**Circulation du champ électrostatique**

**Séance 6 en Distanciel** – PHY104 : Electrostatique et Electrocinétique

Ing. Agbassou Guenoukpati, Département du Génie Electrique, ENSI, Université de Lome, Togo

### 6.1. Objectif du cours

- Au cours de cette présentation, vous apprendrez ce qui suit :
- Notion d'invariances par translation et rotation ;
- Invariances sur la distribution fil infini chargé ;
- Symétrie et conséquences

### 6.2. Notion de potentiel électrostatique

On va démontrer ci-dessous qu'il existe un scalaire $V$ , appelé potentiel électrostatique, définit dans tout l'espace et qui permet de reconstruire le champ électrostatique $\vec{E}$ . Outre une commodité de calcul (il est plus facile d'additionner deux scalaires que deux vecteurs), l'existence d'un tel scalaire traduit des propriétés importantes du champ électrostatique. Mais tout d'abord, est-il possible d'obtenir un champ de vecteurs à partir d'un champ scalaire.

Prenons un scalaire $V(M)$ défini en tout point M de l'espace (on dit un champ scalaire). Une variation $dV$ de ce champ lorsqu'on passe d'un point M à un point M' infiniment proche est alors fourni par la différentielle totale

$$dV(M) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = \overrightarrow{grad}V \cdot \overrightarrow{dOM}$$

où le vecteur $\overrightarrow{grad}V$ est le gradient du champ scalaire $V$ et constitue un champ de vecteurs défini partout. Ses composantes dans un système de coordonnées donné sont obtenues très simplement. Par exemple, en coordonnées cartésiennes, on a $\overrightarrow{dOM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$dV(M) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

d'où l'expression suivante pour le gradient en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

| | cartésiennes | cylindriques | sphériques |
|---|---|---|---|
| | $\overrightarrow{gradV} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$ | $\overrightarrow{gradV} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$ | $\overrightarrow{gradV} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$ |

Un déplacement $dOM = MM'$ le long d'une courbe (ou surface) définie par $V = cte$ correspond à $dV = 0$, ce qui signifie que $\overrightarrow{gradV}$ est un vecteur qui est perpendiculaire en tout point à cette courbe (ou surface).

Par ailleurs, plus les composantes du gradient sont élevées et plus il y a une variation rapide de $V$. Or, c'est bien ce qui semble se produire, par exemple, au voisinage d'une charge électrique $q$ : les lignes de champ électrostatique sont des droites qui convergent $(q \prec 0)$ ou divergent $(q \succ 0)$ toutes vers la charge. Il est donc tentant d'associer le champ $E$ (vecteur) au gradient d'une fonction scalaire $V$.

En fait, depuis Newton (1687) et sa loi de gravitation universelle, de nombreux physiciens et mathématiciens s'étaient penché sur les propriétés de cette force radiale en ${}^{1}\!/_{r^2}$. En particulier Lagrange avait ainsi introduit en 1777 une fonction scalaire appelée potentiel, plus « fondamentale » puisque la force en dérive. C'est Poisson qui a introduit le potentiel électrostatique en 1813, par analogie avec la loi de Newton.

Définition : le potentiel électrostatique $V$ est relié au champ électrostatique $\vec{E}$ par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{gradV}$$

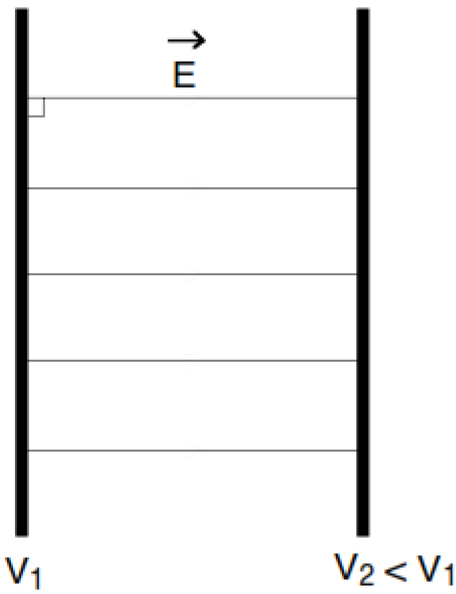
***Remarques***

Le signe moins est une convention liée à celle adoptée pour l'énergie électrostatique.

