

第九讲

上次课

- 能量极小——静电平衡：
 - 1) 有约束下平衡态为导体成为等势体 - 汤姆逊定理
 - 2) 无约束下静电体系没有平衡态 - 恩肖定理
- 导体的受力

$$\vec{F}_s = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \vec{e}_n \quad \text{--- 引力, 永远是引力!}$$

表面电荷与电场达到平衡, Maxwell 张量法与直接计算结果一致

- 介质边条

$$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f$$

将 $\vec{E} = -\nabla \varphi$ 带入 (4.1.2) 可得

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{\parallel}} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{\parallel}} \Rightarrow \frac{\partial (\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n_{\parallel}} = 0 \Rightarrow (\varphi_1 - \varphi_2)|_{\text{surface}} = \text{const.} \quad (4.1.4)$$

其中 n_{\parallel} 为界面上的两个独立方向, 而 const. 是个与界面上位置无关的一个常数。

(4.1.4) 表面: 在两个介质的界面上, 左右两边的标势值最多只差一个对此界面通用的常数值。下面来考虑这个常数。根据势的定义:

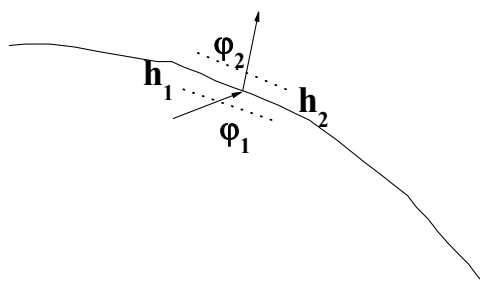
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} \xrightarrow{h \rightarrow 0} E_{2,n} h / 2 + E_{1,n} h / 2 = \left(\frac{E_{2,n} + E_{1,n}}{2} \right) h \quad (4.1.5)$$

其中, h 为 1, 2 两个点之间的距离, 而 $E_{2,n}, E_{1,n}$ 为界面两端的垂直电场分量。在 $h \rightarrow 0$ 时, 显然 (4.1.5) 式只有在电场存在奇性 ($E_{1,n} \rightarrow \infty, E_{2,n} \rightarrow \infty$) 的时候才不为 0! **在所有我们考虑的情况下, 电场都不会发散 - 即使有面电荷存在, 两边的电场不会发散 (尽管可以不连续),**

因此上面右端=0, 即

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_2} \quad (4.1.6)$$

(4.1.3) 及 (4.1.6) 就是关于势的边界条件。显然, 边界条件 (4.1.6) 直接导致关于场的边界条件 (4.1.2)



注:

1) 关于电势条件 (4.1.6), 唯一的例外是点电荷, 因为点电荷的场在 origin 是发散的, 的确

$\varphi|_{0^+}, \varphi|_{0^-}$ 是不连续的。只要将点电荷描述成一个带电为 q 的半径为 a 的小球，则一切问题均解决了。这再一次显示了点电荷只是一个数学模型而已。

2) 由 $-\nabla\varphi = \vec{E}$, $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ 可以看出，势、场、荷的发散（或者收敛）程度是逐次上升的。比如：面点荷分布对荷来说有一个维度是发散的，但场已经不发散了（但不连续），电势则进一步不仅不发散而且是连续的。

§ 4.2. 唯一性定理

有了边界条件，原则上可以解 Poisson 方程以得到所有关于场的信息。在介绍静电方程的解法之前，首先介绍一个重要的定理——唯一性定理。

定理： 如果静电体系内存在电荷分布 $\rho(\vec{r})$ 和电介质分布 $\varepsilon(\vec{r})$ ，且关系式 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ 成立，则体系的电场由边界条件（即边界上的 φ 或 $\hat{e}_n \cdot \vec{D}$ ）唯一确定 —— 即，不可能存在两组不同的电场解，都满足同样的边界条件（参照 4.1 节上面的图）。

证明： 我们利用反证法证明。设对同一个物理问题（即体系相同、边界条件相同）存在有两个解 φ' 和 φ'' ，对应不同的电场及电位移矢量场： $\vec{E}' = -\nabla\varphi'$, $\vec{E}'' = -\nabla\varphi''$ 及 $\vec{D}' = \varepsilon \vec{E}'$, $\vec{D}'' = \varepsilon \vec{E}''$ ，下面我们将证明它们其实是同样的：

$$\vec{D}' = \vec{D}'', \vec{E}' = \vec{E}'' \quad (4.2.1)$$

根据定义，这两个场都要满足同样的边界条件，即在边界处有

$$\varphi' = \varphi'' \quad \text{或者} \quad \vec{D}' \cdot \vec{e}_n = \vec{D}'' \cdot \vec{e}_n \quad (4.2.2)$$

