Chapitre 2

TP Numéro 2 : Le gyroscope

Sommaire

Objectif général

Un gyroscope est un dispositif soumis à un mouvement de rotation obéissant au théorème du moment cinétique. L'objectif principal de cette expérience est de déterminer le moment d'inertie d'un gyroscope par deux méthodes différentes. La première s'appuie sur l'étude du mouvement pendulaire d'une masse fixée sur le disque du gyroscope. La seconde est basée sur l'étude du mouvement de précession induit par un moment de force extérieur agissant sur le gyroscope, en fonction de la vitesse angulaire du disque en rotation et du moment de force extérieur.

2.1 Introduction

2.1.1 Le gyroscope

On appelle gyroscope un corps solide qui n'a qu'un seul point fixe (Figure 2.1). Son mouvement est une rotation autour de l'axe instantané de rotation qui peut changer de direction à tout instant par rapport au corps. Le mouvement général d'un gyroscope est compliqué et très difficile à traiter mathématiquement. Afin de simplifier le problème, nous allons considérer dans cette expérience le cas le plus simple du gyroscope symétrique à rotation rapide tel qu'on le rencontre souvent en pratique (volant, boussole gyroscopique, stabilisateur, etc...).

(a) Gyroscope 1 (b) Gyroscope 2

FIGURE 2.1 – Schéma de principe d'un gyroscope

Ce dispositif permet de démontrer la loi de conservation du moment cinétique (appelé aussi moment angulaire ou moment d'impulsion). Cette loi fondamentale de la mécanique implique qu'en l'absence de moment de force extérieure (ou couple) appliqué à un solide en rotation, celui-ci conserve son axe de rotation invariable. Lorsqu'un couple est appliqué au dispositif, il provoque une précession ou une nutation du solide en rotation.

L'essentiel du dispositif est une roue (ou tout objet correctement équilibré) tournant sur un axe qui, une fois lancée, tend à résister aux changements de son orientation. Une façon simple d'expérimenter cet effet consiste à tenir à bout de bras une roue de vélo par les écrous du moyeu et de la faire tourner rapidement par une autre personne. Lorsque l'on tente de pencher sur le côté la roue en rotation, on ressent une résistance à ce mouvement. C'est la conservation du moment de rotation qui tend à s'opposer à ce mouvement.

2.1.2 Rappel de mécanique : mouvement de rotation et moment cinétique

Pour une particule simple ou pour le centre de masse d'un ensemble de particules, le vecteur moment cinétique $\overrightarrow{L}$. correspond au moment de la quantité de mouvement, c'est-à-dire au produit vectoriel du vecteur position $\overrightarrow{r}$ et de la quantité de mouvement $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$.

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{p} = \overrightarrow{r} \wedge m\overrightarrow{v} \tag{2.1}$$

Pour une rotation dans l'espace à 3 dimensions, le théorème du moment cinétique (équation 2.2) est l'analogue de la 2 ème loi de Newton s'appliquant aux mouvements de translation. Le théorème du moment cinétique établit que le moment $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$ des forces extérieures $\overrightarrow{F}$ s'appliquant sur un corps en rotation est égal à la variation instantanée (dérivée par rapport au temps) du vecteur moment cinétique :

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} \tag{2.2}$$

La relation (équation 2.2) est une équation vectorielle qui donne des indications sur la grandeur, la direction et le sens des variations du moment cinétique $\overrightarrow{L}$. Pour un système composé de plusieurs particules, c'est le moment cinétique total qui est pris en compte.

Le théorème du moment cinétique indique qu'en absence de moment de force externe ($\tau = 0$), le moment cinétique total du système est une constante. C'est la loi de conservation du moment cinétique : si aucun moment de force ne s'exerce sur un système donné, son moment cinétique ne peut pas se modifier. Le moment cinétique (resp. le moment de forces) est l'équivalent pour la rotation de l'impulsion (resp. l'accélération) pour les mouvements de translation.

Dans le cas général d'un solide en rotation autour d'un axe quelconque, il faut remarquer que le moment cinétique $\overrightarrow{L}$ et l'axe instantané de rotation $\overrightarrow{\omega}$ ne sont pas systématiquement parallèles. Mais si l'axe de rotation coïncide avec un axe de symétrie du solide, on peut écrire :

$$\overrightarrow{L} = I\overrightarrow{\omega} \tag{2.3}$$

où I est le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation et $\overrightarrow{\omega}$ le vecteur de vitesse angulaire. Le moment d'inertie décrit la répartition de la masse d'un solide autour de son centre de masse :

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{2.4}$$

Le moment cinétique d'un corps en rotation soumis à aucun moment de force extérieur est constant. Si le moment d'inertie I du corps est modifié, la vitesse de rotation sera changée selon la relation (2.3). C'est le cas de la patineuse qui tourne de plus en plus vite en resserrant les bras contre son corps afin de réduire son moment d'inertie (Figure 2.2).

