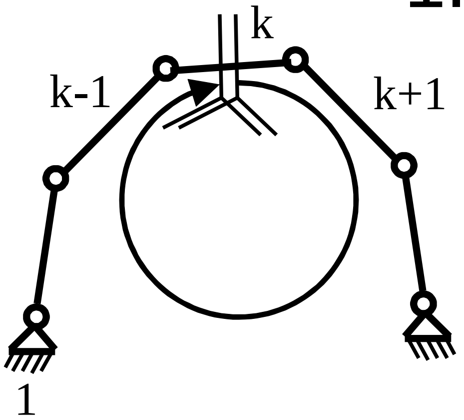
Řešení kinematických smyček

- Otevřený kinematický řetězec lze popsat nezávislými (relativními) souřadnicemi.
- Kinematická smyčka obsahuje závislé (relativní) souřadnice.

Způsoby sestavení rovnic pro určení závislých souřadnic.

- Metoda uzavřené smyčky
- Metoda rozpojené smyčky
- Metoda vyjmutého tělesa
- Metoda přirozených souřadnic
- Metoda kartézských souřadnic - metoda kompartmentů

1. Metoda uzavřené smyčky

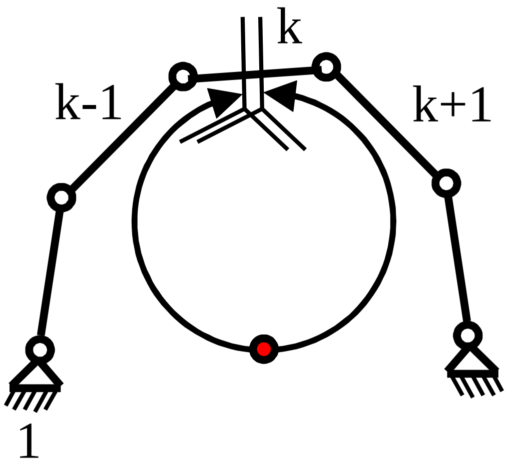


- Na nějakém tělese smyčky (nemusí to být základní rám) je vybrán souřadnicový systém. Je popsána kinematická transformace z tohoto souřadnicového systému skrz kinematickou smyčku zpět do stejného souřadnicového systému. Výsledkem je identita

$$\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\ldots\mathbf{T}_{k-1,k}\mathbf{T}_{k,k+1}\ldots\mathbf{T}_{n-1,n}\mathbf{T}_{n,1}=\mathbf{E}_4$$

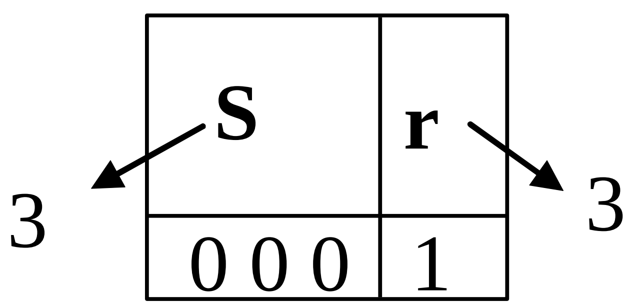
- Alternativní varianta vznikne po vynásobení obou stran maticí

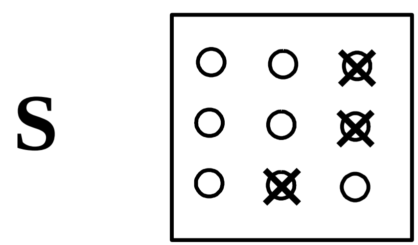
$$\mathbf{T}_{1k}=\mathbf{T}_{k1}^{-1}$$



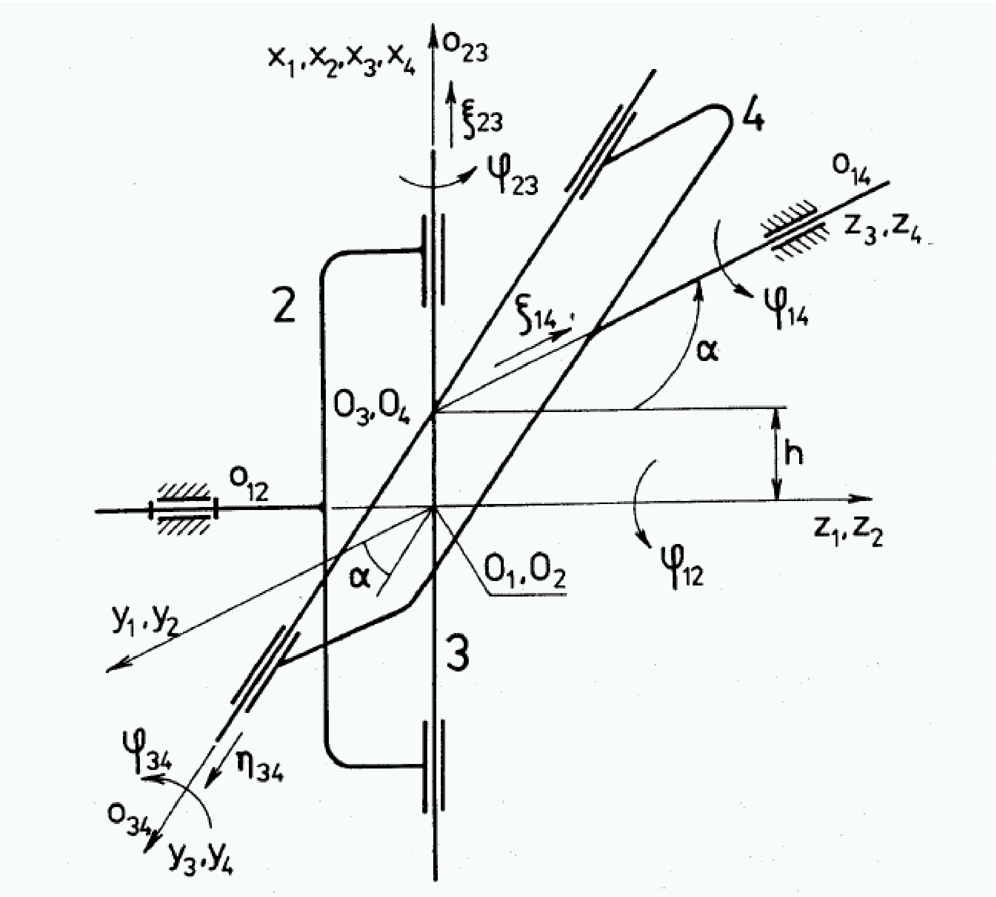
$$\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\ldots\mathbf{T}_{k-1,k}=\mathbf{T}_{1n}\mathbf{T}_{n,n-1}\ldots\mathbf{T}_{k+1,k}$$

- V obou případech je sestaveno 12 nelineárních rovnic a 4 identity. Mezi rovnicemi je pouze 6 nezávislých vlivem ortonormality matice směrových kosinů





