Dynamika soustav mnoha těles Lagrangeovými rovnicemi smíšeného typu

prof. Ing. Zbyněk Šika, Ph.D.
prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
Ing. Jan Zavřel, Ph.D.
Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Fakulta strojní, ČVUT v Praze

- Existuje mnoho přístupů k sestavení pohybových rovnic, takzvaných formalismů.
- Popíšeme a použijeme přístup, který je při odvozování pohybových rovnic snadný a systematický.

Lagrangeovy rovnice smíšeného typu

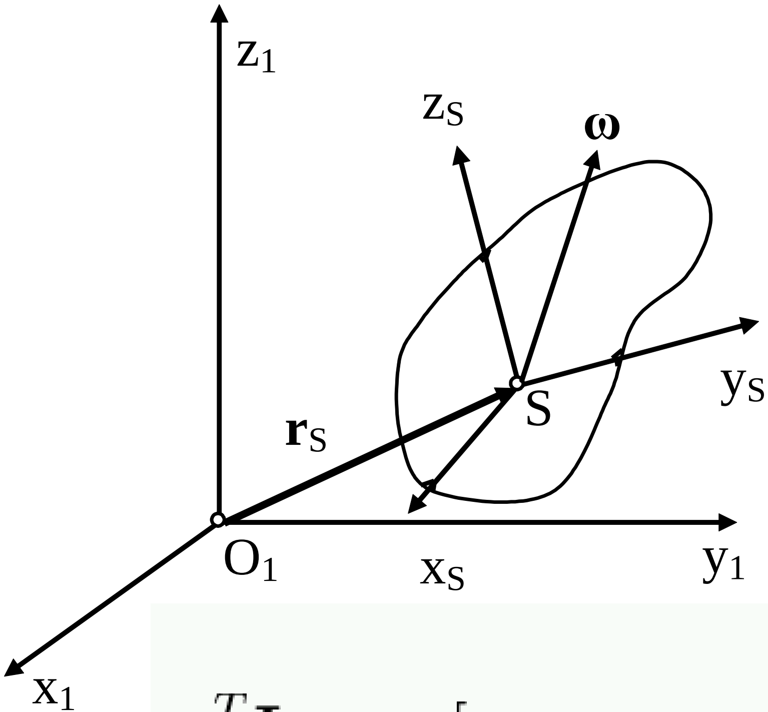
- Systém má n stupňů volnosti.
- Je popsán pomocí m závislých (např. fyzikálních) souřadnic
- $s_j, \quad j=1, \ldots, m, m>n$
- Tyto souřadnice jsou vázané holonomními rheonomními vazbami
- $f_k(s_j,t)=0, k=1, \ldots, r, r=m-n$

- Výraz pro kinetickou energii E_k je sestaven jako
- $T = E_k = E_k(s_j, d/dt\ s_j, t)$
- Lagrangeovy rovnice smíšeného typu jsou

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial T}{\partial s_j} = Q_j + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial s_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

- kde Q_j jsou zobecněné síly a λ_k Lagrangeovy multiplikátory odpovídající vazbovým rovnicím $f_{k.}$

- Výraz pro kinetickou energii Ek je sestaven pomocí Königovy věty



$$E_k = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega}$$

$$v_S^2 = \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{v}_S = \mathbf{v}_S^T \mathbf{v}_S, \quad \mathbf{v}_S = \frac{d\mathbf{r}_S}{dt}$$

$$\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega} = [\omega_{Sx}, \omega_{Sy}, \omega_{Sz}] \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{Sx} \\ \omega_{Sy} \\ \omega_{Sz} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{1S} = \mathbf{S}_{1S}^T \dot{\mathbf{S}}_{1S}$$

