



第三次习题课

2018.11.15

王冬逸 dywang13@fudan.edu.cn
dywang17@fudan.edu.cn

- 
- 边界条件问题
 - 电磁场能量动量 Maxwell 张量计算作用力
 - Green 互易定理与电容
 - 镜像法

Constitutive Relations & Maxwell Equation(in dielectric)

◆ Constitutive Relations

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{j} = \sigma_c \vec{E}$$

◆ Maxwell Equation

静电场来源：
电荷分布

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \quad \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho_f d\tau$$

涡旋电场来源：
磁场变化

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_s -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

磁场为无源场：
磁单极不存在

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \oiint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

有旋磁场来源：
电流分布、
电场变化

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{j}_f \cdot d\vec{S} + \int \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

边界条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \vec{n}_1 \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_f & \text{无自由面电荷, D场的法向分量守恒} \\ \vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 & \text{电场的切向分量连续} \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 & \text{B场的法向分量守恒} \\ \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{\alpha}_f & \end{array} \right.$$

在绝大多数正常情况下，电磁场的边界条件都是E，H场切向分量连续，D，B法向方向连续。只有当有自由面电荷（流）分布时，才有H场与D场的不连续。而所谓面分布，其实是真实的体分布的一种简化，亦即，电荷/流分布在非常薄的一层介质里。此时，若我们不关心此薄层里的场分布，则跨越这个薄层的场当然不连续。

Eg.I 内外半径分别为 R_1 和 R_2 的无限长中空圆柱内沿轴流有稳定的均匀电流，电流密度为 j_ρ ，导体的磁导率为 μ 。试求空间各点的磁感应强度，磁化强度和磁化电流，并计算磁感应强度的散度和旋度。

解：体系具有柱对称性，磁场沿 \hat{e}_ϕ 方向，且其强度仅为 r 的函数。

考虑柱体的截面以 r 为半径的一个圆环：

1) $r < R_1$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow 2\pi r B(r) = 0 \Rightarrow B(r) = 0$$

$$H(r) = 0, M(r) = 0, \vec{j}_m(r) = 0, \nabla \cdot \vec{B}(r) = 0, \nabla \times \vec{B}(r) = 0$$

2) $R_1 < r < R_2$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu j_\rho \pi (r^2 - R_1^2) \Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu j_\rho}{2r} (r^2 - R_1^2) \hat{e}_\phi$$

$$\vec{H}(r) = \vec{B}(r) / \mu = \frac{j_\rho}{2r} (r^2 - R_1^2) \hat{e}_\phi$$

$$\vec{M}(r) = \vec{B}(r) / \mu_0 - \vec{H}(r) = \frac{j_\rho}{2r} (r^2 - R_1^2) \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \hat{e}_\phi$$

$$\vec{j}_m(r) = \nabla \times \vec{M}(r) = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) j_\rho$$

$$\alpha_{m1} = \hat{e}_n \times \vec{M}(R_1) = 0$$

$$\alpha_{m1} = -\hat{e}_n \times \vec{M}(R_2) = -\frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 R_2} (R_2^2 - R_1^2) \vec{j}_f$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(r) = 0, \nabla \times \vec{B}(r) = \mu_0 \vec{j}_m(r) = (\mu - \mu_0) j_\rho$$

3) $r > R_2$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 j_f \pi (R_2^2 - R_1^2) \Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 j_f}{2r} (R_2^2 - R_1^2) \hat{e}_\phi$$

$$H(r) = \frac{j_f}{2r} (R_2^2 - R_1^2) \hat{e}_\phi, M(r) = 0, \vec{j}_m(r) = 0, \nabla \cdot \vec{B}(r) = 0, \nabla \times \vec{B}(r) = 0$$

Eg.2 内外半径分别为 R_1 和 R_2 介质球壳上均匀分布有密度为 ρ_f 自由电荷,球壳介电常数 ε 。试求空间各点的电场,极化强度和极化电荷。并计算电场的散度和旋度。

解: 体系具有球对称性, 电场强度沿 \hat{e}_r 方向, 且其强度仅为 r 的函数。

考虑半径为 r 的同心球面:

1) $r < R_1$

$$\varepsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \rho d\tau \Rightarrow 4\pi r^2 \varepsilon_0 E(r) = 0 \Rightarrow E(r) = 0$$

$$\vec{D}(r) = 0, \vec{P}(r) = 0, \rho_p(r) = 0, \nabla \cdot \vec{E}(r) = 0, \nabla \times \vec{E}(r) = 0$$

2) $R_1 < r < R_2$

$$\varepsilon \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \rho d\tau \Rightarrow 4\pi r^2 \varepsilon E(r) = \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_1^3) \rho_f \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_f}{3\varepsilon} \left(1 - \frac{R_1^3}{r^3}\right) \vec{r}$$

$$\vec{D}(r) = \varepsilon \vec{E}(r) = \frac{\rho_f}{3} \left(1 - \frac{R_1^3}{r^3}\right) \vec{r}$$

$$\vec{P}(r) = \vec{D}(r) - \varepsilon_0 \vec{E}(r) = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{3\varepsilon} \rho_f \left(1 - \frac{R_1^3}{r^3}\right) \vec{r}$$

$$\rho_p(r) = -\nabla \cdot \vec{P}(r) = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \rho_f$$

$$\sigma_{P1} = \hat{e}_n \cdot \vec{P}(R_1) = 0$$

$$\sigma_{P2} = -\hat{e}_n \cdot \vec{P}(R_2) = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{3\varepsilon} \rho_f \left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3}\right) R_2$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho_p(r) / \varepsilon_0 = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho_f$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

