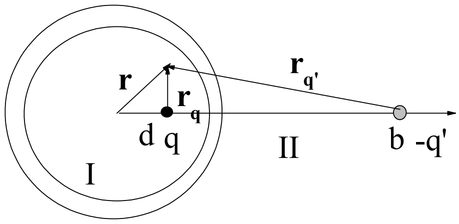
第十讲

上次课：

- 唯一性定理 – 给定静电问题后，边条唯一确定解的形式（前提：D 与 E 的关系为单调）
- 镜像法 – 利用虚拟电荷代替界面处的面电荷，使得试解满足边条；唯一性定理保证解的正确性



球壳内放置一个点电荷：I 区的电势，$\varphi_I = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{q}{r_d} - \dfrac{q'}{r_b}\right] + V_0$

其满足所有的边界条件同时满足 Poisson 方程，故唯一性定理保证其正确性。下面考虑 II 区中的电势。这个区域内无源，电势应当是某些处于其它区域的像电荷产生，考虑修好后的边条（1）：$\varphi_I = \varphi_{II} = V_0$，$r = R$，显然"像电荷"为处于原点（I 区）的电量为$4\pi\varepsilon_0 V_0 R$的点电荷。因此，II 区电势：

$$\varphi_{II} = \frac{V_0 R}{r} \qquad (4.3.23)$$

（4.3.22）-（4.3.23）就是问题的解，满足所有的方程以及边条。问题虽然得解，但物理图像不清楚：***比如此时导体球壳上带电荷为多少？为什么 I 区的电场与外部条件无关？为什么 II 区的电场与 I 区中的电荷放置也毫无关系？***要搞清楚这些问题，必须意识到事实上导体球壳不是无限薄的，而是一个具有有限厚度（尽管很薄）的一个金属壳层，其具有内外两个界面。静电平衡时电荷分布在两个界面上，球壳内部的电荷密度为 0。内表面上的电荷密度可以容易由

$$\sigma_{in} = \varepsilon_0 \vec{n}\cdot\vec{E}_{in}\Big|_{r=R} = \varepsilon_0\frac{\partial\varphi_I}{\partial r} = \frac{-q}{4\pi R^2}\frac{1-(d/R)^2}{\left(1+(d/R)^2-2(d/R)\cos\theta\right)^{3/2}} = \frac{-q}{4\pi R^2}\tilde{F}(\theta) \qquad (4.3.22)$$

求出，其总电荷可以由上式积分求出。但更容易地，可由 Gauss 定理求出：

$$0 = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = q_{in} + q \quad \Rightarrow \quad q_{in} = -q \qquad (4.3.23)$$

其中，（4.3.23）中的积分面取在导体球壳两个界面包裹的中间区域。外表面上电荷均匀分布，总电量为

$$q_{out} = \oint \sigma_{out} \cdot dS = 4\pi\varepsilon_0 R V_0 \qquad (4.3.24)$$

因此物理图像是：

（1）球内的电荷在球壳内表面感应出等量异号的电荷即达到平衡，再外加任何电荷都不会跑到内表面而只会呆在外表面。

（2）这些均匀分布在外表面的电荷起的作用不过是改变整个球壳的电势，但对内电场没有丝毫影响。

*（3）σ_{in} 对应于 **II** 区处于 **b** 处的"像电荷"（但与之前的镜像法例题不同，此处感应电荷总量不等于虚拟感应电荷！），而 σ_{out} 对应于贡献 $\varphi = V_0$ 的像电荷（对应于一个球对称的势的"像电荷"也应当对称分布）。因为内部金属薄层的存在，球壳的两个界面变成完全独立的，因此其外两个世界也完全隔绝！*

******* 镜像法的拓展 *******

由以上讨论可以得知，镜像法特别适用于存在"边界面电荷"以及这些面点荷呈现一定对称分布的情况 --- 因为如若不然，则非常难以使用有限数目的镜像电荷来替代真实电荷。除了以上金属表面，其实均匀电介质表面也具有上述特征。在均匀介质内部，极化电荷只存在与自由源电荷 $\rho_f(\vec{r})$ 不为 0 的地方，在没有自由源电荷的地方是没有极化电荷的。证明如下：

极化电荷密度由 $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$ 给出。在均匀介质体内，$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$，因此，$\rho_P = -\varepsilon_0 \chi \nabla \cdot \vec{E}$。而另一方面，我们有 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$，同时，在均匀介质体内有 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$，故有 $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_f / \varepsilon$。因此，最终我们得到

$$\rho_P = \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\varepsilon_0 \chi}{\varepsilon} \rho_f$$

