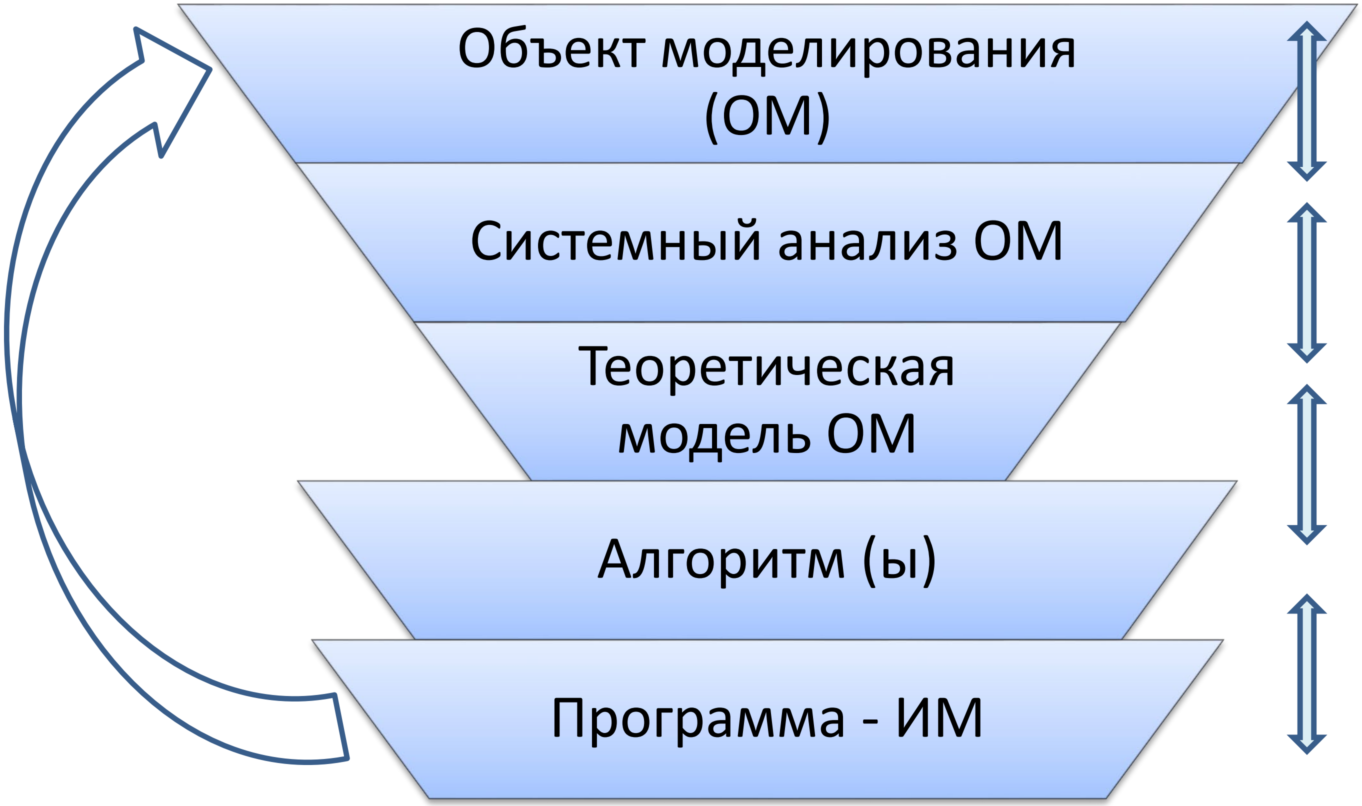
ЛЕКЦИЯ 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ (ТМО, СМО)

Составитель:
д.т.н. Колесникова С.И.
skolesnikova@yandex.ru

ЭТАПЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ (ИМ)



Системный анализ — междисциплинарный подход для реализации последовательности шагов с целью установления структурно/функциональных связей между переменными или постоянными элементами сложной системы.

ИМИТАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА. Справка.

Симео́н Дени́ Пуассо́н (*Siméon Denis Poisson*, 1781- 1840) — французский математик, механик и физик. Число учёных трудов Пуассона превосходит 300. Области чистой математики, математической физики, теоретической и небесной механики. **Создатель теории потоков простейших событий**.

Поток событий называется

1) стационарным, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси расположен этот участок;

2) потоком без последействия, если для любых неперекрывающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие;

3) ординарным, если вероятность попадания на элементарный участок двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Если поток событий обладает всеми тремя свойствами (стационарен, ординарен и не имеет последействия), то он называется ***простейшим (или стационарным пуассоновским) потоком***.

ИМИТАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА. Справка.

Название «**пуассоновский**» связано с тем, что при соблюдении условий 1)-3) число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, будет распределено по закону Пуассона.

Пусть в СМО требования поступают в случайные моменты времени $0, t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots,$ так что $u_k = t_k - t_{k-1}$ $(k \geq 1)$ – интервалы между поступлениями и, кроме того,

$$t_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_k.$$

Предполагается, что случайные величины $u_1, u_2, \ldots, u_k$ независимы и имеют показательное распределение с параметром λ:

$$\mathrm{P}\{u < t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

Пусть $\nu(t)$ - число требований, поступивших в СМО в интервале времени $(0, t)$.

Утверждение 1. Если длительности промежутков между поступлениями в систему последовательных требований имеют показательный закон, то случайное число требований, поступивших за время t, имеет распределение Пуассона с параметром λ, а процесс $\nu(t)$ является пуассоновским процессом:

$$\mathrm{P}\{X(\mathrm{t}) = \mathrm{k}\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Утверждение 2. Если число требований $\nu(t)$, поступивших за время t, является процессом Пуассона с интенсивностью λ, то длительности интервалов u_k независимы и имеют одинаковое показательное распределение с параметром λ.

ОСОБЕННОСТИ ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА.
Связь с показательным распределением.

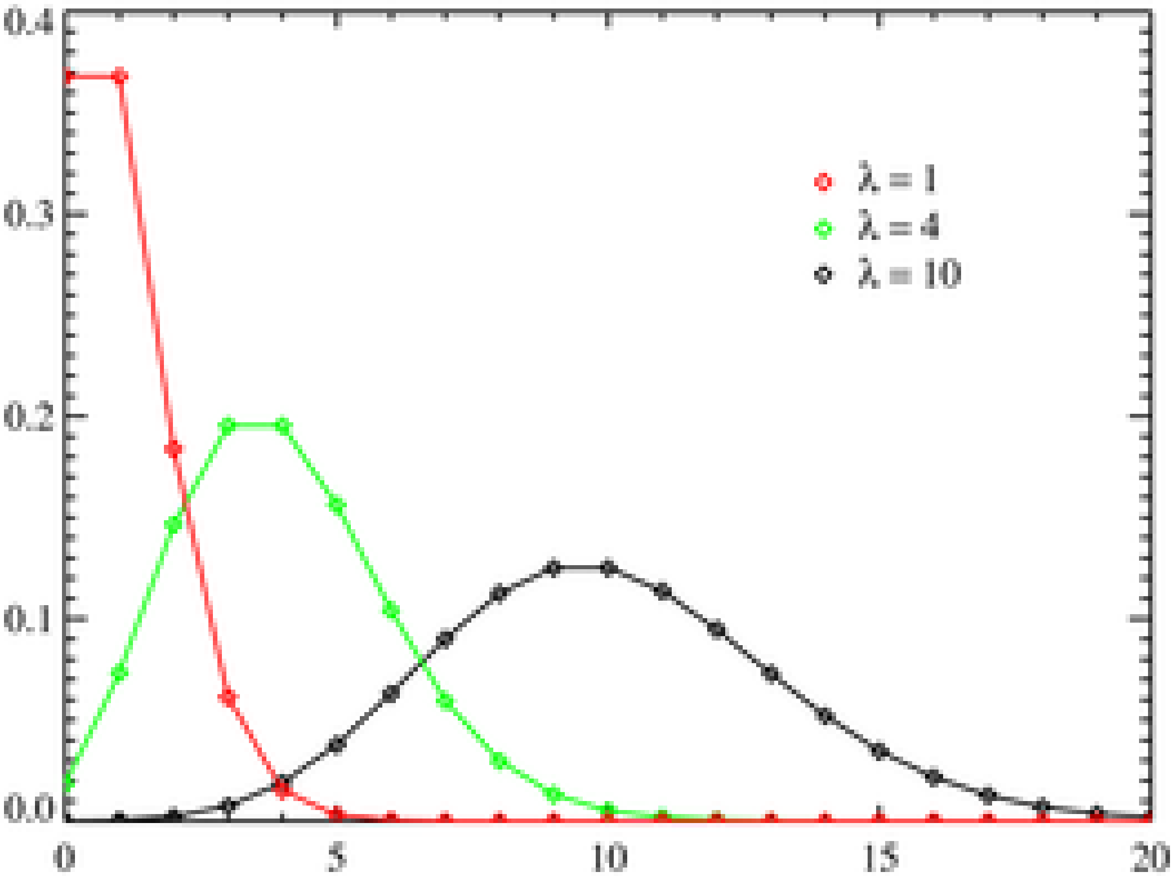
τ - СВ – интервал между наступлениями событий

$$P\{\tau < t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

Mτ=σ(τ)=λ^(-1)

$$P\{X(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

MX=DX=λ
при t=1



ЛР-3. СОЗДАТЬ ДВЕ ИМИТАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ на промежутке [T1, T2]. Проверить: будет ли суммарный поток пуассоновским (указания к ЛР-3)

