Оглавление

Лабораторная работа 1. Часть 1. Модели линейного и нелинейного программирования.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. ЧАСТЬ 1.

Цель настоящей работы – освоить средства моделирования задач линейного программирования.

ХОД РАБОТЫ

1. Ознакомиться со справочными сведениями;
2. Формализовать поставленную текстовую задачу.
3. Разработать шаблон в Excel для решения задачи, предусматривающего изменение начальных данных.
4. Разработать программу, моделирующую алгоритм поиска оптимального решения для формализованной задачи, используя вычислительный пакет MathLab или язык программированияPython.
5. Составить и представить преподавателю отчет о работе и устно защитить. Отчет должен содержать:

а) содержательную постановку задачи (ПЗ);
б) формализованную ПЗ с использованием терминологии ЛП;
в) скриншоты решения Excel;
г) скриншоты работы программы;
д) приложение с полным текстом программы;

Исходные данные: Варианты задач в Приложении 1 по номеру студента в списке.

Справочные сведения. Часть 1. Линейные задачи.

1. Общий вид задачи линейного программирования. Задача линейного программирования формализуется следующим образом:

$$\min f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \quad (1.1)$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{array}\right\} \quad (1.2)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}; \quad b_j \geq 0, \quad j = \overline{1,m} \quad (1.3)$$

Здесь: n – число переменных; m – число ограничений; $A = \{a_{ij}\}$ действительная матрица ограничений размерностью $(m \times n)$; a_{ij} коэффициенты при переменных в ограничениях

(1.2); $C=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ вектор–строка, c_j – коэффициенты при переменных в целевой функции (1.1); $b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)^T$ вектор правой части ограничений; $f(x)=(C,x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$ целевая функция.

Стандартная форма задач линейного программирования в матричной записи. Задача линейного программирования имеет стандартную (каноническую) форму, если все ее ограничения имеют форму равенства (кроме ограничений неотрицательности переменных $x_j \ge 0$):

$$f(x)=Cx\to\min;$$
$$Ax=b;$$
$$x\ge 0.$$

Задачи линейного программирования со смешанными ограничениями.

$$f(x)=Cx\to\min;$$
$$A_1x=b_1;$$
$$A_2x\le b_2;$$
$$x\ge 0.$$

Замечание 1. Если ищется максимум целевой функции $f(x)$, то заменой целевой функции на $-f(x)$ сводят исходную задачу к минимизации функции $\min\left(-f(x)\right)$.

основные определения линейного программирования, используя СФ задач линейного программирования:

$$\min\ f(x)=C\,x,$$
$$Ax=b,\quad x\ge 0.$$

Некоторые определения:

1) Вектор *x*, удовлетворяющий всем ограничениям задачи линейного программирования, называется *допустимым решением (планом).*
2) План x^*, который обеспечивает достижение экстремума функции $f(x)$, называется *оптимальным решением (планом):* $f^*=f(x^*)=\max f(x)$.
3) *Допустимая область* S или область допустимых решений состоит из всех допустимых решений: $S=\{x\mid Ax=b,\,x\ge 0\}$.
4) Если $S=\varnothing$, то задача линейного программирования называется противоречивой.
5) Если $extr\left(f\right)\to\mp\infty$, то задача линейного программирования имеет *неограниченный оптимум.*

Утверждение (неединственность оптимального решения). Существует более одного допустимого решения со значениями целевой функции, равными оптимальному значению целевой функции f^*.

1.Сведение задачи линейного программирования к стандартной форме на примерах.

Пример 1.1. Пусть задача линейного программирования имеет вид:

$$5x_1 - 3x_2 \to \min;$$
$$x_1 - x_2 \ge 2;$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 4;$$
$$-x_1 + 6x_2 = 10;$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

Вводим дополнительные переменные $x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$ в первом и втором ограничении, получим равносильную задачу:

$$5x_1 - 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \min;$$
$$x_1 - x_2 - x_3 = 2;$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 4;$$
$$-x_1 + 6x_2 = 10;$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0; x_4 \ge 0.$$

Замечание 1.1. В случае незнакопостоянных $x_j, j = \overline{1, n}$ переменные заменяют выражением $x_j = u_j - v_j$, где $u_j \ge 0, v_j \ge 0.$ В этом случае значения x_j могут быть положительными/отрицательными в зависимости от значений u_j и v_j.

Пример 1.2. Пусть задача линейного программирования имеет вид:

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 7;$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \ge 2;$$
$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5;$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \begin{cases} \ge 0 \\ \le 0 \end{cases}.$$

Преобразуем эту задачу к стандартной форме:

1) заменим переменную x_3 на $x_4 - x_5$, где $x_4, x_5 \ge 0$;

2) умножим обе части уравнения $3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5$ на (1);

3) введем дополнительные переменные x_6, x_7 в ограничения первых двух неравенств, соответственно;

4) припишем нулевой коэффициент переменным x_6, x_7, а целевую функцию умножим на (-1);

5) записываем полученную задачу:

$$-f(x) = -x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 3x_5 - 0 \cdot x_6 - 0 \cdot x_7 \to \min;$$
$$x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 7,$$
$$x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 2,$$
$$-3x_1 + x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 5;$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1,7}.$$

3. Формализация тематических задач. Построение моделей линейного программирования. Разработка модели линейного программирования основана на этапах.

1. Определение переменных задачи.
2. Представление ее ограничений в виде линейных уравнений или неравенств.
3. Задание линейной целевой функции, экстремум которой подлежит определению.

Пример 1.3. Задача технического контроля. В отделе технического контроля (ОТК) наблюдаются контролеры первого и второго разрядов. Норма выработки ОТК за восьмичасовой рабочий день составляет не менее 1800 изделий. Контролер первого разряда (К1) проверяет 25 изделий в час, причем не ошибается в 98 % случаев. Контролер второго разряда (К2) проверяет 15 изделий в час, его точность – 95 %. Зарплата К1 – 4 доллара в час, К2 – 3 доллара в час. При каждой ошибке контролера предприятие несет убытки в размере двух долларов. Фирма может использовать 8 контролеров первого разряда (К1) и 10 контролеров второго разряда (К2). Цель: определить оптимальный состав ОТК, при котором общие затраты на контроль будут минимальны.

