

第十九讲

上次课:

- 金属介电函数的 Drude 模型:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)} \approx \begin{cases} i \frac{\sigma_c}{\varepsilon_0 \omega}, & \leq \text{GHz} \\ 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2, & \text{visible} \end{cases}$$

高频下“自由电流”折返跑，成为束缚电流

GHz 以下-极大的正虚部；光波段-负实数

- 三种典型导电媒质中的电磁波

1) GHz 的良导体: $k = \alpha(1+i)$; \vec{E}, \vec{B} 差 $\pi/4$; 电磁波一边传播一边衰减

2) 可见光下的金属: $k = \alpha i$; \vec{E}, \vec{B} 差 $\pi/2$; 电磁波只衰减不传播

3. 非良导体

我们下面研究另一类典型介质 --- 导电性能不好的导电媒质。比如一些电介质，其介电行为主要是由价带电子贡献的，表现为具有正的实数介电常数 ε_r 。然而通过掺杂导电电荷，其又有可能具有很小的电导率 σ_c 。通常这些导电电荷的平均自由程很小，因此一般情况下 $\omega \ll 1/\tau$ ，此时 σ_c 主要表现为实数形式---即直流电导，而 σ_c 的虚部（由自由电子气的等离激元共振）非常小可以忽略。将价带电子和掺杂电子两种贡献叠加，我们可以把这种物质的复介电函数写成

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = \varepsilon_r + i \frac{\sigma_c}{\varepsilon_0 \omega} \quad (8.4.16)$$

因为电导率很小， $\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0 \omega} \ll 1$ ，(8.4.16) 意味着这种物质的介电常数具有很小的虚部。将 (8.4.16) 带入色散关系 (8.4.4) 中可得

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\varepsilon}_r(\omega)} = \beta + i\alpha \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r} + i \frac{\sigma_c}{2\varepsilon_0 c \sqrt{\varepsilon_r}} \quad (8.4.17)$$

电磁波的解为:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_x E_0 e^{-\alpha x} e^{i(\beta z - \omega t)} \quad (8.4.18)$$

显然，电磁波在这种介质中的传播性质又与良导体的两种情况均不同，与真空中

的性质相仿，只是波在传播的过程中有少量能量耗散，**表现在振幅随传播缓慢衰减**。注意到 $\sqrt{\tilde{\epsilon}_r(\omega)}$ 即是体系的有效折射率，**而上面的分析显示折射率的虚部对应着电磁波在体系中的耗散 — 这一点与电导率的实部恰好对应**（注意 ϵ 和 σ 的关系（8.3.15））。

Tips: 研究电磁媒质中电磁波的特性的范式:

本构关系（微观理论） → 色散关系 → 本征态（电场、磁场关系，偏振...）

§ 8.5 旋光介质中的电磁波

之前我们研究了**普通电介质**和**导电介质**中电磁波的传播特性。这两种媒介的区别是前者通常为**非色散介质**，后者是**色散介质**；共同特性**是它们都是各向同性介质**。下面我们将研究一种**各向异性介质 — 旋光介质**，并且考察其中电磁波的传播特性。当对等离子介质施加静磁场时，这类介质就叫做旋光介质。比如地球附近的受地磁场影响的等离子体层，或者处于恒定磁场中的金属，都属于此类介质。要研究电磁波在这种介质中的传播行为，类似研究金属中的电磁波时采用的研究范式，我们还是首先研究其**本构关系**，然后再求解 Maxwell 方程在其中的解。

1. 旋光介质的本构关系

考虑处于静磁场 \vec{B}_0 中的自由电子气对电场的响应。忽略杂质的散射项，电子的运动方程为

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = e [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0] \quad (8.5.1)$$

