Calcul différentiel dans $\mathbb{R}$

Support de cours et exercices de travaux dirigés

Issa Cherif GERALDO*

*Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Lomé

I. C. GERALDO

Mai 2023

TABLE DES MATIÈRES

J. C. GERALDO

CHAPITRE 0

RAPPELS SUR LES FONCTIONS

Sommaire

0.1 GÉNÉRALITÉS

0.1.1 Définitions

Définition 0.1 Soient E et F deux ensembles.

- Une *fonction* f de E (ensemble de départ) à valeurs dans F (ensemble d'arrivée) est une relation qui à chaque élément de E associe au plus un élément de F. On note $f : E \to F$.
- Pour tout $x \in E$, l'élément associé à x, s'il existe, est noté $f(x)$. Si $y = f(x)$, alors y est l'*image* de x par f et x est ***un*** *antécédent* de y par f.
- Si $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$, alors f est dite *fonction réelle d'une variable réelle*.

Définition 0.2 Soient E et $F \subset \mathbb{R}$ et f une fonction de E vers F.

- L'*ensemble de définition* de f est l'ensemble des éléments de E qui possèdent une image par f :
$$D_f = \{x \in E \mid f(x) \text{ existe}\}.$$
- Si $D_f = E$, alors f est une *application*.
- L'ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)) \in E \times F \mid x \in D_f\}$ est le *graphe* de f.

Définition 0.3 Deux fonctions f et g sont égales si elles ont le même ensemble de définition D et le même ensemble d'arrivée et si pour tout $x \in D$, $f(x) = g(x)$.

0.1.2 Fonctions remarquables

Soient $f : E \to \mathbb{R}$ une application et $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$.

Définition 0.4 L'application f est dite constante s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = a$. Lorsque $a = 0$, on dit que f est la fonction nulle.

Définition 0.5 L'application f est dite

- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant m$; dans ce cas, $f(E)$ possède une borne inférieure et on note

$$\inf_{x \in E} f(x) = \inf f(E) = \inf\{f(x) \mid x \in E\}.$$

- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant M$; dans ce cas, $f(E)$ possède une borne supérieure et on note

$$\sup_{x \in E} f(x) = \sup f(E) = \sup\{f(x) \mid x \in E\}.$$

- **bornée** si f est à la fois minorée et majorée ; cela est équivalent à dire que la fonction $|f|$ est majorée c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M$.

I. C. GERALDO

Définition 0.6 L'application f est dite

- **paire** si pour tout $x \in E$, $-x \in E$ et $f(-x) = f(x)$;
- **impaire** si pour tout $x \in E$, $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$.

Définition 0.7 L'application f est dite **périodique** de période T si pour tout $x \in E$, $x + T \in E$ et $f(x + T) = f(x)$.

0.2 Composition de fonctions

Définition 0.8 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. La *composée* de f et g est l'application $g \circ f$ définie de E dans G par :

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right]. \tag{1}$$

Exemple 0.9 Soient les fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2 - 2$. Comparons les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f[g(x)] = 2g(x) + 1 = 2(x^2 - 2) + 1 \\ &= 2x^2 - 3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g[f(x)] = (f(x))^2 - 2 = (2x+1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x + 1 - 2 \\ &= 4x^2 + 4x - 1. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$.

Remarque 0.10 En général, pour deux fonctions f et g, l'on a : $g \circ f \neq f \circ g$.

0.3 FONCTION RÉCIPROQUE

Définition 0.11 Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une fonction.

- On dit que la fonction f est **bijective** si f est une application (c'est-à-dire $D_f = E$) et si à chaque $y \in F$ correspond un unique antécédent $x \in E$ c'est-à-dire si pour tout $y \in F$, l'équation d'inconnue $x \in E$ suivante :
$$f(x) = y$$
a une unique solution.
- Dans ce cas, on appelle **réciproque** de f, l'application notée f^{-1} qui à chaque $y \in F$ fait correspondre l'unique x tel que $f(x) = y$.

Exemple 0.12 Les fonctions $x \mapsto \ln x$ (de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$) et $x \mapsto e^x$ (de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$) sont réciproques l'une de l'autre. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $\ln x = y$ a une unique solution $x = e^y \in \mathbb{R}_+^*$ et inversement.

Application 0.13 Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ et f la fonction de E dans F définie par $f(x) = x^2$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est bijective et, le cas échéant, déterminer f^{-1}.

1) $E = F = \mathbb{R}$.

2) $E = \mathbb{R}_+$ et $F = \mathbb{R}_+$.

3) $E = \mathbb{R}_-$ et $F = \mathbb{R}_+$.

Remarque 0.14 Les courbes représentatives respectives d'une fonction bijective et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ appelée *première bissectrice* (voir Figure 1 pour un exemple).

Proposition 0.15 *Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une fonction (application) bijective.*

- *Pour tout $x \in E$, $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.*
- *Pour tout $y \in F$, $f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y$.*

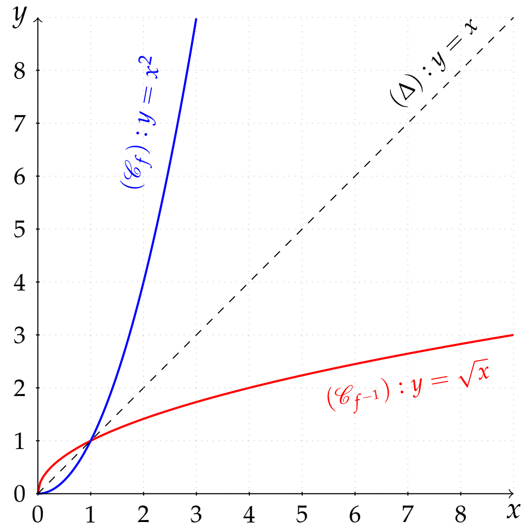


FIGURE 1 – Représentation graphique des fonctions $f : x \mapsto x^2$ (en bleu) et de son inverse $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$ (en rouge) définies de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$

I. C. GERALDO

0.4 EXERCICES

Exercice 0.1 Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes d'ensemble de départ $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad f_2(x) = 1 - e^{-x} \qquad f_3(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x^2-1} \qquad f_5(x) = \ln|x-1| \qquad f_6(x) = \ln(\ln(\ln x))$$

$$f_7(x) = \frac{1}{e^x - 2} \qquad f_8(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \qquad f_9(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$f_{10}(x) = \frac{1}{\sin x - \sin 3x}$$

Exercice 0.2 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$. Montrer que f est bornée et déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 0.3 On considère les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Donner les ensembles de définition et les expressions des fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice 0.4 On considère la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et appelée fonction sinus hyperbolique. Démontrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

CHAPITRE 1

LIMITES ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Sommaire

1.1 LIMITES D'UNE FONCTION

1.1.1 Définitions

1.1.1.1 Notion de voisinage

Soit $a \in \mathbb{R}$. Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est appelée **un voisinage** de a s'il existe un réel $h > 0$ tel que $]a-h\,; a+h[\subset V$.

Exemple 1.1 $[-1, 1]$ est un voisinage de 0.5 mais n'est pas un voisinage de 1.

1.1.1.2 Limite finie en $a \in \mathbb{R}$

Définition 1.2 Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons que f soit définie dans un voisinage de a mais pas forcément en a lui-même. On dit que f admet ℓ pour limite en a (ou que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a) si pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver $\eta > 0$ arbitrairement petit tel que :

$$|x-a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On écrit : $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Exemple 1.3 Soit $f(x) = 3x$. On montre que $\lim_{x \to 2} f(x) = 6$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Cherchons $\eta > 0$ tel que

$$|x-2| < \eta \implies |3x-6| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

La condition $|3x-6| < \varepsilon$ est équivalente à $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, il suffit de choisir $\eta < \frac{\varepsilon}{3}$ pour obtenir l'implication (1.1). On peut choisir par exemple, $\eta = \frac{\varepsilon}{6}$.

1.1.1.3 Limite infinie en $a \in \mathbb{R}$

Définition 1.4 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supposons que f soit définie dans un voisinage de a mais pas forcément en a lui-même.

- On dit que f tend vers $+\infty$ au point a si pour tout $A > 0$ arbitrairement grand, on peut trouver $\eta > 0$ arbitrairement petit tel que :
$$|x-a| < \eta \implies f(x) > A$$
On note : $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- On dit que f tend vers $-\infty$ au point a si pour tout $A > 0$ arbitrairement grand, on peut trouver $\eta > 0$ arbitrairement petit tel que :
$$|x-a| < \eta \implies f(x) < -A.$$
On note : $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

I.C. GERALDO

Exemple 1.5 Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. On montre que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. En effet, soit $A > 0$. Cherchons $\eta > 0$ tel que

$$|x| < \eta \implies \frac{1}{x^2} > A. \tag{1.2}$$

On a :

$$\frac{1}{x^2} > A \iff x^2 < \frac{1}{A} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Ainsi, il suffit de choisir $\eta < \frac{1}{\sqrt{A}}$ pour obtenir l'implication (1.2). On peut choisir par exemple, $\eta = \frac{1}{2\sqrt{A}}$.

