第二次习题课

2018.11.01

王冬逸 dywang13@fudan.edu.cn
17110190003@fudan.edu.cn

- 梯度散度旋度运算&Stokes, Gauss, Green公式
- 本构关系&Maxwell 方程组
- 边界条件问题
- 电磁场能量动量&Maxwell 张量计算作用力
- Green 互易定理与电容
- 镜像法

梯度、散度、旋度运算

∇算符既有矢量性，又有微分性：

$$\nabla = \widehat{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \widehat{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \widehat{e_z}\frac{\partial}{\partial z} = \widehat{e_i}\partial_i$$

梯度：$\nabla f = \widehat{e_x}\frac{\partial f}{\partial x} + \widehat{e_y}\frac{\partial f}{\partial y} + \widehat{e_z}\frac{\partial f}{\partial z} = \widehat{e_i}\partial_i f$ （微分性直接作用于标量）

散度：$\nabla \cdot \vec{a} = \left(\widehat{e_x}\frac{\partial f}{\partial x} + \widehat{e_y}\frac{\partial f}{\partial y} + \widehat{e_z}\frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \left(a_x\widehat{e_x} + a_y\widehat{e_y} + a_z\widehat{e_z}\right)$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \partial_i a_i$$ （点乘矢量得标量）

旋度：$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \widehat{e_x} & \widehat{e_y} & \widehat{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk}\partial_i a_j \widehat{e_k}$ （叉乘矢量得矢量）

并矢(二阶张量)：

定义： $\vec{a}\,\vec{b} = a_i b_j\,\hat{e}_i\,\hat{e}_j$

单位张量： $\overleftrightarrow{I} = \delta_{ij}\,\hat{e}_i\,\hat{e}_j = \hat{e}_i\,\hat{e}_i$

双点积：

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\overleftrightarrow{C}) &= (a_i\,\hat{e}_i)\cdot[(b_j\,\hat{e}_j)\cdot(C_{kl}\,\hat{e}_k\,\hat{e}_l)] \\ &= a_i b_j\,C_{kl}\,[(\hat{e}_j\cdot\hat{e}_k)\,(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_l)] \\ &= a_i b_j\,C_{kl}\,[(\hat{e}_i\,\hat{e}_j):(\hat{e}_k\,\hat{e}_l)]\end{aligned}$$

令 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\overleftrightarrow{C}) = (\vec{a}\vec{b}):\overleftrightarrow{C}$

$$\boxed{(\hat{e}_i\,\hat{e}_j):(\hat{e}_k\,\hat{e}_l) \equiv (\hat{e}_j\cdot\hat{e}_k)\,(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_l)}$$

张量与张量的双点积：

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{A}:\overleftrightarrow{B} &= (A_{ij}\,\hat{e}_i\,\hat{e}_j):(B_{kl}\,\hat{e}_k\,\hat{e}_l) \\ &= A_{ij}B_{kl}\,[(\hat{e}_i\,\hat{e}_j):(\hat{e}_k\,\hat{e}_l)] \\ &= A_{ij}B_{kl}\,[(\hat{e}_j\cdot\hat{e}_k)\,(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_l)] \\ &= A_{ij}B_{kl}\,\delta_{jk}\delta_{il} \\ &= A_{ij}B_{ji}\end{aligned}$$

即矩阵相乘以后再取迹

并矢与矢量、标量间的运算——分量形式计算，矢量运算　法则基本都可以推广但要注意很多时候交换律往往不成立。

Stokes', Gauss' & Green's Theorem

- Stokes' Theorem

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_s \left(\nabla \times \vec{A}\right)\cdot d\vec{S}$$

- Gauss' Law

$$\int_s \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} d\tau$$

- Greens' Theorem

$$\int_s d\vec{S} \times \vec{A} = \int_V \nabla \times \vec{A} d\tau$$

Eg.1 求证（1）$\oint \varphi d\vec{l} = \int_s d\vec{S} \times \nabla \varphi$

（2）$\oint_S (d\vec{S} \cdot \vec{B})\vec{A} = \int_V [\vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}] d\tau$

Hint:（(1)为*Stokes*公式变形，(2)为*Gauss*公式变形)

解:(1) 根据*Stokes*公式:$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_s (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$

将待证等式左右两边同乘常矢量$\vec{C}$,令$\vec{A}=\varphi\vec{C}$

则有$\oint (\varphi\vec{C}) \cdot d\vec{l} = \int_s (\nabla \times (\varphi\vec{C})) \cdot d\vec{S}$

右边$=\int_s d\vec{S} \cdot (\nabla \times (\varphi\vec{C})) = \int_s \vec{C} \cdot (d\vec{S} \times \nabla \varphi)$

$=\vec{C} \cdot \int_s d\vec{S} \times \nabla \varphi$

左边$=\oint \vec{C} \cdot (\varphi d\vec{l}) = \vec{C} \cdot \oint \varphi d\vec{l}$

$\because$ 左边=右边

$\therefore \oint \varphi d\vec{l} = \int_s d\vec{S} \times \nabla \varphi$

(2)法1 对于 $\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_V d\tau(\nabla\cdot\vec{F})$，定义 $\vec{F}=\varphi\vec{A}$，则有：

$$\boxed{\oint_S \varphi\vec{A}\cdot d\vec{S}=\int_V d\tau(\nabla\cdot\varphi\vec{A})=\int_V d\tau(\nabla\varphi\cdot\vec{A})+\int_V d\tau(\varphi\nabla\cdot\vec{A})}$$

又 $\boxed{\nabla(\vec{A}\cdot\vec{c})\cdot\vec{B}}=\hat{e}_i\dfrac{\partial}{\partial\mu_i}(A_jc_j)\cdot B_k\hat{e}_k=B_ic_j\dfrac{\partial A_j}{\partial\mu_i}=c_j\hat{e}_j(B_i\dfrac{\partial}{\partial\mu_i})A_k\hat{e}_k=\boxed{\vec{c}\cdot(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}}$

$$\boxed{\oint_S(d\vec{S}\cdot\vec{B})\underbrace{(\vec{A}\cdot\vec{c})}_{\varphi}=\int_V d\tau\underbrace{\boxed{(\nabla(\vec{A}\cdot\vec{c})\cdot\vec{B})}}_{\varphi}+\int_V d\tau(\underbrace{(\vec{A}\cdot\vec{c})}_{\varphi}\nabla\cdot\vec{B})}=\boxed{\vec{c}\cdot}\int_V d\tau\boxed{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}}+\vec{c}\cdot\int_V d\tau[\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})]$$

$$\Rightarrow\oint_S(d\vec{S}\cdot\vec{B})\vec{A}=\int_V[\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}]d\tau$$

法2

$$\int_V[\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}]d\tau$$

$$=\int_V\nabla\cdot(\vec{B}\vec{A})d\tau$$

$$=\oint_S d\vec{S}\cdot(\vec{B}\vec{A})$$

$$=\oint_S(d\vec{S}\cdot\vec{B})\vec{A}$$

Constitutive Relations &Maxwell Equation(in dielectric)

◆ **Constitutive Relations**

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\vec{B}=\mu\vec{H},\vec{j}=\sigma_c\vec{E}$$

◆ **Maxwell Equation**

静电场来源：电荷分布

涡旋电场来源：磁场变化

磁场为无源场：磁单极不存在

有旋磁场来源：电流分布、电场变化

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}\qquad\begin{cases}\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\int\rho_f d\tau\\ \oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_s-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}\\ \oiint\vec{B}\cdot d\vec{s}=0\\ \oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S\vec{j}_f\cdot d\vec{S}+\int\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{D}\cdot d\vec{S}\end{cases}$$

边界条件

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\
\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\
\nabla \cdot \vec{B} = 0 \\
\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\vec{n}_1 \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = \sigma_f \\
\vec{n} \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) = 0 \\
\vec{n} \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) = 0 \\
\vec{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{\alpha}_f
\end{cases}
$$

无自由面电荷，D场的法向分量守恒

电场的切向分量连续

B场的法向分量守恒

在绝大多数正常情况下，电磁场的边界条件都是E，H场切向分量连续，D，B法向方向连续。只有当有自由面电荷（流）分布时，才有H场与D场的不连续。而所谓面分布，其实是真实的体分布的一种简化，亦即，电荷/流分布在非常薄的一层介质里。此时，若我们不关心此薄层里的场分布，则跨越这个薄层的场当然不连续。

Eg.2 内外半径分别为R_1和R_2的无限长中空圆柱内沿轴流有稳定的均匀电流，电流密度为j_ρ,导体的磁导率为μ。试求空间各点的磁感应强度，磁化强度和磁化电流，并计算磁感应强度的散度和旋度。

解：体系具有柱对称性，磁场沿$\hat{e}_\phi$方向，且其强度仅为 r 的函数。

考虑柱体的截面以 r 为半径的一个圆环：

1） r<R1

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j}\cdot d\vec{S} \Rightarrow 2\pi r B(r) = 0 \Rightarrow B(r) = 0$$

$$H(r) = 0, M(r) = 0, \vec{j}_m(r) = 0, \nabla\cdot\vec{B}(r) = 0, \nabla\times\vec{B}(r) = 0$$