- Výraz pro zobecněné síly Qj se sestaví pomocí
- 1) skalární výrazy

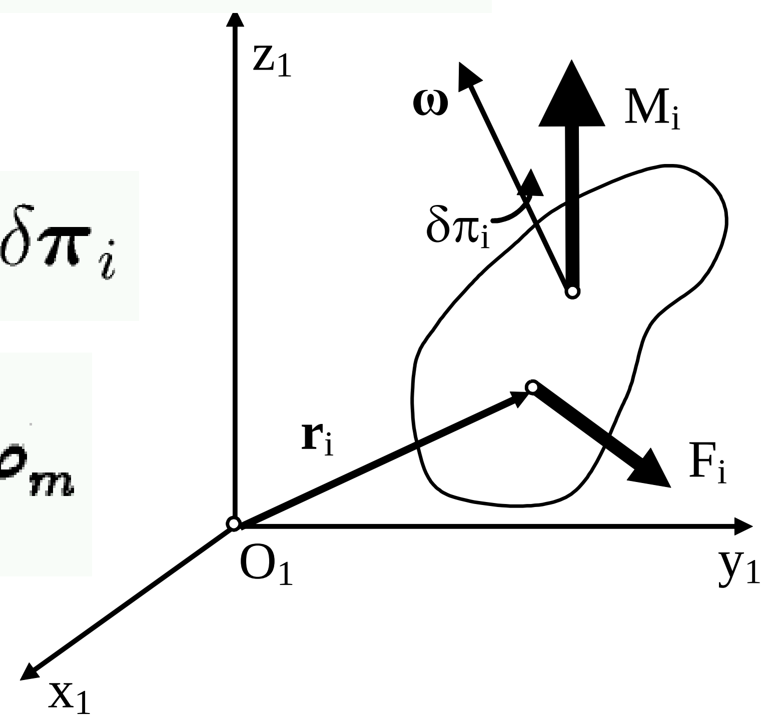
$$Q_j = \sum_l P_l \frac{\partial p_l}{\partial s_j}$$

$$Q_j \delta s_j = \sum_h P_h \delta p_h$$

- 2) vektorové výrazy

$$Q_j \delta s_j = \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \mathbf{M}_i \cdot \delta \boldsymbol{\pi}_i$$

$$Q_r \delta q_r = \sum_l \mathbf{F}_l^T \delta \mathbf{r}_l + \sum_m \mathbf{M}_m^T \delta \boldsymbol{\varphi}_m$$



$$\boldsymbol{\omega}_i \delta t = \delta \boldsymbol{\pi}_i$$

- V prostoru neintegrovatelné (ne jako v rovině)

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i$$

- Toto platí jen pro jednu osu otáčení
- Pro úhlové veličiny tedy platí složitější vztahy

$$\omega_i = \boldsymbol{A}(\varphi)\dot{\varphi}_i \qquad \boldsymbol{\Omega}_{1S} = \mathbf{S}_{1S}^T \dot{\mathbf{S}}_{1S}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{s}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial s_j} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{s}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_i}{\partial s_j}$$

$$Q_j = \mathbf{F}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{s}_j} + \mathbf{M}_i^T \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{s}_j}$$

- 3) potenciální energie a Raleighova funkce

$$V = V(s_j, t) \qquad Q_r = -\frac{\partial V}{\partial q_r}$$

$$P_l = -b_l \dot{s}_l$$

$$D = D(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, t) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j b_{ij} \dot{s}_i \dot{s}_j$$

$$P_l = -\frac{\partial D}{\partial \dot{s}_j}$$

- Velmi užitečné pro pružiny a tlumiče

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial T}{\partial s_j} = Q_j - \frac{\partial V}{\partial s_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{s}_j} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial s_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Struktura LRST

$$\sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{s}_a \partial \dot{s}_j} \ddot{s}_a + \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial s_a \partial \dot{s}_j} \dot{s}_a + \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{s}_j} - \frac{\partial T}{\partial s_j} = Q_j + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial s_j}$$

Přidáním druhých derivací vazeb jsou zrychlení řešitelná.

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2} = \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial s_a} \ddot{s}_a + \sum_{j=1}^{n} \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial s_j \partial s_a} \dot{s}_a \dot{s}_j + 2 \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial t \partial s_a} \dot{s}_a + \frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{\Phi}_s^T \\ \mathbf{\Phi}_s & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{s}} \\ -\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{s}} = [\ddot{s}_1, \ddot{s}_2, \ldots, \ddot{s}_n], \boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$$

Elementy vektorů a matic LRST

$$(\mathbf{M})_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{s}_i \partial \dot{s}_j}, \qquad (\boldsymbol{\Phi}_s)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial s_j},$$

