计算物理第五次作业

gky

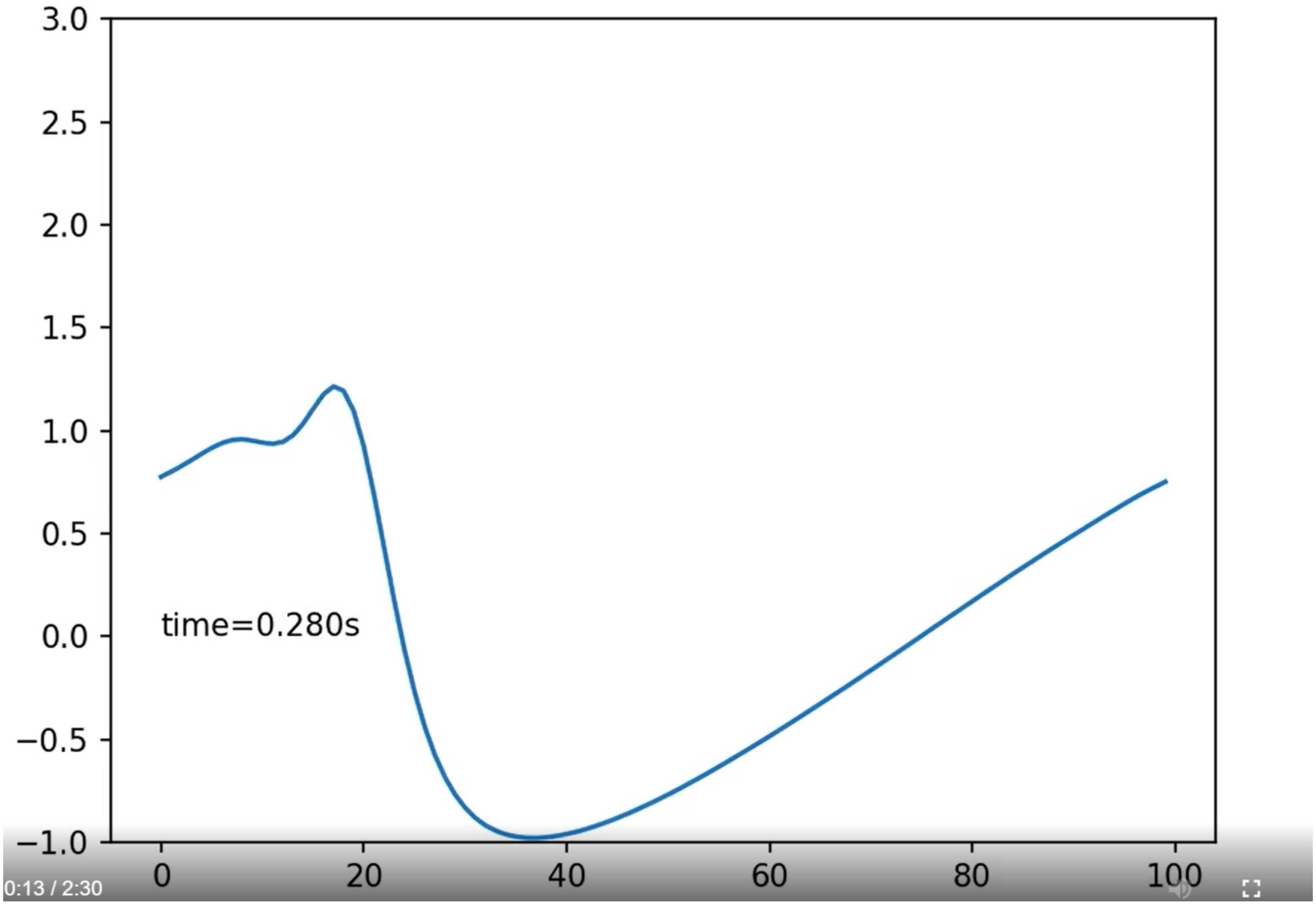
2023/1/10

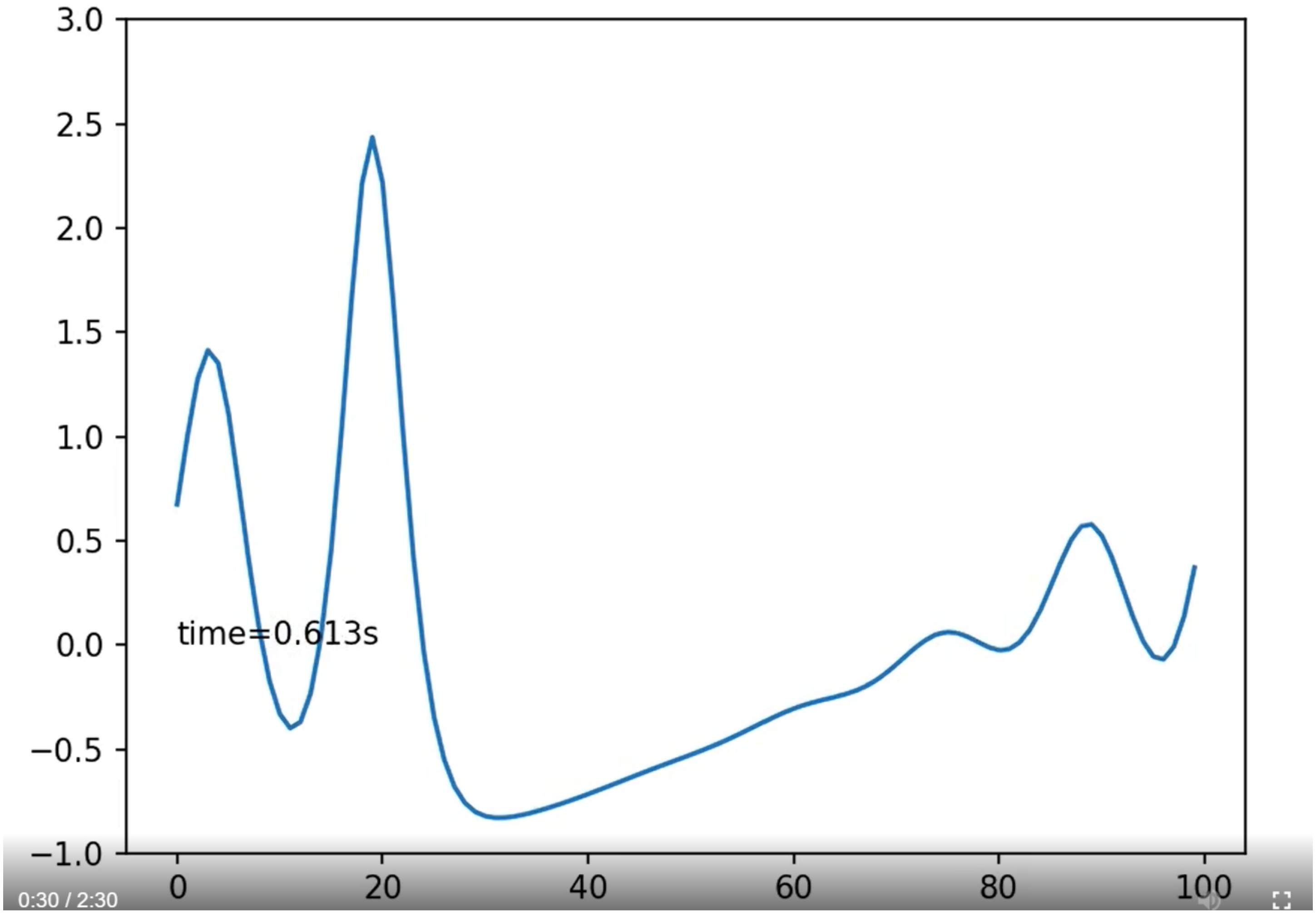
1.数值求解KdV方程

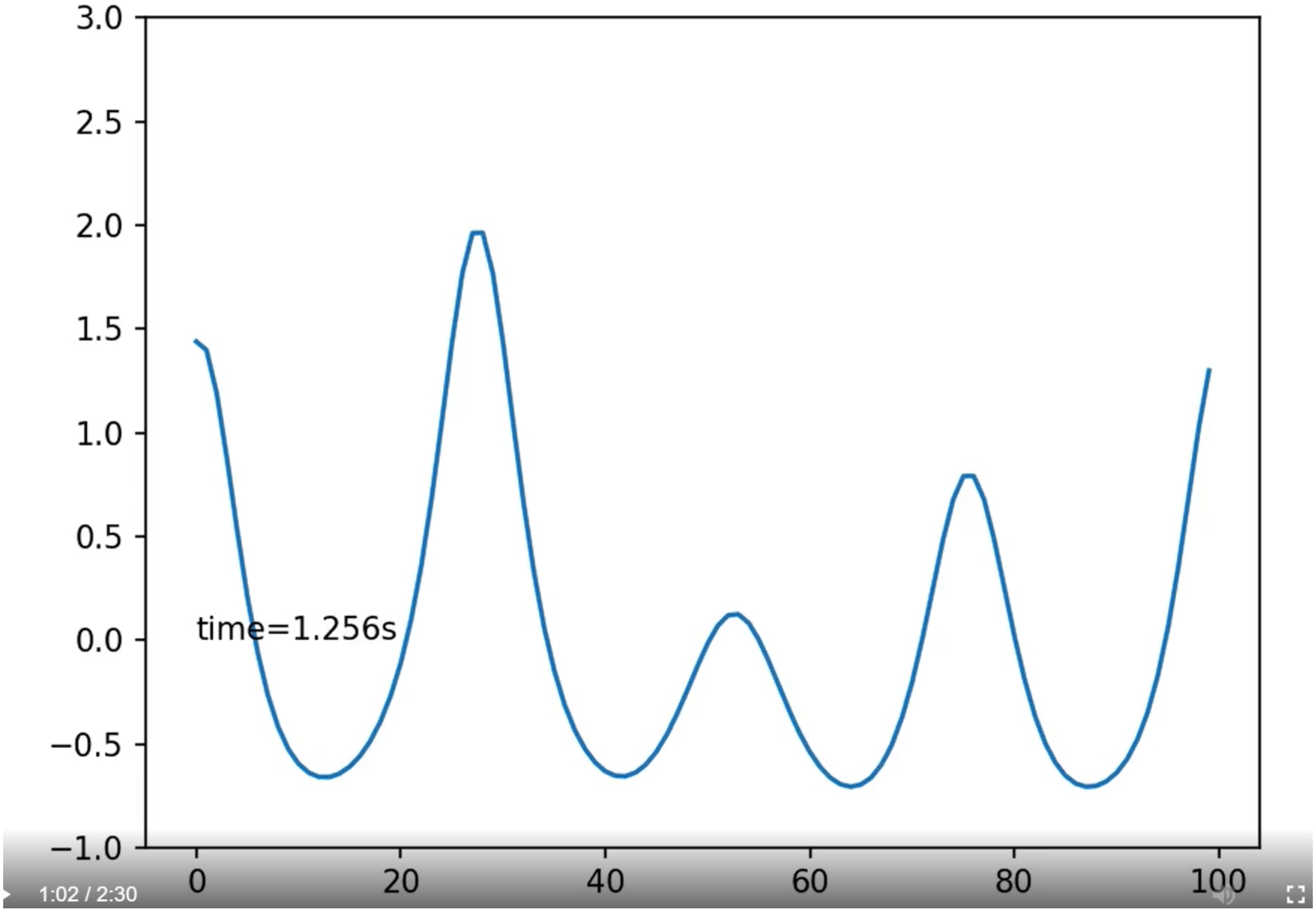
对KdV方程$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$作离散化处理：

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{3}(u_{i-1}^j + u_i^j + u_{i+1}^j)\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} + \frac{\delta^2(u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_i^j - u_{i-1}^j)}{2\Delta x^3} = 0$$