2） R1<r<R2

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu\int \vec{j}\cdot d\vec{S} \Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu j_\rho \pi(r^2 - R_1^{\,2}) \Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu j_\rho}{2r}(r^2 - R_1^{\,2})\hat{e}_\phi$$

$$\vec{H}(r) = \vec{B}(r)/\mu = \frac{j_\rho}{2r}(r^2 - R_1^{\,2})\hat{e}_\phi$$

$$\vec{M}(r) = \vec{B}(r)/\mu_0 - \vec{H}(r) = \frac{j_\rho}{2r}(r^2 - R_1^{\,2})(\frac{\mu}{\mu_0} - 1)\hat{e}_\phi$$

$$\vec{j}_m(r) = \nabla\times\vec{M}(r) = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)j_\rho$$

$$\alpha_{m1} = \hat{e}_n \times \vec{M}(R_1) = 0$$

$$\alpha_{m1} = -\hat{e}_n \times \vec{M}(R_2) = -\frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 R_2}(R_2^{\,2} - R_1^{\,2})\vec{j}_f$$

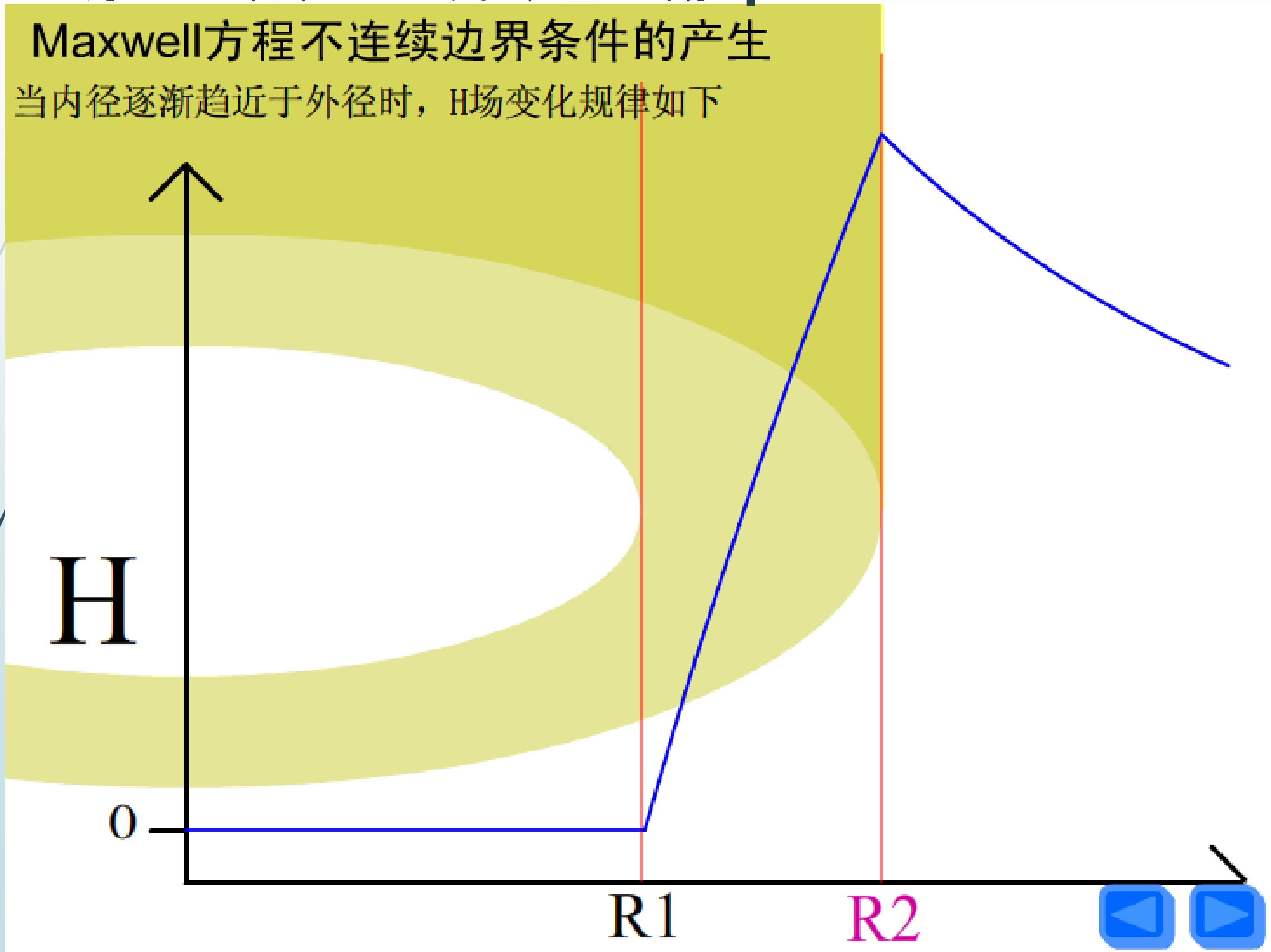
$$\nabla\cdot\vec{B}(r) = 0, \nabla\times\vec{B}(r) = \mu_0 \vec{j}_m(r) = (\mu - \mu_0)j_\rho$$

3） r>R2

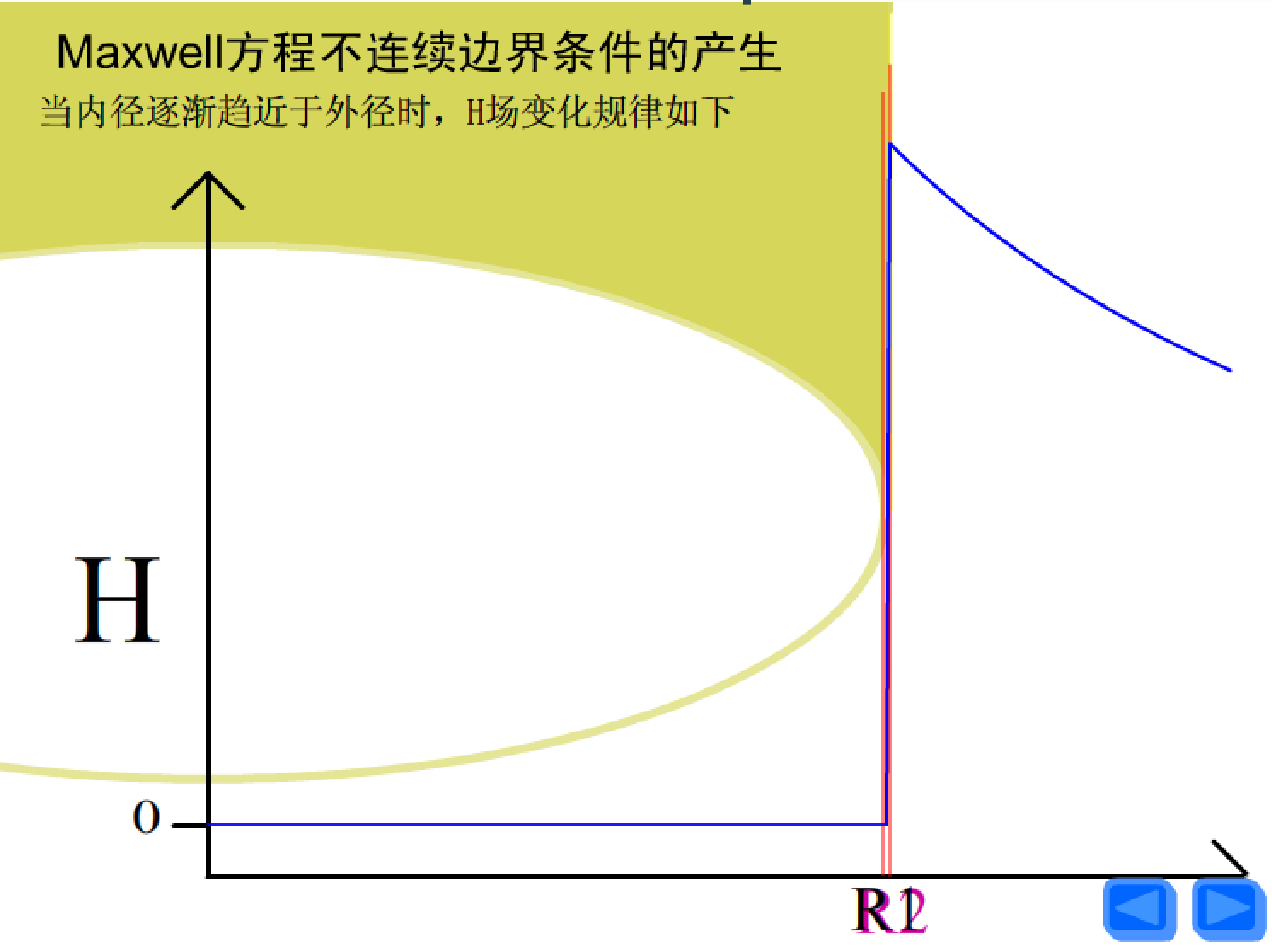
$$\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\int \vec{j}\cdot d\vec{S} \Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 j_f \pi(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}) \Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 j_f}{2r}(R_2^{\,2} - R_1^{\,2})\hat{e}_\phi$$

$$H(r) = \frac{j_f}{2r}(R_2^{\,2} - R_1^{\,2})\hat{e}_\phi, M(r) = 0, \vec{j}_m(r) = 0, \nabla\cdot\vec{B}(r) = 0, \nabla\times\vec{B}(r) = 0$$

