Лабораторная работа № 2
по дисциплине «Теория вычислительных процессов»

Изучение принципов функционирования машины Тьюринга

1. Основные сведения из теории

1.1. Определение машины Тьюринга

Содержательно Машина Тьюринга (МТ) как абстрактный автомат, реализующий алгоритм вычисления некоторой вычислимой функции, состоит из трех компонентов:

1. Управляющее устройство (УУ), которое может находиться в одном из состояний, образующих конечное множество $Q=\{q_0,q_1,...,q_n,q_z\}$ — внутренний алфавит машины Тьюринга;
2. Бесконечная лента, разбитая на ячейки, в каждой из которых может быть записан один из символов конечного алфавита $A=\{a_1,a_2,...,a_m,\lambda\}$ — внешний алфавит машины Тьюринга;
3. Устройство обращения к ленте — считывающая и записывающая головка, которая в текущий момент времени считывает или записывает значение одной (текущей) ячейки ленты;

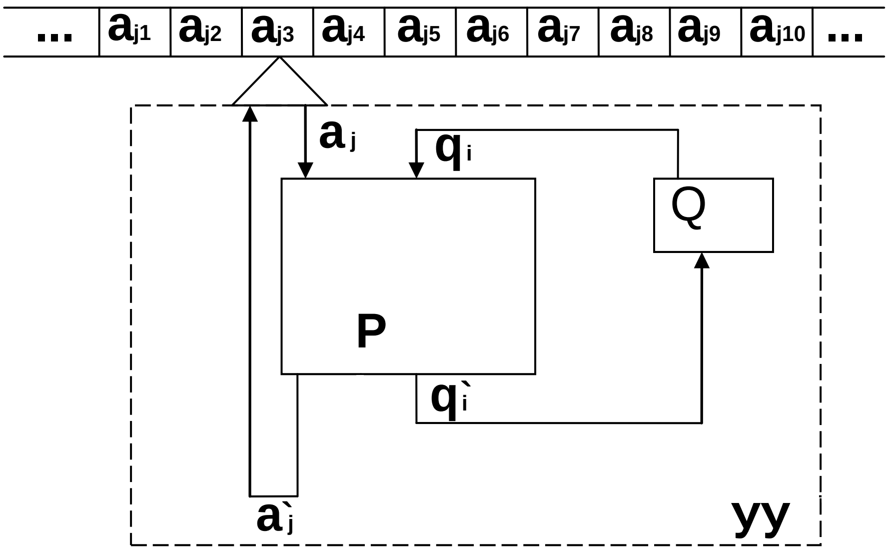


Рисунок 1 Схема машины Тьюринга

1.2. Принцип функционирования машины Тьюринга

1.2.1. Общие понятия

Машина Тьюринга – абстрактный автомат задаваемый кортежем следующего вида:

$$M =< Q, A, k_0, P >$$

Q – внутренний алфавит;
A – внешний алфавит;
k_0 – начальная конфигурация;
P – совокупность команд машины.

Среди символов внутреннего алфавита машины Тьюринга **Q** можно выделить:

- q_0 — начальное состояние МТ,
- q_z — конечное состояние МТ

Машина начинает функционировать, находясь в состоянии $q_0 \in Q$; и заканчивает (останавливается) в состоянии $q_z \in Q$.

Среди символов внешнего алфавита машины Тьюринга выделяют символ λ – пустой символ, $\lambda \in A$. Запись символа λ в ячейку ленты означает очистку этой ячейки.

Формальная команда машины Тьюринга может быть задана в следующем виде:

$$q_i a_j \rightarrow q_i^{'} a_j^{'} d_k \qquad \textbf{(1)}$$

где:

q_i и $q_i^{'}$ - состояние машины до и после выполнения команды q_i и $q_i^{'} \in Q$;

a_j и $a_j^{'}$ - обозреваемый символ в ячейке до и после выполнения команды a_i и $a_j^{'} \in A$;

d_k – символ, указывающий направление сдвига головки $d_k \in \{R, L, E\}$.

Совокупность команд (программа) образует множество **P**;

Полным состоянием или конфигурацией машины Тьюринга называется такая совокупность символов из A и Q, которая однозначно определяет дальнейшее поведение машины.

Полное состояние (конфигурация) имеет следующий вид:

$$k_j = a_1 q_i a_2 \text{,}$$

где:

a_1 — слово, находящееся на ленте слева от головки;

q_i — текущее внутренне состояние $q_i \in Q$;

a_2 — слово, образованное символом, обозреваемым головкой и всеми символами справа от него.

Стандартной начальной конфигурацией называется конфигурация вида

$$k_0 = q_0 a \ ,$$

т.е. конфигурацию, при которой головка обозревает крайний левый символ записанного на ленте слова a, а внутренними состоянием является $q_0 \in Q$.

