Chapter 4

Cinétique du solide

Sommaire

4.1 Introduction

Dans un modèle mécanique, les étapes qui suivent la modélisation du mouvement (cinématique) et la géométrie des masses, consistent à formuler les principes de conservation de la mécanique (dans le cadre de la cinématique retenue), conservation de la masse, de la quantité de mouvement,de l'énergie. En effet, formuler pour les systèmes de solides indéformables le principe fondamental de la dynamique, permettra de faire apparaître les notions de torseur cinétique, de centre d'inertie et de tenseur d'inertie. Le rapprochement des concepts de la cinématique (vitesse, accélération) et ceux de la géométrie des masses (centre de masse, moment d'inertie) est l'objet de la cinétique du solide (ou cinématique des masses).

4.2 Définitions des cinq quantités cinétiques

Considérons $R_0\left(O, \overrightarrow{i}_0, \overrightarrow{j}_0, \overrightarrow{k}_0\right)$ un repère fixe, M un point matériel de masse m, de vitesse $\overrightarrow{v}(M/R_0)$ et l'accélération $\overrightarrow{\gamma}(M/R_0)$. Pour ce point matériel, on introduit cinq quantités cinétiques qui sont fonctions de sa masse, de sa vitesse et de son accélération.

La quantité de mouvement: $\overrightarrow{p}(M/R_0) = m\overrightarrow{v}(M/R_0)$
Le moment cinétique (ou moment de la quantité de mouvement)/ à O:

$$\overrightarrow{\sigma}(O, M/R_0) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p}(M/R_0) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}(M/R_0)$$

La quantité d'accélération: $\overrightarrow{a}(M/R_0) = m\overrightarrow{\gamma}(M/R_0)$
Le moment dynamique (ou moment de la quantité d'accélération)/ à O:

$$\overrightarrow{\delta}(O, M/R_0) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a}(M/R_0) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{\gamma}(M/R_0)$$

L'énergie cinétique: $E_c(M/R_0) = \dfrac{1}{2}m\overrightarrow{v}^2(M/R_0)$

4.3 Torseur Cinétique

Soit (S) un système matériel et dm un élément de masse autour de $M \in (S)$.

4.3.1 Quantité de Mouvement

4.3.1.1 Introduction

La quantité de mouvement est une grandeur physique qui est associée à la masse et à la vitesse d'un objet. On l'utilise pour étudier le comportement des objets qui entrent en collision les uns avec les autres.

4.3.1.2 Définition

la quantité de mouvement de (S) est définie par:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p}(S/R_0) &= \int_{(S)} d\overrightarrow{p}(M/R_0) = \int_{(S)} \overrightarrow{v}(M/R_0)dm \\
\overrightarrow{p}(S/R_0) &= \int_{(S)} \overrightarrow{v}(M/R_0)dm = \int_{(S)} \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R_0} dm = \frac{d}{dt}\int_{(S)} \overrightarrow{OM}dm = \left.\frac{d(m\overrightarrow{OG})}{dt}\right|_{R_0} = m\overrightarrow{v}(G/R_0)
\end{aligned}$$

4.3.2 Moment Cinétique

4.3.2.1 Introduction

Le moment cinétique, est la grandeur physique qui joue dans le cas d'une rotation, un rôle analogue à celui de la quantité de mouvement pour une translation; si la conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé est liée à l'invariance par translation dans l'espace (propriété d'homogénéité de l'espace), la conservation du mouvement cinétique est liée à l'isotropie de l'espace.

4.3.2.2 Définition

Le moment cinétique de (S) par rapport à O est défini par :

$$\overrightarrow{\sigma}(O, S/R_0) = \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}(M/R_0)dm$$

Soit $A \in \xi$ (le point A est quelconque).

