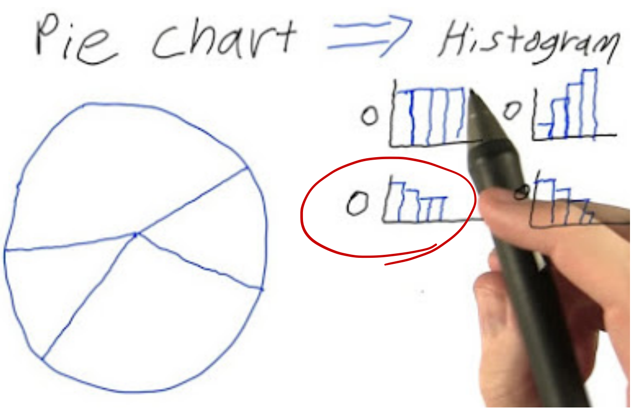
2017년 2학기 확률과통계 중간고사

- 이름:
- 학번:
- 점수

문제 1	문제 2	문제 3	문제 4	문제 5	문제 6	문제 7	문제 8	문제 9	문제 10	합 계

문제 1

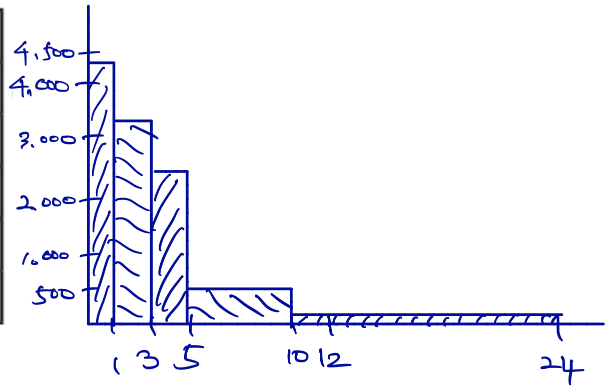
아래 그림의 왼쪽은 어떤 데이터의 파이차트(pie chart)를 나타낸다. 이 데이터를 히스토그램(histogram)으로 표현하고자 할 때 어떤 모습이 되는지 왼쪽에서 선택하라. (주의: 손과 펜 이미지는 무시한다.)



문제 2

아래 테이블은 점수(Score)의 구간과 구간별 도수(Frequency)의 데이터를 담고 있다. 각 구간별 도수밀도를 계산하고, 계산결과를 이용하여 히스토그램을 그려 보아라.

Hours	Frequency	
0–1	4,300	4,300
1–3	6,900	3,450
3–5	4,900	2,450
5–10	2,000	400
10–24	2,100	150



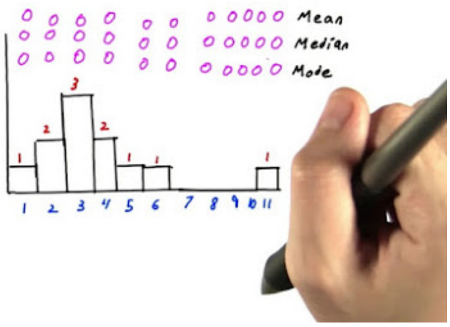
도수밀도
=
도수 ÷ 구간크기

문제 3

중앙값

아래그림은 어떤 데이터 집합의 히스토그램을 보여준다. 해당 데이터들의 평균, 중앙값, 최빈값을 구 하라.
(주의: 손과 펜 이미지는 무시한다.)

숫자나열 : 1 2 2 3 3 3 4 4 5 6 11



$$\mu = \frac{1+4+9+8+5+6+11}{11} = \frac{44}{11} = 4$$

중앙값 = 3

최빈값 = 3

문제 4

아래 테이블은 어떤 선수의 시합 당 올린 점수(points scored per game)와 그 점수를 획득한 게임의 수를 도수(frequency)의 데이터를 담고 있다.

Q1

Points scored per game	3	6	7	10	11	13	30
Frequency	2	1	2	3	1	1	1

3, 3, 6, 7, 7, 10, 10, 10, 11, 13, 30

이 집합의 범위, 상한 사분위수, 하한 사분위수, 사분범위를 구하라.

