

확률과 통계

- 순열과 조합 -

참고서: Head First Statistics

(6장 순열과 조합)

작성자 : 이계식

환경대학교, 컴퓨터공학과



6장 순열과 조합

• 다음 내용

① 배열 - 팩토리얼(!) 개념 이해

② 순열과 조합 개념 이해

- 순열 = nPr , nP_r

- 조합: nCr , nC_r

정의: P = permutation
C = Combination

=====

1 배열

예제 (P. 284)

A, B, C 세 마리의 말의 경주

X	-500	3,500
$P(X=x)$	$\frac{5}{6}$	1/6

$\Rightarrow E(X) = -500 \cdot \frac{5}{6} + 3,500 \cdot \frac{1}{6}$
 $= 168$

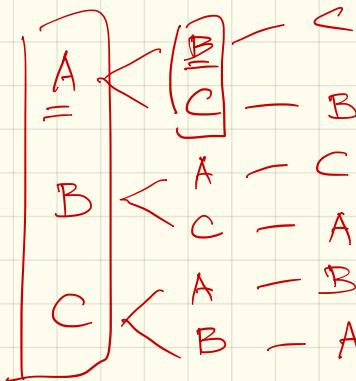
이유?

이유: A, B, C 세 마리를 순서있게 나열하는 경우 3이 6 가지이기 때문.

설명: 6 가지인 이유

1등 2등 3등

$$\begin{array}{r} 3 * 2 * 1 \\ \hline = 3! \end{array} \quad (= 6 \text{ (factorial, 팩토리얼)})$$



⇒ 일반화: n 개의 대상을 순서대로 나열 시킬 수 있는 경우의 수

$$= n! \quad (= n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1)$$

배열 이란?

어떤 사물들을 순서를 따지면서
나열한 것

배열의 용도 ① : 원형배열

- 응답 연산 등에 사용

예) 387쪽

A, B, C, D 네 자리의 딸을

원형으로 나열하는 방법의

경우의 수는?

A, B, C, D 와
B, C, D, A 와
다르다.

하지만

D A B C 와 A B C D 는
동일한 원형 배열이다.

이와 같이, 예를 들어

A, B, C, D
B, C, D, A
C, D, A, B
D, A, B, C

네 개의 배열이 원형배열로
다를 경우 동일하게 취급된다.

\Rightarrow 이런 방식으로 생각하면, 4! 개의 서로 다른
배열을 4개씩 그룹으로 엮을 수 있다.

따라서 총 $\frac{4!}{4}$ 개의 그룹이 생성되며,

이것이 원형배열의 경우의 수이다.

4자를 대상으로 하는

질문화 : n 개의 자리를 순서있게 원형배열로

작성시키는 경우의 수

$$= \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

배열의 공용 ② : 중복 배열

예) 1-2-3

6 자리의 말이 달리기 어렵.

- 3자리 : 알록말 , (A_1, A_2, A_3)

- 3자리 : (알록) 말 (B_1, B_2, B_3)

6 자리를 순서대로 나열하는 경우의 수

$$= 6!$$

그런데 : 알록 정렬을 구분하지 않을 때의 경우의 수는?

예를 들어,

$\{A_1 \text{ } B_2 \text{ } A_3 \text{ } B_1 \text{ } B_3 \text{ } A_2\}$ } 는 다른 배열이다.
 와
 $\{A_2 \text{ } B_1 \text{ } A_1 \text{ } B_3 \text{ } B_2 \text{ } A_3\}$ }

하지만, 알록말끼리의 순서도 무시하고,

일반 말의 순서도 무시한다면,

두 배열 모두 동일한 모양을 갖는다.

즉, 모두 아래 모양을 갖는다.



결론: 동일한 종류의 순서를 고려하면 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!3!}$$
 이다.

이유: $3!$ 은 일렬을 세 마리를 대상으로 한

해열의 숫자

$3!$ 은 일반 말 세 마리를 대상으로 한

해열의 숫자

일반화①: n 개의 사물을 순서 있게 나열하기

조건: 동일한 종류의 사물이 k 개 있다.

