Table des matières

1 Ensemble des nombres réels **3**
1.1 Principaux sous ensemble de $\mathbb{R}$ 3
1.2 Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$ 4
1.3 Éléments de la topologie de $\mathbb{R}$:rappels 5
1.3.1 Intervalles de $\mathbb{R}$ 5
1.3.2 Distance entre deux réels 5
1.3.3 Voisinage d'un point 5

2 Suites et séries numériques **7**
2.1 Suites numériques 7
2.1.1 Monotonie ou sens de variation d'une suite 7
2.1.2 Suites majorée, minorée et bornée 8
2.1.3 Démonstration par récurrence 8
2.1.4 Convergence d'une suite : limite d'une suite 8
2.1.5 Sous-suites (ou suites extraites ou encore suites partielles) 11
2.1.6 Suites adjacentes 11
2.1.7 Suites arithmétiques et géométriques 12
2.1.8 suites arithmético-géométriques 12
2.2 Séries numériques 14
2.2.1 Définitions de base 14
2.2.2 Séries convergentes 15
2.2.3 Étude de quelques séries 18
2.2.4 Opérations sur les séries 19

3 Limites-Continuité d'une fonction réelle à une variable réelle **21**
3.1 Généralité sur les fonctions 21
3.1.1 Opérations arithmétiques sur les fonctions 21
3.1.2 Propriétés générales 22
3.1.3 Adhérence d'une partie de $\mathbb{R}$ 23
3.2 Limites 24
3.2.1 Limite à gauche, limite à droite 25
3.2.2 Limite d'une fonction composée 26
3.2.3 Limites et suites (Caractérisation séquentielle de la limite) 27
3.2.4 Formes indéterminées dans le calcul de limite 27
3.2.5 Quelques méthodes algébriques pour étudier une forme indéterminée 27
3.2.6 Passage à la Limite dans une inégalité 28
3.3 Comparaison locale de fonctions 28

3.4 Continuité . . . 32
3.4.1 Prolongement par continuité . . . 33
3.4.2 Propriétés des fonctions continues . . . 33
3.4.3 Fonctions continues strictement monotones . . . 35
3.4.4 Continuité uniforme . . . 36

4 Dérivabilité **43**
4.1 Dérivée en un point . . . 43
4.1.1 Dérivabilité en un point-Nombre dérivé . . . 44
4.1.2 Interprétation géométrique de la dérivabilité en un point . . . 45
4.1.3 Différentiabilité d'une fonction . . . 47
4.1.4 Approximation affine . . . 48
4.1.5 Dérivabilité en un point et opérations . . . 48
4.2 Fonction dérivée . . . 49
4.2.1 Rappel : fonctions dérivées usuelles . . . 50
4.2.2 Dérivées et opérations . . . 50
4.2.3 Dérivée d'une composée . . . 50
4.3 Principaux théorèmes du calcul différentiel . . . 52
4.3.1 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis . . . 52
4.3.2 Variation de fonctions . . . 54
4.3.3 Monotonie d'une fonction dérivable . . . 54
4.3.4 Etude des extrémums pour une fonction dérivable . . . 55
4.4 Dérivées et calcul de limites . . . 55

5 Fonctions trigonométriques inverses et fonctions hyperboliques **59**
5.1 Théorèmes de base . . . 59
5.2 Fonctions trigonométriques inverses . . . 59
5.2.1 Fonction arc sinus . . . 59
5.2.2 Fonction arc cosinus . . . 60
5.2.3 Fonction arc tangente . . . 61
5.3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses . . . 62
5.3.1 Fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique . . . 62
5.3.2 Fonction tangente hyperbolique . . . 63
5.3.3 Fonctions hyperboliques inverses . . . 64

6 Développements limités **69**
6.1 Définition et propriétés . . . 69
6.2 Développements limités et opérations . . . 70
6.3 Développements limités généralisés . . . 72
6.4 Applications des développements limités . . . 72
6.4.1 Calculs de limites . . . 72
6.4.2 Asymptôte oblique . . . 72

Chapitre 1

Ensemble des nombres réels

1.1 Principaux sous ensemble de $\mathbb{R}$

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels

   $$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, 1.000.000, \dots\}.$$

   Les éléments de $\mathbb{N}$ sont appelés des entiers naturels. On dit $\mathbb{N}$ est inductif car il vérifie la propriété suivante :

   $$\text{Si } n \in \mathbb{N}, \text{ alors } n+1 \in \mathbb{N}.$$

   Propriété 1 (Autres propriétés de $\mathbb{N}$) *(a)* $\forall n, m \in \mathbb{N},\ n+m \in \mathbb{N}$ *et* $nm \in \mathbb{N}$.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n-1 \in \mathbb{N}$.
   (c) Soient $n, m \in \mathbb{N}$, *tels que* $n < m$. *Alors* $n+1 \leqslant m$.
   (d) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, *il n'existe aucun élément* $x \in \mathbb{N}$, *tel que* $n < x < n+1$.
   (e) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, *il n'existe aucun élément* $x \in \mathbb{N}$, *tel que* $n-1 < x < n$.

2. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs
   Soit $\mathbb{N}_- = \{-n, \text{ avec } n \in \mathbb{N}\}$. Alors

   $$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}_-.$$

   Propriété 2 $\mathbb{Z}$ *est inductif, stable pour l'addition "+" et pour la multiplication "$\times$".*

3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

   $$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\right\} = \left\{\frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

   $\mathbb{Q}$ est stable pour l'addition et pour la multiplication.

4. L'ensemble des nombres algébriques
   Un nombre est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ c'est-à-dire qu'il est solution d'une équation de la forme $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ où $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$.
   Tout nombre non rationnel est dit **irrationnel**.
   Tout nombre non algébrique est dit **transcendant**.

1.2 Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$

Définition 1.2.1 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ i.e $A \subset \mathbb{R}$.*

1. *A est dit majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in A$, $x \leqslant M$. On dit alors que le réel M est un majorant de A.*
2. *A est dit minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in A$, $x \geqslant m$. Ici le réel m est un minorant de A.*
3. *A est dit bornée si elle est à la fois minorée et majorée.*

Remarque 1.2.2 *Lorsqu'une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée, elle admet une infinité de majorants. De même lorsqu'elle est minorée, elle admet une infinité de minorants.*

Définition 1.2.3 *Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Un éléments a est appelé le plus petit élément ou le minimum de X si $a \in X$ et $\forall x \in X,\ a \leqslant x$. On écrira*
$$a = \min X = \min_{x \in X} x.$$
2. *Si $b \in X$ et $\forall x \in X,\ x \leqslant b$, alors on dit que b est le plus grand élément de X ou le maximum de X et on note*
$$b = \max X = \max_{x \in X} x.$$

Proposition 1 (Principe de la borne supérieure) *Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que $A \neq \emptyset$ et majorée. Alors l'ensemble de tous les majorants de A admet un plus petit élément M appelé **borne supérieure** de A. On notera $M = \sup A$ ou $M = \sup\limits_{x \in A} x$*

Proposition 2 (Principe de la borne inférieure) *Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que $A \neq \emptyset$ et minorée. Alors l'ensemble de tous les minorants de A admet un plus grand élément m appelé **borne inférieure** de A. On écrira $m = \inf A$ ou $m = \inf\limits_{x \in A} x$.*

Remarque 1.2.4 *Le principe de la borne supérieure (resp. de la borne inférieure) peut s'énoncer comme suit : tout sous ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ (resp. minoré de $\mathbb{R}$) admet une borne supérieure (resp. inférieure).*

Théorème 1.2.5 (Caractérisation des bornes supérieure et inférieure) .

1. $M = \sup A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A,$ *tel que* $M - \varepsilon < x \leqslant M$
2. $m = \inf A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A,$ *tel que* $m \leqslant x < m + \varepsilon$

Proposition 3 *Tout sous ensemble non vide majoré de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.*

Proposition 4 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leqslant x < (k+1)$. L'entier k est appelé **partie entière** de x. On le note $[x]$ ou $E(x)$. Le réel $\{x\} = x - [x]$ est appelé la partie décimale du réel x. On a $[x] \leqslant x < [x] + 1$ et par conséquent $0 \leqslant x - [x] < 1$.*

Exemple 1 $\{-2,7\} = -2,7 - [-2,7] = -2.7 + 3 = 0,3.$

1.3 Éléments de la topologie de $\mathbb{R}$:rappels

1.3.1 Intervalles de $\mathbb{R}$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leqslant x \leqslant b\} \text{ : intervalle fermé, borné}$$
$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\} \text{ : intervalle ouvert}$$
$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leqslant b\}$$
$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a \leqslant x < b\}$$

Pour chacun des intervalles I de bornes a, b précédents, le réel $b - a$ est appelé **"longueur de l'intervalle"**. On écrira $|I| = b - a$. Ces intervalles précédents sont appelés intervalles bornés. Les quatre intervalles suivants sont des intervalles non bornés.