Příklad - univerzální kloub



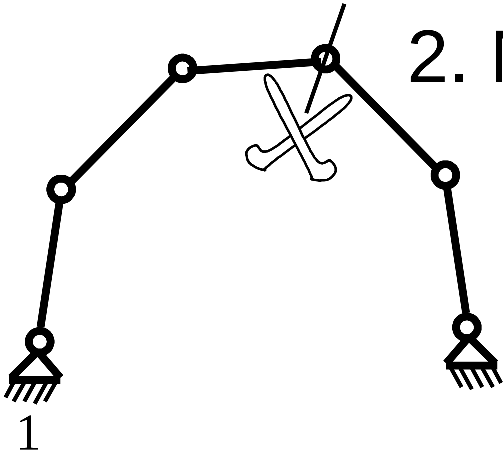
$$\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{34} = \mathbf{T}_{14}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{12} &= \mathbf{T}_{Z6}(\varphi_{12}) \\
\mathbf{T}_{23} &= \mathbf{T}_{Z1}(\xi_{23})\mathbf{T}_{Z4}(\varphi_{23}) \\
\mathbf{T}_{34} &= \mathbf{T}_{Z2}(\eta_{34})\mathbf{T}_{Z5}(\varphi_{34}) \\
\mathbf{T}_{14} &= \mathbf{T}_{Z1}(h)\mathbf{T}_{Z4}(\alpha)\mathbf{T}_{Z3}(\xi_{14})\mathbf{T}_{Z6}(\varphi_{14})
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{34} - \mathbf{T}_{14} = [a_{ij}]$$

$$
\begin{aligned}
a_{11} &\equiv \mathrm{c}\varphi_{34}\mathrm{c}\varphi_{12} - \mathrm{s}\varphi_{34}\mathrm{s}\varphi_{23}\mathrm{s}\varphi_{12} - \mathrm{c}\varphi_{14} = 0 \\
a_{12} &\equiv -\mathrm{c}\varphi_{23}\mathrm{s}\varphi_{12} + \mathrm{s}\varphi_{14} = 0 \\
a_{13} &\equiv \mathrm{s}\varphi_{34}\mathrm{c}\varphi_{12} + \mathrm{c}\varphi_{34}\mathrm{s}\varphi_{23}\mathrm{s}\varphi_{12} = 0 \\
a_{14} &\equiv \xi_{23}\mathrm{c}\varphi_{12} - \eta_{34}\mathrm{c}\varphi_{23}\mathrm{s}\varphi_{12} - h = 0 \\
a_{21} &\equiv \mathrm{c}\varphi_{34}\mathrm{s}\varphi_{12} + \mathrm{s}\varphi_{34}\mathrm{s}\varphi_{23}\mathrm{c}\varphi_{12} - \mathrm{s}\varphi_{14}\mathrm{c}\alpha = 0 \\
a_{22} &\equiv \mathrm{c}\varphi_{23}\mathrm{c}\varphi_{12} - \mathrm{c}\varphi_{14}\mathrm{c}\alpha = 0 \\
a_{23} &\equiv \mathrm{s}\varphi_{34}\mathrm{s}\varphi_{12} - \mathrm{c}\varphi_{34}\mathrm{s}\varphi_{23}\mathrm{c}\varphi_{12} + \mathrm{s}\alpha = 0 \\
a_{24} &\equiv \xi_{23}\mathrm{s}\varphi_{12} + \eta_{34}\mathrm{c}\varphi_{23}\mathrm{c}\varphi_{12} + \zeta_{14}\mathrm{s}\alpha = 0 \\
a_{31} &\equiv -\mathrm{s}\varphi_{34}\mathrm{c}\varphi_{23} - \mathrm{s}\varphi_{14}\mathrm{s}\alpha = 0 \\
a_{32} &\equiv \mathrm{s}\varphi_{23} - \mathrm{c}\varphi_{14}\mathrm{s}\alpha = 0 \\
a_{33} &\equiv \mathrm{c}\varphi_{34}\mathrm{c}\varphi_{23} - \mathrm{c}\alpha = 0 \\
a_{34} &\equiv \eta_{34}\mathrm{s}\varphi_{23} - \zeta_{14}\mathrm{c}\alpha = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_{23} &= \frac{\mathrm{c}\varphi_{12}}{1 - \mathrm{s}^2\alpha\mathrm{s}^2\varphi_{12}} h \\
\varphi_{14} &= \mathrm{atan2}(\pm\mathrm{s}\varphi_{12}\mathrm{c}\alpha, \pm\mathrm{c}\varphi_{12}) \\
\eta_{34} &= -\frac{\mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\varphi_{12}}{\sqrt{1 - \mathrm{s}^2\alpha\mathrm{s}^2\varphi_{12}}} h \\
\varphi_{23} &= \mathrm{atan2}\left(\mathrm{s}\alpha\mathrm{c}\varphi_{14}, \frac{\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\varphi_{14}}{\mathrm{c}\varphi_{12}}\right) \\
\zeta_{14} &= -\frac{\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}2\varphi_{12}}{1 - \mathrm{s}^2\alpha\mathrm{s}^2\varphi_{12}} h \\
\varphi_{34} &= \mathrm{atan2}(-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\varphi_{14}\mathrm{c}\varphi_{23}, \mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\varphi_{23})
\end{aligned}
$$



2. Metoda rozpojené smyčky

- Počet neznámých a počet rovnic lze snížit. Kinematická smyčka je odpojena řezem v nějaké kinematické dvojici a jsou sestaveny podmínky jejího uzavření. Výsledné rovnice nezahrnují relativní souřadnice řezané smyčky. Metoda je zvláště vhodná pro sférickou vazbu

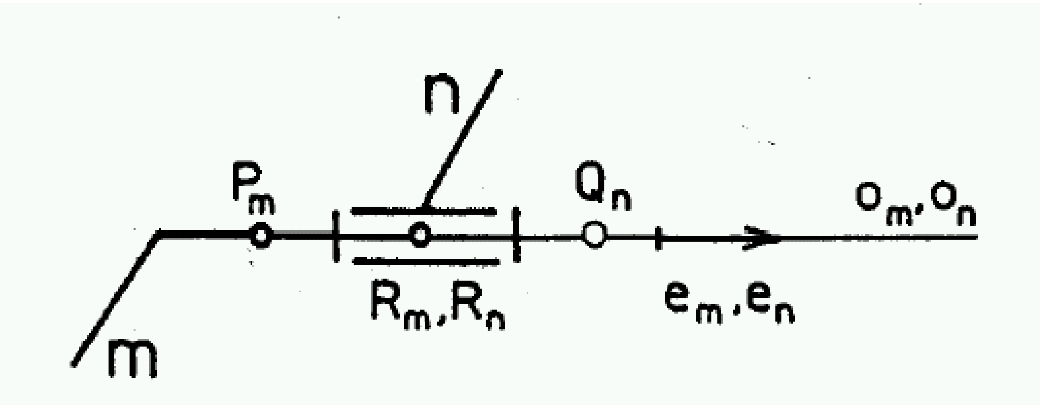
Spherical joint

- Podmínkou je rovnost polohového vektoru středu sférické KD na tělesech k a k + 1.

$$^{1}\mathbf{r}_{1S_k} = ^{1}\mathbf{r}_{1S_{k+1}}$$

$$\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\dots\mathbf{T}_{k-1,k}\mathbf{r}_{kS_k} = \mathbf{T}_{1n}\mathbf{T}_{n,n-1}\dots\mathbf{T}_{k+2,k+1}\mathbf{r}_{k+1S_{k+1}}$$

- Výsledkem jsou pouze 3 skalární rovnice vazeb. 3 relativní (úhlové) souřadnice sférické KD nejsou použité.

