

第四讲

上次课

- Maxwell 对一般情况下的电磁理论的推广：

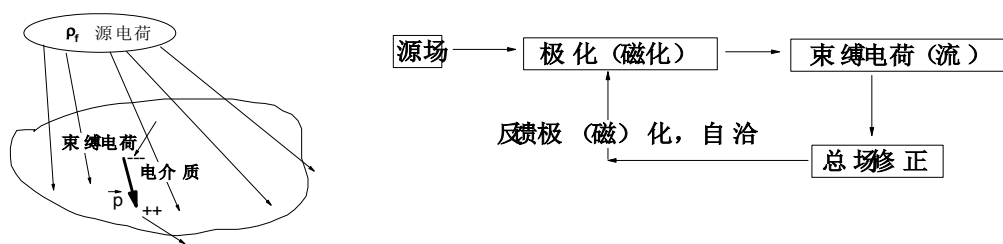
$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

§ 1.5 介质中的麦克斯韦方程组

在上一节我们了解了真空中的电磁理论，重点介绍了场的概念。基于真空中的 Maxwell 方程，我们有如下基本图像：1) 场由电荷/电流产生；2) 电磁场在时空上的变化可使它们相互演化；3) 处于场中的电荷/电流会受到场的作用力。本节我们将研究介质中的电磁场行为。其实，正是有不同性质的电磁介质的存在，才使得我们现在的这个世界如此色彩斑斓。**电磁场如何与物质发生相互作用**是这个问题的关键。在建立介质中的电磁理论之前，有一点核心问题必须澄清：

电磁场的来源及受众是电荷及电流，只要空间某处存在某种电荷/电流（无论其起源），就可以产生电磁场，而它们也必会受到电磁场的作用！

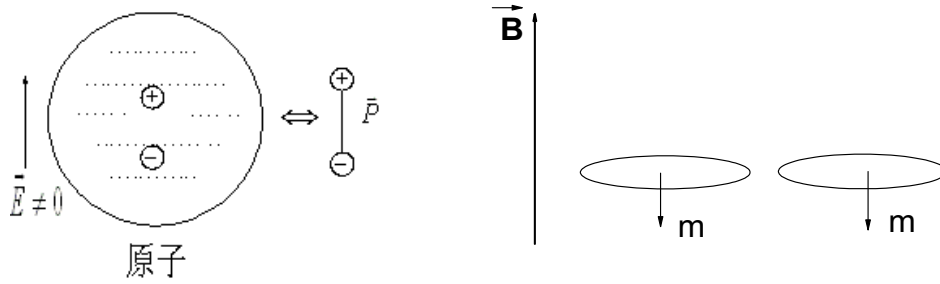
有了这点基本认识，我们研究电磁介质中的电磁场就归结为寻找当有电磁介质存在时的**总的电荷/电流**分布。首先理一理脉络，看看问题的难点在哪里。假设在空间施加由处于很远处的电荷（流）产生的电（磁）场——我们把这些电荷（流）称作“源电荷（流）”。当在这个场中放入一块电（磁）介质时，电（磁）介质在外电（磁）场的作用下被极（磁）化，产生电（磁）偶极子。电（磁）偶极子的产生使得空间中不再为电（磁）中性，从而产生了束缚于电（磁）介质的极化（磁化）电荷（电流），这些束缚电荷（电流）与处于远处的自由电荷（电流）一样可以产生电磁场，这种场我们叫做**极（磁）化场**。因此，空间任一点的真实总场（**又叫局域场**）就与“源”本身产生的场不同。而对介质来说，其被极化（磁化）是由空间此处的总场（或者称局域场）决定的，因为场，无论是由源电荷产生的，还是由极（磁）化电荷（流）产生的，都会作用到介质中上。**所以这个问题就变得看似很复杂：介质如何被极（磁）化和空间的局域总场互相影响，耦合在一起**。然而这种耦合恰恰是解决问题的关键：我们必须使得介质的极化（磁化）应与空间局域总场达到**平衡**，或者说使得它们之间**自洽**。只有达到这种自洽的电磁场的解才是空间真实存在的解。用图形可以表示为



