Chapitre 5

# Moment cinétique - Mouvements accélération centrale

## Sommaire



Jusqu'à présent, nous disposons de deux approches pour obtenir l'équation du mouvement d'un point matériel : la méthode du principe fondamental de la dynamique et celle du théorème de l'énergie cinétique. La deuxième approche n'est efficace que pour un système décrit avec une seule variable de position et avec des forces dont on sait évaluer le travail.

Ce chapitre est composé en deux parties, la première partie a pour objet d'introduire la notion du moment cinétique et d'établir une nouvelle méthode de résolution. La deuxième partie concerne l'étude des mouvements à force centrale dont le moment cinétique est une intégrale première du mouvement.

## 5.1 Moment cinétique

### 5.1.1 Définition

Soit un point matériel $M$ de masse $m$ animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}}(M)$ par rapport à un référentiel Galiléen $\mathcal{R}$. Soit $O$ un point du référentiel.

**Définition 5.1.1** *On appelle moment cinétique du point $M$ par rapport à $O$, le moment par rapport à $O$ du vecteur quantité de mouvement $\overrightarrow{P}_{/\mathcal{R}}(M)$ de $M$ dans $\mathcal{R}$.*

$$\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O/\mathcal{R}}(\overrightarrow{P}) \quad o \quad \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{v} \tag{5.1}$$

Soit un axe $\Delta$ passant par $O$ et de vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_{\Delta}$

**Définition 5.1.2** On appelle moment cinétique du point $M$ par rapport à $\Delta$ le scalaire $L_{\Delta}$ défini par :

$$L_{\Delta} = \overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}}(M).\overrightarrow{u}_{\Delta} = (\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}).\overrightarrow{u}_{\Delta} - (\overrightarrow{OM}, m\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}_{\Delta}) \tag{5.2}$$

**Remarques**

• Le moment cinétique $\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}}(M)$ d'un point $M$ dépend du point $O$ où on le détermine.

Considérons un point $O'$ distinct du point $O$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L}_{O'/\mathcal{R}}(M) &= \overrightarrow{O'M} \wedge \overrightarrow{P}_{/\mathcal{R}}(M) \\
&= (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) \wedge \overrightarrow{P}_{/\mathcal{R}}(M) \\
&= \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{P}_{/\mathcal{R}}(M) + \overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}}(M)
\end{aligned}$$

• Le moment cinétique d'un point $M$ par rapport à un axe $L_{\Delta} = \overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}}(M)$ est indépendant du point $O$ de l'axe. En effet si on définit par rapport à l'axe le moment

$$L'_{\Delta} = \overrightarrow{L}_{O'/\mathcal{R}}(M).\overrightarrow{u}_{\Delta}$$

Alors

$$L'_{\Delta} = (\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}}(M) + \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{P}_{/\mathcal{R}}(M)).\overrightarrow{u}_{\Delta} = \overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}}(M).\overrightarrow{u}_{\Delta} = L_{\Delta}$$

car $\overrightarrow{O'O}$ et $\overrightarrow{u}_{\Delta}$ sont colinéaires.

### 5.1.2 Moment d'une force par rapport à un point

On appelle moment de la force $\overrightarrow{f}$ par rapport à un point $O$ le vecteur :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f}$$

∘ $M$ désigne le point matériel sur lequel s'exerce la force $\overrightarrow{f}$

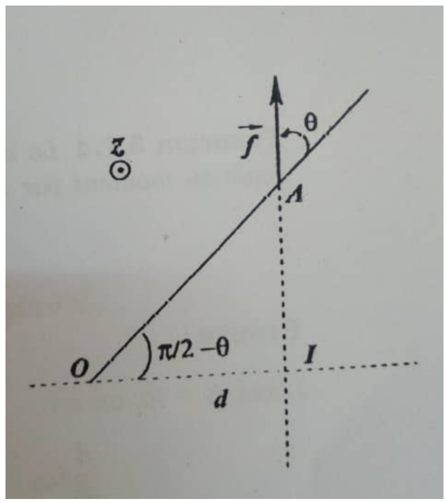
**Remarque :**

• Par un raisonnement analogue à celui effectué pour le moment cinétique, on peut établir que le moment des forces dépend du point où on le calcule.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}'}_O(\vec{f}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{f}$$