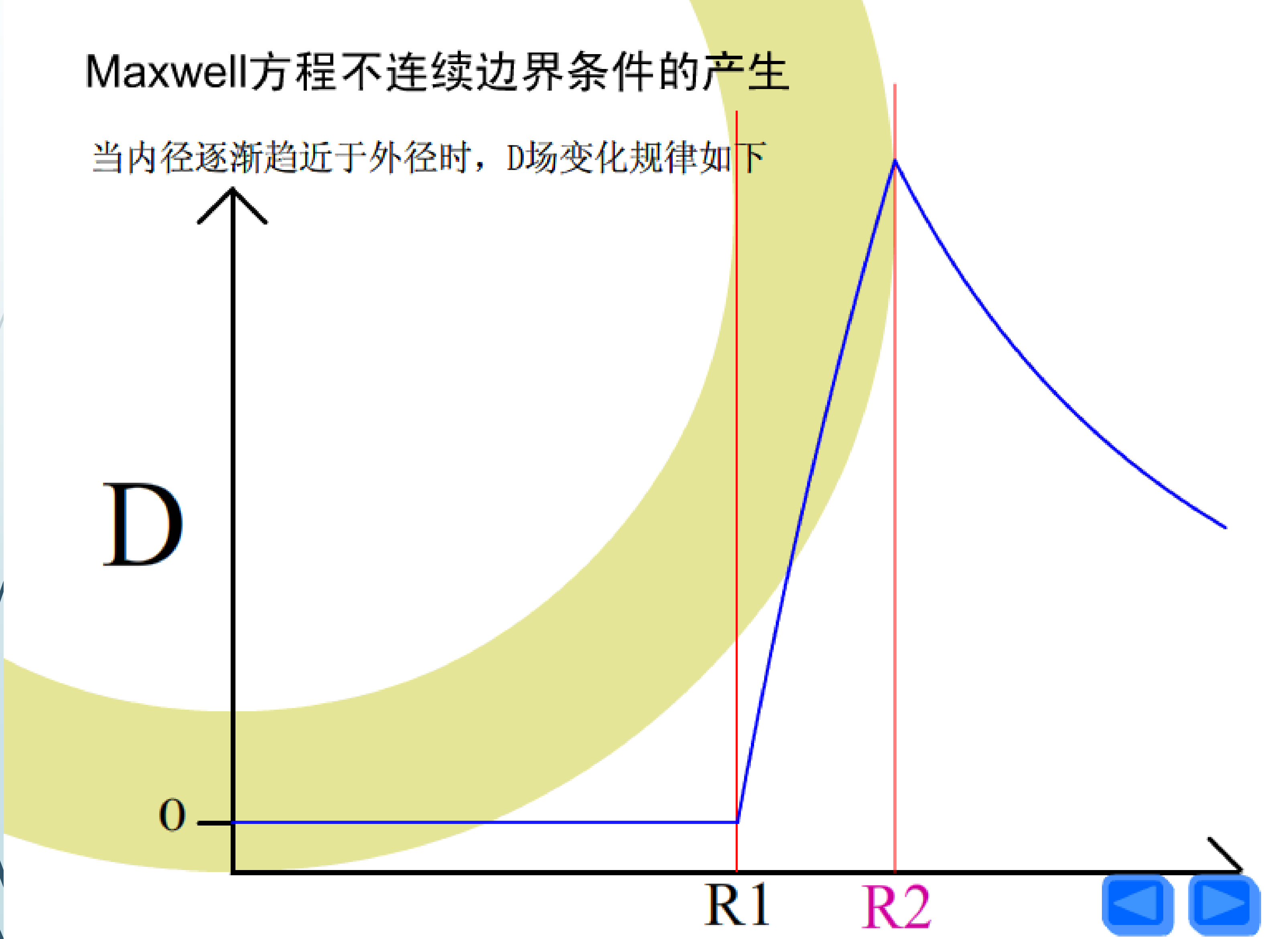
极限情况：$R_1 \to R_2$，问题退化为边界条件问题（我们不再关心薄层里的场分布）**H**场“不连续”边界条件的产生原因：存在自由分布面电流α_f



极限情况：$R_1 \to R_2$，问题退化为边界条件问题（我们不再关心薄层里的场分布）**H**场“不连续” 边界条件的产生原因：存在自由分布面电流α_f



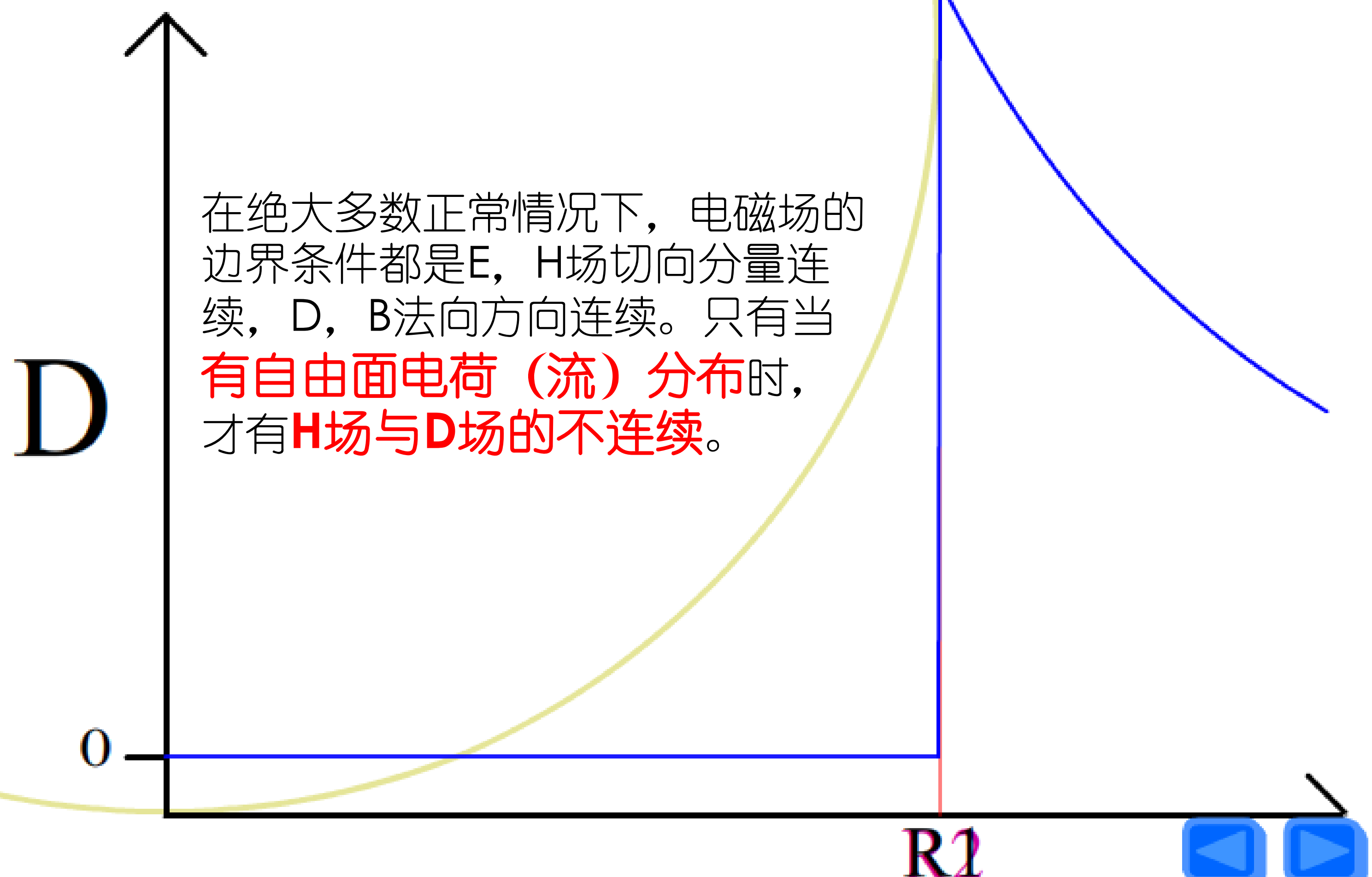
类似的，D场不连续边条的产生：σ_f



类似的，D场不连续边条的产生：σ_f

Maxwell方程不连续边界条件的产生

当内径逐渐趋近于外径时，D场变化规律如下



在绝大多数正常情况下，电磁场的边界条件都是E，H场切向分量连续，D，B法向方向连续。只有当**有自由面电荷（流）分布**时，才有**H场与D场的不连续**。

Eg.3 如图1(a)所示，空间内r< r_0区域内存在随时间线性变化沿$\hat{e}_z$方向的均匀磁场，即

$$\vec{B}=\begin{cases}\alpha t\hat{e}_z & r<r_0\\ 0 & r>r_0\end{cases}$$

(a)计算空间中矢势$\vec{A}$和电场$\vec{E}$的分布。若在(a,0,0)处置一电荷q，施加外力$\vec{F}$保持其静止，求外力$\vec{F}$，t时刻体系正则动量$\vec{p}$，以及在0~t时间内外力对电荷冲量$\vec{I}$，比较正则动量与电荷冲量大小并讨论

