
Cours de Mécanique des Systèmes de Solides Indéformables



M. BOURICH (ENSAM)

Deuxième édition 2014

AVANT-PROPOS

Ce manuel est un cours de base de la mécanique des systèmes de solides indéformables, particulièrement destiné aux étudiants de la deuxième année de l'École Nationale des Sciences Appliquées de Marrakech. La première édition du présent manuel est constituée du cours que j'ai assuré, entre 2004 et 2010, en deuxième année SMP à la faculté poly-disciplinaire de Safi. Cette seconde édition respecte le contenu du descriptif de la mécanique des systèmes de solides indéformables de la filière EGT, de l'École Nationale des Sciences Appliquées de Marrakech, accréditée.

L'objectif de ce cours est d'apporter une contribution à l'acquisition d'une culture scientifique de base permettant une meilleure compréhension des lois du mouvement et la maîtrise dans le maniement des outils de la mécanique.

Chaque chapitre s'ouvre par la précision des objectifs et des compétences visées. L'introduction de chaque concept est accompagnée par une brève évolution dans le temps, de la sorte que l'étudiant pourra relater les événements marquants de l'histoire de la mécanique.

Conformément au descriptif de la mécanique des systèmes de solides indéformables, le cours est articulé en sept chapitres :

- Calcul vectoriel-Torseurs,

- Cinématique du solide,

- Géométrie des masses,

- Cinétique du solide,

- Dynamique du solide,

- Liaisons-Forces de liaison,

- Mouvement d'un solide autour d'un point ou d'un axe fixes.

Pour l'élaboration de ce cours polycopié, j'ai utilisé de nombreuses ressources pédagogiques citées en bibliographie : ouvrages, sites Web et le polycopié de mon cher enseignant Monsieur M. Hasnaoui.

Gageons que ce cours constituera un précieux outil pédagogique pour les étudiants, tant pour une préparation efficace des examens que pour l'acquisition d'une solide culture scientifique.

M.Bourich

Illustration de couverture :

GALILÉE (Galileo Galilei, 1564-1642)

(Source : <https://www.delcampe.net>)

Mathématicien, philosophe et astronome italien. Il utilisa le premier, en 1610, un système optique pour observer le ciel et révolutionna l'observation de l'Univers. Il découvrit l'inégalité de la surface de la Lune, les 4 étoiles (satellites) autour de Jupiter, Saturne au triple corps (les anneaux), les phases de Vénus, et résolut la Voie Lactée en étoiles.

Il fut un des précurseurs de la mécanique classique (celle de Newton), introduisant l'usage des mathématiques pour l'explication des lois de la physique. Il établit la loi de la chute des corps dans le vide, et donna une première formulation du principe de relativité. Il défendit ardemment les thèses héliocentriques de Copernic. Contraire aux Saintes Ecritures, le livre écrit sur le sujet fut interdit et les exemplaires saisis et brûlés.

A 70 ans (en 1634), jugé par l'église catholique, il fut accusé d'hérésie et dut prononcer un serment d'abjuration pour ne pas être condamné à mort sur le bûcher. L'Église l'a réhabilité seulement en 1992.

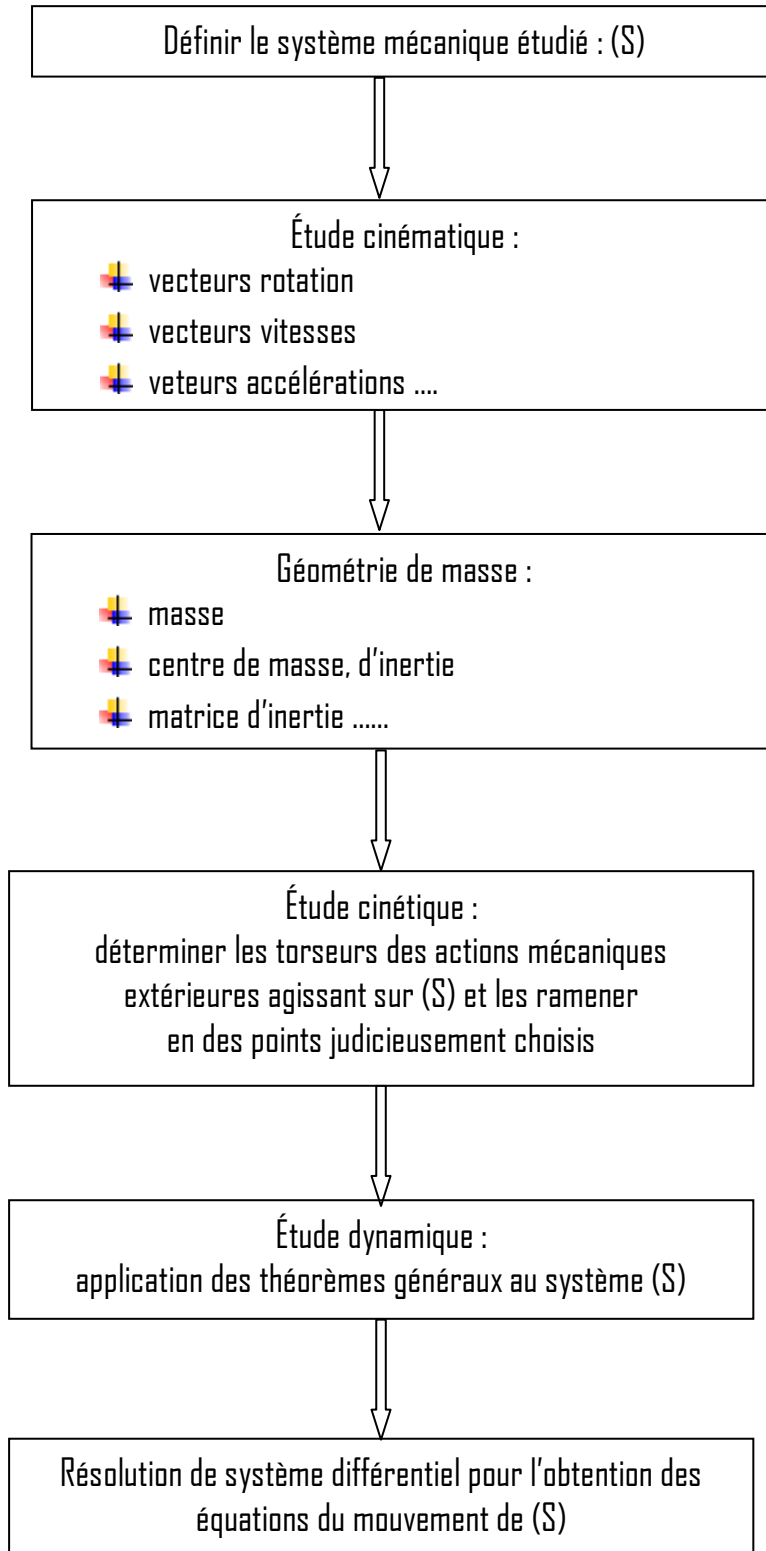
Table des matières

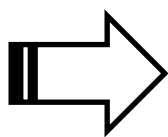
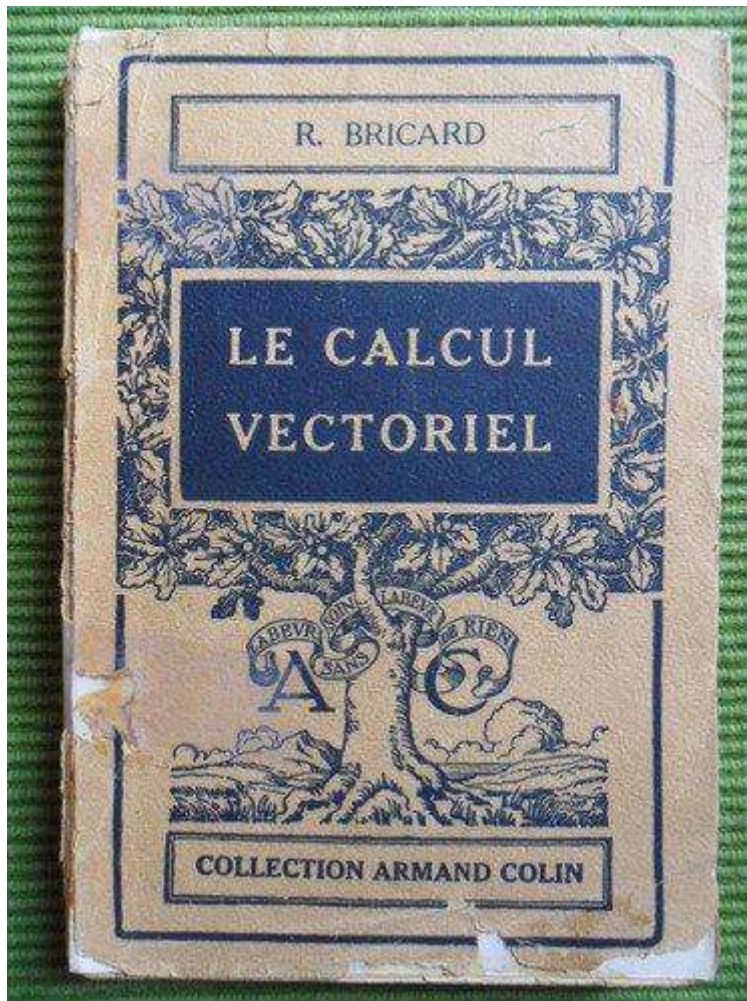
AVANT-PROPOS	2
PLAN D'ÉTUDE D'UN SYSTÈME MÉCANIQUE	7
CALCUL VECTORIEL - TORSEURS.....	10
I- Approche historique.....	10
II- Définitions	10
1 - Espace vectoriel	10
2 - Espace vectoriel Euclidien.....	10
II- Espace Affine-Espace Métrique.....	10
1 - Espace affine	10
2 - Espace métrique.....	11
III- Vecteurs-Moment d'un vecteur.....	11
1- Introduction.....	11
2- Vecteur lié-Vecteur glissant.....	11
3 - Opérations sur les vecteurs.....	11
4- Moment d'un vecteur en un point.....	12
IV- Torseurs.....	13
1 - Introduction.....	13
2- Application antisymétrique	13
3- Champ antisymétrique	14
4- Torseurs.....	15
CINÉMATIQUE DU SOLIDE.....	20
I. Approche historique.....	20
II. Espace Repère-Solide rigide	20
1- Espace repère.....	20
2- Définition d'un solide rigide.....	20
III. Notion des Champs des Vitesse et des Accélérations.....	21
1-Introduction	21
2-Champ des vitesses d'un solide	21
3- Champ des accélérations d'un solide	21
IV. Mouvements de translation-rotation-tangent.....	22
1- Mouvement de translation.....	22
2- Rotation d'un solide autour d'un axe fixe.....	22
3- Mouvement hélicoïdal.....	23
4- Mouvement général d'un solide : Mouvement tangent	23
IV- Composition des Mouvements.....	24
1- Dérivation vectorielle	24
2- Composition des vitesses.....	25
3- Composition des vecteurs rotations	25
4- Composition des accélérations.....	26
V- Cinématique des solides en contact.....	26
1- Vitesse de glissement.....	27
2- Roulement et pivotement.....	28
VI- Mouvement plan d'un solide	28
1- Définition	28
2- Centre instantané de rotation (C.I.R.).....	29
3- Base et roulante-Étude analytique.....	29

GÉOMÉTRIE DES MASSES	35
I. Approche historique	35
II. Masse - Centre de Masse	35
1- Définition	35
2- Centre de masse	36
3- Théorème de Guldin	36
Les méthodes pratiques de recherche de G dans le cas de corps homogènes :	36
4- Centre de masse de volume ou de surface homogènes présentant un axe de révolution	38
III. Moment d'inertie - Opérateur d'inertie	38
1- Définitions	38
2- Moment d'inertie	39
Les relations entre ces grandeurs : On peut écrire	39
3- Opérateur d'inertie en un point O	40
IV- Matrice d'inertie-Matrice principale d'inertie	41
1- Matrice d'inertie	41
2- Matrice principale d'inertie:	42
V- Théorème de Huygens	43
1- Relation entre les opérateurs d'inertie d'un système en deux points	43
2- Théorème de Huygens	1
VI- Exemple de corps homogènes classiques	44
CINÉTIQUE DU SOLIDE	49
I. Introduction	49
II. Définitions des cinq quantités cinétiques	49
III. Torseur Cinétique	49
1- Quantité de Mouvement	49
2- Moment Cinétique	50
IV. Torseur Dynamique [D]	52
1. Quantité d'accélération (résultante dynamique)	52
2- Moment dynamique	53
3- Autres résultats	54
V. Énergie Cinétique	56
1- Introduction	56
2- Deuxième théorème de Kœnig	56
DYNAMIQUE DU SOLIDE	60
I. Approche historique	60
II. Principe Fondamental de la Dynamique - Théorèmes Généraux	60
1- Introduction	60
2- Torseur des forces appliquées à (S)	60
3- Classification des forces	61
4- Principe fondamental de la dynamique (PFD) ou axiome de la dynamique	61
5- Théorème des interactions ou théorème de l'action et de la réaction	62
III- Changement de repère - Repère galiléen	63
1- Position du Problème	63
2- Torseur dynamique d'entraînement-Torseur dynamique de Coriolis	63
IV. Travail et puissance	64
1- Puissance d'un couple appliqué à un solide	64
2- Puissance d'un torseur de forces appliquées à un solide	64
3- Puissance du torseur des forces appliquées à un système matériel (S)	65
4- Théorème de l'énergie cinétique	66
LIAISONS - FORCES DE LIAISON	70
I. Introduction	70

II. Liaisons-Actions de contact.....	70
1- Définition	70
2- Liaisons.....	70
3- Liaison holonome.....	71
4- Action de contact.....	71
III. Lois de Coulomb.....	71
1- Approche historique	71
2- Réaction normale	72
3- Réaction tangentielle.....	72
4- Vitesse de rotation de pivotement-roulement.....	73
5- Puissance totale des actions de contact	73
IV. Exemple d'application: mouvement d'une sphère sur un plan incliné.....	74
MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT OU D'UN AXE FIXES	79
I- Approche historique.....	79
II- Rotation d'un Solide autour d'un Point Fixe (Angles d'Euler)	79
1- Angles d'EULER	79
2- Moment cinétique en O du solide :	80
3- Moment dynamique en O :.....	80
4- Énergie cinétique:.....	80
III- Exemple de la toupie symétrique sur sa pointe fixe O	81
VI. Solide mobile autour d'un axe fixe	84
1. Exemple	84
2. Énergie cinétique.....	85
3. Mouvement du centre de gravité	85
BIBLIOGRAPHIE.....	87

PLAN D'ÉTUDE D'UN SYSTÈME MÉCANIQUE





Calcul Vectoriel-Torseurs



Galilée : (1564-1642)

La philosophie est écrite dans ce grand livre, l'univers, qui ne cesse pas d'être ouvert devant nos yeux. Mais ce livre ne peut se lire si on ne comprends pas le langage et on ne connaît pas les caractères avec lesquels il est écrit. Or, la langue est celle des mathématiques, et les caractères sont triangles, cercles et d'autres figures géométriques. Si on ne les connaît pas, c'est humainement impossible d'en comprendre même pas un seul mot. Sans eux, on ne peut qu'aller à la dérive dans un labyrinthe obscur et inextricable". G. Galilei, "Il Saggiatore", Rome, 1623

Objectifs :

- ✚ Définir un torseur (torseur symétrique et anti-symétrique, invariants scalaires) ;
- ✚ Décomposer un torseur (couple et glisseur) ;
- ✚ Comprendre la notion de torseur équiprojectif ;
- ✚ Décrire les éléments de réduction d'un torseur ;
- ✚ Déterminer l'axe central.

CALCUL VECTORIEL - TORSEURS

I- Approche historique

Pour les problèmes de physique, l'Allemand Hermann Grassman (1809-1877) fut l'un des premiers à utiliser la notation vectorielle. L'Américain Gibbs (1839-1903) et l'Anglais Heaviside (1850-1925), disciples de Hamilton (l'un des premiers à utiliser la notion de vecteur), donnent au calcul vectoriel sa forme quasi définitive. L'intérêt de la maîtrise du calcul vectoriel est fondamental pour la bonne application des lois de la mécanique.

II- Définitions

1 - Espace vectoriel

On appelle espace vectoriel E sur un corps commutatif K un ensemble d'éléments (vecteurs) qui vérifient les propriétés suivantes:

- E est muni d'une structure de groupe commutatif pour une loi de composition interne, l'addition vectorielle, notée $(+)$.
- $\forall \lambda, \mu \in K$ et $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$, on a : $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ et $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$

2 - Espace vectoriel Euclidien

Un espace vectoriel E est dit euclidien s'il est muni d'un produit scalaire f qui à $\vec{u}, \vec{v} \in E$, fait correspondre le nombre réel $f(\vec{u}, \vec{v})$ tel que:

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u})$$

$$f(\vec{u}, \lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}, \vec{v})$$

$$f(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{v}) + f(\vec{u}, \vec{w})$$

$$f(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0 \text{ (égalité si } \vec{u} = \vec{0}\text{)}$$

Notation: $f(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$

II- Espace Affine-Espace Métrique

1 - Espace affine

On appelle espace affine ξ , un ensemble d'éléments appelés points tels qu'à tout couple ordonné de deux points A et B (bipoints), on fait correspondre un vecteur \vec{AB} d'un espace vectoriel E et si A, B et $C \in \xi$, on a:

$$\vec{AB} = -\vec{BA}$$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

$\forall O \in \xi$ et $\vec{u} \in E$, $\exists ! A \in \xi$ défini par $\vec{OA} = \vec{u}$

2 - Espace métrique

Un espace métrique est un espace affine auquel on a associé un espace vectoriel euclidien.

Pour la suite du cours, on désignera par ξ l'espace métrique associé à un espace vectoriel euclidien E de dimension 3.

III- Vecteurs-Moment d'un vecteur

1- Introduction

En physique, la modélisation des grandeurs, qui ne peuvent être entièrement définies par un scalaire ou une fonction numérique seuls, se fait par l'introduction de la notion de vecteur. Par exemple, pour préciser un déplacement, une vitesse, ou une force, la direction et le sens sont indispensables.

2- Vecteur lié-Vecteur glissant

♦ On appelle vecteur lié, tout couple (A, \vec{u}) formé de $A \in \xi$ appelé origine ou point d'application et d'un vecteur \vec{u} de E appelé grandeur vectorielle.

Notation: $(A, \vec{u}) = \vec{u}(A)$: on lit vecteur \vec{u} lié au point A .

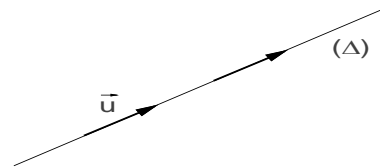
Exemples:

- Force résultante appliquée à un point.
- Champ électrique créé par une charge électrique en un point.

♦ On appelle vecteur glissant, un vecteur défini à un glissement près sur un axe (Δ) appelé support.

Notation: (Δ, \vec{u}) : vecteur glissant

Exemple: - Résultante dans le cas d'un torseur.



Soit $b = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E .

$\forall \vec{u} \in E$, \vec{u} sera défini par ses composantes u_x, u_y et u_z dans cette base :

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \begin{cases} u_x \\ u_y \\ u_z \end{cases} \text{ dans } (b)$$

3 - Opérations sur les vecteurs

3-1 Produit scalaire

Le produit scalaire est une opération algébrique s'ajoutant aux lois s'appliquant aux vecteurs. À deux vecteurs, elle associe leur produit, qui est un nombre (ou scalaire, d'où son nom). Elle permet d'exploiter les notions de la géométrie euclidienne traditionnelle : longueurs, angles, orthogonalité.

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs libres non nuls de E .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

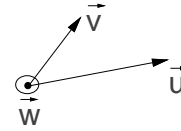
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

3-2 Produit vectoriel

Le produit vectoriel est une opération vectorielle effectuée dans les espaces euclidiens orientés de dimension 3. Le formalisme utilisé actuellement est apparu en 1881 dans un manuel d'analyse vectorielle écrit par Josiah Willard Gibbs pour ses étudiants en physique.

Aux deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de E , on peut associer un vecteur \vec{w} (unique) tel que:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \vec{v}_x & \vec{v}_y & \vec{v}_z \\ \vec{w}_x & \vec{w}_y & \vec{w}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \vec{v}_x & \vec{v}_y & \vec{v}_z \\ \vec{w}_x & \vec{w}_y & \vec{w}_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{v}_y \vec{v}_z - \vec{u}_y \vec{v}_z \\ \vec{u}_z \vec{v}_x - \vec{u}_x \vec{v}_z \\ \vec{u}_x \vec{v}_y - \vec{u}_y \vec{v}_x \end{vmatrix}$$



On a $\vec{w} \perp \vec{u}$, $\vec{w} \perp \vec{v}$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme un trièdre direct.

Conséquences

- Si \vec{u} et \vec{v} sont dans le plan de la feuille, \vec{w} est \perp à ce plan.
- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$: le produit vectoriel est anti-commutatif.

3-3 Double produit vectoriel

Soient \vec{u} , \vec{v} et $\vec{w} \in E$.

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

3-4 Produit mixte

Considérons \vec{u} , \vec{v} et $\vec{w} \in E$.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

Propriétés

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$: le produit mixte est invariant par permutation circulaire.

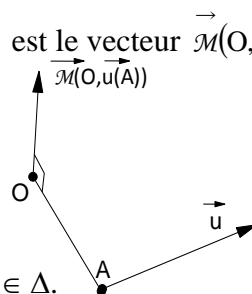
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$: le produit mixte change de signe dans le cas d'une permutation non circulaire.

4- Moment d'un vecteur en un point

En physique, les moments des vecteurs sont grandement utilisés, ils permettent de modéliser des grandeurs comme, moment d'une force, moment d'inertie et moment cinétique...etc.

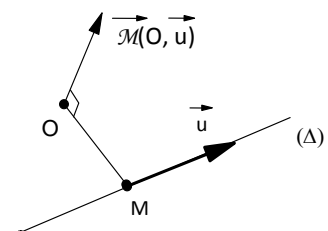
♦ Soit (A, \vec{u}) un vecteur lié et $O \in \xi$.

Le moment en O du vecteur lié $\vec{u}(A)$ est le vecteur $\vec{\mathcal{M}}(O, \vec{u}(A)) = \vec{OA} \wedge \vec{u}$



♦ Soit (Δ, \vec{u}) un glisseur et $O \in \xi$.

$\vec{\mathcal{M}}(O, \vec{u})$ est indépendant du point $M \in \Delta$.



$$\text{Preuve: } \vec{OM} \wedge \vec{u} = \vec{OM'} \wedge \vec{u} + \underbrace{\vec{M'M} \wedge \vec{u}}_{=0}$$

IV- Torseurs

1 - Introduction

Un torseur est un outil mathématique utilisé principalement en mécanique du solide indéformable, pour décrire les mouvements des solides et les actions mécaniques qu'ils subissent de la part d'un environnement extérieur. Un certain nombre de vecteurs utilisés en mécanique sont des moments : moment d'une force, moment cinétique, moment dynamique. Les champs vectoriels utilisés en mécanique (moment d'une force, moment cinétique, moment dynamique..) possèdent des propriétés communes, d'où l'intérêt d'être modélisés par un même objet mathématique appelé « torseur ».

2- Application antisymétrique

$$\begin{aligned} \text{Définition: } \mathcal{L}: E &\longrightarrow E \\ \vec{u} &\longrightarrow \mathcal{L}(\vec{u}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} \text{ est antisymétrique } \Leftrightarrow \forall \vec{u}, \vec{v} \in E; \mathcal{L}(\vec{u}) \cdot \vec{v} = -\mathcal{L}(\vec{v}) \cdot \vec{u}$$

$$\begin{aligned} \text{Exemple: } \mathcal{L}_{\vec{a}}: E &\longrightarrow E \\ \vec{u} &\longrightarrow \vec{a} \wedge \vec{u} \quad (\text{où } \vec{a} \text{ est un vecteur donné non nul}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Proposition : } \text{Si } \mathcal{L} \text{ est antisymétrique, } \exists! \vec{R} \in E \text{ tel que:} \\ \mathcal{L}(\vec{u}) = \vec{R} \wedge \vec{u} \quad (\forall \vec{u} \in E) \end{aligned}$$

Démonstration

Si $[L]$ est la matrice associée à \mathcal{L} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, alors $\mathcal{L}(\vec{u}) = [L] \vec{u}$

$$\text{avec } [L] = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix}$$

Considérons les produits scalaires suivants :

$$\mathcal{L}(\vec{i}) \cdot \vec{i} = -\mathcal{L}(\vec{i}) \cdot \vec{i} = 0 \Leftrightarrow [L]\vec{i} \cdot \vec{i} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \ell_{11} = 0$$

$$\mathcal{L}(\vec{j}) \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \ell_{22} = 0$$

$$\mathcal{L}(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0 \Rightarrow \ell_{33} = 0$$

$$\mathcal{L}(\vec{i}) \cdot \vec{j} = -\mathcal{L}(\vec{j}) \cdot \vec{i} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & 0 & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\ell_{21}} = -\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & 0 & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{-\ell_{12}}$$

$$\mathcal{L}(\vec{i}) \cdot \vec{j} = -\mathcal{L}(\vec{j}) \cdot \vec{i} \Rightarrow \ell_{21} = -\ell_{12}$$

$$\mathcal{L}(\vec{i}) \cdot \vec{k} = -\mathcal{L}(\vec{k}) \cdot \vec{i} \Rightarrow \ell_{31} = -\ell_{13}$$

$$\mathcal{L}(\vec{j}) \cdot \vec{k} = -\mathcal{L}(\vec{k}) \cdot \vec{j} \Rightarrow \ell_{23} = -\ell_{32}$$

Posons $\ell_{12} = -r_3$, $\ell_{13} = r_2$ et $\ell_{23} = -r_1$. Il en résulte :

$$\mathcal{L}(\vec{u}) = [\mathbf{L}] \vec{u} \Leftrightarrow [\mathbf{L}] \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_3 u_y + r_2 u_z \\ r_3 u_x - r_1 u_z \\ -r_2 u_x + r_1 u_y \end{pmatrix} = \vec{R} \wedge \vec{u}$$

avec $\vec{R} = r_1 \vec{i} + r_2 \vec{j} + r_3 \vec{k}$

3- Champ antisymétrique

3-1 Définitions

♦ Soit D un sous-ensemble de ξ ($D \subset \xi$). On appelle champ de vecteurs sur D , une application de D dans E qui à $M \in D \longrightarrow \vec{u}(M) \in E$.

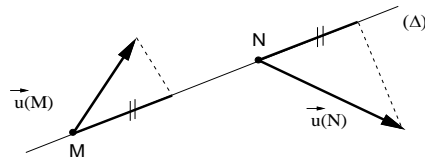
Notation: $D \longrightarrow E$
 $M \longrightarrow \vec{u}(M)$

♦ Un champ de vecteurs $\vec{u}(M)$ est dit *antisymétrique* s'il existe une application antisymétrique \mathcal{L} telle que $\forall M, N \in \xi$, on a la relation $\vec{u}(N) = \vec{u}(M) + \mathcal{L}(\vec{MN})$.

