
**ЛЕКЦИИ 11-12. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ.
СИНХРОНИЗАЦИЯ АКС КАК ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ (УКАЗАНИЯ К ЛР-5)
МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ**

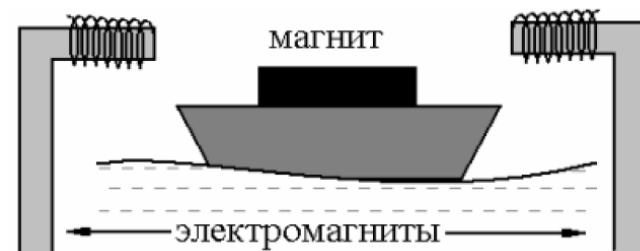
Составитель:
д.т.н. Колесникова С.И.
skolesnikova@yandex.ru

Колебательные системы: актуальность моделирования

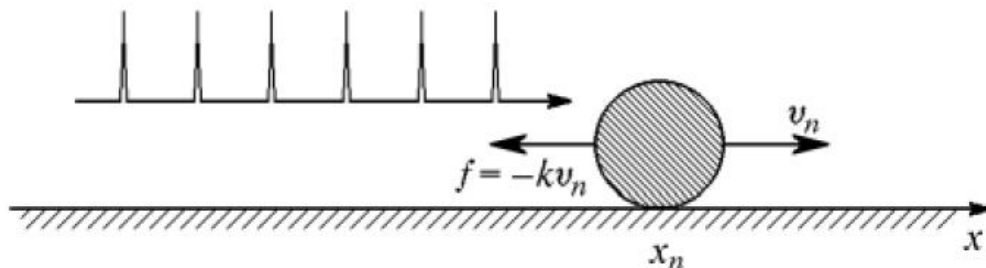
1. Пример физического явления: на поверхности вязкой жидкости находится лодочка с закрепленным на ней магнитом. Если рядом расположить электромагниты, питаемые короткими импульсами тока, то отображение, задающее координаты лодочки через интервалы времени, равные периоду следования импульсов, будет представлять собой отображение Эно

$$x[n+1] = 1 - rx[n]^2 + y[n]$$

$$y[n+1] = bx[n]$$



$$\sum P(x) \delta(t - nT)$$



2. Пусть вдоль оси x может двигаться частица массы m , причём её движению препятствует сила трения, пропорциональная скорости, $f = -kv$.

Пусть далее на частицу действует с периодом T импульсные точки, интенсивность которых зависит от координаты частицы в момент толчка, т. е. передаваемый импульс даётся функцией $P(x)$.

Получено, что пространственное распределение воздействующей на частицу импульсной силы $f(x) = 1 - ax^2$, и $\exp(-kTm\wedge) = b$, тогда

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - by_n, \quad y_{n+1} = x_n$$

Математическая и физическая модели линейного гармонического осциллятора

- Тело массы m , колеблющееся горизонтально под действием силы упругости пружины $F = -kx$ (k — коэффициент упругости, x — смещение тела относительно положения равновесия, знак “минус” означает, что упругая сила направлена противоположно направлению смещения x) согласно 2-му закону Ньютона запишем

$$ma = -kx \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = -kx$$

Обозначим:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{уравнение гармонического осциллятора}$$

Решением является:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Собственная частота осциллятора

Области использования осцилляторов

Аналитика рынка

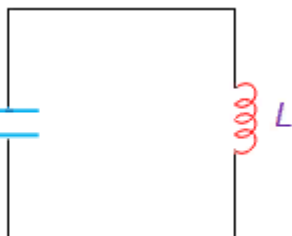
- Торговля по зонам осциллятора: зоны перекупленности-продажи.
- Биржи: измерения динамики движения цены; ценового диапазона.

Техника, наука

- Сварочный осциллятор (импульсный возбудитель дуги).
- Квантовый осциллятор и ротатор
- Волны света и звука
- Маятники, колеблющийся электрический контур
- Физика, электроника, оптика, механика, астрофизика.....

Осциллятор — система, в которой наблюдаются колебательные процессы («осциллятор» (лат. oscillare — «качаться»)); развитие О. с 30-х годов 20 в.

Электрические колебания в контурах

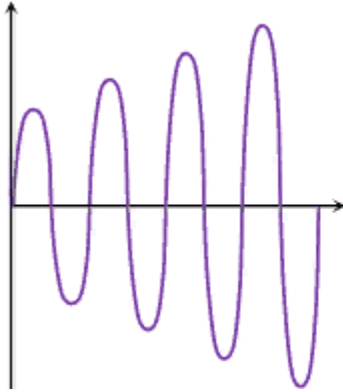


Конденсатор начинает разряжаться через индуктор, что является следствием превращения его электрической энергии в электромагнитное поле.

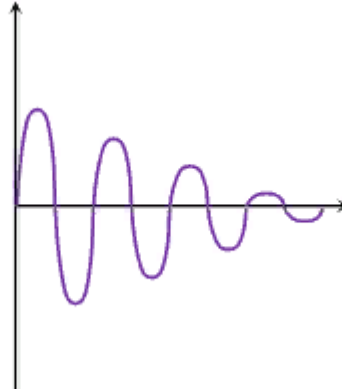
Когда конденсатор разряжается полностью, в схеме нет электрического тока. После этого аккумулированное электромагнитное поле генерирует противоэлектродвижущую силу, что происходит из-за движения тока через схему в том же направлении, что и ранее.

Затем конденсатор заряжается с отрицательной полярностью, благодаря чему и получается осциллирующая форма волны на выходе.

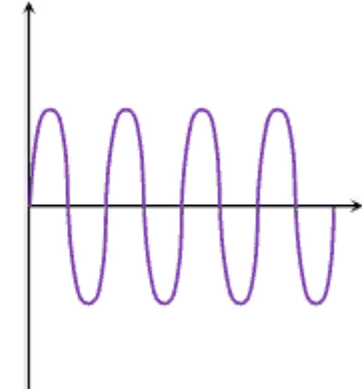
Формы осцилляций



Поступающей энергии больше, чем потерянной, амплитуда колебаний возрастает.



Затухающие колебания, благодаря взаимопревращения двух форм энергии, подвержены эффекту потери энергии из-за сопротивления схемы. Амплитуда этих колебаний постоянно уменьшается, стремясь к нулю.



Поступающая энергия контролируется, равна потерянной энергии для получения колебаний с постоянной амплитудой.

Осцилляторы широко применяются в кварцевых часах, радиоприемниках, компьютерах, металло-детекторах, оглушающем оружии, инверторах, ультразвуковых и радиочастотных приспособлениях,.....

АКС-колебательный контур – источник э-м колебаний

Катушка
индуктивности



Энергия
магнитного поля
катушки

Конденсатор

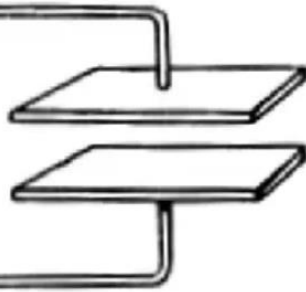
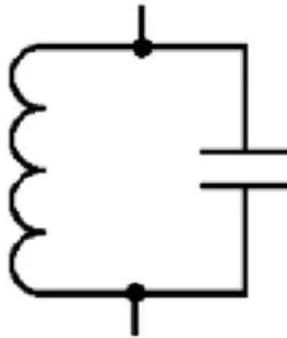


Схема реального КК – источник
вынужденных колебаний с частотой
напряжения

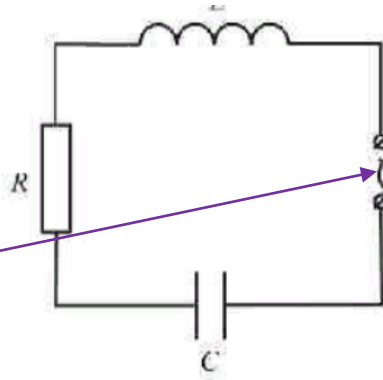
Схема идеального КК –
источник свободных
незатухающих
колебаний



$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Колебательный контур (КК) — система, в которой могут происходить свободные электромагнитные колебания (при отсутствии в ней источника электрической энергии). В КК возникает резонансная частота контура (формула Томсона).

Резонансные контуры используются как полосовые и режекторные фильтры — в усилителях, радиоприёмниках, а также в различных устройствах автоматики.



Питающее
переменное
напряжения

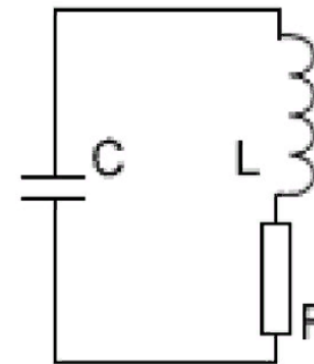


Схема реального КК –
источник затухающих
колебаний

Резистор

На самолётах Ил-62М, Ил-76 и Ту-154М установлены блоки регулирования частоты для поддержания постоянства частоты напряжения генератора при изменении оборотов двигателя

ЛР-5. Часть 1. Конструирование АКС как динамической системы

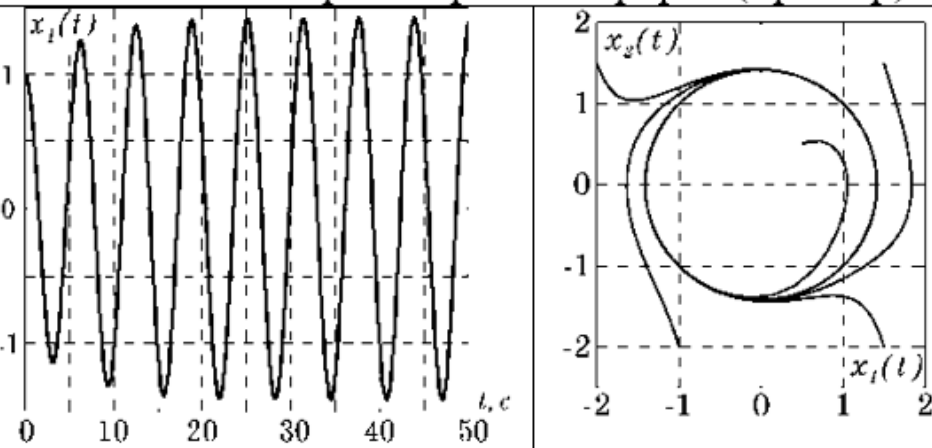
Цель ЛР: построение компьютерной модели АКС на основе математической модели.

Часть 1.

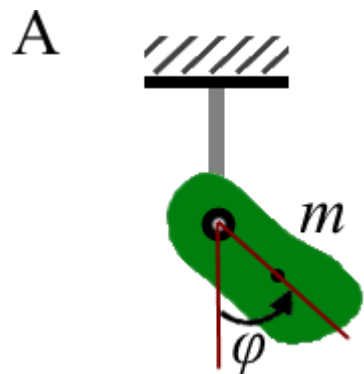
Блок заданий 1. Дана система (универсальный генератор Ван-дер-Поля–Релея–Дуффинга):

Описание объекта	Макропеременная. Управление.
$\dot{x}_1(t) = x_2,$ $\dot{x}_2(t) = u;$	$\psi = A^2 - F(x_1) - 0,5x_2^2,$ $u = -\frac{dF}{dx_1} + (Tx_2)^{-1}\psi.$

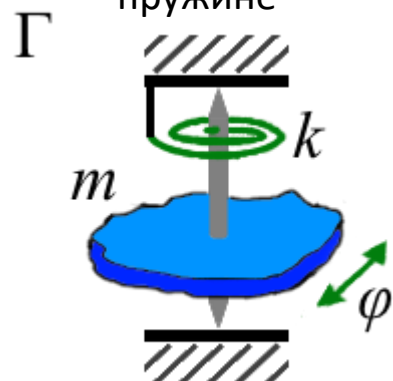
Выбором функции F обеспечить на основе универсального управления соответствующий тип колебаний, построить фазовые траекторию и портрет.

