第 二 十 三 讲

- 波导色散关系：$k_z = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$
- 谐振腔：三个方向全部形成驻波 $\omega_{\{mnp\}} = c\sqrt{\left(\left(m\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(n\frac{\pi}{b}\right)^2+\left(p\frac{\pi}{d}\right)^2\right)}$
- 辐射，场用势表示：$\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial\vec{A}/\partial t$ ； $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$
- **Lorentz 规范：** $\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$

3．势所满足的方程

将（12.1.2）与（12.1.4）带入 Maxwell 方程中与“源”相关的第一和第四式，（无源的两个方程自动满足），我们得到对势的方程：

$$
\begin{aligned}
&-\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) = \rho/\varepsilon_0 \\
&-\nabla^2\vec{A}+\nabla(\nabla\cdot\vec{A})+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) = \mu_0\vec{j}
\end{aligned}
\qquad (12.1.8)
$$

这组方程是$\left\{\vec{A},\varphi\right\}$耦合在一起的，使用起来不方便。因为有规范自由度，我们可以巧妙选择合适的规范条件使得利用$\left\{\vec{A},\varphi\right\}$的场方程解耦。尝试库仑规范发现不能实现解耦的效果。尝试 Lorentz 规范条件（12.1.7），发现确实可以将其化简成相当对称而标准的有源波动方程的形式

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = -\rho/\varepsilon_0 , \\
&\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu_0\vec{j}
\end{aligned}
\qquad (12.1.9)
$$

因此，我们首先根据源的情况求解（12.1.9）得到势，然后再由势求出电磁场。

思考题：规范不变性使得$\left\{\vec{A},\varphi\right\}$本身在经典电动力学的层面上没有绝对意义。但真的是这样的吗？为什么电磁相互作用导致的附加动量与$\vec{A}$有关？

§ 12.2 推 迟 势

由于$\vec{A}$和φ满足同样的方程，因此我们只需要讨论一个标量方程

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(\vec{r},t)=-\rho(\vec{r},t)/\varepsilon_0 \qquad (12.1.9')$$

的解。求解上述方程的标准方法是定义一个格林函数，满足

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')=-\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t') \qquad (12.2.1)$$

这个函数其实就是当t'时刻在$\vec{r}\,'$处做一个单位强度的扰动时，时空各处所激发的场。定义$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,',T=t-t'$，我们发现当格林函数已知后，对任意的电荷分布，其电势可以表示为：

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int G(\vec{R},T)\rho(\vec{r}\,',t')d\vec{r}\,'dt' \ . \qquad (12.2.2)$$

证明（12.2.2）式并不困难，只要对等式两端都作用一个$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$算符，再利用（12.2.1），则发现（12.2.2）是（12.1.9’）的正确解。

其实，这正是定义格林函数的妙处。对任意的有源方程$\hat{L}(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)=S(\vec{r},t)$，我们总归可以定义 Green 函数满足$\hat{L}(\vec{r},t)G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')=\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t')$，求解 Green 函数后则波函数得解：$\psi(\vec{r},t)=\int G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')S(\vec{r}\,',t')d\vec{r}\,'dt'$。而格林函数对应的物理意义就是在 r’点 t’时刻的“单位”源激发的在 r 点处 t 时刻的场，因此有限时空分布的源给出的最终场当然就是一个卷积。这其实是线性叠加原理的一个体现：r’, t’时空点做单位扰动时的场已知，则任意时空分布的扰动（源）的影响就可以基于线性叠加原理得到。

下面求解格林函数。在 R，T 空间求解非常不方便，因为方程是微分运算。基于时空都具有平移不变的特性，将问题转到频域和 K 空间求解。利用 Fourier 变换可得

$$G(\vec{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int G(\vec{k},\omega)e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}e^{-i\omega T}d\vec{k}d\omega$$
$$\delta(\vec{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}e^{-i\omega T}d\vec{k}d\omega \qquad （12.2.3）$$

