第 二 十 五 讲

上次课：

- 电偶极辐射角分布：$f(\theta,\varphi)\propto p_0^2\sin^2\theta\cdot\omega^4$
- 磁偶极辐射：$\vec{p}/\varepsilon_0\to\mu_0\vec{m},\quad \vec{E}\to\vec{B}$ ，电磁对称性
- **绝对时空观的困难：麦-莫实验显示电磁波速度不随坐标系变化而改变！**
- 相对时空观，**Lorentz** 变换，$x_\mu^{'}=\alpha_{\mu\nu}x_\nu$
- 物理量的分类：标量、矢量、张量

（4）几个例子

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ 的变换行为为一阶张量

因为 $$x'_\mu=\alpha_{\mu\nu}x_\nu \quad\Rightarrow\quad x_\nu=\left(\alpha^{-1}\right)_{\nu\mu}x'_\mu=\left(\alpha^{T}\right)_{\nu\mu}x'_\mu=\alpha_{\mu\nu}x'_\mu \qquad (11.2.6)$$

故 $$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} \qquad (11.2.7)$$

上式显示$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}\right\}=\left\{\nabla,-i\dfrac{\partial_t}{c}\right\}$就是一个四维矢量。

(b) 任意两个四维矢量的标积为四维标量

比如四维间隔就是两个（四维时空位置）矢量的标积。同理，因为$\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$是一个矢量，故有

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x'_\mu}=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\alpha_{\mu\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\square^2 \qquad (11.2.8)$$

即$\square^2$算符为四维不变量。由此推知，若A_μ为四维矢量，则此矢量的四维散度$\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}A_\mu$为一不变量，即

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}A'_\mu=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\alpha_{\mu\beta}A_\beta=\frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\nu \qquad (11.2.9)$$

2．物理规律的协变性

相对性原理要求，物理规律在任何一个惯性参考系内都是相同的，这就意味着在 Lorentz 变换下，表示物理规律的等式的形式应保持不变。*如果等式两边的物理量是由同阶的张量构成的，那么这种形式的方程一定满足相对性原理，我们称这种形式的方程式为协变式。*例如，某一物理规律可表示为如下形式：

$$A_\mu = B_\mu \tag{11.2.10}$$

式中 A_μ，B_μ 分别代表 S 系中这一物理过程的不同物理量。当把它变换到 S' 系时，由于 A_μ，B_μ 都是一阶张量(即矢量)，其变换规律分别为

$$\begin{aligned} A'_\mu &= \alpha_{\mu\nu} A_\nu \\ B'_\mu &= \alpha_{\mu\nu} B_\nu \end{aligned} \tag{11.2.11}$$

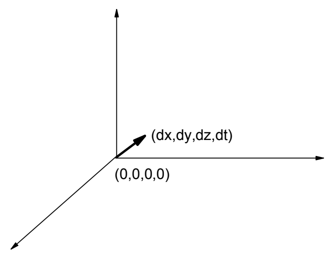
故

$$A'_\mu = \alpha_{\mu\nu} A_\nu = \alpha_{\mu\nu} B_\nu = B'_\mu \tag{11.2.12}$$

由此可见，要判断规律是否满足相对性原理，只要看其物理方程是否为 Lorentz 协变。反之，在我们构造任何新规律时，原则上都应当使其满足 Lorentz 协变。

3．速度及四维速度矢量

假定在 S 系中考察一个物体的运动，其三维空间速度的定义是 $\vec{u} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$。现在假定 S' 系相对 S 系以速度 v 沿着 x 轴运动，则在 S' 系中同一粒子的速度定义为 $\vec{u}' = \dfrac{d\vec{r}'}{dt'}$。S 系中测量粒子的运动速度可以想象成测量两个事件：1）粒子在四维空间原点（0,0,0,0）出发，在四维空间点（$(dx, dy, dz, icdt)$ 被测到。因为在相对论时空观中，时间和空间是一起变换的，由 Lorentz 公式得



$$\begin{aligned} dx' &= (dx - vdt)\gamma_v \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)\gamma_v \end{aligned} \tag{11.2.11}$$

