Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Faculté des Sciences Dhar Mhraz

Département Physique - Filière SMP – S3

Examen du Module Mécanique du Solide - Session Normale

Durée 1h30 min – 2020/2021

Exercice 1 : Question du cours (3 points = 1 + 1 + 1)

Pour un solide (S) :

1) **Enoncer** le principe fondamental de la dynamique
2) **Enoncer** le théorème de la résultante dynamique
3) **Enoncer** le théorème de l'énergie cinétique

Exercice 2 : Cinétique du solide (7 points = 1 + 2 + 2 + 2)

Soit une sphère pleine, homogène S de rayon R et de centre O.

1) **Déterminer** la matrice d'inertie de (S) au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
2) **Déterminer** la matrice d'inertie de (S) au point A(0,0,-R) dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
3) **Calculer** le moment d'inertie de S par rapport à la droite D tangente à la sphère au point A.
4) **Calculer** le moment d'inertie de S en A A(0,0,-R)dans la base$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Exercice 3 : Cinématique du solide (10 points = 1 + 1 + 1,5 + 1+ 1 + 2 + 1,5 + 1)

Un roulement à billes (**schématisé à la figure 1**) est un ensemble de pièces N entre deux organes mécaniques en rotation l'un par rapport à l'autre et destiné à diminuer le frottement entre ces deux organes. Il est composé (en général) de quatre éléments : une bague extérieure, une bague intérieure, des éléments roulants (billes, rouleaux ou aiguilles) et une cage qui maintient les éléments roulants à égale distance.

Soit $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$le repère lié au corps fixe (**S0**). Les deux bagues (**S1**) et (**S2**) et la cage (**S3**) sont en rotation autour de l'axe $(O, \vec{z})$ par rapport à (S0). Avec $\vec{\Omega}(S1/S0) = \omega_1 \vec{z}$, $\vec{\Omega}(S2/S0) = \omega_2 \vec{z}$, $\vec{\Omega}(S3/S0) = \omega_3 \vec{z}$et $\vec{\Omega}(S/S0) = \omega \vec{z}$.

