# ЛЕКЦИЯ 8.
## ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ -
## ОСНОВНОЙ ПРИНЦИП КОНСТРУИРОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ.
## УКАЗАНИЯ К ЛР-5

**Составитель:**
**проф., д.т.н. Колесникова С.И.**
*skolesnikova@yandex.ru*

# ФУНКЦИОНАЛ. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ. ЛАГРАНЖИАН

В общем случае математическая модель реального объекта, процесса или системы представляется в виде системы функционалов $\Phi_i(X, Y, Z, t) = 0$,

Где X – вектор входных переменных, $X = [X_1, X_2, X_3, ..., X_N]'$,

Y – вектор выходных переменных, $Y = [Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_N]'$,

Z – вектор внешних воздействий, $Z = [Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_N]'$

t – координата времени.

Законы движения системы, зависящие от выбранной траектории ***x*(*t*)**

Лагранж: Аналитическая механика. 1788

Механическая система движется по траектории $x(t)$, в которой функционал $S$ называемый **действием** достигает своего минимума

$$S(x) = \int_{t_0}^{t_1} \boxed{L(t, x(t), \dot{x}(t))}\ dt,$$

где $L$ — **лагранжиан** системы (разность кинетической и потенциальной энергии). Соответствующие уравнения Эйлера-Лагранжа описывают эволюцию системы во времени.

# ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

**1744 Пьер Луи де Мопертюи** (фр. 18 век) - понятие «**количества действия**»
«Согласование различных законов природы, которые до сих пор казались несовместимыми» (название науч.труда)

***Количество Действия*** = произведение Массы Тел на их скорость и на расстояние, которое они пробегают.

Принцип Мопертюи : истинная траектория частицы отличается от любой другой тем, что действие для неё является минимальным.

**Универсальный принцип**:
**«Когда в природе происходит некоторое изменение, Количество Действия, необходимое для этого изменения, является наименьшим возможным»**
Мопертюи отстаивал **телеологический характер** своего принципа и прямо утверждал, что “*экономия действия*” в природе доказывает существование Бога

Природа «таинственным» образом перебирает все возможные пути движения системы и выбирает из них самый лучший

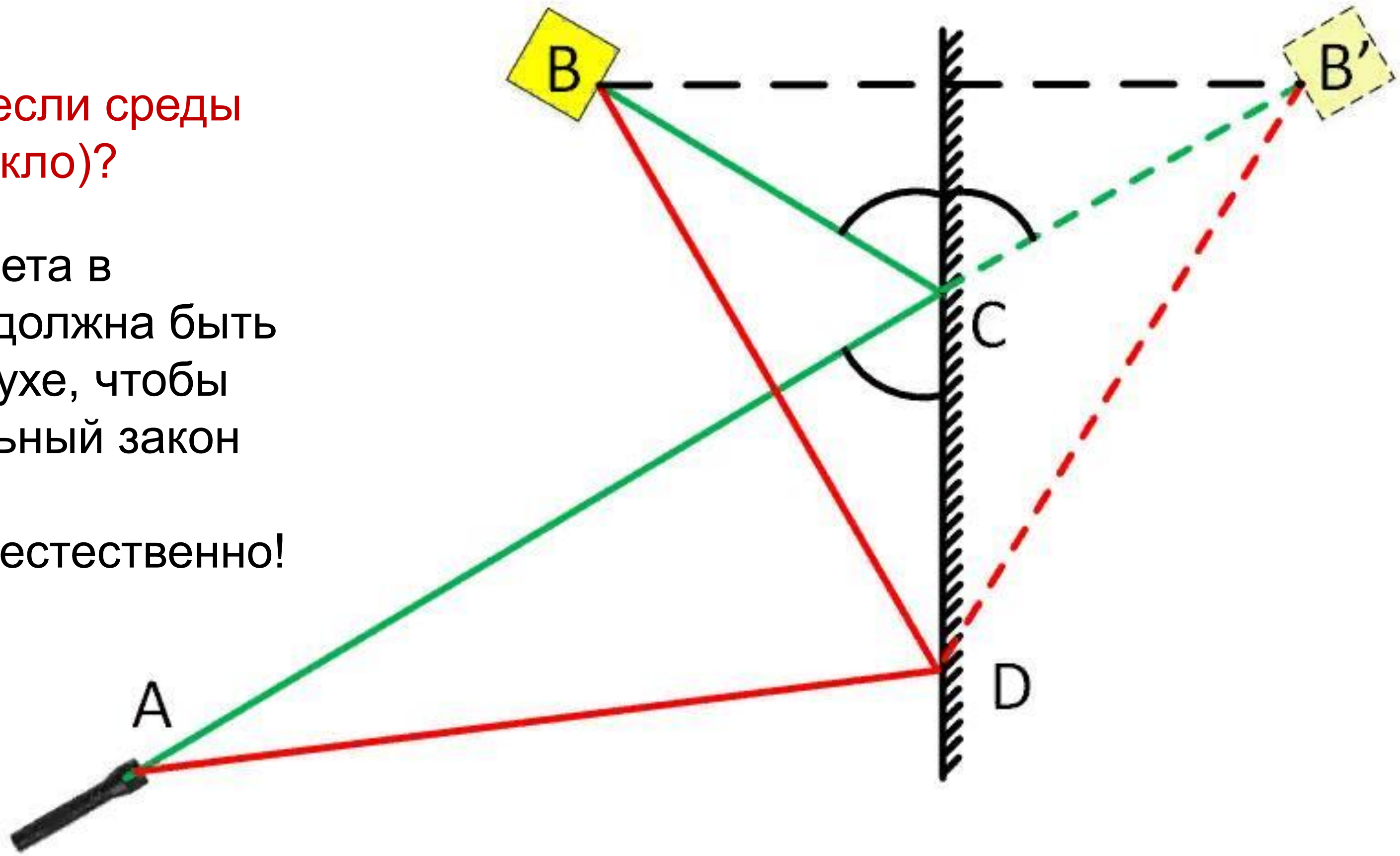
# ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ: история вопроса