因此，在均匀介质体内，无论其形状，无论 $\rho_f(\vec{r})$ 如何分布，ρ_P 紧紧依附着 $\rho_f(\vec{r})$ 的存在而存在，没有 $\rho_f(\vec{r})$ 的地方就没有 ρ_P！但这个结论在介质非均匀的时候不再成立，因此，在两个均匀介质的分界面上，或者非均匀介质体内，都有可能有脱离 $\rho_f(\vec{r})$ 而存在极化电荷！

因此，镜像法的精神完全可以拓展到边界为两个均匀介质表面的问题。此时，极化电荷呈现面分布，与金属中的表面电荷类似。这是与金属的区别有 2：

1）介质分界面上的边条是两个，而不是一个

2）介质中的电势分布不为 0.

多了个条件，但也多了个未知量，因此问题仍然可以通过镜像法求解！

****

§ 4.4 本征函数展开法

之前介绍的镜像法虽然看上去很精致，但镜像电荷的设置非常依赖于物理直觉和经验，因此该方法并不是一个一般普适的方法。本节将介绍一种求解静电问题电势分布的普适方法，这种方法可以推广到求解其他许多类似的问题（如电磁波的散射）。很多情况下，我们求解的空间中无源，但体系处在某一种外场的作用下，这种外场通常通过边界条件反映出来。此时求解空间中电势满足无源的拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\varphi = 0\,, \tag{4.4.1}$$

而电势在边界处（比如无限远处）满足特定的边界条件：

$$\varphi\big|_{boundary} = \varphi_0(\xi) \tag{4.4.2}$$

其中ξ是界面上的位置变量。

针对由（4.4.1）-（4.4.2）定义的物理问题，我们可以根据问题的边界形状及空间的对称性选取适当的坐标系，用分离变量法求解拉普拉斯方程（4.4.1）式的通解。假设我们得到了这组解$\{\varphi_n, n=1,2,...\}$，它们通常是<u>正交完备</u>的：$\langle\varphi_n\varphi_m\rangle = \delta_{n,m}$，其中内积$\langle\varphi_n\varphi_m\rangle$如何定义需根据问题本身确定。根据<u>完备性</u>，我们一定可以将我们试图求解的φ展开成这组本征态的线性叠加：

$$\varphi = \sum C_n\varphi_n\,. \tag{4.4.3}$$

（4.4.2）一定是（4.4.1）的解，但不一定满足边界条件（4.4.2）。<u>必须根据边界条件及本征函数的正交性来确定展开系数</u>$\underline{C_n}$：

$$C_n = \langle\varphi_n|\varphi_0\rangle = \int\varphi_n(\xi)\varphi_0(\xi)d\xi \tag{4.4.4}$$

这样当我们将$\{C_n\}$全部唯一定下来之后，整个问题得解。*很多情况下，我们并不需要真正利用到（4.4.4）式求$\{C_n\}$，而是通过比对$\varphi_0(\xi)$中包含的相关本征波函数$\varphi_n(\xi)$的系数来确定C_n。这样做的逻辑基础是不同本征波函数之间正交，它们之间相互独立。*

下面总结一下不同坐标系下的本征函数及它们的正交性。 在解决实际问题时，我们应当根据其对称性选择合适的通解形式进行求解。

(1) 轴对称的球坐标系问题 （与变量ϕ无关）

对此类问题，Laplace 方程的本征解为$r^l P_l(\cos\theta)$， $r^{-(l+1)}P_l(\cos\theta)$。因此通解可以一般写成：

$$\varphi=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta) \qquad (4.4.5)$$

经向波函数r^l在 r=0 处收敛， $r^{-(l+1)}$在$r\to\infty$时收敛。$P_l(x)$为 Legendre 多项式，低阶的几项为

$$\begin{cases} P_0(x)=1 \\ P_1(x)=x \\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \\ \ldots \end{cases} \qquad (4.4.6)$$

本征函数之间满足如下正交关系

$$\int P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)d\cos\theta=\frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'} \qquad (4.4.7)$$

Tips: 如何求解球坐标下 Laplace 方程的通解？注意到 Laplace 方程在球坐标下可以写成

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}\varphi)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\varphi=0$$

