Optimización Multi-Objetivo con SPEA en Funciones Matemáticas Continuas de Alta Dimensión

Eduar Castrillo Velilla[1] and Lifeth Alvarez Camacho[2]

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C., Colombia
emcastrillov@unal.edu.co[1], lalvarezc@unal.edu.co[2]

Abstract. En este artículo se propone y problema multi-objetivo, con 2 funciones objetivo: Rastrigin y Styblinski-Tang. La construcción de la frontera de Pareto aproximada se lleva a cabo mediante el algoritmo de optimización multi-objetivo SPEA. Se presentan además, los detalles del experimento realizado y el análisis de los resultados obtenidos.

Keywords: Optimización Multi-Objetivo, Rastrigin, Styblinski-Tang.

1 Introducción

La optimización está presente en la mayoría de las cosas que hacemos. Optimización de horarios de trabajo, optimización de estrategias de juego, optimización de planes de transporte, entre muchas otras. La optimización es un área de estudio ampliamente investigado debido a su aplicabilidad universal, pero también debido a su fuerte contenido teórico y algorítmico [1].

A grandes rasgos un problema de optimización consiste en encontrar soluciones en un dominio (espacio de soluciones) que minimicen o maximicen una o varias funciones objetivos. Dependiendo de si la función es continua o discreta, el problema de optimización se clasifica como continuo o discreto respectivamente. Además, si el problema cuenta con una o varias funciones objetivo, dicho problema se clasifica como mono-objetivo o multi-objetivo respectivamente.

Cuando la solución analítica de una función objetivo que modela un problema no puede ser calculada, es necesario recurrir a técnicas de búsqueda de soluciones exactas o aproximadas. Una posible estrategia solución es recorrer el espacio de soluciones para encontrar el minimizador o maximizador de la función, pero debido a la potencial infinitud de posibles soluciones o a la dificultad para recorrerlas todas, esta estrategia es computacionalmente intratable. Por ello, se han desarrollado métodos y algoritmos de optimización que permitan explorar el dominio de la función de eficiente, para encontrar soluciones exactas o aproximadas. Existen gran variedad de algoritmos para la resolución de problemas de optimización [1], entre ellos están los algoritmos clásicos de Ascenso a la Colina, Estrategias Evolutivas, Evolución Diferencial, y Enjambre de Partículas. Estos algoritmos han demostrado eficiencia y eficacia al resolver problemas de optimización mono-objetivo.

Usualmente, los problemas reales que necesitan ser optimizados son modelados por varias funciones objetivo que entran en conflicto y que esperan ser maximizadas o minimizadas al tiempo, por lo que es necesario definir una solución balanceada entre todas las funciones objetivo. Este tipo de problema multi-objetivo se resuelve mediante técnicas y algoritmos basados en el concepto de la frontera óptima de Pareto [6]. En este artículo proponemos y solucionamos aproximadamente un problema de optimización de alta dimensión mediante un algoritmo evolutivo multi-objetivo.

Este artículo está dividido en 4 secciones. La sección 2 presenta una descripción del problema multi-objetivo planteado y del algoritmo evolutivo utilizado. La sección 3 presenta los detalles de la experimentación y análisis de los resultados. Finalmente la sección 4 presenta algunas conclusiones.

2 Marco Teórico

2.1 Problema de Optimización Multi-Objetivo

Matemáticamente un problema de optimización multi-objetivo puede definirse de la siguiente forma:

$$\text{minimizar } [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)] \text{ sujeto a } x \in S \tag{1}$$

donde hay k ($k > 1$) funciones objetivos que entran en conflicto $f_i : R^n \rightarrow R$ y que se quieren minimizar simultáneamente. Los vectores (variables) de decisión $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ pertenecen a la región factible $S \subset R^n$. Los vectores objetivo son imágenes de los vectores de decisión y consisten de los valores objetivos $z = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))^T$.

En la optimización multi-objetivo, los vectores objetivo son considerados como óptimos si ninguno de sus objetivos puede ser mejorado sin deteriorar por lo menos otro de los objetivos. Mas precisamente, un vector de decisión $x^a \in S$ es llamado óptimo de Pareto, si no existe otro $x \in S$ tal que $f_i(x) \leq f_i(x^a)$ para todo i = 1, 2, …, k, y $f_j(x) < f_j(x^a)$ en por lo menos un índice j [2]. El conjunto de vectores de decisión óptimos de Pareto puede ser denotado como $P(S)$. Correspondientemente, un vector objetivo puede ser considerado óptimo de Pareto si su vector decisión es óptimo de Pareto y el conjunto de vectores objetivo óptimos de Pareto puede ser denotado como $P(Z)$. Fig. 1 Muestra un diagrama de ejemplo de un conjunto de vectores solución óptimos de Pareto (frontera de Pareto).

