第四次习题课

2018.12.13

王冬逸　17110190003@fudan.edu.cn

➢本征函数展开法

1. 2D 问题
2. 3D 问题
3. 非均匀介质与边条问题

➢磁多极矩展开法

1. 等效2D磁偶极子
2. 等效3D磁偶极子

本征函数展开法

- （1）$\nabla^2\varphi=0$ 有一系列正交完备的解 – 本征函数 $\{\varphi_n\}$

（2）完备性 --- $\varphi=\sum_n c_n\varphi_n$

（3）展开系数：$c_n=\langle\varphi_n|\varphi\rangle\big|_{boundary}$，根据正交性比较不同本征函数前的系数

例1：本征函数展开　　二维问题

如Fig4所示，两个无穷大接地的导体平面相互平行，距离为a，中间有一条无穷长且线密度为λ的均匀带电导线，它与导体平面平行，且距下导体为b，试求两导体平面之间的电势分布。

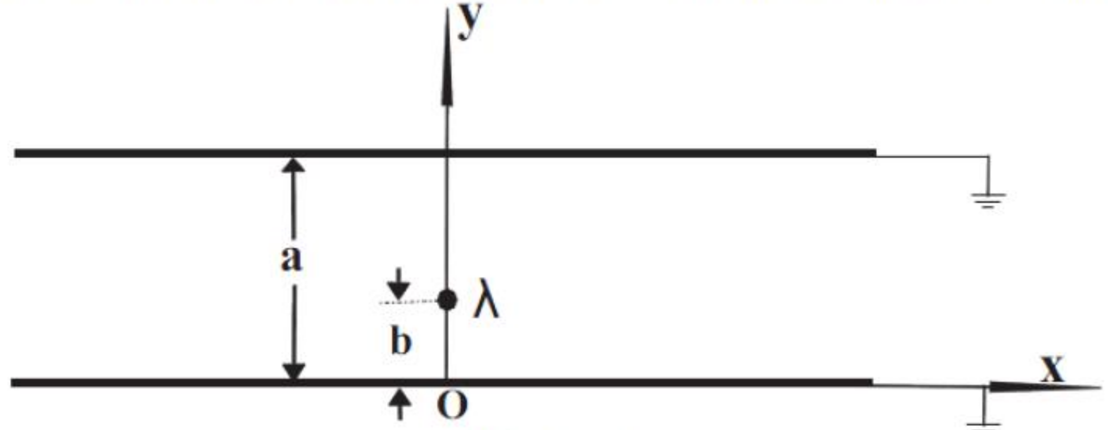


Figure 4

镜像法可以解决吗？

解： 首先建立如图所示的坐标系，那么电势φ满足

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\lambda}{\epsilon_0}\delta(x)\delta(y-b) \tag{4.1}$$

和边界条件

$$\varphi = 0 \qquad y = 0, a \tag{4.2}$$
$$\varphi \to 0 \qquad x \to \pm\infty \tag{4.3}$$

考虑到电势φ与z无关，所以问题可简化为一个两维问题，先来考虑无源区

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{4.4}$$

用分离变量法

$$\varphi(x,y) = X(x)Y(y) \tag{4.5}$$

Eq.(4.5)代入Eq.(4.4)，可得

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = 0 \tag{4.6}$$

考虑到边界条件，显然

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = k^2 \qquad \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = -k^2 \tag{4.7}$$

进而

$$\varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}|x|}\sin(\frac{n\pi}{a}y) \tag{4.8}$$

为了确定C_n，必须考虑源。由Eq.(4.8)得

$$\boxed{\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x)}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi}{a}C_n e^{-\frac{n\pi}{a}|x|}\sin(\frac{n\pi}{a}y)[h(x) - h(-x)] \tag{4.9}$$

