第 十 六 讲

上次课：

- 磁偶极子与外磁场的“有效相互作用能”

  $\tilde{U}_{\text{int}} = -\vec{m}\cdot\vec{B}_e$ ---- 等电流条件下（此时 **m** 的定义才有意义！）；

  开放体系需要把“源”计入

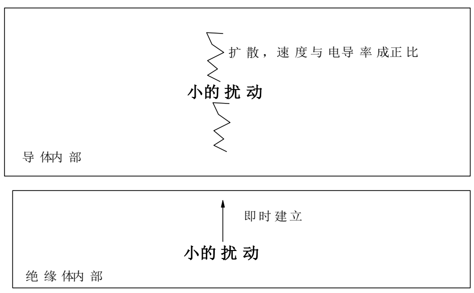
- 似稳条件：

  $\omega << \omega_\sigma = \dfrac{\sigma_c}{\varepsilon}$， $R << \dfrac{\lambda}{2\pi}$ → 忽略位移电流 → 没有辐射

- 似稳条件下金属中的电磁场方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\vec{H}\\ \vec{E}\end{pmatrix} = \frac{1}{\mu\sigma_c}\nabla^2\begin{pmatrix}\vec{H}\\ \vec{E}\end{pmatrix}$$

这显示似稳条件下 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的方程是我们熟知的扩散方程， $D = 1/\mu\sigma_c$ 是扩散系数。这说明导电介质中的电磁场会扩散，扩散的快慢取决于电导率 σ_c 的大小，σ_c 越大则扩散越慢。**对于理想导体，扩散系数为零， 而在绝缘体中，场的扩散系数为无限大。**比如，在某一时刻在原点进行一下电磁扰动（如将一个电荷搬到此处），在绝缘体中，电磁场瞬间被建立起来（或者说从原点瞬间扩散出去）；在导体中，这个电场却非常慢才能建立起来（扩散出去），在理想导体中，电场永远也不能被建立起来。



Tip --- 电导率越大扩散越小似乎与我们的直觉相违背： 因为电导率大则电子对电场的响应大，似乎更容易来传播电磁信号才对？其实恰恰相反。可以通过如下一个简单的 Argument 来理解这件事情。在导体中做一个小的扰动，因为导体中有自由电荷，这些自由电荷会重新分布从而屏蔽这种扰动建立的电场，导体的导电性能愈好，这种阻碍效果就愈强。这就是为什么导体的电导率越大，场扩散的速度就越慢。绝缘体中没有任何自由电荷，因此电

场在其中建立时没有阻碍 – 扩散速度无限大。当然，这一切都是在似稳场近似下成立。大尺度下不舍弃位移电流项，你会发现这种信号的传播是以电磁波的形式传播的，速度是介质中的光速。

§6.3 导体表面层内的场分布　　趋肤效应

建立了似稳场基本方程以后，我们进一步来研究它们所描写的电磁场在导体内的分布特征。在准静近似下，导体内部的电场与电流满足 $\vec{j}(\vec{r},t)=\sigma_c\vec{E}(\vec{r},t)$，因此，研究导体内部的电场等价于研究导体内部的电流分布。在直流情形（电磁场均不随时间变化），电流可以在整个导线中（近似）均匀流动，与之相关的是电场可以分布在导体内部（注意与静电场的区别）。然而这个图像在交流（电磁场随时间变化）情形下发生了巨大的变化，无论是 j 还是驱动电场 E 甚至是与之相关的磁场 B，都不能在任意分布在导体的体内，而只能分布在导体表面的一个薄层，这就是趋肤效应。我们来讨论一个最简单的情况：

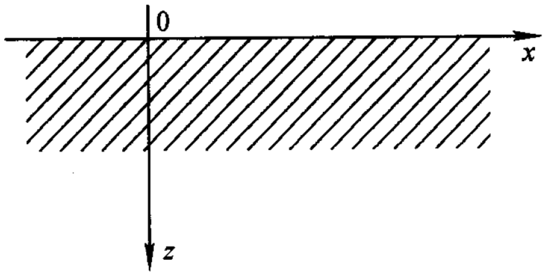


图 6.2

设导体占据 $z>0$ 的空间，如图 6.2。考虑电流沿着 x 方向流动，则 $\vec{E}$ 只有一个 E_x 项非 0，且只是 z 的函数。于是，扩散方程(6.2.4)现在变成