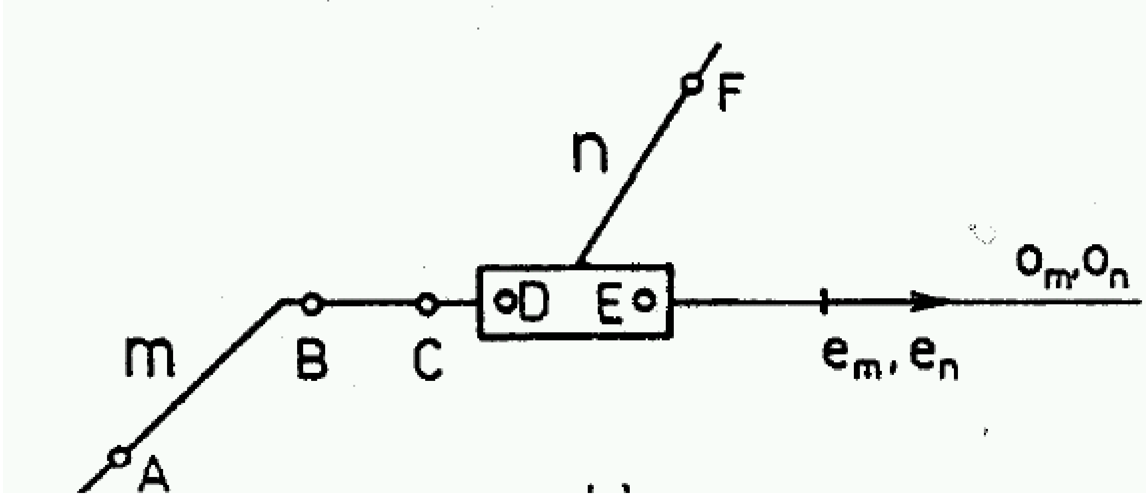


- Rotační kinematická dvojice
- Podmínkou jsou rovnosti polohových vektorů středu otáčení na KD na tělesech k = m a k + 1 = n a rovnosti jednotkových vektorů osy na týchž tělěsech

. $\mathbf{u}_{1Rm} = \mathbf{u}_{1Rn}$ 3 skalární rovnice (nezávislé)

$\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_n$ 3 skalární rovnice (2 nezávislé)

- Výsledkem je 6 rovnic, z nichž 5 je nezávislých. Relativní souřadnice rotační KD se nepoužívá.

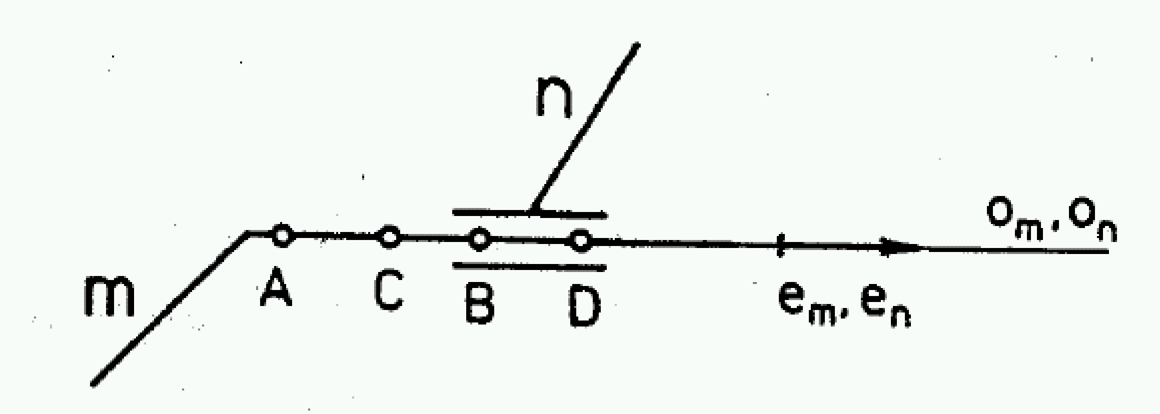


- <u>Posuvná (prismatická, translační) kinematická dvojice</u>

- Podmínkou je rovnost jednotkového vektoru osy, kolinearita BD a jednotkového vektoru osy a konstantní úhel mezi AB a DF.

- $\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_n$ 3 rovnice (2 nezávislé)
- $(\mathbf{u}_{1Bm} - \mathbf{u}_{1Dn}) \times \mathbf{e}_m = \mathbf{0}$ 3 rovnice (2 nezávislé)
- $(\mathbf{u}_{1Am} - \mathbf{u}_{1Bm}).(\mathbf{u}_{1Dn} - \mathbf{u}_{1Fn}) = \mathrm{const}$ 1 rovnice (nezávislá)

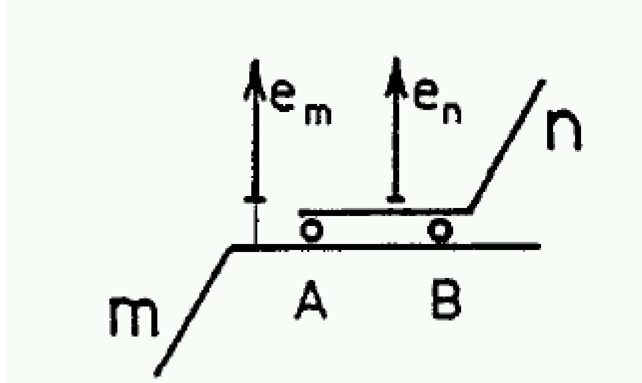
- Výsledkem je 7 rovnic, z nichž 5 je nezávislých. Relativní souřadnice translační KD se nepoužívá.



Válcová (cylindrická) kinematická dvojice

- Podmínkou je rovnost jednotkového vektoru osy a kolinearita AB a jednotkového vektoru osy.
- $\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_n$ 3 rovnice (2 nezávislé)
- $(\mathbf{u}_{1Am} - \mathbf{u}_{1Bn}) \times \mathbf{e}_m = \mathbf{0}$ 3 rovnice (2 nezávislé)

- Výsledkem je 6 rovnic, z nichž 4 jsou nezávislé. Relativní souřadnice válcové KD se nepoužívají.



