

# Bose-Einstein Condensation

Guokaiyi

2022 年 3 月 13 日

# 历史由来

Bose 首先向 Einstein 发送了一篇关于光量子（现在称为光子）的量子统计的论文，在这篇论文中，他推导了 Planck 的量子辐射定律，而没有参考经典物理学。Einstein 对次印象深刻，便亲自将这篇论文从英文翻译成德文，并将其提交给 Bose，并于 1924 年在 Zeitschrift für Physik 发表。Einstein 随后在另外两篇论文中将 Bose 的观点扩展到物质。他们经过研究提出了 Bose 气体的概念，这种气体遵循玻色-爱因斯坦统计，描述了独立的、有整数自旋的全同粒子的统计分布。爱因斯坦提出将玻色原子冷却到非常低的温度时，会导致它们在最低能态上聚集，从而产生一种新的物质形式。

1995 年，在科罗拉多大学波尔得分校 Boulder NIST-JILA 实验室中，Eric Cornell 和 Carl Wieman 在将铷气体冷却到  $170\text{nK}$  时观察到 BEC 现象。之后 MIT 的 Wolfgang Ketterle 在钠原子气体中观察到该现象。他们因此获得了 2001 年诺贝尔物理学奖。此后，BEC 也通过分子、准粒子和光子得到实现。

# 特征温度

粒子质量  $m$ , 温度  $T$ , 普朗克常数  $\hbar$

粒子平均动能

$$E \sim k_b T$$

动量

$$p = \sqrt{2mE} \sim \sqrt{mk_b T}$$

德布罗意波长

$$\lambda = \frac{h}{p} \sim \frac{h}{\sqrt{mk_b T}}$$

当德布罗意波长量级和粒子间距相近时：

$$\lambda \sim n^{-1/3}$$

$$T_0 \sim \frac{h^2}{mk_b} n^{2/3}$$

# 理论推导

考虑由  $N$  个全同、近独立的三维玻色子组成的系统，温度  $T$ ，体积  $V$ 。为明确起见，假设粒子自旋为 0。根据玻色分布，处在  $\epsilon_l$  的粒子数为：

$$a_l = \frac{\omega_l}{\exp \frac{\epsilon_l - \mu}{kT} - 1}$$

设  $\epsilon_0$  为最低能级，则  $\epsilon_0 > \mu$ 。取最低能级为能量零点 ( $\epsilon_0 = 0$ )，则

$$\mu < 0$$

化学势  $\mu$  由公式

$$\frac{1}{V} \sum_l \frac{\omega_l}{\exp \frac{\epsilon_l - \mu}{kT} - 1} = \frac{N}{V} = n$$

确定。

在粒子数密度给定的情形下，温度越低，由上式确定的  $\mu$  值越高。当能级间距远小于  $kT$  时，求和可以用积分代替：

$$\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{\exp \frac{\epsilon - \mu}{kT} - 1} = n$$

化学势既随温度的降低而升高，当温度降到某一临界温度  $T_c$  时， $\mu$  趋于  $-0$ ，这时  $e^{-\frac{\mu}{kT_c}}$  趋于 1. 临界温度由下式确定：

$$\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\epsilon/kT_c} - 1} = n$$

令  $x = \epsilon/kT_c$ ，则可将上式标识为：

$$\frac{2\pi}{h^3}(2mkT_c)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1} = n$$

积分得到：

$$T_c = \frac{2\pi}{2.612^{2/3}} \frac{\hbar^2}{mk} n^{2/3}$$

温度低于  $T_c$  时，会发生什么现象？前面我们已经指出，温度越低  $\mu$  值越高，但在任何温度下  $\mu$  必定是负的。由此可知， $T < T_c$  时  $\mu$  仍趋于  $-0$ 。但这时左方积分的计算结果将小于粒子的实际数密度，产生了矛盾。这个矛盾产生的原因是我们假定用积分来代替求和，状态密度中含有  $\epsilon^{1/2}$  项， $\epsilon = 0$  的粒子在这个过程中被忽略了。但在临界温度  $T_c$  以下时，处在能级  $\epsilon = 0$  的粒子数不能忽略！因此在临界温度以下，有：

$$n_0(T) + \frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1} = n$$

$$n_{\epsilon>0} = \frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1} = \frac{2\pi}{h^3}(2mkT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1} = n\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

