1 Popište možné tvary dynamických systémů pro modely: spojité-diskrétní, lineární-nelineární.

Lineární spojitý systém v časové oblasti

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

Lineární spojitý systém ve frekvenční oblasti

$$\begin{aligned}s\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

Po úpravě $\boldsymbol{x}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ můžeme dosadit

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{1}$$

Dynamická poddajnost

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \tag{2}$$

Lineární diskrétní systém

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{t+\Delta t} &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}_t\\ \boldsymbol{y}_t &= \boldsymbol{O}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}_t\end{aligned}$$

diskrétní tvar lze získat z tvaru spojitého modelu v časové oblasti

$$\boldsymbol{M} = e^{\boldsymbol{A}\Delta t} \doteq \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}\Delta t\,,\ \boldsymbol{N} = \boldsymbol{B}\,,\ \boldsymbol{O} = \boldsymbol{C}\,,\ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$$

Nelineární systém

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{4}$$

2 Modelování poddajných struktur

Většinou vycházíme z mkp modelů s $10^4 \div 10^6$ tvarů

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}$$

Ty redukujem pomocí modální trasformace, kde hledáme řešení problému vlastních čísel

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{V}$$

kde $\boldsymbol{\phi}_i$ jsou vlastní vektory a ω_i vlastní frekvence tvořící matice $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{\Omega}$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_i & \dots & \boldsymbol{\phi}_N \end{bmatrix} \;, \; \boldsymbol{\Omega}^2 = \mathrm{diag}(\omega_i^2) \;, \quad i \in \langle 1, N \rangle$$

Po té platí

$$\boldsymbol{V}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{V} = \mathbf{1} \;, \quad \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega}^2$$

Soustavu pohybovných rovnic systému s proporčním tlumením

lze zavedením modální souřadnic $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{q}$ a vynásobením transponovanou maticí modální transformace $\boldsymbol{V}^T$ zleva, převést do tvaru

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{q} = \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{F} \;, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathrm{diag}(2\, b_{r_i} \omega_i) \;, \quad i \in \langle 1, N \rangle$$

kde b_{r_i} jsou poměrné útlumy.

Soustava se pak rozpadá na rovnice ve tvaru

$$\ddot{q}_i + 2\,\omega_i \xi_i \dot{q} + \omega_i^2 q = f_i \;, \quad f_i = \boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{F} \;, \quad i \in \langle 1, N \rangle$$

kde bere rovnice pro $10^1 \div 10^2$ nejnižších vlastních frekvencí.

3 Redukce modelů poddajných struktur pro syntézu řízení. Zohlednění vypuštěných stavů soustavy pomocí reziduí.

4 Balancovaný tvar stavového popisu soustavy, smysl tohoto tvaru při získání návrhového modelu.

5 Typy aktivních a poloaktivních aktuátorů používaných v mechatronických systémech, hlavní vlastnosti, důsledky pro použití.

6 Snižování vibrací (low-authority) versus řízení pohybu/polohy (high-authority). Princip, příklady

7 Aktivní absorbce kmitů soustav, příklad návrhu řízení

8 Mechatronická tuhost. Princip, model, příklad návrhu řízení.

9 Aktivní tlumení vibrací pomocí kolokovaných aktuátorů a senzorů. Příklad s použitím planárních piezo-aktuátorů.

10 Aktivní vibroizolace soustav, integrální silová zpětná vazba, příklad návrhu řízení.

Nahradíme piezostackem s tuhostí k, nastavitelnou volnou délkou $l_0(u) = l_{00} + qu$ a pozitivní, integrální, silovou zpětnou vazbou $u = p\int F\,dt$, kde p je volitelný parametr.

Pohybová rovnice systému bude nabývat tvar

$$m\ddot{y} = -\underbrace{k(y - z_0(t) - qu)}_{F} \tag{5}$$

Dosazením z pohybové rovnice můžeme určit tvar akčního zásahu

$$u = p\int F\,dt = p\int -m\ddot{y} = -pm\dot{y} + C \tag{6}$$

Dosazením tvaru akčního zásahu zpět do pohybové rovnice získáme pohybovou rovnici tlumeného systému

$$m\ddot{y} = -k(y - z_0(t)) - \underbrace{kmpq}_{b_{\text{sky}}}\dot{y} - kqC \tag{7}$$

kde hodnotu b_{sky} můžeme ladit volbou parametru p

11 Říditelnost a pozorovatelnost, Gramián říditelnosti a pozorovatelnosti

Uvažujme lin. systém ve tvaru

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

Říditelnost

Systém je říditelný pokud jej lze z libovolného stavu $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ dostat do stavu nulového $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ působením vstupů $\boldsymbol{u}$.

Matice říditelnosti

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \dots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Pokud $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ je plné hodnosti, systém je říditelný.

Gramián říditelnosti

$$\boldsymbol{W}_c = \int_0^\infty e^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T e^{\boldsymbol{A}^T\tau} d\tau \tag{9}$$

Vlastní vektory $\boldsymbol{W}_c$ patřící k největším vlastním číslům jsou nejlépe říditelné směry ve stavovém prostoru. Podmíněností $\boldsymbol{W}_c$ můžeme hodnotit celkovou říditelnost systému (ve všech směrech stavového prostoru).

Pozorovatelnost

Systém je pozorovatelný pokud na konečném časovém intervalu lze ze změřeného průběhu vstupů $\boldsymbol{u}$ a výstupů $\boldsymbol{y}$ určit stav systému na počátku invervalu $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Matice pozorovatelnosti

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Pokud $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ je plné hodnosti, systém je pozorovatelný.

Gramián pozorovatelnosti

$$\boldsymbol{W}_o = \int_0^\infty e^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T e^{\boldsymbol{A}^T\tau} d\tau \tag{11}$$

Vlastní vektory $\boldsymbol{W}_o$ patřící k největším vlastním číslům jsou nejlépe pozorovatelné směry ve stavovém prostoru. Podmíněností $\boldsymbol{W}_o$ můžeme hodnotit celkovou pozorovatelnost systému (ve všech směrech stavového prostoru).

12 Computed Torques

$$\ddot{\boldsymbol{e}} = \ddot{\boldsymbol{q}}_d - \ddot{\boldsymbol{q}} = \ddot{\boldsymbol{q}}_d - \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N} \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\ \dot{\boldsymbol{e}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{I}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{u} \tag{13}$$

13 Použití optimalizačních metod pro syntézu řízení. Aktivní a poloaktivní aktuátory, lineární a nelineární soustavy (ilustrace na příkladu nelineární soustavy).