用上面第四个方程除前三个，则得

$$\begin{cases} u_x' = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{(dx - vdt)\gamma_v}{\left(dt - \dfrac{v}{c^2}dx\right)\gamma_v} = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u_y' = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u_z' = \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \end{cases} \qquad (11.2.12)$$

上式决定了两个参考系中三维速度的变换关系，这就是相对论中的速度合成法则。在低速极限（$v << c$，$|\vec{u}| << c$）下，可将公式展开成泰勒级数，取最低阶项，上式变成经典力学中速度的矢量合成法则，即

$$\begin{cases} u_x' = u_x - v, \\ u_y' = u_y, \\ u_z' = u_z, \end{cases} \qquad (11.2.13)$$

注意到（11.2.12）的分母中包含$u_x v/c^2$项，这表明，**无论u, v中哪一项接近光速，都会有“超越常识”（牛顿+伽利略时空观）的奇异现象发生**。

<u>根据这些结果可以回答之前几个Puzzle:</u>

*1）为什么水波和电磁波都是波，换一个坐标系观测水波，其速度变化甚至可以变为0（像那位英国科学家一样骑着马追泰晤士河上的一个水孤波），但电磁波的速度却从来不变（M-M实验）？ 原因是水波的运动$u << c$，而电磁波的速度$u = c$。将$\vec{u} = c\hat{x}$带入（11.2.12），发现 $\vec{u}' = u_x'\hat{x}$，$u_x' = \dfrac{c-v}{1-vc/c^2} \equiv c$。这是一个多么惊人的结果？！**当且仅当我们考察的“物质”的运动速度为光速时，无论如何换坐标系都不能改变其运动速度的观测值！***

2）可否改变坐标系运动速度v，使得原本低速运动的粒子在另一个坐标系的运动速度“超”光速？答案是“否”。即使我们以光速反向运动，根据（11.2.12）我们发现 $u_x' = \dfrac{u_x + c}{1 + cu_x/c^2} = c$，而当坐标系速度小于光速时，粒子速度也必然小于光速。也就是说，我们最多能使得粒子的相对运动速度达到光速，而不能超过光速！

注意到速度的变换公式很复杂，不满足四维矢量的变换公式，这是因为三维

空间速度的定义$\vec{u}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$本身不是相对论协变的。式中分子$d\vec{r}$是三维矢量，很容易推广到四维协变形式$x_\mu=\{\vec{r},ict\}$。问题出在分母上：$dt$ *不是一个四维标量！其在不同惯性系中测量值不同*! 为了解决这个问题，我们知道 2 个事件之间的四维时空间隔

$$(ds)^2=-dx_\mu dx_\mu=(cdt)^2-d\vec{r}\cdot d\vec{r} \qquad (11.2.14)$$

是一个标量，**其在不同惯性系中的测量值不变**。可以据此定义一个具有时间量纲的标量

$$d\tau=ds/c=dt\sqrt{1-\vec{u}\cdot\vec{u}/c^2}=dt\sqrt{1-\beta_u^2} \qquad (11.2.15)$$

用来替代dt。考察$d\tau$的物理意义：**注意到其与坐标系无关，因此我们可以选取与粒子一起运动的坐标系来测量它**，此时我们有$\beta_u^2=0$，因此得到$d\tau=dt|_{u=0}$。*故$d\tau$的物理意义为：在粒子静止的坐标系中测量的两个事件之间的时间差*。*通常我们也把$d\tau$称作"固有时" - **Proper Time***。在任意的坐标系下，*粒子可能会相对于该坐标系运动，*在这个坐标系下测得的两事件的时间间隔dt可表达为在"随着粒子运动的坐标系"下测得的时间间隔$d\tau$（固有时）的函数：

$$dt=\frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta_u^2}}=\gamma_u d\tau \qquad (11.2.16)$$

