1 pohybová rovnice diskretizované soustavy

"Zapište pohybovou rovnici diskretizované soustavy (analogicky rovnici rovnováhy ze statiky ve tvaru $\boldsymbol{KU} = \boldsymbol{F}$*. Vysvětlete význam jednotlivých členů."*

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

$\boldsymbol{\delta}$ - vektor uzlových posuvů
$\boldsymbol{M}$ - matice hmotnosti
$\boldsymbol{C}$ - matice tlumení
$\boldsymbol{K}$ - matice tuhosti
$\boldsymbol{F}$ - vektor vnějších sil

Matice $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{C}$ se zkládají z matic elementů

$$\boldsymbol{M}^e = \int_{V_e} \boldsymbol{N}^T \rho\, \boldsymbol{N}\, dV\ , \quad \boldsymbol{C}^e = \int_{V_e} \boldsymbol{N}^T \mu\, \boldsymbol{N}\, dV \tag{2}$$

2 diferenční operátor

"Vysvětlete pojem ***diferenční operátor*** *(diferenční schéma). Jako příklad navrhněte diferenční schéma pro diferenciální operátory* $\frac{d\boldsymbol{U}}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{U}}{dt^2}$*."*

Diferenční operátor je takový operátor, kterým dokážeme aproximovat derivaci funkce v daném bodě pomocí hodnot funkce v jeho okolí (moje definice).

Vychází z taylorova rozvoje

$$\boldsymbol{U}(t_0 + \Delta t) \approx \boldsymbol{U}(t_0) + \frac{d\boldsymbol{U}(t_0)}{dt}\Delta t + \frac{d^2\boldsymbol{U}(t_0)}{2\, dt^2}\Delta t^2 + \dots \tag{3}$$

2.1 Dopředná diference prvního řádu

První derivaci lze aproximovat jako

$$\frac{d\boldsymbol{U}(t_0)}{dt} \approx \frac{\boldsymbol{U}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{U}(t_0)}{\Delta t} \tag{4}$$

s výslednou diferencí

$$\frac{d\boldsymbol{U}_{t_0}}{dt} = \frac{\boldsymbol{U}_{t_0+\Delta t} - \boldsymbol{U}_{t_0}}{\Delta t} \tag{5}$$

2.2 Centrální diference druhého řádu

Centrální diferenci druhého řádu získáme dosazením centrální diference prvního řádu

$$\frac{d\boldsymbol{U}(t_0)}{dt} \approx \frac{\boldsymbol{U}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{U}(t_0 - \Delta t)}{2\Delta t} \tag{6}$$

za první derivaci. Úpravou získáme approximaci druhé derivace

$$\frac{d^2\boldsymbol{U}(t_0)}{dt^2} \approx \frac{\boldsymbol{U}(t_0 + \Delta t) - 2\boldsymbol{U}(t_0) + \boldsymbol{U}(t_0 - \Delta t)}{\Delta t^2} \tag{7}$$

ze které plyne diferenční schéma

$$\frac{d^2\boldsymbol{U}_{t_0}}{dt^2} = \frac{\boldsymbol{U}_{t_0+\Delta t} - 2\boldsymbol{U}_{t_0} + \boldsymbol{U}_{t_0-\Delta t}}{\Delta t^2} \tag{8}$$

3 Konzistence matice hmotnosti

"Vysvětlete pojmy konzistentní a nekonzistentní matice hmotnosti a vztah k explicitnímu integračnímu schématu. Jakou výhodu přináší užití nekonzistentní matice a za jakou cenu?"

Konzistentní matice hmotnosti vzniká sestavením z matic hmotnosti elementů ve tvaru $\boldsymbol{M}^e = \int_{(V_e)} \boldsymbol{N}^T \rho \, \boldsymbol{N} \, dV$ (konzistentním s energetickým přístupem), které obsahují i mimo diagonální prvky. Pak se rovnice netlumeného systému řeší rozkladem matice $\boldsymbol{M}$ do diagonálního tvaru.

Existuje přístup ke konstrukci matice hmotnosti, který rozdělí hmotu elementu do uzlů (aproximace). Pak má matice hmotnosti systému (stejně jako jednotlivé matice elementů) pouze diagonální členy a názýváme ji nekonzistentní.