(b) 若在空间连接如图(b)所示电路，求电压表V1，V2读数(仅电阻两端压降，与外场电动势无关)

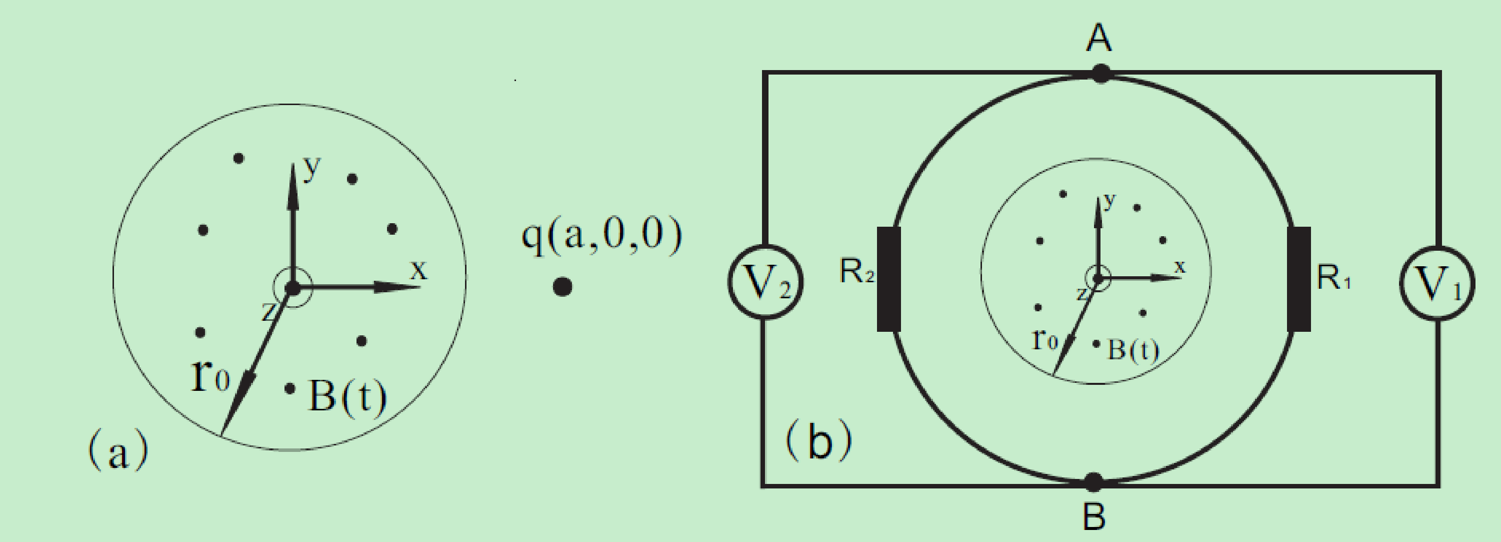


Figure 1: Example 1示意图

解答

应用$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$的积分形式, 或者$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, 解得:

$$\vec{E}=\begin{cases}-\frac{r}{2}\alpha\hat{e}_\phi & r<r_0\\ -\frac{r_0^2}{2r}\alpha\hat{e}_\phi & r>r_0\end{cases}$$

根据题意$\vec{F}+q\vec{E}=0$,

$$\vec{F}=\frac{qr_0^2}{2r}\alpha\hat{e}_y$$

那么点电荷q在$0\sim t$的时间内受到的冲量$\vec{I}$:

$$\vec{I}=\int\vec{F}\mathrm{d}t'=\frac{qr_0^2}{2r}\alpha t\hat{e}_y$$

在t时刻体系的正则动量$\vec{p}$:

$$\vec{p}=m\vec{v}+q\vec{A}=\frac{qr_0^2}{2r}\alpha t\hat{e}_y=\vec{I}$$

(b) 磁通量Φ:

$$\Phi=\int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\begin{cases}\alpha t\pi r^2 & r<r_0\\ \alpha t\pi r_0^2 & r>r_0\end{cases}$$

则电路中的电动势ε:

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\alpha\pi r_0^2$$

注意Eq. (26) 中是对时间的全微分. 进一步, 电流I为:

$$I=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2}=-\frac{\alpha\pi r_0^2}{R_1+R_2}$$

注意这里负号表示电流是顺时针方向的.
电压表V_1的读数为:

$$V_1=V_{1B}-V_{1A}=R_1I=-\frac{\alpha\pi r_0^2}{R_1+R_2}R_1\qquad(\text{A点电势高于B点})$$

电压表V_2的读数为:

$$V_2=V_{2A}-V_{2B}=R_2I=-\frac{\alpha\pi r_0^2}{R_1+R_2}R_2\qquad(\text{A点电势低于B点})$$

讨论分析

- 第一小题的Eq. (24) 说明在该过程中外力$\vec{F}$对电荷产生的冲量$\vec{I}$实际上以电磁动量的形式储存在了电磁场中.
- 第二小题的$V_1 \neq V_2$的原因是:

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \neq 0 \tag{30}$$

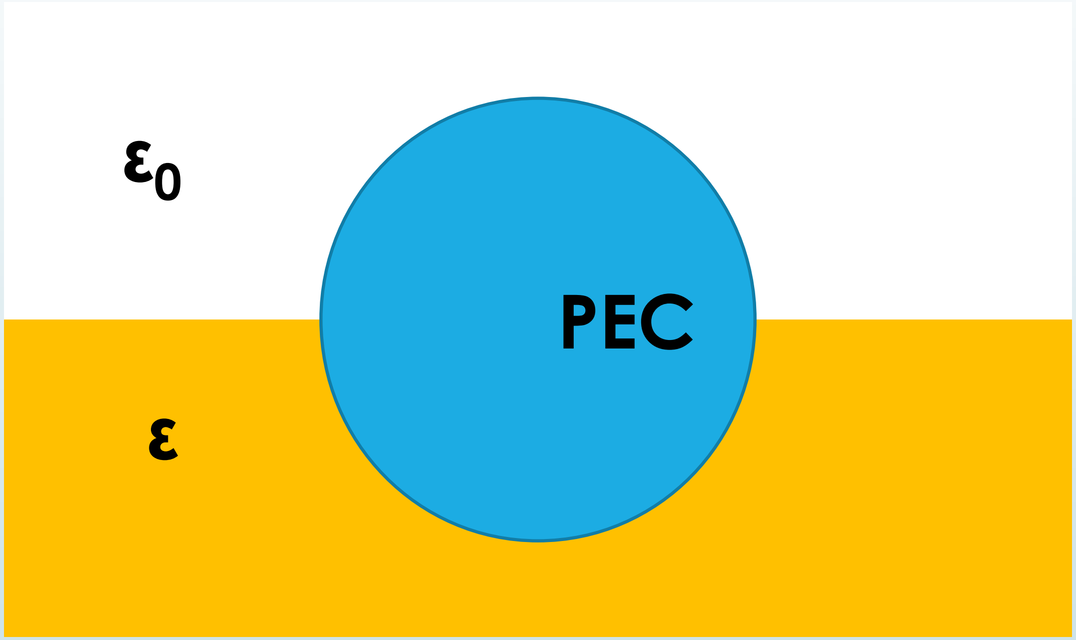
换句话说, 此时电势多值, 没有明确意义.

- 如果大家有兴趣, 可以尝试算出此题中的能流密度$\vec{S}$.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \begin{cases} -\frac{r}{2\mu_0}\alpha^2 t\hat{e}_r & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases} \tag{31}$$

在边界处$r = r_0$, 能流$\vec{S}$发生突变.

