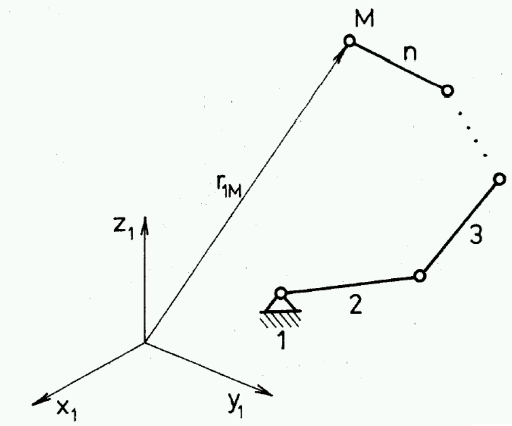
Metoda základních matic

- Řešení kinematického popisu je transformováno do násobení základních matic a matic diferenciálních operátorů:
- Pro bod M:

$$\mathbf{r}_{1M} = \prod_{j=1}^{N} \mathbf{T}_{Zk_j}(p_j)\mathbf{r}_{nM}$$



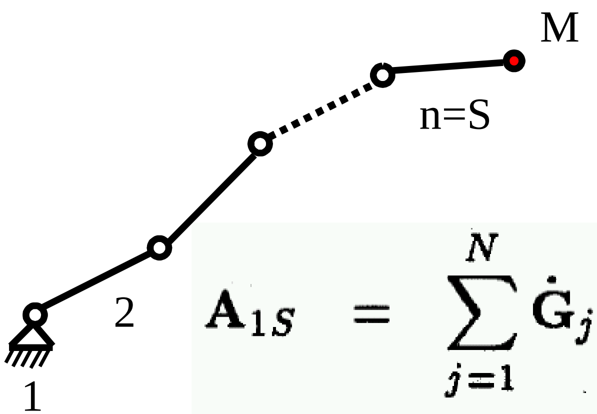
$$\mathbf{v}_{1M} = \dot{\mathbf{r}}_{1M} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j \mathbf{E}(\dot{p}_j)\mathbf{r}_{nM}$$

$$\mathbf{a}_{1M} = \ddot{\mathbf{r}}_{1M} = \sum_{j=1}^{N}\left(\mathbf{F}_j\mathbf{E}(\ddot{p}_j) + \sum_{l=1}^{N}\mathbf{F}_{jl}\mathbf{E}(\dot{p}_j)\mathbf{E}(\dot{p}_l)\right)\mathbf{r}_{nM}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_j &= \mathbf{T}_{Zk_1}(p_1)\mathbf{T}_{Zk_2}(p_2)\ldots\mathbf{T}_{Zk_j}(p_j)\mathbf{D}_{Zk_j}(1)\ldots\mathbf{T}_{Zk_N}(p_N) \\
\mathbf{F}_{jl} &= \mathbf{T}_{Zk_1}(p_1)\mathbf{T}_{Zk_2}(p_2)\ldots\mathbf{T}_{Zk_j}(p_j)\mathbf{D}_{Zk_j}(1)\mathbf{T}_{Zk_{j+1}}(p_{j+1})\ldots \\
&\ldots\ \mathbf{T}_{Zk_l}(p_l)\mathbf{D}_{Zk_l}(1)\mathbf{T}_{Zk_{l+1}}(p_{l+1})\ldots\mathbf{T}_{Zk_N}(p_N)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_{jj} = \mathbf{T}_{Zk_1}(p_1)\mathbf{T}_{Zk_2}(p_2)\ldots\mathbf{T}_{Zk_j}(p_j)\mathbf{D}^2_{Zk_j}(1)\ldots\mathbf{T}_{Zk_N}(p_N)$$

Pro těleso S:



$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}_{1S} &= \prod_{j=1}^{N} \mathbf{T}_{Zk_j}(p_j) \\
\mathbf{V}_{1S} &= \mathbf{T}_{1S}^{-1}\dot{\mathbf{T}}_{1S} \\
\mathbf{A}_{1S} &= \dot{\mathbf{V}}_{1S}
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{V}_{1S} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{G}_j \mathbf{E}(\dot{p}_j)$$

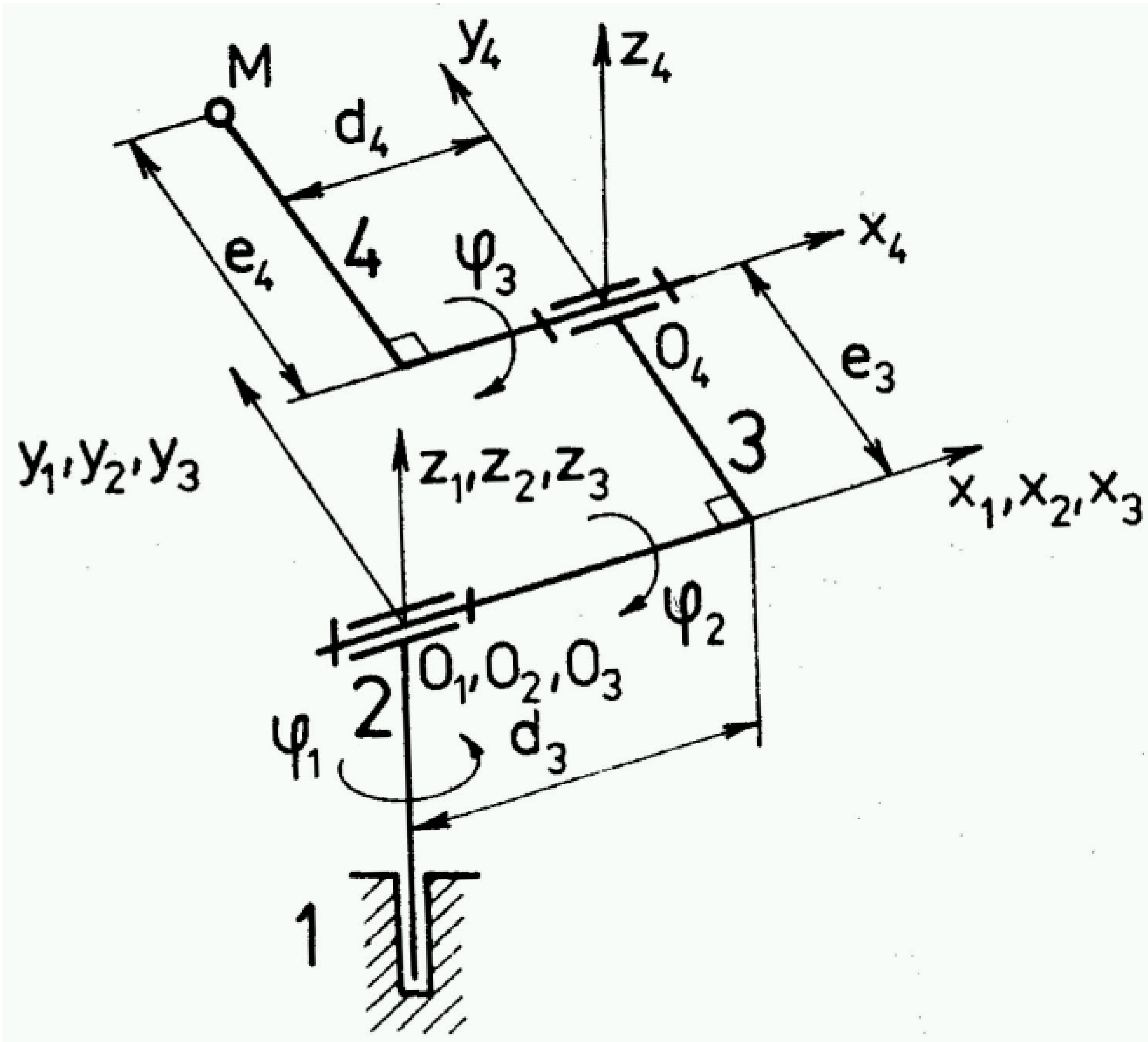
$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{1S} &= \sum_{j=1}^{N} \dot{\mathbf{G}}_j \mathbf{E}(\dot{p}_j) + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{G}_j \mathbf{E}(\ddot{p}_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{G}_{ji}\mathbf{E}(\dot{p}_j)\mathbf{E}(\dot{p}_i) + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{G}_j \mathbf{E}(\ddot{p}_j)
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{T}_{1S}^{-1} = \prod_{j=0}^{N-1} \mathbf{T}_{Z,N-j}(-p_{N-j})$$

$$\mathbf{G}_j = \mathbf{T}_{Zk_N}(-p_N)\ldots\mathbf{T}_{Zk_{j+1}}(-p_{j+1})\mathbf{D}_{Zk_j}(1)\mathbf{T}_{Zk_{j+1}}(p_{j+1})\ldots\mathbf{T}_{Zk_N}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}_{ji} = \quad & \mathbf{T}_{Zk_N}(-p_N)\ldots\mathbf{T}_{Zk_i}(-p_i)\mathbf{D}_{Zk_i}(-1)\ldots \\
& \ldots\mathbf{T}_{Zk_{j+1}}(-p_{j+1})\mathbf{D}_{Zkj}(1)\mathbf{T}_{Zk_{j+1}}(p_{j+1})\ldots\mathbf{T}_{Zk_N}(p_N) + \\
& +\mathbf{T}_{Zk_N}(-p_N)\ldots\mathbf{T}_{Zk_{j+1}}(-p_{j+1})\mathbf{D}_{Zk_j}(1)\mathbf{T}_{Zk_{j+1}}(p_{j+1})\ldots \\
& \ldots\mathbf{T}_{Zk_i}(p_i)\mathbf{D}_{Zk_i}(1)\ldots\mathbf{T}_{Zk_N}(p_N) \qquad (5.9
\end{aligned}
$$