3) $r > R_2$

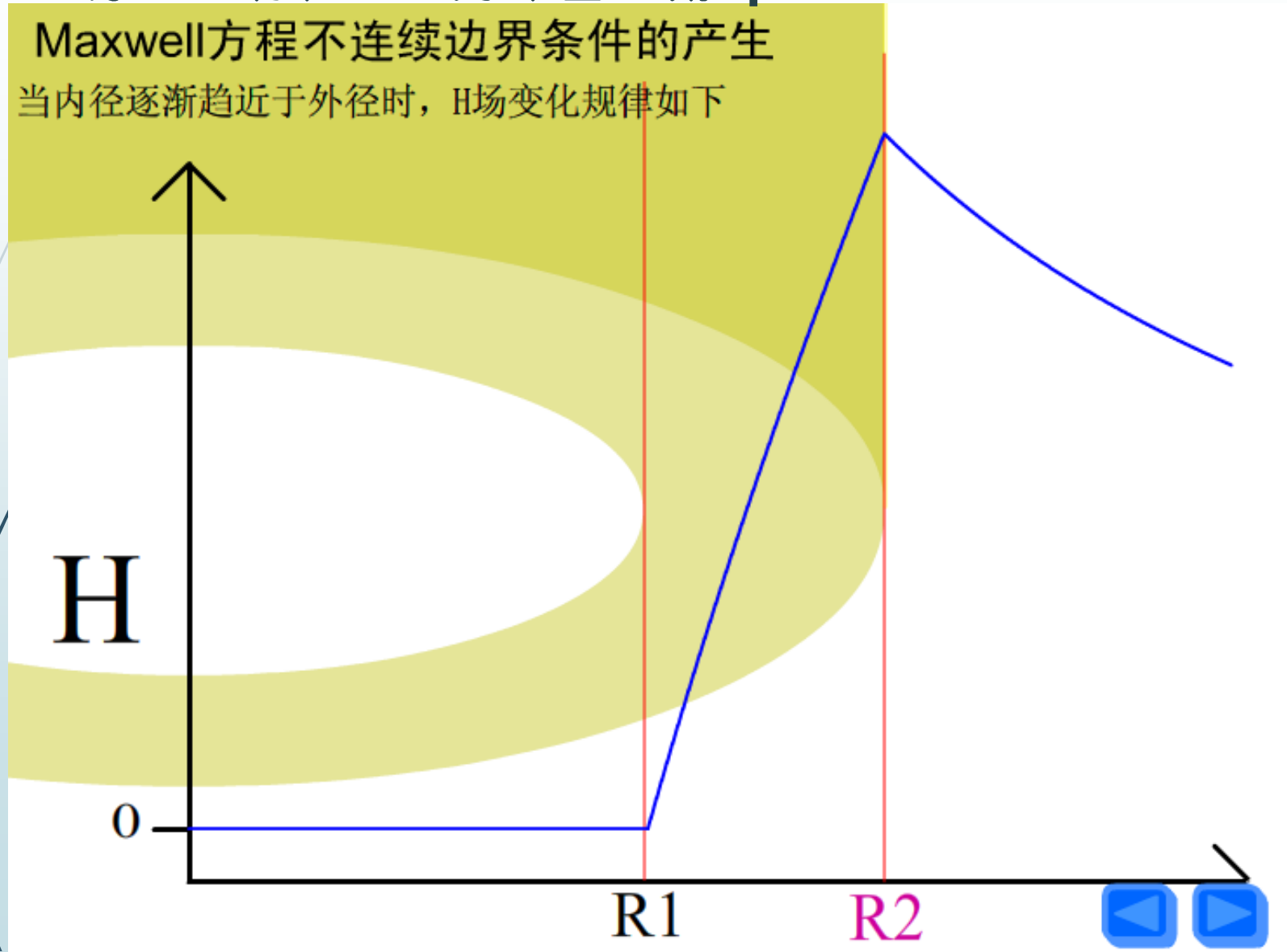
$$\varepsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \rho d\tau \Rightarrow 4\pi r^2 \varepsilon_0 E(r) = \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) \rho_f \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_f}{3\varepsilon_0 r^3} (R_2^3 - R_1^3) \vec{r}$$

$$\vec{D}(r) = \frac{\rho_f}{3r^3} (R_2^3 - R_1^3) \vec{r}, \vec{P}(r) = 0, \rho_p(r) = 0, \nabla \cdot \vec{E}(r) = 0, \nabla \times \vec{E}(r) = 0$$

极限情况： $R_1 \rightarrow R_2$ ，问题退化为边界条件问题（我们不再关心薄层里的场分布）**H**场“不连续” 边界条件的产生原因：存在自由分布面电流 α_f