Свойство пуассоновского потока - аддитивность: результирующий поток суммы пуассоновских потоков тоже является пуассоновским с суммарной интенсивностью:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

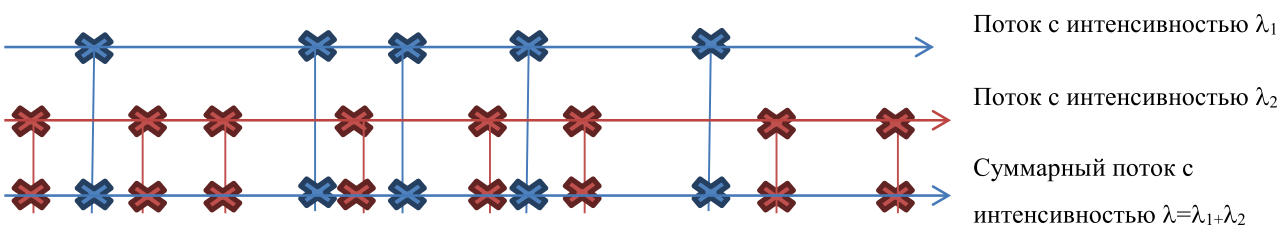
Исходные данные: промежуток наблюдения $[T_1, T_2]$; интенсивности λ_1 и λ_2.

$$T_1 = I,\ T_2 = I + 100,\ \lambda_1 = (I+9)/(I+24),\ \lambda_2 = (I+13)/(I+24)$$

где I номер студента в списке группы.

Алгоритм решения задачи

1. Получим две ИМ потоков $X_1(t)$, $X_2(t)$ с интенсивностями λ_1 и λ_2, соответственно.
2. Получим ИМ потока $X(t)_{\text{теор}}$. с интенсивностью $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.
3. Получим поток $X(t)_{\text{практ}} = X_1(t) + X_2(t)$, путем объединения массивов t_i для каждой выборки двух потоков.



4. Произведем расчет статистических характеристик для каждого из потоков $X(t)_{\text{теор}}$, $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X(t)_{\text{практ}}$.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ на промежутке [T1, T2] (указания к ЛР-3)

1) Генерируем случайное вещественное число ξ_i в диапазоне (0;1). Преобразуем это число в значение СВ с показательным распределением с помощью обратного отображения:

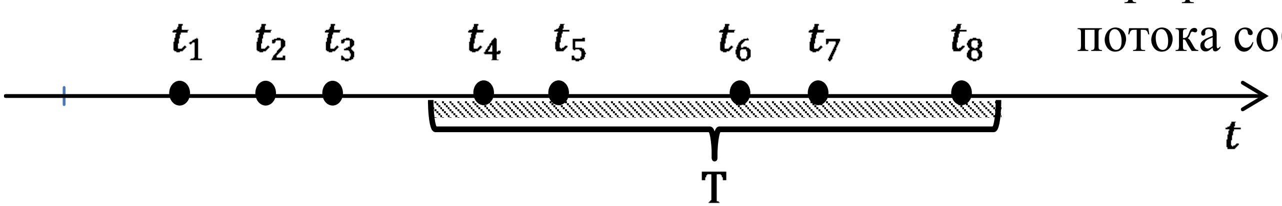
$$u_i = -\frac{\ln(\xi_i)}{\lambda}$$

используя выражение $\xi_i = 1 - e^{-\lambda t}$; где t – промежуток времени, и в нашем случае равный u_i (интервал между поступлениями требований).

2) Получаем значение момента наступления события.