Příklad



M
y_4
z_4
d_4
e_4
4
φ_3
x_4
O_4
e_3
3
y_1, y_2, y_3
z_1, z_2, z_3
x_1, x_2, x_3
φ_2
O_1, O_2, O_3
2
φ_1
d_3
1

$$\mathbf{r}_{1M} = \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{34}\mathbf{r}_{4M}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{1M} &= \lceil x_{1M}, y_{1M}, z_{1M}, 1\rceil \\
\mathbf{r}_{4M} &= \lceil -d_4, e_4, 0, 1\rceil
\end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_{12} = \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1)$$

$$\mathbf{T}_{23} = \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2)$$

$$\mathbf{T}_{34} = \mathbf{T}_{x}(d_3)\mathbf{T}_{y}(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)$$

$$\mathbf{r}_{1M} = \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2)\mathbf{T}_{x}(d_3)\mathbf{T}_{y}(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)\mathbf{r}_{4M}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{1M} &= (\mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1)\mathbf{D}_{\varphi z}(1)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2)\mathbf{T}_{x}(d_3)\mathbf{T}_{y}(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)\mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_1) + \\
&+ \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2)\mathbf{D}_{\varphi x}(1)\mathbf{T}_{x}(d_3)\mathbf{T}_{y}(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)\mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_2) + \\
&+ \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2)\mathbf{T}_{x}(d_3)\mathbf{T}_{y}(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)\mathbf{D}_{\varphi x}(1)\mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_3))\mathbf{r}_{4M}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_{14} = \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2)\mathbf{T}_x(d_3)\mathbf{T}_y(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)$$

$$\mathbf{T}_{14}^{-1} = \mathbf{T}_{\varphi x}(-\varphi_3)\mathbf{T}_y(-e_3)\mathbf{T}_x(-d_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(-\varphi_2)\mathbf{T}_{\varphi z}(-\varphi_1)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{T}}_{14} \;&=\; \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1)\mathbf{D}_{\varphi z}(1)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2)\mathbf{T}_x(d_3)\mathbf{T}_y(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)\mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_1) + \\
&+\; \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2)\mathbf{D}_{\varphi x}(1)\mathbf{T}_x(d_3)\mathbf{T}_y(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)\mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_2) + \\
&+\; \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2)\mathbf{T}_x(d_3)\mathbf{T}_y(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)\mathbf{D}_{\varphi x}(1)\mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_3)
\end{aligned}$$

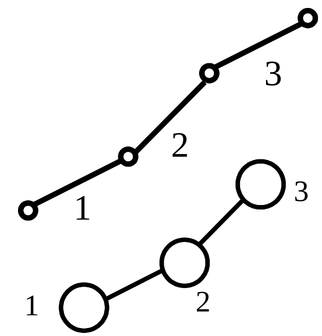
$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}_{14} = \mathbf{T}_{14}^{-1}\dot{\mathbf{T}}_{14} = \\
&= \mathbf{T}_{\varphi x}(-\varphi_3)\mathbf{T}_y(-e_3)\mathbf{T}_x(-d_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(-\varphi_2)\mathbf{D}_{\varphi z}(1)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2)\mathbf{T}_x(d_3)\mathbf{T}_y(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)\mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_1) + \\
&+\mathbf{T}_{\varphi x}(-\varphi_3)\mathbf{T}_y(-e_3)\mathbf{T}_x(-d_3)\mathbf{D}_{\varphi x}(1)\mathbf{T}_x(d_3)\mathbf{T}_y(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)\mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_2) + \\
&+\mathbf{D}_{\varphi x}(1)\mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_3)
\end{aligned}$$

Různé souřadnice pro popis soustav mnoha těles

<u>Dva ideální objekty: tuhé těleso a kinematická dvojice (kinematická vazba)</u>

Tuhé těleso = uzel grafu

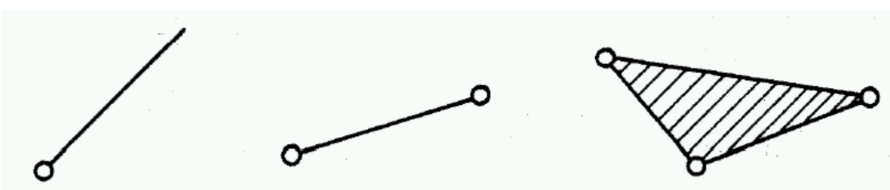
Kinematická dvojice (KD) = hrana grafu

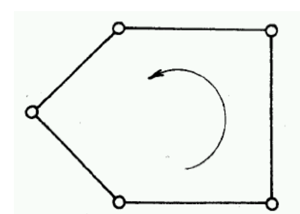


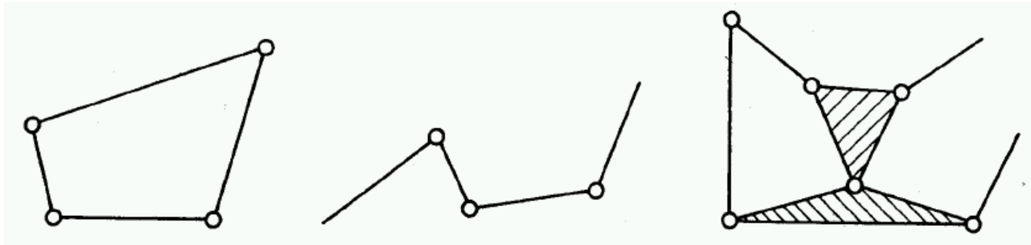
Těleso stupně n = těleso (prvek) připojeno k sousedním tělesům n KD (unární, binární, ternární)

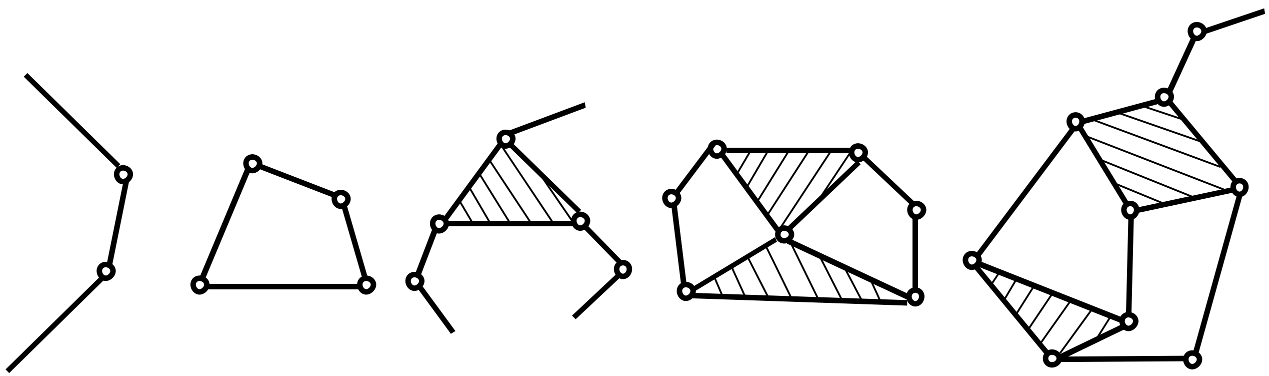
Jednoduchý / složený kinematický řetězec = všechna tělesa jsou / nejsou binární (unární)

Kinematický řetězec otevřený/uzavřený, pokud smyčka v grafu existuje / neexistuje



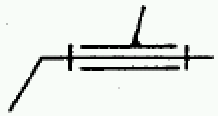
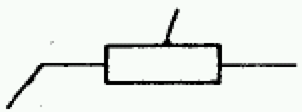
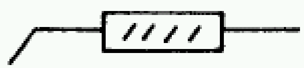
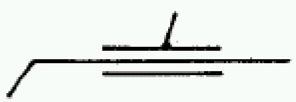
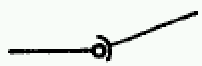
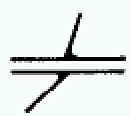
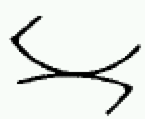
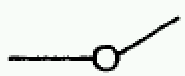


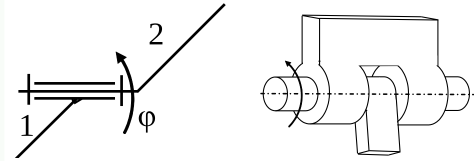


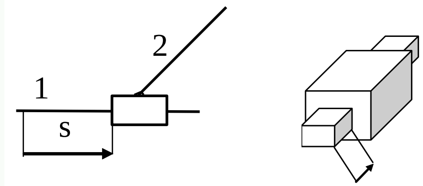


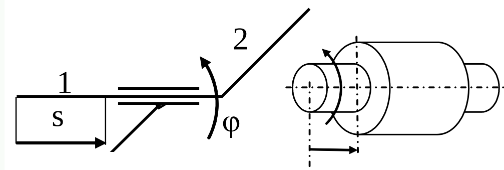
a) b) c) d) e)

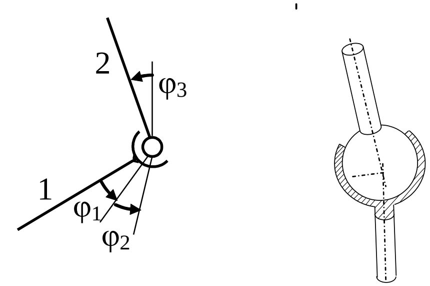
Mechanismus je získán z kinematického řetězce určením jednoho tělesa základním rámem

