第六讲

上次课

- $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[W_m+\int u\,d\tau\right]=-\oint \vec{S}_p\cdot d\vec{s}$ --- 能量守恒及转化
- $\vec{S}_P(\vec{r},t)=\dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ --- 能流密度；$u(\vec{r},t)=\dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\dfrac{1}{\mu_0}B^2\right)$ --- 能量密度；
- $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\vec{G}_m+\int \vec{g}\,d\tau\right]=-\oint d\vec{s}\cdot\vec{T}$ --- 动量守恒及转化
- $\vec{g}=\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}=\dfrac{1}{c^2}\vec{S}_P$ --- 动量密度，注意与能流、磁场的关系；

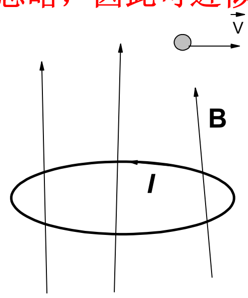
$$\overleftrightarrow{T}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\overleftrightarrow{I}-\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}$$ - 动量流密度

[例 3] 质量为m，带电为q的粒子在稳定磁场中运动，试求带电粒子在磁场中的总动量。

解：电荷在磁场中运动时，不仅自己携带机械动量，而且会在空间产生电磁动量。后者是由电荷产生的电场与空间原有的磁场相互作用而产生的。这些电磁动量是电荷与磁场共有的，但通常会被算到电荷的总动量里。电磁场的动量为：

$$\vec{G}_{e,m}=\int_V\varepsilon_0\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)d\tau'=\int_V\varepsilon_0\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)d\tau' \qquad (2.2.11)$$

当电荷的运动速度远远小于光速时，其产生的磁场可以忽略，因此可近似认为电荷只产生电场，而该电场可近似为静电场。因此，



$$\nabla\times\vec{E}=0,\quad \nabla\cdot\vec{E}=q\delta(\vec{r}-\vec{v}t)/\varepsilon_0\text{。}$$

基于这一假设，空间的磁场完全由外磁场贡献，因此

$$\nabla\cdot\vec{A}=0 \quad \text{（稳定磁场的要求）。}$$

我们试图将（2.2.11）化成全微分的形式。

类比公式$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a})-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$，可将积分元展开为：

$$\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla_A\left(\vec{A}\cdot\vec{E}\right)-\left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{A} \qquad (2.2.11\text{A})$$

其中∇_A意味着微分算符只作用在场量$\vec{A}$上。上式仍然不是全微分，特别是∇_A无从处理。将上式中$\vec{A}$与$\vec{E}$互换，可得

$$\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\nabla_E\left(\vec{A}\cdot\vec{E}\right)-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{E} \qquad (2.2.11\text{B})$$

将（2.2.11B）中的∇_E项与（2.2.11A）∇_A项相加即可得完整的∇项。同时，本

问题中$\nabla\times\vec{E}=0$，因此将（2.2.11B）式加入（2.2.11A）式不影响后者的结果！故两式相加可得

$$\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{E}\right)-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{E}-\left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{A} \tag{2.2.12}$$

Tip：此式当然可以由查公式得到。但若如此，多了几分神秘，少了几分物理，而且在做之前你怎么知道要用这个公式？我不主张总是背公式，万物都有其道理，知道了方向就不难推出。

利用矢量运算恒等式$\nabla\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{a}\right)\vec{b}+\left(\vec{a}\cdot\nabla\right)\vec{b}$将（2.2.12）式配分成全微分，

$$\begin{aligned}\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)&=\nabla\cdot\left((\vec{A}\cdot\vec{E})\vec{I}\right)-\nabla\cdot\left(\vec{A}\vec{E}+\vec{E}\vec{A}\right)+\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\vec{E}+\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{A}\\&=\nabla\cdot\left[(\vec{A}\cdot\vec{E})\vec{I}-\vec{A}\vec{E}-\vec{E}\vec{A}\right]+\left(q/\varepsilon_0\right)\delta(\vec{r}-\vec{v}t)\vec{A}\end{aligned}$$

把它代入（2.2.12）式后，注意到第一项对空间的积分可以转化成在中括号里面的场在无穷远处表面的面积分，实际三维问题中电流总是分布有限区域内，因此被积函数在无限远处以r^{-3}形式趋于零，因此积分为 0。我们得到

$$\vec{G}_{e,m}=\int q\vec{A}\delta\left(\vec{r}-\vec{v}t\right)d\tau'=q\vec{A}(\vec{r}=\vec{v}t) \tag{2.2.13}$$