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}(O,S/R_0) &= \int_{(S)} \left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}\right)\wedge \vec{v}(M/R_0)dm = \overrightarrow{OA}\wedge \int_{(S)} \vec{v}(M/R_0)dm + \int_{(S)} \overrightarrow{AM}\wedge \vec{v}(M/R_0)dm \\
\vec{\sigma}(O,S/R_0) &= \overrightarrow{OA}\wedge m\vec{v}(G/R_0)+\vec{\sigma}(A,S/R_0) \\
\vec{\sigma}(O,S/R_0) &= \vec{\sigma}(A,S/R_0)+m\vec{v}(G/R_0)\wedge \overrightarrow{AO}
\end{aligned}$$

Cette dernière écriture vérifie la structure d'un torseur appelé **torseur cinétique**, noté $[C]$.
Ses éléments de réduction en O sont :

$$\begin{cases} \vec{\sigma}(O,S/R_0) : \textit{moment cinétique} \\ \\ m\vec{v}(G/R_0) : \textit{résultante cinétique} \end{cases}$$

Ainsi : $[C\,(O)] = [\vec{\sigma}(O,S/R_0), m\vec{v}(G/R_0)]$.

Si $A \equiv G$, alors

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}(O,S/R_0) &= \vec{\sigma}(G,S/R_0)+\overrightarrow{OG}\wedge m\vec{v}(G/R_0) \\
&= \vec{\sigma}(G,S/R_0)+\vec{\sigma}(O,m_G/R_0)
\end{aligned}$$

avec $\vec{\sigma}(O,m_G/R_0)$ désignant le moment cinétique par rapport à O d'un point matériel de masse m placé en G, animé de la même vitesse que G et $m_G = m(S)$.

En résumé:
$\vec{\sigma}(O,S/R_0) = \vec{\sigma}(G,S/R_0)+\vec{\sigma}(O,m_G/R_0)$: (1^{er} théorème de Koenig)

4.3.2.3 Moment cinétique par rapport à G

Définition du repère barycentrique :
C'est un repère, noté R_G, lié au centre de masse G du solide et dont les axes gardent une direction fixe par rapport à ceux de R_0.
Ainsi $R_G\left(G, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\right)$ est en translation par rapport à $R_0\left(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\right)$

Évaluons

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}(G,S/R_0) &= \int_{(S)} \overrightarrow{GM}\wedge \vec{v}(M/R_0)dm = \int_{(S)} \overrightarrow{GM}\wedge \left(\vec{v}\,(M/R_G)+\vec{v}_e\,(M)\right)dm \\
\vec{\sigma}(G,S/R_0) &= \vec{\sigma}(G,S/R_G)+\underbrace{\left(\int_{(S)} \overrightarrow{GM}dm\right)}_{=\vec{0}}\wedge \vec{v}(G/R_0) = \vec{\sigma}(G,S/R_G) \\
\textit{Soit} \quad \vec{\sigma}(G,S/R_0) &= \vec{\sigma}(G,S/R_G)
\end{aligned}$$

Remarque
On utilise le repère R_G pour le calcul de $\vec{\sigma}(G,S/R_0)$

4.3.2.4 Moment cinétique par rapport à un axe Δ

Soit (Δ) un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$ et A un point quelconque appartenant à (Δ).

$\overrightarrow{\sigma}(\Delta, S/R_0) = \overrightarrow{\sigma}(A, S/R_G).\overrightarrow{u}$
Ce résultat est indépendant de $A \in (\Delta)$ en raison de l'équiprojectivité du torseur cinétique.

4.3.2.5 Autres résultats relatifs à un solide

Considérons :
$R\left(G, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$: un repère lié au solide
$R_0\left(O, \overrightarrow{i}_0, \overrightarrow{j}_0, \overrightarrow{k}_0\right)$: un repère fixe
$R_G\left(G, \overrightarrow{i}_0, \overrightarrow{j}_0, \overrightarrow{k}_0\right)$: un repère barycentrique

a- Le solide (S) est animé d'un mouvement de translation / R_0
Soit A un point quelconque. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) &= \overrightarrow{\sigma}(G, S/R_0) + m\overrightarrow{v}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GA} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{\sigma}(G, S/R_G)}_{=\overrightarrow{0}} + m\overrightarrow{v}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GA}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\sigma}(G, S/R_G) = \int_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{v}(M/R_G)dm = \int_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge \underbrace{\overrightarrow{v}(G/R_G)}_{=\overrightarrow{0}} dm + \int_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\Omega}(M/R_G)}_{=\overrightarrow{0}} \wedge \overrightarrow{GM} dm = \overrightarrow{0}$$

