MTH 100, TD1

Exercice 1

1. E est un ensemble, $A, B \subset E$. Montrer que $A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A$.
2. Les E_i sont des ensembles. Prouver que $\prod_{i=1}^{n} E_i = \emptyset \Rightarrow \exists i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $E_i = \emptyset$.
3. E est l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\{1, 2, 3\}$.
   On pose $A_i = \{f \in E, f(0) = i\}$. Montrer que les A_i forment une partition de E.

Exercice 2

1. Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1, 2\}))$.
2. Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$? $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

Exercice 3

Soit la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

1) f est-elle une application ?
2) En discutant suivant la valeur de y, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = y$.
3) f est -elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 4

L'application $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z + 1/z$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
Donner l'image par f du cercle trigonométrique.
Donner l'image réciproque par f de $i\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On pose $h = g \circ f$.
Démontrer que :
1) Si f et g sont injectives (*resp.* surjectives) alors h l'est aussi.
2) Si h est injective alors f l'est aussi.
3) Si h est surjective alors g l'est aussi.
4) Si h est injective et f surjective alors g est injective.

Exercice 6

Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. $\forall A, B \subset X,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. $\forall A, B \subset X,\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Exercice 7

Soit X un ensemble. Si $A \subset X$, on note χ_A la fonction caractéristique de A. Montrer que l'application
$\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{F}(X, \{0, 1\}),\ A \mapsto \chi_A$ est bijective.

UL/FDS/Dep. de Maths 2013-2014

TD2 de MTH 100

1. On définit la relation binaire $\preceq$ sur $\mathbb{N}^2$ par

$$(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 < y_1) \text{ ou } (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2).$$

   (a) Vérifier que c'est une relation d'ordre.

   (b) La partie $B = \{(2, 10^p) : p \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}^2$ est-elle majorée ?

2. En utilisant la formule du binôme, déterminer $\sum\limits_{0 \leq k \leq n} C_n^k$, $\sum\limits_{0 \leq k \leq n} (-1)^k C_n^k$, $\sum\limits_{0 \leq k \leq n} k C_n^k$.

3. Soit E un ensemble à n éléments. Combien de relations binaires (resp. relations binaires symétriques) peut-on définir sur E ?

4. Soit A une partie à p éléments d'un ensemble E à n éléments. Déterminer le nombre de parties de E contenant exactement k éléments de A.

5. On considère l'ensemble $E = \{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Cet ensemble est-il majoré ? minoré ? A-t-il un plus petit élément ? un plus grand élément ? une borne supérieure ? une borne inférieure ?

6. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels et soit $\varepsilon > 0$.

   (a) Montrer que $||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$.

   (b) Montrer par récurrence sur n que $|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$.

   (c) Montrer que si pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, |x_k - x_{k+1}| < \varepsilon$, alors $|x_1 - x_n| < (n-1)\varepsilon$.

7. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Montrer que si $a = \sup A$ alors il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a. La réciproque est-elle vraie ?

8. Etudier la convergence des suites (U_n), (V_n) et (W_n) définies par

$$U_n = (-1)^n + \frac{1}{n},\ V_n = (-1)^n \frac{n+1}{n},\ W_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n}.$$

9. Soient a_0 et b_0 deux réels fixés tels que $a_0 < b_0$. On définit les suites (a_n) et (b_n) par

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}.$$

   Montrer qu'elles sont adjacentes. Que peut-on conclure ?

   En calculant $a_{n+1} + b_{n+1}$, montrer que chacune d'elles converge vers $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$.