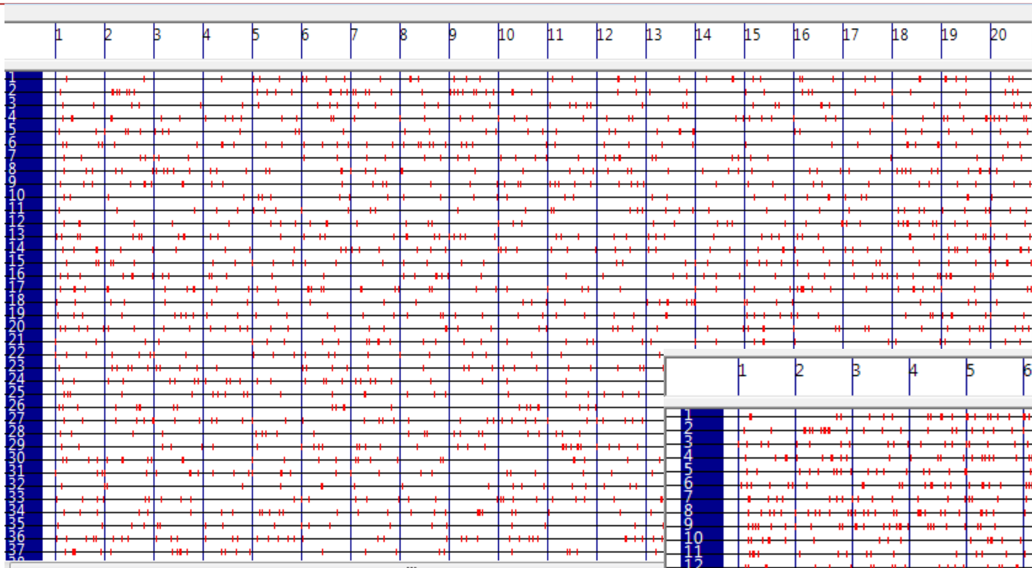
$$t_i = T_1 + \sum_{j=0}^{i} u_j$$

3) Генерируем массив значений u_i и t_i, пока $t_i \le T_2$. Полученный массив есть модель пуассоновского потока (проверка стат. гипотезы на «пуассоновость» процесса).