Формализация задачи (построение модели). Обозначим x_1 и x_2 количество контролёров К1 и К2, соответственно. По условию задачи имеют место ограничения:

$$x_1 \le 8,\ x_2 \le 10.$$

Факт, что ежедневной проверке подлежит не менее 1800 изделий, формализуется следующими соотношениями:

$$8 \cdot 25x_1 + 8 \cdot 15x_2 = 200x_1 + 120x_2 \ge 1800, \text{ или } 5x_1 + 3x_2 \ge 45.$$

Поскольку (по условию задачи) критерием оптимального решения является минимальность общих затрат на контроль, то целевая функция примет вид:

$$f(x_1, x_2) = 8 \cdot (5x_1 + 4{,}5x_2) = 40x_1 + 36x_2.$$

Формальная модель задачи линейного программирования примет вид:

Найти $\arg\min f(x_1, x_2) = 40x_1 + 36x_2$ при ограничениях:

$$x_1 \le 8, x_2 \le 10,$$
$$5x_1 + 3x_2 \ge 45,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Литература

С.И. Колесникова.Методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Компьютерное моделирование».

Учебно-методическое пособие (02.03.03(01), 09.03.04(01)_О_КМ_2022_43_1). 2022.

Цель руководства по курсу «Компьютерное моделирование»: сопоставление проблем и задач различной прикладной направленности с математическим аппаратом, на основе которого к этим задачам можно «подступиться», построить формализованную модель, получить вариант решения, удовлетворяющий определенным требованиям, в том числе и оптимальный, если постановка задачи допускает задание критерия качества. Основнойакцент сделан на знакомство с некоторыми современными методами моделирования нелинейных содержательных задач, большое количество которых объясняется «невозможностью построить общую теорию нелинейных систем» (по Д. Нейману).

Пособие содержит девять лабораторных работ, каждая из которых включает постановку задачи, вариант подхода к ее решению, используемый математический аппарат, алгоритм или схему решения, иллюстративный материал, варианты индивидуальных заданий. Пособие предназначено для студентов технических ВУЗов.

Рекомендуемая литература для выполнения лабораторной работы 1.

1. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990.
2. Дэннис. Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер.с англ. М.: Мир, 1988.
3. Карманов В.Г. Математическое программирование: Учебное пособие. М.: Наука, 1989.
4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1991.
5. Аоки М. Введение в методы оптимизации. М.: Наука, 1988.
6. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. М.: Мир, 1994.
7. Уайлд Д. Дж. Методы поиска оптимума. М.: Наука, 1997.
8. Габбасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Изд во БГУ, 1988.
9. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1989.
10. Гилл Ф. и др. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1992.

Лабораторная работа 1. Часть 2. Модели нелинейного программирования. Вариационная задача.

Цель работы ЛР-1. Часть 2

Цель настоящей работы – освоить средства моделирования задач нелинейного программирования. Решение простейшей вариационной задачи.

Ход работы. Часть 2

1. Ознакомиться со справочными сведениями;
2. Записать и решить уравнение Эйлера-Лагранжа для оптимизационного функционала.
3. Разработать программу, моделирующую алгоритм поиска оптимального решения для формализованной задачи, используя вычислительный пакет MatLab и/или язык программирования Python. За аналитическое решение («в ручную») ДУ – дополнительные баллы-бонусы. Убедиться в равносильности решений.
4. Найти значение функционала на полученной экстремали.
5. Подготовить и устно защитить отчет о работе.

Исходные данные: Варианты задач в Приложении 2 по номеру студента в списке.

Примеры решения вариационных задач с использованием символьных вычислений в MatLab можно найти в книгах Иглина С.П. (см. рекомендуемую литературу), некоторые материалы из которых доступны также по ссылке: http://iglin.exponenta.ru/All/BookDisc/AllDocs/Part2/part2.html
При использовании языка программирования Python, к примеру, можно воспользоваться пакетом для символьных вычислений SymPy.

Справочные сведения. Нелинейные задачи оптимизации.

1. Простые задачи нелинейного программирования условно делятся на два класса:
1) задачи безусловной оптимизации, в которых требуется нахождение экстремума (оптимума) нелинейной функции при отсутствии ограничений на значения ее переменных;
2) задачи условной оптимизации, в которой все ограничения являются равенствами (неравенствами).
В задачах нелинейного программирования рассматривают два вида оптимальных значений: локальные и глобальный.
Модели нелинейного программирования возникают в следующих прикладных областях: оптимальное управление; проектирование строительных конструкций; проектирование механических конструкций; электрические цепи; управление водными ресурсами; распределение ресурсов в условиях неполной информации и многих других.

В рамках лабораторной работы 2 рассмотрим важную задачу вариационного исчисления, широко применяемую на практике.

2. Задача вариационного исчисления. Основная цель задачи: исследование функционалов на экстремум. Классические задачи прикладной направленности, требующие привлечение аппарата вариационного исчисления:
- о брахистохроне (И. Бернулли, 1696) – плоской линии, по которой материальная точка быстрее всего попадает под действием силы тяжести из точки А в точку В (В ниже А и точки не лежат на одной вертикальной прямой);
- о геодезической линии – линии наименьшей длины, расположенной на заданной поверхности и соединяющей две данные точки;
- царевны Дидоны (Карфаген): ремешком фиксированной длины ограничить участок земли наибольшей площади;
- об экстремальности энтропии в теории информации: какими вероятностными характеристиками должен обладать сигнал для переноса максимального количества информации, и пр.

