

TP: CALCUL DIFFERENTIEL DANS \mathbb{R}
PROJET SYTHESE

Outils numériques:

- *numpy, sympy, scipy, matplotlib*
- Les fonctions: Dichotomie / Newton-Raphson

Exercice 1

Un médicament contre la douleur est administré par voie orale.

La concentration du produit actif dans le sang, en milligrammes par litres de sang, est modélisée par la fonction $C(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$, où $x \in [0; 6]$.

Le produit actif est efficace si la concentration dans le sang est supérieure à 5 mg/l .

On souhaite écrire un algorithme pour connaître les heures pour lesquelles le produit est actif.

1. Écrire le codage Python d'une fonction qui prend en entrée un intervalle L d'heures et nous fournit la liste des heures pour les quelles le médicament reste actif dans le sang.
2. Exécuter le programme pour $L = [0; 6]$ et interpréter le résultat.
3. Représenter graphiquement le fonction qui modélise la concentration du produit
4. Au bout de combien de temps la concentration du produit est-elle maximale ? Estimer cette concentration maximale à 1 mg/l près.
5. Analyse graphique
 - (a) Sur quel intervalle la fonction C est dérivable ? Calculer sa dérivée
 - (b) Calculer et représenter la tangente T à la courbe C en $x = 4$.
 - (c) En déduire la position relative de la courbe représentative de C par rapport à la droite T .
6. Un pharmacien affirme que la concentration du produit actif dans le sang diminue plus rapidement entre 2h et 4h qu'entre 4h et 6h après avoir pris le médicament. Que pensez-vous de cette affirmation ?

Exercice 2 (Dessin de forme)

Les étudiants de l'EPL ont pris l'initiative de créer une fresque pour leur établissement. Pour faciliter le travail du peintre, il vous est demandé de réaliser une maquette numérique de cette fresque en utilisant les données suivantes :

x	y
[1,1,4,4,2,2,4,4,2,2,4,4,1]	[1,6,6,3,3,1,1]
[5,5,8,8,6,6,5]	[1,6,6,2,2,1,1]
[6,6,7,7,6]	[1,6,6,5,5,4,4,3,3,2,2,1,1]
[9,9,10,10,12,12,9]	[4,5,5,4,4]

La première difficulté consiste à associer correctement les données x et y afin de pouvoir dessiner les objets du tableau. Pour réaliser ce tableau, il sera nécessaire de compléter le code suivant :

```
># pour réaliser les tracés
>import matplotlib.pyplot as plt
>#Identification des objets
>x1=[...]# Coordonnées x pour l'objet 1
>y1=[...]# Coordonnées y pour l'objet 1
>...
># Debut des tracés
>plt.figure(facecolor="blue")#figure avec un fond bleu
>plt.plot(x1,y1, color='0.95', lw='10')
>#Le paramètre 'color' définit la couleur de la ligne
># 'lw' définit la largeur de la ligne,
>.....
>plt.axis('equal') # Assure une échelle égale sur les axes
>plt.axis('off') # Masque les axes
>plt.show()
```

Exercice 3

Chercher à la main et numériquement les extrema et leurs nature

1. $i(x) = e^{x^3-3x}$
2. $j(x) = \ln(x^2 + 1)$

Exercice 4 (Fonction pathologique)

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 x)}{k^5}$. La fonction est bien définie.

1. À l'aide de Sympy programmer la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie en gardant les cent premiers termes de la fonction f :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{100} \frac{\sin(k^2 x)}{k^5}$$

et représenter la fonction g graphiquement.

2. Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de g et représenter graphiquement ces deux dérivées pour $x \in [0, 2\pi]$. Que pouvez-vous conclure ?