第五次习题课

2018.12.27

王冬逸

17110190003@fudan.edu.cn

- 趋肤深度
- 各向异性介质本征模（色散关系）
- FP共振（TMM）
- Fresnel Law
- 辐射场问题

趋肤深度

导体表面层内由变化磁场激发感生电场通解为

$$\vec{E} = \vec{e}_x\left(E_0 e^{-\alpha(1-i)z} + E_0' e^{\alpha(1-i)z}\right)e^{-i\omega t}$$

物理的场应当取该复数解的实部

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \alpha z)$$

电场随着z的增加一边振荡一边指数衰减，在z=1/α深度处，场强减少到导体表面1/e处的，我们称这个深度为趋肤深度，记为：

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma_c}}$$

电磁波频率ω越高或材料的电导率σ_c越大，则场所集中的导体的**表向层越薄**。

理想导体时，$\sigma_c \to \infty, \delta \to 0$，**场和电流全部趋向于表面。**

同样，当频率增加时，导体中的电流都集中到表面，这种电流的**“趋肤”现象（Skin effect）**

例1：趋肤深度

1. 铜在室温下的电阻率为$1.69\times10^{-8}\Omega\cdot m$，分别在f=1MHz和f=1GHz条件下计算铜导线的趋肤深度。

$$\delta=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma_c}}=\sqrt{\frac{2\rho_c}{\mu 2\pi f}}=\sqrt{\frac{\rho_c}{\mu\pi f}}$$

$$\left(\omega=2\pi f,\sigma_c=\frac{1}{\rho_c}\right)$$

$$f=1MHz,\delta=6.54\times10^{-5}m; f=1GHz,\delta=2.07\times10^{-6}m$$

例2：均匀各向异性介质的本征模

一束电磁波在均匀但各向异性的介质($\mu = \mu_0$)中传播，选取其主轴建立坐标系，那么$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ii}\delta_{ij}$，设波矢$\vec{k} = k\hat{e}_k$，其中$\hat{e}_k$在主轴上的分量为$h_1, h_2, h_3$，求证：

$$\sum_{\ell=1}^{3} \frac{h_\ell^2}{v^2 - v_\ell^2} = 0 \tag{1.1}$$

其中$v = \omega/k$，$v_\ell = c/\sqrt{\epsilon_{\ell\ell}}$。

牢记求解各向异性介质本征模式的范式，非常可能考到。

解答

证： 课件Eq.(8.5.9)：

$$\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E})+\mu_0\epsilon_0\omega^2\vec{D}=0 \tag{1.2}$$

将本构关系代入计算并化简得到：

$$k^2\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{E}=0 \tag{1.3}$$

其中

$$\overleftrightarrow{T}=\begin{pmatrix} h_1^2+\frac{v^2}{v_1^2}-1 & h_1h_2 & h_1h_3 \\ h_2h_1 & h_2^2+\frac{v^2}{v_2^2}-1 & h_2h_3 \\ h_3h_1 & h_3h_2 & h_3^2+\frac{v^2}{v_3^2}-1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Eq.(1.3)存在非零解的条件是：