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\mu\sigma_c\frac{\partial}{\partial t}\right)E_x(z,t)=0 \tag{6.3.1}$$

假设驱动电源的频率为 ω，则电磁场均作简谐变化。（6.3.1）是线性齐次方程，求解这种方程的常用方法是假设如下复指数形式

$$\vec{E}=\hat{x}A\exp[pz-i\omega t], \tag{6.3.2}$$

求解之后再取实部即可（**因为物理的场必须是实数；能这样做的原因是（6.3.1）是线性齐次方程**）。将其作为试解代入(6.3.2)式即有

$$p^2=-i\omega\mu\sigma_c$$

解之可得，

$$p=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\sigma_c}(1-i)=\pm\alpha(1-i)\text{，}$$

式中$\alpha=\left(\frac{1}{2}\mu\omega\sigma_c\right)^{1/2}$。所以，电场的通解为：

$$\vec{E}=\vec{e}_x\left(E_0e^{-\alpha(1-i)z}+E_0^{'}e^{\alpha(1-i)z}\right)e^{-i\omega t}$$

考虑到$z\to\infty$时，电场应当收敛，故有$E_0^{'}=0$。因此，电场的解为

$$\vec{E}=\vec{e}_xE_0e^{-\alpha z}e^{-i(\omega t-\alpha z)} \tag{6.3.3}$$

（6.3.3）是数学意义上的解，物理的场应当取该复数解的实部，可得

$$\vec{E}=\vec{e}_xE_0e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\alpha z) \tag{6.3.3'}$$

（此处设E_0为实数）。这个解显示电场随着z的增加一边振荡一边指数衰减，在$z=\frac{1}{\alpha}$深度处，场强减少到导体表面$(z=0)$处的$1/e$，我们称这个深度为**趋肤深度**，记为δ：

$$\boxed{\delta=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma_c}}} \tag{6.3.4}$$

(6.3.4)式表明，**电磁波频率ω越高或材料的电导率σ_c越大**，则场所集中的导体的表向层越薄，这个效应叫做**趋肤现象（Skin effect）**。理想导体时$\sigma_c\to\infty,\delta\to0$，场和电流完全只存在于导体的表面。

接下来讨论圆柱形导线中的电流分布，这是一个非常具有实用价值的问题。设导线内的电场与导线轴平行，其场满足扩散方程

$$\nabla^2\vec{E}-\sigma_c\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0 \tag{6.3.5}$$

由对称性分析，电流和场都是柱对称的，因此取柱坐标系(ρ,ϕ,z)。$\vec{E}$只有z向分量，且只依赖于指标ρ。令$\vec{E}=\vec{e}_zE(\rho)e^{-i\omega t}$（**注意：这又只是个复数的尝试解，最后的物理解应取其实部；能这样做解析延拓的物理根源是（6.3.5）是个线性齐次方程**）代入方程(6.3.5)可得

$$\frac{d^2}{d\rho^2}E(\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}E(\rho)+k^2E(\rho)=0$$

式中 $k=\sqrt{i\omega\mu\sigma_c}=\sqrt{\omega\mu\sigma_c/2}(1+i)=\frac{1}{\delta}(1+i)$。这是一个标准的零阶贝塞尔方程。

由于 $\rho\to 0$ 时 $E(\rho)$ 必须有限，故方程的解为

$$E(\rho)=E_0 J_0(k\rho)$$

这里我们只能能取在 $\rho\to 0$ 极限下收敛的通解 $J_0(k\rho)$，而不取另一个通解形式。因此，导线中的电流分布为

$$\vec{j}=\vec{e}_z\sigma_c E_0 J_0(k\rho)e^{-i\omega t}$$

常数 E_0 可由 $I_0=\int\vec{j}\cdot d\vec{S}$ 定出，I_0 是总电流。

对以上情况讨论如下：

(1) 若 $R<<\delta$，即导线的半径远远小于趋肤深度，则 $|kR|\to 0$。因此对任意的 ρ，总有 $|k\rho|<|kR|\to 0$，则有 $J_0(k\rho)\to 1$。故，我们发现