因此定义一个函数， $\vec{Z}(\vec{r}) = (\varphi' - \varphi'')(\vec{D}' - \vec{D}'')$ ，其在边界上的积分一定为 0：

$$0 = \oint_S (\varphi' - \varphi'')(\vec{D}' - \vec{D}'') \cdot d\vec{S} = \oint_S Z(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{Z}(\vec{r}) d\tau \quad (4.2.3)$$

检查对 $\vec{Z}(\vec{r})$ 的散度，发现

$$\nabla \cdot \vec{Z}(\vec{r}) = (\varphi' - \varphi'')(\nabla \cdot \vec{D}' - \nabla \cdot \vec{D}'') + (\nabla\varphi' - \nabla\varphi'') \cdot (\vec{D}' - \vec{D}'') \quad (4.2.4)$$

由于讨论的是同一个体系，必有 $\nabla \cdot \vec{D}' = \nabla \cdot \vec{D}'' = \rho$ ，故

$$\nabla \cdot \vec{Z}(\vec{r}) = -(\vec{E}' - \vec{E}'') \cdot (\vec{D}' - \vec{D}'') \quad (4.2.5)$$

将上式带入 (4.2.3) 可得，

$$0 = \int_V \nabla \cdot \vec{Z} d\tau = - \int_V (\vec{E}' - \vec{E}'') \cdot (\vec{D}' - \vec{D}'') d\tau \quad (4.2.6)$$

根据已知条件

$$\vec{D}' = \varepsilon \vec{E}', \vec{D}'' = \varepsilon \vec{E}''$$

带入上式可得

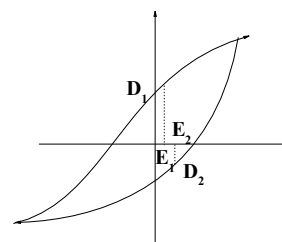
$$\int_V \varepsilon(\vec{r}) \left| \vec{E}'(\vec{r}) - \vec{E}''(\vec{r}) \right|^2 d\tau = 0 \quad (4.2.7)$$

静电情形下的介电常数满足 $\varepsilon(\vec{r}) \geq 1$ ，所以上式要成立必然在体系内部处处满足

$$\vec{E}'(\vec{r}) = \vec{E}''(\vec{r})$$

亦即，两个解相同，该问题的解唯一。由 $\vec{E} = -\nabla\varphi$ 可知，电势 φ' 与 φ'' 之间最多差一个任意常数。我们对此作一些讨论：

- (1) 在某一些介质中 \vec{D} 和 \vec{E} 之间并不一定是线性的，一般说来 \vec{D} 是 \vec{E} 的函数。这时，只要 \vec{D} 是 \vec{E} 的单值单调递增函数，则由(4.2.6)式可看出，定理仍成立。对铁电介质来说，上述唯一性定理不成立，因为有电滞回线存在， \vec{D} 和 \vec{E} 不再是单值的。的确，此时对应同样的边界条件可以有不同的解。物理上，这是因为铁电介质中的状态不仅与边界条件有关，还与其形成的历史有关。



- (2) 唯一性定理对静电学的重要性在于：只要我们得到了一个解，其满足 Poisson 方程以及相应的边界条件，它一定就是问题的严格解。因此，有些时候，我们根据物理直觉可以猜出一些问题的解，其正确性有唯一性定理保证。

Comments added:

静电问题原则上就是在一定的边界条件下解 Poisson 方程，这变成了一个纯粹的数学问题。下面我们将介绍两种解决方法，它们仅仅适用于一些特殊的具有高对称性的问题。在一般情况下，电荷分布、边界形状都是任意的，此时解决问题必须要用到计算机及合适的数值计算方法。目前有许多成功的计算方法-其中之一就是“有限元方法”，现成的软件为 COMSOL。这个方法的精髓就是将任意空间分成一个个的小区间，分而治之。还有一些其他的方法，如“边界元”方法等。原则上讲，解析方法和数值方法对我们都同要重要，前者给我们许多灵感和 insight 但可解的东西有限；后者可以解决很多问题，而且可以给我们许多直观的图像，但如果太依赖于它，又有可能失去许多严格的结论以及物理的嗅觉。二者应当结合起来，相得益彰。

§ 4.3 镜像法

镜像法是解静电边值问题的一种特殊解法，这种解法的基本精神是将静电问题中边界对场的影响用边界外部虚设的像电荷代替，特别适合研究空间内有源电荷的情况。原则上讲，区域内的电势是由区域内的电荷和处在边界上的电荷（假设边界外的空间为导体，没有电荷）共同决定的：