Галилей (1564-1642): тела, на которые не действуют никакие силы, двигаются по прямым линиям, то есть по кратчайшему пути. По прямым линиям распространяются и световые лучи.

При отражении свет «выбирает» кратчайший путь - зеленый, при котором угол падения равен углу отражения.
Любой другой путь (красный), будет длиннее.

Как движется луч, если среды разные (воздух-стекло)?

Декарт: скорость света в плотном веществе должна быть больше, чем в воздухе, чтобы получался «правильный закон преломления».
Ферма: это противоестественно!



# Принцип Мопертюи в явлениях распространения, отражения и преломления света

**ПРИРОДА**: перебор всевозможных вариантов поведения (движения) системы и выбор из них самого рационального (оптимального), требующего МЕНЬШЕ УСИЛИЙ (ЭНЕРГИИ ?).

◊ Тела, на которые не действуют никакие силы, двигаются по прямым линиям (кратчайшему пути).

◊ **Принцип Ферма: свет распространяется по такому пути, для прохождения которого ему требуется минимальное время.**

При отражении свет *в однородной среде* (воздухе) добирается из одной точки в другую кратчайшим путем. Как движется свет в неоднородной среде?

Например, в более плотной, чем воздух, среде?

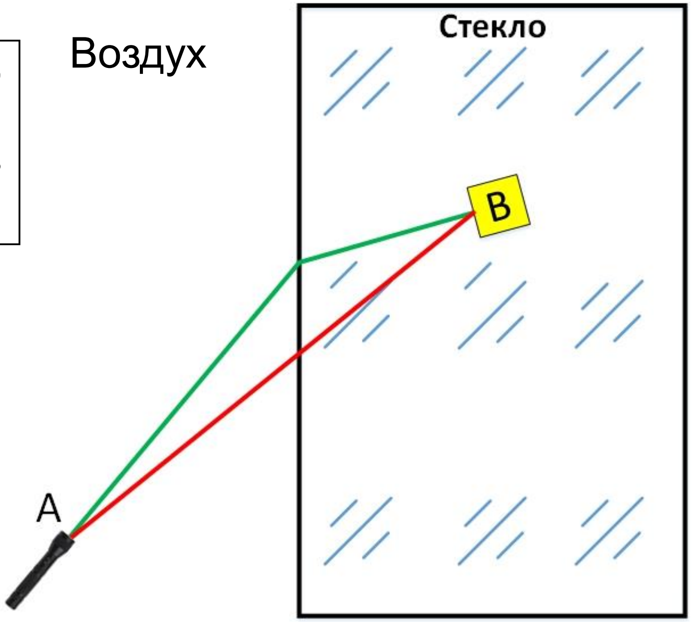
Версия Декарта: скорость света в веществе должна быть больше, чем в воздухе, чтобы получался правильный закон преломления.

