

## 第七讲

### 上次课:

- $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$ ,  $q\vec{A}$  为带电运动粒子与磁场的相互作用而产生的附加动量
- $\vec{S}_p = (\vec{E} \times \vec{H})$ ,  $u = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$ , 电磁介质中的能流密度、能量密度
- $\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\epsilon$  --- 静电方程
- $$\begin{cases} \vec{E}_{in} = 0, \rho_{in} = 0 \\ \vec{E}_{\parallel}^{surface} = 0 \\ E_{\perp}^{surface} = \sigma / \epsilon, \text{ both are unknowns!!!} \end{cases} \quad \text{----- 静电边条}$$

进一步将上面关于场的边界条件转化成对势的边界条件，有

$$\begin{cases} \varphi|_{\text{Boundary}} = \text{Constant} \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\text{Boundary}} = -\frac{\sigma}{\epsilon}, \quad Q = -\epsilon \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

其中  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  是指  $\varphi$  沿着表面法线方向的微分。所有这些条件都是因为导体内部有自由电荷这个性质决定的！

原则上，导体相关的静电问题就是在边界条件（3.1.5）下求解（3.1.3）。这里可能有两类问题，

- (1) **等势问题** – 假设考虑的导体与外界大的带电导体相连并达到静电平衡， $\varphi = \text{const.}$  （注意：此时导体上的总电荷不能预先设定，是要求解的）
- (2) **孤立导体问题** – 假设导体孤立，则  $Q$  已知，但此时  $\varphi$  不能预先设定，是需要根据已知情况求解的。

某种意义上讲， $Q, \varphi$  是一对共轭量，不可能同时预先设定。

### § 3.2 格林互易定理

在讨论具体问题之前，先介绍一个一般的定理 – 格林互易定理，其在导体静电学中相当有用。它的表述如下：

“给定一个有  $m$  个导体组成的体系，假设当导体上的电荷为  $q_1, q_2, \dots, q_m$  时，它们的电势等于  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ ，而对应另外一种电荷分布  $q'_1, q'_2, \dots, q'_m$ ，导体的电势分布为  $\phi'_1, \phi'_2, \dots, \phi'_m$ ，那么有关系式

$$\sum_{i=1}^m q_i \phi'_i = \sum_{i=1}^m q'_i \phi_i \quad (3.2.1)$$

证明：

证明 Green 互易定理之前，我们先证明一个数学恒等式。取任意的一个闭合曲面  $S$ ，假设  $\Phi, \Psi$  是定义于  $S$  包围的体积  $V$  内的 2 个连续可微的函数，则由高斯定理可得

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) d\tau = \oint_S \Phi \nabla \Psi \cdot d\vec{S}$$

将  $\Phi, \Psi$  位置互换，有

$$\int_V \nabla \cdot (\Psi \nabla \Phi) d\tau = \oint_S \Psi \nabla \Phi \cdot d\vec{S}$$

两式相减，我们得到

$$\boxed{\int_V (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) d\tau = \oint_S (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot d\vec{S}} \quad (3.2.2)$$

此即为格林定理，它的重要性是*将任意两个标量*

*函数的空间性质与其边界行为联系起来*。下面我们

进一步利用格林定理证明格林互易定理。对包含  $m$

个导体的空间，取无限远处为封闭曲面  $\vec{S}_0$ ，然后再在

其中挖掉所有导体所处的区域，因此产生  $m$  个封闭曲

面  $\vec{S}_i$ 。剩余的空间，体积为  $V$ ，是一个多连通的闭合区域，

其边界由  $\vec{S}_0$  及  $\vec{S}_i$  共同确定，记为  $\vec{S}$ 。考虑两个充电状态，其中导体上分别带有电

荷  $\{q_i\}$  和  $\{q'_i\}$ ，对应的空间电势分布分别为  $\Psi(\vec{r}), \Phi(\vec{r})$ ，*这两个分布都必须满足*

