ЛЕКЦИЯ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. СЛОЖНЫЕ ОБЪЕКТЫ. ТИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. УКАЗАНИЯ К ЛР-1

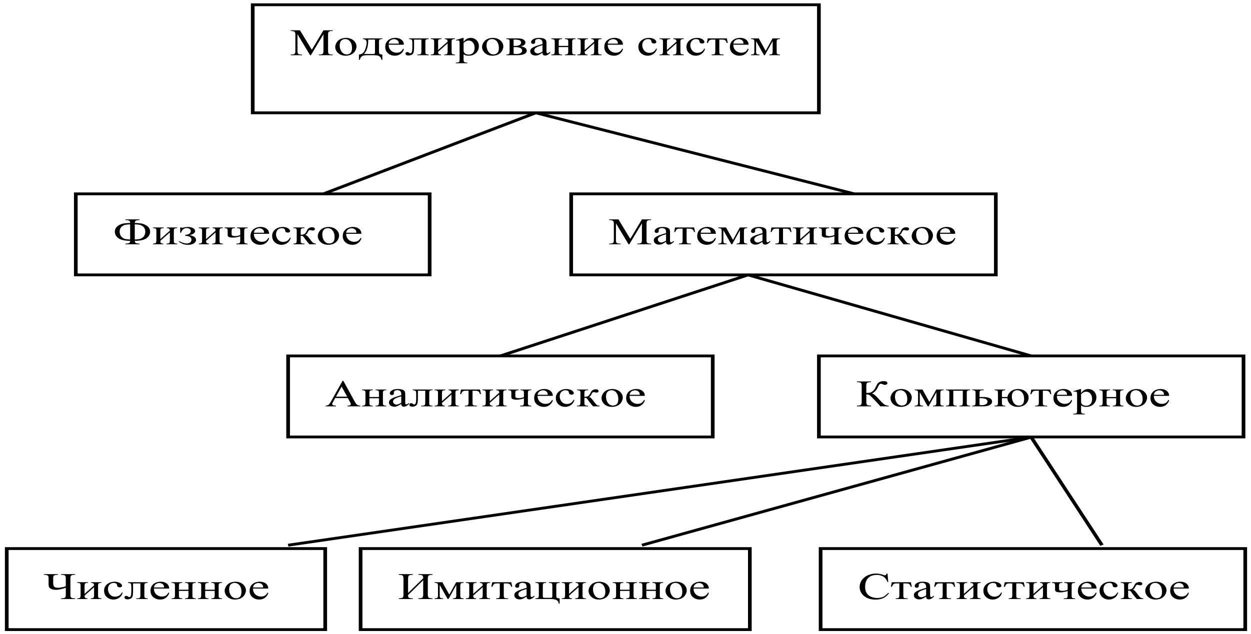
Составитель:
д.т.н. Колесникова С.И.
skolesnikova@yandex.ru

ПОНЯТИЕ МОДЕЛИ. КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Модель – это физический или абстрактный образ моделируемого объекта, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать интересующие исследователя физические свойства и характеристики объекта.

Зачем? Легкость, доступность получения информации, сокращение сроков исследования и уменьшение материальных затрат на исследование и др.

Моделирование процесс замещения объекта исследования некоторой его *моделью* и проведение исследований на модели с целью получения необходимой информации об объекте.



Классификация видов моделирования систем

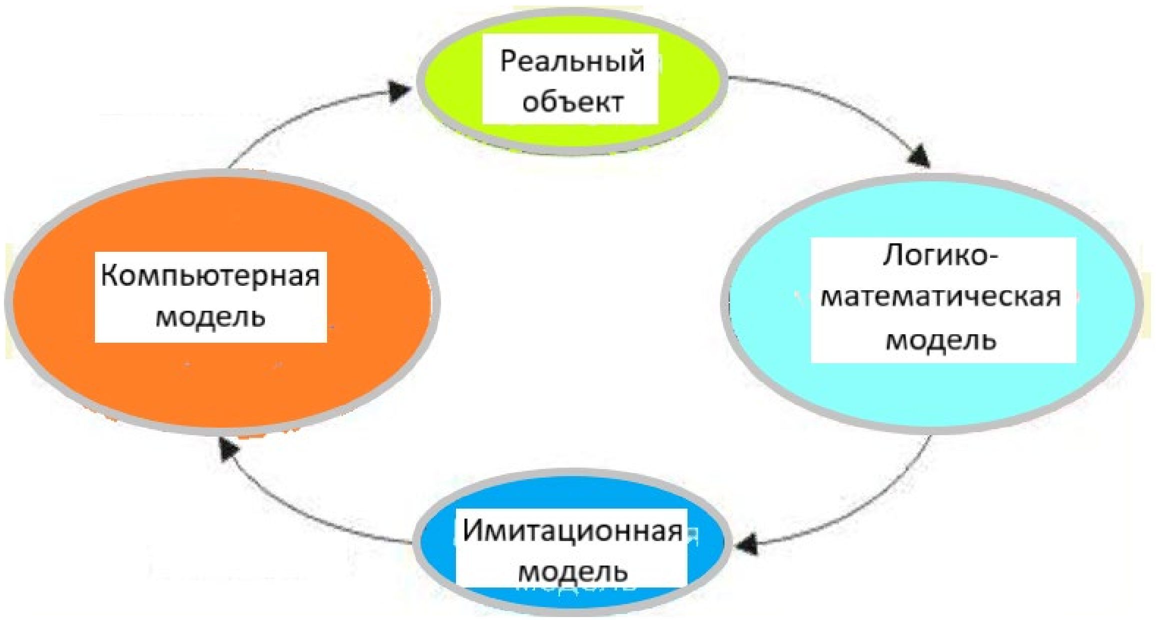
ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ-3. ЭТАПЫ ИМ

Модель — система исследования, которая служит средством получения информации о другой системе.

Модель — это приближенный слепок реальности.

Моделирование — метод исследования объектов (систем) в целях их познания и использования, основанный на процессах формирования и оперирования с моделями.

