

## 第二十四讲

● 推迟势  $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}]}{R} d\tau'$ ,  $[\vec{j}] = \vec{j}(\vec{r}', t - R/c)$

● 电偶极辐射  $\vec{A}_p = \vec{A}^{(1)} = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{p}]}{r} = -ikc \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{p}]}{r}$  (等效于公式  $\dot{\vec{P}} = \vec{j}$ )

远场  $r \gg \lambda$ :  $\nabla \leftrightarrow ik\vec{e}_r$   $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{k^2 c}{r} \cdot \vec{e}_r \times [\vec{p}]$ ,

$$\vec{E} = -\vec{e}_r \times (c\vec{B}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{k^2 c^2}{r} \cdot \vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times [\vec{p}])$$

类似平面电磁波 ( $\vec{E}, \vec{B}, \vec{r}$  满足右手法则)!

**[例 1]** 如图 12.3 所示, 两个金属小球分别带电荷  $Q$  和  $-Q$ , 它们之间距离为  $l$ , 两小球的电荷的数值和符号同步地周期性变化, 这就是所谓的赫兹振子。试分析赫兹振子辐射场的能流特点。

**解** 取球坐标系,  $+Q$  和  $-Q$  处在  $z$  轴上, 设  $Q = Q_0 e^{-i\omega t'}$  (利用复场表示), 则体系的电偶极矩为

$$\vec{p} = lQ\vec{e}_z = lQ_0 e^{-i\omega t'} \vec{e}_z = p_0 e^{-i\omega t'} \vec{e}_z$$

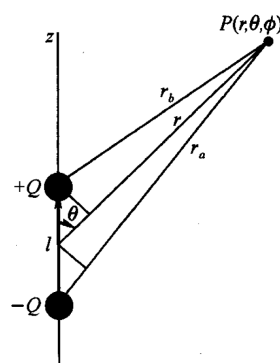


图 12.3

将它们代入偶极辐射的远区公式, 有

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi c r} \sin \theta e^{-i\omega(t-r/c)} (-\vec{e}_\phi) \\ \vec{E} = -\vec{e}_r \times (c\vec{B}) = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \sin \theta e^{-i\omega(t-r/c)} (-\vec{e}_\theta) \end{cases} \quad (12.3.11)$$

由(12.3.11)式可以看出, 场正比于  $\frac{1}{r}$ , 电场只有  $\vec{e}_\theta$  方向分量, 磁场只有  $\vec{e}_\phi$  方向分量, 且  $cB_\phi = E_\theta$ 。辐射场在偶极矩方向上为零。辐射能流的平均值为

$$\langle \vec{S}_p \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} [\vec{E} \times \vec{B}^*] = \frac{c}{2\mu_0} |B|^2 \vec{e}_r = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{e}_r \quad (12.3.12)$$

对这个结果讨论如下:

(1) 辐射能流的特点是正比于  $\frac{1}{r^2}$ , 偶极矩的平方,  $\omega$  的四次方。

(2) 这说明辐射能力在低频时较弱，而在高频时高，这与我们第六章所讨论的“准静态近似”的适用条件一致；

(3) 辐射能流正比于  $\frac{1}{r^2}$  是一个稳定辐射问题的必然要求，如若不然，则必然在空间产生能量积累，从而辐射问题不稳定。也正因为如此，辐射能流在某一个特定的立体角组成的通道内保持相同。

基于此，在讨论辐射问题时，我们常用角分布的概念来描述体系向空间不同方向辐射能量的情况，其定义为

$$\langle f(\theta, \phi) \rangle = \frac{\langle \vec{S}_p \rangle \cdot d\vec{S}}{d\Omega} = \frac{\langle \vec{S}_p \rangle \cdot r^2 d\Omega}{d\Omega} = \langle \vec{S}_p \rangle \cdot r^2 \quad (12.3.11)$$

这表示在  $\theta$ 、 $\phi$  方向单位立体角内的平均辐射能流，显然，现在

$$\langle f(\theta, \phi) \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c} \sin^2 \theta \quad (12.3.12)$$