• Le moment d'une force par rapport à un point $O$ d'une force $\vec{f}$ appliquée en un point $A$ est par définition perpendiculaire à $\overrightarrow{OA}$ et à $\vec{f}$ du fait du produit vectoriel. Son module est égal au produit du module de la force par la distance du point $O$ la droite d'action de la force (distance appelée *bras de levier*) :

$$||\overrightarrow{OA} \wedge \vec{f}\,|| = ||\overrightarrow{OA}||.||\vec{f}\,||.|sin\theta|$$




∘ $\theta$ désigne l'angle entre $OA$ et la droite d'action de $\vec{f}$. On peut encore l'exprimer sous la forme

$$||\overrightarrow{OA} \wedge \vec{f}\,|| = d.||\vec{f}\,|| \quad \text{où} \quad d \quad \text{est le bras de levier.}$$

Pour le sens, on utilise le fait que $(\overrightarrow{OA}, \vec{f}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(f))$ est direct.

### 5.1.3 Moment d'une force par rapport à un axe

Soit un axe $\Delta$ de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ et soit $O$ un point de cet axe.

Le moment par rapport à l'axe $\Delta$ d'une force $\vec{f}$ s'exerçant sur un point matériel $M$ est donné par

$$\mathcal{M}_\Delta = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}).\vec{u}_\Delta$$

$\mathcal{M}_\Delta$ est indépendant du choix du point $O$ sur l'axe.

### 5.1.4 Théorème du moment cinétique

**Théorème 5.1.3** ***La dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à un point fixe est égale au moment par rapport à ce point de la résultante des forces appliquées à ce point matériel :***

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \tag{5.3}$$

**Preuve :**

Le point $O \in \mathcal{R}$ est fixe, on peut écrire :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L}_O(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\overrightarrow{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d(m\overrightarrow{v})}{dt}$$

Or

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \wedge m\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \frac{d(m\overrightarrow{v})}{dt} = m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}$$

Soit

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F})$$

**Théorème 5.1.4** ***La dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à un axe est égale au moment par rapport à cet axe de la résultante des forces appliquées à ce point matériel :***

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L}_\Delta(M) = (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}).\overrightarrow{u}_\Delta = \overrightarrow{\mathcal{M}}_\Delta(\overrightarrow{F}) \tag{5.4}$$

**Preuve :**

L'axe $\Delta \in \mathcal{R}$ , on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L_\Delta &= \frac{d}{dt}(\overrightarrow{L}_O(M).\overrightarrow{u}_\Delta) \\
&= \frac{d}{dt}\overrightarrow{L}_O(M).\overrightarrow{u}_\Delta + \overrightarrow{L}_O(M).\frac{d\overrightarrow{u}_\Delta}{dt} \quad avec \quad \frac{d\overrightarrow{u}_\Delta}{dt} = 0 \\
&= (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}).\overrightarrow{u}_\Delta = \overrightarrow{\mathcal{M}}_\Delta(\overrightarrow{F})
\end{aligned}$$

### 5.1.5 Exemple - le pendule simple

On s'intéresse au mouvement d'un pendule simple, c'est-à-dire au mouvement d'une masse ponctuelle $m$ suspendue à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable, de longueur $l$ dont l'autre extrémité est fixe.

