**Лабораторная работа 4. Моделирование дифференциальных и разностных уравнений в MatLab Simulink**

*Цель работы*

Цель настоящей работы: освоить приемы моделирования непрерывных процессов в MatLab Simulink.

*Ход работы*

1. Самостоятельно ознакомиться со справочными сведениями относительно приложения MatLab Simulink.
2. Построить графики непрерывной (не)линейной модели решения дифференциального уравнения.
3. Разработать модель Simulink для решения дифференциального уравнения.
4. Построить графики дискретной (не)линейной модели решения разностного уравнения.
5. Разработать модель Simulink для решения разностного уравнения (системы уравнений).
6. Получить сравнительные графики поведения моделей при разных параметрах дифференциального уравнения, параметра дискретизации и настроек Simulink.
7. Составить и представить преподавателю отчет о работе.

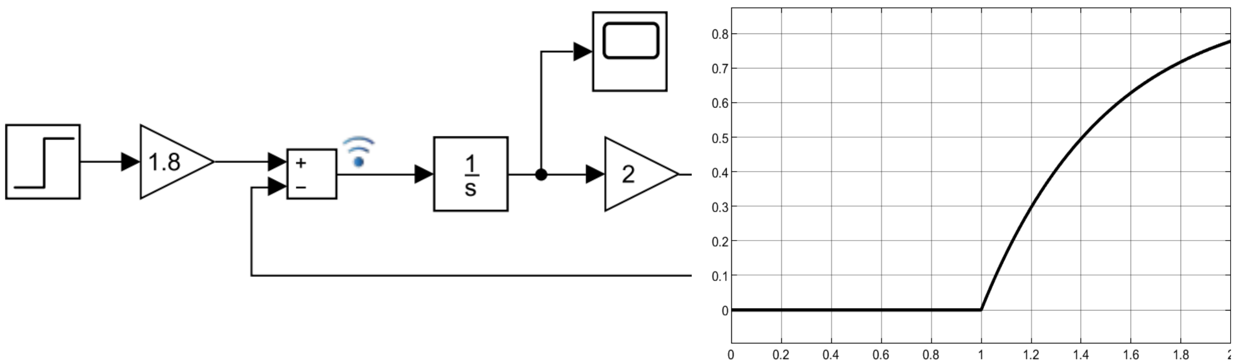
**Примеры моделей Simulink**

**1. Моделирование непрерывного линейного объекта 1-го порядка**

**Пример 4.1.** Пусть исследуемая система описывается уравнением:

$$\dot{x} = -2x + 1.8u,\ x(0) = 0. \tag{4.1}$$

В качестве *входа* $u$ будем использовать единичный скачок (рис. 4.1).




*а*) *б*)

Рисунок 4.1. *а*) - Структурная схема и *б*) - результаты моделирования (4.1)

**Пример 4.2. Моделирование непрерывного линейного объекта. Решение задачи Коши для ОДУ 1-го порядка.** Пусть исследуемая система описывается уравнением (рис. 4.2):

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = \sin(t),\ y(0) = 0. \tag{4.2}$$