利用分离变量法，将势函数写成$\varphi(r,\theta,\phi)=U(r)V(\theta)W(\phi)$带入方程分别求解，可得，$W\sim e^{im\phi},V\sim P_l^m(\cos\theta),U\sim(r^l,r^{-(l+1)})$。考虑体系具有旋转对称性，因此$m=0$，进一步$P_l^m\to P_l$。

（2）与 z 无关的柱对称问题

对此类问题，Laplace 方程的本征解为$\rho^{\pm n}(\sin(n\phi),\cos(n\phi))$， $\ln(\rho)$， 1。因此其通解为

$$\varphi = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n + B_n\rho^{-n})\cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\rho^n + D_n\rho^{-n})\sin(n\phi) \quad (4.4.8)$$

本征函数之间的正交性为

$$\begin{aligned} &\int \cos(n\phi)\sin(n\phi)d\phi = 0 \\ &\int \cos(n\phi)\cos(n'\phi)d\phi = \int \sin(n\phi)\sin(n'\phi)d\phi = 0, \quad n \neq n' \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Tips: 如何求解柱坐标下 Laplace 方程的通解？注意到 Laplace 方程在柱坐标下可以写成

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\varphi) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi = 0$$

利用分离变量法，将势函数写成 $\varphi(\rho,\phi,z) = U(\rho)V(\phi)W(z)$ 带入方程分别求解可得。

下面，我们通过几个实例来介绍这种方法。为增强信心，先考虑一个简单的情形

[例 4] 一半径为 R 的接地导体球置于一均匀外场 $\vec{E}_0$ 中，求空间场的分布。

解：如图所示，取 $\vec{E}_0$ 方向为 z 轴，这是一个绕 z 轴旋转对称的问题。球外空间没有电荷，电势在无穷远处趋向于均匀电场的电势。因此，电势满足

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 & \\ \varphi = 0, & r = R \quad (1) \\ \varphi \to -E_0 r\cos\theta, & r \to \infty \quad (2) \end{cases} \quad (4.4.9)$$

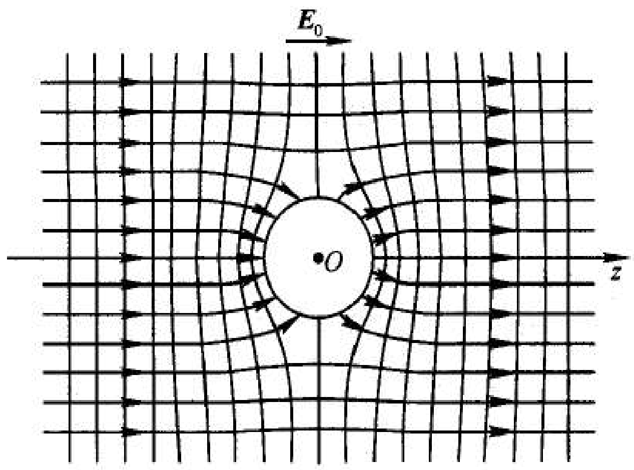


图 4.5

这个问题的通解即为：

$$\varphi=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) \qquad (4.4.10)$$

通解中有无穷多常数，虽然看上去很难确定这些常数，其实仔细分析之后发现这些常数均可由问题的边界条件确定。将试解带入边条（2），发现

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta)\xrightarrow{r\to\infty}-E_0 r\cos\theta \qquad (4.4.11)$$

根据 $P_l(\cos\theta)$ 函数的相互正交性，我们可以分别比较（4.4.11）式左右两边中不同 $P_l(\cos\theta)$ 函数的系数，使得它们相等。因此可得

$$A_1=-E_0,\qquad A_l=0,\quad l=0,2,3,\ldots \qquad (4.4.12)$$

再将试解带入边条（1），得到

$$\left(-E_0R+\frac{B_1}{R^2}\right)\cos\theta+\sum_{l\neq1}^{\infty}\frac{B_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)=0 \qquad (4.4.13)$$

再次利用 $P_l(\cos\theta)$ 函数的相互正交性，不同 $P_l(\cos\theta)$ 的参数应当分别为 0，故

$$B_1=E_0R^3,\qquad B_l=0,\quad l=0,2,3,\ldots \qquad (4.4.14)$$

将（4.4.12）与（4.4.14）代入试解，我们得到最终的结果

$$\varphi=-E_0r\cos\theta+\frac{E_0R^3}{r^2}\cos\theta \qquad (4.4.15)$$

至此，我们已完成了这个问题的求解。注意到 r^{-2} 依赖关系是**偶极子**的电势的特征，可将（4.4.15）改为

$$\varphi=-\vec{E}_0\cdot\vec{r}+\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (4.4.16)$$