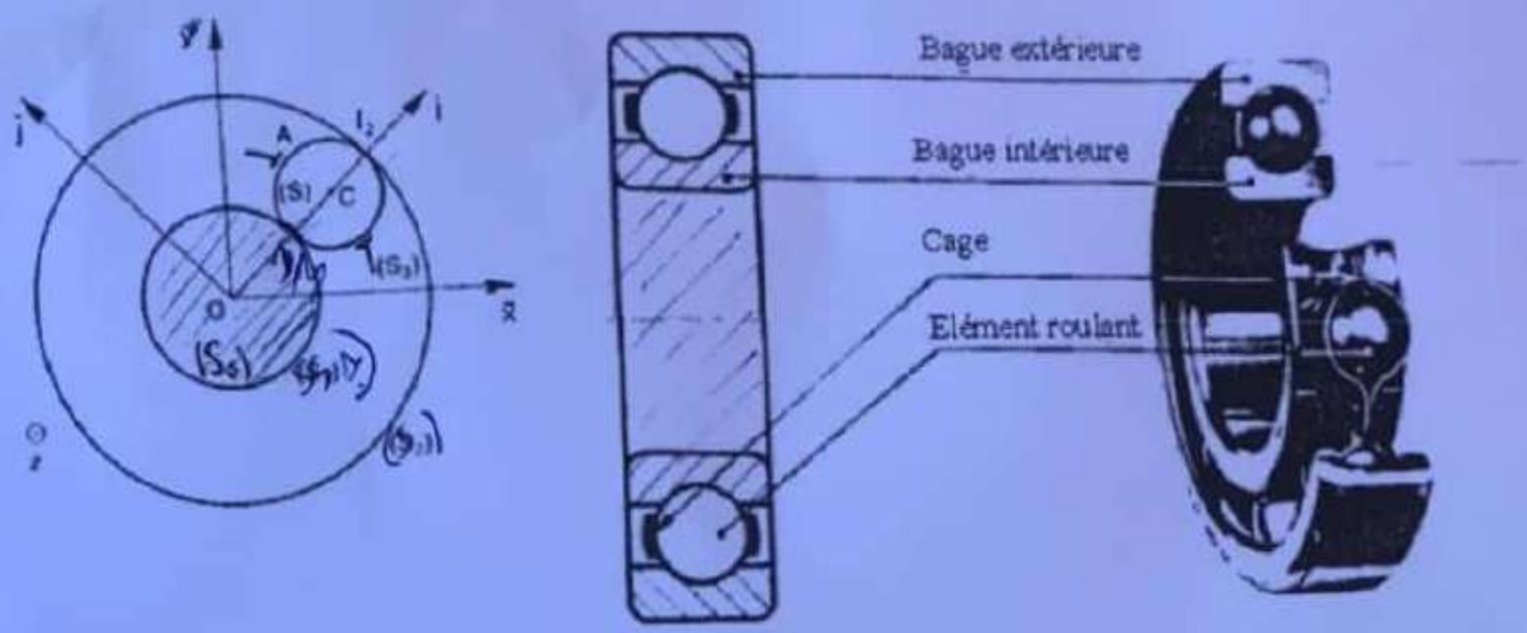


Figure 1

La bille **S**, de centre **C**, animé d'un mouvement plan, roule sans glisser en I_1 sur S_1 et en I_2 sur S_2. Soit $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{z})$un repère tel que $\vec{\imath}$ ait la même direction et même sens que $\overrightarrow{OC}$ avec $\overrightarrow{OI_1} = r_1\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OI_2} = r_2\vec{\imath}$.

1) **Déterminer** le torseur cinématique $\tau_v(S1/_{S0})$ au point **O.**
2) **Déterminer** le torseur cinématique $\tau_v(S2/_{S0})$ au point **O.**
3) En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I_1, **calculer**$\vec{V}(C \in S/_{S0})$ en fonction de r_1, r_2, ω_1et ω.
4) En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I_2, **calculer**$\vec{V}(C \in S/_{S0})$ en fonction de r_1, r_2, ω_2 et ω.
5) **Déduire** l'expression de ω en fonction der_1, r_2, ω_1 *et* ω_2
6) **Déterminer** le torseur cinématique $\tau_v(S/_{S0})$ au point C en fonction der_1, r_2, ω_1 *et* ω_2
7) **Déterminer** l'accélération $\vec{\gamma}(C \in S/_{S0})$
8) **Déterminer** **sans calcul**le centre instantané de rotation du mouvement paln su plan de (S) par rapport à (S2).

FIN

FSDM

Examen du Module mécanique du solide - session Normale (S_3; SMP) 2020/2021

Exercice 1 : question du cours :

(1)

1) le principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielles des forces extérieurs appliquées à un solide est égale au produit du vecteur accélération et de masse du solide : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$

JALAL

2) théorème de la résultante dynamique :

pour tout système matériel E en mouvement par rapport au repère galiléen R la résultante dynamique de E dans son mouvement par rapport à R est égale à la résultante du torseur des action mécanique extérieurs à E

$$\vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{F} = m\vec{\gamma}/_{R_g}$$

3) Le théorème de l'énergie cinétique

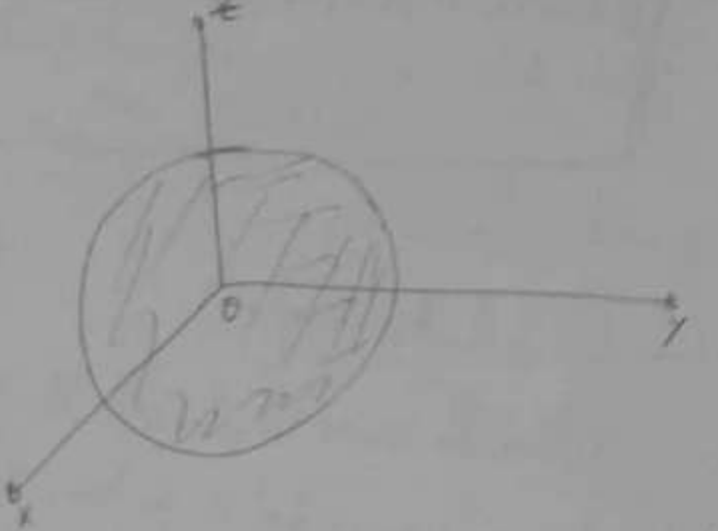
La variation de l'énergie cinétique d'un système (S) par rapport à un référentiel R entre deux instants t et t+dt est égale à la somme du travail entre ces deux instants des actions interieurs et extérieurs s'exrsant sur le système soit :

$$dE_{c(S/R)} = \delta W_{int/R} + \delta W_{ext/R}$$

Exercice 2 : cinématique du solide

Soit une sphère pleine, homogène (S) de rayon R et de centre O.