1.1.1.4 Limites à droite et à gauche en $a \in \mathbb{R}$

Définition 1.6 Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f admet ℓ pour *limite à droite* en a si pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver $\eta > 0$ arbitrairement petit η tel que :
$$a < x < a + \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- On dit que f admet ℓ pour *limite à gauche* en a si pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver $\eta > 0$ arbitrairement petit η tel que :

$$a - \eta < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note respectivement $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ les limites à droite et à gauche en a.

Proposition 1.7 *La limite d'une fonction f en a existe si et seulement si les limites à droite et à gauche en a existent et sont identiques. Dans ce cas :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Exemple 1.8 Considérons la fonction f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$. La fonction f n'admet pas de limite en 0.

1.1.1.5 Limite finie/infinie en $+\infty$ ou $-\infty$

Définition 1.9 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver $M > 0$ arbitrairement grand tel que

$$x > M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \Big(\text{resp.} \quad x < -M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon\Big).$$

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$).

Exemple 1.10 Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Cherchons $M > 0$ tel que

$$x > M \implies \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

On a :

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \iff |x| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ainsi, il suffit de choisir $M > \frac{1}{\varepsilon}$ pour obtenir l'implication (1.3). On peut choisir par exemple, $M = \frac{1}{\varepsilon} + 1$.

Remarque 1.11 Au lieu de la limite finie ℓ, on peut définir le fait que f admette comme limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en l'infini en remplaçant dans la définition 1.9 la condition $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ par $f(x) > A$ (resp. $f(x) < -A$) où $A > 0$ est un réel arbitrairement grand.

1.1.2 Unicité de la limite d'une fonction

Proposition 1.12 *Si f admet une limite en a, alors cette limite est unique.*

1.1.3 Limites d'une fonction et suites numériques

Proposition 1.13 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite (x_n) convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers ℓ.

2) Si deux suites (x_n) et (y_n) convergent vers a et si $f(x_n)$ et $f(y_n)$ ont des limites différentes, alors f n'admet pas de limite en a.

Remarque 1.14 Ce résultat est souvent utilisé pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a. Pour ce faire, il suffit de construire deux suites convergeant vers a dont les images par f ont des limites différentes.

Exemple 1.15 La fonction définie par $f(x) = 1/x$ n'admet pas de limite en 0. En effet, les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 1/n$ et $v_n = -1/n$ convergent vers 0 mais $f(u_n) = n$ diverge vers $+\infty$ et $f(v_n) = -n$ diverge vers $-\infty$.

Application 1.16 Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

1.1.4 Limites remarquables

- Si α et β sont deux réels strictement positifs on a :

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0;$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^{\beta x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty.$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

1.1.5 Règles pratiques de calcul de limites

Sous réserve d'existence des limites de f et g en $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\,;\,+\infty\}$, on a :

- $\lim\limits_{x\to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim\limits_{x\to a} f(x) + \beta \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

- $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\, g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\ \lim\limits_{x\to a} g(x)$

- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

avec les conventions suivantes :

I. C. GERALDO

$$\begin{array}{rclrcl}
(+\infty)+(+\infty) & = & +\infty & k\cdot(+\infty) & = & +\infty \text{ pour } k>0 \\
(+\infty)+k\ (k\in\mathbb{R}) & = & +\infty & k\cdot(+\infty) & = & -\infty \text{ pour } k<0 \\
(-\infty)+(-\infty) & = & -\infty & (+\infty)\cdot(+\infty) & = & +\infty \\
(-\infty)+k\ (k\in\mathbb{R}) & = & -\infty & (+\infty)\cdot(-\infty) & = & -\infty
\end{array}$$

Remarque 1.17 (Formes indéterminées (FI)) Une limite ayant l'une des formes suivantes

$$(+\infty)-\infty; \quad 0\cdot(\infty); \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 1^{\infty}; \quad \infty^{0}; \quad 0^{0}$$

est appelée une forme indéterminée (FI). Dans ce cas, on ne peut pas conclure immédiatement. Une transformation (factorisation, expression conjuguée, utilisation du logarithme et de l'exponentielle, etc...) est nécessaire pour se ramener aux cas classiques de limites mentionnés plus haut.

1.1.6 Limites et relations d'ordre

Proposition 1.18 *Soit f et g deux applications définies sur une partie de $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Si $f\leqslant g$ au voisinage de a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$.*

Théorème 1.19 (Théorème d'encadrement) *Soit f, g, h trois applications définies sur une partie de $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=\ell$. Si $f\leqslant g\leqslant h$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell$.*

Application 1.20 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x)$.

1.1.7 Limite de fonctions composées

Théorème 1.21 *Soit deux fonctions $f : E\longrightarrow F$ et $g : F\longrightarrow G$. Si f admet une limite $b\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ en $a\in\overline{\mathbb{R}}$ et g admet une limite $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ en b, alors $g\circ f$ admet ℓ pour limite en a. En d'autres termes,*

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)=b \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b} g(x)=\ell\right) \Longrightarrow \lim_{x\to a} g\circ f(x)=\ell.$$

Application 1.22 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1.2 Continuité d'une fonction

1.2.1 Généralités

Définition 1.23 Soit f une fonction d'une variable réelle et $a\in D_f$.

- On dit que f est *continue* au point $x = a$ si on a :
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$
ou si
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$
- Si f n'est pas continue en $x = a$, on dit que f est *discontinue* au point a.
- On dit que f est continue sur un intervalle I si et seulement si elle est continue en tout point de I.

Exemple 1.24 Les fonctions rationnelles, polynômes, trigonométriques, exponentielles et logarithmes sont toujours continues leurs domaines de définition.

Exemple 1.25 Etudions la continuité de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$
La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$, $]0, 3[$ et $]3, +\infty[$. Il reste à étudier la continuité aux points $x = 0$ et $x = 3$.

- $f(0) = (1 + 0^2) = 1$,
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (\cos x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 + x^2) = 1.$$
donc f est continue au point $x = 0$.
-
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (1 + x^2) = 10 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (2x + 1) = 7$$
donc f n'est pas continue au point $x = 3$.

En conclusion, f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

1.2.2 Propriétés

Proposition 1.26

1) *Une combinaison linéaire ou un produit de fonctions continues sur I est continue sur I.*
2) *Si f et g sont continues sur I et g ne s'annule pas sur I alors f/g est continue sur I.*
3) *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si f est une application continue de I dans J et si g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.*
4) *Si f est continue sur I alors $|f|$ est continue sur I.*
5) *Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors les fonctions*
$$\sup(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2} \quad \textit{et} \quad \inf(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$
sont continues sur I.

J. C. GERALDO

1.2.3 Continuité et suites numériques

Proposition 1.27 *Une fonction f est continue en un point $a \in D_f$ si et seulement si pour toute suite (x_n) convergeant vers a, la suite $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.*

1.2.4 Prolongement par continuité

Définition 1.28 Soient $A \subset \mathbb{R}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$. Si f est définie en tout point de A sauf au point $a \in A$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors la fonction :

$$\tilde{f} : x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

est appelée **prolongement par continuité** de f au point a.

Exemple 1.29 La fonction $\tilde{f} : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ est un prolongement par continuité de la fonction $f : x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ au point 0.

1.2.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.30 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une application continue sur un intervalle $[a, b]$. Toute valeur c comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte (i.e. admet au moins un antécédent) dans $[a, b]$.*

Théorème 1.31 *Soit f une application continue sur un intervalle I. Si a et b sont deux points de I tels que $f(a)f(b) \leqslant 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*

1.2.6 Continuité de la réciproque d'une fonction bijective

Proposition 1.32 *Si f est une fonction bijective de $I \subset \mathbb{R}$ dans $J \subset \mathbb{R}$, alors sa réciproque f^{-1} est continue de J dans I.*

1.3 Exercices

Exercice 1.1 Dans chacun des cas suivants, calculer, si elle existe, la limite de f en a :

1) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 5}{5x^3 - x^2 + 2}, \quad a = +\infty$

2) $f(x) = \dfrac{x + 2|x|}{x}, a = 0$

3) $f(x) = \dfrac{x^5 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}, \quad a = 0$

5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x, \quad a = +\infty$

6) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x, \quad a = +\infty$

7) $f(x) = \dfrac{\sin(x \ln x)}{x}, \quad a = 0$

8) $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin 5x}{\sin x + \sin 5x}, \quad a = 0$

9) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\sin^2 x}, \quad a = 0$

10) $f(x) = xE\left(\dfrac{1}{x}\right), a = 0$

Exercice 1.2 Soient m et $n \in \mathbb{N}$. Calculer en fonction de m et n, la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x^m} - \sqrt{1 - x^m}}{x^n}.$$

Exercice 1.3 En utilisant la relation $\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2)$, calculer les limites

1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$;

2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

Exercice 1.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T. Montrer que si f n'est pas constante, alors f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 1.5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si f est croissante et majorée, alors f admet une limite en $+\infty$.

