

## **Лабораторная работа 5. Моделирование линейных/нелинейных объектов. Линейные системы. Передаточные функции. Модели детерминированного хаоса. Режимы устойчивости/неустойчивости. Автоколебательные модели.**

### *Цель работы*

Цель настоящей работы: знакомство с элементами синергетического управления применительно к моделям детерминированного хаоса, с принципами организации обратных связей в сложных объектах для достижения режима устойчивости функционирования нелинейного объекта.

### *Ход работы*

Часть 1. Ознакомиться со справочными сведениями.

2. Построить графики и фазовые портреты нелинейной модели для устойчивого и неустойчивого режимов.
3. Разработать программу, реализующую алгоритм управления хаотической моделью с целью стабилизации объекта в окрестности устойчивого состояния.
4. Получить сравнительные графики управляемой и неуправляемой моделей.
5. Составить и представить преподавателю отчет о работе.

Часть 2.

1. Ознакомиться со справочными сведениями относительно применения дискретных/непрерывных блоков Simulink.
2. Построить модель системы автоматического регулирования в Simulink.
3. В отчет включить схему и скриншоты окон настроек каждого блока.
4. Описать принцип работы блока Линейные системы.
5. Представить необходимые графики.

*Исходные данные.* Типы аналитических моделей и значения параметров (Приложение 5).

### *Справочные сведения. Часть 1*

1. Опишем некоторые простые модели детерминированного хаоса.

1.1. Хаотическая модель Эно является системой со сложной динамикой и длинной циклической орбитой. В то же время она обладает простотой вычисления точек ее траектории:

$$x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1-x_n) - b \cdot x_{n-1}, \quad (5.1)$$

где  $r$  – параметр системы,  $x_n$  – значение в точке с индексом  $n$ ,  $x_0=0$ ;  $b$  – свободный член,  $0 < b < 1$ . Значения точек орбиты модели, как и свободный член, лежат в интервале  $(0..1)$ . Данная модель проявляет хаотические свойства при параметре системы  $r$ , лежащем в интервале  $[3.665..4.0]$ . На рисунке 5.1 показан пример хаотического поведения модели Эно [1].

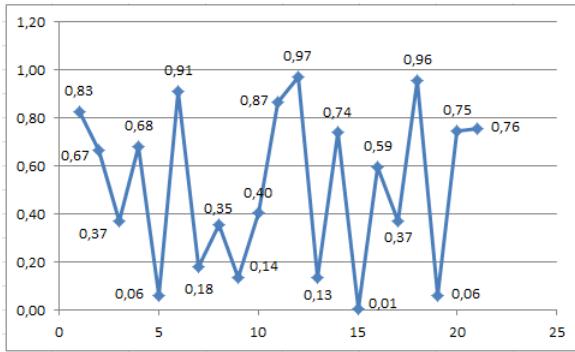


Рисунок 5.1 – Пример хаотического поведения модели Эно

### 1.2. Отображение Фейгенбаума $X(i+1)=\lambda X(i) (1-X(i))$ , $i \geq 0$

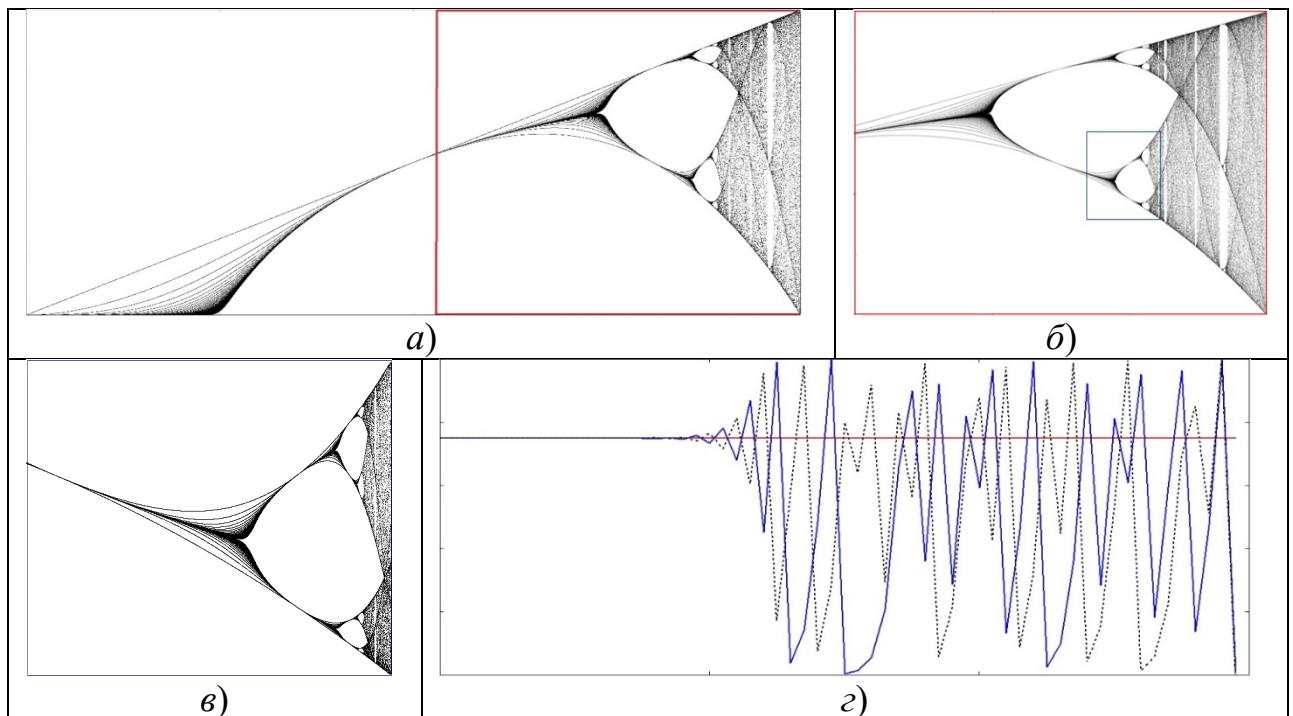


Рисунок 5.2 – Пример хаотического поведения модели Эно: бифуркационные диаграммы и времененная развертка модели

На рисунке 5.2 *а*) представлены всевозможные траектории начальной точки  $X_0=0,5$  при допустимых значениях параметра  $\lambda \in [0,4]$ . Наблюдается удвоение периода при росте параметра  $\lambda$ .

Рисунки 5.2 *б*), *в*) демонстрируют самоподобную (фрактальную) структуру эволюции отображения Фейгенбаума.

При  $\lambda = 4$  наблюдается хаотичная динамика объекта. Это означает, в частности, что объект занимает все допустимое фазовое пространство (в данном случае  $X(i) \in [0,1], i \geq 1$ ).

Рисунок 5.2 *г*) демонстрирует чувствительность к начальным условиям для модели Фейгенбаума. Все три траектории отличаются друг от друга лишь значением начального условия на  $8 * 10^{-9}$ .

Очевидно, что спрогнозировать поведение объектов в хаотичном режиме практически невозможно в связи с экспоненциальным разбеганием сколь угодно близких траекторий во времени. Поэтому, в частности, такие состояния объектов являются нежелательными.

1.3. Отображение Ферхюльста  $\frac{dx}{dt} = rx * \left(1 - \frac{x}{k}\right)$ ,  $r, k$  параметры модели.

Дифференциальное уравнение модели Ферхюльста может быть также представлено в виде

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x(t) - \lambda \alpha x^2(t), t \geq 0$$

где  $x(t)$  – переменная состояния,  $x(t) \in (0; 1)$ ,  $\lambda, \alpha$  параметры объекта  $\lambda, \alpha = \text{const}$ ,  $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$  (рисунок 5.3).

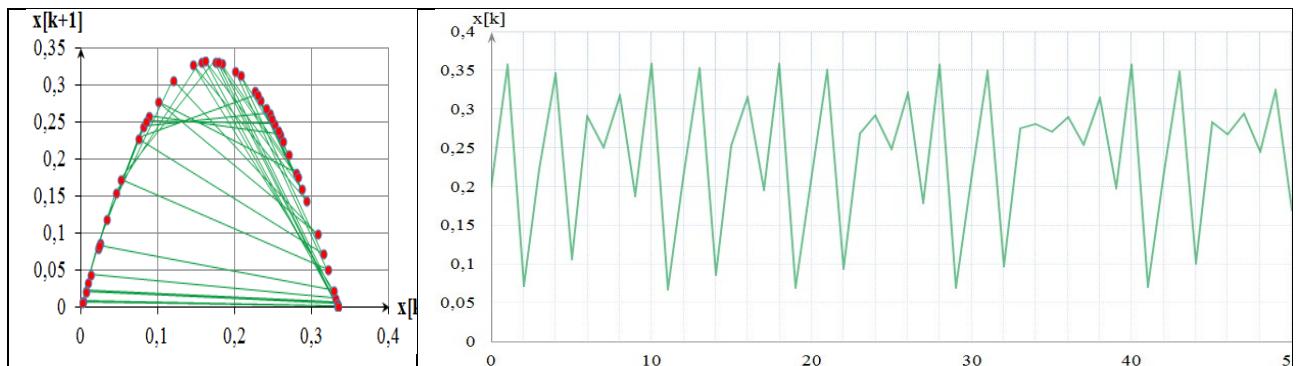


Рисунок 5.3. Пример хаотического поведения модели Ферхюльста с исходными данными:  $\alpha = 4; \lambda = 15; \Delta = 0,2; x_0 = 0,2$

1.4. Модель Лоренца с эволюционными уравнениями вида:

$$\begin{aligned} \frac{dY_1}{dt} &= \alpha Y_2 Y_3 - \gamma Y_1; \\ \frac{dY_2}{dt} &= \mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3; \\ \frac{dY_3}{dt} &= \delta Y_2 - \lambda Y_3, \end{aligned}$$

на рисунках 5.4–5.5 представлены фазовые портреты для разных коэффициентов системы.