Постановка основной задачи вариационного исчисления. Для функционала $J(f)$ с областью определения $f \in D$ требуется найти элемент $f_0 \in D$, сообщающий функционалу экстремальное значение.
Экстремум функционала (в частности, функции) называется *условным*, если он достигнут при условии, что аргументы функционала (функции) связаны уравнением связи $\varphi(f)=0$.
Необходимое условие экстремума (для частного случая $f: R^n \to R,\ \varphi_i: R^n \to R^m, i=\overline{1,m}$).
Теорема 2.1. Если функционал (функция) f имеет в точке $a \in R^n$ условный экстремум при ограничениях $\varphi_i(x)=0, i=\overline{1,m}$, а ранг матрицы $\left\| \dfrac{\partial \varphi_i(a)}{\partial x_j} \right\|_{m \times n}$ равен m, то существуют числа $\lambda_i, i=\overline{1,m}$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j}=0,\ j=\overline{1,n}.$$

Здесь функционал (функция) $L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x)$ называется *функцией Лагранжа* («лагранжианом»), а числа $\lambda_i, i=\overline{1,m}$ называются множителями Лагранжа.
Достаточное условие экстремума (для частного случая $f: R^n \to R,\ \varphi_i: R^n \to R, i=\overline{1,m}$).
Теорема 2.2. Пусть выполнены условия:
1) $d\varphi_i=0, i=\overline{1,m}$; $\varphi_i(a)=0, i=\overline{1,m}$;
2) $f: R^n \to R,\ \varphi_i: R^n \to R, i=\overline{1,m}$ - дважды непрерывно дифференцируема в окрестности стационарной точки $a \in R^n$;

3) $rang\left\|\frac{\partial\varphi_i(a)}{\partial x_j}\right\| = m$;

4) числа $\lambda_i, i=\overline{1,m}$, удовлетворяют системе уравнений $\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j} = 0, j=\overline{1,n}$.

Тогда если квадратичная форма $d^2L(a,\lambda)$ знакопостоянна, то функционал (функция) f имеет в точке $a\in R^n$ строгий условный экстремум, причем строгий условный максимум (минимум) при $d^2L(a,\lambda)<0$ $\left(d^2L(a,\lambda)>0\right)$.

Если квадратичная форма $d^2L(a,\lambda)$ знакопеременна, то функционал (функция) f не имеет в точке $a\in R^n$ условный экстремум.

Простейшая задача вариационного исчисления - задача с закрепленными границами. Уравнение Эйлера.

Пусть функция $F(x,y,y')$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до третьего порядка включительно. Среди всех непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$, таких, что $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ найти доставляющую слабый экстремум функционалу $J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$ (то есть в некоторой окрестности $U\left(y(x)\right)$).

Теорема 2.3. **Уравнение Эйлера-Лагранжа.** Для того чтобы функционал $J(y)$, определенный на множестве непрерывно дифференцируемых функций $D=\left\{y(x)\right\}$, удовлетворяющих граничным условиям $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$, достигал на функции $y(x)$ экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0.$$

Интегральные кривые дифференциального уравнения Эйлера называются экстремалями. Уравнение Эйлера в развернутом виде после взятия полной производной $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)y'+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)y''-\frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

Пример 2.1. Найти экстремальное значений функционала $J(y)=\int_0^1\left(4y-y'^2+12x^2y'\right)dx$ с граничными условиями: $y(0)=1, y(1)=4$.

Здесь уравнение Эйлера примет вид: $-2y''+24x-4=0 \Rightarrow y''=12x-2$.

Интегрирование этого уравнения приведет к выражению:

$$y=2x^3-x^2+C_1x+C_2.$$

С учетом условий на границы получаем $C_1=2, C_2=1$.

Итоговый вид экстремали $y=2x^3-x^2+2x+1$.

Решение примера 2.1 в MatLab. Сначала найдем уравнение Эйлера-Лагранжа и решим его:

```
% This code was tested in MatLab 2018a
clear all
clc
% Объявляем символьные переменные; поскольку MatLab не умеет символьно
% брать частную производную по зависимой переменной y(x), объявляем
первую
% производную y'=dy/dx как отдельную независимую переменную d1y.
% При необходимости для второй производной y''=d^2y/dx^2 можно
использовать
% переменную d2y и т.д.
syms x y d1y
F = 4*y - d1y^2 + 12 * x^2 * d1y;
dFdy = diff(F, y);
dFd1y = diff(F, d1y);
disp(dFdy)
disp(dFd1y)
% Теперь задаем y как функцию от x для дальнейших символьных расчётов,
% также задаем dy как полноценную символьную производную y по x
syms y(x)
dy = diff(y, x);
dFd1y_p = subs(dFd1y, {y, d1y}, {y(x), dy});
d_dFd1y_dx = diff(dFd1y_p, x);
disp(d_dFd1y_dx)
% Находим и решаем уравнение Эйлера-Лагранжа
L = dFdy - d_dFd1y_dx == 0;
disp(L)
sol = dsolve(L);
disp(sol)
```

Далее с помощью функции `subs` можно подставить в `sol` граничные условия. Получим систему из двух обычных уравнений. Решив эту систему уравнений с помощью функции `solve` (не путать с `dsolve`) найдем константы $C_1 = 2, C_2 = 1$.

Решение примера 2.1 с помощью пакета SymPy в Python. Отладка скрипта может производиться с использованием сервиса SymPy Live (live.sympy.org), позволяющего осуществлять символьные вычисления из браузера. Также с символьными вычислениями можно работать в обычной консоли, в IPython и т.д. Следует учитывать, что сервис SymPy Live имеет ограничения по времени выполнения каждой команды, поэтому для проведения сложных расчетов рекомендуется установить пакет SymPy локально. Пример кода:

```
# this code requires SymPy v1.4
# следующие две строки не нужны при запуске кода на live.sympy.org
from sympy import init_printing
init_printing()
from sympy import Symbol, Function, Derivative, dsolve, solve
x = Symbol('x')
y = Function('y')(x)
dy = Derivative(y)
F = 4*y - dy**2 + 12 * x**2 * dy
F.doit() # выводим выражение в человекочитаемом формате ...
print(F) # ... и в машиночитаемом виде
dFdy = Derivative(F, y)
dFd1y = Derivative(F, dy)
dFdy.doit()
```

```
dFd1y.doit()
L = dFdy - Derivative(dFd1y, x)
sol = dsolve(L)
eq1 = sol.subs({x:0, y:1})
eq2 = sol.subs({x:1, y:4})
coeffs = solve([eq1, eq2])
res = sol.subs(coeffs)
res.doit()
```

Рекомендуемая литература для лабораторной работы 1. Часть 2.

11. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы.   М.: Наука, 1990.
12. Дэннис. Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер.с англ.   М.: Мир, 1988.
13. Карманов В.Г. Математическое программирование: Учебное пособие.   М.: Наука, 1989.
14. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1991.
15. Аоки М. Введение в методы оптимизации.   М.: Наука, 1988.
16. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход.   М.: Мир, 1994.
17. Уайлд Д. Дж. Методы поиска оптимума.   М.: Наука, 1997.
18. Габбасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации.   Минск: Изд во БГУ, 1988.
19. Бахвалов Н.С. Численные методы.   М.: Наука, 1989.
20. Гилл Ф. и др. Практическая оптимизация.   М.: Мир, 1992.
21. Иглин С.П. Вариационное исчисление с применением MATLAB. ХПИ, Харьков, Украина, 2001, 112с.
22. Иглин С.П. Математические расчеты на базе MATLAB. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 640 с.
23. SymPy Live – интерактивный интерпретатор командной строки для работы с символьными вычислениями в браузере: https://live.sympy.org/
24. SymPy Documentation – официальная документация к пакету SymPy языка Python: https://docs.sympy.org

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Перечень задач к лабораторной работе 1. Часть 1

Вариант 1

Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 20000 цыплят, которые выращиваются до 8недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Хотя недельный рацион цыплят зависит от их возраста, в дальнейшем будем считать, что в среднем (за 8 недель) он составляет 1 фунт.

Для того чтобы цыплята достигли к восьмой неделе необходимого веса, кормовой рацион должен удовлетворять определенным требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов или ингредиентов. Ограничим наше рассмотрение только тремя ингредиентами: известняком, зерном и соевыми бобами. В таблице приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из ингредиентов и удельную стоимость каждого ингредиента.

Ингредиент	Содержание питательных веществ, фунт/фунт ингредиента.			Стоимость $/фунт
	Кальций	Белок	Клетчатка	
Известняк	0,38			0,04
Зерно	0,001	0,09	0,02	0,15
Соевые бобы	0,002	0,5	0,08	0,4

Смесь должна содержать:
Не менее 0,8% но и не более 1,2% кальция
Не менее 22% белка
Не более 5% клетчатки
Необходимо определить количество каждого из трех ингредиентов, образующих смесь минимальной стоимости, при соблюдении требований к общему расходу кормовой смесии ее питательности.

Вариант 2

В отделе технического контроля (ОТК) некоторой фирмы работают контролеры первого и второго разрядов. Норма выработки ОТК за восьмичасовой рабочий день составляет не менее 1800 изделий. Контролер первого разряда (К1) проверяет 25 изделий в час, причем не ошибается в 98 % случаев. Контролер второго разряда (К2) проверяет 15 изделий в час, его точность – 95 %.
Зарплата К1 – 4 доллара в час, К2 – 3 доллара в час. При каждой ошибке контролера фирма несет убыток в размере двух долларов. Фирма может использовать 8 К1 и 10 К2. Фирма планирует определить оптимальный состав ОТК, при котором общие затраты на контроль будут минимальны.

Вариант 3

Задача распределения ресурсов

Для изготовления двух видов продукции P1 и P2 на предприятии используют два вида сырья S1 и S2. При этом, производство ограничено как запасами сырья, так и временем машинной обработки. Количество ежедневно получаемого сырья, единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемой от реализации единицы продукции, приведены ниже. Указаны затраты машинного времени для изготовления каждого вида продукции и максимально возможное время эксплуатации машин за сутки.

Исходные данные

Типы ресурсов	*Запас ресурсов*	*Вид продукции*	
		P_1	P_2
Сырье S_1	*40*	*8*	*5*
Сырье S_2	*30*	*5*	*6*
Машинное время	*20*	*2*	*5*
Прибыль от ед. продукции (в долларах)		*50*	*40*

Требуется составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

Вариант 4

На складах w1, w2, w3 хранятся соответственно 15, 25, 20 кроватей, должны быть распределены по четырем магазинам m1, m2, m3, m4, где требуется 20, 12, 5 и 9 кроватей. Пусть стоимость перевозки одной кровати со склада в магазин задается следующей таблицей в условных единицах:

Склад	Магазин			
	M1	M2	M3	M4
W1	2	2	2	4
W2	3	1	1	3
W3	3	6	3	4

Как следует планировать перевозку для минимизации стоимости?

Вариант 5

Некоторое государственное учреждение приняло решение одеть своих сотрудников в фирменные костюмы. Оно получило следующие предложения от фирм F1, F2, F3 на покупку фирменных костюмов трех размеров: S1, S2, S3.

	Стоимость одного костюма (у.е.)		
	S1	S2	S3
Фирма F1	110	115	126
Фирма F2	107	115	130
Фирма F3	104	109	116

Будут заключены контракты на покупку 1000 костюмов размера S1, 1500 костюмов размера S2 и 1200 костюмов размера S3. Производственные мощности фирм позволяют выпускать 1000 костюмов разных размеров фирме F1, 1500 костюмов фирме F2 и 2500 костюмов фирме F3.

Необходимо, чтобы контракты были заключены с минимизацией общей стоимости. Определитьцелесообразное распределение заказов.

Вариант6

Требуется организовать производственный процесс так, чтобы общие издержки не превышали 4,5 млн. с учетом того, что на данном оборудовании может быть произведено не более 35000 единиц товара

Планирование загрузки оборудования.		
Продукция	Издержки	Маржа
Товар 1	456,23	5%
Товар 2	23,6	7%
Товар 3	18,99	13%
Товар 4	366	10%
Товар 5	98	9%
Товар 6	3,7	10%

Издержки – затраты на производство.