辐射角分布的情况如图 12.4 所示，在  $\theta = \frac{\pi}{2}$  的方向辐射最强，在  $\theta = 0$ 、 $\pi$  的方向无辐射。

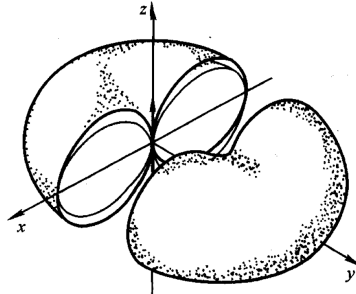


图 12.4

### 3. 磁偶极辐射

下面考虑磁偶极辐射，此时应当考虑  $\vec{A}_2$  项。在远场 ( $r \gg \lambda$ ) 及单频条件下，

只保留  $\nabla$  对推迟势的作用（亦即，作代换  $\nabla \leftrightarrow i \frac{\omega}{c} \vec{e}_r$ ），则有

$$\begin{aligned} \vec{A}_2 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{r}' \cdot \nabla \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{r}' \cdot \left( i \frac{\omega}{c} \vec{e}_r \right) \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c} \vec{r} \cdot \int \vec{r}' [\vec{j}] d\tau' \\ &= -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c} \frac{1}{2} \vec{r} \cdot \left\{ \int [\vec{r}' \vec{j} + \vec{j} \vec{r}'] d\tau' + \int [\vec{r}' \vec{j} - \vec{j} \vec{r}'] d\tau' \right\} \end{aligned} \quad (12.3.13)$$

上式{}中第一项在静磁条件下为 0（参考第十五讲（5.5.7'）式），当电流随时间谐变时，其为电四极子的贡献（严格证明从略，但由  $\vec{j} = \dot{\vec{P}}$  可知，此项积分正比于  $\int \vec{r}' \vec{r}' \rho d\tau' \propto \vec{D}$ ）。第二项可改写为

$$\begin{aligned}\vec{A}_m &= -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c} \frac{1}{2} \int \vec{r} \cdot [\vec{r}' \vec{j} - \vec{j} \vec{r}'] d\tau' = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c} \frac{1}{2} \int \vec{r} \times [\vec{j} \times \vec{r}'] d\tau' \\ &= \frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c} \vec{r} \times [\vec{m}]\end{aligned}\quad (12.3.14)$$

带入势和场的关系，即可求出磁偶极子的  $\vec{E}$  和  $\vec{B}$ ：

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A}_m = i \frac{\omega}{c} \vec{e}_r \times \vec{A}_m &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{k^2}{r} \cdot \vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times [\vec{m}]) \\ \vec{E} = -\hat{e}_r \times (c\vec{B}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{k^2 c}{r} \cdot \vec{e}_r \times [\vec{m}]\end{cases}\quad (12.3.16)$$

讨论如下

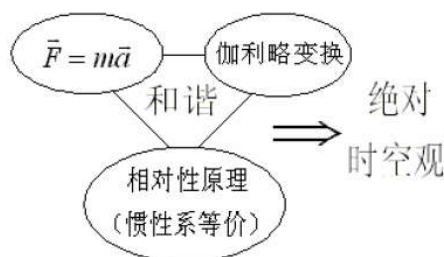
- (1) 我们注意到磁偶极子的辐射场（12.3.16）与电偶极子辐射场（12.3.9）非常相似。事实上，在讲解静电/静磁理论时我们已经了解到， $\mu_0 \vec{m}$  之于  $\vec{B}$  场与  $\vec{p}/\epsilon_0$  之于  $\vec{E}$  场完全相同。现在，我们又看到了相同的依赖关系 --- 将（12.3.9）中  $\vec{E}$  场中的  $\vec{p}/\epsilon_0$  代换成  $\mu_0 \vec{m}$ ，我们就得到了磁偶极子的  $\vec{B}$  场！因此这两个场互为对偶场，记住一个就可以得到另一个。**更一般地，当我们作如下代换  $\vec{p} \rightarrow \frac{\vec{m}}{c}$ ,  $\vec{E} \rightarrow c\vec{B}$ ,  $c\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$** ，即可由电偶极子的场推出磁偶极子的场。
- (2) 磁偶极辐射与电四极辐射一个量级，均比电偶极辐射小，因此对一个体系若其有磁偶极辐射，应当同时检查同一量级的电四极子是否存在。

