斐波那契数列的性质及应用

李根

2020 年 4 月 9 日

目录

1 引言

1.1 背景

根据高德纳（Donald Ervin Knuth, 1938年1月10日-）的《计算机程序设计艺术》（The Art of Computer Programming），1150年印度数学家Gopala和金月在研究箱子包装对象长宽刚好为1和2的可行方法数目时，首先描述这个数列。在西方，最先研究这个数列的人是比萨的列奥那多 · 斐波那契（意大利人，Leonardo Fibonacci, 1175-1250），他描述兔子生长的数目时用上了这数列[1]：1，1，2，3，5，8，$\cdots$，这个数列前两项都是1，从第三项开始，每一项都等于前两项之和。这个数列就称为斐波那契数列。

1.2 研究意义

1.2.1 高中数学

在高中数学课本必修五[1]的第32至33页中，介绍了斐波那契数列的由来与后续的发展。在高中阶段的学习中，对数列的掌握是一门必修的课程，而对斐波那契数列的研究有助于加深对数列的理解与掌握，同时能够增长见识，活跃思维。

1.2.2 研究领域

目前关于斐波那契数列的研究颇多，主要研究斐波那契数列的性质以及在各个领域的应用。到目前为止，斐波那契在数学、物理、化学、生物学、金融和计算机科学等领域都有了广泛的应用。

1.3 本文主要内容

本文以在数学领域中对斐波那契数列的研究为主，文中的各项证明尽量在高中阶段所要求的数学的知识范围以内，拓展性地介绍斐波那契数列的性质及其应用。其次，本文将会介绍在计算机科学领域中对斐波那契数列的研究，主要是对其性质的应用及检验。

[1]普通高中课程标准实验教科书 *数学5 必修 (A版)*. 人民教育出版社 课程教材研究所 中学数学课程教材研究开发中心 编著, 2007 年 1 月第 3 版.

1.4 本文主要涉及的符号及约定

表 1: 符号及约定

符号	含义及约定
[1]	引用文献，可在末尾参考文献处查阅详细信息
2	脚注，可在页面下方查看注释
$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{N}^+$	正自然数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\in$	属于
$F(n)$	斐波那契数列第n项，如未特别说明，本文中$n \in \mathbb{N}^+$
$\square$	一般放在行末，表示证毕（证明完毕、得证）
$\{A\}$	一个数列或集合
$\{A\|B\}$	一个由所有满足B条件的A组成的集合
$\cdots$	被省略的列举项
$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$	求和符号，即$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$
$m\|n$	n是m的倍数
$c = a \mod b$	c表示a除以b后的余数，如$3 = 8 \mod 5$
$a \equiv b \pmod p$	同余，表示a和b对p取余的余数相等，即$a \mod p = b \mod p$
$\binom{n}{m}$	组合数，表示在n个不同元素中取出m个的总方案数
$n!$	阶乘，即$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$
$\lceil n \rceil$	对n上取整，即表示大于等于n的最小整数
$\lfloor n \rfloor$	对n下取整，即表示小于等于n的最大整数
$+\infty$	正无穷
$\lim\limits_{n \to +\infty}$	当n趋于正无穷时的极限
$\|n\|$	对n取绝对值
(x, y), $[x, y]$, $\{x, y\}$	数据，数对
$\overline{x}$	数据$\{x\}$的平均值
e	自然常数，约为$2.718281828459\cdots$
$\ln x$	对x取以e为底数的对数
所有蓝色字体	所有蓝色字体都为超链接，单击可跳转到相应引用位置

文中部分图片或表格的规模较大，可能会出现图片或表格不在当前页或页末出现大片空白，属正常现象，可以通过单击蓝色字体以跳转到相应部分。

全文采用LaTeX编写。

2 斐波那契数列的定义

2.1 课本中的例子

我们利用高中数学课本必修五中的例子来更好地理解斐波那契数列的定义。

在理想状态下，兔子不会死亡，资源充足。每 1 对初生兔子（一雄一雌）在 1 个月后会成长为成熟兔子，并且在成长为成熟兔子之后的每一个月都能够生出 1 对兔子。即每对初生兔子在出生后第 3 个及以后的每个月中都能生出 1 对兔子。在第 1 个月时，草原上有 1 对初生兔子，以此为条件，研究草原上在第 n 个月时的兔子总数。

在第 1 个月时，只有 1 对初生兔子，过了 1 个月，那对兔子成熟了，在第 3 个月时便生下 1 对兔子，这时草原上一共有 2 对兔子。再过 1 个月（第 4 个月），成熟的兔子再生 1 对兔子，而另 1 对初生兔子长大，这时草原上一共有 3 对兔子。如此推算下去，我们可以得到表2 ：[2]

表 2: 草原上兔子的数量

时间（月）	初生兔子（对）	成熟兔子（对）	兔子总数（对）
1	1	0	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8
7	5	8	13
8	8	13	21
9	13	21	34
10	21	34	55

由此可知，从第 1 个月开始，以后每个月的兔子总对数是

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \cdots.$$

2.2 定义

上述例子中每月兔子的总对数即为斐波那契数列。我们可以由兔子增长的关系得知，这个数列的前两项均为 1 ，从第 3 项开始，每一项都等于前两项之和。

计斐波那契数列第 n 项为 $F(n)$ ，且 $n \in \mathbb{N}^+$ 。由递推关系，

$$F(n) = \begin{cases} 1, & n \le 2 \\ F(n-2) + F(n-1), & n \ge 3. \end{cases} \tag{1}$$

3 斐波那契数列的通项公式

引理 3.1 对于任意一个数列 $\{y_n\}$ ，当 $n \in \mathbb{N}$ ，常数 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ 时满足

$$y_n = \begin{cases} c, & n = 0 \\ a \cdot y_{n-1} + b^{n-1}, & n \in \mathbb{N}^+, \end{cases} \tag{2}$$

则有

$$y_n = \begin{cases} a^n\left(\dfrac{1}{a-b}+c\right)-\dfrac{b^n}{a-b},\ n\in\mathbb{N}, & b\neq 0 \\ a^n\cdot c,\ n\in\mathbb{N}, & b=0. \end{cases} \tag{3}$$

证明　我们采用待定系数法来证明。

设常数$d\in\mathbb{R}$, $d\neq 0$，当$n\geq 1$时，设

$$y_n + d\cdot b^n = a(y_{n-1}+d\cdot b^{n-1}), \tag{4}$$

则

$$y_n = a\cdot y_{n-1} + d(a-b)\cdot b^{n-1}. \tag{5}$$

联立(2)式和(5)式，得

$$d(a-b)=1, \tag{6}$$

即

$$d=\frac{1}{a-b}. \tag{7}$$

将(7)式带入(4)式得

$$y_n+\frac{b^n}{a-b}=a\left(y_{n-1}+\frac{b^{n-1}}{a-b}\right). \tag{8}$$

设数列$\{z_n\}$满足

$$z_n = y_n+\frac{b^n}{a-b},\ n\in\mathbb{N}, \tag{9}$$

则

$$z_n = a\cdot z_{n-1},\ n\in\mathbb{N}^+, \tag{10}$$

当$n=0$, $b\neq 0$时，

$$z_0 = y_0+\frac{b^0}{a-b} \tag{11}$$

$$= c+\frac{1}{a-b} \tag{12}$$

则数列$\{z_n\}$是以$z_0=c+\dfrac{1}{a-b}$为首项，以$q=a$为公差的等比数列。则有

$$z_n = a^n\cdot z_0 \tag{13}$$

$$= a^n\left(c+\frac{1}{a-b}\right),\ n\in\mathbb{N}. \tag{14}$$

将(9)式代入(14)式，得

$$y_n + \frac{b^n}{a-b} = a^n \left(c + \frac{1}{a-b} \right), \ n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

即

$$y_n = a^n \left(\frac{1}{a-b} + c \right) - \frac{b^n}{a-b}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

特殊的，当$n = 0, \ b = 0$时，

$$z_0 = y_0 = c \tag{17}$$

则数列$\{z_n\}$是以$z_0 = c$为首项，以$q = a$为公差的等比数列。则有

$$\begin{aligned} z_n &= a^n \cdot z_0 \qquad (18) \\ &= a^n \cdot c, \ n \in \mathbb{N}. \qquad (19) \end{aligned}$$

将(9)式代入(19)式，得

$$y_n + 0 = a^n \cdot c, \ n \in \mathbb{N}, \tag{20}$$

即

$$y_n = a^n \cdot c, \ n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

综上，

$$y_n = \begin{cases} a^n \left(\frac{1}{a-b} + c \right) - \frac{b^n}{a-b}, \ n \in \mathbb{N}, & b \neq 0 \\ a^n \cdot c, \ n \in \mathbb{N}, & b = 0. \end{cases} \tag{22}$$

□

求解

接下来求解斐波那契数列第n项$F(n)$的通项公式，我们同样采用待定系数法来求解。

为了方便说明，我们假设[3]$F(0) = 0$，可以发现当$n \in \mathbb{N}$时，

$$F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ F(n-2) + F(n-1), & n \geq 2. \end{cases} \tag{23}$$

