

第十一讲

上次课

- 本征函数展开法:

(1) $\nabla^2 \varphi = 0$ 有一系列正交完备的解 – 本征函数 $\{\varphi_n\}$

(2) 完备性 --- $\varphi = \sum_n c_n \varphi_n$

(3) 展开系数: $c_n = \langle \varphi_n | \varphi \rangle|_{\text{boundary}}$, 根据正交性比较不同本征函数前的系数

- 例子: 接地金属球放置于均匀电场中

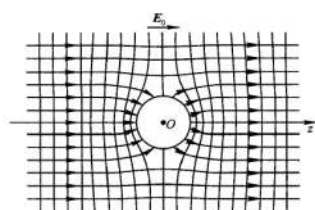


图 4.5

$$\varphi = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$$

- 匀强场中的介质球

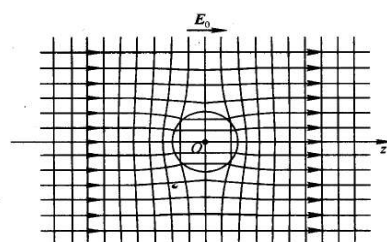
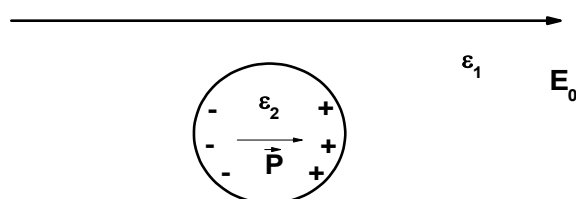


图 4.6

$$\varphi_1 = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}; \quad \vec{p} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$$

$$\varphi_2 = -\vec{E}_{in} \cdot \vec{r}; \quad \vec{E}_{in} = \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \vec{E}_0$$



下面我们基于一个简单情况 ($\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_r$) 来进一步讨论物理图像。因为 \vec{p} 与外场之间的关系已经非常清晰, 我们下面重点讨论 \vec{p} 与内场 \vec{E}_{in} 之间的关系。

(1) 首先根据 (4.2.29) 将 \vec{p} 改写为

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0 \frac{\epsilon_r - 1}{2 + \epsilon_r} \quad (4.2.29')$$

另一方面,注意到构成介质球的材料具有极化率 $\chi = \epsilon_r - 1$, 而球内的局域电场为均匀场 \vec{E}_{in} , 因此, 球内材料被极化后具有均匀极化强度:

$$\vec{P} = \chi\epsilon_0 \vec{E}_{in} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \frac{3}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_0 = 3\epsilon_0 \vec{E}_0 \frac{\epsilon_r - 1}{2 + \epsilon_r} \quad (4.4.31)$$

(4.4.31) 与 (4.2.29') 相比, 我们发现极化强度与偶极矩之间有如下关系:

$$\vec{p} = \vec{P} \cdot 4\pi R^3 / 3 = \int \vec{P}(\vec{r}) d\tau \quad (4.4.32)$$

这非常物理, 显示: 此时在外场看到“有效偶极矩”的的确确就是该介质球被极化后具有的总的偶极矩!

(2) 再反过来讨论 \vec{E}_{in} 与极化强度 \vec{P} 之间的关系。因 $\epsilon_r > \epsilon_0$, 我们发现 $\vec{E}_{in} < \vec{E}_0$, 这是因为极化电荷在球内产生了电场抵消了部分外电场的贡献。我们把这部分由极化电荷在球内产生的电场从内场中剥离开来, 计算可得

$$\vec{E}_{p,in} = \vec{E}_{in} - \vec{E}_0 = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0 = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \quad (4.4.33)$$

这个场通常被称为“退极场”- 由于极化产生的极化电荷产生的场, 其作用是“退”掉外场的作用。整理后的结果为:

$$\vec{E}_{in} = \vec{E}_0 - \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \quad (4.4.34)$$

上面 2 式在很多情况下成立的。一般情况下, 我们可以把退极场表示成

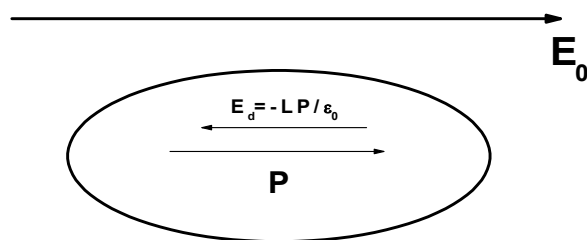
$$\vec{E}_d = -L \cdot \vec{P} / \epsilon_0 \quad (4.4.35)$$

L 称为退极化因子, 只依赖于物体的几何形状, 与构成球体的材料没有任何关系! 其越大, 说明退极效应越显著。这一点与 (4.4.31) 中显示的内场与极化强度之间的平庸的与材料性质相关的线性比例关系完全不同!

