1 Popište možné tvary dynamických systémů pro modely: spojité-diskrétní, lineární-nelineární.

Lineární spojitý systém v časové oblasti

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

Lineární spojitý systém ve frekvenční oblasti

$$\begin{aligned}s\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

Po úpravě $\boldsymbol{x}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ můžeme dosadit

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{1}$$

Dynamická poddajnost

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \tag{2}$$

Lineární diskrétní systém

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{t+\Delta t} &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}_t\\ \boldsymbol{y}_t &= \boldsymbol{O}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}_t\end{aligned}$$

diskrétní tvar lze získat z tvaru spojitého modelu v časové oblasti

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= e^{\boldsymbol{A}\Delta t} \doteq \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}\Delta t\\ \boldsymbol{N} &= \boldsymbol{A}^{-1}\left(e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\boldsymbol{B} \doteq \boldsymbol{B}\Delta t\\ \boldsymbol{O} &= \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{D}\end{aligned}$$

Nelineární systém

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{4}$$

2 Modelování poddajných struktur

Většinou vycházíme z mkp modelů s $10^4 \div 10^6$ tvarů

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}$$

Ty redukujem pomocí modální trasformace, kde hledáme řešení zobecněného problému vlastních čísel

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}$$

kde $\boldsymbol{\phi}_i$ jsou vlastní vektory a ω_i vlastní frekvence tvořící matice $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{\Omega}$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}_i & \dots & \boldsymbol{\phi}_N\end{bmatrix} \ , \ \boldsymbol{\Omega}^2 = \mathrm{diag}(\omega_i^2) \ , \quad i \in \langle 1, N\rangle$$

Pro navzájem ortogonální vlastní vektory s vahou matice hmotnosti (získané příslušnou normalizací) platí

$$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{1} \ , \quad \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega}^2$$

zavedením modální souřadnic $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{q}$ a vynásobením transponovanou maticí modální transformace $\boldsymbol{V}^T$ zleva, lze převést pohybovou rovnici do tvaru

$$\boldsymbol{I}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{q} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{F} \ , \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{V} \ , \ \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}$$

O systému můžeme říct, že má proporční tlumení, je-li matice $\boldsymbol{C}$ lineární kombinací matic $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{K}$. Pak je tato matice diagonalizovatelná modální transformací $\boldsymbol{V}$ a matice $\boldsymbol{\Gamma}$ je diagonální s prvky $\Gamma_{ii} = 2\zeta_i\Omega_i$, kde ζ_i jsou poměrné útlumy. Soustava se pak rozpadá na samostatně řešitelné rovnice ve tvaru

$$\ddot{q}_i + 2\,\Omega_i\xi_i\dot{q} + \Omega_i^2 q = f_i \ , \quad f_i = \boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{F} \ , \quad i \in \langle 1, N\rangle$$

kde bere rovnice pro $10^1 \div 10^2$ nejnižších vlastních frekvencí.

3 Redukce modelů poddajných struktur pro syntézu řízení. Zohlednění vypuštěných stavů soustavy pomocí reziduí.

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_a \\ \dot{\boldsymbol{x}}_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{aa} & \boldsymbol{A}_{ab} \\ \boldsymbol{A}_{ba} & \boldsymbol{A}_{bb}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_a \\ \boldsymbol{x}_b\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_a \\ \boldsymbol{B}_b\end{bmatrix}\boldsymbol{u} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_a & \boldsymbol{C}_b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_a \\ \boldsymbol{x}_b\end{bmatrix} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{6}$$

Můj vlastní přístup k dělení A

Pro systém ve tvaru

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \tag{7}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K_{11} & -K_{12} & -B_{11} & -B_{12} \\ -K_{21} & -K_{22} & -B_{21} & -B_{22} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$K_{11} = V_1^T K V_1 \qquad B_{11} = V_1^T B V_1 \tag{9}$$
$$K_{21} = V_2^T K V_1 = 0 \qquad B_{21} = V_2^T B V_1 \tag{10}$$
$$K_{12} = V_1^T K V_2 = 0 \qquad B_{12} = V_1^T B V_2 \tag{11}$$
$$K_{22} = V_2^T K V_2 \qquad B_{22} = V_2^T B V_2 \tag{12}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -K_{11} & -B_{11} \end{bmatrix}, \tag{13}$$
$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0_{(N-n)\times n} & 0_{(N-n)\times n} \\ 0_{(N-n)\times n} & -B_{21} \end{bmatrix}, \tag{14}$$
$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0_{n\times (N-n)} & 0_{n\times (N-n)} \\ 0_{n\times (N-n)} & -B_{12} \end{bmatrix}, \tag{15}$$
$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0_{(N-n)\times (N-n)} & 1_{(N-n)\times (N-n)} \\ -K_{22} & -B_{22} \end{bmatrix} \tag{16}$$