设

$$F(n) + \lambda F(n-1) = \varphi[F(n-1) + \lambda F(n-2)], \ n \geq 2, \ \varphi, \lambda \in \mathbb{R}, \ \varphi \neq 0, \ \lambda \neq 0, \tag{24}$$

[3]对于斐波那契数列有没有第0项的问题历来众说纷纭，本文不作探讨。此处的假设仅仅是为了方便说明。

即

$$F(n)=(\varphi-\lambda)F(n-1)+\varphi\lambda F(n-2). \tag{25}$$

将(25)式与(23)式联立，得到方程组

$$\begin{cases}\varphi-\lambda=1\\ \varphi\lambda=1.\end{cases} \tag{26}$$

解方程组，得

$$\begin{cases}\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \lambda=-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases} \tag{27}$$

或

$$\begin{cases}\varphi=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ \lambda=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.\end{cases} \tag{28}$$

我们不妨先用第一组解(27)式来继续求解。将(27)式代入(24)式，得

$$F(n)-\frac{1-\sqrt{5}}{2}F(n-1)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left[F(n-1)-\frac{1-\sqrt{5}}{2}F(n-2)\right],\ n\geq 2. \tag{29}$$

设数列$G(n)$满足

$$G(n)=\begin{cases}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, & n=0,\\ F(n)-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}F(n-1), & n\in\mathbb{N}^{+},\end{cases} \tag{30}$$

则

$$G(n)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}G(n-1),\ n\geq 2. \tag{31}$$

当$n=1$时，

$$G(1)=F(1)-\frac{1-\sqrt{5}}{2}F(0) \tag{32}$$

$$=1, \tag{33}$$

根据(30)式和(33)式可知，当$n=1$时，$G(1)$也满足(31)式，即

$$G(n)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}G(n-1),\ n\geq 1. \tag{34}$$

即数列$\{G(n)\}$满足引理3.1 中的条件，

$$G(n)=\begin{cases}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, & n=0\\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}G(n-1), & n\in\mathbb{N}^{+},\end{cases} \tag{35}$$

则根据引理引理3.1 ，得

$$G(n)=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \tag{36}$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},\ n\in\mathbb{N}. \tag{37}$$

将(30)式代入(37)式，得

$$F(n)-\frac{1-\sqrt{5}}{2}F(n-1)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},\ n\in\mathbb{N}^{+}, \tag{38}$$

即

$$F(n)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}F(n-1)+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},\ n\in\mathbb{N}^{+}, \tag{39}$$

则数列$\{F(n)\}$满足引理引理3.1 中的条件，

$$F(n)=\begin{cases}0, & n=0\\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}F(n-1)+\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}, & n\in\mathbb{N}^{+},\end{cases} \tag{40}$$

则根据引理3.1 ，得

$$F(n)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \tag{41}$$

$$=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1}{-\sqrt{5}}-\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{-\sqrt{5}} \tag{42}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right],\ n\in\mathbb{N}. \tag{43}$$

同理，用方程组(26)式解得的第二组解(28)式求得的斐波那契数列第n项的通项公式也是相同的。

综上，斐波那契数列第n项的通项公式为

$$F(n)=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}},\ n\in\mathbb{N}^{+}. \tag{44}$$

4 斐波那契数列相关定理或恒等式

如无特别说明，以下内容$n \in \mathbb{N}^+$。

定理 4.1

$$F(n) = -F(n+1) + F(n+2). \tag{45}$$

证明　由斐波那契数列定义(1)式，

$$\begin{aligned} & -F(n+1) + F(n+2) && (46)\\ =& -F(n+1) + F(n+1) + F(n) && (47)\\ =& F(n). && (48)\end{aligned}$$

□

定理 4.2 斐波那契数列前n项和

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = F(n+2) - 1. \tag{49}$$

证明　由定理4.1，

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} F(i) && (50)\\ =& F(1) + F(2) + F(3) + \cdots + F(n) && (51)\\ =& -F(2) + F(3) - F(3) + F(4) - F(4) + F(5) - \cdots - F(n-1) + F(n+2) && (52)\\ =& -F(2) + F(n+2) && (53)\\ =& F(n+2) - 1. && (54)\end{aligned}$$

□

定理 4.3 斐波那契数列奇数项求和

$$\sum_{i=1}^{n} F(2i-1) = F(2n). \tag{55}$$

证明　由斐波那契数列定义(1)式和定理4.2，

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} F(2i-1) && (56)\\ =& F(1) + F(3) + F(5) + \cdots + F(2n-1) && (57)\\ =& F(1) + F(1) + F(2) + F(3) + F(4) + \cdots + F(2n-3) + F(2n-2) && (58)\\ =& 1 + \sum_{i=1}^{2n-2} F(i) && (59)\\ =& 1 + F(2n) - 1 && (60)\end{aligned}$$

$$=F(2n). \tag{61}$$

□

定理 4.4 斐波那契数列偶数项求和

$$\sum_{i=1}^{n} F(2i) = F(2n+1) - 1. \tag{62}$$

证明　由斐波那契数列定义(1)式和定理4.2，

$$\sum_{i=1}^{n} F(2i) \tag{63}$$
$$=F(2) + F(4) + F(6) + \cdots + F(2n) \tag{64}$$
$$=F(2) + F(2) + F(3) + F(4) + F(5) + \cdots + F(2n-2) + F(2n-1) \tag{65}$$
$$=F(1) + F(2) + F(3) + F(4) + F(5) + \cdots + F(2n-2) + F(2n-1) \tag{66}$$
$$=\sum_{i=1}^{2n-1} F(i) \tag{67}$$
$$=F(2n+1) - 1. \tag{68}$$

□

定理 4.5 斐波那契数列平方求和

$$\sum_{i=1}^{n} F^2(i) = F(n) \cdot F(n+1). \tag{69}$$

证明　当$n=1$时，$F^2(1)=1$，$F(1)\cdot F(2)=1$，定理4.5 成立。

假设当$n=k(k\geq 1,\ k\in\mathbb{N}^+)$时，定理4.5 成立，即

$$\sum_{i=1}^{k} F^2(i) = F(k) \cdot F(k+1), \tag{70}$$

则当$n=k+1$时，

$$\sum_{i=1}^{k+1} F^2(i) \tag{71}$$
$$=\sum_{i=1}^{k} F^2(i) + F^2(k+1) \tag{72}$$
$$=F(k) \cdot F(k+1) + F^2(k+1) \tag{73}$$
$$=F(k+1) \cdot [F(k) + F(k+1)] \tag{74}$$
$$=F(k+1) \cdot F(k+2). \tag{75}$$

故当$n=k+1$时，定理4.5 成立。

综上，由数学归纳法原理可知，定理4.5 成立。□

定理 4.6

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot F(i) = n \cdot F(n+2) - F(n+3) + 2. \tag{76}$$

证明　当$n=1$时，$1 \times F(1) = 1$，$1 \times F(3) - F(4) + 2 = 2 - 3 + 2 = 1$，定理*4.6* 成立。

假设当$n = k(k \geq 1,\ k \in \mathbb{N}^{+})$时，定理*4.6* 成立，即

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot F(i) = k \cdot F(k+2) - F(k+3) + 2. \tag{77}$$

则当$n = k+1$时，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k+1} i \cdot F(i) && (78)\\
=&\sum_{i=1}^{k} i \cdot F(i) + (k+1) \cdot F(k+1) && (79)\\
=&k \cdot F(k+2) - F(k+3) + 2 + k \cdot F(k+1) + F(k+1) && (80)\\
=&(k+1) \cdot F(k+3) - 2F(k+3) + F(k+3) - F(k+2) + 2 && (81)\\
=&(k+1) \cdot F(k+3) - [F(k+3) + F(k+2)] + 2 && (82)\\
=&(k+1) \cdot F(k+3) - F(k+4) + 2. && (83)
\end{aligned}$$

故当$n = k+1$时，定理*4.6* 成立。

综上，由数学归纳法原理可知，定理*4.6* 成立。 □

定理 4.7

$$F(n-1)F(n+1) - F^2(n) = (-1)^n,\ n \geq 2. \tag{84}$$

证明　当$n=2$时，$F(1) \cdot F(3) - F^2(2) = 1 \times 2 - 1 = 1 = (-1)^2$，定理*4.7* 成立。

假设当$n = k(k \geq 2,\ k \in \mathbb{N}^{+})$时，定理*4.7* 成立，即

$$F(k-1)F(k+1) - F^2(k) = (-1)^k. \tag{85}$$

则当$n = k+1$时，

$$\begin{aligned}
&F(k)F(k+2) - F^2(k+1) && (86)\\
=&F^2(k) + F(k)F(k+1) - F^2(k+1) && (87)\\
=&F^2(k) + F(k)F(k+1) - F(k)F(k+1) - F(k-1)F(k+1) && (88)\\
=&-[F(k-1)F(k+1) - F^2(k)] && (89)\\
=&(-1)^{k+1}. && (90)
\end{aligned}$$

