Математический практикум

Поиск остовного и минимального 3-регулярного подграфа в d-регулярном графе

Епифанов Антон, Воробьев Кирилл
Научный руководитель: Жуковский Максим Евгеньевич

1 Остовный 3-регулярный подграф

1.1 Первый подход

Первым нашим результатом стала теорема о существовании остовного 3-регулярного подграфа в d-регулярном графе
Антон Епифанов предложил такое решение:

Теорема 1. *Пусть $d \geq 3$ — фиксированное целое число. Случайный d-регулярный граф $G \in \mathcal{G}(n, d)$ асимптотически почти наверное (а.п.н.) является d-рёберно связным.*

Доказательство. Стратегия доказательства заключается в том, чтобы показать, что вероятность того, что граф *не является* d-рёберно связным, стремится к нулю при $n \to \infty$.

Определение 1. *Граф $G = (V, E)$ является d-рёберно связным, если для любого непустого собственного подмножества вершин $S \subset V$ ($1 \leq |S| \leq n/2$) размер рёберного разреза $|E(S, V \setminus S)|$ не меньше d.*

Мы будем использовать **модель конфигураций** $\mathcal{G}^*(n, d)$ для генерации случайных d-регулярных мультиграфов. Ключевой факт состоит в том, что любое свойство, выполняющееся а.п.н. для $\mathcal{G}^*(n, d)$, при условии, что вероятность простоты графа в этой модели положительна (что верно для $d \geq 2$), также выполняется а.п.н. для равномерной модели $\mathcal{G}(n, d)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — событие, что граф $G \in \mathcal{G}^*(n, d)$ не является d-рёберно связным. Это означает, что существует множество $S \subset V$ с $|S| = s$ ($1 \leq s \leq n/2$) такое, что $|E(S, V \setminus S)| < d$.

Пусть X_s — случайная величина, равная числу множеств вершин размера s с разрезом меньше d. Пусть $X = \sum_{s=1}^{n/2} X_s$. Мы покажем, что $\mathbb{E}[X] \to 0$ при $n \to \infty$. По неравенству Маркова, это будет означать, что $\mathbb{P}(X > 0) \to 0$.

По линейности математического ожидания:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{s=1}^{n/2} \mathbb{E}[X_s] = \sum_{s=1}^{n/2} \binom{n}{s} \mathbb{P}(|E(S_0, V \setminus S_0)| < d)$$

где S_0 — произвольное фиксированное множество вершин размера s.

Сумма степеней вершин в S_0 равна sd. Пусть $\mathcal{E}_S$ — число рёбер внутри подграфа, порождённого S_0. Тогда размер разреза равен:

$$|E(S_0, V \setminus S_0)| = sd - 2\mathcal{E}_S$$

Условие $|E(S_0, V \setminus S_0)| < d$ эквивалентно $sd - 2\mathcal{E}_S < d$, что равносильно

$$\mathcal{E}_S > \frac{d(s-1)}{2}$$

Пусть $k_s = \lfloor \frac{d(s-1)}{2} \rfloor + 1$. Нам нужно оценить $\mathbb{P}(\mathcal{E}_S \geq k_s)$.

В модели конфигураций вероятность того, что k конкретных пар точек образуют рёбра, примерно равна $(nd)^{-k}$. Используя union bound, вероятность того, что $\mathcal{E}_S \geq k$, можно грубо оценить сверху:

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_S \geq k) \leq \binom{\binom{sd}{2}}{k} \frac{(nd-2k-1)!!}{(nd-1)!!} \approx \frac{1}{k!} \left(\frac{(sd)^2}{2}\right)^k (nd)^{-k} = \frac{1}{k!} \left(\frac{ds^2}{2n}\right)^k$$

Эта оценка достаточно точна для малых s и k.

Часть 1: Анализ для малых s $(1 \leq s \ll \ln n)$

$$\mathbb{E}[X_s] = \binom{n}{s} \mathbb{P}(\mathcal{E}_S \geq k_s) \approx \frac{n^s}{s!} \sum_{k=k_s}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{ds^2}{2n}\right)^k$$

Главный вклад в сумму вносит первое слагаемое при $k = k_s$.

$$\mathbb{E}[X_s] \approx \frac{n^s}{s! k_s!} \left(\frac{ds^2}{2n}\right)^{k_s} = C_{s,d} \cdot n^{s-k_s}$$

где $C_{s,d}$ — константа, зависящая от s и d. Для того, чтобы $\mathbb{E}[X_s] \to 0$, нам необходимо, чтобы показатель степени n был отрицательным, т.е. $s - k_s < 0$.

