第二讲

上次课：

- q --- 静电的来源及受体
- F --- 库仑定律/实验定律
- $\vec{E}(\vec{r})=\vec{F}/q=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \dfrac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{R^3}\vec{R}$ - 电场
- $\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})=\rho(\vec{r})/\varepsilon_0$ - 电场的散度，高斯定理
- 常用公式：$\boxed{\nabla\cdot\dfrac{\vec{R}}{R^3}=4\pi\delta(\vec{R})}$

5．静电场的旋度 － 安培环路定理

现在我们研究电场的旋度性质 $\nabla\times\vec{E}=?$，这等价于研究静电场对任意环路的线积分：$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=?$。在《电磁学》中，我们通常的求解方法如下：

＊ 考虑点电荷的电场对任意闭合路径的积分，可将电场对任意微元路径的积分分解为

1）电场沿径向的积分

2）电场沿切向的积分

＊ 利用静电场为向心力这一特点可知：2）的贡献为 0，只需考虑 1）的贡献

＊ 对任意环路，$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 积分可以简化到一个径向的积分，因此沿环路积一圈之后回到同一个径向位置（即原点），结果恒为 0。

这里我们利用更高等的数学方法证明。关注 $\vec{E}(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\rho(\vec{r}')d\tau'\dfrac{\vec{R}}{R^3}$ 的表达式，被积函数中与 r 相关的只有 $\dfrac{\vec{R}}{R^3}$ *－ 能否把它写成一个全微分的形式呢？* 首先注意一个非常有用的公式

$$\nabla r=\vec{r}/r \quad\rightarrow\quad \nabla R=\vec{R}/R \qquad (\text{可通过直接计算验证})$$

由此可以得到另一个恒等式

$$\boxed{\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{\nabla R}{R^2}=-\frac{1}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}=-\frac{\vec{R}}{R^3}}$$

（此处用到分部微分公式：$\nabla f(r)=\dfrac{\partial f}{\partial r}\nabla r,\nabla f(R)=\dfrac{\partial f}{\partial R}\nabla R$，参考教材中附录。其实 ∇ 算符同时具有矢量性和微分性，在标量做梯度运算时只显示微分性，因此常规的分部计算法可以大胆地使用。）

将上述恒等式带入场的定义：$\vec{E}(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\dfrac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{R^3}\vec{R}$，即可得：

$$\vec{E}(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(\vec{r}')d\tau\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{R}d\tau'\right]=-\nabla\varphi(\vec{r}) \quad (1.1.11)$$

其中

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{R}d\tau' \quad (1.1.12)$$

称作**标量势**。利用（1.1.11），我们得到静电场的环路定理的积分表达形式：

$$\boxed{\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\oint\nabla\varphi(\vec{r})\cdot d\vec{l}=-\oint(\partial\varphi/\partial l)\cdot dl\equiv 0} \quad (1.1.13)$$

其中$\partial\varphi/\partial l$意味着沿着环路的切线方向对$\varphi$求偏导。上式的物理意义为静电场是保守场（沿任意环路积分恒为 0 的场）。也可以将环路定理写成微分形式，

$$\boxed{\nabla\times\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\times\nabla\varphi(\vec{r})\equiv 0} \quad (1.1.14)$$

物理意义是静电场是无旋场。**“无旋”、“保守”、可定义标量势**这三者是相互关联的，其本质都来源于**静电场是向心力**。

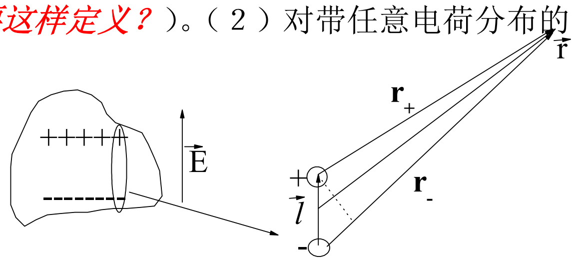
思考：还有什么形式的场可以定义标量势？

注： 1）到现在为止，$\nabla\bullet\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$ 和 $\nabla\times\vec{E}=0$ 已经给了我们非常完整的电场的图像：有源（从正电荷发散出来，汇聚到负电荷上），无旋（有头有尾，有始有终）。