3.1 Truncation

Vypouštím stavy $\boldsymbol{x}_b$ ze systému.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_a = \boldsymbol{A}_{aa}\boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{B}_a\boldsymbol{u} \tag{17}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_a\boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{18}$$

3.2 Singular Pertubation Approximation

Dělám approximaci $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_b = \boldsymbol{A}_{ba}\boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{A}_{bb}\boldsymbol{x}_b + \boldsymbol{B}_b\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_b = -\boldsymbol{A}_{bb}^{-1}\boldsymbol{A}_{ba}\boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{A}_{bb}^{-1}\boldsymbol{B}_b\boldsymbol{u} \tag{19}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_a = (\boldsymbol{A}_{aa} - \boldsymbol{A}_{ab}\boldsymbol{A}_{bb}^{-1}\boldsymbol{A}_{ba})\boldsymbol{x}_a + (\boldsymbol{B}_a - \boldsymbol{A}_{ab}\boldsymbol{A}_{bb}^{-1}\boldsymbol{B}_b)\boldsymbol{u} \tag{20}$$
$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{C}_a - \boldsymbol{C}_b\boldsymbol{A}_{bb}^{-1}\boldsymbol{A}_{ba})\boldsymbol{x}_a + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}_b\boldsymbol{A}_{bb}^{-1}\boldsymbol{B}_b)\boldsymbol{u} \tag{21}$$

4 Balancovaný tvar stavového popisu soustavy, smysl tohoto tvaru při získání návrhového modelu.

"The system triple $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ *is open-loop balanced, if its controllability and observability grammians are equal and diagonal, as defined by Moore in [109],*

$$\mathrm{W_c} = \mathrm{W_o} = \Gamma$$
$$\Gamma = \mathrm{diag}\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_\mathrm{N}\right)$$
$$\gamma_\mathrm{i} \geq 0, \quad \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{N}.$$

The matrix Γ *is diagonal, and its diagonal entries* γ_i *are called Hankel singular values of the system (which were earlier introduced as eigenvalues of the product of the controllability and observability grammians)."*

"The eigenvalues of the grammians change during the coordinate transformation. However, the eigenvalues of the grammian product are invariant. It can be shown as follows:

$$\lambda_i \left(W_{cn} W_{on}\right) = \lambda_i \left(R^{-1} W_c R^{-T} R^T W_o R\right) = \lambda_i \left(R^{-1} W_c W_o R\right) = \lambda_i \left(W_c W_o\right).$$

These invariants are denoted γ_i,

$$\gamma_i = \sqrt{\lambda_i \left(W_c W_o\right)}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

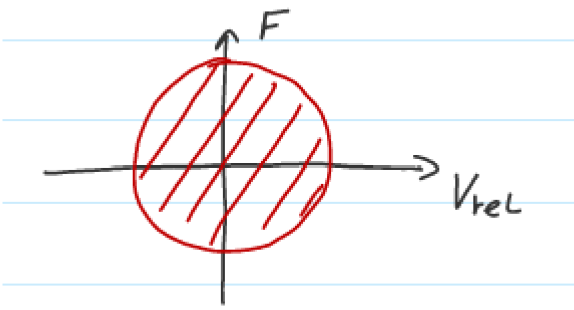
and are called the Hankel singular values of the system."

5 Typy aktivních a poloaktivních aktuátorů používaných v mechatronických systémech, hlavní vlastnosti, důsledky pro použití.