其中$h(x)$是阶跃函数。进一步计算可知

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi}{a}C_n e^{-\frac{n\pi}{a}|x|}\sin(\frac{n\pi}{a}y)[\frac{n\pi}{a} - 2\delta(x)] \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n\pi}{a})^2 C_n e^{-\frac{n\pi}{a}|x|}\sin(\frac{n\pi}{a}y) \tag{4.11}$$

Eq.(4.10)和Eq.(4.11)代入Eq.(4.1)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n\pi}{a}C_n e^{-\frac{n\pi}{a}|x|}\sin(\frac{n\pi}{a}y)\delta(x)=\frac{\lambda}{\epsilon_0}\delta(x)\delta(y-b) \tag{4.12}$$

Eq.(4.12)两边同乘$\sin(\frac{m\pi}{a}y)$然后对x,y积分便可得

$$\boxed{\int_0^a \sin(\frac{m\pi}{a}y)\sin(\frac{n\pi}{a}y)\mathrm{d}y=\frac{a}{2}\delta_{mn}}$$

$$C_n=\frac{\lambda}{n\pi\epsilon_0}\sin(\frac{n\pi}{a}b) \tag{4.13}$$

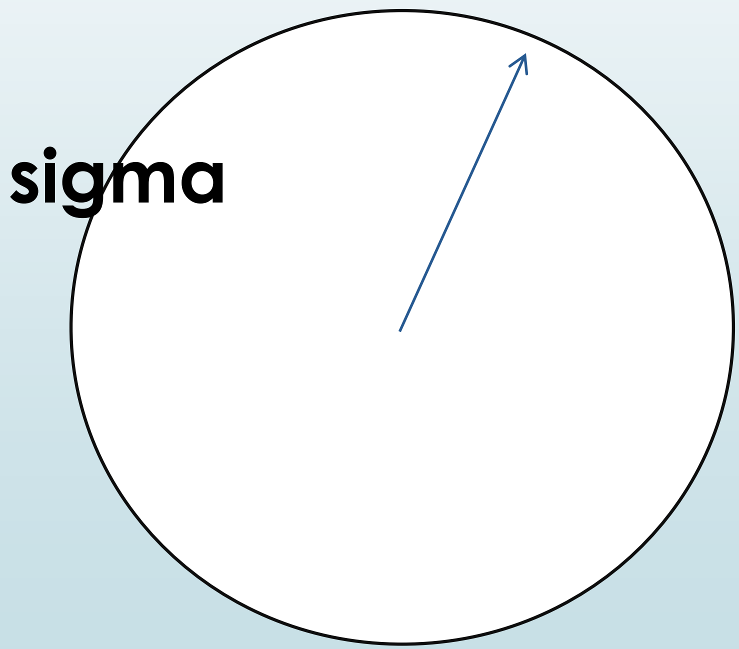
故板间的电势分布为

$$\varphi=\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi b}{a})e^{-\frac{n\pi}{a}|x|}\sin(\frac{n\pi}{a}y) \tag{4.14}$$

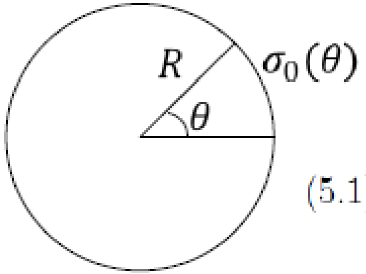
讨论：除了分离变量之外，能否用其他方法（保角变换法、电像法等）求解该问题？

例2：本征函数展开　三维问题

一个半径为R的球壳上有固定的面电荷密度$\sigma_0(\theta)$，求球壳里和球壳外的电势分布。特别的，当$\sigma_0(\theta) = k\cos\theta$时，电势分布如何。



一个半径为R的球壳上有固定的面电荷密度$\sigma_0(\theta)$，求球壳里和球壳外的电势分布。特别的，当$\sigma_0(\theta) = k\cos\theta$时，电势分布如何。