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/x \geqslant a\}$$
$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/x > a\}$$
$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}/x \leqslant b\}$$
$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}/x < b\}$$

1.3.2 Distance entre deux réels

Soit a et b deux réels. la distance entre a et b, notée $d(a, b)$, est la valeur absolue de la différence entre a et b : $d(a, b) = |a - b|$

Propriété 3 *La distance vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout réel x, y, $d(x, y) = |x - y| \geqslant 0$.*
2. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}, |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$*
3. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}, |x - y| = |y - x|$*
4. *Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}, |x - z| \leqslant |x - y| + |y - z|$.*

1.3.3 Voisinage d'un point

Définition 1.3.1 *Voisinage.*

- *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de x_0 s'il existe un intervalle ouvert $]a; b[$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ de $\mathbb{R}$ tel que $x_0 \in]a; b[$ et $]a; b[\subset V$. Dans ce cours le voisinage de x_0 sera noté V_{x_0}.*
  En particulier tout intervalle ouvert $]a; b[$ tel que $x_0 \in]a; b[$ est un voisinage de x_0. Ainsi pour tout $\delta > 0$, l'intervalle ouvert $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ est un voisinage de x_0 appelé un δ-voisinage de x_0. Rappelons que si $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $V_{x_0} =]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[= \{x \in \mathbb{R}\ :\ |x - x_0| < \delta\}$.
- *si x_0 est "$+\infty$", alors les voisinages de x_0 sont les intervalles de la forme $V_{x_0} =]\alpha,\ +\infty[= \{x \in \mathbb{R}\ :\ x > \alpha\}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$;*
- *si x_0 est "$-\infty$", alors les voisinages de x_0 sont les intervalles de la forme $V_{x_0} =]-\infty,\ \alpha[= \{x \in \mathbb{R}\ :\ x < \alpha\}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Remarque 1.3.2

1. *Lorsque δ est très petit c'est-à-dire lorsque δ tend vers zéro, les éléments de l'intervalle $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ sont très proche de x_0.*
2. *Tout intervalle ouvert $]a; b[$ de $\mathbb{R}$ est voisinage de chacun des points qui lui appartient.*

Chapitre 2

Suites et séries numériques

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

2.1 Suites numériques

Définition 2.1.1 *Soit I une partie de $\mathbb{N}$. Une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. Les éléments $u(n)$, avec $n \in \mathbb{N}$, sont appelés les termes de la suite u. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Notation 2.1.2
- *$u(n)$ est souvent noté u_n. Pour n fixé dans I, u_n est appelé le terme d'indice n de la suite.*
- *La suite u se note $(u_n)_{n\in I}$ ou simplement (u_n)*
- *(u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ se note $(u_n) \subset \mathbb{K}$.*

Définition 2.1.3 *Si $I \subset \mathbb{N}$ avec $I = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$, alors u_{n_0}, u_{n_0+1}, u_{n_0+2},... sont respectivement est le premier terme, le deuxième terme, le troisième terme, ... de la suite (u_n).*

Définition 2.1.4 *Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que (u_n) est une suite réelle (respectivement complexe) si$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$ (respectivement $u_n \in \mathbb{C}$).*

Désormais, dans ce chapitre, il ne s'agira que des suites réelles.

2.1.1 Monotonie ou sens de variation d'une suite

Définition 2.1.5 *Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite réelle. On dit que (u_n) est croissante (respectivement décroissante)*
si $\forall n \in I,\ u_n \leqslant u_{n+1}$ (respectivement $u_{n+1} \leqslant u_n$).

Définition 2.1.6 *Une suite $(u_n)_{n\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ est constante s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in I, u_n = c$.*

Théorème 2.1.7 *Une suite $(u_n)_{n\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ est constante si et seulement si $\forall n \in I, u_{n+1} = u_n$.*

Définition 2.1.8 *Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est dit stationnaire si*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \exists c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow u_n = c.$$

Exemple 2 $u_n = \left[\frac{5}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_1 = 5,\ u_2 = 2,\ u_3 = 1,\ u_4 = 1,\ u_5 = 1,\ u_6 = u_7 = \ldots = 0.$$

2.1.2 Suites majorée, minorée et bornée

Soit $(U_n)_{n\in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, une suite de nombre réels.
- $(U_n)_{n\in I}$ est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in I, U_n \leqslant M$.
- $(U_n)_{n\in I}$ est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in I, U_n \geqslant m$.
- $(U_n)_{n\in I}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in I, |U_n| \leqslant M$.

2.1.3 Démonstration par récurrence

C'est une méthode utilisée dans la démonstration de certaines propriétés définies à partir des suites. Pour démontrer, par récurrence, qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier $n \in I$, il faut procéder par les trois (3) étapes suivantes :

1. Il faut d'abord montrer que la propriété est vraie pour le premier rang.
2. Ensuite il faut supposer que la propriété est vraie jusqu'au rang k : c'est ce qu'on appelle **hypothèse de récurrence**. Et montrer que la propriété est vraie au rang $k+1$.
3. Enfin il faut conclure que la propriété est vraie pour tout entier n.

2.1.4 Convergence d'une suite : limite d'une suite

Une suite (U_n) étant une application, donc une fonction, on peut parler de limite d'une suite. Pour une suite (U_n), la limite se calcule toujours en $+\infty$.

Définition 2.1.9 (Convergence d'une suite) *Soit $(u_n) \subset \mathbb{R}$. Un réel ℓ est limite de la suite (u_n) si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Définition 2.1.10 *Une suite réelle (U_n) est dite convergente ou converge vers ℓ si $\ell \in \mathbb{R}$. Elle est dite divergente si la limite est infinie.*

Exemple 3 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que $u_n = \dfrac{1}{n}$. En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Théorème 2.1.11
1. *La limite d'une suite réelle, lorsqu'elle existe, est unique.*
2. *Toute suite stationnaire est convergente.*

Théorème 2.1.12 *Toute suite convergente est bornée.*

Propriétés liant les limites aux opérations

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

Définition 2.1.13 *On appelle **somme** (resp **produit**) de deux suites, la suite $(u_n + v_n)$ (resp. $(u_n.v_n)$*

Proposition 5 *Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, alors*

a) $u_n + v_n \to \ell + \ell'$

b) $u_n.v_n \to \ell.\ell'$

c) $\frac{u_n}{v_n} \to \frac{\ell}{\ell'}$ *si* $\ell' \neq 0$.

Proposition 6 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites et ℓ et ℓ' deux réels.*

a) On suppose que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$. Si $\ell < \ell'$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow u_n < v_n$.

b) On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > n_0 \Rightarrow u_n \leqslant v_n$. Alors, $(u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell') \Rightarrow \ell \leqslant \ell'$.

c) On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > n_0 \Rightarrow u_n < v_n$. Alors, $(u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell') \Rightarrow \ell \leqslant \ell'$.

d) S'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $u_n < B$ à partir d'un certain rang, alors $u_n \to \ell \Rightarrow \ell \leqslant B$.

e) S'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leqslant B$ à partir d'un certain rang, alors $u_n \to \ell \Rightarrow \ell \leqslant B$.

f) Soit (w_n) une suite de réels tels que $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell \Rightarrow w_n \to \ell$.

Définition 2.1.14 *Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \geqslant n_0,\ q \geqslant n_0 \Rightarrow\ |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon. \tag{2.1.1}$$

.

Remarque 2.1.15 (2.1.1) *peut encore s'écrire :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \geqslant n_0\ \Rightarrow\ |u_{p+q} - u_p| \leqslant \varepsilon. \tag{2.1.2}$$

.

Théorèmes de convergence d'une suite

Théorème 2.1.16 (Cauchy) *Soit $(u_n) \subset \mathbb{K}$. Alors la suite (u_n) converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

Théorème 2.1.17 (Weierstrass) *Soit (u_n) une suite de nombres réels.*

1. *Si (u_n) est croissante, alors elle converge si et seulement si elle est majorée.*
   Lorsque la suite croissante converge, alors sa limite est $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
2. *Si (u_n) est décroissante, alors elle converge si et seulement si elle est minorée.*
   Lorsque la suite décroissante converge, alors sa limite est $\ell = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Remarque 2.1.18 *Lorsqu'une suite croissante ne converge pas, elle tend forcément vers $+\infty$ et lorsqu'une suite décroissante ne converge pas, elle tend vers $-\infty$.*

Condition nécessaire et suffisante de convergence d'une suite de réels

Proposition 7 *Soit $(u_n) \subset \mathbb{K}$. Si (u_n) est convergente alors (u_n) est bornée. La réciproque est en général fausse.*

Exemple 4 *La suite $(u_n) \subset \mathbb{R}$ définie par $u_n = (-1)^n \; \forall n \in \mathbb{N}$ est bornée mais ne converge pas.*

Définition 2.1.19 (Limite imite inférieure d'une suite réelle) .
Soit $(u_n) \subset \mathbb{R}$. Si (u_n) est minorée, alors la suite v, définie pour entier naturel n par $v_n = \inf\limits_{k \geqslant n} u_k$, est bien définie et est croissante.

1. *Si (v_n) est majoré, alors elle converge. Sa limite est appelée **limite inférieure** de la suite (u_n) et est notée $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} u_k$.*

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} u_k = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} u_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} u_k.$$

2. *Si (v_n) n'est pas majorée, alors on écrira par convention que $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} u_k = +\infty$.*

Remarque 2.1.20 *Dans le cas où la suite (u_n) n'est pas minorée, alors on a $v_n = \inf\limits_{k\geqslant n} u_k = -\infty$ et par convention on écrira $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} u_k = -\infty$. En effet, si (u_n) n'est pas minorée, alors $\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k \in \mathbb{N}$, tel que $u_{n_k} < -k$. Sans perte de généralités, supposons qu'on a $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$. Il est clair que la sous suite (u_{n_k}) tend vers $-\infty$. Ainsi $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} u_k = -\infty$.*

Définition 2.1.21 (Limite supérieure d'une suite réelle) .
Soit $(u_n) \subset \mathbb{R}$. Si (u_n) est majorée, alors la suite w, définie pour entier naturel n par $w_n = \sup\limits_{k\geqslant n} u_k$, est bien définie et est décroissante.

1. *Si (w_n) est minorée, alors elle converge. Sa limite est appelée **limite supérieure** de la suite (u_n) et est notée $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} u_k$.*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} u_k = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} u_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} u_k.$$

2. *Si (w_n) n'est pas minorée, alors on écrira par convention que $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} u_k = -\infty$.*

Remarque 2.1.22 *Dans le cas où la suite (u_n) n'est pas majorée, alors on a $w_n = \sup\limits_{k\geqslant n} u_k = +\infty$ et par convention on écrira $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} u_k = +\infty$.*

Proposition 8 (Relation entre les limites inférieure et supérieure) .