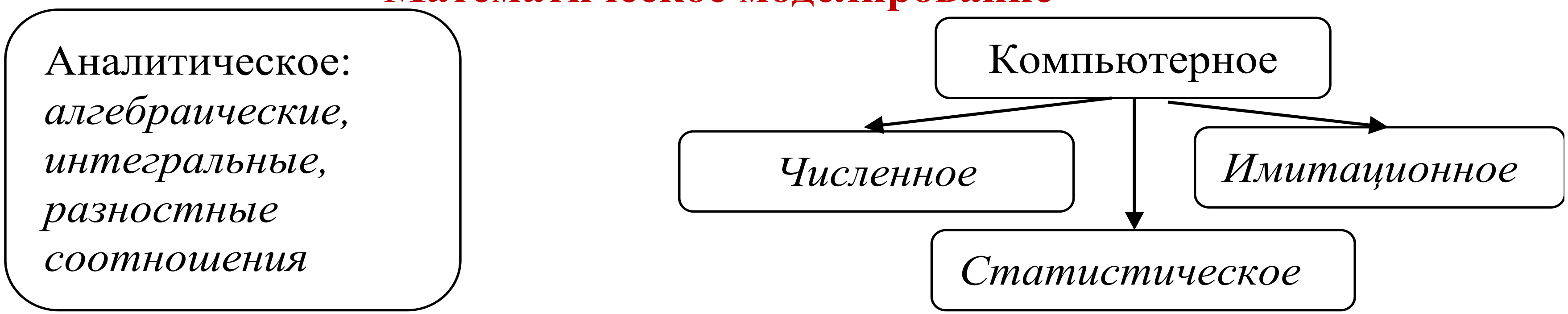
Среда — совокупность элементов, окружающих систему, ***не*** входящих в её состав, но оказывающих на неё свое влияние.



Физическое моделирование: 1) сама исследуемая система (например, производственный эксперимент), 2) другая система с подобной физической природой (макет: продувка моделей самолетов в аэродинамических трубах).

Математическое моделирование - процесс установления соответствия данной реальной системы некоторой математической модели и исследование этой модели, позволяющее получить характеристики реальной системы.

Математическое моделирование



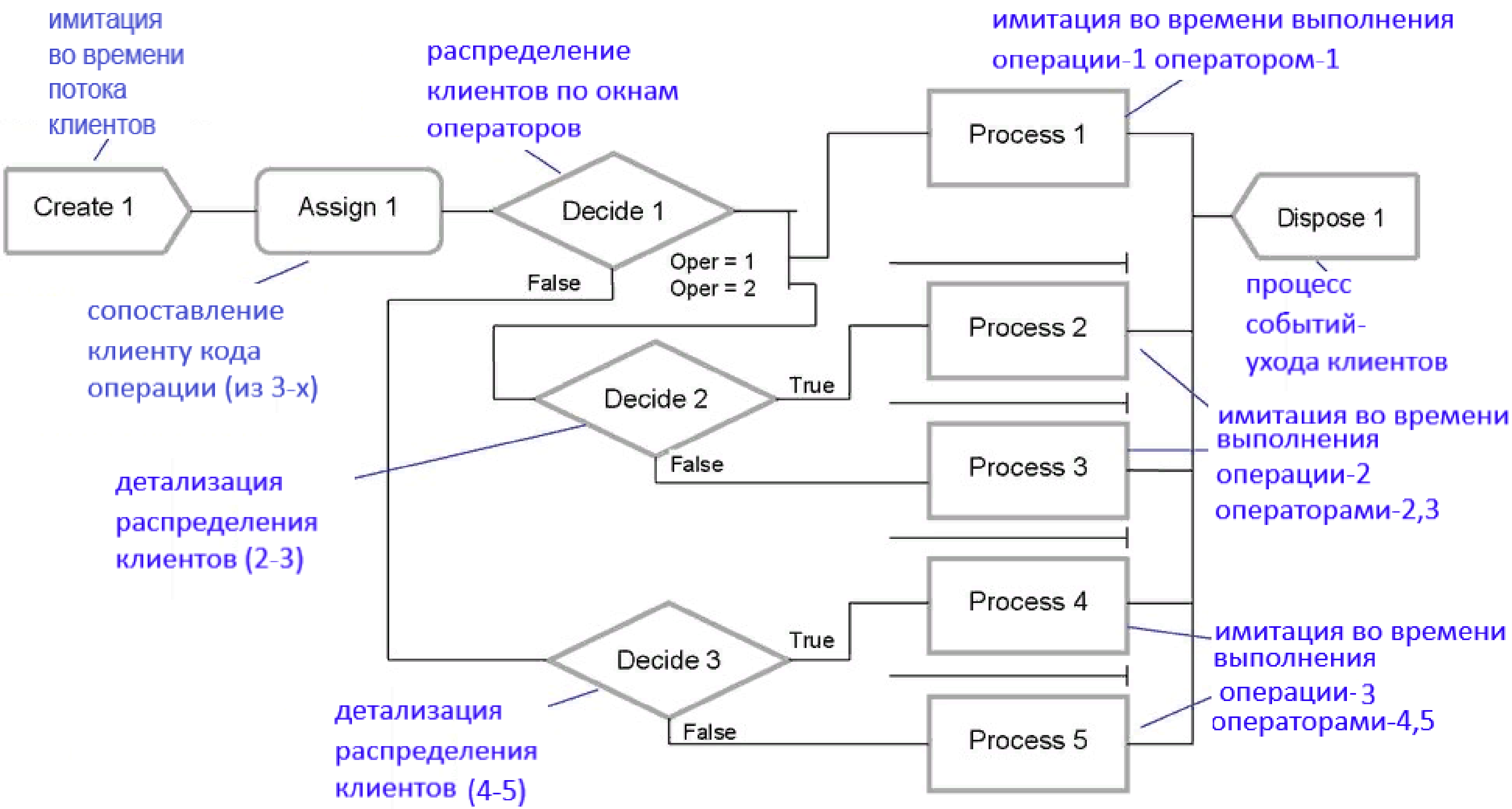
Компьютерное моделирование - математическая модель системы представлена в виде программы на ЭВМ, позволяющей проводить с ней вычислительные эксперименты.

Численное моделирование - использование методов вычислительной математики в численном решении некоторых математических уравнений при заданных значениях параметров и начальных условиях.

Имитационное моделирование – воспроизведение на ЭВМ элементарных явлений, составляющих реальный исследуемый процесс (объект), с сохранением последовательности протекания событий во времени.

Статистическое моделирование – это вид моделирования для получения статистических данных о процессах в моделируемой системе.