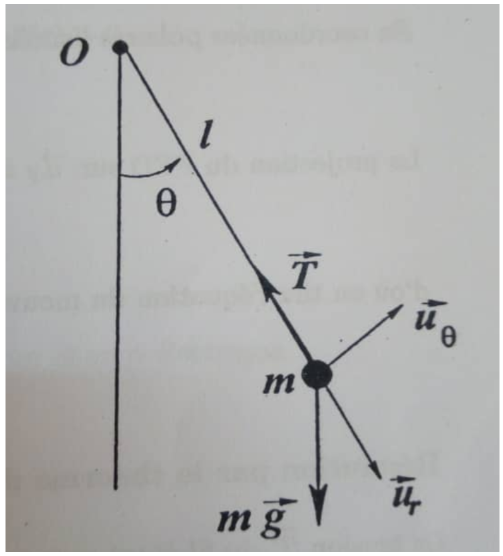
A l'instant initial, le pendule est lâché sans vitesse d'une position définie par l'angle $\theta_0$ entre la verticale descendante et la direction du pendule.

On suit les quatre étapes de résolution d'un problème de mécanique :

1. Système : masse ponctuelle $m$
2. Référentiel du laboratoire considéré comme Galiléen
3. Bilan des forces :
   - poids $m\overrightarrow{g}$
   - tension exercée par le fil $\overrightarrow{T}$
4. Résolution : Nous allons résoudre par la méthode du moment cinétique et ensuite comparer avec les méthodes du $PFD$ et $TEC$.

**Résolution par le théorème du moment cinétique**

Le théorème du moment cinétique s'écrit :




$$\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(m\overrightarrow{g}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{T})$$

En coordonnées polaires $\overrightarrow{OM} = l\overrightarrow{u}_r$ , $\overrightarrow{v} = l\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$

$$\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = (l\overrightarrow{u}_r) \wedge (l\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta) = ml^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z$$

On a :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_z$$

La droite d'action de $\overrightarrow{T}$ passe par $O$ donc $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(m\overrightarrow{g}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{g} = (l\overrightarrow{u}_r) \wedge mg(\cos\theta\overrightarrow{u}_r - \sin\theta\overrightarrow{u}_\theta) = -mgl\sin\theta\overrightarrow{u}_z$$

En projetant le théorème du moment cinétique sur $\overrightarrow{u}_z$, on a :

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

On obtient l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

**Résolution par le principe fondamental de la dynamique**

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T}$$

En coordonnées polaires, l'accélération s'écrit :

$$\overrightarrow{a} = -l\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r + \ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$$

La projection du $PFD$ sur $\overrightarrow{u}_\theta$ donne :

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

d'où l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

**Résolution par le théorème de l'énergie cinétique**

La tension $\overrightarrow{T}$ du fil étant perpendiculaire au mouvement, ne travaille pas. On a conservation de l'énergie mécanique car la seule force qui travaille, le poids, est une force conservatrice. L'énergie mécanique donne :

$$E_m = E_p + E_c = -mgl\cos\theta + C + \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = Constante$$

où $C$ est la constante de l'énergie potentielle de pesanteur. En dérivant l'expression de $E_m$, on a :

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

soit

$$\dot{\theta}(l\ddot{\theta} + g\sin\theta) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\theta} & = 0 \\ l\ddot{\theta} + g\sin\theta & = 0 \end{cases}$$

La solution $\dot{\theta} = 0$ est non intéressante car elle exclue le mouvement. On déduit ainsi l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

## 5.2 Mouvements à force centrale

### 5.2.1 Définition d'une force centrale

**Définition 5.2.1** *On appelle force centrale ou champ de force centrale, une force agissant sur un point matériel et possédant les propriétés suivantes :*
*(i) son support passe constamment par un point fixe $O$ ;*
*(ii) son module ne dépend que de la distance $r$ au point $O$.*
*Le point $O$ s'appelle le centre de la force et on a :*

$$\overrightarrow{F} = f(r)\overrightarrow{u}_r \quad \textit{avec} \quad \overrightarrow{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||} = \frac{\overrightarrow{r}}{r}$$

La force centrale est dite *attractive* si $f(r) < 0$, et *répulsive* si $f(r) > 0$.