Si \vec{R} est le vecteur associé à \mathcal{L} on aura $\vec{u}(N) = \vec{u}(M) + \vec{R} \wedge \vec{MN}$, $\forall M, N \in \xi$.

♦ Un champ de vecteurs $\vec{u}(M)$ est dit *équiprojectif* si $\forall M, N \in \xi$:

$$\vec{MN} \cdot \vec{u}(N) = \vec{MN} \cdot \vec{u}(M)$$



Propriété

Un champ de vecteurs $\vec{u}(M)$ est *antisymétrique* $\Leftrightarrow \vec{u}(M)$ est *équiprojectif*.

Preuve

$$\vec{u}(N) = \vec{u}(M) + \vec{R} \wedge \vec{MN} \Rightarrow \vec{MN} \cdot \vec{u}(N) = \vec{MN} \cdot \vec{u}(M) + \underbrace{\vec{MN} \cdot (\vec{R} \wedge \vec{MN})}_{=0}$$

Achever la démonstration dans l'autre sens.

4- Torseurs

4-1 Définition

♦ On appelle torseur $[\tau]$ un ensemble formé d'un champ de vecteurs antisymétrique $\vec{u}(M)$ et de son vecteur \vec{R} .

Conséquence

Soit $O \in \xi$ et M quelconque, on a $\vec{u}(M) = \vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OM}$

Un torseur est donc caractérisé par la donnée de \vec{R} et de son champ en un point.

Notation: $[\tau(O)] = [\vec{u}(O), \vec{R}]$.

Les vecteurs $\vec{u}(O)$ et \vec{R} sont appelés les éléments de réduction du torseur $[\tau]$ en O ou ses coordonnées en O .

$$\begin{cases} \vec{u}(O): & \text{moment du torseur au point } O \\ \vec{R}: & \text{résultante du torseur} \end{cases}$$

Exemple: Le champ des moments d'un vecteur est un torseur.

Considérons \vec{F} un vecteur lié à un point A et M un point quelconque de ξ . Le moment en M de \vec{F} vérifie la relation :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}(M, \vec{F}) &= \vec{MA} \wedge \vec{F} = (\vec{MM'} + \vec{M'A}) \wedge \vec{F} \\ &= \vec{M'A} \wedge \vec{F} + \vec{MM'} \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}(M', \vec{F}) + \vec{MM'} \wedge \vec{F} \end{aligned}$$

Ainsi, le champ $\vec{\mathcal{M}}(M)$ est antisymétrique. On peut donc lui associer un torseur avec \vec{F} comme résultante.

4-2 Opération sur les torseurs

♦ Addition des torseurs

Considérons les torseurs $[\tau_1(O)] = [\vec{u}_1(O), \vec{R}_1]$ et $[\tau_2(O)] = [\vec{u}_2(O), \vec{R}_2]$.

Le champ $\vec{u}(M) = \vec{u}_1(M) + \vec{u}_2(M)$ possède la propriété suivante:

$$\begin{aligned} \vec{u}(M') &= \vec{u}_1(M') + \vec{u}_2(M') = \vec{u}_1(M) + \vec{R}_1 \wedge \vec{MM'} + \vec{u}_2(M) + \vec{R}_2 \wedge \vec{MM'} \\ &= \vec{u}(M) + \vec{R} \wedge \vec{MM'}: \text{ce champ est antisymétrique} \end{aligned}$$

Il vérifie donc la propriété d'un torseur et caractérise la somme $[\tau(O)] = [\tau_1(O)] + [\tau_2(O)]$.

Ses éléments de réduction en O sont :

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{u}(O) = \vec{u}_1(O) + \vec{u}_2(O) \end{cases}$$

Remarque:

- Cette loi d'addition est commutative et associative,
- Elle a un élément neutre: le torseur nul (résultante et moment nuls),

- Tout torseur $[\tau(O)]$ a un torseur opposé $[-\vec{u}(O), -\vec{R}]$.

◆ **Multiplication d'un torseur par un scalaire**

$$[\tau(O)] = \lambda[\tau_1(O)] \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R} = \lambda \vec{R}_1 \\ \vec{u}(O) = \lambda \vec{u}_1(O) \end{cases}; \quad \lambda \in \mathfrak{R}$$

Exercice : Vérifier que $\lambda[\tau_1(O)]$ est un torseur.

◆ **Comoment ou produit scalaire de deux torseurs**

Considérons les deux torseurs:

$$\begin{aligned} [\tau_1(O)] &= [\vec{u}_1(O), \vec{R}_1] \\ [\tau_2(O)] &= [\vec{u}_2(O), \vec{R}_2] \end{aligned} \quad \text{considérons } O' \neq O \text{ et examinons } \vec{R}_1 \cdot \vec{u}_2(O') + \vec{R}_2 \cdot \vec{u}_1(O')$$

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 \cdot \vec{u}_2(O') + \vec{R}_2 \cdot \vec{u}_1(O') &= \vec{R}_1 \cdot \left(\vec{u}_2(O) + \vec{R}_2 \wedge \vec{OO}' \right) + \vec{R}_2 \cdot \left(\vec{u}_1(O) + \vec{R}_1 \wedge \vec{OO}' \right) \\ &= \underbrace{\vec{R}_1 \cdot \vec{u}_2(O) + \vec{R}_2 \cdot \vec{u}_1(O)}_{\alpha} + \underbrace{\vec{R}_1 \cdot (\vec{R}_2 \wedge \vec{OO}') + \vec{R}_2 \cdot (\vec{R}_1 \wedge \vec{OO}')}_{-\alpha} \end{aligned}$$

Cette quantité, indépendante de O et par conséquent invariante, représente par définition le produit scalaire (on utilise également la terminologie de **comoment**) des deux torseurs $[\tau_1]$ et $[\tau_2]$.

Définition du comoment: $[\tau_1(O)] \cdot [\tau_2(O)] = \vec{R}_1 \cdot \vec{u}_2(O) + \vec{R}_2 \cdot \vec{u}_1(O)$

◆ **Égalité de deux torseurs:** $[\tau_1] = [\tau_2] \Leftrightarrow \forall M \in \xi, \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \text{et} \\ \vec{u}_1(M) = \vec{u}_2(M) \end{cases}$

Conséquence: $[\tau_1(O)] = [\tau_2(O)] \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \vec{u}_1(O) = \vec{u}_2(O) \end{cases}$

4-3 Invariant scalaire d'un torseur

Soit $[\tau(O)] = [\vec{u}(O), \vec{R}]$ un torseur défini par ses coordonnées en O. La quantité $I = \vec{R} \cdot \vec{u}(O)$, indépendante du point O, est appelée invariant scalaire ou **automoment** du torseur.

Preuve: $\vec{u}(O') = \vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OO}' \Rightarrow \vec{R} \cdot \vec{u}(O') = \vec{R} \cdot \vec{u}(O) + \underbrace{\vec{R} \cdot (\vec{R} \wedge \vec{OO}')}_{=0} = I \quad (\forall O')$

4-4 Axe central d'un torseur

Définition : On appelle axe central (Δ) d'un torseur $[\tau(O)] = [\vec{u}(O), \vec{R}]$ avec $\vec{R} \neq \vec{0}$, le lieu des points P

tel que $\vec{u}(P) \wedge \vec{R} = \vec{0}$

Équation de (Δ)

$$\begin{aligned} \text{Soit } P \in (\Delta) &\Rightarrow \vec{u}(P) \wedge \vec{R} = \vec{0} \\ &\Rightarrow \left[\vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OP} \right] \wedge \vec{R} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{u}(O) \wedge \vec{R} + R^2 \vec{OP} - (\vec{R} \cdot \vec{OP}) \vec{R} = \vec{0}$$

$$\text{Multiplions vectoriellement } (\wedge) \text{ par } \vec{R} \Rightarrow \vec{R} \wedge (\vec{u}(O) \wedge \vec{R}) + R^2 \vec{R} \wedge \vec{OP} - \underbrace{(\vec{R} \cdot \vec{OP}) \vec{R} \wedge \vec{R}}_{=\vec{0}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{R} \wedge (\vec{u}(O) \wedge \vec{R} + R^2 \vec{OP}) = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{u}(O) \wedge \vec{R} + R^2 \vec{OP} = \mu \vec{R} \Rightarrow \vec{OP} = \frac{\mu \vec{R}}{R^2} - \frac{\vec{u}(O) \wedge \vec{R}}{R^2}$$

$$\text{Ainsi, si } P \in \Delta \text{ l'axe central } \Rightarrow \vec{OP} = \lambda \vec{R} + \frac{\vec{R} \wedge \vec{u}(O)}{R^2} \quad (\text{avec } \lambda \in \mathbb{R}).$$

Remarque:

L'axe central d'un torseur $[\vec{u}(O), \vec{R}]$ est la droite (Δ) de vecteur directeur \vec{R} et passant par le point P_0 tel que: $\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R} \wedge \vec{u}(O)}{R^2}$

4-5 Classification des torseurs

◆ Glisseur

Le torseur $[\tau(O)] = [\vec{u}(O), \vec{R}]$ est un *glisseur*, si son invariant scalaire est nul.

$$I = \vec{R} \cdot \vec{u}(O) = 0 \text{ et } \vec{R} \neq \vec{0}.$$

Remarque :

Sur l'axe central d'un *glisseur*, $\vec{u}(P) = \vec{0} \quad \forall P \in (\Delta)$ car $\vec{R} // \vec{u}(P)$ et $\vec{R} \cdot \vec{u}(P) = 0$ avec $\vec{R} \neq \vec{0}$.

◆ *Couple* : $[\tau(O)] = [\vec{u}(O), \vec{R}]$ est un *couple* si $\vec{R} = \vec{0}$. Le champ $\vec{u}(M)$ devient alors indépendant de M .

Remarque :

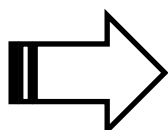
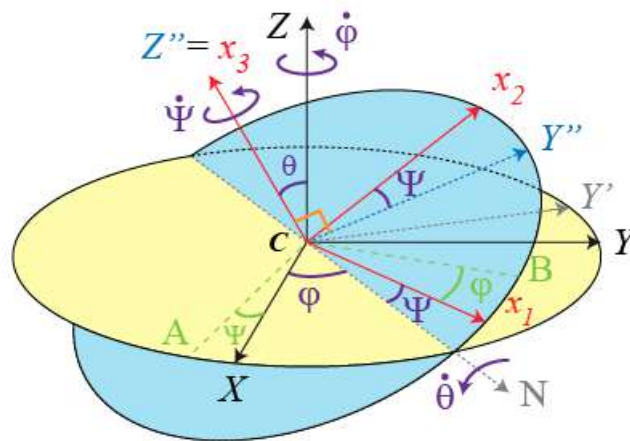
Il n'existe pas d'axe central pour un *couple*.

Proposition: Le torseur $[\tau(O)] = [\vec{u}(O), \vec{R}]$ peut se décomposer en la somme d'un *glisseur* et d'un *couple*.

Démonstration :

$$[\tau(O)] = [\vec{u}(O), \vec{R}] = \underbrace{[\vec{0}, \vec{R}]}_{\text{Glisseur}} + \underbrace{[\vec{u}(O), \vec{0}]}_{\text{Couple}} = [G(O)] + [C(O)]$$

N.B.: Cette décomposition n'est pas unique; il y a une infinité de décompositions possibles qui dépendent du choix de O .



Cinématique du Solide



René Descartes : (1596-1650)

René Descartes a écrit les principes de la philosophie en 1644, dont l'objectif est de "donner des fondements rigoureux à la philosophie". La physique cartésienne est fondée sur l'identification de la matière avec la quantité géométrique : la pesanteur et le mouvement sont ramenés à une explication mécaniste. Sa description du monde est essentiellement **cinématique**, le mouvement se transmettant de proche en proche par contact. Dans les Principes de la Philosophie, Descartes distingue la cause première de tous les mouvements (Dieu, auteur de la nature), des causes secondes appelées les lois De la nature, qui régissent le mouvement des parties de la matière.

Objectifs :

- ✚ Décrire et analyser la nature du mouvement d'un système;
- ✚ Différencier entre les vitesses linéaire et angulaire ;
- ✚ Recenser le nombre de paramètres indépendants intervenant dans l'étude cinématique ;
- ✚ Savoir choisir une base dans laquelle expliciter simplement le mouvement ;
- ✚ Savoir mettre en œuvre les formules de changement de référentiel pour les vitesses et les accélérations;
- ✚ Déterminer le centre instantané de rotation ;
- ✚ Savoir mettre en œuvre la condition de roulement sans glissement ;
- ✚ Savoir analyser le mouvement instantané d'un solide et déterminer la base et la roulante.

CINÉMATIQUE DU SOLIDE

I. Approche historique

En mécanique, la cinématique (tiré du nom grec : *kinêma*) est l'étude des mouvements des corps sans tenir compte des causes qui les produisent. Au côté de la notion d'espace qui fut l'objet de la géométrie, la cinématique introduit en outre la notion du temps. On peut dater la naissance de la cinématique moderne à l'allocution de Pierre Varignon en 1700 qui a démontré qu'il est possible de déduire l'accélération de la vitesse instantanée à l'aide d'une simple procédure de calcul différentiel.

II. Espace Repère-Solide rigide

1- Espace repère

On considère que l'espace dans lequel évoluent les systèmes est homogène (indépendant du lieu), isotrope (indépendant de la direction) et euclidien (muni d'un produit scalaire). Il est défini par l'association de l'horloge H et d'un repère $R_0 (O, b_0)$.

L'existence du temps absolu $\Rightarrow H$ est unique.

O : origine du repère

$b_0 = (\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ est une base orthonormée directe.

Un point $M \in \xi$ est en mouvement par rapport à R_0 si ses coordonnées varient en fonction du temps, i.e. :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

On définit aussi:

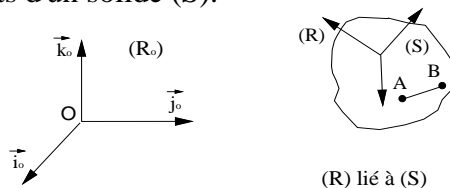
La vitesse de M par rapport à R_0 : $\vec{v}(M/R_0) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{R_0}$

L'accélération de M par rapport à R_0 : $\vec{\gamma}(M/R_0) = \left. \frac{d\vec{v}(M/R_0)}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right|_{R_0}$

2- Définition d'un solide rigide

Un solide rigide ou indéformable est un ensemble de points matériels dont les distances mutuelles restent constantes au cours du temps.

Soient A et B deux points d'un solide (S) .



$\overrightarrow{AB}^2 = \text{cte}$ (c'est le carré de la distance entre les points A et B), alors que \overrightarrow{AB} peut dépendre du temps par sa direction.

En effet: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}(t) - \overrightarrow{OA}(t)$ (vecteur variable)

$$\text{Or } \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \text{cte} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0$$

III. Notion des Champs des Vitesse et des Accélérations

1-Introduction

En mécanique du point matériel (sans dimension), il est impossible de lui concevoir un mouvement de rotation propre. Par contre, pour la mécanique du solide, ce dernier peut effectuer une rotation sur lui-même, elle est définissable et mesurable. D'où l'intérêt de l'introduction de la notion des champs des vitesses et des accélérations afin de décrire et de modéliser les rotations de l'objet sur lui-même.

2-Champ des vitesses d'un solide

$$\text{Pour un solide on a } \overrightarrow{AB} \cdot \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0 \quad \forall A, B \in (S)$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \cdot [\vec{v}(B/R_0) - \vec{v}(A/R_0)] = 0 \text{ ou bien } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}(B/R_0) = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}(A/R_0)$$

On déduit que le champ des vitesses d'un solide est *équiprojectif* et par conséquent c'est un champ antisymétrique. Ainsi, $\exists ! \vec{\Omega}$ tel que $\vec{v}(B/R_0) = \vec{v}(A/R_0) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$

Soit R un repère lié au solide. En utilisant la relation $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \Big|_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$ $\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \Big|_R = \vec{0} \text{ car } \overrightarrow{AB} \text{ est fixe dans } R \right)$, on voit que $\vec{\Omega}$ n'est autre que le vecteur rotation instantané de R par rapport à R_0 .

Le champ des vitesses d'un solide est donc un torseur, on l'appelle *torseur cinématique*. Ses éléments de réduction (ou *coordonnées*) au point A sont:

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S/R_0) : \text{sa résultante} \\ \vec{v}(A/R_0) : \text{son vecteur moment} \end{cases}$$

$$\text{On le note } [\mathcal{V}(A)] = [\vec{v}(A/R_0), \vec{\Omega}(S/R_0)]$$

3- Champ des accélérations d'un solide

$$\text{Pour } A, B \in (S) \text{ on a } \vec{v}(B/R_0) = \vec{v}(A/R_0) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

En dérivant cette relation par rapport au temps on obtient:

$$\vec{\gamma}(B/R_0) = \vec{\gamma}(A/R_0) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \Big|_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{v}(B/R_0) - \vec{v}(A/R_0))$$

$$\vec{\gamma}(B/R_0) = \vec{\gamma}(A/R_0) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \Big|_{R_0} \wedge \vec{AB} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{AB})$$

Finalement

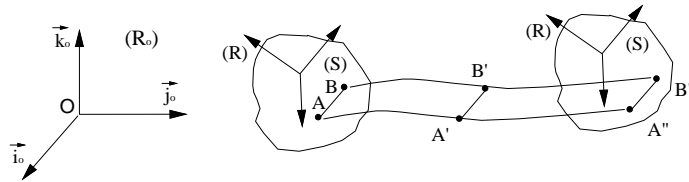
$$\vec{\gamma}(B/R_0) = \vec{\gamma}(A/R_0) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \Big|_{R_0} \wedge \vec{AB} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{AB})\vec{\Omega} - \Omega^2 \vec{AB}$$

En général, le terme $(\vec{\Omega} \cdot \vec{AB})\vec{\Omega} - \Omega^2 \vec{AB}$ n'est pas nul. Par conséquent, le champ des accélérations d'un solide n'est pas un torseur.

IV. Mouvements de translation-rotation-tangent

1- Mouvement de translation

Le solide (S) est animé d'un mouvement de translation par rapport à R_0 si $\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{0}$, $\forall t$.
Il en résulte que $\forall A, B \in (S)$, $\vec{v}(B/R_0) = \vec{v}(A/R_0)$



De plus, dans un mouvement de translation on a:

$$\vec{AB} = \vec{A'B'} \text{ et } \vec{AA'} = \vec{BB'} \quad \forall t \quad (\text{le vecteur } \vec{AB} \text{ reste équipollent à lui même})$$

Dans ce cas $[\vec{v}(A)] = [\vec{v}(A/R_0), \vec{0}]$: dans un mouvement de translation, le torseur cinématique est un **couple**.

2- Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Supposons que (S) est en mouvement de rotation autour d'un axe (Δ), fixe dans R_0 (de manière instantanée ou permanente).

Soit A un point appartenant à (Δ) $\Rightarrow \vec{v}(A/R_0) = \vec{0}$ (on retiendra comme remarque le fait que tous les points fictifs ou géométriques appartenant à l'axe de rotation sont considérés comme des points du solide et peuvent être utilisés dans les relations de transfert).

Soit M un point $\in (S)$ alors:

$$\vec{v}(M/R_0) = \underbrace{\vec{v}(A/R_0)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{AM}, \text{ avec } \vec{\Omega}(S/R_0) \neq \vec{0} \text{ (si non le solide serait au repos).}$$

L'invariant scalaire $I = \vec{v}(M/R_0) \cdot \vec{\Omega}(S/R_0) = 0$

Dans un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ), le torseur cinématique est un *glisseur* $[g]$.

Appelons (Δ') l'axe central du torseur cinématique et (Δ) l'axe de rotation du solide.

Proposition: Les axes (Δ) et (Δ') sont confondus.

Démonstration: $\forall A \in (\Delta)$, on a $\vec{v}(A/R_0) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{v}(A/R_0) \wedge \vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{0} \Rightarrow A \in (\Delta')$$

$$\Rightarrow (\Delta) \equiv (\Delta')$$

Remarques

Lorsqu'il s'agit d'une rotation de (S) autour d'un axe (Δ) on retient que:

- le torseur cinématique est un *glisseur*,
- l'axe de rotation du solide est l'*axe central du glisseur*,

$$- [g(A)] = [\vec{0}, \vec{\Omega}(S/R_0)] \text{ si } A \in (\Delta);$$

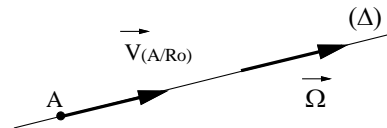
$$- [g(B)] = [\vec{v}(B/R_0), \vec{\Omega}(S/R_0)] \text{ si } B \notin (\Delta).$$

3- Mouvement hélicoïdal

Dans un mouvement hélicoïdal, tout point $M \in (S)$ tourne autour d'un axe (Δ) et, en même temps, se déplace suivant cet axe.

Soit A un point de (S) appartenant à (Δ). On a:

$$\vec{v}(M/R_0) = \underbrace{\vec{v}(A/R_0)}_{\text{translation}} + \underbrace{\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}}_{\text{rotation}}$$



Schématisation - Interprétation

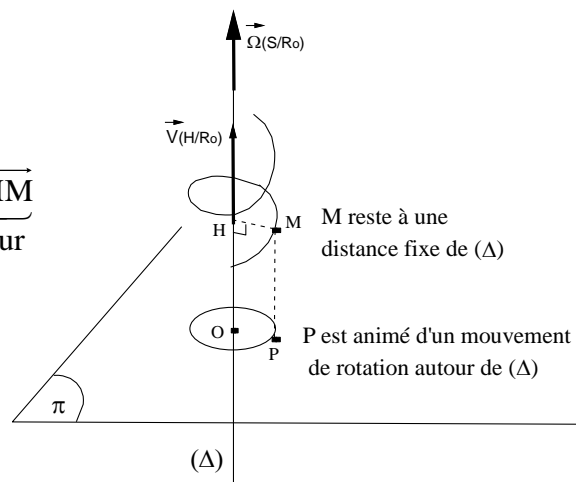
D'après la figure, le point P représente la projection de M sur le plan (π). Ainsi, on a:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{v}(M/R_0) = \vec{v}(H/R_0) + \vec{v}(P/R_0)$$

$$= \vec{v}(H/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$= \underbrace{\vec{v}(H/R_0)}_{\text{translation le long de l'axe}} + \underbrace{\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{HM}}_{\text{rotation autour de l'axe}}$$



L'invariant scalaire n'est pas nul dans un mouvement hélicoïdal.

4- Mouvement général d'un solide : Mouvement tangent

$\forall A, B \in (S)$, on a la relation de transfert suivante:

$$\vec{v}(B/R_0) = \vec{v}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$$

♦ Si, à un instant t donné, $\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{0}$, $\vec{v}(B/R_0) = \vec{v}(A/R_0)$ et on dira alors, qu'à cet instant, le mouvement du solide est tangent à une translation.

♦ Si, à un instant t donné $\vec{\Omega}(S/R_0) \neq \vec{0}$, on dira alors, qu'à cet instant, le torseur cinématique admet un axe central (Δ).

Soit $H \in (\Delta)$ on a:

$$\begin{aligned}\vec{v}(A/R_0) &= \vec{v}(H/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{HA} \\ &= \lambda \vec{\Omega}(S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{HA}\end{aligned}$$

♦ ♦ Si $\vec{v}(H/R_0) = \vec{0}$, on dira que le mouvement du solide est tangent à une rotation d'axe (Δ).

♦ ♦ Si $\vec{v}(H/R_0) \neq \vec{0}$ le mouvement du solide est dit tangent à un mouvement hélicoïdal ayant (Δ) comme axe instantané de rotation.

IV- Composition des Mouvements

Il s'agit de déterminer le mouvement du solide par rapport à un repère R_0 , sachant que son mouvement est connu par rapport à un repère R_1 .

Considérons: $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ un repère absolu (repère fixe);

$R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un repère mobile (repère relatif);

$R(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère lié au solide.

1- Dérivation vectorielle

Soient A et B deux points $\in \xi$, fixes dans $R_1 \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ est un vecteur constant dans R_1 .

$$\left. \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right|_{R_0} = \vec{v}(B/R_0) - \vec{v}(A/R_0) = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Puisque, par définition, un repère d'espace est un ensemble de points dont les distances mutuelles sont invariables dans le temps, on appelle également ce repère un solide de référence.

Conséquences

$$\left. \frac{d\vec{i}_1}{dt} \right|_{R_0} = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{i}_1, \quad \left. \frac{d\vec{j}_1}{dt} \right|_{R_0} = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{j}_1 \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\vec{k}_1}{dt} \right|_{R_0} = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{k}_1$$

Considérons maintenant $A, B \in \xi$, mobiles dans $R_1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \alpha(t)\vec{i}_1 + \beta(t)\vec{j}_1 + \gamma(t)\vec{k}_1$

$$\left. \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right|_{R_1} = \dot{\alpha}(t)\vec{i}_1 + \dot{\beta}(t)\vec{j}_1 + \dot{\gamma}(t)\vec{k}_1$$

On peut obtenir le vecteur dérivé de $\overrightarrow{AB} = \alpha(t)\vec{i}_1 + \beta(t)\vec{j}_1 + \gamma(t)\vec{k}_1$ dans R_0 en prenant en considération le fait que les vecteurs $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ varient dans ce repère.

$$\left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{R_1} + \alpha(t) \left. \frac{d\vec{i}_1}{dt} \right|_{R_0} + \beta(t) \left. \frac{d\vec{j}_1}{dt} \right|_{R_0} + \gamma(t) \left. \frac{d\vec{k}_1}{dt} \right|_{R_0}$$

$$\boxed{\left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1 / R_0) \wedge \vec{AB}} : \text{Ce résultat est général}$$

2- Composition des vitesses

Soit $M \in (S)$, on peut écrire $\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$

$$\vec{v}(M / R_0) = \vec{v}(O_1 / R_0) + \left. \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right|_{R_0} = \vec{v}(O_1 / R_0) + \left. \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1 / R_0) \wedge \vec{O_1M}$$

$$\vec{v}(M / R_0) = \vec{v}(M / R_1) + \vec{v}(O_1 / R_0) + \vec{\Omega}(R_1 / R_0) \wedge \vec{O_1M} = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)$$

$\vec{v}_a(M) = \vec{v}(M / R_0)$: vitesse absolue du point M

$\vec{v}_r(M) = \vec{v}(M / R_1)$: vitesse relative du point M

$\vec{v}_e(M) = \vec{v}(O_1 / R_0) + \vec{\Omega}(R_1 / R_0) \wedge \vec{O_1M}$: vitesse d'entraînement du point M.

Remarque :

La vitesse d'entraînement s'interprète comme étant la vitesse absolue d'un point M_e fixe dans R_1 et coïncidant avec M à l'instant t.

