第十七讲

上次课

- 趋肤效应： $\delta=\sqrt{\dfrac{2}{\mu\omega\sigma_c}}$
- 平面电磁波 $\begin{pmatrix}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{B}_0\end{pmatrix}e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$ （复场表示）
- 色散关系

$k=n\dfrac{\omega}{c}$， $n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ 为折射率（Refraction Index）

注意，这时振幅 $\begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{B}_0\end{pmatrix}$ 已是复数。反之，当电磁波的振幅是复数时，它表示电磁波有相位因子。根据色散关系（8.1.8）可知，k 取正负均可。因此，

$$\vec{E}=\vec{E}_0e^{i\left(-\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} \tag{8.1.15}$$

也是波动方程的解。非常容易可以证明，（8.1.15）是电磁波沿反方向传播的解。

注：你会发现（8.1.15）式与 $\vec{E}=\vec{E}_0e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t\right)}$ 给出一样的实部，因而它们 2 个其实对应完全一样的电磁波。对波的时间变化项，在物理 Community 中，我们规定为 $e^{-i\omega t}$，而 IEEE 的 Community 规定为 $e^{i\omega t}$。

(6) 因为 E 和 B 分别满足的波动(8.1.3)和（8.1.5）式是由原始麦克斯韦方程约化而来的，约化过程中方程从一阶微分变成了二阶微分，因此波动方程的解未必全都是原始 Maxwell 方程的解

注：原则上 E 和 B 满足的方程是独立的，因此， 不仅复振幅 $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ 可完全自由选择，而且 E, B 表达式中指数因子 $e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$ 中的 $(\vec{k},\omega)$ 也完全自由，只要它们满足色散关系即可。这么多波动方程多的解不可能都是原始 Maxwell 方程的解!

我们需要将所得的解（8.1.13）重新带回到原始 Maxwell 方程做检查。带回

Maxwell 方程组中的第 1，3 两条方程，我们发现场量必须满足

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{B}_0=0 \tag{8.1.16}$$

这表明，电磁场振动的方向与传播方向 $\vec{k}$ 相互垂直（在等相面内），亦即 – **电磁波是横波**。进一步带入方程：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

得

$$\vec{k}\times\vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}=\omega\vec{B}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} \tag{8.1.17}$$

这意味着:

（1）E，B 场指数相因子应当完全相等！亦即：E, B 场中的 $(\vec{k},\omega)$ 应当完全一样！

（2）复矢量振幅 $\vec{E}_0,\vec{B}_0$ 也不独立，需满足

$$\vec{k}\times\vec{E}_0=\omega\vec{B}_0 \tag{8.1.17'}$$

由于在所考虑的媒质（$\varepsilon,\mu>0$）中 $(\vec{k},\omega)$ 均为实数，上式隐含了

（3）复矢量振幅 $\vec{E}_0,\vec{B}_0$ 的相位相等。

带入第四条方程 $\nabla\times\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ 可得到

$$\vec{k}\times\vec{H}=-\varepsilon\omega\vec{E}\Rightarrow\vec{k}\times\vec{B}_0=-\varepsilon\mu\omega\vec{E}_0 \tag{8.1.18}$$

综合（8.1.17）-（8.1.18）得到结论：$\vec{E},\vec{B}$ *和 $\vec{k}$ 组成右手定则*，且，E，B 之间的模量满足

$$\boxed{\left|E_0\right|=\omega\left|B_0\right|/k=v\left|B_0\right|=c\left|B_0\right|} \tag{8.1.19}$$

后面一个等式在真空中成立。进一步，可以得到另一个很重要的关系式

$$\boxed{\left|E_0\right|=v\mu\left|H_0\right|=\frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left|H_0\right|=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left|H_0\right|=Z\left|H_0\right|} \tag{8.1.20}$$