Pair name	Pair chart symbol	Pair symbol	Degree of freedom	Class
revolute		R	1	5
prismatic		P	1	5
helical		H	1	5
cylindrical		C	2	4
spherical		S	3	3
flat		F	3	3
general		G	5	1
arbitrary		A	i	6 - i









- Použití základních konceptů teorie grafů

Graf: těleso = vrchol, KD (kinematická dvojice) = hrana, další hrany = požadovaný pohyb (například pohyb chapadla v inverzní kinematické úloze robotu)

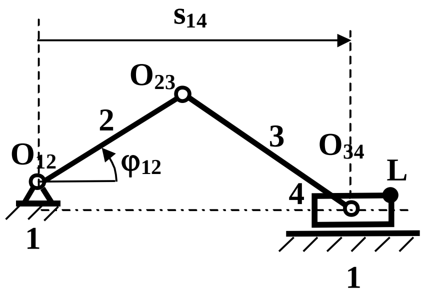
Kostra grafu je podgrafem grafu, který obsahuje všechny uzly a jedná se o strom (a

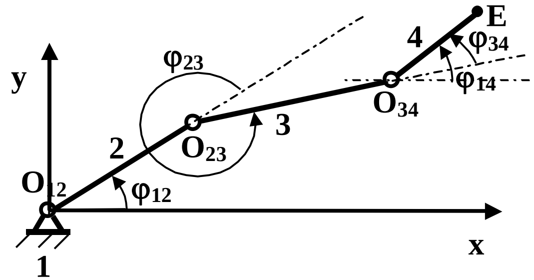
$$d_s + m_s = u - 1$$

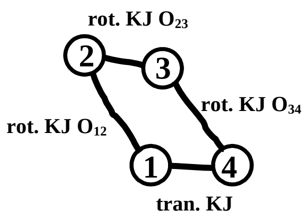
Zde d_s+m_s je počet hran kostry grafu.

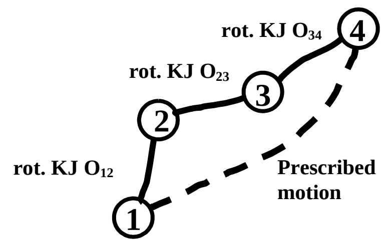
Mechanický systém s ***u*** tělesy a ***d*** KD (+ ***m*** požadovanými pohyby) má ***l*** nezávislých kinematických smyček

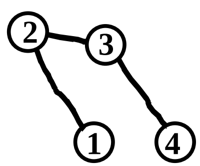
$$l = d - u + 1 \qquad\qquad l = d + m - u + 1$$

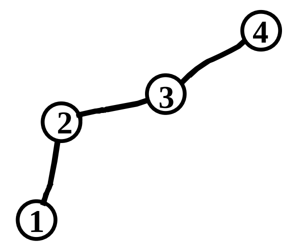

s14
O23
2
3
O12
φ12
O34
L
4
1
1

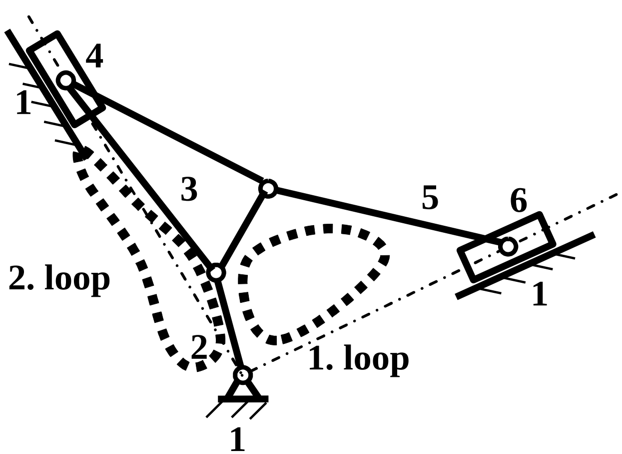

E
4
φ34
φ23
y
φ14
O34
3
2
O23
O12
φ12
x
1

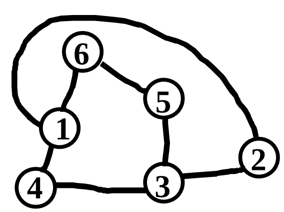

rot. KJ O23
rot. KJ O34
rot. KJ O12
tran. KJ

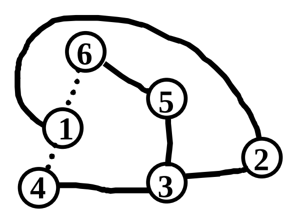

rot. KJ O34
rot. KJ O23
rot. KJ O12
Prescribed motion

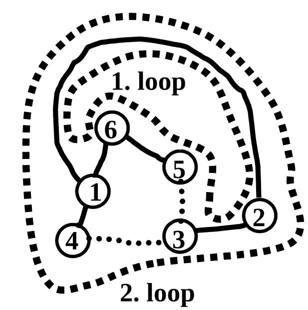




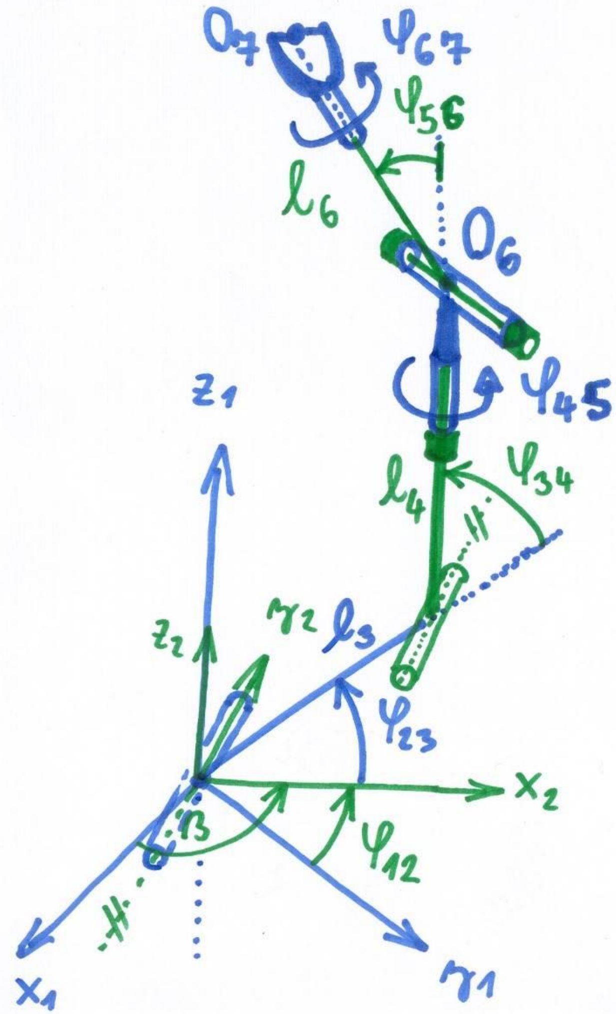

4
1
3
5
6
2. loop
1
2
1. loop
1






1. loop
2. loop

Inversní kinematika prostorového robota



Inverse kinematics – example

Given: End-effector motion $\underline{T_{17}}$

dimensions: l_3, l_4, l_6

Goal: Relative motions in joints + Matlab implementations

Souřadnice

- Souřadnice - parametry popisující polohu těles, KD a celého mechanismu v průběhu pohybu (relativní, fyzikální, přirozené …)
- DOF = „Degrees of freedom“ = „Počet stupňů volnosti“
- KD, která odstraňuje j DOF, je třídy j, má (6-j) DOF a má j skalárních složek reakčních účinků
- Počet DOF mechanismu je **minimálně**

$$i = 6(n-1) - \sum_{j=1}^{5} j d_j$$

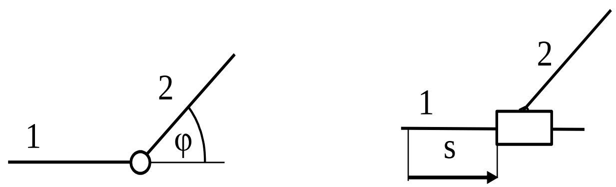
- Skutečný počet DOF v dané poloze závisí na podmíněnosti Jacobiho matice rovnic vazeb v této poloze (**singularita** rovnic vazeb **přidává stupně volnosti** – v dané poloze nebo globálně)
- Počet souřadnic KD (relativních) v jedné jednoduché kinematické smyčce je:

$$p = \sum_{j=1}^{5} (6-j) d_j$$

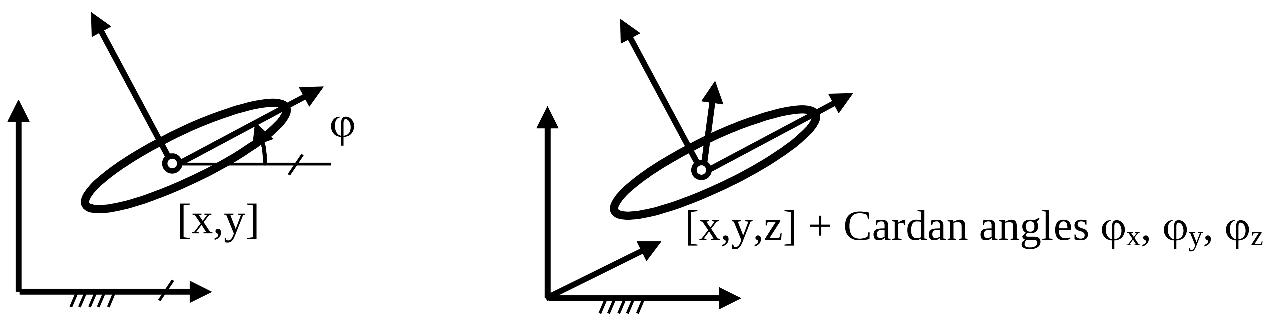
- Každá jedno[illegible]atická smyčka (mechanismus) s n DOF má n nezávislých a **maximálně 6** závislých souřadnic mezi souřadnicemi KD (relativními souřadnicemi).
- Mechanický systém s n DOF a l nezávislými kinematickými smyčkami má mezi souřadnicemi KD (relativními) n nezávislých a **maximálně 6l** závislých souřadnic.