由此我们可以得到带电的运动粒子在外磁场中的总动量为

$$\boxed{\vec{p}=m\vec{v}+q\vec{A}} \tag{2.2.14}$$

式中$m\vec{v}$是带电粒子的机械动量，而$q\vec{A}$为电荷与外磁场共同拥有的“附加”电磁动量，$\vec{p}$则是总动量，又叫做正则动量。(2.2.14)式是量子力学中极为重要的关系式。几点讨论：

1） *这个附加的动量是电荷与磁场的“相互作用”引起的。没有磁场或是没有电荷都没有这一项贡献；单独只有电荷或是磁场单独存在时也没有这一动量；*
2） *这个结果是在低速情况下得到的；*
3） *如何理解这个相互作用引起的“附加动量”？可以考虑建立这个状态的过程，一开始电荷处于无穷远处，没有电磁场动量；当电荷靠近时，线圈与运动电荷之间有相互作用力，要达到最终的状态，必须有外力输入。因此，则在此过程中一直有外力对体系（线圈+电荷）输入动量（冲量），这部分冲量被储存在体系中作为电荷的附加动量。也可以考虑将产生磁场的线圈中的电流准静地从零开始增大到所需的数值，在这个过程中计算外界对体系所输入的冲量。你能否证明这个过程中输入的冲量就是 qA?*
4） *$\vec{p}$是总动量，对粒子的运动量子化后其对应的算符一定是$\vec{p}\to -i\hbar\nabla$，因为量子世界中所有的动量一定是以相位的梯度形式显示的。进而考虑粒子的能量：由于磁场不对带电粒子做功，因此带电粒子的总动能（哈密度量）是$H=\dfrac{1}{2m}\left(m\left|\vec{v}\right|\right)^2=\dfrac{1}{2m}\left(\vec{p}-q\vec{A}\right)^2$。*

量子化后写成哈密度量的算符形式为$\hat{H}=\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla-q\vec{A}\right)^2$。此公式在量子力学中极其重要。

§2.5 介质中的电磁能量和动量守恒定律

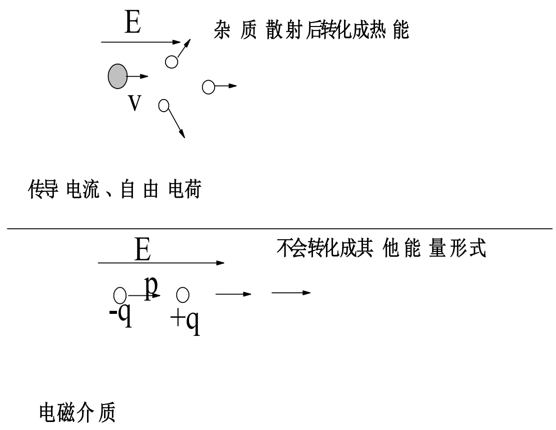
1．电磁能量

在真空中，电磁场只对传导电流做功，情况相对简单。在电磁介质中，除了传导（自由）电流外，电磁场会把介质极化或者磁化，从而产生极化电流（荷）和磁化电流，这里情况就会变得比较复杂。*前面我们已经指出，电磁场“分不清”什么是自由电荷/电流，什么是束缚电荷/电流，只要是电荷/电流，电磁场就会对其施加力的作用从而做功。因此，在电磁介质中，电磁场对极化电流和磁化电流同时做功。*故，电磁场对$d\tau$体积内的电荷/电流在单位时间内所作的总功为

$$\frac{dR}{dt}=\int(\vec{j}_f+\vec{j}_p+\vec{j}_m)\cdot\vec{E}d\tau \qquad (2.5.1)$$

在计算之前，我们仔细分析一下这几项的物理意义。

（1）$\vec{j}_f\cdot\vec{E}$对应的是电磁场对自由电荷做的功，这部分功转化成电荷运动的机械动能，通常（超导体除外）这些机械动能与外部环境发生交换（通过杂质的散射），变成了环境的热能。这就是为什么在稳恒电流的条件下，电场虽不断对电荷做功，但电荷运动的机械能却不发生改变（表现为电流稳恒不变）的原因 - 那些功被环境以热能的形式带走。*因此这部分功是可以转化成其他的能量形式，而且通常这种转化是不可逆的。*



