第一讲

第一章　麦克斯韦方程组

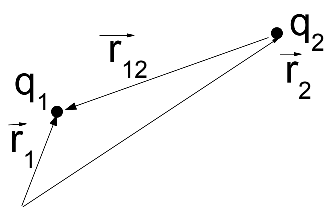
我们在《大学物理》中的“电磁学”部分已经学习了许多电磁现象。在那里我们描述这些电磁现象时使用的数学语言比较简单，比如，通常只利用积分运算，不涉及微分运算。在《电动力学》中，我们将使大量使用矢量微分运算等较为复杂的数学工具，以使得理论表述更加简练。本章中，我们将基于矢量运算简要回顾一下 Maxwell 方程组，为后面利用这组方程深入理解各种电磁现象打下基础。

一、　静电现象的基本理论描述

1．库仑定律

人们定量研究电磁现象是从库仑开始的。1785 年，库仑做了大量的实验，总结发现真空中两个点电荷（自身尺寸远远小于相互间距离）之间的作用力满足

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}} \qquad (1.1.1)$$



其中 q_1, q_2 为两个点电荷所带的电量（单位为 C），

$\varepsilon_0 \approx 8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$ 为真空介电常数，

$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 为 2 指向 1 的矢量，$\vec{F}_{12}$ 指点电荷 2 对点电荷 1 的力。（1.1.1）式是由大量实验事实总结出来的数学表达式，物理意义包含了：

1）牛顿第三定律：$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

2）向心力；

3）平方反比；

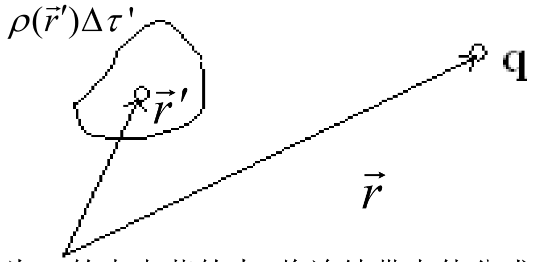
4）同性相斥、异性相吸。

2．叠加原理

库仑定律是针对一对点电荷成立的，若同时存在多个点电荷会如何呢？另外，自然界的带电体大多数为连续带电体，对这种情况，静电力又如何描述呢？实验发现，当同时存在多个电荷时，某一特定电荷所受的静电力为其他所有电荷独立施于其上的作用力的线性叠加：

$$\boxed{\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}^3}\vec{r}_{ij}} \qquad (1.1.2)$$

这个原理的核心在于：*电荷之间的相互作用为两体相互作用，与第 3 者的存在与否、大小、正负号都没有关系。*请注意：叠加原理是人们总结大量实验得到的规律，并不能从其他规律推导出来。有了这个定律，我们可以非常容易地计算连续带电体之间的相互作用力。



考虑一个连续带电体对处于 $\vec{r}$ 带电量为 q 的点电荷的力。将连续带电体分成许多微元，其中一个为处于 $\vec{r}_2=\vec{r}'$ 带电量为 $q_2=\rho(\vec{r}')\Delta\tau'$ 的点电荷。这里 $\rho(\vec{r}')=\left.\dfrac{\Delta q}{\Delta\tau'}\right|_{\Delta\tau'\to 0}$ 为电荷密度，而 $\Delta\tau'$ 为此微元的体积。根据库仑定律以及线性叠加原理，整个带电体对 q 的静电力为

$$\boxed{\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{q\rho(\vec{r}')d\tau'}{R^3}\vec{R}} \qquad (1.1.3)$$

其中，$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$。*（注：一般情况下我们把源所在的坐标用 $\vec{r}'$ 标记，观察点的坐标用 $\vec{r}$ 标记，由源到观察点的矢量用 $\vec{R}$ 来标记）*。进一步推广，当有两个连续带电体，其电量分布分别为 $\rho_1(\vec{r}),\rho_2(\vec{r})$ 时，带电体 1 受到带电体 2 的总的静电力为

$$\boxed{\vec{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_1(\vec{r})\rho_2(\vec{r}')d\tau d\tau'}{R^3}\vec{R}} \qquad (1.1.4)$$

3．电场

由（1.1.3）可知，对电荷 q 来说，其所受的力与其本身的电量成正比。这启发我们定义一个物理量

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r})=\vec{F}(\vec{r})/q} \qquad (1.1.5)$$

这个物理量与放在此处的电荷（探测电荷）没有任何关系，而只与空间其他电荷在此地产生的效果有关。这个量被称为电场。电场的引入，不仅方便我们计算静电力，更重要的是给了我们一个静电相互作用的新的图像：

电荷 q_1 $\xLeftrightarrow{\text{超距}}$ 电荷 q_2 原图像

电荷 q_1 $\xleftrightarrow{\text{电荷}q_1}$ 电场 $\xleftrightarrow{\text{电场}}$ 电荷 q_2 新图像

基于电场的新图像与原有图像（基于超距相互作用）很不相同，最关键的区别是新图像引入了作为作用力中介而存在的电场。在静电范畴分辨不出这两种图像的区别，但当所有物理量随时间变化时，可以清楚地看到第二种图像是正确的，而第一种是不正确的。比如，想象对源电荷做一个扰动（快速移动一个距离，或者快速充电到新的电量值），根据原有的图像，探测点荷立刻感受这种改变（即探测电荷受到的静电力正比与新状态下源电荷的大小）。然而真实的情况却并非如此，这种变化要等一段时间才能被探测电荷所感知（*你有没有兴趣思考一下应该如何具体研究这个问题？*），这与新图像一致。

