ЛЕКЦИЯ 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ. ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ ОТКАЗОВ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ И СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ. УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА-ЧЕПМЕНА (ИНФОРМАЦИЯ К ЛР-2+ЭКЗАМЕН)

Составитель:
д.т.н. Колесникова С.И.
skolesnikova@yandex.ru

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПОТОКОВ СОБЫТИЙ

Поток событий - последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени; наглядно изображается рядом точек с абсциссами $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$.

$T_i = \Theta_{i+1} - \Theta_i$ – интервалы между событиями.

Θ_1; $\Theta_2 = \Theta_1 + T_1$; $\Theta_3 = \Theta_1 + T_1 + T_2$;… последовательность случайных величин, моменты наступления событий в одной реализации случайного процесса.

Поток однородный - случайная последовательность событий, упорядоченных по неубыванию моментов времени.

Модель *неоднородного* потока событий –сумма нескольких однородных потоков (поток самолетов, приземляющихся на аэродроме).

Регулярный поток – события следуют друг за другом через одинаковые промежутки времени. $\tau_i = t_i - t_{i-1} = const$.

Рекуррентный поток - *поток,* для которого все функции распределения интервалов между заявками совпадают: $F(\tau_i) = F(\tau)$.

Стационарный поток – его вероятностные характеристики не зависят от выбора начала отсчета или, более конкретно, если вероятность попадания того или одного числа событий на любой интервал времени зависит только от длины интервала и не зависит от того, где этот интервал на оси времени находится.

Ординарный поток событий – вероятность попадания в элементарный интервал времени Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события, $P\{X(\Delta t)>1\} \to 0$.

Поток без последствий – число событий, попадающих в любой интервал времени τ, не зависит от того, сколько событий попало на любой другой непересекающийся с ним интервал.

МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО ПОКАЗАТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ (отсутствие последействия)

Введем события

A={к моменту *t* поступило требование (заявка)}

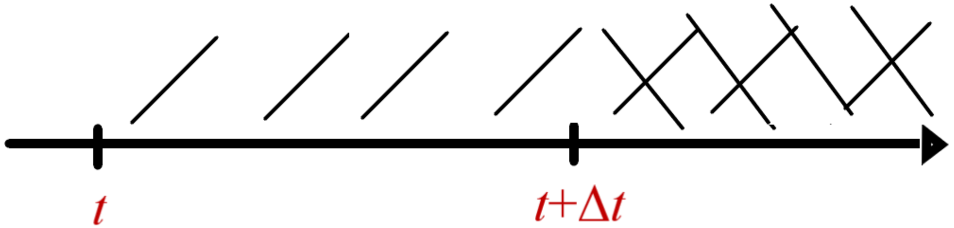
B={к моменту $t+\Delta t$ поступит требование (заявка)}

Пусть поток таков, что промежуток времени между наступлениями событий есть показательная СВ с ФР вида $F(t)=P\{\tau<t\}=1-e^{-\lambda t}$.

Тогда вероятность события *A* $P\{A\}=R(t)=P\{\tau>t\}=1-P\{\tau<t\}=e^{-\lambda t}$. (R - reliability)

Поставим задачу: определить вероятность наступления события ***B***, при условии, что наступило событие ***A***.

Другими словами: определить вероятность наступления события в момент $t+\Delta t$, при условии, что событие не наступило к моменту *t*.



$$P\{B/A\}=P\{\tau>t+\Delta t/\tau>t\}=\frac{P\{\tau>t+\Delta t\}}{P\{\tau>t\}}=\frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda\cdot\Delta t}.$$

ВЗАИМОСВЯЗЬ ПОКАЗАТЕЛЬНОГО И ПУАССОНОВСКОГО ЗАКОНОВ

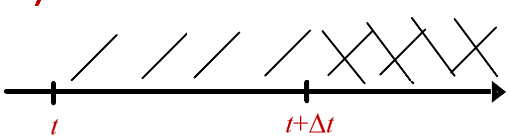
1. Условие нормировки. Сумма вероятностей числа появлений события в независимых испытаниях, вычисленных по закону Пуассона, равна единице.

2. Стационарность, ординарность, отсутствие последействия. Формула Пуассона отражает все свойства простейшего потока. Гмурман, №184.

3. Связь показательного и пуассоновского законов. $\Rightarrow$ Если длительности промежутков между поступлениями в систему последовательных требований имеют показательный закон, то случайное число требований, поступивших за время *t*, имеет распределение Пуассона с параметром λ, а процесс X(*t*) является однородным пуассоновским процессом.
$\Leftarrow$ Имеет место и обратное: если число требований ν(*t*), поступивших за время t, является процессом Пуассона с интенсивностью λ, то длительности интервалов u_k независимы и имеют одинаковое показательное распределение с параметром λ (св.5)

$$P\{X(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \quad \Longleftrightarrow \quad P\{\tau<t\}=1-\exp(-\lambda t)$$

4. Марковское свойство показательного распределения.



$$P\{B/A\}=P\{\tau>t+\Delta t/\tau>t\}=\frac{P\{\tau>t+\Delta t\}}{P\{\tau>t\}}=\frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda\cdot\Delta t}.$$

5. ФР времени м/у соседними событиями.