带入（12.2.1）可以解得$(\vec{k},\omega)$空间的格林函数的解为

$$G(\vec{k},\omega)=\frac{1}{k^2-k_0^2} \qquad （12.2.4）$$

其中,

$$\boxed{k_0^2=(\omega/c)^2=\varepsilon_0\mu_0\omega^2} \qquad （12.2.5）$$

****

Tips: 其实有其它的方法求解真空中的推迟势，比如蔡胜善先生《电动力学》介绍的时域方法。但为什么我们要介绍数学形式相对复杂的$(\vec{k},\omega)$空间求解的方法呢？那是因为时域求解的方法只能应用于*非色散空间局域响应*的介质，但真实的体系许多是频率色散空间 Non-local 的，亦即：响应函数只能用$\varepsilon(\omega,\vec{k}),\mu(\omega,\vec{k})$描述。因此，我们只能在$(\vec{k},\omega)$空间才能 Well-defined 求出其格林函数$G(\vec{k},\omega)$，然后再反 Fourier 变换回实空间。因此，本文介绍的方法是普适的。后面会发现这个方法将材料特性、因果关系都联系起来，很物理。

****

*果然：在$(\vec{k},\omega)$空间，格林函数变成了无耦合的量 --- 借用量子力学中矩阵力学的表述就是，格林函数在在$(\vec{k},\omega)$空间被自然对角化。*因此，将（12.2.4）带回（12.2.3）可得$(\vec{R},T)$空间的格林函数为

$$G(\vec{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}e^{-i\omega T}}{k^2-k_0^2}d\vec{k}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int G(\vec{R},\omega)e^{-i\omega T}d\omega \qquad (12.2.6)$$

其中，

$$G(\vec{R},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{k^2-k_0^2}d\vec{k} \qquad （12.2.6’）$$

求解（12.2.6）这个积分并不容易。先计算(12.2.6’)式：

$$G(\vec{R},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{k^2-k_0^2}d\vec{k}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{e^{ikR\cos\theta}}{k^2-k_0^2}k^2dk\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2 iR}\int_0^{\infty}\frac{e^{ikR}-e^{-ikR}}{k^2-k_0^2}kdk=\frac{1}{2(2\pi)^2 iR}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{k}{k^2-k_0^2}\right)\cdot\left(e^{ikR}-e^{-ikR}\right)dk$$

$$=\frac{1}{4(2\pi)^2 iR}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{k-k_0}+\frac{1}{k+k_0}\right)\cdot\left(e^{ikR}-e^{-ikR}\right)dk \qquad (12.2.7)$$

$$=\frac{1}{4(2\pi)^2 iR}\times$$

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{k-k_0}+\frac{1}{k+k_0}\right)e^{ikR}dk-\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{k-k_0}+\frac{1}{k+k_0}\right)e^{-ikR}dk\right\}$$

上面的积分中有奇点，若想得到收敛的结果，必须假设k_0具有一个很小的虚部。

但这个虚数的符号应当取 + 还是取 - 呢？

选择的依据是“因果关系”！--- 在正常介质中这个虚部必须为正。

“因果关系”要求电磁波在介质中向前传播（能流的方向）时应当产生焦耳热从而使得能量被耗散。而k_0是介质中向前传播的波矢，假设$k_0=\mathrm{Re}(k_0)+i\delta$，

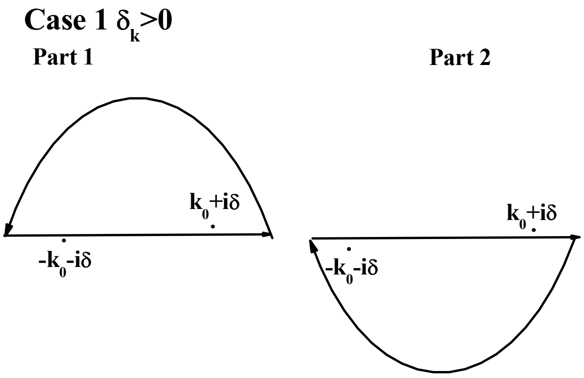
则$e^{ik_0r}e^{-i\omega t}=e^{i\mathrm{Re}(k_0)r}e^{-\delta r}e^{-i\omega t}$，因此$\delta$一定为正。

Tips:

1）这里我们考虑的是实轴上的全积分，不是主轴积分(P)，因此一定要选择合适的路径；

2）由（12.2.5）可知，当处于一定介质（如空气）中时，因为介质的ε,μ一定因为耗散而有虚部，则k_0一定带有虚部！即使是真空，也会因为涨落而对电磁波有耗散。因此给k_0一个小的虚部不仅是数学的要求，还是物理的必然！