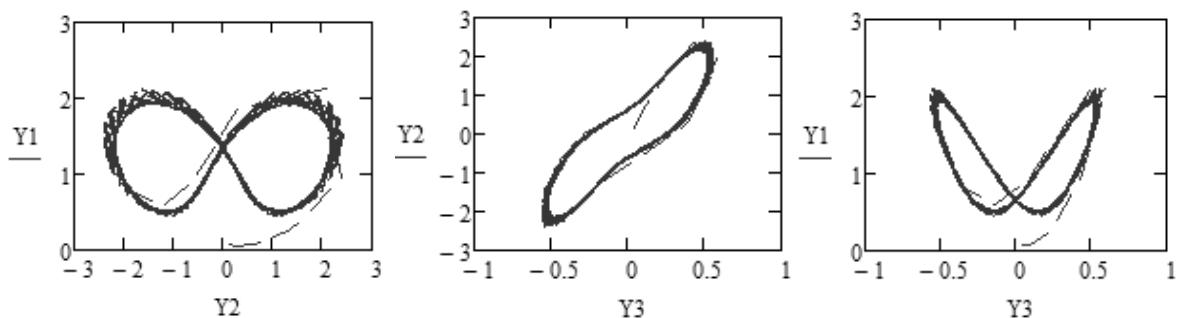


Рисунок 5.4 Фазовые портреты системы Лоренца при  $\alpha = 5, \beta = 8, \gamma = 1.9, \mu = 2.1, \lambda = 3.16, \delta = 0.9$

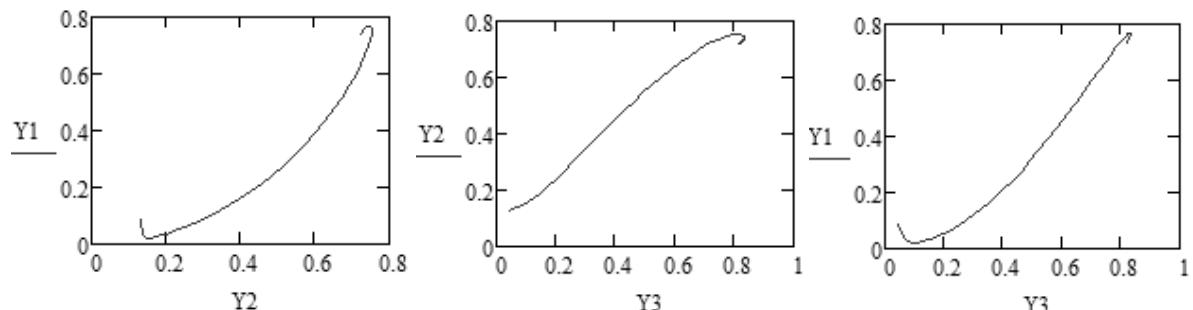


Рисунок 5.5 Фазовые портреты системы Лоренца при  $\alpha = 13.54, \beta = 0.72, \gamma =$

$$10.92, \mu = 0.28, \lambda = 1.58, \delta = 1.78$$

## 2. Вопрос устойчивости нелинейного объекта 1 го порядка.

Устойчивость нелинейного объекта характеризует способность к затуханию переходных процессов (является необходимым, но не достаточным условием практической пригодности систем). Этот критерий позволяет очень грубо оценить переходные процессы (рисунок 5.6).

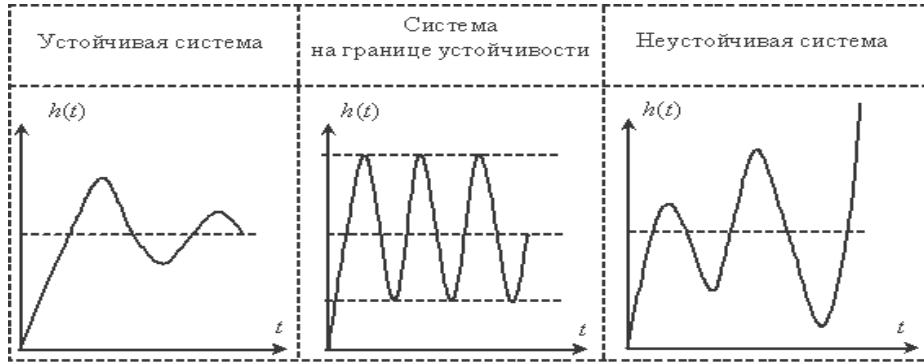


Рисунок 5.6 – Переходные характеристики для трех основных режимов с точки зрения устойчивости нелинейного процесса  $h(t)$

## 3. Алгоритмы нелинейного регулирования как аналитической модели управления.

*Постановка задачи управления 1. Стабилизация дискретного объекта 1 го порядка модели Фейгенбаума:*

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) + u_n, n \geq 0 \quad (5.1)$$

где  $x_n \in R$ ,  $\lambda \in R$ ,  $u_n$  – переменная состояния, параметр модели, переменная управления, соответственно.

Для объекта (5.1) ставится задача нахождения закона управления  $u_n = u(x_n)$ , обеспечивающего перевод объекта управления из произвольного начального состояния  $x_0$  в некоторой области фазового пространства в заданное состояние и его стабилизацию в некоторой окрестности многообразия  $\psi(x) = 0$ .

*Алгоритм 1 синтеза дискретного управления, выводящего нелинейный объект в окрестность заданного целевого множества состояний (многообразия).*

1) Задается целевое многообразие в виде:

$$\psi_n = x_n - x_n^0 = 0, \quad (5.2)$$

где  $x_n^0$  заданная целевая траектория (в частности,  $x_n^0 = x^0$ ).

2) Требуется выполнение основного функционального однородного разностного уравнения:

$$\psi_{n+1} + \omega \psi_n = 0, \quad (5.3)$$

на решениях которого достигается минимум функционала:

$$J_D = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \alpha^2 \psi_k^2 + (\Delta \psi_k)^2 \right),$$

где  $\alpha$  – параметр функционала; связь параметров  $\alpha, \omega$  выражена

соотношением:  $\omega = 0.5 \left( 1 + \alpha^2 - \sqrt{(1 + \alpha^2) - 4} \right)$ ,  $|\omega| < 1$ .

3) Выводится закон управления из (5.3) с учетом (5.2) и уравнения (5.1) (рисунок 5.7):

$$u_n = x_{n+1}^0 - \omega \psi_n - \lambda x_n (1 - x_n). \quad (5.4)$$

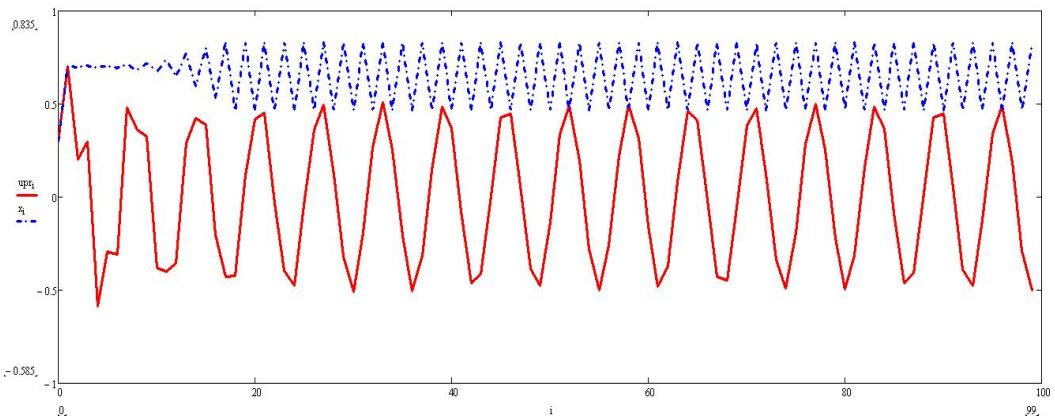


Рисунок 5.7. Сравнительное моделирование управляемого (красное начертание) / неуправляемого объекта (синее начертание) (5.1) с исходными данными вида:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.3; \gamma = 3.35; \lambda = 0.9; n=100; \\ x_k^0 &= 0.5 * \sin(k) \quad k = \overline{0, n - 1} \end{aligned}$$

*Постановка задачи управления 2.* Стабилизация непрерывного объекта 1 го порядка:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x(t) - \lambda \alpha x^2(t) + u(t), t \geq 0. \quad (5.5)$$

Для объекта (5.5) ставится задача нахождения закона управления  $u(t) = u(x(t))$ , обеспечивающего перевод объекта управления из произвольного начального состояния  $x_0$  в некоторой области фазового пространства в заданное состояние и его стабилизацию в некоторой окрестности многообразия  $\psi(x) = 0$ .

**Алгоритм 2 синтеза непрерывного управления, выводящего нелинейный объект в окрестность заданного целевого множества состояний.**

1) Задается целевое многообразие в виде:

$$\psi(t) = x(t) - x^*(t) = 0, \quad (5.6)$$

где  $x^*(t)$  заданная целевая траектория (в частности,  $x^*(t) = const$ ).