因此处在零能级的粒子数为：

$$n_0(T) = n\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right]$$

这表明，在绝对零度下，玻色粒子将全部处在  $\epsilon = 0$  的最低能级。在  $T < T_c$  时，就有宏观量级的粒子在  $\epsilon = 0$  能级凝聚，这一现象称为玻色-爱因斯坦凝聚。

# 低维系统

低维无相互作用的理想玻色气体不能产生 BEC，主要是由于态密度次数低，不能使积分收敛，这里以二维为例：

$$n = \frac{1}{L^2} \sum_l \frac{\omega_l}{\exp \frac{\epsilon_l - \mu}{kT} - 1}$$

代入态密度  $D(\epsilon) = \frac{2\pi L^2}{h^2} m d\epsilon$ ，取  $T \rightarrow T_c, \mu \rightarrow 0^-$ ，并将求和化作积分：

$$n = \frac{2\pi L^2}{h^2} m \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{e^{\epsilon/kT_c} - 1}$$

而等号右侧的积分发散：

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \sim \ln n \rightarrow \infty$$

因此化学势  $\mu$  不能趋于 0，也就不会发生 BEC。



# 实验观测

## Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor

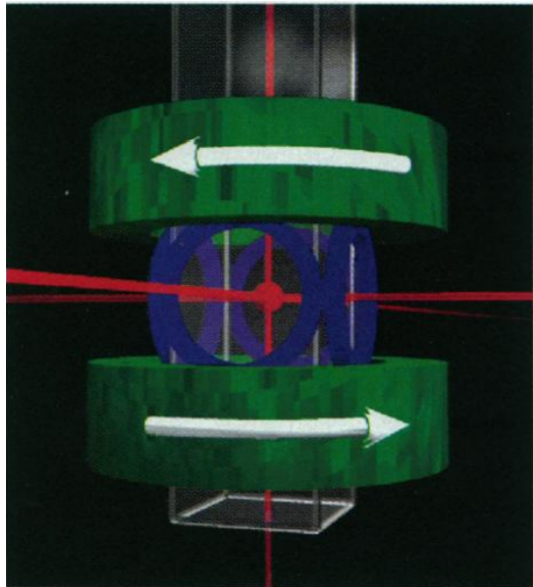
### 实验参数:

- \*  $^{87}\text{Rb}$
- \* 磁场约束
- \* 数密度:  $2.5 \times 10^{12}/\text{cm}^3$
- \* 持续时间:  $> 15\text{s}$
- \* 温度:  $170 \times 10^{-9}\text{K}$
- \* 实验方法: TOP, MOT, 激光冷却, 蒸发致冷, ...

## 使用碱金属原子进行 BEC 的三个特性:

- \* 通过激发容易得到的共振线, 可以使用光散射灵敏地分辨粒子云的密度和能量作为时间和空间的函数, 这项技术提供了关于样本更细节的信息
- \* 原子间的相互作用更弱, 更便于理解 (氢原子之间 S 波散射长度  $a_0 \sim 10^{-6} \text{cm}$ , 而所需的数密度对应原子间距  $x \sim 10^{-4} \text{cm}$ )
- \* 这些相互作用可以通过选择自旋状态、数密度、原子和同位素类型、施加外场等可以控制的方式发生变化

TOP(time orbiting potential) 磁阱，是一个大的球形四极场和一个以 7.5kHz 旋转的小的均匀横向场叠加，得到的是一个轴对称、三维谐振势场，提供了蒸发致冷过程中稳定的约束



## 磁四极场的等效势场：

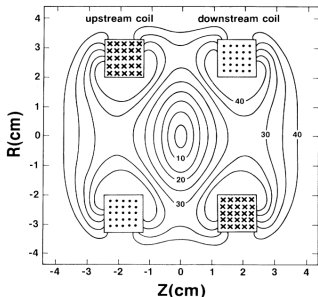


FIG. 1. Equipotentials (equal field magnitudes in milliteslas) of our quadrupole trap in a plane containing the axis of symmetry ( $z$  axis).