*场方程以及相应的边条*。由于静电平衡下电荷都分布在导体表面上。所以在体积

$V$  内有： $\nabla^2 \Psi = 0, \nabla^2 \Phi = 0$ 。代入 (3.2.2) 式，则 (3.2.2) 左边恒等于零。取  $\vec{S}_0$

在无限远处，因 (3.2.2) 中右边项以  $r^{-3}$  在无穷远处趋向于 0，故其对  $\vec{S}_0$  的积分

为零。故有

$$0 = \sum_{i=1}^m \oint_{S_i} (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot d\vec{S}_i = \sum_{i=1}^m \oint_{S_i} \left( \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) \cdot dS_i \quad (3.2.3)$$

根据导体静电平衡时的边界条件，导体表面的电荷分布是

$$\sigma_i = \epsilon \frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{S_i}, \quad \sigma'_i = \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S_i}$$

(这里取+号是因为  $\vec{S}_i$  的方向定义为垂直表面向导体内部)。进一步，因为导体

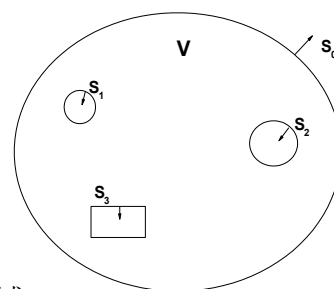
表面是等势体

$$\phi_i = \Psi \Big|_{S_i}, \quad \phi'_i = \Phi \Big|_{S_i}$$

将上面 2 式代入 (3.2.3) 式，得

$$\sum_i \left[ \oint_{S_i} \phi_i \sigma'_i dS_i - \oint_{S_i} \phi'_i \sigma_i dS_i \right] = 0$$

积分可得格林互易定理：



$$\sum_{i=1}^m q'_i \phi_i = \sum_{i=1}^m q_i \phi'_i$$

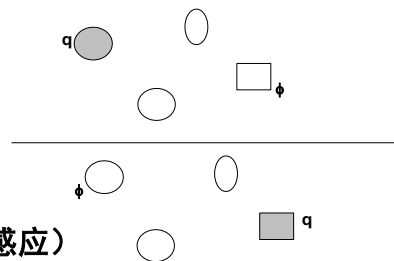
由格林互易定理，我们可以马上得到一个重要的结果。考虑两个状态，其中  $q'_1 = q'_3 = q'_4 = \dots = q'_n = 0$ ,  $q_2 = q_3 = \dots = q_n = 0$ ，则有

$$q'_2 \phi_2 = q_1 \phi'_1$$

再令  $q_1 = q'_2$ ，则得

$$\phi'_1 = \phi_2.$$

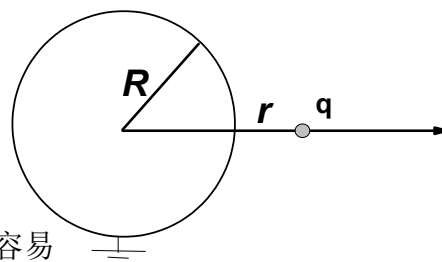
这就是说，带电  $q$  的导体 B 在不带电的导体 A 上（感应）产生的电势等于带电  $q$  的导体 A 在不带电的导体 B 上（感应）产生的电势。



**注：**你可能 **Argue** 说这没什么啊，比如考虑两个点电荷组成的导体系统。一个点电荷产生的电势为  $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ，其数值只与观察点与源的距离相关。若将观察点与源位置互换，显然有上述互易性质。但是，请注意格林定理显示这种互易关系在任意导体形状（未必是点电荷）下均成立。这个结论非常令人惊叹，因为场会引发导体上的电荷的再分布（即使导体总体来说不带电），但即使问题如此复杂我们却仍然有这样一个定理适用。格林互易定理在处理导体相关问题上很有优势。格林互易定理从本质上讲述的是源-观察点之间的对称关系。

**例1，** 在一个接地导体球（半径为  $R$ ）外距球心距离为  $r$  的地方放置一个带电量为  $q$  的点电荷，求在导体球上的感应电荷。

解：对这个由两个导体组成的导体系统，对应电荷分布  $\{q, q_R\}$ ，电势分布为  $\{\phi_q, 0\}$ ，其中  $q_R$  为导体球上的感应电荷， $\phi_q$  为点电荷所在地的电势，均未知。现制备另外一个电荷分布  $\{0, q'_R = 1\}$ ，则非常容易