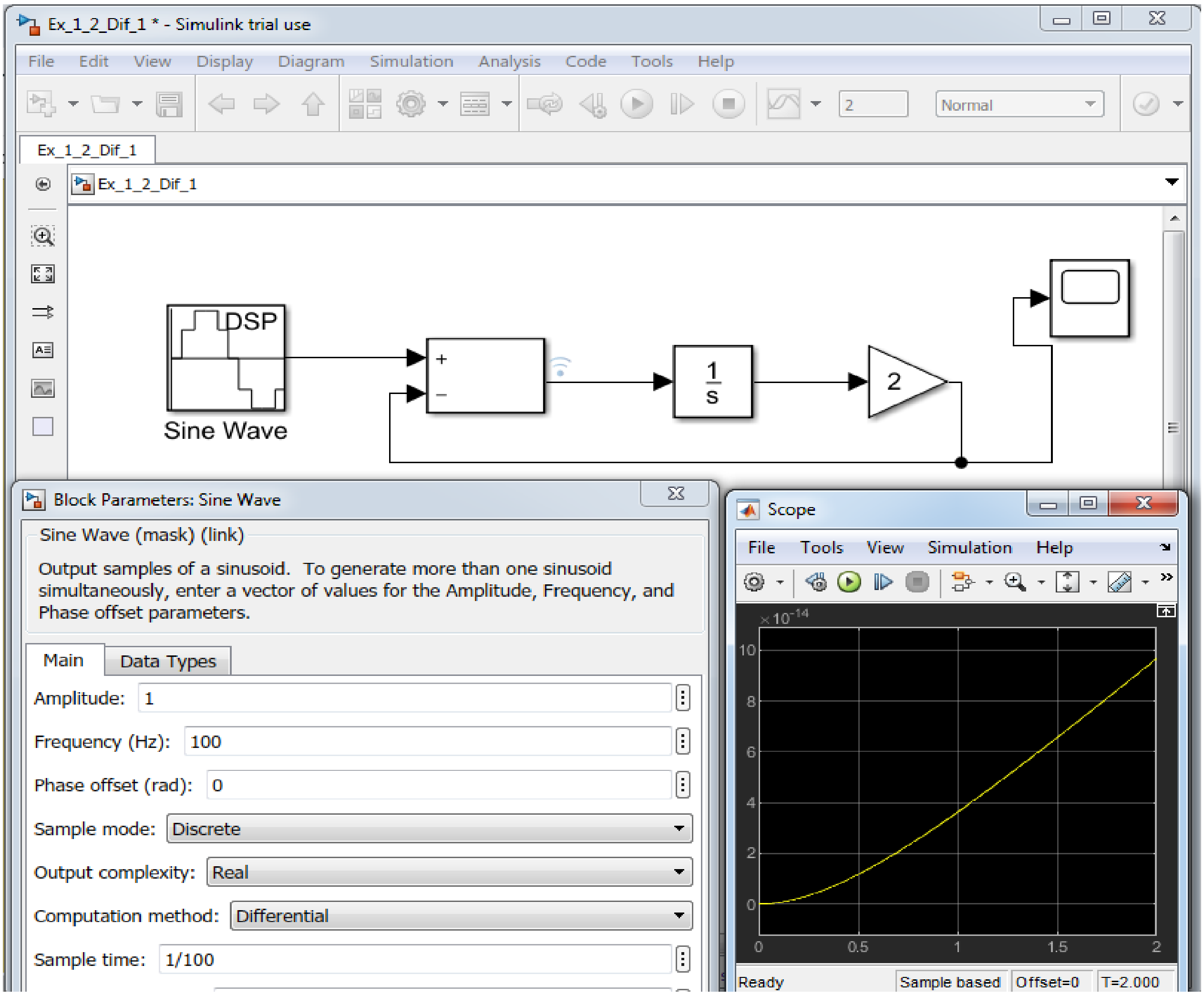



Рисунок 4.2. Структурная схема, окно настроек, результаты моделирования (4.2)

**Пример 4.3.** Моделирование непрерывного нелинейного объекта 1-го порядка. Пусть динамический объект описывается уравнением:

$$\dot{y} = \frac{y}{t}\ln\left(\frac{y^2}{t}\right), \quad y(1) = 1. \tag{4.3}$$

Требуется найти решение на интервале времени от 1 до 4 с.