解： 分离变量后，内部区域$(r \le R)$可展开为

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \tag{5.1}$$

没有B_l的分量，因为在球心处这些项发散。在外部区域$r \ge R$可展开为

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \tag{5.2}$$

在无穷远处A_l的各项不趋于0，因此只有B_l各项。在$r = R$处连接边界条件

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) \tag{5.3}$$

可以通过两边同乘以$P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta$对0到$\pi$积分得到。

$$B_l = A_l R^{2l+1} \tag{5.4}$$

$$\boxed{\int P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) d\cos\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'}}$$

由于电荷的存在，$r=R$处存在势的一阶导数不连续

$$\left(\frac{\partial V_{out}}{\partial r}-\frac{\partial V_{in}}{\partial r}\right)=-\frac{1}{\epsilon_0}\sigma_0(\theta) \tag{5.5}$$

因此有

$$-\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\frac{B_l}{R^{l+2}}P_l(\cos\theta)-\sum_{l=0}^{\infty}lA_lR^{l-1}P_l(\cos\theta)=-\frac{1}{\epsilon_0}\sigma_0(\theta) \tag{5.6}$$

由5.4得

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)A_lR^{l-1}P_l(\cos\theta)=\frac{1}{\epsilon_0}\sigma_0(\theta) \tag{5.7}$$

$$A_l=\frac{1}{2\epsilon_0R^{l-1}}\int_0^{\pi}\sigma(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{5.8}$$

特别的，当电荷分布为

$$\sigma_0(\theta)=k\cos(\theta)=kP_1(\cos\theta) \tag{5.9}$$

其中k为一非0常数。A_l仅当$l=1$时非0

$$A_1=\frac{k}{2\epsilon_0}\int_0^{\pi}[P_1(\cos\theta)]^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{k}{3\epsilon_0} \tag{5.10}$$

因此球内部的势场为

$$V(r,\theta)=\frac{k}{3\epsilon_0}r\cos\theta \tag{5.11}$$

球外部为

$$V(r,\theta)=\frac{kR^3}{3\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\theta \qquad \boxed{k=3\epsilon_0E_0} \tag{5.12}$$

例3：非均匀介质问题

讨论： 回顾作业题4.6，在半径为R_1和R_2的导体球壳上分别带Q和$-Q$的电荷，两球壳间填充$\epsilon_0+\epsilon'\cos^2\theta$的介质，这时该如何求解电势分布？书后答案说电场$\boldsymbol{E}$与$\theta$无关，这是为什么？在非均匀的介质中为什么仍然可以用拉普拉斯方程的本征解展开?

需要注意以下几点，首先只允许垂直表面的电场存在，切向场在边界上为0

$$E_\phi = -\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = 0 \tag{5.13}$$

以及

$$E_\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 \tag{5.14}$$

其次，在非均匀介质中，由

$$\nabla\cdot(\epsilon\nabla\psi) = \rho \tag{5.15}$$

在无源区内有

$$\nabla\cdot(\epsilon(\theta)\nabla\psi) = 0 \tag{5.16}$$

展开可得，

$$\epsilon(\theta)\nabla^2\psi = -\nabla\epsilon(\theta)\cdot\nabla\psi = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\epsilon(\theta)\hat{\theta}\right)\cdot(E_\rho\hat{\rho}) = 0 \tag{5.17}$$

其中我们预设了条件，在球壳之间的区域内也只有径向的电场。 我们发现，这时电势即使在有角度依赖的非均匀的球对称区域内依然满足拉普拉斯方程，可以用拉普拉斯方程的本征函数展开，且不依赖于角度。因此电场强度$\boldsymbol{E} = -\nabla\psi$ 也不依赖于角度。而$\boldsymbol{D} = \epsilon(\theta)\boldsymbol{E}$依赖于角度的原因仅仅来自于退极场$\epsilon'\cos^2\theta\boldsymbol{E}$。