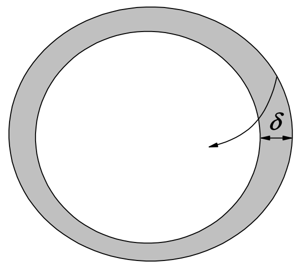
$$\vec{j}\propto\vec{e}_z const.$$

这表示电流是均匀分布的。 根据（6.3.4），$\delta>>R$ 意味着频率很低，或者导电率很差，而同时导线很细。此时趋肤效应很微弱 --- 没有明显的电流趋向导体表面分布的趋势，而电流大致仍弥散在整个导线截面。

(2) 若 $\delta<<R$，则在 $\rho\neq 0$ 时总有 $k\rho>>1$，此时贝塞尔函数的渐近式为

$$J_0(k\rho)\to\frac{e^{k\rho}}{\sqrt{k\rho}}\cdot const\ ,$$

因此，取合适的常数，我们可以将电流改写成

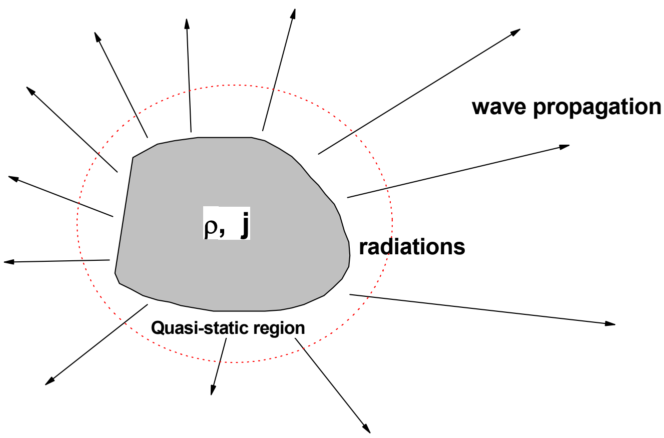


$$\vec{j}=\hat{z}j_0\frac{e^{-(\frac{R-\rho}{\delta})}}{\sqrt{\rho}}\cos(\omega t-\frac{\rho}{\delta})$$

上式表明随着 $(R-\rho)$ 的增大(即从表面到柱轴线)，电流分布以指数形式衰减，并且 ω 越大(即 δ 越小)指数衰减越快，趋肤现象越强；电导率 σ_c 越大．趋肤现象也越严重。理想导体情况下 $\sigma_c\to\infty,\delta\to 0$，趋肤深度为 0，电流只以面电流形式出现。

第八章 电磁波的传播

上一讲我们指出，当“准静条件”满足时，可以将“位移电流”项弃掉，亦即将“辐射”项弃除，此时电磁能量完全被束缚在电荷、电流的附近。然而一般情况下位移电流项不能忽略。当“位移电流”加上之后，电场、磁场就不再束缚在电荷、电流的附近，在没有电荷、电流的自由空间也可以因为电磁场之间的相互转化而存在 --- 这种场存在的形式就是“电磁波”，Maxwell 方程最伟大的预言！ 从这一章开始，我们将进入电磁波这一神奇的世界。虽然电磁波原则上是由电荷、电流“辐射”出来的，但我们将“电磁辐射”这部分内容推迟到第十二章讨论。 在本章及下一章中，我们将假设电磁场已经从“辐射源”中辐射出来了，在这个基础上我们先研究在电磁波在不同介质中是如何传播的。 这些电磁媒介包括电介质、金属中以及下一章介绍的波导等。



§8.1 电磁波在非导电介质中的传播

考虑最简单的情形 --- 在无限大的无源非导电的介质中的电磁波的传播行为。 此时麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=0 \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{D} \end{cases} \qquad (8.1.1)$$

其中 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E};\ \vec{B}=\mu\vec{H}$ 。假定介质均匀且暂时不考虑色散特性（色散介质指的是 ε,μ 随频率变化的材料，我们随后讲述），则 ε,μ 均为常数。(8.1.1）是电磁场耦合在一起的方程，不好求解，下面我们试图得到关于电场的方程。将第二条方程两边作用 $\nabla\times$，则有

$$-\nabla^2\vec{E}+\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)=\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{B}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right) \qquad (8.1.2)$$

根据第一条方程，有 $\nabla\cdot\vec{E}=0$，则电场满足的方程为

$$\left(\nabla^2-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}=0 \qquad (8.1.3)$$

基于同样的数学，我们发现磁场满足一样的方程

$$\left(\nabla^2-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B}=0 \qquad (8.1.4)$$