2）∇ 算符既有微分性，又有矢量性（矢量方向沿着求导的方向）。$\nabla\times\nabla\varphi(\vec{r})\equiv 0$ 正是矢量性的体现，因为两次运算的方向互相垂直；后面用到的 $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}(\vec{r})\right)\equiv 0$ 是同样道理。

6. 电偶极子

作为静电学中除了点电荷之外的最简单的例子，我们研究电偶极子。什么是电偶极子？为什么要研究它？原因有两个：（1）电偶极子是中性物质对外场的最低阶响应。当施加电场于一个中性物体上时，电场将物体中的正/负电荷拉开。因此为了描述物质的这种对外场的响应，人们定义**电偶极子**为两个相距很近的带等电量的正负电荷组成的体系。偶极子的大小由偶极距描述，其定义为 $\vec{p}=q\vec{l}$，方向由负电指向正电（*思考：为什么要这样定义？*）。（2）对带任意电荷分布的一个体系，在远场看，最低阶近似下可看成以 q 为带电体总带电量的一个点电荷的贡献，再进一步就能“感受”到偶极子的场的贡献。偶极子场比点电荷的场衰减的快，



所以要近一点才能看到。因此研究电
偶极子具有重要意义。有了电势的概念，我们可以先计算偶极子的电势，再通过对电势求梯度得到偶极子的电场，这样比直接计算偶极子的电场容易许多。根据线性叠加原理，我们有

$$\varphi(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right)\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_--r_+}{r^2}\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{r^2}=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (1.1.15)$$

其中推导中用到了 $r>>l$ 这个远场条件。我们注意到偶极子的电势果然比点电荷的电势更快地衰减。计算可知

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\varphi=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\nabla(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^3}+\vec{p}\cdot\vec{r}\nabla\frac{1}{r^3}\right]=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}-3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}\right]} \qquad (1.1.16)$$

非常容易可以计算出场的分量形式（设 $\vec{p}\parallel\hat{z}$）：$E_r=\dfrac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3},E_\theta=\dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3},E_\phi\equiv 0$。

Tips: *与《电磁学》相比较，《电动力学》中更讲究数学形式的紧凑和理论形式的简洁，因此会大量使用矢量表式，而不是写成分量后的形式或是在某一些特定条件下的（比如 r||z）形式。熟练掌握常用的几个矢量运算是必要的：$\nabla r=\vec{r}/r,\nabla(r^n)=nr^{n-1}\hat{r},\nabla^2(1/r)=-4\pi\delta(\vec{r})$，等。*

数值计算 Project： *推导（1.1.15）式时用到了远场条件，那多远才叫远场？编一个小程序，数值计算并用图形显示真实场和（1.1.15）式表达的场的区别，理解偶极场的基本图像以及远场条件的意义。进一步，在今后的课程中我们还会相继学到磁偶极子、电四极子等等，用同样的方法建立图像及对“远场近似”的理解。*

§ 1.2 静磁现象的基本理论描述

磁现象的描述要比电现象复杂。在 1820 年之前，磁现象是与磁铁（磁石）等相连，表现神秘，不易定量研究。直至丹麦物理学家 Oersted 发现电流也可以像磁铁一样产生类似的磁场，并且也可以向磁针一样感受磁场的作用力，人们才开始基于（比较容易理解的）电流定量研究磁现象。磁现象在很多方面与电现象一一对应。下面，我们基于这样电-磁的对应，总结静磁现象的基本理论描述。

