# 第十二讲

**上次课：**

- 介质球/柱在<u>均匀电场</u>中的行为：极化与“退极化”之间的平衡

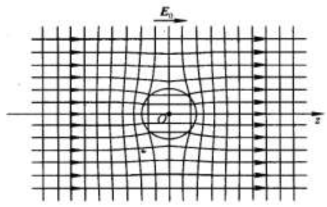


图 4.6

（1）介质被局域场极化产生 P

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_{in} = \varepsilon_0 \chi_e (\vec{E}_0 + \vec{E}_d)$$

（2）P 产生的极化电荷在介质体内部产生<u>退极场</u>

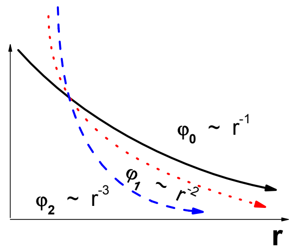
$$\vec{E}_d = -L\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$ **L** 为退极因子，只与几何有关

- 多级矩展开：

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$$

$$Q, \quad \vec{p}, \quad \vec{D}$$

级数越高，势随 r 的 Decay 越快




------------------------------------------------------------------------------------------

************************** 以下为选读内容

*直角坐标系中的多极距表达式比较容易被人理解，但科研中更常用的是球坐标系中的多极距展开。在球坐标下对* $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')d\tau'}{R}$ 作 Tayler *展开。根据恒等式*

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \sum_{l,m}\frac{4\pi}{(2l+1)}\frac{r'^l}{r^{(l+1)}}Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi), \quad r > r'$$ ，*电势为*

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}} \qquad (4.5.14)$$

$q_{lm} = \int (r')^l Y_{lm}^*(\theta',\phi')\rho(\vec{r}\,')d\tau'$ *称为多极矩，它实质上是多极矩在球坐标系中的表示。非常容易理解* $l = 0,1,2,\ldots$ *分别对应于点电荷、偶极距、电四极距、… 的贡献，而他们分别具有* $2l+1$ *个独立分量（不同的* $m$ *值），而这些矩所对应的“波函数---* $\varphi$ *”类似原子物理中* $s,p,d,f\ldots$ *轨道电子的波函数。其实，我们可以这样来进一步理解多级矩。在无源区 Laplace 的通解（假设* $r\to\infty$ *时收敛）为*

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{l,m}\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}Y_l^m(\theta,\phi) = \sum_l \frac{\tilde{B}_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta) \qquad (4.5.15)$$

*其中第二个表达式为轴对称条件下的形式。对比（4.5.14）和（4.5.14），我们理解多极距*

*展开不过是把无源区势函数展开成本征函数的形式，而展开系数由外界条件（进一步由源区的电荷分布）唯一确定！*


$$\varphi(\vec{r})=\sum_{l,m}\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}Y_l^m(\theta,\phi)=\sum_{l}\frac{\tilde{B}_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

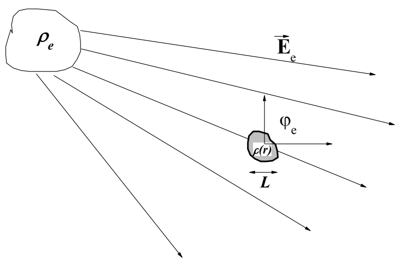
*思考题：*

*比较直角坐标系和球坐标系下的多极矩表达式，在不同 l 子空间下建立它们之间的联系，讨论其中的物理（可以以 l=1 为例）。*

********************************

## § 4.6 多极矩同外场的相互作用

讨论一块任意电荷分布的带电体系，利用多极矩展开不仅可以容易地得到其在远处产生的电场，还可以容易地计算其与外场的相互作用。尽管这两类问题看上去很不相同，使用的方法却非常类似。上一章中我们知道当一个点电荷放置在远处的带电体（电荷密度 $\rho_e$）产生的电势 $\varphi_e$ 中时，其与外场的相互作用能为 $q\varphi_e(\vec{r})$。现考虑处于 $\varphi_e$ 中的连续带电体（电荷密度为 $\rho$，处在坐标原点附近），则带电体与外场的相互作用能为