求出空间的电场为  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$ ，故，两个导体上的电势分别为  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r}, \frac{1}{R} \right\}$ ，因

此，根据格林互易定理，可得

$$q \frac{1}{r} + q_R \frac{1}{R} = 0 \Rightarrow q_R = -\frac{R}{r} q$$

因此导体球上的感应电荷为  $-\frac{R}{r} q$ 。

**Tips:**

**【1】**有同学会被“导体球接地”这个条件所迷惑，当设计第二个状态时仍然把导体球接地，

这样就无法改变球的电势状态从而达到利用格林定理的目的。“接地”只是把导体球的电势设为0而已，并不意味着我需要一直连一根导线到地。

【2】书上例题5的解法非常不严谨，你能否利用更严谨的做法得到正确结论？

### § 3.3 导体系的能量、固有能和相互作用能

#### 1. 利用静电标势来表示静电能量

静电场能量可以用电势 $\varphi$ 来表述。假设一系列导体放置在介电常数为 $\epsilon$ 的线性电介质背景中，则体系的静电总能量为

$$W = \frac{1}{2} \int (\vec{E} \cdot \vec{D}) d\tau \quad (3.3.1)$$

利用 $\vec{E} = -\nabla\varphi$ ，上式可写成

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \int (\nabla\varphi) \cdot \vec{D} d\tau = -\frac{1}{2} \int \nabla \cdot (\varphi \vec{D}) d\tau + \frac{1}{2} \int \varphi \nabla \cdot \vec{D} d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \oint \varphi \vec{D} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int \varphi \rho d\tau \end{aligned}$$

其中用到了 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ 。若我们考察的是体系的总能量，则(3.3.1)式的体积分是对全空间进行的，因此上述等式右边的面积分是对无穷大的面进行。对电荷体系分布在有限区域内的情况， $\varphi \vec{D}$ 以 $r^{-3}$ 形式在无穷远处趋向0，因此面积分的值为零。另一方面，导体上的电荷分布全部集中在导体的表面，而导体表面上的势为常数。因此，能量的表达式变为

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho d\tau = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i Q_i \quad (3.3.2)$$

其中 $\phi_i, Q_i$ 为第*i*个导体的势和总电荷。

注：

(1) 上式虽然变现为只与自由电荷相关，但其实包含了极化能的电磁总能量。从物理上讲，静电总能可以被理解成建立这样一个导体体系，外界做的总功。因此(3.3.2)也可这样推出：假设电荷从处于无限远处一点点搬来的，将这些电荷一点点搬来做的功的总和即是(3.3.2)。能否通过推导自己理解一下这个看似有点“悖论”的结论？并解释为什么会有1/2因子？

(2) 从上面的分析我们看到静电能量有两种表达式，一种是 $W = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} d\tau$ ，这表示

静电能量是以密度 $u = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ 的形式在介质空间连续分布，场强大的地方能量也

大。另一种表达式是 $W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho d\tau$ ，似乎暗示着能量只存在于有电荷分布的区域。

以上两种表达式只有在求静电场的总能量时才等效，而当讨论空间某一有限范

围内的电磁能量时两者不再等效，因为面积分在有限范围内的值一般不会为零，我们只能应用第一种表达式。第二种表达式并不意味着 $\frac{1}{2}\varphi\rho$ 是电场的能量密度-没有电荷就没有能量的看法是错误的！

## 2. 电容

一个有多个导体组成的体系，每个导体都是等势体，其电势为 $\{\phi_i\}$ ，同时每个导体上带有不同的电量 $\{q_i\}$ 。这个导体体系的状态即可以用 $\{\phi_i\}$ 来刻画，也可以用 $\{q_i\}$ 来刻画。那么， $\{\phi_i\}$ 与 $\{q_i\}$ 之间是什么关系呢？

