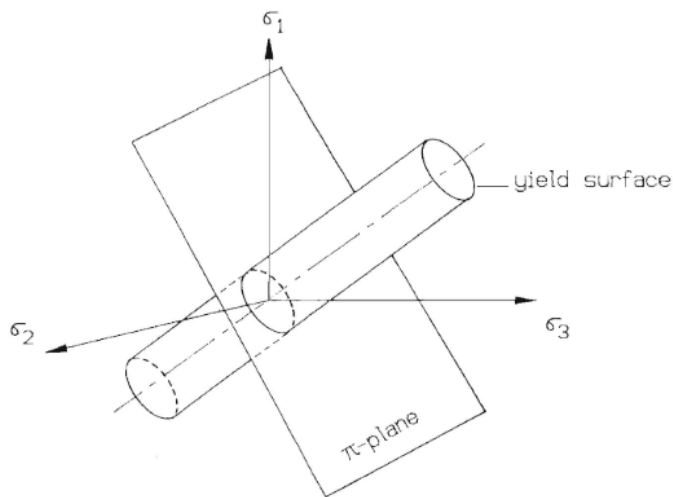
8 Zpevňování

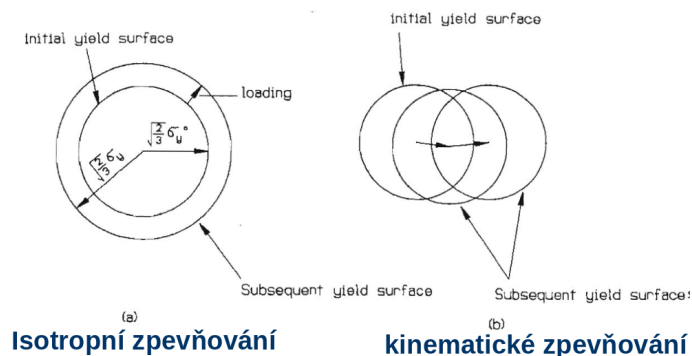
“Vysvětlete pojmy kinematické a izotropní zpevnění.”

Trojosá napjatost je obecně popsána bodem v 6D hyper-prostoru. Vzhledem k symetrii tenzoru napětí lze množinu všech možných stavů napětí zakreslit jako oblast v prostoru hlavních napětí.

Průmět oblasti do deviatorické roviny budeme nazývat plochou plasticity, přičemž na její hranici se budou nacházet průměty napětí elasto-plastické deformace, zatímco uvnitř stavy elastické deformace.

Při zpevňování bude docházet k plastickému tečení, v jehož průběhu se mění plocha plasticity. Pro ideální plastický materiál se tvar plochy nemění (nejsem si jistý), pouze se zvětšuje (**isotropní zpevňování**) nebo posouvá (**kinematické zpevňování**).





9 Tečná matice tuhosti a stabilita systému

“Jaký je vztah mezi tečnou maticí tuhosti a stabilitou systému?” Tečná matice tuhosti $\mathbf{K}_T(\mathbf{u})$ musí být pozitivně definitní. Jinak například Newton-Raphsonovo schéma nemusí doiterovat.

10 Status kontaktního páru

“Vysvětlete pojem status kontaktního páru (za kontaktní pár považujte pro jednoduchost dvojici uzlů potenciálně svázaných kontaktní vazbovou rovnicí) a formulujte podmínky pro změnu statusu.”

Kontaktní podmínku páru uzlů lze zapsat jako

$$(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} = \delta \quad (19)$$

Status kontaktního páru lze určit z hodnoty δ

$$\text{status} = \begin{cases} \delta < 0 : \text{“spojeno”} \\ \delta > 0 : \text{“rozpojeno”} \end{cases} \quad (20)$$

nebo pomocí reakce

$$\text{status} = \begin{cases} \mathbf{R}_{12} \cdot \mathbf{n} < 0 : \text{“spojeno”} \\ \mathbf{R}_{12} \cdot \mathbf{n} > 0 : \text{“rozpojeno”} \end{cases} \quad (21)$$

Pokud je okamžitý status “spojeno”, provádíme kontrolu pomocí reakce a v statusu “rozpojeno” přes hodnotu δ .

11 Iterační schéma kontaktní úlohy

“Naznačte iterační schéma kontaktní úlohy (za kontaktní pár považujte pro jednoduchost dvojici uzlů potenciálně svázaných kontaktní vazbovou rovnicí).”

1. vytvoření GAP vazeb (+ definice počátečního statusu)
2. MKP výpočet
3. výpočet reakcí
4. kontrola statusu vazeb
5. počet potřebných změn = 0 ? konec : rozpojení/spojení vazeb a návrat k 2.