其中 $\boxed{Z=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$ 称为阻抗，具有电阻的量纲，是一个描述电磁介质中电磁波传播时场量比例的重要物理量。折射率和阻抗是刻画电磁介质特性的最重要的 2 个量，他们各有各自不同的物理涵义，在确定电磁波的特性方面起着不同的作用。

(7) 平面波的**能流**

电磁场的能流定义为

$$\vec{S}_p = \vec{E}\times\vec{H} \tag{8.1.21}$$

注意真实的场是（8.1.7），不能将复数场带入（8.1.21）式后再取实部，因为叉乘运算是非线性运算。故(8.17)式中的$\vec{E},\vec{H}$都应取实部之后再代入：

$$\vec{S}_p(\vec{r},t) = \mathrm{Re}(\vec{E})\times\mathrm{Re}(\vec{H}) \tag{8.1.22}$$

上式表示的是能流的瞬时值。当电磁场随时间变化时，通常瞬时值没有意义，我们更关心能流的时间平均值。对能流在一个周期内做时间平均，

$$\left\langle \vec{S}_p \right\rangle = \left\langle \mathrm{Re}\,\vec{E}\times\mathrm{Re}\,\vec{H}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}_p dt \tag{8.1.23}$$

利用公式

$$\left\langle \mathrm{Re}\,\vec{E}\times\mathrm{Re}\,\vec{H}\right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)$$

(证明见习题 8.1)，得到

$$\left\langle \vec{S}_p \right\rangle = \frac{1}{2}Z\cdot H_0^2\hat{k} = \frac{1}{2Z}E_0^2\hat{k} \tag{8.1.24}$$

同理，能量密度的时间平均值为

$$\bar{u}(\vec{r}) = \left\langle u(\vec{r},t)\right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\mu\vec{H}\cdot\vec{H}\right\rangle = \frac{\varepsilon}{4}E_0^2 + \frac{\mu}{4}H_0^2 = \frac{\varepsilon}{2}E_0^2 \tag{8.1.25}$$

非常容易从（8.1.25）中证明$\bar{u}_E = \dfrac{\varepsilon}{4}E_0^2 = \dfrac{\mu}{4}H_0^2 = \bar{u}_B$，亦即，***平面电磁波电场携带的能量和磁场携带的能量相等！*** 把(8.1.25)和(8.1.24)式比较，则得

$$\left\langle \vec{S}_p(\vec{r})\right\rangle = \hat{k}\left\langle u(\vec{r})\right\rangle\frac{1}{\varepsilon Z} = \hat{k}\left\langle u(\vec{r})\right\rangle v = \left\langle u(\vec{r})\right\rangle\vec{v} \tag{8.1.26}$$

(8.1.26)式有着清晰的物理图像 --- 能流的物理意义是单位时间内通过单位面积的能量，单位时间内电磁波传输$l = v\times 1$的距离，因此单位时间内在体积为$\Omega = l\times 1 = v\times 1\times 1 = v$内的电磁波能量可以通过该面积。故，$\boxed{\text{能流 = 能量 × 速度}}$。这与 $\boxed{\text{电流密度 = 电荷密度 × 速度}}$ 的物理来源完全一致。平面电磁波在非导电介质中传播的情况如图 8.1 所示。一个重要的特征是 E 与 B 为同相位变化的，即它们同时达到最大值，又同时达到最小值。