其中，设静磁场 $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ ，强度远远大于电磁场中的磁场（**因此不考虑电磁波中的磁场分量对电子的洛伦兹力，见思考题**），外电场随时间谐变（ $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ ，因为长波近似忽略电场在空间的变化）。显然，在外场的驱动下，电子的运动速度也具有 $e^{-i\omega t}$ 因子。设 $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$ ，其中 \vec{v}_0 是复振幅，则(8.5.1)式的 3 个分量形式可以写为

$$\begin{aligned}
-i\omega v_{0x} &= \frac{e}{m} E_{0x} + \frac{e}{m} v_{0y} B_0 \\
-i\omega v_{0y} &= \frac{e}{m} E_{0y} - \frac{e}{m} v_{0x} B_0 \\
-i\omega v_{0z} &= \frac{e}{m} E_{0z}
\end{aligned} \tag{8.5.2}$$

定义 $\omega_B = \frac{|e| B_0}{m} = -\frac{e B_0}{m} > 0$ （此处我们的定义是 $e < 0$ ），物理意义是电子在垂直与磁场的 xy 平面内做圆周运动的圆频率，代入（8.5.2）并解之可得

$$\begin{aligned}
v_{0x} &= \frac{e}{m} \frac{i\omega E_{0x} + \omega_B E_{0y}}{\omega^2 - \omega_B^2} \\
v_{0y} &= \frac{e}{m} \frac{i\omega E_{0y} - \omega_B E_{0x}}{\omega^2 - \omega_B^2} \\
v_{0z} &= -\frac{e E_{0z}}{i m \omega}
\end{aligned} \tag{8.5.3}$$

将（8.5.3）代入电流密度公式 $\vec{j} = n_e e \vec{v}$ ，可得电流密度的形式：

$$\begin{aligned}
j_x &= \frac{n_e e^2}{m} \frac{i\omega E_{0x} + \omega_B E_{0y}}{\omega^2 - \omega_B^2} e^{-i\omega t} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2} (i\omega E_x + \omega_B E_y) \\
j_y &= \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2} (i\omega E_y - \omega_B E_x) \\
j_z &= -\frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{i\omega} E_z
\end{aligned} \tag{8.5.4}$$

我们发现电流和电场之间的关系满足一个拓展的欧姆定律

$$j_i = \sigma_{ij} E_j, \quad \text{or}, \quad \vec{j} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E} \tag{8.5.5}$$

其中电导率是一个**各向异性的矩阵**，其具体形式为

$$\vec{\sigma}(\omega) = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_0}{(\omega^2 - \omega_B^2)} \begin{bmatrix} i\omega & \omega_B & 0 \\ -\omega_B & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(\omega^2 - \omega_B^2)}{i\omega} \end{bmatrix}. \tag{8.5.6}$$

有了电导率矩阵，我们可以进一步求出介质的有效介电常数。此时，Maxwell 第四条方程（在单频谐变场下）为

$$\nabla \times \vec{H} = (\vec{\sigma}(\omega) - i\omega \varepsilon_0) \vec{E} = (\vec{\sigma}(\omega) - i\omega \varepsilon_0 \vec{I}) \cdot \vec{E} = -i\omega \varepsilon_0 (\vec{I} + i \frac{\vec{\sigma}(\omega)}{\omega \varepsilon_0}) \cdot \vec{E}$$

在交变电场的驱动下“传导电流”不再“自由”，可以看成金属的束缚电流。因此，可以将金属看作一块电介质，相应的方程应改写为 $\nabla \times \vec{H} = -i\omega\epsilon_0\vec{\epsilon}_r(\omega) \cdot \vec{E}$ ，其中 $\vec{\epsilon}_r(\omega)$ 为金属的有效（复）介电函数。两式对比可得

$$\vec{\epsilon}_r(\omega) = I + i \frac{1}{\epsilon_0\omega} \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & i\epsilon_2 & 0 \\ -i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

显然，这种介质是**各向异性的色散介质**，其等效介电函数张量的矩阵元满足：

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}, \quad \epsilon_2 = \frac{\omega_p^2\omega_B}{(\omega^2 - \omega_B^2)\omega}, \quad \epsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (8.5.7)$$

注意：当 $B_0 = 0$ 时， $\epsilon_2 = 0$ ， $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$ ，体系回到各向同性的等离子体。