$$\det\overleftrightarrow{T}=0 \tag{1.5}$$

简化便可以得到：

$$\sum_{\ell=1}^{3}\frac{h_\ell^2}{v^2-v_\ell^2}=0 \tag{1.6}$$

例3：FP共振（多重散射、TMM）

如Fig1所示，空间中有厚度为h的一层膜置于另外一种背景材料中，现有一束电磁波从介质1入射到体系中，求结构的反射系数。

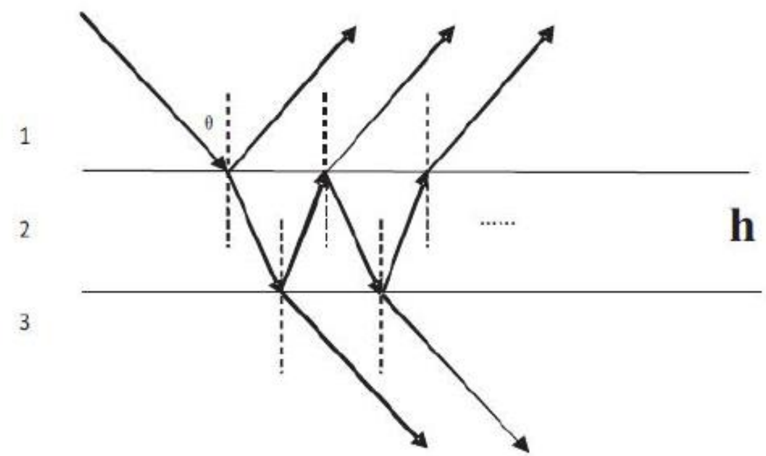


Figure 1

- **TMM**介绍
- 全透共振条件讨论
- **FP**共振高透图像——场分布

解答

解： a) **定义：** 若光从介质i入射到介质i与j 的表面，记反射系数为r_{ij}, 透射系数为t_{ij}，类似地定义r_{ji}和t_{ji} (对于逆光路)。

b) 先考虑单个界面的反射和透射，如果反射波和透射波沿逆光路返回，那么体系应该和原来一致，即

$$r_{ji}t_{ij} + t_{ij}r_{ij} = 0 \tag{3.1}$$

$$r_{ij}r_{ij} + t_{ji}t_{ij} = 1 \tag{3.2}$$

进而得到斯托克斯倒逆关系：

$$t_{ij}t_{ji} - r_{ij}r_{ji} = 1 \tag{3.3}$$

$$r_{ij} = -r_{ji} \tag{3.4}$$

c) 计及多次反射和透射我们可以写出该体系的反射系数r:

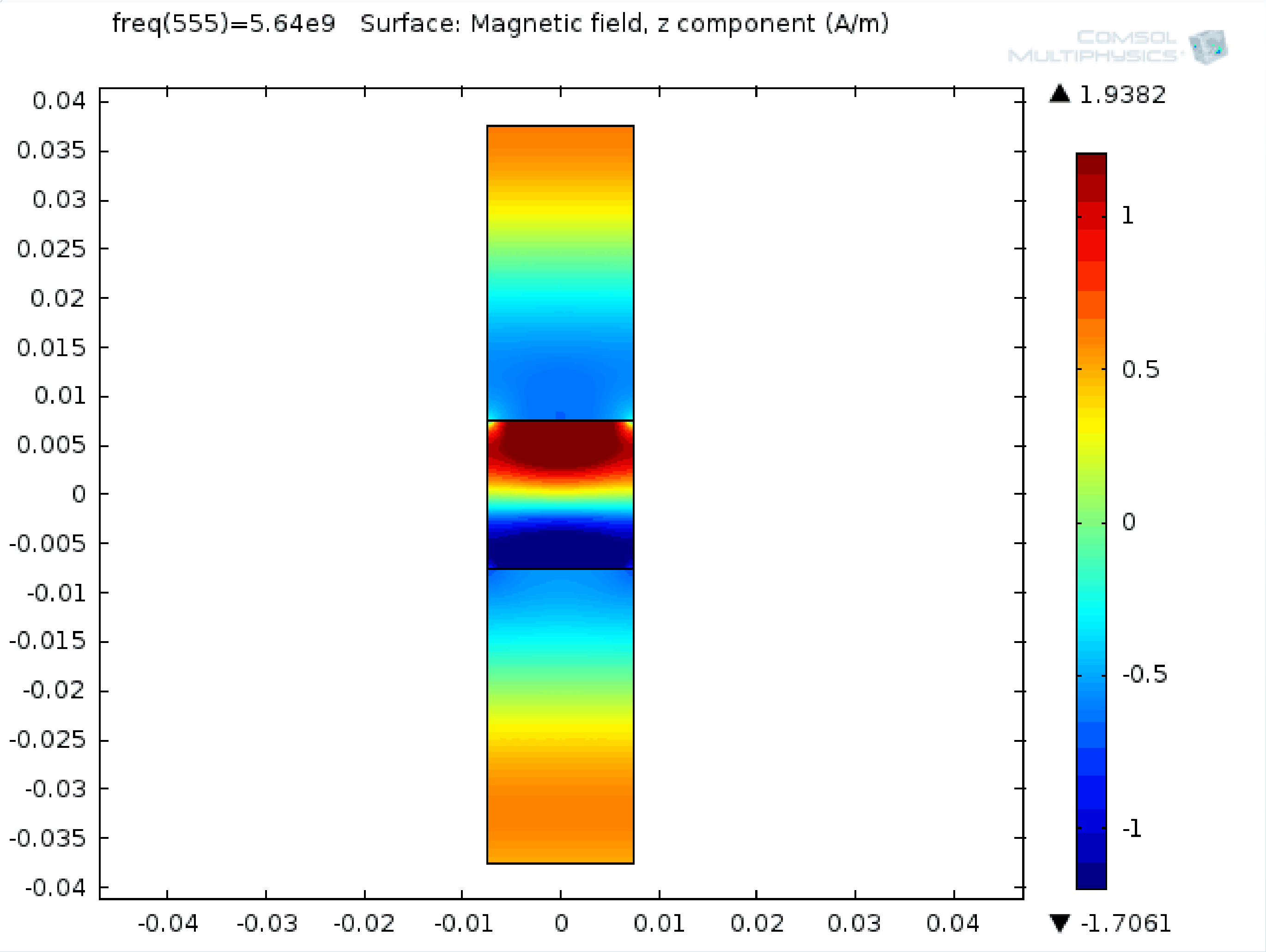
$$r = r_{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} t_{21}r_{23}^{n}r_{21}^{n-1}t_{12}\exp(-i*2nk_zh) \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
&= r_{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}r_{23}^{n}r_{12}^{n-1}(1-r_{12}^2)\exp(-i*2nk_zh) \\
&= r_{23}\exp(-i*2k_zh)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}r_{23}^{n-1}r_{12}^{n-1}\exp(-i*2(n-1)k_zh) \\
&\quad + r_{12}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}r_{23}^{n}r_{12}^{n}\exp(-i*2nk_zh) \\
&= \frac{r_{12}+r_{23}\exp(-i*2k_zh)}{1+r_{12}r_{23}\exp(-i*2k_zh)} \quad \boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(-1)^n n!(1+x)^{-(1+n)}\Big|_{x=0}\cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中

$$k_z = \frac{\omega}{c}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta} \tag{3.7}$$

图像：FP共振导致高透



freq(555)=5.64e9 Surface: Magnetic field, z component (A/m)
COMSOL MULTIPHYSICS
0.04
0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
-0.015
-0.02
-0.025
-0.03
-0.035
-0.04
-0.04 -0.03 -0.02 -0.01 0 0.01 0.02 0.03 0.04
▲ 1.9382
1
0.5
0
-0.5
-1
▼ -1.7061

例4：关于Fresnel公式推导的一个小问题

求证：两种线性各向同性均匀非导电介质的交界面，若入射电磁波是TE(TM)极化的单色平面波，则反射波和透射波也是TE(TM)极化的单色平面波。

真的很显然吗？？

请证明…

（提示：球坐标写出一般情况的场分布）

解答

证： 建立坐标系，取介质的交界面为xy平面。
考虑TE极化波，不妨设入射波电场$\vec{E}$沿y方向，波矢$\vec{k}$在xz平面内，即：

$$\vec{E} = E_i\hat{e}_i \exp\{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)\} \tag{2.1}$$

其中

$$\begin{aligned} \vec{k}_i &= k_x\hat{x} + k_{zi}\hat{z} &(2.2)\\ \hat{e}_i &= \hat{y} &(2.3) \end{aligned}$$