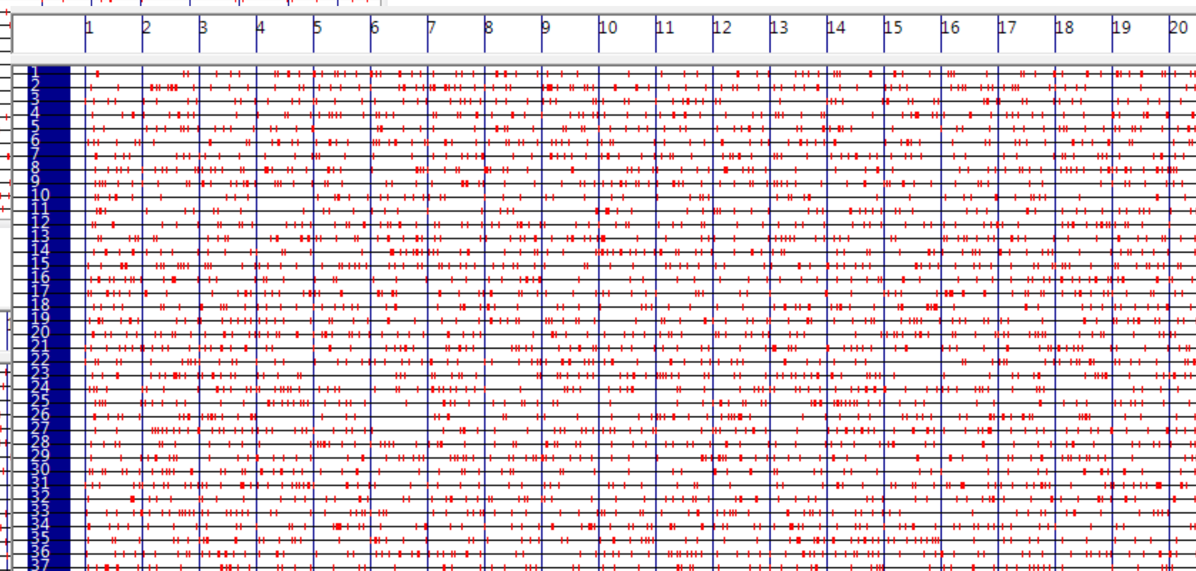


Графическая интерпретация потока событий на временной оси

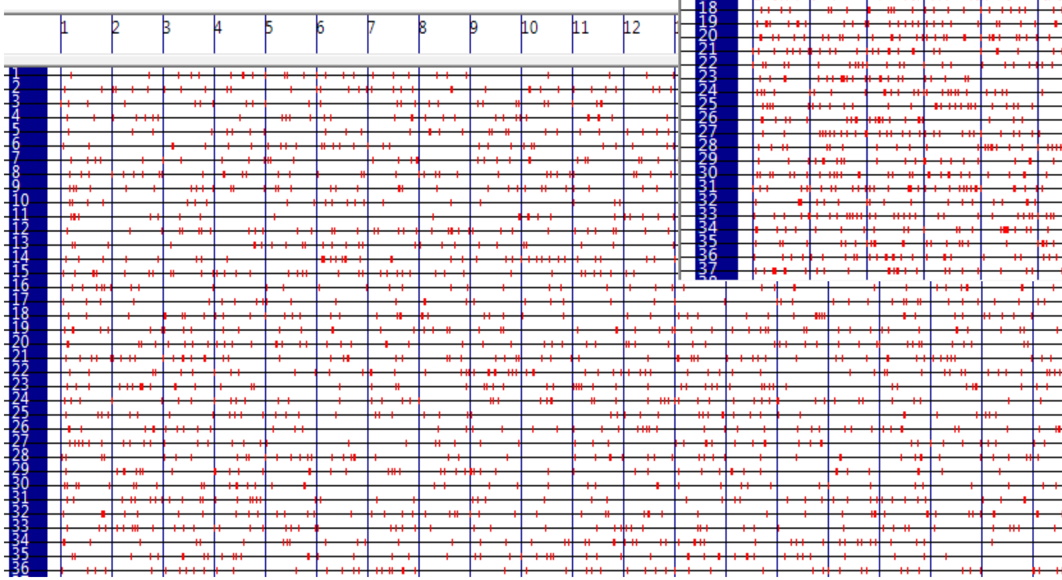
ЛР-3. ИЛЛЮСТРАЦИЯ СУММАРНОГО ПОТОКА (указания к ЛР-3)



ПОТОК X1



ПОТОК X3=X1+X2



ПОТОК X2

ПРОВЕРКА СТАТ. ГИПОТЕЗЫ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЫБОРКИ ПО ЗАКОНУ ПУАССОНА

П3. Требуется по критерию Пирсона проверить гипотезу о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона в условиях предоставленной выборки.

1. Упорядочить выборку в виде пар (варианта, частота)=(η, n_η).
2. Найти выборочное среднее m.
3. Принять в качестве оценки $\hat{\lambda}$ параметра распределения λ Пуассона выборочную среднюю $\hat{\lambda} = m$. *Вопрос*: на основании чего?
4. Найти по формуле Пуассона вероятности P_k появления k событий в N испытаниях $(k=0,1,2,\ldots,L)$, где L – максимальное число наблюдавшихся событий, N – объем выборки. Здесь N – общее число событий (промежутков между ними, испытаний), наступивших на $[T_1, T_2]$.
5. Найти теоретические частоты по формуле $n'_k = N \cdot P_k$.
6. Задать уровень значимости α. *Вопрос*: что означает α?
7. Сравнить эмпирические n_η и теоретические n'_η частоты с помощью критерия Пирсона:

   а) по расчетной таблице найти наблюдаемое значение критерия $\chi^2{}_{\text{практ}} = \sum_{l=1}^{L} \frac{(n_l - n_l')^2}{n_l'}$;

   б) по таблице критических точек распределения, заданному уровню значимости α и числу степеней свободы (у нас 25-1-1) находят критическую точку критической области $\chi^2{}_{\text{крит}}$.

Если $\chi^2{}_{\text{практ}} < \chi^2{}_{\text{крит}}$, то нет оснований отвергать гипотезу о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона. Иначе – нулевая гипотеза не принимается.

Замечание. Значения вариант, равные нулю, следует включать в другие карманы через их изменение.

ЛР-3. РАСЧЕТ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ
(указания к ЛР-3, продолжение алгоритма)

4. Произведем расчет статистических характеристик для каждого из потоков $X(t)_{\text{теор}}$, $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X(t)_{\text{практ}}$. Оценки считаем по формулам (почему?):

   – выборочные математическое ожидание СВ - числа наступления событий на промежутке Δt, оценку параметра потока $\hat{\lambda}$, дисперсию СВ :

$$\hat{\lambda} * \Delta t = M\eta = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{L} \eta_l n_l \qquad \hat{\lambda} = \frac{M\eta}{\Delta t} \qquad D\eta = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{L}(\eta_l - M\eta)^2 \cdot n_l$$

5. Сравним полученные значения:
   – $\hat{\lambda}$ и λ для каждого потока;
   – $\hat{\lambda}$ потока X, $\hat{\lambda}$ потока $X_{\text{пр}}$ и $\hat{\lambda}$, полученного сложением $\hat{\lambda}_1$ потока X_1(t) и $\hat{\lambda}_2$ потока X_2(t).
   – математическое ожидание и дисперсию потоков.
6. Проверим однородность выборок X и $X_{\text{пр}}$ (относятся ли они к общей генеральной совокупности).

