第二十讲

上次课

- 均匀体材料中电磁波传播性质的研究范式

  本构关系（微观理论） → 色散关系 → 本征态（电场与磁场间关系，偏振…）

  $\vec{D}_{\omega}=\varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)\vec{E} \quad \to \quad k=\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}k_0 \quad \to \quad \vec{E},\vec{H}$ 有相位位差，偏振任意（色散金属）

  $\vec{D}_{\omega}=\varepsilon_0\vec{\varepsilon}_r(\omega)\cdot\vec{E} \quad \to \quad k^2\vec{E}_0=k_0^2\vec{\varepsilon}_r\cdot\vec{E}_0$ → 本征态？（旋光介质：各向异性+色散）

- 旋光介质（各向异性色散介质）

  本征态：左/右旋圆偏振 –〉法拉第旋光效应

这里我们从 Maxwell 方程出发讨论电磁波的反射和折射现象。在界面上电磁场要满足边值条件

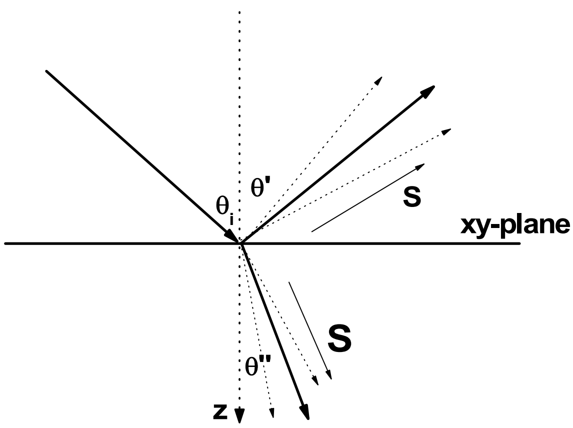
$$\vec{n}\times(\vec{E}_1(\vec{r},t)-\vec{E}_2(\vec{r},t))\big|_b=0, \quad \vec{n}\times(\vec{H}_1(\vec{r},t)-\vec{H}_2(\vec{r},t))\big|_b=0 \qquad (8.6.1)$$

由上述边界条件，我们可以推导出决定电磁波的界面上行为的 2 大定律。

1．反射、折射的基本规律 – Snell’s Law

首先注意到边界两边的电场、磁场的切向分量在交界面内（1）时时　（2）处处相等（*我们已经把金属的传导电流在高频下作为束缚电流处理，因此金属也可以作为电介质来处理，无须考虑界面上的面自由电流！*）若交界面为一平面，我们把它取为OXY面。如图 8.6 所示，考虑一单色平面波入射到交界面上，其电场为

$$\vec{E}_i=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad (8.6.2)$$



则电场切向分量在交界面上$\boxed{\text{时时相等}}$要求反射波、折射波也一定携带相同的时间因子$e^{-i\omega t}$ - *这个可以做如下理解：介质分子在外电磁波的作用下以频率ω做受迫振动，这种受迫振动是反射、折射波的来源，故反射、折射波一定也是以此频率振动，***这其实是我们所处的世界的时间平移不变性的体现！**假设介质 1 和 2 都是**均匀各向同性**的，则其中的电磁通解为平面波，因此，反射、折射波可以一般形式地写为所有频率为ω的沿不同方向传播的平面波的叠加

$$
\begin{aligned}
&\text{反射波} \qquad \vec{E}_r = \sum_{\vec{k}'} \vec{E}_0'(\vec{k}')e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)} \\
&\text{折射波} \qquad \vec{E}_d = \sum_{\vec{k}''} \vec{E}_0''(\vec{k}'')e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega t)}
\end{aligned}
\tag{8.6.3}
$$