F(t) - d интервале времени г наблюдается хотя бы одно событие потока

$$F(t)=1-F_0(t)=1-\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda\cdot t}.$$

$F_0(t)$ - вероятность того, что в интервале [0,t) не наблюдается ни одного события потока

ВЗАИМОСВЯЗЬ ПОКАЗАТЕЛЬНОГО И ПУАССОНОВСКОГО ЗАКОНОВ

Время обслуживания требований в СМО - с.в., в стационарном режиме описывается экспоненциальным (показательным) законом распределения с интенсивностью μ (среднее число требований, выполняемых в единицу времени), обладающее свойством:

> распределение длительности оставшейся части работ по обслуживанию не зависит от того, сколько оно уже продолжалось.

Это обусловлено рядом причин:

1) отсутствием последействия;
2) простотой и удобством аналитических выражений;
3) именно так устроены многие реальные системы.

Показательное распределение времени обслуживания имеет вид:

ФР $\mathbf{F(t)=1-e^{-\mu t}}$ плотность ФР $\mathbf{f(t)= \mu e^{-\lambda t}}$

Для простейшего потока с интенсивностью λ вероятность попадания на *элементарный* (малый) отрезок времени Δt хотя бы одного события потока:

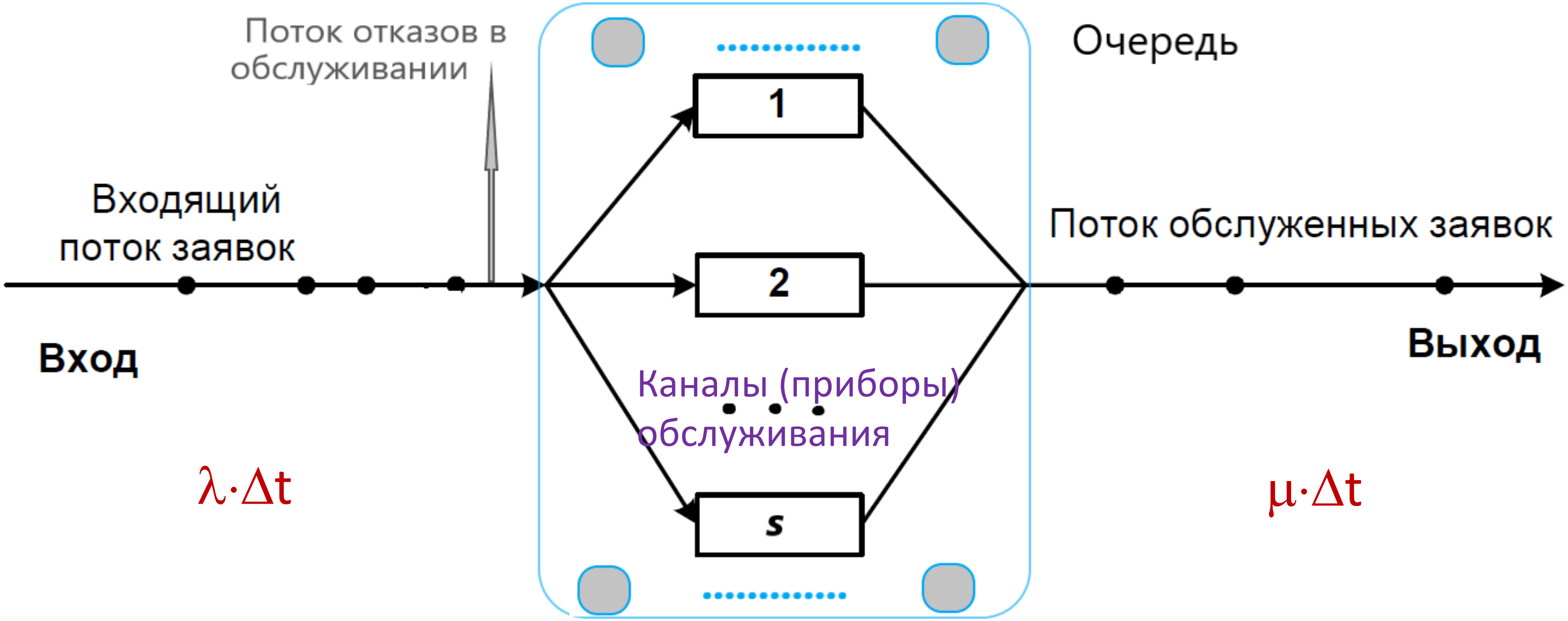
$\mathbf{F(t)=1-} e^{-\lambda \Delta t} \cong \boldsymbol{\lambda \Delta t}$ (от замены функции $e^{-\lambda \Delta t}$ двумя первыми членами ее разложения в ряд по степеням Δt)

Среднее время обслуживания одним каналом одного требования (математическое ожидание показательной с.в.

$$\mathbf{t_{обслуж}= 1/\mu}$$

Коэффициент загрузки СМО (среднее число каналов, которое должно быть для обслуживания в единицу времени всех поступающих требований) $\boldsymbol{\rho= \lambda/\mu}$.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ



Потоком событий (событий-заявок, требований) называют последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени

Предмет изучения ТМО – СМО и ее критерии эффективности (пропускная способность и др.).