$\hat{e}_i$为表示入射电场方向的单位矢量。类似可以写出反射波和透射波的电场$\vec{E}$：

$$\begin{aligned} \vec{k}_r &= k_x\hat{x} + k_{zr}\hat{z} &(2.4)\\ \hat{e}_r &= \sin\theta_r\cos\phi_r\hat{x} + \sin\theta_r\sin\phi_r\hat{y} + \cos\theta_r\hat{z} &(2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{k}_t &= k_x\hat{x} + k_{zt}\hat{z} &(2.6)\\ \hat{e}_t &= \sin\theta_t\cos\phi_t\hat{x} + \sin\theta_t\sin\phi_t\hat{y} + \cos\theta_t\hat{z} &(2.7) \end{aligned}$$

然后写出$\vec{H}$场：

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\omega\mu_1}\vec{k}_i \times \vec{E}_i = \frac{E_i}{\omega\mu_1}\hat{h}_i \exp\{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)\} \tag{2.8}$$

其中

$$\hat{h}_i = \vec{k}_i \times \hat{e}_i = -k_{zi}\hat{x} + k_x\hat{z} \tag{2.9}$$

解答

类似写出反射波和透射波的H场：

$$\begin{aligned}\hat{h}_r &= -k_{zr}\sin\theta_r\sin\phi_r\hat{x} + (k_{zr}\sin\theta_r\cos\phi_r - k_x\cos\theta_r)\hat{y} + k_x\sin\theta_r\sin\phi_r\hat{z} \qquad (2.10)\\ \hat{h}_t &= -k_{zt}\sin\theta_t\sin\phi_t\hat{x} + (k_{zt}\sin\theta_t\cos\phi_t - k_x\cos\theta_t)\hat{y} + k_x\sin\theta_t\sin\phi_t\hat{z} \qquad (2.11)\end{aligned}$$

下面考虑边界条件：

$$\begin{aligned}\vec{E}_1^{\parallel} &= \vec{E}_2^{\parallel} \qquad (2.12)\\ \vec{H}_1^{\parallel} &= \vec{H}_2^{\parallel} \qquad (2.13)\end{aligned}$$

得到：

$$\begin{aligned}E_r\sin\theta_r\cos\phi_r &= E_t\sin\theta_t\cos\phi_t \qquad (2.14)\\ \frac{E_r}{\mu_1}(k_{zr}\sin\theta_r\cos\phi_r - k_x\cos\theta_r) &= \frac{E_t}{\mu_2}(k_{zt}\sin\theta_t\cos\phi_t - k_x\cos\theta_t) \qquad (2.15)\end{aligned}$$

另外根据横波条件：

$$\vec{k}_r\cdot\vec{E}_r = \vec{k}_t\cdot\vec{E}_t = 0 \qquad (2.16)$$

得到：

$$\begin{aligned}k_x\sin\theta_r\cos\phi_r + k_{zr}\cos\theta_r &= 0 \qquad (2.17)\\ k_x\sin\theta_t\cos\phi_t + k_{zt}\cos\theta_t &= 0 \qquad (2.18)\end{aligned}$$