Критерий Стьюдента: Пусть есть выборка $X=(x_1, x_2,\ldots x_n)$ и выборка $Y=(y_1, y_2,\ldots y_m)$. Найдем математическое ожидание MX и MY и дисперсию DX и DY. Определим статистику Стьюдента t по формуле:

$$t = \frac{MX - MY}{\sqrt{(m-1) * DY + (n-1) * DX}} * \sqrt{\frac{m * n * (m+n-2)}{m+n}}$$

По заданному уровню значимости (например, 0.01) и числу степеней свободы $(m+n-2)$ из таблиц распределения Стьюдента находят критическое значение $t_{кр}$.

Если $|t|>t_{кр}$, то гипотезу однородности (отсутствия различия) отклоняют, если же $|t|\le t_{кр}$, то не отвергают.

Значение $t_{кр}$ можно найти в приложении 2, а также получить с помощью функции СТЬЮДРАСПОБР в табличном редакторе MSExcel.

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ВИДЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
(указания к ЛР-3, гипотеза о пуассоновском потоке)

номер \ итерация		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
10	1(10,14)	6	4	5	8	4	2	5	6	5	4	3
14	2(14,18)	8	6	6	6	2	4	6	11	7	4	5
18	3(18,22)	2	3	4	5	4	8	3	6	2	7	3
22	4(22,26)	4	6	12	3	4	5	8	3	4	4	3
26	5(26,30)	2	7	5	3	2	6	4	9	5	7	5
30	6(30,34)	4	5	8	5	4	7	4	3	2	5	4
34	7(34,38)	3	2	2	4	6	4	7	1	7	1	4
38	8(38,42)	4	6	4	4	6	5	4	5	3	5	5
42	9(42,46)	7	5	4	5	3	7	10	5	7	4	2
46	10(46,50)	7	3	4	6	5	5	7	5	0	3	3
50	11(50,54)	3	10	6	9	7	8	3	5	5	4	4
54	12(54,58)	3	2	6	5	3	5	6	2	2	3	5
58	13(58,62)	7	5	7	2	7	4	3	5	7	6	3
62	14(62,66)	2	8	4	7	4	3	4	8	6	6	8
66	15(66,70)	8	7	3	5	5	6	6	2	2	4	7
70	16(70,74)	0	6	4	5	5	7	5	1	8	6	2
74	17(74,78)	4	6	7	3	5	5	4	3	8	2	5
78	18(78,82)	8	4	3	4	6	3	0	5	5	6	0
82	19(82,86)	3	7	5	7	9	4	2	2	7	5	5
86	20(86,90)	7	3	7	5	3	0	3	4	4	10	3
90	21(90,94)	6	6	11	5	2	6	5	5	7	3	5
94	22(94,98)	7	10	7	6	4	4	1	6	4	2	1
98	23(98,102)	4	6	1	5	5	5	8	4	3	3	6
102	24(102,106)	5	6	6	6	5	4	4	5	5	5	6
106	25(106,110)	6	5	4	2	7	6	4	2	10	6	5

Фрагмент левого верхнего угла таблицы «значение-частота»

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ВИДЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
(указания к ЛР-3, гипотеза о пуассоновском потоке)

$nl*\eta$	0	18	144	249	424	620	522	441	232	198	140	77	24
η	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
nl	12	18	72	83	106	124	87	63	29	22	14	7	2
N	639												
$\overline{n_\eta}$	4,8341158												
nl теорет	5,0824257	24,569	59,384779	95,690966	115,6453	111,81	90,083	62,21	37,591	20,191	9,7606	4,2895	1,728
$\hat{p}_l$	0,0079537	0,0384	0,0929339	0,1497511	0,1809786	0,175	0,141	0,0974	0,0588	0,0316	0,0153	0,0067	0,0027

Вывод: гипотеза о пуассоновости входящего потока событий не отвергается

$\aleph^2_{\text{наблюд.}}$ 14,25042509

$\aleph^2_{\text{крит.}}$ 41,63839812

на уровне значимости ε=_ в условиях данной выборки.

Вывод. Гипотеза о пуассоновском распределении потока событий с параметром λ=___ согласуется с данными имеющейся выборки (не противоречит данной выборке).