Exercice 1.6 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

Exercice 1.7 Etudier la continuité de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} + x + 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2 + x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+\exp(1/x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5) $f(x) = x + \sqrt{x - E(x)}$

6) $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$

7) $f(x) = E(x) \sin x$

8) $f(x) = E(x) \sin(\pi x)$

Exercice 1.8 Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1 - 2x) + \ln(1 + 2x)}{x^2}.$$

I. C. GERALDO

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Vérifier que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement par continuité $\tilde{f}$.

Exercice 1.9 Dans chacun des cas suivants, déterminer le prolongement par continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$.

1) $f(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{2x}$

2) $f(x) = \begin{cases} x \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ xe^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

CHAPITRE 2

CALCUL DE DÉRIVÉES

Sommaire

I. C. GERALDO

2.1 DÉRIVATION DE FONCTIONS

2.1.1 Dérivabilité - Nombre dérivé - Fonction dérivée

2.1.1.1 Définitions

Définition 2.1 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$.

- On dit que f est *dérivable* en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{existe et est finie.} \tag{2.1}$$

- Cette limite est alors appelée *nombre dérivé* de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.
- Une fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, la fonction qui à chaque $x \in I$ associe $f'(x)$ est la *fonction dérivée* (ou *dérivée*) de f.

Exemple 2.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$. Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - (x_0)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0.$$

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie par $f'(x) = 2x$.

2.1.1.2 Autres définitions de la dérivée

Définition 2.3 Dans les sciences expérimentales, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $\Delta x = h = x - x_0$ l'accroissement de x à partir de x_0 et $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ l'accroissement de f à partir de $f(x_0)$. Alors

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{(si cette limite existe et est finie).} \tag{2.2}$$

Définition 2.4 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$. En posant $h = x - x_0$ dans (2.1), on dit aussi que f est dérivable en x_0 si

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existe et est finie.} \tag{2.3}$$

Le rapport

$$\tau_{f,x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.4}$$

est alors appelé le **taux d'accroissement** de f au point x_0.

2.1.1.3 Exemples en sciences expérimentales

Si $f(t)$ est une fonction du temps t, la dérivée $f'(t)$ représente la vitesse de variation de f à l'instant t.

- Si $x(t)$ représente la distance parcoure par un objet à l'instant t, alors $x'(t)$ représente sa vitesse à l'instant t.
- Si $f(t)$ représente la température (décroissante avec le temps) d'un corps, alors $f'(t)$ représente la vitesse de refroidissement du corps à l'instant t.
- Si $N(t)$ est l'effectif d'une population (individus, bactéries, microbes, etc...) à l'instant t, alors $N'(t)$ représente la vitesse de croissance de ladite population à l'instant t.
- Si $f(t)$ est la quantité d'eau, de gaz, de sang, etc... écoulée pendant la durée t, alors $f'(t)$ est le débit instantané à l'instant t.

2.1.1.4 Dérivabilité à gauche et à droite

Définition 2.5 Une fonction f définie en x_0 est dite :

- *dérivable à droite* en x_0 si la quantité
$$f'_d(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ existe et est finie.}$$
- *dérivable à gauche* en x_0 si la quantité
$$f'_g(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ existe et est finie.}$$
- *dérivable* en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et si $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple 2.6 La fonction $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$. En effet,
$$f'_g(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$
et
$$f'_d(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

2.1.2 Dérivabilité et continuité

Proposition 2.7 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

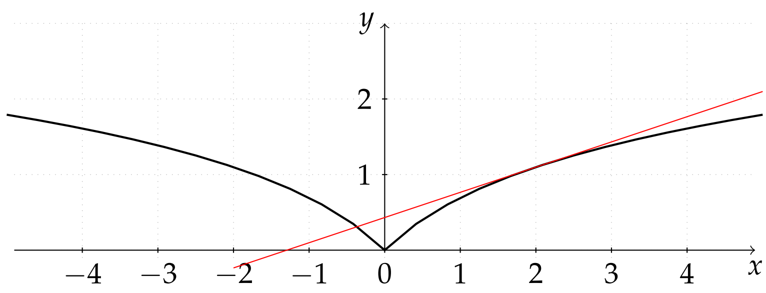
La réciproque est fausse. Une application f peut être continue en x_0 sans être dérivable en x_0. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

I. C. GERALDO

2.1.3 Interprétation géométrique de la dérivée

La dérivabilité en x_0 se traduit dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par l'existence, relativement à la courbe représentative de f, d'une tangente au point $M(x_0, f(x_0))$ non parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$. Cette tangente a pour équation
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{2.5}$$

Exemple 2.8 Fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(|x| + 1)$.



- f est dérivable partout sauf au point 0 où elle ne possède pas de tangente.
- Au point $x_0 = 2$ par exemple, elle possède une tangente représentée en rouge.

Remarque 2.9 Si

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty,$$

alors la courbe de f admet en x_0 une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

2.1.4 Dérivées successives

Définition 2.10 Soit f une fonction dérivable.

- Si f' est elle aussi dérivable, sa dérivée est appelée *dérivée seconde* de f et notée f''.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction *dérivée d'ordre n* de f (ou *dérivée $n-$ième* de f) est la dérivée de la fonction dérivée d'ordre $n-1$ et notée $f^{(n)}$.

Exemple 2.11 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3$. Ses dérivées successives sont :

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 10x \\ f''(x) = 6x + 10 \\ f^{(3)}(x) = 6 \\ f^{(n)}(x) = 0, \quad \text{pour } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Théorème 2.12 (Formule de Leibniz) *Si f et g sont dérivables à l'ordre n, alors la fonction produit fg est dérivable à l'ordre n et on a la* ***formule de Leibniz*** *suivante :*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}. \tag{2.6}$$

2.1.5 Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

Définition 2.13 Une fonction f est dite de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si elle est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $\mathscr{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

Définition 2.14 Une fonction f est dite de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si elle est indéfiniment dérivable sur I. On note $\mathscr{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

2.1.6 Notion de différentielle

2.1.6.1 Définition

Définition 2.15 Soit f une fonction définie sur I et dérivable en un point x_0 de I. On appelle *différentielle* de f en x_0, l'application linéaire notée $d_{x_0}f$ et définie par :

$$d_{x_0}f(h) = f'(x_0)h.$$

Exemple 2.16

- L'application identique $x \mapsto x$ a pour différentielle en x_0, $d_{x_0}x(h) = h$.
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ a pour différentielle en x_0, $d_{x_0}f(h) = 2x_0h$.

2.1.6.2 Notation différentielle de la dérivée

- Comme $d_{x_0}x(h) = h$, toute fonction f dérivable en x_0 vérifie $d_{x_0}f(h) = f'(x_0)d_{x_0}x(h)$ soit encore $f'(x_0) = \dfrac{d_{x_0}f}{d_{x_0}x}$.
- Cette notation (correcte et complète mais lourde) est souvent abrégée en omettant x_0 :

$$df = f'(x)dx \qquad \text{soit encore} \qquad f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

- La dérivée seconde de f se note $\dfrac{d^2f}{dx^2}$, ..., la dérivée $n-$ième se note $\dfrac{d^nf}{dx^n}$ (les positions des exposants sont décalées afin de rappeler que $\dfrac{d}{dx}$ agit n fois de suite).

Exemple 2.17 Si $u(x) = x^3$, alors $\dfrac{du}{dx} = 3x^2$.