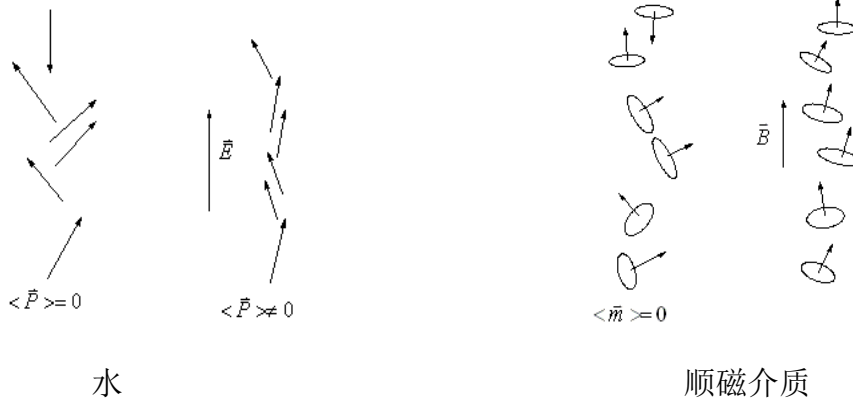
因此，理解了上图中所有的过程后，我们才能对介质中的电磁场有完整的理解。

1. 介质的极化及磁化

当电介质放置于电场中时，正负电荷被电场拉开，产生电偶极子，这个过程叫极化。同样，将一个无磁性的介质放置于磁场中，原本杂乱无章运动的电子在外磁场的作用下产生一个个分子环流（亦即磁偶极子），这个过程被称作磁化。



极化和磁化的过程还有另外的可能性。有些介质体系中的构成单元原本是带有固有电（磁）偶极距的，但整个介质并不显示宏观极（磁）性，因为当无外加电（磁）场时，这些电（磁）极距呈现杂乱排列。然而，一旦我们对它们施加电（磁）场，



这些原本杂乱排列的电（磁）偶极子沿着电（磁）场排列，产生宏观电（磁）矩。为了定量描述极化（磁化）的大小，定义极化（磁化）强度两个**宏观量**。其定义为：取一个**宏观小微观大**的区域，计算单位体积内的偶极矩的总和（矢量和），

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} \quad \vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V} \quad (1.5.1)$$

显然，局域电（磁）场强度越大，极（磁）化强度也越大。对第一种情况上述结论显而易见，对第二种情况，只要考虑外场效应（趋向于使电磁矩平行排列）与温度效应（趋向于它们无规排列）之间的竞争即可以明白。在低场近似下，很多材料对电磁场程线性响应，因此可以写成

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{M}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (1.5.2)$$

其中, χ_e, χ_m 为极化(磁化)率。这就是介质极化(磁化)的基本图像, 计算 χ_e, χ_m 要用到微观理论, 即牛顿力学或者量子力学, 不是电磁场理论本身所能够给出的。

思考及延伸阅读:

1) 需要强调指出的是, 这里 \vec{E}, \vec{B} 应当是介质分子在此处感受到的局域总场, 因为只要是场, 无论是源场还是极(磁)化电荷(流)产生的场, 都可以对介质产生作用力。

2) 当空间只有一个分子(或结构单元)时, 其感受到的外场就是由“源”产生的外场。

这时候可定义 $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha_e \vec{E}_0$, 其中 \vec{p} 是偶极矩(因为此时定义极化强度无意义), α_e 称作 *Polarisability*。但当一大批分子组成一个凝聚体(如固体)时, 体系中每个分子都会被极化, 而每个偶极矩又都会产生新的场, 因此, 在某个局域点, $\vec{E}(\vec{r}, t) \neq \vec{E}_0$ 。因此我们由

(1.5.2) 的定义可知 $\chi_e \neq n \cdot \alpha_e$ (其中 n 为分子密度)。那 χ_e, α_e 之间有什么关系呢?