En particulier la force centrale est dite *Newtonienne* si

$$\overrightarrow{F} = -\frac{k}{r^2}\overrightarrow{u}_r\,, \quad k > 0$$

**Exemple**

Considérons une charge $q$ placée en $O$. Elle crée en un point $M$ un champ électrique

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$$

La charge $Q$ placée en $M$ est soumise à la force

$$\overrightarrow{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$$

Cette force passe constamment par $O$ et son module ne dépend que de la variable $r$. C'est donc une force centrale par rapport au point $O$.

### 5.2.2 Mouvement accélération centrale

**Définition**

Le mouvement à force centrale encore appelé *mouvement accélération centrale* est un mouvement pour lequel le vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ passe constamment par un point fixe $O$. Si $O$ est pris comme origine, le vecteur accélération du point $M$ s'écrit :

$$\overrightarrow{a} = a\,\frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

Introduisons le vecteur $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}$, la dérivée par rapport au temps de ce vecteur donne :

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{C}}{dt} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a} \\ &= \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{C}$ est donc constant quelque soit $t$. Sachant que $\overrightarrow{C}$ est perpendiculaire au plan de la trajectoire définie par $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v}$, on peut donc déduire que le mouvement du mobile $M$ s'effectue dans un plan fixe. On dit que le mouvement est *plan*.

### 5.2.3 Loi des aires

Soit $(xOy)$ le plan du mouvement. Soient $M$ et $M'$ les positions occupées par le mobile aux instants $t$ et $t + dt$ (voir figure).

On se propose de calculer l'aire balayée $d\mathcal{A}$ par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ pendant la durée $dt$ :

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}\,dt \\ \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C} \end{aligned}$$

Soit

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2}C\,dt$$

On appelle vitesse aréolaire la quantité

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}\ ,$$

dérivée par rapport au temps de l'aire balayée par le rayon vecteur.

$\overrightarrow{C}$ étant constant, la norme $C = ||\overrightarrow{C}||$ est une constante appelée *constante des aires*. L'aire balayée entre deux instants $t_1$ et $t_2$ est donnée par :

$$\Delta\mathcal{A} = \frac{C}{2}(t_2 - t_1)$$

Ce résultat exprime la loi des aires : *dans un mouvement à accélération centrale, l'aire balayée par le vecteur position est proportionnelle à la durée de balayage.*

Exprimons la constante des aires en fonction des coordonnées polaires. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v} &= \rho\overrightarrow{u}_\rho \wedge (\dot{\rho}\overrightarrow{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta) \\ &= \rho^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z\end{aligned}$$

Soit

$$C = \rho^2\dot{\theta}$$

• Si un point est animé d'un mouvement à accélération centrale, l'une des trois propriétés suivantes, équivalentes entre elles doit être vérifiée :
- $\rho^2\dot{\theta} =$ *Constante ;*
- *la vitesse aréolaire* $\dfrac{d\mathcal{A}}{dt} = \dfrac{C}{2} = \dfrac{\rho^2\dot{\theta}}{2}$ *est une constante ;*
- *les aires balayées sont proportionnelles au temps de balayage.*

• Par définition, le mouvement d'un point possédant l'une des trois propriétés, est dit *mouvement selon la loi des aires*.

### 5.2.4 Formules de Binet

Ce sont des formules relatives aux mouvements à accélération centrale. Elles déterminent les composantes radiale et orthoradiale des vecteurs vitesse et accélération dans une base polaire, en fonction de la constante $C$ des aires, des variables $\theta$ et $u = \dfrac{1}{\rho}$.