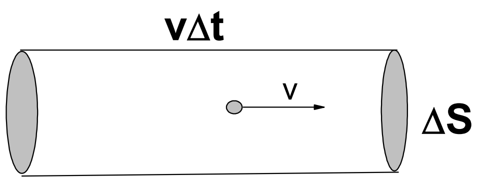
1. 电流（磁的来源、与电荷对比）

电流-顾名思义为电荷的流动。为定量描述电荷流动，定义**电流**为：单位时间内垂直穿过某一特定截面的电荷量，用 I 表示：

$$I=\Delta q/\Delta t\,|_S \qquad (1.2.1)$$

I 是个描述电荷流动的积分的总效果。为了更微观地看电荷的流动情况，定义**电流密度** $\vec{j}$ 为在某一个观察点附近单位面积单位时间通过的电荷量 $j=\dfrac{\Delta q}{\Delta t\Delta S}$。假设该点附近电荷密度为 ρ，电荷的运动速度为 v，则可以推知

$j=\frac{\rho\Delta\Omega}{\Delta t\Delta S}=\frac{\rho\Delta S v\Delta t}{\Delta t\Delta S}=\rho v$ （如下图所示）。j 和 I 的关系是 $I=\int_S jds$



进一步考虑电流密度的矢量性，可以推广以上结果，定义矢量形式的电流密度为：

$$\vec{j}=\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \tag{1.2.2}$$

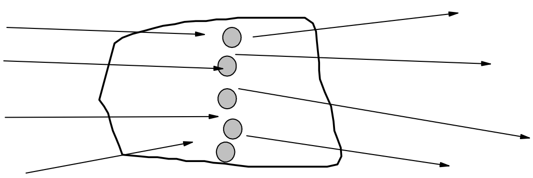
式中$\vec{v}$代表在$\vec{r}$处的电荷的（平均）运动速度，ρ为电荷密度．考虑电流密度的矢量性之后，其与电流I之间的关系为更一般的形式

$$I=\int_S \vec{j}\cdot d\vec{s} \tag{1.2.3}$$

上式显然是合理的，因为只有投影到$d\vec{s}$方向上的电流密度才能通过这块面积，而与其平行的分量对通过此截面积的总电流I没有贡献。另外，积分下来的正负号也有明确的意义：大于 0，则意味着电流为正向（单位时间有净的正电荷通过该表面），小于 0，则意味着电流方向为负。

<u>电荷守恒</u>　实验表明电荷是守恒的，即电荷不能消灭及产生，而只能转移。在空间内任取一封闭曲面S，单位时间内穿流出去的电荷量为（封闭曲面的法向方向定义为垂直该曲面向外）$\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{s}$，流出去的电荷量应等于封闭曲面$S$内总电荷在单位时间内的减少量，即$-\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau$，$V$是$S$所包围的体积，所以

$$\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{s}=-\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau .$$



根据高斯定理，有$\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{s}=\int_V\left(\nabla\cdot\vec{j}\right)d\tau$。代入上式可得

$$\int_V\left(\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)d\tau=0$$

由于曲面S是任意选取的，所以被积函数恒为零，即

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0} \tag{1.2.3}$$

(1.2.4)式是<u>电荷守恒定律</u>的数学表达式，也称**连续性方程**。

注:

*1）所有的"*流密度"的微观形式都是"**密度 （乘以）速度"，如粒子流密度，能流密度，物理意义均为单位时间单位面积通过的粒子数（能量、电荷等）。守恒律的普遍表达形式（粒子数守恒、能量守恒、…）为:*

$$\boxed{\text{流密度的散度+数密度的变化率 = 0}}$$

2）在稳定电流情况下，由于$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$，所以有$\nabla \cdot \vec{j}=0$，电流密度的散度为 0.