Rovinná kinematická dvojice

- Podmínkou je rovnost jednotkového vektoru kolmého na rovinu a ortogonalita AB a jednotkového vektoru kolmého na rovinu.

$$\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_n$$

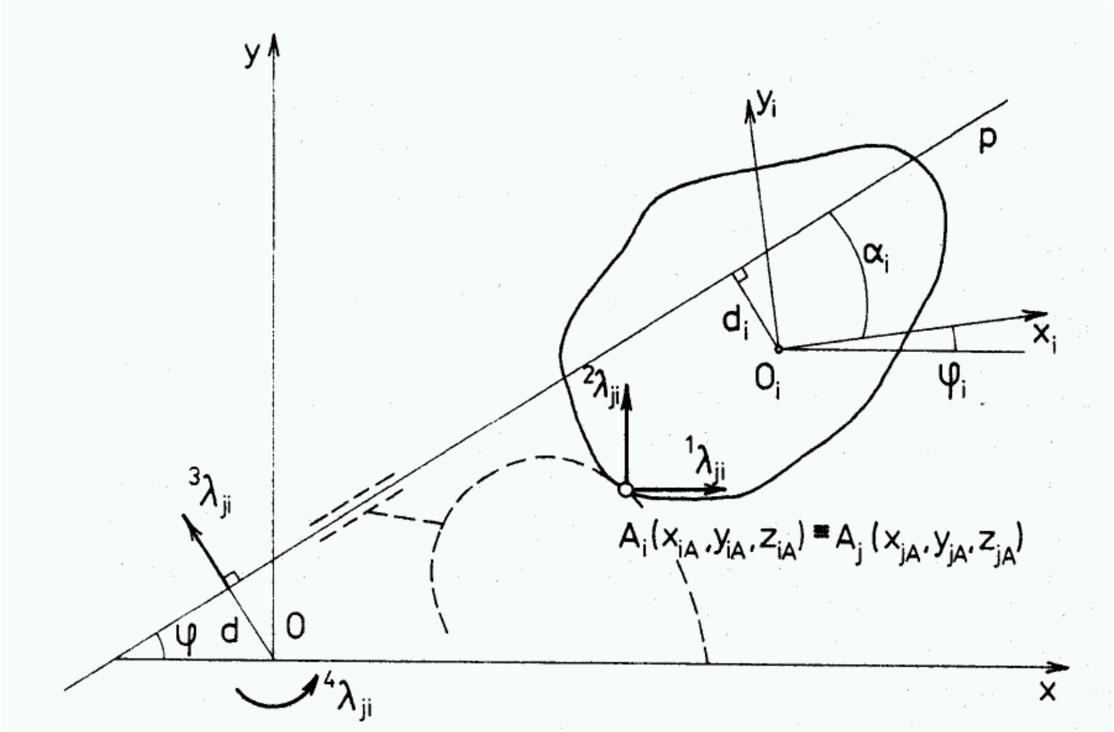
- 3 rovnice (2 nezávislé)

$$(\mathbf{u}_{1Am} - \mathbf{u}_{1Bn}).\mathbf{e}_m = 0$$

- 1 rovnice (nezávislá)

- Výsledkem jsou 4 rovnice, z nichž 3 jsou nezávislé. Relativní souřadnice ploché KD se nepoužívají.

KD v rovině

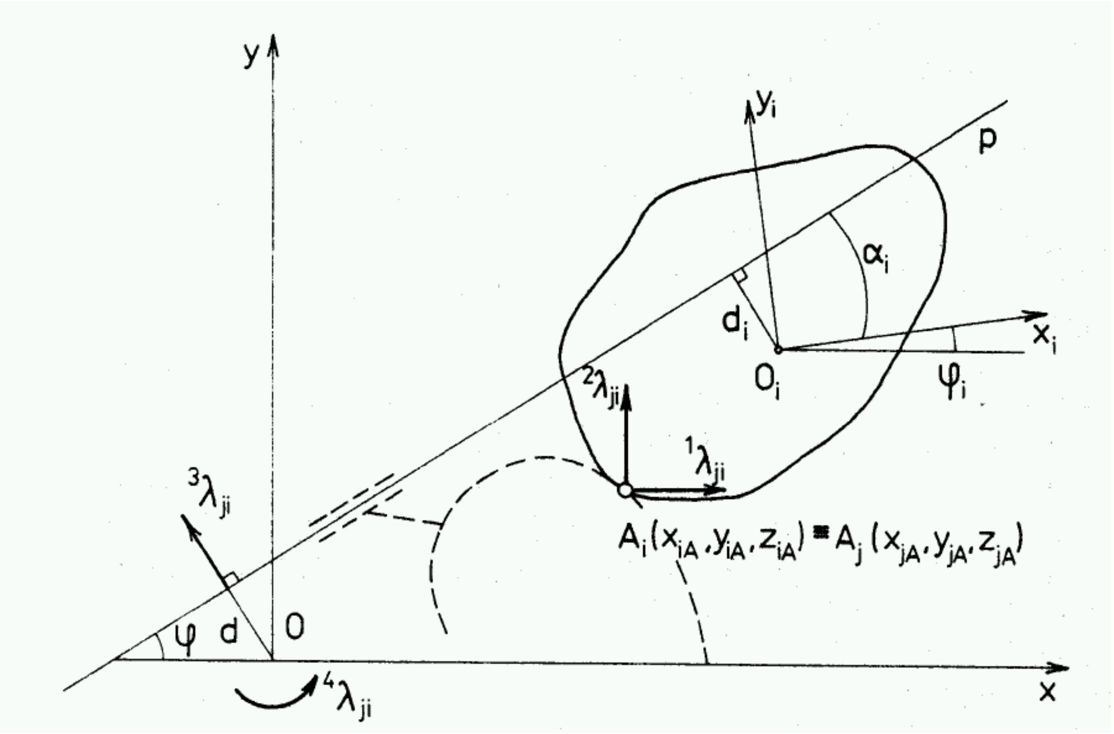


- Rotační KD
- Podmínkou je rovnost polohového vektoru středu otáčení.

$$
\begin{aligned}
x_i + x_{iA} c\varphi_i - y_{iA} s\varphi_i &= x_j + x_{jA} c\varphi_j - y_{jA} s\varphi_j \\
y_i + x_{iA} s\varphi_i + y_{iA} c\varphi_i &= y_j + x_{jA} s\varphi_j + y_{jA} c\varphi_j
\end{aligned}
$$

- Výsledkem jsou 2 rovnice. Relativní souřadnice rotační KD se nepoužívá.