Цель ТМО – выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, организации их работы, обеспечивающей требуемую эффективность функционирования СМО.

Задачи ТМО – формулы для расчета зависимостей эффективности функционирования СМО от ее параметров: потока заявок, числа каналов и политики обслуживания, правила очереди.

СУТЬ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Примеры СМО: ЭВМ, вычислительные системы, комплексы и сети передачи данных, автоматические телефонные станции, транспортные системы, промышленные предприятия и предприятия обслуживания.

Основные элементы СМО: входной поток заявок, очереди заявок, ожидающих обслуживания, каналы (приборы) обслуживания, выходной поток обслуженных заявок.

Признаки классификации СМО:

- **число каналов обслуживания (**одно- и многоканальные**),**
- **способ организации ожидания заявок (**СМО с отказами, СМО с ожиданием, СМО с очередями; с приоритетами или без приоритетов**),**
- **число фаз обслуживания (**одно- и многофазные**),**
- **тип взаимосвязи с потоками заявок (**разомкнутые (открытые) и замкнутые***).**

ПРИМЕР. Автоматизированная система управления АСУ продажей железнодорожных билетов состоит из двух параллельно работающих ЭВМ.

При выходе из строя одной ЭВМ АСУ продолжает нормально функционировать за счет работы другой ЭВМ.

Поток отказов каждой ЭВМ простейший. Среднее время безотказной работы одной ЭВМ равно 10 суткам.

При выходе из строя отказавшую ЭВМ начинают ремонтировать. Время ремонта ЭВМ распределено по показательному закону и в среднем составляет двое суток.

В начальный момент обе ЭВМ исправны.

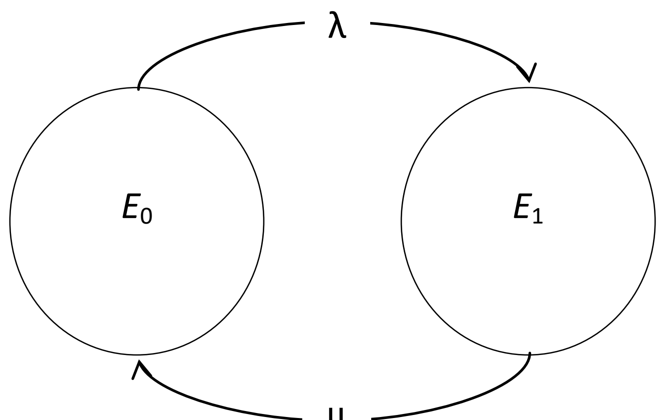
Найти среднюю производительность АСУ, если при исправности хотя бы одной ЭВМ ее производительность равна 100%, а при отказе обеих ЭВМ продажа билетов производится вручную, обеспечивая 30% общей производительности АСУ.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПОИСКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ 1-КАНАЛЬНОЙ СМО С ОТКАЗАМИ (вопрос экзамена)

Дано: система имеет один канал обслуживания, на который поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Заявка, заставшая систему занятой, сразу же покидает ее.

Найти абсолютную и относительную пропускную способность СМО и вероятность того, что заявка, пришедшая в момент времени t, получит отказ.

Решение. Система при любом $t > 0$ может находиться в двух состояниях: E_0 – канал свободен; E_1 – канал занят. Переход из E_0 в E_1 связан с появлением заявки и немедленным началом ее обслуживания. Переход из E_1 в E_0 осуществляется, как только очередное обслуживание завершится.

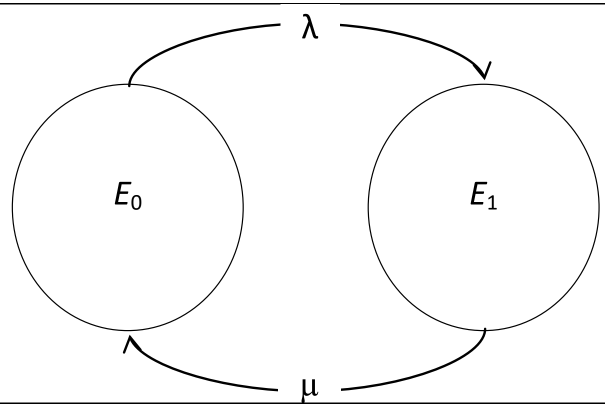


Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Выходные характеристики (характеристики эффективности) СМО получают из уравнений состояния СМО, полученных по схеме Колмогорова-Чепмена.

Обозначим вероятности состояний: $P_0(t)$ - вероятность состояния E_0, $P_1(t)$ - вероятность состояния E_1.