3- Composition des vecteurs rotations

$$\text{On a : } \left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1 / R_0) \wedge \vec{AB} \quad (1)$$

$$\left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{R_1} = \left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_R + \vec{\Omega}(R / R_0) \wedge \vec{AB} \quad (2)$$

$$\left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_R + \vec{\Omega}(R / R_0) \wedge \vec{AB} \quad (3)$$

En éliminant $\left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{R_1}$ entre les équations (1) et (2), on obtient:

$$\left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_R + [\vec{\Omega}(R / R_1) + \vec{\Omega}(R_1 / R_0)] \wedge \vec{AB} \quad (4)$$

En comparant (2) et (4) on déduit que :

$$\vec{\Omega}(S / R_0) = \vec{\Omega}(S / R_1) + \vec{\Omega}(R_1 / R_0)$$

On peut généraliser cette dernière relation à plusieurs repères:

$$\vec{\Omega}(S / R_0) = \vec{\Omega}(S / R_1) + \vec{\Omega}(R_1 / R_2) + \vec{\Omega}(R_2 / R_3) + \dots + \vec{\Omega}(R_{n-1} / R_n) + \vec{\Omega}(R_n / R_0)$$

4- Composition des accélérations

Considérons $M \in (S)$ et utilisons la loi de composition des vitesses:

$$\underbrace{\vec{v}(M/R_0)}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\vec{v}(M/R_1)}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\vec{v}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}}_{\vec{v}_e}$$

En dérivant cette expression par rapport à t dans R_0 , on obtient:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/R_0) &= \left. \frac{d\vec{v}(M/R_1)}{dt} \right|_{R_0} + \vec{\gamma}(O_1/R_0) + \left. \frac{d\vec{\Omega}(R_1/R_0)}{dt} \right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \left. \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right|_{R_0} \\ \left. \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right|_{R_0} &= \vec{v}(M/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ \left. \frac{d\vec{v}(M/R_1)}{dt} \right|_{R_0} &= \left. \frac{d\vec{v}(M/R_1)}{dt} \right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{v}(M/R_1) = \vec{\gamma}(M/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{v}(M/R_1) \end{aligned}$$

En définitive on obtient:

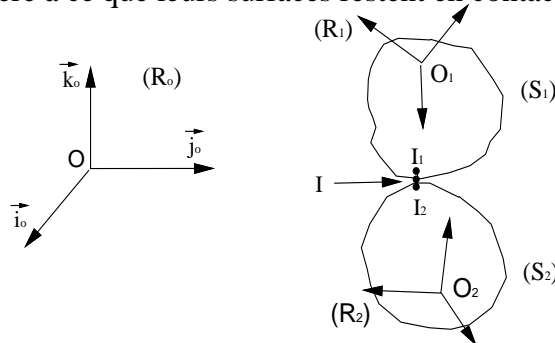
$$\vec{\gamma}(M/R_0) = \vec{\gamma}(M/R_1) + 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{v}(M/R_1) + \vec{\gamma}(O_1/R_0) + \left. \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

$$\vec{\gamma}(M/R_0) = \vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_c(M) + \vec{\gamma}_e(M)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M/R_1) & : \text{accélération relative} \\ \vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{v}(M/R_1) & : \text{accélération de Coriolis} \\ \vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1/R_0) + \left. \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}) & : \text{accélération d'entraînement} \end{array} \right.$$

V- Cinématique des solides en contact

Considérons deux solides (S_1) et (S_2) en mouvement par rapport à un référentiel $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ de manière à ce que leurs surfaces restent en contact ponctuel.



A chaque instant, on doit distinguer 3 points confondus dont les vitesses et les accélérations sont différentes en général :

- le point matériel I_1 ($I_1 \in S_1$);
- le point matériel I_2 ($I_2 \in S_2$);
- le point géométrique I (non lié).

Au cours du temps, le point I est confondu avec les différents points matériels de contact.

1- Vitesse de glissement

Le glissement décrit un mouvement relatif entre deux solides en contact.

Définition

On appelle vitesse de glissement de (S_1) sur (S_2) , la vitesse de I_1 par rapport à (S_2) .

Notation: $\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{v}(I_1/S_2) = \vec{v}(I_1/R_2)$ ($I_1 \in S_1$ et R_2 lié à S_2)

Autres expressions de cette vitesse ?

Considérons R_0 absolu et R_2 relatif et cherchons $\vec{v}(I_1/R_0) = \vec{v}_r(I_1) + \vec{v}_e(I_1)$

Or: $\vec{v}_r(I_1) = \vec{v}(I_1/R_2) = \vec{v}_g(S_1/S_2)$

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_e(I_1) &= \vec{v}(O_2/R_0) + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{O_2I_1} = \vec{v}(I_2/R_0) \\ \vec{v}(O_2/R_0) &= \vec{v}(I_2/R_0) + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{I_2O_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{v}_e(I_1) = \vec{v}(I_2/R_0)$$

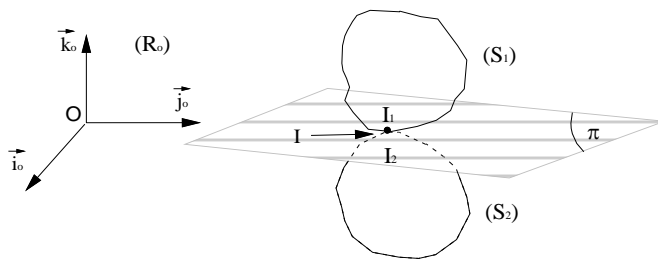
En définitive:

$$\vec{v}(I_1/R_0) = \vec{v}(I_1/R_2) + \vec{v}(I_2/R_0) \Rightarrow \vec{v}(I_1/R_2) = \vec{v}(I_1/R_0) - \vec{v}(I_2/R_0) = \vec{v}_g(S_1/S_2)$$

De manière plus générale:

$$\boxed{\vec{v}_g(S_1/S_2) = \left. \frac{d\vec{I_2I_1}}{dt} \right|_R = \vec{v}(I_1/R) - \vec{v}(I_2/R)} \quad (\forall \text{ le repère } R)$$

C'est une vitesse indépendante du repère par rapport auquel (S_1) et (S_2) sont en mouvement, et elle est contenue dans le plan tangent (π) commun à (S_1) et (S_2) .



Démonstration

La loi de composition des vitesses nous permet d'écrire :

$$\vec{v}(I/R_0) = \vec{v}(I/R_1) + \underbrace{\vec{v}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{O_1I}}_{\vec{v}_e(I) = \vec{v}(I_1/R_0)}$$

$$\vec{v}(I/R_0) = \vec{v}(I/R_1) + \vec{v}(I_1/R_0) \quad (R_1 \text{ relatif})$$

$$\vec{v}(I/R_0) = \vec{v}(I/R_2) + \vec{v}(I_2/R_0) \quad (R_2 \text{ relatif})$$

Or :

$$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{v}(I_1/R_0) - \vec{v}(I_2/R_0) = \underbrace{\vec{v}(I/R_2)}_{\in \pi} - \underbrace{\vec{v}(I/R_1)}_{\in \pi}$$

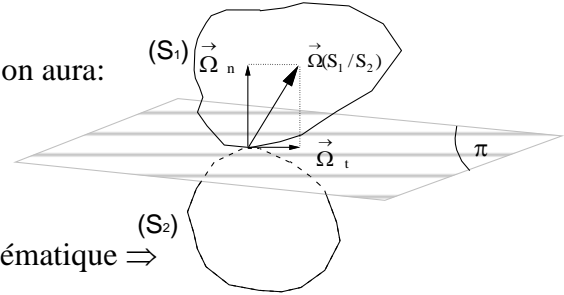
Cas particulier

Lorsque la vitesse de glissement est nulle, on dit qu'il y a absence de glissement.

$$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{0} = \vec{v}(I_1/R_0) - \vec{v}(I_2/R_0) \Rightarrow \vec{v}(I_1/R_0) = \vec{v}(I_2/R_0) (\forall R_0)$$

Si l'on choisit R_1 ou R_2 comme repères de travail on aura:

$$\vec{v}(I_1/R_1) = \vec{v}(I_2/R_1) = \vec{v}(I_1/R_2) = \vec{v}(I_2/R_2) = \vec{0}$$



2- Roulement et pivotement

Soit $M \in S_1$, la relation de transfert du torseur cinématique \Rightarrow

$$\vec{v}(M/S_2) = \vec{v}(I_1/S_2) + \vec{\Omega}(S_1/S_2) \wedge \vec{I_1M}$$

$$\vec{v}(M/S_2) = \vec{v}_g(S_1/S_2) + \vec{\Omega}(S_1/S_2) \wedge \vec{I_1M}$$

Le vecteur $\vec{\Omega}(S_1/S_2)$ peut être décomposé comme suit:

$$\vec{\Omega}(S_1/S_2) = \vec{\Omega}_t + \vec{\Omega}_n$$

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_t : \text{composante de } \vec{\Omega}(S_1/S_2) \text{ contenu dans le plan } (\pi) \\ \vec{\Omega}_n : \text{composante de } \vec{\Omega}(S_1/S_2) \text{ normale au plan } (\pi) \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{\Omega}_t$ exprime une rotation instantanée autour d'un axe du plan tangent; il caractérise le roulement de $(S_1)/(S_2)$.

Le vecteur $\vec{\Omega}_n$ exprime une rotation instantanée autour d'un axe \perp au plan tangent; il caractérise le pivotement de $(S_1)/(S_2)$. Ainsi, $\vec{\Omega}_t / (\vec{\Omega}_n)$ est la vitesse angulaire de roulement/(pivotement).

$$\text{Finalement: } \vec{v}(M/S_2) = \underbrace{\vec{v}_g(S_1/S_2)}_{\text{vitesse de glissement}} + \underbrace{\vec{\Omega}_t \wedge \vec{I_1M}}_{\text{vitesse de roulement}} + \underbrace{\vec{\Omega}_n \wedge \vec{I_1M}}_{\text{vitesse de pivotement}}.$$

Remarque

Lorsque la vitesse de glissement est nulle, on dit qu'il y a roulement et pivotement.

VI- Mouvement plan d'un solide

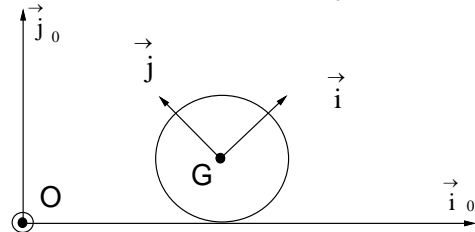
1- Définition

On appelle mouvement plan d'un solide (S), un mouvement tel que chaque point de (S) se déplace dans un plan parallèle à un plan fixe (π_0) dans le référentiel considéré R_0 .

Exemple:

- Cas d'un disque vertical évoluant sur un axe.

Les vecteurs de base (\vec{i}, \vec{j}) restent constamment dans le plan x_0Oy_0 .



Considérons deux points M et M' de (S) évoluant dans un même plan (π) parallèle à (π_0) .

$$\underbrace{\vec{v}(M'/R_0)}_{\in \pi} = \underbrace{\vec{v}(M/R_0)}_{\in \pi} + \underbrace{\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{MM'}}_{\in \pi} \Rightarrow \vec{\Omega}(S/R_0) \perp (\pi)$$

L'invariant scalaire $I = \vec{v}(M/R_0) \cdot \vec{\Omega}(S/R_0) = 0$ et le torseur cinématique est un *glisseur* dans ce cas.

$$\vec{v}(M/R_0) = \underbrace{\vec{v}(I/R_0)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{IM} \quad (I \text{ point commun à } (\pi) \text{ et } (\Delta)).$$

$$\vec{v}(M'/R_0) = \underbrace{\vec{v}(I/R_0)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{IM'}$$

Le mouvement plan peut s'interpréter comme étant une rotation (instantanée) pure autour de l'axe $(\Delta) \perp$ à (π) en I avec I appartenant à l'axe central (Δ) du glisseur (l'axe (Δ) peut changer avec le temps).

2- Centre instantané de rotation (C.I.R.)

L'axe instantané de rotation est un terme utilisé en mécanique classique et plus particulièrement en cinématique pour désigner l'axe autour duquel tourne un solide à un instant donné par rapport à un référentiel. Si l'on peut utiliser la simplification des problèmes plans, on parle alors du centre instantané de rotation (CIR).

C'est un point lié à (S) par nature et admettant une vitesse nulle dans R_0 à l'instant considéré.

Le point $I \in (\pi) \cap (\Delta)$ est le centre instantané de rotation.

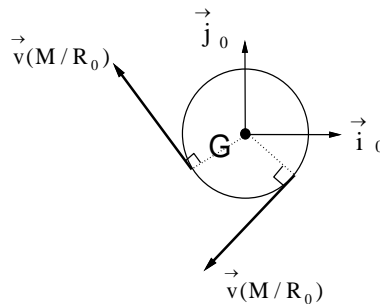
Preuve

$$\vec{v}(I/S) = \vec{0} \quad \text{car } I \text{ est lié à } S$$

$$\vec{v}(I/R_0) = \vec{0} \quad \text{car } I \in (\Delta), \text{ axe fixe dans } R_0$$

Exemple

Cas d'une roue en rotation autour d'un axe fixe \perp au plan de la roue et passant par son centre de masse G . Le point G est de nature lié à (S) et $\vec{v}(G/R_0) = \vec{0} \Rightarrow G \equiv \text{C.I.R.}$



Remarques :

- I est donc un point central du torseur cinématique de S par rapport à R_0 . Le C.I.R. correspond donc à l'intersection de l'axe central du torseur cinématique de S/R avec le plan d'évolution du solide S .
- Le CIR est "instantané", c'est à dire que, dans le cas général, sa position est attachée à un instant donnée et à une position particulière du mécanisme.
- Le CIR peut être un point défini en dehors de la limite matérielle du solide S .

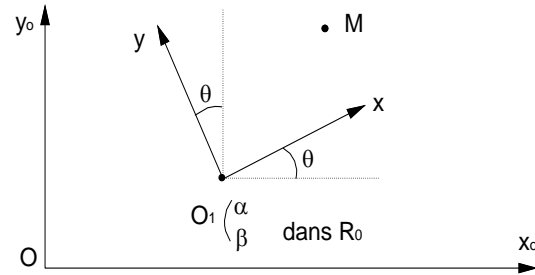
3- Base et roulante-Étude analytique

Par définition, *la base* est le lieu des C.I.R. dans R_0 lorsque t varie et *la roulante* est le lieu des C.I.R. dans R (lié à S) lorsque t varie.

Soit $M \in (S)$

$$M \begin{cases} x \\ y \end{cases} \text{ dans } R \text{ (x et y sont des constantes)}$$

$$M \begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases} \text{ dans } R_0 \quad O_1 \in (S)$$



$$\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M} = x_0 \vec{i}_0 + y_0 \vec{j}_0 = \alpha \vec{i}_0 + \beta \vec{j}_0 + x \vec{i} + y \vec{j}$$

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos \theta \vec{i}_0 + \sin \theta \vec{j}_0 \\ \vec{j} = -\sin \theta \vec{i}_0 + \cos \theta \vec{j}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \alpha + x \cos \theta - y \sin \theta \\ y_0 = \beta + x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} - (x \sin \theta + y \cos \theta) \dot{\theta} \\ \frac{dy_0}{dt} = \frac{d\beta}{dt} + (x \cos \theta - y \sin \theta) \dot{\theta} \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\theta} \vec{k}_0$$

On retrouve : $\vec{v}(M/R_0) = \vec{v}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{O_1M} = \vec{v}_e(M)$

Le C.I.R. est tel que $\vec{v}(I/R_0) = \vec{0}$ et $\vec{v}(I/R) = \vec{0}$

Considérons I qui présente ces caractéristiques au lieu de M.

Dans le repère R_0 :

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} - (x \sin \theta + y \cos \theta) \dot{\theta} = 0 \\ \frac{dy_0}{dt} = \frac{d\beta}{dt} + (x \cos \theta - y \sin \theta) \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \frac{d\theta}{dt} \neq 0$$

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} - (x \sin \theta + y \cos \theta) \dot{\theta} = 0 \\ \frac{d\beta}{dt} + (x \cos \theta - y \sin \theta) \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x(\theta) \\ y = y(\theta) \end{cases}$$

Ce sont les équations paramétriques de la *roulante*.

Équations paramétriques de la base :

Compte tenu des équations (1) et (2) on a :

$$\begin{cases} x_0 = \alpha - \frac{d\beta}{d\theta} \\ y_0 = \beta + \frac{d\alpha}{d\theta} \end{cases} : \text{Ce sont les équations paramétriques de la base.}$$

Remarque: Ces équations sont utiles quand la détermination graphique du C.I.R. n'est pas évidente.

Exemple

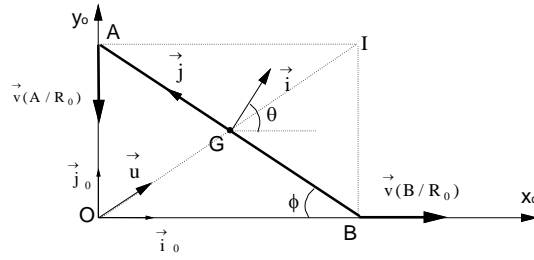
Cas d'une barre glissant sur les axes de R_0 .

La base?

$OI = AB = \text{cte} \Rightarrow$ la base est le cercle de centre O et de rayon AB.

La roulante?

$GI = AB/2 = \text{cte} \Rightarrow$ la roulante est le cercle de centre G et de rayon $AB/2$.



Méthode analytique

D'après la figure, on a : $\phi + \theta = \pi/2 \Rightarrow \theta = \pi/2 - \phi$

$$\overrightarrow{OG} = \begin{cases} \alpha = \frac{\ell}{2} \cos \phi = \frac{\ell}{2} \sin \theta \\ \beta = \frac{\ell}{2} \sin \phi = \frac{\ell}{2} \cos \theta \end{cases} \quad \text{Composantes de G dans } R_0 \text{ de base } (\vec{i}_0, \vec{j}_0)$$

Équation paramétrique de la roulante:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{d\theta} - (x \sin \theta + y \cos \theta) = \frac{\ell}{2} \cos \theta - (x \sin \theta + y \cos \theta) = 0 \\ \frac{d\beta}{d\theta} + (x \cos \theta - y \sin \theta) = -\frac{\ell}{2} \sin \theta + (x \cos \theta - y \sin \theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \sin \theta + y \cos \theta = \frac{\ell}{2} \cos \theta \\ x \cos \theta - y \sin \theta = \frac{\ell}{2} \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{\ell^2}{4} : \text{équation d'un cercle de centre G et de rayon } r = \ell/2.$$

Équation paramétrique de la base:

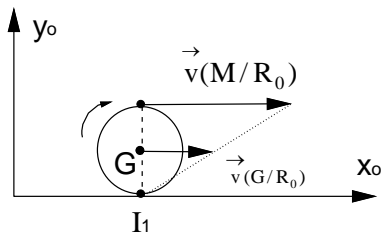
$$\begin{cases} x_0 = \alpha - \frac{d\beta}{d\theta} = \frac{\ell}{2} \sin \theta + \frac{\ell}{2} \sin \theta = \ell \sin \theta \\ y_0 = \beta + \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{\ell}{2} \cos \theta + \frac{\ell}{2} \cos \theta = \ell \cos \theta \end{cases} \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = \ell^2 : \text{équation d'un cercle de centre O et de rayon } \ell.$$

Autre exemple

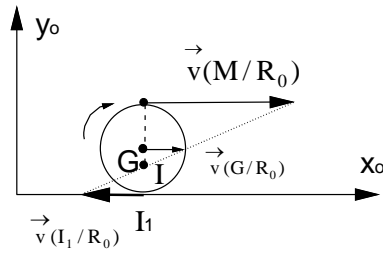
Détermination graphique de la position du CIR, I, dans le cas d'un disque se déplaçant dans un plan vertical.

Pour les 3 cas de figures, si on utilise le CIR, I, dans les relations de transfert, on obtient :

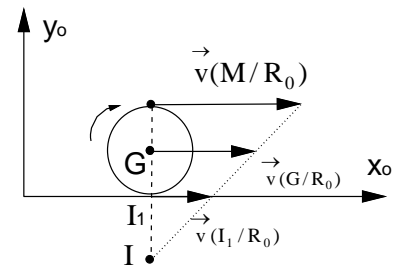
$$\vec{v}(M/R_0) = \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{IM} \Rightarrow \|\vec{v}(M/R_0)\| \text{ est proportionnel à } IM \text{ i.e. } \|\vec{v}(M/R_0)\| = IM \|\vec{\Omega}\|.$$



$\vec{v}(I_1 / R_0) = \vec{v}(I / R_0) = \vec{0}$
 RSG : $I_1 \equiv I$
 (grande vitesse de rotation)














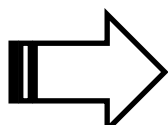
$\vec{v}(I_1 / R_0) \neq \vec{0}$
 RAG : $I \in$ au disque
 (faible vitesse de rotation)



$\vec{v}(I_1 / R_0) \neq \vec{0}$
 RAG : $I \notin$ au disque

Moments d'inertie de différents corps

<p>particule</p>  <p>$I = mR^2$</p>	<p>anneau</p>  <p>$I_{CM} = mR^2$</p>	<p>coquille</p>  <p>$I_{CM} = \frac{2}{3} mR^2$</p>	<p>cylindre plein</p>  <p>$I_{CM} = \frac{1}{2} mR^2$</p>	<p>sphère pleine</p>  <p>$I_{CM} = \frac{2}{5} mR^2$</p>	<p>tige mince</p>  <p>$I_{CM} = \frac{1}{12} mR^2$ $= \frac{1}{12} mL^2$</p>
	<p>anneau</p>  <p>$I = 2mR^2$</p>	<p>coquille</p>  <p>$I = \frac{2}{3} mR^2$</p>	<p>cylindre plein</p>  <p>$I = \frac{3}{8} mR^2$</p>	<p>sphère pleine</p>  <p>$I = \frac{1}{2} mR^2$</p>	<p>tige mince</p>  <p>$I = \frac{1}{3} mR^2$ $= \frac{1}{3} mL^2$</p>



Géométrie des Masses



Ружер Бошковић (1711-1787)

Roger Josef Boscovich : (1711-1787)

Pour R.J. Boscovich, les corps ne sont continus qu'en apparence, en réalité, ils sont formés de points matériels isolés ; "un corps continu soit un concept intuitif, primitif, on peut toujours le penser comme un ensemble de points matériels, liés entre eux par des liens sans masse, de telle sorte que la masse totale soit la somme de la masse des tous les points, et que la forme, donc la disposition des ces points, soit garantie par le "squelette" des liens imaginaires".

Objectifs :

- ✚ Savoir calculer et commenter la matrice d'inertie ;
- ✚ Savoir déterminer le repère et l'axe principal d'inertie ;
- ✚ Déterminer et différencier entre centre de masse et centre d'inertie ;
- ✚ Comprendre la notion de moment d'inertie ;
- ✚ Savoir appliquer le théorème de Guldin .

GÉOMÉTRIE DES MASSES

I. Approche historique

La notion de barycentre est utilisée en physique, et en particulier en mécanique et en astronomie, pour simplifier l'étude du mouvement d'un système. Le premier à avoir étudié le barycentre en tant que centre des poids (ce qu'on appelle de nos jours le centre de gravité) est le mathématicien et physicien Archimède. Il est un des premiers à comprendre et expliciter le principe des moments, le principe des leviers et le principe du barycentre. Il écrit dans son traité sur le centre de gravité de surface plane : « Tout corps pesant a un centre de gravité bien défini en lequel tout le poids du corps peut être considéré comme concentré ». Il est le premier à avoir cherché des centres de gravité de surface comme des demi-disques, des paraboles. Il procède par approximations successives et a pu prouver que la recherche d'un centre de gravité utilise des méthodes analogues à celle du calcul d'aire. Par la suite, sur la base de ses travaux, Guldin a développé les deux théorèmes portant son nom.

II. Masse - Centre de Masse

I- Définition

La mécanique classique associe à tout corps matériel une grandeur qui représente sa masse notée m . La masse vérifie les trois axiomes suivants:

Positivité: \forall le système matériel (S), $m(S) \geq 0$;

Additivité: \forall la fragmentation de (S) en sous-systèmes (S_i), $m(S) = \sum_i m(S_i)$;

Invariabilité: La masse de tout système est invariante dans tout mouvement de ce système (vitesses très faibles devant la célérité de la lumière).

- Si (S) est un corps continu, sa masse est l'une des intégrales suivantes:

$$m = \int_S dm = \int_V \rho(P) dv : \text{intégrale de volume (distribution volumique de la masse)}$$

$$m = \int_S dm = \int_\sigma \sigma(P) ds : \text{intégrale de surface (une dimension négligeable devant les deux autres)}$$

$$m = \int_S dm = \int_\ell \lambda(P) d\lambda : \text{intégrale de ligne (deux dimensions négligeables devant la troisième)}$$

Pour toutes ces intégrales, l'élément de masse dm contient le point P. Les quantités $\rho(P)$, $\sigma(P)$ et $\lambda(P)$ sont appelées respectivement masse volumique locale, masse surfacique locale et masse linéique locale.

S'il s'agit de corps homogènes alors $\rho(P) = \text{cte}$, $\sigma(P) = \text{cte}$ et $\lambda(P) = \text{cte}$.

- Point matériel: c'est un point géométrique affecté d'une masse m . La masse spécifique ne peut être définie dans ce cas.

2- Centre de masse

On l'appelle également centre d'inertie ou centre de gravité et on le note G en général.

Définitions

- Système discret: Dans le cas de n point matériels P_i de masse m_i on a:

$$m(S) \vec{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{OP}_i : O \text{ est un point quelconque de l'espace}$$

$$m(S) = \sum_i m_i = \sum_i m(S_i)$$

$$\text{Si } O \equiv G \text{ on aura: } \sum_{i=1}^n m_i \vec{GP}_i = \vec{0}$$

- Système continu:

$$m \vec{OG} = \int_{(S)} \vec{OP} dm, \text{ avec } dm \text{ désignant un élément de masse autour du point } P \text{ et}$$

$$m = \int_{(S)} dm.$$

$$\text{Si } O \equiv G \text{ on aura : } \int_{(S)} \vec{GP} dm = \vec{0}$$

Remarque

$$\text{Si } (S) = (S_1) + (S_2) + \dots + (S_n) \quad \text{alors} \quad m \vec{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{OG}_i$$

$$\text{avec } m_i = m_i(S_i), i = 1, 2, \dots, n \text{ et } m = \sum_{i=1}^n m_i$$

3- Théorème de Guldin

Les méthodes pratiques de recherche de G dans le cas de corps homogènes :

a- Quand c'est possible, on décompose le système en éléments plus simples dont on connaît les centres de masse, puis on détermine le barycentre de ceux-ci (exemple : centre de masse du système sphère - cylindre).

b- Utiliser les symétries du système lorsqu'elles existent : le centre de masse appartient aux éléments de symétrie.

c- Lorsqu'il s'agit de déterminer les centres de masse d'arcs, de courbes planes ou de surfaces planes on regarde s'il y a une possibilité d'utiliser un des deux théorèmes de Guldin.

3-1 Théorème I

AB est une courbe homogène située dans le plan xOy.