$$U_i=\int\rho(\vec{r})\varphi_e(\vec{r})d\tau \qquad (4.6.1)$$

*应当注意我们得到这个结论的前提是体系与源相距甚远，以至于源的电荷密度不因体系的改变而变化。*因为 $V$ 很小，所以可将 $\varphi_e$ 在参考点附近（即原点）作泰勒级数展开：

$$\varphi_e(\vec{r})=\varphi_e(0)+\vec{r}\cdot\nabla\varphi_e\big|_{\vec{r}=0}+\frac{1}{2!}\vec{r}\vec{r}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_{\vec{r}=0}+\cdots \qquad (4.6.2)$$

我们能做这个泰勒展开的基础上源离得很远，其电势在此处附件的变化足够缓慢。代入(4.6.1)式得

$$U_i = U_i^{(0)} + U_i^{(1)} + U_i^{(2)} + \cdots$$

其中

$$U_i^{(0)} = Q\varphi_e(0) \qquad (4.6.3)$$

$$U_i^{(1)} = \vec{p}\cdot\nabla\varphi_e\big|_0 = -\vec{p}\cdot\vec{E}_e\left(\vec{r}=0\right) \qquad (4.6.4)$$

$$U_i^{(2)} = \frac{1}{6}\vec{D}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 \qquad (4.6.5)$$

因为$\left(\nabla^2\varphi_e\right)_0 = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{e0}$，而作为外源的$\rho_{e0}$一般分布在离$V$很远处，故在$V$区域内$\rho_e = 0$，因此有$C\bar{\bar{I}}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 = C\nabla^2\varphi_e\big|_0 = 0$。再一次，若我们选择常数 $C$ 满足$C \propto \mathrm{Tr}\{\vec{D}\}/3$，则有

$$U_i^{(2)} = \frac{1}{6}\bar{\bar{D}}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 = \frac{1}{6}\left[\vec{D}-\frac{1}{3}Tr\{\vec{D}\}\vec{I}\right]:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 = \frac{1}{6}\tilde{\bar{D}}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 = -\frac{1}{6}\tilde{\bar{D}}:\nabla\vec{E} \qquad (4.6.6)$$

$U_i^{(0)}, U_i^{(1)}$和$U_i^{(2)}$分别代表点电荷、电偶极矩和电四极矩与外电场的相互作用能。*（4.6.3-5）显示：电荷感知到外场的积分效应，电偶极子感知到电场，而电四极子感受到电场的微分效应 --- 因此，多极矩随着级数的增加，愈能感知到外场细微的变化，因为其本身就是结构的细微不对称给出的。*

*思考题：给定两个相同的有确定电荷分布$\rho(\vec{r}\,')$的带电体，其中心分别处于原点以及位置$\vec{d}$处，假设 d 远远大于带电体的大小，你能否将其二者之间的静电相互作用能表达成两个带电体的矩（$\{Q,\vec{p},\vec{D}\}$）的函数？*

下面，我们将根据电偶极矩与外场的相互作用能$U_i^{(1)} = -\vec{p}\cdot\vec{E}_e$，来求出电偶极矩在外场中所受的力和力矩。

## （A）电偶极矩在外场中受的力

研究电偶极子在电场$\vec{E}_e$中受到电场的作用力$\vec{F}_e$有两种方法。

第一种：假设在 t=0 时刻将偶极子钉扎在外场中每个位置$\vec{r}$处，然后放开钉扎，因为偶极子受到外场对其的作用力$\vec{F}_e$，会发生（无限小的）位移$\delta\vec{r}$并获取