Eg.4 一质量为m 的不带电金属球壳浮在介电常数为ε 的液体上，但有1/4 的体积浸没在液体之中，并对它进行充电。试问，电势为多少时能使它有一半体积浸没在液体中？



解答

解：分析题意，最初不带电球壳置于液体中平衡，故而浮力与重力平衡，有：

$$\rho g V/4 = mg$$

充电以后，金属球壳为等势体，但在不同的电介质层界面上体现出不同的 D 场，从而使得体系上下表面受力不同，新的体系，静电力与浮力和重力保持平衡，有：

$$\rho g V/2 = mg + F_q \Rightarrow F_q = mg$$

即新的体系中总的静电力提供向下大小等于重力的合力。

对于球壳，假定带电量为 q，则表面电势与电场分别为：

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{R}, E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{R^2}\hat{e}_r \Rightarrow E = \frac{\varphi_0}{R}$$

电场方向与表面法线方向一致，因而有 $\vec{F} = \frac{1}{2}E\cdot D\hat{e}_r = \frac{\varepsilon\varphi_0^{\ 2}}{2R^2}\hat{e}_r$，其中 ε 为表面电介质的介电常数。

积分整个球壳表面，有对称性可知合力仅有 z 方向，有：

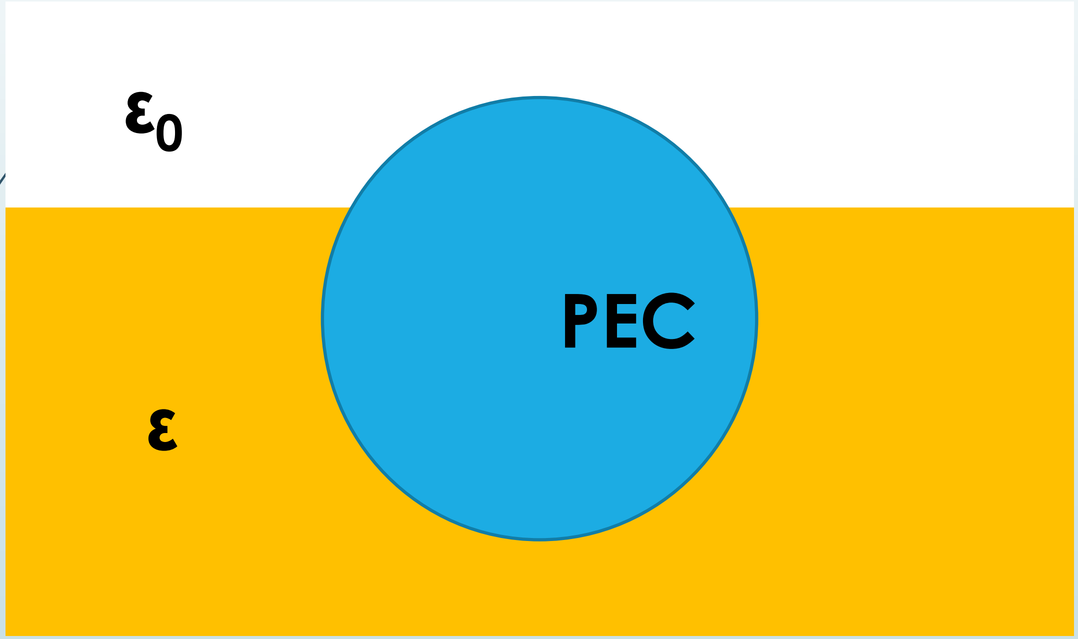
$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \oint \frac{\varepsilon_r\varphi_0^{\ 2}}{2R^2}\hat{e}_r ds \\
&= 2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\varepsilon_0\varphi_0^{\ 2}}{2R^2}R^2\cos\theta\sin\theta d\theta + 2\pi\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\varepsilon\varphi_0^{\ 2}}{2R^2}R^2\cos\theta\sin\theta d\theta \\
&= \frac{\pi\varphi_0^{\ 2}}{2}(\varepsilon_0 - \varepsilon)\hat{z}
\end{aligned}$$

故而有力的平衡知：

$$\frac{\pi\varphi_0^{\ 2}}{2}(\varepsilon_0 - \varepsilon) = -mg \Rightarrow \varphi_0 = \sqrt{\frac{2mg}{\pi(\varepsilon - \varepsilon_0)}}$$