其中

$$\vec{p}=4\pi\varepsilon_0R^3\vec{E}_0\text{。} \qquad (4.4.17)$$

我们看到：球外空间中，除了外加的均匀电场的贡献外，还有一个偶极子的电场。由于导体球在电场的作用下正电荷推积在一侧，而负电荷推积在电场的另一侧，因此对外面的作用等效为一个偶极子，其偶极矩正比于外加电场以及球的体积！

讨论：

（1） 我们可以认为偶极子的场就是这个体系对外场的散射场。外场是均匀电场，其只具有$l=1$的项（$-E_0 r\cos\theta$），而同时体系具有良好的对称性，不会将具有 l 角动量的波散射到l'项，因此体系的响应也就只有$l=1$项，所以只产生偶极子。若外场不是均匀场，而是具有高 l 的项，则体系的响应也一定有高 l 项。这恰恰是唯一性定理的一个体现 --- 边条唯一确定解的形式。这里边条的对称性决定了解的对称性。

（2） 我们之前研究导体球外有点电荷的问题时，曾经考虑过当点电荷离导体球非常远的情形。那时我们的结论是导体球在外场下的电荷分布是形成了一个偶极子。其实当电荷离目标很远时，其电场就是近似为均匀场！将其与现在我们考虑的情况建立一个联系将是非常有意思的事情。

【思考】

为什么这个偶极子的不多不少正好是$\vec{p}=4\pi\varepsilon_0 R^3\vec{E}_0$？这里有什么物理的原因？

注：人们会问边界条件$\varphi\to -E_0 r\cos\theta, \quad r\to\infty \quad (2)$ 为什么不能加上一个常数电势φ_0？若加上的话，这个常数是什么意思？数学上讲，加一个常数电势φ_0后的解其实就是让球上感应出一些净电荷（参考书上的解法），那问题来了：如何确定这个φ_0？其实，无限大空间均匀电场的问题从来不是一个“well-defined” 的问题。因为我们通常取无限远处为电势 0 点，但无限区域中的均匀电场要求无限远处有电荷以及电势不是 0。真正在实验上实现均匀场只能在有限空间，比如用平板电容器，此时问题是 Well-defined，但求解这样一个问题就比现在我们考虑的复杂许多，因为极板会引入无穷多镜像电荷…。因此我们现在考虑的是真实情况的一种理想化，是实验上不能实现的。在我们今后的学习中，我们还要考虑这种理想情形，因为这类问题可以解析求解且给我们许多 Insight。 需要说明的是，此时我们总是假设φ_0为 0，相当于我们选择了坐标原点为电势 0 点。

进一步做一个更难一些的例子。

[例 5] 半径为R、介电常数为ε_2的均匀介质球，被置于均匀外场$\vec{E}_0$中，球外空间充满均匀介电常数为ε_1的介质。求空间电势的分布。

解： 如图 4.6，取$\vec{E}_0$方向为极轴z方向。与上一道例题不同的是，此处介质球内可以存在电场。 为此我们把空间分为球内球外两个区域（I、II），电势分别为φ_1，φ_2，则它们满足的方程：

$$\nabla^2\varphi_1=0,\quad \nabla^2\varphi_2=0 \qquad (4.4.18)$$

相应的边条为

$$\begin{cases}\varphi_1\to -E_0 r\cos\theta, \quad r\to\infty & (1)\\ \varphi_1=\varphi_2, \quad r=R & (2)\\ \varepsilon_1\left.\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=R}=\varepsilon_2\left.\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=R} & (3)\\ \varphi_2\text{有限}, \quad r=0 & (4)\end{cases}$$

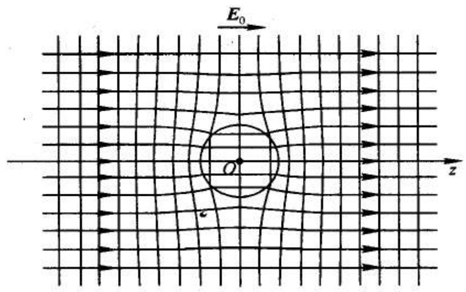


图 4.6

本问题为三维轴对称球坐标系下的问题，因此可选取合适的本征函数将φ_1,φ_2展开。显然应当选择（4.4.5），即

$$\begin{aligned}\varphi_1&=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)\\ \varphi_2&=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l' r^l+B_l' r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)\end{aligned} \qquad (4.4.19)$$