1) La matrice d'inertie de (S) au pt O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$



(2)

On a (Ox) ; (Oy) ; (Oz) sont des axes de symétrie matérielle donc la matrice d'inertie est diagonale.

JALAL

et $x = y = z$ donc $A = B = C$

donc la matrice d'inertie écrit sous la forme $M_{O/R} = A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}_{(x,y,z)}$

<u>déterminer A</u>

On a $A = B = C$ donc $3A = 3B = 3C = A + B + C$

$$= \int (y^2+z^2)\,dm + \int (x^2+z^2)\,dm + \int (x^2+y^2)\,dm$$

$$= \int (2x^2 + 2y^2 + 2z^2)\,dm = 2\int \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{r^2}\,dm = 2\int r^2\,dm$$

$$A = B = C = \frac{2}{3}\int r^2\,dm$$

* sphère pleine : donc $dm = \rho\, dV = \rho\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

d'où $A = B = C = \frac{2}{3}\rho \iiint r^4 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$$= \frac{2}{3}\rho \int_0^R r^4\,dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\rho \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\varphi\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2R^5}{15}\rho\, 2 \times 2\pi$$

$$A = \frac{8 \rho \pi R^5}{15}$$

determine ρ : $dm = \rho \, dV \Rightarrow m = \rho V = \rho \frac{4\pi R^3}{3} \rightarrow \rho = \frac{3m}{4\pi R^3}$

d'où $A = \frac{8\pi R^5}{15} \times \frac{3m}{4\pi R^3} = \frac{2mR^2}{5} = \frac{2}{5} m R^2$ ③

donc $$\boxed{M^{(S)}_{Oxyz} = \frac{2}{5} m R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(xyz)}}$$

2) la matrice d'inertie de (S) au point $A(0,0,-R)$ dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

d'après le théorème de Huygens généralisé : on a :

JALAL

$$M^{(S)}_{Axyz} = M^{(O,m)}_{(Axyz)} + M^{(S)}_{Oxyz}$$

on calculera la matrice d'inertie $M^{(O,m)}_{Axyz} = \begin{pmatrix} A_A & -F_A & -E_A \\ -F_A & B_A & -D_A \\ -E_A & -D_A & C_A \end{pmatrix}$

Donc $\vec{OA} = -R\vec{z} \Rightarrow \vec{AO} = R\vec{z}$ donc $x_A = 0$; $y_A = 0$; $z_A = -R$

donc $F_A = 0$; $E_A = 0$; $D_A = 0$; $C_A = 0$

d'où $M^{(O,m)}_{(Axyz)} = \begin{pmatrix} A_A & 0 & 0 \\ 0 & B_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en déterminer A_A et B_A

$A_A = \int (y^2 + z^2) \, dm = \int z^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$

$B_A = \int (x^2 + z^2) \, dm = \int z^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$

donc $M^{(O,m)}_{Axyz} = mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(xyz)}$

finalement $M^{(S)}_{(Axyz)} = \begin{pmatrix} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(Axy)} + \begin{pmatrix} \frac{2mR^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2mR^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mR^2}{5} \end{pmatrix}_{(Axyz)}$

$$\boxed{M^{(S)}_{Axyz} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mR^2}{5} \end{pmatrix}_{(xyz)}} \quad 4$$

3/ le moment d'inertie de (S) par rapport à la droite Δ tangente à la sphère au pt A

l'axe (Az) est axe de révolution de la sphère ⇒ la matrice d'inertie au pt A est diagonale. le moment d'inertie de la sphère par rapport à l'un des axes (Ax) et (Ay) sont égaux : $\boxed{I_\Delta = I_{(Ax)} = I_{(Ay)} = \frac{7}{5}mR^2}$

JALAL

4) le moment d'inertie de S en A(0,0,-R) dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

le moment d'inertie de (S)

$$I^S_A = \frac{1}{2}\left(I_{Ax} + I_{Ay} + I_{Az}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}mR^2 + \frac{7}{5}mR^2 + \frac{2mR^2}{5}\right) = \frac{mR^2}{10}(7+7+2)$$

$$= \frac{16mR^2}{10} = \frac{8mR^2}{5} \Rightarrow \boxed{I^{(S)}_A = \frac{8mR^2}{5}}$$

Exercice 3 : cinématique du solide :