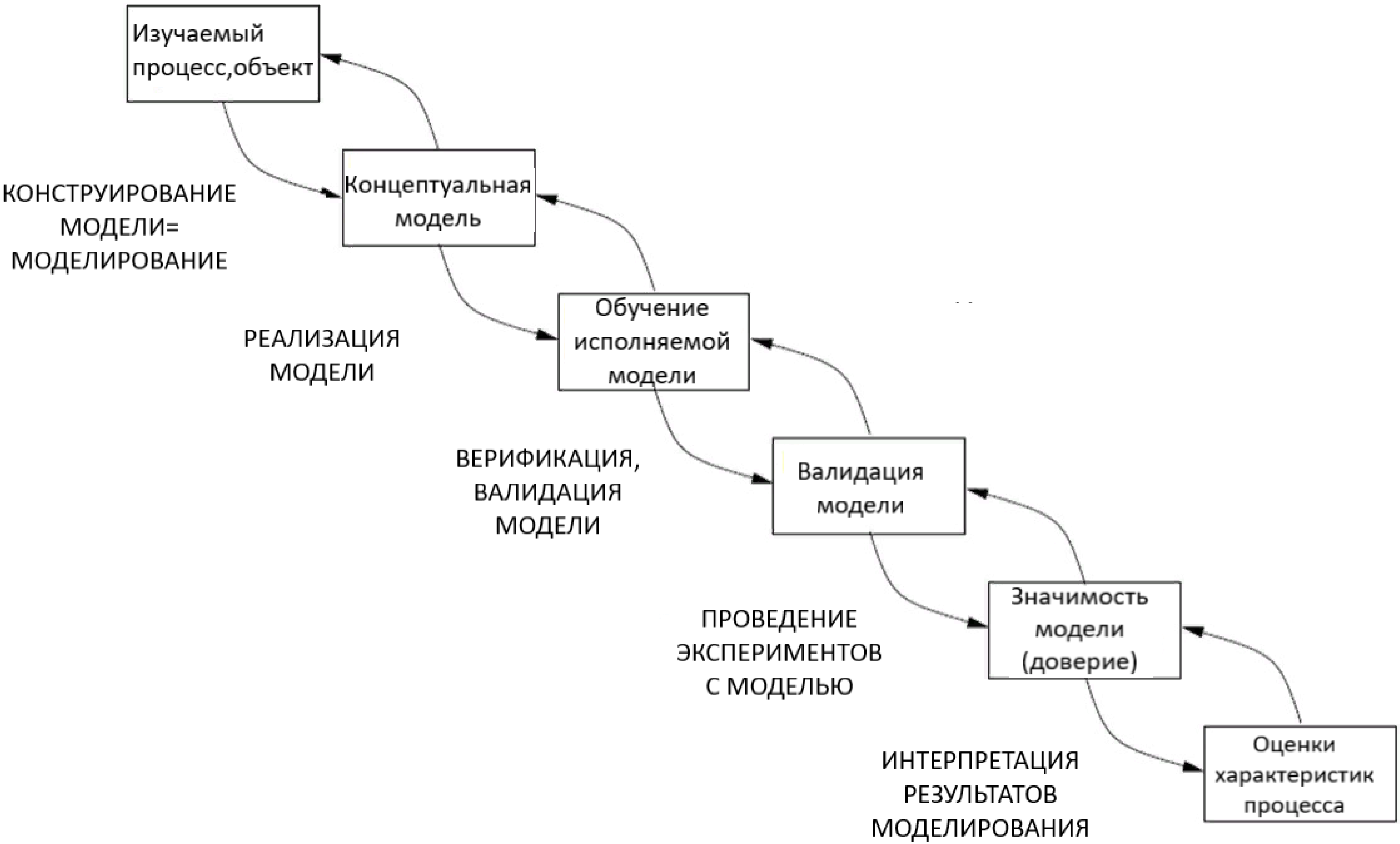
ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ-1



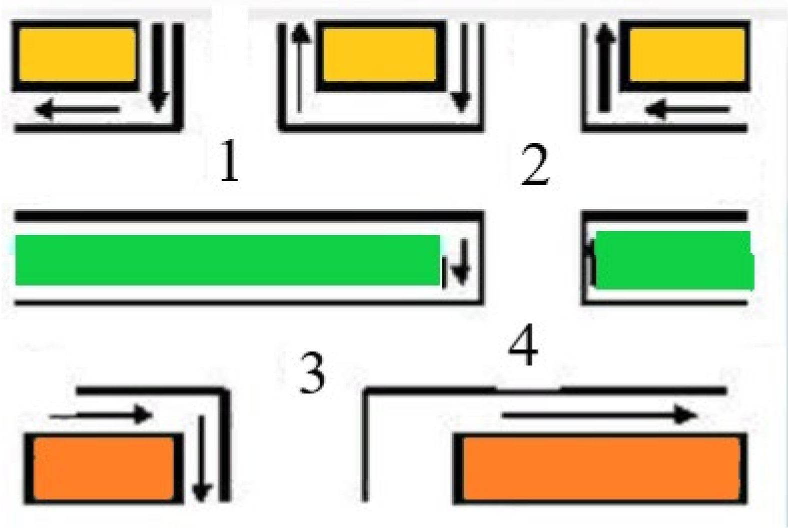
Имитация моментов прихода клиентов (времени между приходами) на входе как генерация случайного потока событий с интенсивностью λ

Имитация моментов окончания обслуживания клиентов (длительностей обслуживания) на входе как генерация случайного потока событий с интенсивностью μ

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ-2. ЭТАПЫ ИМ



ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ-3. ОПТИМИЗАЦИЯ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ



Задача 1. Фрагмент дорог города. 4 перекрестка.
Найти политику переключения светофоров, минимизирующую среднее время ожидания в данной зоне города.

Задача 2. Чему равна прогнозная численность населения России в начале третьего тысячелетия на основе анализа переписи населения за предыдущие годы?

Задача 3. Несколько человек решили организовать видеокафе на 6 столиков по 4 места за каждым. С каждого посетителя будет взиматься плата за сеанс видеофильма и ужин (всем посетителям будет предлагаться один и тот же набор блюд). Администрация города постановила, что плата за вход не должна превышать 5$. Требуется определить такую входную плату, при которой будет получена наибольшая выручка.

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Будут ли следующие зависимости линейными?