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\sigma_b(\vec{r}') ds'}{R} \quad (4.3.1)$$

区域内的电荷分布已知，因此电势容易计算。但边界处的电荷密度 $\sigma_b(\vec{r}')$ 通常是未知数 - 对设定电势的情形电荷本来就不确定；对孤立导体情形我们只知道总电荷，不知道电荷分布，这给我们解决问题带来了不便。幸运的是，在某些特定

情形下,这些边界上的电荷对考察区域的电势贡献等价于处于所解区域外部的一些虚拟电荷的贡献,亦即,

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{image} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho_{image}(\vec{r}'')d\tau''}{R} \quad (4.3.2)$$

其中后一个积分区域在考察区域外。因像电荷放在边界的外部,故在我们讨论问题的空间内,有

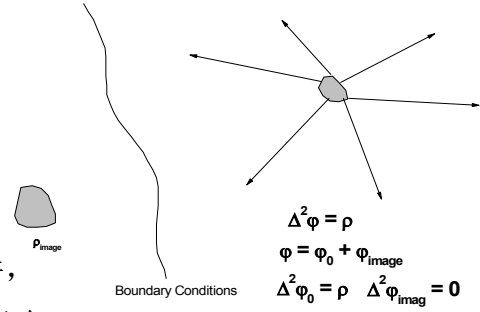
$$\nabla^2 \varphi_{image} \equiv 0, \quad (4.3.3)$$

因此在此空间中, Poisson 方程

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon$$

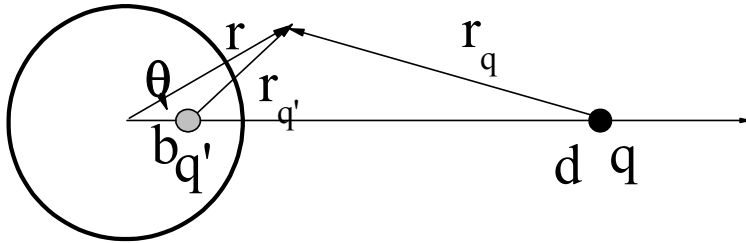
依然成立。因此只要调整像电荷的位置和大小,使总电势 φ 满足问题所设的边界条件,那么我们便找到了问题的解。这种解法的正确

性可由唯一性定理保证。下面我们将借助一个典型例题来说明这种问题的解法。



[例] 设一点电荷附近有一接地导体球,求空间的电势分布。

解: 如图所示,取球心为坐标原点,球心到点电荷 q 的方向为 z 轴。设 q 的坐标为 $(0,0,d)$,球半径为 R ,球内的电势为零,这是显然的,故只要讨论球外空间的电势即可。



球外空间的电势所满足的方程和边界条件是:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} q \delta(x, y, z-d) \\ \varphi|_{r=R} = 0 \\ \varphi|_{r=\infty} = 0 \end{array} \right. \quad (4.3.4)$$

球外空间的电势由两部分组成,即点电荷 q 所产生的电势和球面感应电荷所产生的电势。根据镜像法的精神,可以试图找到界面外的一个像电荷来等价这部分贡献。根据问题的对称性,容易明白此像电荷(如果存在的话)应在球内 $(b,0,0)$ 处,

设其电量为 $-q'$ 。因此，我们得到球外空间的试解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} \right) \quad (4.3.5)$$

其中

$$\begin{aligned} r_q &= \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}, \\ r_{q'} &= \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

下面的工作是看能否确定适当的 b 和 q' ，使试解满足边界条件（**Poisson 方程自动满足，这是镜像法的一大优点!**）。

无穷远处的边界条件自动满足，只需考虑势在球面($r = R$)上为零这一边界条件。为此，把条件 $\varphi|_{r=R} = 0$ 代入试解，转换成球坐标表示，则有

$$\frac{q}{\sqrt{d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta}} - \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2Rb \cos \theta}} = 0 \quad (4.3.7)$$

即

$$q^2(b^2 + R^2 - 2Rb \cos \theta) = q'^2(d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta) \quad (4.3.8)$$

因为对任意 θ 值，上式都应成立，故有

$$\begin{cases} q^2(b^2 + R^2) = q'^2(d^2 + R^2) \\ q^2b = q'^2d \end{cases} \quad (4.3.9)$$

上式有两组解：

$$\begin{aligned} b &= d, \quad q' = q; \\ b &= \frac{R^2}{d}, \quad q' = \frac{R}{d}q \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