3

범위 = 30 − 3 = 27

상한 사분위수 = 13

하한 사분위수 = 6

사분범위 = 13 − 6 = 7

문제 5

$x_1, \ldots, x_n$ 의 데이터가 다음 성질을 만족한다.

- 평균(μ) = 5
- 분산(σ^2) = 16

$y_i = 1.5 \cdot x_i$ 일 때, y_i 의 평균, 표준편차, 분산을 구하라.

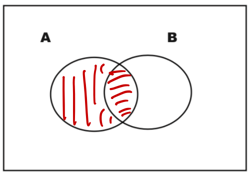
평균 = $1.5 * 5 = 6.5$

분산 = $(1.5)^2 * 16 = \frac{9}{4} * 16 = 36$

표준편차 = $1.5 * 4 = 6$

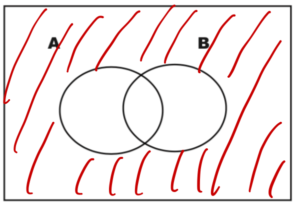
문제 6

다음 세 개의 벤다이어그램 각각에서 필요한 부분을 색칠하라.



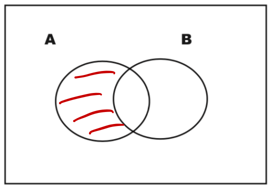
$P(A \cap B) + P(A \cap B')$

$= P(A)$



$P(A' \cap B')$

$= P((A \cup B)')$



$P(A \cup B) - P(B)$

문제 7

커피와 도넛을 판매하는 매장에서 손님들이 두 제품을 구입하는 확률이 다음과 같이 주어졌다.

- P(도넛) = 3/4
- P(커피 | 도넛') = 1/3
- P(도넛 ∩ 커피) = 9/20

이제 아래 확률을 구하라. 힌트: 아래 공식을 활용한다.

$$P(A' \mid B) = 1 - P(A \mid B)$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(1) P(도넛') = $1 - P(\text{도넛}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

(2) P(도넛' ∩ 커피) = $P(\text{커피} \cap \text{도넛}') = P(\text{커피} \mid \text{도넛}') * P(\text{도넛}')$

$= \frac{1}{3} * \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

(3) P(커피' | 도넛) = $\frac{P(\text{커피}' \cap \text{도넛})}{P(\text{도넛})} = \frac{P(\text{도넛}) - P(\text{도넛} \cap \text{커피})}{P(\text{도넛})} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{9}{20}}{\frac{3}{4}}$

$= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

(4) P(커피) =

$P(\text{커피} \cap \text{도넛}) + P(\text{커피} \cap \text{도넛}') = \frac{9}{20} + \frac{1}{12} = \frac{8}{15}$

(5) P(도넛 | 커피) = $\frac{P(\text{도넛} \cap \text{커피})}{P(\text{커피})}$

$= \frac{\frac{9}{20}}{\frac{8}{15}} = \frac{27}{32}$

문제 8

어느 병원에서 암진단에 대한 아래의 자료를 갖고 있다.

- 암진단 검사를 받는 사람 중에 암에 걸릴 확률은 20%이고, 그렇지 않을 확률은 80%이다.
- 암에 걸린 사람 중에 암진단 결과가 양성일 확률이 90%이고, 음성일 확률이 10%이다.
- 반면에 암에 걸리지 않은 사람 중에 암진단 결과가 양성일 확률은 30%이고, 음성일 확률은 70%이다.

이제 임의로 한 사람을 진단해 보니 양성으로 판명되었다. 그 사람이 실제로는 암에 걸리지 않았을 확률을 계산하라.

힌트:

- 분수로만 계산한다.
- 아래 베이즈 공식을 활용한다.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(A') \cdot P(B \mid A')}$$

A: 암에 걸린다.

B: 암진단이 양성이다.

