Aproximace inverzní dynamiky poddajných systémů

Juraj Lieskovský

ČVUT - ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

30.5.2022

Kvadratické programování

Úlohou je nalézt minimum kvatratické cílové funkce pro parametry $\boldsymbol{x}$ z množiny přípustných řešení popsané lineárními nerovnicemi.

$$\begin{aligned} \text{minimize:} \quad & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \\ \text{subject to:} \quad & \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

[1] Kvadratické programování patří do kategorie konvexního programování, kde lokální minim cílové funkce je také minimem globálním. [2]

Pohybové rovnice

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{\tau} \ , \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$\boldsymbol{M}$ - matice hmotnosti

$\dot{\boldsymbol{v}}$ - vektor nezávislých zrychlení

$\boldsymbol{c}$ - vektor účinků dostředivého a corriolisova zrychlení

$\boldsymbol{\tau}$ - silové účinky

$\boldsymbol{p}$ - pasivní silové účinky

$\boldsymbol{B}$ - manipulační matice

$\boldsymbol{u}$ - vektor vstupů

Poddajné systémy - Pohybové Rovnice

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{\tau}\ , \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

Rozdělíme zrychlení na řízená zrychlení $\dot{\boldsymbol{v}}_c$ a zrychlení spojená s poddajností $\dot{\boldsymbol{v}}_s$. Stejně rozdělíme sloupce matice hmotnosti, což nám dovolí úpravu

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{M}_{:c}\dot{\boldsymbol{v}}_c + \boldsymbol{M}_{:s}\dot{\boldsymbol{v}}_s$$

Také vektor pasivních silových účinků v kinematických dvojicích můžeme rozdělit, a to na akumulační a disipační členy

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}}$$

kde $\boldsymbol{q}$ jsou zobecněné parametry kinematických dvojic.

Poddajné systémy - Deformační síly

Vnímáme-li akumulační účinky v i-té kin. vazbě jako zobecněné síly $\boldsymbol{f}_i$ způsobené deformací elementu MKP, kde uzlové posuvy jsou nahrazeny parametry $\boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{q}_i = \int_V \boldsymbol{N}_i^T \boldsymbol{\sigma}_i \, dV \ , \quad \boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{E}_i \varepsilon_i \ , \quad \varepsilon_i = \boldsymbol{N}_i \, \boldsymbol{q}_i$$

Poddajné systémy - Aproximace

Když uvažujeme těleso jako tuhé, říkáme, že jeho odezva na změnu zatížení $\Delta\boldsymbol{\tau}$ je taková změna napětí $\Delta\boldsymbol{\sigma}$, která zamezí významné deformaci tělesa $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{0}\,,\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \approx \mathbf{0}\,,\ \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} \approx \mathbf{0}$

Budeme-li chtít zanedbat okamžitý vliv poddajnosti v pohybové rovnici (na úrovni zrychlení) dosadíme $\dot{\boldsymbol{v}}_s = \ddot{\boldsymbol{q}}_s = \mathbf{0}$, přičemž splnění pohybových rovnic bude zajištěno fiktivní změnou "poddajných" parametrů $\Delta\boldsymbol{q}_s$ ($\boldsymbol{\sigma} \propto \boldsymbol{q}_s$).

$$\boldsymbol{M}_{:c}\dot{\boldsymbol{v}}_c + \underbrace{\boldsymbol{M}_{:s}\dot{\boldsymbol{v}}_s}_{\mathbf{0}} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{A}_{:s}\Delta\boldsymbol{q}_s + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

Které také můžeme použít pro omezení očekávaného napětí

$$\boldsymbol{\sigma}_{min} < \boldsymbol{E}_s\boldsymbol{N}_s(\boldsymbol{q}_s + \Delta\boldsymbol{q}_s) < \boldsymbol{\sigma}_{max}$$

Poddajné systémy - Optimalizační problém

- **Optimalizované parametry**

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \Delta \boldsymbol{q}_s \end{bmatrix}$$