故当$n = k+1$时，定理*4.7* 成立。

综上，由数学归纳法原理可知，定理*4.7* 成立。 □

定理 4.8 [5]

$$F(n+m)=F(n+1)F(m)+F(n)F(m-1),\ \ n,m\geq 2,\ \ n,m\in\mathbb{N}^+. \tag{91}$$

证明

$$\begin{aligned}
F(n+m)=&F(n+m-2)+F(n+m-1) &(92)\\
=&F(1)F(n+m-2)+F(2)F(n+m-1) &(93)\\
=&F(1)F(n+m-2)+F(2)[F(n+m-2)+F(n+m-3)] &(94)\\
=&F(2)F(n+m-3)+F(3)F(n+m-2) &(95)\\
=&F(2)F(n+m-3)+F(3)[F(n+m-3)+F(n+m-4)] &(96)\\
=&F(3)F(n+m-4)+F(4)F(n+m-3) &(97)\\
=&\cdots &(98)\\
=&F(n)F[n+m-(n+1)]+F(n+1)F[n+m-n] &(99)\\
=&F(n)F(m-1)+F(n+1)F(m),\ \ n,m\geq 2,\ \ n,m\in\mathbb{N}^+. &(100)
\end{aligned}$$

□

定理 4.9

$$F^2(n)+F^2(n+1)=F(2n+1). \tag{101}$$

证明　由定理*4.8*，

$$\begin{aligned}
F(2n+1)=&F[n+(n+1)] &(102)\\
=&F^2(n)+F^2(n+1). &(103)
\end{aligned}$$

□

定理 4.10

$$F^2(n+1)-F^2(n)=F(n-1)F(n+2). \tag{104}$$

证明

$$\begin{aligned}
&F^2(n+1)-F^2(n) &(105)\\
=&[F(n+1)+F(n)][F(n+1)-F(n)] &(106)\\
=&F(n-1)F(n+2). &(107)
\end{aligned}$$

□

定理 4.11 斐波那契数列两倍项之商

$$\frac{F(2n)}{F(n)}=F(n-1)+F(n+1). \tag{108}$$

证明 由定理4.8，

$$\frac{F(2n)}{F(n)} = \frac{F(n+n)}{F(n)} \tag{109}$$
$$= \frac{F(n-1)F(n)+F(n)F(n+1)}{F(n)} \tag{110}$$
$$= F(n-1)+F(n+1). \tag{111}$$

□

定理 4.12 [5] 斐波那契数列中，若n为m的倍数，则$F(n)$为$F(m)$的倍数$(n,m\in\mathbb{N}^+)$。即

$$F(m)|F(n),\ m|n,\ n,m\in\mathbb{N}^+. \tag{112}$$

证明 当$n=1\times m$时，$F(m)|F(1\times m)$成立，定理4.12 成立。

假设当$n=km(k\geq 1,\ k\in\mathbb{N}^+)$时，定理4.12 成立，即

$$F(m)|F(km). \tag{113}$$

设

$$F(km)=t\cdot F(m),\ t\in\mathbb{N}^+, \tag{114}$$

则当$n=(k+1)m$时，由定理4.8，

$$F[(k+1)m] = F(m+km) \tag{115}$$
$$= F(m+1)F(km)+F(m)F(km-1) \tag{116}$$
$$= t\cdot F(m+1)F(m)+F(m)F(km-1) \tag{117}$$
$$= F(m)[t\cdot F(m+1)+F(km-1)]. \tag{118}$$

所以$F[(k+1)m]$是$F(m)$的倍数，即

$$F(m)|F[(k+1)m]. \tag{119}$$

故当$n=k+1$时，定理4.12 成立。

综上，由数学归纳法原理可知，定理4.12 成立。 □

定理 4.13 [5] 斐波那契数列任意连续$k(k\geq 3,\ k\in\mathbb{N}^+)$项之和不会出现在数列中，即

$$\sum_{i=x}^{x+k-1} F(i)\notin\{F(n)|n\in\mathbb{N}^+\},\ \forall x,k\in\mathbb{N}^+,\ k\geq 3. \tag{120}$$

证明 令

$$S=\sum_{i=x}^{x+k-1} F(i). \tag{121}$$

首先，由斐波那契数列定义(1)式可知，从第二项开始，斐波那契数列单调递增，即

$$F(n+1) > F(n),\ n \geq 2. \tag{122}$$

其次，由定理4.2 可知，

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=x}^{x+k-1} F(i) && (123)\\ &= \sum_{i=1}^{x+k-1} F(i) - \sum_{i=1}^{x-1} F(i) && (124)\\ &=F(x+k+1) - 1 - F(x+1) + 1 && (125)\\ &=F(x+k+1) - F(x+1), && (126) \end{aligned}$$

即

$$F(x+1) + S = F(x+k+1). \tag{127}$$

则

$$\begin{aligned} F(x+k) = F(x+k-2) + F(x+k-1) <&S < F(x+1) + S = F(x+k+1), && (128)\\ F(x+k) <&S < F(x+k+1). && (129) \end{aligned}$$

即$S = \sum_{i=x}^{x+k-1} F(i)$的大小在两相邻项数大于2的项之间，又因为从第二项开始，斐波那契数列单调递增，故其自然不会出现在数列中。 □

5 斐波那契数列的周期性

5.1 背景知识

5.1.1 同余

在高中数学课本选修4-6[4]的第二讲中介绍了同余的相关知识。

5.1.2 抽屉原理

将多于$n+1$（包含）个物体放到n个抽屉里，则至少有一个抽屉中有至少两件物品。

例如，一年中有12个月，任意的13个或更多不同的人中，至少有两个人在同一个月出生。

5.2 求解

令$G(n)$表示斐波那契数列第n项$F(n)$对$k(k \in \mathbb{N}^+)$取模后的余数的结果，即

$$G(n) = F(n) \mod k,\ n, k \in \mathbb{N}^+. \tag{130}$$

[4]普通高中课程标准实验教科书 数学 选修4-6 初等数论初步（A版）. 人民教育出版社 课程教材研究所 中学数学课程教材研究开发中心 编著, 2007 年 2 月第 2 版.

引理 5.1

$$G(n) \equiv G(n-2) + G(n-1) \pmod{k},\ n \geq 3. \tag{131}$$

证明　设

$$F(n-2) = a \cdot k + G(n-2), \tag{132}$$
$$F(n-1) = b \cdot k + G(n-1), \tag{133}$$
$$F(n) = c \cdot k + G(n),\ a, b, c, n \in \mathbb{N}^+,\ n \geq 3. \tag{134}$$

则

$$G(n) \equiv c \cdot k + G(n) \equiv F(n) \pmod{k}, \tag{135}$$

$$G(n-2) + G(n-1) \equiv a \cdot k + G(n-2) + b \cdot k + G(n-1) \equiv F(n-2) + F(n-1) \pmod{k}. \tag{136}$$

又因为

$$F(n) \equiv F(n-2) + F(n-1) \pmod{k}, \tag{137}$$

则

$$G(n) \equiv G(n-2) + G(n-1) \pmod{k}. \tag{138}$$

□

定理 5.1 [5] 斐波那契数列中，每一项对$k(k \in \mathbb{N}^+)$取模后的余数所形成的的数列必定有循环节。

证明　由(130)式可知，

$$G(n) \in \{0, 1, 2, \cdots, k-1\}. \tag{139}$$

由5.1.2节中的抽屉原理，对于有序数对集合

$$A = \{[G(n), G(n+1)] | n \in \mathbb{N}^+\}, \tag{140}$$

则集合A中的数对至多有k^2种组合，则当$n \leq k^2+1$时，必定存在一组$x, y(x, y \in \mathbb{N}^+,\ x, y \leq k^2+1,\ x < y)$，使得

$$[G(x), G(x+1)] = [G(y), G(y+1)]. \tag{141}$$

由引理5.1，可得

$$\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leq p < y - x,\ [G(x+p), G(x+p+1)] = [G(y+p), G(y+p+1)], \tag{142}$$

即数列$\{G(n)\}$存在循环节。 □

6 斐波那契数列与组合数的关系

6.1 组合数

组合数是高中选修课程中的一项重要内容。组合数是指从$n(n \in \mathbb{N})$个不同元素中取出$m(0 \le m \le n, m \in \mathbb{N})$个元素的总方案数，记为$\binom{n}{m}$。在高中数学课本选修2-3[5]的第23页中给出了组合数公式[4]

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{143}$$

本文中，

$$0! = 1. \tag{144}$$

定理 6.1

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{145}$$

证明

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1 \tag{146}$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1 \tag{147}$$

□

定理 6.2

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}. \tag{148}$$

证明

$$\binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \tag{149}$$

$$= \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} \tag{150}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot (n-m) + (n-1)! \cdot m}{m!(n-m)!} \tag{151}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot (n-m+m)}{m!(n-m)!} \tag{152}$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{153}$$

$$= \binom{n}{m}. \tag{154}$$

[5] 普通高中课程标准实验教科书 数学 选修2-3（A版）. 人民教育出版社 课程教材研究所 中学数学课程教材研究开发中心编著, 2009 年 4 月第 3 版.