解（ $b = d, q' = q$ ）不符合要求（像电荷不应在源电荷所处的空间内），只有解

（ $b = \frac{R^2}{d}, q' = \frac{R}{d}q$ ）满足要求。于是得到问题的解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} - \frac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{d}\right)^2 - 2r\frac{R^2}{d} \cos \theta}} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases} \quad (4.3.11)$$

知道了电势的分布便可求出球面上的电荷面密度

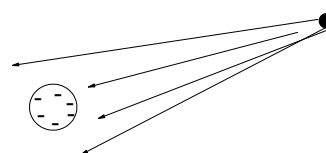
$$\begin{aligned} \sigma &= \epsilon_0 E_r = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{q}{4\pi R^2} \left(\frac{R}{d} \right) \frac{\left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right)}{\left[1 + \frac{R^2}{d^2} - 2\frac{R}{d} \cos \theta \right]^{3/2}} \\ &= -\frac{q'}{4\pi R^2} F(\theta) \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

其中 $F(\theta) = \frac{\left(1 - \frac{R^2}{d^2}\right)}{\left[1 + \frac{R^2}{d^2} - 2\frac{R}{d}\cos\theta\right]^{3/2}}$ 为一个角分布函数。

在两个极限条件下考虑面点荷（电场）分布：

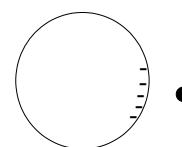
A) $R/d \rightarrow 0$ ，此时源电荷离导体球很远，对整个导体球来讲近似为均匀电场。

此时，角分布为 $F(\theta) \approx 1 + 3\frac{R}{d}\cos\theta$ 。这意味着导体的面电荷基本为均匀分布，但有一个因电场而产生与角度相关的调制（**其实这点调制正是形成了一个偶极子，后面会讲到**）；



B) $R/d \rightarrow 1$ ，此时源电荷离导体球很近，其看到的导体表面基本上是一个无限大平面。的确，

$$F(\theta) = \begin{cases} \infty, & \cos\theta \rightarrow 1 \\ 0, & \cos\theta \rightarrow -1 \end{cases},$$



感应电荷只出现在靠近源电荷的一边。

然而无论怎样，总感应电荷为

$$\int \sigma dS = \int \sigma(\theta) 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = -\frac{R}{d} q = -q' \quad (4.3.13)$$

即像电荷的大小等于导体面上的感应电荷。**注意：这个结果与之前利用 Green 互易定理得到的结论一致。**

导体球所受的静电力等于电场作用到导体球上的感应电荷的作用力。导体表面单位面积受的作用力为

$$\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{r}$$

导体球受的总力可以由积分求得。根据对称性，只有 z 分量非 0。经过一个繁复的积分可得：

$$F = \oint \vec{f} \cdot \hat{z} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{R^2} \left(\frac{R^3}{d^3} \right) \left/ \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right) \right. \quad (4.3.14)$$

简单计算可得

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q q' / (d-b)^2 \quad (4.3.14')$$

这个力正好是点电荷 q 对像电荷 q' 的作用力；根据牛顿第 3 定律（**为什么此处可**

以用牛顿第三定律，而之前俩运动电荷之间的相互作用力不能用？)，点电荷受到导体上像电荷等量反向的作用力，称为“镜像力”。

利用上面得到的结果，我们可以引申出来许多题目，并得到解答。

(1) 当 $R/d \rightarrow 1$ 时，设 $d = R + \delta$, $\delta \rightarrow 0$ ，有：

$$b = R^2 / (R + \delta) \approx R - \delta,$$

$$q' = qR / (R + \delta) \sim q(1 - \delta / R) \sim q,$$

此时物理问题等价于无限大平面的像电荷的解。

(2) 导体球接电势 V_0 。此时边界条件为： $\varphi|_{r=R} = V_0$ ， V_0 是已知常数。为了满足此边界条件，应在原解（ $\varphi|_{r=R} = 0$ ）的基础上再加上镜像电荷（处于导体内部），其作用是在导体表面上产生一个常数电势。简单的分析发现此像电荷应处于导体球中心，电量为 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$ 。故此时的解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_d} - \frac{q'}{r_b} + \frac{q''}{r} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_d} - \frac{q'}{r_b} \right] + \frac{V_0 R}{r} \quad (4.3.15)$$

(3) 导体球为孤立导体带电 Q 这种情况的边界条件为 $\varphi|_{r=R} = \text{常数(未知)}$ ，以及

$$-\epsilon_0 \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = Q \quad (4.3.16)$$

根据与上题相同的 Argument，必须加上一个放在球心电量为 q'' 的像电荷。于是，球外电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} + \frac{q''}{r} \right] \quad (4.3.17)$$