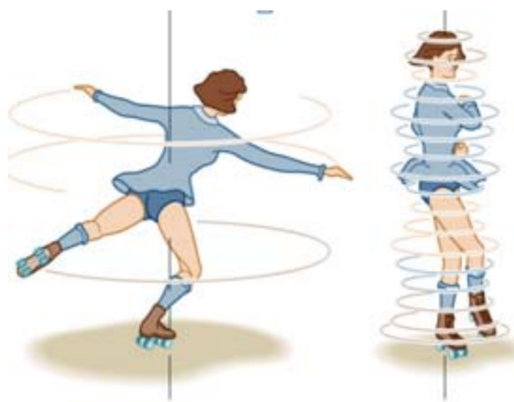


FIGURE 2.2 – Exemple de conservation du moment cinétique. Pirouette d'une patineuse qui augmente sa vitesse de rotation en resserrant ses bras contre son corps pour réduire son moment d'inertie.

2.1.3 Mouvements de précession et de nutation

Le théorème du moment cinétique peut être illustré par le cas d'une toupie pointue posée sur une surface plane qui tourne rapidement autour de l'axe instantané de rotation supposé identique à l'axe de symétrie de la toupie (Figure 2.3).

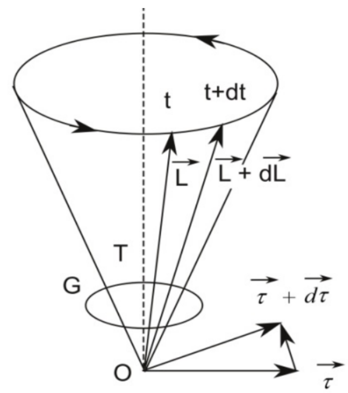


FIGURE 2.3 – Schéma illustrant le principe de la précession pour toupie

Au temps t , le moment cinétique a une valeur $\overrightarrow{L}$. La toupie étant penchée, son poids $\overrightarrow{P}$ agissant au centre de gravité G produit un moment $\overrightarrow{\tau}$ par rapport à la pointe O de la toupie. Le théorème du moment cinétique (équation 2.2) peut se réécrire comme :

$$d\overrightarrow{L} = \overrightarrow{\tau}.dt \tag{2.5}$$

L'accroissement du moment cinétique $d\overrightarrow{L}$ est parallèle au moment de force $\overrightarrow{\tau}$. Au temps $t + dt$, le moment cinétique $\overrightarrow{L}$, l'axe de la toupie et le moment $\overrightarrow{\tau}$ ont de nouvelles directions données par $\overrightarrow{L} + d\overrightarrow{L}$ et $\overrightarrow{\tau} + d\overrightarrow{\tau}$. Si la force $\overrightarrow{P}$ agit constamment, l'axe de la toupie tourne autour de la verticale passant par O et effectue un mouvement appelé précession.

Si le moment cinétique n'est pas confondu avec l'axe de symétrie du corps (appelé aussi axe de rotation rapide), la toupie effectue un troisième mouvement de rotation qui s'ajoute à la précession : c'est la nutation . On peut mieux la mettre en évidence expérimentalement en supprimant le moment de force $\overrightarrow{\tau}$: c'est le cas du gyroscope supporté en son centre de gravité :

$$\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{0} \implies \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{0} \tag{2.6}$$

Le moment cinétique $\overrightarrow{L}$ est constant et l'axe de rotation rapide, s'il n'est pas confondu avec $\overrightarrow{L}$, tourne autour du moment cinétique $\overrightarrow{L}$ qui est fixe dans l'espace. L'axe de rotation rapide décrit un cône (cône de nutation). Ce mouvement est facile à observer : il suffit de donner un choc à un gyroscope rapide pour faire en sorte que le moment cinétique ne coïncide plus avec l'axe du corps qui décrit alors un cône de nutation.

2.2 Principe général de l'expérience

Le but de cette expérience est de mesurer le moment d'inertie I d'un gyroscope de deux manières différentes, d'une part par l'étude du mouvement pendulaire d'une masse fixée sur le disque du gyroscope (§2.2.1), et d'autre part par l'intermédiaire du mouvement de précession du gyroscope (§2.2.2). Le gyroscope utilisé est schématisé sur la Figure 2.5.