容易证明: 对平板 $L=1$, 对球 $L=\frac{1}{3}$, 对细针, $L=0$, 对椭球, 针对长短轴的不同, L 可以由 0~1 不等。总结下来, 介质在外场下的静电行为是

- 被外场极化
- 极化电荷在球外的贡献为偶极子

- 极化电荷对球内的贡献为均匀电场
 - 退极场 (depolarization field)



思考题:

- (1) 若外部介质不是空气, 而是具有介电常数 ϵ_1 的某种电介质, 极化强度 P 是多少? 以上讨论是否仍然成立? 若不成立, 为什么?
- (2) 能否自己推导出椭球体的“退极因子”。

退极场概念的重要性在于它给予我们看待一个介质体在外场下极化的新图像 (以及一个新计算方法)。假设我们并不知道该物体的具体形状, 但知道其退极化因子为 L , 则我们立刻可以写出它的内场与极化场之间的关系

$$\vec{E}_{in} = \vec{E}_0 - L \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} \quad (*)$$

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}_{in} \quad (**)$$

这两个方程清晰地显示出极化 (P) 和局域场 (不是源场! 是局域总场!) 之间的相互制约、最终达到平衡的关系。通过两个方程可解出:

$$\vec{E}_{in} = \frac{1}{1 + L \cdot \chi} \vec{E}_0$$

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \frac{1}{1 + L \cdot \chi} \vec{E}_0$$

将 $L=1/3$, $\chi = \epsilon_r - 1$ 带入则得到之前对球体的结论。对任意形状, 即使我们不能严格解, 若已知其 L , 则仍然可以很物理地知道其结论。这不是很神奇吗?

下面研究一个 2 维柱坐标问题。

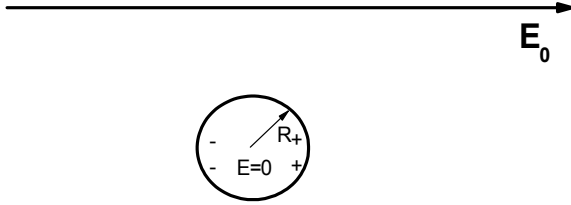
[例 7] 在均匀外电场 $\vec{E} = E_0 \hat{e}_x$ 中有一半径为 R 、电荷线密度为 λ 的无限长导体圆柱, 柱轴与外场垂直, 求空间中的电场分布。

解: 柱内区域的场为零, 只需考虑柱外区域的电势, 其满足方程

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (4.4.36)$$

边界条件为

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{E}_{\rho \rightarrow \infty} = E_0 \hat{x}; & (1) \\ \varphi|_{\rho=R} = \text{常数}; & (2) \\ \oint \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} R d\phi = -\lambda/\epsilon_0 & (3) \end{array} \right. \quad (4.4.37)$$



第一个边条值得讨论一下。处理均匀外场中的散射体的问题时，如果散射体是三维物体（如球），则任何感应（极化）电荷均处在局域区域内，因此在无穷远处，它们对场或者势的贡献都趋向于 0，此时我们可以将边条（1）进一步改写成 $\varphi|_{r \rightarrow \infty} = -\vec{E} \cdot \vec{r}$ 。然而处理 2 维问题（如无限长柱子）时，感应（极化）电荷会出现在无穷远处（因为柱子会延伸到无限远处），它们对电势的贡献不趋向于 0！幸运的是，此时，它们对电场的贡献 $\sim 1/\rho$ ，故对电场的贡献仍趋于 0。处理无限大平面问题时这个问题更严重 - 感应（极化）电荷沿着 2 个方向散布到无限远，故电场、电势均不趋向于 0！不过通常 1 维问题根本无须这样求解。

此问题为与 z 无关的柱对称问题，故可以利用（4.4.8）展开

$$\varphi = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) \cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \sin(n\phi)$$

注意到 $\vec{E} = -\nabla \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \hat{e}_\rho - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$ ，只考虑径向电场分量，则边条（1）变成中

$-\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \rightarrow E_0 \cos \phi, \quad \rho \rightarrow \infty$ 。根据这一边条，势函数中所有比 ρ^1 发散快的项都不

可以保留，故

$$A_n = C_n = 0, \quad n > 1 \quad (4.4.38)$$

进一步，

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = -A_1 \cos \phi - C_1 \sin \phi = E_0 \cos \phi \quad (4.4.39)$$

