ЛЕКЦИЯ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. СЛОЖНЫЕ ОБЪЕКТЫ. ТИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ.

ЛИНЕЙНОЕ/НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. УКАЗАНИЯ К ЛР-1

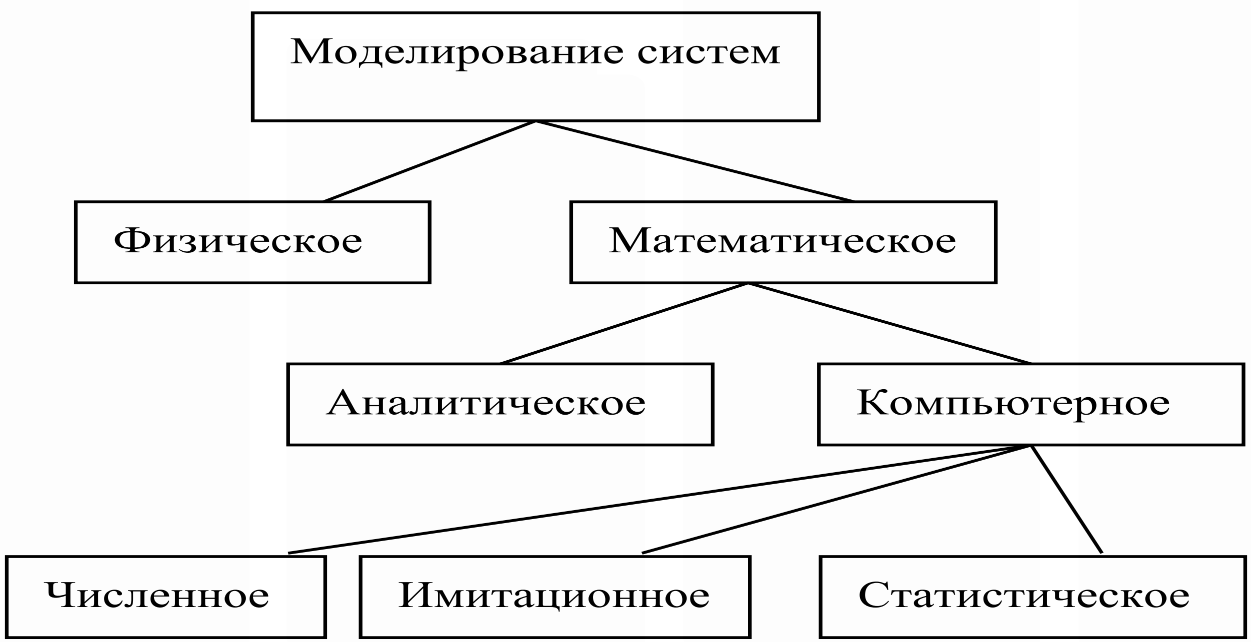
Составитель:
д.т.н., проф. Колесникова С.И.
skolesnikova@yandex.ru

ПОНЯТИЕ МОДЕЛИ. КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Модель – это физический или абстрактный образ моделируемого объекта, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать интересующие исследователя физические свойства и характеристики объекта.

Зачем? Легкость, доступность получения информации, сокращение сроков исследования и уменьшение материальных затрат на исследование и др.

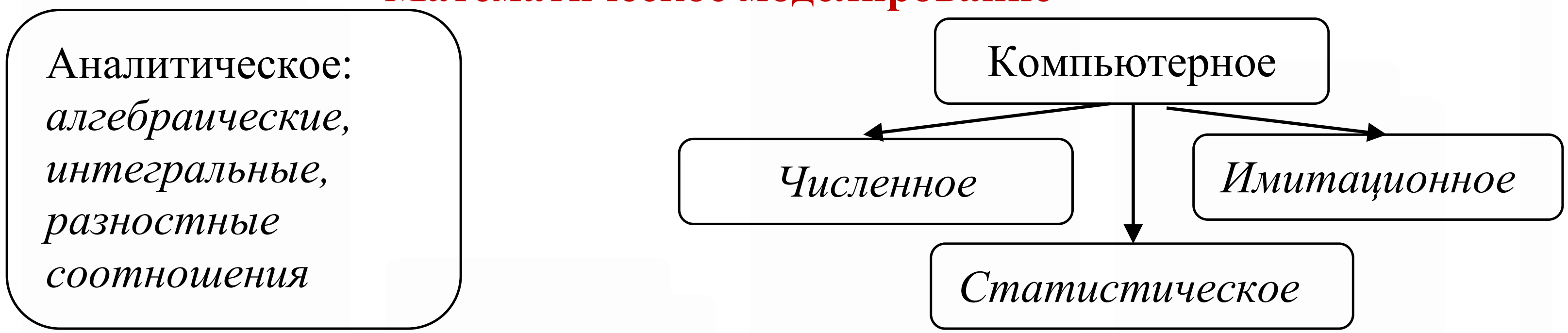
Моделирование процесс замещения объекта исследования некоторой его *моделью* и проведение исследований на модели с целью получения необходимой информации об объекте.



Классификация видов моделирования систем

Физическое моделирование: 1) сама исследуемая система (например, производственный эксперимент), 2) другая система с подобной физической природой (макет: продувка моделей самолетов в аэродинамических трубах).
Математическое моделирование - процесс установления соответствия данной реальной системы некоторой математической модели и исследование этой модели, позволяющее получить характеристики реальной системы.

Математическое моделирование



Компьютерное моделирование - математическая модель системы представлена в виде программы на ЭВМ, позволяющей проводить с ней вычислительные эксперименты.
Численное моделирование - *использование* методов вычислительной математики в численном решении некоторых математических уравнений при заданных значениях параметров и начальных условиях.
Имитационное моделирование – воспроизведение на ЭВМ элементарных явлений, составляющих реальный исследуемый процесс (объект), с сохранением последовательности протекания событий во времени с соблюдением масштаба и синхронности событий.
Статистическое моделирование – это вид моделирования для получения статистических данных о процессах в моделируемой системе.

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. ЭТАПЫ ИМ

Модель — система исследования, которая служит средством получения информации о другой системе. Модель — это приближенный слепок реальности.

Моделирование — метод исследования объектов (систем) в целях их познания и использования, основанный на процессах формирования и оперирования с моделями.
Среда — совокупность элементов, окружающих систему, ***не*** входящих в её состав, но оказывающих на неё свое влияние.

Законы математики, имеющие какое-либо отношение к реальному миру ненадёжны; а надёжные математические законы не имеют отношения к реальному миру.

Никакую проблему нельзя решить на том же уровне, на котором она возникла.

Никаким количеством экспериментов нельзя доказать теорию;
но достаточно одного эксперимента, чтобы её опровергнуть.

Альберт Эйнштейн

СОВРЕМЕННОЕ ПОЛОЖЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Динамическая модель - модель, описывающая изменение состояний объекта посредством имитации этапов или фаз его развития.

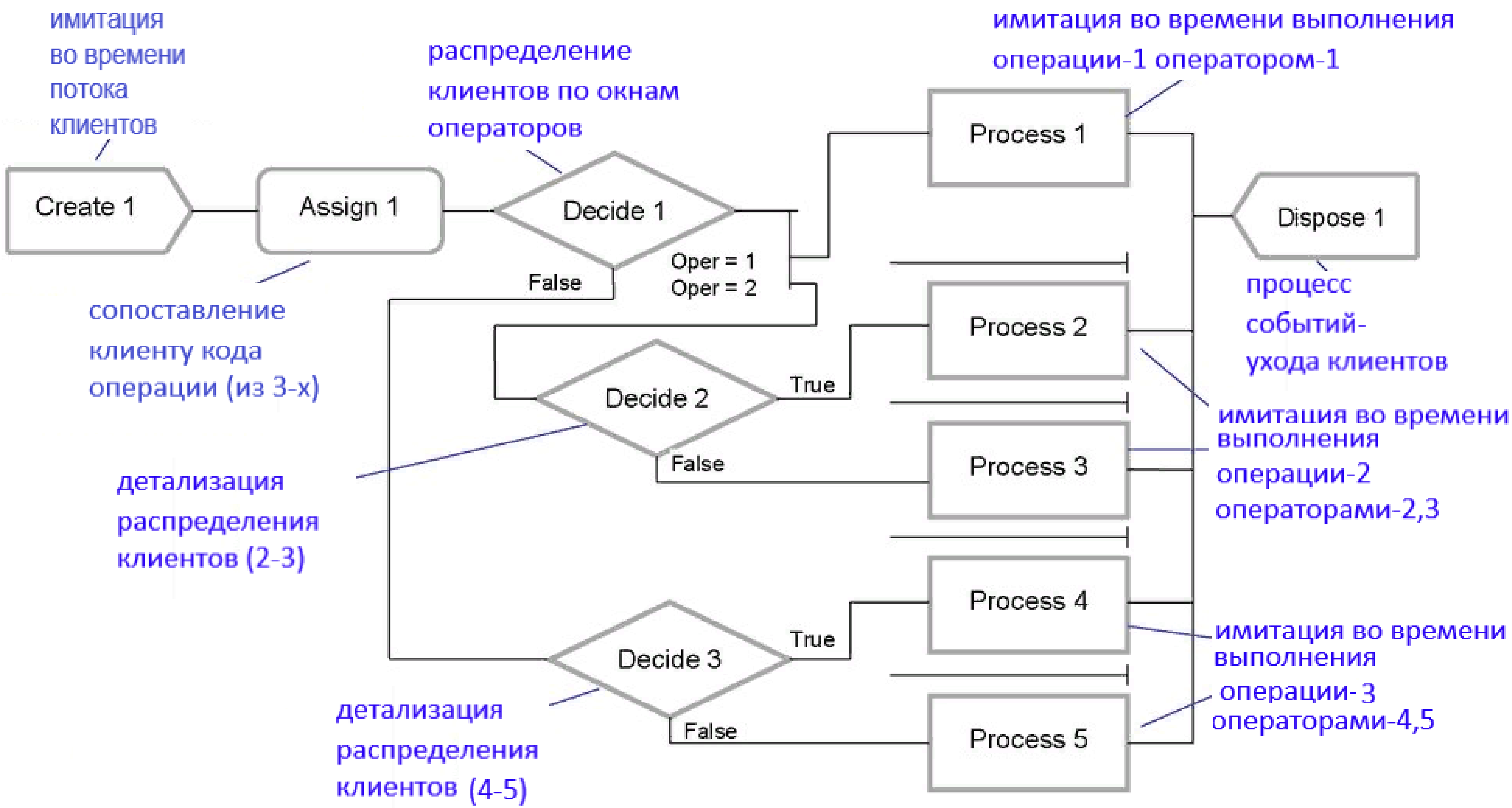
Со времён Ньютона известно, что *дифференциальные уравнения* описывают мир вокруг нас.