Základní typy souřadnic

- **Relativní souřadnice - souřadnice KD**



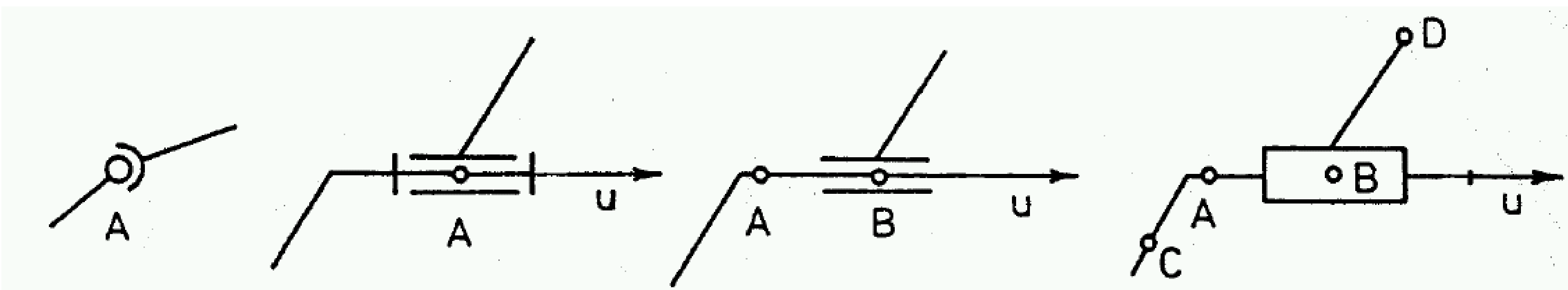
- **Fyzikální (absolutní) souřadnice** - souřadnice popisující polohu jednotlivých těles vzhledem k rámu - x, y, z (kartézské) souřadnice důležitého bodu tělesa (těžiště) a souřadnice popisující jeho orientaci vzhledem k základnímu rámu (kardanové úhly, Eulerovy úhly, kvaterniony, …)

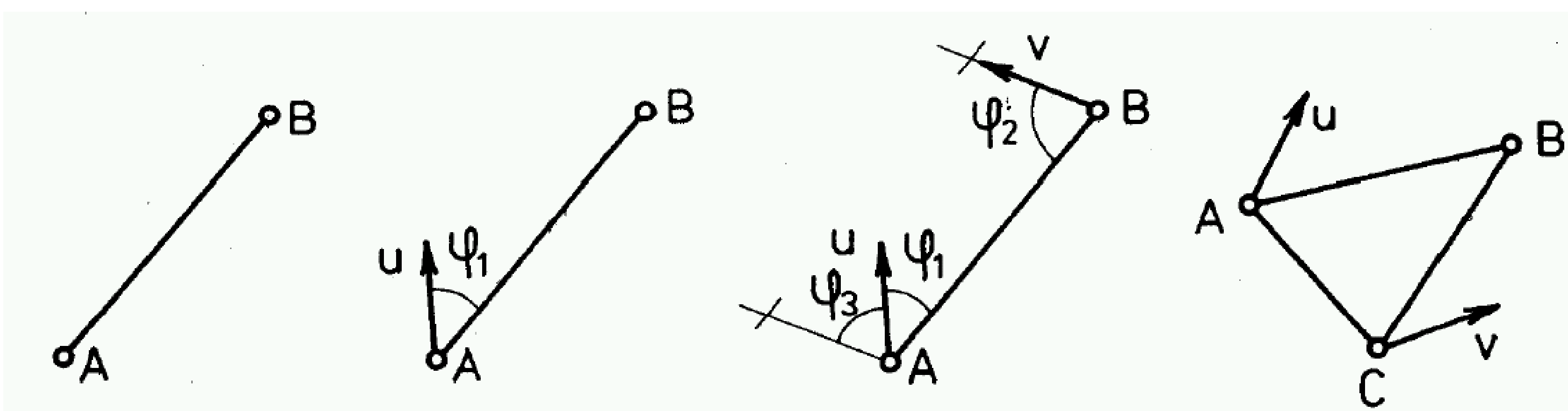


- **<u>Přirozené souřadnice</u>** – absolutní kartézské souřadnice důležitých bodů a jednotkových vektorů těles. Důležitými body jsou obvykle centra konkrétních KD. Důležitými jednotkovými vektory jsou obvykle směry os KD

Výhody =

- Sdílení důležitých bodů a jednotkových vektorů spojenými tělesy
- **Konstantní matice hmotnosti**
- **Vazbové rovnice kvadratické v souřadnicích, Jacobiho matice lineární**





$$(x_{1B}-x_{1A})^2+(y_{1B}-y_{1A})^2+(z_{1B}-z_{1A})^2=l_{AB}^2$$

$$\begin{aligned}
(x_{1B}-x_{1A})u_1+(y_{1B}-y_{1A})u_2+(z_{1B}-z_{1A})u_3 &= l_{AB}\cos\varphi_1\\
(x_{1B}-x_{1A})v_1+(y_{1B}-y_{1A})v_2+(z_{1B}-z_{1A})v_3 &= l_{AB}\cos\varphi_2\\
u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 &= \cos\varphi_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}u_i^2 &= 1\\
\sum_{i=1}^{3}v_i^2 &= 1
\end{aligned}$$

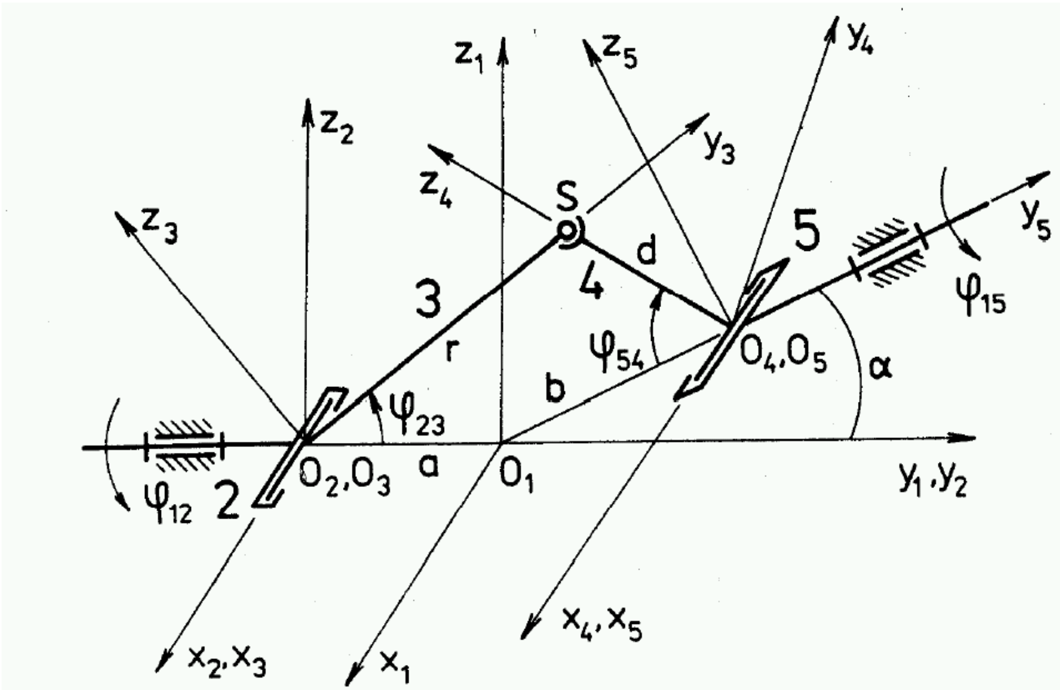
$$\begin{aligned}
l_{AB}u_1-(x_{1B}-x_{1A}) &= 0\\
l_{AB}u_2-(y_{1B}-y_{1A}) &= 0\\
l_{AB}u_3-(z_{1B}-z_{1A}) &= 0
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\vec{u}=\vec{0}$$