그리고, k 개의 순서는 고시한다.

$$\Rightarrow \frac{n!}{k!}$$

일반화②: n 개의 사물을 초기 있게 나열하기

조건: 동일한 종류의 사물이 j 개와 k 개가 있다.

그리고 등장의 j 개와 k 개

각각의 순서는 고시한다.

$$\Rightarrow \frac{n!}{j!k!}$$

배열 활용 예제 (P.290)

한글서체정리 전한서체 흙글자 한글서체

- ⑤ 조건 : • 1, 2, ..., 7의 숫자를 이루어 짐
 • 7자리
 • 중복 없음.

$$\frac{\text{共通}}{\text{個数}} = \frac{1}{71} = \frac{1}{5040} = 0.0002$$

- ② 추가 조건: 첫째 세자리는 1, 2, 3으로
이루어진다.

증 경우의 수 : $3! \times 4!$

\downarrow 1, 2, 3의 배열 \hookrightarrow 4, 5, 6, 7의 배열

$$\Rightarrow \text{맞출 확률} = \frac{1}{3! \cdot 4!} = \frac{1}{144}$$

순열

예제 (9. 29일)

20명의 3명이 경주할 경우에 1, 2, 3등 몇가지

=====
1, 2, 3등을 선택하는 경우의 수

방법 ①

$$20 * 19 * 18$$

↑ ↑ ↑
 1등 경우의 수 2등 경우의 수 3등 경우의 수

방법 ②

$$\frac{20!}{(20-3)!}$$

↓
 3명을 제외한 나머지의
 등수는 고려 없음!
 (중복 배제 개연 없음!)

일반화 =

n 개의 사물을 순서있게 나열할 때

처음 r 개의 순서를 정하는 경우 수

$${}^n P_r := \frac{n!}{(n-r)!}$$

r 개를 제외한
 나머지의 순서는
 관심 없음.

조합

예제 (P. 300)

20마리의 말이 경주할 경우에 3등 번호를 세마리만 뽑기

세마리 말을 선택하는 경우의 수, 단 순서는 무시

방법 ①

$$(20 * 19 * 18) / (3!) \quad \begin{array}{l} \text{선택된 세마리의} \\ \text{순서를 무시해야 함} \end{array}$$

↓ ↓ ↓
 1등 경우의 수 2등 경우의 수 3등 경우의 수

방법 ②

$$\frac{20!}{(20-3)! \cdot 3!} \quad \begin{array}{l} \text{선택된 세 마리의 배열의 개수} \\ \text{3마리 제외한 나머지의} \\ \text{동수는 고려X!} \\ (\text{중복 배제 개연 확률!}) \end{array}$$

일반화

n 개의 사물을 순서있게 나열할 때
처음에 위치할 r 마리를 선택하는 방법의 경우의 수

$${}^n C_r := \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

↓
 r 개를 제외한
나머지의 순서는
관심 없음.

{선택된 r 마리의
순서 무시!}

수열과 조합 연습 (P. 304)

12명으로 구성된 농구팀에서 시합에 뛸
5명의 선수를 선발해야 할.

① 시합을 뛸 선수들을 선택하는 방법의
경우의 수는?

⇒ 12명에서 5명을 선발해야 함.

- 순서 없음.

$$\text{따라서 경우의 수는 } {}^{12}C_5 = \frac{12!}{7! 5!}$$

$$= 792$$

② 3명의 선수가 전문수업으로 구분되었을 때

이 세명의 선수가 동시에 시합에서

뛸 확률은?

⇒ 3명이 함께 뛸 경우의 수

= 나머지 9명에서 2명을 선발하는

경우들의 수

$$= {}^9C_2 = \frac{9!}{2! 7!} = 36$$

따라서, 3명의 수업자 동시에 뛸 확률은

$$\frac{36}{792} = \frac{1}{22}.$$