Вариант	Тип колебаний	Фазовые траектория и портрет (пример)	
1	Гармонические $F_r(x_1) = 0,5\omega^2 x_1^2$		
2	по Дуффингу $F_d(x_1) = 0,5\omega^2 x_1^2 + \beta x_1^4$		
3	по <u>Тоду</u> $F_T(x_1) = e^{x_1} + x_1$		
4	<u>Солитонные</u> $F_c(x_1) = \alpha x_1^3 - \beta x_1^2$		

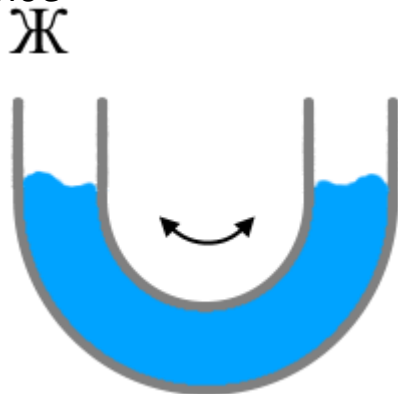
физический маятник



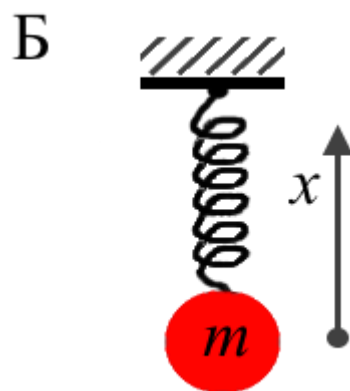
крутящийся маятник на пружине



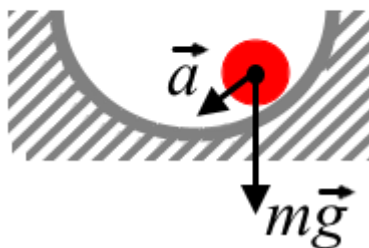
колебания жидкости в U-колбе



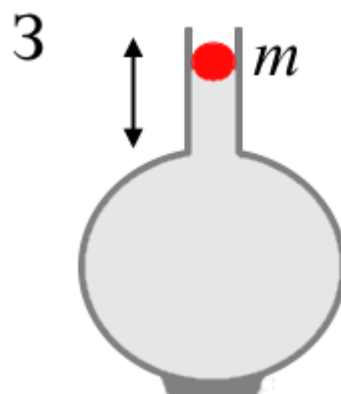
вертикальный пружинный маятник



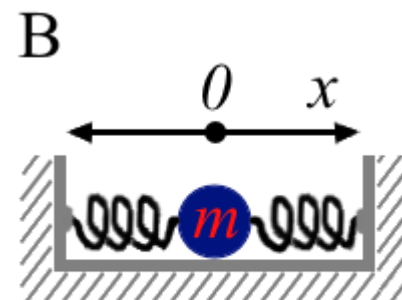
катающийся маятник



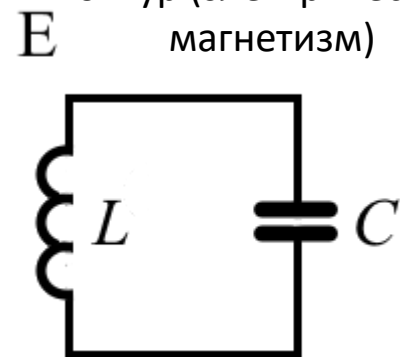
колебания тела при сдавливании газа



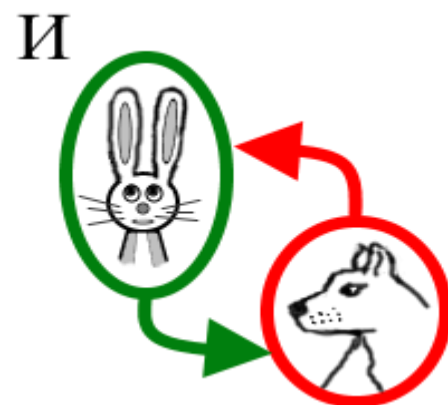
горизонтальный пружинный маятник



параллельный LC-контур (электричество и магнетизм)



модель хищник-жертва

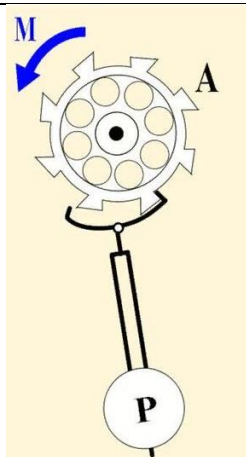


СФЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ АКС

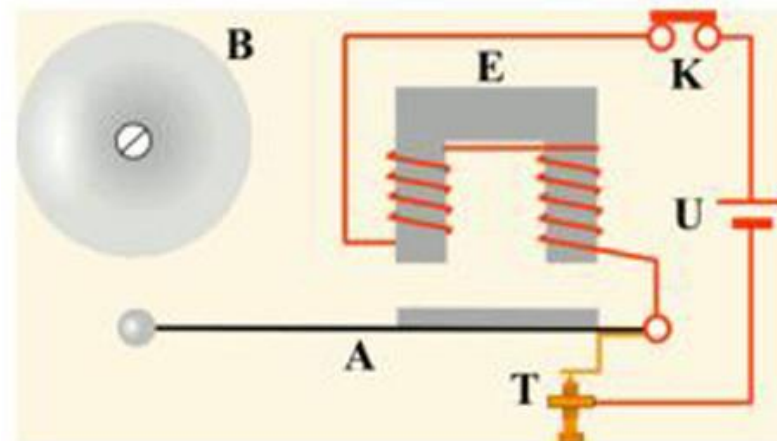
Автоколебательные системы -

колебательные системы, совершающие незатухающие колебания за счёт действия источника энергии, не обладающего колебательными свойствами (постоянное, равномерное, неперiodическое влияние).

- часовые механизмы (незатухающие колебания маятника за счёт постоянного действия тяжести заводной гири),
- смычковые и духовые музыкальные инструменты (колебания скрипичной струны под воздействием равномерно движущегося смычка...),
- паровая машина,
- механические устройства с вибрационными эффектами (флаттер и бафтинг элементов конструкции летательного аппарата),
- электронные генераторы при постоянном напряжении питания,
- биологические (работа сердца и легких),
- астрономические (движение планет)



При замыкании цепи кнопкой (К) электромагнит (Е) притягивает ударник, ударник бьёт по звонку и размыкает цепь питания электромагнита, механически связанным с ним контактом (Т), ударник (А) возвращается назад и процесс повторяется.



$$m \cdot x'' + r \cdot x' + k \cdot x + A\tau \cdot \sin \omega \cdot (t - \tau) = 0.$$

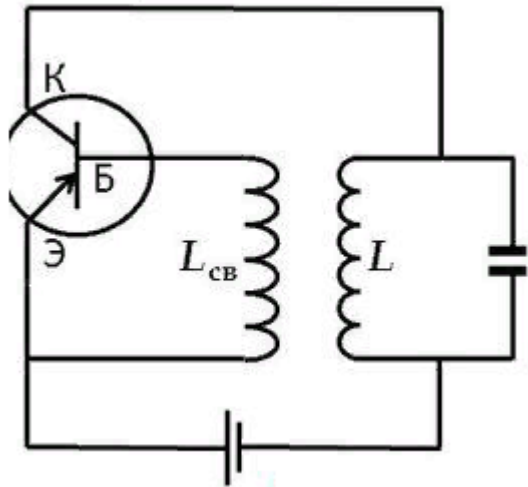
АКС: ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Свободные (или собственные) — это колебания в системе под действием внутренних сил после того, как **система выведена из состояния равновесия** (в реальных условиях свободные колебания всегда *затухающие*).

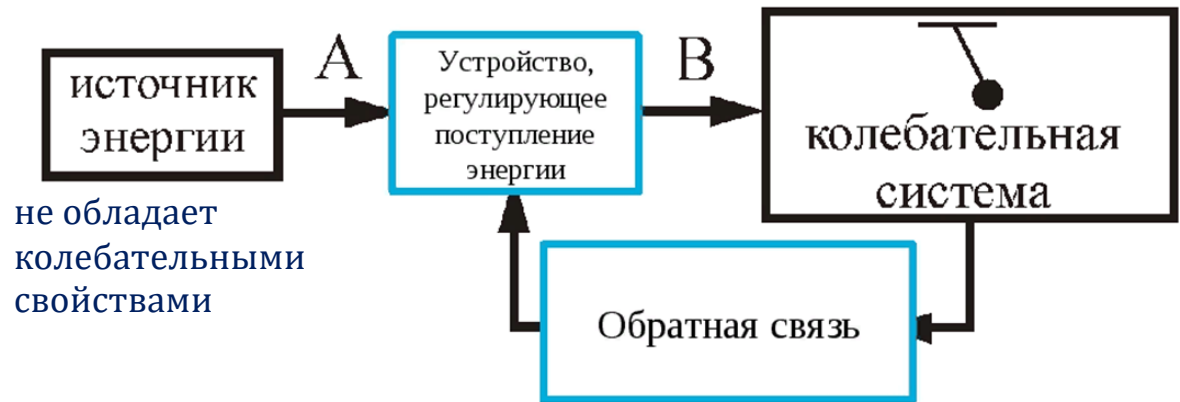
Вынужденные колебания: вызваны **периодическим внешним воздействием** и происходят с частотой этого воздействия.

Автоколебания (А.А. Андронов, 1928): вызваны **непериодическим внешним воздействием**, возникновение и частота определяются внутренними свойствами самой АКС. При этом частота становится почти равной резонансной (колебания *незатухающие*).

ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ АКС



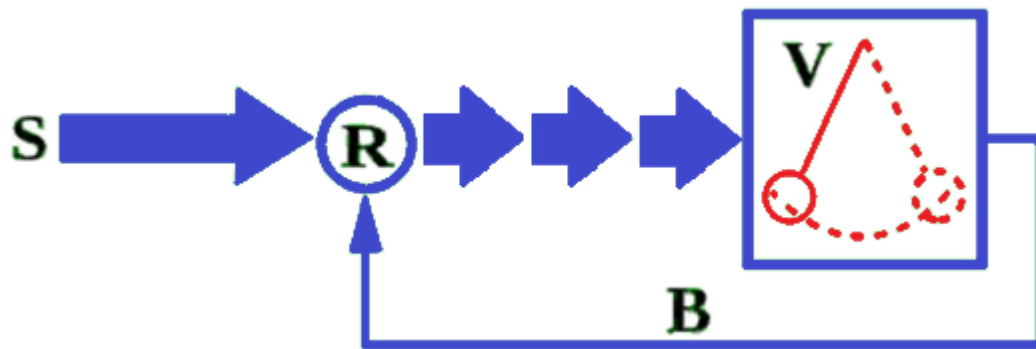
Периодическим поступлением энергии в колебательную систему от источника энергии по каналу АВ управляет сама колебательная система посредством обратной связи.



- Колебательный контур – элемент, в котором происходят свободные колебания.
- Аккумулятор – источник энергии для восполнения потерь энергии.
- Транзистор – клапан, регулирующий поступление энергии в колебательный контур.
- Катушка – устройство для осуществления обратной связи.

(*)

ОБЩАЯ СХЕМА КАЧЕСТВЕННОГО ОПИСАНИЯ ВСЕХ АКС



S — источник **постоянного** (непериодического) воздействия;
R — нелинейный регулятор, преобразующий постоянное воздействие в переменное (например, в прерывистое во времени), которое и «раскачивает» *осциллятор V*;

V — колеблющийся элемент (элементы) системы, а колебания осциллятора через **обратную связь B** управляют работой **регулятора R**, задавая **фазу** и **частоту** его действия.

Диссипация (рассеивание энергии) в АКС возмещается за счёт поступления в неё энергии из источника постоянного воздействия, благодаря чему автоколебания не затухают.

Блок заданий 1. Дана система (универсальный генератор Ван-дер-Поля–Релея–Дуффинга):

Описание объекта	Макропеременная. Управление.
$\dot{x}_1(t) = x_2,$ $\dot{x}_2(t) = u;$	$\psi = A^2 - F(x_1) - 0,5x_2^2,$ $u = -\frac{dF}{dx_1} + (Tx_2)^{-1}\psi.$
Выбором функции F обеспечить на основе универсального управления соответствующий тип колебаний, построить фазовые траекторию и портрет.	

Нелинейный регулятор

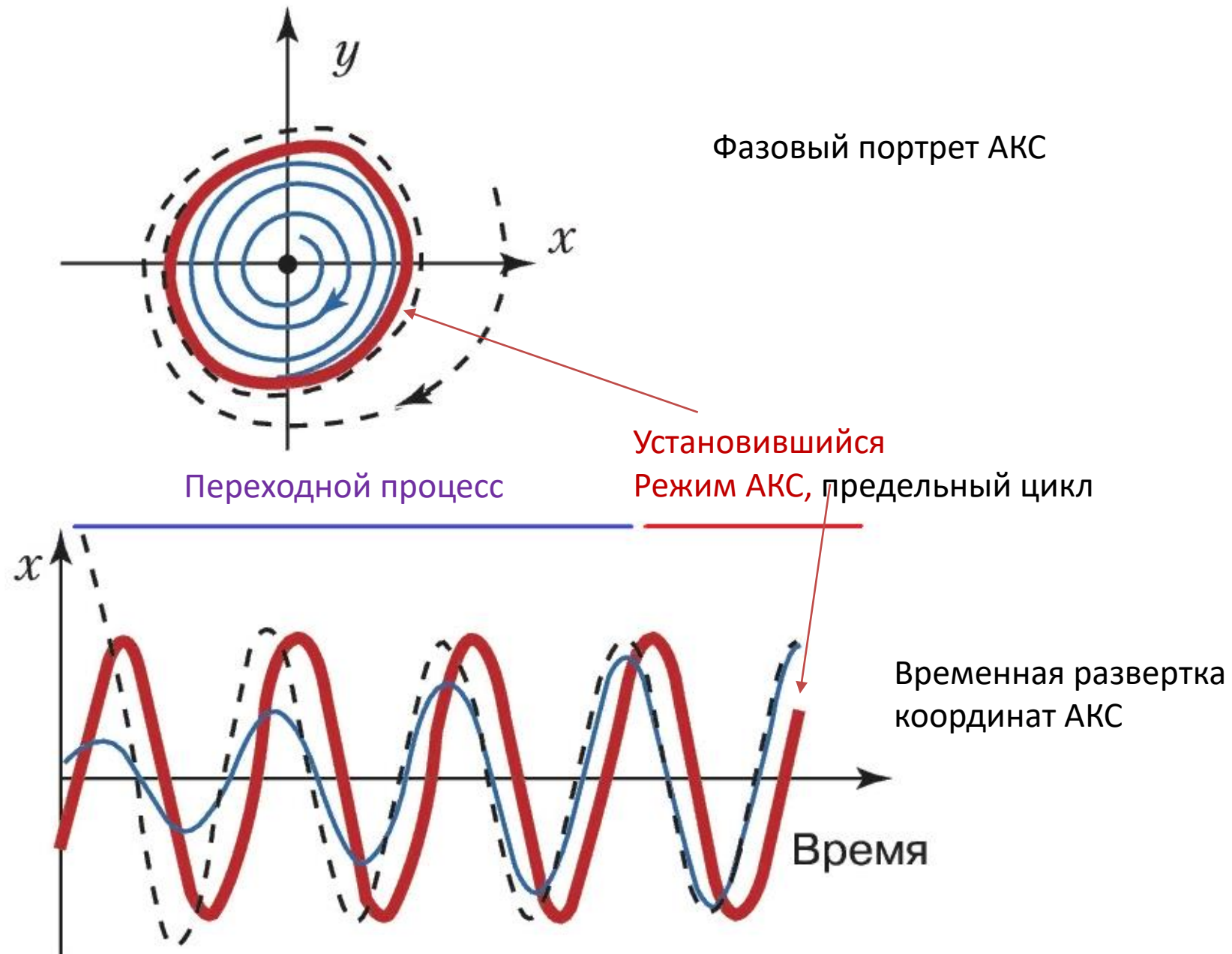
Гармонические
 $F_r(x_1) = 0,5\omega^2 x_1^2$