4 Modální transformace

"Definujte operátor (matici) modální transformace Φ, popište jeho vlastnosti a naznačte transformaci rovnice (*) do modálních souřadnic."

Jsou-li matice $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Omega}$ řešením problému vlastních čísel

$$\boldsymbol{K\Phi} = \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{M\Phi} \tag{9}$$

kde $\boldsymbol{\phi}_i$ jsou vlastní vektory a ω_i vlastní frekvence tvořící matice $\boldsymbol{\Phi}$ a $\boldsymbol{\Omega}$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_i & \dots & \boldsymbol{\phi}_N \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\Omega}^2 = \mathrm{diag}(\omega_i^2) \ , \quad i \in \langle 1, N \rangle \tag{10}$$

platí

$$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M\Phi} = \boldsymbol{1} \ , \quad \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{K\Phi} = \boldsymbol{\Omega}^2 \tag{11}$$

Soustavu pohybovných rovnic systému s proporčním tlumením

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{F} \tag{12}$$

lze zavedením modální souřadnice $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi\delta}$ a vynásobením transponovanou maticí modální transformace $\boldsymbol{\Phi}^T$ zleva, převést do tvaru

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{F} \ , \quad \boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{diag}(2\,\omega_i\xi_i) \ , \quad i \in \langle 1, N \rangle \tag{13}$$

kde ξ_i jsou poměrné útlumy.

Soustava se pak rozpadá na rovnice ve tvaru

$$\ddot{q}_i + 2\,\omega_i\xi_i\dot{q} + \omega_i^2 q = f_i \ , \quad f_i = \boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{F} \ , \quad i \in \langle 1, N \rangle \tag{14}$$

5 Deformační gradient

"Zapište vztah mezi elementární úsečkou v referenční konfiguraci (popsanou vektorem $d\boldsymbol{X}$) a toutéž úsečkou (popsanou vektorem $d\boldsymbol{x}$) v konfiguraci aktuální. Popište vlastnosti operátoru, který tento vztah zprostředkuje."

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{X} \tag{15}$$

přičemž $\boldsymbol{F}$ je regulární tzn. $\det(\boldsymbol{F}) > 0$ a dále platí

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{1} + \boldsymbol{Z}\,, \quad \boldsymbol{Z} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}} \tag{16}$$

také lze rozložit jako

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, t)\, \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t) \tag{17}$$

kde $\boldsymbol{R}$ je tenzor rotace (ortonormální) a $\boldsymbol{U}$ tenzor ryzí deformace (symetrický).

5.1 Greenův-Langrangeův tenzor deformace

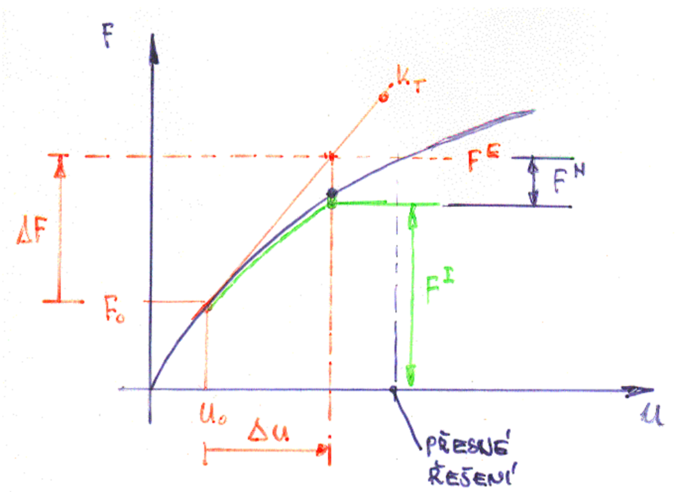
Pomocí deformačního gradientu lze definovat Greenův-Langrangeův tenzor deformace