□

6.2 杨辉三角

杨辉三角，又称帕斯卡三角（Pascal's Triangle）。在这个三角中的第$i(i \in \mathbb{N})$行中，每行第0和第i个数都为1，第$j(1 \le j < i,\ j \in \mathbb{N})$个数是上一行（即第$i-1$行）第$j-1$和第$j$个数之和。在高中数学课本选修2-3的第1章第3节中介绍到了杨辉三角。如图1 [6]展现了一个杨辉三角。

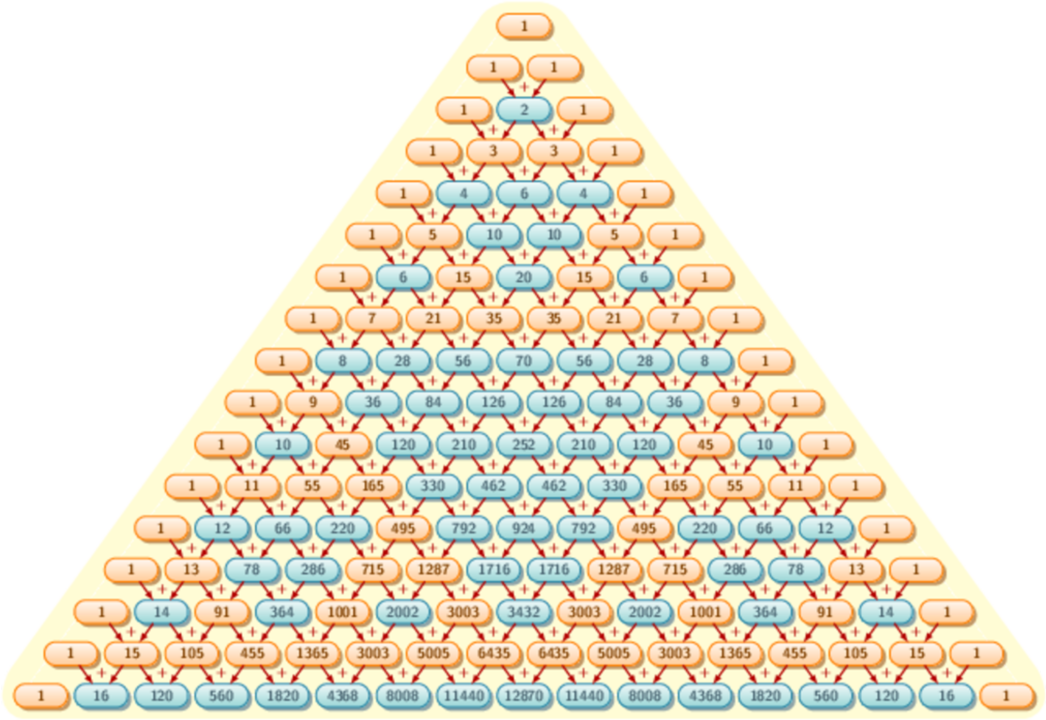


图 1: Pascal's Triangle

杨辉三角的特别之处在于其第n行第m个数恰为$\binom{n}{m}$，这也印证了定理6.1 和定理6.2 。杨辉三角的第n行在二项式定理中表示$(a+b)^n$展开后的系数。

6.3 关系

定理 6.3

$$F(n) = \sum_{i=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \binom{n-i-1}{i},\ n \in \mathbb{N}^+. \tag{155}$$

证明　首先，易得当n为任意奇数时，

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 = \frac{n-1}{2}, \tag{156}$$

当n为任意偶数时，

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 = \frac{n-2}{2}. \tag{157}$$

[6]图源http://www.texample.net/tikz/examples/pascals-triangle-and-sierpinski-triangle/

当$n=1$时，

$$F(1)=\binom{0}{0}=1. \tag{158}$$

定理6.3 成立。

当$n=2$时，

$$F(2)=\binom{1}{0}=1. \tag{159}$$

定理6.3 成立。

假设当$n=k-1$和$n=k-2(k\geq 3,\ k\in\mathbb{N}^{+})$且$k$为奇数时，定理6.3 成立，即

$$F(k-1)=\sum_{i=0}^{\lceil\frac{k-1}{2}\rceil-1}\binom{k-i-2}{i}, \tag{160}$$

$$F(k-2)=\sum_{i=0}^{\lceil\frac{k-2}{2}\rceil-1}\binom{k-i-3}{i}, \tag{161}$$

则当$n=k$时，

$$\begin{aligned}
F(k)=&F(k-2)+F(k-1) && (162)\\
=&\sum_{i=0}^{\frac{(k-2)-1}{2}}\binom{(k-2)-i-1}{i}+\sum_{i=0}^{\frac{(k-1)-2}{2}}\binom{(k-1)-i-1}{i} && (163)\\
=&\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}}\binom{k-i-3}{i}+\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}}\binom{k-i-2}{i} && (164)\\
=&\binom{k-\frac{k-3}{2}-3}{\frac{k-3}{2}}+\sum_{i=1}^{\frac{k-3}{2}}\left(\binom{k-(i-1)-3}{i-1}+\binom{k-i-2}{i}\right)+\binom{k-0-2}{0} && (165)\\
=&\binom{\frac{k-3}{2}}{\frac{k-3}{2}}+\sum_{i=1}^{\frac{k-3}{2}}\left(\binom{k-i-2}{i-1}+\binom{k-i-2}{i}\right)+\binom{k-2}{0} && (166)\\
=&\binom{\frac{k-1}{2}}{\frac{k-1}{2}}+\sum_{i=1}^{\frac{k-3}{2}}\binom{k-i-1}{i}+\binom{k-1}{0} && (167)\\
=&\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k-i-1}{i} && (168)\\
=&\sum_{i=0}^{\lceil\frac{k}{2}\rceil-1}\binom{k-i-1}{i}. && (169)
\end{aligned}$$

故当$n=k$且k为奇数时，定理6.3 成立。

假设当$n=k-1$和$n=k-2(k\geq 3,\ k\in\mathbb{N}^{+})$且$k$为偶数时，定理6.3 成立，即

$$F(k-1)=\sum_{i=0}^{\lceil\frac{k-1}{2}\rceil-1}\binom{k-i-2}{i}, \tag{170}$$

$$F(k-2)=\sum_{i=0}^{\lceil\frac{k-2}{2}\rceil-1}\binom{k-i-3}{i}, \tag{171}$$

则当$n=k$时，

$$\begin{aligned}
F(k)=&F(k-2)+F(k-1) &(172)\\
=&\sum_{i=0}^{\frac{(k-2)-2}{2}}\binom{(k-2)-i-1}{i}+\sum_{i=0}^{\frac{(k-1)-1}{2}}\binom{(k-1)-i-1}{i} &(173)\\
=&\sum_{i=0}^{\frac{k-4}{2}}\binom{k-i-3}{i}+\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}}\binom{k-i-2}{i} &(174)\\
=&\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}}\left[\binom{k-(i-1)-3}{i-1}+\binom{k-i-2}{i}\right]+\binom{k-0-2}{0} &(175)\\
=&\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}}\left[\binom{k-i-2}{i-1}+\binom{k-i-2}{i}\right]+\binom{k-2}{0} &(176)\\
=&\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}}\binom{k-i-1}{i}+\binom{k-1}{0} &(177)\\
=&\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k-i-1}{i} &(178)\\
=&\sum_{i=0}^{\lceil\frac{k}{2}\rceil-1}\binom{k-i-1}{i}. &(179)
\end{aligned}$$

故当$n=k$且k为偶数时，定理6.3 成立。

综上，由数学归纳法原理可知，对于$\forall\in\mathbb{N}^{+}$，

$$F(n)=\sum_{i=0}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}\binom{n-i-1}{i}. \tag{180}$$

□

定理6.3 在杨辉三角中的体现是每条杨辉三角的对角线上的数字之和即为斐波那契数列，如图2 [7]。

[7] 图源https://hooyes.net/p/javascript-fabonacci

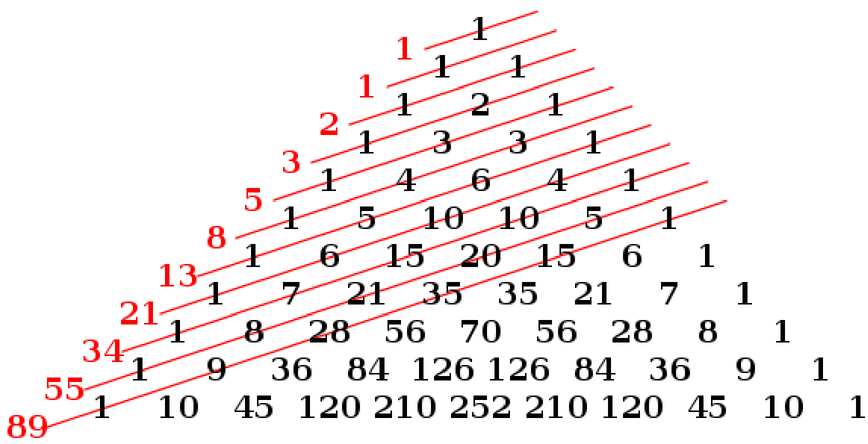


图 2: 斐波那契数列在杨辉三角中的体现

7 斐波那契数列与黄金分割比的关系

7.1 黄金分割比

就是把一条线段分为两个部分，使得这部分与全长之比等于另一部分与这部分之比。由此设这部分的长为φ，全长为1，且$\varphi > 0$，则可以列出方程

$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1-\varphi}{\varphi}, \tag{181}$$