* $\underline{\lim} u_n \leqslant \overline{\lim} u_n$
* $\overline{\lim}(-u_n) = -\underline{\lim} u_n$ *(Pour la preuve, utiliser la propriété $\sup(-a_i) = -\inf(a_i)$)*
* *Soient (a_n) et (b_n) des suites réelles. si $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant b_n$, alors* $\overline{\lim} a_n \leqslant \overline{\lim} b_n$ *et* $\underline{\lim} a_n \leqslant \underline{\lim} b_n$.

2.1.5 Sous-suites (ou suites extraites ou encore suites partielles)

Définition 2.1.23 *Soient (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels tels que*

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

Alors la suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite (u_n).

Remarque 2.1.24 *Pour se donner une sous-suite de la suite (u_n), il suffit de se donner une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. La sous- suite dans ce cas est alors $\left(u_{\varphi(k)}\right)$.*

Proposition 9 *Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.*

Définition 2.1.25 *Un réel ℓ est appelé limite partielle d'une suite (u_n) s'il est limite d'une suite extraite de (u_n).*

Théorème 2.1.26 *Pour toute suite donnée (u_n), la limite sup (resp la limite inf) est la plus grande (resp plus petite) limite partielle de la suite (u_n).*

Théorème 2.1.27 *Une suite converge vers un réel ℓ si et seulement si toutes ses sous suites convergent vers ℓ.*

Théorème 2.1.28 *Soit $u_n)$ une suite de réels. Alors (u_n) converge ou tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ si et seulement si $\underline{\lim} u_n = \overline{\lim} u_n$.*

Exemple 5 *En utilisant les limites inférieure et supérieur des suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par $(-1)^n$ et $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.*

2.1.6 Suites adjacentes

Définition 2.1.29 *Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.*

Théorème 2.1.30 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes telles que (u_n) croissante et (v_n) décroissante. Alors*

$$\forall n,\ u_n \leqslant v_n.$$

Théorème 2.1.31 *Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.*

Exercice
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de termes général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes.
Résolution
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{-n^2-n-1}{n.(n+1).(n+1)!} \\
&= \frac{-1}{n.(n+1).(n+1)!} < 0.
\end{aligned}$$

De plus on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n.n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2.1.7 Suites arithmétiques et géométriques

Suites particulières	**Suite arithmétique**	**Suite géométrique**
Définition	$u_{n+1} - u_n = r$; **r est la raison de la suite**	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ **q est la raison de la suite**
Expression explicite	$u_n = u_p + (n-p)r$ u_p **est un terme de la suite**	$u_n = u_p \times q^{(n-p)}$ u_p **est un terme de la suite**
Relation entre les termes u_{n-1}, u_n, u_{n+1}	$u_n = \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$	$u_n^2 = u_{n-1} \times u_{n+1}$
$S_n = u_k + u_{k+1} + \ldots + u_n$	$S_n = (n-k+1)\frac{(u_k+u_n)}{2}$	$S_n = u_k \times \frac{1-q^{(n-k+1)}}{1-q}$ **pour** $q \neq 1$ $S_n = (n-k+1)u_k$ **pour** $q = 1$
Cas particuliers	$S_n = 1+2+\ldots+n$ $= \frac{n(n+1)}{2}$	$S_n = 1+q+q^2+\ldots+q^n$ $= \frac{1-q^{(n+1)}}{1-q}$ **;** $q \neq 1$
Convergence	(u_n) **diverge**	*** Si** $\lvert q\rvert < 1$**, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **:** (u_n) **converge** *** Si** $q > 1$**, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ **:** (u_n) **diverge**

2.1.8 suites arithmético-géométriques

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 0$. On appelle suite **arithmético- géométrique** une suite donnée par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$. Ces suites généralisent le cas des suites géométriques ($b = 0$) et des suites arithmétiques ($a = 1$). Leur étude se ramène toujours aux deux cas précédents. Si $a = 1$, on a donc une suite arithmétique que l'on sait étudier. $Sia \neq 1$, l'équation dite aux limites possibles $\ell = a\ell + b$ possède une unique solution qui est $\ell = \frac{b}{1-a}$. On pose alors $v_n = u_n - \ell$ et on prouve facilement que (v_n) est une suite géométrique de raison a. Ainsi, pour tout entier n, on a $v_n = a^n v_0$ ce qui donne

$$u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell.$$

Exercices

Exercices 1 *1. Vérifier que la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par $U_n = \dfrac{2e^n + 1}{e^n}$ est minorée par 2.*

2. (a) *Montrer par récurrence que la suite (V_n) définie par*

$$\begin{cases} V_0 = -3 \\ V_{n+1} = 3V_n + 4 \end{cases}$$

est majorée par -2.

(b) *En déduire le sens de variation de la suite (V_n)*

Exercices 2 *1. On considère la suite (U_n) définie par :*

$$U_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = (1 - U_n)^2.$$

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < U_n < 1$.

2. *On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :*

$$U_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+1} = \frac{U_n - 10}{U_n - 6}.$$

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n < 2$.

Exercices 3 *On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :*

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + V_n}{4} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{3V_n + U_n}{4} \end{cases}$$

1. *On considère la suite (W_n) définie par $W_n = U_n + V_n$. Vérifier que la suite (W_n) est constante et donner la valeur de cette constante.*
2. *On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = V_n - U_n$.*
   (a) *Montrer que la suite (d_n) est géométrique.*
   (b) *Donner l'expression de d_n en fonction de n.*
3. *En utilisant les questions précédentes, donner l'expression de U_n et V_n en fonction de n.*
4. *Calculer les sommes suivantes :*

$$S_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n; \quad S'_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n; \quad S''_n = V_1 + V_2 + \ldots + V_n.$$

Exercices 4 *On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par :*

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+U_n} \end{cases}$$

1. *Calculer U_1, U_2 et U_3. La suite (U_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?*
2. *On pose $V_n = \dfrac{1}{U_n}$. Montrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.*
3. *Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.*
4. *Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$ en fonction de n.*

Exercices 5 *On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel non nul n par :*

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} V_1 = 12 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases}$$

1. *On pose $W_n = V_n - U_n$.*
   (a) *Montrer que la suite (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.*
   (b) *Donner l'expression de W_n en fonction de n puis calculer la limite de W_n.*
2. *Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n < V_n$.*
3. *Montrer que les suites U_n et V_n sont respectivement croissante et décroissante.*
4. *Déduire à partir des questions 2., 3. et 1.(b) que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et qu'elles convergent vers la même limite l.*
5. *On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = 3U_n + 8V_n$. Montrer que la suite (t_n) est constante. En déduire la limite l des suites (U_n) et (V_n).*

2.2 Séries numériques

2.2.1 Définitions de base

Définition 2.2.1 *Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.*
Posons :

$$\begin{aligned} s_0 &= u_0 \\ s_1 &= u_0 + u_1 \\ s_2 &= u_0 + u_1 + u_2 \\ &\vdots \\ s_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \end{aligned}$$

On obtient alors une nouvelle suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$.
On appelle ***série*** *définie par la suite (u_n) ou* ***série de terme général*** *u_n , le couple de suites $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Elle est notée $\sum u_n$.*

Définition 2.2.2 *La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est appelée la suite des* ***sommes partielles*** *de la série de terme général u_n.*

Définition 2.2.3 * *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, alors la série $\sum u_n$ est appelée* ***série réelle****.*

* *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs complexes, alors la série $\sum u_n$ est appelée* ***série complexe****.*

Définition 2.2.4 *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite, à valeurs dans $\mathbb{K}$, définie à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum v_n$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $v_0 = v_1 = \ldots = v_{n_0-1} = 0$, et $v_n = u_n$ pour tout $n \geqslant n_0$, est aussi appelée série de terme général u_n et notée $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.*
La suite $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de cette série est donnée par son terme général par

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow s'_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

Définition 2.2.5 *Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est dite déduite de $\sum u_n$ par troncature au rang n_0.*
Si $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s'_n)_{n\geqslant n_0}$ sont des suites des sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ respectivement, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow s'_n = s_n - s_{n_0-1}.$$

2.2.2 Séries convergentes

Définition 2.2.6 *La série $\sum u_n$ est dite convergente si et seulement si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est convergente.*
Lorsque la série $\sum u_n$ n'est pas convergente (c'est-à-dire lorsque la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas), on dit que $\sum u_n$ est divergente. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la limite ℓ de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée ***somme*** *de la série $\sum u_n$ et est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$:*

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Définition 2.2.7 *La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(s'_n)_{n\geqslant n_0}$ ($s'_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$) est convergente. Dans le cas où $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge, sa somme est notée $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et on a :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} s'_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

Étudier la nature d'une série reviens à déterminer si la série est convergente ou divergente.

Exemple 6 *Étudier la nature de la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Il s'agit de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

On remarque $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ *pour tout entier* $n \geqslant 1$.

D'où $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ *et* $\lim_n s_n = 1$. *La suite* (s_n) *des sommes partielles est alors convergente et sa limite est 1. On en déduit que la série* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *est convergente et sa somme est 1.*

Ainsi, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Propriété 4 .

1. *Soit* $\sum u_n$ *une série ; Pour tout entier naturel* n_0 *fixé supérieur ou égal à 1, on considère la série* $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ *déduite de la série* $\sum u_n$ *en supprimant les* n_0 *premiers termes de la suite* (u_n) *c'est-à-dire en supprimant* $u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}$.
   Alors les séries $\sum u_n$ ***et*** $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ ***sont de même nature c'est-à-dire*** $\sum u_n$ ***converge si et seulement si*** $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ *converge. Dans le cas où les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ *convergent, on a* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \neq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
2. *Soit* $\sum u_n$ *une série. Soit* $\sum v_n$ *une série la série obtenue à partir de la série* $\sum u_n$ *en modifiant les* n_0 *premiers termes de la suite* (u_n).
   Alors les séries $\sum u_n$ ***et*** $\sum_n v_n$ ***sont de même nature***. *Dans le cas où les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, on a* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \neq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

Reste d'une série convergente

Soient $\sum u_n$ (resp $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$) une série convergente et p un entier naturel. Pour $p \geqslant 0$ (resp $p \geqslant n_0$), On appelle reste d'ordre p de la série $\sum u_n$ (resp $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$), l'élément de $\mathbb{K}$ noté r_p définit par $r_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$. *Si $\sum u_n$ converge, alors pour tout $p \geqslant 0$, $r_p = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - s_p \quad \left(s_p = \sum_{n=0}^{p} u_n\right)$.

