Application de la loi de Gauss

Séance 5 en Distanciel – PHY104 : Electrostatique et Electrocinétique

Ing. Agbassou Guenoukpati, Département du Génie Electrique, ENSI, Université de Lomé, Togo

5.1.Objectif du cours

- Au cours de cette présentation, vous apprendrez ce qui suit :
- Notion d'invariances par translation et rotation ;
- Invariances sur la distribution fil infini chargé ;
- Symétrie et conséquences

5.2.Flux du Champ électrostatique

Dans cette conférence, nous présentons la "loi de Gauss" qui se trouve être équivalente à la loi de Coulomb. Cependant, Dans certaines circonstances, elle s'avère beaucoup plus facile à traiter que la loi de Coulomb. Avant En vertu de la loi, nous allons introduire le concept de "flux" d'un champ électrique. Comme cela a été mentionné au cours de notre discussion sur le calcul vectoriel, le concept de flux découle de la dynamique des fluides. Si nous avons un s'écoulant sur une surface, le flux de fluide à travers la surface ne dépend pas seulement de la vitesse du fluide, elle dépend également de l'ampleur de la zone et de l'orientation de la zone par rapport à la direction de la vitesse Nous avions vu précédemment qu'une surface infinitésimale peut être considérée comme un vecteur dont la grandeur est égale à l'aire et à la direction de la normale à la surface vers l'extérieur.

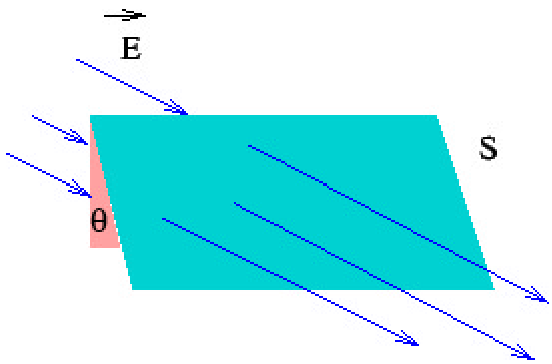


Figure 1

Dans la figure ci-dessus, nous voyons des lignes de champ électrique traversant une surface S, la direction du champ électrique faisant un angle θ avec la normale à la surface. Le flux du champ électrique est défini comme suit.

$$\phi_S = \int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Pour effectuer la somme, il faut connaître le champ électrique en chaque point de la surface et l'angle que fait le champ avec la normale extérieure à ce point. Si le champ électrique est constant, le flux devient

$$\phi_S = \int_S E \cdot \cos(\theta) \cdot dS$$

5.3.Notion d'angle solide

Nous connaissons le concept d'angle en deux dimensions. En gros, un angle est une mesure de la divergence ou de l'écart entre deux lignes droites. Supposons que les lignes se rencontrent au point O. Avec O comme centre, si nous traçons un arc de cercle de rayon R, les deux lignes droites contiendront un arc de cercle la mesure de l'angle (en mesure radian) est alors le rapport de la longueur L de l'arc sur le rayon du cercle

$$\theta = \frac{L}{R}$$

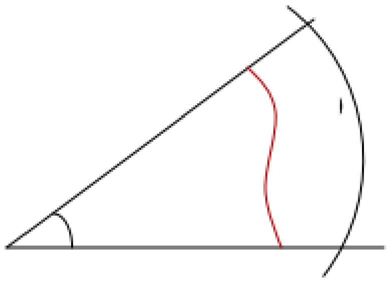


Figure 2

Notez que l'arc de cercle se trouve dans la direction transversale des deux lignes. Supposons, à la place, que nous tracions une courbe arbitraire (indiquée en rouge) qui coupe les deux lignes, la longueur L devant être prise le long de la projection transversale de cette courbe. Notez que, étant le rapport de deux longueurs, un angle est sans dimension. Cependant, nous le mesurons conventionnellement en termes d'unité qui peut être un degré, un radian ou un grade.

Le concept d'angle solide est une simple extension de ce concept en trois dimensions. L'angle solide est l'angle qu'une zone arbitraire forme en un point. Il s'agit de décrire un cône circulaire droit de longueur R autour du point P. Le rapport entre la surface transversale interceptée par le cône et le carré de la distance à partir du point P est une mesure de l'angle solide. Comme dans le cas d'un angle en deux dimensions, nous devons prendre une zone transversale. Comme l'angle ordinaire, l'angle solide est sans dimension, mais il est mesuré dans une unité appelée "stéradian

Définition : l'angle solide élémentaire d**Ω**, délimité par un cône coupant un élément de surface élémentaire dS située à une distance r de son sommet O vaut