其中波矢应和频率当满足色散关系

$$k' = (\omega / c)\cdot n_1 \ , \ k'' = (\omega / c)\cdot n_2 \tag{8.6.4}$$

其中$n_i = \sqrt{\varepsilon_{ri}\cdot\mu_{ri}}$为第 i 个体系的折射率。下面考虑（8.6.1）的第 2 个要求：电磁场在交界面上$\boxed{\text{处处相等}}$。这意味着反射波、折射波一定在 xy 平面内具有与入射波相同的**空间波动行为**，亦即带有与入射波相同的相位因子$e^{i\vec{k}_\parallel\cdot\vec{r}_\parallel} = e^{i(k_x x + k_y y)}$。**这个结论身深层次的物理其实是体系在界面上的平移不变性！考虑界面上的任意 2 点在外场激励下的振动，其唯一的不同就是外场的相位不同，因此这两点的振动差一个相位$e^{ik_\parallel\Delta r}$，因此两点的反射/折射波也仅仅差这个相位。**这意味着（8.6.3）式中反射、折射波的展开式中只有一支平面波满足要求，即

$$\vec{k}_\parallel' = \vec{k}_\parallel'' = \vec{k}_\parallel \tag{8.6.5}$$

由（8.6.4）及（8.6.5）可得 z 方向上的 k 矢量：

$$k_z' = \pm\sqrt{k'^2 - k_\parallel^2} \ , \ k_z'' = \pm\sqrt{k''^2 - k_\parallel^2} \tag{8.6.6}$$

（8.6.6）式表面垂直波矢有正负两个根，如何确定应取正号还是负号？这里应当用到因果关系（Causality）！根据因果关系，反射波及折射波的能量都应当离开界面。在常规介质中波矢的方向与能量传播的方向（即波印廷矢量 S）同方向$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \parallel \hat{k}$。故（8.6.6）中$k_z'$应取负根，而$k_z''$应取正根。

故反射、折射光如上图所示。由三方面的讨论：**时间平移不变性、界面空间平移不变性、因果关系**，我们可总结出反射、折射的基本规律：

(1) 反射波、折射波的频率与入射波频率相等：$\omega' = \omega'' = \omega$

(2) 根据 $\vec{k}_{||}' = \vec{k}_{||}'' = \vec{k}_{||}$，若 $k_y = 0$，则必有 $k_y' = k_y'' = 0$。这意味着，入射线、反射线和折射线在同一平面内 – *这个由入射波 k 矢量与交界面垂直方向构成的平面定义为入射面*。

(3) k_z', k_z'' 的正负号由因果关系确定！**在正常介质中 k_z' 应取负根，而 k_z'' 应取正根**

(4) 根据 $k_x = k_x'$，有 $k\sin\theta = k'\sin\theta'$，同时因为 $k = k'$（入射波与反射波在同一种介质中），由此得出，$\theta = \theta'$，即入射角等于反射角，即“镜面反射”。

(5) 根据 $k_x = k_x''$，必有 $k\sin\theta = k''\sin\theta''$，再根据（8.6.4），于是

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{k''}{k} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{n_2}{n_1} \qquad \textbf{(8.6.7)}$$

这就是光学中的折射定律（**Snell’s Law**）。因为折射定律中所涉及的物理量仅仅是 $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = \sqrt{\varepsilon_r}\cdot\sqrt{\mu_r}$，这正是 ***n*** 被称为介质的折射率的原因。

注：Snell 定律博大精深，每一步推导都有精妙的物理 Argument 在支持，最重要的是 3 个：时间平移不变性；空间平移不变性，因果关系。这中间的任何一个条件发生变化，都会使最终结果不同。最近十年里人们对 Snell 定律有了全新的认识：“负折射”和“拓展的 Snell 定律”就是其中杰出的代表。你是否有兴趣弄清楚为什么？（看习题）