## TOP: 磁四极场 + 轴向快速旋转的磁场

$$U(x, y, z, t) = \mu |B| = \mu [(xB'_q + B_b \cos \omega_b t) \hat{x} + (yB'_q + B_b \sin \omega_b t) \hat{y} - 2zB'_q \hat{z}]$$

此处  $B'_q = \frac{\partial B_r}{\partial r}$ ,  $\omega_b$  被选为远小于拉莫频率  $\sim 7\text{MHz}$ , 因此  $\mu$  的投影在  $B$  的瞬时方向上是个常数。同时,  $\omega_b$  又远大于原子震荡频率  $\sim 100\text{Hz}$  所以粒子感受到的是场时间平均的作用。

$$U_{TOP}(r, z) = \frac{\omega_b}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_b} U(t) dt \approx -\mu B_b - \frac{\mu B_q'^2}{4B_b} (r^2 + 8z^2)$$

# 蒸发致冷

蒸发致冷过程是通过选择性地释放磁阱中高能原子，从而让剩余原子在更低地温度下达到热平衡实现的，实验中通过一个射频磁场来实现。由于高能原子倾向于在磁阱中势能更高的地方出现，自旋翻转的频率会由于塞曼效应被改变。

设置射频磁场频率，选择性地使高能原子进入未被束缚的自旋态。在实验过程中，我们不断下调射频频率，使磁阱中心处原子数密度、碰撞频率增加，温度减小。最终射频频率记为  $\nu_{\text{evap}}$

将原子从 300K 冷却到几百 nK 的典型过程如下：

- ▶ 磁光陷阱捕获常温低压下的  $^{87}\text{Rb}$  (300K,  $10^{-11}\text{ torr}$ ) 气体，使用“暗磁光陷阱” (dark MOT) 减少粒子损失，使得我们在极低压情况下依然能捕获大量粒子
- ▶ 通过调整场梯度和激光频率，使原子云快速压缩并降温到  $20\mu\text{K}$
- ▶ 施加一个小的偏置磁场，再施加圆形偏振激光短脉冲，使原子磁矩与磁场平行 ( $F = 2, m_F = 2$ )
- ▶ 移除所有激光，在原子所在区域构建一个 TOP(1ms)
- ▶ TOP 的四极场绝热地提升至最大值，从而增加弹性碰撞率为原来 5 倍。

这时磁阱中有  $4 \times 10^6$  个原子，温度  $T = 90\mu\text{K}$ 。陷阱有 120Hz 的轴向振动，陷阱的柱对称径向频率小于原来  $1/\sqrt{8}$ ，平均数密度为  $2 \times 10^{10}\text{ cm}^{-3}$ ，弹性碰撞率为大约  $3\text{ s}^{-1}$

之后进一步对样本蒸发冷却 70s，这时下调射频频率和旋转磁场强度。 $\nu_{\text{evap}}$  的选择决定了蒸发致冷后剩余原子的温度。如果  $\nu_{\text{evap}} = 3.6\text{ MHz}$ ，磁场会去掉所有的原子，磁阱中没有原子剩余。

## 实验结果：测量原子速度分布

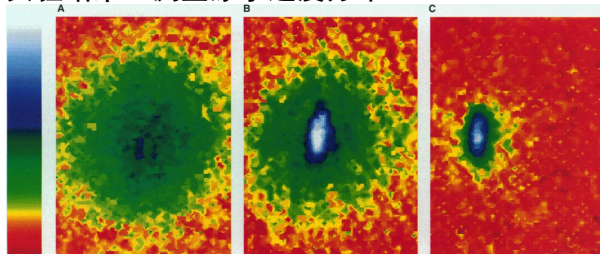


Fig. 2. False-color images display the velocity distribution of the cloud (A) just before the appearance of the condensate, (B) just after the appearance of the condensate, and (C) after further evaporation has left a sample of nearly pure condensate. The circular pattern of the noncondensate fraction (mostly yellow and green) is an indication that the velocity distribution is isotropic, consistent

with thermal equilibrium. The condensate fraction (mostly blue and white) is elliptical, indicative that it is a highly nonthermal distribution. The elliptical pattern is in fact an image of a single, macroscopically occupied quantum wave function. The field of view of each image is  $200\text{ }\mu\text{m}$  by  $270\text{ }\mu\text{m}$ . The observed horizontal width of the condensate is broadened by the experimental resolution.