Стандартной конечной конфигурацией называется конфигурация следующего вида:

$$k_z = a_1 q_z a_2 \ ,$$

где a_1 и a_2 любые слова во внешнем алфавите **A** (в т.ч. и пустые). Внутренним состоянием является заключительное состояние $q_z \in Q$.

1.2.2. Алгоритм работы Машины Тьюринга

В каждый дискретный момент времени (момент работы машины Тьюринга)

- Машина находится в одном из внутренних состояний;
- Головка обозревает одну из ячеек ленты.

При переходе к следующему такту выполняются следующие действия:

- Машина переходит в некоторое другое состояние (или остается в текущем состоянии).
- В обозреваемую ячейку записывается некоторый символ (или содержимое ячейки не изменяется).
- Головка передвигается на одну ячейку вправо(R), влево(L), или остается в том же положении (E).

Шаг машины представляет собой считывание символа из обозреваемой ячейки; определение состояния, в котором находится управляющее устройство и в зависимости от этого перевод управляющего устройства в новое состояние, запись на ленту нового символа и, перемещение головки вправо (R) или влево (L) или оставление головки на месте (E).

1.3. Способы задания МТ

Задать вычислительный алгоритм в алгоритмической системе Тьюринга - это значит задать поведение МТ по любым внешним (входным) данным.

Поведение (или функционирование МТ) как и любой другой вычислительной машины (неабстрактной) может быть задано программой, составленной как минимум 3 различными способами:

1) Совокупностью команд МТ, прямым их перечислением;
2) Таблицей переходов МТ;
3) Блок-схемой или диаграммой переходов МТ.

Рассмотрим перечисленные способы на примере:
M = <Q, A, K_0 , P>,
где
Q = { q_0 , q_1 , q_2 , q_z } ,
A = {a, b, c, λ},
K_0 = q_0 a b c λ.

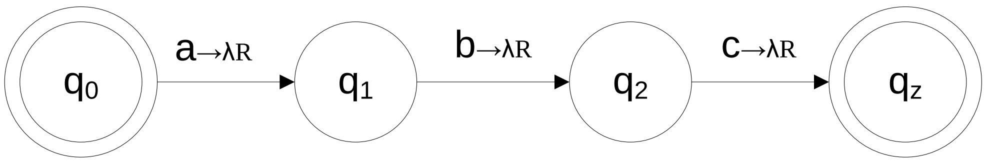
1) Совокупность команд:

$$P = \{q_0\, a \rightarrow q_1\ \lambda\ R\ ;\ q_1\, b \rightarrow q_2\, \lambda\ R\ ;\ q_2\, c \rightarrow q_z\ \ \lambda\ E\ \}$$

2) Таблица переходов:

Q \ A	a	b	c	λ
q_0	$q_1\lambda R$			
q_1		$q_2\lambda R$		
q_2			$q_z\lambda R$	
q_z				

3) Диаграмма переходов:



1.4. Вычисления на МТ

Рассмотрим, каким образом производятся вычисления на МТ.

В общем случае внешний алфавит (А) представляет собой

$$A_{исх} \cup A_{рез} \cup A_{промеж}\ ,$$

где

$A_{исх}$ – алфавит, на котором могут быть записаны исходные слова на ленте перед началом работы МТ,

$A_{рез}$ – множество символов (алфавит), на котором могут быть записаны все слова на ленте после остановки МТ,

$A_{промеж}$ – алфавит, символы которого могут появляться во время функционирования МТ.

Замечание: будем рассматривать простейший случай, когда все алфавиты совпадают.

В соответствии с определением стандартной начальной конфигурации (K_0) ко всякой незаключительной конфигурации (K_i) применима некоторая команда МТ. После такого применения МТ переходит в новое полное состояние (или конфигурацию) K_{i+1} .

Этот переход принято обозначать

$$K_i \xrightarrow{M} K_{i+1}\,.$$

Если для некоторых K_i , K_j существует такая последовательность конфигураций

$$K_i \xrightarrow{M} K_{i+1} \xrightarrow{M} \cdots \xrightarrow{M} K_j \ ,$$

то это принято обозначать

$$K_i \Rightarrow K_j \, .$$

Определение:

Дана f-функция, отображающая множество слов из алфавита $A_{исх}$ во множество слов из $A_{рез}$. Машина Тьюринга M вычисляет (правильно) функцию f, если:

1) f(V)=W и $q_0 V \Rightarrow q_z W$, для $\forall V, W$ – множество слов в алфавите $A_{исх}$ и $A_{рез}$ соответственно.
2) Существует V такое, что f(V) – не определено. Тогда и МТ, запущенная в стандартной начальной конфигурации q_0 V, работает бесконечно долго или зацикливается.

Определение:

Если для f существует МТ M, которая ее вычисляет (правильно), то функция f называется (правильно) вычислимой по Тьюрингу.

