

# 강의 내용

1. Tarski's World 사용법과 단순명제
2. 주장과 반례
3. 논리연산자
4. 타스키 게임 관련
5. 괄호의 중요성
6. 조건 연산자
7. 조별 발표 과제

## 주의사항

- TW Exercise Files 폴더를 다른 곳에 복사해서 저장할 것.
  - 예: 바탕화면

## 1. Tarski's World 사용법과 단순명제

### 1.1 Tarski's World 사용법 1

- You try it (p. 24)
  - Tarski's World 첫 실행
  - 단순명제 해석 방법 소개
1. Wittgenstein's World와 Wittgenstein's Sentences 실행
  2. 단순명제들의 진리값 확인
    - 우측 상단에 위치한 T/F 버튼 이용
    - 월드 부분을 수정한 후 진리값의 변화 확인
    - 예: Adjoins 명제가 모두 False임. 일부 True가 되도록 수정할 것.
      - Large 블록은 서로 붙어있을 수 없음을 확인
    - 예: Between의 의미가 일상에서와 다름
      - 동일한 줄, 열, 또는 대각선 상에 위치해야 함.
  3. 타스키 월드 사용법 및 단순명제 각각의 의미 확인
  4. 주석(설명)은 세미콜론(";")으로 시작하며 실행과는 무관

### 1.2 단순명제

- 술어(predicate)와 적절한 수의 인자들을 활용하여 만든 명제
  - LeftOf(a, b)

- Between(a, b, c) 등등
- 인자들의 순서가 중요함
  - LeftOf(a, b)와 LeftOf(b, a)는 의미가 다름.
- 술어가 일반적으로 맨 앞에 위치함.
  - 예외: 등호("=") 술어는 두 개의 인자 사이에 위치
  - $a = b$
  - Wittenstein's Sentences에 추가해서 확인해볼 것

## 주의사항

- 대소문자 구분
- 괄호
- 쉼표(콤마)
- 인자들의 순서

## 예제

- Exc 1.4 (P. 26)
- 새로운 명제창(New Sentences)을 연다.
- 아래 명제들을 단순명제로 번역하여 새로 연 명제창에 입력하라.
- 한 줄에 하나의 명제만 입력한다.
  1. a는 정육면체이다.
  2. b는 a보다 작다.
  3. c는 a와 b 사이에 위치한다.
  4. d는 크다.
  5. e는 a 보다 크다.
  6. b는 정사면체이다.
  7. e는 정12면체이다.
  8. e는 b의 오른쪽에 위치한다.
  9. a는 e보다 작다.
  10. d는 a의 뒤에 위치한다.
  11. b와 d는 같은 행에 위치한다.
  12. b와 c의 크기가 동일하다.
- 위 명제들의 진리값(참 또는 거짓)을 Wittgenstein's World에서 확인라.

## 연습문제 1

- Exc 1.3 (P. 25)
- 새로운 명제창(New Sentences)을 연 후 아래 명제들을 추가한다.
  1. Tet(a)
  2. Medium(a)
  3. Dodec(b)
  4. Cube(c)
  5. FrontOf (a, b)
  6. Between(a,b,c)
  7.  $a = d$
  8. Larger(a,b)
  9. Smaller(a,c)
  10. LeftOf (b, c)

- 위 명제들의 진리값(참 또는 거짓)을 Wittgenstein's World에서 확인라.

## 2. 주장과 반례

### 2.1 Tarski's World 사용법 2

- You try it(p. 64)
  - 논리추론 연습
1. Bill's Argument 열기
  2. 마지막 명제가 첫 세 개의 명제로부터 추론되는지 여부 판단하기
    - 즉, 첫 세 개의 명제가 참이라고 가정할 때, 마지막 명제도 참이되는지 여부 판단
    - 먼저 머리로 판단하기
  3. 새로운 월드(New World) 창을 생성하여 실험하기
    - 네 개의 블록을 생성한 후 각각에 a, b, c, d 이름 명명하기
    - 주의사항
      - 하나의 블록에 여러 개의 이름 명명 가능
      - 하지만 동일한 이름을 여러 개의 블록에는 사용 못함
      - 여기서는 네 개의 블록이 각각 다른 이름 갖도록 함
  4. 네 개의 블록들의 위치를 임의로 변경한 후 세 개의 전제들이 모두 참이되도록 만들 것
  5. 세 개의 전제가 모두 참인데 결론은 거짓이 되는 월드가 존재하는지 계속해서 실험할 것