观测尺度： $200\mu m \times 270\mu m$

特征：

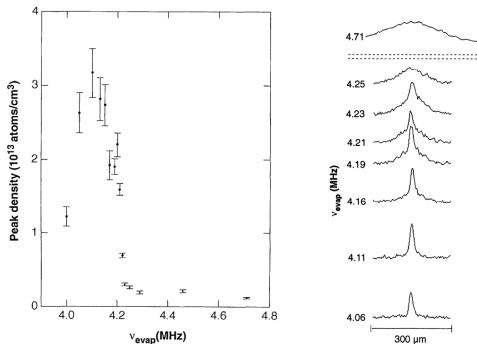
- ▶ 1. 在热运动速率分布之上，在零速率处出现了一个狭窄的峰
- ▶ 2. 温度降低时，处于零速率部分的粒子比例急剧上升
- ▶ 3. 速率分布的峰展现出非热力学的、各向异性的特点，这与非凝聚相的各向同性的热力学分布不同。

绿色、黄色部分：热分布，各向同性，与势场形式无关。

凝聚相：椭圆形，各项异性，是单个宏观占据的量子波函数图像，是谐振子势不各向同性造成的

对于所有谐振子束缚势场（包括 TOP），空间分布和速度空间分

峰值数密度/水平速度分布随着  $\nu_{\text{evap}}$  的变化:

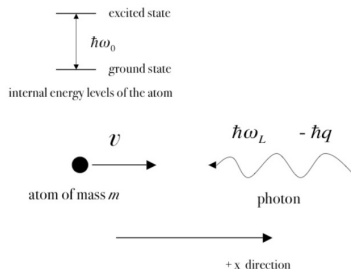


当  $\nu_{\text{evap}}$  减小时, 原子云缩小, 温度降低。当  $\nu_{\text{evap}}$  降低到 4.23MHz 时, 气体开始相变, 中心数密度开始提高; 当  $\nu_{\text{evap}}$  达到 4.1MHz, 几乎所有气体都处在凝聚态; 低于 4.1MHz, 数密度开始减小。



# 激光冷却简化模型

条件：一维模型，激光光子能量略小于原子激发所需的能量，原子运动速度远小于光速



## 1. 吸收：多普勒效应

$$\omega_0 \approx \omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

吸收后原子动量：

$$p' = mv - \frac{\hbar\omega_L}{c}$$

$$\epsilon = \frac{mv^2}{2} + \hbar\omega_L$$

2. 自发辐射: 向前和向后辐射的概率各为 50%.  
若沿着  $-x$  方向发射, 则系统相当于不改变:

$$\epsilon_{end} \approx \hbar\omega_L$$

另一半情况, 沿着  $x$  方向发射光子:

$$p_{end} = mv - 2\frac{\hbar\omega_L}{c}$$
$$\epsilon_{end} = \frac{mv^2}{2} \left(1 - 2\frac{\hbar\omega_L}{mvc}\right)$$

平均一下:

$$\bar{\epsilon} = \frac{mv^2}{2} \left(1 - \frac{\hbar\omega_L}{mvc}\right)$$

也就是说, 经历这种过程会降低原子的平均能量。

量子过程存在不确定性。事实上，一个原子在吸收后的有限时间内发射光子，因此共振条件不需要被严格遵守。光子能量和原子能级相差不同时，吸收的概率也不同。激发能级的周期被定义为单次吸收和发射的时间，记作  $\Gamma^{-1}$ 。考虑  $N$  处在基态原子，激光频率  $\omega_L$  原子持续吸收和发射，平均有  $N_{\text{exc}}$  处在激发态。量子力学计算给出：

$$N_{\text{exc}} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$

$\omega_0$  为共振频率， $\Omega_R$  为拉比频率。这时我们可以分别计算两束激光对原子气体整体的作用了。

迎面打来的激光，由于多普勒效应，受激发的原子数：

$$N_1 = N \frac{\Omega_R^2}{[\omega_0 - \omega_L(1 + \frac{v_0}{c})]^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2}$$

所以单位时间内发生激发的原子数目为  $\Delta N_1 = N_1 \Gamma \Delta t$ ，受力

$$|F_1| = \frac{\Delta N_1}{\Delta t} \cdot |m \Delta v| \approx \frac{\hbar \omega_0}{c} N_1 \Gamma$$

背后打来的激光同理：

$$F_2 \approx \frac{\hbar \omega_0}{c} \Gamma N_2$$

合力大小为：

$$\begin{aligned} F_1 - F_2 &= \frac{\hbar \omega_0}{c} \Gamma (N_1 - N_2) \\ &\approx \frac{\hbar \omega_L \Gamma}{c} \cdot \frac{4\omega_L}{c} N \Omega_R^2 \frac{\omega_0 - \omega_L}{((\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2)^2} v_0 \end{aligned}$$

