# Assignment Three

1951976 李林飞

2021 年 6 月 12 日

## 1 Consider two teams,$A$ and $B$ , playing a series of games until one of the teams wins $n$ games. Assume that the probability of $A$ winning a game is the same for each game and equal to $p$ , and the probability of losing a game is $q = 1-p$ (Hence, there are no ties.) Let $P(i,j)$ be the probability of $A$ winning the series if $A$ needs $i$ more games to win the series and $B$ needs $j$ more games to win the series.

**a. Set up a recurrence relation for $P(i,j)$ that can be used by a dynamic programming algorithm.**

**答案:**

$$P(i,j) = pP(i-1,j) + qP(i,j-1)\ i,j > 0$$

$$\text{边界条件:}P(0,j) = 1,\ j > 0;\ P(i,0) = 0,\ i > 0$$

**解析:**

由题意知，对于 A 赢的情况 $P(i,j)$, 其出现的情况只可能出现两种：一种是 A 刚赢了一场，另一种是 A 刚输了一场。对于第一种情况，A 之前只

赢了 $i-1$ 场，赢第 $i$ 场的概率为 $p$; 对于第二种情况，意味着上一场是 B 赢了，则 B 赢第 $j$ 场的概率为 $q$. 由此我们可以得到递推公式：

$$P(i,j) = pP(i-1,j) + qP(i,j-1)\ i,j > 0$$

考虑其边界条件：显然，A 赢 B 发生的情况下，A 赢的场数一定比 0 多，因此 $P(0,j) = 1,\ \ j > 0$。同理，$P(i,0) = 0,\ \ i > 0$

## b. Find the probability of team $A$ winning a seven-game series if the probability of it winning a game is 0.4.

**答案:** $0.289792 \approx 0.29$

**解析：**

方法 1：组合数学

在 7 场比赛中, 如果 A 赢, 则最后一局一定是 A 赢, 考虑其前一局 A、B 的比赛情况, 总共有 4 种可能：(1)A:B=3:3;(2)A:B=3:2;(3)A:B=3:1;(4)A:B=3:0。由组合原理和条件概率知识可知，出现 (1) 的情况是在前 6 场中 A 赢了 3 场的条件下 A 赢了最后一场，其概率为 $(C(6,3)p^3q^3) * p$. 同理可知，出现 (2) 的概率为 $(C(5,3)p^3q^2) * p$, 出现 (3) 的概率为 $(C(4,3)p^3q) * p$, 出现 (4) 的概率为 $(C(3,,3)p^3) * p$。综上，在 7 局比赛中 A 获胜的概率为 $(C(6,3)p^3q^3) * p + (C(5,3)p^3q^2) * p + (C(4,3)p^3q) * p + (C(3,,3)p^3) * p = 0.289792$. 同时，B 赢的情况与 A 是一样的。

方法 2：递推式

在 7 局比赛中，A 赢或 B 赢都需要有一方出现赢 4 局的情况，根据定义，计算 $P[4,4]$ 即是 A 赢的概率。将 $p = 0.4, q = 1-p = 0.6$ 代入问题 a

中的递推公式有：

$$
\begin{aligned}
P[4,4] &= 0.4 * P[3,4] + 0.6 * P[4,3] \\
P[3,4] &= 0.4 * P[2,4] + 0.6 * P[3,3] \\
P[2,4] &= 0.4 * P[1,4] + 0.6 * P[2,3] \\
P[1,4] &= 0.4 * P[0,4] + 0.6 * P[1,3] \\
P[1,3] &= 0.4 * P[0,3] + 0.6 * P[1,2] \\
P[1,2] &= 0.4 * P[0,2] + 0.6 * P[1,1] \\
P[1,1] &= 0.4 * P[0,1] + 0.6 * P[1,0] \\
&\ldots \\
P[0,1] &= 1 \\
P[1,0] &= 0
\end{aligned}
$$

由计算机计算可得 $P[4,4] = 0.289792 \approx 0.29$

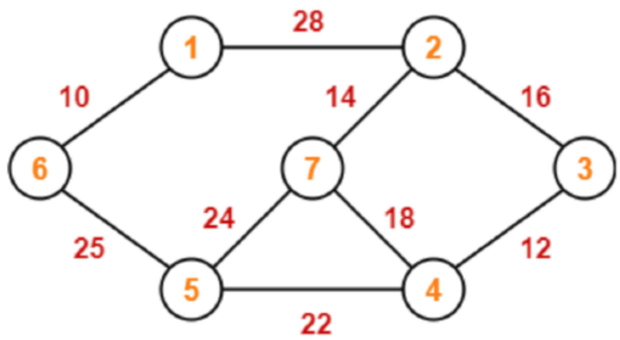
### c. Write pseudocode of the dynamic programming algorithm for solving this problem and determine its time and space efficiencies.