KD v rovině

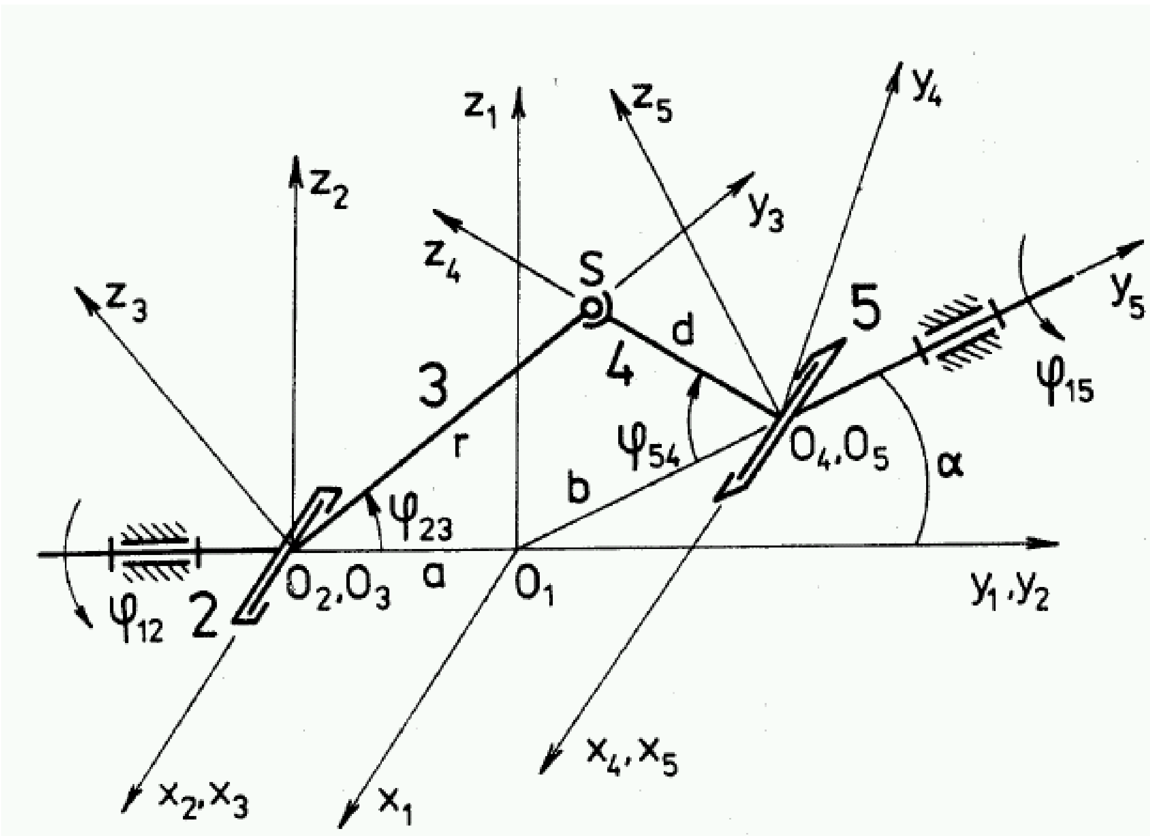


- <u>Posuvná KD</u>
- The condition is the equality of unit vector of the axis and the equality of the distance to the axis.

$$d_i + y_i \mathrm{c}(\alpha_i + \varphi_i) - x_i \mathrm{s}(\alpha_i + \varphi_i) =$$
$$= d_j + y_j \mathrm{c}(\alpha_j + \varphi_j) - x_j \mathrm{s}(\alpha_j + \varphi_j)$$
$$\alpha_i + \varphi_i = \alpha_j + \varphi_j$$

- Podmínkou je rovnost jednotkového vektoru osy a rovnost vzdálenosti k ose.

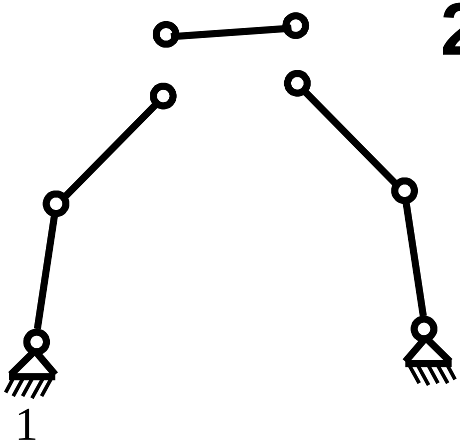
Příklad – RRSRR mechanismus



$$\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\mathbf{r}_{3S} = \mathbf{T}_{15}\mathbf{T}_{54}\mathbf{r}_{4S}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{12} &= \mathbf{T}_{Z2}(-a)\mathbf{T}_{Z5}(\varphi_{12}) \\
\mathbf{T}_{23} &= \mathbf{T}_{Z4}(\varphi_{23}) \\
\mathbf{T}_{15} &= \mathbf{T}_{Z4}(\alpha)\mathbf{T}_{Z2}(b)\mathbf{T}_{Z5}(\varphi_{15}) \\
\mathbf{T}_{54} &= \mathbf{T}_{Z4}((\pi/2) - \varphi_{54}) \\
\mathbf{r}_{3S} &= \lceil 0, r, 0, 1 \rceil \\
\mathbf{r}_{4S} &= \lceil 0, 0, d, 1 \rceil
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r\mathrm{s}\varphi_{23}\mathrm{s}\varphi_{12} &= d\mathrm{s}\varphi_{54}\mathrm{s}\varphi_{15} \\
r\mathrm{c}\varphi_{23} - a &= (b - d\mathrm{c}\varphi_{54})\mathrm{c}\alpha - d\mathrm{s}\varphi_{54}\mathrm{c}\varphi_{15}\mathrm{s}\alpha \\
r\mathrm{s}\varphi_{23}\mathrm{c}\varphi_{12} &= (b - d\mathrm{c}\varphi_{54})\mathrm{s}\alpha + d\mathrm{s}\varphi_{54}\mathrm{c}\varphi_{15}\mathrm{c}\alpha
\end{aligned}$$

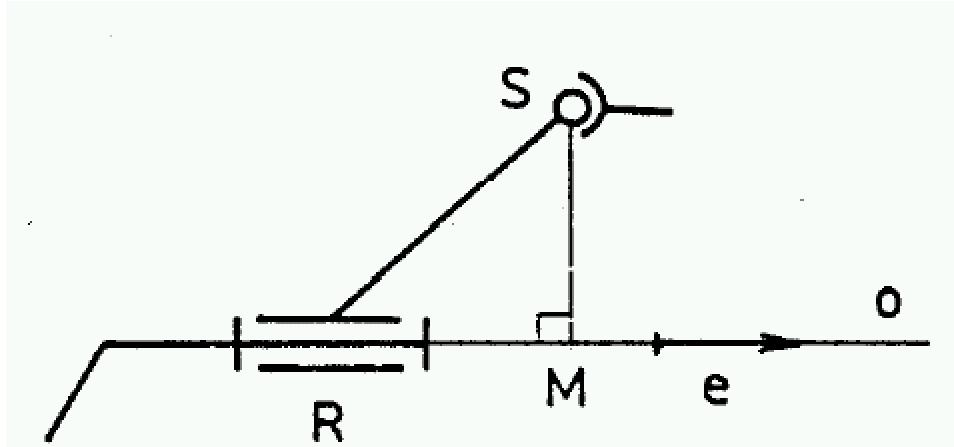


2. Metoda vyjmutí tělesa

- Počet neznámých a počet rovnic lze dále snížit. Kinematická smyčka je odpojena dvěma řezy a těleso mezi je odstraněno. Jsou sestaveny podmínky vazeb. Výsledné rovnice nezahrnují relativní souřadnice dvou KD tělesa. Nejvhodnější pro variantu S-S
- <u>Sférická – sférická KD (S-S)</u>
- Podmínkou je rovnost vzdálenosti středů sférických KJ na tělese.

