Chapitre 6

Les oscillateurs

Sommaire

Nous abordons dans ce chapitre l'étude des oscillateurs. Nous allons commencer par les oscillateurs harmoniques. Ceux ci décrivent des comportements oscillants dus à une nature intrinsèquement oscillatoire (comme c'est le cas d'un mouvement d'une masse accrochée à un ressort) ou à un mouvement au voisinage d'une position d'équilibre (comme dans le cas d'une liaison moléculaire).

L'oscillateur harmonique constitue un modèle théorique où les oscillations continuent indéfiniment.
Dans la réalité les mouvements oscillatoires sont amortis sous l'influence d'effets dissipatifs. Nous étudierons le cas des oscillateurs harmoniques amortis par des frottements fluides.

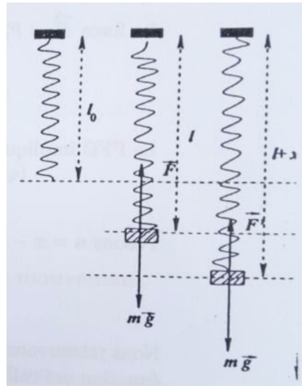
Les frottements fluides conduisent à un amortissement puis à une disparition des oscillations. On peut éviter cette dissipation en entretenant les oscillations à l'aide d'une excitation extérieure : cela aboutit à des oscillations forcées.

6.1 Oscillateurs harmoniques

6.1.1 Équation de l'oscillateur harmonique

Nous allons étudier l'oscillateur harmonique à travers deux exemples.

Exemple 1 : Masse accrochée à un ressort



Considérons un ressort de longueur à vide l_0. Accrochons une masse m au ressort. Il prend une longueur l à l'équilibre sous l'action de :
- son poids $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{u}_x$
- et la force de rappel du ressort $\overrightarrow{F}_0 = -k(l - l_0)\overrightarrow{u}_x$.
Le principe fondamental de la dynamique (PFD), projeté sur $\overrightarrow{u}_x$, donne :

$$mg - k(l - l_0) = 0 \quad soit \quad mg = k(l - l_0) \tag{6.1}$$

Écartons la masse de sa position d'équilibre. Soit x l'écart par rapport à la position d'équilibre, à un instant t quelconque. La masse est alors soumise à :
- son poids $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{u}_x$
- la force de rappel du ressort $\overrightarrow{F}_0 = -k(l - l_0)\overrightarrow{u}_x$.

Le PFD, en projection sur $\overrightarrow{u}_x$ donne :

$$mg - k(l + x - l_0) = m\ddot{x} \tag{6.2}$$

On déduit de (1) et (2) que :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

soit, en posant $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, on :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{6.3}$$

Exemple 2 : Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

Considérons une particule décrivant un mouvement rectiligne (axe $x^{'}Ox$) et soumise à une force $\overrightarrow{F}$ conservatrice dérivant d'une énergie potentielle $E_p(x)$. Supposons que la particule possède une position d'équilibre stable au point d'abscisse $x = x_0$. Alors l'énergie potentielle admet un minimum au point $x = x_0$. Étudions les mouvements de faibles amplitudes autour de cette position d'équilibre :

$$|x - x_0| \ll x_0$$

Effectuons pour cela un développement limité du potentiel au voisinage de x_0 :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{dE_P}{dx}\right)|_{x=x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2}\left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)|_{x=x_0} + \dots$$

Comme E_p est minimale en $x = x_0$, on a :

$$\left(\frac{dE_P}{dx}\right)|_{x=x_0} = 0$$

et l'expression du potentiel devient, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}\left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)|_{x=x_0}$$

La force $\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{u}_x$ est telle que :

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} = -k(x-x_0) \quad \text{en posant} \quad k = \left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)|_{x=x_0}$$

Le PFD implique :

$$m\ddot{x} = -k(x-x_0)$$

Posons $u = x - x_0$, on obtient :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Nous retrouvons la même équation différentielle (2) obtenue dans l'exemple du ressort. Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique.

6.1.2 Étude du mouvement de l'oscillateur harmonique

La solution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique (1) :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

est

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

où A et B sont des constantes réelles. On peut mettre la solution sous la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi) \quad \text{avec} \quad X = \sqrt{A^2+B^2} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{A}{X} \\ \sin\varphi = \dfrac{B}{X} \end{array}\right.$$

X est l'amplitude du mouvement ; ω_0 sa pulsation ; $-\varphi$ la phase initiale.