所以磁场对等离子体的影响为：1) 使得体系的有效介电函数变成各向异性，2) 而且其非对角元素为纯虚数。具有类似（8.5.7）式的介电常数的体系通常叫做旋电材料，其中的电磁波的行为非常奇异（见下一节的分析）。与此相对应，若磁导率矩阵 $\vec{\mu}_r(\omega)$ 具有（8.5.7）式，则体系称为“旋磁材料”。

2. 旋光介质中的电磁波本征态

下面我们研究此类材料中的电磁波特性。注意到该介质是一个**各向异性色散**介质，前面的方法不再适用。**下面介绍的方法其实是计算各向异性电磁材料中的波的行为的一个通用方法。**首先，因为介质是色散的，必须在频域下求解。其次，介质是均匀的，具有平移不变性（各向异性与均匀性是两个不同的概念），因此可取试解为平面波： $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ ， $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ （ \vec{E}_0 ， \vec{H}_0 为常矢量）。将其带入原始 Maxwell 方程组（注意到此时 $\vec{\epsilon}_r(\omega)$ 为一张量），则 Maxwell 方程变为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{k} \cdot (\vec{\epsilon}_r \cdot \vec{E}_0) = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0 \\ \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \mu_0 \vec{H}_0 \\ \vec{k} \times \vec{H}_0 = -\omega \epsilon_0 \vec{\epsilon}_r \cdot \vec{E}_0 \end{cases} \quad (8.5.8)$$

在推导（8.5.8）时，我们已经将原始 Maxwell 方程中“自由电荷/电流”看成“束

缚电荷/电流”（因为高频下它们不再自由）从而将其贡献“吸收”到有效介电函数 $\tilde{\epsilon}_r$ 中去。一般条件下求解（8.5.8）相当复杂（参考习题）。下面做些简化，考虑最简单的一种情况：A) 假设 $\omega > \sqrt{(\omega_p)^2 + (\omega_B)^2}$ ； $\omega_p \gg \omega_B$ ，故 ϵ_1, ϵ_2 都是正实数，且 $\epsilon_1 \gg \epsilon_2$ ；B) $\vec{k} = k\hat{e}_z$ 。由第一式及 $\tilde{\epsilon}_r$ 的形式，可得 $E_{0z} = 0$ ，即 $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$ ，**因此在此条件下电磁波仍然为横波！（思考题：一般的各向异性介质中的电磁波还必然是横波吗？）**由第三、四式可得

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_0) + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \tilde{\epsilon}_r \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (8.5.9)$$

整理可得（利用 $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$ ）

$$\boxed{k^2 \vec{E}_0 = k_0^2 \tilde{\epsilon}_r \cdot \vec{E}_0} \quad (8.5.10)$$

其中 $k_0 = \omega/c$ 为真空中的波矢。（8.5.10）看上去与各向同性介质中的电磁波传播的色散关系极为类似，唯一的区别是此处 $\tilde{\epsilon}_r$ 为一张量。但也正因为这一特征，**容易证明 $\vec{E}_0 \parallel \vec{e}_x$ 以及 $\vec{E}_0 \parallel \vec{e}_y$ 的线偏振光波都不是（8.5.10）的解。那么此时电磁波的偏振态到底应当是什么？**考虑到 $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$ ，则一般情况的解为 $\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y}$ ，其中 E_{0x}, E_{0y} 为未知的复数。代入（8.5.10），写出分别沿x和y方向的分量形式，可得2个方程。将这两个方程写成矩阵的形式，有

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 k_0^2 - k^2 & i\epsilon_2 k_0^2 \\ -i\epsilon_2 k_0^2 & \epsilon_1 k_0^2 - k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} = 0 \quad (8.5.11)$$

解（8.5.11）式等于**对角化相应的矩阵**。计算得到2个本征值，

$$k_+ = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad k_- = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2} \quad (8.5.12)$$