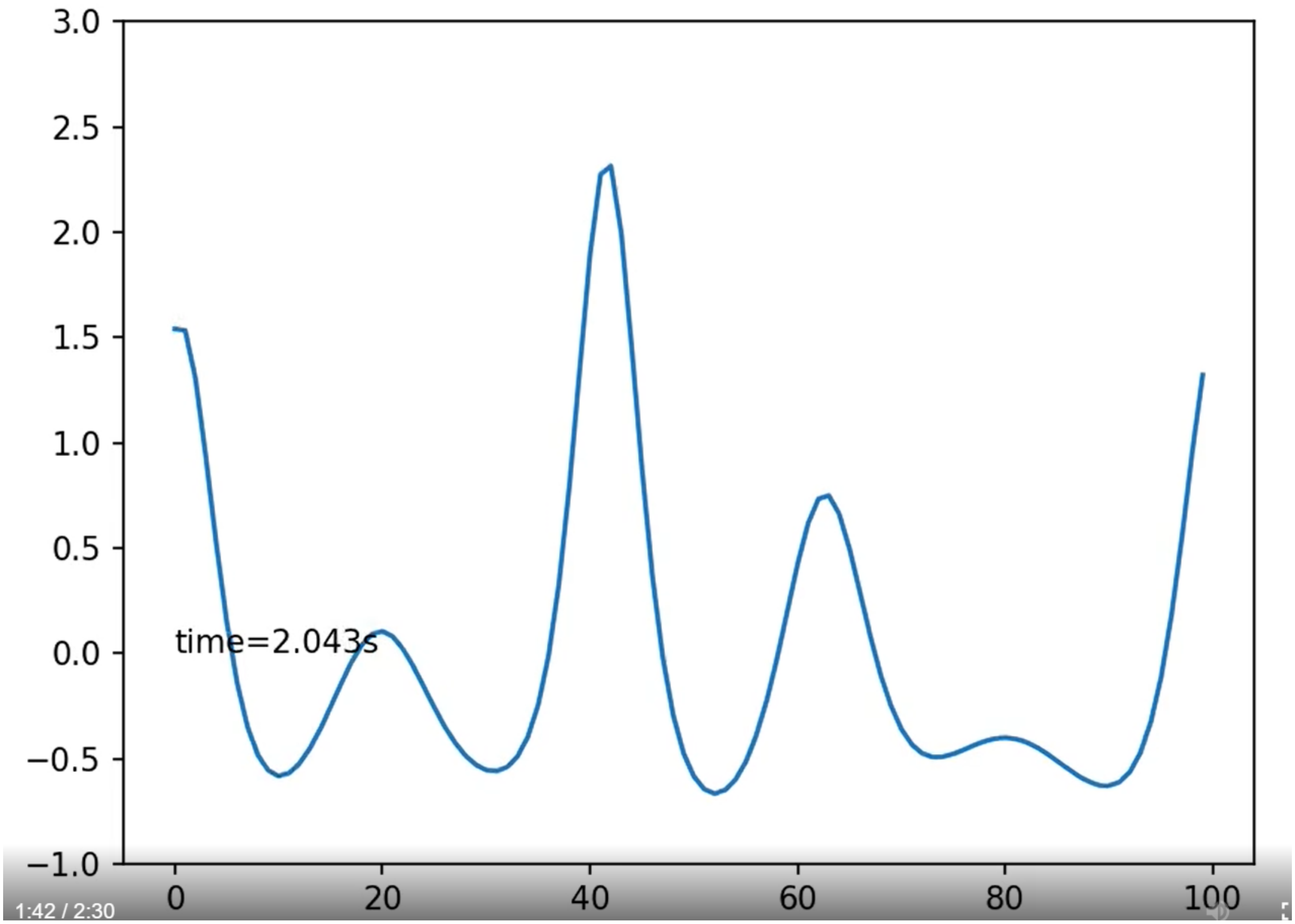
其中时间和空间项均采用中心差分处理，并把u处理为相邻三项的平均值。
进行数值模拟，得到的结果如视频所示:
KdV方程在给定初始状态下演化时，会先产生一个较大的落差，之后在其两侧产生波动，并逐渐变成几个波峰同时存在的状态：


3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
time=0.280s
0
20
40
60
80
100
0:13 / 2:30


3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
time=0.613s
0
20
40
60
80
100
0:30 / 2:30



之后，几个波包各自移动，相互不发生干扰：下图中显示了$t=2.043s$的情形，可以看到，最高的波包和最低的相互穿过对方，而未产生其他影响。



在演化时间范围内，图像有一定抖动，但总体稳定性良好

2.数值求解扩散方程

对T(x,y,t)在空间坐标上做傅里叶变换,将方程转变为$\tilde{T}(\vec{k},t)$关于t的常微分方程,求解后作逆傅里叶变换,得到解的动画如视频T2.mp4所示.视频中取初态为以中心$(0.5,0.5)$为原点的高斯分布.
由于在上面的热力图中很难看出当t很大时的行为,故通过让colormap范围随着区域数值的最大值进行变动,得到新的动画T2_.mp4,可以很好地反映长时间温度分布的状况
可以看到,在演化过程中,函数逐渐向左右两侧"扩散",最终形成了横向条状的温度分布.这是因为上下两端是绝热的($\frac{\partial T}{\partial y}|_{y=0,1}=0$),而左右两端与低温热源接触($T|_{x=0,1}=0$),最终导致热量向左右两侧流失.