$$s < k_s \iff s < \left\lfloor \frac{d(s-1)}{2} \right\rfloor + 1$$

Рассмотрим это неравенство для $d \geq 3$:

- **s=1:** $1 < \lfloor 0 \rfloor + 1 \implies 1 < 1$, что неверно. $k_1 = 1$. Это соответствует петле у вершины, которая создаёт разрез размера $d - 2 < d$.
- **s=2:** $2 < \lfloor d/2 \rfloor + 1 \implies 1 < \lfloor d/2 \rfloor \implies d \geq 4$. Неравенство не выполняется для $d = 3$. $k_2 = 2$ (для $d = 3$). Это соответствует двум кратным рёбрам, которые создают разрез $2d - 4$. Для $d = 3$ это $2 < 3$.
- **s $\geq$ 3:** Неравенство $s < \frac{d(s-1)}{2} + 1$ эквивалентно $2s < d(s-1) + 2 \iff s(d-2) > d-2$. Так как $d \geq 3$, то $d - 2 \geq 1$, и неравенство сводится к $s > 1$. Это выполняется.

Проблемные случаи ($s = 1$ и $s = 2$ для $d = 3$) соответствуют наличию петель и кратных рёбер. Однако, по определению, простой граф из $\mathcal{G}(n, d)$ не имеет таких структур. Условная вероятность, при условии что граф простой, обнуляет эти конфигурации. Разрез для $s = 1$ в простом графе равен d. Разрез для $s = 2$ в простом графе равен $2d - 2 \geq d$ (так как $d \geq 2$). Следовательно, для любого фиксированного s, $\mathbb{E}[X_s]$ в пространстве *простых* графов стремится к 0. Сумма по конечному числу малых s также стремится к 0.

Часть 2: Анализ для больших s ($s_0 \leq s \leq n/2$)

Для больших s мы используем неравенства концентрации. Ожидаемое значение размера разреза:

$$\mathbb{E}[|E(S, V \setminus S)|] = \frac{sd \cdot (n-s)d}{nd - 1} \approx ds\left(1 - \frac{s}{n}\right)$$

Это значение велико. Например, для $s = n/2$ оно равно примерно $dn/4$. Вероятность того, что случайная величина отклонится от своего большого среднего значения до константы $d - 1$, экспоненциально мала. Используя стандартные оценки (например, неравенство Чернова), можно показать, что для некоторой константы $c > 0$:

$$\mathbb{P}(|E(S, V \setminus S)| < d) \leq e^{-csd}$$

Тогда

$$\mathbb{E}[X_s] = \binom{n}{s}\mathbb{P}(|E(S, \dots)| < d) \leq \left(\frac{ne}{s}\right)^s e^{-csd} = \left(\frac{ne}{s}e^{-cd}\right)^s$$

Для достаточно большой константы s_0 и всех $s \geq s_0$, выражение в скобках ($\frac{ne}{s}e^{-cd}$) будет меньше 1. Таким образом, сумма $\sum_{s=s_0}^{n/2} \mathbb{E}[X_s]$ также стремится к 0.

Заключение

Мы разбили сумму $\mathbb{E}[X] = \sum_{s=1}^{s_0-1} \mathbb{E}[X_s] + \sum_{s=s_0}^{n/2} \mathbb{E}[X_s]$.

1. Первая сумма (для малых s) стремится к нулю, поскольку конфигурации, создающие малые разрезы (петли и кратные рёбра), отсутствуют в простых графах.

2. Вторая сумма (для больших s) стремится к нулю из-за экспоненциально малой вероятности большого отклонения размера разреза от своего среднего.

Таким образом, $\mathbb{E}[X] \to 0$ для простых графов. По неравенству Маркова, $\mathbb{P}(X \geq 1) \to 0$. Это означает, что вероятность существования хотя бы одного рёберного разреза размером меньше d стремится к нулю. Следовательно, граф из $\mathcal{G}(n, d)$ а.п.н. является d-рёберно связным. ■

Следствие 1. *Известный факт, что если d-регулярный граф d-реберно связен, то в нем есть совершенное паросочетание. (Надо просто рассмотреть разрезы и учесть что они не меньше d и воспользоваться леммой Татта-Бержа), тогда удалив это паросочетание получим d-1 - регулярный граф. Утверждается, что этот граф из распределения смежного с d-1 регулярными графами из конфигурационной модели, то есть если свойство выполнется для d-1 регулярного, то выполняется и для него. А в d-1 регулярном графе ассимтотически почти наверное есть 2 регулярный остовный подграф, тогда возьмем ребра из него и из удаленного паросочетания, получим 3-регулярный остовный подграф.*