利用线性叠加原理可以证明：任意一个导体上的电势 $\phi_i$ 是各个导体上的电量的线性函数。用数学表述为： $\{\phi_i\}$ 一定可以表示为 $\{q_i\}$ 的线性函数：

$$\phi_i = \sum_j C_{ij}^{-1} q_j \quad (3.3.3)$$

式中的比例系数 $C_{ij}^{-1}$ 与导体的形状和相对位置有关，其量纲是长度量纲的负一次方。反之亦然：

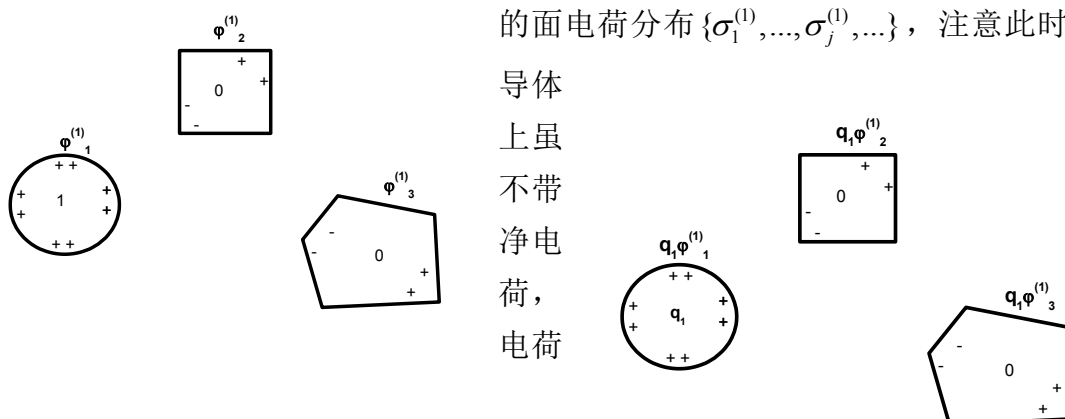
$$q_i = \sum_j C_{ij} \phi_j \quad (3.3.4)$$

这里的 $C_{ij}$ 是 $C_{ij}^{-1}$ 的逆阵元素。

证明上式并不容易，因为所有的带电体均可呈现任意形状，任何一个带电体上的电荷增减都会影响到其它带电体上的电荷分布，从而影响到整个体系的电势分布！但仔细思考之后发现可以利用静电平衡及线性叠加原理证明此命题。

分3步考虑：

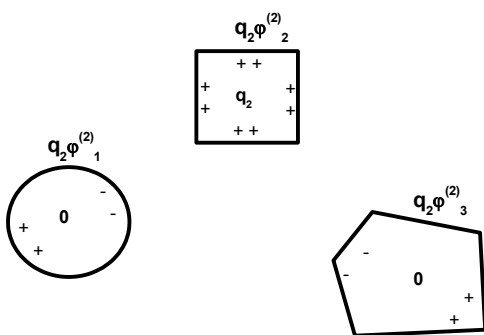
(1) 如左下图所示，只第1个导体上放置单位电量的电荷，其它所有导体上不放置电荷，即电荷分布为 $\{1, 0, 0, 0, \dots\}$ 。当此体系达到静电平衡时，对应的电势分布为 $\{\phi_1^{(1)}, \phi_2^{(1)}, \dots, \phi_j^{(1)}, \dots\}$ ，同时记下所有导体上的面电荷分布 $\{\sigma_1^{(1)}, \dots, \sigma_j^{(1)}, \dots\}$ ，注意此时其它导体



上虽  
不带  
净电  
荷，  
电荷

分布却未必为 0!