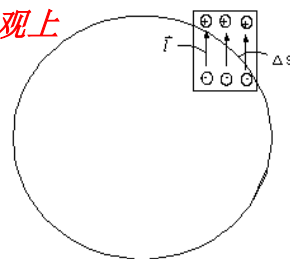
3) 此处对磁导率的定义看上去有点奇怪, 这是因为历史上的误会。

2. 极(磁)化电荷(流)

(A) 极化

极化电荷 由于极化, 介质中的正负电荷发生了相对位移, 导致每一个局域点的正负电荷不能完全抵消, 这样就呈现出束缚在介质中的宏观电荷。这种电荷称为极化电荷。

假设空间的极化强度分布为 $\vec{P}(\vec{r})$, 我们取一块区域 τ , 其边界由 \vec{S} 给定, 计算其中包含的极化总电荷 Q_p 。显然, 完全处于区域内部或完全处于区域外部的偶极子对 Q_p 均没有贡献, 而只有那些穿过 \vec{S} 的偶极子才有贡献。因此, 首先考虑偶极子穿过一块微元边界 $d\vec{S}$ 对 Q_p 的贡献。假设 $d\vec{S}$ 宏观上足够小使得此区域内的偶极子近似朝一个方向指向, 而微观上足够大使得其中包含很多偶极子。考虑每个偶极子的正负电荷拉开的位移为 \vec{l} , 则在体积 $\vec{l} \cdot d\vec{S}$ 内的每一个偶极子都会因为穿过界面而在体积内部留下一个负的静电荷 q (如右图所示)。设介质此处的偶极子数密度为 n , 则这些偶极子对区域内的净电荷数为



$dQ_p = -qn\vec{l} \cdot d\vec{S} = -\vec{P} \cdot d\vec{S}$ (注意, 因为考虑了 \vec{P} 和 $d\vec{S}$ 的点乘, 这个公式对偶极子以任意方向穿过一块任意指向的面积元都正确)。 $\vec{P} = nq\vec{l} = n\vec{p}$ 为极化强度。考虑所有穿过界面的偶极子的贡献后, 容易发现留在 τ 区域内的总的束缚电荷为

$$Q_p = -\oint_s \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (1.5.3)$$

利用 Gauss 定理, 可以进一步得到

$$\boxed{\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}} \quad (1.5.4)$$

式中 ρ_p 称为极化电荷密度。

注：仔细思考后会发现 (1.5.4) 大有问题。比如对一个均匀极化的介质 $P = \text{const.}$ ，(1.5.4) 告知体内无极化电荷分布。然而实际上极化后每个分子都呈现为一个偶极子，因此细致到分子的尺度上，极化电荷的分布是非常不均匀的，不可能为 0。这是为什么？其实，从数学上讲，(1.5.3) 正确性只有当积分区域足够大才行，积分区域小到看见单个偶极子的行为时是不成立的！因此，其过渡到 (1.5.4) 就不是严格成立的了，因为 Gauss 定理可以使用的条件是 (1.5.3) 对任意积分区域都正确。但为什么我们还可以用 (1.5.4) 呢？这是因为在分子尺度上计算极化电荷以及其它物理量的分布是困难而且是没有必要的，我们所关心（实验上所能测量的）是宏观小但微观大的一个区域内的物理量的平均值。因此，当我们考虑连续介质中的物理量时，一个空间的几何点是这样定义的：取这样一个区间 - 微观上足够大包含了许多极化后的偶极子，但宏观仍然足够小使得我们可以认为它是空间上的一个几何点，然后取这个区间内的微观量的平均值作为在这一几何点的场的数值。这事实上是电动力学处理连续介质的一个基本精髓。(1.5.2) 及下面的所有处理、甚至是目前前沿的 *Meta-material* 的研究均基于这个基础。

极化电流 当电场随时间改变时，极化过程中正负电荷的相对位移也将随时间改变，由此产生的电流称为极化电流，记为 \vec{j}_p 。考虑电荷守恒定律：

$$\nabla \cdot \vec{j}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} \equiv 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j}_p - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{P} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \left[\vec{j}_p - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right] = 0 \quad (1.5.5)$$