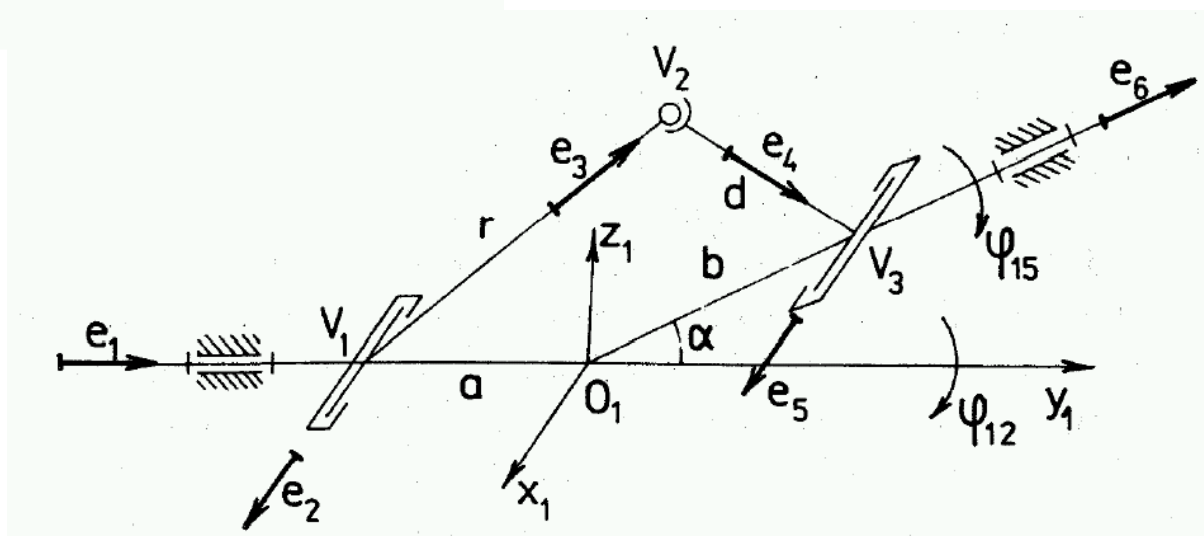
$$\begin{aligned}
k_1u_1+k_2v_1-(x_{1B}-x_{1A}) &= 0\\
k_1u_2+k_2v_2-(y_{1B}-y_{1A}) &= 0\\
k_1u_3+k_2v_3-(z_{1B}-z_{1A}) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_{1C}-x_{1A})(x_{1D}-x_{1B}) &+ (y_{1C}-y_{1A})(y_{1D}-y_{1B})+\\
+(z_{1C}-z_{1A})(z_{1D}-z_{1B}) &= l_{AC}l_{BD}\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD})
\end{aligned}$$

Příklad



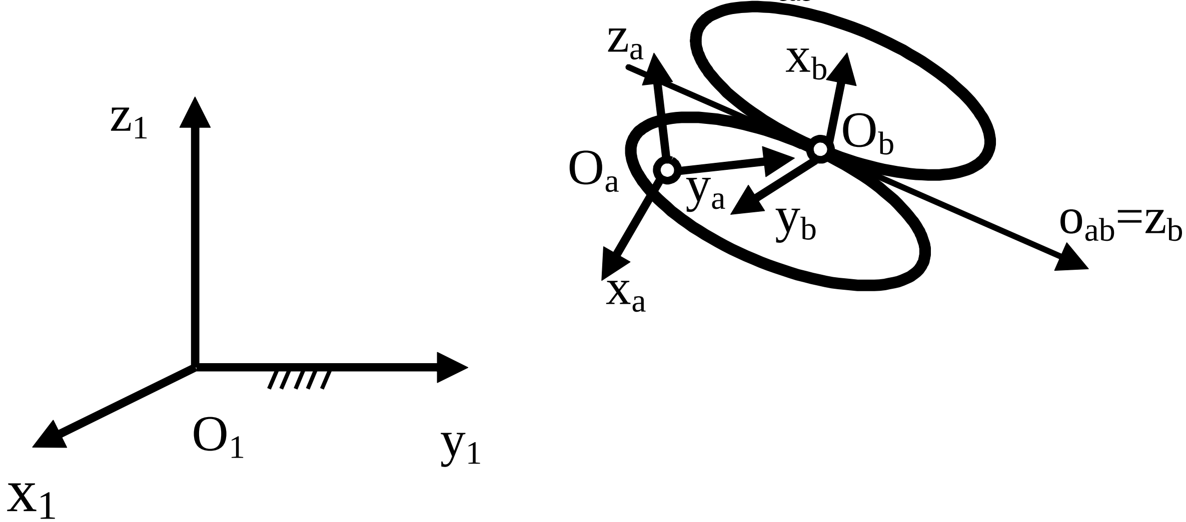
z_1
z_5
y_4
z_2
y_3
z_4
S
z_3
5
y_5
d
3
4
φ_{15}
r
φ_{54}
O_4, O_5
α
b
φ_{23}
O_2, O_3
a
O_1
y_1, y_2
φ_{12}
2
x_4, x_5
x_2, x_3
x_1



V_2
e_6
e_3
e_4
d
r
z_1
b
V_3
φ_{15}
e_1
V_1
α
a
O_1
e_5
φ_{12}
y_1
e_2
x_1

Popis pohybů v kinematických dvojicích

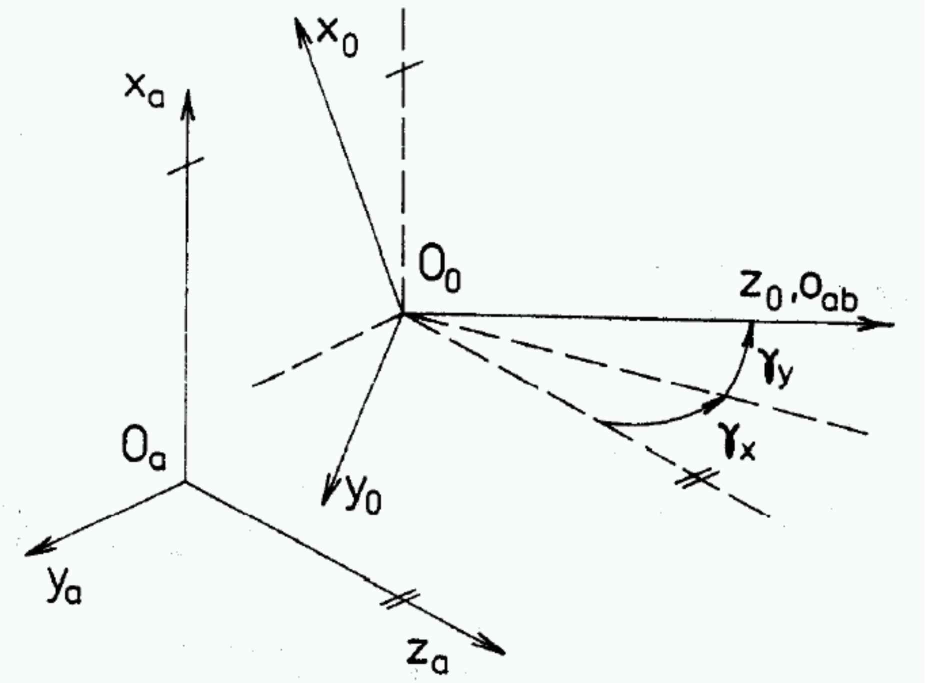
- Tělesa a a b jsou spojena KD s osou o_{ab}



- Na tělesech a a b jsou vybrány dva souřadnicové systémy:
- $O_a x_a y_a z_a$, který je pevně spojen s tělesem a
- $O_0 x_0 y_0 z_0$, který je pevně spojen s tělesem a a navázán na osu o_{ab}
- $O_b x_b y_b z_b$, který je pevně spojen s tělesem b a navázán na osu o_{ab}

- Relativní pohyb těles spojených KD je pak popsán jako:

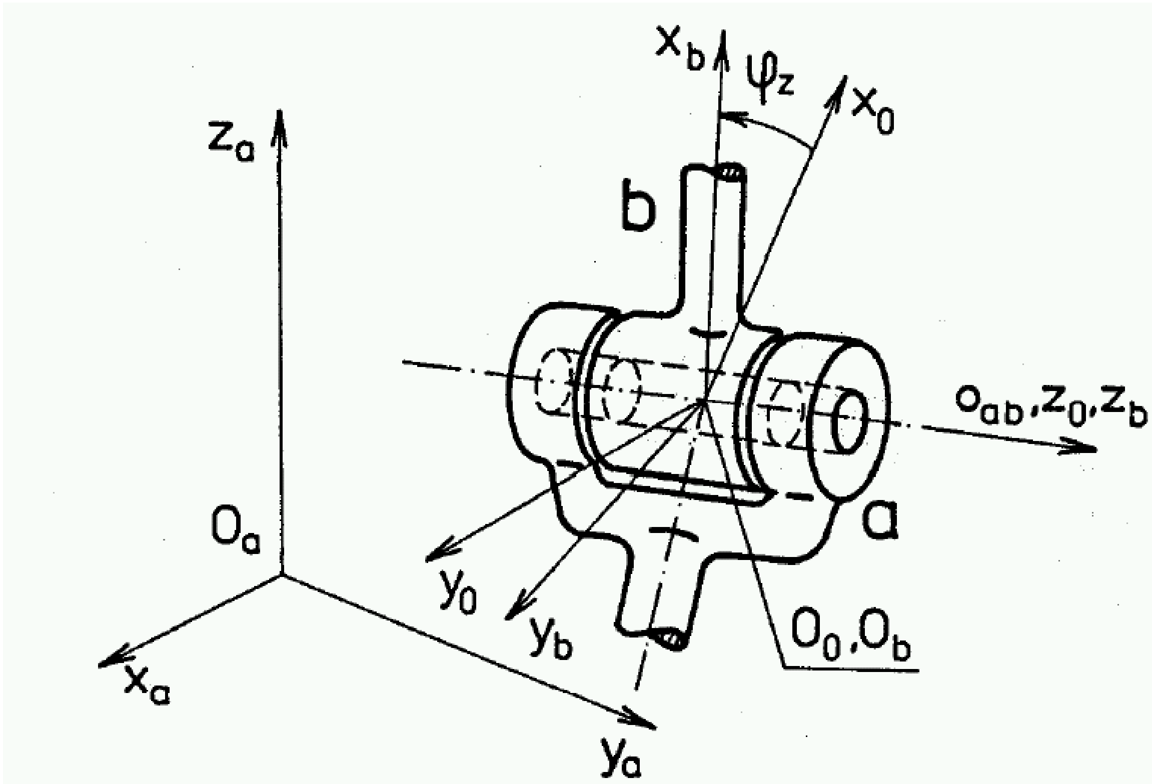
$$\mathbf{T}^{KJ} = \mathbf{T}_0 \mathbf{T}^{rel}$$



Z $O_a x_a y_a z_a$ do $O_0 x_0 y_0 z_0$ je pak obecně možno přejít pomocí 5 základních transformací (bez samotného pohybu v KD spojené s o_{ab}).