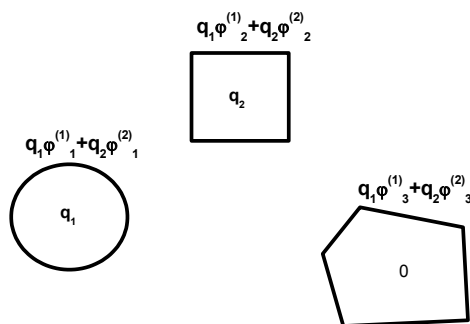
(2) 当第 1 个导体上的电荷线性增加  $q_1$  倍时 (如右上图), 即分布为  $\{q_1, 0, 0, 0, \dots\}$  时, 达到静电平衡时的导体面电荷分布一定为  $\{q_1\sigma_1^{(1)}, q_1\sigma_2^{(1)}, \dots, q_1\sigma_j^{(1)}, \dots\}$ , 根据线性叠加原理, 对应的电势分布一定为  $\{q_1\phi_1^{(1)}, q_1\phi_2^{(1)}, \dots, q_1\phi_j^{(1)}, \dots\}$ 。



(3) 换第二个带电体, 在其上充电  $q_2$  (其它带电体上不充电), 则得到电势分布  $\{q_2\phi_1^{(2)}, q_2\phi_2^{(2)}, \dots, q_2\phi_j^{(2)}, \dots\}$ , 如左上图所示。将这个状态与 (2) 中的状态线性叠加, 得到的电荷分布状态一定也是静电平衡态,

其对应电荷分布为  $\{q_1, q_2, \dots, \dots\}$  的状态。

将这样的过程循环往复, 我们发现对应于  $\{q_1, q_2, \dots, q_j, \dots\}$  的状态, 第  $i$  个带电体上的电势为  $\phi_i = \sum_j q_j \phi_i^{(j)}$ , 对比 (3.3.3)



发现问题得证, 其中  $C_{ij}^{-1} = \phi_i^{(j)}$ , 物理意

义为: 只在第  $j$  个带电体上充单位电量 (其他导体是不充电) 时在第  $i$  个带电体上诱导的电势。

利用 (3.3.3), 我们可以将导体系能量纯粹用电势表示或纯粹用电荷表示:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \phi_i \phi_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij}^{-1} q_i q_j \quad (3.3.7)$$

为了看清  $C_{ij}$  的物理含义, 设只有一个导体, 则

$$q_1 = C_{11} \phi_1$$

注意到对一个半径为  $R$  的金属球,  $q = 4\pi\epsilon_0 R \phi$ 。显然, 这里的  $C_{11} = 4\pi\epsilon_0 R$  是导体的电容, 几何的意义就是电荷之间的“有效距离”, 物理上具有长度量纲 (除去不重要的常数  $\epsilon_0$ )。这个距离越大, 当然体系就可以“装下”更多的电荷, 因此电容也就越大。

**思考题:**

**【1】书中证明  $C_{ii} > 0, C_{ij} < 0$  方法很难让人理解, 你能否给出正确的证明?**

## 【2】 $C_{ij}^{-1}$ 的符号又将如何？

\*\*\*\*\*

这里电容完全是个经典的概念。在量子力学世界中，电荷不再是经典的粒子，而是由一个几率函数描述的物质波。这里有许多有趣的新问题值得研究

1) 此时电容如何定义？如何计算？

2) 电容能的本质是“库仑相互作用”，对一个量子点，其静电能可写成  $U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ 。设量

子点内部只有一个电子填充时的能级为  $E_n$ ；当量子点中已有一个电子填充的时候，此

时在向里面填充一个电子就要付出  $\frac{1}{2C}$  的能量，因此此时电子的能级为  $E_n + \frac{1}{2C}$ 。

考虑如图所示的隧穿机制，设

外部环境中的电子能级与  $E_n$  匹配

的时候，电子可以通过跃迁到量

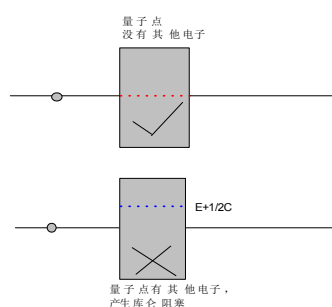
子点中的此能级而穿过量子点；然

而当量子点中已有一个电子存在的

时候，能级发生了改变，电子不能

进行共振隧穿。这种现象叫做

“库仑阻塞”—— 由于库仑力阻塞了电子的运动



3) “Mott 相变”等问题的研究 根据量子的能带理论，当能带没有被填满时，固体中的电子可以自由流动从而固体表现为金属。然而在 50-60 年代，英国物理学家 Mott 指出对半填充的固体存在一种新的绝缘体-金属相变机制。固体中的电子在两个原子之间跃迁时，能量上可以降低  $t$  (hopping 常数)。然而当能带半满时，每个原子上已经存在一个电子，此时当电子从一个原子跳到