*Si $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge, alors pour tout $p \geqslant n_0$, $r_p = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - s'_p \quad \left(s'_p = \sum_{n=n_0}^{p} u_n\right)$.

Propriété 5 *Soit* $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *le reste d'ordre n de la série* $\sum u_n$ *ou de* $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$. *Alors* $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$

Conditions nécessaires de convergence d'une série

Théorème 2.2.8 (Critère de Cauchy) *Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$. $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles (s_n) qui lui est associée est de Cauchy c'est-à-dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geqslant N, q \geqslant N \Rightarrow |s_p - s_q| \leqslant \varepsilon$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |s_{n+p} - s_n| \leqslant \varepsilon$$

.

Remarque 2.2.9 *On déduit du théorème 2.2.8 que si la série $\sum u_n$ est convergente, alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |s_{2n} - s_n| \leqslant \varepsilon.$$

Cela signifie que si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite (σ_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ définie par $\sigma_n = s_{2n} - s_n$ tend vers 0. Ainsi pour que la série $\sum u_n$ soit convergente, il est nécessaire (mais non suffisante) que la suite $\sigma_n = s_{2n} - s_n$ converge vers 0. Autrement dit, si $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} s_{2n} - s_n \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ n'est pas convergente.

Exemple 7 *Soit la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ appelée série harmonique. On a*

$\sigma_n = s_{2n} - s_n = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n} \geqslant n \cdot \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$. *D'où* $\lim_n \sigma_n \geqslant \dfrac{1}{2}$. *Donc* $\lim_n \sigma_n \neq 0$.
Ainsi, la série harmonique est divergente.

Théorème 2.2.10 *Soit une série $\sum u_n$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $\sum u_n$ est convergente, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Remarque 2.2.11 ***Le théorème 2.2.10 donne une condition nécessaire (mais non suffisante) de convergence d'une série.***

Exemple 8 *l'exemple 7 précédent montre que le théorème 2.2.10 ne donne pas une condition suffisante de convergence d'une série car $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pourtant la série harmonique est divergente.*

Remarque 2.2.12 *On applique le théorème 2.2.10 pour mettre en évidence des divergences. En effet, si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.*

Exemple 9 *La série de terme général $u_n = \frac{e^n}{n}$ $(n \geqslant 1)$ diverge car $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.*

2.2.3 Étude de quelques séries

Série géométrique

On appelle série géométrique, une série de terme général $u_n = k^n$, où $k \in \mathbb{C}$ et est fixé.

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, s_n =& u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\ =& k^0 + k + k^2 + \cdots + k^n \\ =& \begin{cases} \dfrac{1-k^{n+1}}{1-k} \text{ pour } k \neq 1 \\ \\ n+1 \text{ pour } k = 1 \end{cases}.\end{aligned}$$

- Si $k = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. La série $\sum k^n$ est alors divergente (elle est même grossièrement divergente puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 1 \neq 0$.).
- Si $|k| > 1$, alors k^n ne tend pas vers 0, donc la série $\sum k^n$ est grossièrement divergente.
- Si $k = -1$, alors $(-1)^n$ ne tend pas vers 0. La série $\sum k^n$ est alors grossièrement divergente.
- Si $|k| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{1}{1-k} \in \mathbb{K}$, la série $\sum\limits_{n=0} k^n$ est convergente et sa somme est
$$\sum_{n=0}^{+\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$$
.
Conclusion : La série géométrique $\sum\limits_{n=0} k^n$ est convergente si $|k| < 1$ et est divergente si $|k| \geqslant 1$.

Série de terme général $\dfrac{a^n}{n}$ $(a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}^*)$

- Si $|a| > 1$, on a $\left|\dfrac{a^n}{n}\right| \to +\infty$ (d'après les croissances comparées). Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a^n}{n}$ est grossièrement divergente.
- Si $a = 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a^n}{n} = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ qui est la série harmonique (déjà étudier (voir exemple 7)). Donc elle divergente.
- Si $-1 < a < 1$. On sait que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a^n}{n} = -\ln(1-x)$. Ainsi la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a^n}{n}$ converge si $-1 < a < 1$.
- Si $a = -1$, alors on a $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a^n}{n} = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$. Cette série est appelée série harmonique alternée.
Sachant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}dt$, il vient :
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\right) dt = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} dt = \ln 2 + \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}dt$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. En effet,

$$\left|\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}dt\right| \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi la suite des sommes partielles (s_n) tend vers $\ln 2$. On a alors,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2.$$

Série dont le terme général s'écrit sous la forme $u_n = h_{n+1} - h_n$

Soit (h_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ et (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = h_{n+1} - h_n$.

Proposition 10 *La série de terme générale u_n est convergente si et seulement si la suite (h_n) est convergente.*

En effet la suite des sommes partielles est donnée par

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = h_{n+1} - h_0.$$

Il est donc clair que (s_n) converge si et seulement si (h_n) converge. Dans le cas de la convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(h_{n+1} - h_n) = -h_0 + \lim_{n\to+\infty} h_n.$$

Exemple 10 (Étude de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ avec $u_n = \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$) .

On remarque que $\forall n \geq 1$, $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$. En posant $h_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$, on a $u_n = h_n - h_{n+1}$. Dès lors, la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n est donnée par

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = h_1 - h_{n+1} = -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right).$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = 0$, alors la suite (s_n) converge vers $-\ln 2$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$ est donc convergente et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = -\ln 2.$$

2.2.4 Opérations sur les séries

Définition 2.2.13 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

1. *On appelle somme des séries $\sum u_n$ et $\sum_n v_n$, la série de terme général $u_n + v_n$.*

2. *On appelle produit par λ de la série $\sum u_n$, a série de terme général λu_n.*

Proposition 11
- *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors la série $\sum(u_n + v_n)$ converge et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

- *Si la série $\sum u_n$ est convergente et la série $\sum v_n$ est divergente, alors la série $\sum(u_n + v_n)$ diverge.*
- *Si $\sum u_n$ est convergente, alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, la série $\sum \lambda u_n$ est convergente et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.*
- *Si $\lambda \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum \lambda u_n$ est convergente.*

Exemple 11 *Étudier la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.*

Remarque 2.2.14

- *Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes, alors la série $\sum(u_n + v_n)$ peut être convergente ou non.*

Exemple 12 *Les séries $\sum 2^n$ et $\sum \left(\dfrac{1}{2^n} - 2^n\right)$ divergent, mais leur somme converge et sa somme est 2.*

Chapitre 3

Limites-Continuité d'une fonction réelle à une variable réelle

3.1 Généralité sur les fonctions

Soient A et B deux ensembles ;

Définition 3.1.1 *Une relation f qui lie les éléments de A à ceux de B est une fonction de A vers B et on note $f : A \to B$ si à chaque élément de A, la relation f associe zéro ou un seul élément de B. On écrit $y = f(x)$ pour signifier que y est l'élément de B qui est associé à l'élément x de A par f. On dit alors que y est l'image de x par f et que x est un antécédent de y par f.*
L'ensemble des éléments de A qui admettent une image dans B est appelé l'ensemble de définition de f ; il est souvent noté D_f.

Remarque 3.1.2
1. *Si $f(x_0) = y_0$, on dit que f atteint la valeur y_0 en x_0. L'ensemble des valeurs atteintes par f est appelé l'image de f.*
2. *Une fonction réelle d'une variable réelle est une fonction dont les ensembles de départ et d'arrivé A et B sont des parties de $\mathbb{R}$.*
3. *Si f est fonction de A vers B et $D_f = A$, alors on dit que f est une **application.***

Exemples

Les fonctions f, g et h définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2,\ g(x) = \sin x \text{ et } h(x) = \exp(x)$$

ont respectivement pour images $[0, +\infty[$, $[-1, 1]$ et $]0, +\infty[$.

3.1.1 Opérations arithmétiques sur les fonctions

Les fonctions $f + g$, $f - g$ et fg sont définies sur $D_f \cap D_g$ par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\text{et } (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Le quotient $\frac{f}{g}$ est définie par

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

pour tout x dans $D_f \cap D_g$ tel que $g(x) \neq 0$.

Exemple

Si $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$, alors $D_f = [-2, 2]$ et $D_g = [1, +\infty[$. $f+g$, $f-g$ et fg sont définies sur $D_f \cap D_g = [1, 2]$ par

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= \sqrt{4-x^2} + \sqrt{x-1},\\ (f-g)(x) &= \sqrt{4-x^2} - \sqrt{x-1}\\ \text{et } (fg)(x) &= \sqrt{4-x^2}\sqrt{x-1} = \sqrt{(4-x^2)(x-1)}.\end{aligned}$$

Le quotient $\frac{f}{g}$ est définie sur]1,2] par

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{4-x^2}{x-1}}.$$

3.1.2 Propriétés générales

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle d'ensemble de définition définie sur $D_f = D$.
f est dite :

1. **Constante sur** D, si $\forall (x, x') \in D^2,\ f(x) = f(x')$. Dans ce cas, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in\ D,\ f(x) = a$ et on dit que f est la fonction constante a. On dit que f est la fonction nulle sur D si $\forall x \in D,\ f(x) = 0$.
2. **majorée sur** D si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ f(x) \leq M$. (On dit alors que M est un majorant de f ou M majore f ou f est majorée par M.)
   Lorsque f est majorée sur D, il existe un réel M_0 qui est le plus petit des éléments qui majorent f. Cet élément M_0 est appelé la borne supérieure de f sur D notée

   $$\sup_D f = \sup_{x\in D} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in D\} = M_0.$$

   Si cette borne supérieure est atteinte, c-à-d s'il existe $x_0 \in D$ tel que $M_0 = f(x_0) = \sup_D f$ alors on dit que $M_0 = f(x_0)$ est le maximum de f sur D noté

   $$\max_D f = \max_{x\in D} f(x) = \max\{f(x) \mid x \in D\} = M_0.$$

   On dit que le maximum M_0 est atteint en x_0.