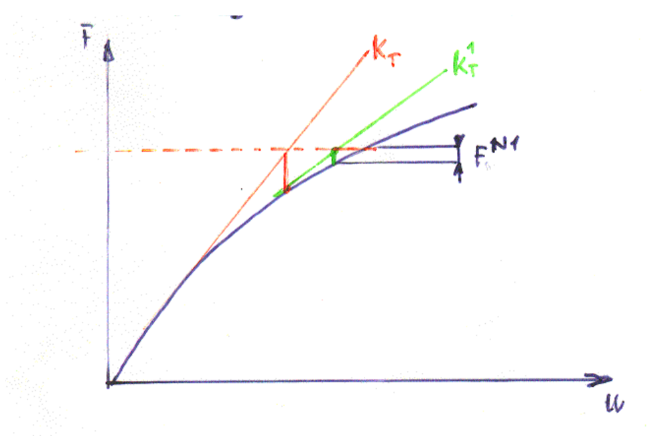
$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{1}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{U} - \boldsymbol{1}) \tag{18}$$

6 Newton–Raphsonovo schéma

"Popište princip Newton–Raphsonova iteračního schématu v přírůstkové metodě. Využijte grafické znázornění pro jeden stupeň volnosti a pro soustavu s mnoha stupni volnosti naznačte vývojový diagram."

1. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0$
2. $\boldsymbol{F}^I = \boldsymbol{F}^I(\boldsymbol{u})$
3. $\boldsymbol{F}^N = \boldsymbol{F}^E - \boldsymbol{F}^I$
4. $\|\boldsymbol{F}^N\| < \varepsilon$ **?** return **:** nothing
5. $\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{u})^{-1} \boldsymbol{F}^N$
6. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \Delta \boldsymbol{u}$
7. zpět na 2.





7 Nelineární materiál

"Jakou funkci kromě linearizace materiálových vlastností (tj. kromě operátoru $\mathbf{E_L}$*, který poskytuje linearizovaný vztah* $\vec{\sigma} = \mathbf{E_L}\vec{\varepsilon}$*) musí být vybaven materiálový model nelineárního materiálu v deformační variantě MKP? Proč?"*

Má-li být nelineární materiálový model použitelný pro MKP výpočet, musí kromě tečné matice materiálových parametrů $\mathbf{E_L}$ tento model navíc generovat pro daný odhad přírůstku deformace $\Delta\vec{\varepsilon}$ jemu odpovídající odhad přírůstku napjatosti $\Delta\vec{\sigma}$. Mějme inkrementální schéma nelineárního výpočtu, kde kritérium rovnováhy nabývá formy

$$\mathbf{f^{eI}} = \int_\Omega \mathbf{B^T}\boldsymbol{\sigma}\, dV.$$

Podmínka rovnováhy elementu s vnějšími silami pak dává

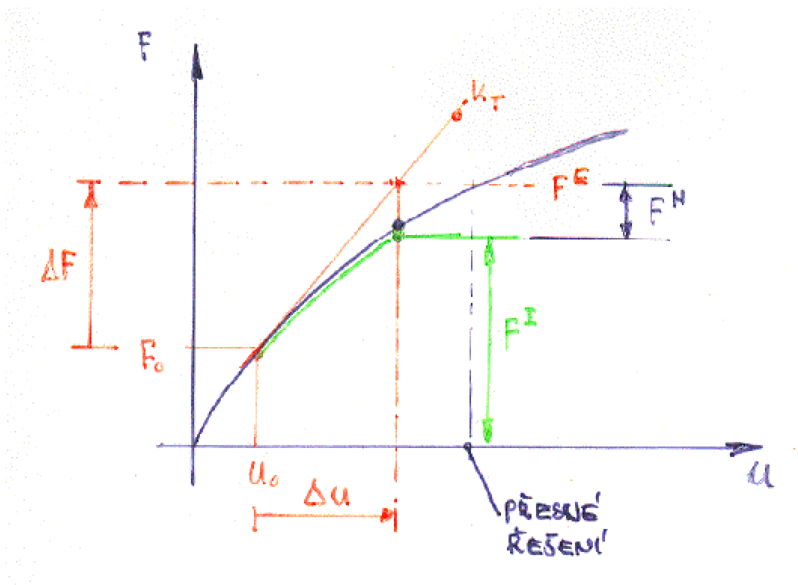
$$\mathbf{f^{eE}} + \mathbf{f^{eI}} = \mathbf{0}$$