另一个原子上时，会和那上面的电子

有静电相互作用，使得能量上升。这

两个因素 ( $t$  以及静电相互作用能  $U$ )

互相制约。当原子之间远离时， $t$  很

小因此电子不喜欢跳跃，此时体系表

现为绝缘体。当给晶格施加压力使得

原子之间的间距变短提高  $t$  的时候，

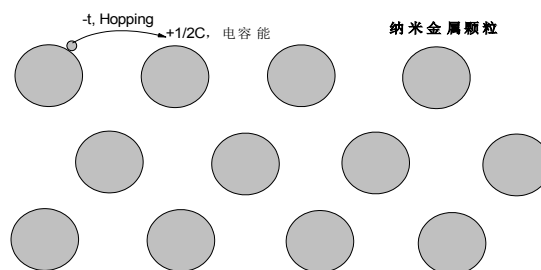
有可能使得  $t$  大到可以克服  $U$  将绝缘

体变成一个导体。然而自然的 Mott 相变得例子极少。随着科技的发展，人们可以人工

合成一些由纳米金属颗粒排成的人工晶格，利用这种体系来研究 Mott 相变。此时作为

最低级近似，对体系的静电能部分的描述就是经典的电容能  $U = Q^2 / 2C$ 。定量描述这

个问题就需要知道体系的电容系数。



[例 2] 《电磁学》中，两个带  $\pm Q$  电荷的导体的互电容定义为  $C = \frac{Q}{\varphi_2 - \varphi_1}$ 。在《电

动力学》中，我们更多地会使用电容系数，试用电容系数表示互电容。

解：这个两导体的体系当电荷分布为  $\{Q_1 = -Q, Q_2 = +Q\}$  时，电势分布为  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ 。

根据电容系数的定义，

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= C_{11}^{-1}Q_1 + C_{12}^{-1}Q_2 = C_{11}^{-1}(-Q) + C_{12}^{-1}(+Q) \\ \varphi_2 &= C_{22}^{-1}Q_2 + C_{21}^{-1}Q_1 = C_{22}^{-1}(+Q) + C_{21}^{-1}(-Q)\end{aligned}$$

因此

$$\varphi_2 - \varphi_1 = Q[C_{11}^{-1} - 2C_{12}^{-1} + C_{22}^{-1}]$$

与互电容的定义  $\varphi_2 - \varphi_1 = C^{-1}Q$  比较可知

$$\frac{1}{C} = C_{11}^{-1} - 2C_{12}^{-1} + C_{22}^{-1}$$

### 3. 固有能和相互作用能

设有两个带电体 1 和 2，他们各自独立存在时在空间激发的电场分别为  $\vec{E}_1$  和  $\vec{E}_2$ 。

将它们放在一起，当如下条件之一存在时

- (1) 两个带电体自身的尺寸远远小于它们之间的距离时，
- (2) 一个带电体的电量及尺寸远远小于另一个带电体的电量及尺寸，

**两个带电体上的电荷分布不因两个它们之间的相对构型的改变而产生显著变化。** 则空间总的电场可近似写为  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ 。因此，体系的总能量

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \int \vec{E}^2 d\tau = \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \int E_1^2 d\tau + \frac{\varepsilon}{2} \int E_2^2 d\tau}_{W_1 + W_2} + \underbrace{\varepsilon \int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau}_{W_{\text{int}}} \quad (3.3.9)$$