注意到e^{ikR}和e^{-ikR}分别当$k\to\pm i\infty$时收敛，上面的两个积分必须分别选择如下图所示的两个闭合回路（使得加上去的半圆不贡献积分值）。我们将被积函数解析延拓到复平面，利用留数定理容易推出



$$G(\vec{R},\omega)=\frac{1}{4(2\pi)^2 iR}e^{ik_0R}\times 2\pi i-\frac{1}{4(2\pi)^2 iR}e^{ik_0R}\times(-2\pi i)=\frac{e^{ik_0R}}{4\pi R} \qquad (12.2.8)$$

在（12.2.8）式中加入时间振荡因子$e^{-i\omega T}$，则发现这个解对应这样一个单频波，

$\frac{e^{ik_0R}}{4\pi R}e^{-i\omega T}$，其物理意义为一个点源的“出射波”--- 即从源点向*外*发射的球面波。

显然这是符合“因果关系”的解。*若选择k_0的虚部为负，则结果为不符合因果关系的“会聚波”。*进而将（12.2.8）代入（12.2.6）可得最终的格林函数

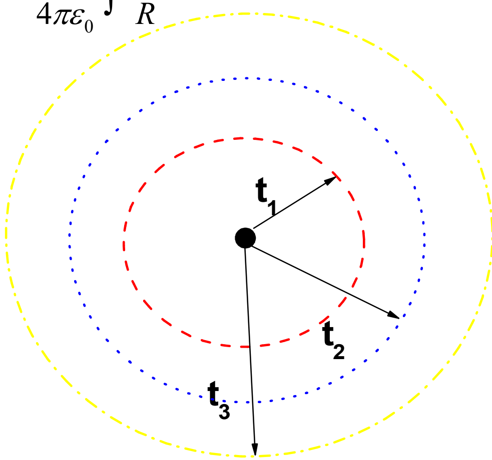
$$G(\vec{R},T)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{ik_0R}}{4\pi R}e^{-i\omega T}d\omega=\frac{1}{4\pi R}\delta\left(R/c-T\right) \qquad (12.2.9)$$

这个解的物理意义更加明晰 – 在原点处 0 时刻作一个激发，则激励的波以球面波的形式传播出去 – 波振幅以 1/r 形式衰减，且只在 r=ct 处有值。将格林函数形式（12.2.9）带入（12.2.4）得到

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{R}\delta(R/c-T)\rho(\vec{r}\,',t')d\vec{r}\,'dt'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{[\rho]}{R}d\tau' \qquad (12.2.10)$$

式中方括号[ ]表示$t'=t-\frac{R}{c}$，同理可得

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[\vec{j}]}{R}d\tau' \qquad (12.2.11)$$



我们注意到$\varphi,\vec{A}$的表达式在形式上与静态时的解一致，只是在动态时t时刻的辐射场是由此时刻前的一个时刻的扰动贡献的，而这个推迟的时间正是从源到观测点光信号传播所需的时间。这就是推迟势，其物理的根据是因果关系。

§ 12.3　多 极 辐 射

很多情况下辐射源电流、电荷分布于空间一块很小区域内，而我们则关心远场的行为。类似静电、静磁时的处理方法，此时我们可以作多极展开。

1．推迟势的多极展开

我们讨论的是远离源的场，即 $r>>l$（图 12.2），l 为源的线度。被积函数是 $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,'$ 的函数，我们可以将它在 $\vec{r}$ 处展开为级数（视 $r'<<r$ 为展开小量），即

$$\frac{[\rho]}{R}=\left.\frac{[\rho]}{R}\right|_{\vec{r}\,'=0}+(-\vec{r}\,')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{R}}\left(\frac{[\rho]}{R}\right)_{\vec{r}\,'=0}+\ldots=\frac{[\rho]_0}{r}-\vec{r}\,'\cdot\nabla\frac{[\rho]_0}{r}+\cdots \qquad (12.3.1)$$