5.1 Aktivní aktuátory

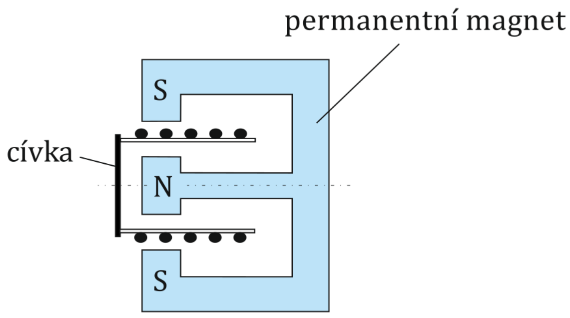
Zdroje řízených akčních sil

- pieozelektrické materiály - velký poměr síla/hmotnost, ale nízký zdvih
  - piezostack - nižší napětí oproti obyčejným piezo.
  - aplified piezo actuator
- hydraulické aktuátory - nízká šířka pásma řízení síly
- elektromagnetické (voice coil acutator) - možnost skoro nulové tuhosti



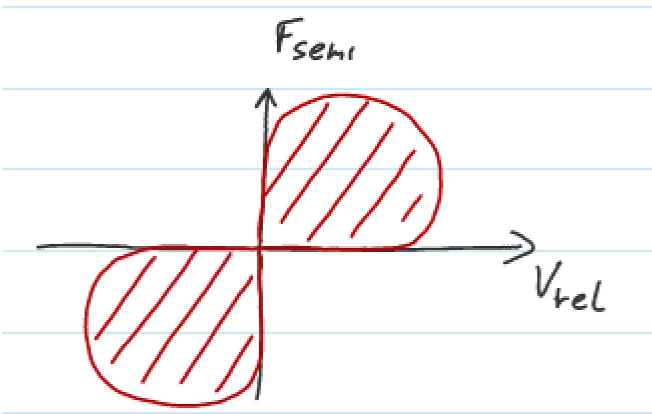
5.2 Poloaktivní

Zdroje řízených tlumících sil (řízená disipace energie)



Obrázek 1: Voice coil

- tlumič s magnetoreologickou kapalinou
- tlumič se škrtícím ventilem



6 Snižování vibrací (low-authority) versus řízení pohybu/polohy (high-authority). Princip, příklady

"The control forces that act on a structure can be divided into tracking forces and damping forces. The tracking forces move the structure to follow a target and the damping forces act on the structure to suppress vibrations. Typically, the tracking forces are significantly larger than the damping forces. For this reason a structural controller can be divided into low- and high-authority controllers. The low-authority controller is the one that uses a limited input (torque, force) to control the vibrations of a system."

" the control system action on a flexible structure can be separated into two stages: stage one, when damping is added to a structure and vibrations are suppressed showing faster decay; and stage two, of "total" system motion where the damping is little affected."

LAC

- často využívá kolokace aktuátoru a senzoru, pro zvýšení robustnosti a decentralizované přístupy k řízení.
- Positive Position Feedback, Integral Force Feedback

HAC

- Rekonstrukce stavů pomocí stavového pozorovatele
- Computed Torques, LQG (LQR + Kalman filtr)

7 Aktivní absorbce kmitů soustav, příklad návrhu řízení

Využívá se antirezonance tzn. kmitání soustavy, při které je nulá výchlyka v místě buzení, zatímco kmitá jiná část soustavy. Pro tento účel se montují na mechanismy "hltiče" vibrací v podobě hmoty spojené se zbytkem soustavy pomocí aktivních prvků.

Výsledkem připojení hltiče je systém ve tvaru

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}_{\text{akt}}\boldsymbol{u}_{\text{akt}} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{23}$$

Pokud máme přístup ke stavu systému, můžeme zavést lineární zpětnou vazbu

$$\boldsymbol{u}_{\text{akt}} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} \tag{24}$$

s důsledkem na stavový popis

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_h\boldsymbol{K})}_{A_{\text{akt}}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{25}$$

Převodem do frekvenční oblasti získáme systém

$$\boldsymbol{y}(s) = \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{u}\ , \quad \boldsymbol{H}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{\text{akt}})^{-1}\boldsymbol{B} \tag{26}$$

kde nuly přenosu $\boldsymbol{H}(s)$ můžeme manipulovat volbou $\boldsymbol{K}$.

8 Mechatronická tuhost. Princip, model, příklad návrhu řízení.

Koncept založený na použití pomocné sekundární struktury k navýšení dynamické tuhosti primární struktury a to jejich spojením pomocí aktivního prvku. Podmínka říditelnosti říká, že vlastní frekvence primární a sekundární struktury se musí lišit.

9 Aktivní tlumení vibrací pomocí kolokovaných aktuátorů a senzorů. Příklad s použitím planárních piezo-aktuátorů.

"Collocated controllers have their sensors collocated with actuators. They are a special case of the dissipative controllers, which are designed based on the passivity principle."

As stated by Joshi [83, p. 45] "the stability of dissipative controllers is guaranteed regardless of the number of modes controlled (or even modeled), and regardless of parameter errors."