2) Требуется выполнение основного функционального однородного дифференциального уравнения:

$$\dot{\psi}(t) + \omega \psi(t) = 0, \quad (5.7)$$

на решениях которого достигается минимум функционала:

$$J_C = \sum_{k=0}^{\infty} (\psi^2(t) + \omega \dot{\psi}^2(t)).$$

3) Выводится закон управления из (5.8) с учетом (5.6) и уравнения (5.5) (рисунок 5.8):

$$u(t) = -\lambda x(t) + \lambda \alpha x^2(t) + \dot{x}^*(t) - \omega \psi. \quad (5.8)$$

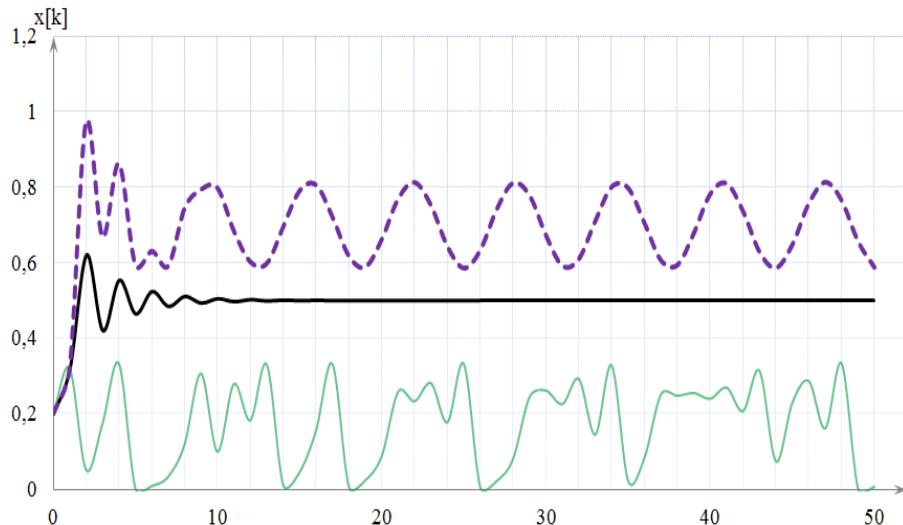


Рисунок 5.9. Сравнительное моделирование управляемого и неуправляемого объекта управления (фиолетовое начертание  $x^*(t) = 0,1\sin(t) + 0,7$ ; чёрное начертание  $x^*(t) = 0,5$ ; зеленое начертание для (5.5))

## *Справочные сведения. Часть 2*

1. Основной математической моделью динамических систем (ДС) является дифференциальное уравнение (ДУ). Если система линейная, то и ДУ также является линейным (ЛДУ).

Описание автоматических систем существенно упрощается при использовании методов операционного исчисления. Используя преобразование Лапласа, **ЛДУ приводят к алгебраическому уравнению** с комплексными переменными.

Преобразованием Лапласа называют соотношение

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt$$

которое функции  $x(t)$  вещественного переменного ставит в соответствие функцию  $X(s)$  комплексного переменного  $s$ . Функцию  $x(t)$  называют оригиналом, а  $X(s)$  – изображением по Лапласу. Преобразование Лапласа можно применять к функции  $x(t)$ , если она имеет конечное число разрывов, равна нулю при  $t < 0$  и ограничена по модулю при  $t > 0$ .

Преобразование Лапласа можно записать в символьической форме  $X(s) = L\{x(t)\}$ , где  $L$  — оператор Лапласа.

Предположим, что свойства автоматической системы описываются ДУ вида

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0,$$

где  $x(t)$  – входное воздействие,  $y(t)$  – реакция системы (выходной процесс),  $a$  и  $b$  – постоянные коэффициенты.

Используя преобразование Лапласа к этому уравнению, получаем линейное алгебраическое уравнение относительно  $Y(s)$ .

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = \\ b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots + b_0 X(s)$$

или

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} X(s)$$

Выражение

$$W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

определяет передаточную функцию автоматической системы.

Передаточной функцией (ПФ) системы называется отношение изображения по Лапласу ее реакции к изображению по Лапласу входного воздействия при нулевых начальных условиях.

Изображение реакции определяется передаточной функцией и изображением входного воздействия:

$$Y(s) = W(s) X(s),$$

откуда следует определение передаточной функции с физической интерпретацией.

**Передаточной функцией системы называется функция, связывающая изображение по Лапласу ее реакции с изображением по Лапласу входного воздействия при нулевых начальных условиях.**

ПФ можно получить непосредственно по ДУ путем формальной замены оператора дифференцирования – комплексной переменной  $s$ , а функций времени  $x(t)$ ,  $y(t)$  – их изображениями  $X(s)$ ,  $Y(s)$ .

Если динамическое звено или автоматическая система имеет несколько входов, то по каждому из них составляют передаточную функцию, принимая во внимание **принцип суперпозиции**.

Передаточные функции линейных динамических звеньев представляют собой дробно-рациональные функции комплексной переменной  $s$  с постоянными коэффициентами, зависящими от параметров системы.

**Для физически реализуемых систем  $m \leq n$  передаточные функции являются правильными дробно-рациональными функциями от  $s$ .**

Полином в знаменателе ПФ, называется характеристическим полиномом, а уравнение вида

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

называется характеристическим уравнением.

## 2. Особые точки передаточной функции.

Полюсами ПФ называют те значения комплексной переменной  $s$ , при которых передаточная функция равна бесконечности.

Для нахождения полюсов достаточно найти корни характеристического уравнения.

Нулями ПФ называют те значения комплексной переменной  $s$ , при которых передаточная функция равна нулю.

Для нахождения нулей достаточно найти корни полинома - числителя передаточной функции.

Называют нули и полюсы левыми (правыми), если они расположены в левой (правой) части комплексной  $s$ -плоскости и нейтральными или нулевыми, если они лежат на мнимой оси или, соответственно, в начале координат.

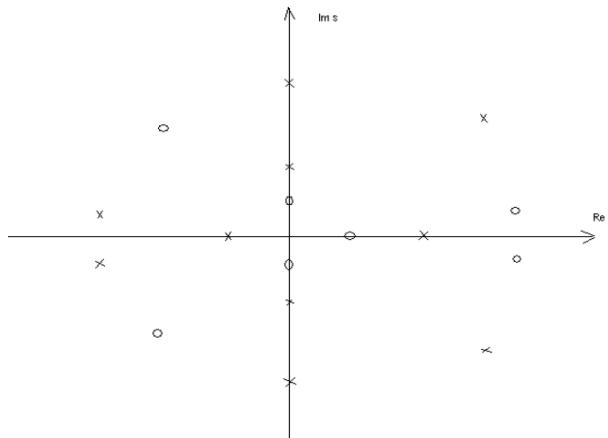


Рис. 5.10. График распределения нулей/полюсов; нули показаны кружками, а полюса – крестиками

## 3. Переходная характеристика

*Зависимость изменения реакции системы от времени при подаче на ее вход единичного ступенчатого воздействия  $1(t)$  при нулевых начальных условиях называется переходной характеристикой и обозначается  $h(t)$ .*

Ступенчатое воздействие  $1(t)$  определяется в следующей форме:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0 \\ 1, & \text{при } t \geq 0 \end{cases}.$$

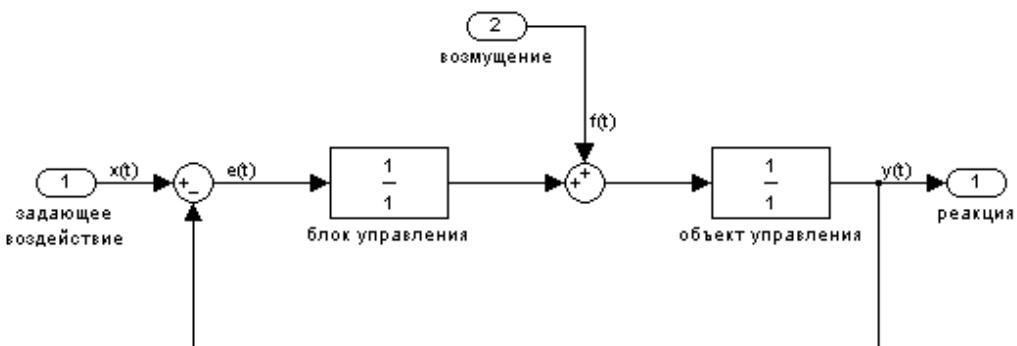


Рис. 5.12. Типовая структура одноконтурной системы регулирования (управления (СУ))

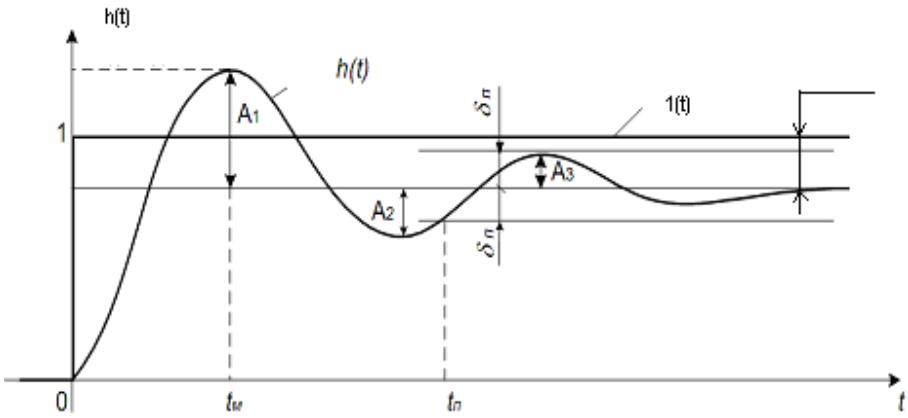


Рис. 5.13. Примеры переходных характеристик системы при подаче на входы 1 и 2 (рис.5.12) ступенчатых сигналов

На графиках переходных процессов, вызванных ступенчатым изменением задающего воздействия  $x(t)=l(t)$  и возмущения  $f(t)=l(t)$ , за начало отсчета для управляемой величины  $y(t)$  принято значение  $x(-0)$ , которое было до подачи ступенчатого воздействия.