2．振幅关系 – Fresnel’s Law （菲涅耳定律）

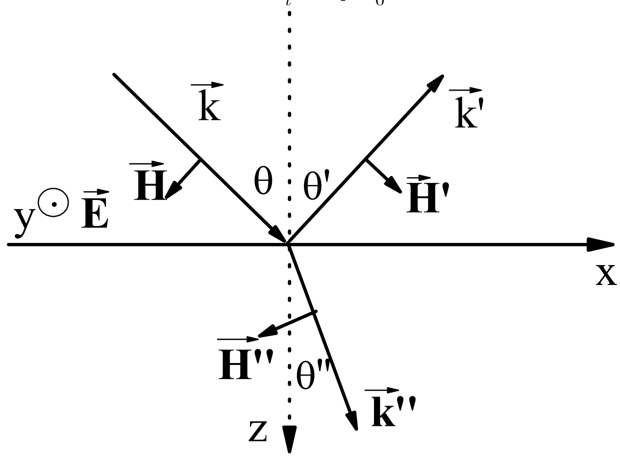
上面我们根据边值条件中的时空依赖关系推导出电磁波的传播方向所满足的要求，对折射波/反射波的振幅尚未讨论。下面我们根据（8.6.1）来讨论这件事情。对沿 k 方向传播的具有任意偏振状态的平面电磁波，我们总可以将其分解成两个偏振方向相互垂直的电磁波的叠加。因此，下面我们将分两种情形分别考虑。

A． <u>S 波/TE（横电）波</u>

在这种情况下，入射波的电场垂直于入射面（躺在交界面上），如图所示。

假设入射、反射、及折射波均为平面波，其中电场为：

$$
\begin{aligned}
&\text{入射波} \qquad \vec{E}_i = \hat{y}E_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \\
&\text{反射波} \qquad \vec{E}_r = \hat{y}E_0^{'} e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)} \\
&\text{折射波} \qquad \vec{E}_t = \hat{y}E_0^{''} e^{i(k_x x + k_z^{''} z - \omega t)}
\end{aligned}
\qquad (8.6.8)
$$



要利用边界条件，还需知道磁场的形式。根据 Maxwell 方程，平面波中的磁场可根据如下公式

$$\vec{H}_i = \frac{1}{Z_i}\left(\hat{k}_i \times \vec{E}_i\right) \qquad (8.6.9)$$

由相应的电场矢量导出，其中 $Z_i = \sqrt{\mu_i} / \sqrt{\varepsilon_i}$ 是第 i 个介质的阻抗。因此，入射、反射以及折射波的磁场为

$$
\begin{aligned}
\vec{H}_i &= \frac{E_0}{Z_1}\frac{\left(k_x\hat{z} - k_z\hat{x}\right)}{k} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \\
\vec{H}_r &= \frac{E_0^{'}}{Z_1}\frac{\left(k_x\hat{z} + k_z\hat{x}\right)}{k} e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)} \\
\vec{H}_t &= \frac{E_0^{''}}{Z_2}\frac{\left(k_x\hat{z} - k_z^{''}\hat{x}\right)}{k^{''}} e^{i(k_x x + k_z^{''} z - \omega t)}
\end{aligned}
\qquad (8.6.10)
$$

需注意：反射波的磁场的表达式中 k_z 有一个负号，因为反射波是离开界面的。在交界面上（设 z=0），E，H 的切向值相等，则有

$$
\begin{aligned}
&E_0 + E_0^{'} = E_0^{''} \\
&\frac{k_z}{Z_1 k}E_0 - \frac{k_z}{Z_1 k}E_0^{'} = \frac{k_z^{''}}{Z_2 k^{''}}E_0^{''}
\end{aligned}
\qquad (8.6.11)
$$

注意到

$$k_z = k\cos\theta,\ k_z^{''} = k^{''}\cos\theta^{''} \qquad (8.6.12)$$

解联立方程可得

$$E_0' = \frac{Z_2\cos\theta - Z_1\cos\theta''}{Z_2\cos\theta + Z_1\cos\theta''}E_0 = r_S\cdot E_0$$
$$E_0'' = \frac{2Z_2\cos\theta}{Z_2\cos\theta + Z_1\cos\theta''}E_0 = t_S\cdot E_0 \tag{8.6.13}$$