此时计算球面上的电荷可知

$$Q = -\epsilon_0 \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = -q' + q'' \Rightarrow q'' = Q + q' \quad (4.3.18)$$

问题得解。

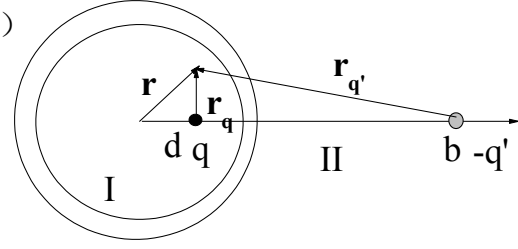
(4) 点电荷 q 在导体球壳内，距球心 d 处。

这类问题要复杂许多，先考虑一个简单的情形：**球壳接地**。与实体球最大的不同是：此时球内（I）外（II）区域内都可以存在电场及电势，其分别满足

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_I = -q\delta(x, y, z-d)/\varepsilon_0 \\ \nabla^2 \varphi_{II} = 0 \end{cases} \quad (4.3.19)$$

而边界条件为

$$\begin{cases} \varphi_I = \varphi_{II} = 0, & r = R, \\ \varphi_{II} \rightarrow 0, & r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$



先考虑球内的电势，显然其应当由真实的点电荷与**界面上的感应电荷**共同贡献。根据镜像法的精神，可以把球面上的感应电荷（其大小分布未知）等效为“非物理空间”中的一些镜像电荷。**对应于球内空间，显然非物理空间只能是球外**。因此，球内的电势可写为真实电荷 q 和处于球外 b 处的“像电荷” $-q'$ 的叠加：

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} \right] \quad (4.3.20)$$

根据边界条件可唯一确定 q' 与 b 的大小，数学上与电荷在球（壳）外面的情形类似，可以解得 $q' = q \frac{R}{d}$ ， $b = R^2/d$ 。考虑球壳外的电势，注意到此区域内没有真实电荷， $r = R$ 与 $r \rightarrow \infty$ 的边界上电势均为 0，因此，满足此边界条件的解只有

$$\varphi_{II} = 0 \quad (4.3.21)$$

问题得解。

接下来考虑一个复杂一点的情形，假设球壳的电势设为 V_0 ，因此边条（1）须改为（1'） $\varphi_I = \varphi_{II} = V_0$ ， $r = R$ 。我们发现原来得到的解（4.3.20）-（4.3.21）不能满足新问题下的边界条件（1'），需再设“像电荷”才行。**然而对 I 区来说，简单的分析发现任何处于 II 区的像电荷都不能满足条件（1'），又不能在原点设像电荷（因镜像电荷不能处于物理的考察区），怎么办呢？**

解决的办法是注意到 $\varphi = V_0$ 本身就是 Poisson 方程的解。**那为什么之前我们从来不用这个解呢？** 那是因为之前我们考虑的问题中考察区域在球外，这个解不能满足无穷远处的边界条件 $\varphi \rightarrow 0$ ， $r = \infty$ 。**但现在考察区在球内，不需要满足 $\varphi \rightarrow 0$ ， $r = \infty$ 这个边界条件，故 $\varphi = V_0$ 可以采用。** 因此，I 区电势的最终解为

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} \right] + V_0 \quad (4.3.22)$$

其满足所有的边界条件同时满足 Poisson 方程，故唯一性定理保证其正确性。

习题： 利用直接积分推导 (4.3.13) 和 (4.3.14)

- (1) 一个孤立的带电 Q 的导体球壳（半径为 R ）内距离球心 d 处放置一个带电为 q 的点电荷，求空间的电势分布及电荷分布。

小课题（选作）

- 1) 不用牛顿第三定律，你能否利用 Maxwell 张量或者其他方法直接计算点电荷受到导体上像电荷的作用力（即镜像力）？
- 2) 对于金属椭球体，我们是否还有镜像法？能否利用 COMSOL 计算一个接地金属椭球体附近放置一个点电荷后，空间的电场分布？任意形状的金属体又如何？
- 3) 自己编写一个小程序，（在多个激发电荷存在，及它们处于不同构型下）计算并 Visualize 金属球上的感应电荷的面分布。思考假如空间有两个金属球，或者有多个激发电荷，这个问题是否还可以利用镜像法求解？
- 4) 在 $R/d \rightarrow 0$ 条件下根据镜像电荷的分布计算有效偶极子（可利用公式 $\vec{p} = \int \vec{r} \rho d\tau$ ），然后将所得的结论与 Lect-10 中的均匀场下的金属球的 Case 做一番类比。