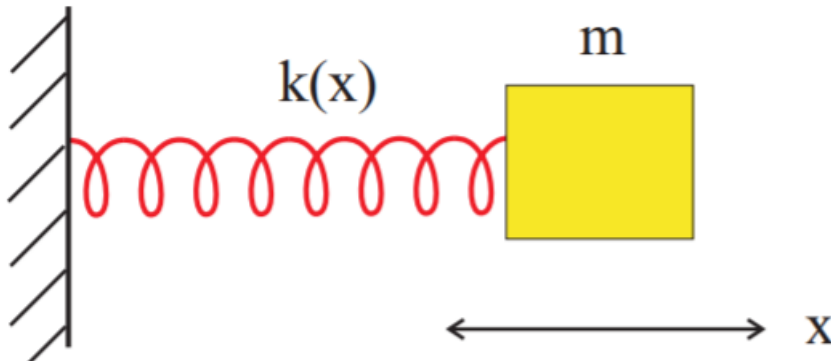
по Дуффингу
 $F_d(x_1) = 0,5\omega^2 x_1^2 + \beta x_1^4$

по Тоду
 $F_T(x_1) = e^{x_1} + x_1$

Солитонные
 $F_c(x_1) = \alpha x_1^3 - \beta x_1^2$

ВРЕМЕННАЯ И ФАЗОВАЯ КАРТИНЫ ДИНАМИКИ АКС





Для грузика на пружине жесткость пружины $k(x)$ может увеличиваться при больших сжатиях (растяжениях).

$$k = k(x) = k_0(1 + \alpha x^2), \quad (1)$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент, характеризующий степень увеличения жесткости пружины при деформации. Возвращающая сила становится при этом **нелинейной** функцией смещения:

$$F = -k_0 x (1 + \alpha x^2). \quad (2)$$

Такая зависимость силы от смещения соответствует потенциальной энергии

Одномерная частица,
движущаяся в потенциале $U(x)$.

$$U(x) = \frac{k_0}{2} x^2 + \frac{k_0 \alpha}{4} x^4. \quad (3)$$

Особенность: возможность
получения хаотической
динамики.

Данная система является **нелинейным**, или **ангармоническим осциллятором**. При отклонении тела (вправо, влево) от положения равновесия оно начинает совершать свободные ангармонические (не синусоидальные) колебания. Главное отличие таких колебаний от гармонических заключается в том, что их **период зависит от полной энергии системы E** .

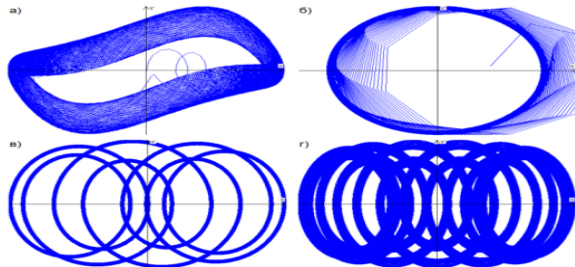
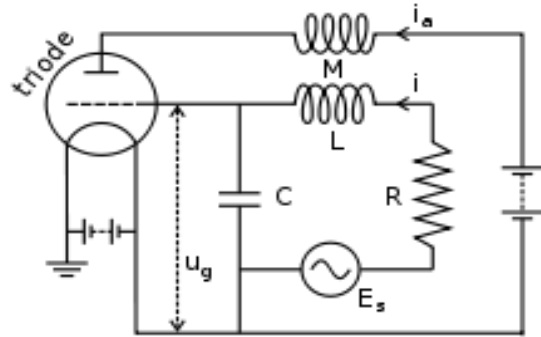
АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ – ГЕНЕРАТОРЫ Ван-дер-Поля–Дуффинга

Осциллятор Ван-дер Поля(1927)

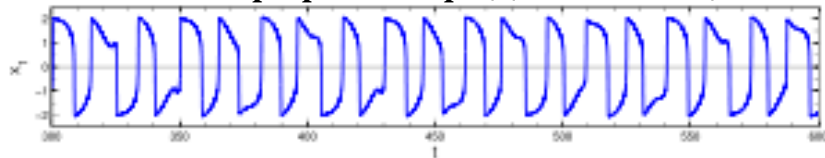
$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

$$\ddot{x} - A_1(1 - x^2)\dot{x} + x = A_2 \cdot \sin(\omega t),$$

$$\ddot{x} - A_1(1 - x^2)\dot{x} + x = A_2 \cdot \cos(A_3 t).$$



Фазовый портрет – предельный цикл.



Осциллятор Дуффинга (1918)

Динамика одномерной частицы, движущейся в потенциале

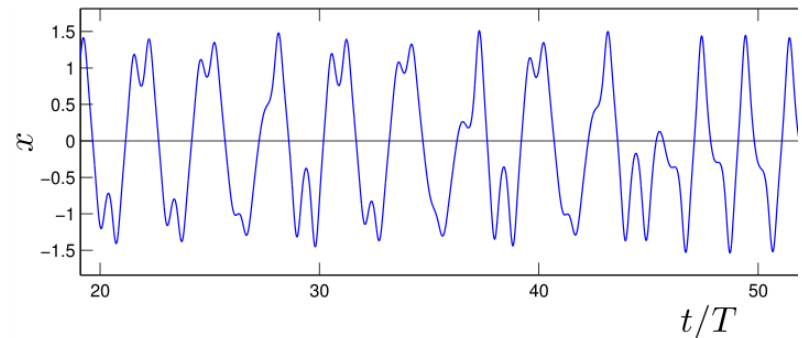
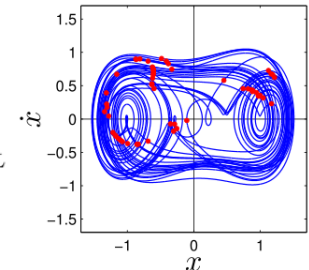
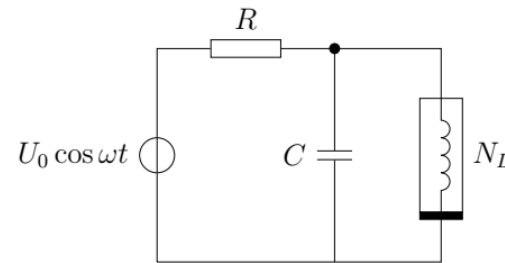
$$U(x) = ax^2/2 + bx^4/4.$$

Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -ax - bx^3$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0$$

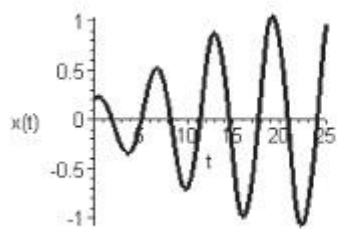
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + ax + bx^3 = B \cos \omega t.$$



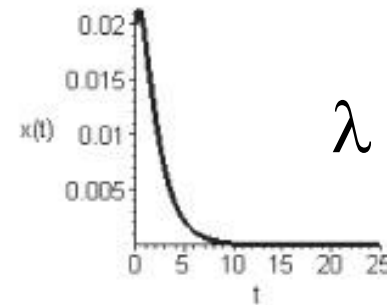
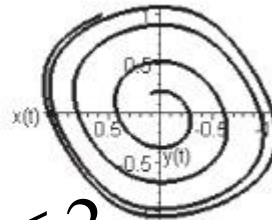
ЛР-7. ОБЪЕКТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ: АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ (АКС)

Осциллятор Ван-дер Поля

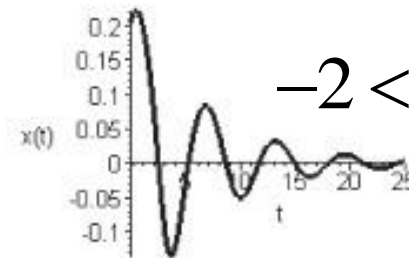
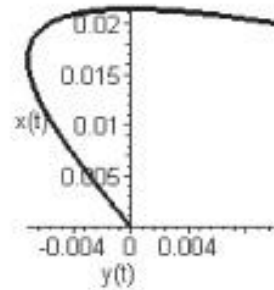
$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$



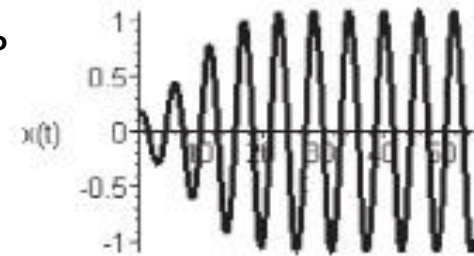
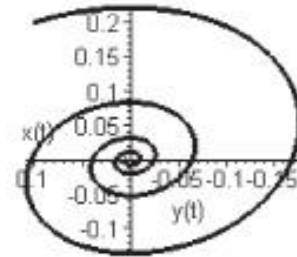
$$0 < \lambda < 2$$



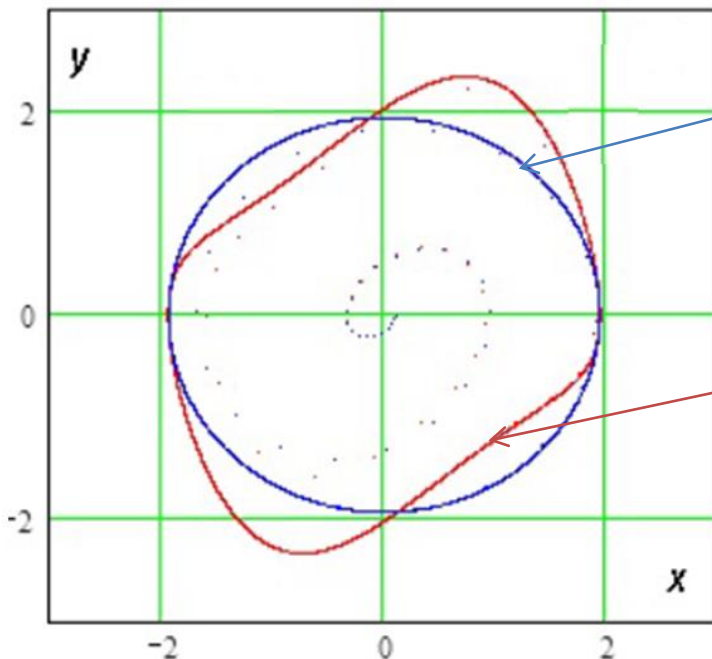
$$\lambda < -2$$



$$-2 < \lambda < 0$$



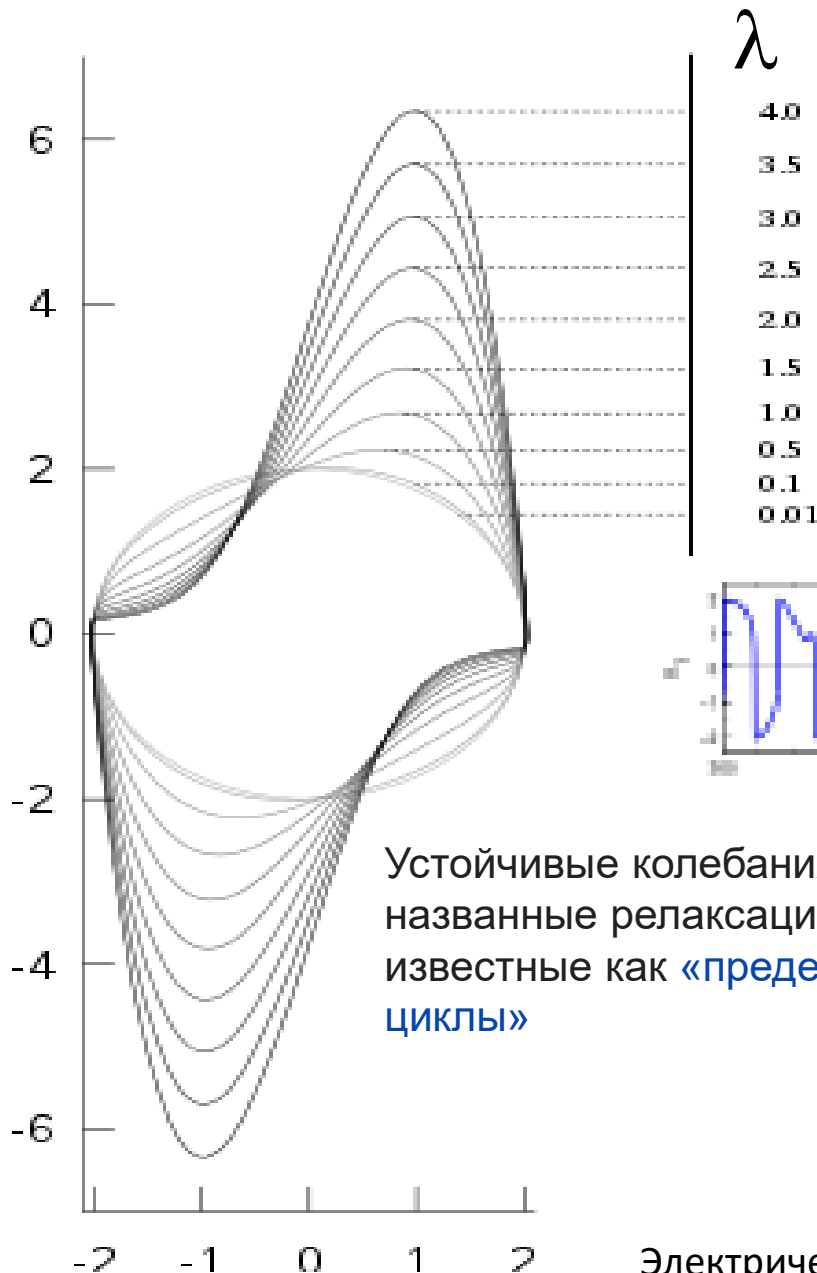
Автоколебательный режим



Предельный цикл (окружность ~гармонические автоколебания, деформированный эллипс – негармонические.