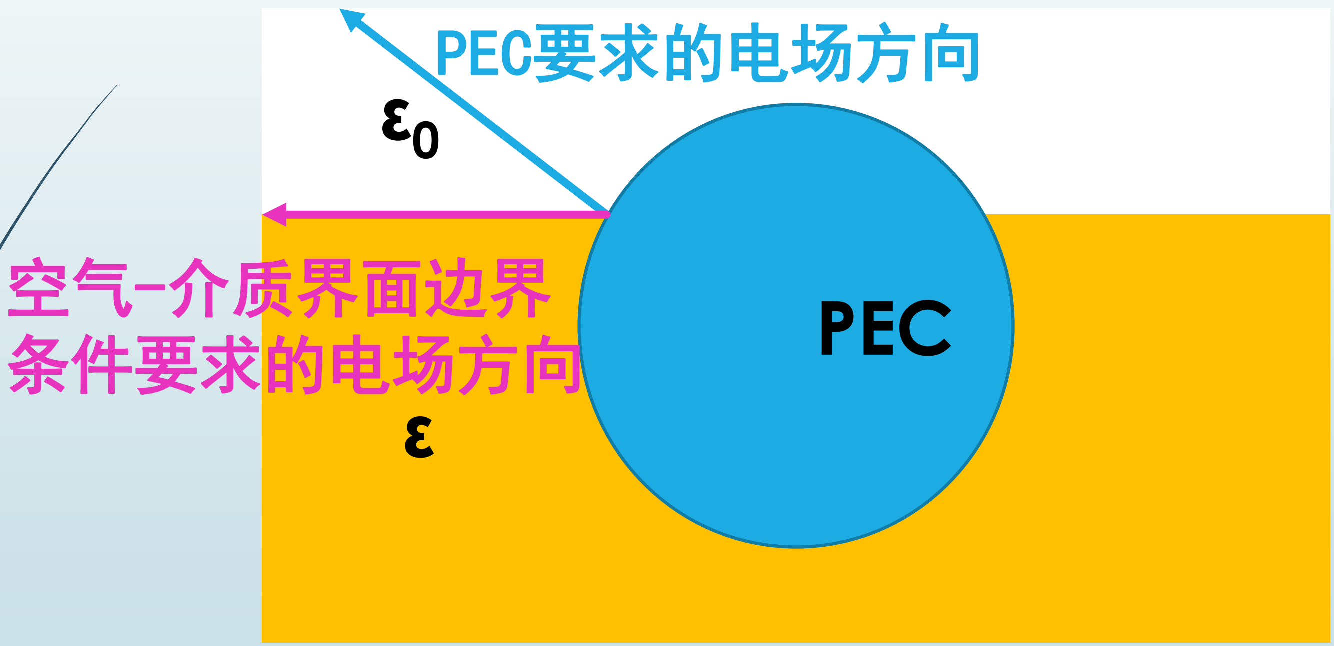
讨论分析

如果不是恰好浸没一半，我们还能用这样的方法解题吗？



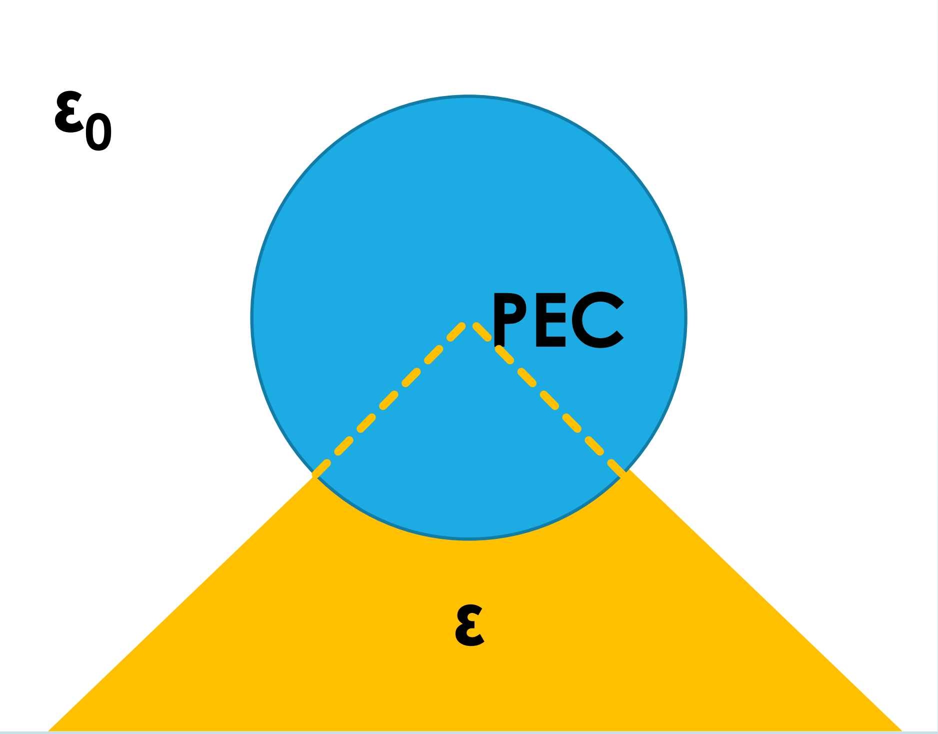
讨论分析

答案是否定的。不难发现这样一个问题：PEC要求电场“站”在边界上，而空气与介质的界面要求电场沿平行界面方向，这看起来是矛盾的。



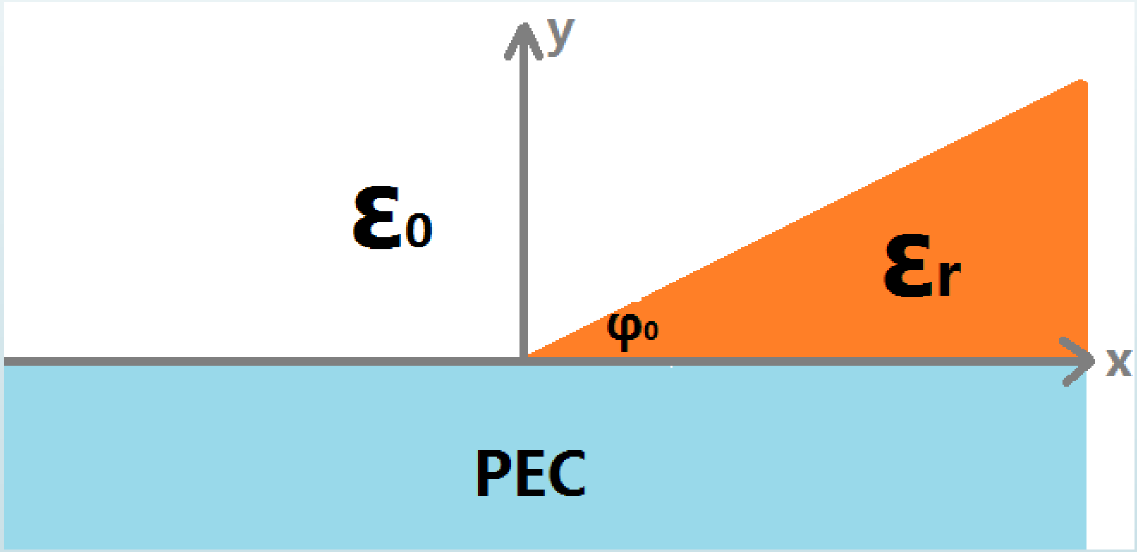
讨论分析

事实上，只有当空气-介质界面边界条件和PEC要求的电场方向一致，也就是界面边界过PEC球心时，我们才能如题解一样简单地考虑这个问题。



讨论分析

否则，我们需要严格地进行模展开，或者将这个问题转化为三相点问题求解。如果同学有兴趣可以做相关的小课题。



电磁场能量动量

- 能量守恒及转化 $\frac{\partial}{\partial t}\left[W_m+\int u d\tau\right]=-\oint \vec{S}_p\cdot d\vec{S}$
- $\vec{S}_P(\vec{r},t)=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ 能流密度

$u(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)$ 电磁场局域能量密度

- 动量守恒及转化 $\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{G}_m+\int \vec{g} d\tau\right]=-\oint d\vec{S}\cdot\overleftrightarrow{T}$
- $\vec{g}=\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\vec{S}_P$ 电磁场局域动量密度

$\overleftrightarrow{T}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\overleftrightarrow{I}-\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}$ 动量流密度

Maxwell 张量计算作用力

- 电磁场单位时间内通过界面从外面传递到曲面内部的总动量，即外界电磁场通过界面对闭合区域内的**带电体**和**电磁场**施加的**总力**为：$-\oint_S d\vec{S}\cdot\overleftrightarrow{T}$

- 其中**作用于**区域内**电磁场**上，引发区域内电磁场而非带电体本身的动量的增加的力为：$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\vec{g}\,d\tau$

- 将作用于区域内电磁场的力剔除，剩余的外界电磁场通过界面对闭合区域内**带电体**的作用力即为：

$$\vec{F}_{em}=\frac{\partial\vec{G}_m}{\partial t}=-\oint_S d\vec{S}\cdot\overleftrightarrow{T}-\int_V \frac{\partial}{\partial t}\vec{g}\,d\tau$$

Eg.5 如图2所示，空间中有一长度为 $l \gg 1$的同轴电缆，内导体半径为a，外导体半径为b，其两端：一端连接电压为V的直流电源，另一端连接阻值为R的电阻，内导体电荷线密度为λ，电流大小为I，外导体带反号的电荷和反向的电流。

在a<r<b，0<z<l的区间内，计算电磁场的能量密度w_{em} 和能流密度$\vec{S}$ 分布，动量密度 $\vec{p}$ 和动量流密度$\overleftrightarrow{T}$ 分布，单位时间内通过同轴电缆截面能量$\int \vec{S} \cdot d\vec{\sigma}$ 和动量$\int \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{\sigma}$ ，电磁场的总能量 $\int w_{em} d\tau$ 和总动量 $\int \vec{g} d\tau$ ，以及内外导体之间的作用力$\vec{F}_{\text{int}}$

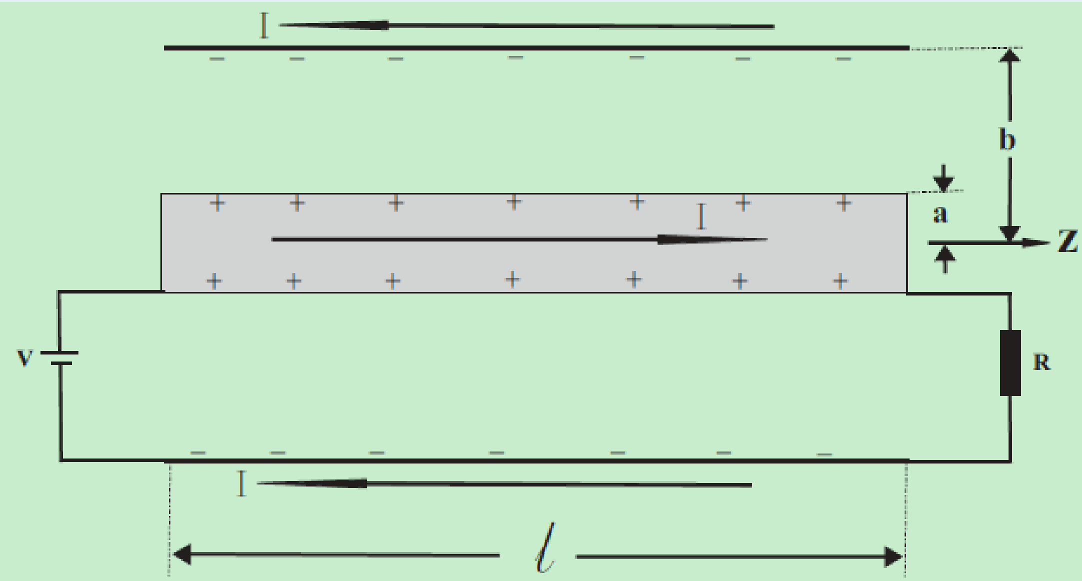


Figure 2: Example 2示意图

解答

解：易求得$a<r<b,\ 0<z<l$区间内的电场$\vec{E}$和磁场$\vec{H}$的分布：

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\hat{e}_r \qquad \vec{H}=\frac{I}{2\pi}\frac{1}{r}\hat{e}_\phi$$

先考虑电磁场的能量，其能量密度w_{em}和能流密度$\vec{S}$分布为：

$$w_{em}=\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon_0}+\mu_0 I^2\right)\frac{1}{r^2}$$

$$\vec{S}=\frac{\lambda I}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_z \tag{34}$$

单位时间内通过同轴电缆横截面的能量：

$$P=\int\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}=\int\frac{\lambda I}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_z\cdot\hat{e}_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda I}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \tag{35}$$

按照能流的方向，很明显，能量是从电池流向电阻的.
利用电场计算内导体和外导体之间的电势差V^2：

$$V=V_a-V_b=\int_b^a\mathrm{d}\varphi=\int_b^a\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b E\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \tag{36}$$

那么，

$$P=IV \tag{37}$$

Eq. (37) 的物理意义十分明确，单位时间内通过同轴电缆横截面的能量P等于电路的功率IV.
电磁场的总能量U为：

$$U=\int w_{em}\mathrm{d}\tau=\frac{l}{4\pi}\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon_0}+\mu_0 I^2\right)\ln\frac{b}{a} \tag{38}$$

接着考虑电磁场的动量，其动量密度$\vec{g}$和动量流密度$\overleftrightarrow{T}$分布为：

$$\vec{g}=\frac{1}{c^2}\vec{S}=\frac{\mu_0\lambda I}{4\pi^2}\frac{1}{r^2}\hat{e}_z \tag{39}$$

$$\overleftrightarrow{T}=\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon_0}+\mu_0 I^2\right)\frac{1}{r^2}\overleftrightarrow{I}-\frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_r\hat{e}_r-\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2}\frac{1}{r^2}\hat{e}_\phi\hat{e}_\phi \tag{40}$$