磁偶极子

$$\text{定义}: \vec{m} = \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint \vec{r}' \times d\vec{l}_i = \frac{1}{2}\int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')d\tau'.$$

仿照静电情况用多极矩展开的方法，用**磁多极矩展开法**来处理磁场问题。

与电场的多级矩展开不同，磁多极矩的第一项恒为0，事实上，这正是自然界**没有磁单极**的显现。

例4：磁化介质柱的等效磁偶极子

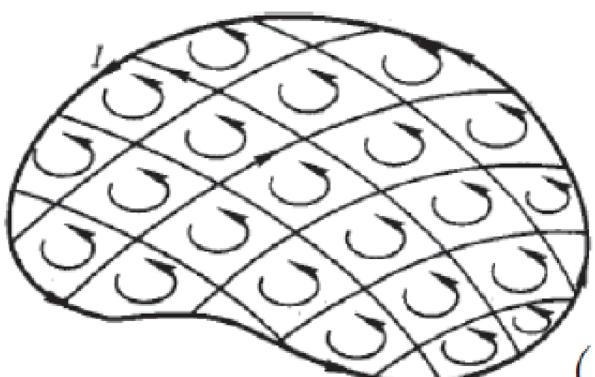
如Fig. 1所示,

(a) 对于任意形状的电流回路, 在非远场条件下, 考虑其标量场φ_m的分布. (即课件十五讲, 第3页)

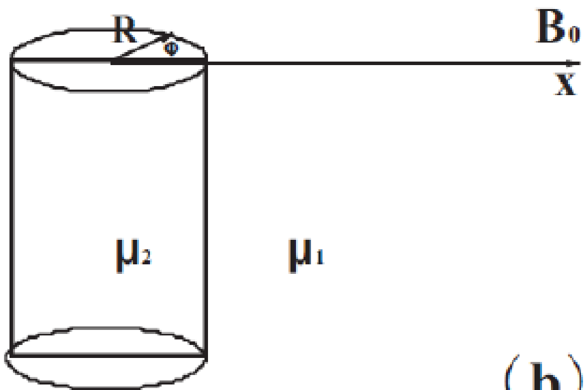
(b) 严格求解束缚在磁介质柱表面上的磁化电流$\vec{\imath}$, 以及磁介质柱的磁化强度$\vec{M}$. 另外,

- 将磁介质柱表面的磁化电流等效成"3维磁偶极子", 计算其在远场$\vec{r}=\rho\,(\hat{e}_x\cos\phi+\hat{e}_y\sin\phi)$处对矢势$\vec{A}$的贡献.
- 将磁介质柱表面的磁化电流等效成"2维磁偶极子", 计算其在远场$\vec{r}=\rho\,(\hat{e}_x\cos\phi+\hat{e}_y\sin\phi)$处对矢势$\vec{A}$的贡献. (即课件十三讲, 选做题)

偶极子相关问题——试卷常客



(a)



(b)

解:

(a) 分别应用严格解和等效解两种方法来求解此题.

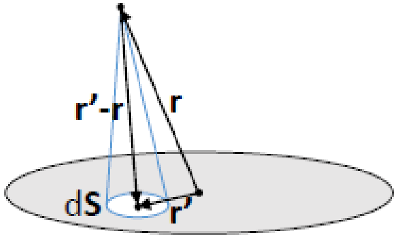
严格解: 对于非远场情况, 电流回路不再等效为单个磁偶极子. 根据Biot-Savart定律, 求解磁感应强度$\vec{B}(\vec{r})$的分布:

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'} I\mathrm{d}\vec{r}' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\left(I\mathrm{d}\vec{S}'\times\nabla'\right)\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{S'}\nabla'\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}' - \nabla'\cdot\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right)\mathrm{d}\vec{S}' \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\int_{S'}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\cdot\mathrm{d}\vec{S}' \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega\end{aligned} \tag{7}$$