СМО С ОТКАЗАМИ <M/M/1/0>.
УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ



Нестационарный режим+Условие нормировки

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$
$$\frac{d}{dt}P_1(t) = \lambda P_0(t) - \mu P_1(t).$$
$$P_0(t) + P_1(t) = 1.$$

$$\Downarrow$$

$$P_0(t) = \frac{\lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad P_1(t) = 1 - P_0(t)$$

Стационарный режим$\Rightarrow$

$$0 = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$
$$0 = \lambda P_0(t) - \mu P_1(t),$$
$$P_0(t) + P_1(t) = 1.$$

$A = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$, шт/ед.времени, ***Абсолютная пропускная способность*** (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени):

$Q = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$. ***Относительная пропускная способность*** (средняя доля заявок, обслуживаемых системой

$P_{отк} = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$. ***Вероятность отказа*** (вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной)

Пример. Технологическая система состоит из одного станка. На станок поступают заявки на изготовление деталей в среднем через 0,5 часа $(\overline{t_з} = 0{,}5ч.)$. Среднее время изготовления одной детали равно $\overline{t_{об}} = 0{,}6ч$. Если при поступлении заявки на изготовление детали станок занят, то она (деталь) направляется на другой станок. Найти абсолютную и относительную пропускную способности системы и вероятность отказа по изготовлению детали.

$$\lambda = 1/\overline{t_з} = 1/0{,}5 = 2ч^{-1};\ \mu = 1/\overline{t}_{об} = 1/0{,}6 \cong 1{,}67ч^{-1};\ A = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} = \frac{2\cdot1{,}67}{2+1{,}67} = 0{,}91дет/ч;\ Q = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{1{,}67}{2+1{,}67} = 0{,}455 \cong 0{,}46.$$

Таким образом, в среднем примерно 46 % деталей обрабатываются на этом станке.

$P_{отк} = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} = \dfrac{2}{2+1{,}67} \cong 0{,}54$. В среднем примерно 54 % деталей направляются на обработку на другие станки.

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Марковский случайный процесс **-** для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Пусть в настоящий момент t_0 система находится в определенном состоянии S_0.

Пусть известны характеристики состояния системы в настоящем $t_0 \to S_0$ и все, что было при $t <$ t_0 (предысторию процесса).

Типовая постановка задачи: Предсказать будущее состояние системы при $t > t_0$ как вероятность того, что через некоторое время τ система S окажется в состоянии S_1 или останется в состоянии S_0 и т.д.

Пример марковского процесса. Система S – группа самолетов, участвующих в воздушном бою. Пусть x – количество «красных» самолетов, y – количество «синих» самолетов. К моменту времени t_0 количество сохранившихся (не сбитых) самолетов соответственно – x_0, y_0. Нас интересует вероятность того, что в момент времени $t_0+\Delta t$ численный перевес будет на стороне «красных». Эта вероятность зависит от того, в каком состоянии находилась система в момент времени t_0, а не от того, когда и в какой последовательности погибали сбитые до момента t_0 самолеты.

Процесс называется ***процессом с дискретным состоянием***, если его возможные состояния S_1, S_2, … можно заранее определить, и переход системы из состояния в состояние происходит «скачком», практически мгновенно.

Процесс называется ***процессом с непрерывным временем***, если моменты возможных переходов из состояния в состояние не фиксированы заранее, а неопределенны, случайны и могут произойти в любой момент.

В исследовании операций большое значение имеют ***марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.***

ОСНОВНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ СМО

Абсолютная пропускная способность - среднее количество заявок, которое может обслужить система в единицу времени.

Относительная пропускная способность - отношение среднего числа заявок, обслуженных СМО в единицу времени, к среднему числу всех заявок, поступивших в СМО за то же время.

Среднее число занятых каналов и коэффициент занятости - отношение среднего числа занятых каналов к общему числу каналов.

Среднее число свободных каналов и коэффициент простоя - отношение среднего числа свободных каналов к общему числу каналов.

Вероятности состояний СМО: $P_i=P(E_i)$; E_i – состояние СМО: число заявок в СМО в текущий момент равно i.

Среднее время простоя канала (свободы от обслужтвания).

Среднее время нахождения заявка в очереди.

Средняя длина очереди.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СМО С ОТКАЗАМИ И ЕЕ СВОЙСТВА СТАЦИОНАРНОСТИ. Задача на экзамене

Исходные данные. Значения параметра λ:

N-порядковый номер студента в списке,

$t_{обсл} = \frac{1}{2}N + \frac{1}{4}N \cdot l$, где l=0,3 для нечетного N и l =0,4 для четного N.

Алгоритм численного исследования режима наступления стационарности в СМО

1) Определим интенсивность выходного потока по формуле: $\boldsymbol{\mu = \frac{1}{t_{обсл}}}$

2) Построим таблицу сводных результатов, получая значения $P_0(t)$ и $P_1(t)$ по формулам