Une rotation de AB autour de Oy/(Ox) engendre une surface $S_y/(S_x)$. La rotation autour de Oy du petit élément $d\ell$, construit autour de P, engendre une surface $dS_y = 2\pi x d\ell \Rightarrow$

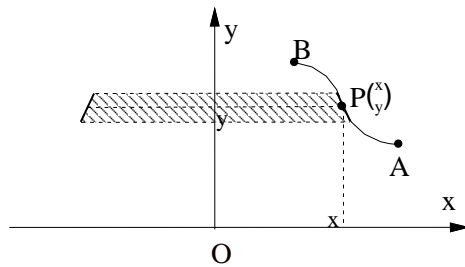
$$S_y = \int_{AB} 2\pi x d\ell$$

La rotation du même élément autour de Ox engendre la surface $dS_x = 2\pi y d\ell \Rightarrow S_x = \int_{AB} 2\pi y d\ell$

Le centre de masse G de (AB) est tel que $m \vec{OG} = \int_{AB} \vec{OP} dm \Rightarrow \lambda L \vec{OG} = \int_{AB} \lambda \vec{OP} d\ell$.

Par projection dans le plan xOy :

$$\boxed{x_G = \frac{1}{L} \int_{AB} x d\ell = \frac{S_y}{2\pi L}} \quad \text{et} \quad \boxed{y_G = \frac{1}{L} \int_{AB} y d\ell = \frac{S_x}{2\pi L}}$$

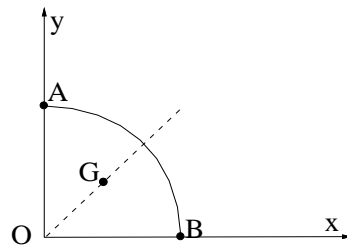


Exemple d'application

Détermination du centre de masse G d'un quart de cercle de rayon R .

$$S_y = 2\pi R^2, S_x = 2\pi R^2 \text{ (surface d'une demi-sphère)} \quad (AB) = L = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}$$

$$\text{d'où} \quad x_G = \frac{S_y}{2\pi L} = \frac{2R}{\pi} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{S_x}{2\pi L} = \frac{2R}{\pi}$$



3-2 Théorème II

Soit (S) une surface plane située dans le plan xOy .

Une rotation de l'élément dS autour de Oy engendre le volume élémentaire $dV_y = 2\pi x dS \Rightarrow$

$$V_y = \int_S dV_y = 2\pi \int_S x dS$$

De même, une rotation de dS autour de Ox engendre le volume élémentaire $dV_x = 2\pi y dS \Rightarrow$

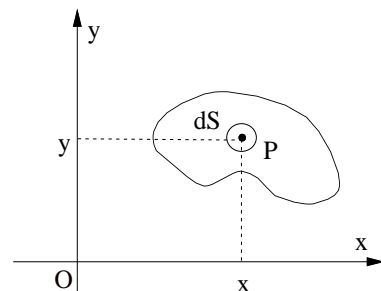
$$V_x = \int_S dV_x = 2\pi \int_S y dS$$

$$\text{Comme} \quad m \vec{OG} = \int_S \vec{OP} dm \quad \Rightarrow \quad \vec{OG} = \frac{1}{S} \int_S \vec{OP} dS$$

Par projection on aura :

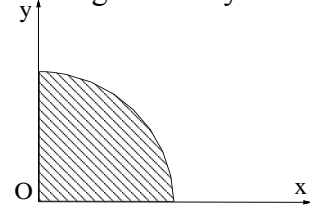
$$\boxed{x_G = \frac{1}{S} \int_S x dS = \frac{V_y}{2\pi S}}$$

$$\boxed{y_G = \frac{1}{S} \int_S y dS = \frac{V_x}{2\pi S}}$$



Exemple: Détermination du centre de masse d'un quart de disque homogène de rayon R

$$x_G = \frac{V_y}{2\pi S} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{2\pi \frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{V_x}{2\pi S} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{2\pi \frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi}$$

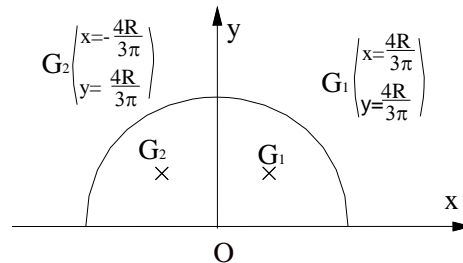


4- Centre de masse de volume ou de surface homogènes présentant un axe de révolution

Exemple: Cas d'un demi-disque homogène de rayon R.

Ce demi-disque est l'union de deux quarts de disque. Le centre de masse G est tel que :

$$m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2 = (m_1 + m_2) \vec{OG} \Rightarrow x_G = 0 \quad \text{et} \quad y_G = \frac{4R}{3\pi}$$



Calcul direct de G

Par raison de symétrie, l'élément de surface de côté y et d'épaisseur dy, admet P comme centre de masse tel que:

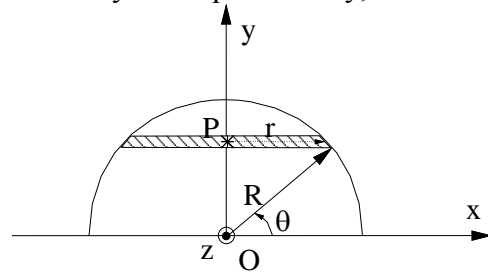
$$m \vec{OG} = \int_S \vec{OP} dm$$

avec $dm = 2\sigma r dy$ et $m = \sigma S$

$$r = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta \Rightarrow dy = R \cos \theta d\theta$$

$$m y_G = \int_S y dm \Rightarrow y_G = \frac{2}{S} \int_S r y dy = \frac{2}{S} \int_0^{\pi/2} R^3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4R}{3\pi}$$



III. Moment d'inertie - Opérateur d'inertie

I- Définitions

La notion de moment d'inertie présente un grand intérêt sur le plan de la véritable histoire de la mécanique et sur celui de la philosophie et de ses principes. C'est en 1673 que Huygens, dans la solution du problème du centre d'oscillation du pendule composé (livre : Traité du Pendule), fit apparaître pour la première fois une quantité de la forme $\sum m r^2$. C'est en 1810-1811 que cette quantité intervint pour la première fois sous le nom de moment d'inertie, et d'une

manière officielle et systématique, dans l'enseignement de la Mécanique des solides indéformables

Concernant la signification physique, le moment d'inertie est une grandeur qui caractérise la géométrie des masses d'un solide, c'est-à-dire la répartition de la matière en son sein. Il quantifie également la résistance à une mise en rotation de ce solide (ou plus généralement à une accélération angulaire).

2- Moment d'inertie

On peut définir la distance de M par rapport à un point O, une droite (Δ) ou un plan (π). Il leur correspond respectivement des moments d'inertie par rapport à un point, un axe ou un plan. Ils sont définis par $r^2 dm$, avec r désignant la distance du point M, de masse dm, par rapport au point O, à l'axe (Δ) ou au plan (π).

Pour le solide c'est $\int_{(S)} r^2 dm$

Notations: $I(O, S)$, $I(\Delta, S)$ et $I(\pi, S)$ ou simplement I_o , I_Δ et I_π .

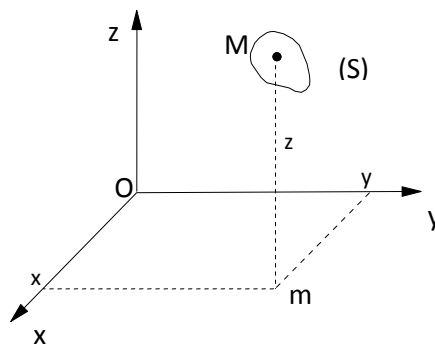
Considérons le cas de la figure ci-contre:

Soit un élément de masse dm autour de $M \in (S)$.

- La distance entre M et le plan xOy est z.

Le moment d'inertie de M par rapport à ce plan est $z^2 dm$

Le moment d'inertie de S par rapport à xOy est $I(xOy, S) = \int_S z^2 dm$



Par simple permutation, on aura

$$I(xOz, S) = \int_S y^2 dm \text{ et } I(yOz, S) = \int_S x^2 dm$$

- Le carré de la distance de M par rapport à Oz est $(Om)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow I(Oz, S) = \int_S (x^2 + y^2) dm$

$$\text{De même : } I(Ox, S) = \int_S (y^2 + z^2) dm \text{ et } I(Oy, S) = \int_S (x^2 + z^2) dm$$

- Le carré de la distance entre les points M et O est $(OM)^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\Rightarrow I(O, S) = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm : \text{c'est le moment d'inertie de S par rapport au point O.}$$

Les relations entre ces grandeurs : On peut écrire

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x^2) + (y^2) + (z^2) \Rightarrow I(O, S) = I(yOz, S) + I(xOz, S) + I(xOy, S)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1/2[(x^2 + y^2) + (x^2 + z^2) + (y^2 + z^2)]$$

$$\Rightarrow I(O, S) = 1/2[I(Oz, S) + I(Oy, S) + I(Ox, S)]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x^2 + y^2) + z^2 = (x^2 + z^2) + y^2 = x^2 + (y^2 + z^2) \Rightarrow$$

$$I(O, S) = I(Oz, S) + I(xOy, S) = I(Oy, S) + I(xOz, S) = I(yOz, S) + I(Ox, S)]$$

3- Opérateur d'inertie en un point O

Considérons l'axe (Δ) passant par O et de vecteur unitaire \vec{u} : $I(\Delta, M) = r^2 dm$ et $I(\Delta, S) = \int_S r^2 dm$

D'après la figure on a: $r = OM \sin \alpha = \|\vec{OM}\| \|\vec{u}\| \sin \alpha = \|\vec{u} \wedge \vec{OM}\|$

$$\text{Donc : } r^2 = \|\vec{u} \wedge \vec{OM}\|^2 = \underbrace{(\vec{u} \wedge \vec{OM})}_1 \cdot \underbrace{(\vec{u} \wedge \vec{OM})}_2 = \underbrace{(\vec{u} \wedge \vec{OM})}_3$$

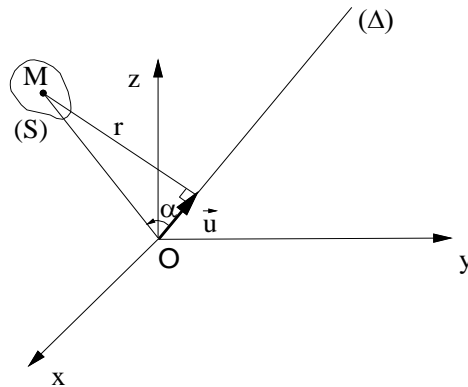
Par permutation circulaire on obtient:

$$r^2 = [\vec{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OM})] \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot [\vec{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OM})]$$

$$I(\Delta, S) = \int_S r^2 dm = \vec{u} \cdot \int_S [\vec{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OM})] dm$$

$I(\Delta, S) = \vec{u}$ multiplié scalairement par une certaine opération faite sur le vecteur \vec{u} .

On symbolise cette opération par un opérateur appelé opérateur d'inertie en O et noté $J(O, S)$.



Cet opérateur a les dimensions d'un moment d'inertie ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$).

$$\text{On pose } J(O, S)(\vec{u}) = \int_S [\vec{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OM})] dm$$

$$\text{Finalement on a: } I(\Delta, S) = \vec{u} \cdot J(O, S)(\vec{u})$$

L'opérateur $J(O, S)$ dépend du point O puisque les distances sont mesurées par \vec{OM} .

Considérons l'application de $E \longrightarrow E$

$$\vec{u} \longrightarrow J(O, S)(\vec{u})$$

• $J(O, S)$ est une application linéaire

•• $J(O, S)$ est une application symétrique i.e. $\vec{v} \cdot J(O, S)(\vec{u}) \stackrel{?}{=} \vec{u} \cdot J(O, S)(\vec{v})$

Démonstration

$$\begin{aligned}
 \vec{v} \cdot J(O,S)(\vec{u}) &= \vec{v} \cdot \int_S [\vec{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OM})] dm = \int_S \vec{v} \cdot [\vec{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OM})] dm = \int_S (\vec{u} \wedge \vec{OM}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{OM}) dm \\
 &= \int_S [\vec{OM} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{OM})] \cdot \vec{u} dm = \vec{u} \cdot \int_S [\vec{OM} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{OM})] dm \\
 &= \vec{u} \cdot J(O,S)(\vec{v})
 \end{aligned}$$

IV- Matrice d'inertie-Matrice principal d'inertie

I- Matrice d'inertie

Soit $b = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E .

A l'opérateur $J(O,S)$, on peut associer une matrice dans cette base.

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, avec $M \in (S)$.

$$\begin{aligned}
 J(O,S)(\vec{i}) &= \int_S [\vec{OM} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{OM})] dm = \int_S [(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (y\vec{k} - z\vec{j})] dm \\
 J(O,S)(\vec{i}) &= \int_S (-xy\vec{j} - xz\vec{k} + y^2\vec{i} + z^2\vec{i}) dm = \int_S (y^2 + z^2)\vec{i} dm - \int_S xy\vec{j} dm - \int_S xz\vec{k} dm
 \end{aligned}$$

Finalement:

$$\begin{cases}
 J(O,S)(\vec{i}) = I_{Ox}\vec{i} - I_{xy}\vec{j} - I_{xz}\vec{k} \\
 J(O,S)(\vec{j}) = -I_{xy}\vec{i} + I_{Oy}\vec{j} - I_{yz}\vec{k} \\
 J(O,S)(\vec{k}) = -I_{xz}\vec{i} - I_{yz}\vec{j} + I_{Oz}\vec{k}
 \end{cases}$$

Habituellement, les moments d'inertie du solide par rapport aux 3 axes sont notés A , B et C , les autres termes, notés D , E et F , sont appelés les produits d'inertie.

$$\begin{aligned}
 A = I_{Ox} &= \int_S (y^2 + z^2) dm & B = I_{Oy} &= \int_S (x^2 + z^2) dm & C = I_{Oz} &= \int_S (x^2 + y^2) dm \\
 D &= \int_S yz dm & E &= \int_S xz dm & F &= \int_S xy dm
 \end{aligned}$$

Les termes $A, B, C \geq 0$ alors que $D, E, F \geq$ ou ≤ 0 .

Considérons $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ (\vec{u} vecteur unitaire: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) alors on a :

$$\begin{aligned}
 I(\Delta,S) &= \vec{u} \cdot J(O,S)(\vec{u}) = (\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}) \cdot [J(O,S)(\alpha\vec{i}) + J(O,S)(\beta\vec{j}) + J(O,S)(\gamma\vec{k})] \\
 &= (\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}) [\alpha(A\vec{i} - F\vec{j} - E\vec{k}) + \beta(-F\vec{i} + B\vec{j} - D\vec{k}) + \gamma(-E\vec{i} - D\vec{j} + C\vec{k})]
 \end{aligned}$$

$$\text{Soit: } I(\Delta,S) = \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C - 2\beta\gamma D - 2\alpha\gamma E - 2\alpha\beta F$$

De la relation de $J(O,S)(\vec{u})$, on peut déduire que l'on passe de \vec{u} à $J(O,S)(\vec{u})$ par une application linéaire représentée, dans la base b , par la matrice symétrique (3×3) suivante:

$$II(O,S) = \begin{pmatrix} +A & -F & -E \\ -F & +B & -D \\ -E & -D & +C \end{pmatrix} : \text{matrice d'inertie ou tenseur d'inertie en O dans la base b.}$$

C'est la représentation de l'opérateur d'inertie dans la base de projection.

La connaissance de la matrice d'inertie en O permet de déduire facilement les composantes du vecteur $J(O,S)(\vec{u})$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} +A & -F & -E \\ -F & +B & -D \\ -E & -D & +C \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice d'inertie} \\ (3 \times 3)}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{\substack{\text{composantes de } \vec{u} \\ (3 \times 1)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} +\alpha A - \beta F - \gamma E \\ -\alpha F + \beta B - \gamma D \\ -\alpha E - \beta D + \gamma C \end{pmatrix}}_{\substack{\text{composantes de } J(O,S)(\vec{u}) \\ (3 \times 1)}}$$

$$I(\Delta,S) = I_\Delta = \vec{u} \cdot J(O,S)(\vec{u}) = \underbrace{(\alpha \quad \beta \quad \gamma)}_{(1 \times 3)} \underbrace{\begin{pmatrix} +\alpha A - \beta F - \gamma E \\ -\alpha F + \beta B - \gamma D \\ -\alpha E - \beta D + \gamma C \end{pmatrix}}_{(3 \times 1)} =$$

$$\alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C - 2\beta\gamma D - 2\alpha\gamma E - 2\alpha\beta F$$

Remarque

Dans la représentation matricielle, l'écriture de I_Δ est une écriture symbolique qui présente l'avantage de la simplicité et de la commodité.

2- Matrice principale d'inertie:

Lorsque les produits d'inertie de la matrice $II(O,S)$ sont nuls dans la base b, le repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sera appelé repère principal d'inertie, ses axes sont les axes principaux d'inertie et la matrice $II(O,S)$ est la matrice principale d'inertie.

$$II(O,S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \text{ dans une base principale d'inertie b } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

Examinons les trois cas suivants:

- Lorsque les trois éléments de la diagonale sont distincts ($A \neq B \neq C$), il existe un seul repère principal d'inertie.
- Lorsque deux parmi les trois éléments de la diagonale sont identiques et différents du troisième (exemple $A = B \neq C$), il existe une infinité de repères principaux d'inertie ayant l'axe Oz en commun (symétrie cylindrique).
- Lorsque les éléments de la diagonale sont identiques ($A = B = C$), toute direction passant par O est une direction principale d'inertie et tout repère ayant O comme origine est un repère principal d'inertie. On dira alors que l'opérateur est sphérique (symétrie sphérique).

Examinons les deux cas de symétrie suivants:

a- Le plan xOy est un plan de symétrie pour le système.

$$I_{xz} = \int_S xz \, dm = 0 \Rightarrow E = 0$$

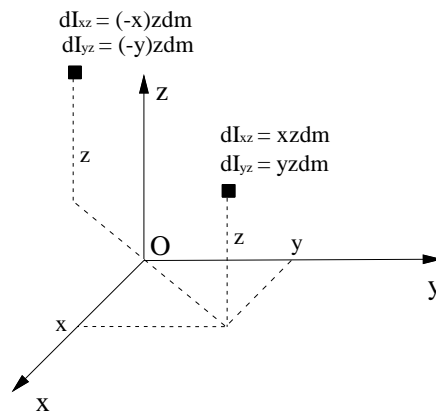
$$I_{yz} = \int_S yz \, dm = 0 \Rightarrow D = 0$$

Conclusion

Tous les termes d'inertie en z sont nuls \Rightarrow *tout axe \perp à un plan de symétrie matérielle est un axe principal d'inertie.*

b- L'axe Oz est un axe de symétrie matérielle pour (S)

En regroupant 2 à 2 les éléments qui ont le même côté z (xzdm et (-x)zdm; yzdm et (-y)zdm), ces éléments ont respectivement des x et des y opposés $\Rightarrow I_{xz} = I_{yz} = 0$



Conclusion

Tout axe de symétrie matérielle est un axe principal d'inertie.

En résumé:

- Tout repère orthonormé dont deux de ses plans sont des plans de symétrie matérielle pour (S) est un repère principal d'inertie.
- Tout repère dont deux de ses axes sont des axes de symétrie matérielle pour (S) est un repère principal d'inertie.

V- Théorème de Huygens

1- Relation entre les opérateurs d'inertie d'un système en deux points

Soit $M \in (S)$ de masse dm .

Considérons O et A deux points de ξ et \vec{u} un vecteur unitaire d'un axe passant par O.

$$J(A, S)(\vec{u}) = \int_S [\vec{AM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AM})] dm$$

$$J(O, S)(\vec{u}) = \int_S [\vec{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OM})] dm = \int_S (\vec{OA} + \vec{AM}) \wedge [\vec{u} \wedge (\vec{OA} + \vec{AM})] dm$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_S [\vec{OA} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OA})] dm + \int_S [\vec{OA} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AM})] dm + \int_S [\vec{AM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OA})] dm + \int_S [\vec{AM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AM})] dm \\
 &= m \vec{OA} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OA}) + \vec{OA} \wedge [\vec{u} \wedge \int_S \vec{AM} dm] + [\int_S \vec{AM} dm] \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OA}) + \int_S [\vec{AM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AM})] dm \\
 &= m \vec{OA} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OA}) + m \vec{OA} \wedge [\vec{u} \wedge \vec{AG}] + m \vec{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OA}) + J(A, S)(\vec{u})
 \end{aligned}$$

En définitive:

$$J(O, S)(\vec{u}) = J(A, S)(\vec{u}) + m \vec{OA} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OA}) + m \vec{OA} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AG}) + m \vec{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OA})$$

Si on considère $A \equiv G$, on aura:

$$J(O, S)(\vec{u}) = J(G, S)(\vec{u}) + m \vec{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OG})$$

On pose $J(O, m_G)(\vec{u}) = m \vec{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OG})$: opérateur d'inertie d'un point matériel se trouvant en G et ayant pour masse la masse totale de (S).

Ainsi: $J(O, S)(\vec{u}) = J(G, S)(\vec{u}) + J(O, m_G)(\vec{u})$

Pour la matrice d'inertie on aura:

$\Pi(O, S) = \Pi(G, S) + \Pi(O, m_G)$: c'est le théorème de Huygens généralisé.

$$\text{Si } \vec{OG} = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k}, \quad \Pi(O, m_G) = m \begin{pmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{pmatrix}$$

2- Théorème de Huygens

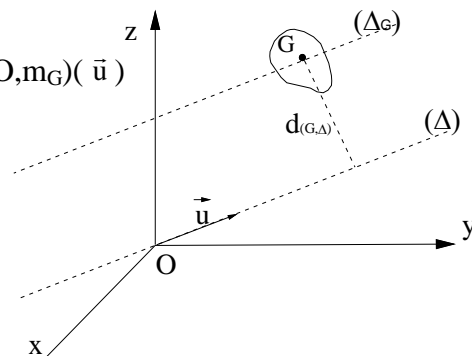
Considérons le cas de la figure suivante:

$$\text{On a: } I(\Delta, S) = \vec{u} \cdot J(O, S)(\vec{u}) = \vec{u} \cdot J(G, S)(\vec{u}) + \vec{u} \cdot J(O, m_G)(\vec{u})$$

$$\begin{aligned}
 &= I(\Delta_G, S) + m \vec{u} \cdot [\vec{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OG})] \\
 &= I(\Delta_G, S) + m (\vec{u} \wedge \vec{OG}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{OG}) \\
 &= I(\Delta_G, S) + m (\vec{u} \wedge \vec{OG})^2
 \end{aligned}$$

$$\boxed{I(\Delta, S) = I(\Delta_G, S) + m d^2(G, \Delta)}$$

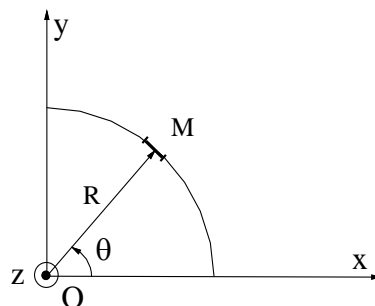
Théorème de Huygens classique



VI- Exemple de corps homogènes classiques

- Quart de cercle matériel de rayon R

$$G \begin{cases} x_G = \frac{2R}{\pi} \\ y_G = \frac{2R}{\pi} \end{cases}$$



Le repère en question n'est pas un repère principal d'inertie; seuls les termes d'inertie en z sont nuls ($z = 0$).

$$C = mR^2 = \int (x^2 + y^2) dm = 2 \int x^2 dm = 2 \int y^2 dm$$

$$A = \int (y^2 + z^2) dm = \int y^2 dm = \frac{C}{2} = \frac{mR^2}{2}$$

$$B = \int (x^2 + z^2) dm = \int x^2 dm = \frac{C}{2} = \frac{mR^2}{2}$$

$$dI_{xy} = xy dm = R^2 \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot dm = \lambda R^3 \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta$$

$$I_{xy} = \frac{\lambda R^3}{2} \left[\sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{mR^2}{\pi}$$

$$\Pi(O, S) = mR^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\pi} & 0 \\ -\frac{1}{\pi} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Opérateur d'inertie d'un quart de disque de rayon R.

La matrice d'inertie n'est pas diagonale.

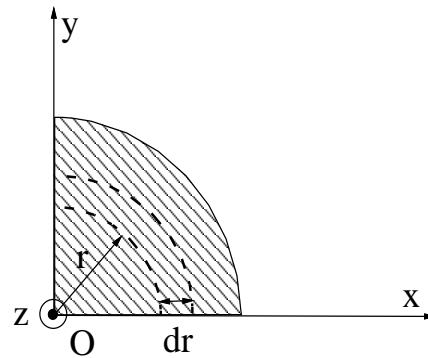
$$dI_{Oz} = r^2 dm = \sigma \frac{2\pi r^3}{4} dr$$

$$C = I_{Oz} = \sigma \frac{\pi R^4}{2 \cdot 4} = \frac{mR^2}{2}$$

$$A = B = \frac{C}{2} = \frac{mR^2}{4}$$

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases} \quad dm = \sigma ds = \sigma r dr d\theta \quad \text{et} \quad dI_{xy} = xy dm.$$

$$F = I_{xy} = \sigma \int_0^R \int_0^{\pi/2} r^3 \cos\theta \sin\theta dr d\theta = \sigma \frac{R^4}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{mR^2}{2\pi}$$



$$\Pi(O, S) = mR^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2\pi} & 0 \\ -\frac{1}{2\pi} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Cas d'un disque de rayon R

Le repère choisi est un repère principal d'inertie.

$$dI_{Oz} = r^2 dm = 2\sigma\pi r^3 dr$$

$$C = I_{Oz} = 2\sigma\pi \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}, \quad A = B = \frac{C}{2} = \frac{mR^2}{4}$$

$$\Pi(O, S) = m \frac{R^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Cas d'un cylindre plein de rayon R de hauteur h

Le solide admet une symétrie cylindrique $\Rightarrow A = B \neq C$

$$dI_{Oz} = \frac{R^2}{2} dm$$

$$C = I_{Oz} = \int \frac{R^2}{2} dm = \frac{mR^2}{2}$$

$$A = I_{Ox} = \int y^2 dm + \int z^2 dm = \frac{C}{2} + I_{xOy}$$

$$dI_{xOy} = z^2 dm = \rho\pi R^2 z^2 dz \quad I_{xOy} = \frac{\rho\pi R^2}{3} \frac{h^3}{4} = \frac{mh^2}{12}$$

$$A = B = m \frac{R^2}{4} + \frac{mh^2}{12}$$

- Cas d'une sphère pleine de rayon R

Le solide admet une symétrie sphérique $\Rightarrow A = B = C$.

