- 가 설 검 정 -

1. 가설검정 : 어떤 통계학적인 주장이 어느 정도 사실인지 여부를 판단하기 위해 표본을 이용하는 방법임.

즉, 제시된 증거의 유용성을 판단하는 방법임.

p. 562

예제 : 새로운 코큰이 치료제 개발됨.
2주안에 코큰이를 가진 사람들의 90%를 치료한다고 주장

p. 563 - 564

테스트 : 15명의 코큰이 환자를 대상으로 새로운 코큰이 치료제 처방 후 2주 뒤에 결과 확인.

결과 :

완치 여부	그렇다	아니다
도 수	11	4

질문 : ① 코큰이 약이 정말로 90%의 효과를 낸다고 가정한다면, 15명으로 구성된 표본에서 몇 사람이 치료될 것으로 기대되는가? 또한 이것은 어떤 분포를 따르는가?
② 90% 효과가 있다는 주장을 받아들여야 하는가? 근거는?

정답

① (i) 15명의 90%는 13.5명 임. 따라서 14명이 치료될 것으로 기대할 수 있음.

(ii) X가 치료된 환자의 수를 나타낼 때 $X \sim B(15, 0.9)$의 이항 분포를 따른다.

② 실제로는 15명 중에 11명에게 효과가 있었다.
14명에 비해 많이 적어보인다. 하지만 우연의 결과일수도 있다.
하지만 90%의 효과가 있는지 여부는 가설검정을 통해 판단할 수 있다. (오늘의 주제임)

p.567

2. 가설검정 6단계

I. 검정할 가설인 영가설(H_0)과 대립가설(H_1) 설정

II. 검정에 사용할 통계 선택

III. 기각역 설정

IV. 검정통계를 위한 P-값 확인

V. P-값이 기각역 안에 포함되는지 여부 확인

VI. 가설 수용 여부 판단.

3. 가설검정 단계 I

1) 영가설과 대립가설

p.568

검정할 가설을 설정해야 한다. 이와 같이, 검정 대상으로 사용되는 주장을 영가설(Null Hypothesis)라 부르며 보통 H_0로 표기한다.

책에 따라 "귀무가설"이라 부르기도 한다.

반면에 "영가설에 반하는 내용"을 담은 가설은 대립가설이라 부른다.

예제: "코골이 약"의 경우

영가설(H_0) : $p = 0.9$

치료율

대립가설(H_1) : $p < 0.9$

주의: 대립가설로 "$p \neq 0.9$"를 사용하지 않는다.

2) 대립가설 설정

p.569 ① 앞서 설명한 대로 대립가설은 "영가설 반하는 내용"을 담아야 한다. 즉, 영가설 (H_0)을 기각하는 경우에 사실로 인정해야 하는 가설이 대립가설이어야 한다.

② "코로이 약" 예제를 다시 살펴보자.

영가설 (H_0)이 "$P = 0.9$" 이다. 그런데 단순히 수식으로만 생각해서 "$P \neq 0.9$"를 대립가설로 설정하면 문제가 발생한다. 이유는 "$P \neq 0.9$"에 "$P > 0.9$" 내용이 포함되어 있기 때문이다. 다시 말해서, 제약회사의 주장인 "치료율 90%"를 기각하면서 치료율이 "90% 이상"이라는 내용을 받아들일 수는 없기 때문이다. 따라서 이경우에는 "$P < 0.9$"를 대립가설로 설정해야 한다.

(책에 없음) ③ 다른 예제를 살펴보자.

(예) 어떤 자동차회사에서 생산하는 부품의 "대리점 판매가의 평균이 15만원"이라는 주장을 검정하고자 한다. 위 주장을 검정하기 위해서 여러 대리점을 돌면서 해당 제품의 가격을 확인해 보고자 한다.

이 때 사용하는 영가설과 대립가설은 다음과 같다.

$$H_0 : \mu = 15$$
$$H_1 : \mu > 15 \quad \text{(단위 만원)}$$

H_1 설정 이유 : "$\mu = 15$"를 기각할 경우 "$\mu < 15$"를 포함하는 것은 설정상 바람직 하지 않다. 이유는 주장보다 저렴한 가격에 부품을 구입할 수 있다면 어느 누구도 문제 삼지 않을 것이기 때문이다.

(ii) 어떤 자동차회사에서 "새로 출시한 차종의 연비가 15 Km/ℓ 이다"라는 주장을 검정하고자 한다.

위 주장을 검정하기 위해서 동일 차종 여러대를 대상으로 연비를 확인해 보고자 한다.

이 때 사용하는 영가설과 대립가설은 다음과 같다.

$H_0 : \mu = 15$

$H_1 : \mu < 15$ (단위 km/ℓ)

H₁ 설정 이유 : "$\mu=15$"를 기각할 경우 "$\mu>15$"를 포함하는 것은 설정상 바람직 하지 않다. 이유는 주장보다 높은 연비가 나올 경우 어느 누구도 문제 삼지 않을 것이기 때문이다.