其中r_S,t_S通常叫做 S 波的反射系数、透射系数。反射、折射波与入射波中的磁场振幅关系可由（8.6.10）求出。

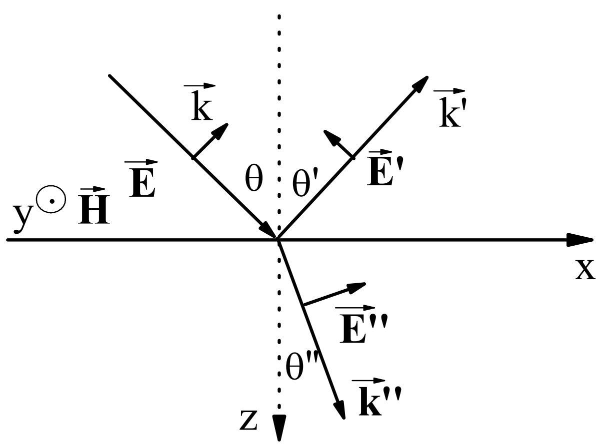
注：根据（8.6.11）式，一个非常有启发性的看法是把$\frac{k_z}{Z_1 k}$定义成 TE 波斜入射下体系的“有效阻抗”的倒数：$\frac{1}{Z_{\rm eff}}$。这个有效阻抗与角度相关：$Z_{\rm eff}=Z_1/\cos\theta$。基于这个定义我们可以把（8.6.13）改写成

$$E_0' = \frac{Z_{\rm eff,2} - Z_{\rm eff,1}}{Z_{\rm eff,2} + Z_{\rm eff,1}}E_0$$
$$E_0'' = \frac{2Z_{\rm eff,2}}{Z_{\rm eff,2} + Z_{\rm eff,1}}E_0 \tag{8.6.13'}$$

这个公式深刻地刻画了反射的本源：两边介质的阻抗不匹配导致波的反射。其实上式甚至适用于量子物质波的反射与透射。

B．P 波/TM 波

下面考虑另一种情况，即磁场垂直于入射面（或者说磁场躺在交界面内），此时先考虑磁场比较方便。如下图所示



入射波 $\vec{H}_i = \hat{y} H_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$

反射波 $\vec{H}_r = \hat{y} H'_0 e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)}$ （8.6.14）

折射波 $\vec{H}_t = \hat{y} H''_0 e^{i(k_x x + k''_z z - \omega t)}$

根据 Maxwell 方程，相应各支平面波中的电场可由

$$\vec{E}_i = -Z_i \left(\hat{k}_i \times \vec{H}_i \right) \tag{8.6.15}$$

求得。我们再次看到阻抗的重要性。因此可以根据（8.6.14-15）式写出电场 $\vec{E}_i, \vec{E}_r, \vec{E}_t$ 的形式，再根据边界条件(8.6.1)得到（可与 S 波对比）

$$\begin{aligned} H'_0 &= \frac{Z_1 \cos\theta - Z_2 \cos\theta''}{Z_1 \cos\theta + Z_2 \cos\theta''} H_0 = r_P \cdot H_0 \\ H''_0 &= \frac{2 Z_1 \cos\theta}{Z_1 \cos\theta + Z_2 \cos\theta''} H_0 = t_P \cdot H_0 \end{aligned} \tag{8.6.16}$$

其中 r_P, t_P 通常叫做 P 波的反射系数、透射系数，是基于磁场的振幅比写的。(8.6.13)-(8.6.16) 式被称为菲涅耳公式，在特殊情况下（$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$）回到菲涅耳早期基于以太理论导出的光学折/反射振幅关系式。这有力地论证了光是电磁波。

注：此处一个非常有启发性的看法是定义 TM 波斜入射下体系的“有效阻抗”$Z_{\text{eff}} = Z \bullet \cos\theta$。注意 TM 条件下与 TE 条件下的不同。此时（8.6.16）可改写为

$$\begin{aligned} H'_0 &= \frac{Z_{\text{eff},1} - Z_{\text{eff},2}}{Z_{\text{eff},1} + Z_{\text{eff},2}} H_0 \\ H''_0 &= \frac{2 Z_{\text{eff},1}}{Z_{\text{eff},1} + Z_{\text{eff},2}} H_0 \end{aligned} \tag{8.6.16'}$$