1.2 Второй подход

затем было предложено решение с использованием следующей теоремы:

Теорема 2 (Монотонность свойств в случайных графах)**.** *Эта теорема, Теорема 9.36 (в JANSON RANDOM GRAPH), утверждает, что любое возрастающее свойство, выполняющееся асимптотически почти наверное (a.a.s.) для $G(n, r)$, также выполняется a.a.s. для $G(n, r)$ при $2 \leq r \leq s$.*

из данной теоремы следующая следует элементарно поскольку очевидно что существование 3-регулярного подграфа это возрастающее свойство

Теорема 3. *Пусть $G(n, d)$ — случайный d-регулярный граф на n вершинах (где n — чётное число), равномерно выбранный из множества всех d-регулярных графов.*

Для любого целого числа $d \geq 3$ граф $G(n, d)$ асимптотически почти наверное (a.a.s.) содержит остовный 3-регулярный подграф.

2 Минималный 3-регулярный подграф

2.1 Поиск вида функции задающей случайную величину

Для начала мы доказали теорему о том что функция задающая размер минимального 3-регулярного подграфа никак не может быть ограничена.

Теорема 4. *Пусть G(n, d) - случайный d-регулярный граф на n вершинах. X_3 - размер минимального подграфа G(n, d), который является 3-регулярным. Тогда не существует такой константы C, что $X_3(G(n, d)) \leq C$ $\forall n$ a. a. s.*

Доказательство. Для доказательства нам потребуется теорема 2 (она же 1.3 из статьи Kim, Sudakov, Vud "Small subgraphs").

Теорема 5. *Пусть H - фиксированный граф, m(H) - максимальная плотность подграфа в H. Тогда [*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(H \subseteq G_{n,d}) = \begin{cases} 0 & \textit{if } d << n^{1-1/m(H)}, \\ 1 & \textit{if } d >> n^{1-1/m(H)}. \end{cases}$$

]

Доказательство. Известный результат. ■

Предположим противное. Тогда пусть C эта константа и для удобства будем считать, что C четное (если это не так понятно что можно взять C + 1 и оно тоже будет ограничивать нужную нам величину).

Рассмотрим H_2, H_4, ..., H_C - 3-регулярные графы на 2, 4, ..., C вершинах. $P(H_k \subseteq G_{n,d}) = o(1)$ при $n \to \infty$ по теореме 2. Заметим, что, на самом деле, мы должны учесть все графы с точностью до изоморфизма, но в силу того, что размеры графов константные, то и количество различных графов тоже будет константное, то есть O(1). Значит, P(найти 3-регулярный подграф на k вершинах в $G_{n,d}$) = o(1)O(1) = o(1).

Тогда $\mathbb{P}(G_{n,d}$ содержит 3-регулярный подграф на $\leq C$ вершинах) $\leq \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(G_{n,d}$ содержит 3-регу
$C \cdot o(1) = o(1)$ при $n \to \infty$.

Получаем, что для $G_{n,d}$ а.а.с. константа C не подходит. Противоречие, теорема доказана. ■

хорошо, мы получили доказательство данной теоремы, так что же можно сказать по поводу данной функции, давайте разберемся:

2.2 Поиск функции ограничивающих искомую снизу

Замечание 1. *Все полученные нами результаты справедливы если верна теорема о локальном представлении индуцированного подграфа регулярного графа из конфигурационной модели как модели Эрдеша-Реньи с вероятностью появления ребра d/n*

Гипотеза 1. $X_d \geq 3.35d/n$

Рассмотрим случайный d-регулярный граф G на n вершинах. Пусть S — случайно выбранное подмножество вершин мощности $k = k(n)$. Обозначим через $G[S]$ подграф, индуцированный множеством S.

При этом ожидаемая степень вершины внутри S приблизительно равна

$$c = (k-1)p \approx k \cdot \frac{d}{n}.$$

Нас интересует пороговое значение для k, при котором в $G[S]$ асимптотически почти наверное возникает нетривиальное *3-ядро* (максимальный подграф с минимальной степенью не менее 3).

Ключевым этапом анализа является изучение уравнения самосогласования для вероятности x того, что случайное ребро, исходящее из вершины в S, является частью 3-ядра. Это приводит к следующему результату.