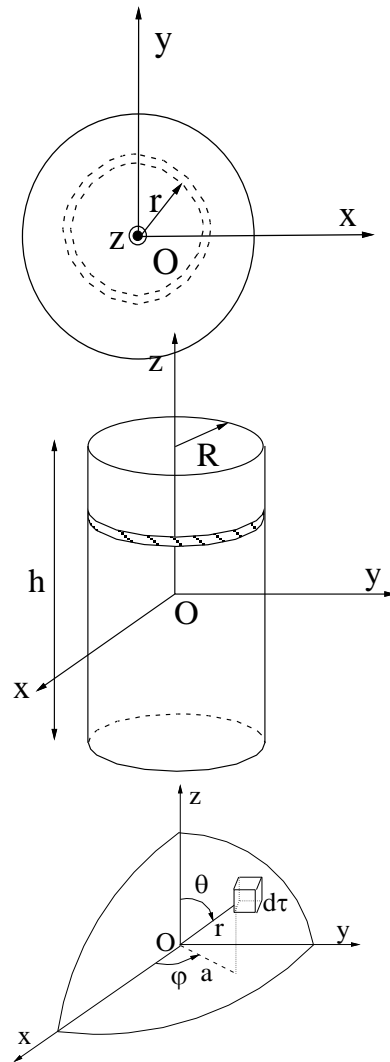
$$I_o = \frac{A + B + C}{2} = \frac{3}{2} A \Rightarrow A = \frac{2}{3} I_o$$

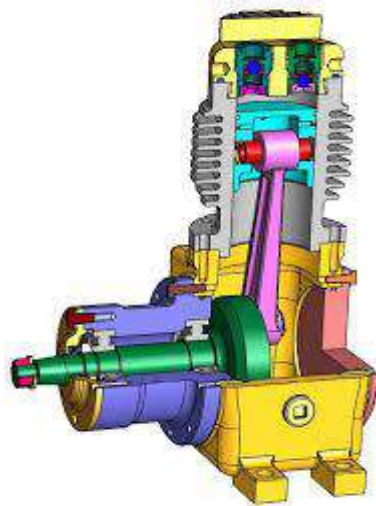
$d\tau = r \sin \theta dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ (élément de volume sphérique)

$$dI_o = r^2 dm = \rho r^4 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

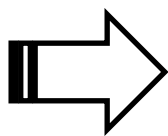
$$I_o = \rho \frac{R^5}{5} 2\pi \cdot 2 = \frac{3}{5} mR^2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2}{3} I_o = \frac{2}{5} mR^2$$

$$\Pi(O, S) = \frac{2}{5} mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





Système de freinage



Cinétique du Solide



Johan Samuel König (Koenig) : (1712-1757)

Les travaux de Koenig publiés dans son livre "Éléments de géométrie contenant les six premiers livres d'Euclide", permettent le rapprochement des concepts de la cinématique (vitesse, accélération) et ceux de la géométrie des masses (centre de masse, moment d'inertie) donnant naissance à la **cinétique** (appelée aussi cinématique des masses).

Objectifs :

- ✚ Maitriser la notion du Torseur cinétique (quantité de mouvement, moment cinétique) ;
- ✚ Maitriser la notion du Torseur dynamique (quantité d'accélération, moment dynamique) ;
- ✚ Comprendre la notion de référentiel barycentrique ;
- ✚ Comprendre et savoir appliquer le théorème de Koenig ;

CINÉTIQUE DU SOLIDE

I. Introduction

Dans un modèle mécanique, les étapes qui suivent la modélisation du mouvement (cinématique) et la géométrie des masses, consistent à formuler les principes de conservation de la mécanique (dans le cadre de la cinématique retenue), conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie. En effet, formuler pour les systèmes de solides indéformables le principe fondamental de la dynamique, permettra de faire apparaître les notions de torseur cinétique, de centre d'inertie et de tenseur d'inertie. Le rapprochement des concepts de la cinématique (vitesse, accélération) et ceux de la géométrie des masses (centre de masse, moment d'inertie) est l'objet de la cinétique du solide (ou cinématique des masses).

II. Définitions des cinq quantités cinétiques

Considérons $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ un repère fixe, M un point matériel de masse m , de vitesse $\vec{v}(M/R_0)$ et d'accélération $\vec{\gamma}(M/R_0)$. Pour ce point matériel, on introduit cinq quantités cinétiques qui sont fonctions de sa masse, de sa vitesse et de son accélération.

La quantité de mouvement: $\vec{p}(M/R_0) = m \vec{v}(M/R_0)$

Le moment cinétique (ou moment de la quantité de mouvement) / à O :

$$\vec{\sigma}(O, M/R_0) = \vec{OM} \wedge \vec{p}(M/R_0) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M/R_0)$$

La quantité d'accélération: $\vec{a}(M/R_0) = m\vec{\gamma}(M/R_0)$

Le moment dynamique (ou moment de la quantité d'accélération) / à O :

$$\vec{\delta}(O, M/R_0) = \vec{OM} \wedge \vec{a}(M/R_0) = \vec{OM} \wedge m\vec{\gamma}(M/R_0)$$

L'énergie cinétique: $E_c(M/R_0) = \frac{1}{2} m \vec{v}^2(M/R_0)$

III. Torseur Cinétique

Soit (S) un système matériel et dm un élément de masse autour de $M \in (S)$.

I- Quantité de Mouvement

I-1 Introduction

La quantité de mouvement est une grandeur physique qui est associée à la masse et à la vitesse d'un objet. On l'utilise pour étudier le comportement des objets qui entrent en collision les uns avec les autres.

I-2 Définition

La quantité de mouvement de (S) est définie par:

$$\begin{aligned}\vec{p}(S/R_0) &= \int_{(S)} d\vec{p}(M/R_0) = \int_{(S)} \vec{v}(M/R_0) dm \\ \vec{p}(S/R_0) &= \int_{(S)} \vec{v}(M/R_0) dm = \int_{(S)} \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{R_0} dm = \frac{d}{dt} \int_{(S)} \vec{OM} dm = \left. \frac{d(m\vec{OG})}{dt} \right|_{R_0} = m\vec{v}(G/R_0)\end{aligned}$$

2- Moment Cinétique

2-1 Introduction

Le moment cinétique, est la grandeur physique qui joue dans le cas d'une rotation, un rôle analogue à celui de la quantité de mouvement pour une translation ; si la conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé est liée à l'invariance par translation dans l'espace (propriété d'homogénéité de l'espace), la conservation du moment cinétique est liée à l'isotropie de l'espace.

2-2 Définition

Le moment cinétique de (S) par rapport à O est défini par:

$$\vec{\sigma}(O, S/R_0) = \int_{(S)} \vec{OM} \wedge \vec{v}(M/R_0) dm$$

Soit $A \in \xi$ (le point A est quelconque).

$$\vec{\sigma}(O, S/R_0) = \int_{(S)} (\vec{OA} + \vec{AM}) \wedge \vec{v}(M/R_0) dm = \vec{OA} \wedge \int_{(S)} \vec{v}(M/R_0) dm + \int_{(S)} \vec{AM} \wedge \vec{v}(M/R_0) dm$$

$$\vec{\sigma}(O, S/R_0) = \vec{OA} \wedge m\vec{v}(G/R_0) + \vec{\sigma}(A, S/R_0)$$

ou bien : $\vec{\sigma}(O, S/R_0) = \vec{\sigma}(A, S/R_0) + m\vec{v}(G/R_0) \wedge \vec{AO}$: Cette écriture vérifie la structure d'un torseur appelé *torseur cinétique*, noté $[C]$.

Ses éléments de réduction on O sont:

$$\begin{cases} \vec{\sigma}(O, S/R_0) : \text{moment cinétique} \\ m\vec{v}(G/R_0) : \text{résultante cinétique} \end{cases}$$

Ainsi: $[C(O)] = [\vec{\sigma}(O, S/R_0), m\vec{v}(G/R_0)]$.

Si $A \equiv G$, alors

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}(O, S/R_0) &= \vec{\sigma}(G, S/R_0) + \vec{OG} \wedge m\vec{v}(G/R_0) \\ &= \vec{\sigma}(G, S/R_0) + \vec{\sigma}(O, m_G/R_0)\end{aligned}$$

avec $\vec{\sigma}(O, m_G/R_0)$ désignant le moment cinétique par rapport à O d'un point matériel de masse m placé en G, animé de la même vitesse que G et $m_G = m(S)$.

En résumé:

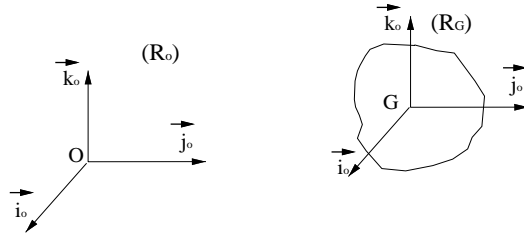
$$\vec{\sigma}(O, S/R_0) = \vec{\sigma}(G, S/R_0) + \vec{\sigma}(O, m_G/R_0) : (1^{\text{er}} \text{ théorème de Koenig})$$

2-3 Moment cinétique par rapport à G

Définition du repère barycentrique:

C'est un repère, noté R_G , lié au centre de masse G du solide et dont les axes gardent une direction fixe par rapport à ceux de R_0 .

Ainsi $R_G (G, \vec{i}_o, \vec{j}_o, \vec{k}_o)$ est en translation par rapport à $R_0 (O, \vec{i}_o, \vec{j}_o, \vec{k}_o)$.



Évaluons

$$\vec{\sigma}(G, S / R_0) = \int_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{v}(M / R_0) dm = \int_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{v}(M / R_G) + \vec{v}_e(M)) dm$$

$$\vec{\sigma}(G, S / R_0) = \vec{\sigma}(G, S / R_G) + \underbrace{\left(\int_{(S)} \overrightarrow{GM} dm \right)}_{=0} \wedge \vec{v}(G / R_0) = \vec{\sigma}(G, S / R_G)$$

Soit: $\vec{\sigma}(G, S / R_0) = \vec{\sigma}(G, S / R_G)$

Remarque

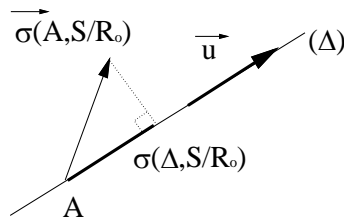
On utilise le repère R_G pour le calcul de $\vec{\sigma}(G, S / R_0)$

2-4 Moment cinétique par rapport à un axe Δ

Soit (Δ) un axe de vecteur unitaire \vec{u} et A un point quelconque $\in (\Delta)$.

$$\sigma(\Delta, S / R_0) = \vec{\sigma}(A, S / R_G) \cdot \vec{u}$$

Ce résultat est indépendant de $A \in (\Delta)$ en raison de l'équiprojectivité du torseur cinétique.



2-5 Autres résultats relatifs à un solide

Considérons :

$R(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: un repère lié au solide

$R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$: un repère fixe

$R_G(G, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$: un repère barycentrique

a- Le solide (S) est animé d'un mouvement de translation / R_0

Soit A un point quelconque. On a :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(A, S / R_0) &= \vec{\sigma}(G, S / R_0) + m\vec{v}(G / R_0) \wedge \overrightarrow{GA} \\ &= \underbrace{\vec{\sigma}(G, S / R_G)}_{=0} + m\vec{v}(G / R_0) \wedge \overrightarrow{GA} \end{aligned}$$

$$\vec{\sigma}(G, S / R_G) = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{v}(M / R_G) dm = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \underbrace{\vec{v}(G / R_G)}_{=0} dm + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \underbrace{\vec{\Omega}(S / R_G)}_{=0} \wedge \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$$

En définitive : $\vec{\sigma}(A, S/R_0) = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{v}(G/R_0)$

b- Le point A est un point du solide (S), fixe dans R_0

Soit A un point du solide (S) fixe dans $R_0 \Rightarrow \vec{v}(A/R_0) = \vec{0}$

$$\vec{v}(M/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}$$

$$\vec{\sigma}(A, S/R_0) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M/R_0) dm = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}) dm = J(A, S)(\vec{\Omega}(S/R_0))$$

Représentation matricielle : $\underbrace{\vec{\sigma}(A, S/R_0)}_{(3 \times 1)} = \underbrace{J(A, S)}_{(3 \times 3)} \cdot \underbrace{\vec{\Omega}(S/R_0)}_{(3 \times 1)}$.

Remarque très importante

Il faut toujours exprimer $\vec{\sigma}(O, S/R_0)$ et $\vec{\Omega}(S/R_0)$ dans la même base que $J(O, S)$.

c- Le solide (S) est en rotation autour d'un axe (Δ) fixe dans R_0

Soit $A \in (\Delta) \Rightarrow A$ est fixe dans R_0 i.e. $\vec{v}(A/R_0) = \vec{0}$

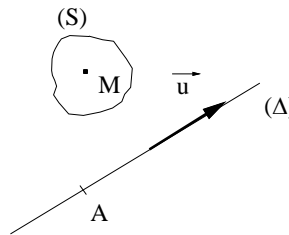
$$\vec{v}(M/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}$$

$$\vec{\sigma}(A, S/R_0) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M/R_0) dm = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}) dm = J(A, S)(\vec{\Omega}(S/R_0))$$

Posons $\vec{\Omega}(S/R_0) = \omega \vec{u}$

$$\sigma(\Delta, S/R_0) = \vec{\sigma}(A, S/R_0) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot J(A, S)(\vec{\Omega}(S/R_0)) = \omega \vec{u} \cdot J(A, S)(\vec{u}) = \omega \cdot I(\Delta, S)$$

$$\sigma(\Delta, S/R_0) = \omega \cdot I(\Delta, S)$$



d- Le mouvement de (S) est quelconque

On a

$$\vec{\sigma}(G, S/R_0) = \vec{\sigma}(G, S/R_G) \text{ avec } G \text{ fixe dans } R_G$$

$$\vec{\sigma}(G, S/R_G) = J(G, S)(\vec{\Omega}(S/R_G)) = J(G, S)(\vec{\Omega}(S/R_0))$$

En revenant à l'expression générale de $\vec{\sigma}(O, S/R_0)$:

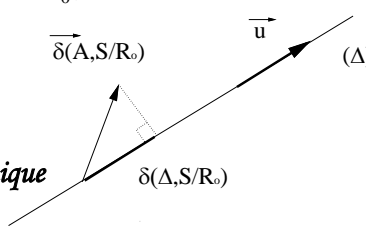
$$\vec{\sigma}(O, S/R_0) = \vec{\sigma}(G, S/R_0) + m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}(G/R_0)$$

$$\vec{\sigma}(O, S/R_0) = \underbrace{J(G, S)(\vec{\Omega}(S/R_0))}_{\text{rotation}} + \underbrace{m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}(G/R_0)}_{\text{translation}}$$

IV. Torseur Dynamique [D]

1. Quantité d'accélération (résultante dynamique)

La quantité d'accélération de (S) est définie par :

$$\begin{aligned}
 \vec{a}(S/R_0) &= \int_{(S)} \vec{\gamma}(M/R_0) dm = \int_{(S)} \frac{d\vec{v}(M/R_0)}{dt} \bigg|_{R_0} dm = \frac{d}{dt} \int_{(S)} \vec{v}(M/R_0) dm \\
 &= m \frac{d\vec{v}(G/R_0)}{dt} \bigg|_{R_0} = m\vec{\gamma}(G/R_0) \\
 \vec{a}(S/R_0) &= \int_{(S)} \vec{\gamma}(M/R_0) dm = m\vec{\gamma}(G/R_0) : \text{résultante dynamique}
 \end{aligned}$$


2- Moment dynamique

2-1 Définition

Le moment dynamique du solide (S) par rapport à O est défini par:

$$\vec{\delta}(O, S/R_0) = \int_{(S)} \vec{OM} \wedge \vec{\gamma}(M/R_0) dm$$

Considérons un point quelconque $A \in \xi$.

$$\vec{\delta}(O, S/R_0) = \int_{(S)} (\vec{OA} + \vec{AM}) \wedge \vec{\gamma}(M/R_0) dm = \vec{OA} \wedge \int_{(S)} \vec{\gamma}(M/R_0) dm + \int_{(S)} \vec{AM} \wedge \vec{\gamma}(M/R_0) dm$$

$$\vec{\delta}(O, S/R_0) = \vec{\delta}(A, S/R_0) + \vec{OA} \wedge m\vec{\gamma}(G/R_0) : \text{vérifie la structure d'un torseur.}$$

On définit ainsi un torseur appelé torseur dynamique noté $[\mathcal{D}]$.

Ses éléments de réduction en O sont:

$$\begin{cases} \vec{\delta}(O, S/R_0) : \text{moment dynamique} \\ m\vec{\gamma}(G/R_0) : \text{résultante dynamique} \end{cases}$$

Ainsi: $[\mathcal{D}(O)] = [\vec{\delta}(O, S/R_0), m\vec{\gamma}(G/R_0)]$

2-2 Moment dynamique par rapport à un axe (Δ)

Soit \vec{u} un vecteur unitaire porté par (Δ) et $A \in (\Delta)$:

$$\delta(\Delta, S/R_0) = \vec{\delta}(A, S/R_0) \cdot \vec{u}$$

Ce résultat est indépendant de $A \in (\Delta)$ à cause de l'équiprojectivité du champ des vecteurs $\vec{\delta}(O, S/R_0)$.

2-3 Relation entre $[\dot{\mathcal{C}}]$ et $[\mathcal{D}]$

Soit A un point quelconque $\in \xi$.

$$\vec{\sigma}(A, S/R_0) = \int_{(S)} \vec{AM} \wedge \vec{v}(M/R_0) dm$$

En dérivant dans R_0 .

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{\sigma}(A, S/R_0)}{dt} \bigg|_{R_0} &= \int_{(S)} \vec{AM} \wedge \vec{\gamma}(M/R_0) dm + \int_{(S)} [\vec{v}(M/R_0) - \vec{v}(A/R_0)] \wedge \vec{v}(M/R_0) dm \\
 \frac{d\vec{\sigma}(A, S/R_0)}{dt} \bigg|_{R_0} &= \vec{\delta}(A, S/R_0) - \vec{v}(A/R_0) \wedge \int_{(S)} \vec{v}(M/R_0) dm \\
 \vec{\delta}(A, S/R_0) &= \frac{d\vec{\sigma}(A, S/R_0)}{dt} \bigg|_{R_0} + \vec{v}(A/R_0) \wedge m\vec{v}(G/R_0)
 \end{aligned}$$

Donc en général $[\dot{C}] \neq [\mathcal{D}]$, l'égalité $[\dot{C}] = [\mathcal{D}]$ est vérifiée dans les quatre cas particuliers suivants:

- R_0 est le repère barycentrique $R_G \Rightarrow \vec{v}(G/R_0) = \vec{0}$;
- Le point A est fixe dans le repère R_0 de manière permanente ou instantanée (ceci est vrai pour I_1 et I_2 mais pas pour le point géométrique I).
- $A \equiv G$
- $\vec{v}(A/R_0) // \vec{v}(G/R_0) \ (\forall t)$

Ainsi

$$\begin{cases} \vec{\delta}(G, S/R_0) = \frac{d\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{dt} \Big|_{R_0} \\ \vec{\delta}(I_1, S_1/R_0) = \frac{d\vec{\sigma}(I_1, S_1/R_0)}{dt} \Big|_{R_0} : \text{s'il y a absence de glissement de } (S_1) \text{ par rapport à } R_0 \\ \vec{\delta}(I, S/R_0) = \frac{d\vec{\sigma}(I, S/R_0)}{dt} \Big|_{R_0} + \vec{v}(I/R_0) \wedge m\vec{v}(G/R_0) \end{cases}$$

Remarque importante

A chaque instant, les points I_1 et I sont confondus ($I_1 \equiv I$) \Rightarrow

$$\vec{\sigma}(I_1, S/R_0) = \vec{\sigma}(I, S/R_0) + \underbrace{m\vec{v}(G/R_0) \wedge \vec{\Pi}_1}_{=\vec{0}}$$

$$\vec{\sigma}(I_1, S/R_0) = \vec{\sigma}(I, S/R_0)$$

Ne pas oublier de prendre en considération la dérivée par rapport au temps du vecteur nul, $m\vec{v}(G/R_0) \wedge \vec{\Pi}_1$, à l'instant considéré.

3- Autres résultats

3-1 Le solide (S) est animé d'un mouvement de translation /à \mathcal{R}_0 .

En choisissant les éléments de réduction en G on aura:

$$[\dot{C}(G)] = [\mathcal{D}(G)]$$

$$\vec{\delta}(G, S/R_0) = \frac{d\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{dt} \Big|_{R_0} = \vec{0}$$

car $\vec{\sigma}(G, S/R_0) = \vec{\sigma}(G, S/R_G) = \vec{0}$ dans un mouvement de translation.

3-2 Le solide (S) a un de ses points fixe dans \mathcal{R}_0 .

Soit $A \in (S)$ tel que A est fixe dans $R_0 \Rightarrow [\dot{C}(A)] = [\mathcal{D}(A)]$

$$\vec{\delta}(A, S/R_0) = \frac{d\vec{\sigma}(A, S/R_0)}{dt} \Big|_{R_0}$$

Puisque A est fixe dans $R_0 \Rightarrow \vec{\sigma}(A, S/R_0) = J(A, S)(\vec{\Omega}(S/R_0))$

En pratique, $\vec{\sigma}(A, S/R_0)$ est connu par ses composantes dans un repère R_i lié au solide où $J(A, S)$ aurait été calculé.

$$\vec{\sigma}(A, S/R_0) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(A, S/R_0)}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d\vec{\sigma}(A, S/R_0)}{dt} \right|_{R_i} + \vec{\Omega}(R_i/R_0) \wedge \vec{\sigma}(A, S/R_0)$$

Cas particulier : R_i est un repère principal d'inertie lié au solide (S).

$$II(A, S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{dans } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}(R_i/R_0) = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$$

$$\vec{\sigma}(A, S/R_0) = II(A, S) \vec{\Omega}(R_i/R_0) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}_{\text{dans } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

$$\vec{\sigma}(A, S/R_0) = A \dot{p} \vec{i} + B \dot{q} \vec{j} + C \dot{r} \vec{k} + (p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}) \wedge (Ap\vec{i} + Bq\vec{j} + Cr\vec{k})$$

$$\vec{\sigma}(A, S/R_0) = \begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr \\ B\dot{q} + (A-C)pr \\ C\dot{r} + (B-A)pq \end{cases} : \text{Formules d'Euler obtenues avec l'hypothèse de } A \in (S) \text{ et fixe dans } R_0.$$

R_0 .

La matrice $II(A, S)$ est exprimée dans R_i lié à (S) et R_i est un repère principal d'inertie.

3-3 Le solide (S) est en rotation autour d'un axe fixe dans R_0

Soit (Δ) un axe fixe dans R_0 de vecteur unitaire \vec{u} et R un repère lié à (S).

Puisque le vecteur $\vec{\Omega}(R/R_0)$ est porté par (Δ) , $\vec{\Omega}(R/R_0) = \omega \vec{u}$.

Considérons $A \in (\Delta)$, donc A est fixe dans R_0 .

$$\delta(\Delta, S/R_0) = \vec{\sigma}(A, S/R_0) \cdot \vec{u} = \left. \frac{d\vec{\sigma}(A, S/R_0)}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{u} = \left. \frac{d\vec{\sigma}(A, S/R_0) \cdot \vec{u}}{dt} \right|_{R_0}$$

$$\delta(\Delta, S/R_0) = \left. \frac{d\sigma(\Delta, S/R_0)}{dt} \right|_{R_0} = I(\Delta, S) \dot{\omega}$$

3-4 Le mouvement de (S) est quelconque

Soit $A \in \xi$ (A quelconque)

$\vec{\sigma}(A, S/R_0) = \vec{\sigma}(G, S/R_0) + m\vec{\gamma}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GA}$ (formule de transfert du torseur dynamique)

$$\vec{\sigma}(G, S/R_0) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{dt} \right|_{R_0} = \frac{d}{dt} [J(G, S) \vec{\Omega}(R/R_0)]_{R_0}$$

$$\vec{\sigma}(A, S/R_0) = \frac{d}{dt} [J(G, S) \vec{\Omega}(R/R_0)]_{R_0} + m\vec{\gamma}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GA}$$

Attention

Ne pas oublier que, même si la dérivation est effectuée par rapport à R_0 , l'opérateur $J(G, S)$ est souvent exprimé dans un repère lié à (S).

V. Énergie Cinétique

1- Introduction

En histoire des sciences, G. Leibniz, s'opposant à Descartes, qui estimait que la quantité de mouvement se conservait toujours, développa l'idée de la "force vive" (vis viva), à laquelle il attribuait la valeur mv^2 . La force vive est donc le double de l'énergie cinétique. La force vive est un concept obsolète où on trouve la première expression mathématique de ce qui sera connu comme la loi de la conservation de l'énergie. Elle peut être considérée comme une sorte d'énergie cinétique ou d'énergie liée au mouvement des objets. D'où la naissance du concept énergie cinétique (du Grec "énergeia"), qui détermine l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement par rapport à un référentiel donné.

2- Deuxième théorème de Kœnig

L'énergie cinétique de (S), calculée dans le repère R_0 , est définie par:

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} \int_S (\vec{v}(M/R_0))^2 dm = \int_S dE_c(M/R_0), \text{ on a :}$$

$$\vec{v}(M/R_0) = \vec{v}(M/R_G) + \vec{v}(G/R_0) + \underbrace{\vec{\Omega}(R_G/R_0)}_{\vec{0}} \wedge \overrightarrow{GM} \Rightarrow \vec{v}(M/R_0) = \vec{v}(M/R_G) + \vec{v}(G/R_0)$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} \int_S (\vec{v}(M/R_0))^2 dm = \frac{1}{2} \int_S (\vec{v}(M/R_G) + \vec{v}(G/R_0))^2 dm$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} \int_S (\vec{v}(M/R_G))^2 dm + \frac{1}{2} \int_S (\vec{v}(G/R_0))^2 dm + \vec{v}(G/R_0) \cdot \int_S \vec{v}(M/R_G) dm$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} \int_S (\vec{v}(M/R_G))^2 dm + \frac{1}{2} \int_S (\vec{v}(G/R_0))^2 dm + \vec{v}(G/R_0) \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \int_S \overrightarrow{GM} dm}_{\vec{0}}$$

$$E_c(S/R_0) = E_c(S/R_G) + \frac{1}{2} m (\vec{v}(G/R_0))^2 : \text{C'est le deuxième théorème de}$$

Kœnig.

2-1 Le solide (S) est animé d'un mouvement de translation / R_0

$$\vec{v}(M/R_G) = \underbrace{\vec{v}(G/R_G)}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{\Omega}(S/R_G)}_{\vec{0}} \wedge \overrightarrow{GM} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$E_c(S/R_G) = \frac{1}{2} \int_S (\vec{v}(M/R_G))^2 dm = \vec{0}$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} m (\vec{v}(G/R_0))^2$$

Dans un mouvement de translation, tous les points du solide sont animés de la même vitesse.

2-2 Le solide (S) a un de ses points fixe dans R_0

Soit $A \in (S)$ tel que A est fixe dans R_0 .

$$\vec{v}(M/R_0) = \underbrace{\vec{v}(A/R_0)}_{=0} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM} \Rightarrow (\vec{v}(M/R_0))^2 = \vec{v}(M/R_0) \cdot (\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{AM})$$

$$\begin{aligned} E_c(S/R_0) &= \frac{1}{2} \int_S (\vec{v}(M/R_0))^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \int_S \vec{v}(M/R_0) \cdot (\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}) dm = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(R/R_0) \cdot \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M/R_0) dm \\ E_c(S/R_0) &= \frac{1}{2} \vec{\Omega}(R/R_0) \cdot \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}) dm = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(R/R_0) \cdot J(A,S) (\vec{\Omega}(R/R_0)) \\ E_c(S/R_0) &= \frac{1}{2} \vec{\Omega}(R/R_0) \cdot J(A,S) (\vec{\Omega}(R/R_0)) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(R/R_0) \cdot \vec{\sigma}(A,S/R_0) \end{aligned}$$

Sous forme matricielle:

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} \underbrace{\vec{\Omega}^t(R/R_0)}_{(1 \times 3)} \underbrace{J(A,S)}_{(3 \times 3)} \underbrace{\vec{\Omega}(R/R_0)}_{(3 \times 1)}$$

Conséquence

Le centre de masse G étant fixe dans R_G , on a alors:

$$E_c(S/R_G) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R_G) \cdot J(G,S) (\vec{\Omega}(S/R_G))$$

Comme $\vec{\Omega}(S/R_G) = \vec{\Omega}(S/R_0)$

$$E_c(S/R_G) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}^t(R/R_0) \cdot J(G,S) \cdot \vec{\Omega}(R/R_0) \quad [R \text{ est un repère lié à } (S)]$$

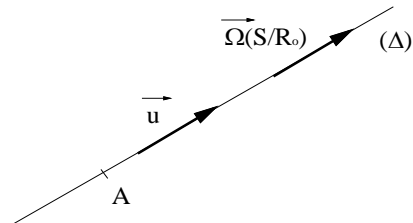
2-3 Le solide (S) est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe (Δ) fixe dans R_0

Soit \vec{u} un vecteur directeur de (Δ) et $A \in (\Delta)$.