## 第十一章 相对论电动力学

到现在为止，我们已经系统地研究了电磁场理论在不同条件下（静电、静磁、准静、辐射）的表现。然而，这些结果至今仍然是针对某一个特定坐标系成立的。在不同坐标系下的电磁现象之间的关联如何呢？这就是本章的研究内容。

## § 11.1 狭义相对论的时空观

要想联系不同坐标系下的物理现象，就必须建立正确的时空变换，而后者是建立在一定的时空观下的。我们在本课程中只关心惯性坐标系之间的变换。牛顿在总结其发展的力学规律时得到了如下绝对时空观。



### 1. 绝对时空观

#### A. 相对性原理

物理世界的规律是通过时间和空间坐标来描述的，而物理规律本身应当与（惯性）坐标系的选取无关，这就是说，**在不同的惯性系中，物理规律表述的形式始终保持不变**，这是一个重要的基本假定，称为**相对性原理**，思想最先由伽利略提出。

#### B. 力学规律

牛顿力学的基本方程是

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (11.1.1)$$

#### C. 伽利略变换

两个相对运动的惯性坐标系  $S$  和  $S'$  之间由伽利略变换联系起来，

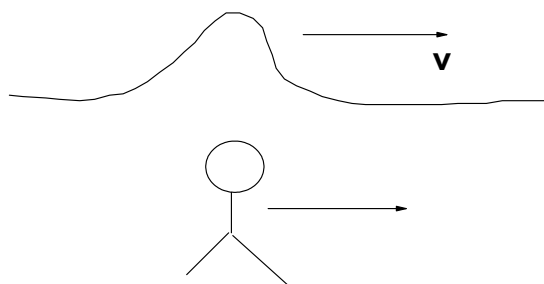
$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases} \quad (11.1.2)$$

将 (11.1.2) 代入 (11.1.1) 发现力学规律在不同的坐标系中保持相同，因此，牛顿力学，伽利略变换与相对性原理和谐统一。

---

### 2. 绝对时空观的困难

但是，当人们把绝对时空观应用到电磁理论时遇到了巨大的困难，主要表现在对光的传播规律的描述上。对于经典的力学规律描述的波，如水波，当它在一个坐标系中的速度为 $\vec{u}$ 时，在相对于这个坐标系做匀速运动的另一个坐标系中测出的速度为 $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$ 。特别是，当 $\vec{u} = \vec{v}$ 时， $\vec{u}' = 0$ ，即水波不再运动。



电磁波也是一种波，有一个运动速度  $c$ ，因此人们自然要问：究竟这个光速  $c$  是在哪个坐标系中测得的？假设光速为  $C$  的这个坐标系叫做以太系，是否可以测得地球相对于以太系的运动速度？抑或地球就是那个绝对坐标系？

迈克耳孙和莫雷设计了精妙的干涉实验测量了不同条件下测量点相对于以太系的运动速度。**然而实验测不到任何的以太漂移速度。**换言之，在任何惯性坐标系中测得的光速是同一个常数  $c$ ，与传播方向无关，与光源运动的速度无关。这个结果是惊人的，揭示了描述电磁规律的麦克斯韦方程组，与伽利略变换以及相对性原理不和谐。



### 3. 爱因斯坦的选择

相对性原理、Maxwell 方程以及伽利略变换不和谐，则必须放弃（改造）其中一个使得这三者和谐。爱因斯坦选择保留前面 2 个，放弃伽利略变换。他提出如下两条基本假设：