Comme $C = \rho^2\dot{\theta}$ et $u = \dfrac{1}{\rho}$, alors $\dot{\theta} = \dfrac{C}{\rho^2} = Cu^2$

$$C = cte \implies 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho^2\ddot{\theta} = \rho(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = 0$$

soit

$$2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = a_\theta = 0$$

avec $a_\theta$ la composante orthoradiale de $\overrightarrow{a}$ suivant $\overrightarrow{u}_\theta$.

$$\boxed{a_\theta = 0} \tag{5.5}$$

• Les composantes radiale $V_\rho$ et orthoradiale $V_\theta$ de la vitesse sont :

$$V_\rho = \dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt}\ ; \quad V_\theta = \rho\dot{\theta} = \rho\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \left[\frac{d(\frac{1}{u})}{d\theta}\right]\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$
$$= -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}.\frac{C}{\rho^2} = -C\,\frac{du}{d\theta}$$

soit

$$\boxed{V_\rho = -C\,\frac{du}{d\theta}} \tag{5.6}$$

$$\rho\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\rho}\rho^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\rho}\rho^2\frac{C}{\rho^2} = Cu$$

soit

$$\boxed{V_\theta = Cu} \tag{5.7}$$

• Exprimons $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$ en fonction de $C$ et $u$.

$$\ddot{\rho} = \frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\rho}{dt}\right] = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{d\rho}{dt}\right]\frac{d\theta}{dt}$$
$$= \frac{d}{d\theta}\left[-C\frac{du}{d\theta}\right]Cu^2 = -C^2\frac{d^2u}{d\theta^2}u^2$$

$$\rho\dot{\theta}^2 = \frac{1}{u}(Cu^2)^2 = C^2u^3$$

$$\boxed{a_\rho = -C^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)} \tag{5.8}$$

Les formules $(5)$, $(6)$, $(7)$ et $(8)$ constituent les formules de Binet.

**Intérêt :** Dans le cas où l'accélération est une fonction connue de $\rho$ et de $\theta$, l'expression $(8)$ qui est une équation différentielle permet de déterminer la trajectoire et la loi des aires permet de préciser l'équation horaire.

### 5.2.5 Propriétés d'une force centrale

**Le moment cinétique est constant**

Selon le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$$

or $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont constamment colinéaires, donc

$$\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt} = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{C}$$

◦ $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}$ est un vecteur constant. Cette quantité ne faisant intervenir que les dérivées premières est une intégrale première de mouvement que nous désignerons sous le nom d'*intégrale première du moment cinétique*.

Le vecteur $\overrightarrow{C}$ est déterminé par les conditions initiales :

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{OM_0} \wedge m\overrightarrow{v_0}$$

**La trajectoire est plane**

La relation $\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = \overrightarrow{C}$ montre que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v}$ sont constamment perpendiculaires à $\overrightarrow{C}$ : la trajectoire est dans le plan $\Pi$ perpendiculaire à $\overrightarrow{C}$ passant par $O$ et contenant $\overrightarrow{v}_0$. On en tire la propriété fondamentale suivante :

*Les mouvements à force centrale sont des mouvements plans.*

**Le mouvement se fait suivant la loi des aires**

Considérons dans $\Pi$ une base polaire $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$. Repérons le point $M$ par ses coordonnées polaires : $OM = r$ et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$. On a :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u}_r\ ,\ \ \overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{L}_O &= \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} \\ &= mr\overrightarrow{u}_r \wedge (\dot{r}\,\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta) \\ &= mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z \end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{Cte}$ alors $r^2\dot{\theta} = cte$. Le mouvement se fait donc suivant la loi des aires.

$$C = r^2\dot{\theta} = 2\,\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \text{constante des aires}$$

◦ $\mathcal{A}$ est l'aire balayée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ entre l'instant initial $t_0$ et l'instant $t$.

### 5.2.6 Conservation de l'énergie mécanique totale

Le travail élémentaire de la force centrale $\overrightarrow{F} = f(r)\overrightarrow{u}_r$ est donné par :

$$dW = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v}.dt$$

où

$$\overrightarrow{F}.\overrightarrow{v} = f(r)\overrightarrow{u}_r.\left(\frac{dr}{dt}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta\right) = f(r)\frac{dr}{dt}$$