Remarque 2.18 La notation du/dx exprime la dérivée de u en un point comme le rapport d'un petit accroissement de u et d'un petit accroissement de x lui correspondant. L'avantage de cette notation est qu'il s'agit d'un quotient. On peut donc l'inverser pour obtenir $\frac{dx}{du}$. Par exemple, pour $u(x) = x^3$, on a $\frac{du}{dx} = 3x^2$ et

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3(u^{1/3})^2} = \frac{1}{3u^{2/3}} = \frac{1}{3}u^{-2/3}.$$

I. C GERALDO

2.1.7 Opérations sur les dérivées

2.1.7.1 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Ensemble de dérivabilité	Fonction dérivée
$x \longmapsto k, \quad k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$
$x \longmapsto x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$-$	$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \cos x$
$x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto -\sin x$
$x \longmapsto \tan x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 1+\tan^2 x = \frac{1}{(\cos x)^2}$
$x \longmapsto \ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
$x \longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto e^x$
$x \longmapsto a^x \quad (a>0)$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto (\ln a)\cdot a^x$

2.1.7.2 Dérivées et opérations usuelles

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
- Si $g(x_0) \neq 0$, alors
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$
- Si $g(x_0) \neq 0$, alors
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

2.1.7.3 Dérivée de la composée de deux fonctions

Théorème 2.19 (Dérivée de la composée de deux fonctions) *Soient $I, J \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'\Big[f(x_0)\Big]. \tag{2.7}$$

Exemple 2.20 Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction d'expression $h(x) = \sin(x^2)$. On a : $h'(x) = 2x\cos(x^2)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.21 En composant les fonctions f par $x \mapsto x^\alpha$ (pour $\alpha \in \mathbb{R}$), ln et exp, on obtient :

- $(f^\alpha)'(x_0) = \alpha f'(x_0) f^{\alpha-1}(x_0)$; en particulier si $f > 0$, $(\sqrt{f})' = (f^{1/2})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$;
- $(e^f)'(x_0) = f'(x_0)e^{f(x_0)}$;
- si de plus $f(x_0) > 0$, $(\ln f)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ (*dérivée logarithmique*).

Application 2.22 Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ 2) $f(x) = e^{-x^2}$ 3) $f(x) = \ln(x^2+1)$.

2.1.7.4 Dérivée de la réciproque d'une fonction bijective

Théorème 2.23 *Soient $E, F \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$, $f : E \longrightarrow F$ une fonction bijective. Si f est dérivable en x_0 et si f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, alors on a :*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(y_0)\right]}. \tag{2.8}$$

Exemple 2.24 On sait que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ d'expression $f(x) = x^2$ est bijective de réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ d'expression $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = 2x$. Supposons que l'on ne connaisse pas la dérivée de la fonction racine carrée. On peut appliquer la formule (2.8) et écrire pour tout $y > 0$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]} = \frac{1}{2f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

2.2 Théorèmes importants

2.2.1 Théorème de Rolle

Théorème 2.25 (Théorème de Rolle) *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors,*

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f'(c) = 0.$$

J.-C. GERALDO

2.2.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 2.26 (Théorème des accroissements finis) *Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors,*

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\end{array}\right\} \implies \text{il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

2.3 APPLICATIONS DE LA DÉRIVÉE

2.3.1 Etude du sens de variation d'une fonction

Théorème 2.27 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une fonction continue et dérivable sur $]a,b[$.*

- *Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est constante sur $]a,b[$.*
- *Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est croissante sur $]a,b[$.*
- *Si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est décroissante sur $]a,b[$.*

Exemple 2.28 Déterminons le sens de variation de la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

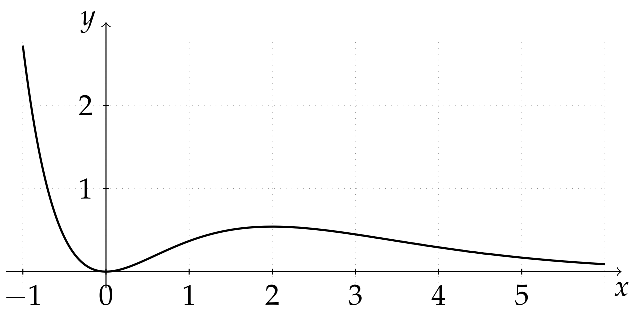
$$f(x) = x^2 e^{-x}.$$

On a :

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x}.$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La fonction f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$ et croissante sur $[0,2]$. Sa représentation graphique est :



Application 2.29 Dans le cadre de l'étude d'une épidémie dans un pays, on modélise le nombre de malades (en milliers) à l'aide de la fonction N définie sur l'intervalle $[0,60]$ par

$$N(t) = t^2 e^{-0.1t}$$

où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie. Déterminer le sens de variation de $N(t)$.

2.3.2 Optimisation

Définition 2.30 Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f admet un *maximum* (resp. *minimum*) *local* en a s'il existe un voisinage J de a (un intervalle ouvert J de centre a) inclus dans I tel que pour tout $x \in J$, l'on ait :

$$f(x) \leqslant f(a) \qquad (\text{resp.} \quad f(x) \geqslant f(a)).$$

- Un maximum ou un minimum local est appelé *extremum local*.

I.C. GERALDO

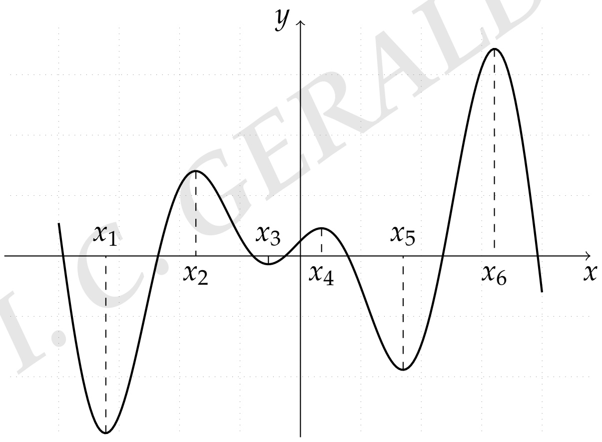


FIGURE 2.1 – Exemple de fonction admettant 3 minima locaux x_1, x_3, x_5 et 3 maxima locaux x_2, x_4 et x_6 soit au total 6 extrema locaux.

2.3.2.1 Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre (CNO-1)

Théorème 2.31 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $]a,b[\subset D_f$. Si f est dérivable en $x_0 \in]a,b[$ et si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Remarque 2.32

- Un point x^* tel que $f(x^*) = 0$ est appelé *point stationnaire* (ou *point critique*).
- Les extrema locaux de f sont nécessairement des points stationnaires mais **un point stationnaire n'est pas forcément un extremum local**. Par exemple, si $f(x) = x^3$ on a $f'(0) = 0$ alors que 0 n'est pas un extremum local.

2.3.2.2 Condition suffisante d'optimalité du second ordre (CSO-2)

Théorème 2.33 *Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $x^* \in I$ un point critique de f. Alors :*

- $f''(x^*) > 0 \longrightarrow$ *f présente en x^* un minimum local.*
- $f''(x^*) < 0 \longrightarrow$ *f présente en x^* un maximum local.*

Exemple 2.34 Déterminons la valeur et la nature des extrema locaux de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$.

- On a : $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$. Ainsi, $f(x) = 0$ implique $x^2 - x - 2 = 0$. Comme $\Delta = 9 > 0$, on a deux points critiques :

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

- $f''(x) = 12x - 6$.
- $f''(-1) = -18 < 0$ donc $x_1 = -1$ est un maximum local.
- $f''(2) = 18 > 0$ donc $x_2 = 2$ est un minimum local.

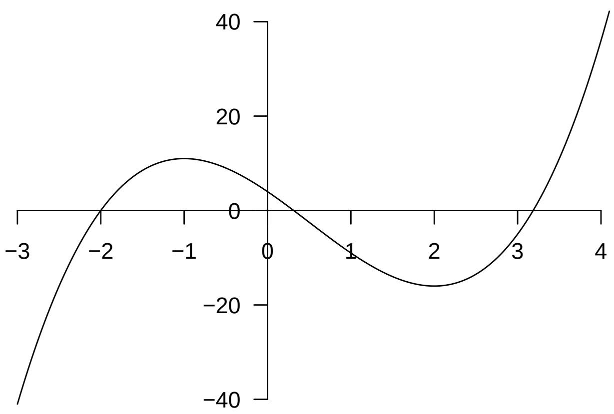


FIGURE 2.2 – Représentation graphique de la fonction d'expression $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$

Application 2.35 Parmi tous les rectangles de périmètre p fixé, quel est celui dont l'aire est maximale ? Quelle est son aire ?

2.3.3 Calcul de limites

Le calcul de dérivées s'applique au calcul de limites grâce à **règle de l'Hôpital**, du nom du mathématicien français Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital et encore appelée règle de l'Hospital ou règle de Bernoulli.

Théorème 2.36 (Règle de l'Hôpital) *Soit* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. *Soient* f *et* g *deux fonctions dérivables dans un voisinage* V *de* x_0 *tel que* $g' \neq 0$ *sur* V.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \in \left\{ \dfrac{0}{0} \,;\, \dfrac{\infty}{\infty} \right\} \\[2ex] \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemple 2.37 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{0}{0}$ (F.I.). Posons $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x$; On a $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Remarque 2.38 La condition $0/0$ ou ∞/∞ est très importante. Par exemple, le calcul

$$\lim_{x \to 1} \frac{4x+1}{2x+1} = \lim_{x \to 1} \frac{(4x+1)'}{(2x+1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{4}{2} = 2$$

est erroné car dans ce cas la limite de départ ne donne pas $0/0$ ou ∞/∞ donc ce cas c'est pas un cas où la règle de l'Hôpital peut s'appliquer. D'ailleurs la bonne réponse est $5/3$.