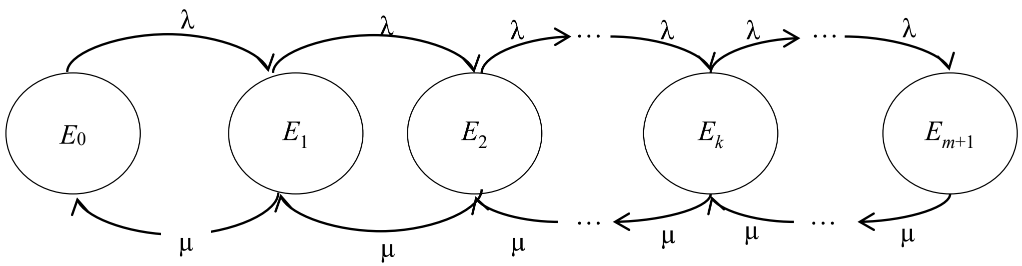
$$\boldsymbol{P_0(t) = \frac{\lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad P_1(t) = 1 - P_0(t)}$$

3) Таблицу заполняем, пока не выполнится условие $|P_0(t_n) - P_0(t_{n-1})| \le \varepsilon$ и $|P_1(t_n) - P_1(t_{n-1})| \le \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-4}$.

t	$P_0(t)$	$P_1(t)$
t_1=0		
$t_2 = t_1 + \Delta t$, где $\Delta t = 0{,}0001$		
…..		
$t_n = t_{n\ 1} + \Delta t$		

4) Сравниваем установившиеся значение $P_0(t)$ из таблицы и $P_0(t)$, полученное по «стационарной» формуле $P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$. Сделать выводы о моменте наступления стационарного режима в СМО.

ПРИМЕР 1-КАНАЛЬНОЙ СМО С ОЖИДАНИЕМ И ОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ



Граф состояний СМО **< *M* | *M* | 1 | *m*>**

Обозначим P_k - вероятность того, что в системе находится k заявок, то есть $P_k = P(E_k),\ k \geq 0$. Тогда из уравнений Колмогорова для установившегося режима получаем следующие числовые характеристики эффективности данной СМО.

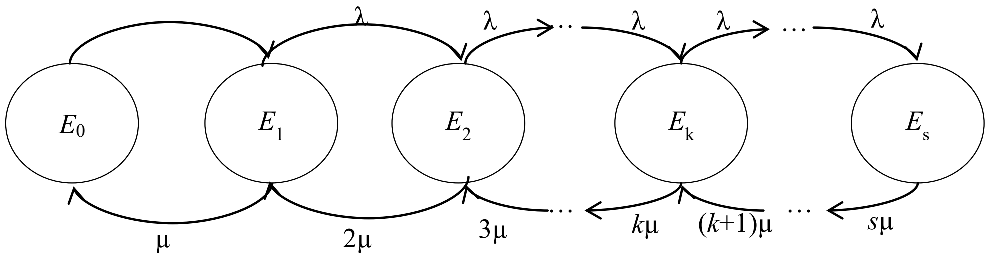
Обозначим, как и прежде приведенную интенсивность потока, или коэффициент нагрузки канала в СМО через ρ:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Вероятность того, что канал обслуживания свободен и в системе нет ни одного клиента, рассчитывается по формуле:

$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, & \rho \neq 1, \\ P_0 = \dfrac{1}{m+2}, & \rho = 1. \end{cases}$$

ПРИМЕР МНОГОКАНАЛЬНОЙ СМО С ОТКАЗАМИ



Граф состояний СМО < M | M | s | 0>

Слева направо переходит один и тот же поток – *входящий поток с интенсивностью* λ.

Если занято k каналов, и приходит новая заявка, система переходит в состояние E_{k+1}.

Справа налево поток из состояния E_k с интенсивностью $k\mu$ переходит в состояние $E_{k\text{-}1}$.

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}P_1(t) = -(\lambda + \mu)P_1(t) + \lambda P_0(t) + 2\mu P_2(t) = 0$$

…

$$\frac{d}{dt}P_k(t) = -(\lambda + k\mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t) = 0$$

…

$$\frac{d}{dt}P_s(t) = -\lambda P_s(t) + s\mu P_{s-1}(t) = 0$$

Параметр ρ - приведенная интенсивность потока: $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Расчетные формулы для вероятностей состояний СМО для установившегося режима: $P_k(t) = \frac{\rho^k}{k!}P_0(t)$, $k \geq 1$.

ТИПЫ СМО. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА на базе СМО < M | M | s | 0>.

Постановка прикладной задачи. Определить оптимальное число контролёров, которые производят проверку выпускаемого оборудования. Если контролера нет на месте, оборудование отправляется без проверки. На каждое оборудование, не прошедшее проверку, накладывается штраф. На содержание одного рабочего места необходимо 500$/год. Заработная плата контролёра составляет 7500$/год. Контролёр получает зарплату по времени, а не по факту выработки. Штраф за отказ от обслуживания составляет 4$ за один отказ. Годовой фонд времени составляет 6000 часов. Размерность интенсивностей входного и выходного потоков шт/час.