Эпоха Ньютона в анализе связана с лозунгом: «Дано дифференциальное уравнение — решить его!»

Эпоха Пуанкаре: «Не решая дифференциального уравнения, описать свойства его решений.»

Современная эпоха: «Дифференциальное уравнение не дано; описать свойства его решений.»

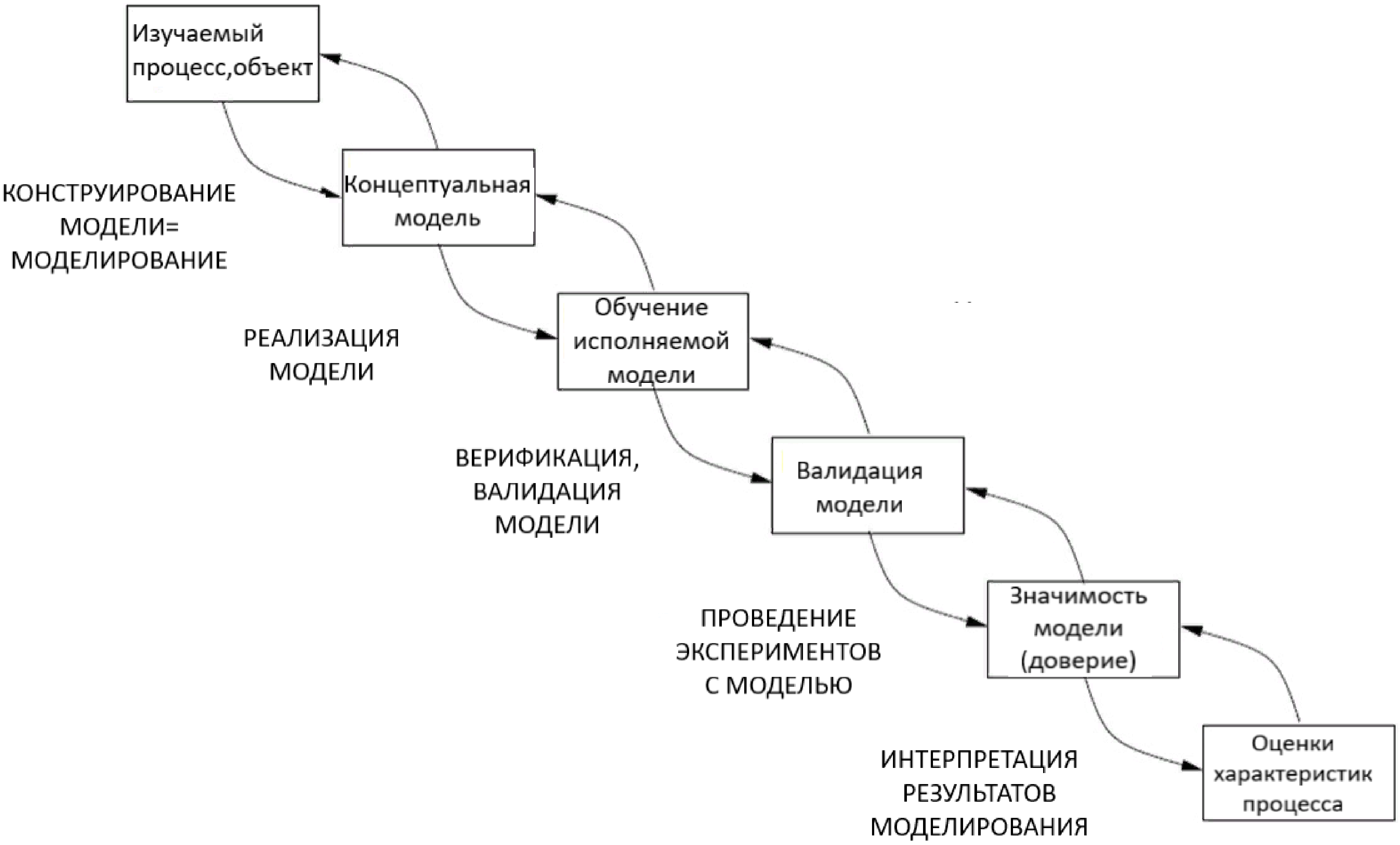
ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ систем массового обслуживания



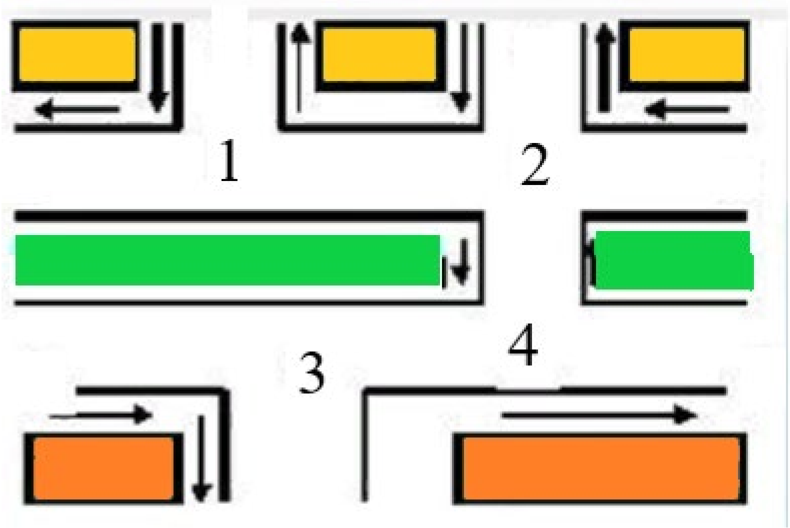
Имитация моментов прихода клиентов (времени между приходами) на входе как генерация случайного потока событий с интенсивностью λ

Имитация моментов окончания обслуживания клиентов (длительностей обслуживания) на входе как генерация случайного потока событий с интенсивностью μ

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. ЭТАПЫ ИМ



КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ



Задача 1. Фрагмент дорог города. 4 перекрестка.
Найти политику переключения светофоров, минимизирующую среднее время ожидания в данной зоне города.

Задача 2. Чему равна прогнозная численность населения России в начале третьего тысячелетия на основе анализа переписи населения за предыдущие годы?

Задача 3. Несколько человек решили организовать видеокафе на 6 столиков по 4 места за каждым. С каждого посетителя будет взиматься плата за сеанс видеофильма и ужин (всем посетителям будет предлагаться один и тот же набор блюд). Администрация города постановила, что плата за вход не должна превышать 5$. Требуется определить такую входную плату, при которой будет получена наибольшая выручка.

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Будут ли следующие зависимости линейными?

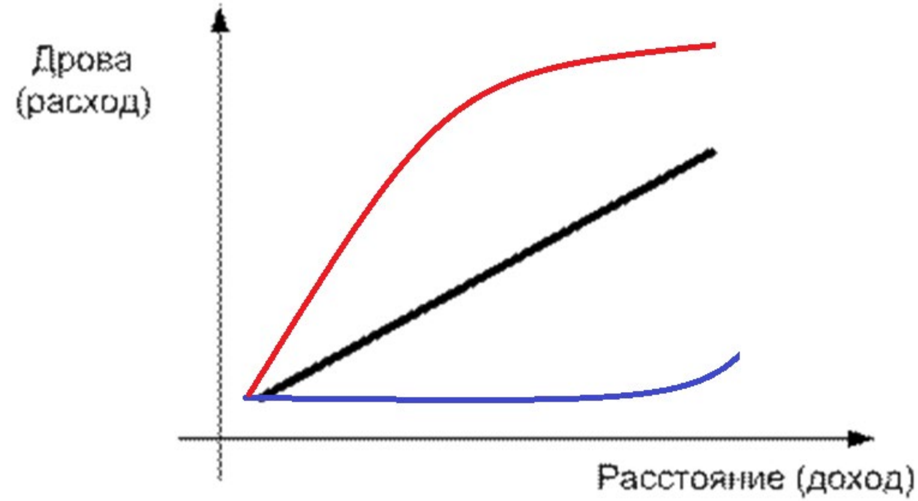
— зависимость веса человека от его роста?
— длительность ожидания в очереди в магазине?
— посещаемость поликлиники в период гриппа?
— количество человек, ожидающих поезда на станции метро (во времени)?