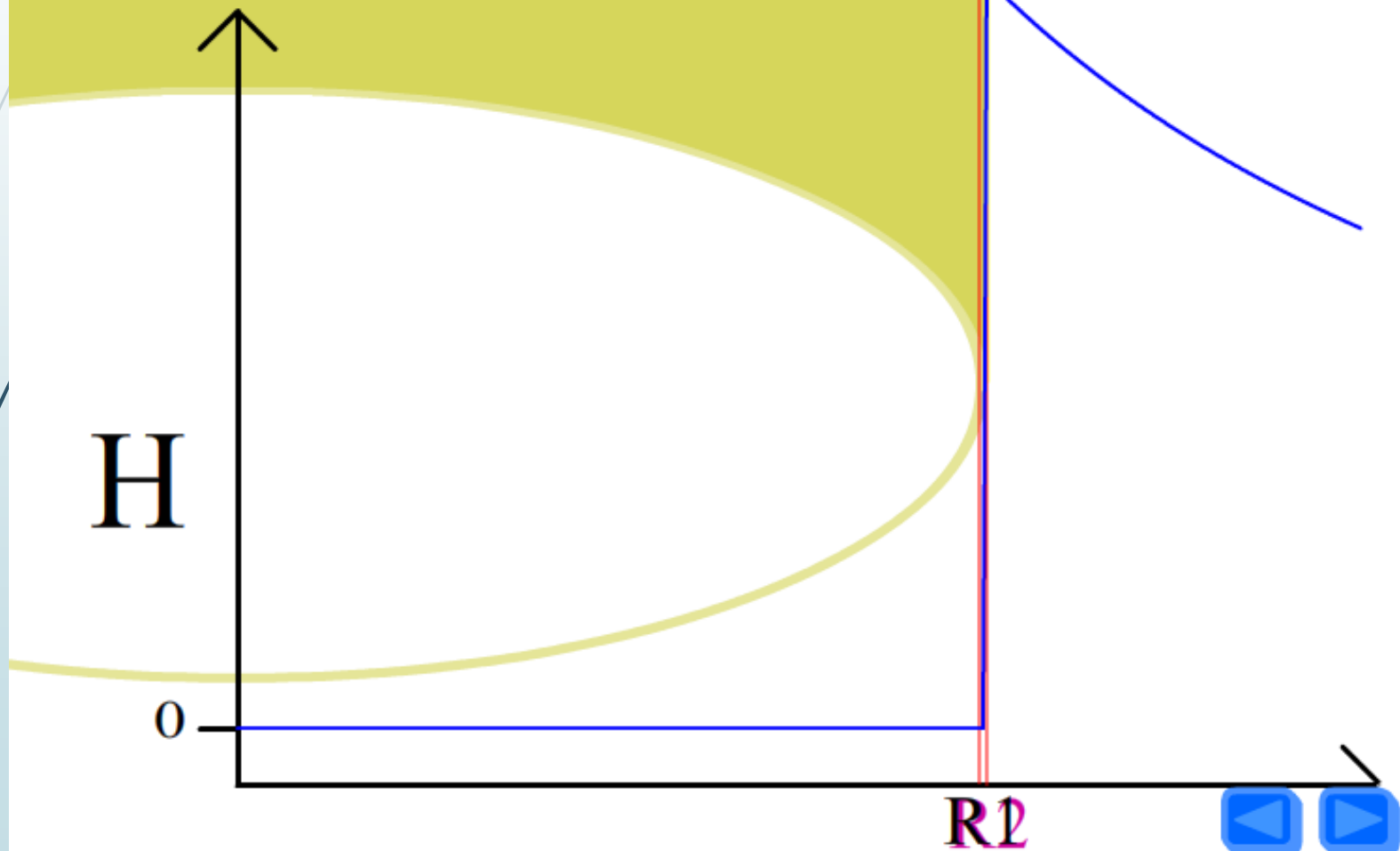
Maxwell方程不连续边界条件的产生

当内径逐渐趋近于外径时，H场变化规律如下



极限情况： $R_1 \rightarrow R_2$ ，问题退化为边界条件问题（我们不再关心薄层里的场分布）**H**场“不连续” 边界条件的产生原因：存在自由分布面电流 α_f

Maxwell方程不连续边界条件的产生
当内径逐渐趋近于外径时，H场变化规律如下



极限情况： $\mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_2$ ，问题退化为边界条件问题（我们不再关心薄层里的场分布） \mathbf{H} 场“不连续” 边界条件的产生原因：存在自由分布面电流 α_f

$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{1}{2r} j_f (r^2 - R_1^2) \hat{e}_\phi & (R_1 \leq r \leq R_2) \\ \frac{1}{2r} j_f (R_2^2 - R_1^2) \hat{e}_\phi & (R_2 \leq r) \end{cases}$$

$$R_1 \rightarrow R_2$$

$$\vec{H}_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_2 &= \lim_{R_1 \rightarrow R_2} \frac{1}{2R_2} j_f (R_2^2 - R_1^2) \hat{e}_\phi \\ &= \lim_{R_1 \rightarrow R_2} j_f \frac{(R_2 + R_1)(R_2 - R_1)}{2R_2} \hat{e}_\phi \end{aligned}$$

$$= j_f dR \hat{e}_\phi$$

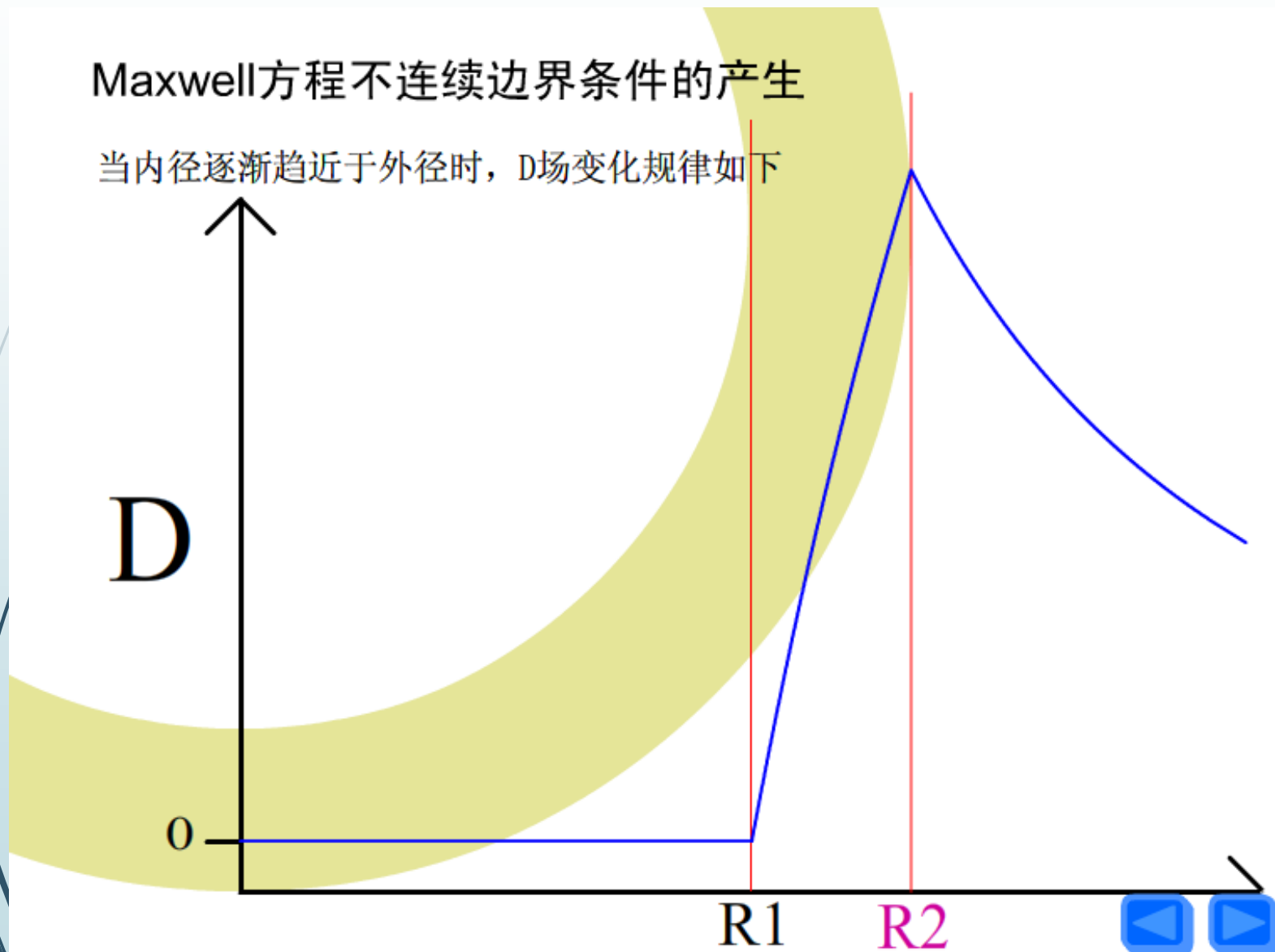
$$(j_f dR \hat{e}_\phi) \times \hat{e}_r = \vec{\alpha}_f \times \hat{e}_r$$

$$\hat{e}_r \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \hat{e}_r \times (\vec{\alpha}_f \times \hat{e}_r) = \vec{\alpha}_f$$