$$|\mathbf{u}_{1S_1} - \mathbf{u}_{1S_2}| = l$$

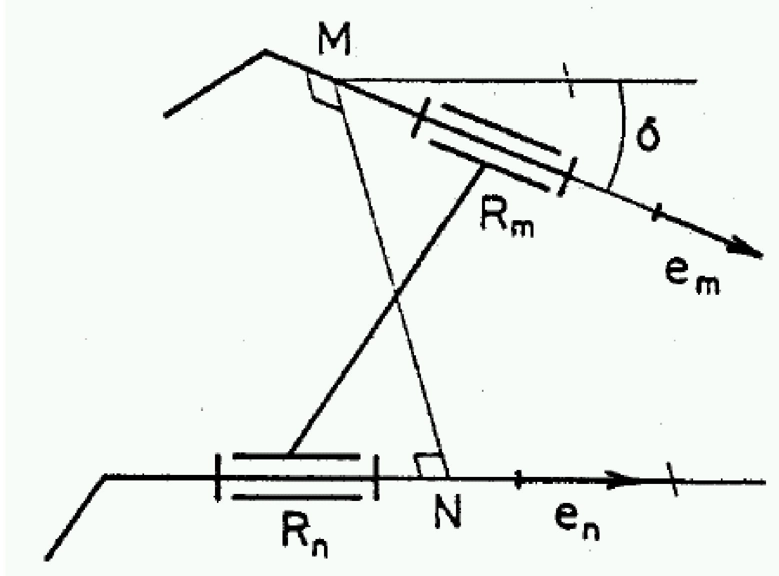
- Výsledkem je pouze 1 rovnice. Šest relativních souřadnic sférické KD se nepoužívá. POZOR: Těleso se může volně otáčet kolem S1S2.



- <u>Sférická-rotační (S-R)</u>
- Podmínky vyjadřují polohu středu sférické KD vůči ose rotační KD.

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{u}_{1S} - \mathbf{u}_{1M}| &= h \\
(\mathbf{u}_{1S} - \mathbf{u}_{1M}) \cdot \mathbf{e} &= 0
\end{aligned}
$$

- Výsledkem jsou pouze 2 rovnice. 4 relativní souřadnice sférické a rotační KD se nepoužívají.

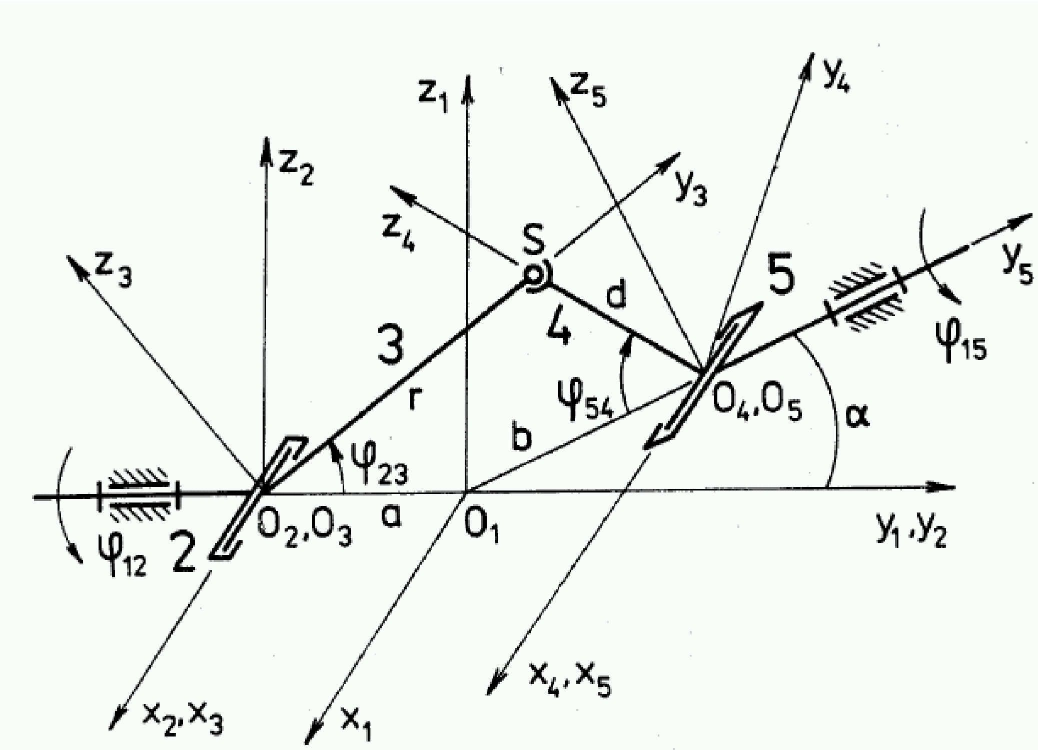


- <u>Rotační – rotační R-R</u>
- Podmínky vyjadřují vzájemnou polohu dvou mimoběžek a vzdálenost bodů na nich (použita příčka mimoběžek).

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_{1M} - \mathbf{u}_{1N} &= \frac{h}{\sin\delta}(\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n) \\
\mathbf{e}_m . \mathbf{e}_n &= \cos\delta
\end{aligned}
$$

- Výsledkem jsou pouze 4 rovnice. 2 relativní souřadnice rotačních KD se nepoužívají.