Постановка линейной задачи: $\mathbf{Y = b \cdot X + \varepsilon}$

Постановка нелинейной задачи: $\mathbf{Y = f(X, b, \varepsilon)}$ где вид **, f** – нелинейный**.**

Линейные модели?

1) Чем дальше в лес, тем больше дров
2) По доходу и расход



ОБЪЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ КАК ДИНАМИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ, РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ – математические модели динамических объектов

Состояние (совокупность переменных) *детерминированной* динамической системы (ДС) изменяется во времени по некоторому заданному закону.

Регулярные ДС – устойчивые (малые возмущения со временем затухают, ДС возвращается к исходному регулярному (стационарному) поведению.

Хаотические ДС обладают экспоненциальной чувствительностью к начальным условиям (изменение в начальных условиях усиливается экспоненциально во времени).

Примеры хаотического поведения: броуновское движение, изменения погоды, колебания орбит астрономических тел, поведение фондовой биржи, биологические процессы в организме человека, криптографические системы.

Объекты исследований: открытые сложные нелинейные системы с обратными связями.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Система (от греч. *systema* – целое, составленное из частей, соединение) – множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, образующих определенную целостность, единство.

Любая система может быть охарактеризована некоторым набором величин. Величины, которые можно измерить, называют *физическими*: «длина», «температура», «цена», скорость,...

Все величины можно разделить на ***параметры*** и ***переменные***.

Переменные – это величины, которые могут изменяться при рассмотрении процесса;

параметры – постоянные величины в рамках рассматриваемой задачи.

Независимые переменные – переменные (времяи, пространственные координаты), изменяющиеся независимо от рассматриваемой системы (в рамках данной задачи).

Зависимые переменные - зависят от независимых и изменяются с изменением независимых величин.

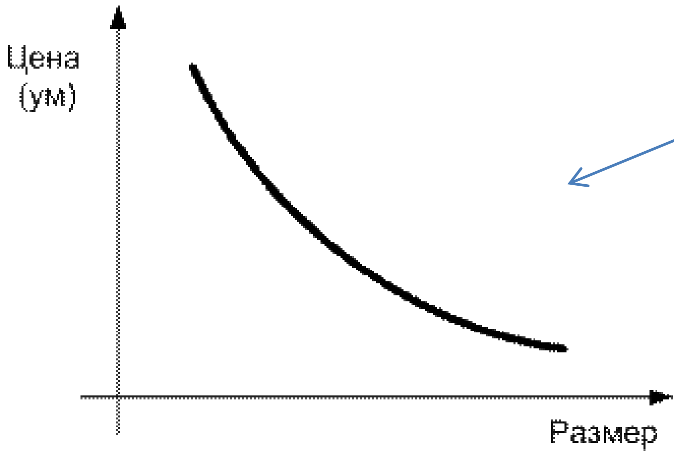
Пример. «Температура» и «давление» зависимые переменные; время - независимая переменная.

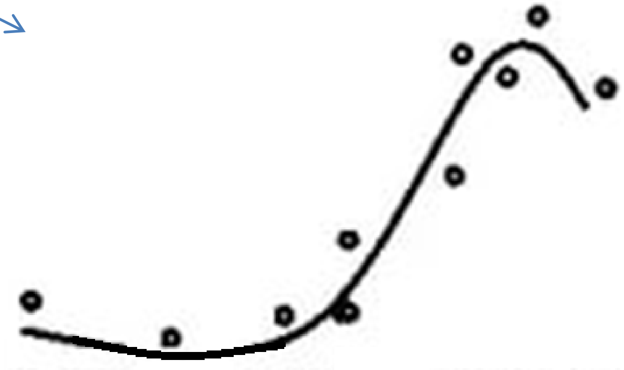
Мир линейных функций утомительно однообразен: линейная зависимость не обладает избирательностью,... не может описывать ни резонансных всплесков, ни насыщения, ни колебаний – ничего, кроме равномерного неуклонного роста или столь же равномерного и столь же неуклонного убывания.

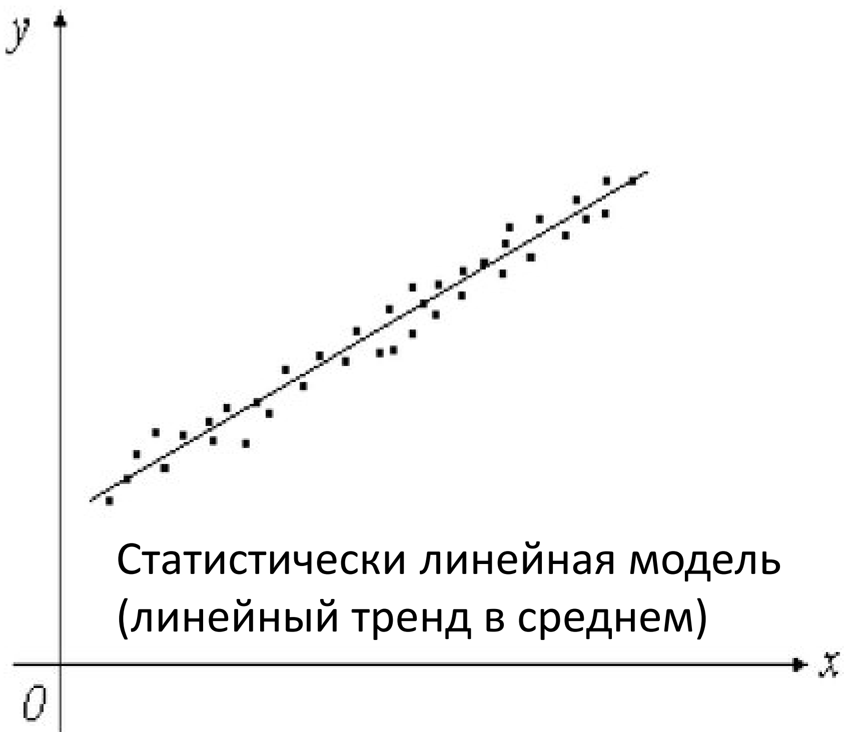
Данилов Юлий Александрович (1936-2003) – русский физик, математик, историк науки, педагог, переводчик и просветитель

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

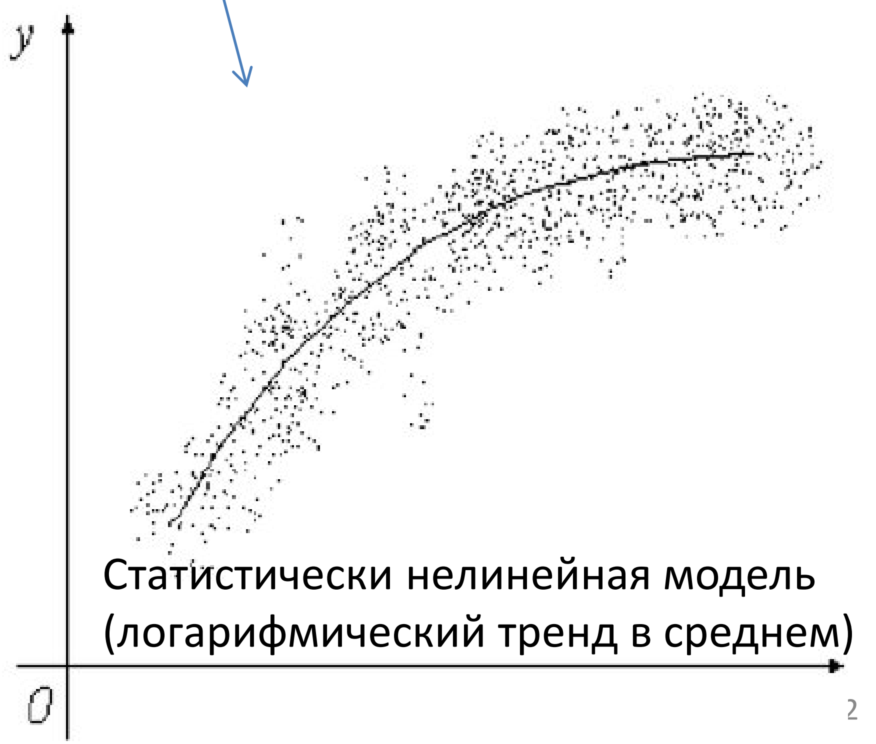
Нелинейная модель







Статистически линейная модель
(линейный тренд в среднем)



Статистически нелинейная модель
(логарифмический тренд в среднем)

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

Перевод исходных переменных их специальной заменой в другое пространство позволяет зачастую применить удобные линейные модели.