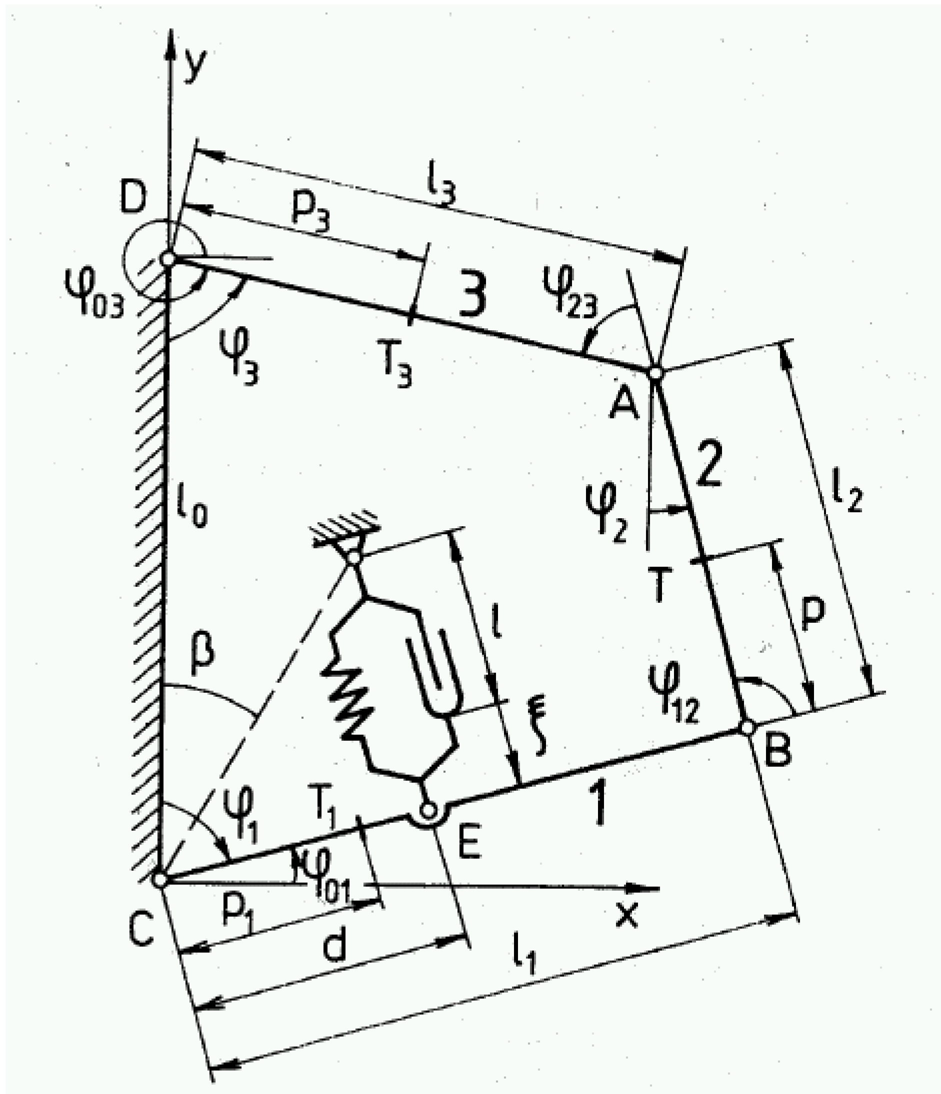
$$(\mathbf{p}_1)_j = \frac{\partial T}{\partial s_j} - \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{s}_j} - \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial s_a \partial \dot{s}_j} \dot{s}_a + Q_j$$

$$(\mathbf{p}_2)_k = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial s_j \partial s_a} \dot{s}_j \dot{s}_a - 2 \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial t \partial s_a} \dot{s}_a - \frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2}$$

Základní schéma řešení LRST

Obviously matrices $\mathbf{M}, \mathbf{\Phi}_s, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ are functions only of $s_j, \dot{s}_j, t$. The numerical solution of this system of equations is considered in detail in Section 9.8. We present here only an outline principle of the solution. If in some time instant t_i values $s_j(t_i), \dot{s}_j(t_i),\ j = 1, \ldots, n$ are known, we determine from them the values of matrices $\mathbf{M}, \mathbf{\Phi}_s, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ and calculate from (9.68) $\ddot{s}_j(t_i), \lambda_k(t_i)$. Integrating $\ddot{s}_j(t_i)$ numerically, we obtain the values of $\dot{s}_j(t_{i+1}), s_j(t_{i+1}),\ j = 1, \ldots, n$ for time $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ and the procedure may be repeated. However, this simple straightforward scheme is for longer

Příklad - lichoběžníkové zavěšení předních kol (rovinná úloha)



- Souřadnice
- Počet stupňů volnosti
- Kinetická energie

$$T = \frac{1}{2}(I_1\dot{\varphi}_1^2 + I_{2T}\dot{\varphi}_2^2 + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + I_3\dot{\varphi}_3^2)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \mathrm{s}\varphi_1 - p\mathrm{s}\varphi_2 \\ y_2 &= l_1 \mathrm{c}\varphi_1 + p\mathrm{c}\varphi_2 \\ \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 &= l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + p^2\dot{\varphi}_2^2 - 2l_1 p\mathrm{c}(\varphi_1 + \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \end{aligned}$$