因为 $\sin \phi$ 与 $\cos \phi$ 正交，通过比对系数可得

$$A_1 = -E_0, \quad C_1 = 0 \quad (4.4.40)$$

考虑边条 (2), 因 $\phi|_{\rho=R}$ 应与 ϕ 无关, 故有

$$\begin{cases} A_n R^n + B_n R^{-n} = 0 \\ C_n R^n + D_n R^{-n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_n = 0, n > 1; & B_1 = E_0 R^2 \\ D_n = 0 \end{cases} \quad (4.4.41)$$

现考虑边条 (3): 对角度积分过程中所有 $n > 1$ 的项都没有贡献 (因为 $\sin(n\phi), \cos(n\phi)$ 对角度积分一圈恒为 0), 只有 A_0, B_0 两项留下来。最后结果为:

$$B_0 \frac{1}{R} 2\pi R = -\lambda \Rightarrow B_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \quad (4.4.42)$$

A_0 为一常数, 不能唯一确定。总结下来, 最终的电势为

$$\phi = A_0 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho - E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 R^2}{\rho} \cos \phi \quad (4.4.43)$$

分析 (4.4.43), 我们发现空间电势由三部分贡献叠加而成: 外场, 无限长带电导体棒, 以及一个 2 维偶极子 ($\vec{p} = 2\pi\epsilon_0 E_0 R^2$, 参考补充题) 的场:

$$\phi_p^{(2)} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{\rho}}{\rho}。柱外电场强度为$$

$$\vec{E} = \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} + E_0 \cos \phi + \frac{E_0 R^2}{\rho^2} \cos \phi \right) \hat{e}_\rho + \left(-E_0 \sin \phi + \frac{E_0 R^2}{\rho^2} \sin \phi \right) \hat{e}_\phi \quad (4.4.44)$$

注: 由这个问题的求解我们又一次发现一个规律, 即均匀外电场下无限长柱子的静电问题我们只需要考虑 $l=1$ 项的贡献。这里的物理是均匀电场只包含 $l=1$ 项, 而同时柱子的良好几何特征保证了不会将不同 l 的项耦合, 因此最终的散射场不会激发其他 l 项的贡献。

§ 4.5 多极矩法

之前对静电边值问题我们已经介绍了两种严格的求解方法——镜像法及本征函数展开法。然而这些方法只能处理一些具有良好对称性的问题。在实际问题中, 激发电场的电荷分布不见得具有良好的对称性, 此时应如何处理? 一般来讲这类问题我们只能数值处理。不过对某一类特定问题, 电荷分布全部集中在一个很小的区域内, 而我们要求的又是远离带电体空间的电场, 这时我们可采用一种近

似的方法 —— 多极矩展开法。

如图 4.10, 若电荷分布在有限体积 V 内, 电荷密度为 $\rho(\vec{r}')$, 这个体积的线度为 l , 考查的是 P 点的电场, 而 P 点和体积 V 内一点 O (设为原点) 的距离为 \vec{r} 。多极矩法是讨论在 $|\vec{r}| \gg l$ 情况下的场分布。 P 点电势的准确解的形式为

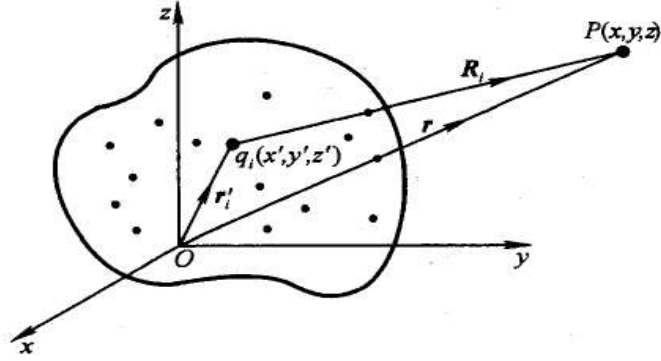


图 4.10

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{R} \quad (4.5.1)$$

这里, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ 。由于 P 点离源较远, 有 $r' \ll r$, 因此作为 \vec{r}' 的函数 $\frac{1}{R}$ 可以在 $\vec{r}' = 0$ 附近作 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{r} + \sum_{i=x,y,z} (-r'_i) \cdot \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{1}{r} \right) \bigg|_{\vec{r}'=0} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=x,y,z} r'_i r'_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left(\frac{1}{r} \right) \bigg|_{\vec{r}'=0} + \dots \\ &= \frac{1}{r} - \sum_{i=x,y,z} r'_i \cdot \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=x,y,z} r'_i r'_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