3.波动方程的求解

(1)

由波动方程及其边界条件$u|_{\text{boundary}}=0, 0\leq x,y\leq 1$可利用本征函数展开得到通解:

$$u(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{mn}(t)\sin m\pi x\sin n\pi y \quad x,y\in[0,1],t\geq 0$$

代入初值条件:

$$A_{mn}(0)=\begin{cases}1, & m=1,n=2\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$
$$A'_{mn}(0)=0$$

各个参数满足常微分方程:

$$A''_{mn}(t)=\lambda(-m^2-n^2)\pi^2A_{mn}(t)$$

解出$A_{12}(t)=\cos\sqrt{5\lambda}\pi t;A_{mn}(t)=0,\text{otherwise}$
$\lambda=1$得到

$$u(x,y,t)=\cos\sqrt{5}\pi t\sin\pi x\sin 2\pi y$$

(2)

对方程作离散化处理:定义$u_{ij}^k\equiv u(i\Delta x,j\Delta y,k\Delta t),0\leq i<N_x,0\leq i<N_y,0\leq t<N_t$

$$\frac{u_{ij}^{k+1}-2u_{ij}^k+u_{ij}^{k-1}}{(\Delta t)^2}=\lambda(\frac{u_{i+1,j}^k-2u_{ij}^k+u_{i-1,j}^k}{(\Delta x)^2}+\frac{u_{i,j+1}^k-2u_{ij}^k+u_{i,j-1}^k}{(\Delta y)^2})$$

于是得到计算公式:

$$u_{ij}^{k+1}=-u_{ij}^{k-1}+2u_{ij}^k+(\Delta t)^2\lambda(\frac{u_{i+1,j}^k-2u_{ij}^k+u_{i-1,j}^k}{\Delta x^2}+\frac{u_{i,j+1}^k-2u_{ij}^k+u_{i,j-1}^k}{\Delta y^2})$$

初始条件的处理:$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0$,即

$$u_{ij}^{-1}=u_{ij}^0$$

边界条件的处理:$u|_{\text{boundary}}=0$,即

$$u_{-1,j}^k=u_{N_x,j}^k=u_{i,-1}^k=u_{i,N_y}^k=0$$

编写程序T3.py,获得解的动画T3.mp4.
拖动视频进度条,寻找到振动从波峰到第一次回到水平位置的时间约为$t_0 = 0.2175$(以视频内显示的时间为准),代入计算得到:$\sqrt{5}\pi t_0 = 1.527 \approx \frac{\pi}{2} \approx 1.57$,计算值和理论值符合得很好

(3)与(4)

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1/2}$$

取定$\Delta x = \Delta y = 40, \lambda = 1$,得到稳定条件$\Delta t \leq 0.0177$.上一问的模拟中$N_t = 400$,时间0-3s,$\Delta t = \frac{3}{400} = 7.5 \times 10^{-3}$,满足条件.

分别取$\Delta t = 0.01, \Delta t = 0.015, \Delta t = 0.03$,模拟结果:分别如T3_Dt=0.0100.mp4,T3_Dt=0.0150.mp4,T3_Dt=0.0300.mp4所示.其中当$0.03s$时,模拟过程中出现大量错误,可见数值稳定性条件的重要性.

```
Traceback (most recent call last):
  File "D:\anaconda\lib\site-packages\matplotlib\cbook\__init__.py", line 270, in process
    func(*args, **kwargs)
  File "D:\anaconda\lib\site-packages\matplotlib\backend_bases.py", line 3063, in mouse_move
    s = self._mouse_event_to_message(event)
  File "D:\anaconda\lib\site-packages\matplotlib\backend_bases.py", line 3055, in _mouse_event_to_message
    data_str = a.format_cursor_data(data).rstrip()
  File "D:\anaconda\lib\site-packages\matplotlib\image.py", line 1005, in format_cursor_data
    self.colorbar.formatter.format_data_short(data)).strip()
  File "D:\anaconda\lib\site-packages\matplotlib\ticker.py", line 751, in format_data_short
    - math.floor(math.log10(delta)))
ValueError: math domain error
```