"As a corollary, consider a system with the state-space representation (A, B, C)*, which has collocated sensors and actuators, that is,* $C = B^T$*. In this case, a closedloop system with the proportional feedback gain*

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{y}$$

is stable, for $\boldsymbol{K} = \mathrm{diag}\,(k_i)\,, i = 1, \ldots, r$ *and* $k_i > 0$*."*

10 Aktivní vibroizolace soustav, integrální silová zpětná vazba, příklad návrhu řízení.

Nahradíme piezostackem s tuhostí k, nastavitelnou volnou délkou $l_0(u) = l_{00} + qu$ a pozitivní, integrální, silovou zpětnou vazbou $u = p\int F\,dt$, kde p je volitelný parametr.

Pohybová rovnice systému bude nabývat tvar

$$m\ddot{y} = -\underbrace{k(y - z_0(t) - qu)}_{F} \tag{27}$$

Dosazením z pohybové rovnice můžeme určit tvar akčního zásahu

$$u = p\int F\,dt = p\int -m\ddot{y} = -pm\dot{y} + C \tag{28}$$

Dosazením tvaru akčního zásahu zpět do pohybové rovnice získáme pohybovou rovnici tlumeného systému

$$m\ddot{y} = -k(y - z_0(t)) - \underbrace{kmpq}_{b_{\text{sky}}}\dot{y} - kqC \tag{29}$$

kde hodnotu b_{sky} můžeme ladit volbou parametru p

11 Říditelnost a pozorovatelnost, Gramián říditelnosti a pozorovatelnosti

Uvažujme lin. systém ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

Říditelnost

Systém je říditelný pokud jej lze z libovolného stavu $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ dostat do stavu nulového $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ působením vstupů $\boldsymbol{u}$.

Matice říditelnosti

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \dots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\end{bmatrix} \tag{30}$$

Pokud $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ je plné hodnosti, systém je říditelný.

Gramián říditelnosti

$$\boldsymbol{W}_c = \int_0^\infty e^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T e^{\boldsymbol{A}^T\tau}\,d\tau \tag{31}$$

Vlastní vektory $\boldsymbol{W}_c$ patřící k největším vlastním číslům jsou nejlépe říditelné směry ve stavovém prostoru. Podmíněností $\boldsymbol{W}_c$ můžeme hodnotit celkovou říditelnost systému (ve všech směrech stavového prostoru).

Pozorovatelnost

Systém je pozorovatelný pokud na konečném časovém intervalu lze ze změřeného průběhu vstupů $\boldsymbol{u}$ a výstupů $\boldsymbol{y}$ určit stav systému na počátku invervalu $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Matice pozorovatelnosti

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{32}$$

Pokud $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ je plné hodnosti, systém je pozorovatelný.

Gramián pozorovatelnosti

$$\boldsymbol{W}_o = \int_0^\infty e^{\boldsymbol{A}\tau} \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T e^{\boldsymbol{A}^T\tau} d\tau \tag{33}$$

Vlastní vektory $\boldsymbol{W}_o$ patřící k největším vlastním číslům jsou nejlépe pozorovatelné směry ve stavovém prostoru. Podmíněností $\boldsymbol{W}_o$ můžeme hodnotit celkovou pozorovatelnost systému (ve všech směrech stavového prostoru).

12 Computed Torques

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{\tau} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{q}_d - \boldsymbol{q} \tag{35}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{q}}_d - \dot{\boldsymbol{q}} \tag{36}$$

$$\ddot{\boldsymbol{e}} = \ddot{\boldsymbol{q}}_d - \ddot{\boldsymbol{q}} = \ddot{\boldsymbol{q}}_d - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})^{-1}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})^{-1}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{37}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \dot{\boldsymbol{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \dot{\boldsymbol{e}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \tag{38}$$

$$\ddot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{u} \tag{39}$$

$$\boldsymbol{u} = -k_p\boldsymbol{e} - k_d\dot{\boldsymbol{e}} - k_i\boldsymbol{\varepsilon}\ , \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{e} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})(\ddot{\boldsymbol{q}}_d + k_p\boldsymbol{e} + k_d\dot{\boldsymbol{e}} + k_i\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{41}$$

13 Použití optimalizačních metod pro syntézu řízení. Aktivní a poloaktivní aktuátory, lineární a nelineární soustavy (ilustrace na příkladu nelineární soustavy).