类似的，**D**场不连续边条的产生： σ_f

Maxwell方程不连续边界条件的产生

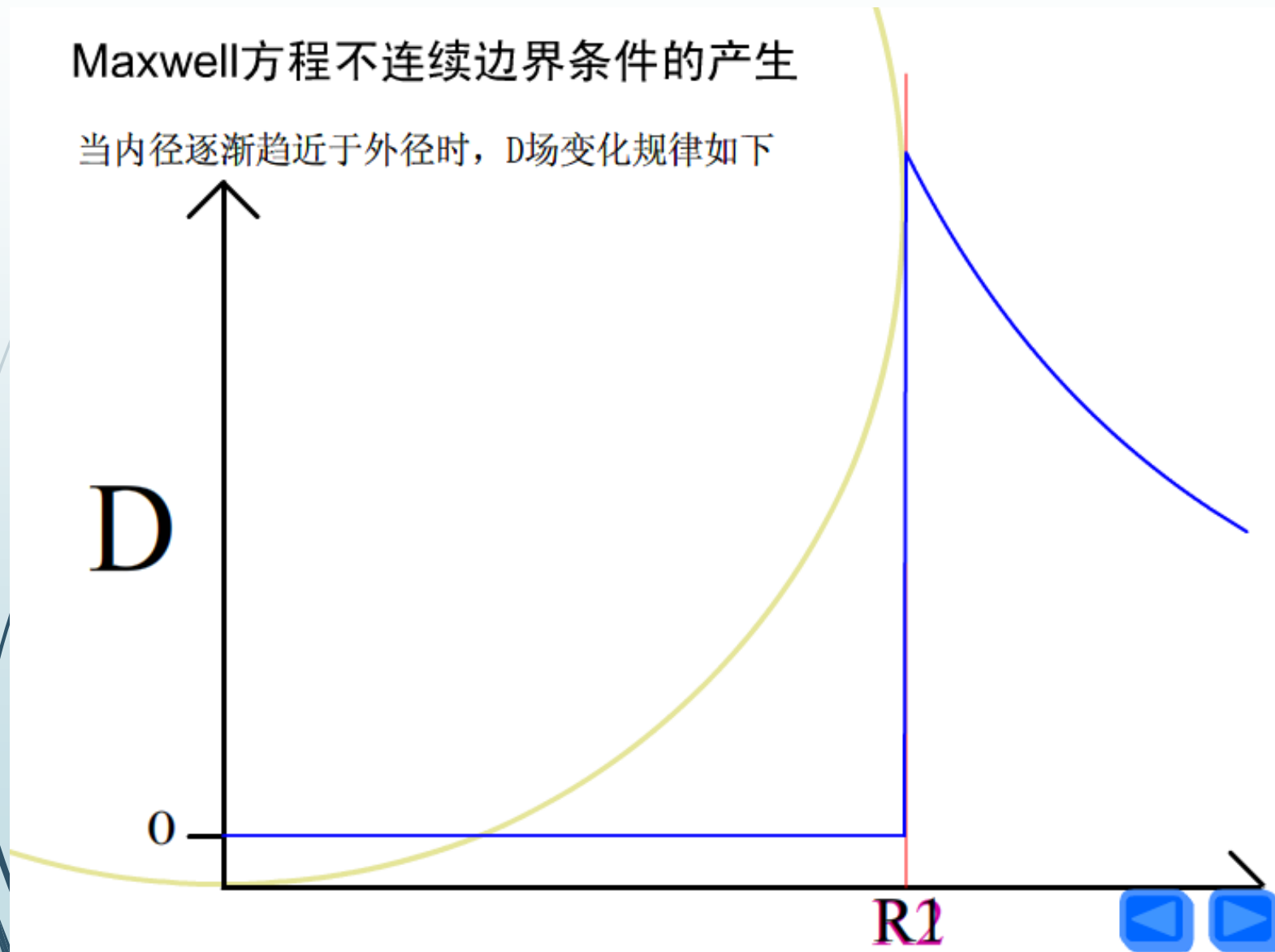
当内径逐渐趋近于外径时，D场变化规律如下



类似的，**D**场不连续边条的产生： σ_f

Maxwell方程不连续边界条件的产生

当内径逐渐趋近于外径时，D场变化规律如下



类似的，**D**场不连续边条的产生： σ_f

$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{\rho_f}{3} (1 - \frac{R_1^3}{r^3}) \vec{r} & (R_1 \leq r \leq R_2) \\ \frac{\rho_f}{3} (\frac{R_2^3 - R_1^3}{r^3}) \vec{r} & (R_2 \leq r) \end{cases}$$

$$R_1 \rightarrow R_2$$

$$\vec{D}_1 = 0$$

$$\vec{D}_2 = \lim_{R_1 \rightarrow R_2} \frac{\rho_f}{3} (\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2}) \hat{e}_r$$

$$= \lim_{R_1 \rightarrow R_2} \rho_f \frac{(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)(R_2 - R_1)}{3R_2^2} \hat{e}_r$$

$$= \rho_f dR \hat{e}_r = \sigma_f \hat{e}_r$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{e}_r = \sigma_f$$

在绝大多数正常情况下，电磁场的边界条件都是E，H场切向分量连续，D，B法向方向连续。只有当**有自由面电荷（流）分布**时，才有**H场与D场的不连续**。

电磁场能量动量

- 能量守恒及转化 $\frac{\partial}{\partial t} \left[W_m + \int u d\tau \right] = -\oint \vec{S}_p \cdot d\vec{S}$
- $\vec{S}_p(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ 能流密度
 $u(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$ 电磁场局域能量密度
- 动量守恒及转化 $\frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{G}_m + \int \vec{g} d\tau \right] = -\oint d\vec{S} \cdot \vec{T}$
- $\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{S}_p$ 电磁场局域动量密度
 $\vec{T} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \vec{I} - \epsilon_0 \vec{E} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \vec{B}$ 动量流密度