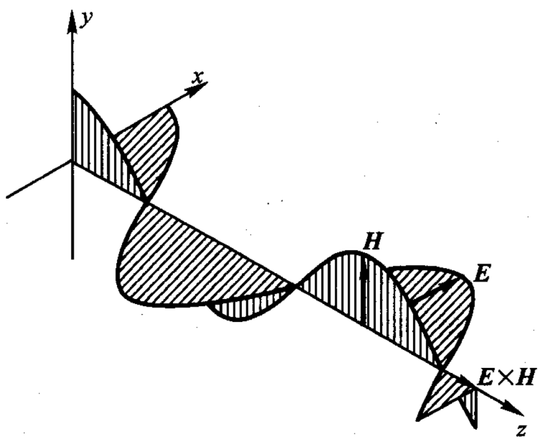


图 8.1

§8.2 波的偏振和偏振矢量

电磁波是矢量波，传播和偏振是其最重要的两个特征。上一节我们主要学习了波在线性无色散均匀媒质中的传播特性，本节中我们将重点学习波的偏振特性。让我们仔细研究横波条件（8.1.16）。对确定的传播方向$\vec{k}$，（8.1.16）式告诉我们电矢量$\vec{E}_0$必须在与其垂直的平面内。为确定起见，假设传播方向$\vec{k} \parallel \hat{z}$，则与其垂直的平面为 xy 平面，有 2 个相互垂直的单位矢量$\vec{e}_x, \vec{e}_y$（其它$\vec{k}$方向可以类似处理）。**注意，当我们取了复数场的表达式之后，原则上$\vec{E}_0$可以是一个复矢量 – 其每个分量均可取复数且可以由不同的相位**。因此，$\vec{E}_0$的最一般形式为

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_x E_{x,0} e^{i\phi_x} + \vec{e}_y E_{y,0} e^{i\phi_y} \qquad (8.2.1)$$

其中 $E_{x,0}$ $E_{y,0}$ 为电场的振幅，为实数。将（8.2.1）带入复场表达式 $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$，再取实部，我们得到

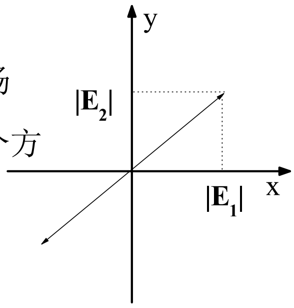
$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= E_{x,0}\cos\left(kz-\omega t+\phi_x\right) \\ E_y(z,t) &= E_{y,0}\cos\left(kz-\omega t+\phi_y\right) \end{aligned} \qquad (8.2.2)$$

显然，场随时间的振荡行为由四个参量：$E_{x,0}, E_{y,0}, \phi_x$,以及ϕ_y确定。由（8.2.2）出发，在四个参量满足不同条件时，可以得到几种典型的偏振状态。

（A）线偏振

线偏振是最简单的情形。当 $\phi_x=\phi_y=\phi$ 时，电场随时间演化为

$$E_x(z,t)=E_{x,0}\cos\left(kz-\omega t+\phi\right)$$
$$E_y(z,t)=E_{y,0}\cos\left(kz-\omega t+\phi\right) \qquad (8.2.3)$$

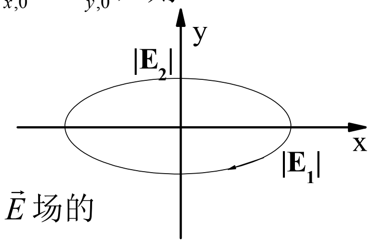


在任意一个确定的波阵面上（如取 z=0 的 xy 平面），电场的两个分量同相位振动，因此合成的结果是电场只在一个方向上随时间来回振动，因此这种偏振状态称为线偏振。

（B） 椭圆偏振

在最一般情况下，即不对四个参量施加任何限制，则波的偏振状态都是椭圆偏振。考虑一个具体的例子：$\phi_x-\phi_y=\pi/2,\ E_{x,0}>E_{y,0}$，则

$$E_x(z,t)=-\left|E_{x,0}\right|\sin\left(kz-\omega t+\phi_y\right)$$
$$E_y(z,t)=\left|E_{y,0}\right|\cos\left(kz-\omega t+\phi_y\right) \qquad (8.2.4)$$



在任意一个确定的波阵面上，随着时间的演化，$\vec{E}$ 场的端点描出一个半长轴为 $\left|E_{x,0}\right|$，半短轴为 $\left|E_{y,0}\right|$ 的椭圆，故这种偏振状态称为椭圆偏振。 若 $\phi_x-\phi_y\neq\pi/2$，则椭圆的对称轴不再沿着 x,y 方向，而是沿着 z 轴做了一个转动，但偏振状态仍然是椭圆偏振。