A et B (ou X et φ) sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales (en général on donne les positions et vitesses initiales).

Notons que le mouvement est périodique de période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. En effet :

$$x(t+T_0) = X\cos\left(\omega_0\left(t+T_0\right)-\varphi\right) = X\cos(\omega_0 t + 2\pi - \varphi) = x(t)$$

6.1.3 Aspect énergétique

La force considérée est une force conservative dérivant de l'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + Cte$$

Posons $E_p(0) = 0$, alors $Cte = 0$ et l'énergie potentielle devient :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kX^2\cos^2(\omega_0 t - \varphi)$$

L'énergie cinétique est par définition :

$$E_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mX^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t - \varphi)$$

L'énergie mécanique est donnée par :

$$\begin{aligned} E_m &= E_C + E_p = \frac{1}{2}mX^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t - \varphi) + \frac{1}{2}kX^2\cos^2(\omega_0 t - \varphi) \\ &= \frac{1}{2}kX^2 \end{aligned}$$

L'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique est une constante de mouvement.

Ce résultat montre qu'il n'y a aucune perte d'énergie.

Les valeurs moyennes des énergies potentielles et cinétiques sont, par définition

$$\begin{aligned} < E_p > &= \frac{1}{T}\int_0^T E_p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kX^2\cos^2(\omega_0 t - \varphi)dt = \frac{1}{4}kX^2 \\ < E_C > &= \frac{1}{T}\int_0^T E_C(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kX^2\sin^2(\omega_0 t - \varphi)dt = \frac{1}{4}kX^2 \end{aligned}$$

Les valeurs moyennes des énergies potentielle et cinétique sont égales.

Portrait de phase

Soit un oscillateur à une dimension. Nous noterons x la coordonnée correspondante. L'état de l'oscillateur est déterminé par la connaissance des fonctions $x(t)$ et $v(t)$.

Définition 6.1.1 *On appelle plan de phase, le plan obtenu en portant x en abscisse et v en ordonnée. L'état de l'oscillateur est représenté par un point du plan de phase.*

Lorsque le temps t évolue, x et v varient de sorte que le point représentatif de l'oscillateur décrive une trajectoire dite portrait de phase.

Soit $\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{u}_x$ la résultante des forces appliquées au point matériel. Selon le PFD :

$$\begin{cases} F &= m\dfrac{dv}{dt} \\ v &= \dfrac{dx}{dt} \end{cases}$$

En éliminant dt, on a :

$$m\frac{dv}{dx} = \frac{F(x,v)}{v}$$

Lorsque F est connue, l'intégration de l'équation différentielle permet de déterminer le portrait de phase. Dans le cas de l'oscillateur harmonique $F = -kx$, on a :

$$m\frac{dv}{dx} = -\frac{kx}{v} \implies mvdv = -kxdx = -m\omega_0^2 xdx$$

soit

$$\frac{1}{2}v^2 = -\frac{\omega_0^2}{2}x^2 + Cte$$

Supposons qu'à $t = 0$, $x = x_0$ et $v = v_0$. Alors $Cte = \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x_0^2$. On a :

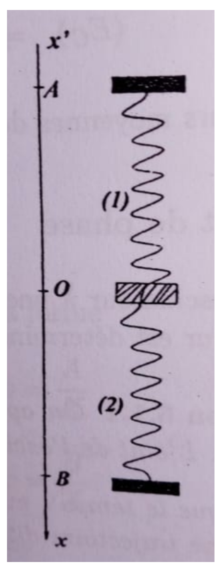
$$\frac{v^2}{v_0^2 + \omega_0^2 x_0^2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{v_0^2 + \omega_0^2 x_0^2} = 1$$

équation d'une ellipse de demi-axes

$$\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega_0^2} + x_0^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{v_0^2 + \omega_0^2 x_0^2}$$

Cette trajectoire est fermée, ceci confirme que le mouvement est périodique.

Exemple 3 : Oscillateur harmonique à deux ressorts



On considère dans le référentiel Galiléen, le dispositif représenté ci-contre. Les deux ressorts de raideur k_1 et k_2 sont disposés suivants la verticale (AB). Soient l_1 et l_2 les longueurs à vide des deux ressorts et soit d la distance AB. Étudier le mouvement de la masse m.