将本征值代入（8.5.11）可得相应的**本征矢量**。整理之后结果为

$$\begin{aligned} k_+: \quad E_{0x} = iE_{0y} &\Rightarrow \vec{E}_0^+ = E_0 (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) / \sqrt{2} = E_0 \vec{e}_{right} \\ k_-: \quad E_{0x} = -iE_{0y} &\Rightarrow \vec{E}_0^- = E_0 (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) / \sqrt{2} = E_0 \vec{e}_{left} \end{aligned} \quad (8.5.13)$$

（8.5.12）-（8.5.13）显示在这种材料中，沿z轴传播的电磁波的本征态不是线偏振的，而是左右旋圆偏振！且（8.5.12）显示这两个本征态的色散关系（或者说传播的相速度）不相同。对右旋光，波的相速度为

$$v_{right} = \omega / k_+ = c / \sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad (8.5.14)$$

对左旋光

$$v_{left} = \omega / k_- = c / \sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2} \quad (8.5.15)$$

因此，在介质中沿着磁场方向传播时，**左旋光比右旋光的速度快。**

注：这个例子中，我们清晰地看到了研究材料中电磁波特性的范式

本构关系 —— 色散关系 —— 电磁本征态

3. 法拉第效应

当一支**线偏振波**由各向同性的空间进入各向异性的等离子体中时，由于线偏振波可以分解为两个等幅的左、右旋圆偏振波，而左旋和右旋波的波速又不相等，结果是电磁波的偏振面在等离子体中以前进方向为轴不断地旋转。这种效应叫法拉第旋光效应，如图 8.4 所示。

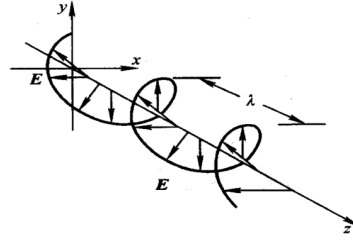


图 8.4

具体可以计算出电磁波的传播行为。设进入 Faraday 介质之前在真空中传播的线偏振电磁波为

$$\vec{e}_x E_0 e^{i(k_0 z - \omega t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 (\vec{e}_{right} + \vec{e}_{left}) e^{i(k_0 z - \omega t)} \quad (8.5.16)$$

进入 Faraday 介质时，**假设旋光体系对左右旋光的透射率一样**（思考：若透射率不同会如何？），则电磁波变成

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_{right} e^{ik_+ z} + \vec{e}_{left} e^{ik_- z}) e^{-i\omega t} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_{right} e^{i\Delta k \cdot z/2} + \vec{e}_{left} e^{-i\Delta k \cdot z/2}) e^{i(\bar{k} z - \omega t)} \\ &= \frac{E_0}{2} [(e^{-i\Delta k \cdot z/2} + e^{i\Delta k \cdot z/2}) \vec{e}_x + i(e^{-i\Delta k \cdot z/2} - e^{i\Delta k \cdot z/2}) \vec{e}_y] e^{i\bar{k} z} e^{-i\omega t} \\ &= E_0 [\cos(\Delta k \cdot z/2) \vec{e}_x + \sin(\Delta k \cdot z/2) \vec{e}_y] e^{i\bar{k} z} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (8.5.17)$$

其中 $\Delta k = k_+ - k_-$ ， $\bar{k} = (k_+ + k_-)/2$ 。因此电磁波在旋光介质中的电矢量一边传播一边旋转（如上图所示），这种效应叫做旋光！**注意：这种电磁波在某一个局部点的等相面上仍然呈现线偏振，但这个线偏振的角度随着波传播一直在改变！**

假设 Faraday 介质的厚度为 d , 则从 Faraday 介质中出来时(将 $z = d$ 带入(8.5.17))重新变成线偏振, 偏振方向为

$$\vec{E} \parallel \cos(\Delta k \cdot d / 2) \vec{e}_x + \sin(\Delta k \cdot d / 2) \vec{e}_y \quad (8.5.18)$$

与入射光比较偏振方向旋转了如下的角度

$$\Delta\phi = \Delta k \cdot d / 2 \approx k_0 d \varepsilon_2 / (2\sqrt{\varepsilon_1}) \quad (8.5.19)$$