(iii) 어떤 자동차회사의 "주식 배당율이 15 % 이다"라는 주장을 검정하고자 한다.

위 주장을 검정하기 위해 배당을 받은 여러 주주들을 대상으로 배당율을 확인해 보고자 한다.

이 때 사용하는 영가설과 대립가설은 다음과 같다.

$H_0 : \mu = 15$

$H_1 : \mu \neq 15$ (단위 %)

H_1 설정 이유 : "$\mu=15$"를 기각할 경우 "$\mu>15$"와 "$\mu<15$"가 모두 포함되어야 한다. 이유는 "$\mu>15$"일 경우 회사에 손해가 보다 크고, "$\mu<15$"일 경우 주주들에게 보다 많은 손해가 발생하기 때문이다.

④ 대립가설 설정의 중요성 :

대립가설은 "가설검정의 단계 3" 에서 설명할 "기각역 설정"과 밀접하게 연관되어 있다. 즉, 대립가설을 어떻게 설정하는가에 따라 기각역의 크기와 위치가 달라진다.

아래에서 설명할 "단계 3" 에서 앞서 언급한 자동차회사의 3 개의 예제를 다시 활용하여 각기 다른 기각역 설정 방법을 설명할 것이다.

4. 가설검정 단계 II

p. 571

① 설정된 가설을 검정하는 데 사용할 통계인 검정통계를 선택한다. 즉, 검정과정 자체와 관련이 깊은 통계를 설정해야 한다.

② 코로이 예제의 경우

15명으로 구성된 표본에서 치료된 사람의 수에 대한 통계를 선택해야 한다.

X 가 15명 중에서 치료된 이의 수를 나타낸다면 영가설 ($H_0 : p = 0.9$) 에 의해 X는 아래 모양의 이항분포를 따른다:

$$X \sim B(15, 0.9)$$

③ 주의사항

(i) 영가설 (H_0)이 옳다는 가정하에 검정통계 선정.

(ii) 영가설이 틀리다는 강력한 증거가 나오기 전까지 영가설을 받아들여야 함.

(iii) 그런 다음에 표본의 결과가 발생할 확률을 계산하여 기각역에 포함되는지 여부를 확인한다.

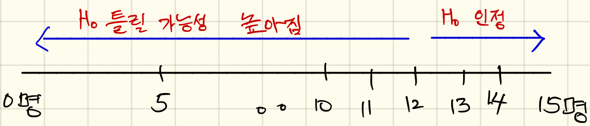
5. 가설검정 단계 Ⅲ

P. 572

① 기각역 : 영가설에 극단적으로 반하는 증거에 해당하는 값들의 집합

② 코골이 치료약의 경우 "치료율이 90%이다" 라는 영가설이 참이라면 15명 중 13~14명이 치료되어야 한다. 하지만 11명만 치료되었는데 이것이 우연의 결과일 수도 있고 아닐 수도 있다.

반면에 15명 중에 5명 정도만 치료되었다면 제약회사의 주장을 아마 절대로 받아들이지 않을 것이다.



그렇다면 15명 몇 명 이하로 치료되면 영가설(H_0)을 기각할지를 정할 필요가 있다. 이와 같이 영가설에 강력히 반하는 값들의 집합을 기각역이라 한다. 코골이 예제의 경우 15명 중 몇 명 이하로 치료되면 영가설을 기각할 것인가에 판단 기준이 되는 "몇 명 이하"에 해당하는 구간이 기각역이 된다.

③ 유의수준

P.573~574

(i) 기각역을 정하기 위해서는 대립가설과 함께 유의수준을 고려한다.

(ii) 유의수준 : 영가설을 기각해야 한다는 결정을 내릴 때 그 결정이 틀릴 확률. 보통 1% 또는 5%를 사용하며, 여기서는 5%를 사용하여 설명한다.
X가 코골이 약으로 치료된 수라 할 때 기각역은 아래 식을 만족하는 c 값들의 집합이다.

$$P(X < c) < 0.05$$

iii) 대립가설의 역할

p.574

앞서 단계 I 에서 설명한 대로 동일한 영가설에 대해 상황에 따라 다른 대립가설을 설정해야 한다. 그리고 어떤 대립가설을 사용하는가에 따라 기각역의 위치와 범위가 달라진다.

코코아 예제의 경우 : $H_1 : p < 0.9$

앞서 설명한 대로 기각역은 몇 명 이하일 때 영가설을 기각할지를 정하는 기준이 되어야 한다. 따라서 기각역이 앞서 설명한 대로 아래 식을 만족하는 c 값들의 집합이 된다:

$$P(X < c) < 0.05$$

이와 같이 어떤 값보다 (그보다) 적게 나올 확률이 5 % 미만인 값들로 이루어진 기각역을 사용하는 방식을 하단측검정 이라 부른다.