Solution :
Prenons comme origine des abscisses la position d'équilibre de la masse m.
A l'équilibre la masse est au repos sous l'action de :

- son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg\overrightarrow{u}_x$
- la force de rappel $\overrightarrow{F}_1 = -k_1(l_1^{'} - l_1)\overrightarrow{u}_x$ du ressort (1)
- la force de rappel $\overrightarrow{F}_2 = -k_2(l_2^{'} - l_2)(-\overrightarrow{u}_x)$ du ressort (2)

où $l_1^{'} = OA$ et $l_2^{'} = OB$ sont les longueurs des ressorts à l'équilibre.

Le PFD, projeté sur $\overrightarrow{u}_x$ donne :

$$mg = k_1(l_1^{'} - l_1) - k_2(l_2^{'} - l_2)$$

Écartons la masse de sa position d'équilibre. A un instant t, les forces de rappel des deux ressorts sont :

$$\overrightarrow{F}_1 = -k_1(l_1^{'} + x - l_1)\overrightarrow{u}_x \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F}_2 = -k_2(l_2^{'} - x - l_2)(-\overrightarrow{u}_x)$$

où x est l'écart de la masse par rapport à sa position d'équilibre.

Le PFD, projeté sur $\overrightarrow{u}_x$, donne :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - k_1(l_1^{'} + x - l_1) + k_2(l_2^{'} - x - l_2) \\ m\ddot{x} &= mg - k_1(l_1^{'} - l_1) + k_2(l_2^{'} - l_2) - (k_1 + k_2)x \end{aligned}$$

or

$$mg - k_1(l_1^{'} - l_1) + k_2(l_2^{'} - l_2) = 0$$

on a :

$$m\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x$$

soit

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}$$

L'ensemble des deux ressorts (en parallèle) est équivalent à un ressort unique de raideur $k_1 + k_2$

6.2 Oscillateur linéaire amorti par frottement fluide

6.2.1 Équation différentielle du mouvement - les trois types de régime

Nous tenons compte dans cette section des forces de frottement. Le point matériel est maintenant soumis à une force de rappel $\overrightarrow{f} = -k.\overrightarrow{OM}$ et à une force de frottement fluide $-\lambda\overrightarrow{v}$. Le mouvement se faisant sur l'axe Ox, la projection sur $x^{'}Ox$ du PFD donne :

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$$

Posons $\alpha = \dfrac{\lambda}{2m}$ et $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$. On obtient l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{6.4}$$

Pour résoudre (4), introduisons l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0 \tag{6.5}$$

Si r_1 et r_2 désignent les solutions de l'équation caractéristique, la solution de (4) s'écrit :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Le discriminant réduit de (5) s'écrit :

$$\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2$$

Suivant le signe de Δ', on distingue 3 types de solutions.

Cas 1 : $\Delta' > 0$ soit $\alpha > w_0$ c'est-à-dire $\lambda > 2\sqrt{km}$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

on a alors :

$$x = e^{-\alpha t}\left[A\cosh\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.t + B\sinh\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.t\right]$$

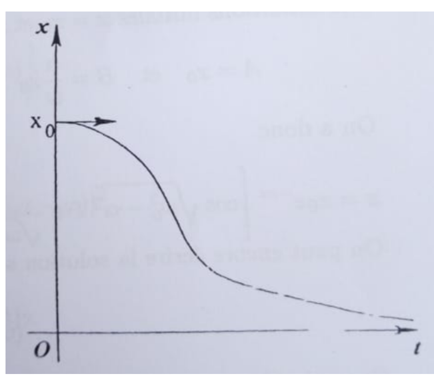
A et B sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales.
Prenons comme conditions initiales : $t = 0$, $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$. On a alors :

$$A = x_0 \quad \text{et} \quad B = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}x_0$$

La solution est donc

$$x = x_0 e^{-\alpha t}\left[\cosh\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.t + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}\sinh\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.t\right]$$

La solution décroît exponentiellement : $t \longrightarrow \infty$, $x(t) \longrightarrow 0$ (voir figure)
La courbe passe par un point d'inflexion pour lequel la vitesse passe par un maximum en valeur absolue On a le régime dit **apériodique**.



