第八讲

上次课：

- Green 互易定理：$\sum_{i=1}^{m} q'_i \phi_i = \sum_{i=1}^{m} q_i \phi'_i$
- 静电导体系的电场总能：$W = \frac{1}{2}\sum_i \phi_i q_i$ --- ϕ_i 为静电平衡后带电体上的电势
- 电容系数：$q_i = \sum_j C_{ij}\phi_j$
- 相互作用能：$W = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i$ φ_i 为去除该带电体的其他带电体在此处的电势

---

§ 3.4 静电体系的稳定性问题

我们前面研究了当导体位置确定时的静电问题，但并没有关注导体在该外设的构型下是否稳定。下面我们研究静电体系的稳定性问题，这包括：*1）静电体系处在给定的构型下是否稳定？2）稳定时体系中电荷分布及导体的构型应满足什么条件？*要回答这些问题，我们需要研究体系的能量，因为体系的稳定状态对应于能量取极小值时的状态。一个荷电导体系的总静电能为

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2(\vec{r})d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d\tau . \qquad (3.4.1)$$

一个体系的状态可由电荷分布 $\rho(\vec{r})$ 描述，也可由电势 $\varphi(\vec{r})$ 唯一描述，这两个函数有着一一对应的关系。对应于不同的电荷分布 $\rho(\vec{r})$（假设可以给定，无论其稳定与否），体系具有不同的能量。因此能量 W 是 $\rho(\vec{r})$ 或 $\varphi(\vec{r})$ 的泛函：$W = W[\rho(\vec{r})]$。现在的问题可以表达成：

对应怎样的电荷分布（或电势分布），体系的能量为极小值？

问题进一步转化成：对给定的 $\rho(\vec{r})$ 做一个虚变动 $\rho(\vec{r}) \to \rho(\vec{r})+\delta\rho(\vec{r})$，要求

$$\frac{\delta W}{\delta \rho} = 0 . \qquad (3.4.2)$$

下面我们根据（3.4.2）讨论静电体系的平衡问题。电荷分布的变动 $\delta\rho(\vec{r})$ 有 2 类 ---- 一种是导体位置不动，电荷在导体上的再分布；另一种是由导体的位置变动引起的（当然严格来说这种情况也会同时引起单个导体上的电荷再分布）。我们下面分别研究这两种情况，这两个问题的解答将给出两个重要定理。

1． 汤姆孙定理

先考虑一种相对简单的情况：假设每个导体都是静止不动的（由外力定扎），但电荷在单个导体上可以自由再分布。显然，这种扰动必须满足如下约束条件：

$$\int \delta\rho_i d\tau = \delta Q_i = 0 \qquad (3.4.3)$$

其中Q_i为第 i 个导体上的总电荷，为守恒量。让我们考虑由于电荷分布的扰动而引起的能量的变化。假设电荷分布$\rho+\delta\rho$和ρ分布对应的电场分布为$\vec{E}+\delta\vec{E}$和$\vec{E}$，则电荷分布的扰动引起的能量变化为

$$\delta W = W[\rho+\delta\rho]-W[\rho] = \varepsilon_0\int \vec{E}\cdot\delta\vec{E}d\tau = -\varepsilon_0\int \nabla\varphi\cdot\delta\vec{E}d\tau \qquad (3.4.4)$$

其中$\delta\vec{E}$为$\delta\rho$所产生的电场，满足

$$\nabla\cdot\delta\vec{E} = \delta\rho/\varepsilon_0 .$$

对（3.4.4）进行分步积分可得

$$\delta \mathrm{W} = -\varepsilon_0\int \nabla\cdot(\varphi\delta\vec{E})d\tau + \varepsilon_0\int \varphi\nabla\cdot\delta\vec{E}d\tau = \int \varphi\delta\rho d\tau = \sum_i \int \varphi\delta\rho_i d\tau \qquad (3.4.5)$$