**Переходная характеристика** является основой для оценок показателей качества систем по быстродействию и точности, которые можно получить непосредственно из переходной характеристики.

**Перерегулирование**  $\sigma$  - величина, равная отношению первого максимального отклонения  $h_m$  от ее установившегося значения  $h(\infty)$  к этому установившемуся значению:

$$\sigma = \frac{|h_m - h(\infty)|}{h(\infty)} \cdot 100 = \frac{A_1}{h(\infty)} \cdot 100, \%$$

Качество управления считается удовлетворительным, если перерегулирование не превышает 30...40 %.

**Степень затухания:**

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} = 1 - \frac{A_3}{A_1}.$$

Интенсивность затухания колебаний в системе считается удовлетворительной, если  $\psi = 0,75...0,95$ .

**Логарифмический декремент колебаний**  $D$  – характеризует скорость затухания колебаний и определяется по формуле

$$D = \ln \left| \frac{A_1}{A_2} \right|.$$

**Длительность переходного процесса (время регулирования)**  $t_n$  – интервал времени от момента приложения ступенчатого воздействия до момента, после которого отклонения управляемой величины  $h(t)$  от ее нового установившегося значения  $h(\infty)$  становятся меньше некоторого заданного числа  $\delta_n$ , т. е. до момента, после которого выполняется условие  $\text{abs}[h(t) - h(\infty)] \leq \delta_n$ , при  $t > t_n$ .

В промышленной автоматике величину  $\delta_n$  обычно принимают равной 2% от установившегося значения  $h(\infty)$  [ $\delta_n = 0,02 h(\infty)$  ].

**Колебательность**  $N$  – число переходов  $h_f(t)$  через ее установившееся значение  $h_f(\infty)$  за время переходного процесса  $t_n$ .

**Статическая ошибка** для рассматриваемой структуры

$$\varepsilon_{cm} = \text{abs}[l(t) - h(\infty)].$$

Для переходных процессов  $h_f(t)$ , вызванных **возмущающим воздействием**  $f(t)$  (см. рис. 5.14) вводятся аналогичные показатели качества.

**Перерегулирование**  $\sigma_f$  – величина, равная отношению первого максимального отклонения  $h_{f,max}$  от ее установившегося значения  $h_f(\infty)$  к этому установившемуся значению:

$$\sigma_f = \frac{h_{f,max} - h_f(\infty)}{h_f(\infty)} \cdot 100 = \frac{A_1}{h_f(\infty)} \cdot 100, \%$$

**Колебательность**  $N_f$  – число переходов  $h_f(t)$  через ее установившееся значение  $h_f(\infty)$  за время переходного процесса  $t_n$ .

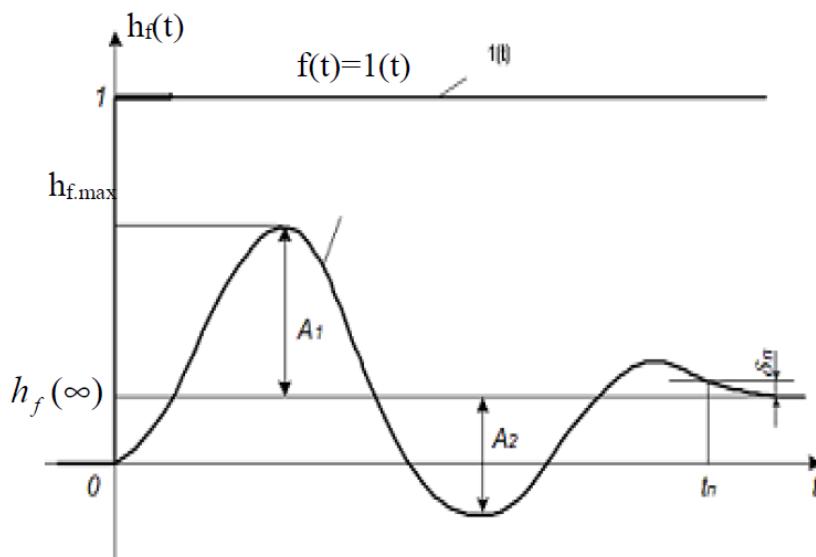


Рис. 5.14. Переходная характеристика системы по возмущению

Аналогично оцениваются остальные вышеперечисленные показатели и, дополнительно, коэффициент демпфирования возмущений  $R_d$

$$R_d = 20 \lg \left| \frac{k_{o,f}}{h_f(\infty)} \right|, (\text{db})$$

где –  $k_{o,f}$  – статический коэффициент передачи объекта по возмущению.

Три главных показателя качества – **перерегулирование, длительность переходного процесса и статическая ошибка** – тесно связаны между собой.

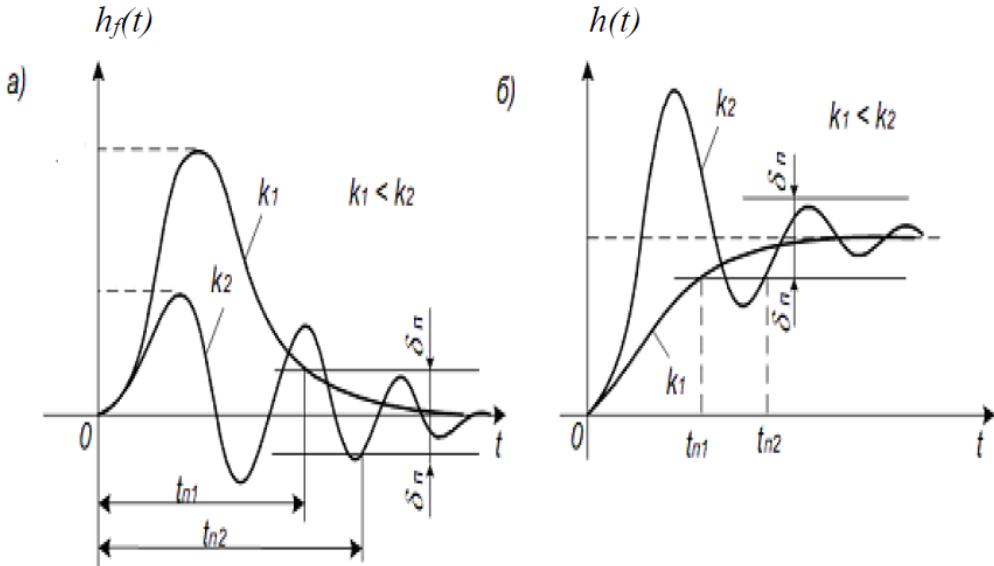


Рис. 5.15. Влияние передаточного коэффициента разомкнутой части системы на показатели переходного процесса: а – по возмущающему воздействию, б – по задающему воздействию

4. Модель системы в пространстве состояния задается системой матричных уравнений

$$\dot{X} = AX + BU, \quad Y = CX + DU,$$

где  $X$  - вектор-столбец состояния;  $U$  и  $Y$  - векторы входа и выхода системы;  $A$  - матрица состояния,  $B$  - матрица управления,  $C$  - матрица выхода,  $D$  - матрица, характеризующая связь входного сигнала с выходным («матрица прямого обхода»).

В частном случае, когда вход и выход являются скалярными величинами,  $B$  – это вектор-столбец, а  $C$  - вектор-строка.

Пример соответствия скалярной и матричной записей.

|  |                              |
|--|------------------------------|
| $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$ | $\dot{X} = AX + BU$          |
| $y = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$   | $Y = CX + DU, D=(0 \quad 0)$ |

5. Блок, моделирующий передаточную функцию и окно редактирования параметров данного блока.

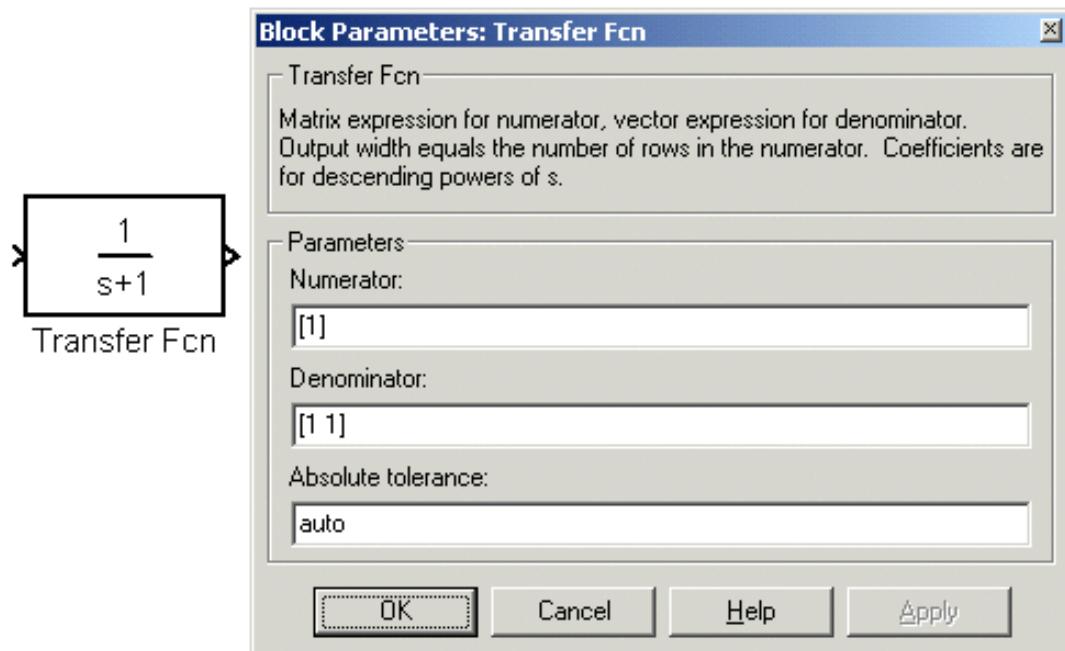


Рис. 5.16. Блок, моделирующий передаточную функцию и окно редактирования параметров блока.