#### (1) 相对性原理

自然规律在不同惯性系中的表达式相同。

#### (2) 光速不变原理（选择 Maxwell 方程在一切惯性系中形式不变）

光速与光源的运动无关，与光的传播方向无关，在不同的惯性系中观察到的真空中的光速相同。这事实上并非爱因斯坦的假设，而是麦-莫实验所揭示的基本实验事实。为了满足这个基本实验事实，必须假设 Maxwell 方程组在所有惯性坐标系下的形式都保持不变（只有这样，才有可能有相同的光速）。显然伽利略变换不能完成这个任务，因此，人们必须寻找新的时空变换来替代伽利略变换。

#### 4. 洛伦兹变换

基于不同惯性系中测出的光速不变这一假设，洛伦兹提出了他的时空变换。

考虑在  $t = t' = 0$  时， $S$  与  $S'$  重合， $S'$  系相对于  $S$  系沿  $x$  轴以速度  $v$  运动。

假设此时从原点发射一束光波，光沿各方向的传播方向都是  $c$ 。所以  $t$  时刻  $S$  系中光到达的位置满足

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2} \quad (11.1.3)$$

存在两事件： 1 发射  $(0, 0, 0, 0)$

2 接收  $(x, y, z, t)$

在  $S'$  看来，同样的事件应该用如下时空点描述

1 发射  $(0, 0, 0, 0)$

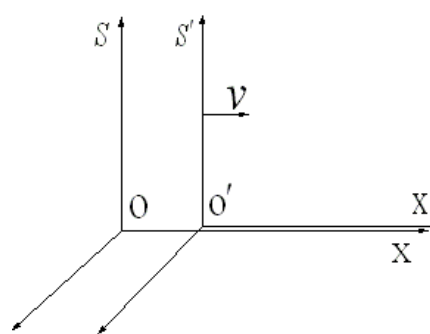
2 接收  $(x', y', z', t')$

根据光速不变原理，变换后的  $(x', y', z', t')$  必须满足

$$\boxed{x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2} \quad (11.1.4)$$

基于变换后满足 (11.1.3-4) 这个基本约束，数学家洛伦兹提出如下（线性）时空变换：

$$\boxed{\begin{cases} x' = (x - vt) / \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) / \sqrt{1 - v^2/c^2} \end{cases}} \quad (11.1.5)$$



容易证明，若两个时空点原本满足 (11.1.3)，则洛伦兹变换后的是空间一定满足 (11.1.4) – 也就是说，在  $S'$  系中观测事件传播的速度仍为  $c$ ，而且是各向同性的一尽管  $S'$  相对  $S$  沿  $x$  轴运动，在  $S'$  系中看到的速度沿  $x$  轴与其它轴没有任何的不同！这个结果相当惊人，因为实施洛伦兹变换时貌似选择打破空间的对称性（选择了  $v$  为  $x$  方向），然而因为同时也对时间尺度做了相应的修正，最后这种空间的扭曲对测量光速没有任何影响！

引入一个虚构的由三维实空间和虚的时间轴构成的四维空间（闵可夫斯基空间），一个时空点在这个空间中的表示为

$$x_\mu = (x, y, z, ict) \quad (11.1.6)$$

则 Lorentz 变换可以写成

$$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu \quad (11.1.7)$$

变换矩阵为

$$\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (11.1.8)$$

其中  $\beta = v/c$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ 。容易证明  $\alpha$  是个正交矩阵，即

$$\alpha \cdot \alpha^T = I \rightarrow \boxed{\alpha_{\mu\nu} \alpha_{\delta\nu} = \delta_{\mu\delta}}, \quad \alpha^{-1} = \alpha^T \quad (11.1.9)$$

一个直接的结果就是

$$x_\mu = \alpha_{\nu\mu} x'_\nu \quad (11.1.7')$$

**注：** 在  $ct$  前面引入一个  $i$  有两点动机：1) 使得  $x_\mu$  的模值变成有意义的标量 ( $\sqrt{x_\mu x_\mu} = \sqrt{|\vec{r}|^2 - (ct)^2}$ )；2) 使得变换矩阵为正交阵。