Задача-пример. Имеется цех, в состав которого входит три одинаковых станка. В систему поступают для обработки детали в среднем через 0,5 часа. Среднее время изготовления одной детали 0,6 час. Если при поступлении заявки на изготовление детали все станки заняты, то деталь направляется на другой участок таких же станков.
Найти вероятности состояний системы и характеристики (показатели эффективности) данной СМО.
Сколько в среднем в этой системе обрабатывается деталей (сколько процентов направляемых деталей), при этом, сколько деталей направляется для обработки на другие участки?
Сколько в этой системе в среднем работает станков?

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА

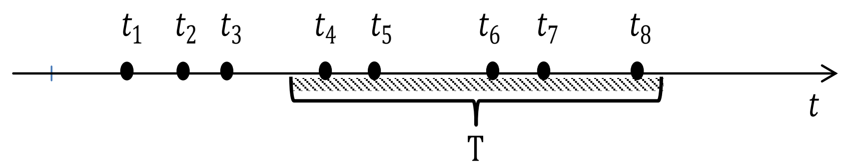
1) Генерируем случайное вещественное число ξ_i в диапазоне (0;1). Преобразуем это число в значение СВ с показательным распределением с помощью обратного отображения:

$$u_i = -\frac{\ln(\xi_i)}{\lambda}$$

u_i - интервал между наступлениями событий.

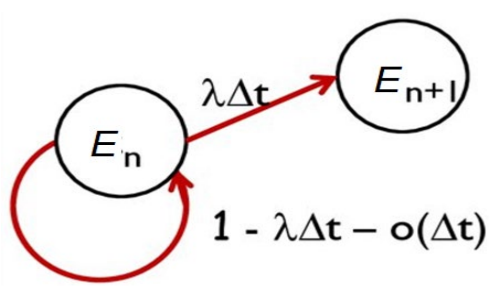
2) Получаем значение момента наступления очередного события, i=1,2,...

$$t_i = T_1 + \sum_{j=0}^{i} u_j$$

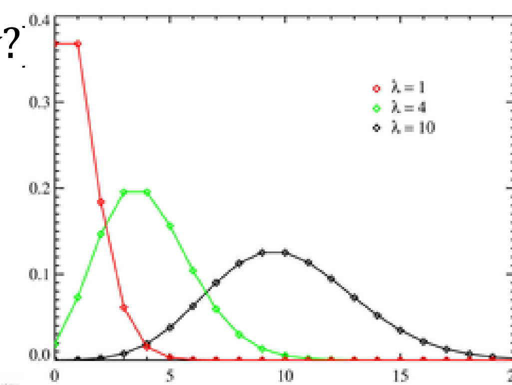


3) Генерируем массив значений u_i и t_i, пока $t_i \le T_2$.

Полученный массив есть модель пуассоновского потока (почему?)



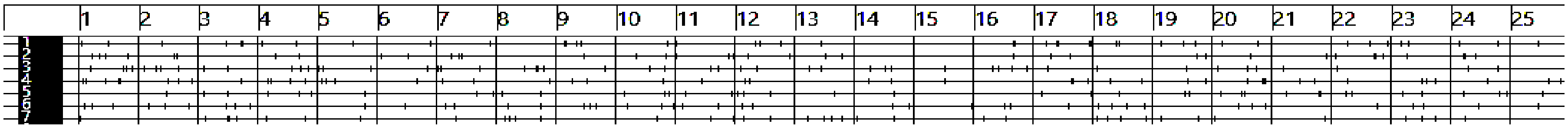
$$P(k,t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$



$$M(X) = \lambda \qquad D(X) = \lambda$$

АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ГИПОТЕЗЫ О ПУАССОНОВСКОМ ПОТОКЕ

1) Генерируем K=50 потоков.
2) Разбиваем интервал $[T_1;T_2]$ на 25 одинаковых промежутков, равных $\Delta t = \frac{T_2 - T_1}{25}$.



....

3) Формируем вспомогательную таблицу.

	$[T_1, T_1+\Delta t)$	$[T_1+\Delta t, T_1+2\Delta t)$		$[T_1+24\Delta t, T_1+25\Delta t)$
Номер промежутка	1	2	…	25
Итерация 1	$X_1^{(1)}$	$X_1^{(2)}$	…	$X_1^{(25)}$
Итерация 2	$X_2^{(1)}$	$X_2^{(2)}$	..	$X_2^{(25)}$
….	..	..	..	..
Итерация K	$X_K^{(1)}$	..	..	$X_K^{(25)}$

$X_j^{(i)}$ – количество наступлений событий в моменты t_i в массиве $\{X_j^{(i)}\}$, попавших в промежуток $[T_1+(i-1)\Delta t, T_1+i\Delta t)$ в потоке с номером j.