I. C. GERALDO

2.4 EXERCICES

Exercice 2.1 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la variable réelle x définies par :

$$f_0(x) = \ln|x| \qquad \text{et} \qquad f_{n+1}(x) = f_n(x+1) - f_n(x)$$

Démontrer que la fonction f_n a pour dérivée au point x :

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Exercice 2.2 On considère la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 2.3 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points stationnaires et leurs natures respectives.

1) $f(x) = 2x^2 - x + 6$.
2) $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
3) $f(x) = x^3 - 3x + 3$.
4) $f(x) = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$.

Exercice 2.4 Afin de financer vos études et vous faire un peu d'économie, vous entreprenez avec quelques amis de fabriquer et de vendre des gâteaux purement bio dont la quantité vendue en un mois q dépend du prix de vente unitaire p par la relation $q(p) = \alpha + \beta p$.

1) Dans toute la suite, on suppose que $q = 5000$ si $p = 100$ et que $q = 4000$ si $p = 200$. Déterminer α et β.
2) Quelle est la plus grande valeur possible pour p sachant que la quantité vendue q est toujours un nombre positif ?
3) Déterminer en fonction de p les recettes mensuelles $r(p)$.
4) Quelle est la valeur maximale des recettes ?
5) Le coût unitaire de fabrication est égal à 100. Déterminer en fonction de p le profit $b(p)$ total réalisé (la différence entre recettes et coût).
6) Pour quel prix le profit est-il maximal ? Quelle est la quantité correspondante ?

Exercice 2.5 Si un cultivateur de riz effectue sa récolte de riz cette semaine, il obtiendra 1200 kg valant 400 FCFA le kg. Pour chaque semaine d'attente, la récolte augmente de 100 kg mais le prix baisse de 20 FCFA par kg. Soient x le nombre de semaines d'attente avant d'effectuer sa récolte et $R(x)$ le revenu issu de la vente après récolte. Quelle valeur de x permet de maximiser le revenu $R(x)$?

Exercice 2.6 Un fil de longueur L doit être coupé en deux parties de manière à pouvoir former un triangle équilatéral avec l'une et un carré avec l'autre. Comment faut-il couper ce fil pour que l'aire totale des deux figures construites soit maximale ?

Exercice 2.7 Un camion d'une entreprise doit effectuer une livraison à un lieu situé à 1 500 km de l'entreprise. Lorsque le camion roule à la vitesse v (en km/h), sa consommation $C(v)$ (en litres pour 100 km) est donnée par la relation :

$$C(v) = \frac{600}{v} + \frac{v}{3}.$$

Sachant que le chauffeur est payé 26 francs de l'heure et le litre de gasoil coûte 2 francs, quelle doit être la vitesse v^* pour minimiser le coût du trajet ?

Exercice 2.8 Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de f en a en utilisant la règle de l'Hôpital :

1) $f(x) = \dfrac{x - \tan x}{x - \sin x}, \quad a = 0;$

2) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{1 - e^{2x}}, \quad a = 0;$

3) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}, \quad a = 1.$

4) $f(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}, \quad a = 1;$

5) $f(x) = x^2 e^{-x}, \quad a = +\infty.$

Exercice 2.9 On considère la fonction φ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = x \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Appliquer le théorème des accroissements finis à φ sur l'intervalle $[x, x+1]$.
2) Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = (x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - x\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 2.10 Le but de cet exercice est de calculer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $x \longmapsto \ln x$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ montrer que :

$$\ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}.$$

2) Trouver une suite (v_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leqslant u_n$.
3) En déduire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 2.11 Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

existe alors elle est appelée dérivée symétrique de f en a et notée $f'_s(a)$.

J.C. GERALDO

1) Montrer que si f est dérivable en a alors $f'_s(a) = f'(a)$.
2) Exprimer $f'_s(a)$ en fonction de $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$.
3) Dans cette question, on prend f comme la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Etudier l'existence de $f'_s(0)$, $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$.

4) Si f est croissante sur $]\alpha, \beta[$ et $a \in]\alpha, \beta[$, que dire du signe de $f'_s(a)$?

CHAPITRE 3

FONCTIONS USUELLES : COMPLÉMENTS

Sommaire

I. C. GERALDO

3.1 INTRODUCTION

Nous connaissons déjà des fonctions classiques telles que les fonctions polynômes, puissances, exponentielle, logarithme népérien, cosinus, sinus et tangente. Dans ce chapitre, nous présentons de nouvelles fonctions.

3.2 FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

Les **fonctions circulaires** (ou **fonctions trigonométriques**) les plus utilisées sont les trois fonctions suivantes : cosinus, sinus et tangente. En tant que fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, elles ne sont pas bijectives mais il est possible de les rendre bijectives en modifiant les ensembles de départ et d'arrivée.

3.2.1 Arc cosinus

Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ représentée sur la figure 3.1.

Pour définir une bijection à partir de cette fonction, il faut prendre comme ensemble de départ $[0,\pi]$ et comme ensemble d'arrivée $[-1,1]$ (voir la partie en rouge sur la figure 3.1). Sur l'intervalle $[0,\pi]$ la fonction cosinus est continue et strictement décroissante et définit donc une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$. Sa bijection réciproque est la fonction **Arc cosinus** notée arccos et définie par :

$$\begin{array}{rccll} \arccos & : & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & & x & \longmapsto & y \quad \text{tel que} \quad \cos y = x. \end{array} \tag{3.1}$$

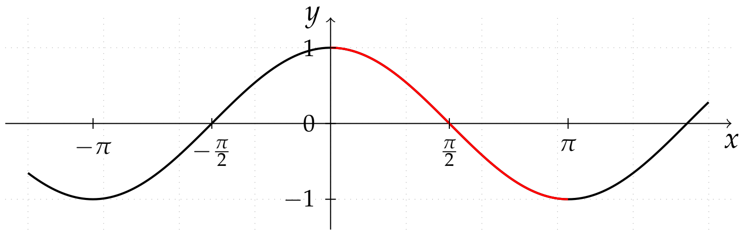


FIGURE 3.1 – Représentation de la fonction cosinus

En d'autres termes,

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \arccos x = y \iff \cos y = x. \tag{3.2}$$

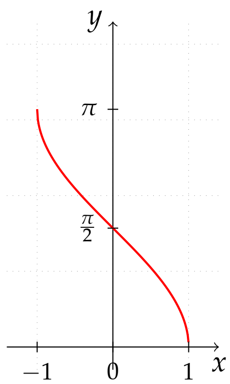


FIGURE 3.2 – Représentation graphique de la fonction Arc cosinus.

Remarque 3.1 Par définition de la bijection réciproque, on a :

$$\cos(\arccos x) = x, \quad \forall x \in [-1,1] \tag{3.3}$$
$$\arccos(\cos(x)) = x, \quad \forall x \in [0,\pi]. \tag{3.4}$$

Application 3.2 Calculer

- $\arccos(0)$
- $\arccos(1)$
- $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$
- $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{3}\right)$

La proposition suivante donne la dérivée de la fonction Arc cosinus.

Proposition 3.3 *Pour tout* $x \in]-1,1[$*, on a :*

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3.5}$$

Preuve : Soit $x \in]-1,1[$. On considère l'égalité $\cos(\arccos x) = x$. La fonction d'expression $\cos(\arccos x)$ est une fonction composée $g \circ f$ où $g(x) = \cos x$ et $f(x) = \arccos x$. On dérive l'égalité $\cos(\arccos x) = x$ à gauche et à droite pour obtenir :

$$\arccos'(x) \times \cos'(\arccos x) = 1$$

soit encore

$$\arccos'(x) \times (-\sin(\arcsin x)) = 1$$

qui est équivalent à

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos x)}. \tag{3.6}$$

Posons $y = \arccos x$. On sait que $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ donc $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$. Ainsi $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$. Or $y \in [0,\pi]$ donc $\sin y > 0$. Ainsi $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ d'où en remplaçant dans (3.6), on a

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-(\cos(\arccos x))^2}}.$$

Comme $\cos(\arccos x)) = x$, on conclut que

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

3.2.2 Arc sinus

Considérons la fonction sinus $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ représentée sur la figure 3.3.