АКС – способность совершать **автоколебания**: колебания, амплитуда которых в течение долгого времени может оставаться постоянной; амплитуда колебаний не зависит от начальных условий и определяется свойствами самой системы.

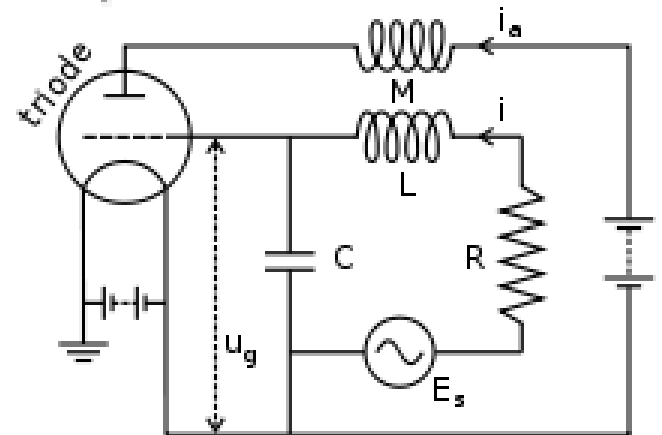
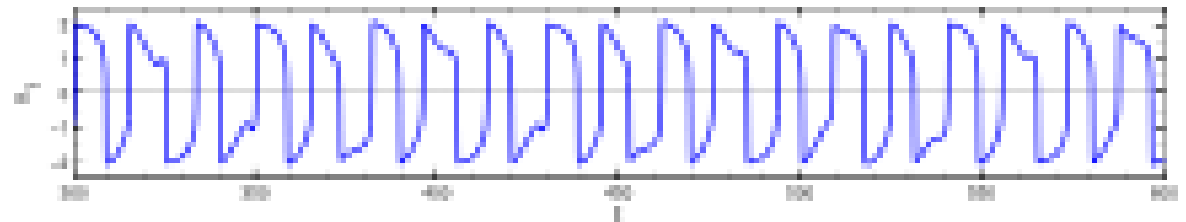
АКС. Осциллятор Балтазара Ван-дер-Поля



$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

$$\ddot{x} - A_1(1 - x^2)\dot{x} + x = A_2 \cdot \sin(\omega t)$$

Принудительный осциллятор Ван дер Поля. К исходной» функции добавляется управляющая функция $A \sin(\omega t)$

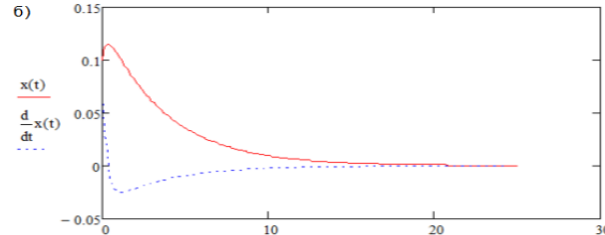
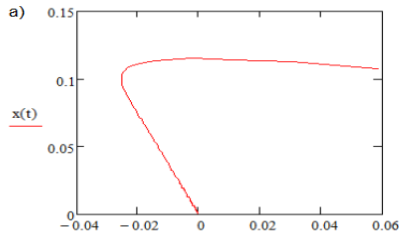


Электрическая цепь с использованием триода, в результате чего возникает форсированный генератор Ван дер Поля.

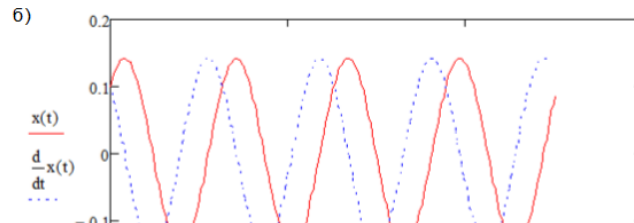
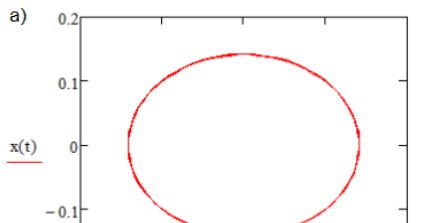
АКС. Осциллятор Балтазара Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} - A_1(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (1)$$

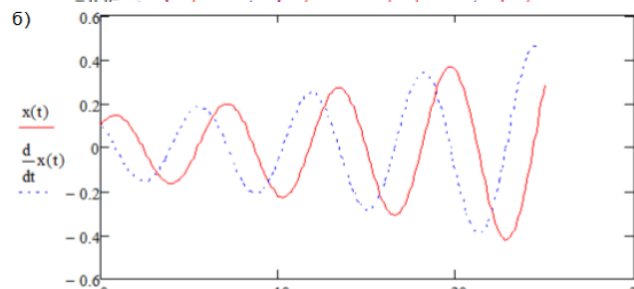
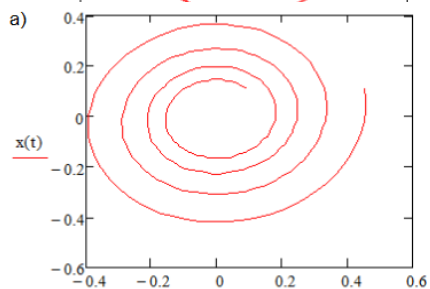
x – координата точки, зависящая от времени t ,
 A_1 – коэффициент, характеризующий силу
затухания колебаний



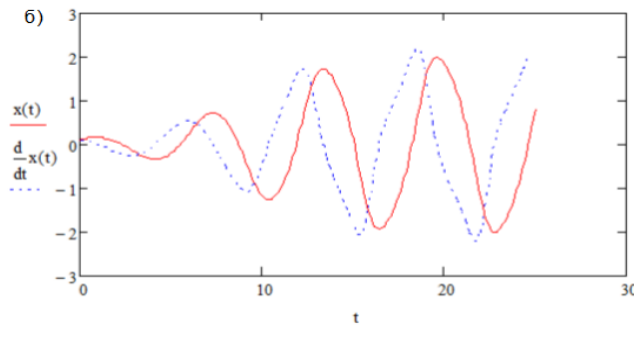
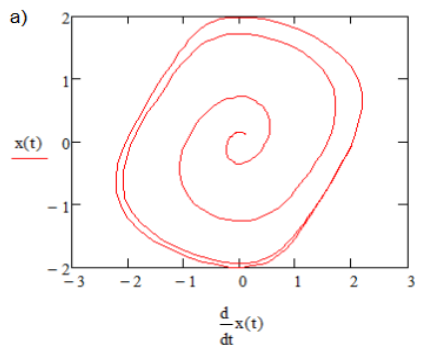
$A_1 < 0$ в системе наблюдается
образование особой точки
типа устойчивый узел