(8.1.3)和（8.1.4）式是标准的波动方程，取波速为

$$v^2=\frac{1}{\varepsilon\mu} \qquad (8.1.5)$$

后，其与大家在力学中学到的绳波所满足的方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U(x)=0 \qquad (8.1.6)$$

类似。但仍有所不同：（1）此处场量是矢量，（2）传播方向不仅仅是向 x 方向。这给我们计算带来了一些麻烦，但设定传播方向后，每一个场的分量都满足与绳波一样的标量方程。考虑到（8.1.6）的解为 $U(x)=A\cos\left(kx-\omega t+\varphi\right)$，推广到电磁波的情形，则（8.1.3）-（8.1.4）的试解可以写为

$$\begin{cases}\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi\right)\\ \vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi\right)\end{cases} \qquad (8.1.7)$$

其中 $\vec{E}_0,\vec{B}_0,\vec{k},\omega,\varphi$ 均为常数（*逻辑上讲，（8.1.3-4）描述的 E 和 B 的波动方程式独立的，因此（8.1.7）解的形式中，E 和 B 中的相因子可以不同，亦即，E 表达式中的 $\vec{k},\omega,\varphi$ 与 B 表达式中的 $\vec{k},\omega,\varphi$ 不必相同。但后面依据原始 Maxwell 方程的分析表示：它们必须相等*）。代入(8.1.3)及（8.1.4）后发现试解（8.1.7）满足方程，但 k,ω 之间需满足关系式

$$\boxed{k^2 = \varepsilon\mu \bullet \omega^2 \quad \Rightarrow \quad k = \pm\omega\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} \tag{8.1.8}$$

（8.1.8）式是电磁波传播的色散关系，对波的传播性质有重要意义。

注：

[1] 对任何波动方程，我们首先要问的是它的色散关系（注意不要和本构关系混淆！），亦即，频率ω（时域振动性质）与波矢k（空间域的振动性质）之间的关系。这是波的大部分性质的基础，若色散关系相同，即使不同的波（如绳波和电磁波）也具有基本相似的性质。往大了说，色散关系描述的其实是能量（对应于ω）和动量（对应k）之间的关系！

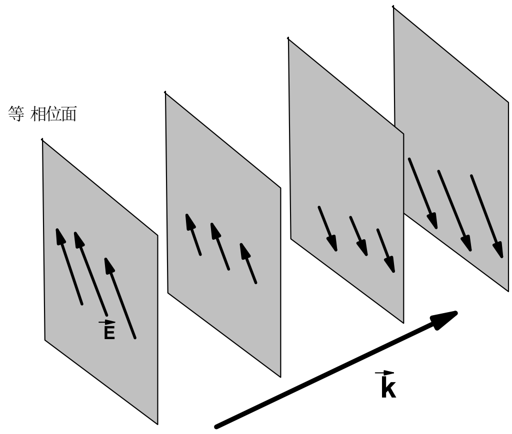
[2] （8.1.7）式只是自由空间波动方程的一种试解，你能想出其它形式的试解吗？

我们对得到的电磁波的解讨论如下：

(1) (8.1.7)式中的$\vec{E}_0,\vec{B}_0$代表波动的振幅，$\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi\right)$称为振动的相位。在给定时刻，方程

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = 常数, \tag{8.1.9}$$

所定义的曲面上相位相等，波场$\vec{E},\vec{B}$也就相同，这个曲面叫作**等相位面**。显然满足（8.1.9）所定义的曲面为一平面，其垂直于$\vec{k}$，故（8.1.7）所描述的波称为**平面波**。还可能将试解（8.1.7）写成其他形式，如球面波或者是柱面波，分别对应的等相位面为球面或者是柱面。



(2) 波长λ的定义为两个相位差为2π的等相位面之间的距离。考虑固定某个时刻（t 确定）对电磁波照张相，显然，显然垂直等相面的方向看电磁场的值随位置 z 作 sin 或 cos 波动，因此，相位差为2π的两个等相面上场量相等。显然λ由

方程

$$k \cdot \lambda = 2\pi$$

确定，即

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (8.1.10)$$

$\vec{k}$ 被称为波矢量。

(3) <u>频率/周期</u> 相邻两次振动之间的时间为周期 T，单位时间内的振动次数为频率 f. 在一个确定的位置处观察场量随时间 t 的变化，发现其也满足 sin 或者 cos 的波动振荡，此时周期 T 定义为两个波峰之间的时间差。容易求得：$\omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi/\omega$。则振动频率为 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$。经常把 $\omega = 2\pi f$ 称为*角（圆）频率*，把 f 称为*线频率*。