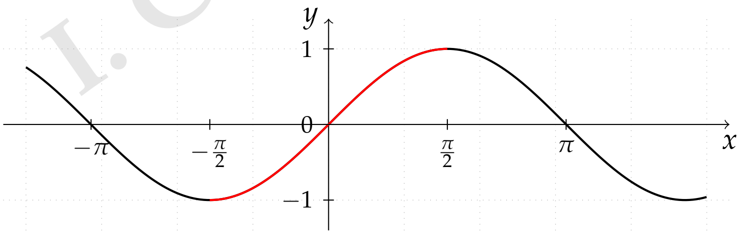


FIGURE 3.3 – Représentation de la fonction sinus

Pour définir une bijection à partir de cette fonction, il faut prendre comme ensemble de départ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et comme ensemble d'arrivée $[-1,1]$ (voir la partie en rouge sur la figure 3.3). Sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction sinus est continue et strictement croissante et définit donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1,1]$. Sa bijection réciproque est la fonction **Arc sinus** notée arcsin et définie par :

$$\begin{array}{rcccl} \arcsin & : & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & & x & \longmapsto & y \quad \text{tel que} \quad \sin y = x. \end{array} \tag{3.7}$$

I. C. GERALDO

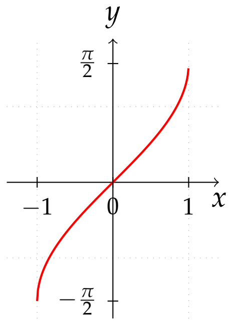


FIGURE 3.4 – Représentation graphique de la fonction Arc sinus.

En d'autres termes,

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \arcsin x = y \iff \sin y = x. \tag{3.8}$$

Remarque 3.4 Par définition de la bijection réciproque, on a :

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \forall x \in [-1,1] \tag{3.9}$$
$$\arcsin(\sin(x)) = x, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{3.10}$$

Application 3.5 Calculer

- $\arcsin(0)$
- $\arcsin(1)$
- $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$
- $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{3}\right)$

La proposition suivante donne la dérivée de la fonction Arc sinus.

Proposition 3.6 *Pour tout* $x \in]-1,1[$, *on a :*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3.11}$$

Preuve : Elle se fait en utilisant un raisonnement similaire à celui de la preuve pour la fonction arccos. ■

La proposition suivante donne la relation entre les fonctions Arc sinus et Arc cosinus.

Proposition 3.7 *Pour tout* $x \in [-1,1]$, *on a :*

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}. \tag{3.12}$$

Preuve : Posons $f(x) = \arccos x + \arcsin x$. On a

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

donc f est une fonction constante c'est-à-dire $f(x) = k$. Pour connaître k, calculons $f(0)$. On a $f(0) = k$ et aussi

$$f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

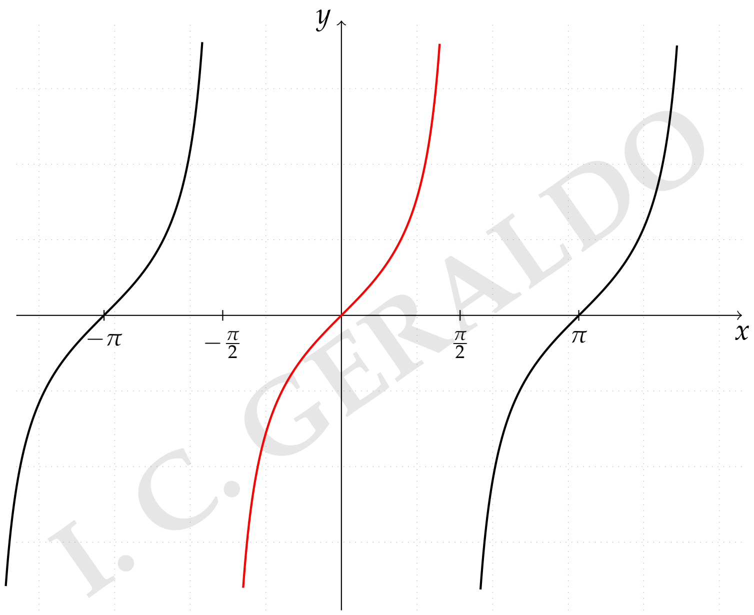
donc $k = \frac{\pi}{2}$. On conclut donc que

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

■

3.2.3 Arc tangente

Considérons la fonction tangente $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ représentée sur la figure 3.5.



I. C. GERALDO

FIGURE 3.5 – Représentation de la fonction tangente

Pour définir une bijection à partir de cette fonction, il faut prendre comme ensemble de départ $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et comme ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ (voir la partie en rouge sur la figure 3.5). Sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la fonction tangente est continue et strictement croissante et définit donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la fonction **Arc tangente** notée arctan et définie par :

$$\begin{array}{rccccl} \arctan & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \\ & & x & \longmapsto & y & \text{tel que} \quad \tan y = x. \end{array} \tag{3.13}$$

En d'autres termes,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan x = y \iff \tan y = x. \tag{3.14}$$

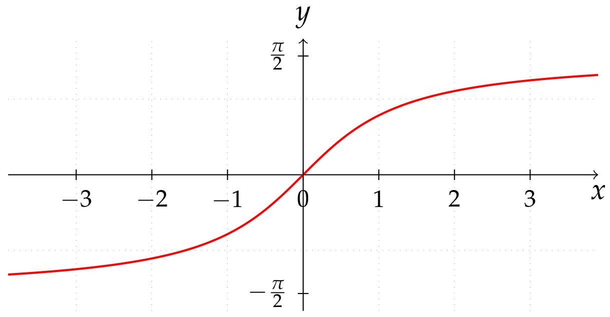


FIGURE 3.6 – Représentation graphique de la fonction Arc tangente.

Remarque 3.8 Par définition de la bijection réciproque, on a :

$$\tan(\arctan x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.15}$$
$$\arctan(\tan(x)) = x, \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \tag{3.16}$$

Application 3.9 Calculer

- $\arctan(0)$
- $\arctan(1)$
- $\arctan(\sqrt{3})$
- $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- $\arctan\left(\tan\frac{7\pi}{3}\right)$

La proposition suivante donne la dérivée de la fonction Arc tangente.

Proposition 3.10 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}. \tag{3.17}$$

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère l'égalité $\tan(\arctan x) = x$. On dérive à gauche et à droite pour obtenir :

$$\arctan'(x) \times \tan'(\arctan x) = 1$$

soit encore

$$\arctan'(x) \times (1 + \tan^2(\arctan x)) = 1.$$

Comme $\tan(\arctan x) = x$, on conclut que

$$\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

■

3.3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques

3.3.1 Fonctions hyperboliques

On appelle fonctions hyperboliques les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique.

Définition 3.11 On appelle

- **sinus hyperbolique** la fonction notée sinh (ou sh) et définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- **cosinus hyperbolique** la fonction notée cosh (ou ch) et définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- **tangente hyperbolique** la fonction notée tanh et définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

I. C. GERALDO

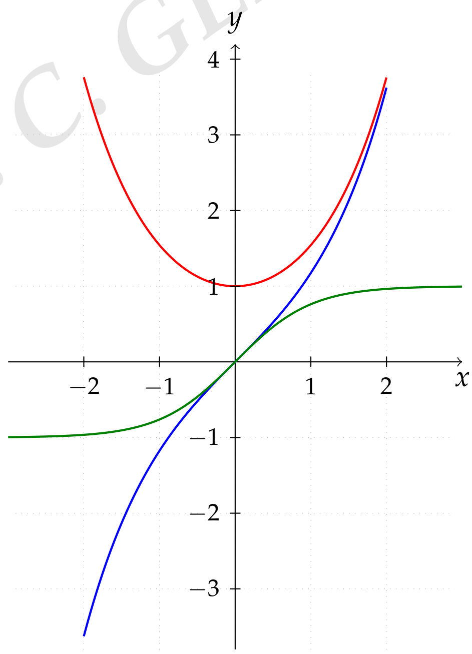


FIGURE 3.7 – Représentation graphique des fonctions sinh (en bleu), cosh (en rouge) et tanh (en vert).

Proposition 3.12 *Les fonctions* sinh, cosh *et* tanh *vérifient les propriétés suivantes :*

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*
$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1. \tag{3.18}$$
- *Pour tous réels a et b, on a :*
$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(a+b) &= \mathrm{ch}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{sh}\, b \\
\mathrm{ch}(2a) &= \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a = 2\,\mathrm{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2 a \\
\mathrm{sh}(a+b) &= \mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, b \cdot \mathrm{ch}\, a \\
\mathrm{sh}(2a) &= 2\,\mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{ch}\, a \\
\tanh(a+b) &= \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \cdot \tanh b}.
\end{aligned}$$

Proposition 3.13 *Les fonctions* sinh, cosh *et* tanh *sont dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*
$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}\, x \tag{3.19}$$
$$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}\, x \tag{3.20}$$
$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}. \tag{3.21}$$

3.3.2 Fonctions hyperboliques réciproques

En observant la figure 3.7, l'on peut dégager plusieurs propriétés mathématiquement démontrables. Les fonctions sinus hyperbolique et tangente hyperbolique sont bijectives respectivement de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$. Par contre, la fonction cosinus hyperbolique n'est pas bijective.