반면에 자동차 부품 대리점 판매가의 경우에는 어떤 값보다 (그보다) 많이 나올 확률이 5 % 미만인 값들로 이루어진 기각역을 사용해야 하며, 이런 방식을 상단측검정이라 한다. 따라서 상단측검정의 기각역은 아래 식을 만족하는 c 값들의 집합이 된다:

$$P(X > c) < 0.05$$

유의수준을 1%로 정할 경우,
단측검정에서는
- 한쪽 끝에서 1%를
양측검정에서는
- 양쪽 끝에서 각기 0.5%를
기준으로 기각역을 설정한다.

또한 자동차회사 주식배당률의 경우에는 어떤 값과 다를 확률을 다루어야 한다. 이런 때는 주어진 값보다 (그보다) 크거나, 아니면 (그보다) 작을 확률이 각기 2.5 % 미만인 값들로 이루어진 기각역을 사용해야 하며, 이런 방식을 양측검정이라 한다. 따라서 양측 검정의 기각역은 아래 식을 만족하는 c 값들의 집합이 된다:

$$P(X < c) < 0.025 \text{ 또는 } P(X > c) < 0.025$$

p.575

6. 가설검정 단계 IV

① P-값 : 앞서 단계 II에서 설정한 검정통계를 이용하여 계산된 특정 사건이 발생할 확률

② 코큰이 약의 경우 : 15명 중에서 11명이 완치될 확률이 P-값이 된다. 즉,

$X \sim B(15,\ 0.9)$ 일 때 $P(X \leq 11)$ 이 P-값이다.

P-값 : $P(X \geq 11) = 1 - P(X \geq 12)$

$$= 1 - \left(P(X=12) + P(X=13) + P(X=14) + P(X=15) \right)$$

$$= 1 - \left({}_{15}C_{12} * (0.9)^{12} * (0.1)^{3} + {}_{15}C_{13} * (0.9)^{13} \cdot (0.1)^{2} + {}_{15}C_{14} * (0.9)^{14} * (0.1) + {}_{15}C_{15} * (0.9)^{15} \right)$$

$$= 0.0555$$

p.577

7. 가설검정 단계 V

① 단계 IV에서 구한 P-값이 기각역 안에 포함되는지를 확인한다.

② 코큰이 약의 경우, P-값이 0.0555 이며 0.05 보다 큰 값이므로 치료된 사람의 수인 11은 기각역에 포함되지 않는다.

8. 가설검정 단계 VI

p.577

① 단계 V의 결과에 따라 영가설에 대한 기각여부를 판단한다.

(i) 기각역에 포함된 ⟹ 영가설 기각

(ii) 기각역에 포함되지 않음 ⟹ 영가설 받아 들임.

② 코큰이 약의 경우 : 치료율이 90% 라는 영가설을 받아 들임.

9. 가설검정 예제

p.580 또 하나의 가설검정을 하고자 한다.

예제: 코로나 약을 대상으로 이번에는 표본의 크기를 100으로 정함. 결과는 아래와 같음.

치료여부	예	아니오
도수	80	20

이제 가설검정 6단계 과정을 통하여 치료율이 90%라는 제약회사의 주장을 검정하고자 한다.

1) 단계 I : 영가설과 대립가설 설정

영가설 (H_0) : $p = 0.9$ (p = 치료율)

대립가설 (H_1) : $p < 0.9$

2) 단계 II : 검정통계 설정

영가설이 참이라고 가정할 때, 코로나 환자에게 코로나 약이 효과가 있는지 여부는 이항분포를 따른다. 이는 마치 동전을 던졌을 때 앞면이 나올 확률을 따지는 것과 동일하다.

100명을 대상으로 할 때, 치료되는 사람의 수를 X라 하면, X는 아래 모양의 이항분포를 따른다:

$$X \sim B(100, 0.9)$$

그런데 이 경우 X는 정규분포를 근사적으로 따른다.
이유는 $100 * 0.9 = 90 > 5$ 이고 $100 * 0.1 = 10 > 5$ 이기 때문이다.
즉,

$$X \sim N(90, 3^2)$$ 이 성립한다.

3) 단계 Ⅲ : 기각역 설정.

① 유의 수준을 5%로 정함.

② 기각역은 아래 공식을 만족하는 C 값들의 집합임 :

$$P(X < C) < 0.05$$

4) 단계 Ⅳ : P-값 확인

검정통계는 아래 모양의 정규분포이다.

$$X \sim N(90, 3^2).$$

그리고 표본 조사의 경우 100 명에 80 명이 치료되었다.

따라서 80 명 이하로 치료될 확률이 P-값이 된다.

즉,

$$P(X \le 80) \overset{\text{표준화}}{=} P\left(Z \le \frac{80-90}{3}\right)$$

$$= P(Z \le -3.333)$$

$$= 0.0004$$

5) 단계 Ⅴ : 기각역 포함 여부

앞서 구한 P-값은 0.0004 이며 0.05 보다 작다.

따라서 80명이란 숫자는 기각역에 포함된다.

6) 단계 Ⅵ : 최종 결정

100 명 중에 치료된 사람의 수인 80이 기각역에 포함 된다. 따라서 치료율이 90%라는 영가설은 기각 한다.