### 용어 설명

- Premise: 전제
- Conclusion: 결론

### 2.2 주장과 반례

- 주장이란?
  - 전제가 참이면 결론도 참이라고 말하는 것
  - 전제는 1개 이상의 명제들로 구성됨
  - 결론은 1개의 명제로 구성됨
- "전제로부터 결론이 따라온다"란?
  - 전제에 포함된 모든 명제들이 참이면 결론도 무조건 참이되는 경우
- "전제로부터 결론이 반드시 따라오는 것은 아니다"란?
  - 전제가 모두 참이지만 결론은 거짓인 경우
- 경우란?
  - 어떤 상황을 의미함
  - 여기서는 특정 타스키 월드를 지칭
  - 어떤 세상, 어떤 국가, 어떤 우주를 설정해도 됨.
- 반례
  - 전제가 모두 참이지만 결론이 거짓이 되는 경우를 의미
  - 여기서는 Tarski's World에서 구현된 어떤 월드를 의미함.
- 타스키 월드에서 어떤 주장이 거짓임을 보이는 과정
  - 전제가 모두 참이지만, 결론은 거짓인 월드 생성
- 어떤 주장이 참임을 보이는 과정

- 보다 어려움
- 어떤 월드에서든, 전제가 모두 참이면 결론도 반드시 참이다라는 것을 입증할 수 있어야 함.
- 즉, 어떤 월드에서든 전제가 모두 참일 수 없거나, 만약에 모두 참이라면 결론도 참이다라는 것을 보여야 함.
- 그런데 어떻게 모든 월드를 대상으로 삼을 수 있나?
  - 매우 어려운 질문임
  - 괴델의 완전성 정리와 깊이 연관됨.
  - 정형증명 방식을 활용하기도 함, 예를 들어, Fitch, Coq 등 컴퓨터 소프트웨어 활용

## 예제

- Exc 2.24 (P. 66)
  - 주장 증명하기
- 아래 주장이 항상 참인지 여부를 판단하라.
  - 항상 참이라고 생각되면 이유를 설명하라.
  - 아니라면 반례가 되는 월드를 생성하라.
- 전제
  1. Larger(b, c)
  2. Smaller(b, d)
  3. SameSize(d, e)
- 결론
  - Larger(e, c)

## 예제

- Exc 2.25 (P. 66)
  - 반례 입증하기
- 아래 주장이 항상 참인지 여부를 판단하라.
  - 항상 참이라고 생각되면 이유를 설명하라.
  - 아니라면 반례가 되는 월드를 생성하라.
- 전제
  1. FrontOf(a, b)
  2. LeftOf(a, c)
  3. SameCol(a, b)
- 결론
  - FontOf(c, b)

## 연습문제 2

- Exc 2.26 (P. 66)
- 아래 주장이 항상 참인지 여부를 판단하라.
  - 항상 참이라고 생각되면 이유를 설명하라.
  - 아니라면 반례가 되는 월드를 생성하라.
- 전제
  1. SameRow(b, c)
  2. SameRow(a, d)
  3. SameRow(d, f)
  4. LeftOf(a, b)
- 결론

- LeftOf(f, c)

### 연습문제 3

- Exc 2.27 (P. 66)
- 아래 주장이 항상 참인지 여부를 판단하라.
  - 항상 참이라고 생각되면 이유를 설명하라.
  - 아니라면 반례가 되는 월드를 생성하라.
- 전제
  1. SameRow(b, c)
  2. SameRow(a, d)
  3. SameRow(d, f)
  4. FrontOf(a, b)
- 결론
  - FrontOf(f, c)

## 3. 논리연산자

- 논리연산자를 이용하여 보다 복잡한 명제를 생성한다.
  1. "부정" 연산자
  2. "그리고" 연산자
  3. "또는" 연산자

### 3.1 부정 연산자: "¬"

- 형식:  $\neg P$
- "... 가 아니다", "... 하지 않다" 등 어떤 명제의 부정을 표현할 때 사용
  - P가 명제일 때  $\neg P$ 의 진리값은 P의 진리값을 부정하면 된다.
- 진리값을 부정하는 방식은 다음과 같다.