Proposition 3.14 *Soit $y \in \mathbb{R}$.*
1) L'ensemble des solutions de l'équation $\cosh(x) = y$ *est :*
$$\mathcal{S} = \begin{cases} \emptyset & \textit{si} \quad y < 1 \\ \{0\} & \textit{si} \quad y = 1 \\ \left\{ \ln(y - \sqrt{y^2-1}),\ \ln(y + \sqrt{y^2-1}) \right\} & \textit{si} \quad y > 1. \end{cases}$$
2) L'équation $\sinh(x) = y$ *admet une unique solution* $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.
3) L'ensemble des solutions de l'équation $\tanh(x) = y$ *est :*
$$\mathcal{S} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \right\} & \textit{si} \quad -1 < y < 1 \\ \emptyset & \textit{sinon}. \end{cases}$$

Preuve :
1)
$$\begin{aligned}
\cosh(x) = y &\iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \iff e^x + e^{-x} = 2y \\
&\iff e^x + \frac{1}{e^x} = 2y \iff \frac{(e^x)^2+1}{e^x} = 2y \\
&\iff (e^x)^2 + 1 = 2ye^x \\
&\iff (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0.
\end{aligned}$$

En posant $X = e^x$, il s'agit alors de résoudre l'équation $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant

$$\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y-1)(y+1)$$

Le signe de Δ est donné par le tableau suivant :

y	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

(a) Si $y \in]-1,1[$, il n'y a pas de solution.

(b) Si $y \in \{-1,1\}$, il y a une solution double $X_0 = y$. Le changement de variable $X = e^x$ ne permet pas de retenir le cas $y = -1$. Pour $y = 1$, $X_0 = 1$ et $x = \ln X_0 = 0$.

(c) Si $y \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, il y a deux solutions :

$$X_1 = \frac{2y - \sqrt{4y^2-4}}{2} = \frac{2y - 2\sqrt{y^2-1}}{2} = y - \sqrt{y^2-1}$$
$$X_2 = \frac{2y + \sqrt{4y^2-4}}{2} = \frac{2y + 2\sqrt{y^2-1}}{2} = y + \sqrt{y^2-1}$$

- Si $y \in]-\infty,-1[$, les deux solutions sont négatives
- Si $y \in]1,+\infty[$, les deux solutions sont positives. On a donc $e^x = y - \sqrt{y^2-1}$ ou $e^x = y + \sqrt{y^2-1}$ soit $x = \ln(y - \sqrt{y^2-1})$ ou $x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$.

En conclusion, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad y < 1 \\ \{0\} & \text{si} \quad y = 1 \\ \left\{ \ln(y - \sqrt{y^2-1}),\ \ln(y + \sqrt{y^2-1}) \right\} & \text{si} \quad y > 1. \end{cases}$$

2)

$$\begin{aligned} \sinh(x) = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \iff e^x - e^{-x} = 2y \\ &\iff e^x - \frac{1}{e^x} = 2y \iff \frac{(e^x)^2 - 1}{e^x} = 2y \\ &\iff (e^x)^2 - 1 = 2ye^x \\ &\iff (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0. \end{aligned}$$

En posant $X = e^x$, il s'agit alors de résoudre l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4y^2 + 4 > 0$ donc admet deux solutions

$$X_1 = \frac{2y - \sqrt{4y^2+4}}{2} = \frac{2y - 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y - \sqrt{y^2+1}$$
$$X_2 = \frac{2y + \sqrt{4y^2+4}}{2} = \frac{2y + 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}$$

I.C. GERALDO

La solution X_1 est négative et la solution X_2 est positive. En effet, $y^2+1 > y^2$ donc $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y|$. Ce qui implique que

$$y - \sqrt{y^2+1} < y - |y| \leqslant 0 \quad \text{et} \quad y + \sqrt{y^2+1} > y + |y| \geqslant 0.$$

On a donc $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ soit $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

3)

$$\begin{aligned}
\tanh(x) = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \iff \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y \\
&\iff e^{2x} - 1 = y(e^{2x}+1) \iff e^{2x}(1-y) = 1+y \\
&\iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}, \quad y \neq 1 \\
&\iff (e^x)^2 = \frac{1+y}{1-y}, \quad y \neq 1.
\end{aligned}$$

Le signe de $\frac{1+y}{1-y}$ est donné par :

y	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+y$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-y$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1+y}{1-y}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

La quantité $(e^x)^2$ est strictement positive, donc on ne peut trouver une solution que si $y \in]-1, 1[$. Ainsi,

- Si $-1 < y < 1$, on applique ln et on obtient

$$x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

- Sinon, il n'y a pas de solution.

En conclusion, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \right\} & \text{si} \quad -1 < y < 1 \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\blacksquare$

On peut définir les réciproques respectives des fonctions hyperboliques dans les conditions suivantes :

Définition 3.15

- La fonction cosh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $[1,+\infty[$ et sa réciproque, appelée **argument cosinus hyperbolique** est définie comme suit :

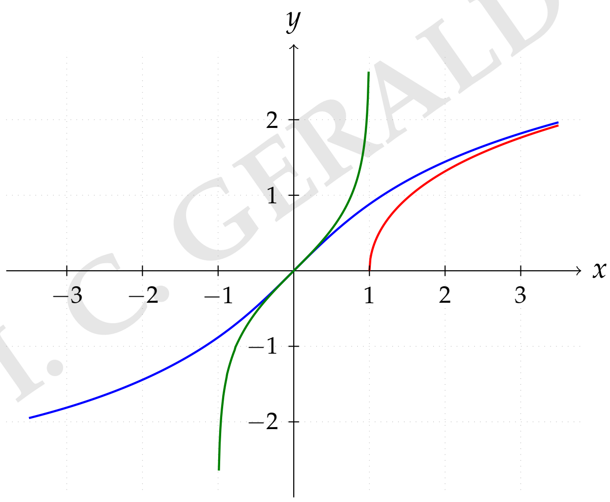
$$\begin{array}{rccl} \text{Argch} & : & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \text{Argch}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right). \end{array} \tag{3.22}$$

- La fonction sinh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa réciproque, appelée **argument sinus hyperbolique** est définie comme suit :

$$\begin{array}{rccl} \text{Argsh} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \text{Argsh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right). \end{array} \tag{3.23}$$

- La fonction tanh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ et sa réciproque, appelée **argument tangente hyperbolique** est définie comme suit :

$$\begin{array}{rccl} \text{Argth} & : &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \text{Argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right). \end{array} \tag{3.24}$$



I. C. GERALDO

FIGURE 3.8 – Représentation graphique des fonctions Argsh (en bleu), Argch (en rouge) et Argth (en vert).

Proposition 3.16 *Les fonctions* Argch, Argsh *et* Argth *sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs et leurs dérivées sont respectivement données par :*

$$\begin{aligned} \text{Argch}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x>1); \\ \text{Argsh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x\in\mathbb{R}); \\ \text{Argth}'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \quad (-1<x<1). \end{aligned}$$

3.4 EXERCICES

Exercice 3.1 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Etudier f dans les cas suivants :

1) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

2) $f(x) = \operatorname{Argth}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$

3) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

Exercice 3.2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'on a :

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 3.3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes :

$$f(x) = \cos(2\arcsin(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(2\arctan(x)).$$

Exercice 3.4 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\sinh(2x)}{1+\cosh(2x)} = \tanh x$.

Exercice 3.5 Etudier et représenter la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \arccos(\cos(x)).$$

CHAPITRE 4

ETUDE LOCALE ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Sommaire

I. C. GERALDO

4.1 COMPARAISON LOCALE DE FONCTIONS

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

4.1.1 Fonctions négligeables

Définition 4.1 Une fonction f est dite **négligeable** devant une fonction g au voisinage de a si :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On note $f \underset{a}{=} o(g)$ et on lit « *f égale petit o de g* ».

Exemple 4.2 $x^2 = o(x)$ au voisinage de 0.

Proposition 4.3 *Soient f_1, f_2, g, g_1 et g_2 des fonctions.*

$$f_1 \underset{a}{=} \circ(g) \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{=} \circ(g) \quad \Longrightarrow \quad f_1 + f_2 \underset{a}{=} \circ(g)$$
$$f_1 \underset{a}{=} \circ(g_1) \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{=} \circ(g_2) \quad \Longrightarrow \quad f_1 f_2 \underset{a}{=} \circ(g_1 g_2)$$

4.1.2 Fonctions dominées

Définition 4.4 Une fonction f est dite **dominée** par une fonction g au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a et un réel $k > 0$ tel que :

$$\forall x \in V, \quad |f(x)| \leqslant k|g(x)|.$$

On note $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$ et on lit "*f égale grand O de g*".