（c） 圆偏振

进一步，当 $\left|E_{x,0}\right|=\left|E_{y,0}\right|=A,\ \phi_x-\phi_y=\pm\pi/2$ 时，电场分量为

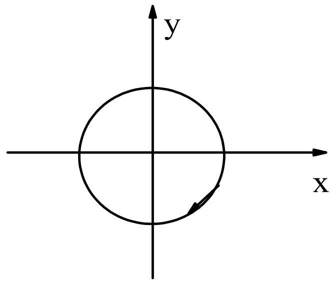
$$E_x(z,t)=\mp A\sin\left(kz-\omega t+\phi_y\right)$$
$$E_y(z,t)=A\cos\left(kz-\omega t+\phi_y\right) \qquad (8.2.5)$$

对这种波，在任一波阵面上，$\vec{E}$ 的端点随时间的演化描出一个半径为 A 的圆，故称为圆偏振。进一步考虑两种情况，

（C.1）右旋圆偏振 $\phi_x-\phi_y=\pi/2$ 时，（8.2.5）式描述的是电场矢量顺时针旋转，称为右旋圆偏振。此时（8.2.5）可以重写为

$$\vec{E}_0=\sqrt{2}Ae^{i\phi_1}\vec{e}_{right}$$

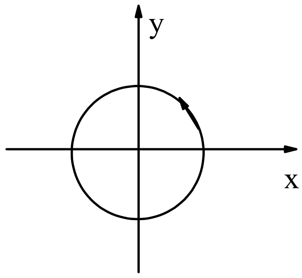
其中



$$\boxed{\vec{e}_{right} = (\vec{e}_x - i\vec{e}_y)/\sqrt{2}} \qquad (8.2.6)$$

就是右旋偏振的单位矢量.

（C.2）<u>左旋圆偏振</u>　同理，$\phi_x - \phi_y = -\pi/2$ 时为左旋圆偏振。偏振态的单位矢量为



$$\boxed{\vec{e}_{left} = (\vec{e}_x + i\vec{e}_y)/\sqrt{2}} \qquad (8.2.7)$$

讨论：

（1）　看上去左右旋光的定义和我们的常识正好相反，似乎以“k 的方向与 E 的旋转方向成左/右手螺旋”来定义左右旋光会更容易使人习惯。这里的原因比较复杂，一个可能的解释是历史上人们根据在某一个给定的时刻看到的电场由远及近在空间（z）传播而来时的旋转来定义的，也可能是沿着光传播的方向看电场的转动。

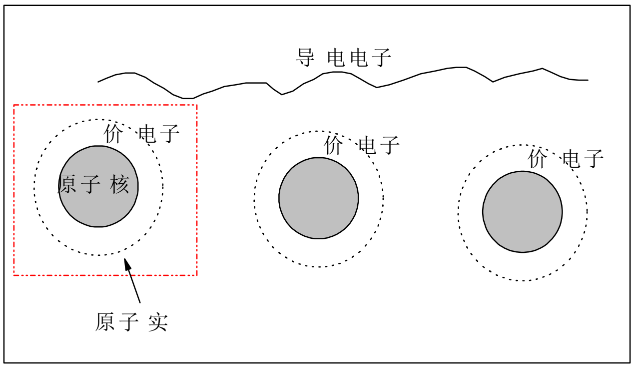
（2）　在目前 Metamaterial 的研究中，一个热门的课题就是如何利用 Metamaterial 来调控光波的偏振状态，比如实现由线偏振到圆偏振、椭圆偏振的转化，或者是两个垂直方向的线偏振光的相互转化。有兴趣的同学参考“**J. M. Hao, et. al., Phys. Rev. Lett. 99, 063908 (2007), Wujiong Sun, et al, Opt. Lett. 36 927 (2011)**”.