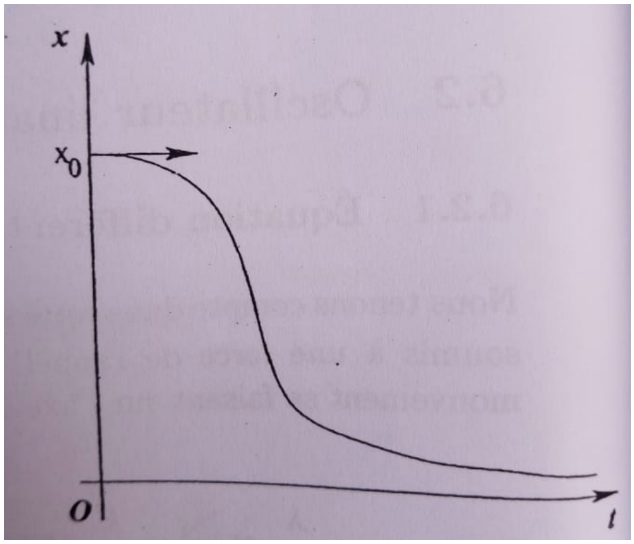
Cas 2 : $\Delta' = 0$ soit $\lambda = 2\sqrt{km}$

L'équation caractéristique admet une racine double $-\alpha$. L'équation différentielle (4) admet donc pour solution

$$x = (At + B)e^{-\alpha t}$$

Avec les conditions initiales $x = x_0$ et $v = 0$ à $t = 0$, on obtient

$$A = \alpha x_0 \quad \text{et} \quad B = x_0$$



soit

$$x(t) = x_0(\alpha t + 1)e^{-\alpha t}$$

Quand $t \longrightarrow \infty$, $x(t) \longrightarrow 0$ (voir figure). On a un régime dit **critique**.

Cas 3 : $\Delta' < 0$ soit $\lambda < 2\sqrt{km}$

Les racines de l'équation caractéristique sont complexes.

$$r_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Posons $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. La solution de l'équation différentielle (4) est :

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[A \cos \omega t + B \sin \omega t\right]$$

Les conditions initiales $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$ donnent

$$A = x_0 \quad \text{et} \quad B = \frac{\alpha}{\omega} x_0$$

On a donc

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t}\left[\cos \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.t + \frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.t\right]$$

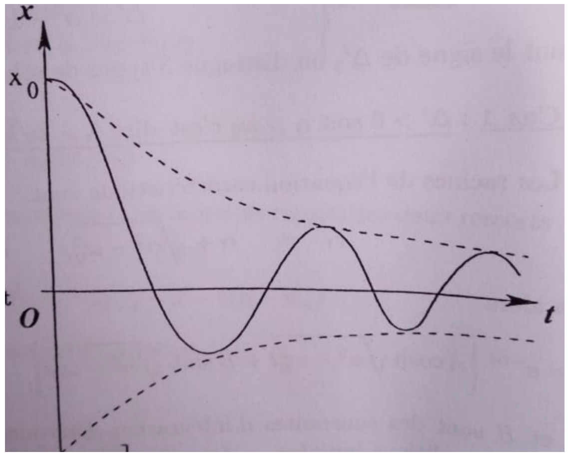
On peut encore écrire la solution sous la forme

$$x(t) = X e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \varphi)$$

La solution est donc le produit d'une amplitude décroissante $A(t) = Xe^{-\alpha t}$ et d'un terme oscillatoire $\cos(\omega t - \varphi)$. Les oscillatoires sont observées mais leur amplitude $A(t)$ diminue exponentiellement au fur et à mesure qu'ont lieu les oscillatoires (voir figure).

On définit pour ce type de mouvement deux grandeurs : la pseudo-période et le décrément logarithmique :

- **Pseudo-période**



C'est la période du terme oscillant $\cos(\omega t - \varphi)$, à savoir :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\omega_0^2}}}$$

En notant $T_0 = C$, *la période de l'oscillation harmonique*, encore appelée *période propre*, on a :

$$T = T_0\left(1 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right)^{-1/2}$$

- **Décrément logarithmique**

Il caractérise l'amortissement et est défini par :

$$\begin{aligned} \delta &= \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A(t)}{A(t)e^{-\alpha T}} = \alpha T \\ &= \frac{\lambda}{2m} \times \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\omega_0^2}}} \end{aligned}$$

6.2.2 Aspects énergétiques

Nous limitons l'étude au cas où on a effectivement des oscillations, donc au régime pseudo-périodique :

$$x = Xe^{-\alpha t}\cos(\omega t - \varphi)$$

avec $\alpha = \frac{\lambda}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\omega_0^2}}$. La vitesse a pour expression :

$$\dot{x} = Xe^{-\alpha t}\left\{-\alpha\cos(\omega t - \varphi) - w\sin(\omega t - \varphi)\right\}$$

Énergie cinétique

$$E_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mX^2e^{-2\alpha t}\left[\alpha\cos(\omega t - \varphi) + \omega\sin(\omega t - \varphi)\right]^2$$