Exemple 4.5 $x = \mathrm{O}(x^2)$ au voisinage de $+\infty$ car $\forall x \in V =]10, +\infty[$, on a :

$$x \leqslant \frac{x^2}{10}.$$

4.1.3 Fonctions équivalentes

Définition 4.6 Deux fonctions f et g sont dites **équivalentes** au voisinage de a s'il existe une fonction h définie de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = h(x)g(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} h(x) = 1.$$

On note $f \sim g$ au voisinage de a ou plus simplement $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemple 4.7 On a : $x^3 - 3x^2 + 1 \sim x^3$ lorsque x tend vers $+\infty$. En effet, on a :

$$x^3 - 3x^2 + 1 = x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 1.$$

Remarque 4.8 Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors on a aussi $g \underset{a}{\sim} f$.

Proposition 4.9 *Si g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de a, si et seulement si,*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple 4.10 (Equivalences usuelles) Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)(x-a)} = 1$$

d'où :

$$f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} (x-a)f'(a). \tag{4.1}$$

En appliquant cette dernière égalité aux fonctions usuelles **au voisinage de 0**, on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lcl} e^x - 1 \sim x & ; & \ln(1+x) \sim x \\ \sin x \sim x & ; & 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \\ \tan x \sim x & ; & (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{array}$$

Proposition 4.11 (Equivalence et composition) *Soient f et g deux fonctions sur J et équivalentes en b. Si u est une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans J et si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ alors $f(u(x))$ et $g(u(x))$ sont équivalentes en a.*

Exemple 4.12 $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x$ lorsque x tend vers 0.

Proposition 4.13 *Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si g possède une limite finie ou infinie en a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.*

Proposition 4.14 *Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors* $\quad f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2 \quad$ *et* $\quad \dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$.

Remarque 4.15 Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors on n'a pas forcément $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$.

4.2 Notion de développement limité

I. C. GERALDO

Soit f une fonction dérivable en un réel a. On sait que

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \implies \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0.$$

Ainsi on peut trouver une fonction ε telle que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = \varepsilon(x)$$

c'est-à-dire

$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + r(x)$$

avec

$$r(x) = (x - a)\varepsilon(x) \to 0, \quad x \to a.$$

On peut donc faire une approximation de f par une fonction pôlynome.

Définition 4.16 Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f admet un **développement limité d'ordre** n **au voisinage de** a s'il existe $n + 1$ réels $b_0, b_1, \cdots, b_n$ tels que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \cdots + b_n (x - a)^n + r(x) \tag{4.2}$$

où $r(x) = o((x - a)^n)$.

Remarque 4.17 Un développement limité d'ordre n est unique, s'il existe.

4.3 FORMULES DE TAYLOR

Théorème 4.18 (Formule de Taylor-Lagrange) *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(]a,b[)$ tels que $a < b$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :*

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c). \quad (4.3)$$

En posant dans la formule de Taylor-Lagrange, $b = a + x$, on peut voir que l'énoncé « il existe $c \in]a, a+x[$ » est équivalent à l'énoncé » il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $c = a + \theta x$ ». On obtient la **formule de Taylor avec reste de Lagrange** :

$$f(a+x) = f(a) + \frac{x}{1!}f'(a) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta x). \quad (4.4)$$

Pour $a = 0$, on obtient la **formule de MacLaurin** :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x). \quad (4.5)$$

et le nombre

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad (4.6)$$

est appelé **reste de Lagrange**.

Théorème 4.19 (Formule de Taylor-Young) *Soient $f \in C^n(I)$ et $a \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre n en a donné par :*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \quad (4.7)$$

ou plus simplement

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right). \quad (4.8)$$

Exemple 4.20 Le développement limité d'ordre 5 de e^x au voisinage de 0 est donné par :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \mathrm{o}\left(x^5\right).$$

4.4 CALCUL DE DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

4.4.1 Développement limité des fonctions usuelles en 0

On a les développements limités suivants à l'ordre n en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \tag{4.9}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n) \tag{4.10}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) \tag{4.11}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) \tag{4.12}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \tag{4.13}$$

4.4.2 Somme et produit de développements limités

Proposition 4.21 *Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n en a. Alors $f+g$ et fg admettent des développements limités d'ordre n en a. Plus précisément si*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k \, + \, \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

et

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k \, + \, \mathrm{o}\left((x-a)^n\right),$$

alors

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)(x-a)^k \, + \, \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \tag{4.14}$$

et

$$(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) (x-a)^k \, + \, \mathrm{o}\left((x-a)^n\right). \tag{4.15}$$

Exemple 4.22 Le développement limité d'ordre 3 de $(e^x)^2$ en 0 est donné par :

$$\begin{aligned}(e^x)^2 &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \circ(x^3)\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\,\mathrm{o}(x^3)\right)\\ &= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3).\end{aligned}$$

4.4.3 Développement limité de la composée de 2 fonctions

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I, n un entier naturel, f une fonction réelle définie sur I telle que $f(a) = b$ et g une fonction définie sur $f(I)$. Si f admet un développement limité en a et g admet un développement limité en b, le développement limité de $g \circ f$ en a à l'ordre n s'obtient en remplaçant la variable du développement limité de g en b par le développement limité de f en a.

Exemple 4.23 Le développement limité d'ordre 3 de $e^{\cos x - 1}$ en 0 est

$$e^{\cos x - 1} = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3).$$

I. C. GERALDO

4.4.4 Développement limité de l'inverse d'une fonction

Pour obtenir le développement limité de $\dfrac{1}{f}$ en a tel que $f(a) \neq 0$, on peut :

- soit effectuer un division selon les puissances croissantes en tronquant les termes de degré strictement supérieur à l'ordre recherché ;
- soit factoriser le développement limité de f en a par son coefficient constant et utiliser le développement limité de $\dfrac{1}{1-u}$ en 0.

Application 4.24 Vérifier que le développement limité d'ordre 5 de $\dfrac{1}{\cos x}$ en 0 est :

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5).$$

4.5 Application des développements limités au calcul de limites

Application 4.25 Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

4.6 EXERCICES

Exercice 4.1 Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. En utilisant le développement limité d'ordre 2 de f en x_0, montrer que :

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

Exercice 4.2 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x \cos x$. Calculer le développement limité (DL) à l'ordre 5 de f en 0 en :

1) utilisant la formule de Taylor-Young ;
2) utilisant les DL des fonctions sin et cos ;
3) remarquant que $\sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$.

Exercice 4.3 On considère la suite (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

1) Appliquer la formule de Mac-Laurin à la fonction $x \longmapsto \ln(x+1)$ pour $x = 1$.
2) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |S_n - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
3) Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

Exercice 4.4 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{(1 - e^x)^2}.$$

Calculer de deux façons la limite de f en 0 : (1) à l'aide des développements limités et (2) à l'aide de la règle de l'Hopital.

J. C. GERALDO

Références bibliographiques

[1] A. Bodin, N. Borne & L. Desideri – « Cours de mathématiques première année », ch. Fonctions usuelles, p. 173–182, Exo7, 2016, http://exo7.emath.fr/cours/cours-exo7.pdf.

[2] — , « Cours de mathématiques première année », ch. Dérivée d'une fonction, p. 185–201, Exo7, 2016, http://exo7.emath.fr/cours/cours-exo7.pdf.

[3] D. Boularas, D. Fredon & D. Petit – *Mini-manuel de Mathématiques pour les sciences de la vie et de l'environnement*, Dunod, Paris, 2009.

[4] A. Burd – *Mathematical Methods in the Earth and Environmental Sciences*, Cambridge University Press, New York, 2019.

[5] C. David, S. Mustapha, F. Viens & N. Capron – *Mathématiques pour les sciences de la vie*, Dunod, Paris, 2014.

[6] C. Deschamps & A. Warusfel – *Mathématiques tout-en-un 1ère année, cours et exercices corrigés*, Dunod, 2003.

[7] G. Faccanoni – *Optimisation : Recueil d'exercices corrigés et aide-mémoire*, 2016.

[8] D. Fredon – *Mathématiques pour les sciences de la vie et de la santé en 30 fiches*, Dunod, Paris, 2008.

[9] Y. Mensah – *Exercices d'analyse mathématique*, 2012.

[10] D. Müller – *Analyse*, http://www.nymphomath.ch/MADIMU2/ANALY/INDEX.HTM, 2016.

[11] N. Pindra, Y. Mensah & A. J. M. Tchalla – *MTH103 : Calcul différentiel dans* $\mathbb{R}$, 2019.