a výsledná nevyvážená síla v důsledku nelinearity je pak

$$\mathbf{f^N} = \mathbf{f^E} - \mathbf{f^I}.$$

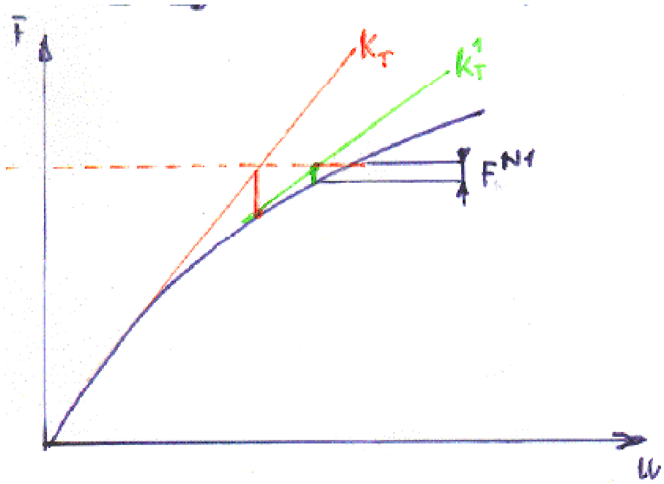
Jeden krok výpočtu v linearizované formě je tedy

$$\Delta\mathbf{f} = \mathbf{K_T}\Delta\mathbf{u}.$$



Následuje iterativní oprava odhadu $\Delta\mathbf{u}^i$ pomocí minimalizace nevyvážené síly $\mathbf{f_N}$ na požadovanou přesnost $\|\mathbf{f^N}\| \leq \epsilon$

$$\mathbf{K_T}^i \Delta\mathbf{u}^i = \mathbf{f}^{Hi}$$



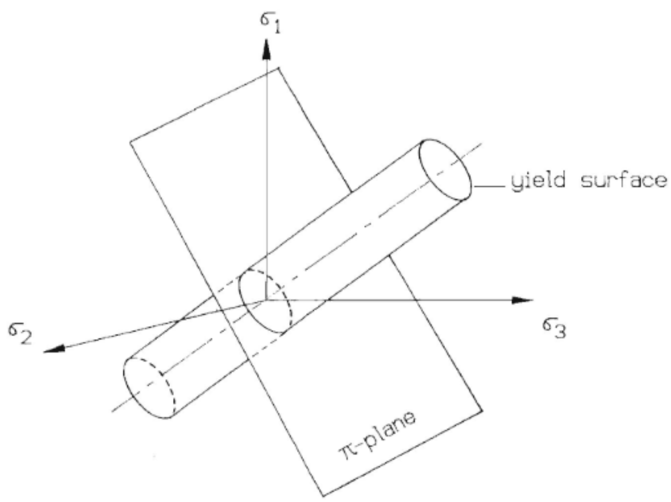
8 Zpevňování

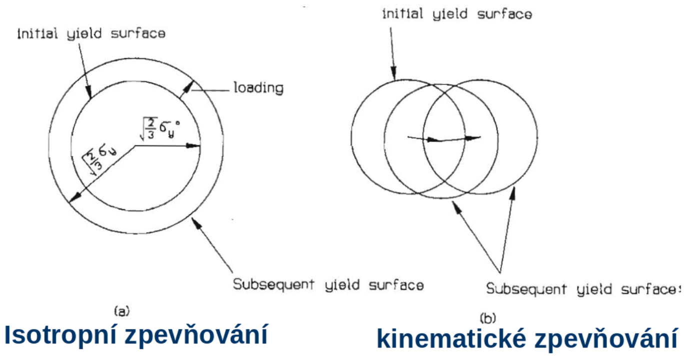
"Vysvětlete pojmy kinematické a izotropní zpevnění."

Trojosá napjatost je obecně popsána bodem v 6D hyper-prostoru. Vzhledem k symetrii tenzoru napětí lze množinu všech možných stavů napětí zakreslit jako oblast v prostoru hlavních napětí.

Průmět oblasti do deviatorické roviny budeme nazývat plochou plasticity, přičemž na její hranici se budou nacházet průměty napětí elasto-plastické deformace, zatímco uvnitř stavy elastické deformace.