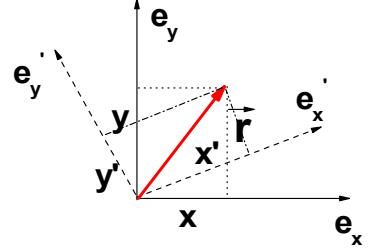
## § 11.2 物理规律协变性的数学形式

相对性原理要求物理规律在不同的惯性坐标系下保持不变，而不同惯性系之间的物理量之间的关系由洛伦兹变换给出，这就要求描述物理规律的物理方程式的形式一定要在 Lorentz 变换下保持不变。我们下面首先研究不同物理量在

Lorentz 变换是如何变换的。

## 1. 物理量按时空变换性质分类

我们首先将所遇到的各种物理量作一番分类。  
先考虑大家熟知的三维空间中的一个纯坐标转动变换下，比如将坐标系以  $z$  轴为转轴转动  $\theta$  角度（如图所示）。相应的坐标轴变换关系为



$$\begin{cases} \hat{e}'_x = \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}'_y = -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}'_z = \hat{e}_z \end{cases} \quad (11.2.1)$$

在这个变换下我们看不同的物理量具有怎样的变换关系。比如

- (1) 任意一点到原点的空间距离  $r = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$  在变换下保持不变，这就是一个标量。
- (2) 将位置矢量  $\vec{r}$  投影到相应的坐标轴上得到三个数组成的向量  $x_i = \{x_1, x_2, x_3\}$ ，经过坐标旋转变换后这三个数变成  $x'_i = \{x'_1, x'_2, x'_3\}$ ， $\{x_1, x_2, x_3\}$  与  $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$  两组数之间的变换关系为

$$x'_i = T_{ij} x_j$$

其中，转动矩阵的形式为

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.2.2)$$

显然，所有三维空间的矢量（ $\vec{E}, \vec{H}, \vec{F}$  等）的三个分量都满足上面的变换关系，因为它们都是将常量向位置矢量投影一样投影到相应的坐标轴上。我们把满足（11.2.1）式变换关系的三个数组成的物理量叫做矢量。

- (3) 同样道理，2 阶张量（如电四极矩  $\vec{D}$ ）中的 9 个元素在坐标变换下满足

$$D'_{ij} = T_{il} T_{jk} D_{lk} \quad (11.2.3)$$

换言之，若能找到 9 个元素，它们组成的  $3 \times 3$  矩阵在不同坐标下的形式满足上述变换方式，则我们就把它称为 2 阶张量。



## 将上面对 3 维坐标变换的定义推广到 4 维时空变换

### (1) 标量

一个 Lorentz 变换下保持不变的物理量叫做标量。正交性质 (11.1.9) 显示：四维矢量的标积是个变换不变量，

$$x'_i x'_i = \alpha_{ij} \alpha_{ik} x_j x_k = x_j x_j \quad (11.2.4)$$

因此这是个“四维标量”。(11.2.4) 是光速不变 (11.1.3-11.1.4) 的另外一种表述方式。通常将两个时空点之间的四维距离

$$\Delta s = \sqrt{-\Delta x_\mu \Delta x_\mu} = \sqrt{(c\Delta t)^2 - |\Delta \vec{r}|^2} \quad (11.2.5)$$

叫做间隔，它描述的是两个事件之间的时空间隔，是个不依赖于惯性系的“标量”。在相对论时空观中，时间空间耦合在一起，单独讨论两个事件的时间和空间间隔都没有意义（依赖于具体的参照系），但“间隔”却是有意义的物理量。

### (2) 矢量（一阶张量）

定义一个由四个量组成的集合  $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ ，若这些量在 Lorentz 变换下满足与四维坐标一样的变换关系

$$V'_\mu = \alpha_{\mu\nu} V_\nu \quad (11.2.4)$$

则这样的集合称为一个四维矢量（或是一阶张量）

### (3) 二阶张量

进一步，若有一物理量用  $4 \times 4$  矩阵  $T_{\mu\nu}$  表示，在坐标变换  $x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu$  下，其变换关系为

$$T'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu k} \alpha_{\nu l} T_{kl} \quad (11.2.5)$$

则称此物理量为二阶张量。

习题

P. 344, 12.8, 12.10, P. 297, 11.1, 11.2