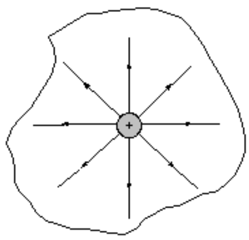
之后我们会进一步证明，像所有其他物质一样，电场具有能量、动量等，是一种客观存在。显然，一个连续带电体在空间产生的电场为

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')d\tau}{R^3}\vec{R}} \tag{1.1.6}$$

4．电场的散度性质-高斯定理

数学上讲，要完整了解一个矢量场的性质，我们需知道这个场的**散度**和**旋度**两方面的性质。换言之，我们需知道场**对任意闭合曲面的面积分**，及对**任意闭合曲线的线积分**。在《电磁学》中我们已经证明对任意闭合曲面，$\oint\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S}=Q/\varepsilon_0$。证明如下：

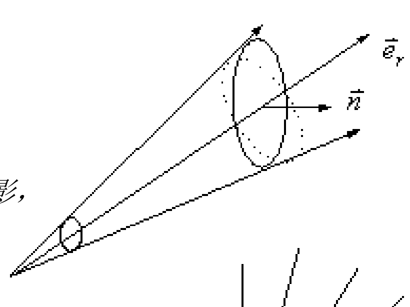
我们先来看点电荷的情况： $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$



① 闭合曲面包含电荷

$$\vec{E}\cdot\Delta\vec{S}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot\Delta S'$$

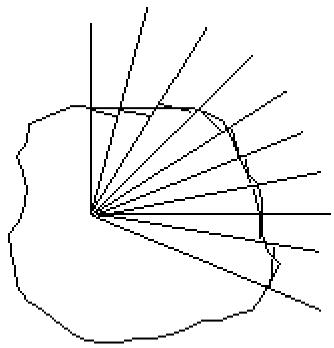
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot r^2\cdot\Delta\Omega=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\Omega$$



其中$\Delta S'$为$\Delta\vec{S}\cdot\vec{e}_r$，为$\Delta\vec{S}$在法线方向的投影，

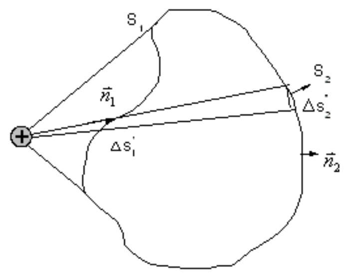
$\Delta\Omega$为微元$\Delta\vec{S}$对原点张开的立体角。

则， $\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}=\int\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega=\frac{q}{\varepsilon_0}$



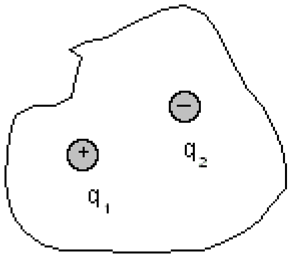
② 闭合曲面内不包含电荷

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int \vec{E}\cdot d\vec{S}_1 + \int \vec{E}\cdot d\vec{S}_2$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{E}(\vec{r}_i)\cdot \Delta\vec{S}_i^1 + \sum_{j=1}^{N} \vec{E}(\vec{r}_j)\cdot \Delta\vec{S}_j$$
$$= \sum_i \left[\Delta\Omega_i + (-\Delta\Omega_i)\right] = 0$$



③ 线性叠加原理

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \int_\tau \rho(\vec{r})\cdot d\tau/\varepsilon_0} \qquad (1.1.7)$$



此即为 Gauss 定理的数学表达形式。利用数学中矢量场的高斯定理，对任意矢量场均有：$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int \left[\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})\right] d\tau$。因此我们可以把（1.1.7）改写为$\int \left[\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})\right] d\tau = \int \rho(\vec{r})\cdot d\tau/\varepsilon_0$。 考虑到曲面的任意性，我们得到如下重要的关系式：

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/\varepsilon_0 \qquad (1.1.8)$$

上式为 Gauss 定理的微分表达式。从几何上理解，Gauss 定理描述的是场线分布的空间性质：即其是否存在奇点。而从物理上讲，电场线一定是起始于正电荷终止于负电荷，因此电场线的不连续性必然与空间的电荷有关！当散度为 0 时，场线在此处连续；而散度不为 0 时就表示空间出现了奇点（散度小于 0 导致场线汇聚、散度大于 0 导致发散）。直接对（1.1.6）式中电场求散度，得

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\vec{r}')d\tau\left(\nabla\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\right) \qquad (1.1.9)$$

对比（1.1.9）与（1.1.8），我们得到一个非常有用的公式

$$\boxed{\nabla\cdot\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right) = 4\pi\delta(\vec{R})} \qquad (1.1.10)$$

其中 $\delta(\vec{R})$ 为狄拉克引入的 Delta 函数，满足 $\int \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')d\vec{r}\,' = 1$，$\int \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')f(\vec{r}\,')d\vec{r}\,' = f(\vec{r})$。

思考题：严格直接证明上述公式相当不容易，很多时候把它当作已知的公式直接使用。你能否从数学上严格证明？自己尝试一下！

习题
P. 30.　1.1,　1.2,　1.3

补充：利用散度的定义直接计算$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$的形式，在$r\neq 0$时算出最终结果；讨论为什么在$r\to 0$时你直接计算得到的结果不正确。