On pose $\vec{\Omega}(R/R_0) = \omega \vec{u}$

$$\begin{aligned} E_c(S/R_0) &= \frac{1}{2} \vec{\Omega}(R/R_0) \cdot J(A,S) \vec{\Omega}(R/R_0) \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \vec{u} \cdot J(A,S) \vec{u} \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 I(\Delta, S) \end{aligned}$$

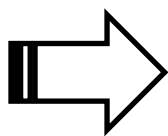
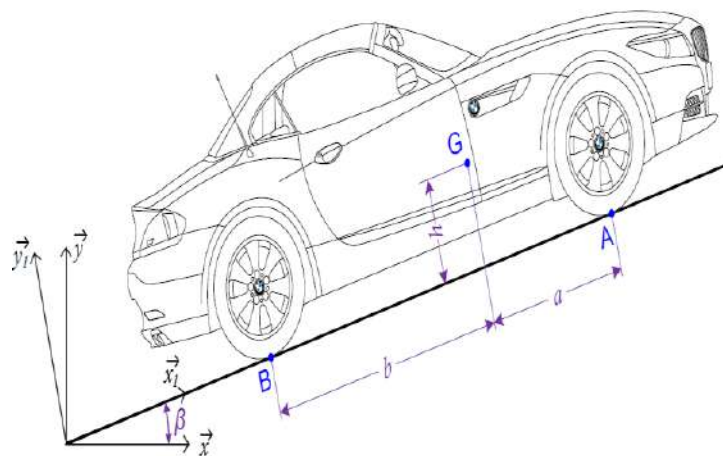
$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} \omega^2 I(\Delta, S)$$



2-4 Le solide (S) est animé d'un mouvement quelconque

On utilise le deuxième théorème de Kœnig:

$$\begin{aligned} E_c(S/R_0) &= E_c(S/R_G) + \frac{1}{2} m (\vec{v}(G/R_0))^2 \\ E_c(S/R_0) &= \frac{1}{2} \vec{\Omega}(R/R_0) \cdot J(G,S) (\vec{\Omega}(R/R_0)) + \frac{1}{2} m (\vec{v}(G/R_0))^2 \\ E_c(S/R_0) &= \underbrace{\frac{1}{2} \vec{\Omega}(R/R_0) J(G,S) \vec{\Omega}(R/R_0)}_{\text{rotation}} + \underbrace{\frac{1}{2} m (\vec{v}(G/R_0))^2}_{\text{translation}} \end{aligned}$$



Dynamique du Solide



Isaac Newton : (1642-1727)

Newton formule l'hypothèse audacieuse selon laquelle la Lune “tombe” sur la Terre de la même manière qu'un objet une pomme par exemple... tombe sur le sol. Mais en raison de sa vitesse initiale, la Lune décrit une trajectoire curviligne. Chute verticale et mouvement orbital sont donc des mouvements de même nature. Puis Newton étend cette hypothèse à tout corps céleste en orbite et aboutit à la loi suivante : “ Deux corps quelconques s'attirent selon une force proportionnelle au produit de leur masse et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare ”.

Objectifs :

- ✚ Comprendre la notion de référentiel galiléen ;
- ✚ Maîtriser et savoir appliquer le principe fondamental de la dynamique ;
- ✚ Savoir mettre en oeuvre les théorèmes généraux;
- ✚ Maîtriser les notions de fonction de forces ,de potentiel et de la puissance;
- ✚ Interprétation de la résolution des équations différentielles du mouvement ;

DYNAMIQUE DU SOLIDE

I. Approche historique

La cinématique ne peut constituer à elle seule la science du mouvement, dans la mesure précisément où elle ne tient compte ni des causes qui le produisent ni de ce à quoi il s'applique. La science galiléenne laisse sans réponse la question des rapports entre la matière et le mouvement, qui, par contre, était au cœur de la théorie d'Aristote. On verra comment Newton, par l'introduction d'une dynamique fondée sur les concepts renouvelés de masse et de force, pensera avoir réglé cette question. On constatera que, comme l'ont souligné les auteurs du XIX^e siècle, et notamment Mach, Newton n'est pas parvenu à remplir entièrement son programme, dans la mesure où il n'a pas su donner du mouvement de translation uniforme, dit "inertiel", une explication "matérialiste", c'est-à-dire uniquement en termes d'espace, de temps et de matière. On verra comment Einstein, avec la théorie de la relativité générale et l'idée que la structure géométrique de l'espace est déterminée par la distribution des masses qui s'y trouvent, a finalement résolu le problème du lien entre la cinématique et la dynamique.

II. Principe Fondamental de la Dynamique - Théorèmes Généraux

1- Introduction

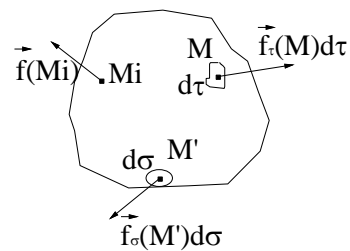
L'action mécanique est un concept utilisé en mécanique appliquée pour décrire tous les phénomènes provoquant un mouvement ou une déformation. Ce concept regroupe les notions de force et de couple utilisées en mécanique générale. Pour représenter les actions mécaniques, on utilise souvent un torseur d'action.

2- Torseur des forces appliquées à (S)

2-1 Somme ou résultante \vec{R}

Pour un solide soumis à des forces ponctuelles, volumiques et surfaciques, la résultante générale de ces forces s'écrit:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{f}(M_i) + \int_S \vec{f}_\tau(M) d\tau(M) + \int_S \vec{f}_\sigma(M') d\sigma(M')$$



avec $\vec{f}(M_i)$ désignant une force ponctuelle et $\vec{f}_\tau(M)$ et $\vec{f}_\sigma(M')$ des densités de forces volumique et surfacique, respectivement.

2-2 Moment résultant en O, $\vec{M}(O, F \rightarrow S)$

On écrira de manière générale, pour un système soumis à des forces volumiques, surfaciques et ponctuelles:

$$\vec{M}(O, F \rightarrow S) = \sum_i \vec{OM}_i \wedge \vec{f}(M_i) + \int_S \vec{OM} \wedge \vec{f}_\tau(M) d\tau(M) + \int_S \vec{OM}' \wedge \vec{f}_\sigma(M') d\sigma(M') + \int_S \vec{C}_\tau(M) d\tau(M)$$

Ici, $\vec{C}_\tau(M)$ représente une éventuelle densité volumique du couple en M.

Le terme $\int_S \vec{C}_\tau(M) d\tau$ est rajouté car, lorsque $\vec{f}(M_i) = \vec{0}$, $\vec{f}_\tau(M) = \vec{0}$ et $\vec{f}_\sigma(M') = \vec{0}$, la résultante générale du torseur est nulle et le torseur est un couple de moment $\int_S \vec{C}_\tau(M) d\tau$. Ce qui justifie

l'appellation de densité volumique de couple (ce couple peut être nul).

Si on prend une autre origine pour calculer le moment résultant, on obtient facilement:

$$\vec{M}(O', F \rightarrow S) = \vec{M}(O, F \rightarrow S) + \vec{R}(F \rightarrow S) \wedge \overrightarrow{OO'}.$$

On a ainsi défini un champ de force auquel on a associé un torseur $[F \rightarrow S]$ dont les éléments de réduction en A sont:

$$\begin{cases} \vec{R}(F \rightarrow S) = \sum_i \vec{f}(M_i) + \int_S \vec{f}_\tau(M) d\tau + \int_S \vec{f}_\sigma(M') d\sigma : \text{résultante} \\ \vec{M}(A, F \rightarrow S) = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{f}(M_i) + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}_\tau(M) d\tau + \int_S \overrightarrow{AM'} \wedge \vec{f}_\sigma(M') d\sigma + \int_S \vec{C}_\tau(M) d\tau : \text{moment} \end{cases}$$

3- Classification des forces

Dans cette classification on distingue les interactions de chaque point du système (S) avec les autres points du système (forces intérieures) et les forces s'exerçant sur les points du système et dues à des éléments extérieurs à (S) (forces extérieures).

Ainsi, le torseur $[F \rightarrow S]$ peut être décomposé comme suit:

$$\begin{aligned} [F \rightarrow S] &= [F_{\text{int}} \rightarrow S] + [F_{\text{ext}} \rightarrow S] \\ [F_{\text{int}} \rightarrow S] &\text{ torseur des forces intérieures.} \\ [F_{\text{ext}} \rightarrow S] &\text{ torseur des forces extérieures.} \end{aligned}$$

4- Principe fondamental de la dynamique (PFD) ou axiome de la dynamique

On admet l'existence de repères privilégiés dits "repères absolus", R_u , et une chronologie de temps "temps absolu" tels que, dans tout mouvement d'un système matériel rapporté à ces repères et temps, le torseur dynamique soit équivalent au torseur des forces extérieures:

$$[\mathcal{D}(S/R_u)] = [F_{\text{ext}} \rightarrow S]$$

A chaque instant, le torseur dynamique est égal au torseur des forces extérieures.

Remarques

- Compte tenu des approximations tolérées, on peut considérer comme absolus des repères terrestres (galiléens).
- En écrivant l'égalité entre les éléments de réduction des torseurs dynamique et celui des forces extérieures, on recouvre deux théorèmes généraux:

$$\begin{cases} m\vec{\gamma}(G/R_u) = \vec{R}(F_{\text{ext}} \rightarrow S) : \text{Théorème du centre de masse} \\ \vec{\delta}(A, S/R_u) = \vec{M}(A, F_{\text{ext}} \rightarrow S) : \text{Théorème du moment cinétique} \end{cases}$$

On remarquera que les forces intérieures à un système matériel n'apparaissent pas dans la loi fondamentale de la dynamique ce qui sous-entend que le torseur des forces intérieures à un système matériel (S) est nul : $[F_{\text{int}} \rightarrow S] = [0]$.

5- Théorème des interactions ou théorème de l'action et de la réaction

Considérons le système matériel (S) formé de deux solides disjoints (S₁) et (S₂):

$$(S) = (S_1) \cup (S_2) \text{ et } (S_1) \cap (S_2) = \emptyset$$

On a :

$$[\mathcal{F}_{\text{ext}} \rightarrow S] = [\mathcal{F}_{\text{ext}} \rightarrow S_1] + [\mathcal{F}_{\text{ext}} \rightarrow S_2]$$

Appelons:

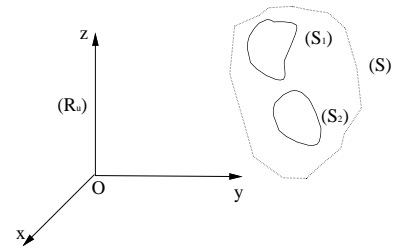
$[\mathcal{F}_{S_1} \rightarrow S_2]$: torseur des efforts exercés par (S₁) sur (S₂)

$[\mathcal{F}_{S_2} \rightarrow S_1]$: torseur des efforts exercés par (S₂) sur (S₁)

Appliquons le P.F.D. à (S₁) et (S₂) séparément, on aura :

$$[\mathcal{D}(S_1/R_u)] = [\mathcal{F}_{\text{ext}} \rightarrow S_1] + [\mathcal{F}_{S_2} \rightarrow S_1]$$

$$[\mathcal{D}(S_2/R_u)] = [\mathcal{F}_{\text{ext}} \rightarrow S_2] + [\mathcal{F}_{S_1} \rightarrow S_2]$$



Faisons la somme:

$$[\mathcal{D}(S/R_u)] = [\mathcal{F}_{\text{ext}} \rightarrow S] + \underbrace{[\mathcal{F}_{S_2} \rightarrow S_1] + [\mathcal{F}_{S_1} \rightarrow S_2]}_{=[0] \text{ torseur nul}}$$

Ainsi:

Le torseur des efforts exercés par (S₁) sur (S₂) et le torseur des efforts exercés par (S₂) sur (S₁) sont opposés dans le cas où les systèmes matériels (S₁) et (S₂) sont disjoints.

Conséquences

$$\text{Éléments de réductions} \begin{cases} \vec{R}(\mathcal{F}_{S_1} \rightarrow S_2) = -\vec{R}(\mathcal{F}_{S_2} \rightarrow S_1) \\ \vec{M}(A, \mathcal{F}_{S_1} \rightarrow S_2) = -\vec{M}(A, \mathcal{F}_{S_2} \rightarrow S_1) \end{cases}$$

5-1 Torseur des forces intérieures à un solide (S)

C'est l'ensemble des actions mutuelles entre les divers points $M \in (S)$. Ces actions assurent la propriété de rigidité du solide: $[\mathcal{F}_{\text{int}} \rightarrow S] = [0]$.

5-2 Torseur des actions intérieures à un système matériel (S)

On peut décomposer ce torseur en la somme de deux torseurs:

- Le torseur des forces intérieures à chaque solide (S_i) de (S)
- Le torseur des actions mutuelles entre tous les solides de (S)

Si $(S) = (S_1) \cup (S_2) \cup \dots \cup (S_n)$

$$[\mathcal{F}_{\text{int}} \rightarrow S] = \sum_{i=1}^n \underbrace{[\mathcal{F}_{\text{int}} \rightarrow S_i]}_{=[0]} + \underbrace{\sum_{i \neq j} [\mathcal{F}_{S_i} \rightarrow S_j]}_{=[0]} \Rightarrow [\mathcal{F}_{\text{int}} \rightarrow S] = [0]$$

III- Changement de repère - Repère galiléen

1- Position du Problème

Le choix du référentiel d'étude n'est pas uniquement guidé par des considérations techniques de complexité plus ou moins grande d'écriture des équations du mouvement, par exemple selon l'orientation des axes, le système de coordonnées (cartésiennes, sphériques, etc.), ou l'origine des dates, mais détermine également du point de vue fondamental le cadre spatio-temporel d'étude des phénomènes considérés.

En effet, pour un référentiel quelconque, l'espace n'apparaîtra pas nécessairement homogène et / ou isotrope, ni le temps uniforme. Ainsi, par exemple, l'étude du mouvement d'un corps par rapport au référentiel lié à un wagon en mouvement accéléré par rapport aux voies fera apparaître une direction privilégiée, celle de du vecteur accélération, soit un anisotropie de l'espace. Il en sera de même pour un référentiel lié un corps en mouvement de rotation autour d'un axe fera à la fois apparaître une direction privilégiée, celle de l'axe de rotation (anisotropie), mais aussi des effets "centrifuges" dépendant de la distance à l'axe (non-homogénéité de l'espace), voire du temps si la vitesse de rotation n'est pas constante (non-uniformité du temps).

Une telle situation conduirait à devoir écrire les équations de la Physique, et notamment celle de la mécanique, d'une façon distincte selon le référentiel d'étude, c'est-à-dire sous une forme non covariante, à moins de définir une classe de référentiels particuliers, dits galiléens, par rapport auxquels ces équations prennent justement une forme covariante.

2- Torseur dynamique d'entraînement-Torseur dynamique de Coriolis

Considérons R_u repère absolu et R_r repère relatif. De la loi de composition des accélérations, on déduit:

$$[\mathcal{D}(S/R_u)] = [\mathcal{D}(S/R_r)] + [\mathcal{D}_e(S)] + [\mathcal{D}_c(S)]$$

$$[\mathcal{D}_e(S)]_{(O)} = \left[\underbrace{\int \vec{\gamma}_e(M) dm}_{\text{résultante}}, \underbrace{\int \vec{OM} \wedge \vec{\gamma}_e(M) dm}_{\text{moment / O}} \right] : \text{Torseur dynamique d'entraînement}$$

$$[\mathcal{D}_c(S)]_{(O)} = \left[\underbrace{\int \vec{\gamma}_c(M) dm}_{\text{résultante}}, \underbrace{\int \vec{OM} \wedge \vec{\gamma}_c(M) dm}_{\text{moment / O}} \right] : \text{Torseur dynamique de Coriolis}$$

Or, le P.F.D. appliqué dans $R_u \Rightarrow [\mathcal{D}(S/R_u)] = [F_{ext} \rightarrow S]$

Ainsi : $[\mathcal{D}(S/R_r)] = [F_{ext} \rightarrow S] - [\mathcal{D}_e(S)] - [\mathcal{D}_c(S)]$

Cherchons un repère R_g tel que: $[\mathcal{D}_e(S)] + [\mathcal{D}_c(S)] = [0]$

Ceci est particulièrement vrai si $[\mathcal{D}_e(S)] = [\mathcal{D}_c(S)] = [0]$

Or $[\mathcal{D}_c(S)] = [0]$ en particulier si $\vec{\gamma}_c(M) = \vec{0} \forall M \in (S)$.

C'est-à-dire

$$2\vec{\Omega}(R_g / R_u) \wedge \vec{v}(M / R_g) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\Omega}(R_g / R_u) = \vec{0} \Rightarrow R_g \text{ est en translation par rapport à } R_u.$$

De même, $[\mathcal{D}_e(S)] = [0]$ en particulier si $\vec{\gamma}_e(M) = \vec{0} \forall M \in (S)$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(O_g / R_u) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(O_g / R_u) = \overrightarrow{\text{cte}} \Rightarrow R_g \text{ est en translation rectiligne uniforme par rapport à } R_u.$$

Conclusion

Les torseurs dynamiques d'entraînement et de Coriolis sont nuls dans les repères R_g animés d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à R_u : ces repères sont appelés *galiléens*. Dans la pratique, un référentiel lié à des corps réels ne peut être qu'approximativement, localement et momentanément galiléen.

IV. Travail et puissance

1- Puissance d'un couple appliqué à un solide

Un couple est un torseur de forces dont la résultante est nulle. Son moment résultant est le même en tout point du solide. On le notera $\vec{\Gamma}$ avec $\vec{\Gamma} = \int_{(S)} \vec{C}_\tau(M) d\tau$.

La puissance du couple est $P(\vec{\Gamma} / R_0) = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega}(S / R_0)$

Le travail élémentaire du couple est $\delta W(\vec{\Gamma} / R_0) = P(\vec{\Gamma} / R_0) dt = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega}(S / R_0) dt$

2- Puissance d'un torseur de forces appliquées à un solide

Dans le cas d'un solide soumis à des forces ponctuelles et volumiques on a :

$$P(F \rightarrow S / R_0) = \sum_i \vec{f}(M_i) \cdot \vec{v}(M_i / R_0) + \int_S \vec{f}_\tau(M) \cdot \vec{v}(M / R_0) d\tau(M)$$

Soit A un point quelconque de (S)

$$P(F \rightarrow S / R_0) = \sum_i \vec{f}(M_i) \cdot \left[\vec{v}(A / R_0) + \vec{\Omega}(S / R_0) \wedge \overrightarrow{AM_i} \right] + \int_S \vec{f}_\tau(M) \cdot \left[\vec{v}(A / R_0) + \vec{\Omega}(S / R_0) \wedge \overrightarrow{AM} \right] d\tau(M)$$

$$P(F \rightarrow S / R_0) = \left[\sum_i \vec{f}(M_i) + \int_S \vec{f}_\tau(M) d\tau(M) \right] \cdot \vec{v}(A / R_0) + \left[\sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{f}(M_i) + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}_\tau(M) d\tau(M) \right] \cdot \vec{\Omega}(S / R_0)$$

$$P(F \rightarrow S / R_0) = \vec{R}(F \rightarrow S) \cdot \vec{v}(A / R_0) + \vec{\mathcal{M}}(A, F \rightarrow S) \cdot \vec{\Omega}(S / R_0)$$

Le résultat est indépendant de $A \in (S)$.

Donc le résultat est le **comoment** du torseur des forces appliquées et du torseur cinématique.

Conséquences

- Si deux torseurs de forces appliquées à un solide sont égaux, les puissances qu'ils développent sont égales.
- Si un torseur de forces appliquées à un solide est nul, la puissance qu'il développe est nulle dans tout mouvement de ce repère. Donc $P(\mathbf{F}_{\text{int}} \rightarrow S / R_0) = 0$ dans tout repère (puissance des forces intérieures à un solide).

3- Puissance du torseur des forces appliquées à un système matériel (S)

Considérons deux repères: R_0 absolu et R_r relatif.

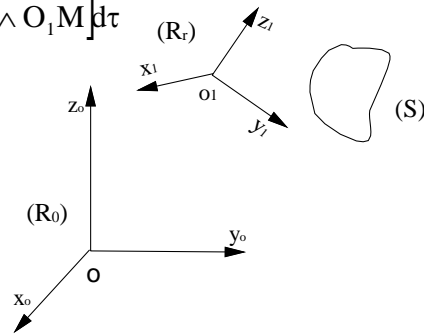
$$P(F \rightarrow S / R_0) = \sum_i \vec{f}(M_i) \cdot \vec{v}(M_i / R_0) + \int_S \vec{f}_\tau(M) \cdot \vec{v}(M / R_0) d\tau(M)$$

$$P(F \rightarrow S / R_0) = \sum_i \vec{f}(M_i) \cdot [\vec{v}(M_i / R_r) + \vec{v}_e(M_i)] + \int_S \vec{f}_\tau(M) \cdot [\vec{v}(M / R_r) + \vec{v}_e(M)] d\tau(M)$$

$$P(F \rightarrow S / R_0) = P(F \rightarrow S / R_r) + \underbrace{\sum_i \vec{f}(M_i) \cdot \vec{v}_e(M_i)}_1 + \underbrace{\int_S \vec{f}_\tau(M) \cdot \vec{v}_e(M) d\tau(M)}_2$$

$$\underbrace{\sum_i \vec{f}(M_i) \cdot \vec{v}_e(M_i)}_{(1)} = \sum_i \vec{f}(M_i) \cdot [\vec{v}(O_1 / R_0) + \vec{\Omega}(R_r / R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M_i}]$$

$$\underbrace{\int_S \vec{f}_\tau(M) \cdot \vec{v}_e(M) d\tau}_{(2)} = \int_S \vec{f}_\tau(M) \cdot [\vec{v}(O_1 / R_0) + \vec{\Omega}(R_r / R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M}] d\tau$$



$$(1) + (2) = \left[\sum_i \vec{f}(M_i) + \int_S \vec{f}_\tau(M) d\tau \right] \cdot \vec{v}(O_1 / R_0) + \left[\sum_i \overrightarrow{O_1 M_i} \wedge \vec{f}(M_i) + \int_S \overrightarrow{O_1 M} \wedge \vec{f}_\tau(M) d\tau \right] \cdot \vec{\Omega}(R_r / R_0)$$

$$(1) + (2) = \vec{R}(F \rightarrow S) \cdot \vec{v}(O_1 / R_0) + \vec{\mathcal{M}}(O_1, F \rightarrow S) \cdot \vec{\Omega}(R_r / R_0) = [F \rightarrow S] \cdot [\mathcal{V}_e(S)]$$

avec $[\mathcal{V}_e(S)]$ désignant le torseur cinématique des vitesses d'entraînement de (S).

Finalement: $P(F \rightarrow S / R_0) = P(F \rightarrow S / R_r) + [F \rightarrow S] \cdot [\mathcal{V}_e(S)]$

Avec $[\mathcal{V}_e(S)]_{(O_1)} = [\vec{v}(O_1 / R_0), \vec{\Omega}(R_r / R_0)]$

Exercice d'application

Montrer que la puissance des forces intérieures à un système matériel est indépendante du repère et que celle relative à un solide est nulle.

4- Théorème de l'énergie cinétique

L'utilisation de ce théorème conduit à l'obtention d'une équation scalaire.

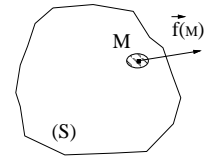
4-1 Mouvement dans un repère galiléen

- Système matériel (S)

Soit $M \in (S)$ un point matériel de masse dm et $\vec{f}(M)$ la résultante des forces agissant sur M . Ces forces appartiennent au torseur des forces extérieures et intérieures à (S) .

On a : $\vec{\gamma}(M/R_g)dm = \vec{f}(M) \Rightarrow \vec{\gamma}(M/R_g) \cdot \vec{v}(M/R_g)dm = \vec{f}(M) \cdot \vec{v}(M/R_g)$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{dm}{2} (\vec{v}(M/R_g))^2 \right]_{R_g} = P[\vec{f}(M/R_g)]$$



En étendant la somme à tous les points de (S) on aura:

$$\left. \frac{dE_c(S/R_g)}{dt} \right|_{R_g} = P[F \rightarrow S/R_g] : \text{Puissance des torseurs des forces intérieures et extérieures.}$$

Ici $[F \rightarrow S] = [F_{\text{ext}} \rightarrow S] + [F_{\text{int}} \rightarrow S]$ (la contribution des forces intérieures doit être prise en considération dans le cas d'un système matériel).

- Cas d'un solide (S)

Pour un solide (S) on a: $P(F_{\text{int}} \rightarrow S/R_g) = 0$.

$$\text{D'où: } \left. \frac{dE_c(S/R_g)}{dt} \right|_{R_g} = P(F_{\text{ext}} \rightarrow S/R_g)$$

Soit $\vec{R}(F_{\text{ext}} \rightarrow S)$ la résultante des forces extérieures agissant sur (S) .

On peut faire la décomposition suivante:

$$\vec{R}(F_{\text{ext}} \rightarrow S) = \vec{R}(F_{\text{ext co}} \rightarrow S) + \vec{R}(F_{\text{ext nc}} \rightarrow S)$$

$$\text{Ainsi: } [F_{\text{ext}} \rightarrow S/R_g] = \underbrace{[F_{\text{ext co}} \rightarrow S/R_g]}_{\text{torseur des forces conservatives}} + \underbrace{[F_{\text{ext nc}} \rightarrow S/R_g]}_{\text{torseur des forces non conservatives}}$$

$$P(F_{\text{ext}} \rightarrow S/R_g) = P(F_{\text{ext co}} \rightarrow S/R_g) + P(F_{\text{ext nc}} \rightarrow S/R_g) = -\frac{dE_p}{dt} + P(F_{\text{ext nc}} \rightarrow S/R_g)$$

$$\text{Finalement: } \left. \frac{dE_c(S/R_g)}{dt} \right|_{R_g} = P(F_{\text{ext}} \rightarrow S/R_g) = -\frac{dE_p}{dt} + P(F_{\text{ext nc}} \rightarrow S/R_g)$$

$$\frac{d}{dt} [E_c(S/R_g) + E_p]_{R_g} = \frac{d}{dt} [E_m(S/R_g)]_{R_g} = P(F_{\text{ext nc}} \rightarrow S/R_g)$$

avec $E_m(S/R_g) = E_c(S/R_g) + E_p(S)$: énergie mécanique du solide.