On a :

$$dW = f(r)dr = -dE_p(r)$$

où la fonction potentielle

$$E_p(r) = -\int f(r)dr$$

est une primitive de $-f(r)$.
L'énergie mécanique totale

$$\begin{aligned} E_m &= E_p + E_c \\ &= E_p(r) + \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] \end{aligned}$$

est constante. Sa valeur est déterminée par les conditions initiales, position $r_0$ et vitesse $v_0$ :

$$E_m = E_p(r_0) + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Nous obtenons une deuxième intégrale première du mouvement, celle de l'énergie :

$$E_m = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + E_p(r)$$

Les deux intégrales premières du mouvement (celles du moment cinétique et de l'énergie) permettent de déterminer les lois de mouvement $r(t)$ et $\theta(t)$ ainsi que l'équation de la trajectoire $r = f(\theta)$.

## 5.3 Mouvement d'un point matériel dans un champ central Newtonien

Il s'agit du mouvement d'un point matériel placé dans un champ de forces centrales de la forme :

$$\overrightarrow{F} = -k\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\ , \quad k > 0$$

C'est le cas des forces coulombiennes

$$\overrightarrow{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$$

lorsque $q$ et $Q$ sont de signes opposés.
C'est aussi le cas des forces gravitationnelles

$$\overrightarrow{F} = -GMm\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$$

### 5.3.1 Équation polaire de la trajectoire

Le mouvement étant à force centrale, la trajectoire est plane. Ce plan est déterminé par les conditions initiales.

Le point $M$, dans ce plan, est représenté par ses coordonnées polaires $r$ et $\theta$.

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_r$$

La constante $C$ des aires est donnée par

$$C = \frac{L_O}{m} = r^2\dot{\theta}$$

**Équation polaire**

D'après les formules de Binet, l'accélération du point matériel est :

$$\overrightarrow{a} = -C^2 u^2 \left( u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \overrightarrow{u}_r \ , \quad \text{avec} \quad u = \frac{1}{r}$$

Selon le $PFD$

$$\overrightarrow{F} = -\frac{k}{r^2} \overrightarrow{u}_r = m \overrightarrow{a}$$

On a :

$$-\frac{k}{r^2} = -mC^2 u^2 \left( u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right)$$

soit

$$ku^2 = mC^2 u^2 \left( u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right)$$

On en déduit que

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{mC^2}$$

Cette dernière équation est une équation différentielle ordinaire du second ordre de solution

$$u = \frac{k}{mC^2} + A\cos(\theta - \varphi)$$

où $A$ et $\varphi$ sont deux constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales. On a :

$$r = \frac{1}{\frac{k}{mC^2} + A\cos(\theta - \varphi)} = \frac{1}{\frac{k}{mC^2}\left[1 + \frac{AmC^2}{k}\cos(\theta - \varphi)\right]}$$

Posons

$$p = \frac{mC^2}{k} \quad \text{et} \quad e = \frac{AmC^2}{k} = A_p$$

On a :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \varphi)}$$

qui est une équation polaire d'une conique de paramètres $p$, d'excentricité $e$, dont l'axe focal fait l'angle $\varphi$ avec l'axe $Oz$ et dont l'un des foyers est le point $O$.

Nous supposons dans la suite que $\varphi = 0$, alors

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

• Si $e < 1$ alors la trajectoire est une ellipse.
• Si $e = 1$ alors la trajectoire est une parabole.
• Si $e > 1$ alors la trajectoire est une hyperbole.
• Pour un cercle, $e = 0$

### 5.3.2 Énergie

$$\overrightarrow{F} = -\frac{k}{r^2}\overrightarrow{u} = \frac{d}{dr}\left(\frac{k}{r}\right)\overrightarrow{u}_r$$

la force centrale Newtonienne dérive d'une énergie potentielle

$$E_p = -\frac{k}{r} + Cte$$

L'énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

D'après les formules de Binet

$$v^2 = C^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]$$

La force $\overrightarrow{F}$ étant conservative, l'énergie mécanique du système se conserve

$$E_c + E_p = E_m = Cte$$

Soit

$$E_m = \frac{1}{2}mC^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right] - ku$$

or

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{p} \quad \text{donc} \quad \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{p}\sin\theta$$