Énergie potentielle

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X^2 e^{-2\alpha t}\cos^2(\omega t - \varphi)$$

Énergie mécanique

$$\begin{aligned} E_m &= E_C + E_p \\ &= \frac{1}{2}mX^2e^{-2\alpha t}\left\{[\alpha\cos(\omega t-\varphi)+\omega\sin(\omega t-\varphi)]^2+\omega_0^2\cos^2(\omega t-\varphi)\right\} \end{aligned}$$

On voit que l'énergie mécanique n'est pas constante. Elle diminue en moyenne selon une loi en $e^{-2\alpha t}$: il y a *dissipation de l'énergie.*

L'énergie perdue est due au frottement et est dissipée sous forme de chaleur. En effet, selon le théorème de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} \Delta(E_C+E_p) &= W\ des\ forces\ non\ conservatives \\ &= W\ de\ la\ force\ de\ frottement \\ &= \int -\lambda\vec{v}.\vec{v}.dt = -\int \lambda\dot{x}^2 dt < 0 \end{aligned}$$

6.3 Oscillations mécaniques forcées : résonance

6.3.1 Position du problème - équation du mouvement

A la section précédente, nous avons vu que l'amortissement des oscillations est lié à l'existence d'une force de frottement et à une diminution de l'énergie mécanique, dissipée lors du travail de la force de frottement. Pour remédier à cette dissipation des oscillations, il faut compenser la perte en fournissant de l'énergie au système à l'aide d'une force extérieure.

Considérons à nouveau l'oscillateur linéaire qui est constitué d'un point matériel de masse m soumis à :

- une force de rappel $-kx\vec{u}_x$
- une force de frottement $-\lambda\dot{x}\vec{u}_x$
- d'une force d'excitation $f(t)\vec{u}_x$

Selon le PFD projeté sur $\vec{u}_x$, on a :

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} + f(t)$$

On obtient l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f(t)}{m}$$

soit en posant $\alpha = \dfrac{\lambda}{2m}$, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, on a :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m} \tag{6.6}$$

6.3.2 Solution de l'équation différentielle

Cette équation différentielle (6) est identique à celle des oscillateurs amortis par frottement fluide, mais avec un second membre non nul. Nous allons nous limiter aux excitations sinusoïdales c'est-à-dire

$$f(t) = F_0 \cos \omega t$$

l'équation différentielle devient

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

La solution est de la forme

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$$

avec x_H la solution générale de l'équation sans second membre (*solution homogène*) et x_p une solution particulière de l'équation avec second membre.

x_H est la solution obtenue à la section précédente sur l'étude des oscillations amorties : elle varie comme $\exp(-\alpha t)$. Au bout d'un temps suffisant $x_H \simeq 0$. Il ne subsiste que x_p. La solution x s'identifiée x_p qui est la solution imposée par l'excitation $f(t)$. On a *un régime forcé*.

On peut établir que lorsque $f(t)$ est sinusoïdal, la solution $x_p(t)$ l'est aussi et que la pulsation de la solution est la même que celle de l'excitation.

Nous cherchons donc une solution particulière de l'équation complète sous la forme

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \varphi)$$

Associons à cette solution, la forme complexe

$$\underline{x} = X e^{i(\omega t - \varphi)} = \underline{X} e^{i\omega t} \quad \text{où} \quad \underline{X} = X e^{-i\varphi}$$

alors x_p est la partie réelle de $\underline{x}$.

De même, l'excitation vérifie

$$F_0 \cos \omega t = \mathcal{R}e(F_0 e^{i\omega t})$$

On peut donc écrire l'équation complète en représentation complexe :

$$m\underline{\ddot{x}} + \lambda\underline{\dot{x}} + k\underline{x} = (-m\omega^2 + i\omega\lambda + k)\underline{X} e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}$$

d'où, on obtient après simplification par $e^{i\omega t}$:

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 + i\omega\lambda + k)\underline{X} &= F_0 \\ \underline{X} &= \frac{F_0}{k - m\omega^2 + i\omega\lambda} = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega} \end{aligned}$$

L'amplitude X et la phase φ sont données par :

$$\begin{cases} X &= \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \\ \tan\varphi &= \dfrac{-2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

Si on utilise d'autres paramètres que α et ω_0^2, on a :