## *Рекомендуемая литература к лабораторной работе 5*

- 1 Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. М.: МЦНМО, 2004. – 32 с.
- 2 Морозов А.Д. и др. Инвариантные множества динамических систем в Windows. - М.: УРСС, 1998.
- 3 Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы. - М.: Гостехиздат, 1952.
- 4 Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. -М.: Наука, 1987.
- 5 Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. - М.: Наука, 1990.
- 6 Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. - М.: Физматлит, 1997.
- 7 Анищенко В.С., Владивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы/Под ред. В.С. Анищенко. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999.
- 8 Гордеев К. Зубы дракона или сумерки человечества.  
<http://shturmnews.info/content/kgordeev-zuby-drakona-ili-sumerki-chelovechestva.html>
- 9 Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного синтеза. – М.: КомКнига, 2006. – 240 с.
- 10 Птицын Н. Приложение теории детерминированного хаоса в криптографии. / Н. Птицын. – М.: Москва, 2002. – 80 с.
- 11 Alireza Jolfaei Image Encryption Using Chaos and Block Cipher [Электронный ресурс]: Режим доступа: <http://journal.ccsenet.org/index.php/cis/article/view/7510>, свободный.
- 12 Brahim Boulebtateche A Multimedia Chaos Based Encryption Algorithm [Электронный ресурс]: Режим доступа: <http://www.nauss.edu.sa/acit/PDFs/f3231>.
- 13 Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. 184 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Моделирование объектов детерминированного хаоса

Внимание! Подробный вывод управляющих воздействий должен быть приложен к отчету ЛР-5.

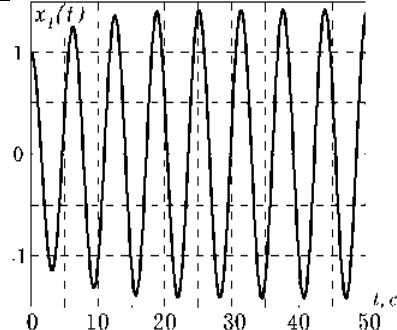
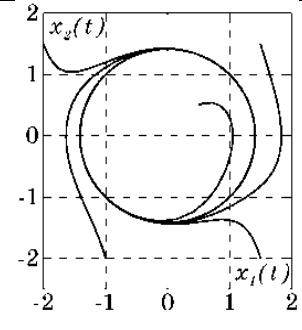
Указать вид функционала качества управляющего воздействия и вид уравнения Эйлера-Лагранжа для него.

Часть 1. Получить АКС определенного вида на основе принудительного возмущения и системы уравнений (1). Показать графики устойчивого и неустойчивого поведения (1) при разных параметрах целенаправленного возмущения (управления динамикой (1)).

**Блок заданий 1.** Данна система (универсальный генератор Ван-дер-Поля–Релея–Дуффинга):

|  |  |
|--|--|
| Описание объекта                             | Макропеременная. Управление.   |
| $\dot{x}_1(t) = x_2,$<br>$\dot{x}_2(t) = u;$ | $\psi = A^2 - F(x_1) - 0,5x_2^2,$<br>$u = -\frac{dF}{dx_1} + (Tx_2)^{-1}\psi.$ |

Выбором функции  $F$  обеспечить на основе универсального управления соответствующий тип колебаний, построить фазовые траектории и портрет.

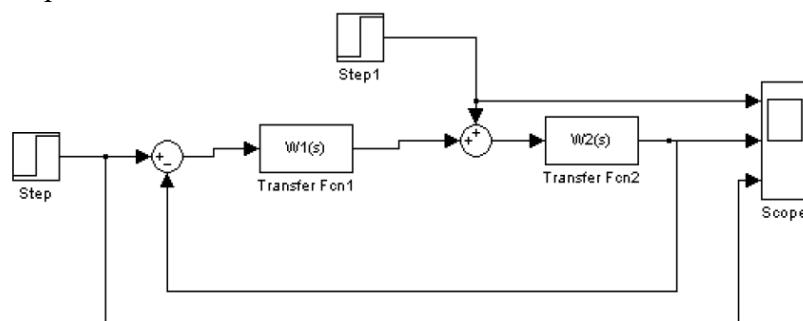
| Вариант | Тип колебаний   | Фазовые траектории и портрет (пример)   |  |
|---------|---|---|--|
|         | Гармонические<br>$F_g(x_1) = 0,5\omega^2 x_1^2$             |  |  |
|         | по Дуффингу<br>$F_d(x_1) = 0,5\omega^2 x_1^2 + \beta x_1^4$ |   |  |
|         | по Тоду<br>$F_T(x_1) = e^{x_1} + x_1$                       |   |  |
|         | Солитонные<br>$F_c(x_1) = \alpha x_1^3 - \beta x_1^2$       |   |  |

Часть 2.

1. Собрать схему.

| Вариант 1  | Вариант 2  | Вариант 3   | Вариант 4                                      |
|--|--|---|--|
| $W_1(s) \sim 10;$<br>$W_2(s) \sim 1/(5s^2 + 3s + 1)$ | $W_1(s) \sim 20; W_2(s) \sim 1/(87s^2 + 5s + 1)$ | $W_1(s) \sim 25; W_2(s) \sim 1/(21s^2 + 17s + 1)$ | $W_1(s) \sim 25; W_2(s) \sim 1/(2s^2 + s + 2)$ |

2. Установить возмущение равным нулю и снять переходную характеристику по задающему воздействию. По полученному графику оценить показатели качества системы. Изменить значение статического коэффициента  $W_1(s)$  в 10 раз в большую и меньшую стороны и для каждого измененного значения получить переходные характеристики и оценки показателей качества. Сравнить.



**Блок заданий 2.** Получить АКС определенного вида на основе принудительного возмущения  $u$  и системы уравнений (2). Показать графики устойчивого и неустойчивого поведения (2) при разных параметрах целенаправленного возмущения (управления динамикой (2)).

Дана система (универсальный генератор типа Пуанкаре):

| Описание объекта  | Макропеременная. Управление.   |
|---|--|
| $\dot{x}_1(t) = x_2 + k_1 u;$<br>$\dot{x}_2(t) = -\omega^2 x_1 + k_2 u,$ (2)  | $\psi = A^2 - 0,5\omega^2 x_1^2 - 0,5x_2^2,$<br>$u(x_1, x_2) = \frac{\psi}{T(k_1\omega^2 x_1 + k_2 x_2)}.$ |
| $x_1(t), x_2(t)$<br>Выбором коэффициентов $k_1, k_2$ можно обеспечить соответствующие типы колебаний:<br>при $k_1 \sim k_2$ получить генератор Пуанкаре;<br>при $k_1 \gg k_2$ получить генератор Ван-дер-Поля.<br>Построить траектории (графики $x_1(t), x_2(t)$ от времени) и фазовый портрет. |  |

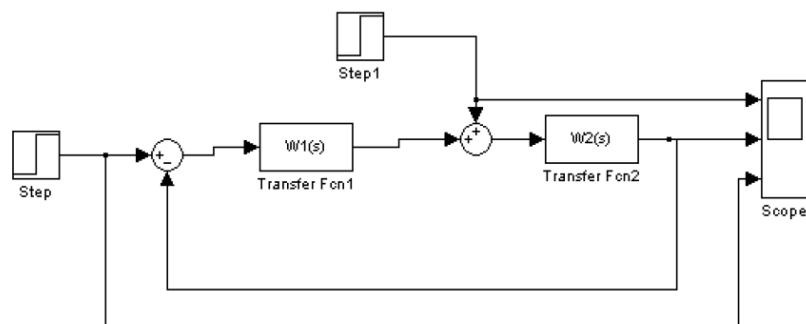


Часть 2.

1. Собрать схему.

| Вариант 5  | Вариант 6  | Вариант 7                                     |
|--|--|---|
| $W_1(s) \sim 35;$<br>$W_2(s) \sim 1/(7s^2 + 3s + 1)$ | $W_1(s) \sim 5; W_2(s) \sim 1/(15s^2 + 30s + 1)$ | $W_1(s) \sim 7; W_2(s) \sim 1/(3s^2 + s + 1)$ |

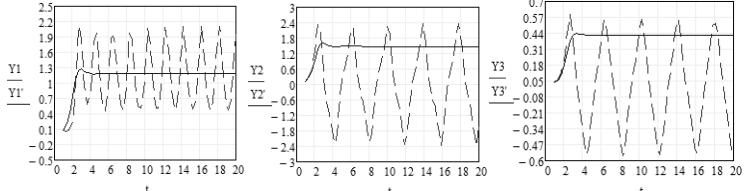
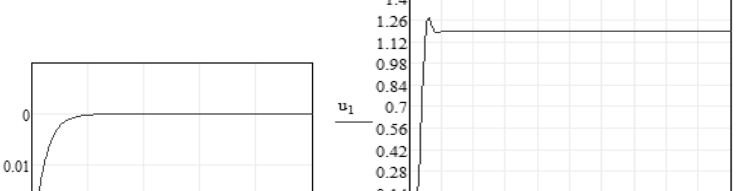
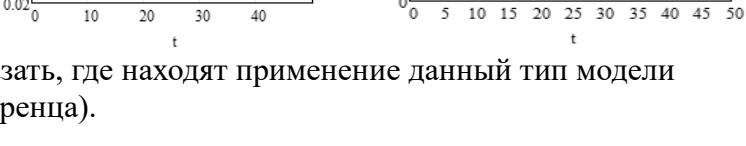
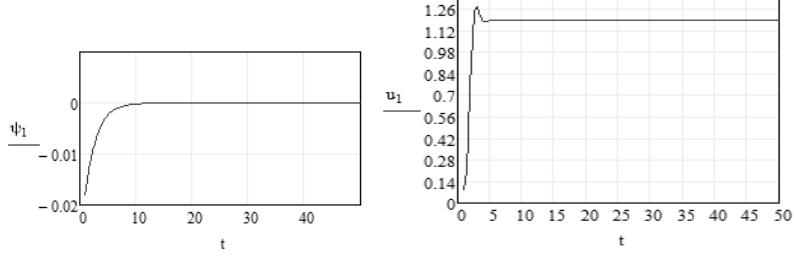
2. Установить возмущение равным нулю и снять переходную характеристику по задающему воздействию. По полученному графику оценить показатели качества системы. Изменить значение статического коэффициента  $W_1(s)$  в 10 раз в большую и меньшую стороны и для каждого измененного значения получить переходные характеристики и оценки показателей качества. Сравнить.