上式第一项可利用高斯定理变为无穷远处的面积分，其结果为零。由于约束（3.4.3）的存在，极值条件须引入拉格朗日不定乘子λ_i，可得

$$\begin{aligned} 0 &= \delta W - \sum_i \lambda_i \delta Q_i = \sum_i \int \varphi(\vec{r}_i)\delta\rho(\vec{r}_i)d\tau_i - \sum_i \lambda_i \int \delta\rho(\vec{r}_i)d\tau_i \\ &= \sum_i \int [\varphi(\vec{r}_i)-\lambda_i]\delta\rho(\vec{r}_i)d\tau_i \end{aligned} \qquad (3.4.6)$$

加了拉格朗日不定乘子后可认为$\delta\rho(\vec{r}_i)$相互独立，上式导致

$$\varphi(\vec{r}_i) = \lambda_i \qquad (3.4.7)$$

因此，若导体系中每个导体的位置固定不变，每一导体上放置一定量的电荷，则当电荷的分布使所有导体均为等势体时，体系能量到达极值，处于平衡状态。*（思考：严格来说还需证明$\frac{\delta^2 W}{\delta\rho^2}>0$，你能否证明？）*。这就是**汤姆孙定理**。我们在前面讨论导体静电平衡条件时曾通过物理的讨论得到过这个结论，这里根据能量在约束条件下达到极值这一平衡判据对该结论给出了数学上的严格证明。但得到这样的静电平衡状态有两个前提条件：

1）导体上的电荷不会离开导体；

2）每个导体的位置保持不变。

对条件 1）我们已经知道有非静电来源的表面束缚能（功函数）阻止电荷脱离导体。如果我们将条件 2）放松，使得导体的位置可以发生变化，那么这种导体构型的变动必然导致电荷密度的再分布进一步改变体系的总能量。

下面的问题是：什么样的构型是体系的稳定状态呢？

2. 恩肖定理

在讨论由于导体构型的变化而导致的能量改变时，我们做如下假设：

1） “绝热近似”- 带电体的运动速度很慢使得每个时刻其电荷分布都有足够的时间达到平衡（即成为等势体）。

2） 带电体之间的距离足够远，带电体的运动带来的每个导体上的电荷再分布可以忽略。

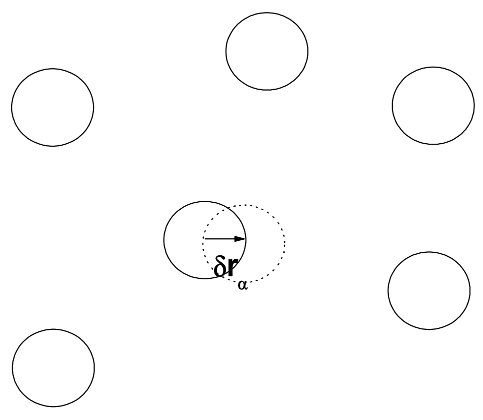
在此近似下，我们可以不考虑体系的固有能 （因为在构型发生改变时固有能不变），而只考虑相互作用能：

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{n} q_{\beta}\varphi_{\beta} \quad . \tag{3.4.8}$$

注意此处φ_{β}是除去第β个带电体之后的其他带电体在第β个带电体所在位置$\vec{r}_{\beta}$的电势。显然，W_{int}是各个导体位置$\{\vec{r}_{\alpha}\}$的函数：$W_{\text{int}}(\{\vec{r}_{\alpha}\})$，其具有极小值的充要条件是：$W_{\text{int}}$对所有带电体的坐标的一阶微商必须为零，二阶微商必须恒大于零. 下来我们考虑体系中某个导体的位置发生了如下变化：$\vec{r}_{\alpha} \to \vec{r}_{\alpha} + \delta\vec{r}_{\alpha}$，则对能量变分后第一个条件要求

$$\nabla_{\alpha} W_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\varphi_{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{\alpha} = 0 \tag{3.4.9}$$

这意味着：在该导体所在处，由其他导体产生的电场必须相互抵消恒为 0。进一步推广，平衡条件是体系中任一导体所处的位置的电场均为 0.



