Université de Lomé

TD de MTH102

1. Soit $\star$ la loi définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \star y = x + y - xy$.
Montrer que la loi $\star$ est interne , associative, admet un élément neutre et que tout élément de $\mathbb{R}$,sauf pour une valeur que l'on précisera, est symétrisable.

2. Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par : $(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + \dfrac{y}{x'})$
Montrer que la loi $*$ sur G est associative et que $(G,*)$ admet un élément neutre puis que tout élément de $(G,*)$ est symétrisable.

3. Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par : $(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y)$
Montrer que la loi $*$ sur G est associative et que $(G,*)$ admet un élément neutre puis que tout élément de $(G,*)$ est symétrisable.

4. Soit $G = \{a,b,c,d\}$ un groupe noté multiplicativement. Compléter la table de G suivante:

$\curvearrowright$	a	b	c	d
a	d	c		
b	c			
c			c	
d		a		

5. Soient $x_1,\ x_2,\ x_3$ les racines de $X^3 - 2X^2 + X + 3$, un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.
   (a) Calculer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ puis $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.
   (b) Déterminer un polynôme du troisième degré dont les trois racines sont x_1^2, x_2^2 et x_3^2.

6. Trouver le quotient de degré 4 dans la division par rapport aux puissances croissantes de f par g, $f(X) = 1 - abX^2$, $g(X) = 1 - (a+b)X + abX^2$.

7. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de $P = X^4 + pX^2 + qX + r$ avec $r \neq 0$. Calculer
$u = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4}$ et $v = \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{1}{x_3^2} + \dfrac{1}{x_4^2}$ en fonction de p, q et r en utilisant la formule de Viète.

8. Décomposer en éléments simples de $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles suivantes:
$f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 + 3x + 2}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$

9. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples: $\dfrac{3}{X^3 + 1}$ sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$, $\dfrac{X^3}{X^3 - 1}$ sur $\mathbb{R}$, $\dfrac{X^2 + X + 1}{(X-1)^2(X+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

10. Soit σ une permutation de $\mathcal{S}_{10}$ définie par: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 2 & 1 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.
    (a) Décomposer σ en produit de cycles disjoints puis en produit de transpositions.
    (b) Calculer $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ puis sa signature $\varepsilon(\sigma)$.
    (c) Déterminer σ^{-1} puis σ^{2020} .
    (d) Déterminer la permutation μ telle que $\sigma\mu = (1273)$.

11. (a) Soient p un nombre premier et q un entier tels que $0 < q < p$. Démontrer que C_p^q est divisible par p.
    (b) Démontrer que dans un anneau commutatif A de caractéristique p, pour toute suite finie $a_1, a_2, ..., a_k$ d'éléments de A, on a $(a_1 + a_2 + ... + a_k)^p = a_1^p + a_2^p + ... + a_k^p$. En déduire que pour tout entier positif k, on a $k^p \equiv k (modp)$.

12. Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.On définit $\mathbb{Z}\sqrt{3} = \{a + b\sqrt{3} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
    (a) Montrer que $\mathbb{Z}\sqrt{3}$ est un sous anneau de $\mathbb{R}$.Est-il un corps ?
    (b) Soit $I = \{2p + 2q\sqrt{3} \ / \ p, q \in \mathbb{Z}\}$.Montrer que I est un idéal bilatère de $\mathbb{Z}\sqrt{3}$.
    (c) Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}\sqrt{3}/I$ est un ensemble fini.Donner la table de multiplication de cet anneau quotient.
    (d) $\mathbb{Z}\sqrt{3}/I$ est-il un corps ? Trouver un idéal , non trivial,de $\mathbb{Z}\sqrt{3}/I$.
    (e) Montrer que tout élément $a+b\sqrt{3}$ de $\mathbb{Z}\sqrt{3}$ est racine d'une équation polynomiale (E), de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$.Trouver la seconde racine.
    (f) Montrer que l'application $f : a + b\sqrt{3} \mapsto$ la seconde racine de (E) , de $\mathbb{Z}\sqrt{3}$ dans $\mathbb{Z}\sqrt{3}$ est un isomorphisme d'anneaux.