这一点从几何上看意味着电流线在空间任何一点均没有源头，这表示稳恒条件下电流线是闭合无源的。非稳恒时电流线的汇聚/发散总是伴随着电荷的积累，亦即$\frac{\partial \rho}{\partial t}$项，这一点你能否与电场的高斯定理做一番对比得到更深入的图像化理解？

2．安培定律 (与库仑定律对比)

既然电流是磁场的来源，类比库仑定律，我们应考虑两个这样的基本单位（电流元，定义为$\vec{j}d\tau$，与$\rho d\tau$地位相仿）之间的作用力。安培定律就是这样一个实验定律，其地位与库伦定律相仿。若真空中的两个电流元$\vec{j}_1 d\tau_1$和$\vec{j}_2 d\tau_2$，则安培定律告诉我们 2 对 1 的作用力$d\vec{F}_{12}$为

$$d\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_1 d\tau_1\times(\vec{j}_2 d\tau_2\times\vec{R}_{12})}{R_{12}^3} \qquad (1.2.5)$$

其中$\vec{R}_{12}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$为 2 指向 1 的位置矢量。与库仑定律比较, 我们可以看到:

(1) 电流元之间的相互作用力也服从<u>平方反比律</u>

(2) 电流元之间作用力<u>非向心力</u> - 磁场的散度及旋度行为与电场将截然不同!

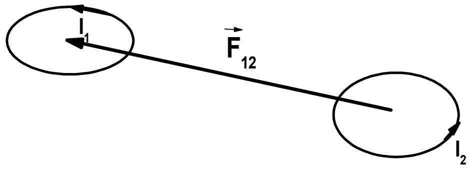
(3) 电流元之间的相互作用力不满足牛顿第三定律，即$d\vec{F}_{12}\neq -d\vec{F}_{21}$。（比如考虑右图的情况）

如何解决不满足牛顿第三定律这个问题？对这个问题的简单回应是因为实际上不可能存在稳定的电流元，实验所能测量的只能是闭合回路的情况，而两个闭合回路之间的磁相互作用力的确满足牛顿第三定律。

**** 选读内容 ****

考虑两闭合载流线圈，则 2 对 1 的作用力为

$$\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l}_1\times(d\vec{l}_2\times\vec{R}_{12})}{R_{12}^3} \qquad (1.2.6)$$



利用矢量公式 $\boxed{\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})}$ *（非常有用，请牢记），可得*

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12}&=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\left[\frac{d\vec{l}_2(d\vec{l}_1\cdot\vec{R}_{12})}{R_{12}^3}-\frac{\vec{R}_{12}(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)}{R_{12}^3}\right]\\&=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}d\vec{l}_2\oint_{l_1}\left[d\vec{l}_1\cdot\nabla\frac{1}{R_{12}}\right]-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\vec{R}_{12}(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)}{R_{12}^3}\qquad(1.2.7)\\&=0+-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\vec{R}_{12}(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)}{R_{12}^3}=-\vec{F}_{21}\end{aligned}$$

即闭合回路之间的磁相互作用力满足牛顿第三定律。
**** 选读内容 ****

然而我们对这个经典回答并不满足，深思以后，至少有这样几个问题值得研究：
1）我们可以让一个电荷做匀速运动（速度<<光速），这样就制造出空间的一个电流元 $\vec{j}=qv\delta(\vec{r}-vt\hat{x})$*，这样两个匀速运动的电荷之间的磁力是什么？*
2）它们两个的相互作用满足不满足牛顿第三定律呢？为什么？
3）牛顿第三定律是本质的定律吗？若不是，其本质是什么？

3．磁场

类比电场的定义，可定义磁场。将作用在电流元 $\vec{j}_1 d\tau_1$ 上的力写为

$$\boxed{d\vec{F}_1=\vec{j}_1 d\tau_1\times\vec{B}(\vec{r})}\qquad(1.2.8)$$

其中 $\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}_2 d\tau_2\times\frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}^3}$ 为电流元 $\vec{j}_2 d\tau_2$ 在 $\vec{r}$ 处产生的磁场。由叠加原理，对任意的电流分布 $\vec{j}(\vec{r}\,')$，其在 $\vec{r}$ 处产生的磁场为

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')d\tau'\times\vec{R}}{R^3}}\qquad(1.2.9)$$

