SVD-разложение

Сингулярное разложение - декомпозиция вещ. матрицы с целью приведения к канонич. виду

<u>Опр</u> $\sigma \in \mathbb{R}$ $\sigma \geq 0$ наз-ся сингул. числом матрицы M, если $\exists\, u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$, $\|v\| = 1$

$Mv = \sigma u$ и $M^T u = \sigma v$

<u>Теорема</u> $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\exists$ ортонорм. базисы $\{e^k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}^n$, $\{q^k\}_{k=1}^{m} \subset \mathbb{C}^m$ и сингул. числа

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r$, где $r = \operatorname{rank} A$ $\quad A e^k = \begin{cases} \sigma_k q^k & k \leq r \\ 0 & k > r \end{cases}$

<u>Док-во:</u> $A^* A$ самосопр. и неотриц. т.к. $(A^* A)^* = A^* A$

$(A^* A x, x) = (Ax, Ax) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$

Поэтому сущ. ортонорм. базис собств. векторов $\{e^k\}_{k=1}^{n}$ матрицы $A^* A$. Все её собств. числа ≥ 0. $A^* A e^k = \sigma_k^2 e^k$; $k = 1 \ldots n$

Пусть $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$

Пусть $z^k = A e^k$ $\forall k = 1 \ldots r$

$(z^p, z^q) = (Ae^p, Ae^q) = (A^* A e^p, e^q) = \sigma_p^2 (e^p, e^q)$

$$(z^p, z^q) = \begin{cases} 0 & p \neq q \\ \sigma_p^2 & p = q \end{cases}$$

Векторы $q^k = \sigma_k^{-1} A e^k$, $k = 1 \ldots r$ – ортонорм. систем. в $\mathbb{C}^m$.

<u>Сингул. разложение</u> ~~$A = \ldots$~~

$A = V U W$, где V – матрица со столбцами $\{q^k\}_{k=1}^m$ W – с $\{e^k\}_{k=1}^n$

$$U = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & \sigma_r & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Геом. смысл</u>: Пусть A – лин. оператор, отобр. $\mathbb{R}^n$ в себя через лин. опер. вращения, растяжения. Компоненты сингул. разл. показывают эти геом. преобр.

<u>Метод главных компонент.</u>

n числовых признаков $f_j(x)$, $j = 1 \ldots n$

$x_i = (f_1(x_i) \ldots f_n(x_i))$ $i = 1 \ldots l$.

~~Для задач~~ Рассм. матрицу $\begin{pmatrix} b_1(x_1) & \dots & b_n(x_1) \\ \dots & & \dots \\ b_1(x_l) & \dots & b_n(x_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_l \end{pmatrix}$

$z_i = (g_1(x_i) \dots g_m(x_i))$ призн. описание в $Z = \mathbb{R}^m,\ m < n$

$$G_{l\times m} = \begin{pmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_m(x_1) \\ \dots & & \\ g_1(x_l) & \dots & g_m(x_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_l \end{pmatrix}$$

$U: \ \hat{x} = zU^T$

$$\Delta^2(G, U) = \sum_{i=1}^{l} \|\hat{x}_i - x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{l} \|z_i U^T - x_i\|^2 = \|GU^T - F\|^2 \to \min_{G,U}$$

Пусть rank G = rank $U = m$

Теорема. Если $m \le$ rank F, то $\min \Delta^2(G, U)$ достигается, когда столбцы U — собств. векторы $F^T F$ соотв. макс. собств. знач. При этом $G = FU$, U и G ортогон.

Док-во. Необх. усл. минимума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta^2}{\partial G} = (GU^T - F)U = 0 \\ \dfrac{\partial \Delta^2}{\partial U} = G^T(GU^T - F) = 0 \end{cases}$$

Т.к. $|G| \ne 0$, $F \ne 0$ $\begin{cases} G = FU(U^T U)^{-1} \\ U = F^T G (G^T G)^{-1} \end{cases}$

Пусть $U^T U$ и $G^T G$ диагон. (Возьмем преобр. R: $GU^T = (GR)(R^{-1}U^T)$)

$G^T G = \Omega \quad U^T U = I_m$

Тогда $\begin{cases} G = FU \\ U\Omega = F^T G \end{cases} \Rightarrow U\Omega = F^T F U$

Столбцы U - собств. вектора $F^T F$, диаг эл. $\lambda_1 \dots \lambda_m$ - собств. знач. $\Delta^2(G, U) = \|F - GU^T\|^2 =$

$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j$

Минимум Δ^2 достигается когда $\lambda_1 \dots \lambda_m$ наиб. из n собств. знач.

$u_1 \dots u_m$ - <u>главные компоненты</u>

<u>Геом. смысл.</u>

Метод аппроксимирует n-размерное облако наблюдений до n-мерного эллипсоида, полуоси кот. будут явл-ся главным комп.