En définitive : $\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) = \overrightarrow{AG} \wedge m\overrightarrow{v}(G/R_0)$

b- Le point A est un point du solide (S), fixe dans R_0
Soit A un point du solide (S) fixe dans $R_0 \implies \overrightarrow{v}(A/R_0) = \overrightarrow{0}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}(M/R_0) &= \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) &= \int_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v}(M/R_0)dm = \int_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm = J(A, S)\left(\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)\right)\end{aligned}$$

Représentation matricielle : $\underbrace{\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0)}_{(3\times1)} = \underbrace{\Pi(A, S)}_{(3\times3)} . \underbrace{\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)}_{(3\times1)}.$

Remarque très importante
Il faut toujours exprimer $\overrightarrow{\sigma}(O, S/R_0)$ et $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$ dans la même base que $\Pi(O, S)$.

c- Le solide (S) est en rotation autour d?un axe (Δ) fixe dans R_0
Soit $A \in (\Delta) \implies A$ est fixe dans R_0 i.e. $\overrightarrow{v}(A/R_0) = \overrightarrow{0}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}(M/R_0) &= \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) &= \int_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v}(M/R_0)dm = \int_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm = J(A, S)\left(\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)\right)\end{aligned}$$

Posons $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0) = \omega\overrightarrow{u}$

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta, S/R_0) &= \overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0).\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}.J(A, S)\left(\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)\right) = \omega\overrightarrow{u}.J(A, S)(\overrightarrow{u}) = \omega.I(\Delta, S) \\ \sigma(\Delta, S/R_0) &= \omega.I(\Delta, S)\end{aligned}$$

d- Le mouvement de (S) est quelconque
On a

$\vec{\sigma}(G, S/R_0) = \vec{\sigma}(G, S/R_G)$ avec G fixe dans R_G
$\vec{\sigma}(G, S/R_G) = J(G,S)\left(\vec{\Omega}(S/R_G)\right) = J(G,S)\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\right)$
En revenant à l'expression générale de $\vec{\sigma}(O, S/R_0)$:

$\vec{\sigma}(O, S/R_0) = \vec{\sigma}(G, S/R_0) + m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}(G/R_0)$
$\vec{\sigma}(O, S/R_0) = \underbrace{J(G,S)\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\right)}_{rotation} + \underbrace{m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}(G/R_0)}_{translation}$

4.4 Torseur Dynamique $[D]$

4.4.1 Quantité d'accélération (résultante dynamique)

La quantité d'accélération de (S) est définie par :

$$\begin{aligned}
\vec{a}(S/R_0) &= \int_{(S)} \vec{\gamma}(M/R_0)dm = \int_{(S)} \left.\frac{d\vec{v}(M/R_0)}{dt}\right|_{R_0} dm = \frac{d}{dt}\int_{(S)} \vec{v}(M/R_0)dm \\
&= m\left.\frac{d\vec{v}(G/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = m\vec{\gamma}(G/R_0) \\
\vec{a}(S/R_0) &= \int_{(S)} \vec{\gamma}(M/R_0)dm = m\vec{\gamma}(G/R_0) : \textit{résultante dynamique}
\end{aligned}$$

4.4.2 Moment dynamique

4.4.2.1 Définition

Le moment dynamique du solide (S) par rapport à O est défini par :

$$\vec{\delta}(O, S/R_0) = \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}(M/R_0)dm$$

Considérons un point quelconque $A \in \xi$.
$\vec{\delta}(O, S/R_0) = \int_{(S)} \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \vec{\gamma}(M/R_0)dm = \overrightarrow{OA} \wedge \int_{(S)} \vec{\gamma}(M/R_0)dm + \int_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M/R_0)dm$
$\vec{\delta}(O, S/R_0) = \vec{\delta}(A, S/R_0) + \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{\gamma}(G/R_0)$: vérifie la structure d'un torseur.
On définit ainsi un torseur appelé torseur dynamique noté $[D]$

Ses éléments de réduction en O sont :

$$\begin{cases} \vec{\delta}(O, S/R_0) : \textit{moment dynamique} \\ \\ m\vec{\gamma}(G/R_0) : \textit{résultante dynamique} \end{cases}$$

Ainsi : $[D\,(O)] = \left[\overrightarrow{\delta}(O, S/R_0), m\overrightarrow{\gamma}(G/R_0)\right]$