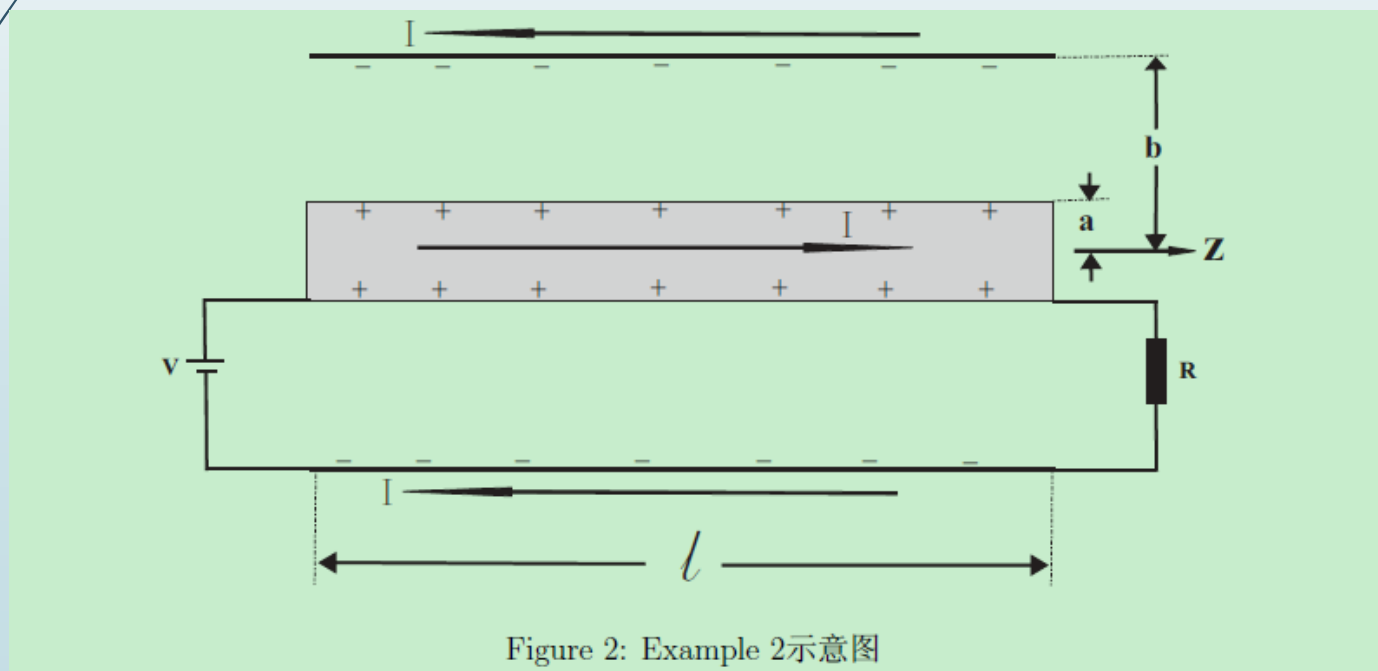
Maxwell II 张量计算作用力

- 电磁场单位时间内通过界面从外面传递到曲面内部的总动量，即外界电磁场通过界面对闭合区域内的**带电体**和**电磁场**施加的**总力**为： $-\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{T}$
- 其中**作用于**区域内**电磁场**上，引发区域内电磁场而非带电体本身的动量的增加的力为： $\int_V \frac{\partial}{\partial t} \vec{g} d\tau$
- 将作用于区域内电磁场的力刨除，剩余的外界电磁场通过界面对闭合区域内**带电体**的作用力即为：

$$\vec{F}_{em} = \frac{\partial \vec{G}_m}{\partial t} = -\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{T} - \int_V \frac{\partial}{\partial t} \vec{g} d\tau$$

Eg.3 如图2所示，空间中有一长度为 l 的同轴电缆，内导体半径为 a ，外导体半径为 b ，其两端：一端连接电压为 V 的直流电源，另一端连接阻值为 R 的电阻，内导体电荷线密度为 λ ，电流大小为 I ，外导体带反号的电荷和反向的电流。

在 $a < r < b$ ， $0 < z < l$ 的区间内，计算电磁场的能量密度 w_{em} 和能流密度分布 \vec{S} ，动量密度 \vec{p} 和量流密度分布 \vec{T} ，单位时间内通过同轴电缆截面能量 $\int \vec{S} \cdot d\vec{\sigma}$ 和动量 $\int \vec{p} \cdot d\vec{\sigma}$ ，电磁场的总能量 $\int w_{em} d\tau$ 和总动量 $\int \vec{g} d\tau$ 以及内外导体之间的作用力 \vec{F}_{int}



解答

解: 易求得 $a < r < b$, $0 < z < l$ 区间内的电场 \vec{E} 和磁场 \vec{H} 的分布:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{e}_r \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{r} \hat{e}_\phi$$

先考虑电磁场的能量, 其能量密度 w_{em} 和能流密度 \vec{S} 分布为:

$$w_{em} = \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\lambda^2}{\epsilon_0} + \mu_0 I^2 \right) \frac{1}{r^2}$$

$$\vec{S} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_z \quad (34)$$

单位时间内通过同轴电缆横截面的能量:

$$P = \int \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = \int \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z r dr d\theta = \frac{\lambda I}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad (35)$$

按照能流的方向, 很明显, 能量是从电池流向电阻的.

利用电场计算内导体和外导体之间的电势差 V :

$$V = V_a - V_b = \int_b^a d\varphi = \int_b^a \nabla \varphi \cdot d\vec{r} = \int_a^b E \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad (36)$$

那么,

$$P = IV \quad (37)$$

Eq. (37) 的物理意义十分明确, 单位时间内通过同轴电缆横截面的能量 P 等于电路的功率 IV .

电磁场的总能量 U 为:

$$U = \int w_{em} d\tau = \frac{l}{4\pi} \left(\frac{\lambda^2}{\epsilon_0} + \mu_0 I^2 \right) \ln \frac{b}{a} \quad (38)$$

接着考虑电磁场的动量, 其动量密度 \vec{g} 和动量流密度 \vec{T} 分布为:

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{\mu_0 \lambda I}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \hat{e}_z \quad (39)$$

$$\vec{T} = \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\lambda^2}{\epsilon_0} + \mu_0 I^2 \right) \frac{1}{r^2} \vec{I} - \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r \hat{e}_r - \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \hat{e}_\phi \hat{e}_\phi \quad (40)$$

单位时间内通过同轴电缆横截面的动量 \vec{F} :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int \vec{T} \cdot d\vec{\sigma} = \int \vec{T} \cdot \hat{e}_z r dr d\phi = \int \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\lambda^2}{\epsilon_0} + \mu_0 I^2 \right) \frac{1}{r^2} \hat{e}_z r dr d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\lambda^2}{\epsilon_0} + \mu_0 I^2 \right) \ln \frac{b}{a} \hat{e}_z \end{aligned} \quad (41)$$

电磁场的总动量 \vec{P} :

$$\vec{P} = \int \vec{g} d\tau = \frac{\mu_0 \lambda I l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \hat{e}_z \quad (42)$$

讨论分析

最后考虑内外导体之间的作用力 \vec{F}_{int} :

$$\vec{F}_{int} = - \int \vec{T} \cdot d\vec{\sigma} = - \int \vec{T} \cdot \hat{e}_r r d\phi dz = - \int \left[\frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\lambda^2}{\epsilon_0} + \mu_0 I^2 \right) \frac{1}{r^2} \hat{e}_r - \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r \right] r d\phi dz = 0 \quad (43)$$

讨论与思考:

- 电阻的能量来自空间电磁场, 所以电路中能量的传播速度(电场建立的速度)为光速.
- 整个体系静止, 为什么会有电磁动量? (提示: $\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r \hat{e}_z$)
- 为什么会存在表面电荷: J.D.Jackson, Am. J. Phys. 64, 855 (1996).