(4) <u>波速</u> 等相位面的传播速度被称为波的**相速度**。设 t 时刻等相位面在 r 处，$t+\Delta t$ 时刻该等相位面平移到 $r+\Delta r$ 的位置，则有

$$k \cdot r - \omega t + \varphi = 常数 = k \cdot (r+\Delta r) - \omega(t+\Delta t) + \varphi\,,$$

故相速度为

$$v_P = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \omega/k\,, \qquad (8.1.11)$$

或

$$v_P = 1/\left(\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}\right), \qquad (8.1.12)$$

(8.1.12)式即是平面电磁被传播的速度，它与介质的性质有关，真空中有 $\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0$，故 $v_P = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = c$ 为光速，介质中的波速 $v_P = 1/\left(\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}\right) = c/\left(\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}\right) = c/n$，而 $\boxed{n = \sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}}$ 被定义为材料的折射率。

注：折射率的更基本的定义应当为 $n = \sqrt{\varepsilon_r} \cdot \sqrt{\mu_r}$，因为它对 ε, μ 分别大于、小于 0 四种情况均正确。关于 ε, μ 均小于 0 的情况我们在后面还会分析。

(5) 为了运算方便，常常把平面波写成复数形式，即

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi)} \tag{8.1.13}$$

(8.1．13)式仍然是波动方程的**数学解**，但因为场量必须为实数，我们应当只取其实部作为**物理解**。然而写成复数形式对许多计算要简便很多，因此在实际运算时经常采用。但应当强调指出的是：只有实场才是有物理意义的场，复场只是为了计算方便！而之所以可以用复场计算是因为方程（8.1.3，5）是线性方程！

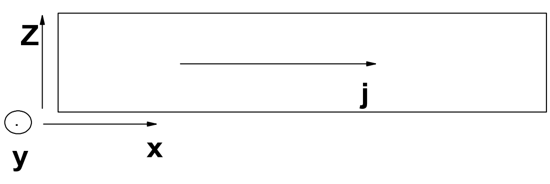
有时把常数因子 $e^{i\varphi}$ 并人振幅中，则

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{8.1.14}$$

注意，这时振幅 $\begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix}$ 已是复数。反之，当电磁波的振幅是复数时，它表示电磁波有相位因子。注意，这时振幅 $\begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix}$ 已是复数。反之，当电磁波的振幅是复数时，它表示电磁波有相位因子。

习题

1. 铜在室温下的电阻率为 $1.69\times10^{-8}\,\Omega\cdot m$，分别在 $f=1\text{MHz}$ 和 $f=1\text{GHz}$ 条件下计算铜导线的趋肤深度。
2. 如图所示的厚度为 d 的平板型导体（电导率为 σ_c），假设沿 x 方向流有圆频率为 ω 的交流电流（沿 y 方向均匀）。设导线边界上的电流密度为 j_0，在准静态近似下求解电流分布，电场分布，以及磁场分布。
3. 推导（6.2.4）及（8.1.4）。



思考题：

1. 阅读所附的论文（PRB 74 035419 （2006）），在准静态极限下推导出 Eq. (1) & Eq. (2). 能否仔细分析论文中所利用的准静条件下的方程和基本假设？与我们此处有和不同？

2. 假设由几束激光干涉形成的驻波光场为 $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0(\vec{r})\cos(\omega t)$，其中 $\vec{E}_0(\vec{r})$ 为实场。建设在其中放置一个半径为 a 的介电常数为 ε 的介质小球，讨论

（1）什么条件下问题满足“准静态近似”？

（2）在准静近似下讨论介质小球的受力的表达式

（3）能否设计出一个真实的光场，计算其对小球的“光力”？

3. 尝试在球坐标/柱坐标下解波动方程（8.1.3）

4. 课件中的所有推导都是基于 ε_r,μ_r 均大于 0 的情形。在其他三种情形下（即：$\varepsilon_r>0,\mu_r<0;\ \varepsilon_r<0,\mu_r>0;\ \varepsilon_r<0,\mu_r>0$），课上建立的那些结论需要改写？