Замечание: Две МТ, M_1 и M_2 , с одинаковыми алфавитами $A_{исх}$ являются эквивалентными, если они правильно вычисляют одну и ту же функцию.

1.5. Примеры МТ

Построить МТ, которая бы умножала два натуральных числа.

Условимся обозначать натуральное число **a** словом, состоящим из такого количества единиц, количество которых равно численному значению **a**, а разделительный символ между числами будем обозначать «*».

Построить МТ для

$$1^a * 1^b \Rightarrow 1^{a+b} \, .$$

$M =< Q, A, K_0, P > , Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$, $A = \{1,0,*,=,\lambda\}$, $K_0 = q_0 11*111= .$

Решение:

P = { $q_0 1 \to q_1 \lambda R$, $q_1 1 \to q_1 1R$, $q_1 * \to q_2 * R$, $q_2 1 \to q_3 0R$, $q_3 1 \to q_3 1R$, $q_3 = \to q_3 = R$, $q_3 \lambda \to q_4 1L$, $q_4 1 \to q_4 1L$, $q_4 0 \to q_2 0R$, $q_4 = \to q_5 = L$, $q_5 1 \to q_4 1L$, $q_5 0 \to q_5 1L$, $q_5 * \to q_6 * L$, $q_6 1 \to q_7 1L$, $q_6 \lambda \to q_z \lambda R$, $q_7 1 \to q_7 1L$, $q_7 \lambda \to q_0 \lambda R$ }.

1.6. Тезис Тьюринга

Для каждой ли вычислимой функции можно построить реализующий её на МТ алгоритм?

Ответом служит тезис Тьюринга: «Всякий алгоритм может быть реализован на МТ». Доказательства у этого утверждения нет, и не может быть, поскольку само понятие алгоритма является неточным.

Подтверждением тезиса Тьюринга могут служить следующие обстоятельства (неформальные):

- практика создания программ для МТ по всем вычислительным функциям;
- совокупность описания алгоритма в любой алгоритмической системе к МТ.

Этот тезис позволяет утверждать, что если невозможно создать МТ для вычисления какой-либо функции, то алгоритма вычисления этой функции не существует вообще!

В частности, это относится к:

- решению проблемы остановки для произвольной МТ
- проблеме определения выводимости в любой теории и т.д.
- проблеме существования М-транслятора: любой программы на алгоритмическом языке $\exists$, которая определяет зацикливание

2. Задание на лабораторную работу

Необходимо написать программу для машины Тьюринга, реализующую вычисление арифметической функции согласно выданному варианту задания. Должна быть составлена совокупность команд **P**. Для выполнения данного задания следует использовать приложение Algo2000.

Аргументы задаются набором ”1”. Пример 2*3, будет выглядеть следующим образом 11*111.

Работа машины Тьюринга должна начинаться со стандартной начальной конфигурации и заканчиваться стандартной конечной конфигурацией.

Рассмотрим пример для функции $f(x) = 2x$.