4.4.2.2 Moment dynamique par rapport à un axe (Δ)

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire porté par (Δ) et $A \in (\Delta)$:

$$\overrightarrow{\delta}(\Delta, S/R_0) = \overrightarrow{\delta}(A, S/R_0).\overrightarrow{u}$$

Ce résultat est indépendant de $A \in (\Delta)$ à cause de l'équiprojectivité du champ des vecteurs $\overrightarrow{\delta}(O, S/R_0)$

4.4.2.3 Relation entre $[\dot{C}]$ et $[D]$

Soit A un point quelconque $\in \xi$.

$$\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) = \int_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v}(M/R_0)dm$$

En dérivant dans R_0

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0)}{dt}\right|_{R_0} &= \int_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\gamma}(M/R_0)dm + \int_{(S)} [\overrightarrow{v}(M/R_0) - \overrightarrow{v}(A/R_0)] \wedge \overrightarrow{v}(M/R_0)dm \\
\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0)}{dt}\right|_{R_0} &= \overrightarrow{\delta}(A, S/R_0) - \overrightarrow{v}(A/R_0) \wedge \int_{(S)} \overrightarrow{v}(M/R_0)dm \\
\overrightarrow{\delta}(A, S/R_0) &= \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0)}{dt}\right|_{R_0} + \overrightarrow{v}(A/R_0) \wedge m\overrightarrow{v}(G/R_0)
\end{aligned}$$

Donc en général $[\dot{C}] \neq [D]$, l'égalité $[\dot{C}] = [D]$ est vérifiée dans les quatre cas particuliers suivants :

- R_0 est le repère barycentrique $R_G \implies \overrightarrow{v}(G/R_0) = \overrightarrow{0}$;
- Le point A est fixe dans le repère R_0 de manière permanente ou instantanée (ceci est vrai pour I_1 et I_2 mais pas pour le point géométrique I).
- $A \equiv G$;
- $\overrightarrow{v}(A/R_0) \parallel \overrightarrow{v}(G/R_0)$ $(\forall t)$

Ainsi

$$\begin{cases}
\overrightarrow{\delta}(G, S/R_0) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{\sigma}(G, S/R_0)}{dt}\right|_{R_0} \\[2ex]
\overrightarrow{\delta}(I_1, S_1/R_0) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{\sigma}(I_1, S_1/R_0)}{dt}\right|_{R_0} \quad s'il\ y\ a\ absence\ de\ glissement\ de\ (S_1)\ par\ rapport\ \text{à}\ R_0 \\[2ex]
\overrightarrow{\delta}(I, S/R_0) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{\sigma}(I, S/R_0)}{dt}\right|_{R_0} + \overrightarrow{v}(I/R_0) \wedge m\overrightarrow{v}(G/R_0)
\end{cases}$$

Remarque importante

A chaque instant, les points I_1 et I sont confondus ($I_1 \equiv I$) $\Longrightarrow$

$$\vec{\sigma}(I_1, S/R_0) = \vec{\sigma}(I, S/R_0) + \underbrace{m\vec{v}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{II_1}}_{\vec{0}}$$

$$\vec{\sigma}(I_1, S/R_0) = \vec{\sigma}(I, S/R_0)$$

Ne pas oublier de prendre en considération la dérivée par rapport au temps du vecteur nul, $m\vec{v}(G/R_0)\wedge \overrightarrow{II_1}$, à l'instant considéré.

4.4.3 Autres résultats

4.4.3.1 Le solide (S) est animé d'un mouvement de translation / à R_O

En choisissant les éléments de réduction en G on aura :

$$[\dot{C}(G)] = [D(G)]$$

$$\vec{\delta}(G, S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = \vec{0}$$

car $\vec{\sigma}(G, S/R_0) = \vec{\sigma}(G, S/R_G) = \vec{0}$ dans un mouvement de translation.

4.4.3.2 Le solide (S) a un de ses points fixe dans R_0

Soit $A \in (S)$ tel que A est fixe dans $R_0 \implies [\dot{C}(G)] = [D(G)]$

$$\vec{\delta}(A, S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A, S/R_0)}{dt}\right|_{R_0}$$

Puisque A est fixe dans $R_0 \implies \vec{\sigma}(A, S/R_0) = J(A, S)\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\right)$
En pratique, $\vec{\sigma}(A, S/R_0)$ est connu par ses composantes dans un repère R_i lié au solide où $J(A, S)$ aurait été calculé.

$$\vec{\delta}(A, S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A, S/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A, S/R_0)}{dt}\right|_{R_i} + \vec{\Omega}(R_i/R_0) \wedge \vec{\sigma}(A, S/R_0)$$

Cas particulier: R_i est un repère principal d'inertie lié au solide (S).