Модель	Замена	Линейная модель
$y=\beta_0+\frac{\beta_1}{x}+\varepsilon$	$x^*=\frac{1}{x}$	$y=\beta_0+\beta_1 x^*+\varepsilon$
$y=\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+$ $+\ldots+\beta_m x^m+\varepsilon$	$x_1=x;$ $x_2=x^2;$ $\ldots$ $x_m=x^m$	$y=\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+$ $+\ldots+\beta_m x_m+\varepsilon$
$y=\frac{1}{\beta_0+\beta_1 x}$	$y^*=\frac{1}{y}$	$y^*=\beta_0+\beta_1 x$

НЕЛИНЕЙНОСТЬ ОБЪЕКТОВ И ЯВЛЕНИЙ – В СОВРЕМЕННОЙ НАУКЕ, ОБРАЗОВАНИИ

«… истинные законы не могут быть линейными» А. Эйнштейн

«… **Создание общей теории нелинейных систем вряд ли возможно»** Р. Фейнман

Все реальные системы являются нелинейными, многомерными и многосвязными, в которых протекают сложные переходные процессы и возникают критические и хаотические режимы.

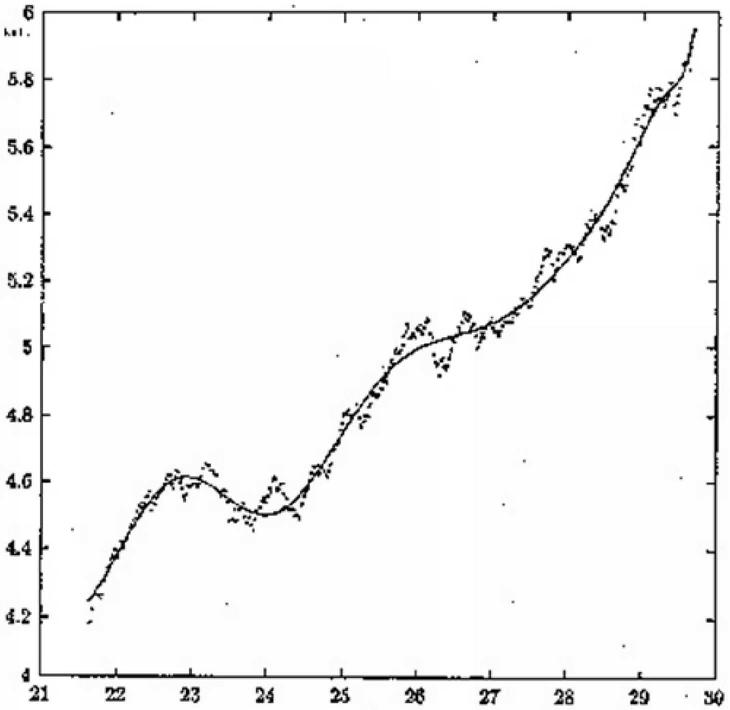
ОТВЕТ НА ЛЮБОЙ ВОПРОС УЖЕ СУЩЕСТВУЕТ.
НАДО ТОЛЬКО ПРАВИЛЬНО ПОСТАВИТЬ ВОПРОС, ЧТОБЫ ПОЛУЧИТЬ ЕГО

Формализовать цель исследования

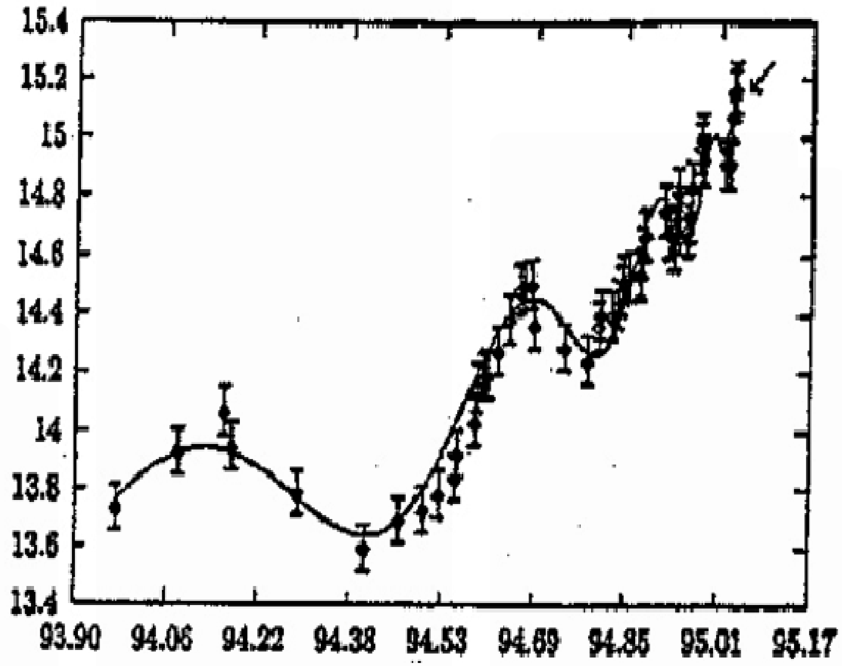
Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. –М.: Мир, 1979.

Одно и то же математическое описание – модель для разных процессов-явлений.

катастрофические события разной природы могут развиваться по одним законам (Г.Г. Малинецкий)



Фондовый рынок: зависимость логарифма индекса Доу-Джонса от времени перед Великой депрессией в 1929г.



Геологический объект: концентрации ионов хлора в родниках перед землетрясением в Кобе в 1995г.

ПРИМЕРЫ ОПИСАНИЙ. МОДЕЛЬ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СА

Задача синтеза системы управления продольным движением СА: определение вектора управления **u(x)** как функции координат состояния системы, обеспечивающего полет СА с заданными:

скоростью (x_1) V_0, высотой (x_4) H_0 и углом тангажа (x_5) ϑ_0

$$\dot{x}_1(t) = -g \sin x_5 + a_1 u_1 + z_1,$$

$$\dot{x}_2(t) = -g \cos x_5 + a_2 u_2 + z_2,$$

$$\dot{x}_3(t) = a_3 u_3 + z_3,$$

$$\dot{x}_4(t) = x_1 \sin x_5 + x_2 \cos x_5,$$

$$\dot{x}_5(t) = x_3,$$

$$\dot{x}_6(t) = x_1 \cos x_5 - x_2 \sin x_5.$$

x_1 - горизонтальная скорость, м/с, x_2 - вертикальная скорость, м/с,

x_3 - угловая скорость, рад/с; x_4 - высота, м,

x_5 - угол тангажа, град; x_6 - дальность полета, м,

z_1, z_2, z_3 - неизвестные возмущения,

u_1, u_2, u_3 - управляющие воздействия.

Исходный объект (дискретное описание)

$$X_{i+1} = X_i(\alpha C_0 - \mu\beta_X X_i Y_i),$$
$$Y_{i+1} = A(\alpha C_0 - \mu\beta_Y X_i Y_i).$$

(5

Аналог уравнения Фейгенбаума (В.И.Шаповалов)

X_i, Y_i – объемы продаж однотипной продукции, реализуемых частным X и государственным Y предприятиями, соответственно, в *i*-й период;

C_0 – средний доход покупателя в регионе;

A – количественн … а государственных нужд в этом виде продукции;

β_X, β_Y – цены на товары у предприятий;

α, μ – коэффициенты пропорциональности.

Примеры объектов и задач управления

$X_{i+1} = X_i(\alpha C_0 - \mu\beta_X X_i Y_i),$ $Y_{i+1} = u_i(\alpha C_0 - \mu\beta_Y X_i Y_i).$ **(6)**	$X_{i+1} = X_i(\alpha C_0 - \mu\beta_x X_i Y_i),$ $Y_{i+1} = A(\alpha C_0 - \mu\beta_y X_i Y_i) + u_i.$ **(7)**
u_i - закон изменения государственных нужд в этом типе продукции	u_i - закон изменения объемов производимой продукции данного типа
Цель управления: устойчивое достижение множества желаемых состояний, заданного аналитически $\left\{\left(X_i, Y_i\right) : \psi\left(X_i, Y_i\right) = 0,\ i \in \mathrm{N}\right\}$	

Сложный динамический объект (по Л.А. Растригину)

• НЕСТАЦИОНАРНОСТЬ • МНОГОМЕРНОСТЬ • МНОГОСВЯЗНОСТЬ
• НЕЛИНЕЙНОСТЬ •ХАОТИЧНОСТЬ •СЛАБАЯ ФОРМАЛИЗУЕМОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ

Свойства (и/или):

1) объект не имеет полного аналитического описания и полностью описывающей его модели, т.е. для построения его адекватной модели недостаточно априорной информации;

2) нестационарность описывающего его случайного процесса, (слабопредсказуемость);

3) нелинейность имеющихся моделей описания;