动能$T=\vec{F}_e\cdot\delta\vec{r}$（因为移动很小的距离，可以假设$\vec{F}_e$几乎不变）。将偶极子与外场看成一体，则其总能量守恒，故有：$T+U_i(\vec{r}+\delta\vec{r})=U_i(\vec{r})$，将$T=\vec{F}_e\cdot\delta\vec{r}$带入上式可得：$\vec{F}_e\cdot\delta\vec{r}=-(U_i(\vec{r}+\delta\vec{r})-U_i(\vec{r}))=-\nabla U_i\cdot\delta\vec{r}$，因此有：$\vec{F}_e=-\nabla U_i$。但这个方法有局限性：1）并不能确认外场对偶极子是否还有力矩，放开钉扎也许会同时带来转动能的增加；2）一会儿将外场力看做外力，一会儿又在使用能量守恒时将其作为偶极子与外场的内力，这种处理方法容易引发误解。

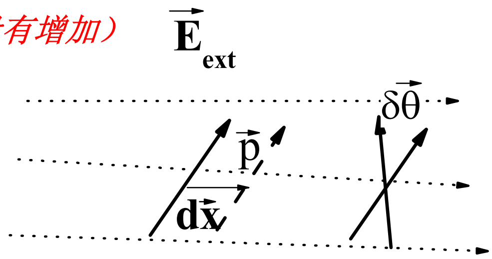
第二种：下面介绍另一种处理方法。假设施加外力$\vec{F}'=-\vec{F}_e$，则偶极子达到平衡，静止不动（如果有力矩也同样施加反向外力矩平衡）。现在在此基础上对偶极子沿给定方向附加非常小的外力$\delta\vec{F}'\to 0$，使得偶极子*无限缓慢地*平移$\delta\vec{r}$。**将偶极子与电场看成一个体系，外力是除了偶极子和电场之外的“外力”，将偶极子与外场之间的相互作用能是**$U_i^{(1)}=-\vec{p}\cdot\vec{E}_e$。在这个过程中，外力对体系（偶极子+电场）做的功为

$$\delta W'=\left(\vec{F}'+\delta\vec{F}'\right)\cdot\delta\vec{r}\xrightarrow{\delta\vec{F}'\to 0}\vec{F}'\cdot\delta\vec{r}=-\vec{F}_e\cdot\delta\vec{r}\qquad(4.6.7)$$

整个体系（电偶极子+电场）的能量增加为

$$\delta U=-\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r}+\delta\vec{r})+\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})=-\delta\vec{r}\cdot\nabla\left(\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})\right)\qquad(4.6.8)$$

*（注：因为偶极子运动无限缓慢，故动能没有增加）*




根据能量守恒上面 2 式应相等，因此电场对偶极子的作用力为

$$\vec{F}_e=\nabla\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right)=\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}+\vec{p}\times(\nabla\times\vec{E})$$

利用静电场$\nabla\times\vec{E}=0$，得

$$\boxed{\vec{F}_e=\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}}\qquad(4.6.9)$$

**一个电偶极子在均匀电场中不受力，只有电场非均匀时才受到电场的作用力！**

### （B）电偶极矩在外场中受的力矩

完全类比于力的处理，设电场对偶极子的力矩为$\vec{M}_e$，则施加外力矩$\vec{M}'=-\vec{M}_e$与之平衡，在此基础上将偶极矩**准静态地**转动一个$\delta\vec{\theta}$，外力矩作的功为

$\vec{M}'\cdot\delta\vec{\theta}=-\vec{M}\cdot\delta\vec{\theta}$，体系（偶极子+外场）的能量增加只有相互作用能（准静态转动不增加动能），为$\delta\left(-\bar{p}\cdot\bar{E}\right)$，故根据能量守恒有

$$\vec{M}'\cdot\delta\vec{\theta}=-\vec{M}_e\cdot\delta\theta=-\delta\left(\bar{p}\cdot\bar{E}\right)=-\delta\bar{p}\cdot\bar{E} \tag{4.6.10}$$