P	$\neg P$
True	False
False	True

### 예제: 진리값 추정게임 하기

- You try it(P. 69)
- Wittgenstein's World 열기
- 새로운 sentence 파일 열기
- 아래 명제의 진리값 추정하기
 

¬¬¬¬¬Between(e, d, f)
- 추정값이 맞는지 확인하기 위해 게임 실행
  - 우측 상단에 있는 Play Game 버튼 누름
  - 게임요령
    - 먼저 진리값의 추정치 선택

- 선택된 결과에 따라 다음 게임이 진행됨
- 단계마다 컴퓨터의 요구사항에 맞추어 여러 선택을 해야 함.
- 컴퓨터 또는 사용자가 이길 때까지 게임 진행됨.
- 이후에 게임에 대한 보다 자세한 설명 예정

## 연속적으로 사용된 부정 연산자 다루기

- 기본 원칙: 부정의 부정은 긍정이다!
- 연속적으로 두 번 사용된 부정은 삭제 가능
- 결국 부정이 연속적으로 짝수 개수만큼 사용된 것은 삭제 가능
- 예:  $\neg\neg\neg\neg\text{Between}(e, d, f)$  와  $\neg\text{Between}(e, d, f)$ 은 동일한 진리값 가짐

## 연습문제 4

- Exc 3.3 (P. 70)
- 새로운 명제창(New Sentences)을 연다.
- 아래 명제들을 입력하고 저장한다.
  1.  $\neg\text{Tet}(f)$
  2.  $\neg\text{SameCol}(c, a)$
  3.  $\neg\neg\text{SameCol}(c, b)$
  4.  $\neg\text{Dodec}(f)$
  5.  $c \neq b$
  6.  $\neg(d \neq e)$
  7.  $\neg\text{SameShape}(f, c)$
  8.  $\neg\neg\text{SameShape}(d, c)$
  9.  $\neg\text{Cube}(e)$
  10.  $\neg\text{Tet}(c)$
- 새로운 월드창을 연 후, 위 명제들이 모두 참이되는 타스키 월드를 생성하라.

## 3.2 "그리고" 연산자: " $\wedge$ "

- 형식:  $P \wedge Q$
- 두 개의 명제가 동시에 참이다라고 주장할 때 사용
- 두 개의 명제  $P$ 와  $Q$ 가 동시에 참이 되려면  $P$ 도 참이고,  $Q$ 도 참이면 된다.
- $P \wedge Q$ 의 진리값은 아래 표에 따라 결정된다.

P	Q	$P \wedge Q$
True	True	True
True	False	False
False	True	False
False	False	False

## 예제

- You trye it(P.72)

1. Claire's World 열기
2. 새로운 명제 파일 열기
3. 아래 문장의 진리값 추정하기

$$\neg \text{Cube}(a) \wedge \neg \text{Cube}(b) \wedge \neg \text{Cube}(c)$$

4. 추정값이 맞는지 확인하기 위해 게임 실행
  - 추정값이 맞아도 게임에 질 수 있음
  - 게임진행이 이상할 경우 Back 버튼을 눌러 이전 단계로 되돌릴 수 있음
  - Tarski's World는 절대로 실수하지 않음

## 연습문제 5

- Exc. 3.7 (P. 74)
- Max's Sentences를 연 후, 포함된 모든 명제들이 참이되는 타스키 월드를 생성하라.
- 힌트: 6개의 블록을 사용한다.

## 3.3 "또는" 연산자: " $\vee$ "

- 형식:  $P \vee Q$
- 두 개의 명제 중에 적어도 하나가 참이다라고 주장할 때 사용
- 두 개의 명제  $P$ 와  $Q$  중에 적어도 하나가 참이 되려면  $P$ 가 참이거나  $Q$ 가 참이면 된다.
- 주의: 둘 다 참이어도 된다.
- $P \vee Q$ 의 진리값은 아래 표에 따라 결정된다.

P	Q	$P \vee Q$
True	True	True
True	False	True
False	True	True
False	False	False

## 예제

- You trye it(P.76)

1. Ackermann's World 열기
2. 새로운 명제 파일 열기
3. 아래 문장의 진리값 추정하기

$$\text{Cube}(c) \vee \neg(\text{Cube}(a) \vee \text{Cube}(b))$$

4. 추정값이 맞는지 확인하기 위해 게임 실행

## 연습문제 6

- Exc 3.10 (P. 77)
- 새로운 명제창을 연 후, 아래 명제들을 입력한다.
  1.  $\text{Between}(a, b, c) \vee \text{Between}(b, a, c)$
  2.  $\text{FrontOf}(a, b) \vee \text{FrontOf}(c, b)$

3.  $\neg \text{SameRow}(b, c) \vee \text{LeftOf}(b, a)$

4.  $\text{RightOf}(b, a) \vee \text{Tet}(a)$

- Ramsey's World를 연 후, 위 명제들의 진리값을 확인하라.
- Ramsey's World를 단 한 번 수정하여, 위 명제들이 모두 참이 되도록 하라.