3. **minorée sur** D : si $\exists m \in \mathbb{R}$, $\forall x \in D, m \leq f(x)$. (On dit alors que m est un minorant de f ou m minore f ou f est minorée par m.)
   Lorsque f est minorée sur D, il existe un réel m_0 qui est le plus grand des éléments qui minorent f. Cet élément m_0 est appelé la borne inférieure de f sur D notée
   $$\inf_D f = \inf_{x\in D} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in D\} = m_0.$$
   Si cette borne inférieure est atteinte, c-à-d s'il existe $x_0 \in D$ tel que $m_0 = f(x_0) = \inf_D f$ alors on dit que $m_0 = f(x_0)$ est le minimum de f sur D noté
   $$\min_D f = \min_{x\in D} f(x) = \min\{f(x) \mid x \in D\} = m_0.$$
   On dit que le minimum m_0 est atteint en x_0.
4. **bornée sur** D si f est à la fois majorée et minorée sur D. On note que f est bornée si, et seulement si, $|f|$ est majorée.
5. **paire sur** D si $\forall\, x \in D$, $-x \in D$, et $f(-x) = f(x)$
   Dans ce cas l'étude de f pourra se faire sur l'ensemble $D \cap [0, +\infty[$.
6. **impaire sur** D si $\forall\, x \in D$, $-x \in D$, et $f(-x) = -f(x)$
   Dans ce cas l'étude de f pourra se faire sur l'ensemble $D \cap [0, +\infty[$.
7. **périodique de période** T **sur** D : si $\forall\, x \in D$, $x + T \in D$, et $f(x + T) = f(x)$
   Dans ce cas l'étude de f pourra se faire sur un intervalle d'amplitude T inclus dans D. Par exemple $[0, T]$.
8. **lipschitzienne sur** D s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que
   $$\forall (x, x') \in D^2, \quad |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|.$$
   Si $k < 1$, on dit que f est contractante.

3.1.3 Adhérence d'une partie de $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 3.1.3 *L'adhérence de A est l'ensemble des réels x tels que x soit limite d'une suite convergente (x_n) d'éléments de A. Il est noté $\overline{A}$. Si x_0 est réel appartenant à $\overline{A}$, alors on dit que x_0 est adhérent à A.*

Propriété 6 *Si x_0 appartient $\overline{A}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, le voisinage $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ rencontre A au moins en un point différent de x_0 c'est-à dire $A \cap (]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\})$ est non vide.*

Exemple 13 *l'adhérence de $A =]0; 1[$ est $\overline{A} = [0; 1]$.*

Remarque 3.1.4
$$A \subset \overline{A}.$$

3.2 Limites

Soient I une partie de $\mathbb{R}$, x_0 un point de $\overline{I}$ et f une fonction définie sur I sauf peut-être en x_0.
L'essence du concept de limite des fonctions réelles de variable réelle est la suivante : si ℓ est un nombre réel, alors " dire que la fonction f tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0" signifie que "les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de ℓ lorsque celles de x se rapprochent suffisamment de x_0". On note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et on lit "limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 est égale" pour signifier que la fonction f tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0.

Définition 3.2.1 *Soient ℓ et x_0 deux réels.*

1. *On dit que f admet pour limite ℓ quand x tend vers x_0, et on note*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell,$$
si :
$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ \forall x \in I,\ 0 \leq |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
.
2. *On dit que f admet ℓ pour limite quand x tend vers $+\infty$, et on note*
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell,$$
si $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,B > 0, \forall x \in D_f,\ x > B \quad \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon\,.$
3. *On dit que f admet ℓ pour limite quand x tend vers $-\infty$, et on note*
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell,$$
si $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,B > 0, \forall x \in D_f,\ x < -B \quad \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$
4. *On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0, et on note*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty,$$
si $\forall\,A > 0, \exists\,\delta > 0, \forall x \in I,\ 0 \leq |x - x_0| < \delta \quad \implies f(x) > A.$
5. *On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers x_0, et on note*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty,$$
si $\forall\,A > 0, \exists\,\delta > 0, \forall x \in I,\ 0 \leq |x - x_0| < \delta \quad \implies f(x) < -A\,.$

Définition 3.2.2 (Existence de la limite d'une fonction) *Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit qu'une fonction réelle f admet ou possède une limite lorsque x tend vers x_0 ou que la limite de f existe lorsque x tend vers x_0 si f tend vers un réel ℓ lorsque x tend vers x_0.*

Le théorème suivant dit qu'une fonction ne peut avoir plus d'une limite en un point.

Théorème 3.2.3 *Si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe, alors elle est unique ; c-à-d si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \text{ et } \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_2 \tag{3.2.1}$$

alors $\ell_1 = \ell_2$.

Preuve. Supposons (3.2.1) vérifié et soit $\varepsilon > 0$. De la Définition 3.2.1, il existe des réels positives δ_1 et δ_2 tels que

$$|f(x) - \ell_i| < \varepsilon \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta_i,\ i = 1, 2.$$

On pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, alors

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \\ &\leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

si $0 < |x - x_0| < \delta$. D'où $\ell_1 = \ell_2$.$\square$

Théorème 3.2.4 *Si f est définie en x_0 et possède une limite en x_0, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Théorème 3.2.5 *Si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \text{ et } \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2 \tag{3.2.2}$$

alors

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2, \tag{3.2.3}$$

$$\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) = \ell_1 - \ell_2, \tag{3.2.4}$$

$$\lim_{x\to x_0} (fg)(x) = \ell_1\ell_2, \tag{3.2.5}$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2},\ (\ell_2 \neq 0). \tag{3.2.6}$$

3.2.1 Limite à gauche, limite à droite

Définition 3.2.6 *Soit x_0 un réel et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.*

1. *On dit que f admet une limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) à gauche en x_0 si f est définie à gauche de x_0 (c-à-dire $\exists \alpha > 0$, tel que $]x_0 - \alpha, x_0[\subset \mathcal{D}_f$) et*

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x_0 - \eta < x \leq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \text{ ou } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

   On note $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$.

2. *On dit que f tend vers $\ell = -\infty$ à gauche en x_0 si*

   $$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x_0 - \eta < x \leq x_0 \Rightarrow f(x) < -A.$$

   On note $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$.

3. *On dit que f tend vers $\ell = +\infty$ à gauche en x_0 si*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x_0 - \eta < x \leq x_0 \Rightarrow f(x) > A.$$

On note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

4. *On dit que f admet une limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) à droite en x_0 si f est définie à droite de x_0 (c-à-dire $\exists \alpha > 0$, tel que $]x_0, x_0 + \alpha[\subset \mathcal{D}_f$) et*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x_0 \leq x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \, ou \, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

5. *On dit que f tend vers $\ell = -\infty$ à droite en x_0 si*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x_0 \leq x < x_0 + \eta \Rightarrow f(x) < -A.$$

On note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

6. *On dit que f tend vers $\ell = +\infty$ à droite en x_0 si*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x_0 \leq x < x_0 + \eta \Rightarrow f(x) > A.$$

On note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.

Théorème 3.2.7 *Une fonction f admet une limite en x_0 ssi elle a une limite à gauche et une limite à droite en x_0 qui sont égales au même nombre réel ℓ. En d'autre termes,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \ell.$$

Exemple 14 *Soit*

$$g(x) = \frac{x^2 - 4 + |2 - x|(1 + x)}{2x - 4}.$$

Calculer $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$. *$g$ admet-elle une limite en 2 ?*

3.2.2 Limite d'une fonction composée

Théorème 3.2.8 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f une fonction définie sur I, g une fonction définie sur $f(I)$ et $x_0 \in \overline{I}$.*

$$si \lim_{x \to x_0} f(x) = a \, (a \in \overline{\mathbb{R}}) \, et \lim_{x \to a} g(x) = \ell \; (\ell \in \overline{\mathbb{R}}), alors \lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = \ell.$$

Ces résultats peuvent être étendus au cas où $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$ si I n'est pas majoré (resp. minoré).

Exemple 15 $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin(\frac{1}{x}) = 1$.

3.2.3 Limites et suites (Caractérisation séquentielle de la limite)

Théorème 3.2.9 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *si, et seulement si, pour toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* x_0*, la suite* $f(u_n)$ *converge vers* ℓ*.*

Remarque 3.2.10 *Ce théorème permet de montrer qu'une application n'a pas de limite en* x_0*. Il suffit de trouver deux suites* (u_n) *et* (v_n) *qui tendent vers* x_0 *et telles que les suites* $(f(u_n))$ *et* $(f(v_n))$ *n'aient pas la même limite.*

Exemple 16 *Montrer que* $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ *n'admet de limite en* 0*.*

Solution

Pour répondre à cette question, on va considérer une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 et dont la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$

Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments $x_n = \dfrac{1}{n\pi} \in \mathcal{D}_f$ et tendant vers 0 (car $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{n\pi} = 0$

Mais $f(x_n) = \cos\left(\dfrac{1}{x_n}\right) = \cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Ce qui contredit l'existence d'une limite pour la fonction f en 0.