**Блок заданий 3.** Получить АКС определенного вида на основе принудительного возмущения  $u_1$  системы уравнений (3). Показать графики устойчивого и неустойчивого поведения (3) при разных параметрах целенаправленного возмущения (управления динамикой (3)).

| Описание объекта   | Макропеременная. Управление.   |
|--|--|
| $\frac{dY_1}{dt} = \alpha Y_2 Y_3 - \gamma Y_1 + u_1;$ $\frac{dY_2}{dt} = \mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3; \quad (3)$ $\frac{dY_3}{dt} = \delta Y_2 - \lambda Y_3,$ | $\psi_1(t) = Y_1 - \rho Y_2,$ $u_1 = \gamma Y_1 - \alpha Y_2 Y_3 + \rho(\mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3) - \frac{\psi_1(t)}{T_1}.$ Получить систему управления.<br>Выбором параметра $T_1$ можно разные формы переходных процессов. |

Построить траектории с управлением и без (графики  $Y_i(t), i=1,2,3$  от времени), график управления, макропеременной и фазовый портрет (ФП). Получить два варианта картинок ФП: устойчивого поведения и неустойчивого.

| Вариант  | Фазовые траектории   |
|--|--|
| $\alpha=5, \beta=8,$<br>$\gamma=1.9, \mu=2.1,$<br>$\lambda=3.16, \delta=0.9$ |    |
| $\alpha=4, \beta=9,$<br>$\gamma=1.7, \mu=2.2,$<br>$\lambda=3.12, \delta=0.7$ |   |
| $\alpha=3, \beta=8,$<br>$\gamma=1.8, \mu=2.4,$<br>$\lambda=3.10, \delta=0.7$ |  |
| $\alpha=2, \beta=6,$<br>$\gamma=1.5, \mu=2.0,$<br>$\lambda=3.16, \delta=0.9$ |  |
| $\alpha=5, \beta=6,$<br>$\gamma=1.3, \mu=2.5,$<br>$\lambda=3.16, \delta=0.9$ | Указать, где находят применение данный тип модели (Лоренца).                         |

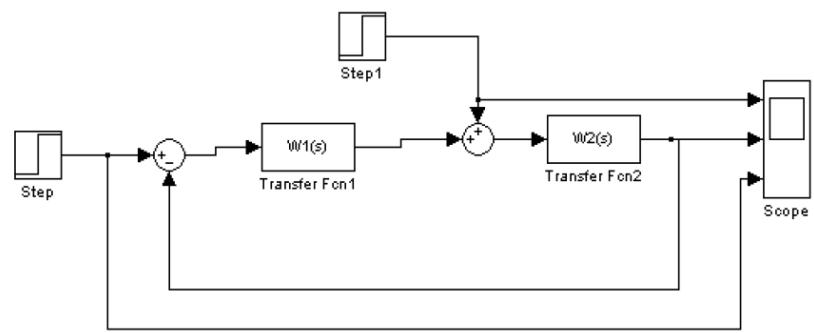
Часть 2.

1. Собрать схему.

**Вариант 8**    **Вариант 9**    **Вариант 10**    **Вариант 11**    **Вариант 12**

|   |  |   |   |   |
|---|--|---|---|---|
| $W_1(s) \sim 45;$<br>$W_2(s) \sim 5/(27s^2 + 7s + 5)$ | $W_1(s) \sim 2;$<br>$W_2(s) \sim -3/(3s^2 + 2s + 1)$ | $W_1(s) \sim 50;$<br>$W_2(s) \sim 0.5/(2s^2 + s + 1)$ | $W_1(s) \sim 50;$<br>$W_2(s) \sim 5/(28s^2 + 5s + 1)$ | $W_1(s) \sim 80;$<br>$W_2(s) \sim 1/(0.05s^2 + 0.2s + 1)$ |
|---|--|---|---|---|

2. Установить возмущение равным нулю и снять переходную характеристику по задающему воздействию. По полученному графику оценить показатели качества системы. Изменить значение статического коэффициента  $W_1(s)$  в 10 раз в большую и меньшую стороны и для каждого измененного значения получить переходные характеристики и оценки показателей качества. Сравнить.



**Блок заданий 4.** Получить АКС определенного вида на основе принудительного возмущения  $u_1$  системы уравнений (4). Показать графики устойчивого и неустойчивого поведения (4) при разных параметрах целенаправленного возмущения (управления динамикой (4)).

| Описание объекта   | Макропеременная. Управление.  |
|--|---|
| $\frac{dY_1}{dt} = \alpha Y_2 Y_3 - \gamma Y_1;$ $\frac{dY_2}{dt} = \mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3; \quad (4)$ $\frac{dY_3}{dt} = \delta Y_2 - \lambda Y_3 + u_1,$ | $\Psi_1(t) = Y_3 - \rho Y_2.$ $u_1 = \lambda Y_3 - \delta Y_2 + \rho(\mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3) - \frac{\Psi_1(t)}{T_1}.$ Получить систему управления.<br>Выбором параметра $T_1$ можно разные формы переходных процессов. |

Построить траектории с управлением и без (графики  $Y_i(t), i=1,2,3$  от времени), график управления, макропеременной и фазовый портрет. Получить два варианта картинок ФП: устойчивого поведения и неустойчивого.

| Вариант  | Фазовые траектории |
|--|--------------------|
| $\alpha=5, \beta=8,$<br>$\gamma=1.9, \mu=2.1,$<br>$\lambda=3.16, \delta=0.9$ |                    |
| $\alpha=4, \beta=9,$<br>$\gamma=1.7, \mu=2.2,$<br>$\lambda=3.12, \delta=0.7$ |                    |
| $\alpha=3, \beta=8,$<br>$\gamma=1.8, \mu=2.4,$<br>$\lambda=3.10, \delta=0.7$ |                    |
| $\alpha=2, \beta=6,$<br>$\gamma=1.5, \mu=2.0,$<br>$\lambda=3.16, \delta=0.9$ |                    |
| $\alpha=5, \beta=6,$<br>$\gamma=1.3, \mu=2.5,$<br>$\lambda=3.16, \delta=0.9$ |                    |

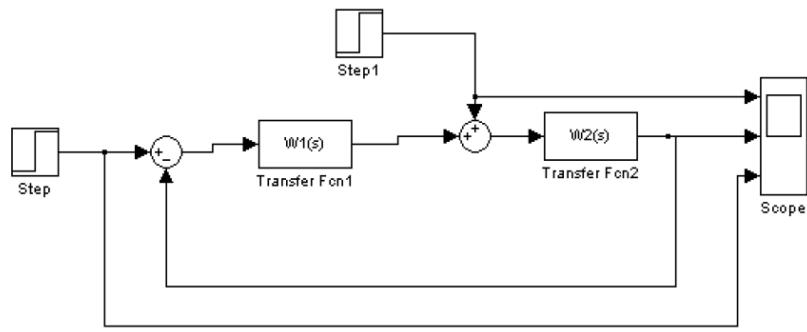
Указать, где находят применение данный тип модели (Лоренца).

Часть 2.

1. Собрать схему.

| Вариант 13   | Вариант 14  | Вариант 15  | Вариант 16   | Вариант 17  |
|--|---|---|--|---|
| $W_1(s) \sim 100;$<br>$W_2(s) \sim 1/(0.1s^2 + s + 1)$ | $W_1(s) \sim 20;$<br>$W_2(s) \sim 0.3/(3s^2 + s + 1)$ | $W_1(s) \sim 40;$<br>$W_2(s) \sim 0.4/(2s^2 + s + 1)$ | $W_1(s) \sim 35;$<br>$W_2(s) \sim 1/(6s^2 + 2s + 1)$ | $W_1(s) \sim 60;$<br>$W_2(s) \sim 1/(0.04s^2 + 0.1s + 1)$ |

2. Установить возмущение равным нулю и снять переходную характеристику по задающему воздействию. По полученному графику оценить показатели качества системы. Изменить значение статического коэффициента  $W_1(s)$  в 10 раз в большую и меньшую стороны и для каждого измененного значения получить переходные характеристики и оценки показателей качества. Сравнить.