其中$\{A_l,A_l',B_l,B_l'\}$为一系列展开系数，需要由边界条件确定。根据我们上一道例题经验 – 均匀电场的边界条件（1）只包含 l=1 项的贡献，*而球这种良好的几何形状保证了它不会将 l=1 的模式散射到其它 l 的模式上去*。因此物理上思考，（4.4.19）中只有$l=1$项的系数非 0！故有

$$\begin{aligned}\varphi_1&=\left(A_1 r+B_1 r^{-2}\right)\cos\theta\\ \varphi_2&=\left(A_1' r+B_1' r^{-2}\right)\cos\theta\end{aligned} \qquad (4.4.19')$$

****

下面我们利用本征函数的正交性对上述论断做严格证明。

对 I 区来讲，边条（1）决定了除了 A_1 外所有的{ A_l } 均为 0。因 $P_1(\cos\theta)=\cos\theta$ ，易知：

$$A_1=-E_0;\qquad A_l=0,\quad l\neq 1 \qquad (4.4.20)$$

对 II 区来讲，边条（4）决定了

$$B_l'=0,\quad l=0,1,\ldots\infty \qquad (4.4.21)$$

下面考虑边条（2）。代入可知，

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_lR^l+B_lR^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l'R^l+B_l'R^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)\\&\varepsilon_1\sum_{l=0}^{\infty}\left[lA_lR^{l-1}-(l+1)B_lR^{-(l+2)}\right]P_l(\cos\theta)=\varepsilon_2\sum_{l=0}^{\infty}\left[lA_l'R^{l-1}-(l+1)B_l'R^{-(l+2)}\right]P_l(\cos\theta)\end{aligned} \qquad (4.4.22)$$

根据本征函数的正交性，上面 2 式中每个 l 项的系数必须分别相等，即

$$\begin{aligned}&A_lR^l+B_lR^{-(l+1)}=A_l'R^l+B_l'R^{-(l+1)}\\&\varepsilon_1\left[lA_lR^{l-1}-(l+1)B_lR^{-(l+2)}\right]=\varepsilon_2\left[lA_l'R^{l-1}-(l+1)B_l'R^{-(l+2)}\right]\end{aligned} \qquad (4.4.23)$$

对所有 $l\neq 1$ 的项，我们有

$$\left.\begin{aligned}B_lR^{-(l+1)}&=A_l'R^l\\ \varepsilon_1\left[-(l+1)B_lR^{-(l+2)}\right]&=\varepsilon_2\left[lA_l'R^{l-1}\right]\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}B_l&=A_l'R^{(2l+1)}\\B_l&=-A_l'R^{(2l+1)}\frac{l\varepsilon_2}{(l+1)\varepsilon_1}\end{aligned}\right. \qquad (4.4.24)$$

（4.4.24）显示这些 $l\neq 1$ 的 B_l,A_l' 系数在时满足不同的比例关系，显然有：

$$A_l'=B_l=0,\qquad l\neq 1 \qquad (4.4.25)$$

因此只有 $l=1$ 的项有非零解。究其本质是我们所设的问题中存在一个非平庸的 $l=1$ 的入射项 $-E_0r\cos\theta$ ，而没有其他 $l\neq 1$ 的入射项！

****

代入边条（1）-（4）分别可得

$$\left\{\begin{aligned}&A_1=-E_0\\&A_1R+B_1R^{-2}=A_1'R+B_1'R^{-2}\\&\varepsilon_1\left(A_1-2B_1R^{-3}\right)=\varepsilon_2\left(A_1'-2B_1'R^{-3}\right)\\&B_1'=0\end{aligned}\right. \qquad (4.4.26)$$

解之可得

$$\left\{\begin{aligned}&A_1=-E_0\\&B_1=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}E_0R^3\\&A_1'=-\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}E_0\\&B_1'=0\end{aligned}\right., \qquad (4.4.27)$$

故

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= -E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}R^3E_0\frac{1}{r^2}\cos\theta \\
\varphi_2 &= -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}E_0 r\cos\theta
\end{aligned}
\qquad (4.4.28)
$$