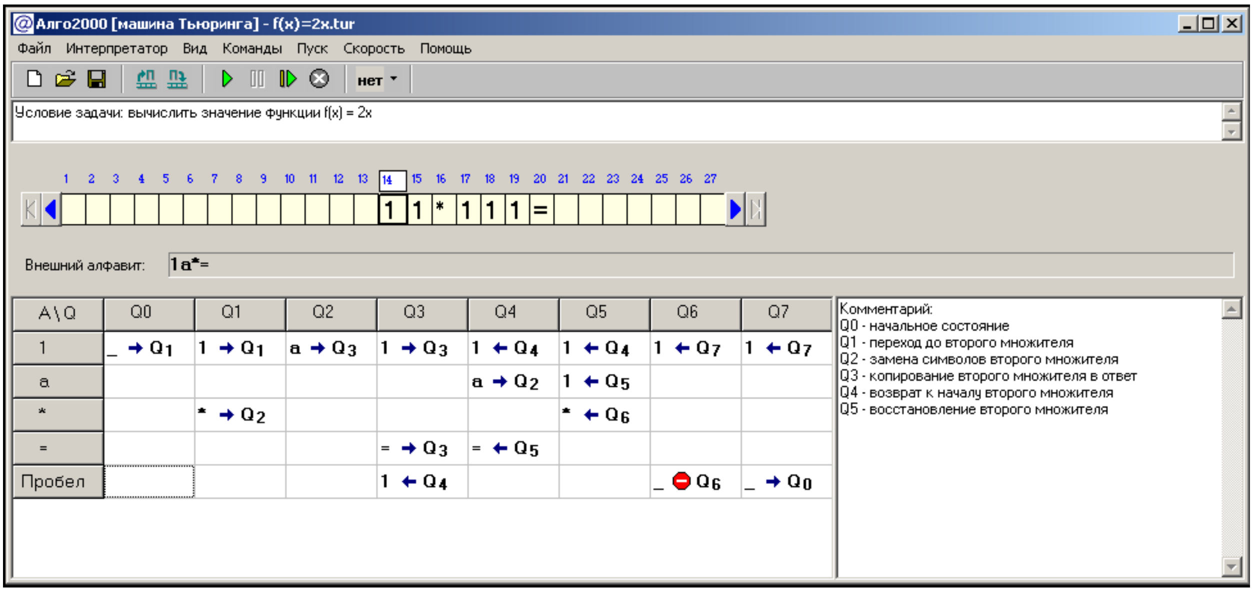


Рисунок 2. Программа для МТ в Algo2000

На рисунке 2 представлено окно приложения Algo2000 с программой для машины Тьюринга, реализующей вычисление функции $f(x) = 2x$.

Формат команды применяемый в Algo2000

adq,

где:
a — символ который будет записан в обозреваемую ячейку,
d — направление сдвига$\{<,>\}$,
q — состояние в которое перейдет МТ.

Во второй части лабораторной работы требуется создать программу на языке высокого уровня имитирующую работу машины Тьюринга.

3. Требования к программе:

- входная лента машины Тьюринга должна считываться из файла;
- программа для машины Тьюринга должна считываться из файла;
- алфавит должен считываться из файла;
- результат работы программы должен выводиться в файл;
- результат должен содержать следующие элементы:
    - состояние ленты перед выполнением каждой команды;
    - указание положения головки на ленте;
    - выполненную команду;
    - пример:

$11*111=$	— состояние ленты перед выполнением команды;
^	— положение головки на ленте;
$q_0 1 \to q_1 \_ >$	— выполняемая команда;
$\_1*111=$	— состояние ленты перед выполнением команды;
^	—положение головки на ленте.

- в программе должен быть реализован контроль возможных ошибок машины Тьюринга (не задан переход, отсутствует символ в алфавите и др.).

4. Требования к входным данным:

- Совокупность команд:
    - Формат записи команд определяется согласно форме (1) (см. выше);
    - Каждая команда на отдельной строке.
- Алфавит:
    - Символы внешнего алфавита, перечислены в файле через пробел.

5. Содержание отчета

- Цель работы
- Основные сведения из теории
- Постановка задачи
- Совокупность команд для машины Тьюринга
- Листинг программы на языке высокого уровня с комментариями
- Пример результата выполнения
- Вывод

6. Контрольные вопросы:

- Дать определение
    - Символ λ
    - Внешний алфавит
    - Внутренний алфавит
    - Полное состояние
    - Стандартная начальная конфигурация
    - Стандартная конечная конфигурация

    - Машина Тьюринга
- Описать принцип функционирования
- Сопоставить
    - Q внешний алфавит
    - A перечень команд
    - k_0 внутренний алфавит
    - P начальное состояние
- Что означает термин «Машина Тьюринга правильно вычисляет значение вычислимой функции»?

7. Варианты заданий:

Задание на удовлетворительно

1. $x+2$
2. $x+3$
3. $x+4$
4. $x+5$
5. $x+7$
6. x_1+x_2
7. $x_1+x_2+x_3$
8. x_1+x_2+1
9. x_1+x_2+3
10. x_1+x_2+4
11. x_1+x_2+5
12. $x_1+x_2+x_3+1$
13. $x_1+x_2+x_3+2$
14. $x_1+x_2+x_3+4$

Задание на хорошо

15. $x-2$
16. $x-3$
17. $x-y$
18. x_1+x_2-y
19. $x-y+1$
20. $x-1+y$
21. x_1+x_2-1
22. $y-x-1$
23. x_1+x_2+y
24. x_1-x_2-y

Задание на отлично

30. $2x$

31. $3x$

32. x_1x_2

33. x / y

34. $x / 4$

35. $2x_1 + x_2$

36. $x_1x_2 + y$

37. $x_1x_2 - 3$

38. $x_1x_2 - y$

39. $3x - y$

40. $y_1 - y_2x$

41. $y_2 - \frac{x}{y_1}$

42. $5x + y$

43. $x / 10$

44. $z + \frac{x}{y}$

8. Список литературы по теме работы:

1. Алферова З.В. Теория алгоритмов - М.; "Статистика", 1973.
2. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский. Дискретная математика для инженера - М.:Энергия, 1980.— 344 с., ил.
3. Эббинхауз Г. Д., Якобс К., Ман Ф. К. Машины Тьюринга и рекурсивные функции. 1972, - С. 264
4. *Джон Хопкрофт, Раджив Мотвани, Джеффри Ульман* Глава 8. Введение в теорию машин Тьюринга // Введение в теорию автоматов, языков и вычислений = Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation. — М.: «Вильямс», 2002. — С. 528. — ISBN 0-201-44124-1