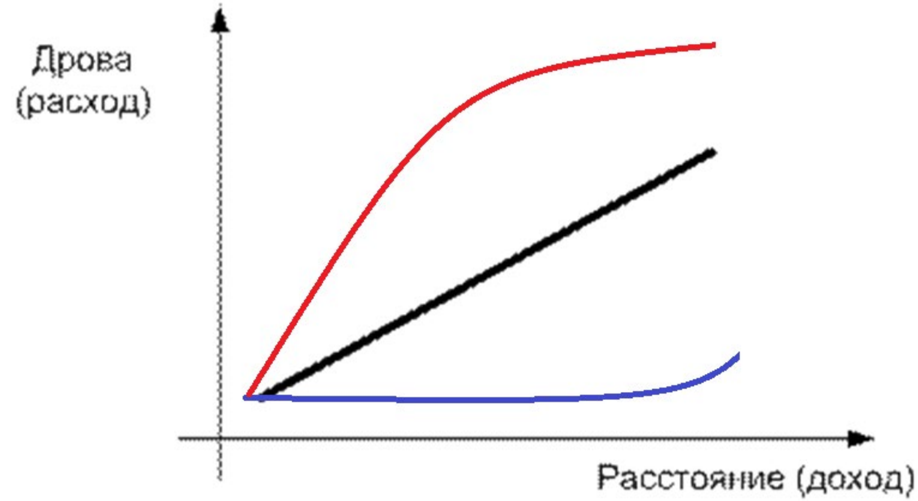
— зависимость веса человека от его роста?
— длительность ожидания в очереди в магазине?
— посещаемость поликлиники в период гриппа?
— количество человек, ожидающих поезда на станции метро (во времени)?

Постановка линейной задачи: **$Y = b \cdot X + \varepsilon$**

Постановка нелинейной задачи: **$Y = f(X, b, \varepsilon)$** где вид **, f** – нелинейный.

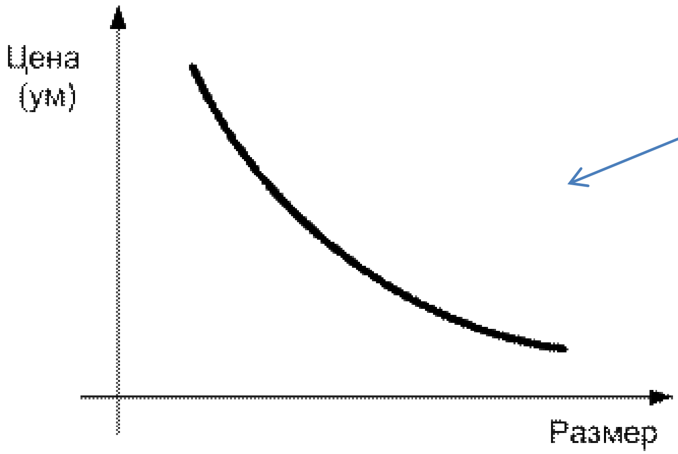
Линейные модели?

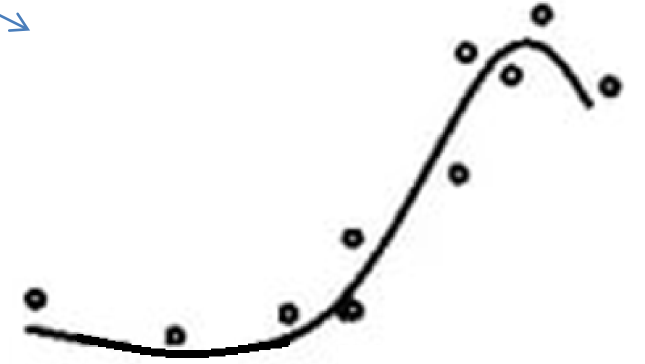
1) Чем дальше в лес, тем больше дров
2) По доходу и расход

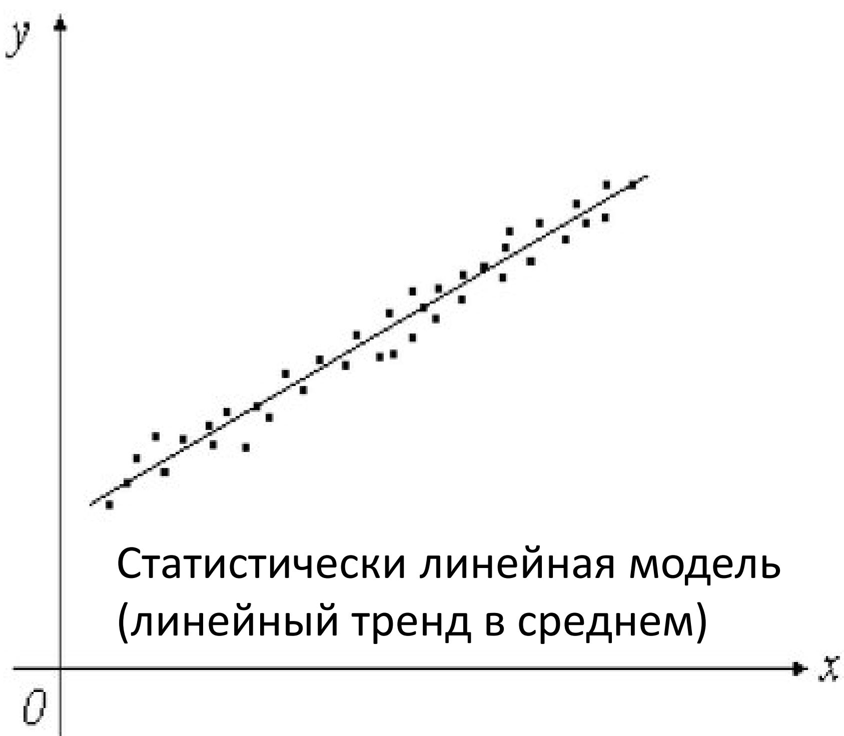


ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Нелинейная модель







Статистически линейная модель
(линейный тренд в среднем)

Статистически нелинейная модель
(логарифмический тренд в среднем)

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

Модель	Замена	Линейная модель
$y = \beta_0 + \dfrac{\beta_1}{x} + \varepsilon$	$x^* = \dfrac{1}{x}$	$y = \beta_0 + \beta_1 x^* + \varepsilon$
$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_m x^m + \varepsilon$	$x_1 = x;$ $x_2 = x^2;$ $\ldots$ $x_m = x^m$	$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m + \varepsilon$
$y = \dfrac{1}{\beta_0 + \beta_1 x}$	$y^* = \dfrac{1}{y}$	$y^* = \beta_0 + \beta_1 x$

НЕЛИНЕЙНОСТЬ ОБЪЕКТОВ И ЯВЛЕНИЙ – В СОВРЕМЕННОЙ НАУКЕ, ОБРАЗОВАНИИ

«... истинные законы не могут быть линейными» А. Эйнштейн

«... Создание общей теории нелинейных систем вряд ли возможно» Р. Фейнман

Все реальные системы являются нелинейными, многомерными и многосвязными, в которых протекают сложные переходные процессы и возникают критические и хаотические режимы.