上述推导应用了公式

$$\boxed{\oint_L d\vec{\ell}\times\vec{A} = \int_S[(\vec{n}\times\nabla)\times\vec{A}]d\sigma}$$

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{r}\times\vec{F} = \int_S\left(\mathrm{d}\vec{S}\times\nabla\right)\times\vec{F} \tag{8}$$



Eq. (7)中立体角Ω的定义为:

$$\Omega = \int_{S'}\mathrm{d}\Omega = \int_{S'}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\cdot\mathrm{d}\vec{S}' = -\int_{S'}\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}\cdot\mathrm{d}\vec{S}' \tag{9}$$

等效解: 在非远场条件下，虽然电流回路不再等效成单个磁偶极子，但是可以把整个电流回路等效成一系列微小电路(磁偶极子)的叠加，如Fig. 1 (a)所示，利用一系列磁偶极子的磁标势叠加，然后求得总磁场$\vec{B}$. (详细过程可参见课件) 两种方法得到的结果是一致的.

$$\varphi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\sum\frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi}\int_{S'} I\mathrm{d}\vec{S}'\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \tag{10}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0\nabla\varphi_m(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\int_{S'}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\cdot\mathrm{d}\vec{S}' \tag{11}$$

(b) 在柱坐标中严格求解矢势A_z的拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 A_z = 0 \tag{12}$$

其解为:

$$A_z^{(1)}(\vec{r}) = C + \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}B_0\frac{R^2}{\rho}\sin\phi + A_z^{ext}(\vec{r}) \tag{13}$$

$$A_z^{(2)}(\vec{r}) = C + \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}B_0\rho\sin\phi + A_z^{ext}(\vec{r}) \tag{14}$$

其中外场为$A_z^{ext}(\vec{r}) = B_0\rho\sin\phi$, 根据边界条件算出表面的磁化电流$\vec{\alpha}$:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} &= \frac{1}{\mu_0}\hat{e}_\rho\times\left[\nabla\times\left(\vec{A}^{(1)}-\vec{A}^{(2)}\right)\right]\Big|_{\rho=R}\\ &= \frac{1}{\mu_0}\hat{e}_\rho\times\left(-\hat{e}_\phi\partial_\rho A_z^{(1)}+\hat{e}_\phi\partial_\rho A_z^{(2)}\right)\big|_{\rho=R}\\ &= \hat{e}_z\alpha_0\sin\phi\end{aligned} \tag{15}$$

其中$\alpha_0 = \frac{2}{\mu_0}\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}B_0$. 由$\vec{\alpha} = \vec{M}\times\hat{e}_\rho$可以得到磁介质柱的磁化强度$\vec{M}$:

$$\vec{M} = \alpha_0\hat{e}_x$$

磁化电流的等效三维磁偶极子

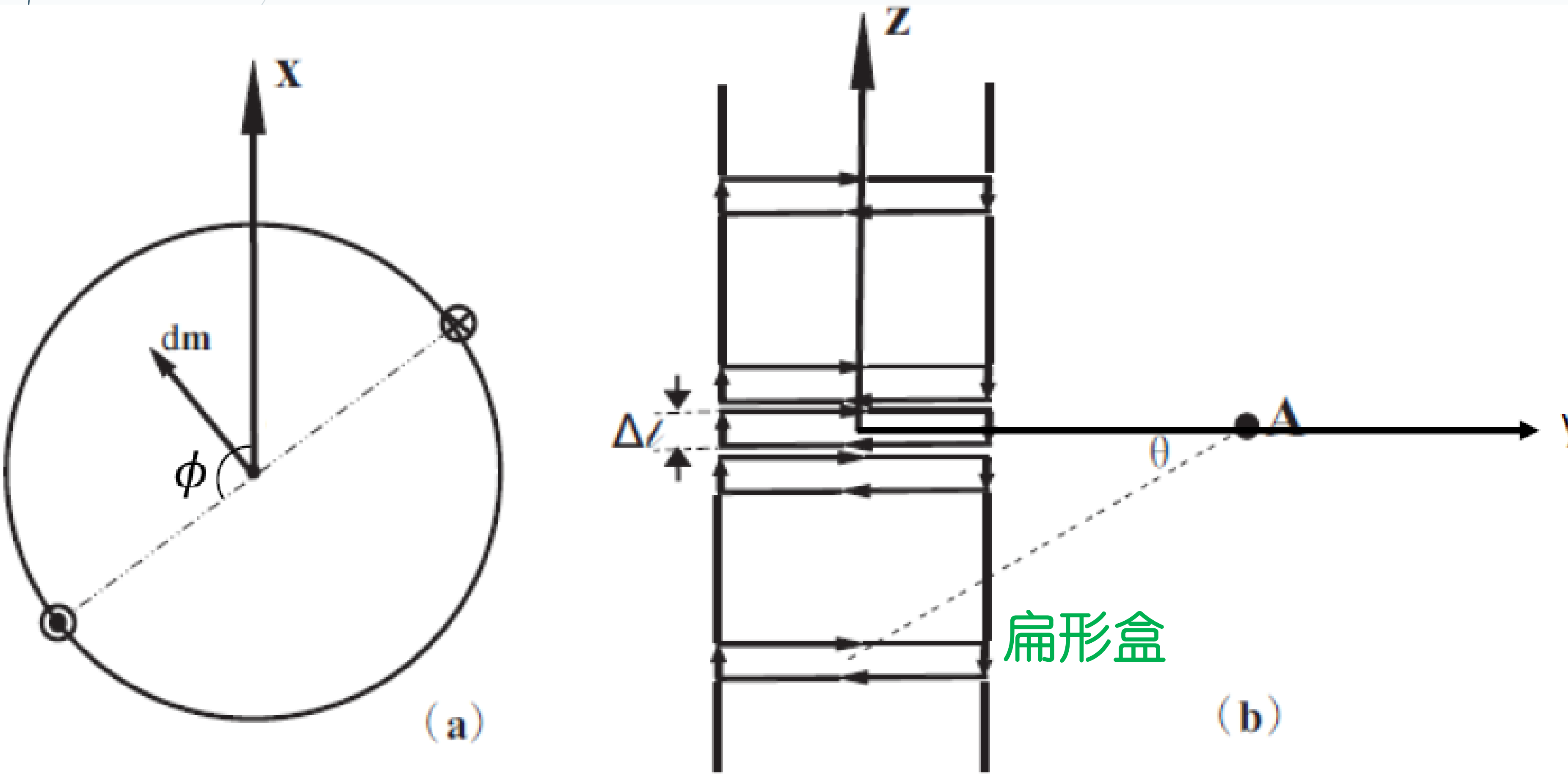


Figure 2: 3维磁偶极子等效原理图

那么高度为Δl的扁平盒所对应的磁偶极子$\Delta\vec{m}$为:

$$\Delta\vec{m} = \int \mathrm{d}\vec{m} = \int_0^{\pi} \alpha_0 \sin\phi R \mathrm{d}\phi \cdot 2R\Delta l \left(\sin\phi \hat{e}_x - \cos\phi \hat{e}_y\right) = \alpha_0 \pi R^2 \Delta l \hat{e}_x$$

进一步得到磁化强度$\vec{M}$:

$$\vec{M} \equiv \frac{\Delta\vec{m}}{V} = \alpha_0 \hat{e}_x$$

如Fig. 2 (b) 所示, 计算3维磁偶极子在远场$\vec{r} = \rho\left(\hat{e}_x \cos\phi + \hat{e}_y \sin\phi\right)$位置上对矢势$\vec{A}$的贡献