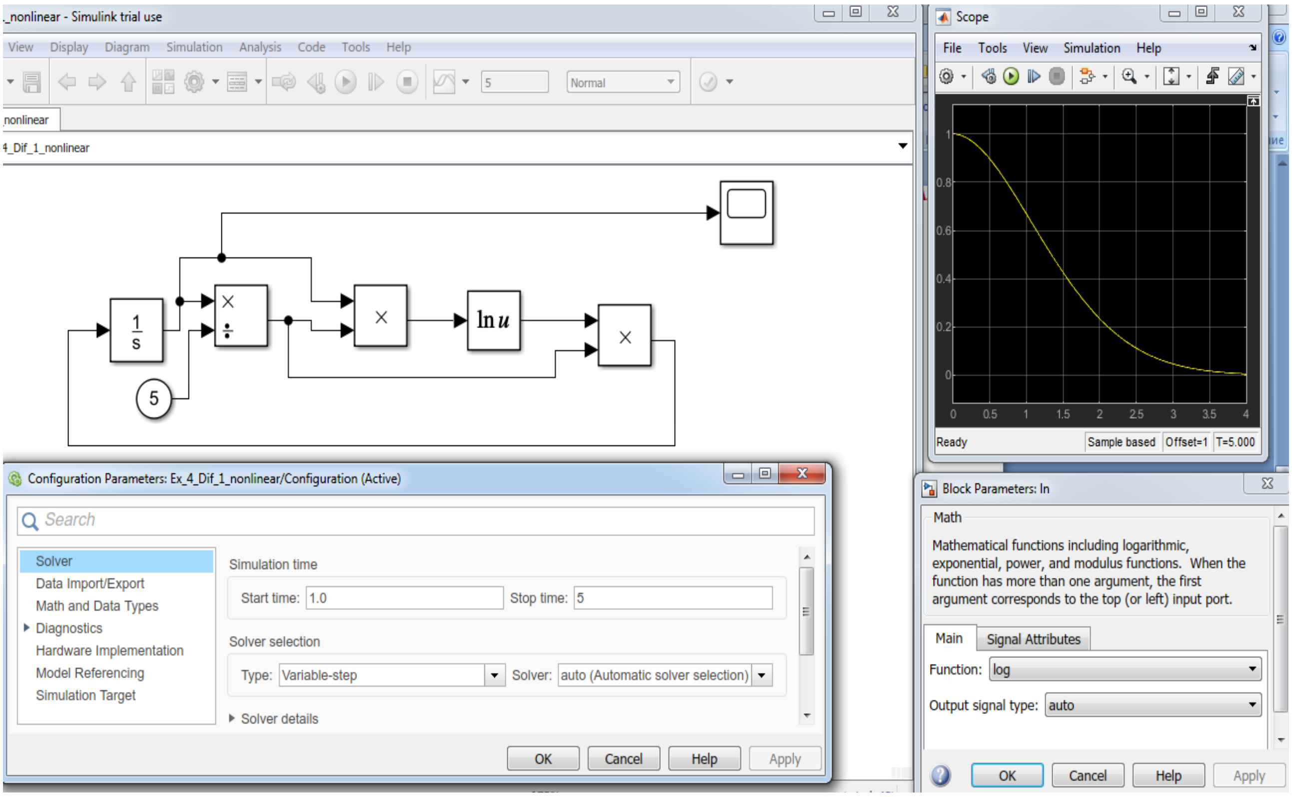



Рисунок 4.3. Структурная схема, окно настроек и результаты моделирования (4.3) (фазовый портрет и переходные процессы)

**2. Моделирование непрерывного линейного объекта 2-го порядка**

**Пример 4.4. Решение задачи Коши для ОДУ 2-го порядка.** Пусть исследуемая система описывается уравнением и начальными условиями вида (рис. 4.4):

$$\ddot{x} + 0,4\dot{x} + 1,2x = 0, \qquad x(0) = 22,7,\ \ \dot{x}(0) = -10,0. \tag{4.4}$$