## Блок заданий 5.

Дана непрерывная модель популяционной динамики, описывающая взаимодействие хищников и жертв с учетом стабилизирующих факторов внутривидовой конкуренции каждой популяции [Базыкин, 2003] с эволюционными уравнениями и параметрами  $a, \alpha, \lambda, \delta$ :

$$\dot{x}_1 = ax_1 - \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \varepsilon x_1^2,$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda x_2 + \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \delta x_2^2.$$

1. Построить зависимости  $x_1(t), x_2(t)$  в условиях ..  $a = \lambda = 1, \varepsilon = 0.01$  и  $\alpha = 0.4$ .
2. Построить фазовые портреты  $(x_1, x_2)$  для случаев п.1<sup>0</sup> с разной степенью точности вычисления (2 знака в мантиссе, 15 знаков в мантиссе).
3. Построить бифуркационный сценарий в зависимости от параметра  $\delta > 0$ :

**18 вариант.** Начальные значения параметров:  $\delta = 0.1$ ; b)  $\delta = 0.130881$ ; c)  $\delta = 0.15$ ; d)  $\delta = 0.196565$ ;

**19 вариант.** Начальные значения параметров:  $\delta = 0.215$ ; f)  $\delta = 0.221$ ; g)  $\delta = 0.2395$ ; h)  $\delta = 0.12$ .

4. Дать определение «бифуркация динамической системы».

Здесь  $x$  — плотность популяции жертв,  $y$  — плотность популяции хищников,

$a > 0$  — скорость размножения жертв,

$\lambda > 0$  — скорость естественной смертности хищников,

$0 < \alpha < 1$  — коэффициент, характеризующий насыщение хищников.

Модель учитывает следующие три фактора взаимодействия:

- $-\varepsilon x_1^2$  — внутривидовая конкуренция жертв,
- $-\delta x_2^2$  — внутривидовая конкуренция хищников за отличные от жертв ресурсы,

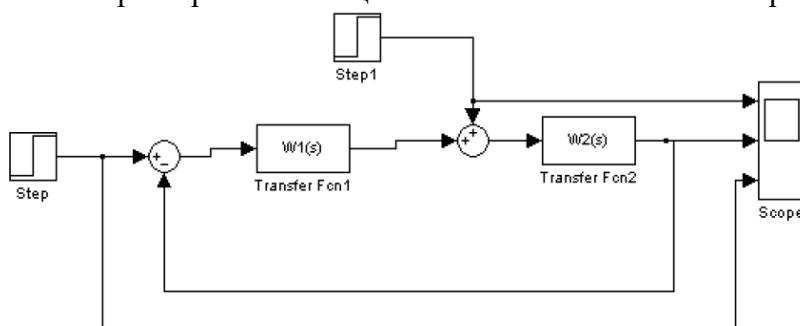
- $\frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1}$  — взаимодействие популяций

Часть 2.

1. Собрать схему.

| Вариант 18  | Вариант 19   |
|---|--|
| $W_1(s) \sim 100$ ;<br>$W_2(s) \sim 1/(0.01s^2 + 2s + 1)$ | $W_1(s) \sim 25$ ; $W_2(s) \sim 1/(20s^2 + 16s + 1)$ |

2. Установить возмущение равным нулю и снять переходную характеристику по задающему воздействию. По полученному графику оценить показатели качества системы. Изменить значение статического коэффициента  $W_1(s)$  в 10 раз в большую и меньшую стороны и для каждого измененного значения получить переходные характеристики и оценки показателей качества. Сравнить.



## Блок заданий 6.

Дана непрерывная модель популяционной динамики, описывающая взаимодействие хищников и жертв с учетом стабилизирующих факторов внутривидовой конкуренции каждой популяции [Базыкин, 2003] с эволюционными уравнениями и параметрами  $a, \alpha, \lambda, \delta$ :

$$\dot{x}_1 = ax_1 - \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \varepsilon x_1^2 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda x_2 + \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \delta x_2^2.$$

1. Построить зависимости  $x_1(t), x_2(t)$  в условиях ..  $a = \lambda = 1, \varepsilon = 0.01$  и  $\alpha = 0.4$ .
2. Построить фазовые портреты  $(x_1, x_2)$  для случаев п.1<sup>0</sup> с разной степенью точности вычисления (2 знака в мантиссе, 15 знаков в мантиссе).
3. Построить сценарий управления с целевой макропеременной  $\psi = x_1 - \rho x_2 \rightarrow 0$  и «отыграть» его в зависимости от параметра  $\delta > 0$ :

**20 вариант.** Начальные значения параметров:  $\delta = 0.1$ ; b)  $\delta = 0.130881$ ; c)  $\delta = 0.15$ ; d)  $\delta = 0.196565$ ;

**21 вариант.** Начальные значения параметров:  $\delta = 0.215$ ; f)  $\delta = 0.221$ ; g)  $\delta = 0.2395$ ; h)  $\delta = 0.12$ .

4. На одной координатной плоскости расположить фазовые траектории с управлением и без управления.

Указание к выводу формулы для регулятора.

$$\psi(t) = x_1(t) - \rho x_2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

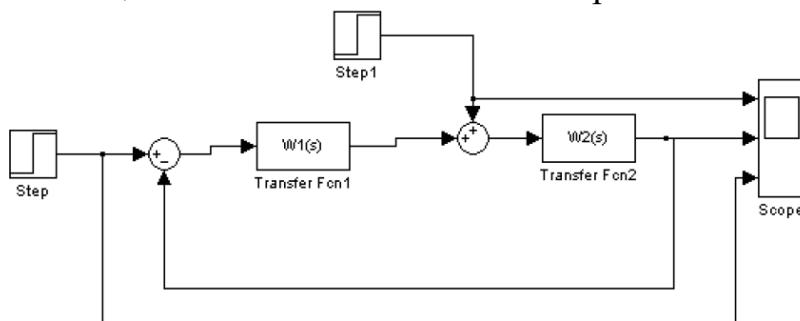
$$T\dot{\psi} + \psi = 0 \Rightarrow T\dot{\psi} + \psi = T(\dot{x}_1 - \rho \dot{x}_2) + \psi = T(f_1(x_1, x_2) + u_1 - \rho f_2(x_1, x_2)) + \psi = 0 \Rightarrow \\ u_1 = -T^{-1}\psi - f_1(x_1, x_2) + \rho f_2(x_1, x_2)$$

Часть 2.

1. Собрать схему.

| Вариант 20   | Вариант 21  |
|--|---|
| $W_1(s) \sim 90$ ;<br>$W_2(s) \sim 1/(0.1s^2 + s + 1)$ | $W_1(s) \sim 50$ ; $W_2(s) \sim 1/(0.5s^2 + s + 1)$ |

2. Установить возмущение равным нулю и снять переходную характеристику по задающему воздействию. По полученному графику оценить показатели качества системы. Изменить значение статического коэффициента  $W_1(s)$  в 10 раз в большую и меньшую стороны и для каждого измененного значения получить переходные характеристики и оценки показателей качества. Сравнить.



## Блок заданий 7.

Дана непрерывная модель популяционной динамики, описывающая взаимодействие хищников и жертв с учетом стабилизирующих факторов внутривидовой конкуренции каждой популяции [Базыкин, 2003] с эволюционными уравнениями и параметрами  $a, \alpha, \lambda, \delta$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 - \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \varepsilon x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= -\lambda x_2 + \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \delta x_2^2 + u_2.\end{aligned}$$

1. Построить зависимости  $x_1(t), x_2(t)$  в условиях ..  $a = \lambda = 1, \varepsilon = 0.01$  и  $\alpha = 0.4$ .
2. Построить фазовые портреты  $(x_1, x_2)$  для случаев п.1<sup>0</sup> с разной степенью точности вычисления (2 знака в мантиссе, 15 знаков в мантиссе).
3. Построить сценарий управления с целевой макропеременной  $\psi = x_1 - \rho x_2 \rightarrow 0$  и «отыграть» его в зависимости от параметра  $\delta > 0$ :

**22 вариант.** Начальные значения параметров: δ = 0.1; b) δ = 0.130881; c) δ = 0.15; d) δ = 0.196565;

**23 вариант.** Начальные значения параметров: δ = 0.215; f) δ = 0.221; g) δ = 0.2395; h) δ = 0.12.

4. На одной координатной плоскости расположить фазовые траектории с управлением и без.

Указание к выводу формулы для регулятора.

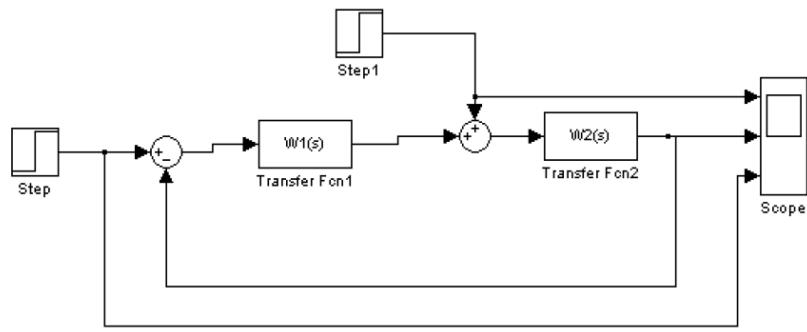
$$\begin{aligned}\psi(t) &= x_1(t) - \rho x_2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \\ T\dot{\psi} + \psi &= 0 \Rightarrow T\dot{\psi} + \psi = T(\dot{x}_1 - \rho \dot{x}_2) + \psi = T(f_1(x_1, x_2) - \rho(f_2(x_1, x_2) + u_2)) + \psi = 0 \Rightarrow \\ u_2 &= T^{-1}\rho^{-1}\psi - \rho^{-1}f_1(x_1, x_2) - f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Часть 2.

1. Собрать схему.

| Вариант 22   | Вариант 23                                    |
|--|---|
| $W_1(s) \sim 40$ ;<br>$W_2(s) \sim 0/4/(5s^2+s+1)$ | $W_1(s) \sim 50$ ; $W_2(s) \sim 1/(5s^2+s+1)$ |

2. Установить возмущение равным нулю и снять переходную характеристику по задающему воздействию. По полученному графику оценить показатели качества системы. Изменить значение статического коэффициента  $W_1(s)$  в 10 раз в большую и меньшую стороны и для каждого измененного значения получить переходные характеристики и оценки показателей качества. Сравнить.