4) Из двумерного массива $\{X_j^{(i)}\}$ выбираем варианты

Параметр	Уникальные значения (варианты)			
	1	2	….	L
η_l (варианты)	η_1	η_2	…..	η_L
n_l (частоты η_l)	n_1	n_2	….	n_L
$\eta_l * n_l$	$\eta_1 * n_1$	$\eta_2 * n_2$	….	$\eta_L * n_L$
$n_l^{теор}$ формул	$n_1^{теор}$	$n_2^{теор}$	….	$n_L^{теор}$
$\frac{(n_l - n_l^{теор})^2}{n_l^{теор}}$				

n_l - количество уникальных значений (частота) η_l в массиве $\{X_j^{(i)}\}$

АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ГИПОТЕЗЫ О ПУАССОНОВСКОМ ПОТОКЕ.
Выборочные числовые характеристики

5) Вычисляем выборочные числовые характеристики

$\hat{\lambda} * \Delta t = M\eta = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{L} \eta_l n_l$	Выборочная интенсивность наступления событий $\hat{\lambda}$ как выборочное математическое ожидание СВ λ
$\hat{p}_\eta = \hat{p}(\eta) = \frac{(\hat{\lambda} * \Delta t)^\eta}{\eta!} * e^{-\hat{\lambda} * \Delta t}, \eta = 0,1,2,\ldots,L$	Оценка «теоретической» вероятности наступления η событий на промежутке длительностью Δt по формуле Пуассона
$n_\eta^{\text{теор}} = \hat{p}_\eta \cdot N$	Оценки «теоретических» частот вариантов η
$N = \sum_{l=1}^{L} n_l$	Объем выборки как сумма частот (число событий, наступивших на промежутке $\{T_1, T_2\}$.
$\chi^2_{\text{практ}} = \sum_{l=1}^{L} \frac{(n_l - n_l^{\text{теор}})^2}{n_l^{\text{теор}}}$	Критерий χ^2 (хи-квадрат, Пирсона), проверяет значимость расхождения эмпирических (наблюдаемых) и теоретических (ожидаемых) частот

6) Вычислить значение квантиля хи квадрат $\chi^2_{(\alpha,n)}$ крит.

Например, уровень значимости α (вероятность наблюдаемого значения быть случайным отклонением) равен 0,05, а число степеней свободы равно числу карманов с вычетом единицы и числа параметров распределения (n=25-1-1=23).

7) Если $\chi^2_{\text{практ}} < \chi^2_{(\alpha,n)\text{крит}}$, то гипотеза о «пуассоновости» потока не отвергается (гипотеза согласуется с выборочными данными).

Значение $\chi^2_{(\alpha,n)}$ крит можно найти в приложении 1, а также получить с помощью функции ХИ2ОБР в табличном редакторе MSExcel.

General Purpose Simulation System

GPSS (*General Purpose Simulation System*, система моделирования общего назначения) - язык моделирования, используемый для имитационного моделирования различных систем, в основном систем массового обслуживания.

Язык моделирования GPSS разработан фирмой IBM в США и с 1962 года входит в стандартное математическое обеспечение ВМ. Язык GPSS ориентирован на решение задач статистического моделирования на ЭВМ процессов с *дискретными событиями*.

СМО произвольной структуры и сложности: систем обработки данных, систем транспорта и связи, технологических процессов, предприятий торговли, а также функционирование вычислительных систем и разного рода автоматизированных систем.

КЛАССИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ТМО

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., 1987.
2. Тихоненко О. М. Модели массового обслуживания в информационных системах: Учебное пособие для вузов. - Минск: "Технопринт", 2003. – 326 с.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Высш.шк., 2000, 480 с.
4. Вентцель Е. С. Исследование операций. М., «Советское радио», 1972, 552 с.
5. Т.Л.Саати. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения: Пер. с англ. /Под. ред. И.Н. Коваленко, изд-ие 2. М., 1971.
6. Д.Кениг, Д.Штойян. Методы теории массового обслуживания: Пер. с нем. /Под. ред. Г.П.Климова. М., 1981.
7. Г.И.Ивченко, В.А.Каштанов, И.Н.Коваленко. Теория массового обслуживания. М., 1982.
8. Хинчин А.Е. Работы по математической теории массовогообслуживания / ред.: Б.В. Гнеденко. - 2-е изд., стереотип. - М. : УРСС, 2004. – 235с.
9. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности : Учебник для вузов / Г. П. Фомин. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Финансы и статистика, 2005. - 614с.