单位时间内通过同轴电缆横截面的动量$\vec{F}$：

$$\begin{aligned}\vec{F}&=\int\overleftrightarrow{T}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}=\int\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{e}_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi=\int\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon_0}+\mu_0 I^2\right)\frac{1}{r^2}\hat{e}_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\\&=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon_0}+\mu_0 I^2\right)\ln\frac{b}{a}\hat{e}_z\end{aligned} \tag{41}$$

电磁场的总动量$\vec{P}$：

$$\vec{P}=\int\vec{g}\mathrm{d}\tau=\frac{\mu_0\lambda Il}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \tag{42}$$

讨论分析

最后考虑内外导体之间的作用力$\vec{F}_{int}$:

$$\vec{F}_{int} = -\int \overleftrightarrow{T} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = -\int \overleftrightarrow{T} \cdot \hat{e}_r r \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z = -\int \left[\frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon_0} + \mu_0 I^2 \right) \frac{1}{r^2} \hat{e}_r - \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r \right] r \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z = 0 \tag{43}$$

讨论与思考:

- 电阻的能量来自空间电磁场，所以电路中能量的传播速度(电场建立的速度)为光速.
- 整个体系静止，为什么会有电磁动量? (提示: $\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r \hat{e}_z$)
- 为什么会存在表面电荷: J.D.Jackson, Am. J. Phys. 64, 855 (1996).

格林互易定理

给定一个有m个导体组成的体系，当导体上的电荷为$q_1, q_2, \cdots, q_m$时，它们的电势等于$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m$;当导体上的电荷为$q'_1, q'_2, \cdots, q'_m$时，它们的电势等于$\phi'_1, \phi'_2, \cdots, \phi'_m$那么有关系式

$$\sum_{i=1}^{m} q_i \phi'_i = \sum_{i=1}^{m} q'_i \phi_i$$

ε_0

电容和电容系数

电容：体系容纳电荷的能力。

电容系数C_{ij}：
将导体系第i个导体的电势表示为所有导体所带电荷量的线性组合，组合系数即为对应的电容系数倒数 $\phi_i = \sum_j C^{-1}{}_{ij} q_j$
反之亦然 $q_i = \sum_j C_{ij}\phi_j$

此外可证 $C^{-1}{}_{ij} = \varphi_i^{(j)}$ 即电容系数C_{ij}的物理意义为**仅在第j个**带电体上**充单位电量**时在**第i个带电体**上**诱导的电势**

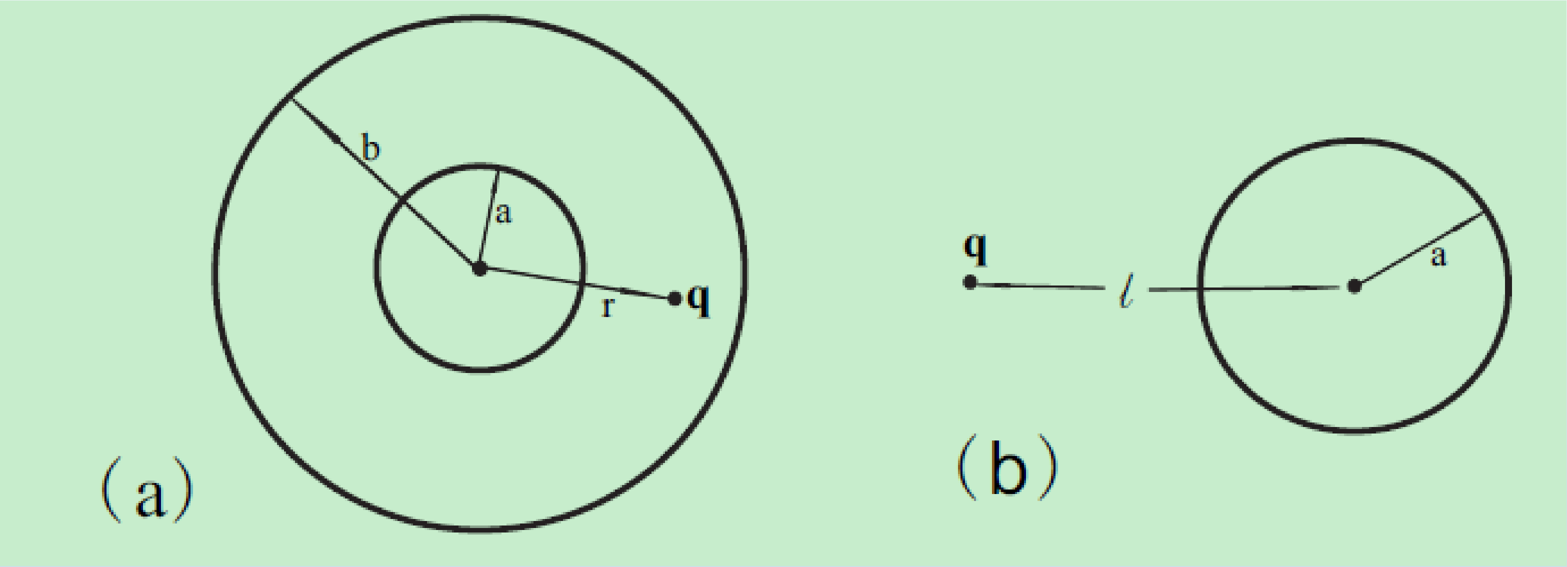
几何意义即**电荷之间的“有效距离”**，物理上具有长度量纲。显然，这个距离越大，当然体系就可以“装下”更多的电荷，因此电容也就越大。

Eg.6 如图(a)、(b)所示，利用格林互易定理求解

(a)半径为a和b的两个同心导体球壳，在其间放一点电荷q，求两个球壳上的感应电荷；

(b)半径为a的导体球外l处放一点点电荷q，求该球的感应电荷。

(c)利用电容系数法计算(a)中内外导体球壳组成的电容器电容，并与直接利用(a)中结果计算比较。



解答

解： (a) **第一种情况：** 电荷分布为q, Q_1, Q_2，其中Q_1, Q_2分别为内球壳和外球壳的感应电荷，电势分布为$\varphi, 0, 0$；
第二种情况： 电荷密度分布为$0, +\sigma, -\frac{a^2}{b^2}\sigma$，电势分布为$\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}), \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}), 0$。
那么由格林互易定理

$$q\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{b})+Q_1\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})=0 \tag{2.1}$$

可得

$$Q_1=-q\frac{a}{r}\frac{b-r}{b-a} \tag{2.2}$$

类似可得

$$Q_2=-q\frac{b}{r}\frac{r-a}{b-a} \tag{2.3}$$

容易验证

$$Q_1+Q_2=-q \tag{2.4}$$

(b) **第一种情况：** 电荷分布为q, Q，其中Q为球壳的感应电荷，电势分布为$\varphi, 0$；
第二种情况： 电荷密度分布为$0, +\sigma$，电势分布为$\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 \ell}, \frac{\sigma a}{\epsilon_0}$。
那么由格林互易定理

$$q\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 \ell}+Q\frac{\sigma a}{\epsilon_0}=0 \tag{2.5}$$

可得

$$Q=-\frac{a}{\ell}q \tag{2.6}$$

Eq.(2.6)正是电像法中象电荷的电量，但是这并不意味着电像法中像电荷的电荷就是感应电荷。

解答

设导体 1 的电荷量为 q，导体 2 外表面的电荷量为 q′，其电势分别为 φ_1，φ_2。

由导体 1 和空心导体壳 2 的内表面组成电容器，导体壳 2 内表面的电荷量为-q，电势差为 φ_1-φ_2，则电容器的电容系数为：

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

此外考虑孤立导体（导体 2 外表面）的电容，有 $C' = q' / \varphi_2$

考虑系统的电容系数，有：

$$\begin{cases} q = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 \\ q' - q = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 \end{cases}$$

解得：

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{(C_{22} + C_{21})q - (C_{12} + C_{11})(q' - q)}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} = \frac{(C_{22} + C_{21} + C_{12} + C_{11})q - (C_{12} + C_{11})q'}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}$$

由于内部电容的电势差并不受导体 2 的外表面电荷 q′的影响，因而 C_{12}=-C_{11}，带入上面的方程，得到：

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{(C_{22} + C_{21})q}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} = \frac{q}{C_{11}}$$

故而可以得到，电容器的电容系数为 C_{11}。

解答

$$\text{Configuration(1)}\begin{cases} Q_1 = -q\dfrac{a(b-r)}{r(b-a)} \\ Q_2 = q\dfrac{b(a-r)}{r(b-a)} \end{cases};\begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Configuration(2)}\begin{cases} Q_1 = 4\pi\sigma a^2 \\ Q_2 = -4\pi\sigma a^2 \end{cases};\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\sigma a^2}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right) \\ \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

利用电容系数及Configuration(2)：

$$Q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 \Rightarrow C = C_{11} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