Příklad – RRSRR mechanismus

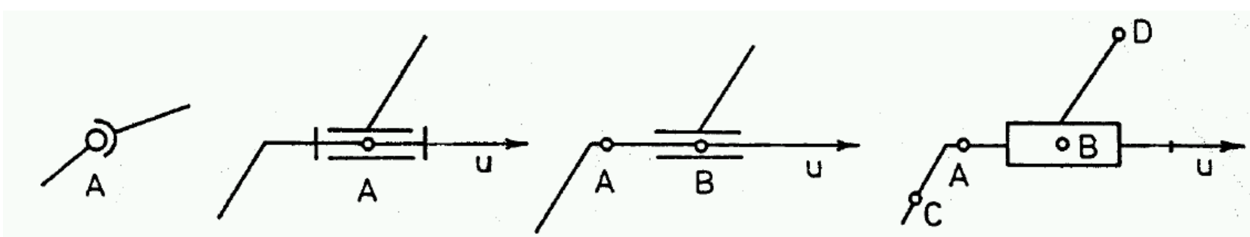


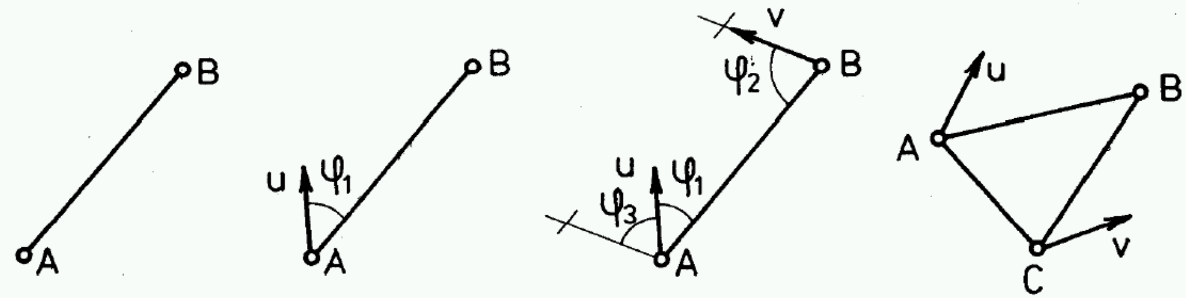
$$
\begin{aligned}
\lceil \mathbf{u}_{1S}, 1 \rceil &= \mathbf{T}_{15}\mathbf{T}_{54}\mathbf{r}_{4S} = \lceil d\mathrm{s}\varphi_{54}\mathrm{s}\varphi_{15}, (b - d\mathrm{c}\varphi_{54})\mathrm{c}\alpha - \\
&\quad -d\mathrm{s}\varphi_{54}\mathrm{c}\varphi_{15}\mathrm{s}\alpha, (b - d\mathrm{c}\varphi_{54})\mathrm{s}\alpha + d\mathrm{s}\varphi_{54}\mathrm{c}\varphi_{15}\mathrm{c}\alpha, 1\rceil \\
\lceil \mathbf{u}_{1M}, 1 \rceil &= \mathbf{T}_{12}\mathbf{r}_{4M} = \mathbf{T}_{12}\mathbf{r}_{4O_2} = \lceil 0, -a, 0, 1 \rceil \\
\lceil \mathbf{e}, 0 \rceil &= \mathbf{T}_{12}\lceil 1, 0, 0, 0 \rceil = \lceil \mathrm{c}\varphi_{12}, 0, -\mathrm{s}\varphi_{12}, 0 \rceil
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(d\mathrm{s}\varphi_{54}\mathrm{s}\varphi_{15})^2 + ((b - d\mathrm{c}\varphi_{54})\mathrm{c}\alpha - d\mathrm{s}\varphi_{54}\mathrm{c}\varphi_{15}\mathrm{s}\alpha + a)^2 + \\
+((b - d\mathrm{c}\varphi_{54})\mathrm{s}\alpha + d\mathrm{s}\varphi_{54}\mathrm{c}\varphi_{15}\mathrm{c}\alpha)^2 = r^2 \\
d\mathrm{s}\varphi_{54}\mathrm{s}\varphi_{15}\mathrm{c}\varphi_{12} - ((b - d\mathrm{c}\varphi_{54})\mathrm{s}\alpha + d\mathrm{s}\varphi_{54}\mathrm{c}\varphi_{15}\mathrm{c}\alpha)\mathrm{s}\varphi_{12} = 0
\end{aligned}
$$

4. Metoda přirozených souřadnic

- Přirozené souřadnice - kartézské souřadnice důležitých bodů a jednotkové vektory těles. Důležitými body jsou obvykle centra konkrétních KD. Důležitými jednotkovými vektory jsou obvykle směry os KD.
- Popis kinematické smyčky přirozeným sdílením důležitých bodů a jednotkových vektorů spojenými tělesy.
- Podmínky omezení platí pouze pro přirozené souřadnice na stejném tělese.
- Sférický kloub je popsán sdílením souřadnic středu.
- Revolute joint je popsán sdílením bodu osy a jejího jednotkového vektoru.
- Válcový spoj je popsán sdílením jednotkového vektoru a AB // u.
- Translační kloub je popsán sdílením jednotkového vektoru, AB // u a konstantního úhlu AC, BD





$$(x_{1B}-x_{1A})^2+(y_{1B}-y_{1A})^2+(z_{1B}-z_{1A})^2=l_{AB}^2$$

$$\begin{aligned}
(x_{1B}-x_{1A})u_1+(y_{1B}-y_{1A})u_2+(z_{1B}-z_{1A})u_3 &= l_{AB}\cos\varphi_1\\
(x_{1B}-x_{1A})v_1+(y_{1B}-y_{1A})v_2+(z_{1B}-z_{1A})v_3 &= l_{AB}\cos\varphi_2\\
u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 &= \cos\varphi_3
\end{aligned}$$

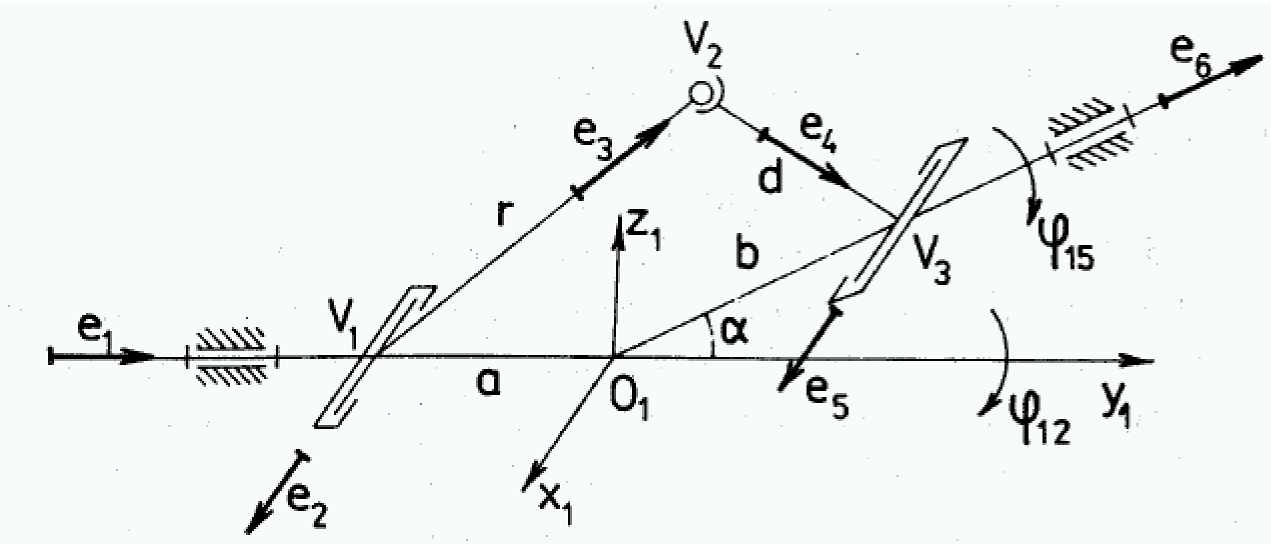
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} u_i^2 &= 1\\
\sum_{i=1}^{3} v_i^2 &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_{AB}u_1-(x_{1B}-x_{1A}) &= 0\\
l_{AB}u_2-(y_{1B}-y_{1A}) &= 0\\
l_{AB}u_3-(z_{1B}-z_{1A}) &= 0
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\vec{u}=\vec{0}$$

$$\begin{aligned}
k_1u_1+k_2v_1-(x_{1B}-x_{1A}) &= 0\\
k_1u_2+k_2v_2-(y_{1B}-y_{1A}) &= 0\\
k_1u_3+k_2v_3-(z_{1B}-z_{1A}) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_{1C}-x_{1A})(x_{1D}-x_{1B}) &+ (y_{1C}-y_{1A})(y_{1D}-y_{1B})+\\
+(z_{1C}-z_{1A})(z_{1D}-z_{1B}) &= l_{AC}l_{BD}\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD})
\end{aligned}$$