Версия Пьера Ферма: скорость света в плотном веществе (в стекле) меньше, чем в воздухе.

Доказал: **свет преломляется так, чтобы достичь место назначения за минимальное время.**

**Зеленым цветом - путь**, по которому в действительности двигается световой луч (А и В - в разных средах).

Путь - красным цветом-кратчайший, но не самый быстрый, потому что свету приходится часть пути проходить в стекле, а в нем его скорость меньше. Самым быстрым является именно реальный путь прохождения светового луча.



# ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ: интерпретация

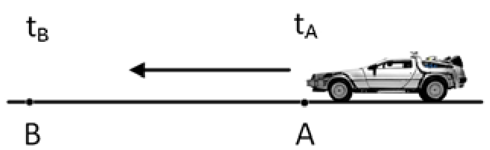
**(1) УСЛОВИЯ: расход топлива пропорционален кинетической энергии (квадрату скорости)**.

**(2) УСЛОВИЯ: (1)+возможность двигаться по воздуху.**

**(3) УСЛОВИЯ: автоматическое самопроизводство топлива равно mgh (потенциальной энергии автомобиля)+(2).**

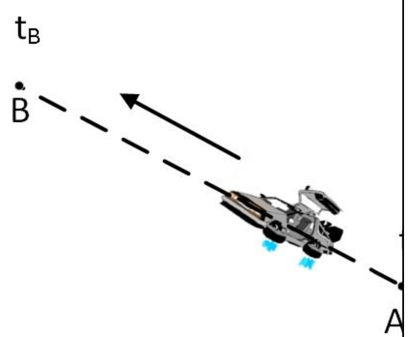
Потребление топлива в момент t = кинетической энергии - потенциальной энергии автомобиля (минус, т.к. аппарат вырабатывает топливо при наборе высоты, а не тратит).

**ЗАДАЧА. Из п.А попасть в п. В за указанное время, с минимальной потерей в топливе.**



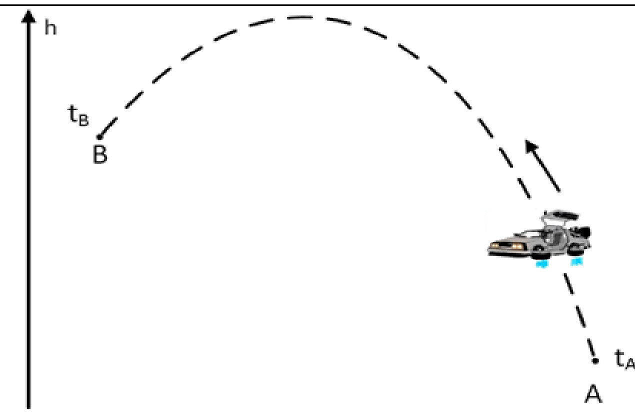

Самый энергетически экономный способ езды – ехать **РАВНОМЕРНО И ПРЯМОЛИНЕЙНО** с постоянной скоростью из п. А (в момент $t_A$), такой, чтобы оказаться в пункте В в точно назначенное время $t_B$.

**Соответствие свободному движению тела на плоскости** (на которое другие силы не действуют)




Наиболее экономичный способ- лететь равномерно и прямолинейно, чтобы оказаться в точке В в назначенное время $t_B$.

**Соответствие свободному движению тела в трехмерном пространстве**.




Оптимально: набрать высоту, задержаться, произведя побольше топлива, а затем спуститься в точку В (по параболе: общая выработка топлива за счет набора высоты перекроет дополнительные расходы топлива на увеличение длины пути и увеличения скорости).

*С такой скоростью и траекторией летит брошенный камень т.о., чтобы он, вылетев из точки А в момент времени $t_A$, попал в точку В точно в момент времени $t_B$.* **Соответствие свободному движению тела в поле тяжести Земли**.

Лагранжиан ***L*** показывает насколько много «топлива» потребляет тело в данный момент времени. Для тела, движущегося в потенциальном поле, Лагранжиан равен его кинетической энергии минус потенциальной энергии.

«Действие» - аналог общего количества израсходованного топлива за все время движения, или значение Лагранжиана, накопленное за все время движения (интеграл).