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\Delta\vec{m} \times \left(\vec{r} + \vec{e}_z \rho \tan\theta\right)}{\left|\vec{r} + \vec{e}_z \rho \tan\theta\right|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\rho} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha_0 \pi R^2 \cos\theta \mathrm{d}\theta \hat{e}_x \times \left(\hat{e}_x \cos\phi + \hat{e}_y \sin\phi + \hat{e}_z \tan\theta\right) \\ &= \hat{e}_z \frac{\mu_0 \alpha_0}{2} \frac{R^2}{\rho} \sin\phi\end{aligned}$$

磁化电流的等效二维磁偶极子

什么是二维磁偶极子？？

（作业题5.3）

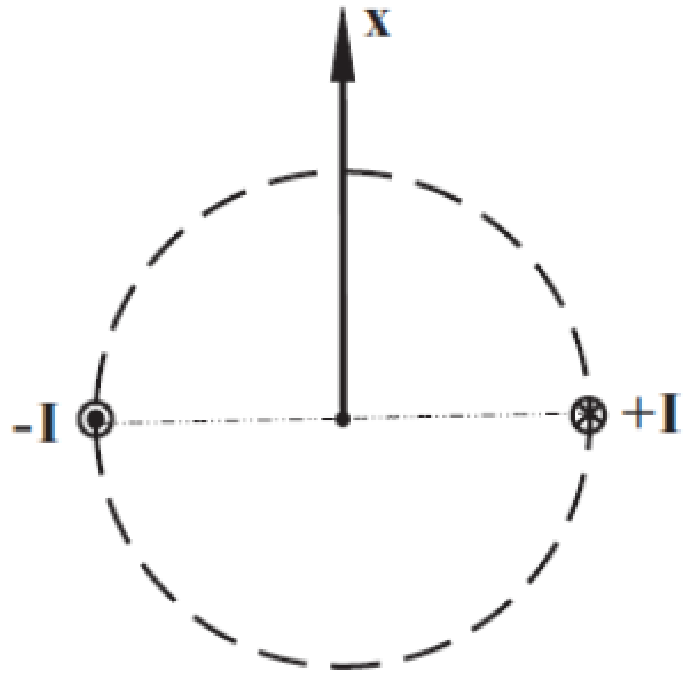


Figure 3: 2维磁偶极子等效原理图

2维磁偶极子等效法: 关于2维磁偶极子的定义, 请参看教材P141习题5.3.等效方法如下:
如Fig. 3 所示, 将整个磁介质柱表面的磁化电流等效成yz平面内的两条无穷长直导线, 代替磁化电流对空间磁场的贡献. 则2维磁偶极子产生的矢势$\vec{A}$为:

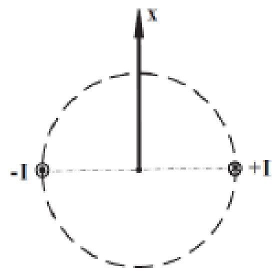


Figure 3: 2维磁偶极子等效原理图

$$\begin{aligned}\vec{A} &= -\hat{e}_z\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho_+ - \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho_-\right)\\ &\approx \hat{e}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(1+\frac{4R}{\rho}\sin\phi\right)\\ &= \hat{e}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{4R}{\rho}\sin\phi\\ &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{m}_{2D}\times\hat{e}_\rho}{\rho}\end{aligned} \tag{20}$$

形式上与Eq. (19)相同, 其中,

$$\vec{m}_{2D} = \hat{e}_x I2R \tag{21}$$

对比严格结果Eq. (13), 得到:

$$\vec{m}_{2D} = \hat{e}_x\frac{2\pi}{\mu_0}\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}B_0R^2 \tag{22}$$

进一步计算磁化强度$\vec{M}$为:

$$\vec{M} \equiv \frac{\vec{m}_{2D}}{S} = \hat{e}_x\frac{2}{\mu_0}\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}B_0 \tag{23}$$

Eq. (19)和Eq. (23)得到的结果是一致, 即这两种等效方法等价.