При увеличении A_1 , но
оставаясь **$A_1 < 0$** - устойчивый
предельный цикл

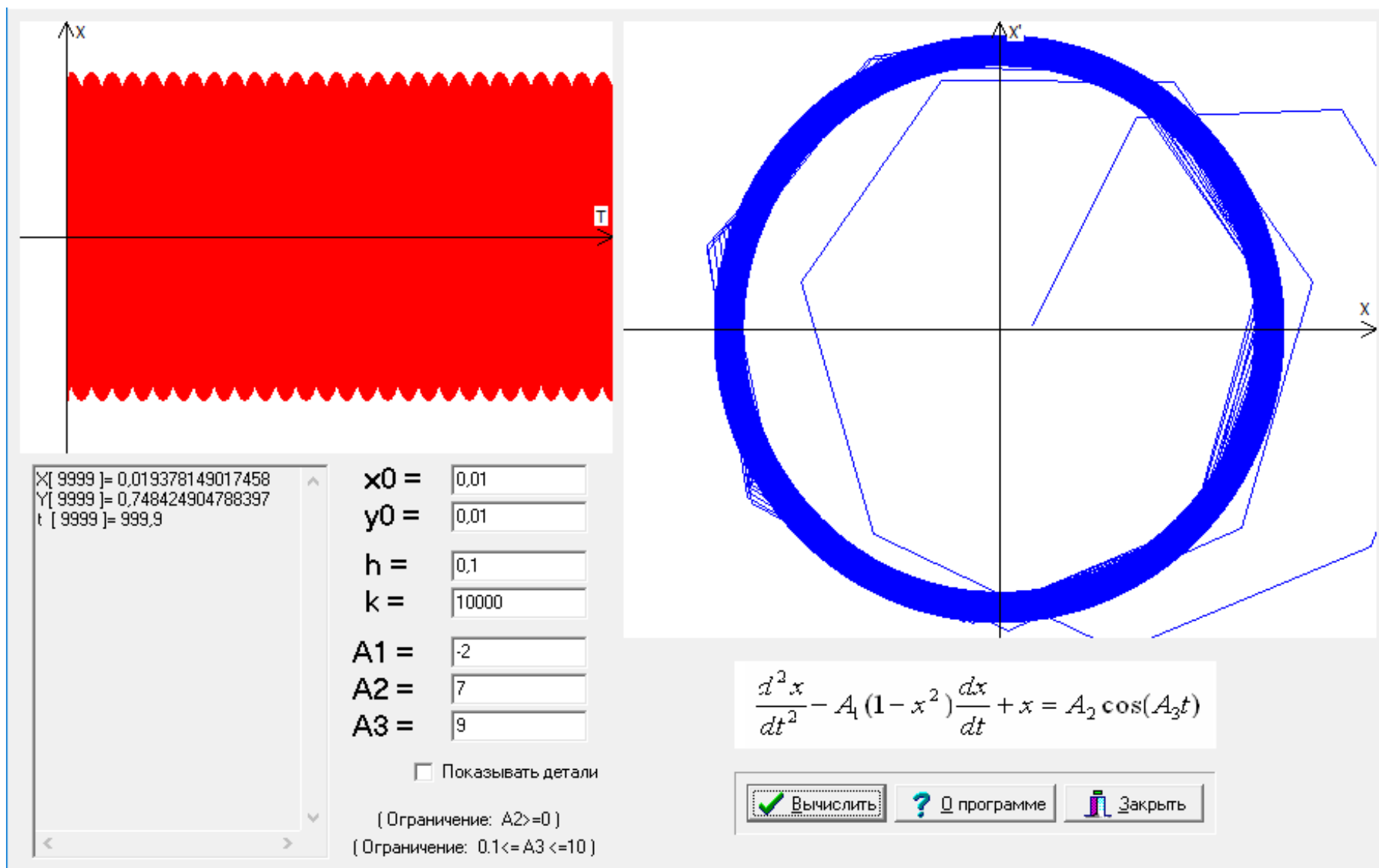


Неустойчивый фокус **$A_1 > 0$**

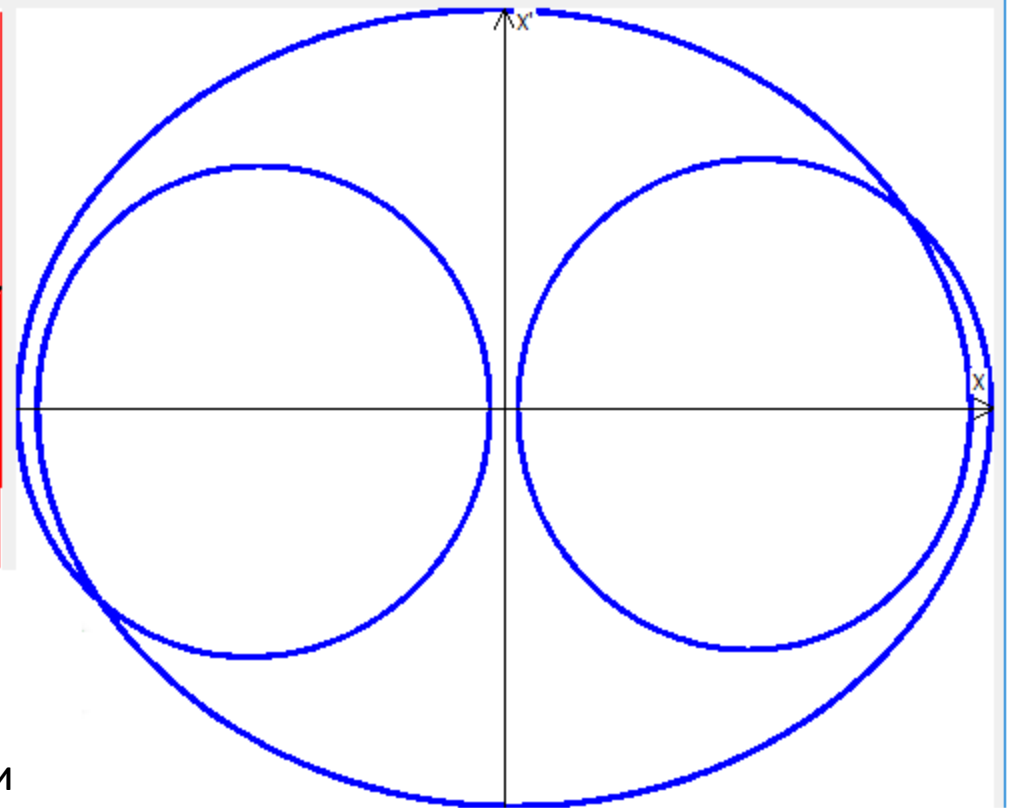
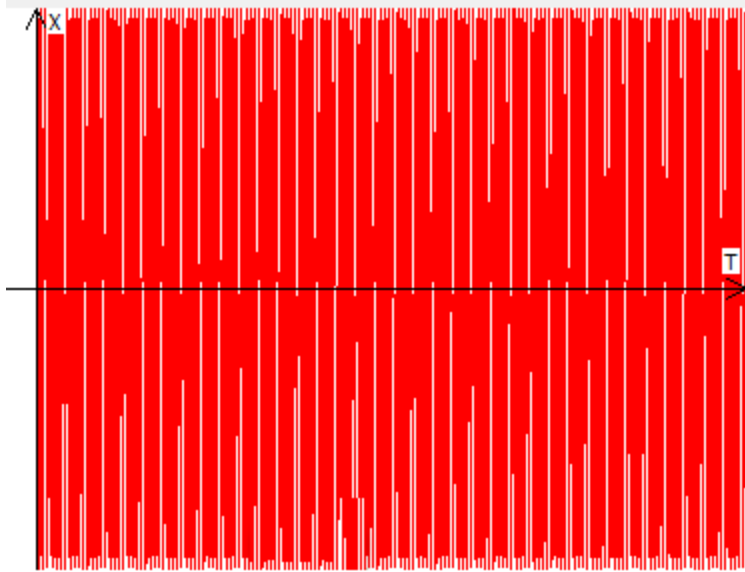


Неустойчивый предельный
цикл **$A_1 > 0$**

АКС. Модифицированный осциллятор Балтазара Ван-дер-Поля



АКС. Модифицированный осциллятор Балтазара Ван-дер-Поля



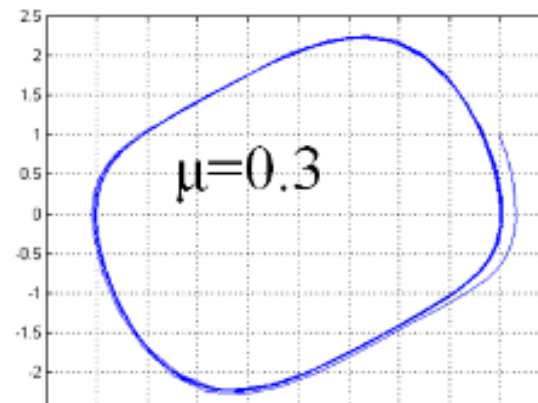
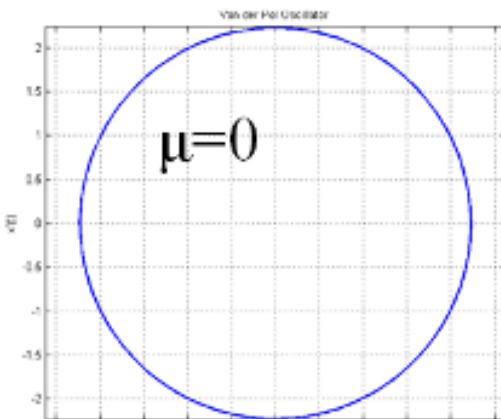
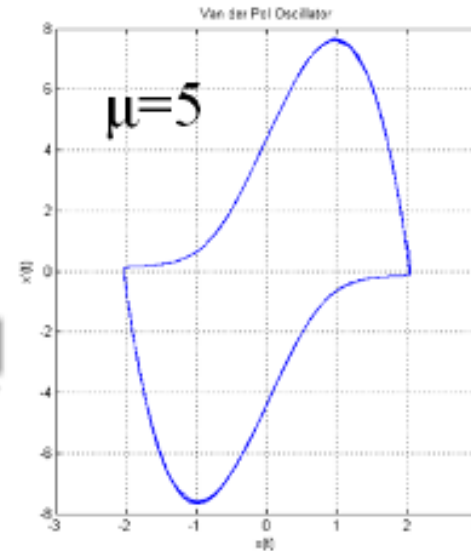
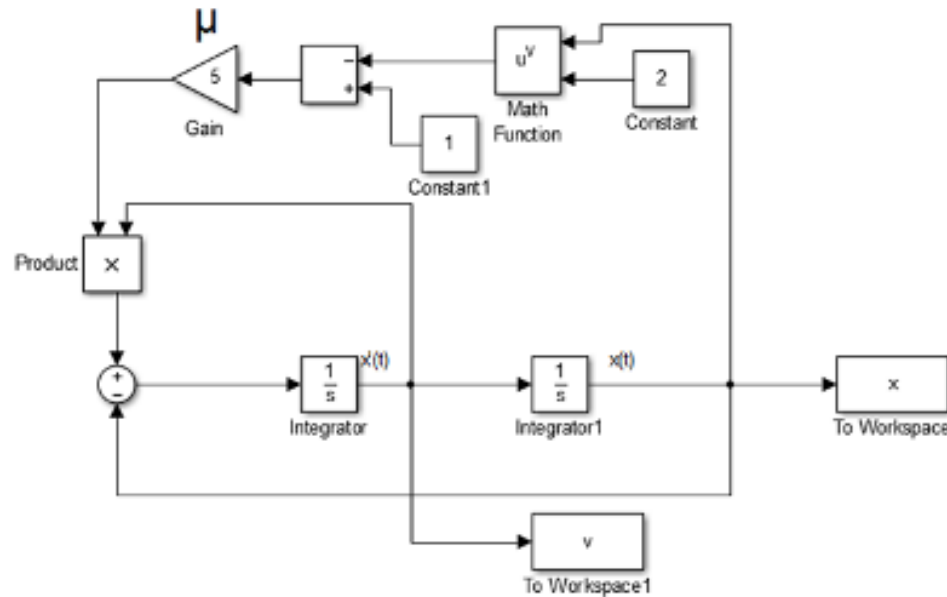
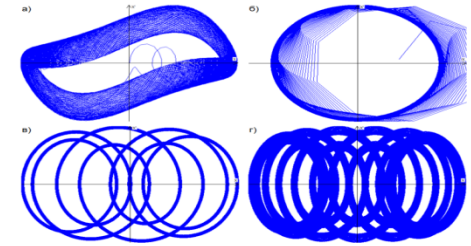
Уравнение Ван дер Поля применяется и в **физике**, и в **биологии**, в **сейсмологии** для моделирования геологических разломов.¹

$$\frac{d^2x}{dt^2} - A_1(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = A_2 \cos(A_3 t),$$

АКС. Модифицированный осциллятор Балтазара Ван-дер-Поля

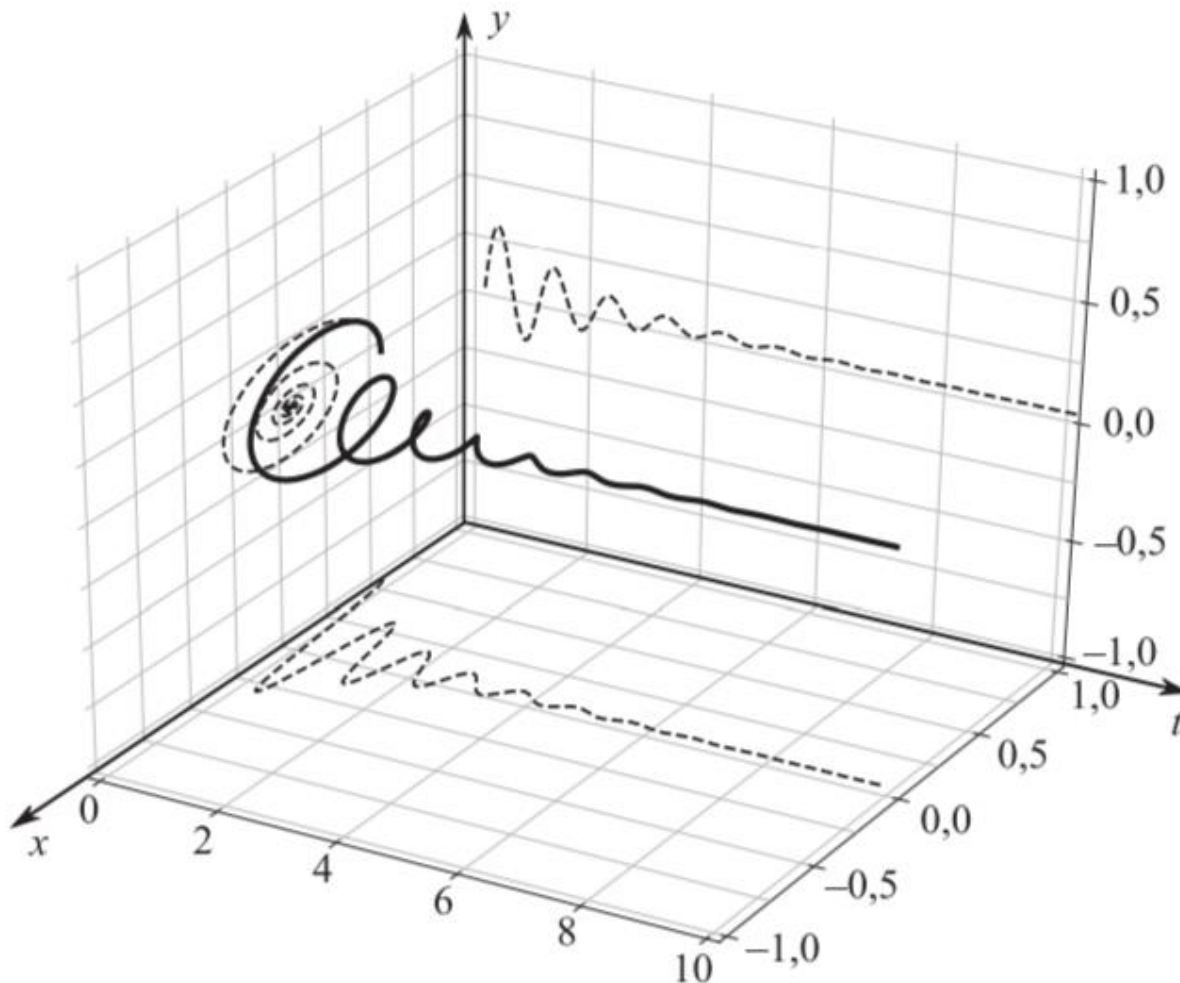
$$\frac{d^2x}{dt^2} - A_1(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = A_2 \cos(A_3 t)$$

x – координата точки,
 зависящая от времени t , A_1, A_2, A_3 –
 коэффициенты ($A_2 > 0$,
 $0 \leq A_3 \leq 10$)



$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0$$

ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ И РЕАЛИЗАЦИИ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