上式可以写成更紧凑的数学上完全等价的矢量 (并矢) 的形式:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \vec{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \vec{r}' \vec{r}' : \nabla \nabla \frac{1}{r} + \dots \quad (4.5.2')$$

因此, 将 (4.5.2') 式代入 (4.5.1), 我们发现电势可以展开为:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

其中,

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}, \quad Q = \int \rho(\vec{r}') d\tau' \quad (4.5.4)$$

$$\varphi_1 = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla \frac{1}{r}, \quad \vec{p} = \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' d\tau' \quad (4.5.5)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' \cdot \vec{r}' d\tau' : \nabla \nabla \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{6} \vec{D} : \nabla \nabla \frac{1}{r}, \quad (4.5.6)$$

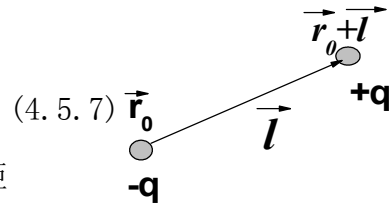
$$\vec{D} = 3 \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' \cdot \vec{r}' d\tau'$$

各项的物理意义如下：

第一项是一个点电荷的势，相当于 V 内电荷都集中在坐标原点时在 P 点所产生的势；第二项是偶极子的势， $\varphi_1 = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ，体系相应的偶极矩为 $\vec{p} = \int \rho \vec{r}' d\tau'$ 。

为进一步理解这一项，考虑由一正一负两个点电荷组成体系，电荷位置分别处于 \vec{r}_0 及 $\vec{r}_0 + \vec{l}$ 处，经过简单计算可得

$$Q = 0, \quad \vec{p} = q\vec{l}$$



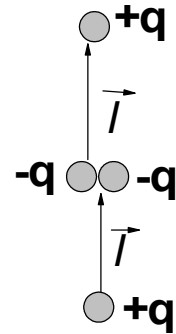
此即我们熟悉的电偶极矩。(4.5.5) 是电偶极矩在一般情况下的定义，相当于 (4.5.7) 式的推广。

第三项称为体系的四极矩的势， $\vec{D} = 3 \int \rho \vec{r}' \vec{r}' d\tau'$ 为体系的四极矩。就像偶极矩可以看做两个大小相等符号相反的电荷（单极矩）靠近组成的体系一样，四极矩可以看作是由大小相等方向相反的偶极子组成的系统，最简单的情况如下图所示。此时，容易证明， \vec{D} 中唯一不为 0 的分量是

$$D_{zz} = 6l^2 q$$

一般的电荷分布情况下，电四极矩的定义是 (4.5.6) 式。

\vec{D} 是一个 2 阶张量，或者说是个 3×3 矩阵，共有九个分量，由于它是对称的，所以只有六个独立分量。 \vec{D} 中还有一个



隐含的不独立分量，注意到在 $\vec{r} \neq 0$ 处总有 $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ （空间无电荷分布），亦即：

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left(\frac{1}{r} \right) \delta_{ij} = \vec{\vec{I}} : \nabla \nabla \frac{1}{r} = 0 \quad (4.5.8)$$

上式显示对任意一个常数 C ，均有

$$C \vec{\vec{I}} : \nabla \nabla \frac{1}{r} \equiv 0 \quad (4.5.9)$$

若选择此常数正比于 \vec{D} 矩阵的迹，

$$C \propto \text{Tr}\{\tilde{D}\} / 3 = (D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}) / 3 \quad (4.5.10)$$

根据 (4.5.6) 和 (4.5.9) 式, 我们发现 φ_2 可改写为

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \left(\tilde{D} - \frac{\text{Tr}\{\tilde{D}\}}{3} \tilde{I} \right) : \nabla \nabla \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{6} \tilde{D} : \nabla \nabla \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

其中

$$\tilde{D} = \int (3\vec{r}'\vec{r}' - \vec{r}'^2 \tilde{I}) \rho d\tau' \quad (4.5.12)$$

\tilde{D} 称为约化四极矩, 显然它是对称的无迹张量, 即

$$\tilde{D}_{ij} = D_{ji}, \quad \tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{22} + \tilde{D}_{33} = 0 \quad (4.5.13)$$

只有 5 个独立分量。(4.5.11) - (4.5.12) 告诉我们, 四极矩中有一个隐含的不起任何作用的自由度, 因此完全可以将其去除而不影响最后结果。

[例] 利用多极距展开法计算一个长度为 L 的带电棒 (线电荷密度为 λ) 的电势 (展开到电四极距)