解得

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{182}$$

其倒数即为黄金分割比的倒数，即

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{183}$$

7.2 关系

7.2.1 方法一

列出斐波那契的前几项，使其相邻项相除，即

$$\frac{F(2)}{F(1)} = \frac{1}{1}, \ \frac{F(3)}{F(2)} = \frac{2}{1}, \ \frac{F(4)}{F(3)} = \frac{3}{2}, \ \frac{F(5)}{F(4)} = \frac{5}{3}, \ \frac{F(6)}{F(5)} = \frac{8}{5}, \cdots, \tag{184}$$

不难看出

$$\frac{1}{1} = 1, \ \frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{1}, \ \frac{3}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}, \ \frac{5}{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}, \ \frac{8}{5} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}, \cdots, \tag{185}$$

则当n趋近于无穷大时，即

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}. \tag{186}$$

设$\lambda=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{F(n+1)}{F(n)}$，则

$$\lambda=1+\frac{1}{\lambda}. \tag{187}$$

解得

$$\lambda=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{\varphi}. \tag{188}$$

即当n趋近于无穷大时，斐波那契数列相邻两项的商是黄金分割比的倒数。

7.2.2 方法二

由斐波那契数列通项公式(44)式，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)} \tag{189}$$

$$=\frac{\dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}} \tag{190}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}, \tag{191}$$

由于$\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<1$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}=0, \tag{192}$$

则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)} \tag{193}$$

$$=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} \tag{194}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{\varphi}. \tag{195}$$

即当n趋近于无穷大时，斐波那契数列相邻两项的商是黄金分割比的倒数。

7.3 斐波那契螺旋线

斐波那契螺旋线，又称黄金螺旋线。其绘制方法是每次以$F(i)$为半径画一个四分之一圆弧，常与黄金分割矩形相结合。

我们用编程语言 Python 中的 turtle 库进行绘制。

```
from turtle import *

speed(20)
pensize(5)
penup()
goto(-250,-150)
pendown()
left(90)
f=[0,1,1]
n=11
for i in range(n):
    if i<3:
        continue
    f.append(f[i-1]+f[i-2])

for i in range(n):
    if i==0:
        continue
    r = 12*f[i]
    color("black")
    for j in range(3):
        forward(r)
        right(90)
    if i>1:
        penup()
    forward(r)
    right(90)
    pendown()
    color("red")
    circle(-r,90)

```

```
hideturtle()
```

绘制效果如图3 。

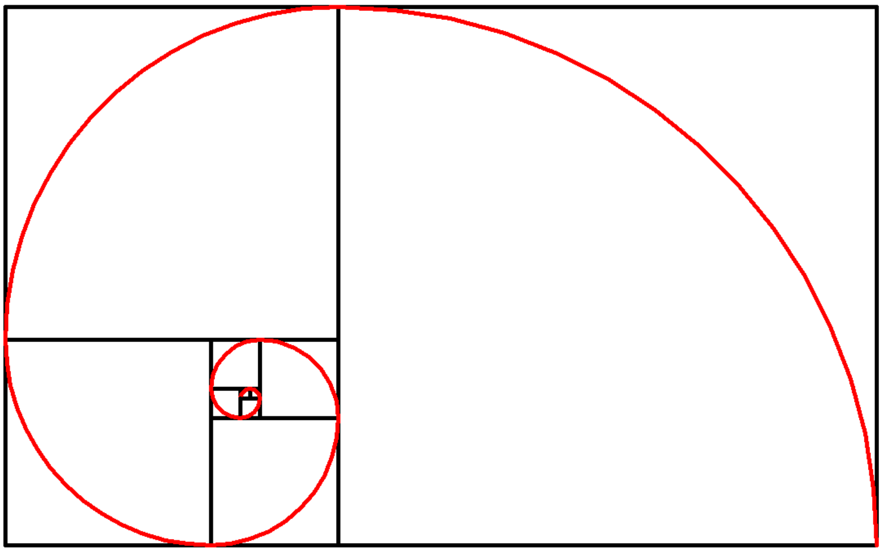


图 3: 斐波那契螺旋线

斐波那契螺旋线是斐波那契数列的一大应用，其在艺术设计上发挥着很大的作用，其以完美的黄金比例著称。著名的蒙娜丽莎的微笑（如图4 [8]）就是一个满足斐波那契螺旋线的完美比例的例子。

[8]图源https://zhuanlan.zhihu.com/p/96168626

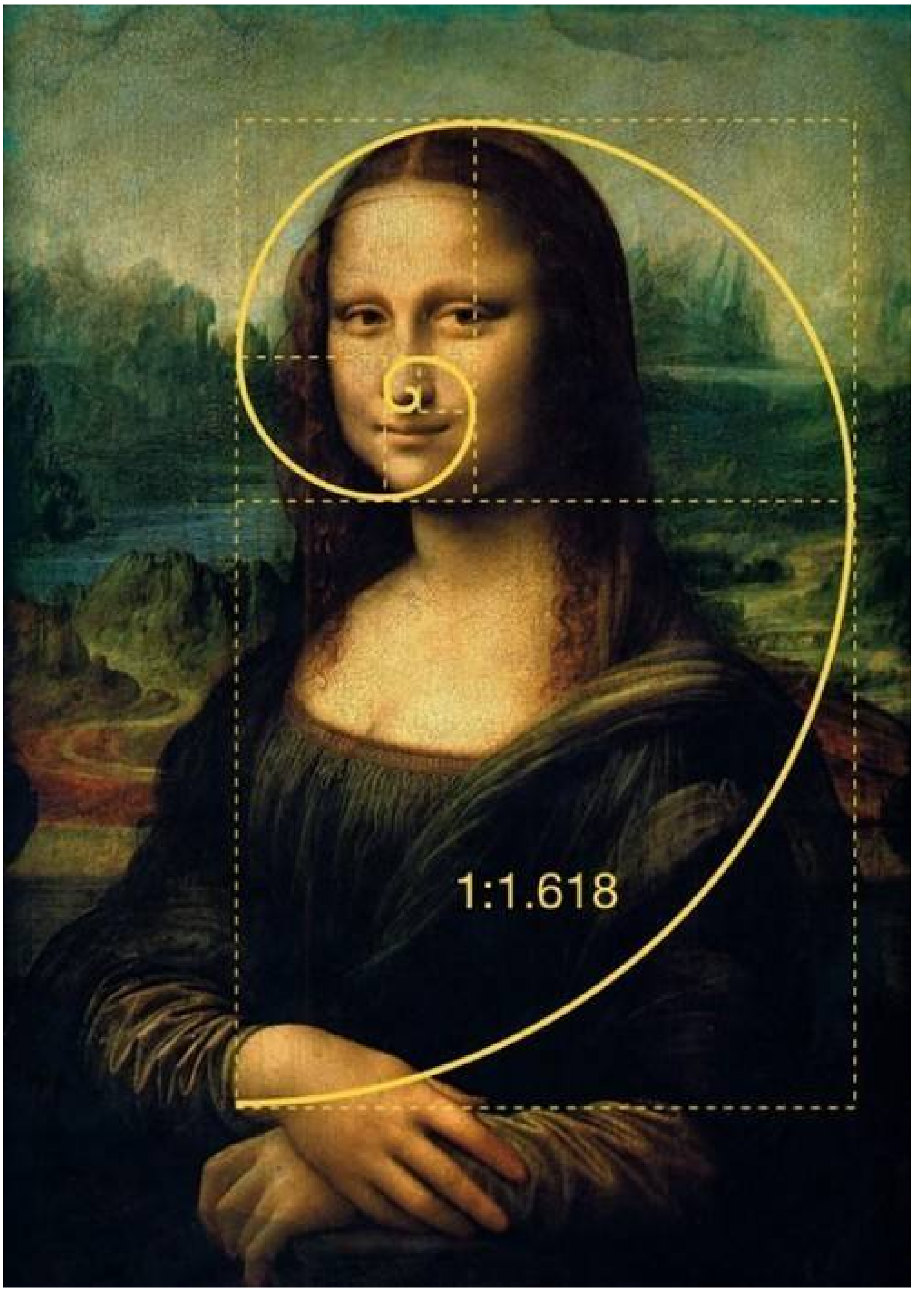


图 4: 蒙娜丽莎的微笑

8 利用最小二乘法寻找斐波那契数列的拟合曲线

8.1 背景知识

8.1.1 最小二乘法

最小二乘法（Least Squares Method），是一种数学优化方法。在高中课程中利用最小二乘法来作为寻找数据的回归直线的工具。

最小二乘法的拟合原理是通过最小化估价函数的值寻找数据的最佳函数匹配。假设有n个数据$\{x_1, y_1\}$，$\{x_2, y_2\}$，$\cdots$，$\{x_n, y_n\}$，寻找其最佳拟合的函数$f(x) = a + bx$，其中$a, b \in \mathbb{R}$。建立估价函数

$$L(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x)]^2 . \tag{196}$$

要寻找到一对a, b的值以最小化$L(a, b)$的值，在高中数学课本必修三[9]的第101页中给出了这对a, b值的公式[3]：

$$\begin{cases} b = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}, \\ a = \overline{y} - b\overline{x}, \end{cases} \tag{197}$$