因为$\bar{p}$的大小不变，仅改变方向，故

$$\delta\bar{p}=\delta\vec{\theta}\times\bar{p} \tag{4.6.11}$$

这样

$$\vec{M}_e\cdot\delta\vec{\theta}=\left(\delta\vec{\theta}\times\bar{p}\right)\cdot\bar{E}=\left(\bar{p}\times\bar{E}\right)\cdot\delta\vec{\theta} \tag{4.6.12}$$

即

$$\boxed{\vec{M}=\bar{p}\times\bar{E}} \tag{4.6.13}$$

因此，无论电场均匀与否，只要电偶极子的方向与此处的局域电场方向不一致，则其就会受到一个力矩的作用使其平行于电场！

*思考题：《电磁学》中经常利用如下技巧来展示电力线分布：将细针型碎屑或者头发屑撒入电场中，震动一下，最后形成的 Pattern 就可以显示出电力线分布。请思考一下这个做法的物理原理，并设计模型通过模拟计算展示一下你的理论。*

# 第五章　静 磁 场

本章中我们将学习静磁场的处理。静磁场是由稳恒电流产生的不随时间变化的场。电流是由电场驱动电荷运动而产生的。因为电流在流动过程中一定有能量耗散（将动能交给杂质，以热能形式给环境），静电场本身产生的电流一定不能稳恒！必须有外加的非静电来源的场（电动势）一直给体系提供能量才能保持电流稳恒！因为课程的时间限制，这里我们将略去对稳恒电流的来源及其满足的规律的讨论，而只假设我们已得到某种一定分布的稳恒电流$\vec{j}$，讨论由其产生的静磁场的基本行为。

## §5.1　磁场的矢势方程和边值关系

静磁场的基本方程是

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}\end{cases} \tag{5.1.1}$$

本构关系（假设为线性、各向同性介质）为 $\vec{B}=\mu\vec{H}$。

在两个磁介质的交界面上相应的边值关系为

$$\begin{cases}\vec{e}_n\cdot(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0\\ \vec{e}_n\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{\alpha}\end{cases} \tag{5.1.2}$$

类似于静电情形，设法把磁场方程化到标准形式。利用 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，可得

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\mu\vec{j} \tag{5.1.3}$$

静磁场满足 $\nabla\cdot\vec{A}=0$ [此结论可由 Biot-Sarvert 定律推出（见第 1 章）]，上式变成

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{j} \tag{5.1.4}$$

(5.1.4)式即为我们熟知的泊松方程，只不过现在其表现成矢量场方程 – 亦即每一个 A 的分量场都满足泊松方程。所以矢势 $\vec{A}$ 和标势 $\varphi$ 在静场时满足同一形式的方程。为了求解（5.1.4），我们还要导出关于 $\vec{A}$ 的边值关系。在介质分区均匀时，对应(5.1.2)式我们有

$$\begin{cases}\vec{e}_n\cdot\left[(\nabla\times\vec{A})_1-(\nabla\times\vec{A})_2\right]=0 & (5.1.5)\\ \vec{e}_n\times\left[\dfrac{1}{\mu_1}(\nabla\times\vec{A})_1-\dfrac{1}{\mu_2}(\nabla\times\vec{A})_2\right]=\vec{\alpha}_f & (5.1.6)\end{cases}$$

(5.1.5) 式可进一步简化为

$$\nabla\cdot\left[\vec{e}_n\times(\vec{A}_1-\vec{A}_2)\right]_{boundary}=0 \tag{5.1.7}$$

上式显示 $\vec{e}_n\times(\vec{A}_1-\vec{A}_2)_{boundary}$ 为与界面位置无关的常矢量，但其方向和大小并不能从中得到。仿照我们以前在静电学中对电势的边界条件的处理，将关系式

$$\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}$$

应用到交界面的一个闭合回路上，只要 $\vec{B}$ 在交界面上的值是有限的，则有

$$(\vec{A}_1-\vec{A}_2)_{\parallel}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{e}_n\times(\vec{A}_1-\vec{A}_2)=0 \tag{5.1.8}$$