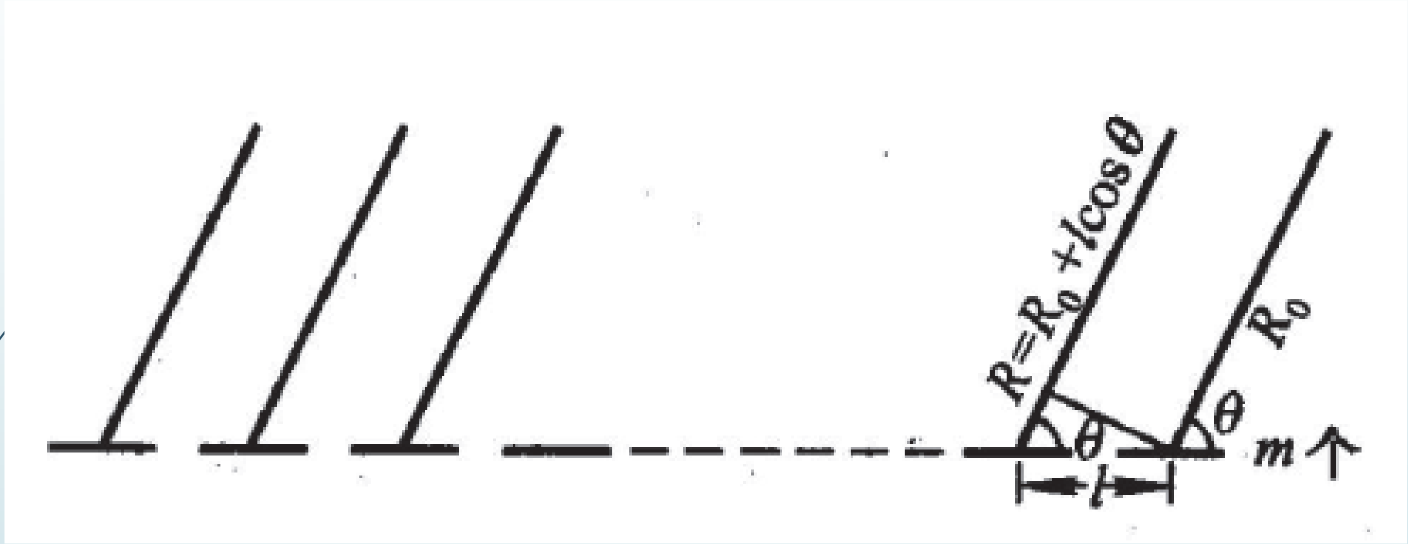
联立Eq.(2.14,2.17,2.18)得：

$$k_{zr}E_r\cos\theta_r = k_{zt}E_t\cos\theta_t \qquad (2.19)$$

联立Eq.(2.15,2.17,2.18)得：

$$\frac{k_1^2}{\mu_1}E_r\cos\theta_r = \frac{k_2^2}{\mu_2}E_t\cos\theta_t \qquad (2.20)$$

例5：求天线阵的远场辐射



解答

讨论在线性排列的情况下，它的辐射方向性同单一的半波天线有什么不同。如图9.11所示，m个半波天线线性排列，它们所激发的场到达远处某点的路程不同，这就使它们彼此间有相位差，从而发生干涉使辐射具有方向性。每个天线与其邻近的天线之间的路程差为$a\cos\theta$（a为两天线间的距离），若第一个天线的辐射场为

$$\vec{E}_1 = \vec{C}(\theta)\frac{e^{ikR_1}}{R_1} \tag{9.5.1}$$

则第二个半波天线的辐射场为

$$\vec{E}_2 = \vec{C}(\theta)\frac{e^{ikR_2}}{R_2} \tag{9.5.2}$$

由于$R_2 \approx R_1 + a\cos\theta$，在远场条件下（$R \gg \lambda$），有

$$\vec{E}_2 \approx \vec{C}(\theta)\frac{e^{ikR_1}}{R_1}e^{ika\cos\theta} = \vec{E}_1 e^{ika\cos\theta} \tag{9.5.3}$$

解答

定义$\alpha = ka\cos\theta$，则同理可得第三个半波天线的场为

$$\vec{E}_3 \approx \vec{E}_1 e^{i2\alpha} \tag{9.5.4}$$

依次类推，得m个半波天线产生的总场为

$$\vec{E}_{total} = \sum_{N=0}^{m-1} \vec{E}_1 e^{iN\alpha} = \vec{E}_1 \frac{1-e^{im\alpha}}{1-e^{i\alpha}} \tag{9.5.5}$$