Маржа – норма прибыли (процент от издержек).

Продажи – сумма, полученная при продаже (издержки + прибыль).

Вариант 7

Для изготовления сплава из меди, олова и цинка в качестве сырья используют два сплава тех же металлов, отличающиеся составом и стоимостью. Данные об этих сплавах приведены в таблице.

Компоненты сплава	Содержание компонентов в %	
	Сплав №1	Сплав №2
Медь Олово Цинк	10 10 80	10 30 60
Стоимость 1	40 руб.	60 руб.

Получаемый сплав должен содержать не более 2 кг меди, не менее 3 кг олова, а содержание цинка может составлять от 7,2 до 12, 8 кг.

Обеспечить количества X_j, j=1,2 сплавов каждого вида, обеспечивающие получение нового сплава с минимальными затратами на сырье.

Вариант 8

Для изготовления двух видов изделий A_1 и A_2 завод использует в качестве сырья алюминий и медь. На изготовлении изделий заняты токарные и фрезерные станки. Исходные данные задачи приведены в таблице.

Вид ресурсов	Объем ресурсов	Нормы расхода на 1 изделие	
		Изделие A_1	Изделие A_2
Алюминий (кг)	570	10	70
Медь (кг)	420	20	50
Токарные станки (станко час)	5600	300	400
Фрезерные станки (станко час)	3400	200	100
Прибыль на 1 изделие (тыс. руб.)		30	80

Определить количества X_j (j=1,2) изделий A_j, которые необходимо изготовить для достижения максимальной прибыли.

Вариант 9

Предприятие, располагающее ресурсами сырья трех видов $B_i i=1,2,3$, может производить продукцию четырех видов A_j ($j=1,2,3,4$). В таблице указаны затраты ресурсовB_i, на изготовление 1 т продукции A_j, объем ресурсов и прибыль, получаемая от изготовления 1 т продукции A_j.

Вид сырья	Вид продукции				
	A_1	A_2	A_3	A_4	Объем ресурсов, т
B_1 B_2 B_3	4 30 16	5 14 14	2 18 8	3 22 10	60 400 128
Прибыль, руб.	480	250	560	300	

Определить ассортимент выпускаемой продукции, при котором полученная прибыль будет максимальной, при условии:

а) продукции A_2 необходимо выпустить не менее 8 т, продукции A_4 не более 5 т, а продукции A_1 и A_3 в отношении 2:1;

б) производственные издержки на 1т продукции A_j, $j=1,..4$, составляют соответственно 30, 90,120 и 60 руб., а суммарные издержки не должны превышать 960 руб.

Вариант 10

Пусть вашей фирме необходимо заключить контракт на поставку товаров на некоторую сумму, меньшую или равную P условных единиц. При этом имеется выбор из N партнеров, которые могут поставить товар на K_j условных единиц каждый. Ожидаемая прибыль от сделки с iым партнером составляет d % от суммы заключенной сделки, но при этом риск от сделки с i ым партнером составляет H_i, % от суммы сделки. Требуется определить наиболее выгодных партнеров и сумму сделки с каждым из них, обеспечив при этом максимальное значение прибыли при значении суммарного риска от сделок, не превышающего суммы прибыли. Исходные данные приведены в таблице.

Параметры	Фирмы				
	СтикС	Комплек	Тэтро	ЭлекТ	Играм
Максимальная сумма контракта с фирмой К*, у.е.	30000	20000	12000	15000	10000
Ожидаемая прибыль d, %	10	11	11,8	10	12
Возможные убытки H_i, %	8	8,5	8,85	8,2	9
Максимальная сумма контракта равна 50000 у.е.					

Вариант 11

Объединение «Комфорт» производит холодильники, газовые плиты, морозильные шкафы и электропечи по цене 200, 180, 250 и 100 р. соответственно. Постоянным фактором, ограничивающим объёмы производства, является фиксированная величина трудовых ресурсов – 12000 человеко-часов в месяц. Выяснилось, однако, что в ближайший месяц дефицитной будет и листовая сталь для корпусов указанных изделий, поскольку поставщики смогут обеспечить лишь 7000 м^2 этого материала.

Требуется составить план производства на данный месяц, с тем чтобы максимизировать стоимость выпущенной продукции. Известно, что для изготовления холодильника требуется 2 м^2 листовой стали и 3 чел.-ч рабочего времени, для газовой плиты – соответственно 1,5 м^2 и 3 чел.-ч, для морозильного шкафа – 3 м^2 и 4 чел.-ч, для электропечи – 1 м^2 и 2 чел.-ч.

Вариант 12

На звероферме могут выращиваться песцы, черно-бурые лисицы, нутрии и норки. Для их питания используются три вида кормов. В таблице приведены нормы расхода кормов, их ресурс в расчёте на день, а также прибыль от реализации одной шкурки каждого зверя.

Вид корма	Нормы расхода кормов (кг/день)				Ресурс кормов (кг)
	Песец	Лиса	Нутрия	Норка	
I	1	2	1	2	300
II	1	4	2	0	400
III	1	1	3	2	600
Прибыль р./шкурка	6	12	8	10	

Определить, сколько и каких зверьков следует выращивать на ферме, чтобы прибыль от реализации шкурок была наибольшей.

Вариант 13

Участник экспедиции «Северный полюс» укладывает рюкзак, и ему требуется решить, какие положить продукты. В его распоряжении имеются мясо, мука, сухое молоко и сахар. В рюкзаке для продуктов осталось лишь 45дм^3 объёма, и нужно, чтобы суммарная масса продуктов не превосходила 35 кг. Врач экспедиции рекомендовал, чтобы мяса (по массе) было больше муки по крайней мере в два раза, муки не меньше молока, а молока по крайней мере в восемь раз больше, чем сахара. Сколько и каких продуктов нужно положить в рюкзак, с тем, чтобы суммарная калорийность продуктов была наибольшей? Характеристики продуктов приведены в таблице.