- **Cílová funkce**

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{q} = \mathbf{0}$$

Poddajné systémy - Optimalizační problém

- **Nerovnice přípustných řešení**

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{eq} \\ \boldsymbol{u}_{min} \\ \boldsymbol{q}_{s_{min}} - \boldsymbol{q}_s \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}_{:s} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{eq} \\ \boldsymbol{u}_{max} \\ \boldsymbol{q}_{s_{max}} - \boldsymbol{q}_s \end{bmatrix}$$

kde

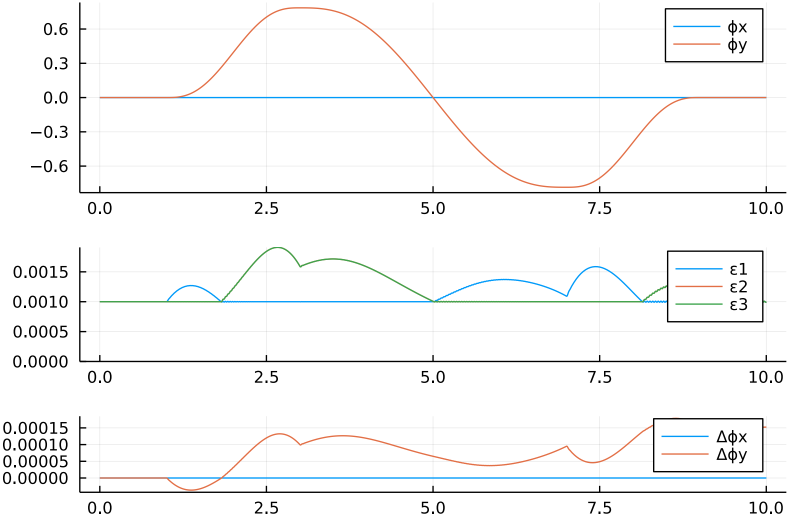
$$\boldsymbol{\tau}_{eq} = \boldsymbol{M}_{:c}\dot{\boldsymbol{v}}_c + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{p}$$

a $\boldsymbol{q}_{s_{min}}$ a $\boldsymbol{q}_{s_{max}}$ jsou stanoveny pomocí operátorů

$$\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{N}_i : \boldsymbol{q}_i \mapsto \boldsymbol{\sigma}_i$$

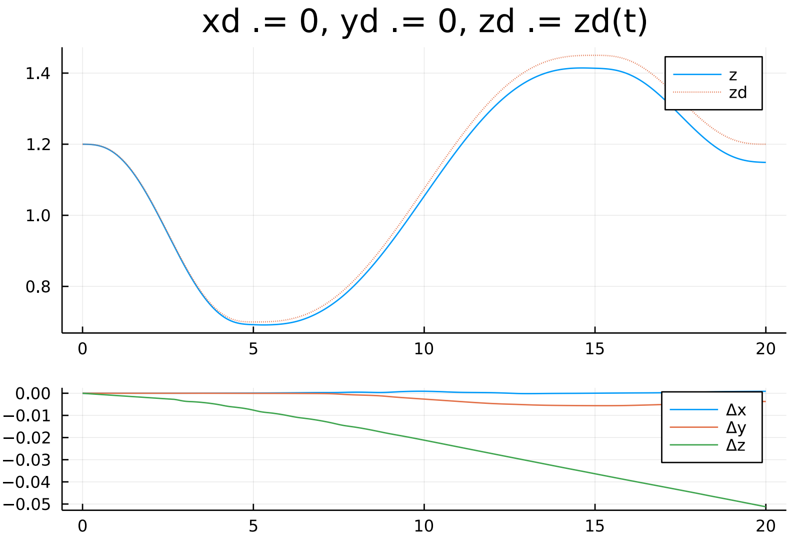
Jednoprutový manipulátor - Animace

Jednoprutový manipulátor - Graf



Tensegritický manipulátor - Animace

Tensegritický manipulátor - Graf



Zdroje

B. Stellato, G. Banjac, P. Goulart, A. Bemporad, and S. Boyd.
OSQP: an operator splitting solver for quadratic programs.
Mathematical Programming Computation, 12(4):637–672, 2020.

Wikipedia contributors.
Convex optimization — Wikipedia, the free encyclopedia.
https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Convex_optimization&oldid=1088444776, 2022.
[Online; accessed 29-May-2022].