（2）$(\vec{j}_p+\vec{j}_m)\cdot\vec{E}$ 对应的是电磁场对电磁介质中的束缚电荷（流）所做的功，这部分功转化成介质中电荷拉开后的*弹性或者化学*势能，以及这些电荷跟随电场运动时而具有的机械动能。*但这部分能量被束缚在电磁介质中，不会被环境以热能的形式拿走。*而当电磁场离开介质时，*这些能量又会以电磁辐射的形式重新返还给电磁场*。本质上讲，这部分能量虽然不是电磁场的能量，但它们却是电磁场将介质极磁化后储存到电磁介质中的能量，*它们依附于电磁场而存在*。

搞清楚这两类功的不同之后，我们发现将所有电荷电流看成一体与场交换能量的看法并不太合理，更物理的看法是将束缚电荷/流与电磁场看为一体，而只把传导电流分开考虑。这样一来，我们可以将第 2 项对应的能量（极（磁）化能）与电磁场本身的能量合并，统称为电磁场在介质中的能量。此时，我们只需要考虑电磁场对传导（自由）电流做的功，而无需考虑电磁场对电磁介质的做功。*因为后者是内力做功，不改变电磁场和电磁介质所具有的总能；但前者属于外力做功，必然会改变电磁场和电磁介质的整体能量*。具体来说，我们计算场对 $d\tau$ 体积内的自由电荷/电流在单位时间内所作的总功：

$$\frac{dR_f}{dt} = \int \vec{j}_f \cdot \vec{E} d\tau \qquad (2.5.2)$$

利用 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 将自由电流消去，可得

$$\vec{j}_f \cdot \vec{E} = (\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \vec{E} \qquad (2.5.3)$$

将空间部分配分成全微分的形式，得

$$\begin{aligned} \left(\nabla \times \vec{H}\right) \cdot \vec{E} &= \nabla \cdot \left(\vec{H} \times \vec{E}\right) + \vec{H} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) \\ &= \nabla \cdot \left(\vec{H} \times \vec{E}\right) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \qquad (2.5.4)$$

这里我们用到了 Faraday 定律 $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ 。对线性无色散介质，有本构关系：

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \qquad (2.5.5)$$

则（2.5.3）式可以改写成

$$\vec{j}_f \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{S}_p - \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (2.5.6)$$

其中能流密度及能量密度分别定义为

$$\vec{S}_P = (\vec{E} \times \vec{H}), \quad u = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) \qquad (2.5.7)$$

根据（2.5.6）式，我们写出介质中的能量转化方程：

$$\boxed{\frac{\partial W^{'}}{\partial t} = \int_V \vec{j}_f \cdot \vec{E} d\tau = -\oint \vec{S}_p \cdot d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V u d\tau} \qquad (2.5.8)$$

其中 $\int_V u d\tau$ 为体积内的电磁场能量以及电磁介质中储存的能量，$W^{'}$ 为体积内去除上述能量后的其他的能量形式（即：*传导电荷的机械能，或者传导电流进一步与环境交换出去的热能*），而 $\vec{S}_p$ 为能流密度，物理意义是电磁场和介质拥有的能量（场能+极磁化能）在单位时间内流过单位面积的量。显然真空中的能量密度和能流密度可以认为是(2.5.7)式的特例。

思考:

1）能流密度$\vec{S}_P$与真空中的不同，这是因为其中包含了介质极磁化后的电荷/流随电磁场的运动而贡献的能量流动，然而仔细计算后发现额外的贡献为$\vec{S}_p - \vec{S}_0 = \vec{E}\times\vec{H} - \vec{E}\times\vec{B}/\mu_0 = -\vec{E}\times\vec{M}$。这样处理对不对？为什么只有磁化的贡献？

2）你也许有兴趣分清楚介质中的极磁化的能量到底为多少。不假思索的计算将给出：

$$u-u_0=\frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H}\right)-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{B}/\mu_0\right)=\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}-\frac{1}{2}\vec{M}\cdot\vec{B}$$