Принцип наименьшего действия состоит в том, что тело двигается таким образом, чтобы действие (которое зависит от траектории движения) было минимальным. Заданы начальное и конечное условия, т.е. где тело находится в момент времени $t_A$ и в момент времени $t_B$.

Примеры. Колебания тела на подвесе, маятника, траектории полета планет вокруг Солнца…. Форма движения такова, чтобы минимизировалось общие затраты энергии («топлива») или ДЕЙСТВИЕ.

**ЛР-5**

Проблема осторожного энергоэффективного управления: указать объекту цель и подтолкнуть так, чтобы объект достиг цели согласно принципу наименьшего действия.

# ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА И ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Функция Лагранжа ***L*(φ*ᵢ*)** — функция, описывающая развитие системы в обобщенных координатах. Это означает:
пространственные координаты и время + внутренние степени свободы, колебания и вращения, электрические и др. параметры.
В современной физике также работают не с самой функцией Лагранжа, а с ее плотностью, которую именуют лагранжианом.

С функцией Лагранжа связан принцип наименьшего действия $S$: $\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_i} = 0,$

где $\varphi_i$ — обобщенные координаты (например, координаты частиц),
s — множество параметров системы,
физическая величина S, называемая действием, связана с функцией Лагранжа через интеграл:

$$\mathcal{S}[\varphi_i] = \int \mathcal{L}[\varphi_i(s)]\, d^n s$$

Действие является мерой движения системы, а принцип наименьшего действия демонстрирует, что природа «экономна» по своей сути и не допускает лишних движений.

В классической механике функцию Лагранжа обычно определяют в виде разности кинетической и потенциальной энергии механической системы

$$\frac{1}{2} m\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x})$$

x — вектор координат частицы массы m,
V — потенциальная энергия поля в точке, определяемой вектором x

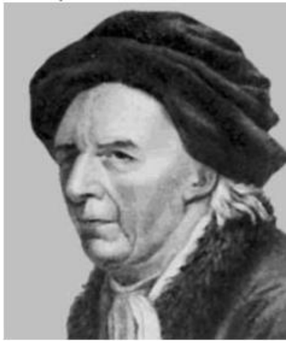
## ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ. ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА. История вопроса

$$J\left(y\right)=\int_{t_0}^{t_1} F\left(t, y(t), y'(t)\right) dt \xrightarrow[y]{} extr$$

Экстремали функционала $J(y)$ следует искать на решениях некоторого ДУ 2-го порядка (**уравнение Эйлера (Эйлера-Лагранжа)**). Уравнение Эйлера является следствием принципа Ферма (очень легкое доказательство!).

**История вопроса**.

1. 1750- Задача об изохроне (др.-греч. ἴσος «равный» + χρόνος «время»): определить кривую, по которой тяжёлая частица попадает в фиксированную точку за фиксированное время, независимо от начальной точки. Получено уравнение (впоследствие ур. Э-Л).
2. Лагранж решил эту задачу в 1755 году, отослал решение Эйлеру. ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ О БРАХИСТОХРОНЕ.
3. Переписка учёных привела к созданию вариационного исчисления (термин предложил Эйлер в 1766 году).
4. принцип стационарного действия, или принцип Уильяма Гамильтона: вариация равна нулю в стационарной точке.



Эйлер (1707-1783)

Лагранж (1736 - 1813)

Гамильтон (1805 - 1865)

**Брахистохрона** (от греч. βράχιστος «кратчайший» + χρόνος «время») — кривая скорейшего спуска. Задача о её нахождении была поставлена в июне 1696 года Иоганном Бернулли

# КЛАССИЧЕСКАЯ ПРОСТЕЙШАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Лагранж: Аналитическая механика. 1788

Механическая система движется по траектории $x(t)$, в которой функционал $S$ называемый **действием** достигает своего минимума

$$S(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\ dt,$$

где $L$ — **лагранжиан** системы (разность кинетической и потенциальной энергии). Соответствующие уравнения Эйлера-Лагранжа описывают эволюцию системы во времени.

**ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ - очень удобная математическая модель описания того, почему система ведёт себя так, а не иначе.**

Л.Эйлер

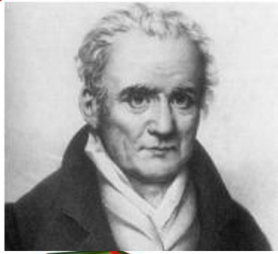
Ж.Лагранж

Другими словами:

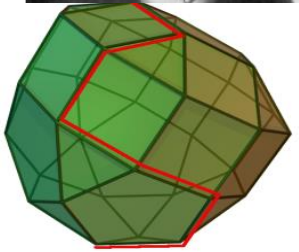
**ДЛЯ ЛЮБОГО ПОВЕДЕНИЯ ОБЪЕКТА (ДВИЖЕНИЯ, ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ,…) СУЩЕСТВУЕТ ФУНКЦИОНАЛ S(x), ДОСТИГАЮЩИЙ МИНИМУМА НА ЭТОМ ВИДЕ ДВИЖЕНИЯ**

Реальная траектория тела всегда будет стационарной

# ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ: ПРИМЕРЫ ОБЛАСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ



**1) ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА МОНЖА (19 В.)** Как перевести груз со складов в разные места назначения с наименьшими затратами?



**2) ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ Л.В. Канторовича** (30-50 гг. 20 в.) Найти минимум линейной функции на выпуклом множестве. (Нобелевская премия по экономике).

**3) ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ.** Найти функцию управления, выводящую объект в целевое состояние с минимальной затратой на управление.

**4) ЗАДАЧА ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ. Т**ребуется найти линию наименьшей длины, соединяющую две заданные точки на некоторой поверхности.

5) **ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**, Роль геодезических в четырехмерном пространстве-времени играют уравнения движения материальной точки. В частности, геодезической с нулевой "длиной" является уравнение движения частицы со скоростью света. Геометрия пространства зависит от реального распределения масс.

.................................................................................................

## ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ: интерпретация энергетическая. Задача вариационного исчисления. Действие

Функция **Лагранжа -** аналог интенсивности потребления топлива для тел; ее производная **лагранжиан** L(F); - показывает насколько много «топлива» потребляет тело в данный момент времени.

Для тела, движущегося в потенциальном поле: **L= K-P.**

**Задать ЦЕЛЬ и Критерий!**

Действие - общее количество израсходованной энергии за все время движения, т.е. значение лагранжиана, накопленное за все время движения.

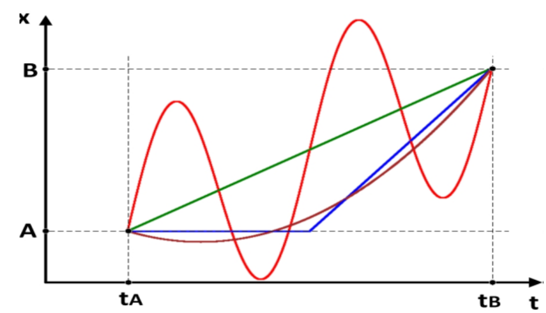
**Принцип наименьшего действия** состоит в том, что тело (*в определенных условиях*) ведет себя т.о., чтобы действие (зависящее от траектории движения) было минимальным в граничных условиях (местоположения тела в начальный и конечный моменты времени).

Если система состоит из нескольких тел, то лагранжиан **L= ∑K-∑P.**

Все тела будут согласованно двигаться так, чтобы действие всей системы при таком движении было минимальным.

**Постановка задачи.** *(Эйлер, Лагранж).*

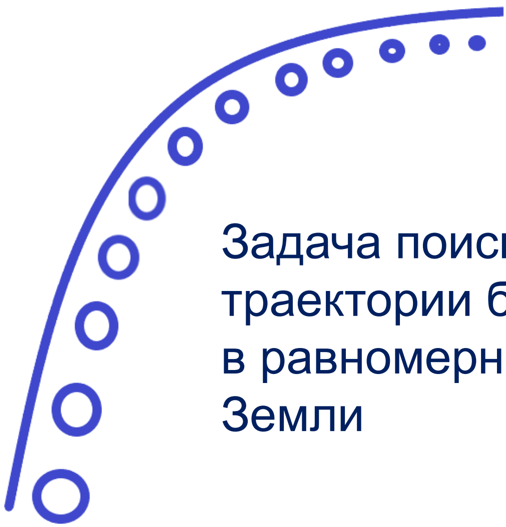
Ищется функция $x(t)$, на которой функционал




$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\ dt \to extr,\ \ x(t_0) = x_0,\ \ x(t_1) = x_1$$

достигает экстремума.

# ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ: интерпретация философии вопроса



Задача поиска формы траектории брошенного шара в равномерном поле тяжести Земли

$$S = \text{Action} = \int_{t_A}^{t_B} K(t)\,dt \to \min,$$

$$1)\ x(t_A) = x_A;$$

$$2)\ x(t_B) = x_B.$$

**Утверждение.** Пусть *первая оптимальная траектория* полета получена из законов физики и <u>соответствует реальной траектории свободного шара</u>, на который не действуют никакие силы и для которого соблюдены граничные условия в виде:

1) в момент времени $t_A$ шар находился в точке A (с координатой $x_A$);

2) в момент времени $t_B$ шар находился в точке B (с координатой $x_B$).

$$\text{Act} = \int_{t_A}^{t_B} K(t)\,dt$$

*Вторая оптимальная траектория* получена из математической задачи нахождения траектории с заданными граничными условиями 1) и 2), для которой действие минимально.

*Действие* - **в отсутствии каких-либо сил, действующих на шар**, это число равняется общей *накопленной кинетической энергии* $S = Act$ за все время его движения в промежуток времени между $t_A$ и $t_B$ .

**Принцип наименьшего действия утверждает: траектории совпадают.**

# ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ: интерпретация

Принцип наименьшего действия. Для движения шара в равномерном поле тяжести Земли: заменить кинетическую энергию на разность кинетической и потенциальной энергии.
**Лагранжиан (функция Лагранжа) = действие**.
Функция Лагранжа содержит всю необходимую информацию о динамических свойствах системы.

$$S = \mathrm{Act} = \int_{t_A}^{t_B} \left(K(t) - P(t)\right) dt,$$

$$1)\ x(t_A) = x_A;$$

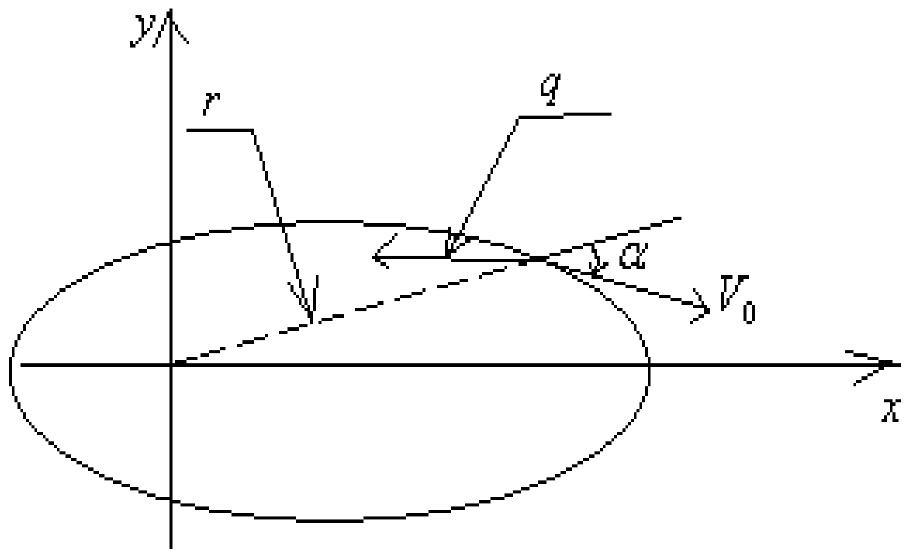
$$2)\ x(t_B) = x_B.$$

**Пример лагранжиана**. Для тела, двигающегося в потенциальном поле (например, в гравитационном Земли), функция Лагранжа равна: **L=K(v)–P(x,y,z).**
Кинетическая энергия **K(v)** зависит от скорости тела **v**, а потенциальная **P(x,y,z)** - от его положения **(x,y,z).**
*В аналитической механике* всю совокупность координат, определяющих положение системы, обычно обозначают одной буквой ***q***.
Для шара, свободно двигающегося в поле тяжести, ***q*=(x,y,z)**.

Закон Ньютона можно сформулировать не в виде F=ma, а т.о:
средняя кинетическая энергия минус средняя потенциальная энергия достигает своего самого наименьшего значения на той траектории, по которой предмет двигается *в действительности* от одного места к другому.

# ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. ЗАДАЧА ЧАПЛЫГИНА

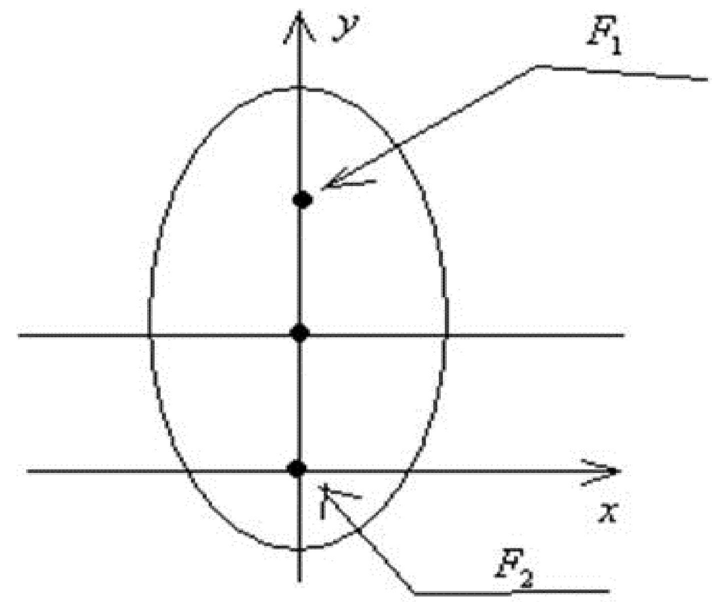
***Задача Чаплыгина***. Определить замкнутую кривую, по которой должен двигаться *центр масс летательного аппарата*, чтобы за время $T$ облететь наибольшую площадь, если задана постоянные скорости ветра $q$ и летательного аппарата $V_0$.




***Справка***. Площадь области, ограниченной замкнутой кривой $\Gamma$ (гладкой, кусочно-непрерывной). Пусть $\Gamma$ задана параметрически $\bar{r}=\{(x(t),y(t)),t\in[0,T]\}$.

Площадь соответствуюшей области =S,

$$S=\frac{1}{2}\int_0^T(xy'-yx')dt \longrightarrow max$$




***Искомая траектория*** - **эллипс**, один из фокусов которого расположен в начале координат, а большая ось перпендикулярна направлению ветра.

# ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ: в точных областях знаний

"Объяснить как можно большее количество фактов как можно меньшим числом исходных положений"

И. Ньютон

| МЕХАНИКА | ТЕРМОДИНАМИКА | ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА |
|---|---|---|
| принцип наименьшего действия | принцип максимума энтропии | принцип скорейшего пути Ферма (путь наименьшего времени) |

Теории, завершившие свое развитие, имеют сходную структуру, дедуктивные связи имеют единый общий принцип - оптимальности, экстремальный или вариационный принцип.

Основными законами природы могут считаться лишь те, которые остаются неизменными в любой системе отсчета.
Этому требованию отвечают лишь экстремальные принципы.
Основные законы любой науки должны иметь экстремальную форму

Пример. Понятия и законы, лежащие в основании ньютоновской физики, не являются абсолютными: они изменяются при переходе от одной системы отсчета к другой

# ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ: в других областях знаний

**"…понять эмпирическую закономерность как логическую необходимость"**

А. Эйнштейн

Бритва Оккама — методологический принцип, получивший название от имени английского монаха-францисканца, философа-номиналиста Уильяма из Оккама. В кратком виде он гласит: «**Не следует множить сущее без необходимости**»

Occam Learning: при прочих равных условиях более короткое объяснение наблюдаемых данных должно быть предпочтено более длинному объяснению.

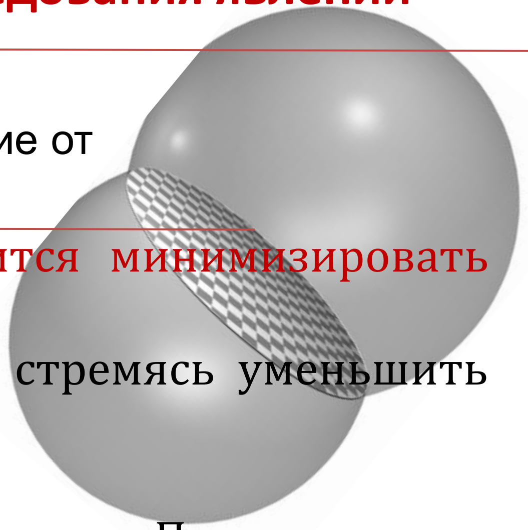
Системы поддержки принятия решений в экологии, биологии, медицине,….
Моделирование ситуаций по принципу «что будет, если…»