这表示 $\vec{A}$ 在边界的切线方向的分量是连续的，这与静电学中的边界条件 $\varphi_1=\varphi_2\big|_{boundary}$ （4.1.6）相对应。同样道理，事实上（5.1.6）对应于静电学中的另

外一条边界条件 $\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=-\sigma_f$（4.1.3），在某一些特定的条件下，完全可以把（5.1.6）式化成与（4.1.3）类似的形式。

因此，对静磁学问题，边界条件有 2 中设置方法，（1）或者设置在边界上的 $\vec{e}_n\times\vec{A}$ 的数值（根据（5.1.8）），（2）或者设置在边界上的 $\vec{e}_n\times\vec{H}$ 的数值（对应边条（5.1.6））。设置好体系的边界条件，就可以(5.1.8)在边条下求解 Poisson 方程解出 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$。

我们一再看到了静磁场问题和静电场问题的类似性，其实这 2 个问题中场能的表达式也完全类似。静电场能量为

$$U_e=\frac{1}{2}\int_\infty\vec{E}\cdot\vec{D}d\tau=\frac{1}{2}\int_\infty\varphi\rho d\tau$$

静磁场的能量为

$$\begin{aligned}U_m&=\frac{1}{2}\int_\infty\vec{B}\cdot\vec{H}d\tau=\frac{1}{2}\int_\infty(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}d\tau\\&=\frac{1}{2}\int_\infty\left[\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})+\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})\right]d\tau=\frac{1}{2}\int_\infty\vec{A}\cdot\vec{j}d\tau\end{aligned}$$

形式与静电场总能非常类似。

注：

*从现有的所有证据来看，你一定以为静磁场中的 $\vec{A}$ 与静电场中的 $\varphi$ 的地位类似（都是势），而 $\vec{j}$ 与 $\rho$ 的地位一致（都是源）。这是对的，但又不完全对。从满足的方程和相对论协变等许多问题来看这个论断是对的，在有些情况下结论却恰恰相反 ---$\vec{A}$ 与 $\rho$，$\vec{j}$ 与 $\varphi$ 的地位一致（参考 Landau 或者 Jackson 的书）。严格推导需要很大的篇幅，但我们可以从一个简单的 Argument 来理解：在静电学中，当我们将电荷给定时，相当于使导体成为孤立导体，任何外界的变动都不会改变孤立导体上的电荷，这样的体系是“孤立体系”；当我们确定 $\varphi$ 时，外界的变化会改变导体的电势因此必须有“外源”输出或抽出能量以保持恒定电势，因此这样的体系是个“有源体系”。现在我们看静磁学，给定电流 j 情况下，如果外界发生改变则驱动电场相应发生变化，此时也必须从“电动势”输出或抽出能量以保持恒定电流，因此这个体系不是“孤立体系”，恰恰是一个“有源体系”!。从这个意义上讲，在考虑这类问题是（孤立或者有源），$\vec{j}$ 与 $\varphi$ 的地位一致！*

*思考题:*

*1）静电边界条件的两类设置方法很容易实行 --- 确定电势（接一个大的等势体，对应$\varphi$）或者确定电荷（孤立导体，对应$\vec{n}\cdot\vec{D}$）。你能否考虑下实际情况下静磁边界条件如何设置（$\vec{n}\times\vec{A}$, $\vec{n}\times\vec{H}$）？*

## §5.2 静磁场的唯一性定理

与静电场类似，静磁场也有唯一性定理 --- 对确定的体系，场的解由边界条件唯一确定。对静电问题，边界条件可以是设定边界上标势值$\varphi|_b$，或者是$\vec{D}$场在边界上垂直分量（与导体上的表面电荷有关）；与此相对应，对静磁问题，前者是边界上的矢势$\vec{A}$的切向分量（见边条（5.1.5）），后者是$\vec{H}$场的切向分量（与导体上的表面电流相关，见（5.1.2））。

**定理：**如果静磁体系 V 内存在着电流和磁介质，且关系式$\vec{B}=\mu\vec{H}$成立，则体系内的磁场由电流和磁介质的分布及<u>边界条件</u>（边界上$\vec{A}$或$\vec{H}$的切向分量）<u>唯一确定</u>。