因此，对同样两个客观存在的事件，在相对于粒子运动的坐标系下测得的时间间隔比"固有时"增大了$\gamma_u=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_u^2}}$倍 – 这就是所谓"*时间膨胀*"效应，这个效应被高能实验所验证。既然"固有时"是个与坐标变换无关的具有时间量纲的标量，我们可据此定义一个四维矢量（四维速度）：

$$u_\mu=\frac{dx_\mu}{d\tau}=\gamma_u\{\vec{u},ic\} \qquad (11.2.17)$$

它显然是在 Lorentz 变换下协变的，因为分子是个四维矢量而分母是个四维不变量。这个四维矢量中三维空间部分与三维速度矢量相关（但不是一回事！因为相对于物体运动的时钟测得的时间不是固有时，需做修正 --- 此即为γ_u的来源!)。

Tips：对理论物理学家来说，最重要的就是对任何一个三维矢量如何正确的找到它的四维伴侣！你试试其他的三维矢量，能否自己找到它们的伴侣？

§ 11.3　麦克斯韦方程的协变形式

根据相对性原理要求，作为描述电磁体系物理规律的麦克斯韦方程组应当在 Lorentz 变换下协变。下面我们就将我们所关心的方程一一写成在 Lorentz 变换下协变的形式

1. 电荷守恒定律 - 四维电流矢量

电荷密度和电流密度之间满足连续性方程，

$$\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \qquad (11.3.1)$$

此方程是在某一个确定坐标系（记为 S 系）下写出的，在 S'系中 $\vec{j},\rho$ 都应相应变化成 $\vec{j}',\rho'$。根据相对性原理，（11.3.1）的方程形式应当洛伦兹变换下不变。因为 $(\vec{\nabla},\partial(ict))$ 构成一个四维矢量，假如

$$J_\mu=(\vec{j},ic\rho) \qquad (11.3.2)$$

也构成一个四维矢量，则（11.3.1）式可以写成相对论不变的形式：

$$\partial_\mu J_\mu=0 \qquad (11.3.3)$$

为书写方便，式中 $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ 记为 ∂_μ。*下面我们证明 $(\vec{j},ic\rho)$ 确实构成一个四维矢量。*

实验显示，电荷是洛伦兹不变量，亦即 --- 一个带电体在任意一个惯性系下测得的电荷量均相同，这一实验事实将成为我们证明的关键。

设在 s 系中有一体积元 $\Delta\Omega$，其中电荷以速度 u 沿 x 方向运动，体积元 $\Delta\Omega$ 中的总电荷为 $\Delta Q=\rho\Delta\Omega$，其中 ρ 为 s 系中测量的电荷密度。在与电荷相对静止的参考系 S_0 中，电荷速度为零，电荷密度为 ρ_0，相应的体积元为 $\Delta\Omega_0$，根据电荷的洛伦兹不变性，我们有

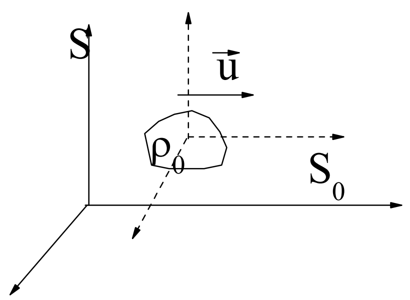
$$\rho\Delta\Omega=\rho_0\Delta\Omega_0 \qquad (11.3.4)$$

由于 S_0 相对于 S 系以速度 $\vec{u}$ 运动，则两个坐标系的时空微元的变换关系为

$$\Delta x_0=\left(\Delta x-u\Delta t\right)\gamma_u,\ \Delta y_0=\Delta y,\ \ \Delta z_0=\Delta z,\ \Delta t_0=\left(\Delta t-u\Delta x/c^2\right)\gamma_u \qquad (11.3.5)$$