Debido a que los vectores no pueden ser ordenados completamente, todas las soluciones óptimas de Pareto pueden ser vistas como igualmente deseables desde el punto de vista matemático, por lo que es necesario contar con un tomador de decisiones que seleccione alguna de ellas. El tomador de decisiones es una persona que puede expresar preferencias sobre la información relacionada a los objetivo conflictivos.

Además del tomador de decisiones, es necesario contar con un analista, para que tome parte en el proceso de solución. Usualmente el analista puede ser una persona o un computador encargado de la parte matemática de la solución. El analista puede ser por ejemplo el encargado de seleccionar el método de optimización utilizado.

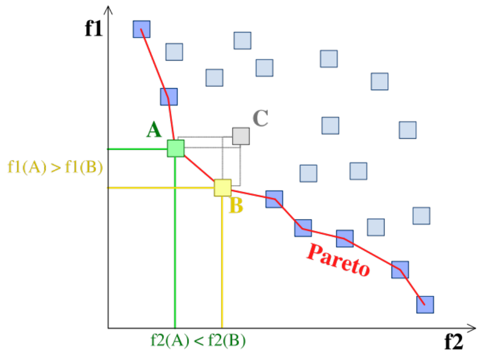

Fig. 1. La línea roja atraviesa los vectores objetivo óptimos de Pareto. Dichos vectores conforman la frontera de Pareto (Imagen con Licencia Creative Commons 3.0).

La complejidad de un problema de optimización multi-objetivo está relacionada en gran medida al grado de conflicto que presentan las funciones objetivo en la región factible. Por ello proponemos un problema multi-objetivo compuesto de 2 funciones objetivo altamente conflictivas en la región factible: Rastrigin y Styblinski-Tang.

2.2 Función Rastrigin

En optimización matemática la función Rastrigin es una función non-convexa, no lineal y multi-modal [3]. En n dimensiones la función está definida como

$$f(x) = An + \sum_{i=1}^{n} [x_i^2 - A\cos(2\pi x_i)] \tag{2}$$

Donde A = 10 y $x_i \in$ {-5.12, 5.12}. La función tiene un mínimo global en x = 0, donde $f(x)$ = 0. La Fig. 1 muestra la gráfica 3-D de la función Rastrigin de 2 dimensiones y su respectivo diagrama de contorno.

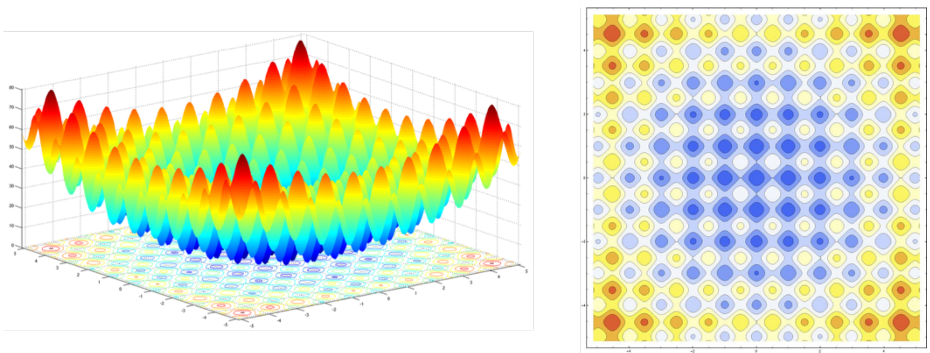

Fig. 2. (Izquierda) Gráfica 3-D de la función Rastrigin de 2 dimensiones. (Derecha) diagrama de contorno de la función Rastrigin (Imágenes de dominio público).

2.3 Función Styblinski-Tang

En optimización matemática la función Styblinski-Tang es una función non-convexa, no lineal y uni-modal [4]. En n dimensiones la función está definida como

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i) \tag{2}$$

Donde $x_i \in \{-5, 5\}$. La función tiene un mínimo global en $x = (-2.903534, -2.903534, \ldots, -2.903534)$, donde $f(x) = -39.16599n$. La Fig. 3 muestra la gráfica 3-D de la función Styblinski-Tang de 2 dimensiones.