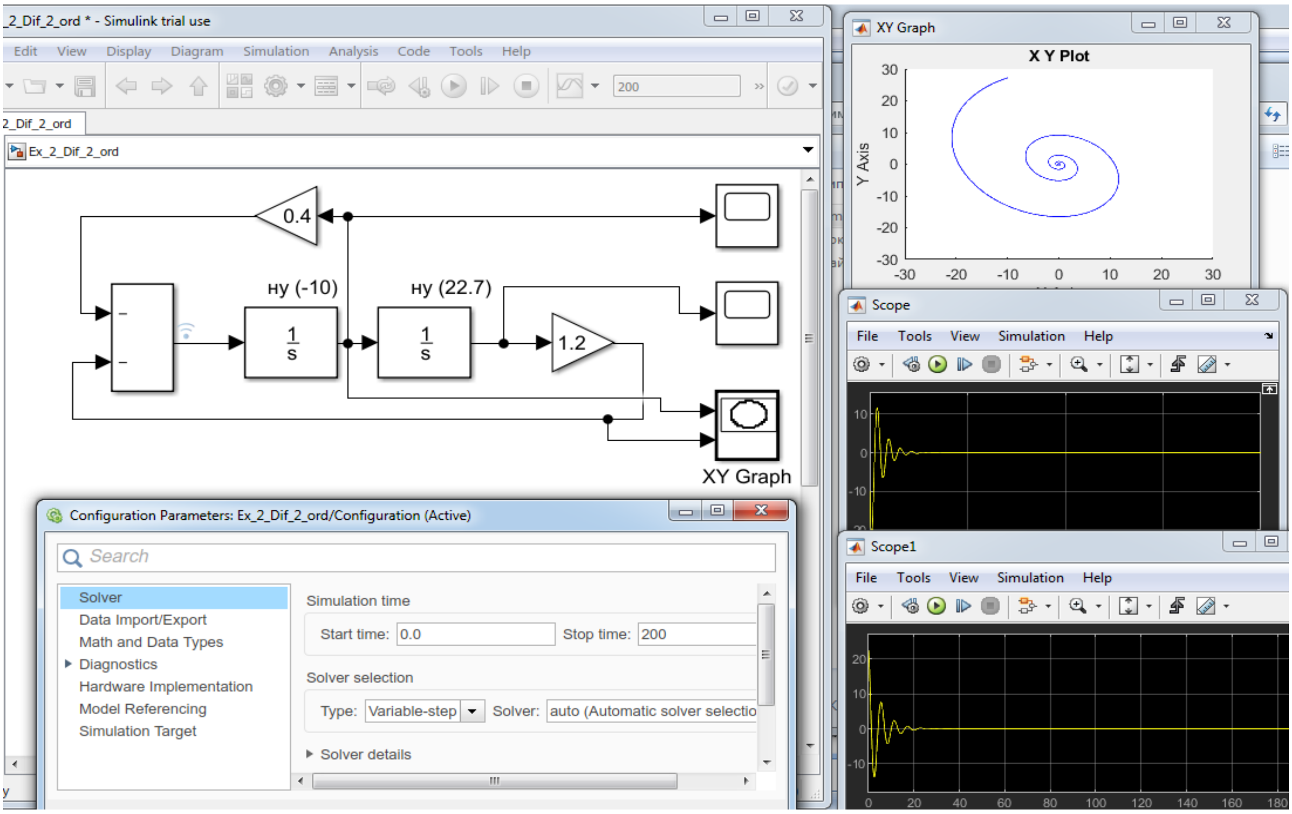



Рисунок 4.4. Структурная схема, окно настроек и результаты моделирования системы (4.4)

**Моделирование системы разностных уравнений**

**Пример 4.4. Модель системы Курно**[1], обеспечивающей максимальную прибыль фирмы**.**

Исходные условия и суть задачи следующие. На рынке действуют две фирмы, выпускающие однородную продукцию в одинаковых экономических условиях (исторически, владеющие источниками минеральной воды и разрабатывающие их с одинаковыми издержками), математическая модель взаимодействия на рынке которых описывается разностными уравнениями:

$$x_1(t) = -0.5x_2(t-1) + d_1,$$
$$x_2(t) = -0.5x_1(t-1) + d_2, \qquad (4.5)$$

где $x_i(t)$ - количество товаров произведенных $i$-ой фирмой в момент времени $t$; $d_i$ - параметр, определяющий характеристику $i$-ой фирмы (зависит от модели ценообразования и себестоимости); $i = 1, 2$.

Каждая фирма стремится к максимизации прибыли, исходя из неизменности объема выпуска конкурента.

Основная задача моделирования: определить при каком объеме выпуска обе фирмы достигают равновесия.

Оптимальный объем производства фирмы 1 будет меняться в зависимости от того, как (по ее мнению) будет расти объем выпуска фирмы 2.

Так, если фирма 1 полагает, что возможный объем выпуска фирмы 2

1 Фр. экономист, математик Огюстен Курно (Augustin Cournot, Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des richesses, 1838.

равен нулю (т.е. она является единственным производителем и спрос на ее продукцию совпадает с рыночным спросом), то она производит в точке оптимума один объем.

Если возможный объем выпуска фирмы 2 будет больше нуля, то фирма 1 скорректирует свой выпуск исходя из остаточного спроса (рыночный спрос минус спрос на продукцию фирмы 2), т.е. произведет в точке оптимума несколько меньше.