1) le torseur cinématique $\mathcal{V}_{(S_1/S_0)}$ au point O :

$$\left[\mathcal{V}_{(S_1/S_0)}\right]_O = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} \\ \vec{V}_{(O\in S_1/S_0)} \end{pmatrix}_O = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{(S_1/R_0)} \\ \vec{V}_{(O\in S_1/R_0)} \end{pmatrix}_O$$

$\ast$ $\vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} = \vec{\Omega}_{(S_1/R_0)} = \omega_1\vec{z}$ et $\vec{V}_{(O\in S_1/R_0)} = \frac{d\vec{OO}}{dt}\Big]_{R_0} = \vec{0}$

donc $\boxed{\left[\mathcal{V}_{(S_1/S_0)}\right]_O = \begin{pmatrix} \omega_1\vec{z} \\ \vec{0} \end{pmatrix}_O}$

2) le torseur cinématique $\tau_v(S_2/S_0)$ au pt O :

$$\left[\tau_{v(S_2/S_0)}\right]_O = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}(S_2/R_0) \\ \vec{V}(O\in S_2/R_0) \end{pmatrix}_O$$

* $\vec{\Omega}(S_2/S_0) = \vec{\Omega}(S_2/R_0) = \omega_2 \vec{z}$

* calcul la vitesse $\vec{V}(O\in S_2/S_0) = \vec{V}(O\in S_2/R_0)$ (5)

$$\vec{V}(O\in S_2/R_0) = \vec{V}(O/R_0) = \left.\frac{d\vec{OO}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{0}$$

JALAL

$$\text{donc } \left[\tau_{v(S_2/S_0)}\right]_O = \begin{pmatrix} \omega_2\vec{z} \\ \vec{0} \end{pmatrix}_O$$

3/ en utilisant la condition de roulement sans glissement au pt I_1 :

$$\vec{V}_g(S/S_1) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(I_1\in S/S_0) - \vec{V}(I_1\in S_1/S_0) = \vec{0}$$

on calculons $\vec{V}(C\in S/S_0) = ?$:

$$\text{on a } \vec{V}_g(S/S_1) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(I_1\in S/S_0) = \vec{V}(I_1\in S_1/S_0)$$

$$* \ \vec{V}(I_1\in S/S_0) = \vec{V}(C\in S/S_0) + \vec{\Omega}(S/S_0)\wedge\vec{CI_1}$$

$$\text{et } \vec{V}(I_1\in S_1/S_0) = \vec{V}(O\in S_1/S_0) + \vec{\Omega}(S_1/S_0)\wedge\vec{OI_1}$$

$$\text{d'où } \vec{V}(C\in S/S_0) = \underbrace{\vec{V}(O\in S_1/S_0)}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}(S_1/S_0)\wedge\vec{OI_1} - \vec{\Omega}(S/S_0)\wedge\vec{CI_1}$$

$$= \left(\omega_1\vec{z}\wedge r_1\vec{i}\right) - \left(\vec{\omega}\,\vec{z}\wedge\left[-\left(\frac{r_2-r_1}{2}\right)\vec{i}\right]\right)$$

$$= r_1\omega_1\vec{j} + \frac{\omega}{2}(r_2-r_1)\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}(C\in S/S_0) = \left[r_1\omega_1 + \frac{\omega}{2}(r_2-r_1)\right]\vec{j}}$$ (1)

4) en utilisant la condition de roulement sans glissement au pt I_2 :

$$\vec{V}_g(S/S_2) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}(I_2 \in S/S_0) - \vec{V}(I_2 \in S_2/S_0) = \vec{0}$$

$$* \quad \vec{V}(I_2 \in S/S_0) = \vec{V}(I_2 \in S_2/S_0)$$

$$\vec{V}(C \in S/S_0) + \vec{\Omega}_{(S/S_0)} \wedge \vec{CI_2} = \vec{V}(O \in S_2/S_0) + \vec{\Omega}_{(S_2/S_0)} \wedge \vec{OI_2}$$

donc : $\vec{V}(C \in S/S_0) = \overset{\vec{0}}{\vec{V}(O \in S_2/S_0)} + \vec{\Omega}_{(S_2/S_0)} \wedge \vec{OI_2} - \vec{\Omega}_{(S/S_0)} \wedge \vec{CI_2}$

JALAL

$$= \left[\omega_2 \vec{z} \wedge r_2 \vec{i}\right] - \left[\omega \vec{z} \wedge \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)\vec{i}\right]$$

$$= r_2 \omega_2 \vec{j} - \frac{\omega}{2}(r_2 - r_1)\vec{j}$$ (6)

$$\boxed{\vec{V}(C \in S/S_0) = \left[r_2 \omega_2 - \frac{\omega}{2}(r_2 - r_1)\right]\vec{j}}$$ (2)