上式与（8.6.13’）很相似，但略有不同。这是因为一个是对 E 场写的，一个是对 H 场写的。但二者的本质是一样的。

讨论：

(1) 当 ε, μ 其中之一为负数甚至为虚数时，θ'' 失去几何意义，此时不应当做 $\cos\theta'' = k''_z / k''$ 的替代，而应当直接写成 k''_z / k''， k_z / k 的形式；但 Z 的形式不必改，因为 $\vec{E} = Z \left(\hat{k} \times \vec{H} \right)$ 仍然成立，尽管此处 Z 为复数。

(2)（8.6.16）可以通过对（8.6.13）进行代换 $Z \to 1/Z, E \to H$ 得到！这反映了电磁场得对称性。电磁理论中有许多这种对称值得好好揣摩。

3．反射率及透射率

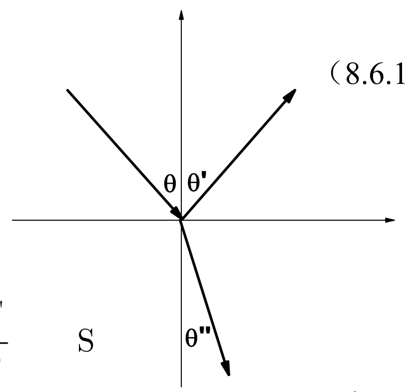
反射波平均能流与入射波平均能流<u>在法线方向的分量</u>之比称为反射率（Reflectance），其刻画了多少入射的能量被界面反射回来。直接计算可得：

$$R=\frac{\langle\vec{S}_r\rangle\cdot\hat{z}}{\langle\vec{S}_i\rangle\cdot\hat{z}}=\begin{cases}\dfrac{|E_0'|^2\cos\theta'/Z_1}{|E_0|^2\cos\theta/Z_1}=\left|\dfrac{E_0'}{E_0}\right|^2=|r_S|^2 & \text{S}\\[2ex] \dfrac{|H_0'|^2\cos\theta'\cdot Z_1}{|H_0|^2\cos\theta\cdot Z_1}=\left|\dfrac{H_0'}{H_0}\right|^2=|r_P|^2 & \text{P}\end{cases}\qquad(8.6.17)$$

无论对 S 波还是 P 波，反射波和入射波处于同一媒质中，阻抗值相同；同时由于反射角等于入射角，投影后的比例与投影前的比例相同。因此，反射率就是反射场与入射场振幅比例的模的平方。将（8.6.13），（8.6.16）分别带入（8.6.17）式即得 S，P 两种偏振情况的反射率：

$$R_S=\left|\frac{Z_2\cos\theta-Z_1\cos\theta''}{Z_2\cos\theta+Z_1\cos\theta''}\right|^2$$

$$R_P=\left|\frac{Z_2\cos\theta''-Z_1\cos\theta}{Z_2\cos\theta''+Z_1\cos\theta}\right|^2\qquad(8.6.18)$$



同样道理，透射率定义为

$$T=\frac{\langle\vec{S}_t\rangle\cdot\hat{z}}{\langle\vec{S}_i\rangle\cdot\hat{z}}=\begin{cases}\dfrac{|E_0''|^2\cos\theta''/Z_2}{|E_0|^2\cos\theta/Z_1}=|t_S|^2\dfrac{Z_1\cos\theta''}{Z_2\cos\theta} & \text{S}\\[2ex] \dfrac{Z_2|H_0''|^2\cos\theta''}{Z_1|H_0|^2\cos\theta}=|t_P|^2\dfrac{Z_2\cos\theta''}{Z_1\cos\theta} & \text{P}\end{cases}\qquad(8.6.19)$$