一个合理的结果是

$$\boxed{\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}} \quad (1.5.5')$$

Tips:

1) 你也许会 Argue 说 (1.5.5') 不是 (1.5.5) 的唯一解，因为可以加上一项 $\nabla \times \vec{C}(\vec{r}, t)$ 仍然满足 (1.5.5)。类似 $\nabla \times \vec{C}(\vec{r}, t)$ 的这种项的确存在，但是物理根源却与极化电荷无关。若只考虑极化运动产生的效应，你会发现 (1.5.5') 是正确的。这个推导并不严格，更严格的证明在第十二章中会涉及。

(B) 磁化

磁化电流

介质被磁化后产生束缚于磁介质上的磁化电流。假设已知空间的磁化情况 $\vec{M}(\vec{r})$ ，我们来讨论磁化电流密度 \vec{j}_M 。类似电介质的讨论，在一个具有磁化强度 $\vec{M}(\vec{r})$ 的磁介质中选取一个宏观大小的面积 S ，其边界由 $\oint d\vec{l}$ 描述，计算穿过 S 产生的

总磁化电流 I_M 。磁化后产生大量的磁偶极子，每个磁偶极子对应一个分子环流。

(1) 若这些环流完全处于 S 内，则对 I_M 的贡献因环流 2 次穿过 S 而抵消；(2) 若完全在 S 外，则根本没有贡献。因此，只需计算那些与边界较链的环流，因为它们只对 S 面内贡献一次电流。考虑与一段边界 $d\vec{l}$ (这个长度同样是宏观小微观大) 较链的分子环流。设每个分子环流电流为 i ,

环流线圈面积为 $\Delta\vec{s}$ ，则显然在 $\Delta\vec{s} \cdot d\vec{l}$ 体积内

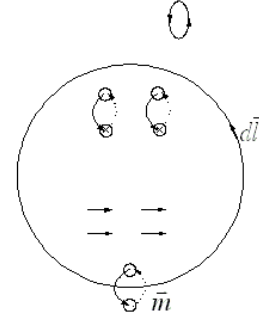
的所有的磁偶极子都对 S 内的净电流有贡献。

假设偶极子的体密度为 n 。则 $d\vec{l}$ 边界处对 I_M 的贡献为

$$dI_M = i \times \text{no. of m} = i \times n \Delta\vec{s} \cdot d\vec{l} = \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

综合整个环路的贡献，得

$$I_m = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad (1.5.6)$$



利用 $I_M = \int \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$ 及 Stokes 定理 $\oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = \int \nabla \times \vec{M} \cdot d\vec{S}$ ，有

$$\boxed{\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M}} \quad (1.5.7)$$

其中 \vec{j}_m 为描述束缚于磁介质内部的磁化电流密度。对上式两边取散度得

$$\nabla \cdot \vec{j}_m = 0$$

这说明磁化电流不引起电荷的积累，因此不用考虑磁化电荷。

3. 介质中的 Maxwell 方程组

下面我们进行示意图中第 3 步讨论 – 看看极（磁）化电流（荷）如何改变总电（磁）场。当介质存在时空间电荷包括自由电荷（源电荷）和极化电荷（束缚电荷），即

$$\rho_t = \rho_f + \rho_p = \rho - \nabla \cdot \vec{P},$$

式中 ρ_t 表示总电荷。介质中可能出现的电流有传导电流、极化电流和磁化电流，因此总电流为

$$\vec{j}_t = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}$$

在麦克斯韦方程组中，不管 ρ 和 j 的来源如何，只要是电荷或电流，它们都将在

空间激发电场或磁场。所以，麦克斯韦方程组在介质存在的情况下应该修改成

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}) \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \left(\vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M} \right) \end{array} \right. \quad (1.5.8)$$