Лемма 1 (Уравнение для ядра)**.** *В приближении локального дерева для $G(k,p)$ с параметром c, вероятность x существования 3-ядра, содержащего данное ребро, удовлетворяет уравнению*

$$x = 1 - e^{-cx}(1 + cx),$$

где $c = kd/n$.

Доказательство. Степень вершины в $G(k,p)$ распределена асимптотически по закону $\mathrm{Poisson}(c)$. Условие того, что ребро принадлежит 3-ядру, эквивалентно тому, что вершина на его конце имеет как минимум 2 других ребра, также принадлежащих ядру. Учитывая, что каждое соседнее ребро независимо ведёт в ядро с вероятностью x, получаем, что число "активных" рёбер (кроме исходного) распределено как $\mathrm{Poisson}(cx)$. Вероятность того, что это число не меньше двух, равна $1 - e^{-cx} - cxe^{-cx}$, что и даёт искомое уравнение. ■

Нетривиальное решение $x > 0$ у этого уравнения существует тогда и только тогда, когда параметр c превышает критическое значение c_{crit}, которое находится как минимум функции $c(\lambda) = \lambda/(1-e^{-\lambda}(1+\lambda))$, где $\lambda = cx$.

Лемма 2 (Критическое значение)**.** *Критическое значение среднего числа соседей c, при котором возникает нетривиальное решение уравнения для 3-ядра, равно $c_{crit} \approx 3.35$. Более точно, c_{crit} является решением системы*

$$e^{\lambda} = 1 + \lambda + \lambda^2,$$
$$c_{crit} = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda)},$$

и соответствует $\lambda_{crit} \approx 1.793$.

Объединяя эти результаты и связывая параметр c с размерами исходного графа, результат для с. c_{crit}=3.35

Гипотеза 2. $X_d \geq 5.1494d/n$

Доказательство. Пусть X — число 3-регулярных подграфов на k вершинах в графе $G(n, p = c/n)$. Нам необходимо найти значение c, при котором $\mathbb{E}[X]$ переходит от экспоненциального убывания к росту.

Формула первого момента:

$$\mathbb{E}[X] = \binom{n}{k}\mathbb{P}(\text{на } k \text{ вершинах возникает 3-регулярный граф})$$

$$\mathbb{E}[X] \approx \binom{n}{k} N_k(3) p^{3k/2}$$

где $N_k(3)$ — число 3-регулярных графов на k вершинах.

Используя асимптотику для $N_k(3)$ (Бендер и Кэнфилд):

$$N_k(3) \sim \frac{(3k)!}{(3k/2)!2^{3k/2}(3!)^k}e^{-2} \approx k^{3k/2}e^{-3k/2}\frac{\sqrt{2}}{e^2}$$

(мы опускаем полиномиальные множители, оставляя только экспоненциальный порядок).

Пусть $k = xn$ (где x — доля вершин в подграфе). Логарифмическая плотность матожидания $\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{E}[X]$ складывается из:

- Биномиального коэффициента $\binom{n}{xn}$: вклад $-x \ln x - (1-x)\ln(1-x)$
- Вероятности появления ребра $(c/n)^{1.5xn}$: вклад $1.5x(\ln c - \ln n)$
- Числа графов $N_{xn}(3)$: Асимптотика конфигураций ребер дает вклад $1.5x \ln(xn) - 1.5x$ (из формулы Стирлинга и комбинаторики)

Суммируя все члены, слагаемые с $\ln n$ сокращаются ($1.5x \ln n$ из знаменателя вероятности и $1.5x \ln n$ из числителя подсчета графов).

Получаем функцию скорости, проанализированную Боллобашем:

$$\Psi(x, c) = -x \ln x - (1-x)\ln(1-x) + \frac{3}{2}x \ln c + \frac{3}{2}x(\ln 3 - 1) - x \ln 6 + \cdots$$

(Точные константы зависят от аккуратного сбора всех факториалов 3!, $2^{3k/2}$ и т.д.)

Упрощенное уравнение для порога c: Ищем минимальное c, такое что $\max_{x\in(0,1)} \Psi(x, c) = 0$.

В статье BKV (Раздел 3, Уравнение 3) это сводится к параметрическому уравнению. Пусть μ — параметр. Система уравнений для критической точки (x, c):

1. $\Psi(x, c) = 0$ (матожидание ≈ 1)
2. $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$ (мы находимся в точке максимума вероятности по x)

Численное решение этой системы дает:

$$c^* \approx 5.1494$$

$$x^* \text{ (доля вершин)} \approx \text{константа}$$

■