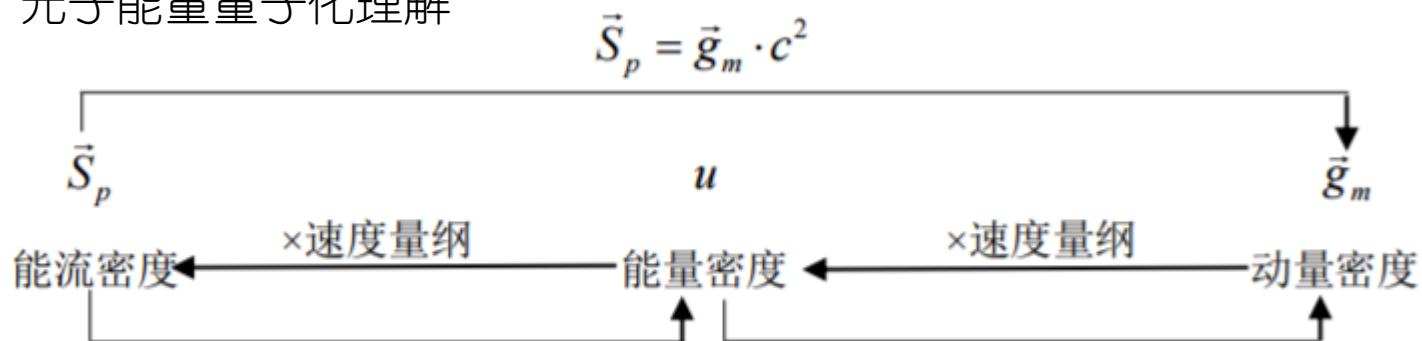
讨论分析

能流密度和动量密度的关系为

$$\vec{g} = \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \vec{S}_P$$

那么此关系合理之处和背后的物理是什么？

光子能量量子化理解



$$|\vec{S}_p| = u \cdot c \quad ①$$

$$u = g_m \cdot c \quad ②$$

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{S}_p = u \cdot \vec{c}$$

$$E = \vec{p} \cdot \vec{c}$$

$$\Rightarrow \frac{E}{\Omega} = \frac{\vec{p}}{\Omega} \cdot \vec{c}$$

$$\Rightarrow u = \vec{g}_m \cdot \vec{c}$$

联立式①、②即得 $\vec{S}_p = \vec{g}_m \cdot c^2$

格林互易定理

给定一个有 m 个导体组成的体系，当导体上的电荷为 q_1, q_2, \dots, q_m 时，它们的电势等于 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ ；当导体上的电荷为 q'_1, q'_2, \dots, q'_m 时，它们的电势等于 $\phi'_1, \phi'_2, \dots, \phi'_m$ 。那么有关系式

$$\sum_{i=1}^m q_i \phi'_i = \sum_{i=1}^m q'_i \phi_i$$

电容和电容系数

电容：体系容纳电荷的能力。

电容系数 C_{ij} ：

将导体系第 i 个导体的电势表示为所有导体所带电荷量的线性组合，组合系数即为对应的电容系数倒数 $\phi_i = \sum_j C_{ij}^{-1} q_j$
反之亦然 $q_i = \sum_j C_{ij} \phi_j$

此外可证 $C_{ij}^{-1} = \phi_i^{(j)}$ 即电容系数 C_{ij} 的物理意义为**仅在第 j 个带电体上充单位电量**时在**第 i 个带电体上诱导的电势**

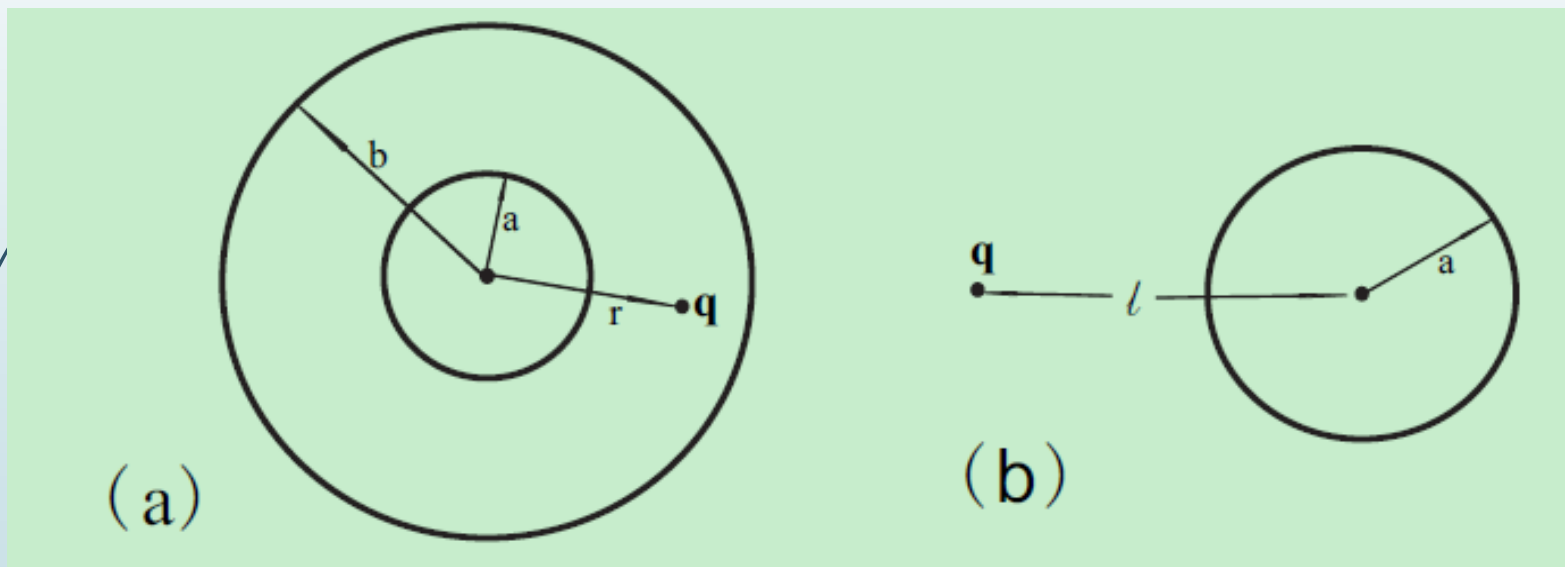
几何意义即**电荷之间的“有效距离”**，物理上具有长度量纲。显然，这个距离越大，当然体系就可以“装下”更多的电荷，因此电容也就越大。