2.2.1 Méthode du pendule

On fixe une masse m sur le disque du gyroscope comme indiqué sur la Figure 2.4 et on utilise le système ainsi formé comme un pendule physique. La période T du mouvement de ce pendule s'exprime à partir du moment d'inertie total du système (disque + masse) :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I + I' + md^2}{mgd}} \tag{2.7}$$

où les différents paramètres sont définis comme suit :
T = période du pendule physique (disque + masse) $[s]$
I = moment d'inertie du disque seul $[kg.m^2]$
$I' = \frac{mr^2}{2}$: moment d'inertie de m par rapport à l'axe passant par son centre de gravité $[kg.m^2]$
m = masse additionnelle $[kg]$
d = distance entre le centre de gravité de la masse et l'axe de rotation $[m]$
$g = 9.81 m.s^{-2}$: accélération terrestre r = rayon de la masse additionnelle $[m]$
On obtient le moment d'inertie du disque à partir de l'expression (équation 2.7) :

$$I = m\left[\frac{T^2 gd}{4\pi^2} - d^2 - \frac{r^2}{2}\right] \tag{2.8}$$

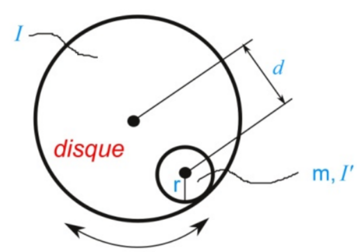
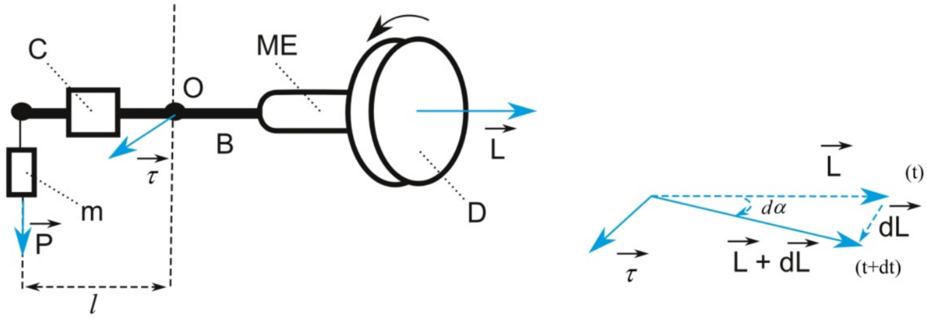


FIGURE 2.4 – Schéma de principe du montage utilisé pour la mesure du moment d'inertie du gyroscope par un pendule physique.

2.2.2 Étude du mouvement de précession

On considère dans cette expérience un gyroscope symétrique pesant à rotation rapide schématisé sur la Figure 2.5. Un disque D est fixé à un moteur ME supporté par une barre B de telle façon que l'axe du gyroscope coïncide avec celui de la barre. Cette barre est fixée en son centre O à un palier qui permet une rotation aussi bien autour d'un axe vertical qu'horizontal, soit un mouvement quelconque autour de O. Un contrepoids C permet d'équilibrer le système.



(a) (b)

FIGURE 2.5 – (2.5a) Schéma de principe du gyroscope. (2.5b) Le moment cinétique $\vec{L}$ du disque est modifié par l'application sur le bras du gyroscope d'une force transverse $\vec{P} = m\vec{g}$. Le moment de force résultant qui est perpendiculaire au moment cinétique est à l'origine du phénomène de précession.

Le gyroscope formé par le disque tourne autour de son axe avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Par symétrie, son moment cinétique est dirigé dans la direction de l'axe du corps en rotation (parallèle à $\vec{\omega}$). Tant que le gyroscope est bien équilibré, il n'est soumis à aucun moment de force extérieur ($\vec{\tau} = 0$) et son moment cinétique reste constant selon l'expression (équation 2.5).