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_x(x_0)\mathbf{T}_y(y_0)\mathbf{T}_z(z_0)\mathbf{T}_{\varphi x}(\gamma_x)\mathbf{T}_{\varphi y}(\gamma_y)$$

Rotační kinematická dvojice

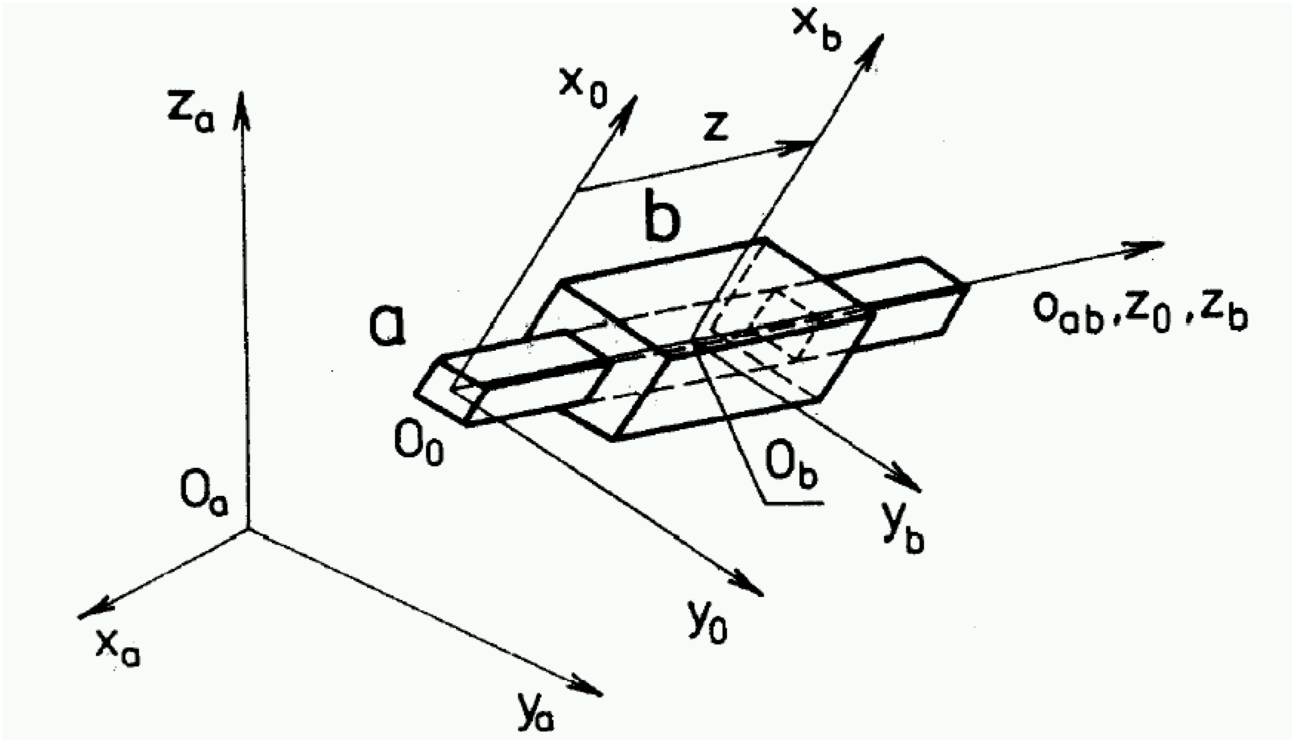


$$\mathbf{T}^R = \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi)$$

$$\mathbf{V}^R = \mathbf{D}_{\varphi z}(\dot{\varphi})$$

$$\mathbf{A}^R = \mathbf{D}_{\varphi z}(\ddot{\varphi})$$

Posuvná kinematická dvojice

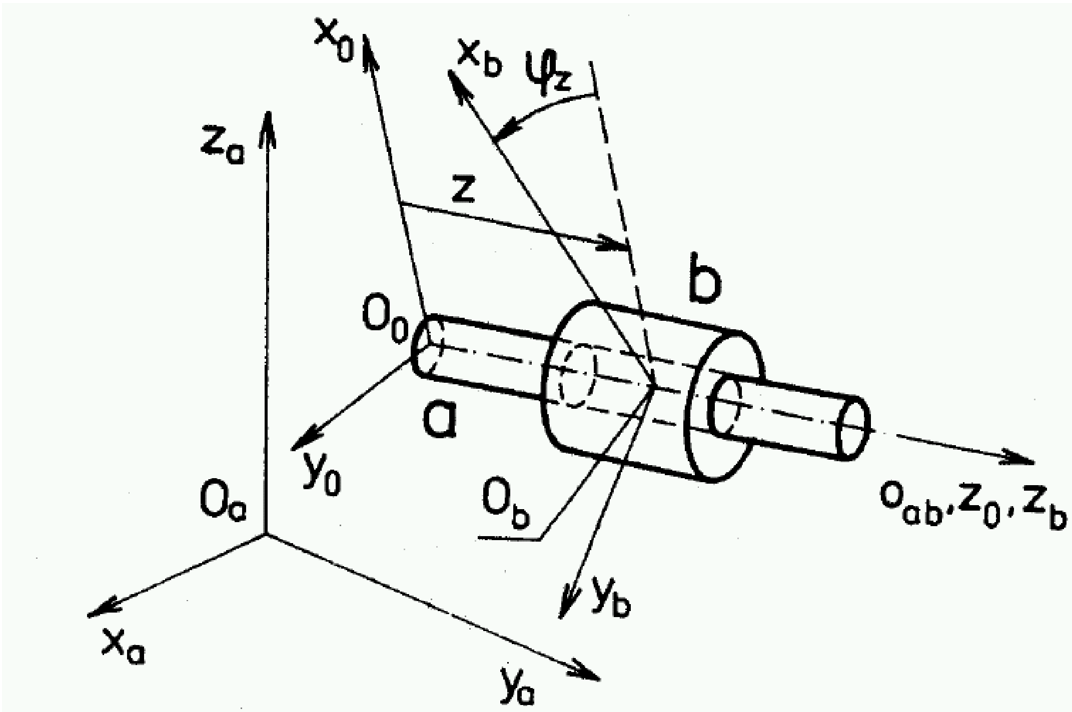


$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_z(z)$$

$$\mathbf{V}^T = \mathbf{D}_z(\dot{z})$$

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{D}_z(\ddot{z})$$

Válcová kinematická dvojice



$$\mathbf{T}^C = \mathbf{T}_0\mathbf{T}_z(z)\mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi) = \mathbf{T}_0\mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi)\mathbf{T}_z(z)$$

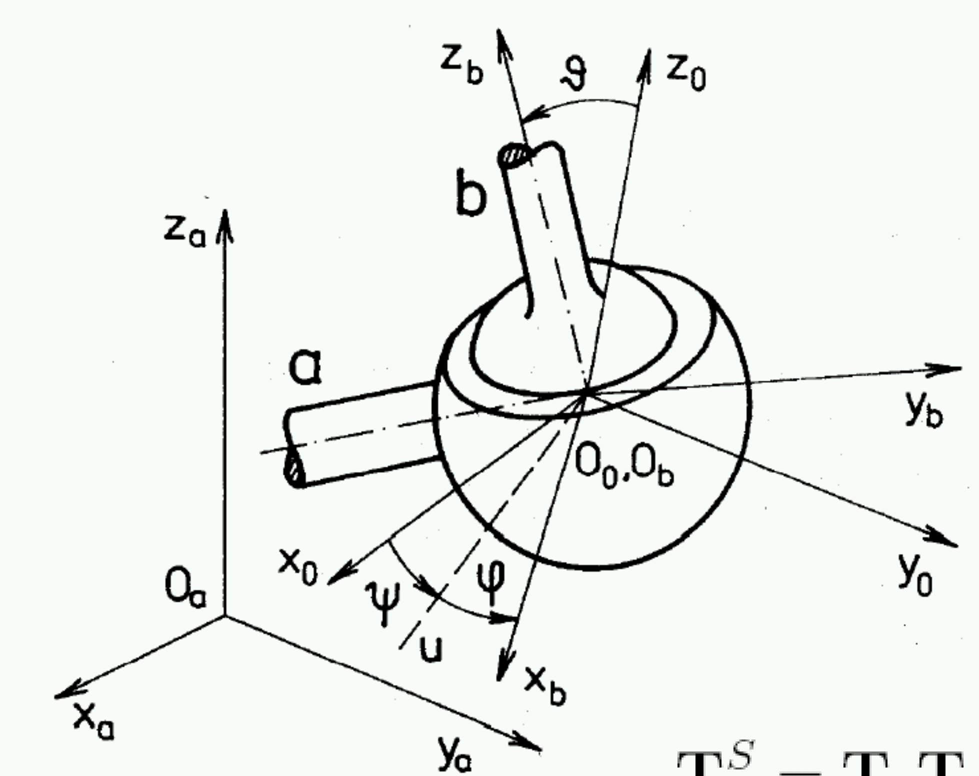
$$\mathbf{V}^C = \mathbf{D}_{\varphi z}(\dot{\varphi}) + \mathbf{D}_z(\dot{z})$$

$$\mathbf{A}^C = \mathbf{D}_{\varphi z}(\ddot{\varphi}) + \mathbf{D}_z(\ddot{z})$$