- Vazby

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv l_1\mathrm{s}\varphi_1 - l_2\mathrm{s}\varphi_2 - l_3\mathrm{s}\varphi_3 = 0 \\ f_2 &\equiv l_1\mathrm{c}\varphi_1 + l_2\mathrm{c}\varphi_2 + l_3\mathrm{c}\varphi_3 - l_0 = 0 \end{aligned}$$

  – Pružina a tlumič $F(\xi, \dot{\xi})$ působí na souřadnici ξ

$$Q_j = \sum_l P_l \frac{\partial p_l}{\partial s_j}$$

$$Q_j \delta s_j = \sum_h P_h \delta p_h$$

$$(l + \xi)^2 = l^2 + 2d^2 - 2d\sqrt{l^2 + d^2}\mathrm{c}(\varphi_1 - \beta)$$

$$\xi = \sqrt{a - 2b\mathrm{c}(\varphi_1 - \beta)} - l$$

$$a = l^2 + 2d^2 \text{ and } b = d\sqrt{l^2 + d^2}$$

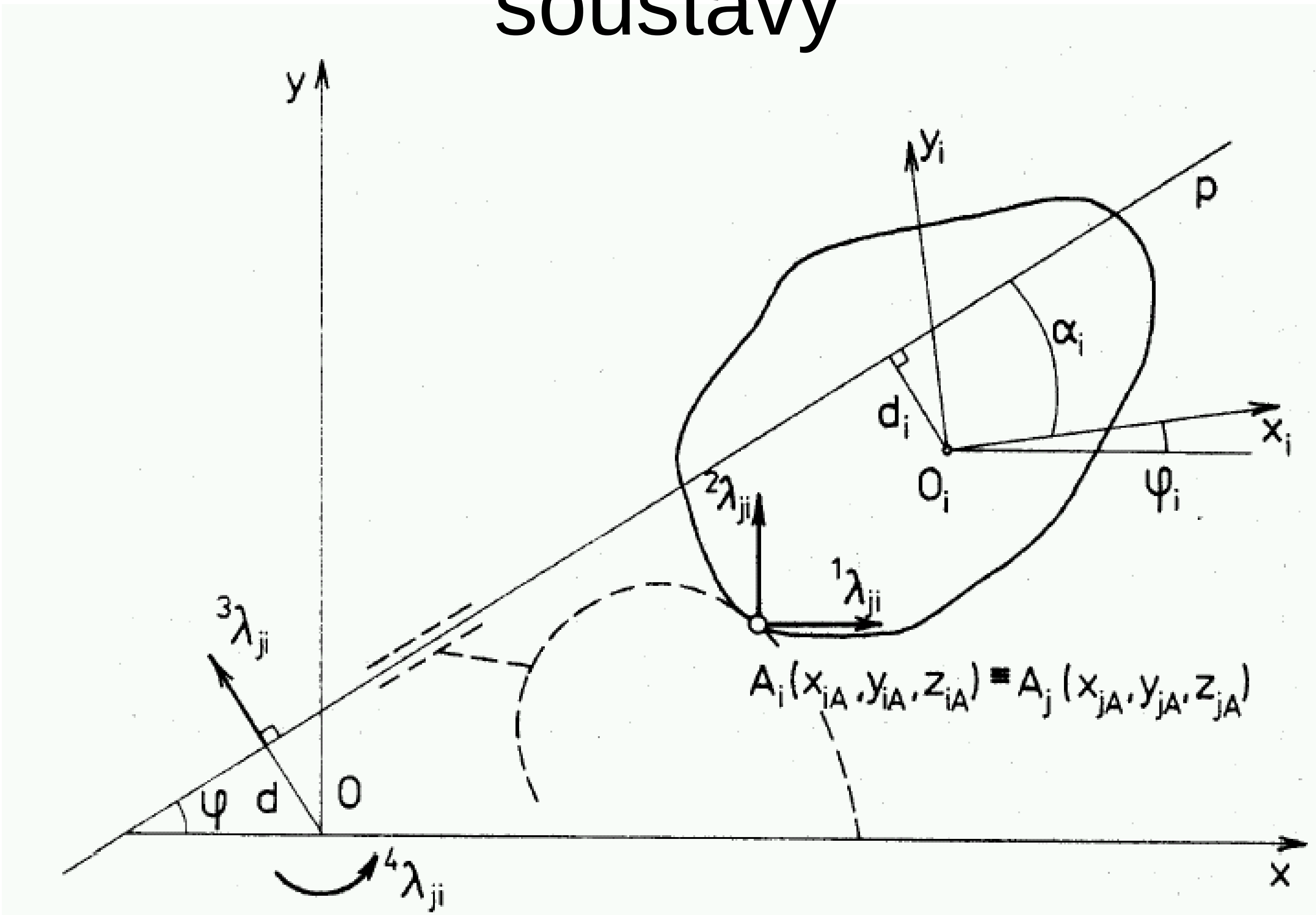
- Equations of motion

$$\begin{bmatrix} I_1 + m_2 l_1^2, & -m_2 l_1 p \mathrm{c}(\varphi_1 + \varphi_2), & 0, & l_1 \mathrm{c}\varphi_1, & -l_1 \mathrm{s}\varphi_1 \\ & I_{2T} + m_2 p^2, & 0, & -l_2 \mathrm{c}\varphi_2, & -l_2 \mathrm{s}\varphi_2 \\ & & I_3, & -l_3 \mathrm{c}\varphi_3, & -l_3 \mathrm{s}\varphi_3 \\ & & & 0, & 0, \\ \text{sym.} & & & & 0, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -m_2 l_1 p \dot{\varphi}_2^2 \mathrm{s}(\varphi_1 + \varphi_2) - F(\xi, \dot{\xi})(b/(l+\xi))\mathrm{s}(\varphi_1 - \beta) \\ -m_2 l_1 p \dot{\varphi}_1^2 \mathrm{s}(\varphi_1 + \varphi_2) \\ 0 \\ l_1 \dot{\varphi}_1^2 \mathrm{s}\varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2^2 \mathrm{s}\varphi_2 - l_3 \dot{\varphi}_3^2 \mathrm{s}\varphi_3 \\ l_1 \dot{\varphi}_1^2 \mathrm{c}\varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2^2 \mathrm{c}\varphi_2 + l_3 \dot{\varphi}_3^2 \mathrm{c}\varphi_3 \end{bmatrix}$$