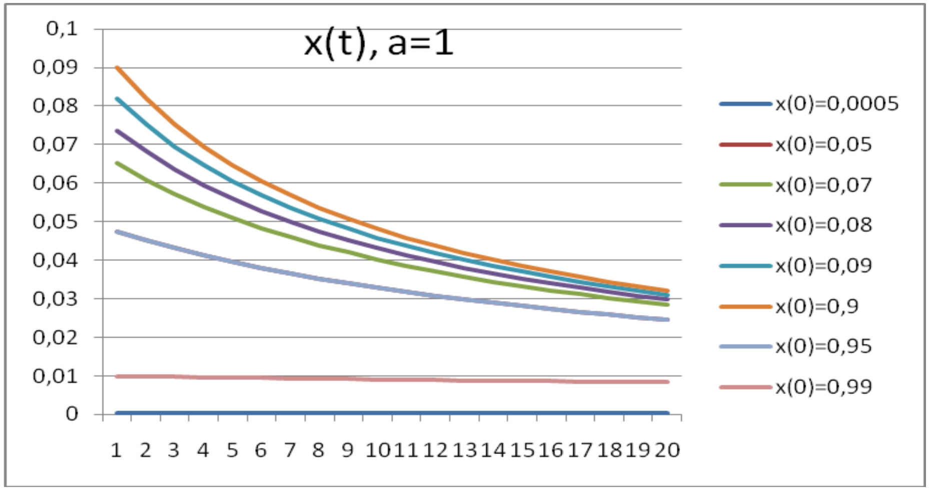
4) многомерность, многосвязность;

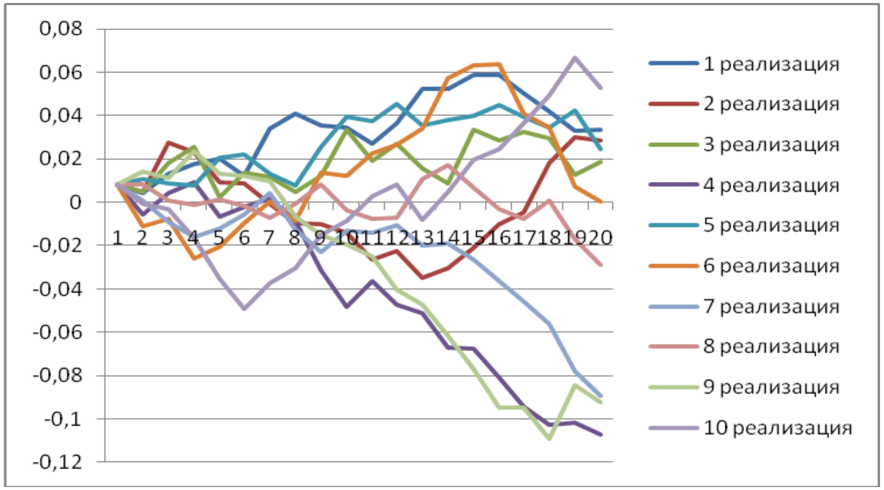
$$X(t)=\left(x_1(t)\cdot swf_1(t),\ldots,x_m(t)\cdot swf_m(t)\right),$$

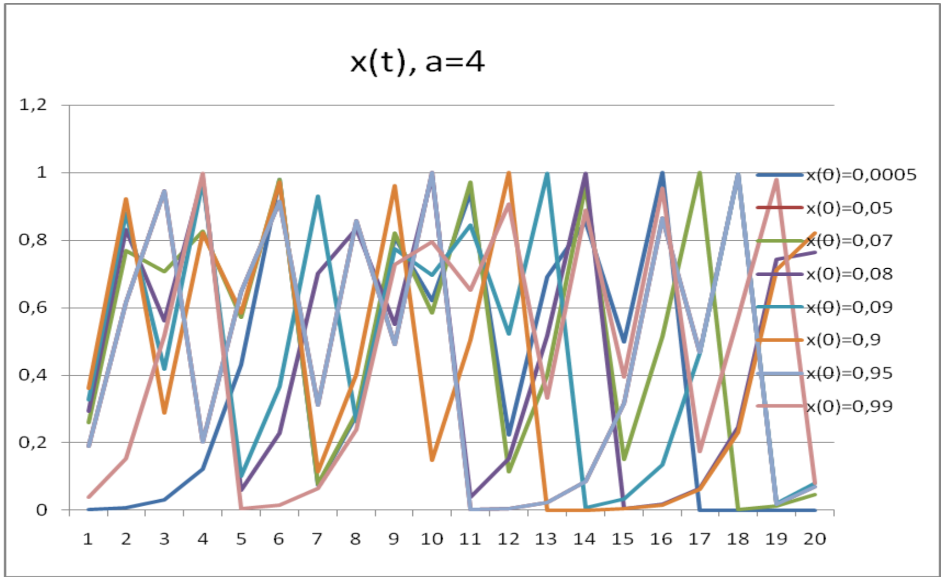
$swf_j(t)$ - переключательная функция: $x_j(t)\uparrow\downarrow$, включения/выключения компоненты.

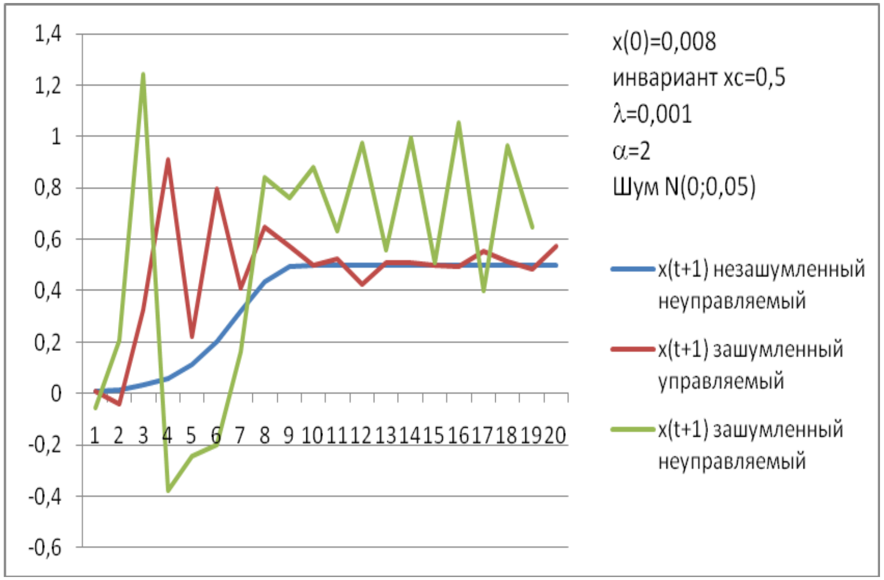
ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФЕЙГЕНБАУМА

$$x_t=\alpha x_{t-1}(1-x_{t-1}),\ t=1,2,\ldots$$









СОВРЕМЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Исследование процессов естественной самоорганизации

Построение алгоритмов силового ВОЗДЕЙСТВИЯ на объект

Синергетика

Кибернетика

Пассивное наблюдение за природными явлениями

Активное воздействие на искусственные и природные системы

Синергетическая теория управления (СТУ)

СТУ: выявление устойчивых законов поведения объекта (инвариантов) и их энергоэффективное достижение

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Арсенал математических методов, которые объединяют под названием – **методы разработки оптимальных решений** (или исследования операций):

- Теория управления запасами.
- Теория массового обслуживания.
- Теория игр.
- Теория статистических решений. –
- Сетевые методы планирования и управления. –
- **Математическое программирование**

Математическое (оптимальное) программирование включает в себя:

- линейное,
- нелинейное,
- целочисленное,
- динамическое,
- дискретное,
- выпуклое программирование.

ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО/НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЛР-1,2)

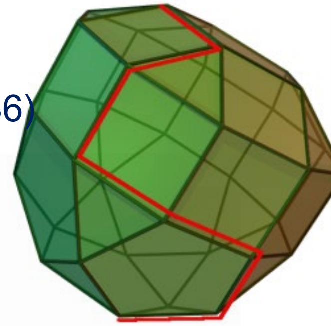
Нелинейное программирование – раздел математического программирования, изучающий задачи отыскания глобального экстремума фиксированной (целевой) функции при наличии ограничений в ситуации, когда целевая функция и ограничения имеют общий характер (не предполагаются линейными).

Стандартная форма задач ЛП и НЛП в матричной записи.

$f(x) = F(x) \to extr;$ $\Phi(x) = b.$	$f(x) = Cx \to extr;$ $Ax = b;$ $x \geq 0.$

Леонид Витальевич Канторович (1912—1986)

Найти минимум линейной функции на выпуклом множестве. (Нобелевская премия по экономике).



Задачи на условный экстремум функции.

Условный экстремум функции – экстремум функции, аргументы которой удовлетворяют дополнительным условиям-**ограничениями, уравнениями связи**.

ПРИМЕРЫ. Задачи нелинейного программирования.

1) затраты изменяются не пропорционально количеству закупленных/произведенных товаров;

2) расход определенных видов сырья и ресурсов происходит нелинейно, а скачкообразно (в зависимости от объема производства);

3) среди замкнутых плоских кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую максимальную площадь;

4) среди тел равного объема найти с наименьшей поверхностью;

5) ....