其中$\overline{x}, \overline{y}$分别表示数据的平均数，即

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i, \\ \overline{y} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{198}$$

8.1.2 Wolfram Mathematica

Wolfram Mathematica 是一款由 Wolfram Research 公司开发的科学计算软件。这款软件使用范围广，利用计算机编程进行数学运算。本章中使用 Wolfram Mathematica 11.3 进行绘图、数据可视化、计算拟合曲线等，各部分的代码都会给出。

8.2 散点图

我们首先通过绘制斐波那契数列的数据$\{[i, F(i)]\,|i \in n\}$在平面直角坐标系中的散点图来判断适合拟合的函数种类，如图5 。

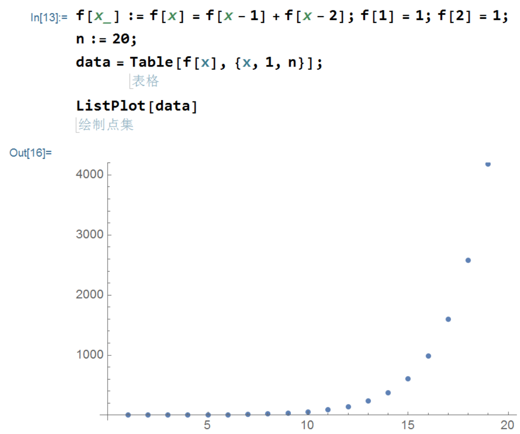
由图可以看出散点的分布大致呈指数函数的形式增长，接下来我们将所有数据取对数，再次绘制数据$\{[i, \ln F(i)]\,|i \in n\}$在平面直角坐标系中的散点图，如图6 。

由图可看出取对数后函数大致呈线性增长，于是我们即可求解回归直线方程。

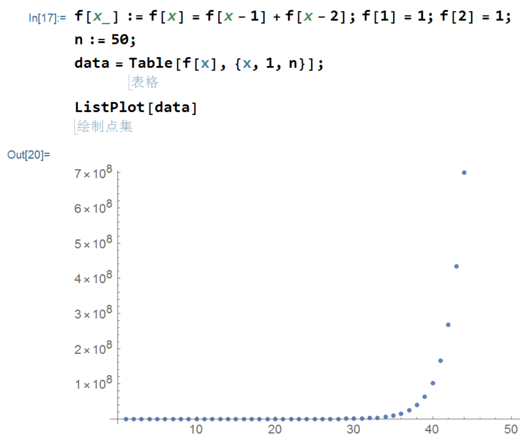
8.3 回归直线

此处我们取$n = 20$的数据进行求解。首先列出数据，如表3 。

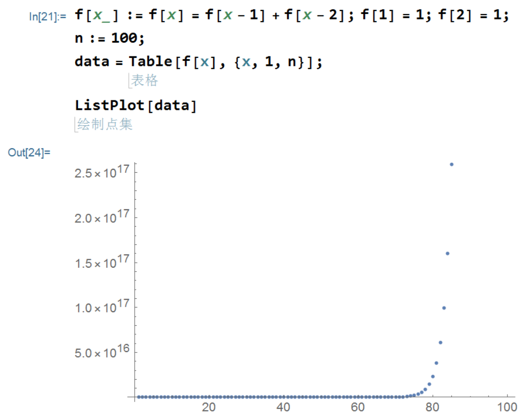
[9] 普通高中课程标准实验教科书 *数学3 必修（A版）*. 人民教育出版社 课程教材研究所 中学数学课程教材研究开发中心 编著, 2007 年 1 月第 3 版.



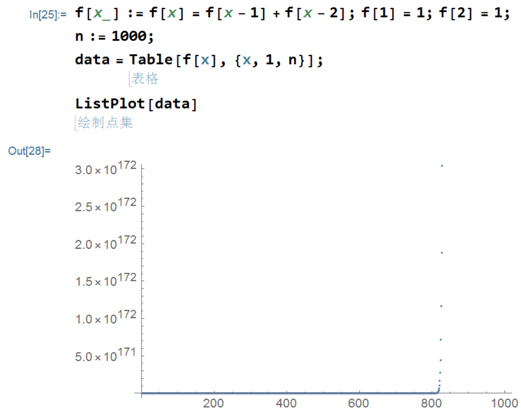
(a) $n = 20$



(b) $n = 50$



(c) $n = 100$

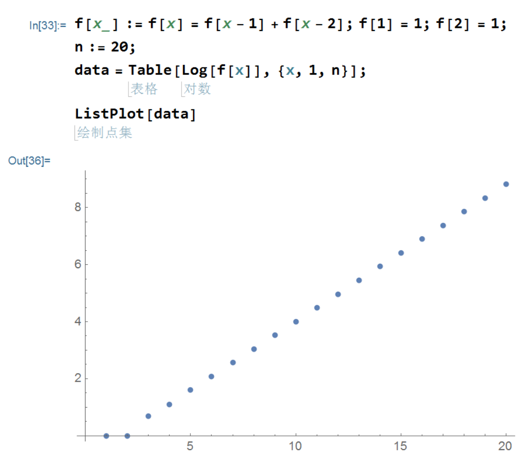


(d) $n = 1000$

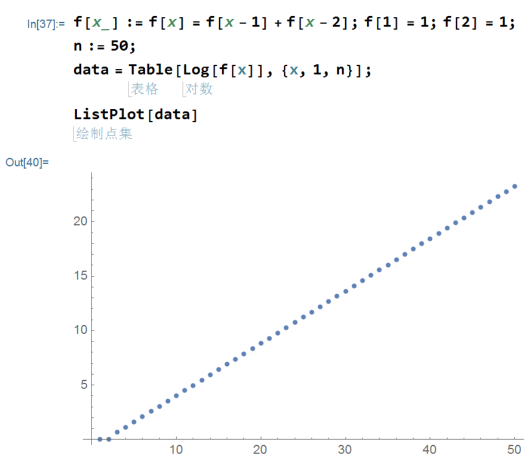
图 5: 斐波那契数列散点图

表 3: 取对数后斐波那契数列前20项数据

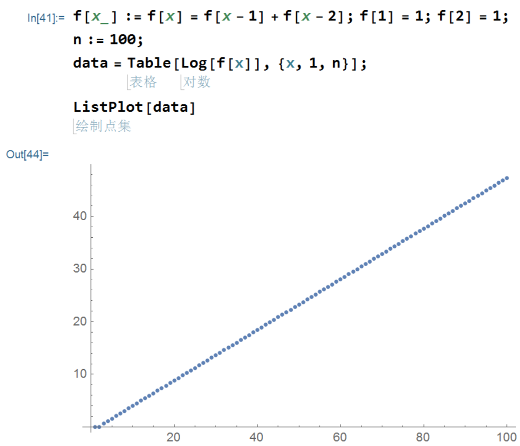
$x_i = i$	1	2	3	4	5	6	7
$y_i = \ln F(i)$	0.00000	0.00000	0.69315	1.09861	1.60944	2.07944	2.56495
$x_i = i$	8	9	10	11	12	13	14
$y_i = \ln F(i)$	3.04452	3.52636	4.00733	4.48864	4.96981	5.45104	5.93225
$x_i = i$	15	16	17	18	19	20	
$y_i = \ln F(i)$	6.41346	6.89467	7.37588	7.85709	8.33831	8.81952	



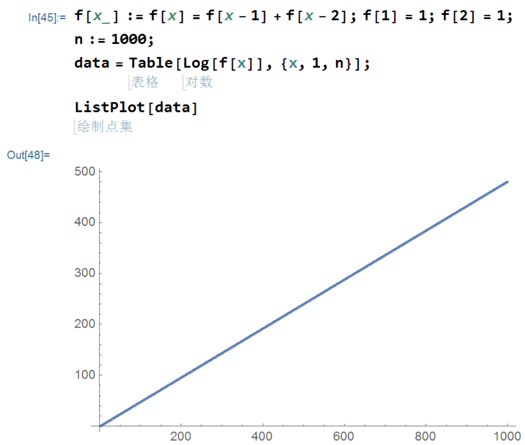
(a) $n = 20$



(b) $n = 50$



(c) $n = 100$



(d) $n = 1000$

图 6: 取对数后斐波那契数列散点图

求得平均数

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 10.5, \\ \overline{y} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 4.25822. \end{cases} \tag{199}$$