Helical kinematical joint

$$z = k\varphi$$

Sférická kinematická dvojice
Eulerovy úhly



$$\mathbf{T}^S = \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_{\varphi z}(\psi) \mathbf{T}_{\varphi x}(\vartheta) \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi)$$

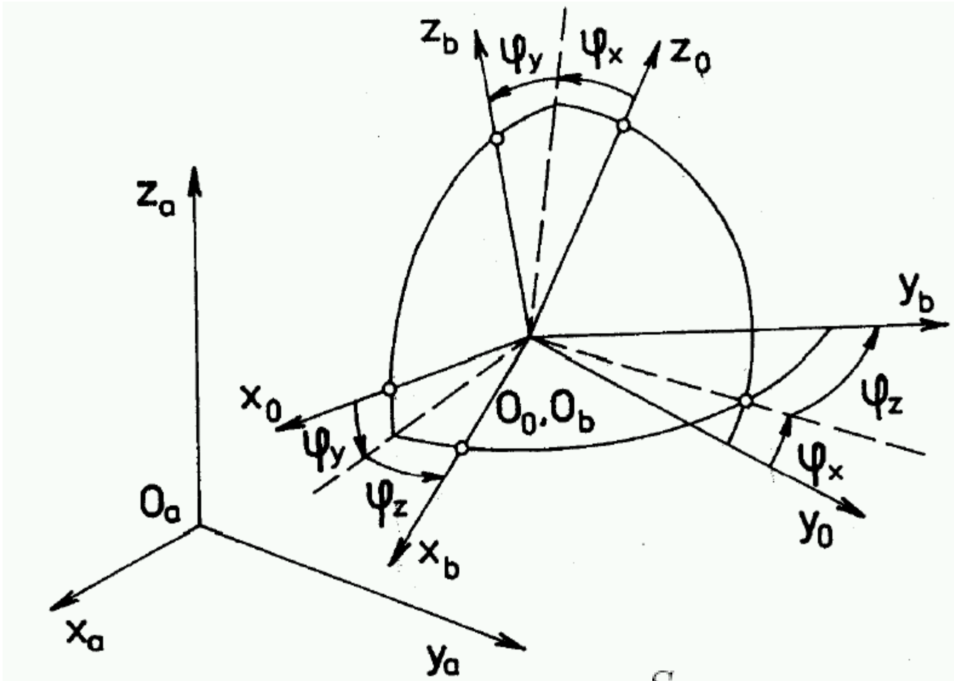
$$\mathbf{T}^S = \mathbf{T}_0 \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi\mathrm{c}\varphi - \mathrm{s}\psi\mathrm{c}\vartheta\mathrm{s}\varphi, & -\mathrm{c}\psi\mathrm{s}\varphi - \mathrm{s}\psi\mathrm{c}\vartheta\mathrm{c}\varphi, & \mathrm{s}\psi\mathrm{s}\vartheta, & 0 \\ \mathrm{s}\psi\mathrm{c}\varphi + \mathrm{c}\psi\mathrm{c}\vartheta\mathrm{s}\varphi, & -\mathrm{s}\psi\mathrm{s}\varphi + \mathrm{c}\psi\mathrm{c}\vartheta\mathrm{c}\varphi, & -\mathrm{c}\psi\mathrm{s}\vartheta, & 0 \\ \mathrm{s}\vartheta\mathrm{s}\varphi, & \mathrm{s}\vartheta\mathrm{c}\varphi, & \mathrm{c}\vartheta, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

Eulerovy kinematické rovnice pro Eulerovy úhly

$$\mathbf{\Omega}^S = \mathbf{S}_{\varphi z}^T(\varphi)\mathbf{S}_{\varphi x}^T(\vartheta)\mathbf{\Omega}_{\varphi z}(\dot{\psi})\mathbf{S}_{\varphi x}(\vartheta)\mathbf{S}_{\varphi z}(\varphi) + \mathbf{S}_{\varphi z}^T(\varphi)\mathbf{\Omega}_{\varphi x}(\dot{\vartheta})\mathbf{S}_{\varphi x}(\varphi) + \mathbf{\Omega}_{\varphi z}(\dot{\varphi})$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} \dot{\psi}\mathrm{s}\vartheta\mathrm{s}\varphi + \dot{\vartheta}\mathrm{c}\varphi \\ \dot{\psi}\mathrm{s}\vartheta\mathrm{c}\varphi - \dot{\vartheta}\mathrm{s}\varphi \\ \dot{\psi}\mathrm{c}\vartheta + \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Cardanovy úhly



$$\mathbf{T}^S = \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_x) \mathbf{T}_{\varphi y}(\varphi_y) \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_z)$$

$$\mathbf{T}^S = \mathbf{T}_0 \begin{bmatrix} c\varphi_y c\varphi_z, & -c\varphi_y s\varphi_z, & s\varphi_y, & 0 \\ c\varphi_x s\varphi_z + s\varphi_x s\varphi_y c\varphi_z, & c\varphi_x c\varphi_z - s\varphi_x s\varphi_y s\varphi_z, & -s\varphi_x c\varphi_y, & 0 \\ s\varphi_x s\varphi_z - c\varphi_x s\varphi_y c\varphi_z, & s\varphi_x c\varphi_z + c\varphi_x s\varphi_y s\varphi_z, & c\varphi_x c\varphi_y, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

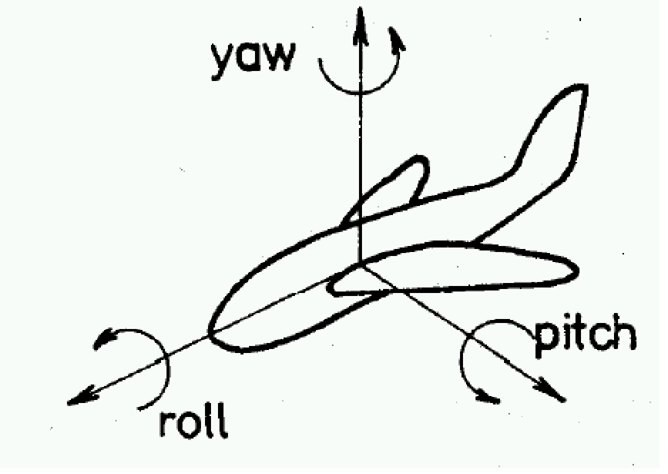
$$\mathbf{T}^S = \mathbf{T}_0 \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_z & \varphi_y & 0 \\ \varphi_z & 1 & -\varphi_x & 0 \\ -\varphi_y & \varphi_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

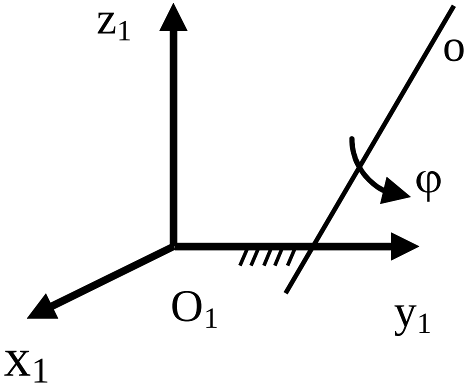
Eulerovy kinematické rovnice pro Cardanovy úhly

$$\mathbf{\Omega}^S = \mathbf{S}^T_{\varphi z}(\varphi_z)\mathbf{S}^T_{\varphi y}(\varphi_y)\mathbf{\Omega}_{\varphi z}(\dot{\varphi}_x)\mathbf{S}_{\varphi y}(\varphi_y)\mathbf{S}_{\varphi z}(\varphi_z) + \mathbf{S}^T_{\varphi z}(\varphi_z)\mathbf{\Omega}_{\varphi y}(\dot{\varphi}_y)\mathbf{S}_{\varphi z}(\varphi_z) + \mathbf{\Omega}_{\varphi z}(\dot{\varphi}_z)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_x \mathrm{c}\varphi_y \mathrm{c}\varphi_z + \dot{\varphi}_y \mathrm{s}\varphi_z \\ -\dot{\varphi}_x \mathrm{c}\varphi_y \mathrm{s}\varphi_z + \dot{\varphi}_y \mathrm{c}\varphi_z \\ \dot{\varphi}_x \mathrm{s}\varphi_y + \dot{\varphi}_z \end{bmatrix}$$