由上式可以看出，系统的总能量由两部分组成。

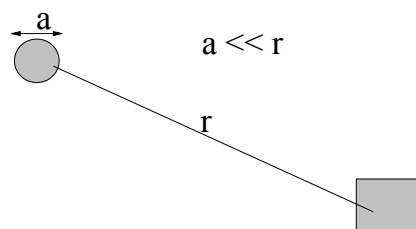
在这个条件下，上式右方第一和第二项表示

1 或 2 带电体单独存在时的能量  $W_1$  和  $W_2$ ，称

为**固有能**；上式右方的第三项表示两

个体系合起来之后与原来单独存在时的

能量差，称为**相互作用能**，可写成



$$W_{\text{int}} = \varepsilon \int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau = \varepsilon \int \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 d\tau$$

其中  $\varphi_1, \varphi_2$  为两个带电体**单独存在时**的空间的电势分布，分别满足

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\rho_1 / \varepsilon, \quad \nabla^2 \varphi_2 = -\rho_2 / \varepsilon$$



其中  $\rho_1, \rho_2$  为两个带电体的电荷分布。可以利用分部积分将上式进一步简化：

$$W_{\text{int}} = \varepsilon \int \nabla \cdot (\varphi_1 \nabla \varphi_2) d\tau - \varepsilon \int \varphi_1 \nabla^2 \varphi_2 d\tau = \int \varphi_1(\vec{r}) \rho_2(\vec{r}) d\tau$$

在许多情况下带电体的自身的尺寸远小于它们之间的间距， $\varphi_1$  在带电体 2 的所处的区间内近似为一常数，则

$$W_{12} \approx \varphi_1 \int_V \rho_2 d\tau = \varphi_1 q_2 \quad (3.3.10)$$

此即是相互作用能的表达式。显然 (3.3.10) 可以应用于小的电荷体系（如点电荷）在大的电荷体系产生的电场中（满足条件 (2)），以及点电荷之间的相互作用能（满足条件 (1)）。

### 点电荷在外电场中

对一个点电荷  $q$  放置于外电场中，设点电荷所在的位置处外电场的电势为  $\varphi_{\text{ext}}(\vec{r})$ ，则这个体系的相互作用能为

$$W_{\text{int}} = q\varphi_{\text{ext}}(\vec{r}) \quad (3.3.11)$$

**注意：**这个相互作用能是点电荷和外场共有的，不是点电荷自身的。可以与运动粒子在静磁场中的附加动量  $\Delta \vec{P} = q \vec{A}_{\text{ext}}(\vec{r})$  相比较，均为带电体与外场共有的“相互作用能（动）量”。

### 电荷系的相互作用能

现在考虑由一系列点电荷组成的体系的相互作用能。首先考虑相距为  $R$  的两个点电荷  $q_1$  和  $q_2$  的相互作用能

$$W_{\text{int},12} = q_1 \varphi_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 R}$$

其中  $\varphi_2$  是电荷  $q_2$  在电荷  $q_1$  处的势。同理我们也可以把  $W_{\text{int},12}$  表示为  $q_2 \varphi_1$ ，其中  $\varphi_2$  为电荷  $q_1$  在电荷  $q_2$  处产生的势，所以相互作用能可以写为

$$W_{\text{int},12} = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_2 + q_2 \varphi_1)$$

因此，将上式推广到  $n$  个电荷组成的体系，相互作用能可表示为

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \phi_{\alpha} \quad (3.3.11)$$

其中  $\phi_{\alpha}$  为除电荷  $q_{\alpha}$  之外所有其余电荷在电荷  $q_{\alpha}$  处的势之和

**注意此处 (3.3.13) 的形式虽然与  $W$  的形式很类似，但  $\phi_{\alpha}$  的含义与总能中  $\varphi_{\alpha}$  的含义不同——前者刨去了自己对自己的贡献，也就是能量中的固有能。相互作用能可正可负，但总能量严格为正。**

## 习题

P. 84, 3.3, 3.4, 3.6

## 数值计算 Project

假设半径为  $R$  的金属球排成一个晶格常数为  $a$  的 2 维三角晶格，计算中心一个金属球对其它金属球的电容系数。你可以利用 COMSOL 计算不同的  $\{Q_i\}$  对应的  $\{\phi_i\}$ ，或者相反，这样就可以得到电容系数。