在 S 系中测量运动物体的“长度”时必须同时进行，亦即，$\Delta t=0$。将其带入上式，我们发现两参考系之间的体积元的关系为

$$\begin{aligned}\Delta\Omega_0 &= dx_0dy_0dz_0\\ &=\gamma_u dxdydz=\gamma_u\Delta\Omega\end{aligned} \qquad (11.3.6)$$



我们注意到同一个带电微元，其体积在相对其运动的坐标系中测量时（$d\Omega$）比相对其静止的坐标系（随动坐标系）中测量出的结果 $d\Omega_0$ 小，这就是所谓的“*运动物体长度收缩*”的概念。把（11.3.6）式代入（11.3.4）式，则得

$$\rho=\rho_0\gamma_u \qquad (11.3.7)$$

将上式代入电流密度的表达式发现

$$\vec{j}=\rho\vec{u}=\rho_0\gamma_u\vec{u} \qquad (11.3.8)$$

因为 ρ_0 为四维不变量，（11.3.8）式显示

$$(\vec{j},ic\rho)=\rho_0(\gamma_u\vec{u},ic\gamma_u)=\rho_0u_\mu$$

正好构成一个正比于四维速度的四维矢量，因此电流守恒定律是满足相对论协变性要求的。

Tips：其实写出正确的四维速度，又知道了电荷是个 Lorentz 不变量，（11.3.8）是非常容易预期的。

2．电磁势方程的协变形式

电磁场可以用矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 来描写，在洛伦兹规范条件下，电磁势方程为

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{A} \\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mu_0 \vec{j} \\ -\rho / \varepsilon_0\end{pmatrix} \tag{11.3.9}$$

式中$\vec{A}$和φ应满足洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{11.3.10}$$

若我们定义一个四维矢量：

$$A_\mu = (\vec{A}, i\frac{\varphi}{c}) \tag{11.3.11}$$

则（11.3.9）式的电磁势方程可以写为

$$\Box^2 A_\mu = -\mu_0 J_\mu \tag{11.3.12}$$

洛伦兹条件可以写为

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \tag{11.3.13}$$

(11.3.12)式很清楚地显示：若我们要求Maxwell方程在Lorentz变换下协变，则A_μ一定是一个四维矢量，因为等式右方的J_μ为一四维矢量，等式的左方亦应为一四维矢量，由于$\Box^2$为一标量，故A_μ为—四维矢量，称为四维势。这意味着矢势$\vec{A}$和标势φ在不同的坐标下会相互耦合在一起。

Tips：这里的逻辑与之前有点不同 -- 根据 M-M 实验推断 Maxwell 方程组及所有相关的方程一定是 Lorentz 协变的。根据这些方程的协变性，我们断定A_μ为四维矢量。

3．电磁场张量

现在我们来讨论用场强表示的麦克斯韦方程的协变形式，电磁场强度$\vec{E}$和$\vec{B}$可以用电磁势$\vec{A}$和φ表示，即

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

电磁场强 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 不是四维矢量。注意到 $(\vec{\nabla},\partial(ict))$ 构成四维矢量，$(\vec{A},i\frac{\varphi}{c})$ 也构成四维矢量，显然上式右边是两个四维矢量 ∂_μ, A_ν 之间的数学运算。排除降阶的缩并运算（左边不是标量）、只能是升阶的并矢运算。再考虑到运算的反对称性，发现等式右边只能是一个反对称的二阶张量。综合上述分析，可定义

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \qquad (11.3.14)$$

$F_{\mu\nu}$ 是四维二阶反对称张量，满足 $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$，称为电磁场张量。直接结算可得其具体形式为

$$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1/c \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2/c \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3/c \\ iE_1/c & iE_2/c & iE_3/c & 0 \end{bmatrix} \qquad (11.3.15)$$