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

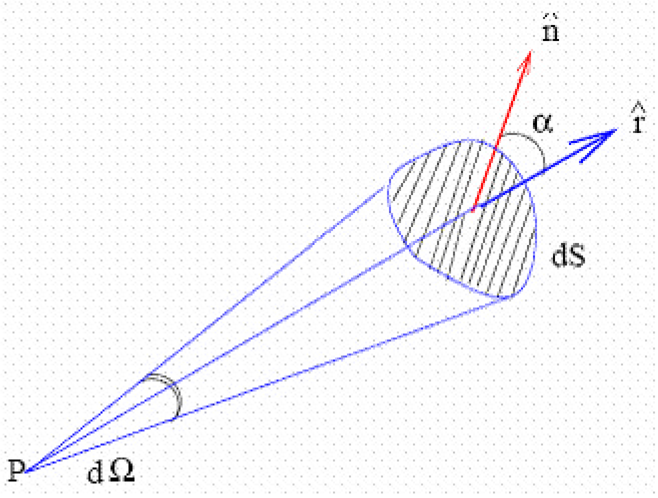


Figure 3

En coordonnées sphériques, la surface élémentaire à r constant vaut

$$dS = r^2 \sin(\theta) d\theta \cdot d\varphi$$

L'angle solide élémentaire s'écrit alors

$$d\Omega = \sin(\theta) d\theta \cdot d\varphi$$

Ainsi, l'angle solide délimité par un cône de révolution, d'angle α au sommet

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin(\theta) d\theta$$

Le demi-espace, engendré avec $\alpha = \pi/2$ radians correspond donc à un angle solide de 2π stéradians, tandis que l'espace entier correspond à un angle solide de 4π pour $\alpha = \pi$

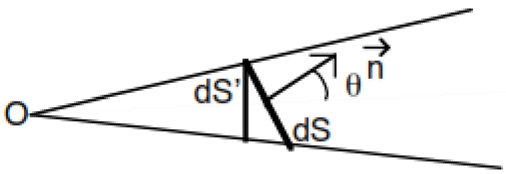


Figure 4

D'une façon générale, le cône (ou le faisceau lumineux de l'exemple ci-dessus) peut intercepter une surface quelconque, dont la normale $\vec{n}$ fait un angle θ□ avec la génératrice de vecteur directeur $\vec{u}$ L'angle solide élémentaire est alors défini par

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS}\cdot\vec{u}}{r^2} = \frac{dS\vec{n}\cdot\vec{u}}{r^2} = \frac{dS\cdot\cos(\theta)}{r^2} = \frac{dS'}{r^2}$$

où dS' est la surface effective (qui, par exemple, serait « vue » par un observateur situé en O).

5.4. Théorème de Gauss

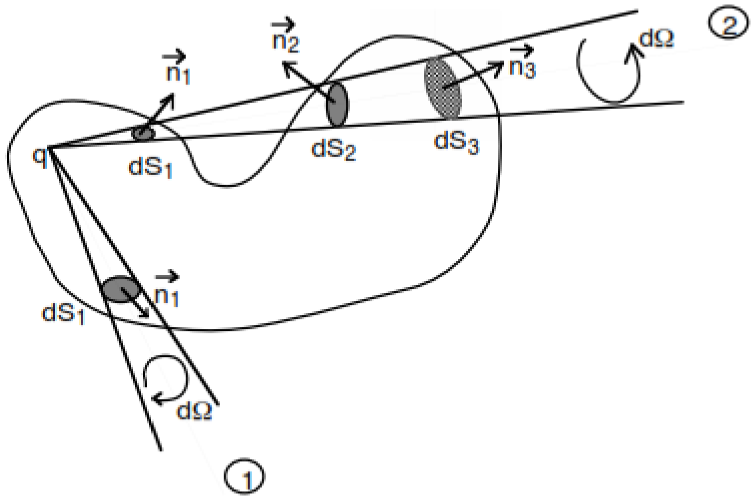
On considère maintenant une charge ponctuelle q située en un point O de l'espace. Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$, créé par cette charge, à travers une surface élémentaire quelconque orientée est par définition

$$d\phi = \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = E\vec{n}\cdot\overrightarrow{dS}$$

Par convention, on oriente le vecteur unitaire □ , normal à la surface dS, vers l'extérieur, c'est à dire dans la direction qui s'éloigne de la charge q. Ainsi, pour q>0, le champ □ est dirigé dans le même sens que □ et l'on obtient un flux positif. A partir de l'expression du champ créé par une charge ponctuelle, on obtient alors

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{r^2}dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

c'est à dire un flux dépendant directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface et non de sa distance r (notez bien que dΩ>0, q pouvant être positif ou négatif). Ce résultat est une simple conséquence de la décroissance du champ électrostatique en 1/ □ : on aurait le même genre de résultat avec le champ gravitationnel.