需要注意：(1.5.8) 中的电磁场 \vec{E}, \vec{B} 与之前真空中 Maxwell 方程中的有本质不同。此处的 **E 和 B 是局域总场** (包含了由束缚电流/电荷引发的修正项)，不是由“源”产生的电磁场。原则上 (1.5.8) 不能求解，因为多了 2 个未知的物理量 -- \vec{P}, \vec{M} 。利用 (1.5.2)，我们可以将这 2 个未知变量消除，则问题可以求解。**因此，与真空中的电磁问题不同，要想求解介质中的电磁问题，我们一定需要首先知道介质如何对外场的响应的（如 (1.5.2)）。不同的介质中的电磁行为完全不同！**

注意到 (1.5.8) 式中 (1)，(4) 两式很复杂，右边既有自由电荷（流）“源”，又有极磁化后产生的新的电荷电流。试图换一个角度看这个问题。注意到尽管介质中的电磁场直接的来源是总电荷、总电流，然而究其本质他们**最终**是由“源”产生的。基于这个观点，我们试图将所有的宏观量都表示成**自由电荷/电流**的函数。因为，我们引入两个辅助矢量

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (1.5.9)$$

代入方程组 (1.5.8) 式并做化简可得：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1.5.10)$$

其中新引入的辅助矢量 \vec{D} 称为**电位移矢量**， \vec{H} 称为**磁场强度**。**它们的导入使方程组的右边只出现自由电荷和自由电流，不出现束缚电荷/电流。当然，这仅仅是为了便于讨论问题，它们本身并非真实的场，不会对身处其中的电荷/电流产生作用力。**

4. 本构关系

现在考虑示意图中最后一步：局域总场的改变是如何与极（磁）化程度自洽的。这就需要确定 (1.5.8) 中的极（磁）化强度等物理量如何与总电（磁）场自洽决定的。换言之，必须确定麦克斯韦方程(1.5.10)辅助矢量 \vec{D}, \vec{H} 与 \vec{E}, \vec{B} 之间的

关系，才能求出方程组的解。这些关系式被称为**本构关系**，与介质的性质有关。事实上，我们的世界之所以如此丰富多彩就是因为有各种具有不同本构关系的介质。

对线性介质，其实我们已经知道了其对外加电磁场的响应（1.5.2），这本质上就是一种本构关系。进一步，利用（1.5.2）及（1.5.9）得

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{H} = \vec{B} / \mu, \end{cases} \quad (1.5.11)$$

其中

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \quad \mu = \mu_r \mu_0 = (1 + \chi_m) \mu_0 \quad (1.5.12)$$

叫做介电常数及磁导率， ε_r μ_r 称为相对介电常数及相对磁导率（无量纲量）。利

用（1.5.9），可将（1.5.9）中第2式改写为 $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ ，结合（1.5.11）可以看出，历史上以为 **H** 是基本量与 **E** 的地位相同，对磁化率的定义是针对 H 场的！ 将本构关系带入无源空间的 Maxwell 方程组，得

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

其中 E 和 H 完美对称。另外需要指出的是：导体本身就是一种特殊的电磁介质，它的本构关系就是欧姆定律 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

应当指出，这里我们给出的本构关系是最简单的一种（尽管是最常见的）- 极（磁）化对外场的响应呈现局域/即时/线性/各向同性的响应。更一般的情况下，本构关系可以非常丰富多彩：

- (1) 在铁电和铁磁物质或强场情况下， \vec{P} 与 \vec{E} 、 \vec{M} 与 \vec{H} 之间将不再呈现线性关系；*
- (2) 对于各向异性的介质来说，介电常数和磁导率都是对称张量，场强和感应场强之间的关系推广为 $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$ ； $B_i = \mu_{ik} H_k$ ；*
- (3) 在高频情况下，由于场变化得很快，以至于极化电荷和磁化电流跟不上场的变化。这时的响应在最一般情形下可以写成 $\vec{D}(t) = \int \varepsilon(t-t') \vec{E}(t') dt'$ 。但当外场随时间以频率 ω 简谐变化时，傅立叶分析显示对单频仍然有 $\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega)$ 。所以极化率和磁化率都将是频率的函数。因而 $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ ， $\mu = \mu(\omega)$ 。*
- (4) 有些材料响应是非局域的： $\vec{D}(\vec{r}) = \int \varepsilon(\vec{r}-\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') d\tau'$ ，也就是说，在 \vec{r}' 处的扰*