**答案:**

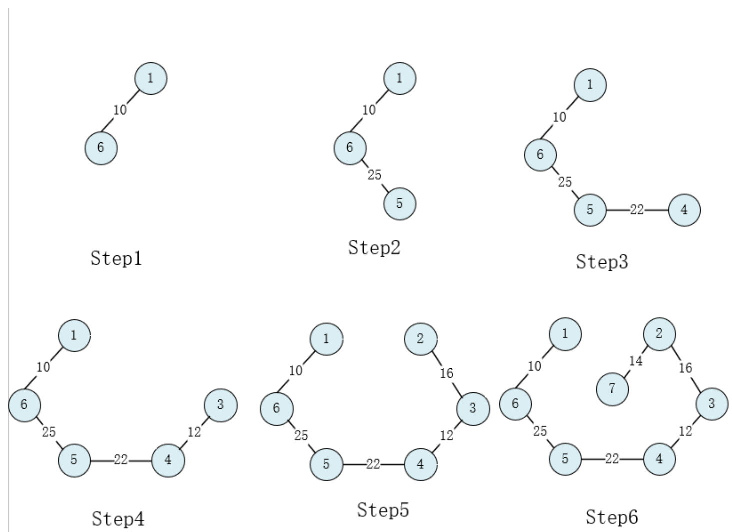
```
ALGORITHM AwinB(n,p)
// Function:计算进行n场比赛A赢的概率
// Input:场数n, A赢一场的概率p
// Output:赢得比赛的概率
/*初始化边界条件*/
for j ← 1 to n do
    P[0,j] ← 1
for i ← 1 to n do
    P[i,0] ← 0

/*迭代计算*/
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to n do
        P[i,j] ← p*P[i-1,j] + (1-p)*P[i,j-1]

return P[n,n]
```

## 2 Construct the minimum spanning tree (MST) for the given graph and calculate the cost of MST.

**a. Using Prim’ s Algorithm**

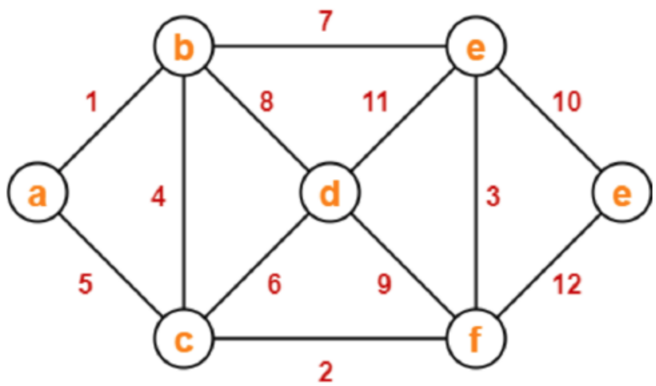



**解析：**

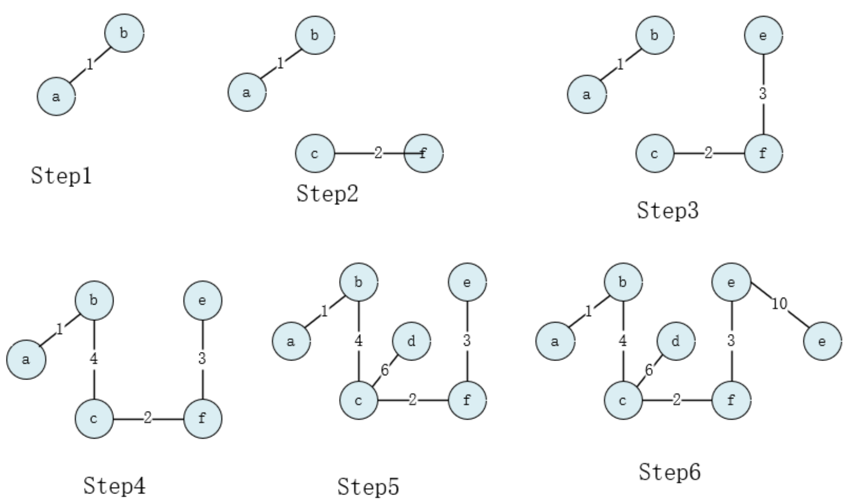



the cost of MST $= 10 + 25 + 22 + 12 + 16 + 14 = 99$

**b. Using Kruskal's algorithm**




**解析:**




the cost of MST $= 1 + 4 + 2 + 6 + 3 + 10 = 26$