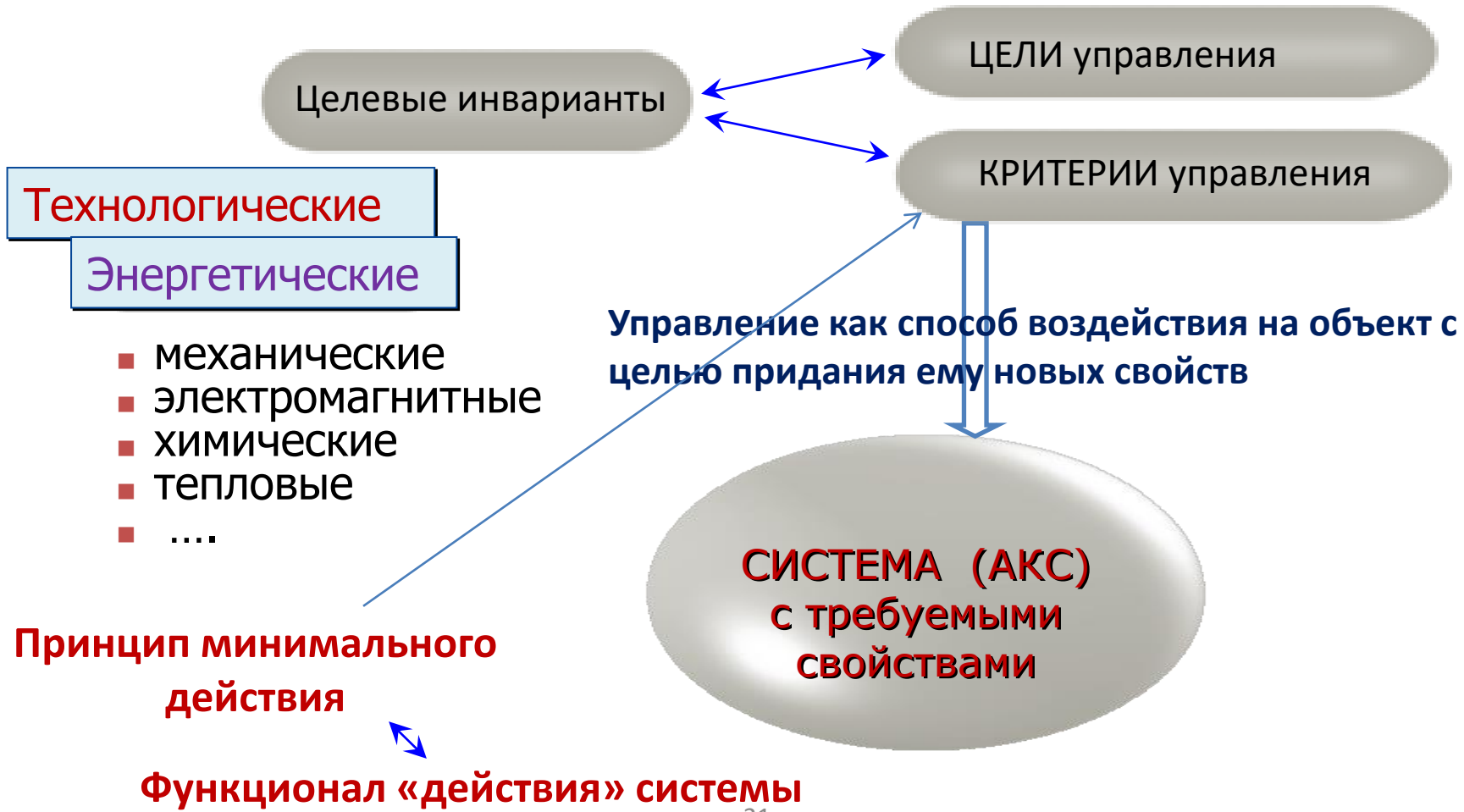


$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

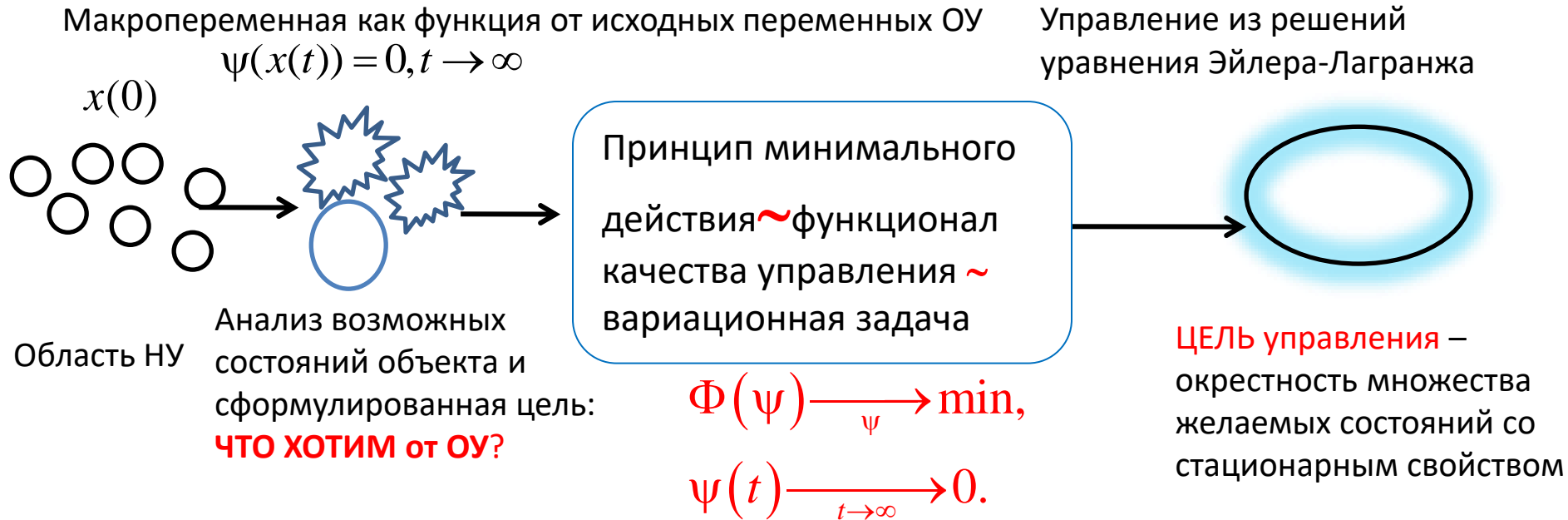
СИНТЕЗ РАЗНЫХ АКС на единой основе

Физика синтеза: ищите или навязывайте инварианты и аттракторы

поддержание заданных системных инвариантов
как желаемых предельных (во времени) свойств объекта



СУТЬ МЕТОДА УПРАВЛЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ - АКАР



АППАРАТ НЕПРЕРЫВНОЙ СТУ

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{u}(\mathbf{x}(t))$$

Макропеременная и ЦЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ

$$\psi := \psi(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

$$\Phi(\psi) = \int_0^\infty (\psi^2 + \omega^2 \dot{\psi}^2) dt \xrightarrow{u} \min,$$

$$\omega \dot{\psi} + \psi = 0.$$

ПРИМЕРЫ ВЫВОДА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА

Блок заданий 2. Дана система (универсальный генератор типа Пуанкаре):

Описание объекта

$$\dot{x}_1(t) = x_2 + k_1 u;$$

$$\dot{x}_2(t) = -\omega^2 x_1 + k_2 u,$$

Макропеременная. Управление.

$$\psi = A^2 - 0,5\omega^2 x_1^2 - 0,5x_2^2,$$

$$u(x_1, x_2) = \frac{\psi}{T(k_1\omega^2 x_1 + k_2 x_2)}.$$

$x_1(t), x_2(t)$ - колебания; ω - частота колебаний;

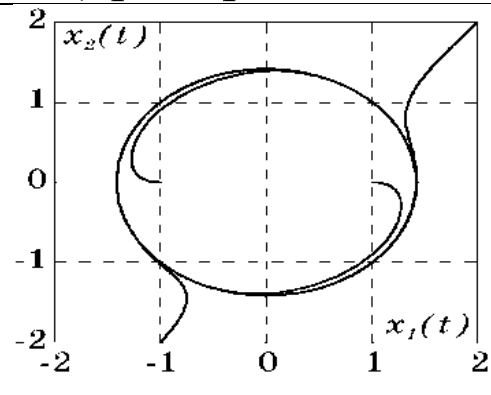
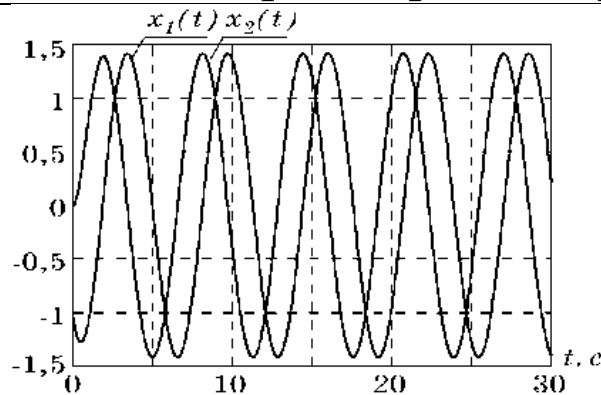
Выбором коэффициентов k_1, k_2 можно обеспечить соответствующие типы колебаний:

при $k_1 \sim k_2$ получить генератор Пуанкаре;

при $k_1 \gg k_2$ получить генератор Ван-дер-Поля.

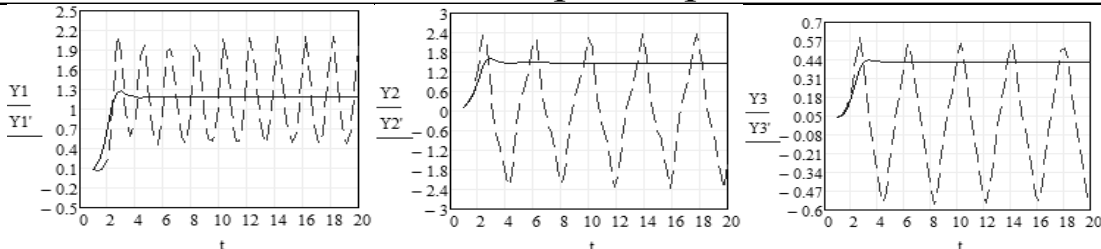
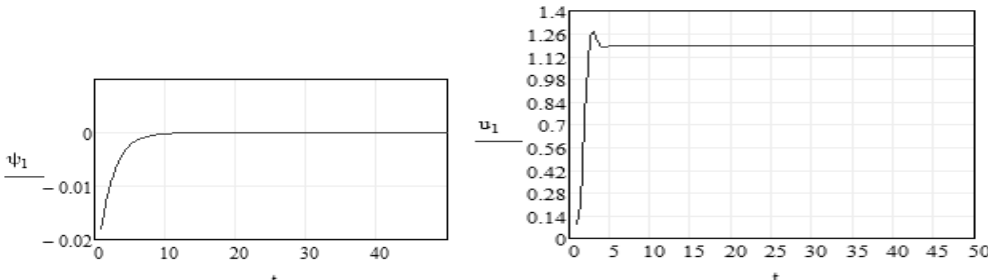
Построить траектории (графики $x_1(t), x_2(t)$ от времени) и фазовый портрет.

Вариант	Тип колебаний	Фазовые траектория и портрет (пример, $k_1=k_2=1$)
5	$k_1=k_2=3$	<div style="display: flex; justify-content: space-around;">   </div>
6	$k_1=k_2=0,7$	
7	$k_1=10, k_2=1$	
8	$k_1=1, k_2=10$	
9	$k_1=k_2=10$	
10	$k_1=2, k_2=1$	



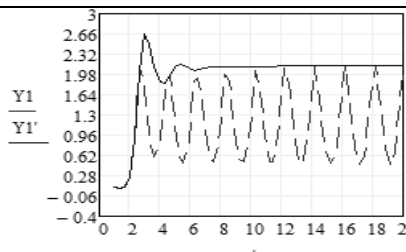
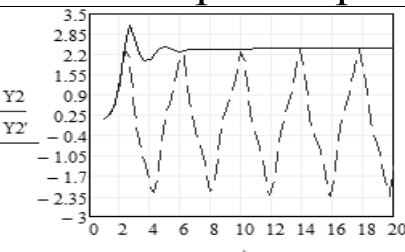
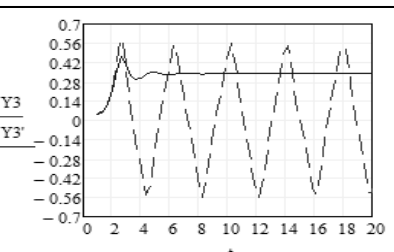
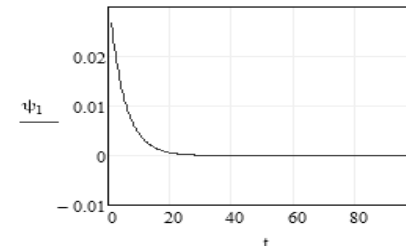
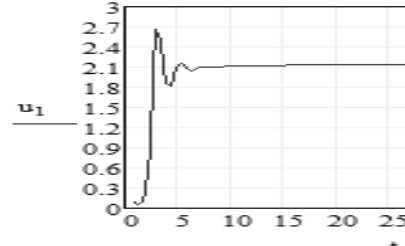
ПРИМЕРЫ ВЫВОДА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА

Блок заданий 3.

Описание объекта		Макропеременная. Управление.	
$\frac{dY_1}{dt} = \alpha Y_2 Y_3 - \gamma Y_1 + u_1;$ $\frac{dY_2}{dt} = \mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3;$ $\frac{dY_3}{dt} = \delta Y_2 - \lambda Y_3,$		$\psi_1(t) = Y_1 - \rho Y_2,$ $u_1 = \gamma Y_1 - \alpha Y_2 Y_3 + \rho(\mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3) - \frac{\psi_1(t)}{T_1}.$ <p>Получить систему управления. Выбором параметра T_1 можно разные формы переходных процессов.</p>	
Построить траектории с управлением и без (графики $Y_i(t), i = 1, 2, 3$ от времени), график управления, макропеременной и фазовый портрет.			
Вариант		Фазовые траектории	
11	$\alpha=5, \beta=8,$ $\gamma=1.9, \mu=2.1,$ $\lambda=3.16, \delta=0.9$		
12	$\alpha=4, \beta=9,$ $\gamma=1.7, \mu=2.2,$ $\lambda=3.12, \delta=0.7$		
13	$\alpha=3, \beta=8,$ $\gamma=1.8, \mu=2.4,$ $\lambda=3.10, \delta=0.7$		
14	$\alpha=2, \beta=6,$ $\gamma=1.5, \mu=2.0,$ $\lambda=3.16, \delta=0.9$		
15	$\alpha=5, \beta=6,$ $\gamma=1.3, \mu=2.5,$ $\lambda=3.16, \delta=0.9$	Указать, где находят применение данный тип модели (Лоренца).	

ПРИМЕРЫ ВЫВОДА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА

Блок заданий 4.