Eg.4 如图(a)、(b)所示, 利用格林互易定理求解

(a) 半径为 a 和 b 的两个同心导体球壳, 在其间放一点电荷 q , 求两个球壳上的感应电荷;

(b) 半径为 a 的导体球外 l 处放一点电荷 q , 求该球的感应电荷。

(c) 利用电容系数法计算(a)中内外导体球壳组成的电容器电容, 并与直接利用(a)中结果计算比较。



解答

解：(a) 第一种情况：电荷分布为 q, Q_1, Q_2 ，其中 Q_1, Q_2 分别为内球壳和外球壳的感应电荷，电势分布为 $\varphi, 0, 0$ ；

第二种情况：电荷密度分布为 $0, +\sigma, -\frac{a^2}{b^2}\sigma$ ，电势分布为 $\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}), \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}), 0$ 。

那么由格林互易定理

$$q \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + Q_1 \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 0 \quad (2.1)$$

可得

$$Q_1 = -q \frac{a b - r}{r b - a} \quad (2.2)$$

类似可得

$$Q_2 = -q \frac{b r - a}{r b - a} \quad (2.3)$$

容易验证

$$Q_1 + Q_2 = -q \quad (2.4)$$

(b) 第一种情况：电荷分布为 q, Q ，其中 Q 为球壳的感应电荷，电势分布为 $\varphi, 0$ ；

第二种情况：电荷密度分布为 $0, +\sigma$ ，电势分布为 $\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 \ell}, \frac{\sigma a}{\epsilon_0}$ 。

那么由格林互易定理

$$q \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 \ell} + Q \frac{\sigma a}{\epsilon_0} = 0 \quad (2.5)$$

可得

$$Q = -\frac{a}{\ell} q \quad (2.6)$$

Eq.(2.6)正是电像法中象电荷的电量，但是这并不意味着电像法中像电荷的电荷就是感应电荷。

解答

设导体 1 的电荷量为 q ，导体 2 外表面的电荷量为 q' ，其电势分别为 φ_1 ， φ_2 。

由导体 1 和空心导体壳 2 的内表面组成电容器，导体壳 2 内表面的电荷量为 $-q$ ，电势差为 $\varphi_1 - \varphi_2$ ，则电容器的电容系数为：

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

此外考虑孤立导体（导体 2 外表面）的电容，有 $C' = q' / \varphi_2$

考虑系统的电容系数，有：

$$\begin{cases} q = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 \\ q' - q = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 \end{cases}$$

解得：

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{(C_{22} + C_{21})q - (C_{12} + C_{11})(q' - q)}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} = \frac{(C_{22} + C_{21} + C_{12} + C_{11})q - (C_{12} + C_{11})q'}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}$$

由于内部电容的电势差不受导体 2 的外表面电荷 q' 的影响，因而 $C_{12} = -C_{11}$ ，带入上面的方程，得到：

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{(C_{22} + C_{21})q}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} = \frac{q}{C_{11}}$$

故而可以得到，电容器的电容系数为 C_{11} 。

解答

$$\text{Configuration(1)} \begin{cases} Q_1 = -q \frac{a(b-r)}{r(b-a)} \\ Q_2 = q \frac{b(a-r)}{r(b-a)} \end{cases}; \begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Configuration(2)} \begin{cases} Q_1 = 4\pi\sigma a^2 \\ Q_2 = -4\pi\sigma a^2 \end{cases}; \begin{cases} \varphi_1 = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

利用电容系数及Configuration(2):

$$Q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 \Rightarrow C = C_{11} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

$$\text{直接计算可得 } C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

结果相同

3.5 有两个导体组成的一个系统，导体 1 装在空心导体 2 中，使用系统的电容系数来表示系统组成的电容器中的电容和孤立导体（即导体 2 的外表面）的电容。

解：

设导体 1 的电荷量为 q ，导体 2 外表面的电荷量为 q' ，其电势分别为 φ_1 、 φ_2 。

由导体 1 和空心导体壳 2 的内表面组成电容器，导体壳 2 内表面的电荷量为 $-q$ ，电势差为 $\varphi_1 - \varphi_2$ ，则电容器的电容系数为：

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

此外考虑孤立导体（导体 2 外表面）的电容，有 $C' = q' / \varphi_2$

考虑系统的电容系数，有：

$$\begin{cases} q = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 \\ q' - q = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 \end{cases}$$

解得：

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{(C_{22} + C_{21})q - (C_{12} + C_{11})(q' - q)}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} = \frac{(C_{22} + C_{21} + C_{12} + C_{11})q - (C_{12} + C_{11})q'}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}$$

由于内部电容的电势差并不受导体 2 的外表面电荷 q' 的影响，因而 $C_{12} = -C_{11}$ ，带入上面的方程，得到：

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{(C_{22} + C_{21})q}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} = \frac{q}{C_{11}}$$

故而可以得到，电容器的电容系数为 C_{11} 。

此外，考虑 q 与电势的关系，易于发现此处有 $(C_{11} + C_{12})\varphi_2 = 0 \Rightarrow C_{11} = -C_{12} = -C_{21}$