ОТВЕТ НА ЛЮБОЙ ВОПРОС УЖЕ СУЩЕСТВУЕТ.
НАДО ТОЛЬКО ПРАВИЛЬНО ПОСТАВИТЬ ВОПРОС,
ЧТОБЫ ПОЛУЧИТЬ ЕГО

Формализовать цель исследования

Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. –М.: Мир, 1979.

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ, РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ – математические модели динамических объектов

Состояние (совокупность переменных) *детерминированной* динамической системы (ДС) изменяется во времени по некоторому заданному закону.

Регулярные ДС – устойчивые (малые возмущения со временем затухают, ДС возвращается к исходному регулярному (стационарному) поведению.

Хаотические ДС обладают экспоненциальной чувствительностью к начальным условиям (изменение в начальных условиях усиливается экспоненциально во времени).

Примеры хаотического поведения: броуновское движение, изменения погоды, колебания орбит астрономических тел, поведение фондовой биржи, биологические процессы в организме человека, криптографические системы.

Объекты исследований: открытые сложные нелинейные системы с обратными связями.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Система (от греч. *systema* – целое, составленное из частей, соединение) – множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, образующих определенную целостность, единство.

Любая система может быть охарактеризована некоторым набором величин. Величины, которые можно измерить, называют *физическими*: «длина», «температура», «цена», скорость,...

Все величины можно разделить на ***параметры*** и ***переменные***.

Переменные – это величины, которые могут изменяться при рассмотрении процесса;

параметры – постоянные величины в рамках рассматриваемой задачи.

Независимые переменные – переменные (времяи, пространственные координаты), изменяющиеся независимо от рассматриваемой системы (в рамках данной задачи).

Зависимые переменные - зависят от независимых и изменяются с изменением независимых величин.

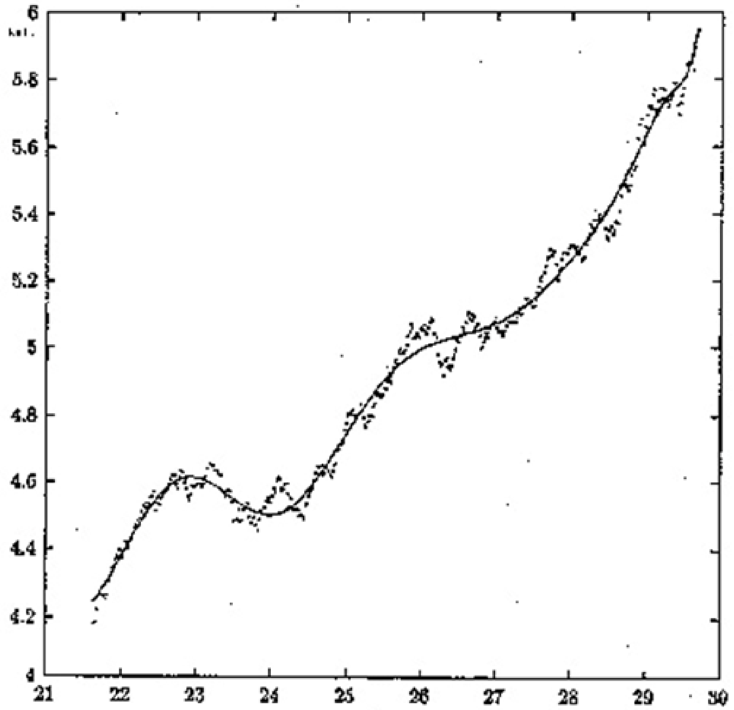
Пример. «Температура» и «давление» зависимые переменные; время - независимая переменная.

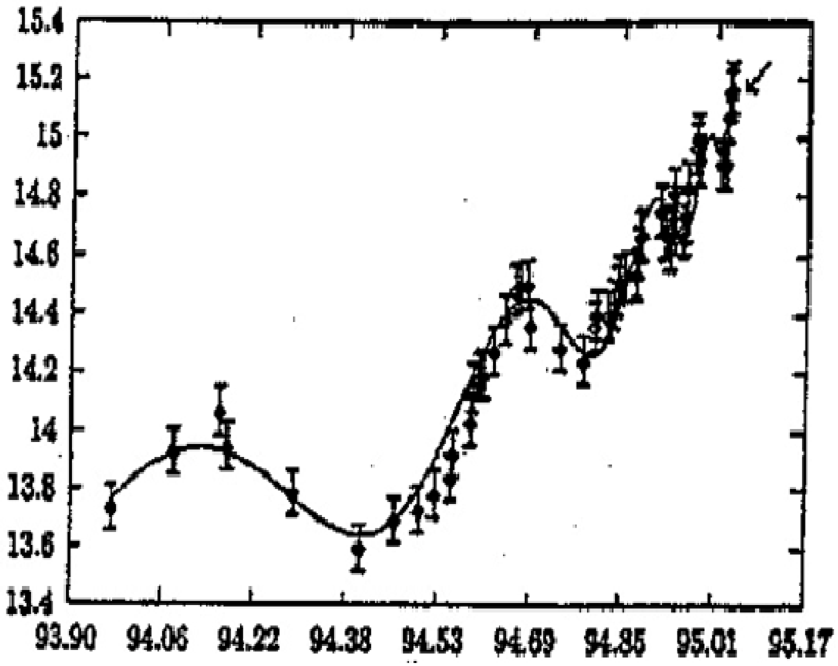
Мир линейных функций утомительно однообразен: линейная зависимость не обладает избирательностью,... не может описывать ни резонансных всплесков, ни насыщения, ни колебаний – ничего, кроме равномерного неуклонного роста или столь же равномерного и столь же неуклонного убывания.

Данилов Юлий Александрович (1936-2003) – русский физик, математик, историк науки, педагог, переводчик и просветитель

Одно и то же математическое описание – модель для разных процессов-явлений.

катастрофические события разной природы могут развиваться по одним законам (Г.Г. Малинецкий)





Фондовый рынок: зависимость логарифма индекса Доу-Джонса от времени перед Великой депрессией в 1929г.

Геологический объект: концентрации ионов хлора в родниках перед землетрясением в Кобе в 1995г.

