

## 학률과 통계

7장 ~~가지~~, 이항, 포아송 분포

2017년 2학기



## 이항분포

(p. 333, 336, 337)

동일한 시도를 n번 시도할 때, 특정 사건이

n번 나올 확률들의 분포를 이항분포라 한다.

조건: 각각의 시도는 상호 독립적이며, 각각의 시도에서  
특정 사건이 발생할 확률은 동일하다.

예제: 4자선다 문제

4자리 질문을 모두 암으로 짜았을 때 맞출 확률은  $P = \frac{1}{4}$

질문:

n개의 질문을 모두 암으로 짜어서 맞출 때 n개의 정답을 얻을 확률?

맞히는 개수  $\rightarrow r$  | 0 | 1 | ... |  $r$  | ... | ... |  $n-1$  |  $n$

맞히는 개수 $\rightarrow r$								
$P(X=r)$								

$r$ 개 맞힐 확률

$$\underbrace{P(X=r)}$$

어떻게 계산하나?

$P(X=r)$  계산 예제 :  $n=3$  인 경우

즉, 3 개의 문제 중에  $r$  개를 맞힐

확률.

여기서  $r \in \{0, 1, 2, 3\}$  임.

따라서 4 가지 경우를 살펴보아야 함.

① 모두 틀린 경우

$$P(X=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = {}^3C_0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

② 한 문제 맞힐 경우

$$P(X=1) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2}_{\substack{\text{3 경우 각각 발생할} \\ \text{ 확률}}} \quad \begin{array}{l} \text{3 경우 각각 발생할} \\ \text{ 확률} \end{array}$$

$\underbrace{{}^3C_1}_{\substack{\text{3 문제 중에 } 1\text{ 개 선택.}}}$

③ 두 문제 맞힐 확률

$$P(X=2) = \underbrace{{}^3C_2}_{\substack{\text{3 문제 중에 } 2\text{ 개 선택}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^2}_{\substack{\text{3 경우 각각} \\ \text{ 발생할 확률}}} \cdot \underbrace{\frac{3}{4}}_{\substack{\text{3 경우 각각} \\ \text{ 발생할 확률}}}$$

④ 세 문제 모두 맞힐 확률

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = {}^3C_3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$\Rightarrow P(X=r) = {}^3C_r \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^r \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{3-r}$$

## 일반화

한 번의 시도에서 성공할 확률 =  $P$

위와는 결과가 발생한다는 의미

$n$  번 시도에서  $r$  번 성공할 확률

${}^nC_r$  경우의 수  
발생할 확률

$$P(X=r) = {}^nC_r \cdot P^r \cdot (1-P)^{n-r}$$

$$= {}^nC_r \cdot P^r \cdot q^{n-r} \quad (q = 1 - P)$$

$n$  개 중에서  
 $r$  개를 선택하는  
방법의 수

선택한  $r$  개가  
성공할 확률

$r$  개를 제외한  
나머지가  
실패할 확률

이런 경우  $X$ 는 이항분포를 따른다 말하고

아래와 같이 표기한다.

$$X \sim B(n, P)$$

이항분포

만족 횟수

한 번의 시도에서  
성공할 확률

# 이항분포의 기대치와 분산 (p.338 ~ 341)

$X \sim B(n, p)$  라 하자.

그러면 :

$$E(X) = n \cdot p$$

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q \quad (q = 1 - p)$$

=====

설명 :

①  $X_1$  을 한 번 시도한 경우의 확률분포라 하자.

즉,

r	0	1
$P(X=r)$	$q$	$p$

한 번 시도하면  
성공 또는 실패만  
발생함.

$$\text{따라서}, E(X_1) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X_1) &= (0-p)^2 \cdot q + (1-p)^2 \cdot p \\
 &= p^2 \cdot q + (1-2p) \cdot p \\
 &= p^2 - p^2 + p - 2p \quad p^3 \\
 &= p - p^2 = p(1-p) \\
 &= p \cdot q
 \end{aligned}$$

②  $X$  와  $X_1$  사이에 아래 관계가 성립한다.

$X$ 는  $X_1$ 을 반복하여 독립적으로  $n$ 번 실행하는 확률분포,  
즉,  $X_1$ 을  $n$ 번 독립관측 하는 것이다.

따라서, 아래의 식을 얻는다.

$$X = \underbrace{X_1 + \dots + X_1}_{n \text{번}}$$

③ 위 식을 이용하여  $E(X)$  와  $\text{Var}(X)$ 를 아래와 같이  
계산할 수 있다.

$$E(X) = E(\underbrace{X_1 + \dots + X_1}_{n \text{번}})$$

$$= n \cdot E(X_1)$$

$$= n \cdot p$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1 + \dots + X_n)$$

$$= n \cdot \text{Var}(X_1)$$

$$= n \cdot p \cdot q$$

④

## 이항 분포 예제

① 동전을 1번 던져 앞면이 r번 나올 확률들의

분포 :

$$X_{coin} \sim B(n, \frac{1}{2})$$

② 주사위를 n번 던져 2보다 큰 소수가 r번 나올 확률들의 분포 :

$$X_{dice} \sim B(n, \frac{1}{3})$$

이유 : 2보다 큰 소수는 3과 5이다.

③ 뽑기 기계에서 커다란 공인형을 뽑을 확률이 0.4라고 하자.

뽑기를 m번 해서 공인형을 r개 뽐을 확률들의

분포 :

$$X_{bear} \sim B(m, p)$$

## 포아송 분포

(P. 346 ~ 348)

특정 기간 동안 어떤 사건이 발생하는 횟수의 평균값 또는 비율이 주어졌을 때, 미래의 동일한 기간 동안 해당 사건이 r번 발생할 확률들의 분포

예제) 영화관의 낡은 펑크기계

- 주중에 평균 3.4회 고장 발생  
 $\xrightarrow{\text{특정 기간}}$   $\xrightarrow{\text{사건 발생 번도수의 평균값}}$

질문: 다음 주중에 한 번도 고장이  
발생하지 않을 확률은?

해답: 이런 경우 포아송 분포를 활용한다.

펑크기계의 경우 아래처럼 표기한다.

$$X \sim P_0(3.4)$$

## 일반화

어떤 주어진 구간에 사건이 발생하는 수를

$X$ 라 할 때, 만약  $X$ 가 구간마다  $\lambda$ 번

발생하는 평균값을 갖는다면,

→ 같다라 하겠다

$X$ 를 푸아송 분포를 따른다고 말하고

아래와 같이 표기한다.

그리스어 알파벳  
(영어의 L에 해당)

$$X \sim P_0(\lambda)$$

$X$  가 푸아송 분포를 따를 때  $P(X=r)$ 은

아래와 같다.

$$P(X=r) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^r}{r!}$$

( $e \approx 2.71$ , 오일러 상수)

특정 구간에 주어진  
자신의  $r$ 번 발생할  
几率