3.2.4 Formes indéterminées dans le calcul de limite

Les cas d'indétermination sont les suivantes :

- ☐ $f+g$ avec $f \longrightarrow +\infty$ et $g \longrightarrow -\infty$
- ☐ fg avec $f \longrightarrow 0$ et $g \longrightarrow \infty$
- ☐ $\dfrac{f}{g}$ avec $f \longrightarrow 0$ et $g \longrightarrow 0$
- ☐ $\dfrac{f}{g}$ avec $f \longrightarrow \infty$ et $g \longrightarrow \infty$
- ☐ u^v avec $u \longrightarrow 1$ et $v \longrightarrow \infty$
- ☐ u^v avec $u \longrightarrow 0^+$ et $v \longrightarrow 0$
- ☐ u^v avec $u \longrightarrow +\infty$ et $v \longrightarrow 0$

3.2.5 Quelques méthodes algébriques pour étudier une forme indéterminée

- ☐ Simplification d'expressions algébriques

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$$

- ☐ Mises en facteurs

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{2}{x^2})} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = 1$$

- ☐ Utilisation de la quantité conjuguée
  $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$
- ☐ Utilisation de logarithmes et d'exponentielles
  $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-1}{x}$.

3.2.6 Passage à la Limite dans une inégalité

Théorème 3.2.11 (Théorème de prolongement des inégalités) *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f et g deux fonctions définies sur I telles que $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ et $x_0 \in I$.*

1. *Si f et g admettent une limite finie en x_0, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.*
2. *Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$*
3. *Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.*

Ces résultats peuvent être étendus aux cas où $x_0 \notin I$ mais se trouve à la frontière de I ou encore pour $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$ si I n'est pas majoré (resp. pas minoré).

Théorème 3.2.12 *Théorème de l'encadrement Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0 \in I$, f, g et h trois fonctions réelles définies sur I telles que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.*

$$\text{Si } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell, \text{ alors } \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell.$$

Ce résultat peut être étendu aux cas où $x_0 \notin I$ mais se trouve à la frontière de I ou encore pour $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$ si I n'est pas majoré (resp. pas minoré).

3.3 Comparaison locale de fonctions

On va présenter trois types de relations locales entre deux fonctions f et g en un point x_0 de $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$:

(E) f et g sont **équivalentes** quand x tend vers x_0 ;

(N) f est **négligeable** devant g quand x tend vers x_0 ;

(D) f est **dominée** par g quand x tend vers x_0.

Dans toute cette section, D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, f et g sont deux fonctions définies de D vers $\mathbb{R}$.

Définitions 3.3.1 (dominance) *Soit $x_0 \in \overline{D}$.*
On dit que f est **dominé** *par g au voisinage de x_0 quand x tend vers x_0, s'il existe un voisinage V de x_0 et un réel $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que*

$$\forall x \in V \cap D,\ |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

On note $f(x) = O(g(x))$ *lorsque* $x \to x_0$ *ou* $f(x) \underset{x \to x_0}{=} O(g(x))$ *ou* $f \underset{x_0}{=} O(g)$ *(notation de Bachmann)*

et on lit "f = grand O de g au voisinage de x_0*".*

Exemple 17 $f(x) = ax^p$, $g(x) = bx^n$, *avec* $a, b \in \mathbb{R}^*$, $n, p \in \mathbb{Z}$, $n \geq p$. *on a* $g(x) = \frac{b}{a}x^{n-p}f(x)$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $|x| \leq 1$, *on a* $|g(x)| \leq |\frac{b}{a}||f(x)|$.

$$\text{Donc } bx^n = \underset{0}{O}(ax^p).$$

Proposition 3.3.2 *Autres expressions de la dominance*

1. *Si* x_0 *est fini, alors* $f(x) \underset{x \to x_0}{=} O(g(x))$ *si et seulement si*

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

2. *Si* $x_0 = +\infty$, *alors* $f(x) \underset{x \to x_0}{=} O(g(x))$ *si et seulement si*

$$\exists B > 0, \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D,\ x > B \Rightarrow |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

3. $f(x) \underset{x \to x_0}{=} O(g(x))$ *si et seulement s'il existe un voisinage V de* x_0 *et une fonction h bornée sur V telle que pour tout* $x \in V \cap D$, $f(x) = h(x)g(x)$.
4. *Si g ne s'annule pas au voisinage de* x_0, *alors* $f(x) \underset{x \to x_0}{=} O(g(x))$ *si et seulement si* $\dfrac{f}{g}$ *est bornée au voisinage de* x_0.

Définitions 3.3.3 (négligeabilité) *Soit* $x_0 \in \overline{D}$.
On dit que f est **négligeable** *devant g ou que g est* ***prépondérante*** *devant f au voisinage de* x_0 *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un voisinage V de* x_0 *tel que*

$$\forall x \in V \cap D,\ |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

On note $f(x) = \circ(g(x))$ *lorsque* $x \to x_0$ *ou* $f(x) \underset{x \to x_0}{=} \circ(g(x))$ *ou* $f \underset{x_0}{=} \circ(g)$ *(notation de Landau)*

et on lit "f = petit $\circ$ *de g au voisinage de* x_0*".*

Proposition 3.3.4 *Autres expressions de la négligeabilité*

1. *Si* x_0 *est fini, alors* $f(x) \underset{x \to x_0}{=} \circ(g(x))$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

2. *Si* $x_0 = +\infty$, *alors* $f(x) \underset{x \to x_0}{=} \circ(g(x))$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D,\ x > B \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

3. *$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \circ(g(x))$ si et seulement s'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction h définie sur V telle que pour tout $x \in V \cap D$, $f(x) = h(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 0$.*
4. *Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{=} \circ(g(x))$ si et seulement si*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

.

Exemple 18 *On reprend les données de l'exemple précédent avec cette fois-ci $n > p$. La fonction $x \mapsto \frac{b}{a}x^{n-p}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que*

$$|x| < \eta \Rightarrow \left|\frac{b}{a}x^{n-p}\right| < \varepsilon.$$

Et alors

$$|x| < \eta \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon|f(x)|.$$

Donc au voisinage de 0, $g = \circ(f)$.

Proposition 3.3.5 *Soit f une fonction définie au voisinage de x_0. Alors,*

1. *$f \underset{x_0}{=} O(1)$ signifie que f est bornée au voisinage de x_0.*
2. *$f \underset{x_0}{=} o(1)$ (on dit f est infiniment petit) signifie que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.*
3. *$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow f(x) \underset{x_0}{=} \ell + o(1)$.*

Propriété 7 (Règles opératoires sur les o et O) *Soit $x_0 \in \overline{D}$.*

1. *Si $f \underset{x_0}{=} o(g)$, alors $f \underset{x_0}{=} O(g)$.*
2. *Si $f_1 \underset{x_0}{=} O(g)$ et $f_2 \underset{x_0}{=} O(g)$, alors $f_1 + f_2 \underset{x_0}{=} O(g)$.*
3. *Si $f_1 \underset{x_0}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{x_0}{=} o(g)$, alors $f_1 + f_2 \underset{x_0}{=} o(g)$.*
4. *Si $f_1 \underset{x_0}{=} O(g_1)$ et $f_2 \underset{x_0}{=} O(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{=} O(g_1 g_2)$.*
5. *Si $f_1 \underset{x_0}{=} O(g_1)$ et $f_2 \underset{x_0}{=} o(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{=} o(g_1 g_2)$.*
6. *Si $f_1 \underset{x_0}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{x_0}{=} o(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{=} o(g_1 g_2)$.*
7. *Si $f \underset{x_0}{=} O(g)$ et $g \underset{x_0}{=} O(h)$, alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$.*
8. *Si $f \underset{x_0}{=} o(g)$ et $g \underset{x_0}{=} O(h)$, alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$.*
9. *Si $f \underset{x_0}{=} O(g)$ et $g \underset{x_0}{=} o(h)$, alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$.*
10. *Si $f \underset{x_0}{=} o(g)$ et $g \underset{x_0}{=} o(h)$, alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$.*
11. *$f \underset{x_0}{=} g \times o(h)$ si et seulement si $f \underset{x_0}{=} o(gh)$.*

    Soient $Y \subset \mathbb{R}$, $h : Y \to D$ et $y_0 \in \overline{Y}$ tel que $\lim\limits_{y\to y_0} h(y) = x_0$. Alors

12. *Si* $f \underset{x_0}{=} O(g)$, *alors* $f \circ h \underset{y_0}{=} O(g \circ h)$.
13. *Si* $f \underset{x_0}{=} o(g)$, *alors* $f \circ h \underset{y_0}{=} o(g \circ h)$.

Définition 3.3.6 (équivalence) *Soient* $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D}$ *et* f, g *deux onctions réelles définies sur* D.
On dit que f *est* **équivalent** *à* g *au voisinage de* x_0 *ou lorsque* x *tend vers* x_0 *s'il existe un voisinage* V *de* x_0 *et une fonction* h *définie sur* V *telle que* $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$ *et* $f(x) = h(x)g(x)$ *pour tout* $x \in D \cap V$.
On note $f \underset{x_0}{\sim} g$ *ou* $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ *ou encore* $f(x) \sim g(x)$, *lorsque* $x \to x_0$ *pour signifier que* f *est équivalent à* g *au voisinage de* x_0.

Proposition 3.3.7 $f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f = g + \underset{x_0}{\circ}(g)$.

Définition 3.3.8 (Voisinage pointé) *Soient* x_0 *un réel et* V *un voisinage de* x_0. $V \setminus \{x_0\}$ *est un voisinage pointé de* x_0.

Remarque 3.3.9 (Remarque importante) *En pratique, si* g *ne s'annule pas dans un voisinage pointé de* x_0, *alors :*

1. $f = \underset{x_0}{O}(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g}$ *est bornée dans un voisinage pointé de* x_0.
2. $f = \underset{x_0}{\circ}(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
3. $f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Exemples de quelques équivalences usuelles

1. $\sin x \underset{0}{\sim} x$;
2. $\tan x \underset{0}{\sim} x$;
3. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
4. $\exp(x) - 1 \underset{0}{\sim} x$
5. $1 - \cos x \underset{0}{\sim} x^2/2$;
6. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$
7. Soient $k \leqslant n$ et $P(x) = a_k x^k + a_{k+1}x^{k+1} + \ldots + a_n x^n$ une fonction polynôme telle que $a_k \neq 0$ et $a_n \neq 0$. Alors
$$P(x) \underset{0}{\sim} a_k x^k \quad \text{et} \quad P(x) \underset{\infty}{\sim} a_n x^n.$$

Théorème 3.3.10 .