利用 $F_{\mu\nu}$ 和 J_μ，我们可以把麦克斯韦方程组中的两个非齐次方程

$$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$$
$$\nabla\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{j}$$

合并写成一个一阶的 Lorentz 协变的形式：

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}=-\mu_0 J_\nu \qquad (11.3.16)$$

容易证明：$\nu=4$ 的结果对应 $\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$，而 $\nu=1,2,3$ 的结果对应 $\nabla\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{j}$。

Tips: 这个结论可以由 $\partial_\mu F_{\mu\nu}=\partial_\mu(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)=\Box^2 A_\nu-\partial_\nu(\partial_\mu A_\mu)=-\mu_0 j_\mu$ 推出

同理，可把两个齐次方程

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$
$$\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$$

合并写成

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha}+\partial_\alpha F_{\mu\nu}+\partial_\nu F_{\alpha\mu}=0,\qquad \mu\neq\nu\neq\alpha \tag{11.3.17}$$

(11.3.16）式和（11.3.17）式即是协变形式的麦克斯韦方程组。

§ 11.4　电磁场的变换公式

下面考虑电磁场（由反对称电磁张量 $F_{\mu\nu}$ 表示）在不同惯性系下得变换关系。因为 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量，故不同参考系中的 $F_{\mu\nu}$ 间的变换关系为

$$F'_{\mu\nu}=\alpha_{\mu\beta}\alpha_{\nu\gamma}F_{\beta\gamma} \tag{11.4.1}$$

根据 Lorentz 变换把(11.4.2)式具体写成分量的形式，则为

$$\begin{cases} E'_1=E_1, \\ E'_2=\gamma(E_2-\upsilon B_3), \\ E'_3=\gamma(E_3+\upsilon B_2), \\ B'_1=B_1, \\ B'_2=\gamma(B_2+\dfrac{\upsilon}{c^2}E_3), \\ B'_3=\gamma(B_3-\dfrac{\upsilon}{c^2}E_2), \end{cases} \tag{11.4.2}$$

假若我们把矢量场按平行和垂直于相对运动速度的方向分解，则（11.4.2）式可表示为

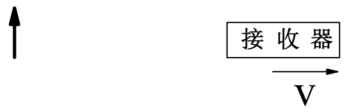
$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel}=\vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp}=\gamma(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B})_{\perp} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{B}'_{\parallel}=\vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp}=\gamma(\vec{B}-\dfrac{\vec{\upsilon}}{c^2}\times\vec{E})_{\perp} \end{cases} \tag{11.4.3}$$

上述场变换方程式自动给出了 Lorentz 力以及动生电动势的物理解释。动生电动势是指一段运动导体切割磁力线产生的电动势。在实验室坐标系下观测，体系只有静磁场，当一个导线以速度 $\vec{\upsilon}$ 切割磁力线时，在导线静止的坐标系中产生了新的电场 $\vec{E}'_{\perp}=\gamma(\vec{\upsilon}\times\vec{B})_{\perp}\approx(\vec{\upsilon}\times\vec{B})_{\perp}$（后一个等式在低速下成立)，因此导线中的电荷会受到这个电场的作用力－这就是动生电场（电动势）的来源．而导线中的电荷受到的力 $\vec{F}'\approx q(\vec{\upsilon}\times\vec{B})_{\perp}$，就是 Lorentz 力的来源。

补充题：

1) 写出四维速度在 Lorentz 变换下的变换方式，验证其与三维速度的变换公式（11.2.12）的一致性。（提示，参考书上 P. 276 最下面的一个公式）

2) 考虑一个以 ω 振动的偶极振子 $\vec{p} = p\hat{z}e^{-i\omega t}$，一个接收器以速度为 $\vec{v}$ 沿 x 轴离开原点，计算在接收器上测得的电场、磁场，并由此计算接收器测得的波的频率。



P. 298, 11.5