与静电、静磁条件下做多级矩展开最大的不同是：此处$[\rho]$中因为有推迟因子：$t-\dfrac{R}{c}$，也要做泰勒展开处理。式中$[\rho]_0$表示$\rho\left(\vec{r}\,',t-\dfrac{r}{c}\right)$，物理意义是使得每个源点的推迟时间一样。以后为简便起见，**脚标 0 不再写出**。同理可得

$$\frac{[\vec{j}]}{R}=\frac{[\vec{j}]}{r}-\vec{r}\,'\cdot\nabla\frac{[\vec{j}]}{r}+\ldots$$

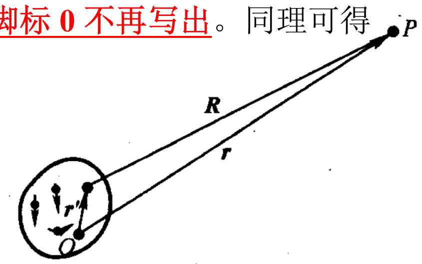


图 12.2

故

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\frac{[\rho]}{r}d\tau'-\int\vec{r}\,'\cdot\nabla\frac{[\rho]}{r}d\tau'+\ldots\right]$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[\vec{j}]}{r}d\tau'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{r}\,'\cdot\nabla\frac{[\vec{j}]}{r}d\tau'+\cdots$$

我们下面分别研究 $\vec{A}$、φ 展开式中各项的物理意义，以及它们所代表的辐射场的性质。

2．电偶极辐射

φ 展开式中的第一项

$$\varphi_0=\int\frac{[\rho]}{4\pi\varepsilon_0 r}d\tau'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int[\rho]d\tau'=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (12.3.2)$$

Q是系统的总电荷量，一般情况下不随时间变化，没有辐射。第二项

$$\varphi_1 = -\int \vec{r}' \cdot \nabla \frac{[\rho]}{4\pi\varepsilon_0 r} d\tau' = -\nabla \cdot \frac{[\vec{p}]}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{12.3.3}$$

式中$[\vec{p}] = \int \vec{r}'[\rho] d\tau' = \left[\int \vec{r}' \rho d\tau'\right]$，表示系统总的电偶极矩。

$\vec{A}$展开式中的第一项：

$$\begin{aligned} \vec{A}_0 &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int [\vec{v}\rho] d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\sum_i q_i \vec{v}_i\right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{d}{dt}\left[\sum_i q_i \vec{r}_i\right] = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\dot{\vec{p}}\right] \end{aligned} \tag{12.3.4}$$

Tips:

1. []是对时间的推迟操作，可以与∇, $\int$ 等空间运算算符互换。

2. 稳恒电流（稳定磁场）情况下我们曾推出 A 中的第一项=0，但现在是变化电流，其可能引发“极化电荷”的积累，从而导致（电）偶极辐射项！

3. 之前在推导极化电流时我们得到$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$，推导过程不算严谨。现在（12.3.4）的推导过程是严谨的，不过也只是推出$\int \vec{j}_p d\tau = \int \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} d\tau = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$---一个积分形式。这其实是非常物理的：因为原始的连续介质中的$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$也只是在“宏观小微观大”的一个“点”上成立而已，因此必须做平均化处理才能得到。

所以，电偶极矩系统所产生的$\vec{A}$和φ为（12.3.3）及（12.3.4）。下面考虑单频的辐射源，$\rho(\vec{r}',t') = \rho(\vec{r}')e^{-i\omega t'}, \vec{j}(\vec{r}',t') = \vec{j}(\vec{r}')e^{-i\omega t'}$（任意情况总可以展开成单频结果的叠加，因此考虑单频足够了）。从联系$\vec{B}$与$\vec{A}$的公式，我们得到电偶极辐射场中的磁场部分为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\frac{\left[\dot{\vec{p}}\right]}{r}=-\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\nabla\times\frac{[\vec{p}]}{r} \tag{12.3.5}$$

电场当然也可以由势推出。但在无源区，电场可以更简单地通过 Maxwell 方程由磁场导出

$$\vec{E}=-\frac{c^2}{i\omega}\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\times\nabla\times\frac{[\vec{p}]}{r} \tag{12.3.6}$$

下面仔细分析一下在（12.3.5）和（12.3.6）式中要用到的一项：

$$\nabla\times\frac{[\vec{p}]}{r}=\left(\nabla\times[\vec{p}]\right)\frac{1}{r}+\left(\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\times[\vec{p}]\right) \qquad （12.3.7）$$