将数据代入(197)式，求得

$$\begin{cases} b = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2} = \dfrac{317.972}{665} = 0.478153, \\ a = \overline{y} - b\overline{x} = 4.25822 - 0.478153 \times 10.5 = -0.762391. \end{cases} \tag{200}$$

即回归直线函数

$$f(x) = -0.762391 + 0.478153x. \tag{201}$$

画出图像，如图7 。其中红色的直线表示函数$f(x)$的图像，蓝色的点表示取对数后斐波那契数列的散点。

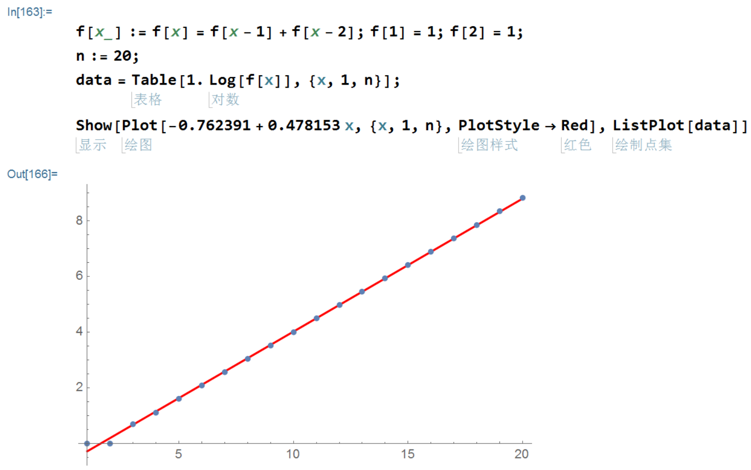


图 7: 取对数后斐波那契数列回归直线

8.4 $n = 20$时的拟合曲线

在上一节中我们已经求得了取对数后的斐波那契数列的回归直线，接下来我们把回归直线放在指数函数$g(x)$中，即为当$n = 20$时斐波那契数列在指数形式下的拟合曲线。即

$$g(x) = e^{f(x)} = e^{-0.762391+0.478153x}. \tag{202}$$

画出图像，如图8 。其中红色的直线表示函数$g(x)$的图像，蓝色的点表示斐波那契数列的散点。

In[167]:=

```
f[x_] := f[x] = f[x - 1] + f[x - 2]; f[1] = 1; f[2] = 1;
n := 20;
data = Table[f[x], {x, 1, n}];
Show[Plot[Exp[-0.762391 + 0.478153 x], {x, 1, n}, PlotStyle → Red], ListPlot[data]]
```

Out[170]=

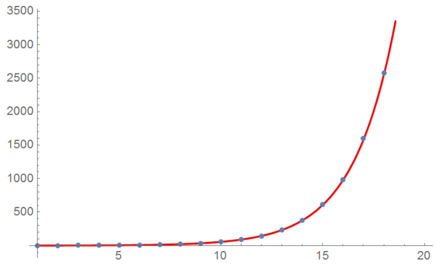
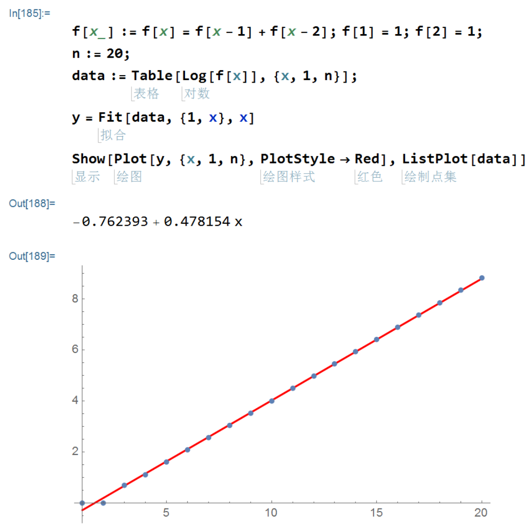


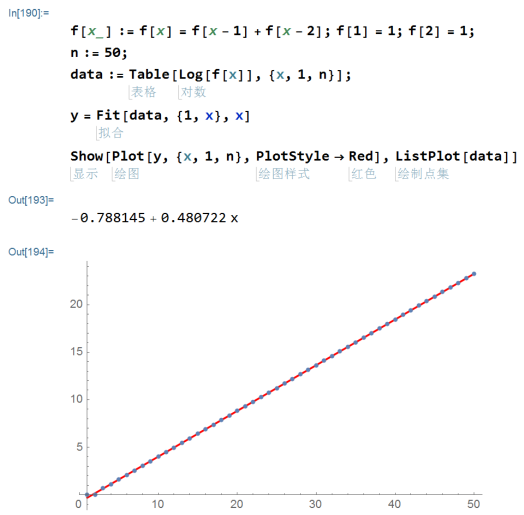
图 8: $n = 20$时斐波那契数列的拟合曲线

8.5 当n取不同值时的拟合曲线

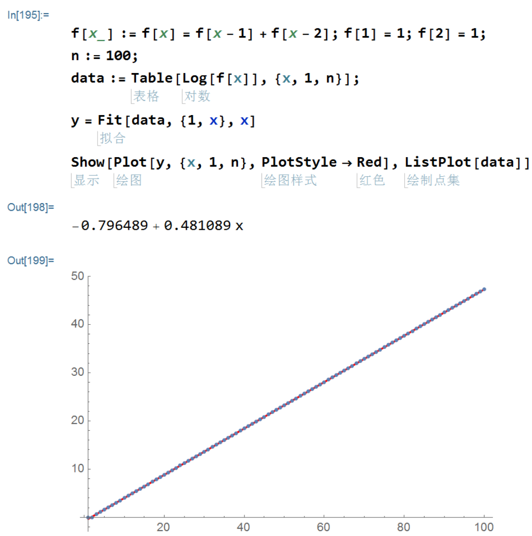
利用 Wolfram Mathematica 软件，n取不同的值时取对数后斐波那契数列的回归直线如图9，斐波那契数列的拟合曲线如图10。