这一条件很物理，但如何实现依赖于具体的导体构型。假设针对任意体系，这一个条件能够实现，我们进一步考察对应的构型是否稳定。仍然考虑第α个带电导体，假设其位置在“平衡位置”附近做微小扰动$\vec{r}_{\alpha} \to \vec{r}_{\alpha} + d\vec{r}_{\alpha}$，因为能量 W 变化的一阶项为 0，需考虑 2 阶项，有：

$$\delta^2 W = \frac{1}{2}\sum_{i,j=x,y,z}\frac{\partial^2 W}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j} dr_\alpha^i dr_\alpha^j = \frac{q_\alpha}{2}\sum_{i,j=x,y,z}\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j} dr_\alpha^i dr_\alpha^j = \sum_{i,j=x,y,z} B_{i,j} dr_\alpha^i dr_\alpha^j \quad (3.4.9)$$

其中 $B_{i,j} = \frac{q_\alpha}{2}\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j}$ 为一个对称矩阵。*（这里少了一个 1/2，原因是我们计算 $\vec{r}_\alpha$ 的变化时，不仅考虑其它导体对第 α 个导体的电势变化，还要考虑第 α 个导体在其它带电体处的电势变化，根据对称性，这两项贡献相等）*。要使得体系稳定，$\delta^2 W$ 应当针对任意的变动恒为正！单独从（3.4.9）式中得不出任何结论，因为不同的方向上的虚位移耦合在一起。可以将 B 矩阵对角化，得到一系列本征值 b_i，则有，

$$\delta^2 W = \sum_{i=1,2,3} b_i \left(d\tilde{r}_\alpha^i\right)^2 \quad (3.4.9')$$

其中 $d\tilde{r}_\alpha^i$ 对应这一本征值的本征向量，是 dr_α^i 的线性叠加，可以理解为这些扰动的“简正”模式。一个稳定状态要求所有可能的扰动均导致能量上升，根据（3.4.9’）中，这意味着我们要求所有的本征值均大于 0：

$$\boxed{b_i > 0, \quad i = 1,2,3} \quad (3.4.10)$$

为证明上式是正确或者错误的，我们从另一方面推得一个恒等式。注意到 ϕ_α 是除 q_α 之外所有其他电荷 $\vec{r}_\alpha$ 处的电势，ϕ_α 一定满足 Poisson 方程。 进一步考虑 $\vec{r}_\alpha$ 处恰恰没有电荷（因为刨除了第 α 个电荷体），有

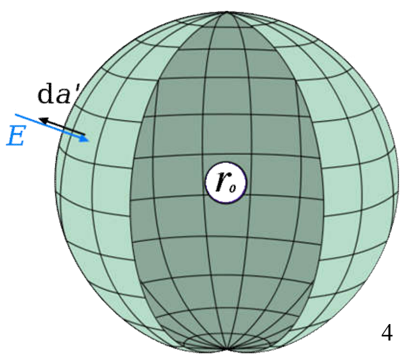
$$\nabla_\alpha{}^2\varphi_\alpha = \sum_i \frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^i} = 0 \quad (3.4.11)$$

对比 $B_{i,j}$ 矩阵的定义，我们发现上式可以换成如下另一种形式

$$\boxed{\sum_{i=1,2,3} b_i = Tr[B_{i,j}] = \frac{q_\alpha}{2}\nabla_\alpha^2\varphi_\alpha \equiv 0} \quad (3.4.12)$$

很显然，（3.4.12）与（3.4.10）相互矛盾！故 W_{int} 不可能有极小值，体系只可能存在“鞍点”类型的极值点（某些方向为极小，某些方向为极大值）。*因此只有静电相互作用的电荷体系不可能形成稳定状态，任何稳定的静电体系的形成都必须有其他约束力参与.* 如果没有一种非静电的约束力，导体上的各电荷元将在相互斥力的作用下向各个方向飞散到无限远处，孤立的带电导体就不复存在. 为此，在静电学中我们总是假定存在着某种非静电的约束力.