$II(A, S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$ dans $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et $\vec{\Omega}(R_i/R_0) = p\,\vec{i} + q\,\vec{j} + r\,\vec{k}$

$$\vec{\sigma}(A, S/R_0) = II(A, S)\vec{\Omega}(R_i/R_0) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}_{dans\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)}$$

$$\vec{\delta}(A, S/R_0) = A\dot{p}\,\vec{i} + B\dot{q}\,\vec{j} + C\dot{r}\,\vec{k} + \left(p\,\vec{i} + q\,\vec{j} + r\,\vec{k}\right) \wedge \left(Ap\,\vec{i} + Bq\,\vec{j} + Cr\,\vec{k}\right)$$

$$\vec{\delta}(A, S/R_0) = \begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr \\ \\ B\dot{q} + (A - C)pr \\ \\ C\dot{r} + (B - A)pq \end{cases}$$: Formules d'Euler obtenues avec l'hypothèse de $A \in (S)$ et fixe

dans R_0.
La matrice $II(A,S)$ est exprimée dans R_i lié à (S) et R_i est un repère principal d'inertie.

4.4.3.3 Le solide (S) est en rotation autour d'un axe fixe dans R_0

Soit (Δ) un axe fixe dans R_0 de vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ et R un repère lié à (S).
Puisque le vecteur $\overrightarrow{\Omega}(R/R_0)$ est porté par (Δ), $\overrightarrow{\Omega}(R/R_0) = \omega\overrightarrow{u}$.
Considérons $A \in (\Delta)$, donc A est fixe dans R_0.

$$\overrightarrow{\delta}(\Delta, S/R_0) = \overrightarrow{\delta}(A, S/R_0).\overrightarrow{u} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right|_{R_0}.\overrightarrow{u} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}(A,S/R_0).\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{R_0}$$

$$\overrightarrow{\delta}(\Delta, S/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}(\Delta,S/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = I(\Delta,S)\dot{\omega}$$

4.4.3.4 Le mouvement de (S) est quelconque

Soit $A \in \xi$ (A quelconque)
$\overrightarrow{\delta}(A,S/R_0) = \overrightarrow{\delta}(G,S/R_0) + m\overrightarrow{\gamma}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GA}$ (formule de transfert du torseur dynamique)

$$\overrightarrow{\delta}(G, S/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}(G,S/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = \frac{d}{dt}\left[J(G,S)\overrightarrow{\Omega}(R/R_0)\right]_{R_0}$$

$$\overrightarrow{\delta}(A, S/R_0) = \frac{d}{dt}\left[J(G,S)\overrightarrow{\Omega}(R/R_0)\right]_{R_0} + m\overrightarrow{\gamma}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GA}$$

Attention
Ne pas oublier que, même si la dérivation est effectuée par rapport à R_0, l'opération $J(G,S)$ est souvent exprimé dans un repère lié à (S).

4.5 Énergie Cinétique

4.5.1 Introduction

En histoire des sciences, **G. Leibniz**, s'opposant à **Descartes** qui estimait que la quantité de mouvement se conservait toujours, développa l'idée de la «*force vive*» (vis versa), à laquelle il attribuait la valeur mv^2. La force vive est donc le double de l'énergie cinétique. La force vive est un concept obsolète où on trouve la première expression mathématique de ce qui sera connu comme la loi de la conservation de l'énergie. Elle peut être considérée comme une sorte d'énergie cinétique ou d'énergie reliée au mouvement des objets. D'où la naissance du concept énergie cinétique (du Grec «énergeia»), qui détermine l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement par rapport à un référentiel donné.