Lorsque la puissance du torseur des forces extérieures non-conservatives est nulle, on aura:

$$E_m(S/R_g) = \text{constante (conservation de l'énergie mécanique)}.$$

Dans ce cas, on dira que le torseur des forces extérieures agissant sur (S) est conservatif.

4-2 Mouvement dans un repère non galiléen:

- Système matériel (S)

Soit $\vec{f}(M)$ la résultante de toutes les forces agissant sur M.

En considérant R_g absolu et R_r relatif on aura:

$$\vec{\gamma}(M/R_g)dm = \vec{f}(M) = \vec{\gamma}(M/R_r)dm + \vec{\gamma}_e(M)dm + \vec{\gamma}_c(M)dm$$

$$\text{d'où : } \vec{\gamma}(M/R_r)dm = \vec{f}(M) - \vec{\gamma}_e(M)dm - \vec{\gamma}_c(M)dm$$

$$\vec{\gamma}(M/R_r) \cdot \vec{v}(M/R_r)dm = \vec{f}(M) \cdot \vec{v}(M/R_r) - \underbrace{\vec{\gamma}_e(M)dm \cdot \vec{v}(M/R_r)}_{\vec{f}_{ie}(M)} - \underbrace{\vec{\gamma}_c(M) \cdot \vec{v}(M/R_r)dm}_{=0}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{dm}{2} (\vec{v}(M/R_r))^2 \right]_{R_r} = \frac{d}{dt} [E_c(M/R_r)]_{R_r} = P[\vec{f}(M)/R_r] + P[\vec{f}_{ie}(M)]$$

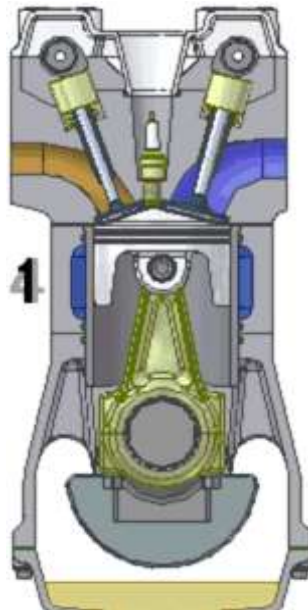
En étendant la sommation à tous les points du système on obtient:

$$\frac{d}{dt} [E_c(M/R_r)]_{R_r} = P[F \rightarrow S/R_r] + P[F_{ie} \rightarrow S]$$

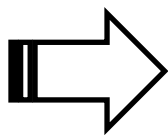
$$\text{avec: } [F_{ie}(S)] = -[D_e(S)]$$

- Cas d'un solide (S)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [E_c(M/R_r)]_{R_r} &= P[F_{\text{ext}} \rightarrow S/R_r] + P[F_{ie} \rightarrow S] \\ &= [F_{\text{ext}} \rightarrow S] \cdot [\mathcal{V}'_r(S)] + [F_{ie}(S) \rightarrow S] \cdot [\mathcal{V}'_r(S)] \end{aligned}$$



Les liaisons piston-bielle et piston-chemise
sont des pivots glissants



Liaisons-Forces de Liaison



Charles Coulomb : (1736-1806)

La loi de Coulomb en mécanique, nommée en l'honneur de Charles de Coulomb, exprime sous une forme très simplifiée l'intensité des forces de frottements qui s'exercent entre deux solides. Selon que ces solides glissent ou non l'un contre l'autre, on parle de glissement (frottement dynamique) ou d'adhérence (frottement statique). Dans les deux cas, les actions réciproques qui s'exercent entre ces solides comportent : une composante normale N qui les presse l'un contre l'autre, une composante tangentielle T qui s'oppose, ou tend à s'opposer, au glissement.

Objectifs :

- ✚ Comprendre la notion de liaisons ;
- ✚ Différencier entre liaisons unilatérales et liaisons bilatérales;
- ✚ Comprendre la notion de liaison holomone;
- ✚ Achever l'étude dynamique en appliquant les lois de Coulomb.

LIAISONS - FORCES DE LIAISON

I. Introduction

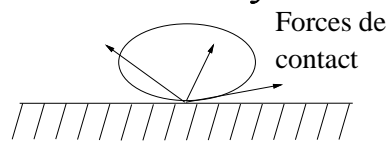
Un mécanisme est l'association de plusieurs pièces liées entre elles par des contacts physiques qui les rendent totalement ou partiellement solidaires, selon qu'ils autorisent ou non des mouvements relatifs. La liaison mécanique est le modèle utilisé pour décrire cette relation dont la considération est primordiale dans l'étude des mécanismes. Elle emploie des représentations mathématiques qui diffèrent suivant qu'on l'aborde sous l'aspect cinématique (étude des mouvements ou guidages) ou sous l'aspect statique (étude de la transmission d'efforts).

La notion de liaison mécanique se définit plus généralement entre groupes de pièces, appelés classes d'équivalence contenant respectivement des pièces entièrement solidaires.

II. Liaisons-Actions de contact

1- Définition

Lorsqu'on étudie le mouvement d'un solide en contact avec un autre solide, on doit prendre en considération de nouvelles forces dites *forces de contact*.



2- Liaisons

Considérons un système matériel (S) constitué de p solides et de q points matériels. Si le système est entièrement libre (absence des forces de contact), la position d'un solide dans l'espace, par rapport à un repère R, est définie par 6 paramètres ($x_G, y_G, z_G, \psi, \theta, \varphi$), celle d'un point matériel est définie par 3 paramètres (coordonnées du point).

La position de (S) par rapport à R est définie par: $m = 6p + 3q$ paramètres.

On pourra avoir un nombre d'équations identique au nombre m de paramètres en appliquant:

- le P.F.D. à chaque point matériel $M_i \in (S)$:

$$m_i \vec{\gamma}_i(M_i) = \vec{f}(M_i); \text{ avec } i = 1, 2, \dots, q \text{ (3q équations)}$$

- le P.F.D. à chaque solide (S_i) de (S):

$$\begin{cases} m_{S_i} \vec{\gamma}(G_i) = \vec{R}_i & \text{(3 équations pour chaque } i, 1 \leq i \leq p) \\ \vec{\delta}(O, S_i) = \vec{M}(O, F \rightarrow S_i) & \text{(3 équations pour chaque } i, 1 \leq i \leq p) \end{cases}$$

En pratique, le système n'est pas totalement libre car il existe des relations de liaison (égalités ou inégalités entre les paramètres) à prendre en considération.

Pour un système soumis à des liaisons, celles-ci sont dites:

- unilatérales, quand elles se traduisent par des inégalités ($N \geq 0$ ou $\|\vec{T}\| \leq f\|\vec{N}\|$).
- bilatérales quand elles se traduisent par des égalités ($\vec{v}_g = \vec{0}$).

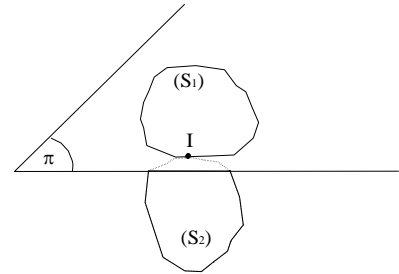
3- Liaison holonome

Une liaison est dite *holonome* si la relation de cette liaison fait apparaître les paramètres de position (coordonnées et angles) sans faire apparaître leurs dérivées par rapport au temps. Si la relation de liaison contient des dérivées des paramètres par rapport au temps, la liaison sera dite *non holonome*.

On s'intéressera par la suite uniquement aux forces de liaisons dues au contact entre deux solides (S_1) et (S_2).

4- Action de contact

On considère le cas de deux solides (S_1) et (S_2) assujettis à rester en contact ponctuel au cours de leurs mouvements. On désignera par I et (π) respectivement le point de contact et le plan tangent commun aux deux solides (S_1) et (S_2).

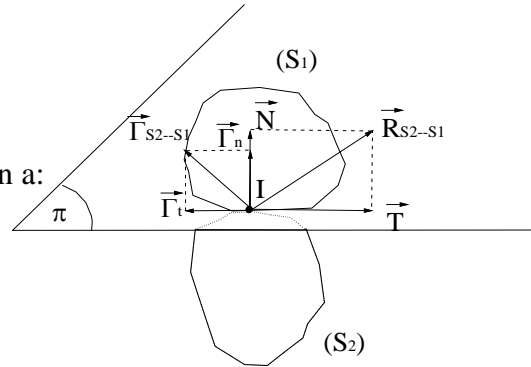


Les actions de contact exercées par (S_2) sur (S_1) et celles exercées par (S_1) sur (S_2) constituent deux torseurs: $[\mathcal{F}_{S_2 \rightarrow S_1}]$ et $[\mathcal{F}_{S_1 \rightarrow S_2}]$ dont la somme est nulle.

$$[\mathcal{F}_{S_2 \rightarrow S_1}] = \begin{cases} \vec{R}_{S_2 \rightarrow S_1} = \vec{T} + \vec{N} \\ \vec{\mathcal{M}}(I, \vec{R}_{S_2 \rightarrow S_1}) = \vec{\Gamma}_{S_2 \rightarrow S_1} \end{cases}$$

D'après le principe de l'action et de la réaction, on a:

$$[\mathcal{F}_{S_1 \rightarrow S_2}] = \begin{cases} \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} = -\vec{R}_{S_2 \rightarrow S_1} \\ \vec{\mathcal{M}}(I, \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2}) = \vec{\Gamma}_{S_1 \rightarrow S_2} = -\vec{\Gamma}_{S_2 \rightarrow S_1} \end{cases}$$



\vec{N} : réaction normale; elle s'oppose à la pénétration d'un solide dans l'autre.

\vec{T} : Force de frottement ou force de résistance au glissement.

$\vec{\Gamma}_n$: Moment de résistance au pivotement.

$\vec{\Gamma}_t$: Moment de résistance au roulement.

III. Lois de Coulomb

1- Approche historique

Ces lois, largement empiriques, ont été introduites par Coulomb en 1871. Elles dépendent de l'état des surfaces en contact. Trop souvent considéré comme un élément perturbateur pour les calculs, on s'aperçoit très vite que le frottement est tout simplement

indispensable : si les vis de fixation restent serrées, le clou en place, les échelles debout et les voitures sur la route, c'est grâce au frottement. C'est aussi sur ce phénomène que repose le fonctionnement des freins et embrayages.

2- Réaction normale

a- Son sens: la réaction normale exercée par (S_2) sur (S_1) est dirigée vers l'intérieur de (S_1) : c'est une force répulsive.

b- Sa norme: elle a une valeur arbitraire qui dépend du mouvement ou de l'équilibre et des actions qui s'exercent sur (S_1) .

Comme $N \geq 0 \Rightarrow$ la liaison de contact entre (S_1) et (S_2) est *unilatérale*.

3- Réaction tangentielle

3-1 Contact sans glissement: $\vec{v}_g(S_1 / S_2) = \vec{0}$.

L'expérience montre qu'il existe, dans ce cas, un scalaire f_0 tel que: $\|\vec{T}\| \leq f_0 \|\vec{N}\|$ (on a l'égalité à la limite du glissement).

f_0 : coefficient de frottement de non glissement.

On pose $f_0 = \operatorname{tg}(\varphi_0) \Rightarrow \operatorname{tg}(\varphi_0) \geq \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|}$

Soit φ l'angle tel que $\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|}$

$\operatorname{tg}(\varphi_0) \geq \operatorname{tg}(\varphi) \Rightarrow \varphi_0 \geq \varphi \Rightarrow$ géométriquement, la réaction $\vec{R}(S_2 \rightarrow S_1)$ est située à l'intérieur d'un cône appelé cône de frottement, d'axe normal en I à (π) , de sommet I, et de demi-angle φ_0 .

3-2 Contact avec glissement: $\vec{v}_g(S_1 / S_2) \neq \vec{0}$.

1^{ère} loi: \vec{T} et $\vec{v}_g(S_1 / S_2)$ sont colinéaires (même support) $\Rightarrow \vec{T} \wedge \vec{v}_g(S_1 / S_2) = \vec{0}$.

2^{ème} loi: $\vec{T} \cdot \vec{v}_g(S_1 / S_2) \leq 0$ (sens opposés).

3^{ème} loi: $\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$ (f = coefficient de frottement)

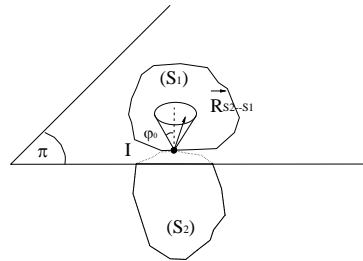
4^{ème} loi: \vec{T} est pratiquement indépendant de $\vec{v}_g(S_1 / S_2)$.

Lorsque la vitesse de glissement n'est pas trop grande, f reste pratiquement constant. On a $f < f_0$ et $\Delta f = f_0 - f \ll f$.

Dans la pratique, on prend $f = f_0$.

Remarque

Si $f = 0 \Rightarrow \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_{S_2 \rightarrow S_1} = \vec{N}$: on dira alors que la liaison de contact est parfaite (sans frottement).



4- Vitesse de rotation de pivotement-roulement

On décompose ce vecteur comme suit : $\vec{\Gamma}_{S_2 \rightarrow S_1} = \vec{\Gamma}_n + \vec{\Gamma}_t$ (composantes normale et tangentielle).

Dans le chapitre relatif à la cinématique, on a vu que : $\vec{\Omega}(S_2 / S_1) = \vec{\Omega}_n + \vec{\Omega}_t$

$\vec{\Omega}_n$: vitesse de rotation de pivotement

$\vec{\Omega}_t$: vitesse de rotation de roulement.

On admet l'existence de deux scalaires λ et μ appelés respectivement *coefficients de frottement de roulement et de pivotement*.

- Cas où $\vec{\Omega}_t \neq \vec{0}$

$$\vec{\Gamma}_t \wedge \vec{\Omega}_t = \vec{0} \quad (\text{colinéaires})$$

$$\vec{\Gamma}_t \cdot \vec{\Omega}_t \leq 0 \quad (\text{sens opposés})$$

$$\|\vec{\Gamma}_t\| = \lambda \|\vec{N}\|$$

- Cas où $\vec{\Omega}_t = \vec{0} \Rightarrow \vec{\Gamma}_t$ a une direction arbitraire dans le plan (π) .

$$\|\vec{\Gamma}_t\| \leq \lambda \|\vec{N}\|$$

- Cas où $\vec{\Omega}_n \neq \vec{0}$

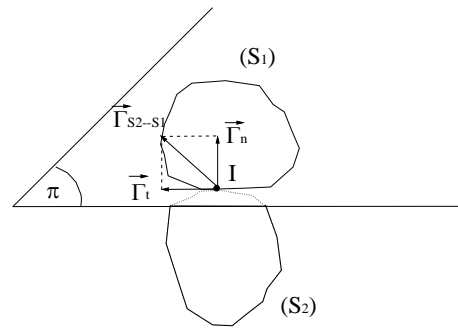
$$\vec{\Gamma}_n \wedge \vec{\Omega}_n = \vec{0} \quad (\text{colinéaires})$$

$$\vec{\Gamma}_n \cdot \vec{\Omega}_n \leq 0 \quad (\text{sens opposés})$$

$$\|\vec{\Gamma}_n\| = \mu \|\vec{N}\|$$

- Cas où $\vec{\Omega}_n = \vec{0} \Rightarrow \vec{\Gamma}_n$ est normal au plan (π) .

$$\|\vec{\Gamma}_n\| \leq \mu \|\vec{N}\|$$



Remarque

Ces relations sur $\vec{\Gamma}(S_2 \rightarrow S_1)$ sont rarement utilisées car on néglige souvent les coefficients λ et μ ($\lambda \approx \mu \approx 0$).

5- Puissance totale des actions de contact

Les solides (S_1) et (S_2) sont en mouvement par rapport à R_0 et en contact pseudo-ponctuel entre eux. On étudie la puissance des actions de contact de (S_2) sur (S_1) .

$$P(\vec{R}_{S_2 \rightarrow S_1} / R_0) = \vec{R}_{S_2 \rightarrow S_1} \cdot \vec{v}_g(S_1 / S_2) + \vec{\Gamma}_{S_2 \rightarrow S_1} \cdot \vec{\Omega}(S_1 / S_2)$$

$$\text{or} \quad \vec{R}_{S_2 \rightarrow S_1} \cdot \vec{v}_g(S_1 / S_2) = (\vec{T} + \vec{N}) \cdot \vec{v}_g(S_1 / S_2) = \vec{T} \cdot \vec{v}_g(S_1 / S_2) \leq 0$$

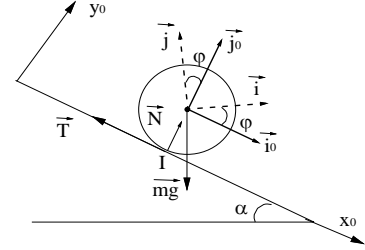
$$\text{et} \quad \vec{\Gamma}_{S_2 \rightarrow S_1} \cdot \vec{\Omega}(S_1 / S_2) = \vec{\Gamma}_t \cdot \vec{\Omega}_t + \vec{\Gamma}_n \cdot \vec{\Omega}_n \leq 0$$

$$\text{Finalement:} \quad P(F_{S_2 \rightarrow S_1}) \leq 0$$

Si tous les coefficients de frottement sont nuls, i.e. $f = \mu = \lambda = 0 \Rightarrow P(F_{S_2 \rightarrow S_1}) = 0$.

IV. Exemple d'application: mouvement d'une sphère sur un plan incliné

La sphère a un rayon r et une masse m . On désigne par f le coefficient de frottement résultant du contact entre la sphère et le plan incliné. Les résistances au roulement et au pivotement sont négligées ($\lambda = \mu = 0$).



- Étude du mouvement

Le mouvement de la sphère étant plan, on aura besoin au plus de 3 paramètres primitifs pour le décrire (x_G , y_G et φ).

La liaison de contact en I impose $y_G = r$ ($\forall t$)

Le mouvement dépend donc uniquement des paramètres x_G et φ .

La force de contact $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} = N\vec{j}_0 + T\vec{i}_0$ (T grandeur algébrique $<$ ou $>$ 0).

Les inconnus du problème sont x_G , φ , T et N .

Le P.F.D. appliqué au solide en mouvement est $[\mathcal{D}(S/R_0)] = [F_{\text{ext} \rightarrow S}]$

- Égalité des résultantes $\Rightarrow m\vec{\gamma}(G/R_0) = m\vec{g} + \vec{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_G = mg \sin \alpha + T & (1) \\ 0 = -mg \cos \alpha + N & (2) \end{cases}$$

- Égalité des moments:

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{dt} \right|_{R_0} = \vec{\mathcal{M}}(G, F_{\text{ext} \rightarrow S})$$

$$\vec{\sigma}(G, S/R_0) = \vec{\sigma}(G, S/R_G) = I_{Gz} \dot{\varphi} \vec{k}_0 = \frac{2}{5} mr^2 \dot{\varphi} \vec{k}_0 \text{ (solide en rotation autour d'un axe fixe } /R_G)$$

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{dt} \right|_{R_0} = \frac{2}{5} mr^2 \ddot{\varphi} \vec{k}_0$$

$$\vec{\mathcal{M}}(G, F_{\text{ext} \rightarrow S}) = \vec{GI} \wedge \vec{R} + \underbrace{\vec{GG} \wedge m\vec{g}}_{=0} = -r\vec{j}_0 \wedge T\vec{i}_0 = rT\vec{k}_0$$

$$\text{Théorème du moment cinétique: } \frac{2}{5} mr^2 \ddot{\varphi} = rT \Rightarrow T = \frac{2}{5} mr\ddot{\varphi} \quad (3)$$

- Cas du roulement sans glissement

$$\begin{aligned} \vec{v}_g(S/\text{plan}) = \vec{0} &= \vec{v}(I \in S/R_0) = \vec{v}(G/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{GI} \\ &= \dot{x}_G \vec{i}_0 + \dot{\varphi} \vec{k}_0 \wedge -r\vec{j}_0 = (\dot{x}_G + r\dot{\varphi}) \vec{i}_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_G + r\dot{\varphi} = 0 \quad (4)$$

Finalement on a un système de 4 équations à 4 inconnus.

$$\text{L'équation (4)} \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{\ddot{x}_G}{r} \quad (5)$$

$$\text{L'équation (3)} \Rightarrow T = \frac{2}{5} mr\ddot{\varphi} = -\frac{2}{5} m\ddot{x}_G$$

$$\text{L'équation (1)} \Rightarrow -\frac{5}{2} T = mg \sin \alpha + T \Rightarrow \frac{7}{2} T = -mg \sin \alpha$$

$$\Rightarrow T = -\frac{2}{7} mg \sin \alpha < 0$$

$$\text{L'équation (1) à nouveau} \Rightarrow m\ddot{x}_G = mg \sin \alpha + T = mg \sin \alpha - \frac{2}{7} mg \sin \alpha = \frac{5}{7} mg \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_G = \frac{5}{7} g \sin \alpha$$

$$\text{L'équation (5)} \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{5}{7} \frac{g}{r} \sin \alpha$$

$$\text{L'équation (2)} \Rightarrow N = mg \cos \alpha$$

Dans le cas d'un roulement sans glissement on a l'inégalité suivante:

$$\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\| \Rightarrow \frac{2}{7} mg \sin \alpha \leq f mg \cos \alpha \Rightarrow \boxed{f \geq \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha}$$

• *Cas du roulement avec glissement*

$$\text{Si } f \leq \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \text{il y aura glissement} \Rightarrow \|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\| \quad (6)$$

Cette équation va remplacer l'équation (4).

Or $N = mg \cos \alpha$

$$\text{L'équation (6)} \Rightarrow \|\vec{T}\| = f mg \cos \alpha \quad (7)$$

$$\Rightarrow T = \varepsilon f mg \cos \alpha \quad (\text{avec } \varepsilon = \pm 1)$$

♦ $\varepsilon = +1$: si $\vec{v}_g(S/R_o)$ est opposée à \vec{i}_o (sphère tournant trop vite: c'est un cas très rare)

♦ $\varepsilon = -1$: si $\vec{v}_g(S/R_o)$ est de même sens que \vec{i}_o (cas très fréquent)

$$\text{L'équation (1)} \Rightarrow m\ddot{x}_G = mg \sin \alpha + T = mg \sin \alpha + \varepsilon f mg \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_G = g \sin \alpha + \varepsilon f g \cos \alpha$$

$$\text{L'équation (3)} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{5}{2} \frac{T}{mr} = \frac{5}{2} \frac{\varepsilon}{r} f g \cos \alpha$$

Après intégration, on obtient:

$$\dot{x}_G = (g \sin \alpha + \varepsilon f g \cos \alpha)t + Cte \quad (\text{La constante} = 0 \text{ si à } t = 0 \text{ on a } \dot{x}_G = 0)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{5}{2} \frac{\varepsilon}{r} f g \cos \alpha \cdot t \text{ avec } \dot{\varphi}(t=0) = 0$$

$$v_g(S/R_o) = \dot{x}_G + r\dot{\varphi} = gt \left(\sin \alpha + \frac{7}{2} \varepsilon f \cos \alpha \right)$$

$$= gt \cos \alpha \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{7}{2} \varepsilon f \right)$$

La condition de roulement avec glissement impose $\operatorname{tg} \alpha > \frac{7}{2} f \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > \frac{7}{2} \varepsilon f \quad (\forall \varepsilon)$

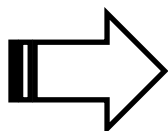
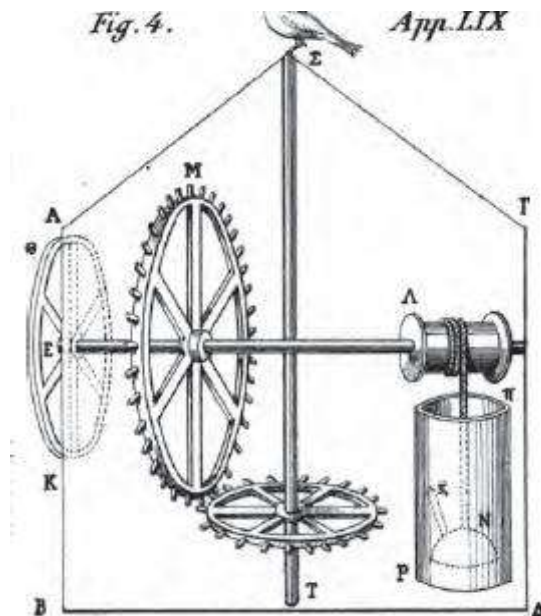
$v_g(S/R_o) > 0 \Rightarrow \varepsilon = -1$ (d'après une des lois de Coulomb).

Les équations du mouvement deviennent alors:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_G &= g \sin \alpha - fg \cos \alpha \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{5}{2r} fg \cos \alpha \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} N &= mg \cos \alpha \\ T &= -fmg \cos \alpha \end{aligned}$$

Remarque

Dans le cas de cet exemple, on a trouvé $\varepsilon = -1$ puisque les conditions initiales utilisées sont celles du repos. Cependant, on peut avoir la situation où $\varepsilon = +1$ (situation plus rare) et ce, dépendamment des conditions initiales.



Mouvement d'un Solide Autour d'un
Point ou d'un Axe Fixes



Leonhard Euler : (1707-1783)

L. Euler est la plus grande figure de mathématicien et mécanicien du XVIII^{ème} siècle, ses études sont extrêmement nombreuses (plus de 800 publications, dont la moitié vers la fin de sa vie, quand il était devenu aveugle) et ses contributions et découvertes de premiers ordre. En mécanique, L. Euler découvre les fameuses lois du mouvement des corps rigides qui portent son nom.

Objectifs :

- ✚ Maitriser les angles d'Euler ;
- ✚ Différencier entre mouvements de rotation propre, mutation et précession ;
- ✚ Comprendre et savoir appliquer les théorèmes généraux dans le cas d'un mouvement de rotation autour d'un point fixe ou d'un axe fixe.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT OU D'UN AXE FIXES

I- Approche historique

Euler a fait voir, le premier, que quand un corps est retenu par un point fixe tout mouvement infiniment petit du corps n'est autre qu'un mouvement de rotation autour d'une certaine droite passant par le point fixe.

Lagrange a donné, dans la première édition de sa mécanique analytique en 1788, les formules qui servent à décomposer ce mouvement de rotation en trois autres se faisant autour de trois axes rectangulaires menés par le point fixe. Ces formules offraient une ressemblance remarquable avec celles qui servent à décomposer le mouvement rectiligne d'un point en trois autres mouvements rectilignes. Plus tard Lagrange a complété cette analogie en donnant dans la seconde édition de sa Mécanique analytique en 1811 la construction géométrique des trois rotations qui peuvent remplacer une rotation unique.