§8.3 金属的等效介电常数 - Drude 模型

前面两节我们研究了电磁波在最简单的电磁介质（线性、均匀、局域、各向同性、无色散，本构关系为 $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$）中的传播行为。下面我们将开始研究导电介质中的电磁波特性。对任何一种新的电磁介质，在研究其电磁波传播特性之前，都要首先知道这种电磁介质的“<u>本构关系</u>” – 亦即，材料究竟如何针对电磁场响应的，不然，**Maxwell** 方程无法求解。事实上，这个世界之所以如此“色彩缤纷”，正是因为我们有各种具有不同的“本构关系”的电磁介质！本节中，我们将仔细探讨导电介质的本构关系 – 你们会发现导电介质与一般电介质非常的不同。

之前，我们在研究导体的静电学性质时，曾利用到体内有自由电子这一性质推出导体体内没有电荷以及电场的结论，亦即导体整体是个等势体，但导体的介电行为并我们没有触及；后来，我们又说导体在静电学范畴可以等价成一个 $\varepsilon = \pm\infty$ 的电介质。如何将看似相反的结论统一？本节，我们就试图给出一个导电媒质的介电函数的统一图像。从微观图像上看，导体是由（近似）静止不动的排

成阵列的原子核，围绕原子核做圆周运动的局域“价”电子（内层电子），以及脱离单个原子核而巡游于整个导体内部的共有的“导电”外层电子，三部分组成。当外场施加到导体中来时，原子核基本不动（因为其质量很大）；“价”电子因为原子核对其有很强的束缚力而被拉离平衡位置，从而形成微弱的极化响应；只有外层的大量的自由电子，几乎不受原子核的作用力，因此可以自由流动而形成“导电”电流。因此，$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\varepsilon_0\varepsilon_r\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ 中的 $\vec{j}_f$ 就是由“外层导电电子”贡献，而 ε_r 是由“价带”电子的极化贡献。通常后者非常微弱，作为一级近似忽略，取 $\varepsilon_r=1$。理解了金属的微观图像才能完整理解金属的电磁响应。但请注意：$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$ 中的 ρ 应当是总的电荷密度 --- 即包含了导电电子以及带有等量异号电荷的<u>正电原子实</u>（注意不是原子核）背景，而价电子紧紧地束缚在原子核周围，作用体现在 ε_r 上，我们忽略。



1．色散介质的本构关系

上次课我们学习了电磁波在真空以及均匀各向同性**非色散**的电磁介质中的行为，这两类介质的特点是 ε_r,μ_r 均大于 0，且**不依赖于频率**。从物理上讲，这种介质对电磁场的响应是“**局域**”以及“**瞬时**”的

$$D(\vec{r},t)=\varepsilon\vec{E}(\vec{r},t)\quad \vec{H}(\vec{r},t)=\mu^{-1}B(\vec{r},t) \tag{8.3.1}$$

亦即，**此处、此时**的电磁扰动（由 $\vec{E}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t)$ 决定）只会引发**此处、此时**的电磁相响应 $\vec{P}(\vec{r},t),\vec{M}(\vec{r},t)$（进一步决定此处的辅助场 $\vec{D}(\vec{r},t),\vec{H}(\vec{r},t)$）。然而一般来讲，材料中的电荷运动行为非常复杂，因此最后本构关系也非常复杂，**“局域+瞬时”**仅仅是一种理想情形，通常只是材料的真实响应在**长波和低频下**的近似。

在第 1 章中我们已经指出，一般情况下材料的响应为（最一般的线性响应的形式）：

$$
\begin{aligned}
D(\vec{r},t) &= \int \varepsilon(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\vec{E}(\vec{r}',t')d\vec{r}'dt' \\
\vec{H}(\vec{r},t) &= \int \mu^{-1}(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\vec{B}(\vec{r}',t')d\vec{r}'dt'
\end{aligned}
\quad (8.3.2)
$$