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ И МЕТОДОВ ЛП (ЗЛП)

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ЗАДАЧ ЛП. Правила перехода к двойственной ЗЛП

Прямая задача		Двойственная задача	
$\max: \ Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$		$\min: \ f(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$	
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\ldots,m$	x_i	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = 1,\ldots,n$	y_i
$x_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots,n$		$y_i \ge 0, \quad i = 1,\ldots m$	

$$\begin{array}{c} \max Z(X) \\ g_i(X) \le b_i, i = \overline{1,m} \end{array} \quad \underset{\textbf{к двойственной}}{\overset{\textbf{Переход}}{\rightleftarrows}} \quad \begin{array}{c} \min f(Y) \\ r_j(Y) \ge c_j, \mathrm{j} = \overline{1,n} \end{array}$$

ФОРМЫ ЗАДАЧ ЛП

Каноническая	Стандартная	Общая
1. Ограничения		
Уравнения $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=\overline{1;m}$	Неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \left\{\begin{matrix}\le\\ \ge\end{matrix}\right\} b_i,\ i=\overline{1;m}$	Уравнения и неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \left\{\begin{matrix}\le\\ =\\ \ge\end{matrix}\right\} b_i,\ i=\overline{1;m}$
2. Условия неотрицательности		
Все переменные $x_j \ge 0,\ j=\overline{1;n}$	Все переменные $x_j \ge 0,\ j=\overline{1;n}$	Часть переменных $x_j \ge 0,\ j=\overline{1;s},\ s<n$
3. Целевая функция		
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (max или min)		

Здесь: x_j – переменные задачи; c_j – коэффициенты при переменных в целевой функции; a_{ij} – коэффициенты при переменных в основных ограничениях задачи; b_i – правые части ограничений.

Любая ЗЛП может быть сведена к канонической, стандартной или общей задаче

ЗАДАЧИ ЛП (ЗЛП). ПРИМЕР

Составить экономико-математическую модель задачи:
для выпуска изделий двух типов А и В на заводе используют сырье четырех видов (I, II, III, IV).
Для изготовления изделий необходимо:
А: С1(А) ед. сырья вида I, С2(А) ед. вида II, С3(А) ед. вида III и С4(А) ед. вида IV.
В: С1(В) ед. сырья вида I, С2(В) ед. вида II, С3(В) ед. вида III, С4(В) 1 ед. вида IV.
Запасы сырья: I вида – К1 ед., II вида – К2 ед., III вида – К3 ед., IV вида – К4 ед.
Выпуск одного изделия приносит прибыль
типа А – П1 усл.ед.
типа В – П2 усл.ед.
Составить план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль.
Решение.

1. Сведение данных в таблицу:

Сырье	Кол-во сырья на ед. продукции, ед.		Запас сырья, ед.
	А	В	
I	С1(А)	С1(В)	К1
II	С2(А)	С2(В)	К2
III	С3(А)	С3(В)	К3
IV	С4(А)	С4(В)	К4
Прибыль от ед. продукции, усл.ед.	П1	П2	

2. Формализация данных задачи как данных ЗЛП:

ЗАДАЧИ ЛП (ЗЛП). ПРИМЕР 1

1. Сведение данных в таблицу:

Сырье	Кол-во сырья на ед. продукции, ед.		Запас сырья, ед.
	A	B	
I	C1(A)	C1(B)	K1
II	C2(A)	C2(B)	K2
III	C3(A)	C3(B)	K3
IV	C4(A)	C4(B)	K4
Прибыль от ед. продукции, усл.ед.	П1	П2	

2. Формализация данных задачи как данных ЗЛП: Обозначим x_1, x_2 – количество изделий типа А и В соответственно, планируемое к выпуску ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$).

Прибыль: $\text{П}1 \cdot x_1 + \text{П}2 \cdot x_2$,

Целевая функция задачи: $Z = \text{П}1 \cdot x_1 + \text{П}2 \cdot x_2 \to \max$.

Составляя неравенства по каждому виду сырья, получим систему:

$$Z = \text{П}1 \cdot x_1 + \text{П}2 \cdot x_2 \to \max; \quad Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} C1(A) \cdot x_1 + C1(B) \cdot x_2 \leq K1 \\ C2(A) \cdot x_1 + C2(B) \cdot x_2 \leq K2 \\ C3(A) \cdot x_1 + C3(B) \cdot x_2 \leq K3 \\ C4(A) \cdot x_1 + C4(B) \cdot x_2 \leq K4 \end{cases} \Rightarrow \text{Модель задачи ЛП} \Rightarrow \begin{cases} C1(A) \cdot x_1 + C1(B) \cdot x_2 \leq K1 \\ C2(A) \cdot x_1 + C2(B) \cdot x_2 \leq K2 \\ C3(A) \cdot x_1 + C3(B) \cdot x_2 \leq K3 \\ C4(A) \cdot x_1 + C4(B) \cdot x_2 \leq K4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Имеется n $(i=1,\ \dots,\ n)$ работ и m $(j=1,\ \dots,\ m)$ потенциальных их исполнителей. Известны затраты c_{ij} на выполнение j-м исполнителем i-й работы.

Требуется назначить каждого исполнителя на одну работу так, чтобы минимизировать суммарные затраты на выполнение всех работ.

Методы решения задачи о назначениях основаны на двух простых утверждениях:

1) решение задачи не изменится, если к любому столбцу или строке матрицы затрат прибавить некоторую константу;

2) если все $c_{ij} \geq 0$ и найдется план X такой, что $Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = 0$, то X – оптимальный план. Здесь $n = m$.

Основанный на упомянутых утверждениях, алгоритм поиска решения заключается в преобразовании матрицы затрат $\|c_{ij}\|$ в матрицу с нулевыми элементами, образующими систему из n независимых нулей.

ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ЗАДАЧ ЛП

Вещественное ЛП - Simplex-метод.

Целочисленное ЛП не имеет общепринятого универсального математического подхода к решению (математические пакеты).

Python, пакет для научных расчетов scipy.

Функция **`scipy.optimize.linprog`** - для решения только задач вещественного ЛП.

Задачу целочисленного ЛП в Python можно решить с помощью любой из множества дополнительных библиотек, таких как PuLP, Pyomo, cvxopt и др.

MatLab

Функция **`linprog`** - для задачи вещественного ЛП. матрично-векторная форма записи ограничений.

Функция (начиная с версии R2014a) **`intlinprog`** – для решения задач смешанного ЛП.

Функция **`solve`** – универсальная функция, ограничения и целевую функцию можно задать символьно.

ЛИТЕРАТУРА

Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы.   М.: Наука, 1990.
Дэннис. Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер.с англ.   М.: Мир, 1988.
Карманов В.Г. Математическое программирование: Учебное пособие.   М.: Наука, 1989.
Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1991.
Аоки М. Введение в методы оптимизации.   М.: Наука, 1988.
Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход.   М.: Мир, 1994.
Уайлд Д. Дж. Методы поиска оптимума.   М.: Наука, 1997.
Габбасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации.   Минск: Изд во БГУ, 1988.
Бахвалов Н.С. Численные методы.   М.: Наука, 1989.
Гилл Ф. и др. Практическая оптимизация.   М.: Мир, 1992.

ЛЕКЦИЯ 2. МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. УКАЗАНИЯ К ЛР-1 (продолжение)

Составитель:

д.т.н., проф. Колесникова С.И.

skolesnikova@yandex.ru

ФУНКЦИОНАЛ. ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА

Если некоторому числу x из области D ставится в соответствие по определенному правилу или закону число y, то говорят, что задана **функция $y = f(x)$.**

Если функции $y(x)$ ставится в соответствие по определенному правилу или закону число J, то говорят, что задан функционал $\mathbf{J = J(y)}$.

Пример. Определенный интеграл.

Если функции $y(x)$ ставится в соответствие по определенному правилу или закону другая функция $z(x)$, то говорят, что задан **оператор $z = L(y)$, $z = Ly$**.

Пример. Неопределенный интеграл.

Дифференциальный оператор.

$$Ly = y'' + P(x)y' + q(x)y,$$

$$Lu = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2.$$

Пусть *A* – множество элементов произвольной природы, и пусть каждому элементу *u* є *A* приведено в соответствие одно и только одно число *J(u)*. В этом случае говорят, что на множестве *A* (область определения функционала *J*) задан функционал *J(u)* .

Число *J(u)* называется значением функционала *J* на элементе *u*.

Функционал *J* называется вещественным, если все его значения вещественны.

Функционал *J* называется линейным, если его область определения есть линейное множество

$$J(\alpha u + \beta v) = \alpha J(u) + \beta J(v).$$

ПРИМЕРЫ ФУНКЦИОНАЛОВ

1) Пусть $M = C[0,1]$ – совокупность всех непрерывных функций $y(x)$, заданных на отрезке $[0,1]$, и пусть

$$V[y] = \int_0^1 y(x)dx. \qquad (1)$$

Тогда $V[y]$ есть функционал от $y(x)$: каждой функции $y(x) \in C[0,1]$ отвечает определенное значение $V[y]$. Подставляя в (1) вместо $y(x)$ конкретные функции, мы будем получать соответствующие значения $V[y]$. Так, если $y(x) = 5$, то $V[5] = \int_0^1 5 \cdot dx = 5$; если $y(x) = \cos \pi x$, то $V[\cos \pi x] = \int_0^1 \cos \pi x \, dx = 0$.