Если фирма 1 полагает, что ее конкурент покрывает все 100% рыночного спроса, ее оптимальный выпуск будет равен нулю.

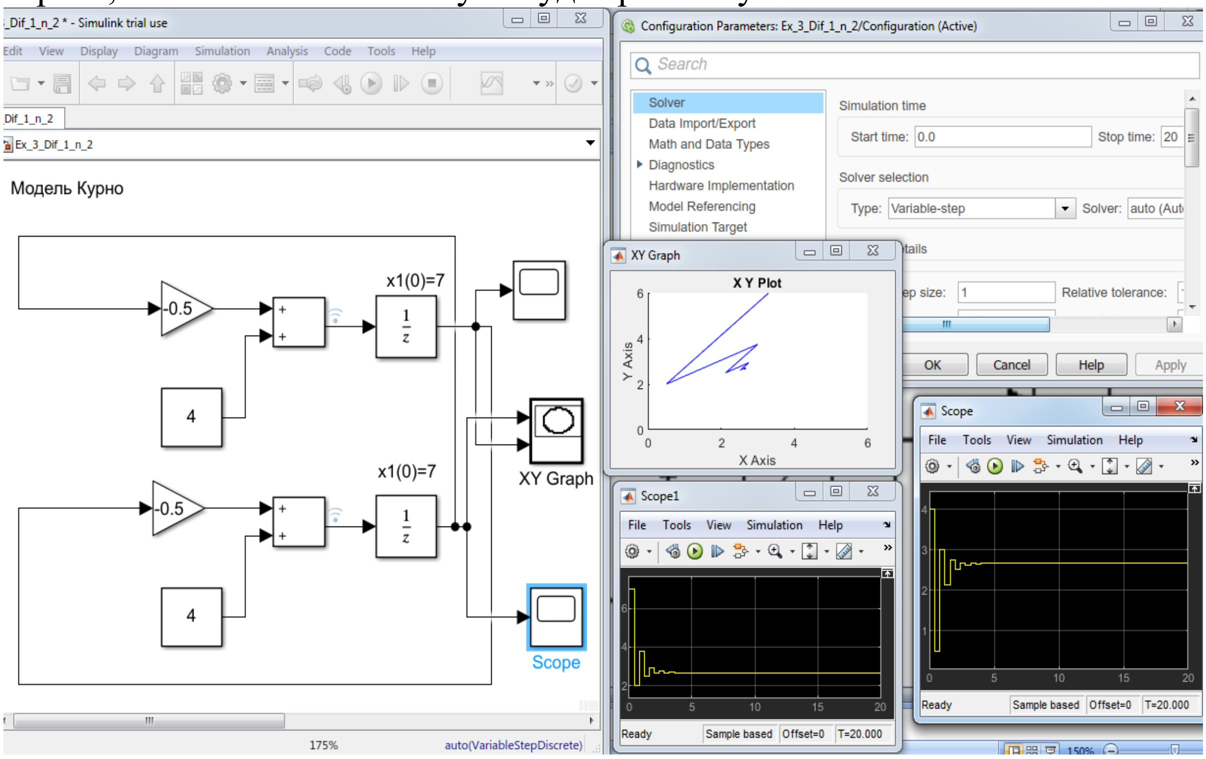



Рисунок 4.5. Структурная схема, окно настроек и результаты моделирования (фазовый портрет и переходные процессы)

Форма записи разностных линейных уравнений 1-го порядка содержательно означает формализацию прогноза поведения в момент $t$+1 по известному состоянию в момент $t$, например:

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) - 3y(t), \\ y(t+1) = 3x(t) + y(t). \end{cases}$$

**Для выполнения п.5 задания**

1. Второе задание из задач своего варианта дискретизовать по схеме Эйлера.

**Пример дискретизации**

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 4y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t+1) = x(t) + \Delta\big(4x(t) - 3y(t)\big), \\ y(t+1) = y(t) + \Delta\big(-3x(t) + 4y(t)\big). \end{cases}$$

Здесь $\Delta$ - параметр дискретизации.