ПРИМЕРЫ ОПИСАНИЙ. МОДЕЛЬ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СА

Задача синтеза системы управления продольным движением СА: определение вектора управления **u(x)** как функции координат состояния системы, обеспечивающего полет СА с заданными:

скоростью (x_1) V_0, высотой (x_4) H_0 и углом тангажа (x_5) ϑ_0

$$\dot{x}_1(t) = -g\sin x_5 + a_1 u_1 + z_1,$$

$$\dot{x}_2(t) = -g\cos x_5 + a_2 u_2 + z_2,$$

$$\dot{x}_3(t) = a_3 u_3 + z_3,$$

$$\dot{x}_4(t) = x_1 \sin x_5 + x_2 \cos x_5,$$

$$\dot{x}_5(t) = x_3,$$

$$\dot{x}_6(t) = x_1 \cos x_5 - x_2 \sin x_5.$$

x_1 - горизонтальная скорость, м/с, x_2 - вертикальная скорость, м/с,
x_3 - угловая скорость, рад/с; x_4 - высота, м,
x_5 - угол тангажа, град; x_6 - дальность полета, м,
z_1, z_2, z_3 - неизвестные возмущения,
u_1, u_2, u_3 - управляющие воздействия.

Исходный объект (дискретное описание)

$$X_{i+1} = X_i(\alpha C_0 - \mu\beta_X X_i Y_i),$$
$$Y_{i+1} = A(\alpha C_0 - \mu\beta_Y X_i Y_i).$$

(5

Аналог уравнения Фейгенбаума (В.И.Шаповалов)

X_i, Y_i – объемы продаж однотипной продукции, реализуемых частным X и государственным Y предприятиями, соответственно, в i-й период;

C_0 – средний доход покупателя в регионе;

A – количественн ... а государственных нужд в этом виде продукции;

β_X, β_Y – цены на товары у предприятий;

α, μ – коэффициенты пропорциональности.

Примеры объектов и задач управления

$X_{i+1} = X_i(\alpha C_0 - \mu\beta_X X_i Y_i)$, $Y_{i+1} = u_i(\alpha C_0 - \mu\beta_Y X_i Y_i)$. **(6)**	$X_{i+1} = X_i(\alpha C_0 - \mu\beta_x X_i Y_i)$, $Y_{i+1} = A(\alpha C_0 - \mu\beta_y X_i Y_i) + u_i$. **(7)**
u_i - закон изменения государственных нужд в этом типе продукции	u_i - закон изменения объемов производимой продукции данного типа
Цель управления: устойчивое достижение множества желаемых состояний, заданного аналитически $\{(X_i, Y_i) : \psi(X_i, Y_i) = 0,\ i \in \mathrm{N}\}$	

Сложный динамический объект (по Л.А. Растригину)

• НЕСТАЦИОНАРНОСТЬ • МНОГОМЕРНОСТЬ • МНОГОСВЯЗНОСТЬ
• НЕЛИНЕЙНОСТЬ •ХАОТИЧНОСТЬ •СЛАБАЯ ФОРМАЛИЗУЕМОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ

Свойства (и/или):

1) объект не имеет полного аналитического описания и полностью описывающей его модели, т.е. для построения его адекватной модели недостаточно априорной информации;

2) нестационарность описывающего его случайного процесса, (слабопредсказуемость);

3) нелинейность имеющихся моделей описания;

4) многомерность, многосвязность;

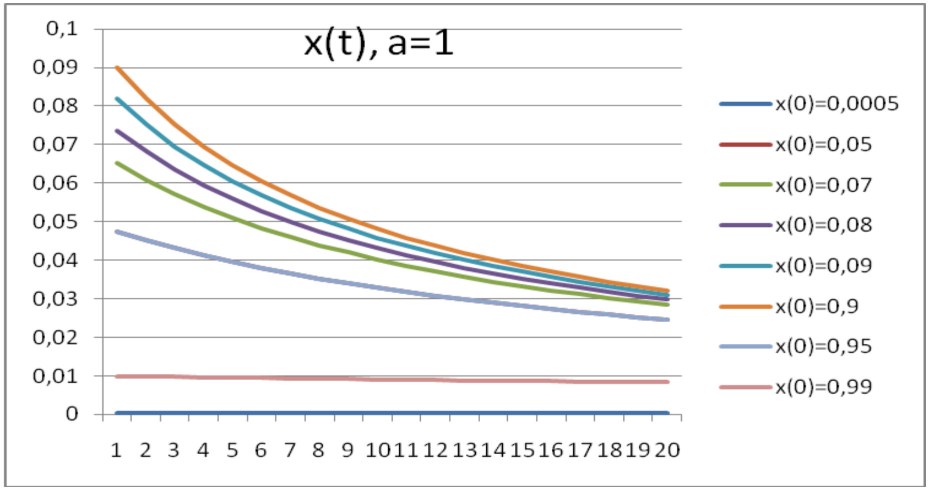
$$X(t) = \left(x_1(t)\cdot swf_1(t),\ldots,x_m(t)\cdot swf_m(t)\right),$$

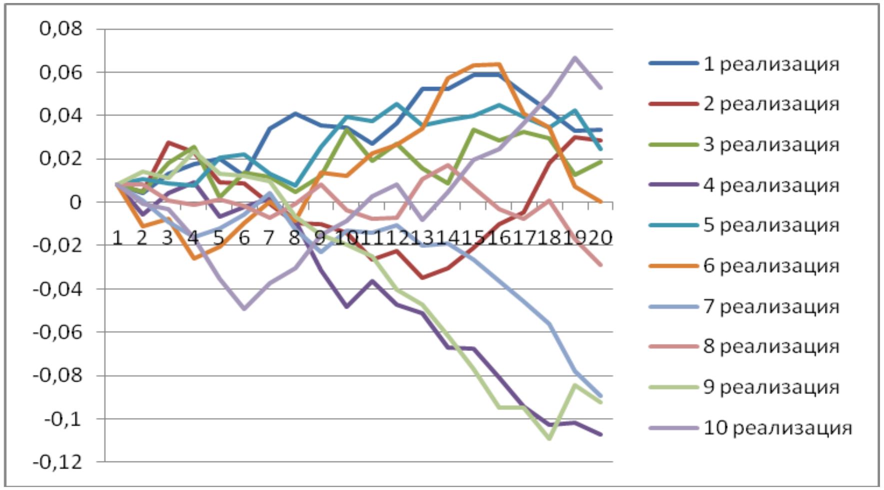
$swf_j(t)$ - переключательная функция: $x_j(t)\uparrow\downarrow$,