1. $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2 \Rightarrow f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$.

2. *$f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2 \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.*
3. *Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$.*
4. *Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $f = \underset{x_0}{\circ}(h)$ alors $g = \underset{x_0}{\circ}(h)$.*
5. *Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si g est à valeurs positives dans un voisinage pointé de x_0 alors $f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$. ($\alpha \in \mathbb{R}$)*

Remarque 3.3.11 *$f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2 \not\Rightarrow f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 + g_2$.*
$f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2 \not\Rightarrow f_1 - f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 - g_2$.

Cependant si $f = \underset{x_0}{\circ}(g)$ alors $f + g \underset{x_0}{\sim} g$.

Proposition 3.3.12 *Si $\lim\limits_{x \to y_0} h(x) = x_0$ et $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $f \circ h \underset{y_0}{\sim} g \circ h$.*

Proposition 3.3.13
1. *Soient f et g deux fonctions strictement positives au voisinage de x_0.*

$$\text{Si } f \underset{x_0}{\sim} g \text{ et } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0, \text{ alors } \ln(f) \underset{x_0}{\sim} \ln(g).$$

2. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point x_0. Alors*

$$e^f \underset{x_0}{\sim} e^g \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} (f - g) = 0$$

Remarque 3.3.14 *$f \underset{x_0}{\sim} g$ n'entraîne pas forcément que $\Longrightarrow \quad e^f \underset{x_0}{\sim} e^g$.*

Exemple 19 *$x \underset{\infty}{\sim} x + 1$, alors que les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{x+1}$ ne sont pas équivalents au voisinage de l'infini.*

3.4 Continuité

Définition 3.4.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point appartenant à I.*
1. *f est dite continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*
2. *On dira que f est continue à gauche en x_0 si f est définie à gauche de x_0 et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$.*
3. *f est continue à droite en x_0 si f est définie à droite de x_0 et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$.*

En d'autres termes :

1. Une fonction f est continue en x_0 ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (3.4.1)$$

2. Une fonction est continue à gauche en x_0 ssi

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ x_0 - \delta < x \leq x_0 \quad \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (3.4.2)$$

3. Une fonction est continue à droite en x_0 ssi

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ x_0 \leq x < x_0 + \delta \quad \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (3.4.3)$$

Exemple 20 *Soit la fonction f définie sur $[0, 2]$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ x + 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 1.

3.4.1 Prolongement par continuité

Soit f une fonction réelle d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et x_0 un réel tel que $x_0 \notin \mathcal{D}_f$. f est dite prolongeable par continuité en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell\ (\ell \in \mathbb{R})$ c'est-à-dire si f admet une limite en x_0. Dans ce cas, la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est continue en x_0. La fonction g est appelée le *prolongement par continuité (ou le prolongement continu)* de f en x_0.

Exemple 21 *La fonction f définie par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ n'est pas définie en* 0*. Cependant $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ 0. D'où f est prolongeable par continuité en* 0*.*
La fonction h définie par $h(x) = \sin \frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0*, sa discontinuité en* 0 *ne peut être corrigée car $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ n'existe pas.*

3.4.2 Propriétés des fonctions continues

Propriétés locales

Proposition 3.4.2 *f est continue en x_0 ssi pour toute suite (x_n) convergeant vers x_0, la suite image $(f(x_n))$ converge vers $f(x_0)$.*

Proposition 3.4.3 *Soient f et g deux fonctions continues en point x_0. Alors*

- *les fonctions $f + g$, $f - g$ et $f \times g$ sont continue en x_0.*
- *$\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.*

Proposition 3.4.4 *Soient une fonction définie en x_0 et g une fonction définie au voisinage de $f(x_0)$. Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

Propriétés globales

Définition 3.4.5 *Soient f une fonction réelle d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, A une partie de $\mathcal{D}_f$. La fonction f est continue sur A si elle est continue en chaque point x_0 appartenant à A.*

Définition 3.4.6 *Une fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$, continue à droite en a $\left(i.e \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a) \right)$ et continue à gauche en b $\left(i.e \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = f(b) \right)$.*

Propriété 8 *Les fonctions usuelles telles que les fonctions polynômes, rationnelles, racines, puissances, circulaires, logarithmes, exponentielles sont continues sur leur ensemble de définition.*

Théorème 3.4.7 *Si f et g sont continues sur un ensemble A, alors $f + g$, $f - g$ et fg le sont aussi. Si de plus $g \neq 0$ sur A alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur A.*

Théorème 3.4.8 *Soient f et g deux fonctions réelles définies respectivement sur les ensembles I et J tels que $f(I) \subset J$. Si f est continue sur I et g continue sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est continue I*

Exemple 22 *La fonction g définie par*

$$g(x) = \sqrt{x}$$

est continue pour $x > 0$, et la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{9 - x^2}{x + 1}$$

est continue pour $x \neq -1$. Comme $f(x) > 0$ si $x \in]-\infty, -3[\cup]-1, 3[$, alors la fonction $g \circ f$ définie par

$$g \circ f(x) = \sqrt{\frac{9 - x^2}{x + 1}}$$

est continue sur $]-\infty, -3[\cup]-1, 3[$. Elle est également continue à gauche en -3 et 3.

Définition 3.4.9 (fonctions minorée, majorée et bornée) *Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble non vide E.*

1. *f est dite minorée sur E s'il existe un réel m tel que*

$$\forall\, x \in E,\ f(x) \geq m.$$

Dans ce cas, l'ensemble

$$V = \{f(x) | x \in E\}$$

admet une borne inférieure $\alpha = \inf V$ et on note

$$\alpha = \inf_{x \in E} f(x).$$

S'il existe un point x_1 dans E tel que $f(x_1) = \alpha$, on dit que α est le minimum de f sur E, et on note

$$\alpha = \min_{x \in E} f(x).$$

2. *f est majorée sur E s'il existe un réel M tel que*

$$\forall x \in E,\ f(x) \leq M.$$

Dans ce cas, l'ensemble V a une borne supérieure $\beta = \sup V$ et on note

$$\beta = \sup_{x \in E} f(x).$$

S'il existe un point x_2 dans E tel que $f(x_2) = \beta$, on dit que β est le maximum de f sur E, et on note

$$\beta = \max_{x \in E} f(x).$$

3. *Si f est à la fois minorée et majorée sur E, alors on dit que f est bornée sur E.*

Exemple 23 *La fonction g définie par*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ 2 - x & si\ 0 < x \leq 3. \end{cases}$$

est bornée sur $[0, 3]$ car

$$\sup_{0 \leq x \leq 3} g(x) = 2 \text{ et } \inf_{0 \leq x \leq 3} g(x) = -1.$$

g n'a pas de maximum sur [0,3] (puisque il n'existe aucun élément de [0,3] dont l'image par g donne 2) mais admet un minimum sur [0,3] car $g(3) = -1$.

Théorème 3.4.10 (Weierstrass) *Si f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$ et elle atteint ses bornes c'est-à-dire qu'il existe x_m, $x_M \in [a, b]$ tel que $f(x_m) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $f(x_M) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.*

Corollaire 3.4.11 *Si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors l'image directe de $[a, b]$ par f est donné par $f([a, b]) = [m, M]$ où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$ c'est-à-dire $m = f(x_m) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = f(x_M) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.*

Théorème 3.4.12 (Cauchy) *(Théorème des Valeurs Intermédiaires)*
Soient f une fonction continue sur un intervalle I et x_1, $x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$. Si μ est un réel situé entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$, alors il existe $x_0 \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x_0) = \mu$.

Corollaire 3.4.13 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

3.4.3 Fonctions continues strictement monotones

Proposition 3.4.14 *Soit f une application continue sur un ensemble X de $\mathbb{R}$. f est injective si et seulement si f est strictement monotone sur X.*

Proposition 3.4.15 *Soit f une application continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de bornes a et b (a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$). Alors l'image directe $f(I)$ de I par f est un intervalle de bornes $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \in I}} f(x)$.*

Théorème 3.4.16 *Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I dans $f(I)$ et la bijection réciproque f^{-1} définie de $f(I)$ dans I est continue, monotone de même monotonie que celle de f.*

Remarque 3.4.17 *Dans un repère orthonormée, les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

Définition 3.4.18 (du point fixe) *Si f est une fonction d'un ensemble I dans lui-même, on appelle point fixe de f tout élément x de I tel que $x = f(x)$. Très souvent de tels points fixes s'obtiennent comme limites de suites récurrentes $u_0 \in I,\ u_{n+1} = f(u_n)$: c'est ce qu'on nomme la méthode des approximations successives.*

Théorème 3.4.19 (du point fixe) *Soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Toute fonction $f : I \to I$ continue admet au moins un point fixe.*

Démonstration 1 *La fonction $g(x) = f(x) - x$ est continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, $g(b) \leqslant 0 \leqslant g(a)$. En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, $(\exists c \in I) g(c) = 0$, donc $f(c) = c$.*

Le théorème suivant généralise le théorème (3.4.19) :

Théorème 3.4.20 *Soit $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $I \subset f(I)$; f admet au moins un point fixe.*

Démonstration 2 *Comme $I \subset f(I)$, $\exists (c,d) \in I \times I, f(c) = a$ et $f(d) = b$. Si $c = a$ ou $d = b$, c'est fini. Sinon, $a < c < b$ et $a < d < b$. Soit $g(x) = f(x) - x$. Alors $g(c) < 0 < g(d)$. En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, $\exists e \in]c,d[$ ou $]d,c[, g(e) = e$. Alors $f(e) = e$, et $e \in I$.*

3.4.4 Continuité uniforme

Nous introduisons à présent une notion de continuité plus forte que celle donnée dans la définition 3.4.1

Définition 3.4.21 *Une fonction f est dite uniformément continue sur une partie I de son domaine si et seulement si*
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tel que* $\forall x, x' \in I$ *et* $0 < |x - x'| < \delta \quad \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

Il est à noter que dans cette définition δ ne dépend que de ε et de I et non du choix de x et x' pourvu qu'ils soient tous les deux dans I.