注意：定义反射/透射率的时候，我们都不是直接对入（反、透）射波的能流操作，而是将其投影到界面的法向方向。这是因为对一个界面来讲，只有投影到其法向方向的能流分量才是“真正通过”这个界面的能流。

思考题：

1) R 和 T 的定义中需要用到投影到法线的 $\cos\theta$ 因子。这一点初学者经常感觉到困惑。不妨证明一下只有这样才能满足能量守恒：T+R=1，而直接对 r 或者 t 取模平方相加不能得到正确的能量守恒的结果。

2）进一步考虑一个有限大小的 Beam 在界面上的反射和折射，基于此搞清楚为什么能量守恒要乘以一个投影到法线的 $\cos\theta$ 因子？

4．正入射条件下反射的几点讨论

（1）正入射条件下，无论 S 波还是 P 波，反射率均为

$$R=\left|\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}\right|^2$$

在光学中，我们经常利用 $R=\left|\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right|^2$ 来计算反射率，其实这不完全正确，因为它假设介质没有磁性 （$Z=1/n$），完整的表达式应当由阻抗来描述。折射率完全决定了波的传播方向，然而阻抗却是决定波的振幅的核心。这两个物理量加在一起完全描述了一个电磁介质的所有电磁波行为。

（3）假设 $Z_1=Z_0$,则定义相对阻抗为 $Z=Z_2/Z_0=\frac{\sqrt{\mu_r}}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ 对 S 波我们可以定义反射系数 $r_S=\frac{Z-1}{Z+1}=\frac{E_0'}{E_0}$，它刻画了反射波与入射波的振幅（带相位）的比值。我们注意到，无论对 $Z\to 0$ 的介质还是对 $Z\to\infty$ 的介质，都可以对电磁波进行强烈反射，但反射的位相却不相同。$Z\to 0$ 的介质其实就是理想电导体(因为金属 $|\varepsilon_r|\to\infty$，简称 Perfect electric conductor (PEC))，而 $Z\to\infty$ 的介质对应的是 $|\mu_r|\to\infty$ 的理想“磁导体”(PMC))自然界不存在，可以通过 Metamaterial 的概念实现。通过调控电磁波介质的阻抗特性，我们可以实现对电磁波反射位相的有效调控，从而实现一系列难以置信的新的电磁波现象。

习题：

P.　205，8.2，8.4

（*注： 8.4 该题目的定义有些模糊，明确如下：介质为半无限大，假设介质的介电常数有一个很小的虚部，因此无穷远处没有波被反射回来。*）

补充题：

1） 从 Fresnel 公式出发，证明在正入射的条件下，P 波和 S 波的基于电场矢量的振幅比定义的反射系数相等。

2） 设有一种介质，其 $\varepsilon_r<0,\mu_r<0$，证明

（i）在此介质中存在传播模式的电磁波（即 k 为实数）

（ii）这种传播波的能流方向与波传播的方向相反，即 $\vec{S} \,||\, (-\hat{k})$

（iii）根据这个结论，重新讨论当电磁波由空气入射到这种介质上时所满足的 Snell 定律，画出折射光的方向，并重新推导折射角与入射角之间的关系。

（提示：此处要用到因果律 – 即反射波和折射波的能流一定要离开界面！）

3） 推导 P 波的菲涅耳公式（8.6.16）式。

课后 Project：

1) 根据大课上教授内容，学习如下文献，弄清楚如何拓展 Snell 定律？

“*Gradient-index meta-surfaces as a bridge linking propagating waves and surface waves*",

Shulin Sun, Qiong He, Shiyi Xiao, Qin Xu, Xin Li & Lei Zhou,

Nature Materials 11, 426-431 (2012).

2) 学习如下文献，搞清楚如何利用超薄体系的阻抗以及导致的反射特性调控入射波的偏振？

"*Manipulating Electromagnetic wave polarizations by anisotropic metamaterials*",

Jiaming Hao, Yu Yuan, Lixin Ran, Tao Jiang, J. A. Kong, C. T. Chan, and L. Zhou,

Phys. Rev. Lett. 99, 063908 (2007).