Описание объекта		Макропеременная. Управление.	
$\frac{dY_1}{dt} = \alpha Y_2 Y_3 - \gamma Y_1;$ $\frac{dY_2}{dt} = \mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3;$ $\frac{dY_3}{dt} = \delta Y_2 - \lambda Y_3 + u_1,$		$\psi_1(t) = Y_3 - \rho Y_2.$ $u_1 = \lambda Y_3 - \delta Y_2 + \rho(\mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3) - \frac{\psi_1(t)}{T_1}.$ <p>Получить систему управления. Выбором параметра T_1 можно разные формы переходных процессов.</p>	
Построить траектории с управлением и без (графики $Y_i(t), i = 1, 2, 3$ от времени), график управления, макропеременной и фазовый портрет.			
Вариант		Фазовые траектории	
16	$\alpha = 5, \beta = 8,$ $\gamma = 1.9, \mu = 2.1,$ $\lambda = 3.16, \delta = 0.9$		
17	$\alpha = 4, \beta = 9,$ $\gamma = 1.7, \mu = 2.2,$ $\lambda = 3.12, \delta = 0.7$		
18	$\alpha = 3, \beta = 8,$ $\gamma = 1.8, \mu = 2.4,$ $\lambda = 3.10, \delta = 0.7$		
19	$\alpha = 2, \beta = 6,$ $\gamma = 1.5, \mu = 2.0,$ $\lambda = 3.16, \delta = 0.9$	Указать, где находят применение данный тип модели (Лоренца).	
20	$\alpha = 5, \beta = 6,$ $\gamma = 1.3, \mu = 2.5,$ $\lambda = 3.16, \delta = 0.9$		

АКС- ГЕНЕРАТОРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ. Блок-1

СТУ: возможность формировать новые классы генераторов нелинейных колебаний

Пример. $\ddot{x} = \lambda(1 - x^2)\dot{x} - x$
 $x = x(t)$ \Leftrightarrow Let us $x_1 := x$ $\Leftrightarrow \dot{x}_1 := \dot{x}$ $\Leftrightarrow \dot{x}_1 = x_2$
 $x_2 = \dot{x}_1$ $\Leftrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x}_1$ $\Leftrightarrow \dot{x}_2 = u$

Универсальный генератор Ван-дер-Поля–Релея–Дуффинга

$$\dot{x}_1(t) = x_2, \quad \dot{x}_2(t) = u$$

$$\psi_1 = A^2 - F(x_1) - 0,5x_2^2 \quad - \text{энергетическая макропеременная}$$

$$u = -\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\psi_1}{x_2 T_1} \quad - \text{универсальный закон управления}$$

Выбор функции F обеспечивает соответствующие типы колебаний

а) гармонические

$$F_r(x_1) = 0,5\omega^2 x_1^2$$

в) по Тоду

$$F_T(x_1) = e^{x_1} + x_1$$

б) по Дуффингу

$$F_D(x_1) = 0,5\omega^2 x_1^2 + \beta x_1^4$$

г) солитонные

$$F_c(x_1) = \alpha x_1^3 - \beta x_1^2$$

Выбором
функции $F(x)$
можно

обеспечить
соответствующие
типы колебаний

ЗАДАЧА: обоснование техники СТУ (ЛР-7, блок-1)

Утверждение. Уравнение $\omega\dot{\psi} + \psi = 0, \omega > 0$ (1) есть следствие из уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала $\Phi(\psi) = \int_0^\infty (\psi^2 + \omega^2 \dot{\psi}^2) dt$ (2). Функционал Φ имеет глобальный минимум на решениях (1).

Доказательство. $\frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\psi}} = 2\psi - \frac{d}{dt} (2\omega^2 \dot{\psi}) = 2\psi - 2\omega^2 \ddot{\psi} = 0 \Rightarrow \psi - \omega^2 \ddot{\psi} = 0$.

Домножим последнее равенство на $\dot{\psi}$ и проинтегрируем левую и правую часть по переменной t , получим

$$\text{help: } \left\langle \int x dx = \frac{x^2}{2} + C, \quad f = f(t), \quad df \triangleq \dot{f} dt \right\rangle$$

$$\psi \dot{\psi} - \omega^2 \ddot{\psi} \dot{\psi} = 0 \Rightarrow \int \psi \dot{\psi} dt - \int \omega^2 \ddot{\psi} \dot{\psi} dt = \tilde{C} \Rightarrow \int \psi d\psi - \int \omega^2 \dot{\psi} d\dot{\psi} = \tilde{C} \Rightarrow \frac{\psi^2}{2} - \omega^2 \frac{\dot{\psi}^2}{2} = \tilde{C} \Rightarrow$$

Учитываем требуемые из физического смысла начальные условия $\psi(t) = 0, t \rightarrow \infty$.

$$\psi^2 - \omega^2 \dot{\psi}^2 = C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow (\omega\dot{\psi} + \psi)(\omega\dot{\psi} - \psi) = 0 \Rightarrow$$

Выбираем из двух уравнений то, которое имеет решения, асимптотически устойчиво стремящиеся к нулю $\omega\dot{\psi} + \psi = 0$, то есть (1). Покажем последнее.

$$\omega\dot{\psi} + \psi = 0 \Rightarrow \omega \frac{d\psi}{dt} = -\psi \Rightarrow \frac{d\psi}{\psi} = -\omega^{-1} dt \Rightarrow \int \frac{d\psi}{\psi} = -\omega^{-1} \int dt \Rightarrow \ln|\psi| = -\omega^{-1} t + C \Rightarrow$$

$$C = 0, \psi(t) = e^{-\omega^{-1} t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

$$\omega\dot{\psi} - \psi = 0 \Rightarrow \psi(t) = e^{\omega^{-1} t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty.$$

Блок заданий-1

Блок заданий 1. Дана система (универсальный генератор Ван-дер-Поля–Релея–Дуффинга):

Описание объекта		Макропеременная. Управление.	
$\dot{x}_1(t) = x_2,$ $\dot{x}_2(t) = u;$		$\psi = A^2 - F(x_1) - 0,5x_2^2,$ $u = -\frac{dF}{dx_1} + (Tx_2)^{-1} \psi.$	
Выбором функции F обеспечить на основе универсального управления соответствующий тип колебаний, построить фазовые траекторию и портрет.			
Вариант	Тип колебаний	Фазовые траектория и портрет (пример)	
1	Гармонические $F_r(x_1) = 0,5\omega^2 x_1^2$		
2	по Дуффингу $F_d(x_1) = 0,5\omega^2 x_1^2 + \beta x_1^4$		
3	по Тоду $F_T(x_1) = e^{x_1} + x_1$		
4	Солитонные $F_c(x_1) = \alpha x_1^3 - \beta x_1^2$		

Утверждение 2. Пусть динамическая система имеет математическую модель вида:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= u(t).\end{aligned}$$

Пусть **задача управления** ставится т.о.: найти управление **u** , такое, что обеспечивается достижение целевого состояния

$$\psi(x_1, x_2) = A^2 - F(x_1) - 0,5x_2^2,$$

где величина **A** и функция **$F(x_1)$** полностью определены (известны).

Решение задачи. Согласно СТУ

$$\Phi(\psi) = \int_0^{\infty} (\psi^2 + T^2 \dot{\psi}^2) dt \xrightarrow{u} \min \Leftrightarrow T\dot{\psi} + \psi = 0 \quad (1) \Rightarrow.$$

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \dot{x}_2 = -F'_{x_1} \dot{x}_1 - 2 \cdot 0,5 x_2 \dot{x}_2 = -F'_{x_1} x_2 - x_2 u,$$

подставим в (1):

$$T(-F'_{x_1} x_2 - x_2 u) + \psi = 0 \Rightarrow -x_2 u = -\psi T^{-1} + F'_{x_1} x_2 \Rightarrow u(t) = \psi(t) (Tx_2(t))^{-1} - F'_{x_1}(t),$$

$$u = -\frac{dF}{dx_1} + (Tx_2)^{-1} \psi.$$

ПРИМЕРЫ ВЫВОДА УПРАВЛЕНИЯ - Блок задач 1

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2, \\ \dot{x}_2(t) = u; \end{array} \quad \begin{array}{l} \psi = A^2 - F(x_1) - 0,5x_2^2 \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \\ \Phi(\psi) = \int_0^\infty (\psi^2 + T^2 \dot{\psi}^2) dt \xrightarrow[\psi]{} \min \end{array} \quad u = (Tx_2)^{-1} \psi(t) - \frac{dF}{dx_1}.$$

$$\begin{aligned} T\dot{\psi}(t) + \psi(t) &= T(A^2 - F(x_1) - 0,5x_2^2)' + \psi(t) = \\ &= T\left(-\frac{dF}{dx_1}\dot{x}_1 - x_2\dot{x}_2\right) + \psi(t) = T\left(-\frac{dF}{dx_1}\dot{x}_1 - x_2\dot{x}_2\right) + \psi(t) = \\ &= T\left(-\frac{dF}{dx_1}x_2 - x_2u\right) + \psi(t) = 0. \end{aligned}$$

Гармонические $F_G(x_1) = 0,5\omega^2 x_1^2$	$\frac{dF_G}{dx_1} =$	$u_G = (Tx_2)^{-1} \psi(t) - \frac{dF}{dx_1}.$
по Дуффингу $F_D(x_1) = 0,5\omega^2 x_1^2 + \beta x_1^4$	$\frac{dF_D}{dx_1} =$	$u_D = (Tx_2)^{-1} \psi(t) - \frac{dF}{dx_1}.$
по Тоду $F_T(x_1) = e^{x_1} + x_1$	$\frac{dF_T}{dx_1} =$	$u_T = (Tx_2)^{-1} \psi(t) - \frac{dF}{dx_1}.$
Солитонные $F_C(x_1) = \alpha x_1^3 - \beta x_1^2$	$\frac{dF_C}{dx_1} =$	$u_C = (Tx_2)^{-1} \psi(t) - \frac{dF}{dx_1}.$

Блок заданий-2

Блок заданий 2. Дана система (универсальный генератор типа Пуанкаре):

Описание объекта

$$\dot{x}_1(t) = x_2 + k_1 u;$$

$$\dot{x}_2(t) = -\omega^2 x_1 + k_2 u,$$

Макропеременная. Управление.

$$\psi = A^2 - 0,5\omega^2 x_1^2 - 0,5x_2^2,$$

$$u(x_1, x_2) = \frac{\psi}{T(k_1\omega^2 x_1 + k_2 x_2)}.$$

$x_1(t), x_2(t)$ - колебания; ω - частота колебаний;

Выбором коэффициентов k_1, k_2 можно обеспечить соответствующие типы колебаний:

при $k_1 \sim k_2$ получить генератор Пуанкаре;

при $k_1 \gg k_2$ получить генератор Ван-дер-Поля.

Выбором коэффициентов k_1, k_2 можно обеспечить соответствующие типы колебаний

Построить траектории (графики $x_1(t), x_2(t)$ от времени) и фазовый портрет.

Вариант

Тип колебаний

Фазовые траектория и портрет (пример, $k_1=k_2=1$)

5

$k_1=k_2=3$

6

$k_1=k_2=0,7$

7

$k_1=10, k_2=1$

8

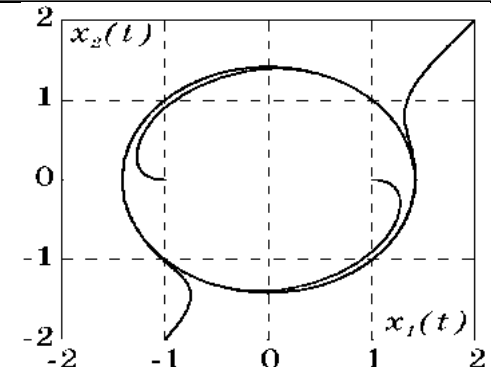
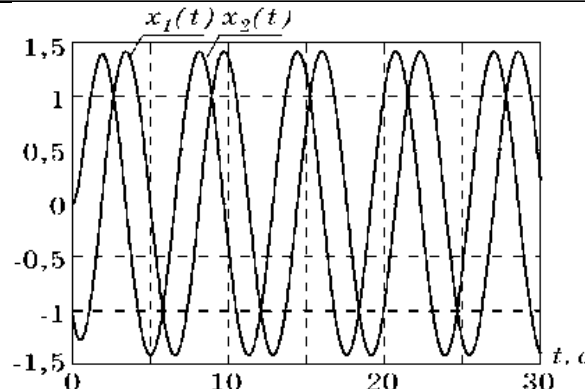
$k_1=1, k_2=10$

9

$k_1=k_2=10$

10

$k_1=2, k_2=1$



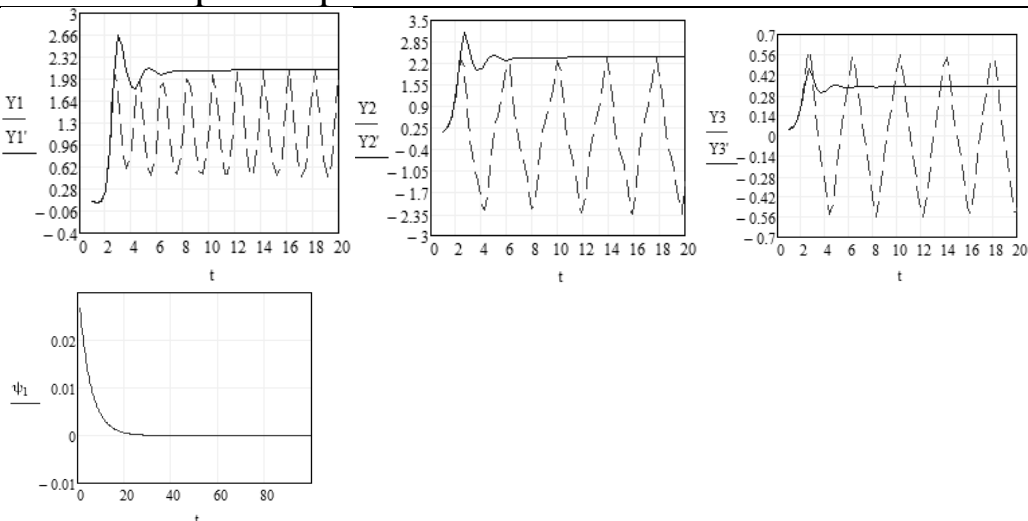
ПРИМЕРЫ ВЫВОДА УПРАВЛЕНИЯ - Блок задач 1