Lorsqu'un gyroscope est soumis à un moment dû à son propre poids (déséquilibre du point d'appui) son mouvement est plus complexe et présente une précession caractéristique. Ce mouvement est relativement simple uniquement si l'axe de rotation coïncide avec l'axe de symétrie du corps et si la rotation est rapide (ce qui est le cas pour l'expérience qui suit). Pour mettre en évidence un tel mouvement, on suspend une masse m à l'extrémité libre de la barre. Il en résulte un moment de force $\vec{\tau}$ par rapport au point fixe O. Cela provoque une variation du moment cinétique $d\vec{L} = \vec{\tau}dt$ et le gyroscope effectue une précession dont la vitesse angulaire Ω (vitesse de précession) vaut :

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt} \tag{2.9}$$

où $d\alpha$ est l'angle, dans le plan horizontal, dont a tourné l'axe du gyroscope pendant l'intervalle de temps dt. De la Figure 2.5b, on obtient :

$$d\alpha = \frac{dL}{L} \tag{2.10}$$

En tenant compte que $dL = \tau dt$ (équation 2.5), on obtient que $\Omega = \frac{\tau}{L}$. En remplaçant les moments cinétique et d'inertie par leur expression ($\tau = mgl$ et $L = I\omega$), on obtient pour la vitesse angulaire de précession :

$$\Omega = \frac{gl}{I}\frac{m}{\omega} \tag{2.11}$$

La précession est donc d'autant plus rapide que le moment cinétique est faible, c'est-à-dire, pour un moment d'inertie donné, que la vitesse angulaire est petite et que le moment de force τ est grand.

Chapitre 3

TP Numéro 3 : Étude du plan incliné

Sommaire

3.1 But de la manipulation

Le but de cette expérience est de calculer l'accélération d'un corps solide (chariot) à partir de différentes mesures de temps, ce corps est en mouvement sur un plan incliné.

FIGURE 3.1 – Plan incliné

3.2 Étude théorique :

Un chariot de masse m_1 , se déplace le long d'un rail représentant un plan incline d'angle β.

1. Faire une représentation schématique du système étudie.
2. Faire le bilan des forces en négligeant les forces de frottements.
3. En déduire l'expression de l'accélération a du chariot.

4. Ecrire l'équation du mouvement du chariot, et donner la nature de ce mouvement.

L'application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel (xoy) (repère Galiléen) au chariot en mouvement de translation nous permet d'écrire :

$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = m\overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} = m\overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{P}$: le poids de chariot
$\overrightarrow{R}$: la reaction du rail sur le chariot
$\overrightarrow{a}$: l'accélération du chariot
La projection des forces sur les axes
Respectifs OX et OY nous donne :
Sur l'axe OX : $Psin\beta = ma$
Sur l'axe OY : $R–Pcos\beta = 0$

$$mgsin\beta = ma \tag{3.1}$$

$$R - Pcos\beta = 0 \tag{3.2}$$

D'après l'équation (3.1), on peut écrire l'expression de l'accélération du corps solide (chariot) :
$a = gsin\beta = cte$

C'est-à-dire on est en présence d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré donc l'équation s'écrit :
$x\,(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$
On supposant que les conditions initiales sont :
$X_0(t = 0) = 0\,m$
$v_0(t = 0) = 0\,m/s$
$x\,(t) = \frac{1}{2}at^2$

3.3 Étude expérimentale :

3.3.1 Matériel utilisé :

Le matériel utilisé est relativement simple. Il est composé essentiellement des éléments suivants :
- un rail monté sur un plan incliné d'un angle β (fixé par un rapporteur),
- un chariot de masse (m) pouvant se mouvoir sur le rail,
- une règle graduée,
- un chronomètre afin de mesurer le temps,

3.3.2 Manipulation :

Pour la réalisation de l'expérience, on procède de la manière suivante :
Étape 1 : en utilisant une règle graduée, on fixe la distance x (en cm) à parcourir par le chariot,
Étape 2 : en utilisant un rapporteur, on incline le rail d'un angle β donné,
Étape 3 : par le moyen d'un chronomètre, on mesure le temps t (en s) pris par le chariot pour parcourir la distance x.

On prendra $\Delta t = 0.2\,s$, et $\Delta x = 0.001\,m$

3.3.3 Travail demandé :

a) Remplir le tableau ci-dessous, et conclure le meilleur essai. (Prendre $\beta = 30°$)

Grandeurs	1^{er} essai	2^{eme} essai	3^{eme} essai	4^{eme} essai
t				
t^2				
$\frac{x}{t^2}$				
a				
Δa				
$\frac{\Delta a}{a}$				

TABLE 3.1 – tableau à remplir

b) Déterminer l'accélération (a) en réalisant un autre essai pour un angle $\beta = 45°$, Conclure
Rappel : si $X = f(a, b, c)$ ou a, b ,c sont des variables indépendantes, alors on a :

$$\Delta x = \left|\frac{\partial x}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial x}{\partial b}\right| \Delta b + \left|\frac{\partial x}{\partial c}\right| \Delta c$$