Характеристики	Продукты			
	Мясо	Мука	Молоко	Сахар
Объём (дм^3/кг)	1	1,5	2	1
Калорийность (ккал/кг)	1500	5000	5000	4000

Вариант 14

Завод изготовляет корпуса для холодильников и комплектует их оборудованием, поставляемым без ограничений другими предприятиями. В таблице указаны нормы трудозатрат, затрат материалов для изготовления корпусов, ограничения по этим ресурсам и расчёте на месяц и прибыль от реализации холодильника каждой из пяти марок.

Наименование ресурса	Марка холодильника					Объём ресурса
	1	2	3	4	5	
Трудозатраты (чел.-ч)	2	3	5	4	4	900
Металл ($м^2$)	2	2	4	5	0	8500
Пластик ($м^2$)	1	3	2	0	4	4000
Краска (кг)	1	2	3	3	2	5000
Прибыль (р.)	40	70	120	120	50	

Найти месячный план выпуска холодильников, максимизирующий прибыль.

Вариант 15

Для серийного изготовления детали механический цех может использовать пять различных технологий её обработки на токарном, фрезерном, строгальном и шлифовальном станках. В таблице указано время (в минутах) обработки детали на каждом станке в зависимости от технологического способа, а также общий ресурс рабочего времени станков каждого вида за одну смену.

Станки	Условный код технологии					Ресурс времени станков (мин)
	1	2	3	4	5	
Токарный	2	1	3	0	1	4100
Фрезерный	1	0	2	2	1	2000
Строгальный	1	2	0	3	2	5800
Шлифовальный	3	4	2	1	1	10800

Требуется указать, как следует использовать имеющиеся технологии, с тем чтобы добиться максимального выпуска продукции.

Вариант 16

Кондитерская фабрика для производства трёх видов карамели A, B и C использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья каждого вида на производство 1 т карамели данного вида приведены в таблице.

В ней же указано общее количество сырья каждого вида, которой может быть использовано фабрикой, а также приведена прибыль от реализации 1 т карамели данного вида.

Вид сырья	Марка карамели			Объём ресурса
	A	B	C	
Сахарный песок Патока Фруктовое пюре	0,8 0,4 –	0,5 0,4 0,1	0,6 0,3 0,1	800 600 120
Прибыль от реализации 1 т продукции (р.)	108	112	126	

Найти план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль от её реализации.

Вариант 17

При откорме животных каждое животное ежедневно должно получить не менее 60 ед. питательного вещества А, не менее 50 ед. вещества В и не менее 12 ед. вещества С. Указанные питательные вещества содержат три вида корма. Содержание единиц питательных веществ в 1 кг каждого из видов корма приведено в следующей таблице:

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ на 1 кг корма вида		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Составить дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ при минимальных денежных затратах, если цена 1 кг корма I вида составляет 9 коп., корма II вида – 12 коп. и корма III вида – 10 коп.

Вариант 18

Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в следующей таблице:

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	
Древесина ($м^3$): I вида II вида Трудоёмкость (человеко-час)	 0,2 0,1 1,2	 0,1 0,3 1,5	 40 60 371,4
Прибыль от реализации одного изделия (р.)	6	6	

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует изготовлять, чтобы прибыль от их реализации была максимальной

Вариант 19

Для производства двух видов изделий А и В используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида приведены в таблице. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени оборудования (ч)
	А	В	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль от реализации одного изделия (р.)	14	18	

Найти план выпуска изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Вариант 20

На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трёх видов в количествах, соответственно равных 24, 31 и 18 шт. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя приведено в таблице. В ней же указана величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	1	2
I II III	2 5 2	6 4 3
Величина отходов (см^2)	12	16

Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

Вариант 21

Чаеразвесочная фабрика выпускает чай сорта А и Б, смешивая три ингредиента: индийский, грузинский и краснодарский чай. В таблице приведены нормы расхода ингредиентов, объём запасов каждого ингредиента и прибыль от реализации 1 т чая сорта А и Б.

Ингредиенты	Нормы расхода (т/т)		Объём запасов (т)
	А	Б	
Индийский чай	0,5	0,2	600
Грузинский чай	0,2	0,6	870
Краснодарский чай	0,3	0,2	430
Прибыль от реализации 1 т продукции (р.)	320	290	

Требуется составить план производства чая сорта А и Б с целью максимизации суммарной прибыли.

Вариант 22

Нефтеперерабатывающий завод производит за месяц 1500 000 л алкилата, 1200 000 л крекинг-бензина и 1300 000 л изопентона. В результате смешивания этих компонентов в пропорциях 1:1:1 и 3:1:2 получается бензин сорта А и Б соответственно. Стоимость 1000 л бензина сорта А и Б соответственно равна 90 р. и 120 р.

Определить месячный план производства бензина сорта А и Б, максимизирующий стоимость выпущенной продукции.

Вариант 23

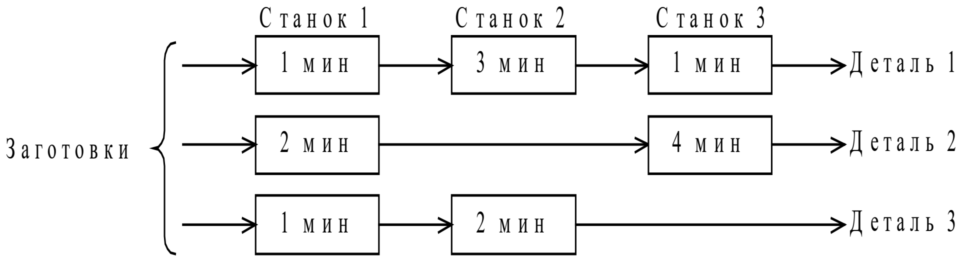
В области имеются два цементных завода и три потребителя их продукции – домостроительных комбината. В таблице указаны суточные объёмы производства цемента, суточные потребности в нём комбинатов и стоимость перевозки 1 т цемента от каждого завода к каждому комбинату.