Que se passe-t-il lorsqu'on s'intéresse au flux total à travers une surface (quelconque) fermée ? Prenons le cas illustré dans la figure ci-dessous. On a une charge q située à l'intérieur de la surface S (enfermant ainsi un volume V), surface orientée (en chaque point de S, le vecteur □ est dirigé vers l'extérieur). Pour le rayon 1, on a simplement

$$d\phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

mais le rayon 2 traverse plusieurs fois la surface, avec des directions différentes. On aura alors une contribution au flux

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{n_1}}{r_1^2}dS_1 + \frac{\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{n_2}}{r_2^2}dS_2 + \frac{\overrightarrow{u_3}\cdot\overrightarrow{n_3}}{r_3^2}dS_3\right)$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(d\Omega - d\Omega + d\Omega\right)$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

Ce résultat est général puisque, la charge se trouvant à l'intérieur de S, un rayon dans une direction donnée va toujours traverser S un nombre impair de fois. En intégrant alors sur toutes les directions (c'est à dire sur les 4π stéradians), on obtient un flux total. En vertu du principe de superposition, ce résultat se généralise aisément à un ensemble quelconque de charges.

$$\oiint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Théorème de Gauss :

le flux du champ électrique à travers une surface fermée orientée quelconque est égal, dans le vide, à $1/\varepsilon_0$ □ fois la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface

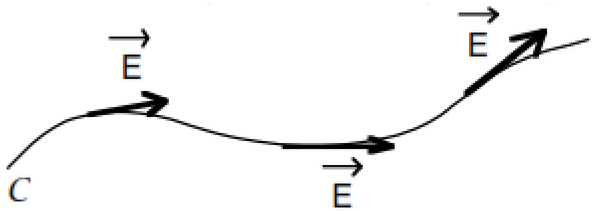
$$\oiint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Remarques

1. Du point de vue physique, le théorème de Gauss fournit le lien entre le flux du champ électrostatique et les sources du champ, à savoir les charges électriques.
2. La démonstration précédente utilise la loi de Coulomb qui, elle, est un fait expérimental et n'est pas démontrée. Inversement, on peut retrouver la loi de Coulomb à partir du théorème de Gauss : c'est ce qui est fait dans l'électromagnétisme, dans lequel le théorème de Gauss constitue en fait une loi fondamentale, non démontrable (l'une des quatre équations de Maxwell)

Le concept de *lignes de champ* (également appelées lignes de force) est très utile pour se faire une représentation spatiale d'un champ de vecteurs.

Définition : Une ligne de champ d'un champ de vecteur quelconque est une courbe C définie dans l'espace telle qu'en chacun de ses points le vecteur y soit tangent



Considérons un déplacement élémentaire dl le long d'une ligne de champ électrostatique C. Le fait que le champ E soit en tout point de C parallèle à dl s'écrit

$$\vec{E} \wedge \vec{dl} = 0$$

En coordonnées cartésiennes $\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ et les lignes de champ sont calculée en résolvant

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées cylindriques $\vec{dl} = dr\vec{u_r} + rd_\theta \vec{u_\theta} + dz\vec{u_z}$ et l'équation des lignes de champ devient

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées sphériques, $\vec{dl} = dr\vec{u_r} + rd_\theta \vec{u_\theta} + r\sin(\theta)\, d\varphi\vec{u_\varphi}$ et l'équation des lignes de champ devient

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin(\theta)\, d\varphi}{E_\varphi}$$

Soit un contour fermé C tel que le champ électrostatique y soit tangent, c'est à dire tel que $\vec{E} \perp \vec{dl}$ où $\vec{dl}$ est un vecteur élémentaire de C. En chaque point de C passe donc une ligne de champ particulière. L'ensemble de toutes les lignes de champ dessine alors une surface dans l'espace, une sorte de tube. Par construction, le flux du champ électrostatique est nul à travers la surface latérale du tube, de telle sorte que le flux est conservé : ce qui rentre à la base du tube ressort de l'autre côté. On appelle un tel « rassemblement » de lignes de champ un tube de flux.

Références

[1] Electromagnétisme PCSIP. Krempf - Editions Bréal 2003
[2] Physique Cours compagnon PCSI T. Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009
[3] Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI - JM.Brébec - Editions Hachette
[4] Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique - D.Cordier – Editions Dunod
[5] La physique en fac cours et exercices corrigés - Emile Amzallag - Joseph Cipriani - Jocelyne Ben Aïm - Norbert Piccioli
[6] http://wiki.sillages.info/index.php/Coordonnées_polaires_et_cylindriques
[7] http://epiphys.emn.fr
[8] http://turrier.fr/maths-physique/coordonees/systemes-de-coordonnees.html
[9] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/
[10] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/

Pour le Calcul de champ par méthode intégrale : exemple du fil infini suivez

Lien web https://www.physagreg.fr/electromagnetisme-11-champ-electrostatique.php

lien vidéo : https://youtu.be/zitm54XT6i0