动会在 \mathbf{r} 处产生响应。这种效应又叫作空间色散。类似时间色散情形 (3)，对特定的以某一个 \mathbf{k} 为波矢在空间变化的场，经过傅立叶变换可知， $\vec{D}(\vec{k}) = \varepsilon(\vec{k})\vec{E}(\vec{k})$ 此时 ε 是 \mathbf{k} 的函数

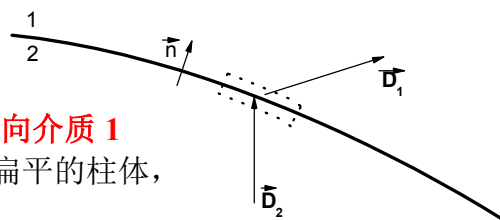
§ 1.6 麦克斯韦方程组的边界条件

Maxwell 方程组的精妙之处在于其不同介质的交界面上“自带”边界条件，无须外设。这点是其超越其它许多方程（如流体力学方程）的地方。在界面上，微分形式的麦克斯韦方程失去意义，但积分形式仍可使用。这一节我们就从积分形式的场方程出发导出交界面两边 Maxwell 方程的边界条件。

对应 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$ 的积分形式是

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho_f d\tau$$

如图所示，定义界面的方向矢量为介质 2 指向介质 1 的单位方向矢量 \vec{n} ，横跨介质的分界面做一扁平的柱体，两个底面平行于界面，分别为 $\Delta \vec{S}_1 = \Delta S \vec{n}$



及 $\Delta \vec{S}_2 = -\Delta S \vec{n}$ ，高度 h 。为了得到场在界面两边的行为，先令 h 趋向于 0，此时显然 D 在侧表面的积分趋于 0，因此，

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Delta \vec{S}_1 \cdot \vec{D}_1 + \Delta \vec{S}_2 \cdot \vec{D}_2 = \Delta S \cdot (\vec{n} \cdot \vec{D}_1 - \vec{n} \cdot \vec{D}_2) = q_f,$$

其中 q_f 为柱体内的自由电荷量（不包括因为极化产生的束缚电荷！）。进一步令 $\Delta S \rightarrow 0$ ，我们得到

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_f \quad (1.6.1)$$

$\sigma_f = q_f / \Delta S$ 是交界面上的自由电荷面密度。在一般情况下 $\sigma_f = 0$ （没有自由电荷，或是自由电荷呈现体分布），D 场的法向分量守恒。

同理，对应方程 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，容易得到 B 场的法向分量连续 的结论：

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \Rightarrow B_{n1} = B_{n2} \quad (1.6.2)$$

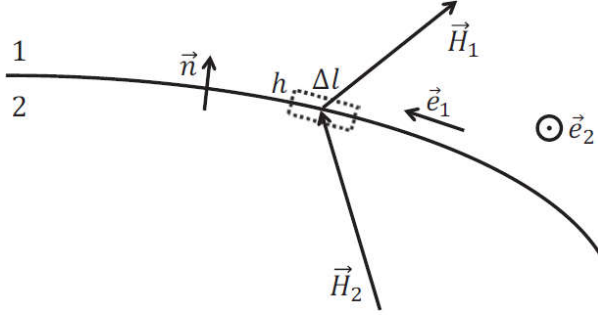
对应第 4 条公式 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$ 的积分形式为

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{j}_f \cdot d\vec{S} + \int \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

假设 \vec{e}_1, \vec{e}_2 为界面上相互垂直的两个方向矢量，其与界面方向矢量 \vec{n} 呈右手螺旋：

$$\vec{n} \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \quad \vec{n} \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$$