函数 $\vec{B}(\vec{r})$ 称为**磁感应强度**(纯粹是由于历史上的原因才不把它称为磁场强度)。上式常称为 Biot-Sarvart 定律。

以速度 $\vec{v}$ 运动的电荷 q 产生的电流密度为 $\vec{j}=q\vec{v}\delta(\vec{r}-vt\hat{x})$（这个公式仅在 v

<< 光速时成立)，因此其在 $\vec{B}$ 场中所受的力为

$$\vec{F}=\int_{\tau} q\delta(\vec{r}-vt\hat{x})d\tau\vec{v}\times\vec{B}=q\vec{v}\times\vec{B} \tag{1.2.10}$$

若空间既有磁场又有电场，则总受力为

$$\boxed{\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)} \tag{1.2.11}$$

这就是描述带电粒子在空间既有电场又有磁场时的受力 - Lorentz 力。

4. $\vec{B}(\vec{r})$ 的散度

要完整理解矢量场的全部特征，须研究其散度和旋度。对比静电场，静磁场为横向场，故可以预期 **B** 场的散度及旋度性质一定与静电场相当不同。考虑散度性质，利用计算标势 φ 时采用的技巧，可将磁场改写为

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}')\times\frac{\vec{R}}{R^3}d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}')\times(\nabla\frac{1}{R})d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int(\nabla\frac{1}{R})\times\vec{j}(\vec{r}')d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\nabla\times\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right)d\tau' \\ &= \nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau'\right] = \nabla\times\vec{A}\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

其中 $\boxed{\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau'}$ 为矢势，地位与电场的标势相对应。因此，

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r})=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})\equiv 0} \tag{1.2.13}$$

注:

(1)在(1.2.12)第二行的推导中，我们用到了矢量运算公式 $\boxed{\nabla\times\left(\vec{a}\psi\right)=\left(\nabla\times\vec{a}\right)\psi+\nabla\psi\times\vec{a}}$

以及 $\vec{j}(\vec{r}')$ *不依赖于* $\vec{r}$ *的性质。先利用分步微分将* ∇ *分解：* $\nabla\to\vec{\nabla}_R+\vec{\nabla}_j$ *: 然后分别运算到 **R** 和 **J**:* $\nabla\times\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right)=\nabla_R\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{j}(\vec{r}')+\left(\nabla_j\times\vec{j}(\vec{r}')\right)/R$ *。注意到* $\nabla_j\times\vec{j}(\vec{r}')\equiv 0$ *(因为* $\vec{j}(\vec{r}')$ *不依赖于 **r**)，故* $\nabla\times\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right)=\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{j}(\vec{r}')$ *。*

*(2)尽管我们本节研究的是稳恒电流，此处的推导丝毫没有假设电流不依赖于时间。换言之，若随时间变化的电流产生的磁场仍由 **B-S** 定律描述，则此时高斯定理仍成立。 这条性质在随后我们推广 **Maxwell** 方程式到非稳态时有重要作用。*

5. $\vec{B}(\vec{r})$**的旋度**

下面来求$\vec{B}(\vec{r})$的旋度。由(1.2.12)式得

$$\nabla\times\vec{B}(\vec{r})=\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A} \tag{1.2.14}$$

【上面这个公式可以通过将矢量叉积公式 $\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})}$ ***（这个公式非常有用，应当牢记）作代换***$\nabla\leftrightarrow\vec{a},\nabla\leftrightarrow\vec{b},\vec{c}\leftrightarrow\vec{A}$ ***得到】***

习题
1.7，1.8，1.9， 1.14
补充题： 1)推导课件中（1.1.16）式。
2)计算$\nabla R,\nabla' R$，并证明$\nabla R=-\nabla' R$
3）利用直接计算法验证：$\nabla f(r)=\frac{\partial f}{\partial r}\nabla r$， $\nabla\times(\vec{a}f)=(\nabla\times\vec{a})f+\nabla f\times\vec{a}$