### Блок заданий 8.

Дана непрерывная модель популяционной динамики, описывающая взаимодействие хищников и жертв с учетом стабилизирующих факторов внутривидовой конкуренции каждой популяции [Базыкин, 2003] с эволюционными уравнениями и параметрами  $a, \alpha, \lambda, \delta$ :

$$\dot{x}_1 = ax_1 - \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \varepsilon x_1^2,$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda x_2 + \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \delta x_2^2 + u_2.$$

1. Построить зависимости  $x_1(t), x_2(t)$  в условиях ..  $a = \lambda = 1, \varepsilon = 0.01$  и  $\alpha = 0.4$ .
2. Построить фазовые портреты  $(x_1, x_2)$  для случаев п.1<sup>0</sup> с разной степенью точности вычисления (2 знака в мантиссе, 15 знаков в мантиссе).
3. Построить сценарий управления с целевой макропеременной  $\psi = x_2 - x_{20} \rightarrow 0$  и «отыграть» его в зависимости от параметра  $\delta > 0$  и параметра  $x_{20}$ :

**24 вариант.** Начальные значения параметров: δ = 0.1; b) δ = 0.130881; c) δ = 0.15; d) δ = 0.196565;

**25 вариант.** Начальные значения параметров: δ = 0.215; f) δ = 0.221; g) δ = 0.2395; h) δ = 0.12.

4. На одной координатной плоскости расположить фазовые траектории с управлением и без.

Указание к выводу формулы для регулятора.

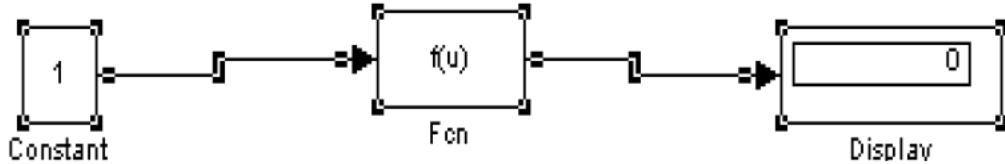
$$T\dot{\psi} + \psi = 0 \Rightarrow T\dot{\psi} + \psi = T(f_2(x_1, x_2) + u_2) + \psi = 0 \Rightarrow$$

$$u_2 = -T^{-1}\psi - f_2(x_1, x_2)$$

Часть 2.

1. Собрать схему.

| Вариант 24                   | Вариант 25                   |
|------------------------------|------------------------------|
| $(2u^2 + 3)/(3u^2 + 2u + 1)$ | $(5u^2 + 4)/(2u^2 + 3u + 4)$ |



2. Полученные результаты занести в таблицу вида

| u | f(u) |
|---|------|
|   |      |

3. Построить по точкам график  $y(u)$ , представляющий из себя статическую характеристику объекта, заданного функцией  $f(u)$ .

## Блок заданий 9.

Получить АКС определенного вида на основе принудительного возмущения и системы уравнений (2). Показать графики устойчивого и неустойчивого поведения (2) при разных параметрах целенаправленного возмущения (управления динамикой (2)).  
Дана система (универсальный генератор типа Пуанкаре):

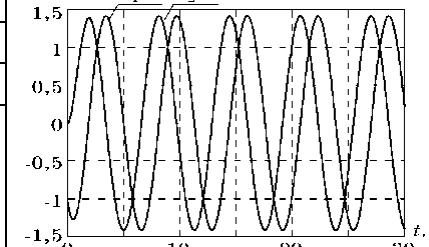
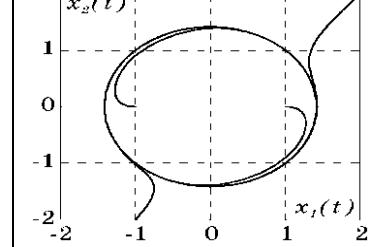
| Описание объекта  | Макропеременная. Управление.   |
|---|--|
| $\dot{x}_1(t) = x_2 + k_1 u;$<br>$\dot{x}_2(t) = -\omega^2 x_1 + k_2 u,$ <sup>(2)</sup> | $\psi = A^2 - 0,5\omega^2 x_1^2 - 0,5x_2^2,$<br>$u(x_1, x_2) = \frac{\psi}{T(k_1\omega^2 x_1 + k_2 x_2)}.$ |

$$x_1(t), x_2(t)$$

Выбором коэффициентов  $k_1, k_2$  можно обеспечить соответствующие типы колебаний:  
при  $k_1 \sim k_2$  получить генератор Пуанкаре;

при  $k_1 \gg k_2$  получить генератор Ван-дер-Поля.

Построить траектории (графики  $x_1(t), x_2(t)$  от времени) и фазовый портрет.

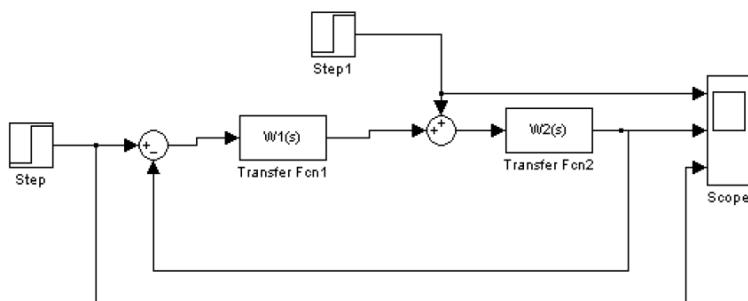
| Вариант | Тип колебаний | Фазовые траектория и портрет (пример, $k_1=k_2=1$ )                                 |  |
|---------|---------------|---|--|
| 26      | $k$           |  |  |
| 27      | $k$           |   |  |
| 28      | $k$           |   |  |

### Часть 2.

Собрать схему.

| Вариант 25   | Вариант 26  | Вариант 27   |
|--|---|--|
| $W_1(s) \sim 31;$<br>$W_2(s) \sim 1/(5s^2 + 3s + 1)$ | $W_1(s) \sim 5;$<br>$W_2(s) \sim 1/(10s^2 + 30s + 1)$ | $W_1(s) \sim 7;$<br>$W_2(s) \sim 1/(2s^2 + s + 1)$ |

Установить возмущение равным нулю и снять переходную характеристику по задающему воздействию. По полученному графику оценить показатели качества системы. Изменить значение статического коэффициента  $W_1(s)$  в 5 раз в большую и меньшую стороны и для каждого измененного значения получить переходные характеристики и оценки показателей качества. Сравнить.



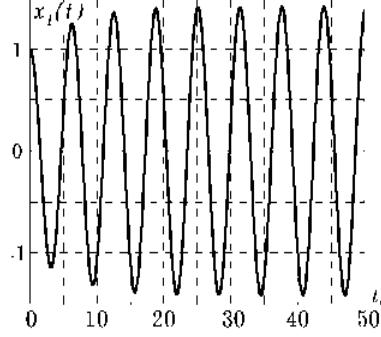
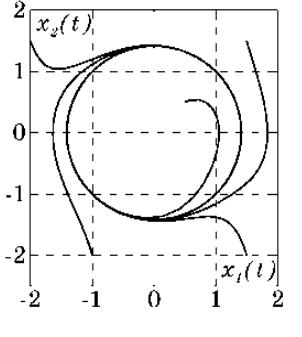
## Блок заданий 10.

Часть 1. Получить АКС определенного вида на основе принудительного возмущения и системы уравнений (1). Показать графики устойчивого и неустойчивого поведения (1) при разных параметрах целенаправленного возмущения (управления динамикой (1)).

Дана система (универсальный генератор Ван-дер-Поля–Релея–Дуффинга):

|  |  |
|--|--|
| Описание объекта                             | Макропеременная. Управление.   |
| $\dot{x}_1(t) = x_2,$<br>$\dot{x}_2(t) = u;$ | $\psi = A^2 - F(x_1) - 0,5x_2^2,$<br>$u = -\frac{dF}{dx_1} + (Tx_2)^{-1}\psi.$ |

Выбором функции  $F$  обеспечить на основе универсального управления соответствующий тип колебаний, построить фазовые траектории и портрет.

| Вариант | Тип колебаний   | Фазовые траектории и портрет (пример)   |  |
|---------|---|---|--|
| 28      | Гармонические<br>$F_g(x_1) = 0,5\omega^2 x_1^2$             |  |  |
| 9       | по Дуффингу<br>$F_D(x_1) = 0,5\omega^2 x_1^2 + \beta x_1^4$ |   |  |
| 0       | по Тоду<br>$F_T(x_1) = e^{x_1} + x_1$                       |   |  |
| 31      | Солитонные<br>$F_c(x_1) = \alpha x_1^3 - \beta x_1^2$       |   |  |

## Часть 2.

Собрать схему.

| Вариант 28   | Вариант 29                                      | Вариант 30  | Вариант 31                                     |
|--|---|---|--|
| $W_1(s) \sim 10;$<br>$W_2(s) \sim 1/(4s^2 + 3s + 1)$ | $W_1(s) \sim 20; W_2(s) \sim 1/(8s^2 + 5s + 1)$ | $W_1(s) \sim 25; W_2(s) \sim 1/(22s^2 + 19s + 1)$ | $W_1(s) \sim 25; W_2(s) \sim 1/(3s^2 + s + 2)$ |

Установить возмущение равным нулю и снять переходную характеристику по задающему воздействию. По полученному графику оценить показатели качества системы. Изменить значение статического коэффициента  $W_1(s)$  в 7 раз в большую и меньшую стороны и для каждого измененного значения получить переходные характеристики и оценки показателей качества. Сравнить.