考虑第一项，因为$[\vec{p}]=\vec{p}_0e^{-i\omega t}e^{i\frac{\omega}{c}r}$，则微分运算可以代换成

$$\boxed{\nabla\leftrightarrow i\frac{\omega}{c}\vec{e}_r=ik\vec{e}_r} \qquad （12.3.8）$$

再考虑第二项，因$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$，最终，（12.3.7）变为

$$i\frac{\omega}{c}\left[\vec{e}_r\times[\vec{p}]\frac{1}{r}\right]-\frac{1}{r}\left[\vec{e}_r\times[\vec{p}]\frac{1}{r}\right] \qquad （12.3.7'）$$

因此，$\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}$和$\frac{1}{r}$的比较决定了哪一项大，哪一项小。下面我们分三个区域来讨论。

***Tips:* 在静电情况下我们喜欢用φ求$\vec{E}$，因为$\vec{E}$只与φ相关。但在辐射情况下通常利用$\vec{A}$求$\vec{B}$，再通过 Maxwell 方程求$\vec{E}$，这样更方便！**

（1）近区： $r<<\lambda$，但仍满足 $r>>l$。这时公式(12.3.5)和(12.3.6)中的旋度算子只要对分母运算即可。因为每对分母运算一次得到一个$\frac{1}{r}$因子，而对分子运算得到一个$\frac{1}{\lambda}$因子，显然$\frac{1}{r}$比$\frac{1}{\lambda}$贡献大。于是我们得到近区的场强为

$$\vec{B}=\frac{i\omega\mu_0}{4\pi r^2}\vec{e}_r\times[\vec{p}],$$
$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\vec{e}_r\left(\vec{e}_r\cdot[\vec{p}]\right)-[\vec{p}]\right) \quad (12.3.9)$$

我们注意到此时电场和静态时的电偶极子的电场形式上完全一样，只不过时间上推迟了一个辐射时间而已 – 事实上在这个条件下，"准静态"近似适用（参考第 6 章）。

（2） 远区：不仅要求 $r>>l$，而且 $r>>\lambda$，λ 为辐射场的波长，此时，公式(12.3.7)中第一项远大于第二项。因此在计算电磁场时，只需计算∇算子作用到$[\vec{p}]$上即可，无需计算其作用到$\frac{1}{r}$上。这等价于做代换（**12.3.8**）。因此，远区场强的公式为

$$\vec{B}=\frac{\omega^2\mu_0}{4\pi cr}\vec{e}_r\times[\vec{p}]$$
$$\vec{E}=-\frac{\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\vec{e}_r\times\left(\vec{e}_r\times[\vec{p}]\right), \quad (12.3.10)$$

(3) 中间区域：虽然 $r>>l$，但 $r\approx\lambda$，这时我们必须同时保留对分母运算的项和对分子运算的项。这是因为对两者运算得到的因子$\frac{1}{r}$和 $\frac{\omega}{c}=\frac{1}{\lambda}$是同数量级。

思考题：为什么（12.3.9）中电磁场之间差一个i，但（12.3.10）中却没有？

Tips: 直接记住（12.3.10）是 Hopeless 的！其实可以通过$\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$得到$\vec{E}=-c(\hat{r}\times\vec{B})$，从而由$\vec{B}$推导出$\vec{E}$。

习题 **P．343，12.2, 12.4, 12.5**

补充

（1）仿照课件中对真空中格林函数的解（12.2.8）的推导，利用因果关系，推导出一个均匀的负折射介质（在某个频率ω具有$\varepsilon<0,\mu<0$的性质）中的频域格林函数$G(R,\omega)$的解，并解释所得的格林函数的物理意义。

课后 **Project**

1） 利用数值仿真软件（**COMSOL** 或者 **CST**），计算一个偶极天线在不同频率下的辐射图案，反射损耗，以及天线上的电流分布。并与解析结果（**12.4.7**）做比较。

2）为什么在补充题（1）只请大家做频域格林函数而不是时域下的格林函数 $G(R,T)$？若一定要考虑负折射介质中的时域格林函数，应当如何正确计算？