1. en fonction du temps de relaxation τ défini par $\tau = \dfrac{m}{\lambda}$ et de ω_0

$$\underline{X} = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\dfrac{\omega}{\tau}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X &= \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \dfrac{\omega^2}{\tau^2}}} \\ \tan\varphi &= \dfrac{\omega}{\tau(\omega_0^2-\omega^2)} \end{cases}$$

2. en fonction du facteur de qualité Q défini par $Q = \omega_0\tau = \dfrac{\omega_0}{2\alpha}$ et de ω_0^2

$$\underline{X} = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\dfrac{\omega\omega_0}{Q}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X &= \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \dfrac{\omega^2\omega_0^2}{Q}}} \\ \tan\varphi &= \dfrac{1}{Q\left(\dfrac{\omega_0}{\omega} - \dfrac{\omega}{\omega_0}\right)} \end{cases}$$

6.3.3 Étude de l'amplitude en fonction de la pulsation ω : résonance

Nous étudions dans ce paragraphe l'amplitude en fonction de la pulsation ω.

Notion de résonance

On cherche le maximum, lorsqu'il existe, de l'amplitude en fonction de la pulsation.

L'amplitude X est maximale lorsque la quantité $A(\omega) = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2$ est minimale.

$$\frac{dA}{d\omega} = 4\omega(-\omega_0^2 + \omega^2 + 2\alpha^2)$$

Cette quantité s'annule pour $\omega = 0$ ou $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha^2$. La deuxième solution ne donnera des valeurs réelles que si

$$\omega_0^2 > 2\alpha^2 \quad \text{soit} \quad \alpha\sqrt{2} < \omega_0$$

Cette condition $\alpha\sqrt{2} < \omega_0$ est équivalente à $Q = \omega_0\tau > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

- Si $\alpha\sqrt{2} < \omega_0$ ou $Q = \omega_0\tau > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, alors on a deux solutions possibles :

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad \omega = \omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Les amplitudes sont respectivement pour ces deux pulsations

$$\begin{aligned} X(0) &= \frac{F_0}{k} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \\ X(\omega_m) &= \frac{F_0}{m\omega^2}\frac{\omega_0^2}{2\alpha\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\frac{\omega_0^2\tau}{\sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{1}{4\tau^2}}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\frac{Q}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}} \end{aligned}$$

On remarque que

$$1 < \frac{Q}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}$$

On aura donc un maximum pour $\omega = \omega_m$ et la valeur du maximum sera

$$X_{max} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\omega_0^2\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Il s'agit de la résonance en amplitude.

• Si $\alpha\sqrt{2} > \omega_0$ ou $Q = \omega_0\tau < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors il n'y a qu'une solution $\omega = 0$ et l'amplitude décroît avec la pulsation. Il n'y a pas de résonance.

On peut noter qu'il y a phénomène de résonance en amplitude pour un frottement peu important.

La dérivée de $X(\omega)$ étant nulle pour $\omega = 0$, la tangente à l'origine est horizontale.

Bande passante

Elle est définie comme le domaine des pulsations pour lesquelles l'amplitude est au moins égale à l'amplitude maximale (amplitude à la résonance) divisée par $\sqrt{2}$. On a

$$X = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1-(\omega\omega_0)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad \text{et} \quad X_{max} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\frac{Q^2}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

On cherche ω telles que $X \geq \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$. Soit

$$\frac{F_0}{m\omega_0^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1-(\omega\omega_0)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \geq \frac{F_0}{m\omega_0^2}\frac{Q^2}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

La résolution de cette inégalité conduit :

$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}-\frac{1}{Q}\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \\ \omega_2 &= \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}+\frac{1}{Q}\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \end{aligned}$$

Soit une bande passante de

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

Notons que ω_1 existe seulement si $\frac{X_{max}}{\sqrt{2}} > X(0)$ c'est-à-dire si $Q > \frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

Cas d'un amortissement faible

Dans ce cas, on a $Q \gg 1$ et on peut effectuer des développements limités des différentes quantités :

$$\omega_1 \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \quad \text{et} \quad \omega_2 \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q}\right)$$

On déduit la bande passante approchée

$$\Delta\omega \simeq \frac{\omega_0}{Q}$$

Le calcul de la bande passante dans le cas général est assez difficile. Cependant le calcul dans le cas de la résonance en vitesse ou en puissance est plus simple.

Physiquement l'amplitude (ou l'élongation) est une grandeur importante qui ne doit pas dépasser une valeur critique sous peine de rupture du système. Par exemple la rupture peut se produire au passage d'une troupe marchant au pas si le pont présente la même fréquence que la cadence du pas.