Заводы	Производство цемента (т/сут)	Стоимость перевозки 1 т цемента (р.)		
		Комбинат 1	Комбинат 2	Комбинат 3
1	40	10	15	25
2	60	20	30	301
	Потребности в цементе (т/сут)	50	20	30

Требуется составить план суточных перевозок цемента с целью минимизации транспортных расходов.

Вариант 24

Цех выпускает три вида деталей, которые изготовляются на трёх станках. На рисунке показана технологическая схема изготовления детали каждого вида с указанием времени её обработки на станках. Суточный ресурс рабочего времени станков 1, 2 и 3 составляет соответственно 890, 920 и 840 мин. Стоимость одной детали вида 1, 2 и 3 равна соответственно 3, 1 и 2 р.



Рисунок

Требуется составить суточный план производства с целью максимизации стоимости выпущенной продукции.

Вариант 25

На мебельной фабрике требуется раскроить 5000 прямоугольных листов фанеры размером 4×5 м каждый, с тем чтобы получить два вида прямоугольных деталей: деталь А должна иметь размер 2×2 м, деталь Б – размер 1×3 м. Необходимо, чтобы деталей А оказалось не меньше, чем деталей Б. Каким образом следует производить раскрой, чтобы получить минимальное (по площади) количество отходов?

Вариант 26

Автобусный парк.

	Тип автобуса				
	Вахтовый	Пригородный	Городской	Туристический	Школьный
«Будни»	1	–	15	4	3
«Выходной»	1	1	8	6	1
Вместимость автобуса, чел.	7	20	58	40	32
Наличный парк автобусов, шт.	12	8	81	70	27

Построить математическую модель задачи, на основании которой можно найти такое соотношение между числом режимов «Будни» и «Выходной»,
чтобы число ежедневно отправляемых пассажиров достигло максимума

Вариант 27

Лесопильный завод.

Завод и фабрика по производству фанеры являются градообразующими предприятиями. Они располагаются в районе лесного массива, засаженного хвойными и лиственными деревьями к количестве 80 м^3 хвойных и 180 м^3 лиственных материалов. Для производства 2,6 м3 коммерческих комплектов строительных деревоматериалов необходимо израсходовать 2 м^3 хвойных и 7,5 м^3 лиственных лесоматериалов. Для приготовления фанеры размером в 100 м^2 требуется 5 м^3 хвойных и 10 м^3 лиственных лесоматериалов. Согласно условиям поставок лесопильному заводу и фабрике по производству фанеры, в течение планируемого периода необходимо произвести хотя бы 10 м^3 коммерческих комплектов строительных деревоматериалов и 1200 м^2 фанеры. Прибыль с 1 м 3 коммерческого комплекта строительных деревоматериалов составляет 150 руб., а с одного листа фанеры – 600 руб. Постройте математическую модель, которая позволит составить такой план производства, при котором город от данных предприятий получит наибольший доход.

Вариант 28

Спортивный клуб.

В рамках программы по популяризации спорта среди населения администрация города выделила спортивному клубу капиталовложения в объеме 100 рублей на приобретение нового спортивного инвентаря и помещение площадью 74 м2 для его размещения. Генеральная дирекция спортивного клуба может приобрести тренажеры трех видов. Кардиотренажер занимает 9 м 2 и стоит 16 тыс. руб. Беговая дорожка занимает 4 м 2 и стоит 13 тыс. руб., а доска для мышц пресса занимает 3 м 2 и стоит 11 тыс. руб.

Прибыль от приобретения кардиотренажера может составить до 5 тыс. руб., беговой дорожки до 2 тыс. руб. и доски для прокачивания мышц пресса до 1 тыс. руб. Составить математическую модель задачи, которая позволит определить сколько нужно приобрести нового спортивного оборудования, чтобы спортивному клубу получить наибольшую прибыль и при этом полностью израсходовать выделенные администрацией средства?

Вариант 29

Фирма при изготовлении своих изделий: портьера и штора для кухни использует тюль и портьерную ткань, а также швейные машины и машины-оверлок. По технологическим нормам на производство единицы портьеры необходимо 2,5 часа работы на швейной машине и 1,5 часа работы на оверлоке, а также до 10 м тюля 20 м портьерной ткани. Для производства одной шторы для кухни требуется 4 часа работы на швейной машине, 1 час работы на оверлоке , до 7 м тюля и 5 м портьерной ткани. Фирма «Штор-элит» располагает швейными машинами и машинамиоверлок в таком количестве, чтобы обеспечить беспрерывную работу в течение 1240 часов на швейной машине и 680 часов на оверлоке, и 640 м тюля и 840 м портьерной ткани. Прибыль от продажи портьеры составляет 6 тыс. руб. и от шторы на кухню – 1,6 тыс. руб. Построить математическую модель задачи, используя в качестве показателя эффективности прибыль и учитывая, что время работы швейных машин должно быть использовано полностью.

Вариант 30

. Частное кондитерское предприятие выпускает полуфабрикаты для приготовления бисквитов, песочного теста, слоенного теста и крема. Так как конкурентов у данного предприятия в городе нет, то как правило любое количество изделий реализуется. К основным продуктам, которые используются для изготовления этой продукции относятся мука, масло и молочные продукты и сахар. С помощью технологов-кондитеров разработаны нормы каждого вида сырья для всех видов продукции предприятия.

Ресурсы	Выпускаемая продукция				Объем ре-сурсо
	бисквит	Песочное тесто	Слоенное тесто	крем	
мука	3	4	2	0	4600
Молочные продукты и масло	2	12	6	10	2500
сахар	1	0,5	3	2	2000
Прибыль, у. е.	60	75	65	130	

Составить план выпуска полуфабрикатов для данного кондитерского производства, который будет являться для данного предприятия наилучшим.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Перечень задач к лабораторной работе 1. Часть 2.