Roll, pitch, yaw – vozidla, letadla





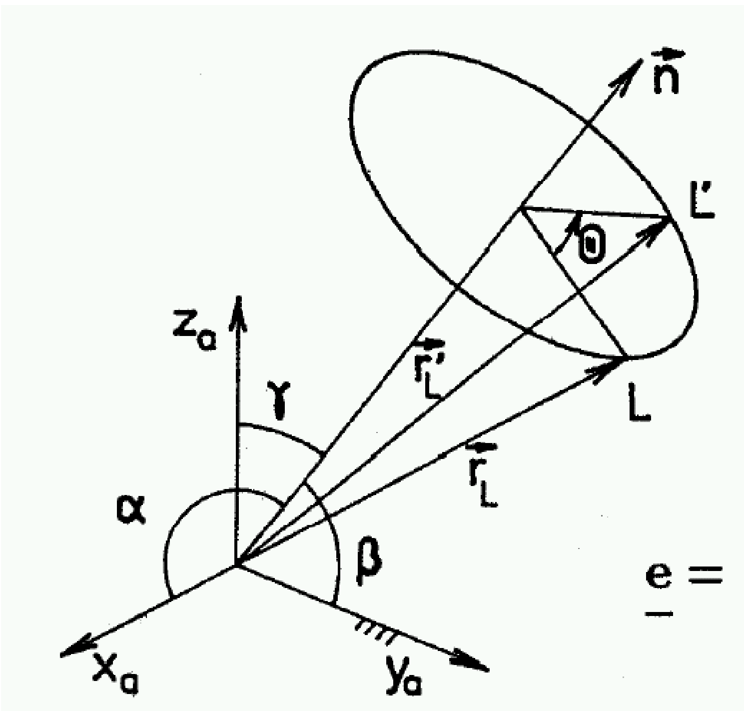
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_o \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi) \mathbf{T}_o^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \mathbf{T}_{\varphi x}(\alpha)(\mathbf{T}_{\varphi x}(-\alpha)\mathbf{T}_{\varphi y}(\beta)\mathbf{T}_{\varphi x}(\alpha)) \\
&\quad (\mathbf{T}_{\varphi x}(-\alpha)\mathbf{T}_{\varphi y}(-\beta)\mathbf{T}_{\varphi z}(\gamma)\mathbf{T}_{\varphi y}(\beta)\mathbf{T}_{\varphi x}(\alpha)) \\
&= \mathbf{T}_{\varphi z}(\gamma)\mathbf{T}_{\varphi y}(\beta)\mathbf{T}_{\varphi x}(\alpha)
\end{aligned}$$

Roll, pitch, yaw: idea – otáčení podél původních (pevných) os

Eulerovy parametery (kvaterniony)

- Eulerovy parametry jsou prvky normovaného kvaternionu.



$$\hat{\mathbf{e}}^S = \cos\frac{\Theta}{2} + \mathbf{n}\sin\frac{\Theta}{2}$$

$$\sin\varphi = s\varphi, \cos\varphi = c\varphi$$

$$\mathbf{n} = \lceil c\alpha, c\beta, c\gamma \rceil$$

$$\underline{\mathbf{e}} = \lceil e_0, e_1, e_2, e_3 \rceil = \lceil \mathrm{c}\frac{\Theta}{2}, \mathrm{c}\alpha\ \mathrm{s}\frac{\Theta}{2}, \mathrm{c}\beta\ \mathrm{s}\frac{\Theta}{2}, \mathrm{c}\gamma\ \mathrm{s}\frac{\Theta}{2} \rceil$$

- Kvaternion je „součet“ skaláru and a vektoru

$$\hat{\mathbf{u}} = u_0 + \mathbf{u}$$

- Jedná se o zobecnění komplexních čísel do prostoru

- Konjugovaný kvaternion $\hat{\mathbf{u}}^* = u_0 - \mathbf{u}$

- Norma kvaternionu $|\hat{\mathbf{u}}|^2 = \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}^*$ $\quad |\hat{\mathbf{e}}|^2 = 1$

- The norm of Euler parameters is 1

- Eulerovy parametery jsou tedy vázány $e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$

- Je definováno skládání kvaternionů pro současné pohyby

$$\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}} = u_0 v_0 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + u_0 \mathbf{v} + v_0 \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

- Kvaternion je tedy alternativa matice směrových kosinů

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{S}_{ab}\mathbf{u}_b \qquad \mathbf{u}_a = \hat{\mathbf{e}}_{ab}\mathbf{u}_b\hat{\mathbf{e}}_{ab}^*$$

$$\mathbf{S}_{13} = \mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{23} \qquad \hat{\mathbf{e}}_{13} = \hat{\mathbf{e}}_{12}\hat{\mathbf{e}}_{23}$$

- Z Eulerových parameterů k matici směrových kosinů

$$\mathbf{S}_{ab} = 2\begin{bmatrix} e_0^2+e_1^2-\frac{1}{2} & e_1e_2-e_0e_3 & e_1e_3+e_0e_2 \\ e_1e_2+e_0e_3 & e_0^2+e_2^2-\frac{1}{2} & e_2e_3-e_0e_1 \\ e_1e_3-e_0e_3 & e_2e_3+e_0e_1 & e_0^2+e_3^2-\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Z matice směrových kosinů k Eulerovým parameterům

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|ccc} \mathrm{tr}\ \mathbf{S}_{ab} & -s_{23} & -s_{13} & -s_{12} \\ \hline s_{32} & s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{13} & s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{21} & s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \mathbf{B}^T + (1 - \mathrm{tr}\ \mathbf{S}_{ab})\mathbf{E}_4 = 4\tilde{\mathbf{e}}_{ab}\tilde{\mathbf{e}}_{ab}^T = 4\begin{bmatrix} e_0e_0 & e_0e_1 & e_0e_2 & e_0e_3 \\ e_1e_0 & e_1e_1 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_0 & e_2e_1 & e_2e_2 & e_2e_3 \\ e_3e_0 & e_3e_1 & e_3e_2 & e_3e_3 \end{bmatrix}$$

1. Nechť k se rovná indexu nejvyšší absolutní hodnoty prvků na diagonále matice B ’, k=0,1,2,3.
2. Vypočítejme

$$e'_{m,ab} = \frac{b'_{km}}{2\sqrt{b'_{kk}}}, \quad m = 0, 1, 2, 3$$

3. Nechť

$$\begin{aligned} e_{m,ab} &= e'_{m,ab} \operatorname{sgn} e'_{0,ab}, \quad m = 0, 1, 2, 3 \\ \operatorname{sgn} e'_{0,ab} &= \begin{cases} -1 & \text{for} \quad e'_{0,ab} < 0 \\ +1 & \text{for} \quad e'_{0,ab} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Výsledek je

$$\underline{\mathbf{e}} = [e_0, e_1, e_2, e_3]$$

Úhlová rychlost přes kvaternion

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{b,ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_{b,ab} = 2 \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix}$$

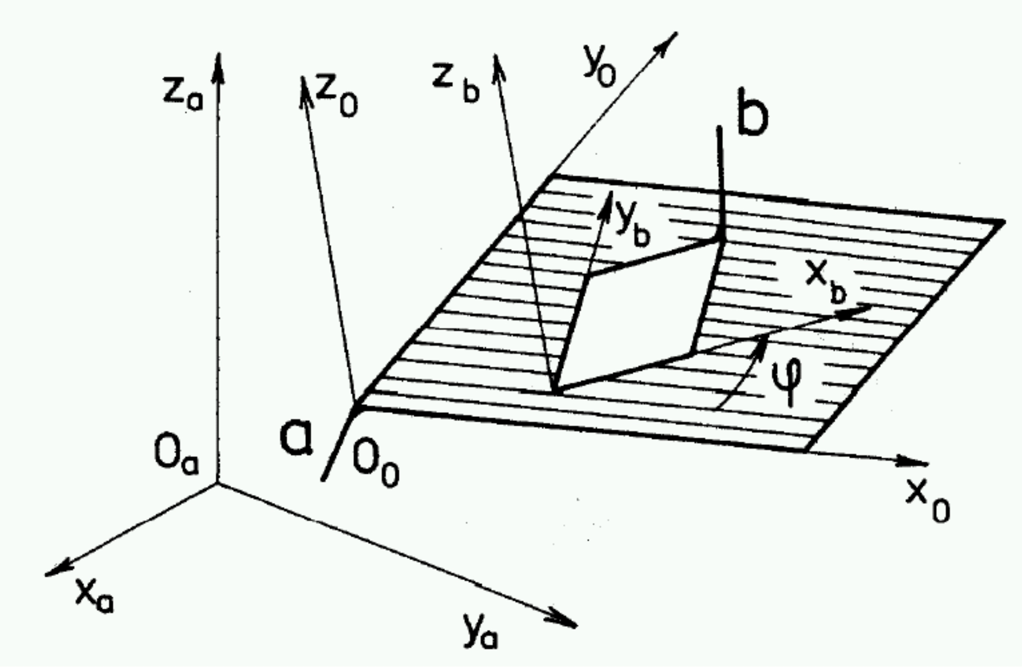
$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\boldsymbol{\omega}^T \\ \hline \boldsymbol{\omega} & -\boldsymbol{\Omega} \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

Úhlové zrychlení přes kvaternion

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\alpha}_{b,ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}_{b,ab} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{e}_0 \\ \ddot{e}_1 \\ \ddot{e}_2 \\ \ddot{e}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{e}_0 \\ \ddot{e}_1 \\ \ddot{e}_2 \\ \ddot{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\boldsymbol{\alpha}^T \\ \hline \boldsymbol{\alpha} & -\mathcal{A} \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\boldsymbol{\omega}^T \\ \hline \boldsymbol{\omega} & -\boldsymbol{\Omega} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix}$$

Rovinná kinematická dvojice



$$\mathbf{T}^F = \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_x(x) \mathbf{T}_y(y) \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi)$$