4.5.2 Deuxième théorème de Koenig

L'énergie cinétique de (S), calculée dans le repère R_0, est définie par :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_S (\overrightarrow{v}(M/R_0))^2\, dm = \int_S dE_c(M/R_0)$$

On a :

$$\vec{v}(M/R_0) = \vec{v}(M/R_G) + \vec{v}(G/R_0) + \underbrace{\vec{\Omega}(R_G/R_0)}_{\vec{0}} \wedge \overrightarrow{GM} \implies \vec{v}(M/R_0) = \vec{v}(M/R_G) + \vec{v}(G/R_0)$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{v}(M/R_0)\right)^2 dm = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{v}(M/R_G) + \vec{v}(G/R_0)\right)^2 dm$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{v}(M/R_G)\right)^2 dm + \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{v}(G/R_0)\right)^2 dm + \vec{v}(G/R_0).\int_S \vec{v}\,(M/R_G)\, dm$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{v}(M/R_G)\right)^2 dm + \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{v}(G/R_0)\right)^2 dm + \vec{v}(G/R_0).\frac{d}{dt}\underbrace{\int_S \overrightarrow{GM} dm}_{\vec{0}}$$

$$E_c(S/R_0) = E_c(S/R_G) + \frac{1}{2}m\left(\vec{v}(G/R_0)\right)^2 : \text{C'est le deuxième théorème de Koenig.}$$

4.5.2.1 Le solide (S) est animé d'un mouvement de translation $/R_0$

$$\vec{v}(M/R_G) = \underbrace{\vec{v}(G/R_G)}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{\Omega}(S/R_G)}_{\vec{0}} \wedge \overrightarrow{GM} = \vec{0} \implies E_c(S/R_G) = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{v}(M/R_G)\right)^2 dm = \vec{0}$$

Donc $\qquad E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}m\left(\vec{v}(G/R_0)\right)^2$

4.5.2.2 Le solide (S) a un de ses points fixe dans R_0

Soit $A \in (S)$ tel que A est fixe dans R_0.

$$\vec{v}(M/R_0) = \underbrace{\vec{v}(A/R_0)}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM} \implies \left(\vec{v}(M/R_0)\right)^2 = \vec{v}(M/R_0).\left(\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}\right)$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{v}\,(M/R_0)\right)^2 dm$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_S \vec{v}(M/R_0).\left(\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(R/R_0).\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M/R_0) dm$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(R/R_0).\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(R/R_0).J(A,S)\left(\vec{\Omega}(R/R_0)\right)$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(R/R_0).J(A,S)\left(\vec{\Omega}(R/R_0)\right) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(R/R_0).\vec{\sigma}(A,S/R_0)$$

Sous forme matricielle :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\underbrace{\vec{\Omega}^t(R/R_0)}_{(1\times3)}\ \underbrace{II(A,S)}_{(3\times3)}\ \underbrace{\vec{\Omega}(R/R_0)}_{(3\times1)}$$

Conséquence
Le centre de masse G étant fixe dans R_G, on a alors :

$$E_c(S/R_G) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_G).J(G,S)\left(\vec{\Omega}(S/R_G)\right)$$

Comme $\vec{\Omega}(S/R_G) = \vec{\Omega}(S/R_0)$

$$E_c(S/R_G) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t(R/R_0).II(G,S).\vec{\Omega}(R/R_0) \qquad [R \text{ est un repère lié à } (S)]$$

4.5.2.3 Le solide (S) est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe (Δ) fixe dans R_0

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de (Δ) et $A \in (\Delta)$.
On pose $\overrightarrow{\Omega}(R/R_0) = \omega\overrightarrow{u}$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}(R/R_0).J(A,S)\overrightarrow{\Omega}(R/R_0)$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\omega^2\overrightarrow{u}.J(A,S)\overrightarrow{u}$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\omega^2 I(\Delta,S)$$

4.5.2.4 Le solide (S) est animé d'un mouvement quelconque

On utilise le deuxième théorème de Koenig :

$$E_c(S/R_0) = E_c(S/R_G) + \frac{1}{2}m\left(\overrightarrow{v}(G/R_0)\right)^2$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}(R/R_0).J(G,S)\left(\overrightarrow{\Omega}(R/R_0)\right) + \frac{1}{2}m\left(\overrightarrow{v}(G/R_0)\right)^2$$

$$E_c(S/R_0) = \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}^t(R/R_0).II(G,S)\overrightarrow{\Omega}(R/R_0)}_{rotation} + \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\overrightarrow{v}(G/R_0)\right)^2}_{translation}$$