其实，对这个问题还有一个比以上推导简单的数学证明。如右图所示，假设 $\vec{r}_0$ 是某个带电体（假设其带正电）的平衡位置，假设此平衡为稳定平衡，则当我们把带电体沿任意方向移开此位置时，它所受到的力（亦即电场）均应指向平衡



位置。此条件要求$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}<0$，其中高斯面为可以包围此带电体的任意无限小曲面。但注意到$\vec{E}$是由“刨除”这个电荷体之后的体系中其他电荷产生的电场，根据高斯定理，这个电场的性质决定了$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}\equiv q\equiv 0$（因为此处“刨去”电荷本身，故电荷为 0），与稳定平衡条件冲突，因此，稳定平衡不可能。其实，两个推导时等价的，但我认为这个推导虽数学上很简练，但物理上不能给出能量鞍点的概念，不如第一个推导物理上清晰直观。

注意：这里所有的讨论都是针对“静电力”，也就是满足$\nabla\times\vec{E}=0$的力。当电场随时间变化时，此时的力不再受这个定理的约束。另外，量子力学中可能存在其他来源复杂的力（如交换耦合力），也不受这个定理的约束。

§3.5 导体表面所受的静电力

置于静电场内的导体会受到静电场的作用力。因为电荷在静电平衡时只堆积在导体表面，这种静电力作用在导体的表面。我们可以从两个不同的角度进行计算。

方法 1：Maxwell 张量

在上一章，我们已经详细介绍了如何计算一个放置于电磁场中的物体受力问题。在定态（不随时间变化）或者时谐场条件下，物体的受力就是 Maxwell 张量的面积分：

$$\vec{F}=-\oint d\vec{S}\cdot\overleftrightarrow{T} \qquad (3.5.1)$$

因为导体内的场$\vec{\mathrm{E}}_{内}=0$，故只有导体的外表面受力。单位面积所受的力为

$$\vec{F}_s=-\vec{e}_n\cdot\overleftrightarrow{T} \qquad (3.5.2)$$

静电条件下，真空中的麦克斯韦张力张量为：

$$\overleftrightarrow{T}=\varepsilon_0\left(\frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I}-\vec{E}\vec{E}\right) \qquad (3.5.3)$$

导体外表面的场只有法向分量，故

$$\vec{F}_S=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\vec{e}_n \qquad (3.5.4)$$

可见导体表面单位面积受力的大小等于静电场的能量密度，方向指向导体外法线方向，也就是说，导体受到一种“负压力”.

你也许会问：这是电场作用到自由电荷上的力啊！不一定就是作用到导体上的力！其

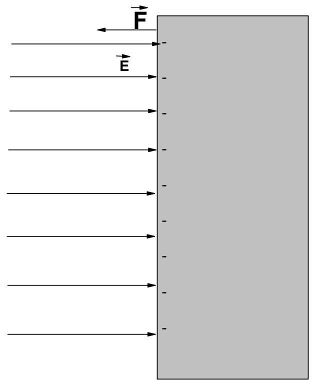
实，导体中的自由电荷在静电平衡时全都集中在导体表面，由于有非静电的束缚力才使得电荷不能飞离导体。因而场对自由电荷的作用力通过非静电来源的平衡力“转嫁”到导体上。换一句话说，把导体和其中的电荷看成一个整体，则外界对电荷的力就等于对整个导体的作用力。

导体表面的场也可用面电荷表示，即

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_n \qquad (3.5.5)$$

代入（3.5.4）式可得

$$\vec{F}_S=\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2\vec{e}_n \qquad (3.5.6)$$



方法 2：直接计算电荷受力

如前所述，导体表面受力实际上是电场对面电荷的作用力，所以我们可以直接用洛伦兹力来计算

$$\vec{F}=\int\rho\vec{E}d\tau \qquad (3.5.7)$$

然而直接利用上式计算有困难，因为理想的导体模型为导体的电荷分布为面电荷分布：$\rho(\vec{r})=\sigma(\vec{r}_{\parallel})\delta(z)$，然电场在导体的内外表面不连续：$\vec{E}_+=\sigma/\varepsilon_0, \vec{E}_-=0$。代入（3.5.7）时，有

$$\vec{F}=\int\sigma(\vec{r}_{\parallel})\delta(z)\vec{E}(\vec{r}_{\parallel},z)d\vec{r}_{\parallel}dz\,, \qquad (3.5.8)$$

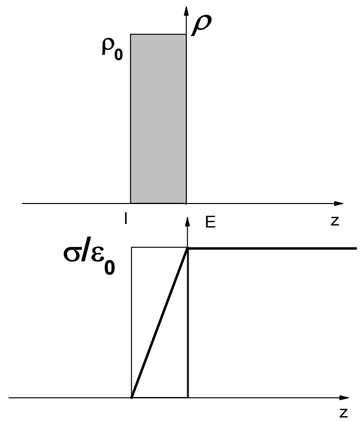
此时对 z 的积分不容易进行，因为将 z=0 代入 E 的表达式时我们不知道该取 $\vec{E}_+$ 还是 $\vec{E}_-$。