解: 设棒的中心在坐标原点, 则

$$Q = L\lambda$$

$$\vec{p} = \int \lambda z dz = 0$$

$$D_{zz} = \int_{-L/2}^{L/2} 3\lambda z^2 dz = \frac{\lambda L^3}{4}$$



因此, 电势为

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{1}{6} D_{zz} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] + \dots \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\lambda L}{r} + \frac{\lambda L^3}{24} \frac{(3z^2 - r^2)}{r^5} \right] + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\lambda \left(\frac{L}{r} \right) + \frac{\lambda}{24} \left(\frac{L}{r} \right)^3 (3\cos^2\theta - 1) \right] + \dots \end{aligned}$$

你也可以选择直接积分求出电势, 然后按照 (L/r) 的幂次展开, 结果应当一致。

这里我们可以清晰地看出多极矩展开其实是将电势作幂次展开, 展开的特征小量是 (尺度/距离)。

Tips:

- (1) 从物理上讲,电多极矩考量的的是一个任意电荷分布体中是否包含“具有特定角动量”的某种电荷分布,这些不同“基”之间相互正交,因此可以独立考虑。
- (2) 函数形式 $(3\cos^2\theta - 1)$ 似曾相识,事实上它就是 $P_2 = (3x^2 - 1)/2$,也可以认为就是 $l=2, m=0$ 的波函数 $Y_{2,0}$ (这里有轴对称)。

思考题: 你是否能根据《原子物理》和《量子力学》中关于原子外层电子云分布的知识,设计几个典型原子(或者离子)体系求出其静电场(静电势)分布?

习题:

P. 115, 4.2, 4.5, 4.6, 4.7

补充题

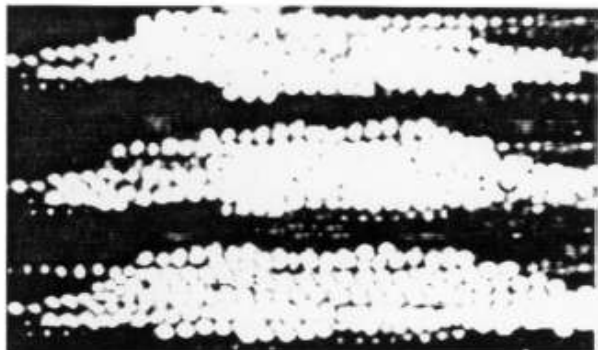
- (1) 考虑两个距离为 d 的线电荷密度为 $\pm\lambda$ 的无限长带电棒组成的体系, 计算其在远场的电势表达式。
- (2) 计算一个极化强度为 $\vec{P} = P\hat{z}$ 的均匀极化介质球上的极化电荷分布。

思考题(整理成小 Project)

- 1) 介质球极化后产生的有效偶极子并没有放置在原点, 可是其对球外电势的贡献却是严格的偶极子电势。为什么不需要远场近似?
- 2) 从介质球极化后产生的偶极子表达式(4.3.29)可以看出, 偶极子的大小以及方向非常依赖于 ϵ_2, ϵ_1 的相对取值, 这里有什么物理? 假设取 $\epsilon_1 = \epsilon_0$, 将 $\epsilon_2 = \epsilon_r \epsilon_0$ 的大小由 $-\infty$ 变化到

∞ , 你会看到什么效应? $\epsilon_r = -2$ 会发现什么惊人的现象? 这里又有什么物理? 能否在真实体系中实现? 参考文献 Nano Letters 3 1057 (2003); Science 293, 1455 (2001); PRB 82 155301 (2010); PRL 96 157402 (2006); Nature 418, 159 (2002)等。

- 3) 将电(磁)介质小球放置于液体中, 施加电场或者磁场, 小球被极化后产生偶极子, 偶极子之间会有力的相互作用最后小球会团聚 --- 这个现象叫做电(磁)流变液。在 PRL 81, 1509 (1998) 中, 我们发现磁流变液团聚后形成的团簇一定是个椭球。为什么一定是椭球?



- 4) 将本课件中的第二个例题中的金属柱换成介质柱(不加电荷),

仿照例题 1 讨论介质柱子在均匀外场下的极化问题, 可否定义退极化因子? 可否因此计算椭圆形截面的介质柱的退极化因子? 若电场平行于柱子方向可否求解? 对比 2 者会得到什么不同的结论? 物理是什么? 所有一切都可以与 COMSOL 数值计算做比较以加深理解。