*这个结果是否合理？电磁部分不对称的原因？1/2 的来源？（正确的处理请参照 **Jackson P165-169，Landau P48** ）*

2．电磁动量

利用同样的方法可以讨论介质中的电磁动量。介质里的总电荷分布为$\rho_f+\rho_p$，总电流分布为$\vec{j}_f+\vec{j}_p+\vec{j}_m$，因此电磁场对带电体及介质的作用力也就是对上述电荷和电流的作用力，其力密度为

$$\vec{f}_t=(\rho_f+\rho_p)\vec{E}+(\vec{j}_f+\vec{j}_p+\vec{j}_m)\times\vec{B}$$

当电荷、电流取为总电荷、总电流时，Maxwell 方程与真空中的一样。因此，与上节中推导一样，我们得到

$$\vec{f}_t=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}^*-\frac{\partial\vec{g}^*}{\partial t} \tag{2.5.9}$$

其中

$$\overleftrightarrow{T}^*=\left[\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)\overleftrightarrow{I}-\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}\right] \tag{2.5.10}$$
$$\vec{g}^*=\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$$

(2.5.9)式及其$\overleftrightarrow{T}^*$和$\vec{g}^*$的表达式虽然和真空中形式一样，**但其中的$\vec{E}$和$\vec{B}$电磁介质中的总场，即不仅含有自由电荷、电流激发的“源”场，还包含了$\rho_p,\vec{j}_p,\vec{j}_m$的全部贡献**。

若把力密度$\vec{f}$分成两部分：

$$\vec{f}_t=\vec{f}+\vec{f}',$$

其中
$$\vec{f}=\rho_f\vec{E}+\vec{j}_f\times\vec{B},\qquad (2.5.11)$$
$$\vec{f}'=\rho_p\vec{E}+(\vec{j}_p+\vec{j}_m)\times\vec{B}$$

显然 $\vec{f}$ 代表场对带自由电荷的带电体（导体）的作用力，$\vec{f}'$ 代表场对介质的作用力。当我们把电磁场与附着于其而存在的介质看成一体时，$\vec{f}'$ 属于内力，它只是帮助把一些电磁动量存储在介质中。**而 $\vec{f}$ 则是纯粹的电磁场对传导电荷（带电体）的作用力，其作用是改变这些物体的动量！**是对线性无色散介质，我们可以通过类似上一节的计算得到

$$\vec{f}=\rho_f\vec{E}+\vec{j}_f\times\vec{B}=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}'-\frac{\partial\vec{g}'}{\partial t}\qquad (2.5.12)$$

其中

$$\overleftrightarrow{T}'=\left[\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H})\overleftrightarrow{I}-\vec{D}\vec{E}-\vec{B}\vec{H}\right]\qquad (2.5.13)$$
$$\vec{g}'=\vec{D}\times\vec{B}$$

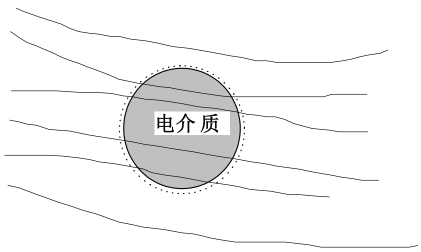
这样的定义下，我们其实把电磁介质和电磁场看为一个整体。电磁动量密度 $\vec{g}'=\vec{D}\times\vec{B}$ 中不仅包含了电磁场本身携带的动量，而且包含了束缚于电磁介质体上的机械动量（**你能否仔细分析这种动量的表现形式？**）。后者尽管不是电磁场的动量，但因为它们并不能单独存在，只能束缚于电磁场存在，因此我们把它们也可以归为电磁动量里。

分别讨论一下两种表达式的适用范围

电磁动量理论除了定义了电磁场的动量，最大的应用是计算电磁（光）力。理解了两个表达式的定义不同之后，我们很容易理解它们分别在什么情形下适用：

1) （2.5.9）式描述的是场对一块体积内的*所有的电荷/电流*的作用力。若计算*某一个电磁介质物体（可以是导体+介质）在真空中*的某一电磁场中，此时，应该使用（2.5.9）式来计算介质物体受到的电磁场的力

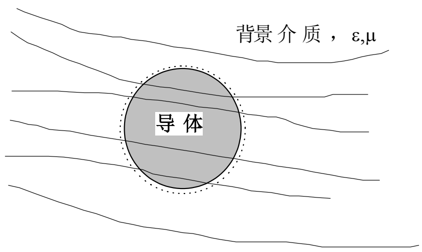
$$\vec{F}=-\oint d\vec{S}\cdot\overleftrightarrow{T}^*+\frac{d}{dt}\int\vec{g}^*d\tau.\qquad (2.5.14)$$