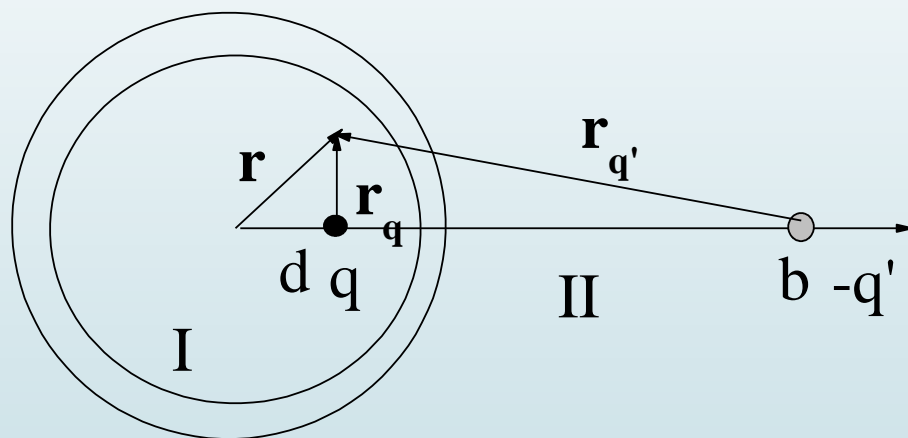
同时有：

$$\begin{aligned} q' &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + q \\ &= (C_{11} + C_{21})\varphi_1 + (C_{22} - C_{11})\varphi_2 \\ &= (C_{22} - C_{11})\varphi_2 \end{aligned}$$

故而发现孤立导体的电容为 $C_{22} - C_{11}$ 。也可写作 $C_{22} + C_{12}$ 。

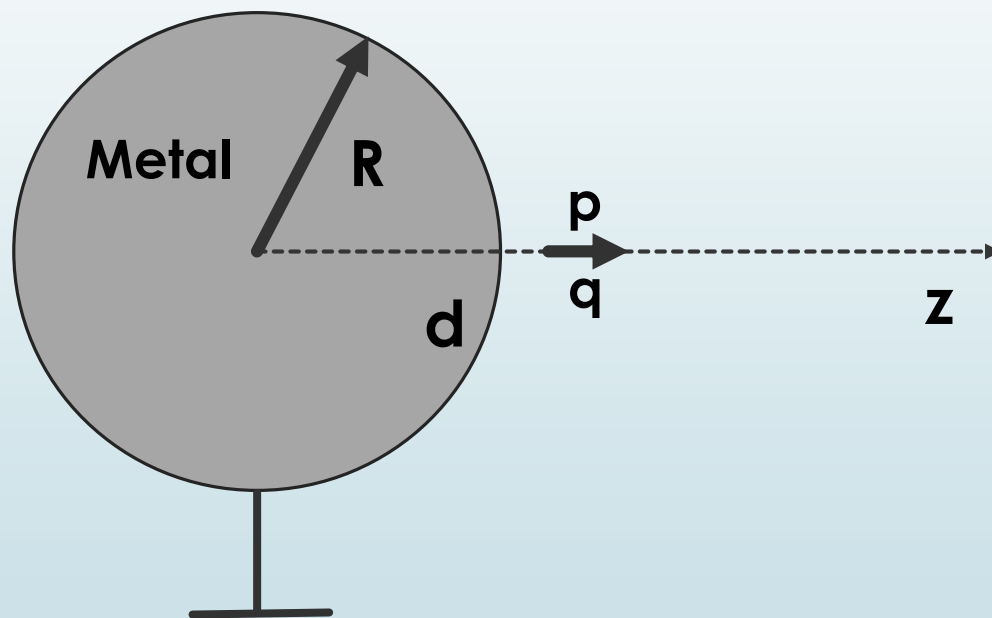
镜像法

镜像法 – 利用虚拟电荷代替界面处的面电荷，使得试解满足边条；唯一性定理保证解的正确性



$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_d} - \frac{q'}{r_b} \right], \quad \varphi_{II} = 0$$

Eg.5 如图所示，在一个半径为 R 的接地金属球外距球心 d 的位置放置一个电偶极子 \vec{p} ，电偶极子的方向沿径向。1) 计算空间电势分布；
2) 在同样位置再放一个点电荷 q ，当 q 取何值时，金属球上的感应电荷对外变为一个纯粹的电偶极子？



取球心为坐标原点，球心到点电荷 q 的方向为 z 轴。设先求出位于坐标为 $(0,0,d)$ 的点电荷的镜像电荷 $-q'$ ：

解答

$$\frac{q}{\sqrt{d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta}} - \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2Rb \cos \theta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = \frac{R^2}{d} \\ q' = \frac{R}{d} q \end{cases}$$

对于位于 $(0,0,d)$ 的电偶极子 $\vec{p} = q\vec{l}$ 由位于 $(0,0, d + \frac{l}{2})$ 和 $(0,0, d - \frac{l}{2})$ 的两个大小为 q 和 $-q$ 的电荷构成，故电偶极子对应两个镜像电荷 q_1' 和 q_2' 。其大小和位置分别为：

$$\begin{cases} b_1 = \frac{R^2}{d + \frac{l}{2}} \\ q_1' = -\frac{R}{d + \frac{l}{2}} q \end{cases} \quad \begin{cases} b_2 = \frac{R^2}{d - \frac{l}{2}} \\ q_2' = \frac{R}{d - \frac{l}{2}} q \end{cases}$$

1) 空间中的电势分布包括电偶极子和两个镜像电荷三部分的贡献。即：

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + (d + \frac{l}{2})^2 - 2r(d + \frac{l}{2}) \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{r^2 + (d - \frac{l}{2})^2 - 2r(d - \frac{l}{2}) \cos \theta}} - \frac{\frac{R}{d + \frac{l}{2}} q}{\sqrt{r^2 + (\frac{R^2}{d + \frac{l}{2}})^2 - 2r(\frac{R^2}{d + \frac{l}{2}}) \cos \theta}} + \frac{\frac{R}{d - \frac{l}{2}} q}{\sqrt{r^2 + (\frac{R^2}{d - \frac{l}{2}})^2 - 2r(\frac{R^2}{d - \frac{l}{2}}) \cos \theta}} \right]$$

2) 两个镜像电荷对球外空间的贡献即为球上感应电荷对外的贡献。由于两个镜像电荷绝对大小不相等，我们可以将两个镜像电荷等效成一个镜像电偶极子和一个镜像电荷

p' 和 q_3' ，其中镜像电荷大小 q_3' 为

$$q_3' = q_1' + q_2' = q \left(\frac{R}{d - \frac{l}{2}} - \frac{R}{d + \frac{l}{2}} \right) = \frac{lqR}{d^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \approx \frac{Rp}{d^2}$$

解答

故仅当新加的外设点电荷对应的镜像电荷与之抵消时,金属球上的感应电荷对外可以等效为一个纯粹的电偶极子。外设点电荷大小 q_3 为:

$$q_3 = \frac{d}{R} q_3 = \frac{d}{R} \frac{Rp}{d^2} = \frac{p}{d}$$