$\Rightarrow P(A)=0.2, \quad P(A')=0.8$

$P(B|A)=0.9, \quad P(B'|A)=0.1$

$P(B|A')=0.3, \quad P(B'|A')=0.7$

$$\Rightarrow P(A'|B) = \frac{P(A') \cdot P(B|A')}{P(A') \cdot P(B|A') + P(A) \cdot P(B|A)}$$

$$= \frac{\frac{8}{10} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{8}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{9}{10}}$$

$$= \frac{24}{24+18} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

주의: $A'' = A$

여사건의 여사건은 자기 자신

문제 9

어느 매점에서 행운의 과자를 500원에 판다. 각 과자 속에는 경우에 따라 할인권이 아래의 확률로 들어 있다.

- 2천원 할인권의 확률은 10%
- 5천원 할인권의 확률은 7%
- 만원 할인권의 확률은 3%

x	-500	1500	4500	9500
$P(X=x)$	0.8	0.1	0.07	0.03

(1) 행운의 과자를 살 때의 순수익을 나타내는 확률변수를 X라 할 때 기대치 E(X)와 분산 Var(X)를 구하라.

힌트: 아래 공식을 참조한다.

$$E(X) = \sum x\,P(X = x)$$

$$Var(X) = E(X - \mu)^2$$

$$\mu = E(X) = -500 \cdot \frac{8}{10} + 1500 \cdot \frac{1}{10} + 4500 \cdot \frac{7}{100} + 9500 \cdot \frac{3}{100} = 350$$

$$Var(X) = E(X-\mu)^2 = (-850)^2 \cdot \frac{8}{10} + (1150)^2 \cdot \frac{1}{10} + (4150)^2 \cdot \frac{7}{100} + (9150)^2 \cdot \frac{3}{100}$$

$$= (722{,}500) \cdot \frac{8}{10} + (1{,}322{,}500) \cdot \frac{1}{10} + (17{,}222{,}500) \cdot \frac{7}{100} + (83{,}722{,}500) \cdot \frac{3}{100}$$

$$= 578{,}000 + 132{,}250 + 1{,}205{,}575 + 2{,}511{,}675$$

$$= 4{,}427{,}500$$

숫자가 예상외로 너무 커졌음. 요 문제는 시험문제에서 제외함.

(2) 행운의 과자 가격을 천원으로 올렸을 때의 기대치와 분산을 구하라.

가격변경 후의 확률변수를 Y라 하자.

그러면 $\left.\begin{array}{l} X = \text{상금} - 500 \\ Y = \text{상금} - 1000 \end{array}\right\}$ 이다.

따라서 $Y = X + 500 - 1{,}000 = X - 500$.

$\Rightarrow E(Y) = E(X) - 500 = 350 - 500 = -150$

$Var(Y) = Var(X) = 4{,}427{,}500$

문제 10

아래 테이블의 각 항목에서 기대치 또는 분산에 대한 간단한 공식을 채워 넣어라. 단, 다음 사항에 주의한다.

- X와 Y는 서로 영향을 주지 않는 확률변수들이다.
- X_1 , X_2 , X_3 는 X와 동일한 확률분포를 갖는 독립관측들이다.
- X^2 는 X의 확률분포에서 확률변수의 값들을 제곱해서 얻어지는 확률분포를 의미한다.
- f는 확률변수를 선형으로 변화시키는 함수이다.

Statistic	Shortcut or formula
E(aX + b)	$a\,E(X)+b$
Var(aX + b)	$a^2 \cdot E(X)$
E(X)	$\Sigma x \cdot P(X=x)$
E(f(X))	$\Sigma f(x) \cdot P(X=x)$
Var(aX - bY)	$a^2\,Var(X)+b^2\,Var(Y)$
Var(X)	$E(X-\mu)^2$, $\Sigma (x-\mu)^2 \cdot P(X=x)$, $E(X^2)-(E(X))^2$
E(aX - bY)	$a\,E(X)-b\,E(Y)$
$E(X_1 + X_2 + X_3)$	$3E(X)$
$Var(X_1 + X_2 + X_3)$	$3\,Var(X)$
$E(X^2)$	$\Sigma x^2 \cdot P(X=x)$, $Var(X)+(E(X))^2$
Var(aX - b)	$a^2\,Var(X)$