因为高斯面内包含的是所有的电荷/电流。静态或是电磁场随时间简谐变化时，第二项对时间的平均值为 0，故，实际有效力为

$$\langle \vec{F} \rangle = -\oint d\vec{S} \cdot \left\langle \overleftrightarrow{T}^{*} \right\rangle \tag{2.5.15}$$

2）（2.5.13）式适用于计算电磁场对处于介质环境中的金属导体物体的作用力。比如在血液中放置一个金属物体，外加电磁场来控制其运动。此时，应当利用



$$\langle \vec{F} \rangle = -\oint d\vec{S} \cdot \left\langle \overleftrightarrow{T}' \right\rangle \tag{2.5.16}$$

计算其受力。因为我们只需要对高斯面内的“自由电荷”计算受力，而束缚在导体和介质环境界面上的极化电荷并不隶属于金属球，不应计算其受力。若利用（2.5.15）计算其受力的话，则同时计算了处于导体/介质表面处的介质上的极、磁化电荷的受力，而后者并不能传递到导体物体的上面。

Tips:

1）这些公式形式千变万化，但搞清楚你的问题后，其实并不难分辨应当应用哪一个。

2）（2.5.9）针对的是电磁场对电荷/电流的作用力，在真空中计算完全没问题。然而计算介质中的电磁场对束缚电荷的作用力时，无论“场”还是电荷密度本身其实都是一个宏观平均值 $\vec{E}_{mac} = \langle \vec{e}_{mic} \rangle, \rho_{mac} = \langle \rho_{mic} \rangle$。*实际的力的平均值却是：* $\vec{f}_{mac} = \langle \vec{e}_{mic} \cdot \rho_{mic} \rangle$，*有些情况下其不等于* $\langle \vec{e}_{mic} \rangle \cdot \langle \rho_{mic} \rangle = \vec{E}_{mac} \cdot \rho_{mac}$。*好在，这两者的差* $\vec{f}_{mac} - \vec{E}_{mac} \cdot \rho_{mac}$ *对应的是内部应力，是“内力”，对一个宏观物体的总和为0. 因此用（2.5.15）式计算**总力**的时候没有问题，但计算介质体内的局域力密度却并不正确。这其实是一个目前学界尚未完全解决的前沿问题。参考 Landau 书以及文献 PRB 91， 235439 （2015）。*

3）对电磁动量的不同定义也有争论，核心问题是介质内部的力平衡要考虑形变带来的张力。总之，连续介质中的许多问题远比真空中的电磁理论来得复杂和有趣。

第三章 静电学 I – 导体静电学

第一二两章给出了电磁场的基本规律及守恒定律。从本章开始，我们将由简入深介绍这些电磁规律在不同的具体情况下的应用。第三、四两章将介绍最简单的情况 – 静电学。我们将分成两个部分来介绍静电学，本章主要研究与导体相关的静电学，而下一章主要关注与介质相关的静电问题。但是这种划分并不是严格的，其实两类问题满足相同的方程，只不过解决问题的方法和侧重点有所不同而已。

§ 3.1 静电问题

1. 静电基本方程

静电现象（eletrostatics）研究的是电磁学中这样的一类问题：

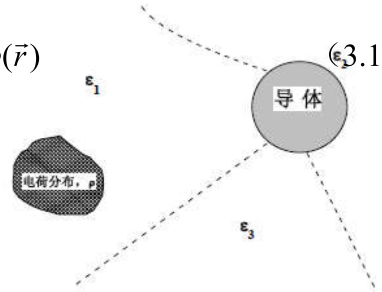
$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{物理量})=0 \quad \text{和} \quad \vec{j}=0$$

即所有物理量都不随时间改变（指“静”），且电荷静止不动（指“电”）。把静电条件代入麦克斯韦方程中，显然空间不会激发磁场（即没有电流，也没有变化电场），故只有静电场，满足

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho \\ \nabla\times\vec{E}=0\end{cases} \tag{3.1.1}$$

根据 $\nabla\times\vec{E}=0$，可以引入标势 $\vec{E}=-\nabla\varphi$，根据本构关系 $\vec{D}(\vec{r})=\varepsilon(\vec{r})\vec{E}$ 并进一步带入（3.1.1）中第一式，有

$$\nabla\cdot\left(\varepsilon(\vec{r})\nabla\varphi(\vec{r})\right)=-\rho(\vec{r}) \tag{3.1.2}$$