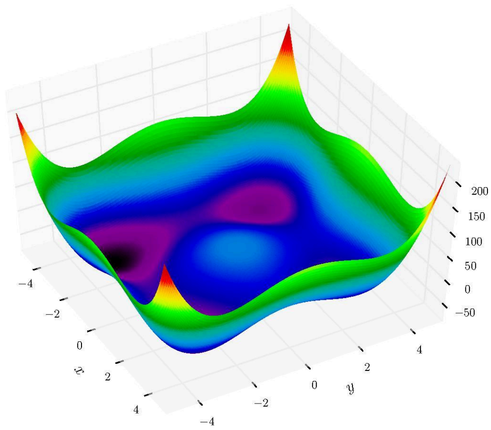

Fig. 3. (Izquierda) Gráfica 3-D de la función Styblinski-Tang de 2 dimensiones (Imagen con Licencia Creative Commons 3.0).

2.4 SPEA (Strength Pareto Evolutionary Algorithm)

SPEA es un algoritmo evolutivo multi-objetivo que usa una mezcla de técnicas existentes y nuevas técnicas con el objetivo de calculas múltiples soluciones óptimas de Pareto en paralelo [5]. Las principales características del algoritmo SPEA son las siguientes:

- Almacena externamente las soluciones óptimas de Pareto encontradas durante toda le ejecución del algoritmo.
- Utiliza el concepto de dominancia de Pareto con el fin de asignar valores escalares de aptitud a los individuos de la población.
- Ejecuta técnicas de agrupamiento (Clustering) para reducir el conjunto de soluciones óptimas de Pareto, sin afectar las características principales de frente de Pareto.
- El valor de aptitud de cada individuo en la población es calculado a partir de los individuos almacenados en el conjunto externo de soluciones óptimas de Pareto. Restando importancia a las dominancias presentes entre los individuos de la población.

- Todos los individuos almacenados en el conjunto externo de soluciones óptimas de Pareto participan en el proceso de selección.
- Una técnica de niche basada en el concepto de dominancia de Pareto es aplicada para mantener la diversidad sobre la frontera de Pareto almacenada en el archivo externo.

La Fig. 1 muestra el pseudo-código base del algoritmo SPEA, tal como fue especificado en [].

```
PROCEDURE FitnessAssignemt
IN/OUT:
    population;
    paretoSet;
BEGIN
    (* update external Pareto set *)
    A := CollectNondominatedSolutions(population);
    B := CombineParetoSets(paretoSet, A);
    IF |B| > maxParetoPoints THEN
        paretoSet := ReduceParetoSet(B);
    ELSE
        paretoSet := B;
    FI
    (* calculate Pareto strengths *)
    FOR paretoInd IN paretoSet DO
        count := 0;
        FOR popInd IN population DO
            IF Covers(paretoInd, popInd) THEN
                count := count + 1;
            FI
        OD
        strength := count / (|population| + 1);
        SetFitness(paretoInd, strength);
    OD
    (* determine fitness values *)
    FOR popInd IN population DO
        sum := 0;
        FOR paretoInd IN paretoSet DO
            IF Covers(paretoInd, popInd) THEN
                sum := sum + GetFitness(paretoInd);
            FI
        OD
        SetFitness(popInd, sum + 1);
    OD
END
```

Fig. 4. Pseudo-código del algoritmo SPEA

2.5 Representación del Individuo en la Población

Cada individuo en la población se representa como un vector de reales de dimensión 10.

2.6 Operadores Genéticos

- SBX (Simulated Binary Crossover): Simula la distribución de la descendencia del operador de cruce binario de punto fijo en variables de decisión reales. Utiliza por defecto una distribución que favorece la descendencia cercana a los padres. Se utiliza un probabilidad de aplicación de 1.0 en cada variable y un índice de distribución de 15.0.
- PM (Polynomial Mutation): Simula la distribución de la descendencia del operador de mutación a nivel de bits en variables de decisión reales. Similar a SBX, por defecto utiliza una distribución que favorece la descendencia cercana a los padres. Muta cada individuo con probabilidad 1/D, donde D es el número de variables de decisión. Esto resulta en una mutación promedio en un nuevo individuo. Utiliza un índice de distribución de 20.0.