这个问题的产生是因为其实导体上的电荷本来就非完全分布于表面上的，面电荷分布只是我们对导体的一个理想化的模型处理。真实情况下，电荷是分布在一个非常薄的表面层内的。模型计算表明，这个过渡区约为10^{-10} m．让我们取最简单的情况，假设电荷均匀地分布在这个厚度为 l 的过渡层中，亦即，

$$\rho(\vec{r})=\begin{cases}0, & z<-l\\ \rho_0, & -l<z<0\\ 0, & z>0\end{cases} \qquad (3.5.9)$$

利用 Gauss 定理（假设电场在体内为 0）可容易计算出电场分布，即

$$E=\begin{cases}0, & z<-l \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_0(z+l) & -l<z<0 \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 l & z>0\end{cases} \qquad (3.5.10)$$



则导体表面所受的力为

$$\vec{F}=\int dS\int_{-l}^{0}\rho_0\vec{E}dz=\int dS\int_{-l}^{0}\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0^{\ 2}(z+l)\vec{e}_n dz$$
$$=\int\frac{1}{2\varepsilon_0}(\rho l)^2\vec{e}_n dS. \qquad (3.5.11)$$

当此过渡层非常小，而我们又不关心过渡层内部的电场时，过渡层的电荷可以等价成面电荷分布，

$$\sigma=\lim_{l\to 0}(\rho l)\,. \qquad (3.5.12)$$

所以，导体表面单位面积所受的力为

$$\vec{F}_S=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\rho l)^2\vec{e}_n=\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2\vec{e}_n \qquad (3.5.13)$$

结果与利用麦克斯韦张力张量所作的计算一致.

Tips: *这个世界上本来没有奇性，人们为了计算以及表述的方便引入了奇异的物理量（如面电荷分布），但未必给你强调这种方便的代价及适用范围。我们在学习的过程中一定要深入掌握原理的来龙去脉，才能对问题理解的更加透彻，在遇到新问题时不会上当或是手足无措。*

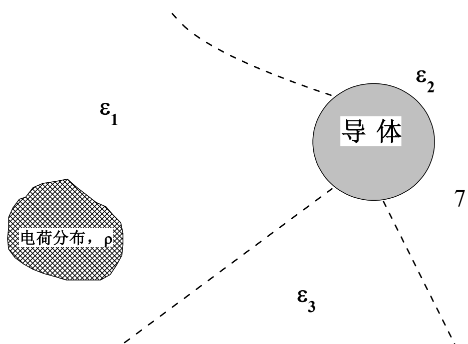
第四章　静电学 II-电介质静电学

上一章中我们研究了静电学的第一部分 - 与导体相关的静电问题。在那里，我们没有真正求解电势的方程，而是根据导体具有自由电荷这一特点研究了与导体相关的一些静电基本定理 --- 汤姆逊定理、恩肖定理、格林互易定理，以及一些基本量的行为 – 如相互作用能、导体受力、电容系数等等。但要具体计算出这些物理量，我们仍需知晓空间的电势分布 $\varphi(\vec{r})$ 。在这一章中，我们转而研究电介质中的静电场的行为，目的就是计算 $\varphi(\vec{r})$ 。与导体不同，电介质中的电场不为 0，电场的标势由方程

$$\nabla\cdot[\varepsilon(\vec{r})\nabla\varphi]=-\rho_f(\vec{r})$$

决定，其中 ε 可以是位置的函数（针对非均匀介质的情形）。在一块均匀介质内部，ε 是常数，故上式变为

$$\nabla^2\varphi=-\frac{1}{\varepsilon}\rho_f$$



为大家熟知的泊松方程。
电介质中电场问题就转化成在合适的边界条件下解上述 Poisson 方程。这些边界条件包括我们上一章讨论过的介质/导体表面边界条件，以及我们下面要介绍的介质/介质边界条件。