On a :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}mC^2\left\{\frac{1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta + e^2\sin^2\theta}{p^2}\right\} - \frac{k}{p}(1 + e\cos\theta) \\ &= \frac{1}{2}\frac{mC^2}{p^2}\left(1 + 2e\cos\theta + e^2\right) - \frac{k}{p}(1 + e\cos\theta) \end{aligned}$$

or

$$\frac{mC^2}{p^2} = \frac{k}{p}$$

Donc

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{k}{p}\left\{\frac{1}{2} + e\cos\theta + \frac{e^2}{2} - 1 - e\cos\theta\right\} && (5.9) \\ &= \frac{k\left(e^2 - 1\right)}{2p} && (5.10) \end{aligned}$$

• Si la trajectoire est une ellipse, $e < 1$, alors $E_m < 0$.
• Si la trajectoire est une parabole, $e = 1$, alors $E_m = 0$.
• Si la trajectoire est une hyperbole, $e > 1$, alors $E_m > 0$.

### 5.3.3 Caractéristiques de la trajectoire

La trajectoire est caractérisée par les paramètres $e$ et $p$.

Soient $r_0$ et $v_0$ les valeurs initiales de $r$ et $v$. Le module du moment cinétique est

$$L_O = mr_0v_0 \sin\alpha \quad \text{si} \quad \alpha = (\overrightarrow{OM_0}, \vec{v}_0).$$

Comme $C = \dfrac{L_O}{m}$, on a : $C = r_0v_0 \sin\alpha$ et donc

$$p = \frac{mC^2}{k} = \frac{m}{k} r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha$$

$$\boxed{p = \frac{m}{k} r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha} \tag{5.11}$$

$$e^2 - 1 = \frac{2p}{k} E_m$$

Soit

$$e^2 = \frac{2}{k}\frac{m}{k} r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha E_m + 1$$

Finalement

$$\boxed{e = \sqrt{\frac{2mr_0^2v_0^2 \sin^2\alpha E_m + 1}{k^2}}} \tag{5.12}$$

La connaissance des conditions initiales permet ainsi de déterminer entièrement la trajectoire.

## 5.4 Lois de Kepler

Ces lois concernent les mouvements des planètes dans le système solaire, ainsi que le mouvement des satellites autour de la terre.

Le référentiel d'étude est le référentiel $\mathcal{R}_0$ héliocentrique d'origine $S$ (centre d'inertie du système solaire) et d'axes $Sx_0$, $Sy_0$, $Sz_0$ dirigés vers trois étoiles fixes. Ce référentiel $\mathcal{R}_0$ est encore appelé le référentiel de Kepler. Il sert de référentiel galiléen. Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_1$ d'origine $O$ (centre d'inertie de la Terre) et d'axes parallèles $Sx_0$, $Sy_0$, $Sz_0$, permet d'étudier le mouvement d'un satellite autour de la Terre.

**Première Loi**

Chaque planète $P$ décrit dans $\mathcal{R}_0$ une ellipse dont le soleil est un foyer. Cette ellipse de demi-axe $O_1A = a$ et de période $T$, a pour équation polaire

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \quad \text{(paramètre } p\text{, excentricité } e\text{)}$$

en prenant $S$ comme origine des coordonnées polaires.

**Deuxième Loi**

Pendant l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$, l'aire balayée par le rayon soleil-planète $\overrightarrow{SP}$ est proportionnelle au temps mis $\Delta t$ pour la décrire (loi des aires).

**Troisième Loi**

Le rapport $\dfrac{T^2}{a^3}$ est le même pour toutes les planètes du système solaire.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_S}$$

**Mouvement des satellites :** Le mouvement elliptique d'un satellite autour de la Terre *(Centre $O$, masse $m_T$, rayon $R$)* est également régi par les lois de Kepler (on remplace $S$ par $O$ et $m_S$ par $m_T$ ).