Решить простейшую вариационную задачу

Вариант	Постановка задачи
1	$V[y(x)]=\int_1^3\left(2y(x)-y(x)y'(x)+xy'^2(x)\right)dx,\quad y(1)=1,\quad y(3)=4;$
2	$V[y(x)]=\int_0^1\left(y'^2(x)+y^2(x)+2e^{2x}y(x)\right)dx,\quad y(0)=\frac{1}{3},\quad y(1)=\frac{1}{3}e^2;$
3	$V[y(x)]=\int_{-2}^{-1}\left(x^2y'^2(x)+12y^2(x)\right)dx,\quad y(-2)=\frac{1}{16},\quad y(-1)=1;$
4	$V[y(x)]=\int_0^{\pi}\left((y'(x)+y(x))^2+2y(x)\sin x\right)dx,\quad y(0)=0,\quad y(\pi)=1;$
5	$V[y(x)]=\int_0^1\left(e^x(y'(x)-x)^2+2y(x)\right)dx,\quad y(0)=1,\quad y(1)=\frac{1}{2};$
6	$V[y(x)]=\int_1^2\left(y'^2(x)+\frac{6y^2(x)}{x^2}-32y(x)\ln x\right)dx,\quad y(1)=3,\quad y(2)=4(4\ln 2+3);$
7	$V[y(x)]=\int_0^3\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}dx,\quad y(0)=1,\quad y(3)=4;$
8	$V[y(x)]=\int_1^2\left(xy'^2(x)+y(x)y'(x)+xy(x)\right)dx,\quad y(1)=\frac{1}{8},\quad y(2)=\frac{1}{2}-\ln 2;$
9	$V[y(x)]=\int_1^2\frac{x^2y'^2(x)}{2x^3+1}dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=\frac{7}{2};$
10	$V[y(x)]=\int_1^2\left(\frac{3y^2(x)}{x^3}+\frac{y'^2(x)}{x}+8y(x)\right)dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=8\ln 2;$
11	$V[y(x)]=\int_1^2\left(\frac{3y^2(x)}{x^3}+x^2+\frac{y'^2(x)}{x}\right)dx,\quad y(1)=2,\quad y(2)=8\frac{1}{2};$
12	$V[y(x)]=\int_1^2\left(x^2y'^2(x)+2y^2(x)+32x^2y(x)\ln x\right)dx,\quad y(1)=-5,\quad y(2)=4(4\ln 2-5);$
13	$V[y(x)]=\int_0^3\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}dx,\quad y(0)=1,\quad y(3)=4;$
14	$V[y(x)]=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(y(x)-\frac{1}{2}y'^2(x)\right)\sin x\,dx,\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\ln\sqrt{2},\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$
15	$V[y(x)]=\int_1^2\frac{x^2y'^2(x)}{2x^3+1}dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=\frac{7}{2};$
16	$V[y(x)]=\int_1^2\left(\frac{3y^2(x)}{x^3}+x^2+\frac{y'^2(x)}{x}\right)dx,\quad y(1)=2,\quad y(2)=8\frac{1}{2};$
17	$V[y(x)]=\int_1^4\left(\sqrt{x}y'^2(x)+\frac{y^2(x)}{2x\sqrt{x}}\right)dx,\quad y(1)=2,\quad y(4)=4\frac{1}{2};$

18	$V[y(x)]=\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(y'^2(x)-6y(x)\sin x\right)\cos^2 x dx,\quad y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1,\quad y\left(\frac{\pi}{3}\right)=1;$
19	$V[y(x)]=\int\limits_{-2}^{-1}\left(2y(x)y'(x)-x^2y'^2(x)\right)dx,\quad y(-2)=\frac{3}{2},\quad y(-1)=2;$
20	$V[y(x)]=\int\limits_{0}^{1}\left(xy(x)y'(x)-2y'^2(x)\right)dx,\quad y(0)=1,\quad y(1)=\operatorname{ch}\frac{1}{2};$
21	$V[y(x)]=\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(y'^2(x)+2y(x)y'(x)+4y^2(x)\right)dx,\quad y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sh}\pi;$
22	$V[y(x)]=\int\limits_{1}^{5}\frac{2y'^3(x)+y'^2(x)}{y'^4(x)+2}dx,\quad y(1)=2,\quad y(5)=14;$
23	$V[y(x)]=\int\limits_{-2}^{-1}\left(x^3y'^2(x)+3xy^2(x)-\frac{6y(x)}{x}\right)dx,\quad y(-2)=\frac{1}{4},\quad y(-1)=1;$
24	$V[y(x)]=\int\limits_{2}^{7}\left(\cos x+3x^2y(x)+(x^3-y^2(x))y'(x)\right)dx,\quad y(2)=3,\quad y(7)=0;$
25	$V[y(x)]=\int\limits_{-4}^{4}\sqrt{y(x)(1+y'^2(x))}dx,\quad y(-4)=5,\quad y(4)=5;$
26	$V[y(x)]=\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(y'^2(x)+2y(x)y'(x)+4y^2(x)\right)dx,\quad y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sh}\pi;$
27	$V[y(x)]=\int\limits_{1}^{5}\frac{2y'^3(x)+y'^2(x)}{y'^4(x)+2}dx,\quad y(1)=2,\quad y(5)=14;$
28	$V[y(x)]=\int\limits_{-2}^{-1}\left(x^3y'^2(x)+3xy^2(x)-\frac{6y(x)}{x}\right)dx,\quad y(-2)=\frac{1}{4},\quad y(-1)=1;$
29	$V[y(x)]=\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(y'^2(x)-6y(x)\sin x\right)\cos^2 x dx,\quad y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1,\quad y\left(\frac{\pi}{3}\right)=1;$
30	$V[y(x)]=\int\limits_{0}^{1}\left(e^x(y'(x)-x)^2+2y(x)\right)dx,\quad y(0)=1,\quad y(1)=\frac{1}{2};$