2) Пусть $M = C^1[a,b]$ – класс функций $y(x)$, имеющих непрерывную производную на отрезке $[a,b]$, и пусть $V[y] = y'(x_0)$, где $x_0 \in [a,b]$. Видно, что $V[y]$ есть функционал, определенный в указанном классе функций: каждой функции из этого класса ставится в соответствие определенное число – значение производной этой функции в фиксированной точке x_0.

Если, например, $a = 1$, $b = 3$ и $x_0 = 2$, то для $y(x) = x^2$ имеем: $V[x^2] = 2x\big|_{x=2} = 4$; для $y(x) = \ln x$ будем иметь $V[\ln x] = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=2} = \frac{1}{2}$.

ПРИМЕРЫ ФУНКЦИОНАЛОВ

3) Пусть $M = C^1[a,b]$ – класс функций $y(x)$, имеющих непрерывную производную $y'(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$V[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx \tag{2}$$

будет функционалом, определенным на этом классе функций. Функционал (2) геометрически выражает длину дуги кривой $y = y(x)$ с концами в точках $A(a, y(a))$ и $B(b, y(b))$.

ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИОНАЛА

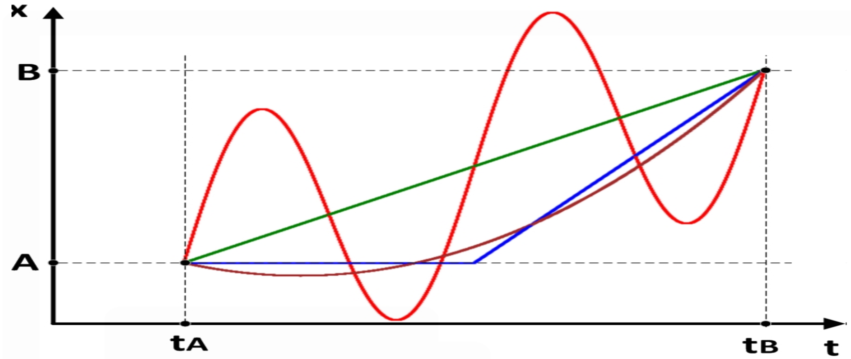
4) Показать, что функционал $V = \int_0^1 (x^2 + y^2)dx$ на кривой $y \equiv 0$ достигает строгого минимума.

▲ Для любой непрерывной на $[0,1]$ функции $y(x)$ имеем

$$\Delta V = V[y(x)] - V[0] = \int_0^1 (x^2 + y^2)dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 y^2 dx \geq 0,$$

причем знак равенства достигается только при $y(x) \equiv 0$. ▲

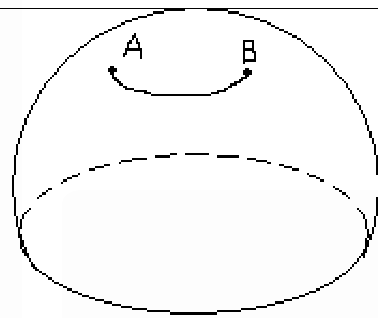
ПРИМЕРЫ ПОСТАНОВОК ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ на базе функционалов



$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx \to \min$$

Найти форму траектории с кратчайшей длиной на плоскости между точками $(x_1, y(x_1)), (x_2, y(x_2))$

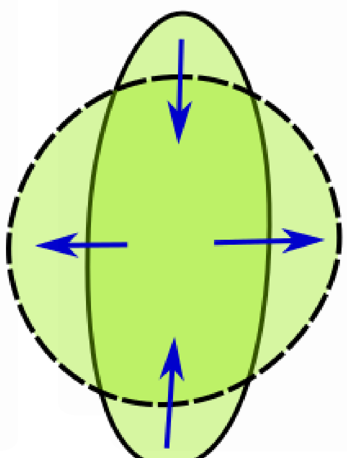
Задача о геодезических линиях. Определить кривую с кратчайшей длиой, соединяющую две заданные точки на некоторой поверхности.



$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y'(x))^2+(z'(x))^2}\,dx \to \min$$

Длина дуги в пространстве между точками $(x_1, y(x_1), z(x_1, y(x_1))), (x_2, y(x_2), z(x_2, y(x_2)))$

Найти наибольшую площадь S, ограниченную замкнутой кривой заданной длины.
Вытянутую фигуру можно сделать более округлой, что не изменит периметр, зато увеличит площадь.



$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}\,dt \to \max$$

ПРИМЕРЫ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ – исследование функционалов на экстремум и отыскание тех функций, на которых этот экстремум достигается.

ПРИМЕРЫ ПОСТАНОВОК ЗАДАЧ

1) **Задача о брахистохроне** – плоской линии, по которой материальная точка быстрее всего соскальзывает под действием только силы тяжести из точки A в точку B (B ниже A и точки не лежат на одной вертикальной прямой).

2) **Задача о геодезической линии** – линии наименьшей длины, расположенной на заданной поверхности и соединяющей две данные точки.

3) **Задача Дидоны** – легендарной карфагенской царевны, которой понадобилось ремешком фиксированной длины ограничить участок земли наибольшей площади.

4) **Задача Чаплыгина**. Определить замкнутую кривую, по которой должен двигаться *центр масс летательного аппарата*, чтобы за время T облететь наибольшую площадь, если задана постоянная скорость ветра q. Скорость летательного аппарата постоянна и равна V_0.

5) ....

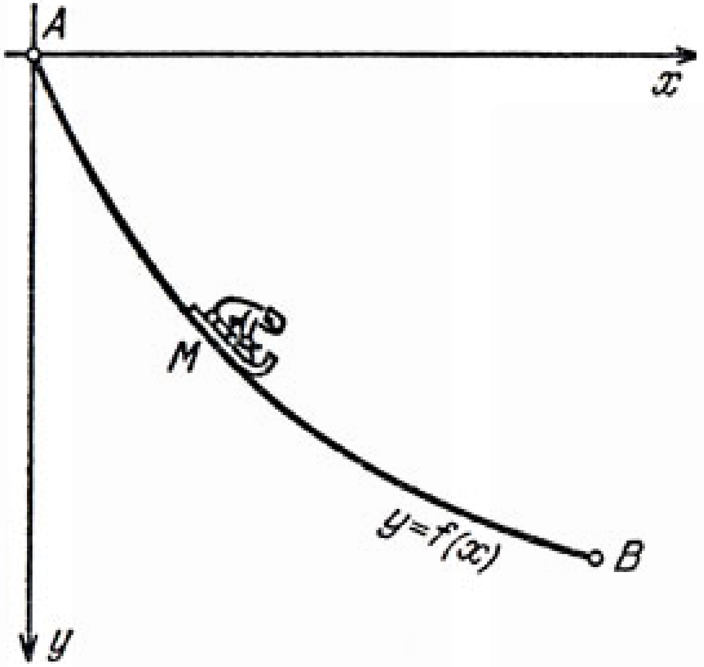
ЗАДАЧА О БРАХИСТОХРОНЕ. И. Бернулли 1696 г.

Если начальная и конечная точки движения [заданы], то поскольку прямая есть кратчайшее расстояние между ними, то можно было бы думать, что движение, совершающееся по ней, требует наименьшего времени. На самом деле это не так.

Г. Галилей

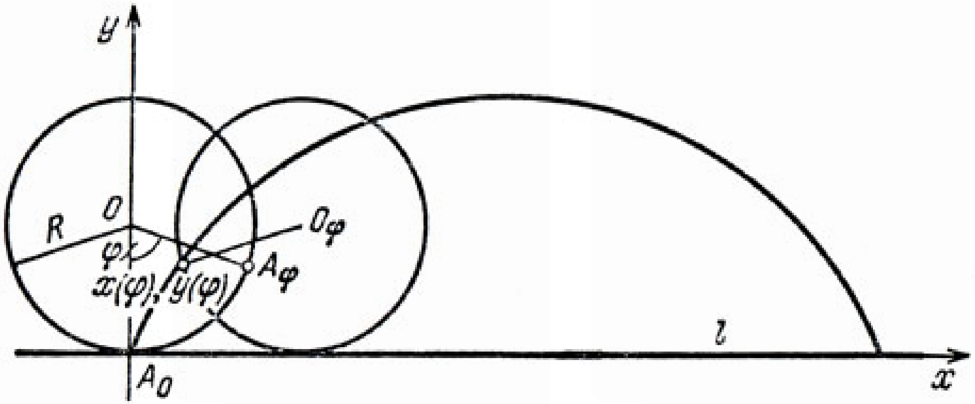
1696 г. научный журнал - "Акта Эрудиторум". Заметка Иоганна Бернулли: "Новая задача, к решению которой приглашаются математики".

В вертикальной плоскости даны точки A и B. Определить путь AMB, спускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело M, начав двигаться из точки A, достигнет точки B в кратчайшее время.



1. Иоганн Бернулли
2. Лейбниц
3. Якоб Бернулли (брат Иоганна)
4. Лопиталь
5. безымянное решение. Ньютон потратил на решение этой задачи около 12 часов непрерывного обдумывания.