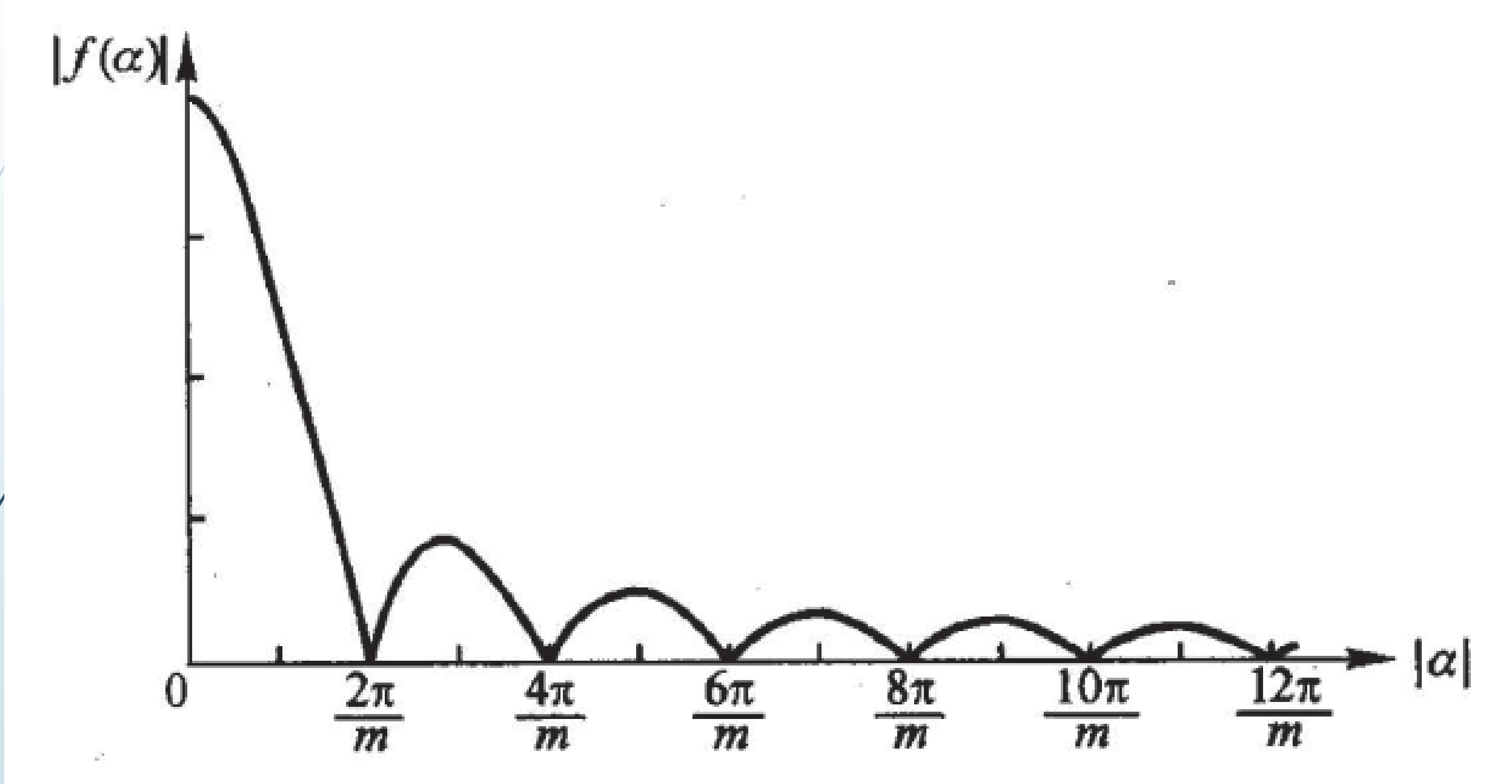
可见它的辐射角分布比单个半波天线的角分布多了一个因子：

$$f(\alpha) = \left|\frac{1-e^{imka\cos\theta}}{1-e^{ika\cos\theta}}\right|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{m}{2}ka\cos\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}ka\cos\theta\right)} \tag{9.5.6}$$

因此总的辐射角分布为

$$f_{total}(\theta,\phi) = f_{single}(\theta,\phi)\cdot f(\alpha) \tag{9.5.7}$$

解答



考试时间：2018.01.09　8:30-10:30AM

祝大家考试顺利！