Основание алгоритма построения оптимизационной модели СМО $< M \mid M \mid s \mid 0>$

Формула для расчета затрат:

$$I(s) = C_{ef} C_1 + C_2 M_1 + C_3 (S - M_1) + C_4 \cdot T \cdot P_s \cdot \lambda \qquad (2.1)$$

где $I(s)$ – затраты на работу s-каналов;

C_{ef} - коэффициент эффективности капиталовложения (0,15$/год);

C_1 - затраты на рабочее место (500$/год);

C_2 - затраты на заработную плату контролёра ОТК (7500$/год);

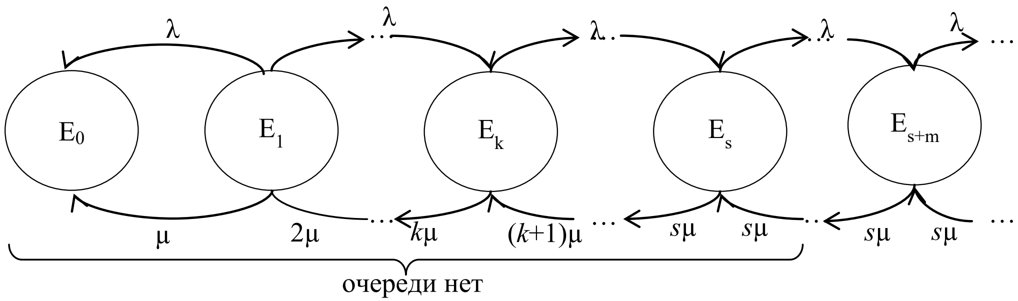
C_3 – затраты на простой контролёра ОТК (7500$/год);

C_4 – затраты на отказ от обслуживания (4$/шт.);

M_1 – среднее число занятых каналов ($\bar{z}$);

T –годовой фонд рабочего времени (6000 часов);

ТИПЫ СМО. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА на базе СМО < M | M | s | ∞>.



Граф состояний СМО $< M \mid M \mid s \mid \infty >$

Постановка прикладной задачи. Определить оптимальное число причалов промышленного речного порта, принимающих биржи с сыпучим материалом. Поток поступающих бирж простейший с интенсивностью 0,5 барж/сутки. Время разгрузки баржи имеет показательный закон с параметром 0,5 барж/сутки. Цена оборудования одного причала 100000$. Текущие затраты на содержание одного причала 400$/сутки при его использовании и 200$/сутки при его простое. Затраты на содержание баржи, ожидающей разгрузки, составляет 1000$/сутки, если время ожидания меньше 2 суток, и 1600$/сутки, если время ожидания больше 2 суток.

Входные значения: параметр λ=0,5 барж/сутки, μ=0,5 барж/сутки.

Основание алгоритма построения модели. $\boldsymbol{I(S) = C_{ef} C_1 S + C_2 M_2 + C_3 (S - M_2) + C_4 M_1 T}$

$I(s)$ – затраты на работу порта; C_{ef} - коэффициент эффективности капиталовложения (0,15$/год);

C_1 - цена оборудования одного причала(100000$); C_2 - текущие затраты на содержание причала (400$/сутки); C_3 – текущие затраты на содержание причала в простое(200$/сутки);

C_4 – затраты на содержание баржи, ожидающей разгрузки;M_1 – средняя длина очереди ($\bar{v}$);

M_2 –среднее число занятых приборов ($\bar{z}$); T –годовой фонд рабочего времени (365 суток).

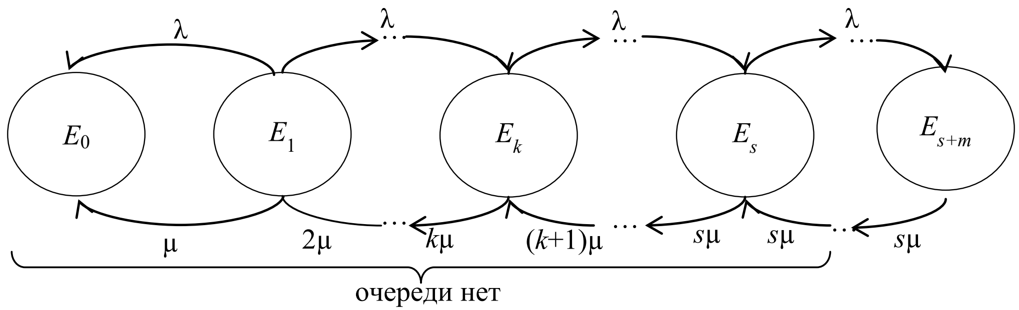
$$C_4 = C'_4 * P\{\beta < \beta_0\} + C''_4 * P\{\beta > \beta_0\}$$

C'_4 - затраты на содержание баржи, ожидающей разгрузки менее β_0(1000$/сут.);

C''_4 - затраты на содержание баржи, ожидающей разгрузки более β_0(1600$/сутки);

β – время ожидания баржой разгрузки; β_0 – время ожидания, после которого стоимость содержания баржи в ожидании увеличивается (2 суток).

ТИПЫ СМО. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА на базе СМО < M | M | s | m>.