2. Построить модельное решение системы разностных уравнений второго порядка на основе Simulink.
3. Построить графическую иллюстрацию решения.
4. Привести графики решения для разных параметров дискретизации (согласно схеме Эйлера).
5. Сравнить графики непрерывного объекта и дискретного. Всегда ли они «похожи» при $\Delta$, достаточно малых?

*Рекомендуемая литература для лабораторной работы 4.*


http://old.exponenta.ru/educat/systemat/semenenko/odu/index.asp
http://matlab.exponenta.ru/simulink/book1/10.php

**ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Варианты ДУ и систем ДУ для выполнения ЛР-4**

**Вариант №1**

1) $y' + 2xy = xe^{-x^2}, \quad y(0) = 2.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}, \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$

**Вариант №2**

1) $y \sin x + y' \cos x = 1, \quad y(0) = 1.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$

**Вариант №3**

1) $\dfrac{1}{2} y'' = e^{4y}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 9y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 8y \end{cases}, \quad x(0) = -2, \quad y(0) = -1.$

**Вариант №4**

1) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^3}, y(1) = 0.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -2.$

**Вариант №5**

1) $y' = \dfrac{y}{x + y^3}, y(0) = 1.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -1.$

**Вариант №6**

1) $xy' - y^2 \ln x + y = 0, y(1) = 1.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 3y \end{cases}, \quad x(0) = -2, \quad y(0) = 1.$

**Вариант №7**

1) $(1 + e^x) yy' = e^x, y(0) = 1.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 3y \end{cases}, \quad x(0) = -2, \quad y(0) = 1.$

**Вариант №8**

1) $xy' + y = xy^2 \ln x, y(1) = 1.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2y = x \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2.$

**Вариант №9**

1) $xy'' - y' \ln \dfrac{y'}{x} = 0, y(1) = 1, y'(1) = 2.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}, \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$

## Вариант №10

1) $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos x}, y(0) = 1.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$, $x(0) = -2$, $y(0) = 0.$

## Вариант №11

1) $y'' + y = ctgx, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1.$

## Вариант №12

1) $y'' - y = \dfrac{1}{e^{2x} + 1}, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 4y \end{cases}$, $x(0) = -1$, $y(0) = 2.$

## Вариант №13

1) $\left( x + \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} \right) dx + \left( y - \dfrac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}} \right) dy = 0, y(0) = 1.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$, $x(0) = -1$, $y(0) = 0.$

**Вариант №14**

1) $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy, \quad y(0)=1.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}, \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$

**Вариант №15**

1) $y' = 2\sqrt{y}\ln x, \quad y(e) = 1.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x - 3y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

**Вариант №16**

1) $y' - \dfrac{y}{x^2} = \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}, y(1) = 1.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

**Вариант №17**

1) $\dfrac{y^2}{2\sqrt{x}}dx + 2\sqrt{x} \cdot ydy = 0, y(1) = 1.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y \end{cases}, \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$

**Вариант №18**

1) $y''(y')^2 = 2y, \;\; y(1) = 2, \;\; y'(1) = 2$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}, x(0) = 1, \;\; y(0) = -1.$

**Вариант №19**

1) $y''y^2 - 4y' = 0, \;\; y(1) = 1, \;\; y'(1) = -4$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}, x(0) = 1, \;\; y(0) = 0.$

**Вариант №20**

1) $y''y' = 18y, \;\; y(5) = 1, \;\; y'(5) = 3.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}, x(0) = 3, \;\; y(0) = 0.$

**Вариант №21**

1) $y'' - y\sqrt{y'} = 0, \;\; y(0) = 6, \;\; y'(0) = 9$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}, x(0) = -1, \;\; y(0) = 1.$

**Вариант №22**

1) $y''y' = 18y^2,\ y(1) = 1,\ \ y'(1) = 3.$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases},\ x(0) = 1,\ \ y(0) = 0.$

**Вариант №23**

1) $y'' - y\sqrt{y'} = 0,\ \ y(0) = 6,\ \ y'(0) = 9$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases},\ x(0) = -2,\ \ y(0) = 2.$

**Вариант №24**

1) $y'' - yy'^2 = -3x,\ \ y(1) = 2,\ \ y'(1) = 1$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 3y \end{cases},\ x(0) = -3,\ \ y(0) = 3.$