TYPE OF OPTIMIZING FUNCTIONAL

| OBJECT | MACROVARIABLE |
|---|---|
| $\dot{x}_j(t) = f_j(x_1,\ldots,x_n),\ j=\overline{1,n-1},$ | $\psi := \psi(\mathbf{x}(t)) = 0,\ \mathbf{x}(t) := (x_1(t),\ldots,x_n(t))$ |
| $\dot{x}_n(t) = f_n(x_1,\ldots,x_n) + u.$ | $\Phi = \int_0^\infty \left(\psi^2 + T^2\dot{\psi}^2\right)dt \to \min_u$ |

# ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ – инструмент исследования явлений

Проблема **двойного пузыря:** описать наименьшее по площади поверхности тело, ограничивающее два заданных объема (в отличие от одного объема, как в изопериметрической задаче).



**Самоорганизация -** любая физическая система стремится минимизировать свою энергию:

1) шар, находящийся на склоне горы, покатится вниз, стремясь уменьшить потенциальную энергию;
2) электрический конденсатор постепенно разрядится;
3) мыльная пленка попытается уменьшить свою энергию. Поверхностное натяжение, чем больше площадь поверхности, тем больше энергия пленки⇒ пленка стремится обладать геометрией с минимальной площадью поверхности, оптимизируя любые изгибы и стыки….

Подмеченные закономерности: в мыльной пене пленки «стыкуются» друг с другом строго тройками, под углом 120 градусов; на пересечении таких плоскостей формируются так называемые «границы Плато»; они тоже пересекаются между собой - только четверками, под углом равным 109,5 градуса (это угол, под которым из центра тетраэдра видны его вершины). Как отметил Плато, любые другие конфигурации в мыльной пене неустойчивы.

**Жозеф Плато: для построения физически минимальной поверхности для заданного пространственного контура достаточно:**
**- сделать каркас из проволоки;**
**- окунуть его в мыльный раствор.**

Ж.Плато (1801-1883), Бельгия

1970-х получено доказательство с помощью геометрической теории меры.

**Ищется функция $y(x)$, на которой функционал вида $J(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$, достигает своего глобального экстремума.**

**Теорема. Уравнение Эйлера-Лагранжа.** Для того чтобы функционал

$$J(y(u))=\int_{t_0}^{t_1} F(t, y(u(t)), y'(u(t)))dt,$$

определенный на множестве непрерывно дифференцируемых функций $D=\{y(t)\}$, удовлетворяющих граничным условиям $y(t_0)=y_0$, $y(t_1)=y_1$, достигал на функции $y(t)$ экстремума, необходимо, чтобы эта функция $u(t)$ удовлетворяла уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0. \qquad \Rightarrow \quad u(t)$$

Интегральные кривые дифференциального уравнения Эйлера называются экстремалями. Уравнение Эйлера в развернутом виде после взятия полной производной $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$ и вспомогательного обозначения (для читабельности)

$$\tilde{F}:=\frac{\partial F}{\partial y'}, \tilde{F}=\tilde{F}(t, y(t), y'(t)), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}+\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}y'+\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y'}y''-\frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

# ЛИТЕРАТУРА


1. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? – М.: Просвещение, 1967г.
2. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Физматлит, 1975г.
3. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. – М.: Физматгиз, 1966г.
4. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. Библиотечка «Квант», вып. 56 – М.: Наука, 1986 г.
5. Шарыгин Д. Миф о Дидоне и изопериметрическая задача. «Квант» №1, 1997г
6. https://habr.com/ru/post/426253/
7. https://habr.com/ru/post/420865/
8. http://dep805.ru/education/portal/4/to/pz8_4tochm.pdf
9. http://pedagogika.snauka.ru/2013/02/1407
10. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 488 с.
11. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1984. – 228 с.
12. Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселёв А.И. Вариационное исчисление(задачи и упражнения). – М.: Наука, 1984. – 191 с.
13. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах в 2 т. – М.: Высшая школа, 1986 – т. 2. – 414 с.
14. Вуколов Э.А. и др. Сборник задач по математике для втузов. – М.: Наука, 1984. – 606 с.