Граф состояний СМО < M | M | s | m>

***Постановка прикладной задачи*.** В отделе нагрева металла в цехе крупной плавки часть работ происходит в режиме «копильника»: если слиток застает все печи занятыми, то он помещается в «копильник», где ему обеспечивается нужная температура. Если все печи и «копильники» заняты - он отправляется на склад. Но при этом для того, чтобы его заново разогреть, потребуются дополнительные растраты в размере 100$ на его разогрев. Поступающий поток простейший с λ=10шт/сутки. Интенсивность нагрева слитков перед ковкой (распределение показательное) μ=2шт/сутки. В цехе имеется 10 печей, из которых часть должна быть для плавки, а часть для «копильника». Цена одной печи 100000$. Текущие затраты 50$ в сутки на обслуживание одной печи. Затраты на простой печи 30$ сутки.Затраты на содержание слитков в «копильнике» 60$ сутки на один слиток. Фонд времени в году 6000 часов. Найти оптимальное количество «копильников»(m) и печей для плавки (s).

Основание алгоритма построения модели.

$$\boldsymbol{I(s) = C_{ef}\cdot C_1\cdot s + C_2\cdot (s - M_2)\cdot T + C_3\cdot M_2\cdot T + C_5\cdot T\cdot \lambda\cdot P_{s+m} + C_4\cdot M_1\cdot T}$$

$I(s)$ – затраты на работу системы; C_{ef} - коэффициент эффективности капиталовложения (0,15$/год);
C_1 - цена одной печи (100000$); C_2 - текущие затраты на содержание одной печи (50$/сутки);
C_3 – текущие затраты на содержание одной печи в простое(30$/сутки); C_4 – затраты на содержание слитка в «копильнике»(60$/сутки шт.); C_5 – затраты на разогрев отосланных на склад слитков (100$/сутки шт.);
M_1 – средняя длина очереди ($\overline{v}$); M_2 –среднее число приборов свободных от работы; T –годовой фонд рабочего времени (6000 часов).

СЕТИ СМО (СеМО)

Сеть массового обслуживания (СеМО) есть совокупность конечного числа N обслуживающих узлов, в которой циркулируют заявки, переходящие в соответствии с маршрутной матрицей (матрицей передач) из одного узла в другой.

Отдельные СМО есть самостоятельные части системы, связи между СМО образуют структуру СеМО. Требования, циркулирующие по СеМО, есть составляющие материальных потоков (сообщения (пакеты) в коммуникационной сети, задания в мультипроцессорных системах, контейнеры грузопотоков и т.п.).

Сеть называется *экспоненциальной*, если входящие потоки требований в каждую СМО пуассоновские, а времена каждого этапа обслуживания, реализуемого на любой СМО сети, имеют экспоненциальное распределение.

Для содержательного представления СеМО используется граф, вершины которого (узлы) соответствуют отдельным СМО, а дуги отображают связи между узлами.

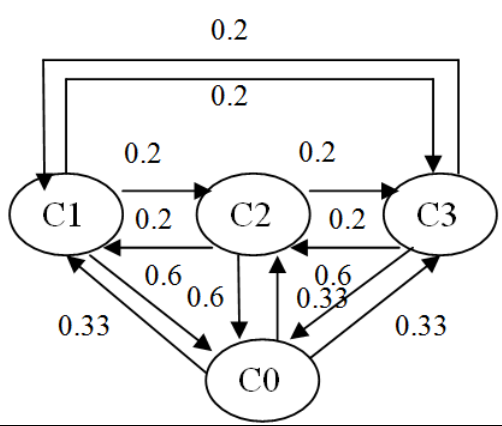
Переход заявок между узлами происходит мгновенно в соответствии с переходными вероятностями $\theta_{ij}, i, j = \overline{1,M}$, θ_{ij} - вероятность того, что заявка после обслуживания в узле i перейдет в узел j. Если узлы непосредственно не связаны между собой, то $\theta_{ij} = 0$. Если из i-го узла переход только в один какой-либо узел j, то $\theta_{ij} = 1$:

$$\Theta = \begin{array}{c|cccc|} 0 & \theta_{00} & \theta_{01} & \dots & \theta_{0M} \\ 1 & \theta_{10} & \theta_{11} & \dots & \theta_{1M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M & \theta_{M0} & \theta_{M1} & \dots & \theta_{MM} \end{array}.$$

СЕТИ СМО

Постановка прикладной задачи. В цеху функционируют три различных стадии обслуживания поступающих станков: калибровка-1, калибровка-2 и калибровка-3. Станки, которые прибывают в цех в среднем через каждые 10 часов, направляются с одинаковой вероятностью в одно из этих отделений. После обслуживания около 60% станков покидают цех, остальные с равной вероятностью могут направиться на любую из оставшихся стадий обслуживания. Обслуживание на 1-й стадии длится в среднем 5 часов, на второй - 40 часов и на третьей - 20 часов.