## 4. 타스키 게임 관련

- 게임 규칙 설명

형태	사용자 추정값	선택 당사자	다음 단계
$P \vee Q$	True False	사용자 —	P, Q 중에 True인 거 선택 후 게임 진행. P, Q 각각에 대해 False 추정값 확인 게임 진행하며, 둘 중에 하나가 True이면 사용자가 지도록 유도함.
$P \wedge Q$	True False	— 사용자	P, Q 각각에 대해 True 추정값 확인 게임 진행하며, 둘 중에 하나가 False이면 사용자가 지도록 유도함. P, Q 중에 False인 거 선택 후 게임 진행
$\neg P$	아무거나	—	$\neg P$ 를 P로 대체 후 게임 진행.

### 예제

- Exc 3.11 (P. 79)
- Kleene's World와 Kleene's Sentences를 연다.
- Kleene's World를 3D 방식으로만 확인하면서 각 명제의 진리값을 추정하고 게임을 하면서 확인할 수 있다.

## 5. 괄호의 중요성

- 복잡한 명제를 다룰 때 괄호에 주의해야 한다.
- 예제: 아래 두 명제는 서로 다른 의미를 가진다.

$$P \vee (Q \wedge R) \quad \text{vs} \quad (P \vee Q) \wedge R$$

### 예제

- Exc 3.14 (P.82)
- $\neg(\text{Small}(a) \vee \text{Small}(b))$ 는 참이지만  $\neg \text{Small}(a) \vee \text{Small}(b)$ 는 거짓이 되는 월드를 생성하라.

### 연습문제 7

- Exc 3.15 (P.82)
- $\text{Cube}(a) \wedge (\text{Cube}(b) \vee \text{Cube}(c))$ 는 참이지만  $(\text{Cube}(a) \wedge (\text{Cube}(b)) \vee \text{Cube}(c))$ 는 거짓이 되는 월드를 생성하라.



## 6 조건 연산자: " $\rightarrow$ "

- 형식:  $P \rightarrow Q$
- "P가 참이면 Q도 참이다" 라고 주장할 때 사용
- $P \rightarrow Q$ 의 진리값은  $\neg P \vee Q$ 의 진리값과 동일.

P	Q	$\neg P \vee Q$	$P \rightarrow Q$
True	True	True	True
True	False	False	False
False	True	True	True
False	False	True	True

- Tarski's World에서는  $P \rightarrow Q$ 를 바로  $\neg P \vee Q$ 로 변환해서 다룸.
- 동치연산자("  $\leftrightarrow$  ")는 조건 연산자를 이용하여 정의됨. 즉,  $P \leftrightarrow Q$ 는  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ 의 줄임말임.

## 예제

- Exc 7.14 (P.189)
- Euler's Sentences 열기
- 새로운 월드 열기
- Euler's Sentences의 명제들이 모두 참이되도록 하는 월드 생성하기
  - 함께 구현하기

## 연습문제 8

- Exc. 7.16 (P. 189)
- Sherlock's World와 Sherlock's Sentences 열기
- Sherlock's World의 어떤 블록도 이름이 없음.
- a, b, c 세 개의 이름을 특정 블록에 붙여서, 모든 명제들이 참이되도록 만들어라.

## 연습문제 9

- Exc. 7.17 (P. 190)
- Boolos' Sentences에 포함된 모든 명제들이 참이되는 월드를 생성하라.

## 연습문제 10

- 주의: 연습장 활용할 것
- Exc. 8.13 (P. 207)
- $\text{Odd}(n)$ 은 "n이 홀수이다"를 나타내는 술어이다.
- $\text{Even}(n)$ 은 "n이 짝수이다"를 나타내는 술어이다.
- 아래 명제가 참임을 증명하라.

$$\text{Odd}(n + m) \rightarrow \text{Even}(n \times m)$$

## 연습문제 11

- 주의: 연습장 활용할 것
- Exc. 8.14 (P. 207)
- 아래의 명제들이 모두 동치임을 증명하라.
  1.  $n$ 이 3으로 나누어진다.
  2.  $n^2$ 이 3으로 나누어진다.
  3.  $n^2$ 이 9로 나누어진다.
  4.  $n^3$ 이 3으로 나누어진다.
  5.  $n^3$ 이 9로 나누어진다.
  6.  $n^3$ 이 27로 나누어진다.

## 조별 발표 과제

- 연습문제 풀기