La conséquence de cette définition du potentiel est $dV(M) = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dOM}$ pour un déplacement infinitésimal quelconque

**Définition** : la circulation du champ électrostatique le long d'une courbe allant de A vers B est

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int dV = V(A) - V(B)$$




***Remarques*** :

- Cette circulation est conservative : elle ne dépend pas du chemin suivi
- La circulation du champ électrostatique sur une courbe fermée (on retourne en A) est nulle. On verra plus loin que ceci est d'une grande importance en électrocinétique
- D'après la relation ci-dessus, le long d'une ligne de champ, c'est à dire pour $\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} \succ 0$ on $V(A) \succ V(B)$
- Les lignes de champ électrostatiques vont dans le sens des potentiels décroissants.

### 6.3. Potentiel créé par une charge ponctuelle

Nous venons de voir l'interprétation géométrique du gradient d'une fonction scalaire et le lien avec la notion de circulation. Mais nous n'avons pas encore prouvé que le champ électrostatique pouvait effectivement se déduire d'un potentiel $V$. Considérons donc une charge ponctuelle q située en un point O. En un point M de l'espace, cette charge crée un champ électrostatique $\vec{E}$. Le potentiel électrostatique est alors donné par :

$$dV(M) = -\vec{E}\cdot d\overrightarrow{OM} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{dr}}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

c'est à dire, après intégration suivant $r$,

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + V_0$$

La constante d'intégration est en général choisie nulle (le potentiel s'annule à l'infini). L'unité du potentiel est le Volt. En unités du système international (SI) le Volt vaut

$$[V] = [EL] = ML^2T^{-3}I^{-1}$$

Si l'on veut se former une représentation du potentiel, on peut remarquer qu'il mesure le degré d'électrification d'un conducteur. Il y a en fait une analogie formelle entre d'un côté, potentiel $V$ et température T d'un corps, et de l'autre, entre charge $Q$ et chaleur déposée dans ce corps

### 6.4. Potentiel créé par un ensemble de charges

Considérons maintenant un ensemble de $n$ charges ponctuelles $q_i$ l'espace. En vertu du principe de superposition, le champ électrostatique total $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{E_i}$ est somme vectorielle des champs $\overrightarrow{E_i}$ réés par chaque charge $q_i$ On peut donc définir un potentiel électrostatique total $V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i(M)$ tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ soit encore vérifié. En utilisant l'expression du potentiel créé par une charge unique, on obtient

$$V(M)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}+V_0$$

où $r_i$ est la distance entre la charge $q_i$ et le point M. Lorsqu'on s'intéresse à des échelles spatiales qui sont très grandes par rapport aux distances entre les charges $q_i$, on peut faire un passage à la limite continue et remplacer la somme discrète par une intégral $\sum_i q_i(P_i)\rightarrow\int dq(P)$ ou $P$ est un point courant autour duquel se trouve une charge « élémentaire » $dq$. Le potentiel électrostatique créé par une distribution de charges continue est alors

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}+V_0$$

où $r = PM$ est la distance entre le point M et un point P quelconque de la distribution de charges

***Remarques :***

Pour des distributions de charges linéique λ, surfacique s et volumique ϱ, on obtient Respectivement

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda dl}{r}+V_0$$

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{\sigma dS}{r}+V_0$$

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho dS}{r}+V_0$$

Noter que l'on ne peut pas évaluer le potentiel (ni le champ d'ailleurs) sur une particule en utilisant l'expression discrète (c'est à dire pour $r_i = 0$ ). Par contre, on peut le faire avec une distribution continue : c'est dû au fait que $\frac{dq}{r}$ converge lorsque $r_i \to 0$

**Références**

[1] Electromagnétisme PCSIP. Krempf - Editions Bréal 2003
[2] Physique Cours compagnon PCSI T. Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009
[3] Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI - JM.Brébec - Editions Hachette
[4] Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique - D.Cordier – Editions Dunod
[5] La physique en fac cours et exercices corrigés - Emile Amzallag - Joseph Cipriani - Jocelyne Ben Aïm - Norbert Piccioli
[6] http://wiki.sillages.info/index.php/Coordonnées_polaires_et_cylindriques
[7] http://epiphys.emn.fr
[8] http://turrier.fr/maths-physique/coordonees/systemes-de-coordonnees.html
[9] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/
[10] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/
[11] https://www.physagreg.fr/electromagnetisme-11-champ-electrostatique.php
[12] https://youtu.be/zitm54XT6i0