$$F = -\alpha v$$

上式说明当  $\omega_L < \omega_0$  时，原子气体会受到正比于速度的阻尼力，从而实现降温。

# 极限温度

多普勒温度是这种致冷方式能够达到的最低温度。我们可以看到，激光致冷与光和原子之间的随机散射有关，这种随机过程就会使得温度不能无限降低。原子发射光子的过程是各项同性的，使得速度的平均值为零，但方均值非零，这种效应会使气体升温。从前面推导我们得知，原子吸收光子的过程相当于受到正比于  $v$  的阻力，而发射光子的过程是各项同性的，原子受到的反冲力  $F(t)$  的平均值为 0。所以原子的运动方程可写作

$$m \frac{dv_i}{dt} = -\alpha v_i + F_i \quad i = x, y, z$$

这就是朗之万方程。

$$\frac{dp}{dt} = -kp + F(t)$$

$$p(t) = p(0)e^{-kt} + e^{-kt} \int_0^t F(\xi) e^{k\xi} d\xi$$

$$\overline{p(t)} = p(0)e^{-kt} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta p)^2} &= \int_0^t d\xi \int_0^t d\xi' \overline{F(\xi)F(\xi')} e^{-k(t-\xi)} e^{-k(t-\xi')} \\ &= \frac{D_p}{k} (1 - e^{-2kt}) \rightarrow \frac{D_p}{k} \quad (t \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$k_B T_D = \frac{D_p}{k}$$

其中  $D_p$  是  $F(t)$  的关联强度:

$$\overline{F(t)F(t+\tau)} = 2D_p \delta(\tau)$$

对上式积分，近似地计算  $D_p$  的值：

$$D_p = \frac{1}{2} \int \overline{F(t)F(t+\tau)} d\tau$$

由上面讨论得知， $F(t)$  由时间间隔为  $\Delta t = \Gamma^{-1}$  的多次碰撞组成，每次碰撞动量改变  $\Delta p = \frac{\hbar\omega_L}{c}$ ，且之间没有关联，因此直接取

$$F = \frac{\hbar\omega_L}{c\Delta t},$$

$$D_p \approx \frac{1}{2} F(t)^2 \cdot \Delta t = \frac{\hbar^2 \omega_L^2}{c^2 \Delta t}$$

并将

$$k = \frac{4\hbar\omega_L^2 \Gamma N \Omega_R^2}{c^2} \frac{\omega_0 - \omega_L}{[(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2}$$

代入  $T_D = \frac{D_p}{k k_B}$ ：

$$T_D(\omega_L) = \frac{\hbar}{8k_B \Omega_R^2} \frac{((\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2)^2}{\omega_0 - \omega_L}$$

调节光频率为  $\omega_{L,min} = \omega_0 \pm \sqrt{\Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2}$  使得  $T_D$  最小:

$$\begin{aligned} T_{D,min} &= \frac{\hbar\Gamma}{2k_B\Omega_R^2} (\Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2)^{3/2} \\ &= \frac{\hbar\Gamma}{2k_B} \frac{(\frac{1}{4} + 2\alpha^2)^{3/2}}{\alpha^2} \end{aligned}$$

不确定性关系:  $\Delta E \Delta t \sim \hbar/2$ , 粒子吸收-发射周期  $1/\Gamma$  约为激发态寿命, 谱线宽  $\gamma$  正比于能量  $\Delta E = \hbar\gamma$ , 所以

$$\gamma \sim \frac{\Gamma}{2}$$

$$T_D = \frac{\hbar\gamma}{k_B} \frac{(\frac{1}{4} + 2\alpha^2)^{3/2}}{\alpha^2}$$

其中  $\alpha = \frac{\Omega_R}{\Gamma}$  是一个常数。

更严格的计算给出, 如果原子的自然线宽是  $\gamma$ , 极限温度为:

$$T_{Doppler} = \frac{\hbar\gamma}{2k_B}$$



## 参考资料

- ▶ 热力学统计物理，汪志诚
- ▶ Equilibrium Statistical Physics, Michael Plischke, Birger Bergersen
- ▶ Observaion of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor, M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell
- ▶ First Observation of Magnetically Trapped Neutral Atoms, Alan L. Migdall, John V. Prodan, William D. Phillips, Thomas H. Bergeman, and Harold J. Metcalf, Phys. Rev. Lett. 54, 2596
- ▶ 激光致冷模型 2009 IPHO T2: dopper laser cooling and optical molasses
- ▶ 激光制冷，MOT，BEC V I Balykin et al 2000 Rep. Prog. Phys. 63 1429

▶ 磁光陷阱, <https://zhuanlan.zhihu.com/p/56101298>



TOP, <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.74.3352>