Při zpevňování bude docházet k plastickému tečení, v jehož průběhu se mění plocha plasticity. Pro ideální plastický materiál se tvar plochy nemění (nejsem si jistý), pouze se zvětšuje (**isotropní zpevňování**) nebo posouvá (**kinematické zpevňování**).





9 Tečná matice tuhosti a stabilita systému

"Jaký je vztah mezi tečnou maticí tuhosti a stabilitou systému?" Tečná matice tuhosti $\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{u})$ musí být pozitivně definitní. Jinak například Newton-Raphsonovo schéma nemusí doiterovat.

10 Status kontaktního páru

"Vysvětlete pojem status kontaktního páru (za kontaktní pár považujte pro jednoduchost dvojici uzlů potenciálně svázaných kontaktní vazbovou rovnicí) a formulujte podmínky pro změnu statusu."

Kontaktní podmínku páru uzlů lze zapsat jako

$$(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1) \cdot \boldsymbol{n} = \delta \tag{19}$$

Status kontaktního páru lze určit z hodnoty δ

$$\text{status} = \begin{cases} \delta < 0 : \text{“spojeno”} \\ \delta > 0 : \text{“rozpojeno”} \end{cases} \tag{20}$$

nebo pomocí reakce

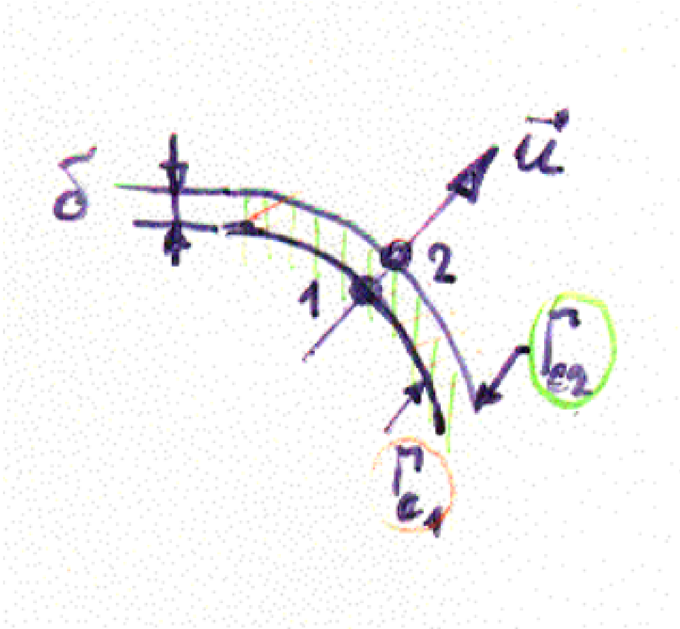
$$\text{status} = \begin{cases} \boldsymbol{R}_{12} \cdot \boldsymbol{n} < 0 : \text{“spojeno”} \\ \boldsymbol{R}_{12} \cdot \boldsymbol{n} > 0 : \text{“rozpojeno”} \end{cases} \tag{21}$$

Pokud je okamžitý status "spojeno", provádíme kontrolu pomocí reakce a v statusu "rozpojeno" přes hodnotu δ.

11 Iterační schéma kontaktní úlohy

"Naznačte iterační schéma kontaktní úlohy (za kontaktní pár považujte pro jednoduchost dvojici uzlů potenciálně svázaných kontaktní vazbovou rovnicí)."

1. vytvoření GAP vazeb (+ definice počátečního statusu)
2. MKP výpočet
3. výpočet reakcí
4. kontrola statusu vazeb
5. počet potřebných změn = 0 **?** konec **:** rozpojení/spojení vazeb a návrat k 2.



12 Algoritmus master-slave

*“Vysvětlete základní myšlenky algoritmu **master–slave**.”*

Jedná se o algoritmus detekující penetraci těles založený na určení vzdálenosti slave uzlů od stěn povrchu master, kde počátek normály ke stěně master povrchu tvoří spolu s uzlem slave kontaktní pár.

+ řešení po inkrementech
+ slave uzel může být v kontaktu s libovolnou stěnou master povrchu
- uzly master povrchu mohou pronikat to slave těles.
- tvrdá nelinearita