则如图所示在界面处画一个长为 Δl (方向沿 \vec{e}_1)，宽为 h 的矩形。仍然先考虑 $h \rightarrow 0$ ，则 \mathbf{H} 场在 h 上的积分趋于 0。于是 \mathbf{H} 场在整个环路上的积分为：



$$\vec{H}_1 \cdot \Delta \vec{l}_1 + \vec{H}_2 \cdot \Delta \vec{l}_2 = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = \vec{j}_f \cdot \vec{e}_2 (h \cdot \Delta l) + \frac{\partial}{\partial t} (D \cdot \Delta l \cdot h)$$

一般情况下边界处 $\frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$ 是有限值，则在 $h \rightarrow 0$ 时，上式右边第 2 项为零。右边第 1 项在界面存在面电流分布时不为 0。定义 $\vec{j}_f \cdot h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \vec{\alpha}_f$ 为面电流密度，我们便有

$$\vec{e}_1 \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{\alpha}_f \cdot \vec{e}_2, \quad (1.6.3)$$

考虑面内另一个方向，可得

$$\vec{e}_2 \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = -\vec{\alpha}_f \cdot \vec{e}_1 \quad (1.6.4)$$

非常容易将上 (1.6.3) - (1.6.4) 式改写成更一般紧凑的形式

$$\boxed{\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{\alpha}_f} \quad (1.6.5)$$

要证明 (1.6.5) 式，可将矢量 $\vec{H}_1 - \vec{H}_2$ 分解到 \vec{e}_1 和 \vec{e}_2 方向，再根据 $\vec{n} \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \vec{n} \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$ 。

同理，对于方程 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$ ，与上面的推导比较可知，相应的边界条件为

$$\boxed{\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0}, \quad (1.6.6)$$

故电场的切向分量连续。

注：

(1) 4 条边界条件怎么记？可以很容易通过将 Maxwell 方程中的 $\nabla \rightarrow \vec{n}$ ，再将体分布

(ρ, \vec{j}) 换成面分布 $\sigma, \vec{\alpha}$ 。

(2) 在绝大多数正常情况下，电磁场的边界条件都是 E, H 场切向分量连续， D, B 法向方向连续。只有当有自由面电荷（流）分布时，才有 H 场与 D 场的不连续。而所谓面分布，其实是真实的体分布的一种简化，亦即，电荷/流分布在非常薄的一层介质里。此时，若我们不关心此薄层里的场分布，则跨越这个薄层的场当然不连续。

习题

P. 31, 1.10, 1.11, 1.19

补充：

- 1) 仿照课件，推导出 M 场在边界的连接条件
- 2) 仿照课件，推导出极化强度 \vec{P} 在界面上的边界条件
- 3) 根据 (1.6.3) + (1.6.4) 推导出 (1.6.5)。

思考题 Projects (选作)

- 1) 就目前来讲，大家对边界条件的认识一定是模糊的，不妨做如下课题来加深理解。考虑一个半径为 R 介质球（相对介电常数为 ϵ_r ），由于某种外力的原因将一些自由电荷均匀分布在球内的厚度为 δ 的一个壳层内，求此时空间的 D, E 场分布，并研究边界两边的场是否满足边界条件。当 $\delta \rightarrow 0$ 时，重复以上的讨论。问问自己：以上模型能否在实际中实现？最后，为深入理解 H, B 场的边界条件，仿照上面的讨论自己定义一个体系进行深入讨论。
- 2) 考虑一个均匀极化 ($\vec{P}(\vec{r}) = P_0 \hat{x}$) 的体系及一个非均匀极化（比如， $\vec{P}(\vec{r}) = P_0 \hat{x} + \xi \vec{x}$ ）的体系，在微观层面考虑其电偶极子究竟如何分布的？在合适的微观模型基础下，比较微观描述下的极化电荷分布和“宏观小微观大”意义下的极化电荷分布。如何得到 $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ 的？怎么理解？两种描述下的电场分布有什么不同和联系？