直接计算可得$C=\dfrac{Q}{\varphi_1-\varphi_2}=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$

结果相同

3.5 有两个导体组成的一个系统，导体 1 装在空心导体 2 中，使用系统的电容系数来表示系统组成的电容器中的电容和孤立导体（即导体 2 的外表面）的电容。

解：

设导体 1 的电荷量为 q，导体 2 外表面的电荷量为 q′，其电势分别为 φ_1，φ_2。

由导体 1 和空心导体壳 2 的内表面组成电容器，导体壳 2 内表面的电荷量为-q，电势差为 φ_1-φ_2，则电容器的电容系数为：

$$C=\frac{q}{\varphi_1-\varphi_2}$$

此外考虑孤立导体（导体 2 外表面）的电容，有 $C'=q'/\varphi_2$

考虑系统的电容系数，有：

$$\begin{cases} q=C_{11}\varphi_1+C_{12}\varphi_2 \\ q'-q=C_{21}\varphi_1+C_{22}\varphi_2 \end{cases}$$

解得：

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{(C_{22}+C_{21})q-(C_{12}+C_{11})(q'-q)}{C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}}=\frac{(C_{22}+C_{21}+C_{12}+C_{11})q-(C_{12}+C_{11})q'}{C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}}$$

由于内部电容的电势差并不受导体 2 的外表面电荷 q′的影响，因而 C_{12}=-C_{11}，带入上面的方程，得到：

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{(C_{22}+C_{21})q}{C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}}=\frac{q}{C_{11}}$$

故而可以得到，电容器的电容系数为 C_{11}。

此外，考虑 q 与电势的关系，易于发现此处有 $(C_{11}+C_{12})\varphi_2=0\Rightarrow C_{11}=-C_{12}=-C_{21}$

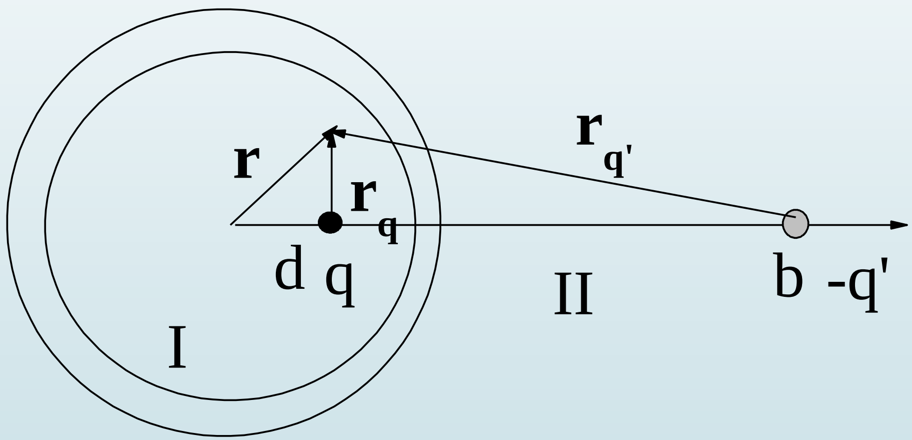
同时有：

$$\begin{aligned} q'&=C_{21}\varphi_1+C_{22}\varphi_2+q \\ &=(C_{11}+C_{21})\varphi_1+(C_{22}-C_{11})\varphi_2 \\ &=(C_{22}-C_{11})\varphi_2 \end{aligned}$$

故而发现孤立导体的电容为 C_{22}-C_{11}。也可写作 C_{22}+C_{12}。

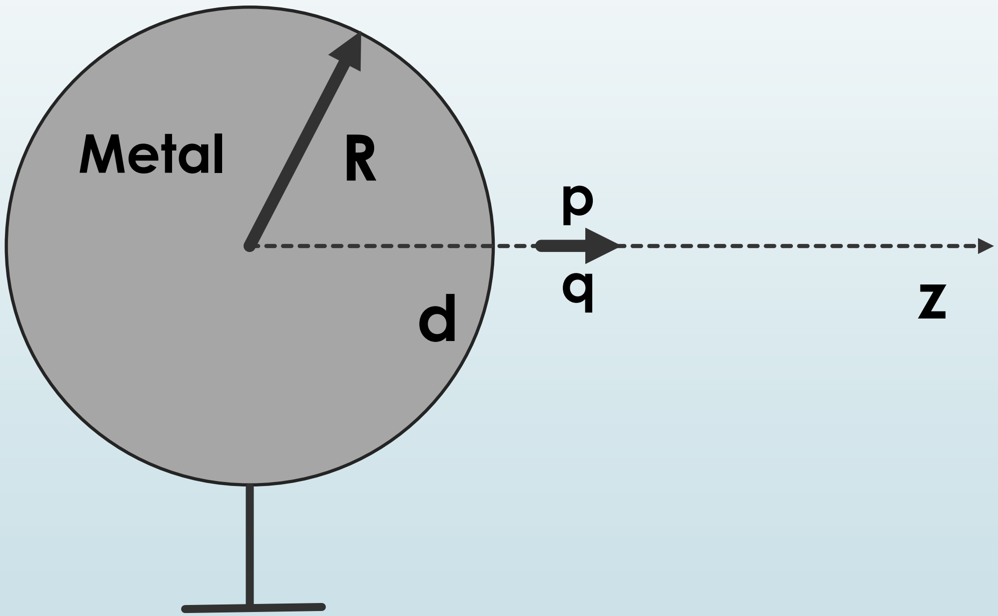
镜像法

镜像法 – 利用虚拟电荷代替界面处的面电荷，使得试解满足边条；唯一性定理保证解的正确性



$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_d} - \frac{q'}{r_b}\right], \qquad \varphi_{II} = 0$$

Eg.7 如图所示，在一个半径为R的接地金属球外距球心d的位置放置一个电偶极子$\vec{p}$，电偶极子的方向沿径向。1)计算空间电势分布；2)在同样位置再放一个点电荷q，当q取何值时，金属球上的感应电荷对外变为一个纯粹的电偶极子？



解答

取球心为坐标原点，球心到点电荷 q 的方向为 z 轴。设先求出位于坐标为（0,0,d）的点电荷的镜像电荷 $-q'$：

$$\frac{q}{\sqrt{d^2+R^2-2Rd\cos\theta}}-\frac{q'}{\sqrt{b^2+R^2-2Rb\cos\theta}}=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{R^2}{d} \\ q'=\dfrac{R}{d}q \end{cases}$$

对于位于（0,0,d）的电偶极子 $\overline{p}=q\bar{l}$ 由位于（0,0，$d+\dfrac{l}{2}$）和（0,0，$d-\dfrac{l}{2}$）的两个大小为 q 和-q 的电荷构成，故电偶极子对应两个镜像电荷 $q_1^{'}$和$q_2^{'}$。其大小和位置分别为：

$$\begin{cases} b_1=\dfrac{R^2}{d+\dfrac{l}{2}} \\ q_1^{'}=-\dfrac{R}{d+\dfrac{l}{2}}q \end{cases} \qquad \begin{cases} b_2=\dfrac{R^2}{d-\dfrac{l}{2}} \\ q_2^{'}=\dfrac{R}{d-\dfrac{l}{2}}q \end{cases}$$

1) 空间中的电势分布包括电偶极子和两个镜像电荷三部分的贡献。即：

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \dfrac{q}{\sqrt{r^2+(d+\frac{l}{2})^2-2r(d+\frac{l}{2})\cos\theta}}-\dfrac{q}{\sqrt{r^2+(d-\frac{l}{2})^2-2r(d-\frac{l}{2})\cos\theta}}-\dfrac{\frac{R}{d+\frac{l}{2}}q}{\sqrt{r^2+(\frac{R^2}{d+\frac{l}{2}})^2-2r(\frac{R^2}{d+\frac{l}{2}})\cos\theta}}+\dfrac{\frac{R}{d-\frac{l}{2}}q}{\sqrt{r^2+(\frac{R^2}{d-\frac{l}{2}})^2-2r(\frac{R^2}{d-\frac{l}{2}})\cos\theta}} \\ 0 \end{cases}$$

2) 两个镜像电荷对球外空间的贡献即为球上感应电荷对外的贡献。由于两个镜像电荷绝对大小不相等，我们可以将两个镜像电荷等效成一个镜像电偶极子和一个镜像电荷 p'和$q_3^{'}$，其中镜像电荷大小 $q_3^{'}$ 为

$$q_3^{'}=q_1^{'}+q_2^{'}=q\left(\frac{R}{d-\frac{l}{2}}-\frac{R}{d+\frac{l}{2}}\right)=\frac{lqR}{d^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\approx\frac{Rp}{d^2}$$

解答

故仅当新加的外设点电荷对应的镜像电荷与之抵消时，金属球上的感应电荷对外可以等效为一个纯粹的电偶极子。外设点电荷大小q_3为：

$$q_3=\frac{d}{R}q_3'=\frac{d}{R}\frac{Rp}{d^2}=\frac{p}{d}$$