II- Rotation d'un Solide autour d'un Point Fixe (Angles d'Euler)

I- Angles d'EULER

Considérons un solide (S) en mouvement autour d'un point fixe O de sorte qu'il existe un point de (S) coïncidant en permanence avec O. L'étude du mouvement de (S) par rapport au repère fixe $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ est caractérisée par 3 paramètres (angles d'Euler) qui permettent d'exprimer $\vec{\Omega}(S/R_0)$ de manière intéressante.

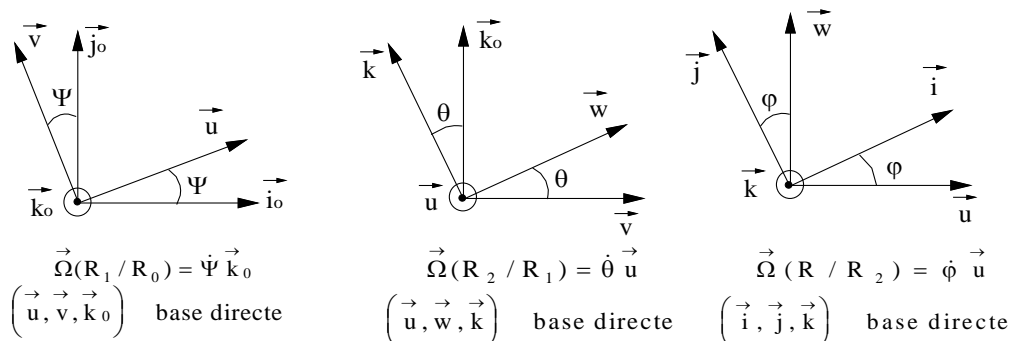
Si on considère le repère R (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) comme étant lié au solide, le passage de (R_0) à (R) est possible moyennant trois rotations successives:

Première rotation: on passe de $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ à $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_0)$ par une rotation d'angle ψ autour de \vec{k}_0 .

Deuxième rotation: on passe de $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_0)$ à $R_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{k})$ par une rotation d'angle θ autour de \vec{u} .

Troisième rotation: on passe de $R_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{k})$ à R (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) par une rotation d'angle φ autour de \vec{k} .

Les différentes rotations sont schématisées sur les figures suivantes:



Les trois angles ψ , θ et φ sont appelés angles d'Euler et chacun d'eux caractérise un mouvement particulier. Les noms qui leur sont attribués ont été empruntés de l'astronomie. Ainsi, ψ est un angle qui caractérise la précession (mouvement conique très lent effectué par l'axe de rotation de la terre), l'angle θ caractérise la nutation (léger balancement, de caractère périodique que subit l'axe de rotation de la terre) alors que l'angle φ caractérise la rotation propre du solide.

En utilisant la loi de composition des vecteurs rotations, on obtient:

$$\vec{\Omega}(R/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi}\vec{k}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{k}$$

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{cases} \dot{\theta} \cos \Psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \Psi \\ \dot{\theta} \sin \Psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \Psi \\ \dot{\Psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{cases} \quad \text{dans } (\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$$

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{cases} p \\ q \\ r \end{cases} \quad \text{dans } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\Psi} \sin \theta \sin \varphi \\ q = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi \\ r = \dot{\varphi} + \dot{\Psi} \cos \theta \end{cases}$$

2- Moment cinétique en O du solide : $\vec{\sigma}(O, S/R_0)$

On admet, pour raison de simplification, que le repère R lié au solide est un repère principal d'inertie pour (S):

$$II(O, S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{dans } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$O \text{ est un point fixe dans } R_0 \Rightarrow \vec{\sigma}(O, S/R_0) = II(O, S) \vec{\Omega}(S/R_0) = A p \vec{i} + B q \vec{j} + C r \vec{k}$$

3- Moment dynamique en O: $\vec{\delta}(O, S/R_0)$

$$O \text{ étant un point fixe dans } R_0 \Rightarrow \vec{\delta}(O, S/R_0) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(O, S/R_0)}{dt} \right|_{R_0}$$

$$\vec{\delta}(O, S/R_0) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(O, S/R_0)}{dt} \right|_R + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{\sigma}(O, S/R_0)$$

$$\vec{\delta}(O, S/R_0) = \begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr \\ B\dot{q} + (A-C)pr \\ C\dot{r} + (B-A)pq \end{cases} : \text{Formules d'Euler dans } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

4- Énergie cinétique:

L'énergie cinétique du solide, en rotation autour du point fixe O, par rapport à R_0 est:

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}^t(S/R_0) \cdot II(O, S) \cdot \vec{\Omega}(S/R_0) = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2)$$

III- Exemple de la toupie symétrique sur sa pointe fixe O

On suppose que (S) est une toupie de révolution autour de \vec{k} reposant par sa pointe fixe sur un sol horizontal.

Les repères $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (lié au solide) et $R_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{k})$ (non lié au solide) sont des repères principaux d'inertie.

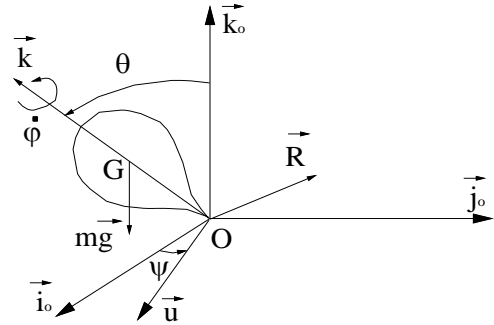
Pour simplifier les écritures, on exprimera la matrice d'inertie en O dans le repère R_2 (non lié au solide). Ainsi:

$$II(O, S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{u}, \vec{w}, \vec{k})$$

$$\text{Or } \vec{\Omega}(S/R_o) = \dot{\Psi} \vec{k}_o + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\phi} \vec{k}$$

$$\vec{\Omega}(S/R_o) = \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\Psi} \sin \theta \vec{w} + (\dot{\phi} + \dot{\Psi} \cos \theta) \vec{k} = p_1 \vec{u} + q_1 \vec{w} + r_1 \vec{k}$$

$$\vec{\sigma}(O, S/R_o) = II(O, S) \vec{\Omega}(S/R_o) = A p_1 \vec{u} + A q_1 \vec{w} + C r_1 \vec{k}$$



Remarque très importante

La base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{k})$ n'est pas liée au solide, mais on peut quand même utiliser les équations d'Euler sans grand changement car, à cause de la symétrie du solide par rapport à \vec{k} , \vec{u} et \vec{w} sont équivalents à \vec{i} et \vec{j} de point de vue des moments d'inertie.

$$\vec{\delta}(O, S/R_o) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(O, S/R_o)}{dt} \right|_{R_o} = \vec{\mathcal{M}}(O, \mathcal{F}_{\text{ext}} \rightarrow S)$$

$$\vec{\delta}(O, S/R_o) = \begin{cases} A \dot{p}_1 + (C - A) q_1 r_1 + A q_1 \dot{\phi} = \mathcal{M}_u & (a) \\ A \dot{q}_1 + (A - C) p_1 r_1 - A p_1 \dot{\phi} = \mathcal{M}_w & (b) \\ C \dot{r}_1 = \mathcal{M}_k & (c) \end{cases}$$

$$\text{Ici : } \begin{cases} p_1 = \dot{\theta} \\ q_1 = \dot{\Psi} \sin \theta \\ r_1 = \dot{\phi} + \dot{\Psi} \cos \theta \end{cases}$$

Remarque

Pour ne pas avoir à exprimer \mathcal{M}_u et \mathcal{M}_w on peut procéder différemment.

- On détermine le moment résultant par rapport à l'axe Oz de vecteur unitaire \vec{k} :

$$\mathcal{M}_k = (\vec{OG} \wedge m\vec{g}) \cdot \vec{k} + (\vec{OO} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{k} = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_k = 0$$

L'équation (c) $\Rightarrow C \dot{r}_1 = 0 \Rightarrow C r_1 = \text{cte} = C_1$

$$\boxed{C(\dot{\phi} + \dot{\Psi} \cos \theta) = C_1} \quad (1^{\text{ère}} \text{ constante du mouvement}) \quad (1)$$

La constante C_1 est déterminée par les conditions initiales.

Rappel

A et C ne dépendent pas du temps dans la base de R_2 .

Remarque

Le moment résultant des forces extérieures par rapport à l'axe Oz_o , de vecteur unitaire \vec{k}_o , est nul.

En effet: \vec{R} rencontre \vec{k}_o en O et $m\vec{g}$ est parallèle à \vec{k}_o .

Appliquons le théorème du moment cinétique:

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}(O, S/R_o)}{dt} \right|_{R_0} = \vec{\mathcal{M}}(O, \mathcal{F}_{\text{ext}} \rightarrow S) \Rightarrow \left. \frac{d\vec{\sigma}(O, S/R_o)}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{k}_o = \vec{\mathcal{M}}(O, \mathcal{F}_{\text{ext}} \rightarrow S) \cdot \vec{k}_o = 0$$

$$\left. \frac{d[\vec{\sigma}(O, S/R_o) \cdot \vec{k}_o]}{dt} \right|_{R_0} = 0 \Rightarrow \vec{\sigma}(O, S/R_o) \cdot \vec{k}_o = C_2$$

avec $\vec{k}_o = \cos \theta \vec{k} + \sin \theta \vec{w} \Rightarrow \boxed{A\dot{\Psi} \sin^2 \theta + C(\dot{\phi} + \dot{\Psi} \cos \theta) \cos \theta = C_2}$ (2)

La constante C_2 est déterminée par les conditions initiales.

Les constantes C_1 et C_2 permettent d'exprimer $\dot{\Psi}$ et $\dot{\phi}$ en fonction de θ seulement.

Les équations (1) et (2) $\Rightarrow \dot{\Psi} = \frac{C_2 - C_1 \cos \theta}{A \sin^2 \theta}$ (d)

$$\dot{\phi} = \frac{C_1(A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) - C_2 C \cos \theta}{AC \sin^2 \theta} \quad (e)$$

Il reste donc à trouver une équation différentielle contenant $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ et / ou $\dot{\Psi}$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique.

La réaction \vec{R} ne travaille pas car elle est appliquée en O dont la vitesse est nulle.

La seule force restante est le poids qui est une force conservative \Rightarrow conservation de l'énergie mécanique du solide.

$$E_c(S/R_o) + E_p(S) = E_m(S/R_o) = C_3$$

En effet:

$$\left. \frac{dE_m}{dt} \right|_{R_0} = P(\vec{R}/R_o) = \vec{R} \cdot \vec{v}(O/R_o) = 0$$

On a:

$$dE_p = -\delta W(m\vec{g}/R_o) = -m\vec{g} \cdot d\vec{OG} \Big|_{R_0} = -d(m\vec{g} \cdot \vec{OG})_{R_0}$$

$$E_p = -m\vec{g} \cdot \vec{OG} + \text{cte} = mg\vec{k}_o \cdot a\vec{k} + \text{cte} \Rightarrow \boxed{E_p = mga \cos \theta + \text{cte}}$$

La constante est nulle si $E_p = 0$ en $z = 0$ (origine des potentiels)

$$E_c(S/R_o) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}^t(S/R_o) \cdot \Pi(O, S) \cdot \vec{\Omega}(S/R_o) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R_o) \cdot \vec{\sigma}(O, S/R_o)$$

Donc:
$$E_c(S/R_o) = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} A (\dot{\Psi} \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} C (\dot{\phi} + \dot{\Psi} \cos \theta)^2$$

Conservation de l'énergie mécanique:

$$\boxed{\frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} A (\dot{\Psi} \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} C (\dot{\phi} + \dot{\Psi} \cos \theta)^2 + m g a \cos \theta = C_3} \quad (3)$$

Dans l'équation (3), on remplace $\dot{\Psi}$ par son expression de l'équation (d) et $\dot{\phi} + \dot{\Psi} \cos \theta$ par $\frac{C_1}{C}$ d'après l'équation (1). On aura alors:

$$\frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(C_2 - C_1 \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{C_1^2}{C} + m g a \cos \theta = C_3$$

$$\frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + f(\theta) = C_3 \quad (\text{équation différentielle en } \dot{\theta}^2 \text{ ne contenant que } \theta)$$

avec
$$f(\theta) = \frac{1}{2} \frac{(C_2 - C_1 \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{C_1^2}{C} + m g a \cos \theta$$

Allure du mouvement

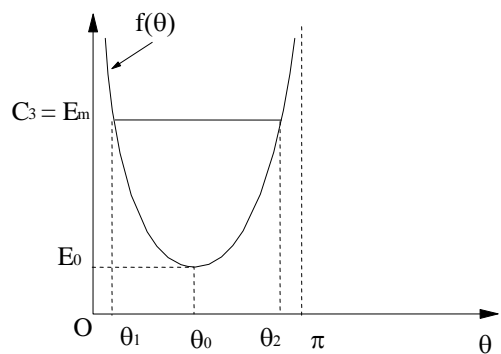
$$C_3 = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + f(\theta)$$

$f(\theta) \rightarrow \infty$ pour $\theta \rightarrow 0$ ou $\theta \rightarrow \pi$

$f(\theta)$ passe donc nécessairement par un minimum entre ces deux valeurs de θ .

$$\text{Or } \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 = C_3 - f(\theta) \geq 0 \Rightarrow f(\theta) \leq C_3 = E_m$$

Pour le niveau d'énergie $E_m = C_3$ (énergie totale de la toupie dans son mouvement par rapport à R_o), les seules valeurs de θ possibles sont comprises entre θ_1 et θ_2 . Ainsi, la partie de la courbe physiquement valable est celle qui vérifie $f(\theta) \leq E_m \Rightarrow \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.



Cas où $E_m > E_0$

Plusieurs cas sont à considérer selon le signe de $\dot{\Psi}$.

Or :
$$\dot{\Psi} = \frac{C_2 - C_1 \cos \theta}{A \sin^2 \theta} \Rightarrow \dot{\Psi} \text{ est de même signe que } C_2 - C_1 \cos \theta$$

Les constantes C_1 et C_2 étant fixées par les conditions initiales, il en est de même pour θ_1 et θ_2 qui ne dépendent que de C_1 , C_2 et C_3 [en résolvant $C_3 = F(\theta)$].

a- $C_2 - C_1 \cos \theta > 0$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

Dans ce cas, $\dot{\Psi}$ garde un signe constant \Rightarrow le mouvement se fait toujours dans le même sens.

En représentant, par exemple, la trajectoire de G sur la sphère de rayon OG (sphère car O est fixe), on obtient la trajectoire de la figure 1.

b- $C_2 - C_1 \cos \theta$ change de signe entre θ_1 et θ_2

Il en résulte que $\dot{\Psi}$ change également de signe pour une valeur de $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \Rightarrow \Psi$ tantôt croît, tantôt décroît, d'où la représentation de la figure 2.

c- $C_2 - C_1 \cos \theta$ s'annule sans changer de signe

Si $C_2 - C_1 \cos \theta$ s'annule pour une valeur θ_n de θ sans changer de signe, la courbe obtenue est différente mais difficile à différencier de celle représentée en (a) sauf si $\theta_n = \theta_1$ ou $\theta_n = \theta_2$.

Par exemple, si $\theta_n = \theta_1$ on aura à l'instant où cette condition est réalisée, un point G avec une vitesse nulle et sa trajectoire présente des points de rebroussement comme indiqué sur la figure 3.

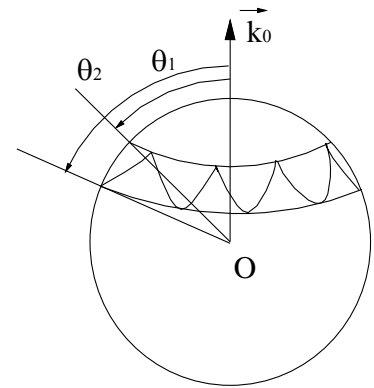


Figure 1: $C_2 - C_1 \cos \theta$ s'annule sans changer de signe

Cas où $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_0$

Dans ce cas, $\theta = \theta_0 = \text{cte} \Rightarrow \dot{\theta} = 0$ et le mouvement est stationnaire en $\theta \Rightarrow \dot{\Psi}$ et $\dot{\phi}$ sont des constantes lors du mouvement. Ainsi, la toupie précessionne et tourne uniformément sur elle-même.

Les cas singuliers ($\theta = 0$ ou $\theta = \pi$) correspondent à une toupie “dormante” en position haute ou basse.

VI. Solide mobile autour d'un axe fixe

1. Exemple

On considère un solide (S) mobile dans R_0 autour d'un axe fixe (Δ). On a intérêt à prendre le repère R_1 lié au solide dont l'origine $O_1 \in (\Delta)$ et dont l'un de ses axes (axe \vec{k}_1 par exemple), est un vecteur directeur de (Δ).

Il en résulte que $\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)$ et

l'expression de ce vecteur est particulièrement simple :

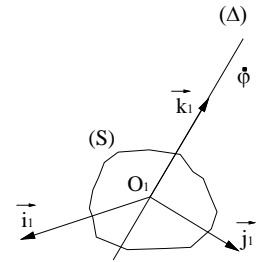
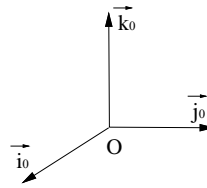
$$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \omega(t)\vec{k}_1 = \dot{\phi}\vec{k}_1$$

$$\vec{v}(O_1/R_0) = \vec{0} \text{ (par choix)}$$

$$\vec{\sigma}(O_1, S/R_0) = \Pi(O_1, S)\vec{\Omega}(S/R_0) \quad (O_1 \text{ fixe})$$

$$\vec{\sigma}(O_1, S/R_0) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E\omega \\ -D\omega \\ C\omega \end{pmatrix}_{\text{dans } R_1}$$

$$\vec{\sigma}(O_1, S/R_0) = \omega(-E\vec{i}_1 - D\vec{j}_1 + C\vec{k}_1)$$



Remarque

Si la rotation du solide est uniforme ($\omega = \text{cte}$) $\Rightarrow \vec{\sigma}(O_1, S/R_0)$ est un vecteur constant dans R_1 .

2. Énergie cinétique

Le point O_1 étant fixe dans $R_0 \Rightarrow E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R_0) \cdot \vec{\sigma}(O_1, S/R_0) = \frac{1}{2} C\omega^2$

Soit \vec{f} la résultante des forces agissant sur (S) (y compris les forces de contact).

$$\left. \frac{dE_c(S/R_0)}{dt} \right|_{R_0} = \vec{f} \cdot \vec{v}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \cdot \vec{\mathcal{M}}_{O_1} \quad (\forall O_1 \text{ lié au solide})$$

$$C\omega\dot{\omega} = \omega\vec{k}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_{O_1} = \omega\mathcal{M}_\Delta \Rightarrow C\dot{\omega} = \mathcal{M}_\Delta$$

\mathcal{M}_Δ : est le moment des forces extérieures par rapport à l'axe (Δ). Le calcul de \mathcal{M}_Δ permettra de connaître $\dot{\omega}$ donc $\omega(t)$ si l'intégration est possible puis, $\phi(t)$ par une nouvelle intégration.

$\phi(t)$: angle repérant la rotation du solide autour de l'axe (Δ).

3. Mouvement du centre de gravité

La trajectoire de G est connue : c'est un cercle centré sur l'axe de rotation.

Le théorème du centre de masse $\Rightarrow m\vec{\gamma}(G/R_0) = \vec{f}$

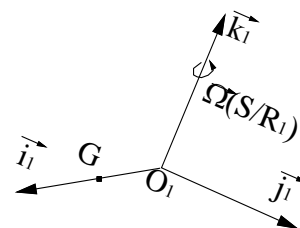
Soit $\vec{f} = \vec{f}_c + \vec{f}_a$

\vec{f}_c : résultante des forces extérieures de liaison ou de contact.

\vec{f}_a : résultante des forces autres que celles de liaison.

On peut toujours choisir O_1 et R_1 de telle sorte que $G \in O_1x_1$.

Posons $\vec{O_1G} = a\vec{i}_1$



$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(G/R_0) &= \underbrace{\vec{\gamma}(G/R_1)}_{=0} + \underbrace{\vec{\gamma}(O_1/R_0)}_{=0} + \frac{d\vec{\Omega}(S/R_0)}{dt} \bigg|_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1G} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge (\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1G}) + \underbrace{\vec{\gamma}_c(G)}_{=0} \\ \vec{\Omega}(S/R_0) &= \omega \vec{k}_1 \text{ et } \frac{d\vec{\Omega}(S/R_0)}{dt} \bigg|_{R_0} = \dot{\omega} \vec{k}_1 \\ \vec{\gamma}(G/R_0) &= a\dot{\omega} \vec{j}_1 + a\omega^2 \vec{k}_1 \wedge \vec{j}_1 = a\dot{\omega} \vec{j}_1 - a\omega^2 \vec{i}_1\end{aligned}$$

D'où les forces de liaison:

$$\vec{f}_c = m\vec{\gamma}(G/R_0) - \vec{f}_a = ma(\dot{\omega} \vec{j}_1 - \omega^2 \vec{i}_1) - \vec{f}_a$$

Ainsi, même pour une rotation uniforme ($\dot{\omega} = 0$), le terme $ma\omega^2$ peut atteindre des valeurs très élevées conduisant à des valeurs élevées de \vec{f}_c , donc des efforts considérables au niveau des liaisons (pivots, paliers, etc. ...) pour les machines tournant à grande vitesse.

Remède à ce problème

C'est l'équilibrage statique qui consiste à ramener G sur l'axe de rotation ($a = 0$)

$$\Rightarrow m\vec{\gamma}(G/R_0) = 0 \Rightarrow \vec{f} = \vec{f}_c + \vec{f}_a = \vec{0}$$

Le torseur des forces extérieures, est alors équivalent à un couple puisque sa résultante générale est nulle.

Équilibrage dynamique

Supposons une machine tournant à la vitesse ω constante et déjà équilibrée statiquement.

$\omega = \text{cte} \Rightarrow \vec{\sigma}(O_1, S/R_0) = \omega(-E\vec{i}_1 - D\vec{j}_1 + C\vec{k}_1)$ est un vecteur constant dans R_1 .

$$\frac{d\vec{\sigma}(O_1, S/R_0)}{dt} \bigg|_{R_0} = \underbrace{\frac{d\vec{\sigma}(O_1, S/R_0)}{dt} \bigg|_{R_1}}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{\sigma}(O_1, S/R_0)$$

D'après le théorème du moment cinétique: $\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{\sigma}(O_1, S/R_0) = \vec{\mathcal{M}}_{O_1} = \dot{\vec{\sigma}}(O_1, S/R_0)$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_{O_1} &\perp \vec{\Omega}(R_1/R_0) \\ \vec{\mathcal{M}}_{O_1} &\perp \vec{\sigma}(O_1, S/R_0) \end{aligned} \right\} \text{ et } \|\vec{\mathcal{M}}_{O_1}\| = \omega^2 \sqrt{D^2 + E^2}$$

$\vec{\mathcal{M}}_{O_1}$ tend à désaxer le solide (le faire tourner autour d'un axe \perp à l'axe de rotation (Δ)).

Comme $\|\vec{\mathcal{M}}_{O_1}\|$ est proportionnel à $\omega^2 \Rightarrow$ les efforts sont nuisibles à grande vitesse.

Remède à ce problème: rendre $\|\vec{\mathcal{M}}_{O_1}\| = 0 (\forall \omega^2) \Rightarrow E = D = 0 \Rightarrow$ l'axe (Δ) est un axe principal d'inertie.

Dans ce cas $\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{\sigma}(O_1, S/R_0) = \vec{0}$ (vecteurs colinéaires)

Donc $\vec{\sigma}(O_1, S/R_0)$ est // à l'axe de rotation: c'est l'équilibrage dynamique.

BIBLIOGRAPHIE

- Mémoires couronnés par l'académie royale des sciences et belles-Lettres de Bruxelles, tome XI, chapitre VI, 1873.
- Luis Figuier, Les Merveilles de la science ou description populaire des inventions modernes, Librairie Furne, Editeurs Jouvot et C^{ie}, Tome I des suppléments, 1891
- P.Duhem, L'évolution de la mécanique, A. Hermann, Paris, 1905.
- R. Bricard, Calcul Vectoriel, Armand colin, Paris, 1929.
- P.Costabel, Histoire du moment d'inertie, Revue d'histoire des sciences et leurs applications, tome3, n^o4, pp. 315-336, 1950.
- F. Halbwachs, Angles d'Euler, rotation instantanée et opérateurs quantiques de rotation dans l'espace temps, Volume 16, Partie 3 de Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1959.
- F. Balibar, Galilée, Newton lus par Einstein, PUF,1984.
- C. Chauviré, L'essayeur de Galilée, Belles Lettres, 1989.
- AGATI, LEROUGE et ROSSETTO, Liaisons, mécanismes et assemblages, DUNOD 1994.
- S. Pommier & Y. Berthand, Mécanique générales, Dunod, Paris, 2010.
- M.Hasnaoui et A. EL Maâchai, cours de mécanique 2, Première édition, FSSM, 2010.

Sites WEB








<http://www.apprendre-en-ligne.net/MADIMU2/GEOME/GEOME3.PDF>
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit vectoriel](https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_vectoriel)
<https://fr.wikipedia.org/wiki/Torseur>
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Les Principes de la philosophie](https://fr.wikipedia.org/wiki/Les_Principes_de_la_philosophie)
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Théories scientifiques de Descartes](https://fr.wikipedia.org/wiki/Théories_scientifiques_de_Descartes)
<https://fr.wikipedia.org/wiki/Cinématique>
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Axe instantané de rotation](https://fr.wikipedia.org/wiki/Axe_instantané_de_rotation)
<https://fr.wikipedia.org/wiki/Barycentre>
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Eléments d'Euclide](https://fr.wikipedia.org/wiki/Eléments_d'Euclide)
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Moment cinétique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Moment_cinétique)
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Energie cinétique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Energie_cinétique)
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Action mécanique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Action_mécanique)
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Référentiel galiléen](https://fr.wikipedia.org/wiki/Référentiel_galiléen)
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi de Coulomb](https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Coulomb)
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Liaisons mécaniques](https://fr.wikipedia.org/wiki/Liaisons_mécaniques)

Mécanique des Systèmes de Solides Indéformables

M. BOURICH

Ce cours de mécanique des systèmes de solides indéformables s'adresse aux étudiants en tout domaine faisant intervenir la mécanique des systèmes de solides indéformables. Mais il est tout autant destiné aux étudiants des classes préparatoires de la deuxième année de l'école nationale des sciences appliquées. Il peut être consulté avec profit par les étudiants en DEUG.

Ce manuel expose les principaux concepts de la mécanique des systèmes de solides indéformables avec une démarche pédagogique innovante incluant les événements clés marquant l'histoire de la mécanique. L'ensemble du cours est construit en sept chapitres:

-  Calcul vectoriel-Torseurs,
-  Cinématique du solide,
-  Géométrie des masses,
-  Cinétique du solide,
-  Dynamique du solide,
-  Liaisons-Forces de liaison,
-  Mouvement d'un solide autour d'un point ou d'un axe fixes.

M. BOURICH, Docteur ès Sciences, Enseignant chercheur à l'École Nationale des Sciences Appliquées-Marrakech, Spécialité : Énergétique, membre du laboratoire Mécanique des Fluides et Énergétique de la Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech.

On ne peut rien apprendre aux gens. On peut seulement les aider à découvrir qu'ils possèdent déjà en eux tout ce qui est à apprendre.

Citation de **G. Galilée**