为理解这些项的物理，作如下的讨论：

（1） 球面上的束缚电荷就是球对外场的响应来源。其对球外区域的贡献为：$\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}R^3E_0\frac{1}{r^2}\cos\theta$。回想一个偶极子（偶极矩为 p）的电势为 $\varphi_p=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$，对比发现这些束缚电荷对外场的贡献相当于一个放在原点的偶极子，其大小为

$$
\boxed{\vec{p}=4\pi\varepsilon_0\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}R^3\vec{E}_0} \qquad (4.4.29)
$$

要注意： 这个结论是严格的，并非在远场成立，这一点是否让你感到很意外？

（2）球内的场为外场与束缚电荷所产生的附加电场之和，结果为一均匀电场：

$$
\vec{E}_{内}=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\hat{e}_z=\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}\vec{E}_0 \qquad (4.4.30)
$$

理解了（4.4.28）式中的所有项的物理来源，我们对（4.4.28）做极限分析：

（A）当 $\varepsilon_2=\varepsilon_1$ 时，介质球与环境的介电常数一样，故其对外场的响应消失。带入发现，$\varphi_1=\varphi_2=-Er\cos\theta$，即空间的电场就是均匀电场！

（B）当 $\varepsilon_2\to-\infty$ 时，介质球内的场为 $\vec{E}_{内}\to 0$，其效果相当于一个导体球。而此时，$\vec{p}=4\pi\varepsilon_0R^3\vec{E}_0$，也回到上堂课我们求解的导体球的解。其实，这样的一个推论（导体相当于 $\varepsilon_2\to-\infty$ 的介质）具有普遍意义，后面我们可以严格证明。

习题：

（1） 设一个孤立的带电量为 Q 的导体球放置在外电场中，计算空间的电势分布。仿照课件给出所有的推导步骤。

（2） 翻阅《数学物理方法》，分别在旋转对称的球坐标系及与 z 轴无关的柱坐标系中求解 Laplace 方程，求出所有的本征函数（亦即，（4.4.5），（4.4.8））。

（3） 根据（4.4.16）求出金属球上的表面电荷分布，计算这些表面电荷在金属球心处产生的电场。

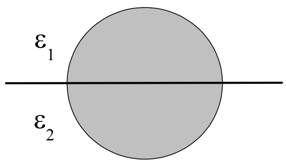
Project（有兴趣的同学选作）

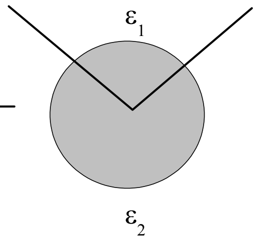
（1）自己编一段小程序，根据（4.4.16）及（4.4.28），画出在两种情形下空间的电势分布（可

以画等势线)，进一步计算出空间电场分布、金属表面电荷分布及介质球表面的极化电荷分布，画在一起，讨论整个问题的图像。

（2）等电量的正负电荷相距较远时，两电荷连线中点附件的场近似为均匀电场。你能否根据这点特征，利用镜像法计算放置于这个电场中的金属球的静电行为，并将结果与本征函数法解得的结果比较？

（3）利用本征模式展开法考虑下面两种情形（半径为 R 的金属球放置于非均匀介质中）下电势的分布。可以分几种情形（如导体接地、孤立带 Q 电荷，分界线穿过球心或不穿过球心等）分别计算，证明第三章习题 3.3 答案所提示的解的唯一正确性。可以配合 COMSOL 讨论一般情况下的电场及电势分布。





（4） 重复课件中关于“高对称体系下均匀场只会引发 $l=1$ 项贡献（即：偶极子）”这个结论的理论证明（4.4.20）-（4.4.25）。进一步打破这两个前提条件（即高对称体系，均匀场）下看看结论是否依然成立？结合 COMSOL 计算一下证明你的结论。总结一下，谈谈你对这个问题的物理理解。

（5） 我们可以根据（4.4.16）计算出金属球表面的电荷分布（作业），发现其呈现一个偶极分布；进一步根据（4.4.17）可以计算出整个金属球的极化强度密度 $\vec{P}=\vec{p}/\Omega$ （Ω 为金属球的体积），从而根据边界条件 $\sigma=-\vec{n}\cdot(\vec{P}_1-\vec{P}_2)$ 得到表面电荷分布，你会发现两者一致。从中你进一步可以得到什么？讨论你的结果及图像。