БРАХИСТОХРОНОЙ ЯВЛЯЕТСЯ ЦИКЛОИДА



Циклоиду описывает точка окружности, катящаяся без скольжения по прямой:

$x(\varphi) = R(\varphi - \sin\varphi)$, $y(\varphi) = R(1 - \cos\varphi)$, при $\varphi = 0$ проходит через начало координат.

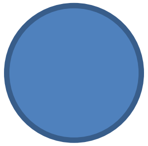
ЗАДАЧА ДИДОНЫ (ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА)

ЛЕГЕНДА: ОСНОВАНИЕ ГОРОДА КАРФАГЕНА ЦАРИЦЕЙ ДИДОНОЙ (ЗАНЯТЬ КУСОК ЗЕМЛИ, КОТОРОЙ МОЖНО ОГРАНИЧИТЬ БЫЧЬЕЙ ШКУРОЙ).

Изопериметрическая задача – одна из основных задач вариационного исчисления, заключающаяся в следующем: среди всех кривых данной длины найти ту, для которой некоторая величина, зависящая от кривой имеет максимальное или минимальное значение.

ПРИМЕРЫ ПОСТАНОВОК ЗАДАЧИ ДИДОНЫ

Среди замкнутых плоских кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую максимальную площадь.



Среди замкнутых плоских кривых, имеющих заданную площадь, найти кривую, имеющих минимальный периметр.

Формализация: найти фигуру наибольшей площади, которую можно ограничить кривой заданной длины/найти фигуру заданной площади, которая имет наименьшую длину границы. Пусть $(x(t), y(t))$ — решение изопериметрической задачи на плоскости

$$\int_0^T \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\ dt \mapsto \min, \quad \int_0^T y(t)\dot{x}(t)\ dt = C, \ x(0) = x(T), \ y(0) = y(T).$$

Сложности: Бесконечное число переменных (решением является функция). Среди каких кривых искать решение?

ЗАДАЧА ДИДОНЫ (ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА)

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА В ПРОСТРАНСТВЕ:

«Из всех тел равного объема наименьшую поверхность имеет шар»

Пытаясь сохранить тепло в холодной среде, кот уменьшает свою поверхность.

Кот решает задачу о теле с данным объемом и наименьшей поверхностью, делая себя шарообразным.

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ. ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА. История вопроса

1744 Мопертюи (фр. 18 век) :

- истинная траектория частицы отличается от любой другой тем, что *действие* для неё является **минимальным**;
- "*экономия действия*" в природе доказывает существование Бога.

Действие (функционал) - мера поведения физической системы.

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ (ПНД) - очень удобная математическая модель описания того, почему система ведёт себя так, а не иначе.

Логика описания моделей поведения объектов:

1) **каждый объект ведет себя экономно в том смысле, что для выбранного поведения существует функционал, достигающий экстремума на этом поведении;**
2) **если функционал известен, то его экстремали следует искать на решениях некоторого ДУ 2-го порядка (теорема Эйлера-Лагранжа);**
3) **если нужно определенное заданное поведение объекта, то следует задать такой функционал, экстремали которого и дадут нужное поведение объекта (управление)**

3*) Современные исследования.
Задавая произвольные функционалы, можно выявить новые свойства объекта на основе ПНД

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

КЛАССИЧЕСКАЯ ПРОСТЕЙШАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Лагранж: Аналитическая механика. 1788

Механическая система движется по траектории $x(t)$, в которой функционал S называемый **действием** достигает своего минимума

$$S(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\ dt,$$

где L — **лагранжиан** системы (разность кинетической и потенциальной энергии). Соответствующие уравнения Эйлера-Лагранжа описывают эволюцию системы во времени.

Лагранж: **метод множителей Лагранжа**

Замена сложной задачи на условный экстремум задачей поиска обычного экстремума

Задача поиска условного экстремума

$$F(x) \to \text{extr}, F_0(x) = 0$$

сводится к задаче поиска экстремума функции

$$F(x) + \lambda F_0(x),$$

где λ_0 — новая переменная, называемая **множителем Лагранжа**.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Ищется функция $y(x)$**, на которой функционал вида** $J(y)=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x)\right)dx$, **достигает своего глобального экстремума.**

Теорема. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Для того чтобы функционал

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x)\right)dx,$$

определенный на множестве непрерывно дифференцируемых функций $D=\{y(x)\}$, удовлетворяющих граничным условиям $y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$, достигал на функции $y(x)$ экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0.$$

Интегральные кривые дифференциального уравнения Эйлера называются экстремалями. Уравнение Эйлера в развернутом виде после взятия полной производной $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$ и вспомогательного обозначения (для читабельности)

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ

1. Найти экстремум значений функционала $J(y)=\int_0^1\left(4y-y'^2+12x^2y'\right)dx$ **с граничными условиями:** $y(0)=1, y(1)=4$**; определить тип экстремума.**

Находим *уравнение Эйлера* $F(x,y,y')=4y-y'^2+12x^2y'$ $\Rightarrow$ Получаем из формулы

$\frac{\partial F}{\partial y}=\left(4y-y'^2+12x^2y'\right)'_y=4;$ $\frac{\partial F}{\partial y'}=\left(4y-y'^2+12x^2y'\right)'_{y'}=-2y'+12x^2;$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\left(-2y'+12x^2\right)'=-2y''+24x.$ $4-\left(-2y''+24x\right)=0\Rightarrow y''=12x-2.$

Интегрирование уравнения $y''=12x-2$ приведет к общему решению вида:

$$y=2x^3-x^2+C_1x+C_2.$$

С учетом условий на границы $y(0)=1, y(1)=4$ получаем и решаем систему уравнений	$y(0)=1\Rightarrow 1=2\cdot 0^3-0^2+C_1\cdot 0+C_2\Rightarrow C_2=1;$ $y(1)=4\Rightarrow 4=2\cdot 1^3-1^2+C_1\cdot 1+1\Rightarrow C_1=2$

$C_1=2, C_2=1\Rightarrow$ Ответ: итоговый вид экстремали $y^*(x)=2x^3-x^2+2x+1.$

Для определения типа экстремума найдем его *вариацию*. $\left(y^*\right)'=6x^2-2x+2$

$$DJ=J\left(y(x)\right)-J\left(y^*(x)\right)=J\left(y^*(x)+\varepsilon\right)-J\left(y^*(x)\right)>0?\Rightarrow$$

$$J\left(y^*(x)\right)=\min_{y(x)}J\left(y(x)\right)$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ

2. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_0^1 \left[x^2(t) + x'^2(t)\right]dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

□ 1. Запишем уравнение Эйлера. Так как $F = x^2 + x'^2$, $F_x = 2x$, $F_{x'} = 2x'$, $\frac{d}{dt}\{F_{x'}\} = 2x''$, получаем $2x - 2x'' = 0$ или $x'' - x = 0$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера. Оно является однородным с постоянными коэффициентами, поэтому составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ – действительные разные. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

3. Определим постоянные C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$x(1) = C_1 e + C_2 \frac{1}{e} = 1.$$

Отсюда $C_1 = \frac{e}{e^2 - 1}$, $C_2 = \frac{e}{1 - e^2}$. В результате получаем экстремаль

$$x^*(t) = \frac{e}{e^2 - 1} e^t + \frac{e}{1 - e^2} e^{-t}. \blacksquare$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ

3. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_{-1}^{0} \left[12t\, x(t) - x'^{2}(t)\right] dt ,$$

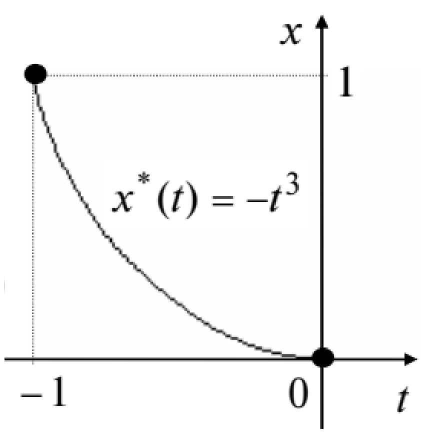
удовлетворяющую граничным условиям $x(-1) = 1$, $x(0) = 0$.

□ 1. Составим уравнение Эйлера . Так как $F = 12t\,x - x'^{2}$, $F_x = 12t$, $F_{x'} = -2x'$, $\frac{d}{dt}\{F_{x'}\} = -2x''$, получаем $12t - (-2x'') = 0$ или $x'' = -6t$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера, интегрируя дважды левую и правые части уравнения $x'' = -6t$: $x' = -3t^2 + C_1$, $x(t) = -t^3 + C_1 t + C_2$.

3. Определим постоянные C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(-1) = 1 - C_1 + C_2 = 1,$$
$$x(0) = C_2 = 0.$$



Отсюда $C_1 = C_2 = 0$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = -t^3$

ЛИТЕРАТУРА

Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990.

Дэннис. Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер.с англ. М.: Мир, 1988.

Карманов В.Г. Математическое программирование: Учебное пособие. М.: Наука, 1989.

Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1991.

Аоки М. Введение в методы оптимизации. М.: Наука, 1988.

Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. М.: Мир, 1994.

Уайлд Д. Дж. Методы поиска оптимума. М.: Наука, 1997.

Габбасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Изд во БГУ, 1988.

Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1989.

Гилл Ф. и др. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1992.

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/69/Cycloid_f.gif?20100503165446