Příklad – RRSRR mechanism

$$\mathbf{u}_{1V_1} = [0, -a, 0], \qquad \mathbf{u}_{1V_3} = [0, bc\alpha, bs\alpha]$$
$$\mathbf{e}_1 = [0, 1, 0], \qquad \mathbf{e}_6 = [0, c\alpha, s\alpha]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1.\mathbf{e}_5 &= y_5 = 0 \\ \mathbf{e}_5.\mathbf{e}_6 &= y_5 c\alpha + z_5 s\alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1V_2}^2 + (y_{1V_2} + a)^2 + z_{1V_2}^2 &= r^2 \\ x_{1V_2}x_2 + (y_{1V_2} + a)y_2 + z_{1V_2}z_2 &= 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 &= 1 \end{aligned}$$

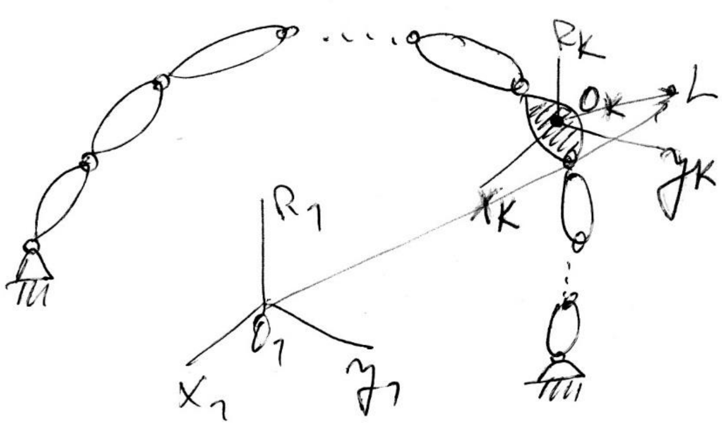
$$\mathbf{e}_2 = [c\varphi_{12}, 0, -s\varphi_{12}]$$

$$\begin{aligned} x_{1V_2}^2 + (y_{1V_2} - bc\alpha)^2 + (z_{1V_2} - bs\alpha)^2 &= d^2 \\ x_{1V_2}x_5 + (y_{1V_2} - bc\alpha)y_5 + (z_{1V_2} - bs\alpha)z_5 &= 0 \\ x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_5 = [c\varphi_{15}, s\varphi_{15}s\alpha, -s\varphi_{15}c\alpha]$$

4. Methoda fyzikálních souřadnic

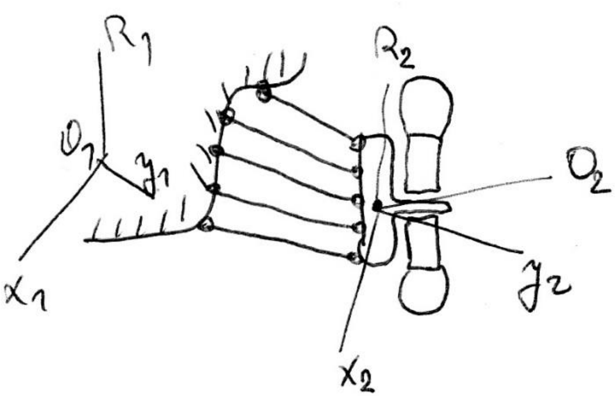
- Kartézské (fyzikální) souřadnice - každé těleso je popsáno kartézskými souřadnicemi (souřadnice počátku místního souřadnicového systému) a jeho orientací (např. Kardanovy úhly).
- Jsou popsány podmínky vazeb pro spojení každého tělesa s jeho sousedy - metoda rozpojené smyčky.



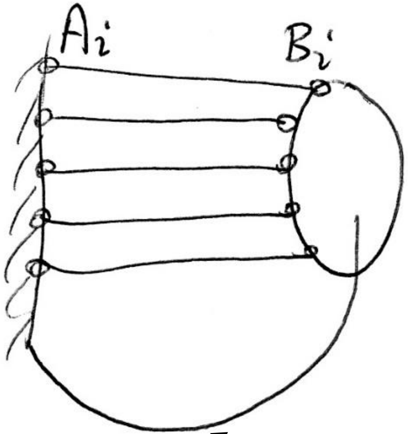
$$\mathbf{T_{1k}} = \mathbf{T_x}(x_k)\mathbf{T_y}(y_k)\,\mathbf{T_z}(z_k)\mathbf{T_{\varphi x}}(\varphi_{xk})\mathbf{T_{\varphi y}}(\varphi_{yk})\,\mathbf{T_{\varphi z}}(\varphi_{yk})$$

$$^{\mathbf{1}}\mathbf{r_{1L}} = \mathbf{T_{1k}}\,^{\mathbf{k}}\mathbf{r_{kL}}$$

Příklad – Pětibodový závěs kola.



$[x\ y\ z]^T$, φ_x, φ_y φ_z … Cardanovy úhly



$A_iB_i=l_i$

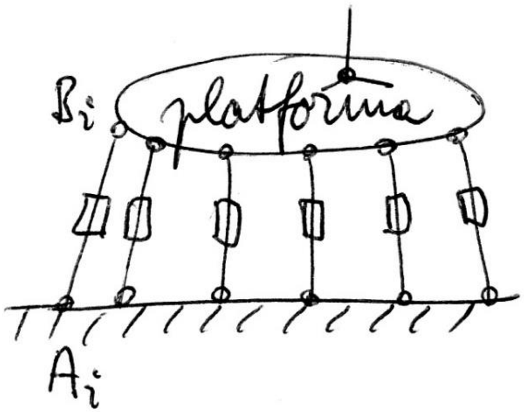
6 souřadnic

5 skalárních vazbových podmínek

6-5=1 DOF

virtuální smyčka

Příklad – Hexapod



$x, y, z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, l_i = l_i(t), i=1,2,\ldots,6$

$A_iB_i=l_i$

12 souřadnic

6 skalárních rovnic vazeb

12-6=6 DOF