**证明：**设对同一个体系存在两组不同的解$\vec{B}'=\nabla\times\vec{A}'=\mu\vec{H}'$和$\vec{B}''=\nabla\times\vec{A}''=\mu\vec{H}''$，均满足场方程及预设的边界条件，则必然有

$$\nabla\times\vec{H}'=\nabla\times\vec{H}''=\vec{j} \tag{5.2.1}$$

$$\vec{e}_n\times\vec{H}'\big|_b=\vec{e}_n\times\vec{H}''\big|_b \quad \text{or} \quad \vec{e}_n\times\vec{A}'\big|_b=\vec{e}_n\times\vec{A}''\big|_b \tag{5.2.2}$$

根据场的线性叠加原理，我们可构造一个新的场，即令

$$\vec{B}=\vec{B}'-\vec{B}'',\quad \vec{H}=\vec{H}'-\vec{H}'',\quad \vec{A}=\vec{A}'-\vec{A}'' \tag{5.2.3}$$

对于这样一个场，显然，我们有

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=0 \\ \vec{e}_n\times\vec{A}\big|_B=0,\quad or,\quad \vec{e}_n\times\vec{H}\big|_B=0 \end{cases} \tag{5.2.4}$$

我们来计算这个场的能量：

$$\begin{aligned} U_m&=\frac{1}{2}\int_V\vec{B}\cdot\vec{H}d\tau=\frac{1}{2}\int_V(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}d\tau \\ &=\frac{1}{2}\int_V\left[\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})+\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})\right]d\tau \\ &=\frac{1}{2}\oint_S(\vec{A}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}=\frac{1}{2}\oint_S\left[(\vec{A}\times\vec{H})\cdot\vec{e}_n\right]dS \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

其中第二行到第三行的推导由于 $\nabla\times\vec{H}=0$ 而得到。根据矢量混合积公式 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$，（5.2.5）中右方积分函数可改写为

$$\left(\vec{A}\times\vec{H}\right)\cdot\vec{e}_n=\left(\vec{e}_n\times\vec{A}\right)\cdot\vec{H}=\left(\vec{H}\times\vec{e}_n\right)\cdot\vec{A} \qquad (5.2.6)$$

根据（5.2.4），我们发现，无论我们设置的边条是对 A 还是对 H，（5.2.5）式右端恒为 0。于是，

$$\int\frac{1}{\mu}(\vec{B}'-\vec{B}'')\cdot(\vec{B}'-\vec{B}'')d\tau=0 \qquad (5.2.7)$$

由于体系的磁导率 $\mu_r$ 恒正，故要使积分值恒为零，被积函数必须恒为零，即

$$\vec{B}'=\vec{B}'' \quad 或 \quad \vec{H}'=\vec{H}''$$

可见，所设的两个解是同一个解，定理得证。显然，类似我们对静电问题唯一性定理的证明，静磁问题中，只要 B 和 H 的关系是单调单值的，即使不是线性介质，唯一性定理仍然成立！

*简单的讲，静磁场的唯一性定理和静电场的唯一性定理一样，都表述的是：对于一个给定的物理问题，解由边界条件唯一确定。当然，它们的适用条件也是一样的，只对 B-H 关系单调且一一对应的体系成立。对铁磁/铁电等体系，一个给定的 E，B 场对应不同的 D，H 场，则唯一性定理不成立。*

**习题：P. 115, 4.9, 4. 11, 4.14**

**补充题：**证明（**4.6.6**）式（补齐课件中省略的所有数学运算步骤）

选做题

*1）比较直角坐标系和球坐标系下的多极矩表达式，在不同 l 子空间下建立它们之间的联系，讨论其中的物理（可以以 l=1 为例）。*

***2）对课件中的例题，利用直接积分法求出电势，然后按照(L/r)的幂次展开，将最后结果与多级矩展开法比较。***