一个标准的静电问题如右下图所示。

在一块均匀介质的内部有 $\varepsilon(\vec{r})=\varepsilon$，

则上式转化成标准的 Poisson 方程

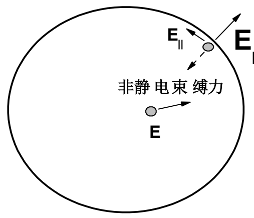
$$\nabla^2\varphi(\vec{r})=-\rho(\vec{r})/\varepsilon \tag{3.1.3}$$

在不同物质交界面上场及势要满足相应的边界条件。本章主要研究不用求解 Poisson 方程的前提下，有关导体的静电状态我们到底能知道多少。要解微分方程，必须知道边界条件。下面我们将讲述导体与介质的交界面上的边界条件。

2．静电条件下导体的边界条件

所谓导体即是能导电的介质，当它内部存在电场时就会引起传导电流。在导体中有关系式 $\vec{j}=\sigma_c\vec{E}$，可见在静电学(即 $\vec{j}=0$)的前提下，**导体内的电场强度必须处处为零**，否则必定引起电流。根据 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=0$ 的关系知 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho=0$，**即导体内部不可能有电荷分布**。所以对导体来讲，**电荷只能分布在表面上**。进一步分析导体表面的电荷是如何分布的：若导体表面上切向电场不为 0，则表面电荷必然在电场的作用下在表面上运动，引起表面电流，这与静电条件不符。因此，**静电条件下导体表面的电场的切向分量为 0，亦即，导体表面的标势处处相等**。导体表面电场的**法向分量可以不为 0**，这与切向电场很不相同 --- 导体电荷在表面处受到非静电来源的束缚能-即“功函数”，自由电荷受到垂直电场的作用不会飞出导体。**根据 Gauss 定理，垂直电场与此处的表面电荷面密度成正比**（$D_\perp=\sigma\Rightarrow E_\perp=\sigma/\varepsilon$）。总结下来，与导体相关的电场行为满足

$$\begin{cases}\vec{E}_{in}=0,\rho_{in}=0 \\ \vec{E}_{\parallel}^{surface}=0 \\ E_{\perp}^{surface}=\sigma/\varepsilon,\ \text{both are unknowns!!!}\end{cases} \tag{3.1.4}$$



需要强调指出的是：导体表面上的电荷分布和表面垂直电场均是未知量！进一步将上面关于场的边界条件转化成对势的边界条件，有

$$
\begin{cases}
\varphi\big|_{\text{Boudary}} = \text{Constant}; \\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\text{Boudary}} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon}, \quad Q = -\varepsilon\oint\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}dS.
\end{cases}
\tag{3.1.5}
$$

其中 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ 是指 φ 沿着表面法线方向的微分。所有这些条件都是因为导体内部有自由电荷这个性质决定的！

原则上，导体相关的静电问题就是在边界条件（3.1.5）下求解（3.1.3）。这里可能有两类问题，

（1） 等势问题 – 假设考虑的导体与外界大的带电导体相连并达到静电平衡，$\varphi = const.$ （注意：此时导体上的总电荷不能预先设定，是需要求解的）

（2） 孤立导体问题 – 假设导体孤立，则 Q 已知，但此时 φ 不能预先设定，是需要根据已知情况求解的。

某种意义上讲，Q,φ 是一对共轭量，不可能同时预先设定。

习题

P．59， 2.2， 2.4，2.5

选作

（1） 推导（**2.5.13**）式。

（2） 小 **Project:** 利用 **COMSOL** 软件计算一个半径为 **R** 的介质球处于一个非均匀电磁场中的受力。非均匀电磁场可以是一个点电荷产生的场，也可以是有限大的电容器产生的电场，甚至可以是一束高斯波束。

（3） 考虑两个思考题，翻阅文献，将你的理解总结成一个 **Note**。

（4） （**Project**）参考朗道《连续介质电动力学》**$16**，推导出介质内部的应力表达式，与 **Maxwell** 张量的形式做比较，仔细讨论它们之前的异同及物理意义。

（5） 类似电容器充电的过程，选择一个特定的具有电磁动量的体系，讨论起动量状态如何建立起来的，动量是如何通过动量流密度一点点输入体系的？