СМО1- реализация процесса калибровки-1,
СМО2 - реализация процесса калибровки-2,
СМО3 - реализация процесса калибровки -3.



$$(C_0,C_0)(C_0,C_1)(C_0,C_2)(C_0,C_3$$

$$\Theta = \begin{array}{c|cccc|} 0 & 0 & 0.33 & 0.33 & 0.33 \\ 1 & 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 2 & 0.6 & 0,2 & 0 & 0.2 \\ 3 & 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{array}$$

Матрица передач по условию

Условием стационарности сети является выполнение неравенства:

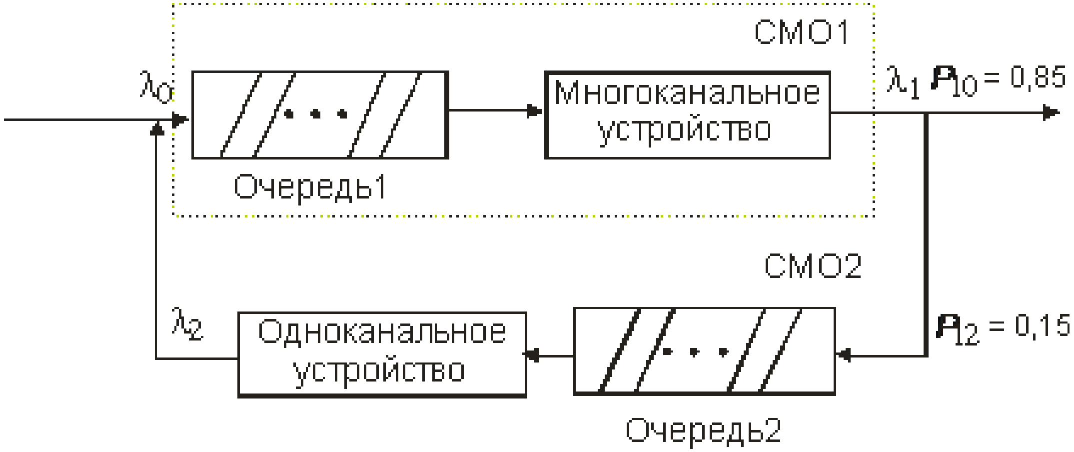
$$\frac{\lambda_i}{s_i \cdot \mu_i} < 1, i = 1,2,3.$$

$$\lambda_0 = 0.6\lambda_1 + 0.6\lambda_2 + 0.6\lambda_3,$$
$$\lambda_1 = 0.33\lambda_0 + 0.2\lambda_2 + 0.2\lambda_3,$$
$$\lambda_2 = 0.33\lambda_0 + 0.2\lambda_1 + 0.2\lambda_3,$$
$$\lambda_3 = 0.33\lambda_0 + 0.2\lambda_1 + 0.2\lambda_2.$$

Собранные устройства после сборки проходят серию испытаний на станции технического контроля. Отбракованный телевизор отравляют в цех наладки. После наладки устройство возвращают на станцию контроля и снова проверяют. Телевизионные приемники попадают на станцию контроля в среднем каждые 5±2 мин. На станции находятся два контролера. Каждому из них требуется в среднем 9±3 мин на проверку изделия. Известно, что *85%* устройств проходят проверку успешно и попадают в цех упаковки. Остальные попадают в цех наладки, в котором работает один наладчик. Наладка требует в среднем 30±10 мин.

Оценить, сколько мест на стеллажах контроля и в цехе наладки необходимо иметь. Определить убытки, связанные с наладкой устройств, если затраты на наладку одного телевизора составляют 5 руб.

Модель проведения контроля и наладки устройств как открытая СеМО:



СЕТИ СМО. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛВС

Одноканальные СМО с ожиданием. Один обслуживающий прибор с бесконечной очередью. Является наиболее распространенной при моделировании. С той или иной долей приближения с ее помощью можно моделировать практически любой **узел ЛВС**.

Одноканальные СМО с потерями. Один обслуживающий прибор с конечным числом мест в очереди. Если число заявок превышает число мест в очереди, то лишние заявки теряются. Этот тип СМО может быть использован при **моделировании каналов передачи в ЛВС**.

Многоканальные СМО с ожиданием. Несколько параллельно работающих обслуживающих приборов с общей бесконечной очередью. Используется при моделировании групп абонентских терминалов **ЛВС, работающих в диалоговом режиме.**

Многоканальные СМО с потерями. Несколько параллельно работающих обслуживающих приборов с общей очередью, число мест в которой ограничено. Эти СМО, как и одноканальные с потерями, часто используются для моделирования **каналов связи в ЛВС**.

Одноканальные СМО с групповым поступлением заявок. Один обслуживающий прибор с бесконечной очередью. Перед обслуживанием заявки группируются в пакеты по определенному правилу.

Сервер обрабатывает запросы, поступающие с АРМ с интервалами, распределенными по показательному закону со средним значением $T_1=2$ мин.

Вычислительная сложность алгоритма запросов распределена по нормальному закону со средним $E_1=6\cdot10^7$ оп. и СКО $\sigma=4\cdot10^5$ оп.

Производительность сервера обработки запросов $V=2\cdot10^5$ оп/сек.

Построить алгоритм анализа данной модели СОТОП.
Получить соотношения на характеристики эффективности данной модели.
Указать, в каком случае модель будет стационарной.
Разработать алгоритм имитационной данной модели.
На основе имитационной модели определить вероятности обработки запросов за время T=1 час.
Исследовать зависимость вероятности обработки запросов от длительности интервала их поступления, вычислительной сложности запросов и производительности сервера.
Рассчитать число прогонов для наихудшего случая.