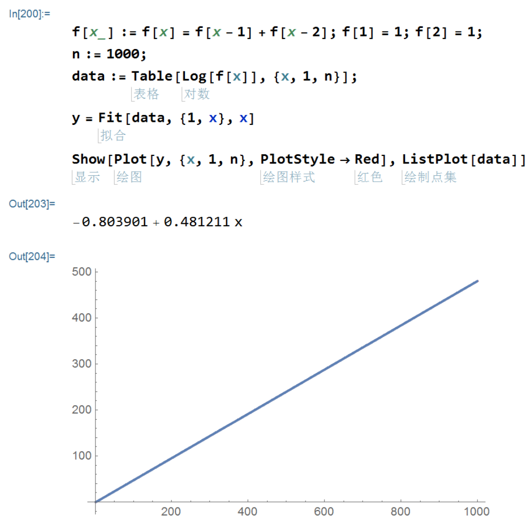
(a) $n = 20$



(b) $n = 50$

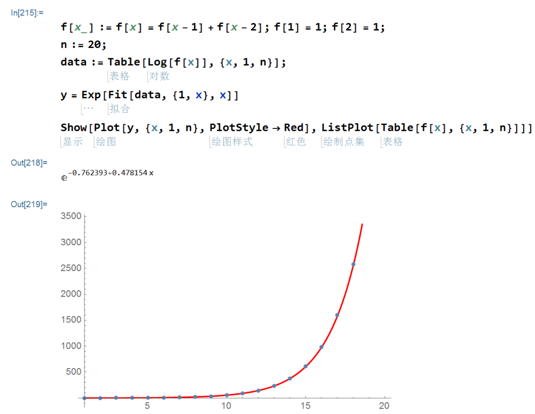


(c) $n = 100$

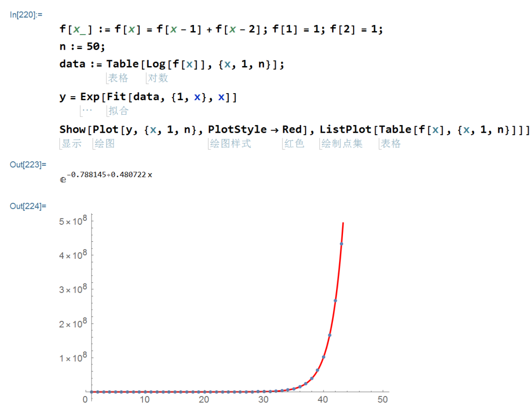


(d) $n = 1000$

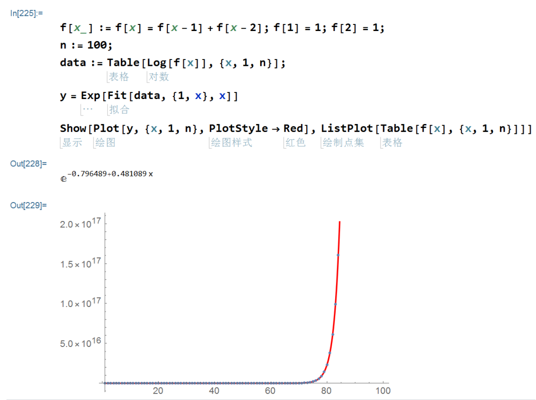
图 9: 取对数后斐波那契数列回归直线



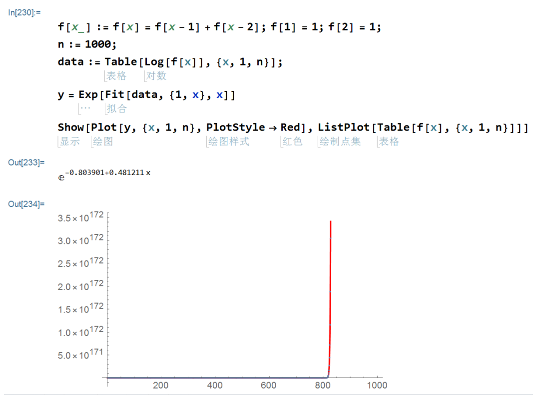
(a) $n = 20$



(b) $n = 50$



(c) $n = 100$



(d) $n = 1000$

图 10: 斐波那契数列拟合曲线

9 后记

9.1 结束语

终于完成了！

本文是我在新型冠状病毒所感染的肺炎疫情大势之下所写的文章。这篇文章所使用的代码达千行，也是我迄今为止写过的最长的代码。文章中所有文字和200多条式子全部都是我纯手打。不得不说LaTeX是一门强大的学科。这篇文章耗费了我将近一个星期的时间编写和检查，在国内外大大小小的各种学术网站查了无数的资料，加以自己的知识储备完成了本文。在我写这篇文章的时候，也学到了许多知识，收益颇丰。

本文目的在于在高中知识的范围之内对斐波那契数列的性质和应用进行整理、归纳与拓展，文中的所有引理、定理和证明我都尽量使用高中阶段的数学符号及约定，努力做到让所有高中生都能看得懂。

当然，本文仍然存在遗憾之处。本文较为冗长，总页数达三十多页。本文中的证明我认为并不可能达到100%的严密与周全，其中仍有许多缺漏之处。本文的格式并不完全符合论文的格式规范，我对LaTeX并非完全掌握，仍有许多缺漏之处。最后，本文的内容仍有待完善和补充之处，相较我的预期仍有部分内容没有写进来，比如研究斐波那契数列必不可少的涉及的矩阵，对斐波那契数列项之间的公约数的研究，基于计算机科学中对斐波那契数列递归、快速幂及矩阵解法的探究及时间复杂度分析等。但是以上列举的这些有些并不在高中知识范围内。如果有时间，后续我会继续补充以上内容。

由于本文较为冗长，故文末会补充对文中重要定理的索引。

如果您对我的文章有任何的意见或建议，或者您想与我交流，或者我的文章侵犯了您的权利，请联系我。我的联系方式：

邮箱：1353055672@qq.com

QQ: 1353055672

WeChat: ligen1353055672

9.2 致谢

感谢学校给我提供的本次机会让我得以写下这篇文章。

感谢所有为疫情默默做出奉献的人。

感谢父母、老师的支持。

感谢同学们的帮助与支持。

感谢强大的互联网给我提供学习上的支持。

感谢所有支持我的人。

特别的，感谢正在阅读这篇文章的每一个人。

9.3 本文重要引理、定理、公式及恒等式索引

1. 斐波那契数列的定义式(1)式

$$F(n)=\begin{cases}1, & n\le 2\\ F(n-2)+F(n-1), & n\ge 3.\end{cases}$$

2. 引理3.1 对于任意一个数列 $\{y_n\}$ ，当 $n \in \mathbb{N}$ ，常数 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ 时满足

$$y_n = \begin{cases} c, & n = 0 \\ a \cdot y_{n-1} + b^{n-1}, & n \in \mathbb{N}^+, \end{cases}$$

则有

$$y_n = \begin{cases} a^n \left(\dfrac{1}{a-b} + c \right) - \dfrac{b^n}{a-b}, \ n \in \mathbb{N}, & b \neq 0 \\ a^n \cdot c, \ n \in \mathbb{N}, & b = 0. \end{cases}$$

3. 斐波那契数列的通项公式(44)式

$$F(n) = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}}, \ n \in \mathbb{N}^+.$$

4. 定理4.1

$$F(n) = -F(n+1) + F(n+2).$$

5. 定理4.2 斐波那契数列前n项和

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = F(n+2) - 1.$$

6. 定理4.3 斐波那契数列奇数项求和

$$\sum_{i=1}^{n} F(2i-1) = F(2n).$$

7. 定理4.4 斐波那契数列偶数项求和

$$\sum_{i=1}^{n} F(2i) = F(2n+1) - 1.$$

8. 定理4.5 斐波那契数列平方求和

$$\sum_{i=1}^{n} F^2(i) = F(n) \cdot F(n+1).$$

9. 定理4.6

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot F(i) = n \cdot F(n+2) - F(n+3) + 2.$$

10. 定理4.7

$$F(n-1)F(n+1)-F^2(n)=(-1)^n,\ n\geq 2.$$

11. 定理4.8 [5]

$$F(n+m)=F(n+1)F(m)+F(n)F(m-1),\ n,m\geq 2,\ n,m\in\mathbb{N}^+.$$

12. 定理4.9

$$F^2(n)+F^2(n+1)=F(2n+1).$$

13. 定理4.10

$$F^2(n+1)-F^2(n)=F(n-1)F(n+2).$$

14. 定理4.11 斐波那契数列两倍项之商

$$\frac{F(2n)}{F(n)}=F(n-1)+F(n+1).$$

15. 定理4.12 [5] 斐波那契数列中，若n为m的倍数，则$F(n)$为$F(m)$的倍数$(n,m\in\mathbb{N}^+)$。即

$$F(m)|F(n),\ m|n,\ n,m\in\mathbb{N}^+.$$

16. 定理4.13 [5] 斐波那契数列任意连续$k(k\geq 3,\ k\in\mathbb{N}^+)$项之和不会出现在数列中，即

$$\sum_{i=x}^{x+k-1}F(i)\notin\{F(n)|n\in\mathbb{N}^+\},\ \forall x,k\in\mathbb{N}^+,\ k\geq 3.$$

17. 5.1.2节 抽屉原理

将多于$n+1$（包含）个物体放到n个抽屉里，则至少有一个抽屉中有至少两件物品。

例如，一年中有12个月，任意的13个或更多不同的人中，至少有两个人在同一个月出生。

18. 引理5.1 令$G(n)$表示斐波那契数列第n项$F(n)$对$k(k\in\mathbb{N}^+)$取模后的余数的结果，即

$$G(n)=F(n)\mod k,\ n,k\in\mathbb{N}^+.$$

则

$$G(n)\equiv G(n-2)+G(n-1)\pmod k,\ n\geq 3.$$

19. 定理5.1 [5] 斐波那契数列中，每一项对$k(k\in\mathbb{N}^+)$取模后的余数所形成的的数列必定有循环节。

20. 组合数公式(143)式[4]

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

21. 定理6.1

$$\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

22. 定理6.2

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}.$$

23. 定理6.3

$$F(n)=\sum_{i=0}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}\binom{n-i-1}{i},\ n\in\mathbb{N}^{+}.$$

24. 黄金分割比(182)式

$$\varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

25. 当n趋近于无穷大时，斐波那契数列相邻两项的商是黄金分割比的倒数,即(195)式

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{\varphi}.$$

26. 假设有n个数据$\{x_1,y_1\}$，$\{x_2,y_2\}$，$\cdots$，$\{x_n,y_n\}$，寻找其最佳拟合的函数$f(x)=a+bx$，其中$a,b\in\mathbb{R}$。建立估价函数(196)式

$$L(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-f(x)\right]^2.$$

a,b值的公式(197)式[3]：

$$\begin{cases}b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{xy}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2},\\ a=\overline{y}-b\overline{x},\end{cases}$$

其中$\overline{x}$,$\overline{y}$分别表示数据的平均数，即

$$\begin{cases}\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i,\\ \overline{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}$$

27. 当$n = 20$时斐波那契数列在指数形式下的拟合曲线。(202)式

$$g(x) = e^{f(x)} = e^{-0.762391+0.478153x}.$$

知识共享协议

参考文献

[1] 维基百科编者.斐波那契数列[G/OL].维基百科,2020(20200130)[2020-01-30]. https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E6%96%90%E6%B3%A2%E9%82%A3%E5%A5%91%E6%95%B0%E5%88%97&oldid=57905284.

[2] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.普通高中课程标准实验教科书 *数学5 必修 (A版)*[M].人民教育出版社:北京,2007:32-33.

[3] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.普通高中课程标准实验教科书 *数学3 必修 (A版)*[M].人民教育出版社:北京,2007.

[4] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.普通高中课程标准实验教科书 *数学 选修2-1 (A版)*[M].人民教育出版社:北京,2009.

[5] 李晨滔,馮勁敏.費氏數列的性質整理[EB/OL].https://www.shs.edu.tw/works/essay/2014/03/2014032310331517.pdf,2014.