此即是著名的 Faraday 旋光效应, 后面一项在考虑 $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$ 后得到。因为 $\varepsilon_2 \propto \omega_B$, 显然这个偏振转角正比于外磁场 \mathbf{B} 及旋光介质的厚度 \mathbf{d} 。

讨论:

1. 在各向同性的介质里, 沿 x 、 y 方向偏振的光波的 k 矢量相同(或者说状态简并), 因此这种介质中左右旋电磁波同样状态简并。我们既可以用线偏振的光波作为基把任意偏振的波展开, 等价地, 我们也可以用左右旋光作为基来做同样的事情。但各向异性介质中不存在这种简并, 我们必须求出色散关系对应的电磁本征态作为基, 此时不能随意选取线偏振或者圆偏振波作为基。
2. 事实上, 对任意的各向异性介质, 我们都不能不假思索地认为电磁波可以取任意一个偏振方向, 而必须通过求解本征值矩阵方程得到色散关系以及模式对应的偏振。

§ 8.6 电磁波在介质面上的反射和折射

至今为止, 我们只学习了电磁波在一个**无限大均匀的块体材料(尽管该介质可以是色散的, 是各向异向的)**中传输时的行为。电磁波从一个材料进入另一个材料中会如何? 此即是本节我们要学习的内容。

0. 电磁波边界条件

光在两种介质的交界面上的反射和折射现象为大家所熟知, 但对光本质的了解却是经历了一番曲折。早年牛顿基于光粒子的概念用了许多(不合理的)假设推出光的反射和折射定律。直到后来人们利用 Maxwell 方程以及边界条件, 不加任何其他假设, 成功推导出光的折射和反射定律时, 人们才完全接受光的波动性。

补充题:

1) 利用连续性方程 $\nabla \cdot \vec{j}_f + \partial \rho_f / \partial t = 0$, 证明在旋光介质中的平面电磁波满足 (8.5.8)。

特别是 (8.5.8) 中的第一条方程, 需要给出具体的推导过程。

2) 若 $\vec{B} = -B_0 \vec{e}_z$, 当一束沿 y 方向偏振的电磁波沿 z 方向 ($\vec{k} \parallel \vec{e}_z$) 穿过厚度为 d 的 Faraday 介质后偏振状态变成什么?

3) 在弛豫时间近似考虑杂质散射的影响, 重新推导有磁场存在时等离子体的本构关系 ($\vec{\sigma}(\omega), \vec{\epsilon}_r(\omega)$)。

思考题 (供有余力同学选作)

1) 在弛豫时间近似下得到有磁场存在时等离子体的本构关系 ($\vec{\sigma}(\omega), \vec{\epsilon}_r(\omega)$) 后, 讨论

当直流 ($\omega \rightarrow 0$) 条件下的 $\vec{\sigma}$ 的形式及其所对应的物理。

4) 查阅资料 (Landau《连续介质电动力学》270 页以及《统计物理 II》第 4 章), 搞清楚一个铁磁介质的有效磁导率的形式。

5) 你是否可以在一般情况下, 即不满足 $\omega > \omega_p \gg \omega_B$, 也不预设 $\vec{k} \parallel \hat{z}$, 讨论旋光体系中的电磁本征态?

6) 翻阅资料, 结合课上学到的内容, 弄清楚磁光 Kerr 效应的物理。

7) 上网翻阅资料, 查找有关 ENZ 和 ZIM 的研究结果, 结合课上内容, 总结成 Note。

8) 根据 (8.5.8) 式, 磁场下金属的有效介电常数的 xy 分量 $\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}$ 与 z 分量

$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ 有很大的不同, 前者对应 Lorentz 模型, 后者对应 Drude 模型。Lorentz 模型

是研究绝缘体的电磁响应的一个好的模型, 它的核心是将束缚电子与原子核之间的相互作用力想象成一个弹簧。而 Drude 模型是研究自由电子气的。问题是, 为什么加了磁场之后横向运动变成了绝缘体行为了? 这里有什么物理? 你能否用动画展示电子在外场驱动下的运动行为, 从而看到点端倪?