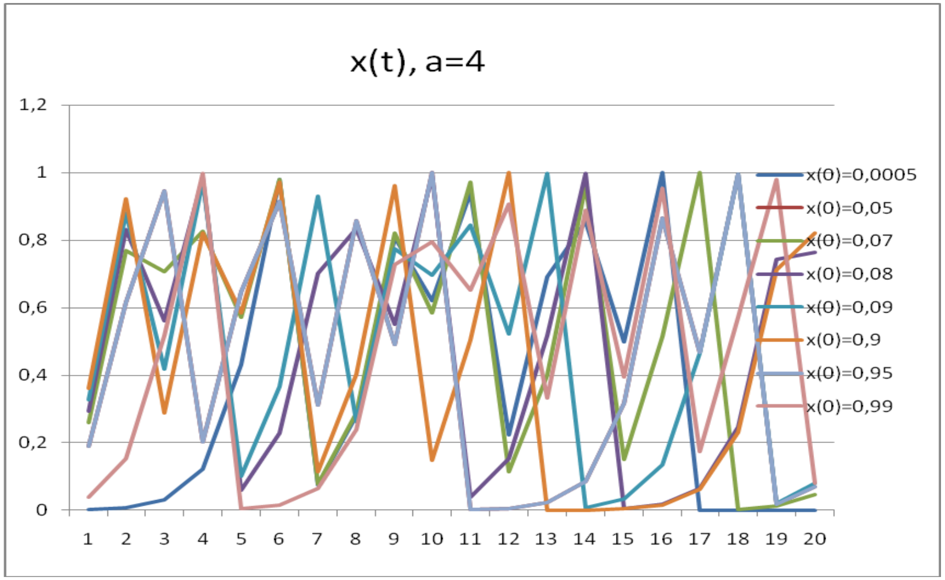
включения/выключения компоненты.

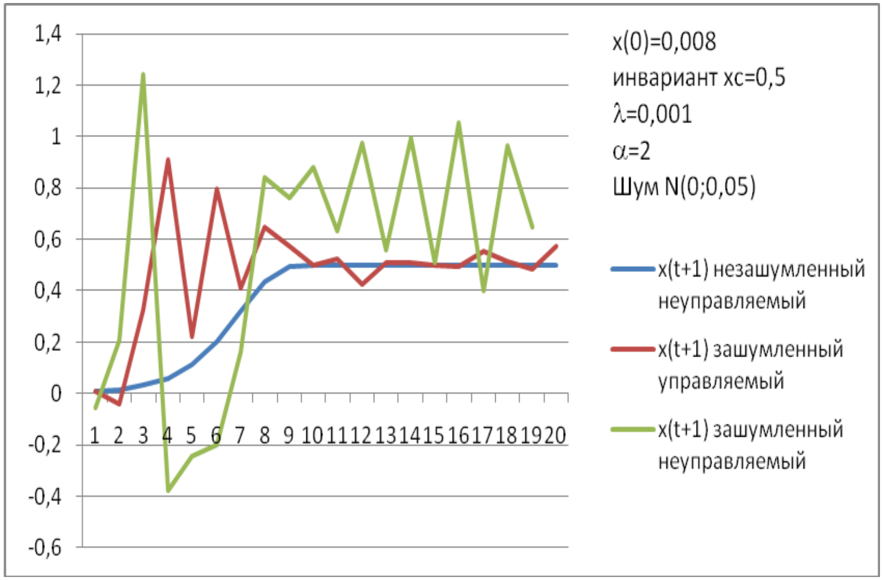
ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФЕЙГЕНБАУМА

$$x_t=\alpha x_{t-1}(1-x_{t-1}),\ t=1,2,\ldots$$









СОВРЕМЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Исследование процессов естественной самоорганизации

Построение алгоритмов силового ВОЗДЕЙСТВИЯ на объект

Синергетика

Кибернетика

Пассивное наблюдение за природными явлениями

Активное воздействие на искусственные и природные системы

Синергетическая теория управления (СТУ)

СТУ: выявление устойчивых законов поведения объекта (инвариантов) и их энергоэффективное достижение

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Арсенал математических методов, которые объединиют под названием – **методы разработки оптимальных решений** (или исследования операций):

- Теория управления запасами.
- Теория массового обслуживания.
- Теория игр.
- Теория статистических решений. –
- Сетевые методы планирования и управления. –
- **Математическое программирование**

Математическое (оптимальное) программирование включает в себя:

- линейное,
- нелинейное,
- целочисленное,
- динамическое,
- дискретное,
- выпуклое программирование.

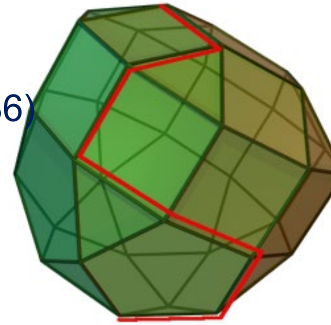
Нелинейное программирование – раздел математического программирования, изучающий задачи отыскания глобального экстремума фиксированной (целевой) функции при наличии ограничений в ситуации, когда целевая функция и ограничения имеют общий характер (не предполагаются линейными).

Стандартная форма задач ЛП и НЛП в матричной записи.

$f(x)=F(x)\to extr;$	$f(x)=Cx\to extr;$
$\Phi(x)=b.$	$Ax=b;$
	$x\geq 0.$

Леонид Витальевич Канторович (1912—1986)

Найти минимум линейной функции на выпуклом множестве. (Нобелевская премия по экономике).



Задачи на условный экстремум функции.

Условный экстремум функции – экстремум функции, аргументы которой удовлетворяют дополнительным условиям-**ограничениями, уравнениями связи**.

ПРИМЕРЫ. Задачи нелинейного программирования.

1) затраты изменяются не пропорционально количеству закупленных/произведенных товаров;

2) расход определенных видов сырья и ресурсов происходит нелинейно, а скачкообразно (в зависимости от объема производства);

3) среди замкнутых плоских кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую максимальную площадь;

4) среди тел равного объема найти с наименьшей поверхностью;

5) ....

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ И МЕТОДОВ ЛП (ЗЛП)

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ЗАДАЧ ЛП. Правила перехода к двойственной ЗЛП

Прямая задача		Двойственная задача	
$\max: \ Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$		$\min: \ f(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$	
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\dots,m$	x_i	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = 1,\dots,n$	y_i
$x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n$		$y_i \ge 0, \quad i = 1,\dots m$	

$$\boxed{\begin{array}{l} \max Z(X) \\ g_i(X) \le b_i,\, i = \overline{1,m} \end{array}} \quad \begin{array}{c} \textbf{Переход} \\ \xrightarrow{\hspace{4cm}} \\ \xleftarrow{\hspace{4cm}} \\ \textbf{к двойственной} \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} \min f(Y) \\ r_j(Y) \ge c_j,\, \mathrm{j} = \overline{1,n} \end{array}}$$

ФОРМЫ ЗАДАЧ ЛП

Каноническая	Стандартная	Общая
1. Ограничения		
Уравнения $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=\overline{1;m}$	Неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \left\{\begin{matrix}\le\\ \ge\end{matrix}\right\} b_i,\ i=\overline{1;m}$	Уравнения и неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \left\{\begin{matrix}\le\\ =\\ \ge\end{matrix}\right\} b_i,\ i=\overline{1;m}$
2. Условия неотрицательности		
Все переменные $x_j \ge 0,\ j=\overline{1;n}$	Все переменные $x_j \ge 0,\ j=\overline{1;n}$	Часть переменных $x_j \ge 0,\ j=\overline{1;s},\ s<n$
3. Целевая функция		
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ (*max* или *min*)		

Здесь: x_j – переменные задачи; c_j – коэффициенты при переменных в целевой функции; a_{ij} – коэффициенты при переменных в основных ограничениях задачи; b_i – правые части ограничений.

