확률과 통계

6장 순열과 조합

2017년 2학기

6장 순열과 조합

- 다룰 내용
  ① 배열 - 팩토리얼(!) 개념 이해
  ② 순열과 조합 개념 이해
    - 순열 : $_nP_r$, ^nP_r
    - 조합 : $_nC_r$, ^nC_r

상식 : P = permutation
C = Combination

배열

예제 (P.284)

A, B, C 세 마리의 말의 경주

x	-500	$3,500$
$P(X=x)$	$5/6$	$1/6$

$\Rightarrow E(X) = -500 \cdot \frac{5}{6} + 3{,}500 \cdot \frac{1}{6}$
$= 168$

이유?

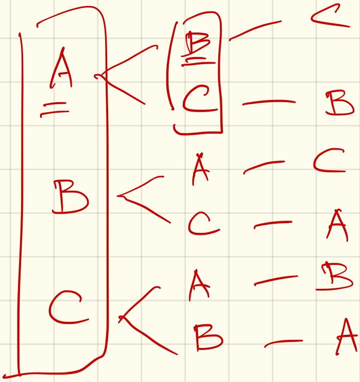
이유 : A, B, C 세 마리를 순서있게 나열하는 방법이 6가지이기 때문.

설명 : 6가지인 이유

1등 2등 3등

$$\underbrace{3 * 2 * 1}_{= 3!} = 6$$

$= 3!$ (factorial, 팩토리얼)



⇒ 일반화: n개의 대상을 순서대로 나열시킬 수 있는 경우의 수 $= n!$ $(= n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1)$

배열이란?

어떤 사물들을 순서를 따지면서 나열한 것

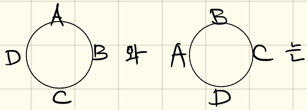
배열의 응용 ① : 원형배열

- 은행 번호표 등에 사용

예) 287쪽

A, B, C, D 네마리의 말을 원형으로 나열하는 방법의 경우의 수는?

A, B, C, D 와 B, C, D, A 는 다르다. 하지만



와 는 동일한 원형배열이다.

이와 같이, 예를 들어

A, B, C, D
B, C, D, A
C, D, A, B
D, A, B, C

네 개의 배열이 원형배열로 다룰 경우 동일하게 취급된다.

⇒ 이런 방식으로 생각하면, 4! 개의 서로 다른 배열은 4개씩 그룹으로 묶을 수 있다.
따라서 총 $\frac{4!}{4}$ 개의 그룹이 생성되며, 이것이 4 마리를 대상으로 하는 원형배열의 경우의 수이다.

일반화 : n 개의 사물을 순서있게 원형배열로 위치시키는 경우의 수

$$= \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

배열의 응용 ② : 중복 배열

예) p.293

6 마리의 말이 달리기 시합.

- 3마리 : 얼룩말, (A1, A2, A3)
- 3마리 : (일반) 말 (B1, B2, B3)

6 마리를 순서대로 나열하는 경우의 수

= 6!

그런데 : 말의 종류를 구분하지 않은때의 경우의 수는?

예를 들어,

A1 B2 A3 B1 B3 A2
와
A2 B1 A1 B3 B2 A3

는 다른 배열이다.

하지만, 얼룩말 끼리의 순서도 무시하고,
일반 말의 순서도 무시한다면,
두 배열 모두 동일한 모양을 갖는다.
즉, 모두 아래 모양을 갖는다.

결론 : 동일한 종류의 순서를 무시하면 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!3!}$$ 이다.

이유 : 3! 은 얼룩말 세 마리를 대상으로 한
배열의 숫자
3! 은 일반 말 세 마리를 대상으로 한
배열의 숫자

일반화 ① : n개의 사물을 순서 있게 나열하기
조건 : 동일한 종류의 사물이 k개 있다.
그리고, k개의 순서는 무시한다.

$$\Rightarrow \frac{n!}{k!}$$

일반화 ② : n개의 사물을 순서 있게 나열하기
조건 : 동일한 종류의 사물이 j개와 k개가
있다.
그리고 동종의 j개와 k개
각각의 순서는 무시한다.

$$\Rightarrow \frac{n!}{j!k!}$$

배열 활용 예제 (p.290)

헬스클럽의 전화번호 맞출 확률.

① 조건 : • 1, 2, --, 7 의 숫자로 이루어 진

• 7자리

• 중복 없음.

맞출 확률 = $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} = 0.0002$

② 추가 조건 : 첫째 세자리는 1, 2, 3으로 이루어진.

총 경우의 수 : $\underbrace{3!}_{1,2,3의 배열} * \underbrace{4!}_{4,5,6,7의 배열}$

⇒ 맞출 확률 = $\frac{1}{3! \cdot 4!} = \frac{1}{144}$

순열

예제 (p.298)

20마리의 말이 경주할 경우에 1, 2, 3 등 맞추기

1, 2, 3 등을 선택하는 경우의 수

방법 ①

$20 * 19 * 18$

1등 경우의 수

2등 경우의 수

3등 경우의 수

방법 ②

$$\frac{20!}{(20-3)!}$$

3마리 제외한 나머지의 등수는 관심 없음!
(중복배열 개념 활용!)

일반화:

n 개의 사물을 순서 있게 나열할 때
처음 r 개의 순서를 정하는 경우 수

$$ {}^{n}P_{r} := \frac{n!}{(n-r)!}$$

r 개를 제외한 나머지의 순서는 관심 없음.

조합

예제 (p.300)

20마리의 말이 경주할 경우에 3등 안에 들 세마리 말 맞추기

세 마리 말을 선택하는 경우의 수, 단 3마리의 순서는 무시

방법 ①

$$(20 * 19 * 18)/3!$$

선택된 세마리의 순서를 무시해야 함

3등 경우의 수

2등 경우의 수

1등 경우의 수

방법 ②

$$\frac{20!}{(20-3)! \cdot 3!}$$

선택된 세 마리의 배열의 개수

3마리 제외한 나머지의 등수는 관심 없음! (중복배열 개념 활용!)

일반화:

n 개의 사물을 순서 있게 나열할 때 처음에 위치할 r 마리를 선택하는 방법의 경우의 수

$$_nC_r := \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

r 개를 제외한 나머지의 순서는 관심 없음.

선택된 r 마리의 순서 무시!

순열과 조합 연습 (P. 304)

12명으로 구성된 농구팀에서 시합에 뛸
5명의 선수를 선발해야 함.

① 시합을 뛸 선수들을 선택하는 방법의
경우의 수는?

⇒ - 12 명에서 5명을 선발해야함.
- 순서 없음.

따라서 경우의 수는 $_{12}C_5 = \frac{12!}{7!\,5!}$
$= 792$

② 3명의 선수가 전문슈터로 구분되었음.
이 세명의 선수가 동시에 시합에서
뛸 확률은?

⇒ 3명이 함께 뛸 경우의 수
= 나머지 9명에서 2명을 선발하는
경우들의 수
$= {}_9C_2 = \frac{9!}{2!\,7!} = 36$

따라서, 3명의 슈터가 동시에 뛸 확률은
$\frac{36}{792} = \frac{1}{22}$.