5/ l'expression de ω en fonction de r_1; r_2; ω_1 et ω_2

on a (1) = (2) $\Rightarrow r_1\omega_1 + \frac{\omega}{2}(r_2 - r_1) = r_2\omega_2 - \frac{\omega}{2}(r_2 - r_1)$

$$\frac{\omega}{2}(r_2 - r_1) + \frac{\omega}{2}(r_2 - r_1) = r_2\omega_2 - r_1\omega_1$$

$$\omega(r_2 - r_1) = r_2\omega_2 - r_1\omega_1$$

$$\boxed{\omega = \frac{r_2\omega_2 - r_1\omega_1}{r_2 - r_1} = \frac{r_1\omega_1 - r_2\omega_2}{r_1 - r_2}}$$

6/ le torseur cinématique $\mathcal{T}_v(S/S_0)$ au pt C :

$$\left[\mathcal{T}_v(S/S_0)\right]_C = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{(S/S_0)} \\ \vec{V}(C \in S/S_0) \end{pmatrix}_C$$

7

on a $\vec{\Omega}_{(S/S_0)} = \omega \vec{z} = \frac{r_2\omega_2 - r_1\omega_1}{r_2 - r_1} \vec{z} = \frac{r_1\omega_1 - r_2\omega_2}{r_1 - r_2} \vec{z}$

et $\vec{V}(C \in S/S_0) = \left[r_2\omega_2 - \frac{\omega}{2}(r_2 - r_1) \right] \vec{j}$

$\vec{V}(C \in S/S_0) = \left[r_2\omega_2 - \frac{r_2\omega_2 - r_1\omega_1}{2(r_2 - r_1)}(r_2 - r_1) \right] \vec{j} = \frac{r_2\omega_2 + r_1\omega_1}{2} \vec{j}$

donc $$\boxed{\left[\mathcal{Z}_{V(S/S_0)} \right]_C = \begin{pmatrix} \frac{r_1\omega_1 - r_2\omega_2}{r_1 - r_2} \vec{z} \\ \frac{r_2\omega_2 + r_1\omega_1}{2} \vec{j} \end{pmatrix}_C}$$

JALAL

7) l'accélération $\vec{\gamma}(C \in S/S_0)$

$$\vec{\gamma}(C \in S/S_0) = \left.\frac{d\vec{V}(C \in S/S_0)}{dt}\right]_{S_0} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{V}(C \in S/S_0)}{dt}\right]_{S_3}}_{0} + \vec{\Omega}_{(S_3/S_0)} \wedge \vec{V}(C \in S/S_0)$$

$$= \omega_3 \vec{z} \wedge \frac{1}{2}(r_2\omega_2 + r_1\omega_1) \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(C \in S/S_0) = \frac{-\omega_3}{2} \left[r_2\omega_2 + r_1\omega_1 \right] \vec{i}}$$

8) le centre instantané de rotation du mouvement plan sur plan de (S) par rapport à (S_2)

puisque $\vec{V}(I_2 \in S/S_2) = \vec{0}$ on en déduit que I_2 est le centre instantané de rotation du mouvement plan sur plan de S par rapport à S_2.

démonstration : on a $\vec{V}(I_2 \in S/S_2) = \vec{V}(I_2 \in S/S_0) - \vec{V}(I_2 \in S_2/S_0) = \vec{0}$

* $\vec{V}(I_2 \in S/S_0) = \vec{V}(C \in S/S_0) + \vec{\Omega}_{(S/S_0)} \wedge \vec{CI_2} = \frac{r_2\omega_2 + r_1\omega_1}{2} \vec{j} + \omega \vec{z} \wedge \left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right) \vec{i}$

$$\boxed{\vec{V}(I_2 \in S/S_0) = \left[\frac{r_2\omega_2 + r_1\omega_1}{2} + \frac{\omega}{2}(r_2 - r_1) \right] \vec{j} = r_2\omega_2 \vec{j}}$$

* $\boxed{\vec{V}(I_2 \in S_2/S_0) = \underbrace{\vec{V}(O \in S_2/S_0)}_{0} + \vec{\Omega}_{(S_2/S_0)} \wedge \vec{OI_2} = \omega_2 \vec{z} \wedge r_2 \vec{i} = r_2\omega_2 \vec{j}}$