§ 4.1 电介质边界条件

由 Maxwell 方程我们已导出场在两个介质分界面的边值关系

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_f \tag{4.1.1}$$

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{4.1.2}$$

其中 $\vec{e}_n$ 为垂直于界面上 2 指向 1 的单位矢量，而 t 指的是界面上两个独立方向矢量。这里需要强调指出的是 σ_f 是自由电荷面密度，*它们是外加的原本不属于介质的源电荷，而且分布在介质分界面的一个薄层里所以被当作奇性的面电荷分布处理（不关心过渡层中的电场）*。根据 $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = -\varepsilon\nabla\varphi$，容易由（4.1.1）导出

$$\boxed{\varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f} \tag{4.1.3}$$

在将 $\vec{E} = -\nabla\varphi$ 带入（4.1.2）可得

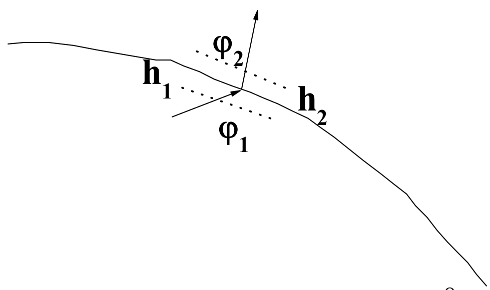
$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_{||}} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_{||}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n_{||}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\varphi_1 - \varphi_2)\big|_{surface} = const. \tag{4.1.4}$$

其中 $n_{||}$ 为界面上的两个独立方向，而 $const.$ 是个与界面上位置无关的一个常数。亦即：在两个介质的界面上，左右两边的标势值最多只差一个对此界面通用的常数值。下面来考虑这个常数。根据势的定义：

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} \xrightarrow{h\to 0} E_{2,n}h/2 + E_{1,n}h/2 = \left(\frac{E_{2,n} + E_{1,n}}{2}\right)h \tag{4.1.5}$$

其中，h 为 1，2 两个点之间的距离，而 $E_{2,n}, E_{1,n}$ 为界面两端的垂直电场分量。在 $h \to 0$ 时，显然（4.1.5）式只有在电场存在奇性（$E_{1,n} \to \infty, E_{2,n} \to \infty$）的时候才不为 0！*在所有我们考虑的情况下，电场都不会发散 - 即使有面电荷存在，两边的电场不会发散（尽管可以不连续），*
因此上面右端=0，即

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_2} \tag{4.1.6}$$



（4.1.3）及（4.1.6）就是关于势的边界条件。显然，边界条件(4.1.6)直接导致关于场的边界条件（4.1.2）

注：

1）关于电势条件（4.1.6），唯一的例外是点电荷，因为点电荷的场在原点是发散的，的确 $\varphi|_{0^+},\varphi|_{0^-}$ 是不连续的。只要将点电荷描述成一个带电为 q 的半径为 a 的小球，则一切问题均解决了。这再一次显示了点电荷只是一个数学模型而已。

2）由 $-\nabla\varphi=\vec{E},\ \nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$ 可以看出，势、场、荷的发散（或者收敛）程度是逐次上升的。比如：面点荷分布对荷来说有一个维度是发散的，但场已经不发散了（但不连续），电势则进一步不仅不发散而且是连续的。

习题：

P85， 3.5， 3.8，3.9

小课题（供有兴趣的同学选作）

1） 计算几个典型的静电体系（比如两个点电荷，两个偶极子等）的能量随位置的变化关系，用图形画出它们的依赖关系，体会“静电体系没有约束就没有平衡态”这一结论。

2） 阅读文献“**Wen WJ, *et. al*, Phys. Rev. Lett. 85 5464（2000）”,** 思考他们的体系是否违反了恩肖定理？谈谈你对这个问题的理解？

3） 寻找并阅读 **Lang** 的文章（应当是书上 **P71** 所引的文章），弄明白表面束缚能的来源，理解它是否是静电来源。

4） 导体表面过渡层中电荷密度分布未必呈现线性变化的，查阅相关文献找出这种变化形式。你能否证明在任意形式的过渡层电荷分布下，**Maxwell** 张量和直接计算法计算出的导体表面受力都一致？