3 Experimentos

Una versión del algoritmo SPEA implementada en JAVA ha sido utilizada para resolver el problema de optimización propuesto. La Tabla 1 resume los parámetros utilizados en la ejecución del experimento.

Tabla 1. Parámetros de los experimentos para cada algoritmo

Algoritmo	Población	Iteraciones máximas	Dimensiones de las funciones Objetivo	Espacio de Búsqueda
SPEA	100	10,000	10	[-5, 5]

3.1 Resultados

Se ha graficado la distribución de los vectores objetivo con el fin de determinar gráficamente la convergencia de la frontera de Pareto que minimizan las 2 funciones objetivo. Fig. 5 a 8 muestran gráficamente la distribución de la población para diferentes numero de iteraciones. Como se puede observar, el algoritmo converge rápidamente a lo que se puede considerar la frontera óptima de Pareto. A partir de la iteración 1000, el algoritmo diversifica las soluciones a través de la frontera, hasta que en la iteración 10000 logra una buena aproximación cubriendo la frontera desde un extremo con una solución que minimiza la función Rastrigin hasta el otro extremo con una solución que minimiza la función Styblinski-Tang.

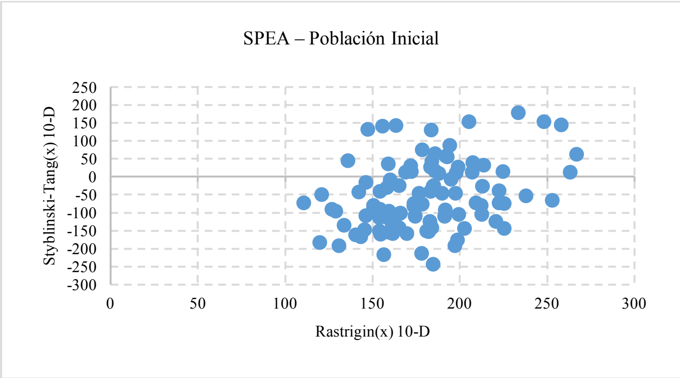

Fig. 5 Distribución de los vectores objetivo con 0 iteraciones del algoritmo SPEA.

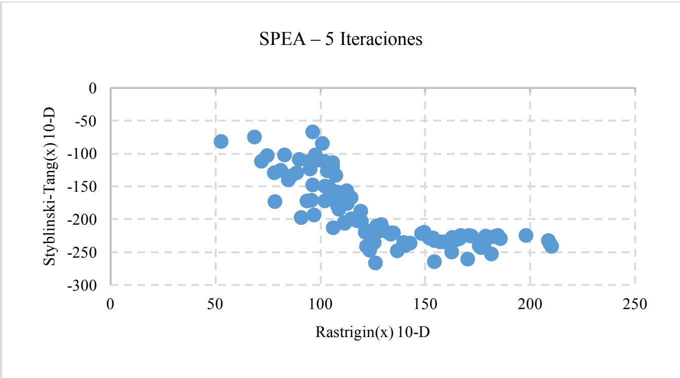

Fig. 5 Distribución de los vectores objetivo con 5 iteraciones del algoritmo SPEA.

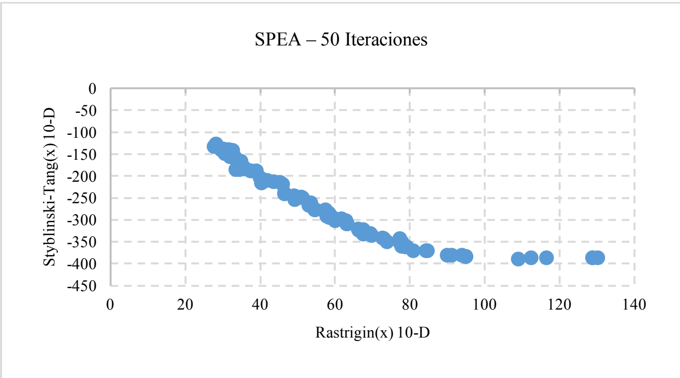

Fig. 5 Distribución de los vectores objetivo con 50 iteraciones del algoritmo SPEA.