上面是$\Delta x = \Delta y$的情况.对于$\Delta x \neq \Delta y$,验证如下:取$N_x = 30, N_y = 80$控制时间轴采样点数不变,总时长分别设为$3s, 4s, 5s$(其中5s下是不稳定的),得到的动画如视频所示.
3s
4s
5s

4.随机数的卡方检验

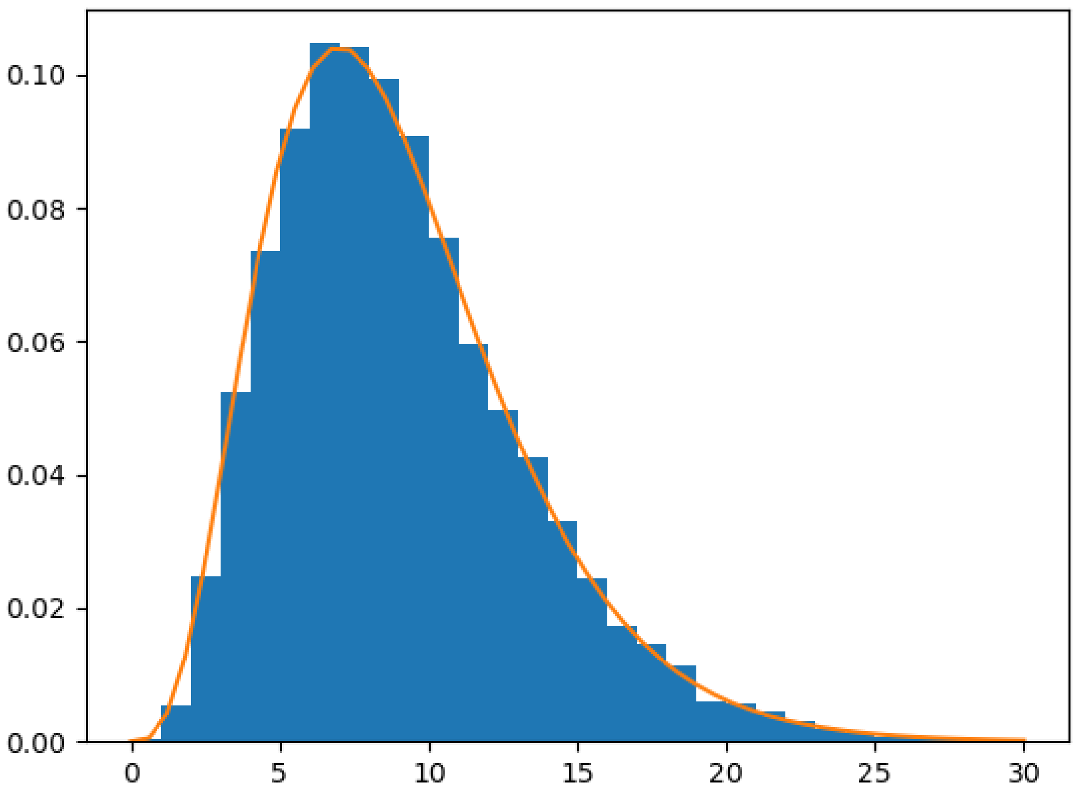
容易知道,落在各个区间的随机数频数值满足相同的概率分布.
进行多次如下实验:将$[0, 1]$等分成k个区间,取N个在此区间均匀分布的随机数,随机数落在各个区间的数量分别为$n_{k'}, k' = 1, \cdots, k$,计算卡方值$\chi^2 \equiv \sum_{k'=1}^{k} \frac{(n_k' - \overline{n_k'})^2}{\overline{n_k'}}$,则该值服从参数为$k-1$的卡方分布:

$$\chi^2 \sim \chi^2(k-1)$$

概率密度函数为:

$$P_v(x) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} t^{v/2-1} e^{-t/2} dt, \qquad v = k-1$$

作程序T4.py,得到频率分布直方图和理论函数曲线如图所示:



可以看到,频率分布和理论曲线符合得很好.

(2)

随机选择一次实验的结果:$\chi^2 = 8.2$
以置信度$\alpha = 0.05$检验:查表得到$\chi^2(9)|_{\alpha=0.05} = 16.92 > \chi^2$,可假定随机性正确
以置信度$\alpha = 0.01$检验:查表得到$\chi^2(9)|_{\alpha=0.01} = 21.67 > \chi^2$,可假定随机性正确