- Pojem fyzikálních souřadnic:
  - V prostoru - kartézské souřadnice těžiště a Eulerovy / kardanové úhly nebo Eulerovy parametry
  - V rovině - kartézské souřadnice těžiště a úhel mezi lokálním a globálním souřadným systémem

Fyzikální souřadnice pro rovinné soustavy



- Kinematické vazby

$$x_i + x_{iA}\mathrm{c}\varphi_i - y_{iA}\mathrm{s}\varphi_i = x_j + x_{jA}\mathrm{c}\varphi_j - y_{jA}\mathrm{s}\varphi_j$$

$$y_i + x_{iA}\mathrm{s}\varphi_i + y_{iA}\mathrm{c}\varphi_i = y_j + x_{jA}\mathrm{s}\varphi_j + y_{jA}\mathrm{c}\varphi_j$$

$$d_i + y_i\mathrm{c}(\alpha_i + \varphi_i) - x_i\mathrm{s}(\alpha_i + \varphi_i) =$$

$$= d_j + y_j\mathrm{c}(\alpha_j + \varphi_j) - x_j\mathrm{s}(\alpha_j + \varphi_j)$$

$$\alpha_i + \varphi_i = \alpha_j + \varphi_j$$

- Pohybové rovnice k nim

$$m_i\ddot{x}_i = \sum_A {}^1\lambda_{ji} - \sum_p {}^3\lambda_{ji}\mathrm{s}(\alpha_i + \varphi_i)$$

$$m_i\ddot{y}_i = \sum_A {}^2\lambda_{ji} + \sum_p {}^3\lambda_{ji}\mathrm{c}(\alpha_i + \varphi_i)$$

$$I_i\ddot{\varphi}_i = \sum_A(-{}^1\lambda_{ji}(x_{iA}\mathrm{s}\varphi_i + y_{iA}\mathrm{c}\varphi_i) +{}^2 \lambda_{ji}(x_{iA}\mathrm{c}\varphi_i - y_{iA}\mathrm{s}\varphi_i))$$

$$+\sum_p({}^3\lambda_{ji}(-y_i\mathrm{s}(\alpha_i + \varphi_i) - x_i\mathrm{c}(\alpha_i + \varphi_i)) +{}^4 \lambda_{ji})$$