Исходные данные	$\dot{x}_1(t) = x_2 + k_1 u;$ $\dot{x}_2(t) = -\omega^2 x_1 + k_2 u,$	Целевая макропеременная	$\psi = A^2 - 0,5\omega^2 x_1^2 - 0,5x_2^2$
Функционал качества целевой системы	$\Phi(\psi) = \int_0^\infty (\psi^2 + T^2 \dot{\psi}^2) dt \xrightarrow{u} \min,$ интеграл от лагранжиана как полная «энергия движения)		Уравнение Э-Л $T\dot{\psi} + \psi = 0$

$$\begin{aligned}
 T\dot{\psi}(t) + \psi(t) &= T \left(A^2 - 0,5\omega^2 x_1^2(t) - 0,5x_2^2(t) \right)' + \psi = \\
 &= T \left(-\omega^2 x_1 \dot{x}_1 - x_2 \dot{x}_2 \right) + \psi = \\
 &= T \left[-\omega^2 x_1 (x_2 + k_1 u) - x_2 (-\omega^2 x_1 + k_2 u) \right] + \psi = \\
 &= T \left[-u (k_1 \omega^2 x_1 + k_2 x_2) - \omega^2 x_1 x_2 + \omega^2 x_1 x_2 \right] + \psi = 0. \\
 -Tu(k_1 \omega^2 x_1 + k_2 x_2) + \psi &= 0. \Rightarrow u = \psi T^{-1} (k_1 \omega^2 x_1 + k_2 x_2)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Придавая разные значения параметрам k_1, k_2 ,
получаем разные целевые объекты

ПРИМЕРЫ ВЫВОДА УПРАВЛЕНИЯ - Блок задач 3

Описание объекта		Макропеременная. Управление.	
$\frac{dY_1}{dt} = \alpha Y_2 Y_3 - \gamma Y_1;$ $\frac{dY_2}{dt} = \mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3;$ $\frac{dY_3}{dt} = \delta Y_2 - \lambda Y_3 + u_1,$		$\psi(t) = Y_3 - \rho Y_2.$ $u_1 = \lambda Y_3 - \delta Y_2 + \rho(\mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3) - \frac{\psi(t)}{T}.$ <p>Получить систему управления. Выбором параметра Т можно разные формы переходных процессов.</p>	
Построить траектории с управлением и без (графики $Y_i(t), i = 1, 2, 3$ от времени), график управления, макропеременной и фазовый портрет.			
Вариант		Фазовые траектории	
16	$\alpha=5, \beta=8,$ $\gamma=1.9, \mu=2.1, \lambda=3.16, \delta=0.9$		
17	$\alpha=4, \beta=9,$ $\gamma=1.7, \mu=2.2, \lambda=3.12, \delta=0.7$		
18	$\alpha=3, \beta=8,$ $\gamma=1.8, \mu=2.4, \lambda=3.10, \delta=0.7$		
19	$\alpha=2, \beta=6,$ $\gamma=1.5, \mu=2.0, \lambda=3.16, \delta=0.9$		
20	$\alpha=5, \beta=6,$ $\gamma=1.3, \mu=2.5, \lambda=3.16, \delta=0.9$		
		Указать, где находят применение данный тип модели (Лоренца)	

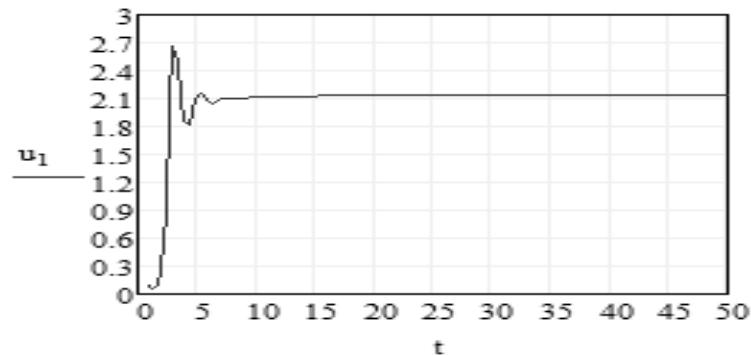
ПРИМЕРЫ ВЫВОДА УПРАВЛЕНИЯ - Блок задач 3

Исходные данные	$\frac{dY_1}{dt} = \alpha Y_2 Y_3 - \gamma Y_1 + u_1;$ $\frac{dY_2}{dt} = \mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3;$ $\frac{dY_3}{dt} = \delta Y_2 - \lambda Y_3,$	Целевая макропеременная	$\psi(t) = Y_1 - \rho Y_2,$
Функционал качества целевой системы	$\Phi(\psi) = \int_0^\infty (\psi^2 + T^2 \dot{\psi}^2) dt \xrightarrow{u} \min,$ <p style="text-align: center;">интеграл от лагранжиана как полная «энергия движения»</p>		Уравнение Э-Л $T\dot{\psi} + \psi = 0$

$$T\dot{\psi} + \psi = T(Y_1 - \rho Y_2)' + \psi = T(\dot{Y}_1 - \rho \dot{Y}_2) + \psi = T(\alpha Y_2 Y_3 - \gamma Y_1 + u - \rho(\mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3)) + \psi = 0.$$

$$T(\alpha Y_2 Y_3 - \gamma Y_1 + u_1 - \rho(\mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3)) + \psi = 0. \Rightarrow$$

$$u = -\psi T^{-1} - \alpha Y_2 Y_3 + \gamma Y_1 + \rho(\mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3)$$

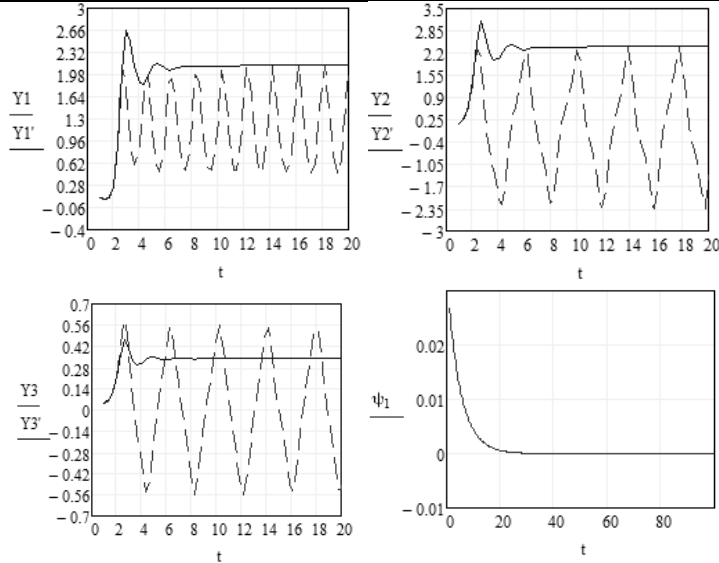


ПРИМЕРЫ ВЫВОДА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА

Блок заданий 4.

Описание объекта	Макропеременная. Управление.
$\frac{dY_1}{dt} = \alpha Y_2 Y_3 - \gamma Y_1;$ $\frac{dY_2}{dt} = \mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3;$ $\frac{dY_3}{dt} = \delta Y_2 - \lambda Y_3 + u_1,$	$\psi_1(t) = Y_3 - \rho Y_2.$ $u_1 = \lambda Y_3 - \delta Y_2 + \rho(\mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3) - \frac{\psi(t)}{T}.$ <p>Получить систему управления. Выбором параметра T можно разные формы переходных процессов.</p>

Построить траектории с управлением и без (графики $Y_i(t), i=1,2,3$ от времени), график управления, макропеременной и фазовый портрет.

Вариант		Временная развертка фазовых траекторий
16	$\alpha=5, \beta=8,$ $\gamma=1.9, \mu=2.1, \lambda=3.16, \delta=0.9$	
17	$\alpha=4, \beta=9,$ $\gamma=1.7, \mu=2.2, \lambda=3.12, \delta=0.7$	
18	$\alpha=3, \beta=8,$ $\gamma=1.8, \mu=2.4, \lambda=3.10, \delta=0.7$	
19	$\alpha=2, \beta=6,$ $\gamma=1.5, \mu=2.0, \lambda=3.16, \delta=0.9$	
20	$\alpha=5, \beta=6,$ $\gamma=1.3, \mu=2.5, \lambda=3.16, \delta=0.9$	

Указать, где находят применение данный тип модели (Лоренца).

ПРИМЕРЫ ВЫВОДА УПРАВЛЕНИЯ - Блок задач 4

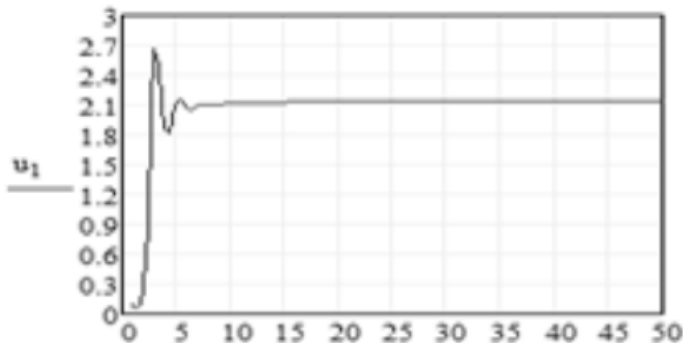
Исходные данные	$\frac{dY_1}{dt} = \alpha Y_2 Y_3 - \gamma Y_1;$ $\frac{dY_2}{dt} = \mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3;$ $\frac{dY_3}{dt} = \delta Y_2 - \lambda Y_3 + u_1,$	Целевая макропеременная
		$\psi_1(t) = Y_1 - \rho Y_2,$
Функционал качества целевой системы	$\Phi(\psi) = \int_0^{\infty} (\psi^2 + T^2 \dot{\psi}^2) dt \xrightarrow{u} \min,$ <p>интеграл от лагранжиана как полная «энергия движения»</p>	Уравнение Э-Л
		$T\dot{\psi} + \psi = 0$

$$T\dot{\psi} + \psi = T(Y_3 - \rho Y_2)' + \psi = 0 \Rightarrow$$

$$(\dot{Y}_3 - \rho \dot{Y}_2) + \psi = T(\delta Y_2 - \lambda Y_3 + u_1 - \rho(\mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3)) + \psi = 0 \Rightarrow$$

$$T(\delta Y_2 - \lambda Y_3 + u_1 - \rho(\mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3)) + \psi = 0 \Rightarrow$$

$$u = -\psi T^{-1} - (\delta Y_2 - \lambda Y_3 + u_1 - \rho(\mu(Y_2 + Y_3) - \beta Y_1 Y_3))$$



Ищется функция $y(x)$, на которой функционал вида $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$, достигает своего глобального экстремума.

Теорема. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Для того чтобы функционал

$$J(y(u)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, y(u(t)), y'(u(t))) dt,$$

определенный на множестве непрерывно дифференцируемых функций $D = \{y(t)\}$, удовлетворяющих граничным условиям $y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1$, достигал на функции $y(t)$ экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad \Rightarrow \quad u(t)$$

Интегральные кривые дифференциального уравнения Эйлера называются экстремалями. Уравнение Эйлера в развернутом виде после взятия полной производной $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)$ и вспомогательного обозначения (для читабельности)

$$\tilde{F} := \frac{\partial F}{\partial y'}, \tilde{F} = \tilde{F}(t, y(t), y'(t)), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} y' + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y'} y'' - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В УПРАВЛЕНИИ

Пусть объект управления $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, а цель управления $\psi(x(t)) = 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Если вариационная задача (Φ_c, ψ) имеет вид

$$\Phi_c = \int_0^{\infty} (\psi^2 + T^2 \dot{\psi}^2) dt \rightarrow \min, \psi \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

то решения функционального уравнения $T\dot{\psi} + \psi = 0$ определяют устойчивые экстремали, обеспечивающие минимум функционалу Φ_c .

Действительно, уравнение Эйлера-Лагранжа для Φ_c с подынтегральной функцией

$$F(t, \psi, \dot{\psi}) = \psi^2 + T^2 \dot{\psi}^2 \quad \text{примет вид:} \quad \frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\psi}} = 2\psi - 2T^2 \ddot{\psi} = 0. \quad \text{Умножая последнее}$$

уравнение на $\dot{\psi}$ и интегрируя по t , получаем

$$\psi \dot{\psi} - T^2 \ddot{\psi} \dot{\psi} = 0 \Rightarrow \int \psi d\psi - T^2 \int \dot{\psi} d\dot{\psi} = 0 \Rightarrow \psi^2 - T^2 \dot{\psi}^2 = C,$$

откуда с учетом условий $\psi = 0, \dot{\psi} = 0, t \rightarrow \infty$ постоянная $C = 0$.

Переписав полученное выражение в виде $(\psi - T\dot{\psi})(\psi + T\dot{\psi}) = 0$, замечаем, что свойством асимптотической устойчивости обладают решения уравнения $\psi + T\dot{\psi} = 0$.

$$T\dot{\psi} + \psi = 0$$

ОСНОВНОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ для определения формулы управления

Использованные источники

- Харкевич А. А. Автоколебания. М.: ГИТТЛ, 1954.
- A. Jenkins. [Self-oscillation](#) // [ArXiv.org](#). 2011. Р. 1—17.
- Колесников А.А. Прикладная синергетика: основы системного синтеза. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2007
- Колесников А.А. Лекция «Нелинейный системный синтез – центральная проблема современной науки и техники: синергетическая концепция» www.ccsd.tsure.ru
- Труды Колесникова А.А из разных источников.
- <https://studfile.net/preview/997107/> Примеры временных и частотных характеристик типовых динамических звеньев