这意味着在任何时刻t'任何地点$\vec{r}'$给体系一个扰动 **E**，体系都有可能在时刻t地点$\vec{r}$产生一个响应 **D**（根据因果关系，只有$t>t'$时$\varepsilon(\vec{r}-\vec{r}',t-t')$不为 0；但我们可以定义当$t<t'$时通过$\varepsilon(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\equiv 0$，从而使得（8.3.2）中对 t’的积分可以覆盖全时域）。这当然使得我们求解 Maxwell 方程变得非常复杂。注意，响应函数ε只依赖于距离差$\vec{r}-\vec{r}'$和时间差$t-t'$是体系的空间和时间平移不变性的要求。通常我们忽略“空间非局域效应”，即假设体系的响应在空间上为局域的。进一步，如果我们只考虑频率确定为ω的一支电磁波在此介质中运动，设复场$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t}$，代入（8.3.1）式可得

$$
D(\vec{r},t)=\int \varepsilon(t-t')\vec{E}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t'}dt' = \varepsilon(\omega)\vec{E}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad (8.3.3)
$$

其中，

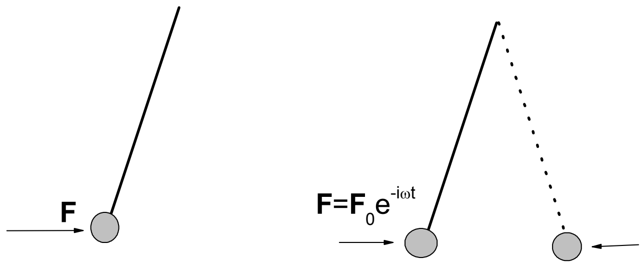
$$
\boxed{\varepsilon(\omega)=\int \varepsilon(t-t')e^{-i\omega(t'-t)}dt' = \int \varepsilon(\tilde{t})e^{i\omega\tilde{t}}d\tilde{t}} \quad (8.3.4)
$$

是时域响应函数$\varepsilon(t-t')$经 Fourier 变换后的频域形式。因此，我们注意到 **D** 函数也是单频的，携带$e^{-i\omega t}$的时间变化因子。将其改写成$D(\vec{r},t)=\vec{D}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t}$，其中$\vec{D}_\omega(\vec{r})$为该频率下激励下 D 函数的空间变化部分，一般为复数，则本构关系变为

$$
\boxed{\begin{aligned}
\vec{D}_\omega(\vec{r}) &= \varepsilon(\omega)\vec{E}_\omega(\vec{r}) \\
\vec{B}_\omega(\vec{r}) &= \mu(\omega)\vec{H}_\omega(\vec{r})
\end{aligned}} \quad (8.3.5)
$$

上式中对磁导率的推导与介电常数的推导类似。因此，无论再复杂的电磁介质，当被单频电磁波激励时，其本构关系变成与常规电介质一样的（当然是在线性响应的前提下）。只不过，此种情形下ε，μ的数值依赖于频率值，这种行为我们称为“色散”，ε，μ依赖于频率的电磁介质我们称为“色散”介质。

我们可以把这个情况类比于一个秋千。当我们对一个秋千在 t 时刻给它一个推动力，它未必立即产生反应。但是，当我们对秋千施加一个随时间谐变的力，最终，这个秋千一定会以这个频率跟随外力振动，无论最初多么不情愿。



习题

P．204，8.1

补充题：

（1） 证明（8.1.25）式以及平面电磁波的电场能和磁场能的时间平均值相等

（2） 计算真空的阻抗值

（3） 将线偏振的光波 $\vec{E}(\vec{r},t)=E_0(\vec{e}_x+\vec{e}_y)e^{i(kz-\omega t)}$ 分解成左旋光和右旋光的叠加。