Любая ЗЛП может быть сведена к канонической, стандартной или общей задаче

ЗАДАЧИ ЛП (ЗЛП). ПРИМЕР

Составить экономико-математическую модель задачи:
для выпуска изделий двух типов A и B на заводе используют сырье четырех видов (I, II, III, IV).
Для изготовления изделий необходимо:
A: C1(A) ед. сырья вида I, C2(A) ед. вида II, C3(A) ед. вида III и C4(A) ед. вида IV.
B: C1(B) ед. сырья вида I, C2(B) ед. вида II, C3(B) ед. вида III, C4(B) 1 ед. вида IV.
Запасы сырья: I вида – К1 ед., II вида – К2 ед., III вида – К3 ед., IV вида – К4 ед.
Выпуск одного изделия приносит прибыль
типа A – П1 усл.ед.
типа B – П2 усл.ед.
Составить план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль.
Решение.

1. *Сведение данных в таблицу:*

Сырье	Кол-во сырья на ед. продукции, ед.		Запас сырья, ед.
	A	B	
I	C1(A)	C1(B)	К1
II	C2(A)	C2(B)	К2
III	C3(A)	C3(B)	К3
IV	C4(A)	C4(B)	К4
Прибыль от ед. продукции, усл.ед.	П1	П2	

2. *Формализация данных задачи как данных ЗЛП:*

ЗАДАЧИ ЛП (ЗЛП). ПРИМЕР 1

1. Сведение данных в таблицу:

Сырье	Кол-во сырья на ед. продукции, ед.		Запас сырья, ед.
	A	B	
I	C1(A)	C1(B)	K1
II	C2(A)	C2(B)	K2
III	C3(A)	C3(B)	K3
IV	C4(A)	C4(B)	K4
Прибыль от ед. продукции, усл.ед.	П1	П2	

2. Формализация данных задачи как данных ЗЛП: Обозначим x_1, x_2 – количество изделий типа А и В соответственно, планируемое к выпуску $(x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0)$.

Прибыль: $\text{П}1 \cdot x_1 + \text{П}2 \cdot x_2$,

Целевая функция задачи: $Z = \text{П}1 \cdot x_1 + \text{П}2 \cdot x_2 \to \max$.

Составляя неравенства по каждому виду сырья, получим систему:

$$Z = \text{П}1 \cdot x_1 + \text{П}2 \cdot x_2 \to \max;\quad Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} \text{C}1(\text{A}) \cdot x_1 + \text{C}1(\text{B}) \cdot x_2 \leq \text{K}1 \\ \text{C}2(\text{A}) \cdot x_1 + \text{C}2(\text{B}) \cdot x_2 \leq \text{K}2 \\ \text{C}3(\text{A}) \cdot x_1 + \text{C}3(\text{B}) \cdot x_2 \leq \text{K}3 \\ \text{C}4(\text{A}) \cdot x_1 + \text{C}4(\text{B}) \cdot x_2 \leq \text{K}4 \end{cases} \Rightarrow \text{Модель задачи ЛП} \Rightarrow \begin{cases} \text{C}1(\text{A}) \cdot x_1 + \text{C}1(\text{B}) \cdot x_2 \leq \text{K}1 \\ \text{C}2(\text{A}) \cdot x_1 + \text{C}2(\text{B}) \cdot x_2 \leq \text{K}2 \\ \text{C}3(\text{A}) \cdot x_1 + \text{C}3(\text{B}) \cdot x_2 \leq \text{K}3 \\ \text{C}4(\text{A}) \cdot x_1 + \text{C}4(\text{B}) \cdot x_2 \leq \text{K}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Имеется n $(i=1, \ldots, n)$ работ и m $(j=1, \ldots, m)$ потенциальных их исполнителей. Известны затраты c_{ij} на выполнение j-м исполнителем i-й работы.

Требуется назначить каждого исполнителя на одну работу так, чтобы минимизировать суммарные затраты на выполнение всех работ.

Методы решения задачи о назначениях основаны на двух простых утверждениях:

1) решение задачи не изменится, если к любому столбцу или строке матрицы затрат прибавить некоторую константу;

2) если все $c_{ij} \geq 0$ и найдется план X такой, что $Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}=0$, то X – оптимальный план. Здесь $n=m$.

Основанный на упомянутых утверждениях, алгоритм поиска решения заключается в преобразовании матрицы затрат $\left\| c_{ij} \right\|$ в матрицу с нулевыми элементами, образующими систему из n независимых нулей.

ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ЗАДАЧ ЛП

Вещественное ЛП - Simplex-метод.

Целочисленное ЛП не имеет общепринятого универсального математического подхода к решению (математические пакеты).

Python, пакет для научных расчетов scipy.

Функция **`scipy.optimize.linprog`** - для решения только задач вещественного ЛП.

Задачу целочисленного ЛП в Python можно решить с помощью любой из множества дополнительных библиотек, таких как PuLP, Pyomo, cvxopt и др.

MatLab

Функция **`linprog`** - для задачи вещественного ЛП. матрично-векторная форма записи ограничений.

Функция (начиная с версии R2014a) **`intlinprog`** – для решения задач смешанного ЛП.

Функция **`solve`** – универсальная функция, ограничения и целевую функцию можно задать символьно.

ЛИТЕРАТУРА

Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990.
Дэннис. Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер.с англ. М.: Мир, 1988.
Карманов В.Г. Математическое программирование: Учебное пособие. М.: Наука, 1989.
Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1991.
Аоки М. Введение в методы оптимизации. М.: Наука, 1988.
Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. М.: Мир, 1994.
Уайлд Д. Дж. Методы поиска оптимума. М.: Наука, 1997.
Габбасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Изд во БГУ, 1988.
Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1989.
Гилл Ф. и др. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1992.