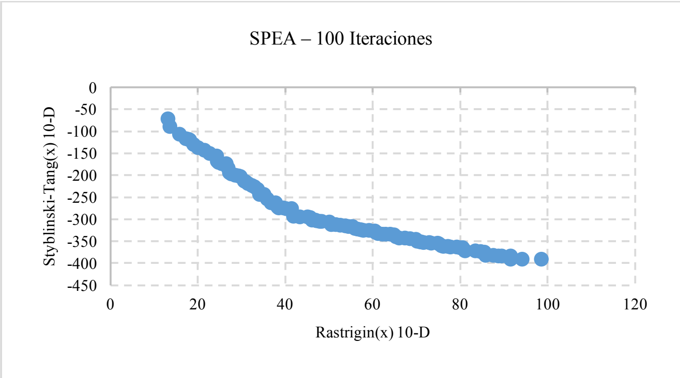

Fig. 5 Distribución de los vectores objetivo con 100 iteraciones del algoritmo SPEA.

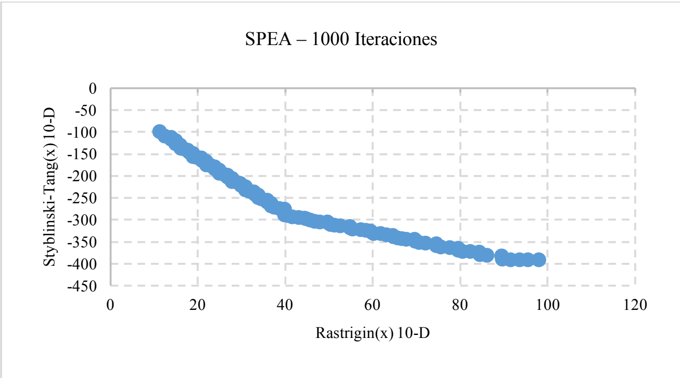

Fig. 5 Distribución de los vectores objetivo con 1000 iteraciones del algoritmo SPEA.

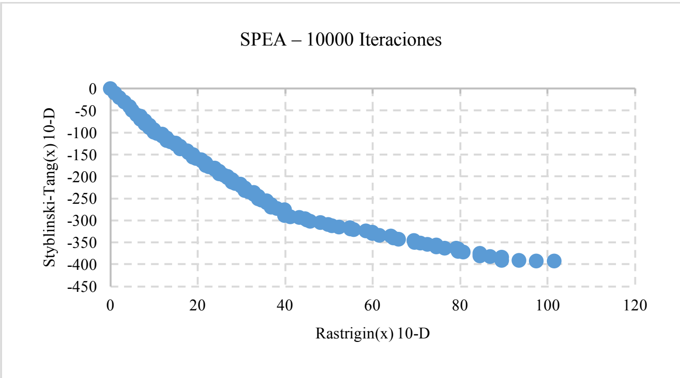

Fig. 5 Distribución de los vectores objetivo con 10000 iteraciones del algoritmo SPEA.

4 Conclusiones

En el presente artículo se planteó un problema de optimización multi-objetivo en alta dimensión con dos funciones objetivos conflictivas: Rastring y Styblinski-Tang. Como método de optimización se ha utilizado una implementación en JAVA del algoritmo SPEA que ha logrado aproximar una frontera de Pareto con alta diversidad y en relativamente pocas iteraciones. La frontera hallada contiene en un extremo el vector solución que minimiza (con error aproximado de 1e-2 con respecto al óptimo global) la función Rastrigin y en el otro extremo el vector solución que minimiza (con error aproximado de 1e-2 con respecto al óptimo global) la función la función Styblinski-Tang.

Referencias

1. Simon, D. (2013). Evolutionary optimization algorithms. John Wiley & Sons.
2. Deb, K., & Miettinen, K. (2008). Multiobjective optimization: interactive and evolutionary approaches (Vol. 5252). Springer Science & Business Media.
3. Mühlenbein, H., Schomisch, M., & Born, J. (1991). The parallel genetic algorithm as function optimizer. Parallel computing, 17(6-7), 619-632.
4. Global Optimization Test Functions Index. Retrieved June 2013, from http://infinity77.net/global_optimization/test_functions.html#test-functions-index.
5. Zitzler, E. and L. Thiele (1998, May). An evolutionary algorithm for multiobjective optimization: The strength pareto approach. Technical Report 43, Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, Gloriastrasse 35, CH-8092 Zurich, Switzerland.
6. Mas-Colell, A.; Whinston, Michael D.; Green, Jerry R. (1995), "Chapter 16: Equilibrium and its Basic Welfare Properties", Microeconomic Theory, Oxford University Press, ISBN 0-19-510268-1.