Exemple 24

1. *La fonction f définie par $f(x) = 2x$ est uniformément continue sur $]-\infty, \infty[$ car*
$$|f(x) - f(x')| = 2|x - x'| < \varepsilon \text{ si } |x - x'| < \varepsilon/2.$$
2. *Si $0 < r < +\infty$, alors la fonction g définie par*
$$g(x) = x^2$$
est uniformément continue sur $[-r, r]$. Pour le voir, il suffit de remarquer que
$$|g(x) - g(x')| = |x^2 - x'^2| = |x - x'||x + x'| \leq 2r|x - x'|.$$
d'où
$$|g(x) - g(x')| < \varepsilon \text{ si } |x - x'| < \delta = \varepsilon/2r.$$

Théorème 3.4.22 *Toute fonction uniformément continue sur un ensemble E est continue sur E.*

Démonstration 3 *Soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in E$. f étant uniformément continue sur E, il existe $\delta > 0$, quel que soit $x \in E, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. On obtient donc la continuité de f sur E.*

Remarque 3.4.23 *La réciproque que théorème 3.4.22 est fausse.*
En effet, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Cependant on va montrer que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Si f était uniformément continue on aurait

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$, il existerait $\delta > 0$ tel que $\forall x, x' \in \mathbb{R}, |x - x'| < \delta \Rightarrow |x^2 - x'^2| < 1$. Or $\forall \delta > 0$, pour $x = \frac{2}{\delta}$ et $x' = \frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ on a $|x - x'| < \frac{\delta}{2}$ mais $|x^2 - x'^2| > 1$.

On remarque ainsi qu'une fonction peut être continue sans être uniformément continue sur un intervalle. Néanmoins le théorème assure que toute fonction continue sur un intervalle est fermé et borné (compact) est uniformément continue sur cet intervalle.

Théorème 3.4.24 (Heine-Cantor) *Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.*

TD : limite et continuité

Limites

Exercice 1 *Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :*

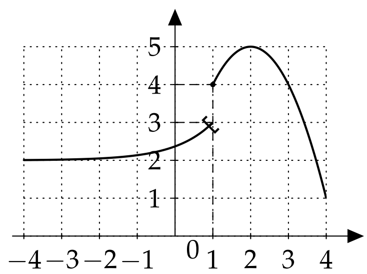
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\frac{1-x}{x^2-4}} \end{array}, \quad g: \begin{array}{ccc}]-\infty; e] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(-2x^2+(6+e)x-3e\right) \end{array},$$

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{(x+6)e^x} & \text{pour } x \in]-\infty, -5] \\ \frac{\sqrt{-x+1}}{\ln|x|-1} & \text{pour } x \in]-5, +\infty[\end{cases} \end{array},$$

$$i: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1-e^x} + x^2 \ln\left(x^2+3x+2\right) \end{array}.$$

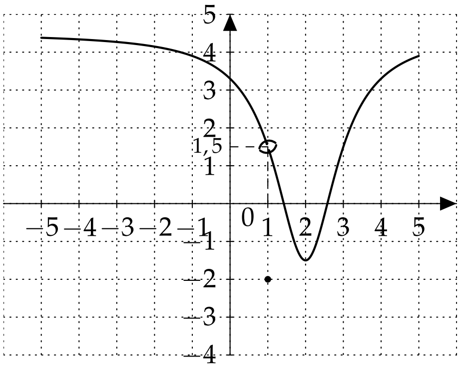
Exercice 2 *Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans ce repère est représenté la courbe d'une fonction f.*

1. *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.*
2. *Déterminer $f(-4)$, $f(1)$, $f(2)$ et $f(4)$.*
3. *Déterminer les limites $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$. f admet-elle de limite en 1 ?*



Exercice 3 *Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans ce repère est représenté la courbe d'une fonction g.*

1. *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.*
2. *Déterminer $g(1)$ et $g(2)$.*
3. *Déterminer les limites $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)$. g admet-elle de limite en 1 ?*



Exercice 4 **Etudier les limites suivantes**

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{1/x}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$

c) $\lim\limits_{x\to \pi/3} \dfrac{\tan(2x-\frac{2\pi}{3})}{\sin(3x)}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x\ln(x))}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$

g) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{\ln(x+3)}{\sqrt{x^2+5}-3}$

Exercice 5 1. *Dans chacun des cas suivant, déterminer entre f et g la fonction qui est prépondérante au voisinage de x_0.*

(a) $f(x) = 1-e^x+\ln(1+x)$ *et* $g(x)=\sin x;\quad x_0=0.$

(b) $x(\ln x)^4$ *et* $(x+3)e^x$; $x_0=+\infty$.

(c) $x^3e^{\frac{1}{x}}$ *et* $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\frac{1}{2x}}$; $x_0=+\infty$

(d) $x+1+\ln x$ *et* $\ln x$; $x_0=+\infty$.

2. *Montrer que les fonctions suivantes sont équivalentes au voisinage de x_0.*

(a) $f(x)=1-e^{x+2}$ *et* $\ln(3+x)$; $x_0=-2$.

3. *Dans chacun des cas suivant, étudier la comparaison locale de f et g au voisinage de x_0.*

(a) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ *et* $g(x)=\frac{\sin x}{x};\quad x_0=+\infty.$

(b) $f(x)=1-e^x+2\ln(1+x)$ *et* $g(x)=\sin x;\quad x_0=0.$

(c) $f(x)=x^3-3x-2$ *et* $g(x)=(x+1)^3\ln(x+1);\quad x_0=0.$

Exercice 6 *Déterminer au voisinage de $+\infty$ un équivalent de chacune des fonctions suivantes.*

1. $f(x)=\ln(x^3+\ln(x)-1)$.

2. $g(x) = \ln\left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x}\right)$.

Exercice 7 Comparer les fonctions suivantes au voisinage des points indiqués

a) $x\ln(x)$ **et** $\ln(1+2x)$ **au voisinage de** 0

b) $x\ln(x)$ **et** $\ln(x^2)\sin(x)\sqrt{x^2+3x}$ **au voisinage de** $+\infty$

c) $\dfrac{1}{x+1}$ **et** $\ln(1+\dfrac{1}{x})$ **au voisinage de** -1

d) $x^{-\frac{1}{x}}$ **et** $\ln(x)$ **au voisinage de** 0**.**

Exercice 8 Trouver à l'aide d'équivalents les limites suivantes

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\sin(x)}{x^2\tan(x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))(1-e^x)}{3x^3+2x^4}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$

Exercice 9 .

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2\ln(x)},\ \lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x}),\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln(x)},\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(\sqrt{x}+1)}{x+2}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x+1}\ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right),\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x^x-1)}{\ln(x+1)},\ \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x,\ \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2-3x+2}}{(\ln x)^3}$$

Exercice 10 *1. Étudier la limite en* 0 *des fonctions suivantes* $x \mapsto E\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \mapsto xE\left(\frac{1}{x}\right)$ *et* $x \mapsto x^2E\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+\cos x}{x+1}$

Exercice 11 .

Calculer lorsqu'elle existe les limites suivantes :

$$\lim_{x\to \alpha} \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}\ (\textit{pour } n\in\mathbb{N}),\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x},\ \lim_{x\to \alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$$

Exercice 12 .

Pour $a, b \in]0,+\infty[$*, trouver :*

$$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}},\qquad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 13 *Justifier que les fonctions suivantes n'admettent pas de limite en* 0 *:*

1. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Continuité

Exercice 14 *Etudier la continuité sur* $\mathbb{R}$ *des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = E(x)\sin(x)$.
2. $g(x) = E(x)\sin(\pi x)$.

Exercice 15 *Déterminer les points de discontinuité de chacune des fonctions suivantes définies sur* $\mathbb{R}$ *:*

1. $h(x) = x + \sqrt{x - E(x)}$.
2. $p(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

Exercice 16 *On donne la fonction* f *définie de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(e^x-1)^2}{\sqrt{1-x}-1} & pour \quad x \in]-\infty;0] \\ \ln(1+x) & pour \quad x \in]0;1] \\ ax+b & pour \quad x \in]1;+\infty[\end{cases}$$

où a et b sont deux paramètres réels.

1. *Montrer que* f *est continue en* 0.
2. *On suppose que* $b = -\ln(3)$. *Déterminer la valeur de a pour laquelle* f *est continue en 1.*
3. *On suppose que* $a = \frac{1}{2}$ *et* $b = 0$. *Étudier la continuité de* f *sur* $\mathbb{R}$.
4. *On suppose que* $a = \frac{1}{2}\ln 2$ *et* $b = \frac{1}{2}\ln 2$. *Étudier la continuité de* f *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 17 *Soit la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) & pour \ x < 0 \\ xe^{-\frac{1}{x}} & pour \ x > 0 \end{cases}$$

Montrer que l'on peut prolonger f *par continuité en* 0. *Définir le prolongement noté* $\tilde{f}$ *de* f.

Exercice 18 *Étudier le prolongement par continuité de chacune des fonctions* f *suivantes en* x_0. *Dans le cas où la fonction* f *est prolongeable par coninuité en* x_0, *donner son prolongement par continuité* g *en* x_0.

1. $f(x) = \begin{cases} 3 - x - e^x & si \quad x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}\ln(1+2\sqrt{x})}{x} & si \quad x > 0 \end{cases} \quad ; \quad x_0 = 0$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(2-x)}{4-4x} & si \quad x < 1 \\ \dfrac{x^{3/2} - x}{2(x^2-1)} & si \quad x > 1 \end{cases} \quad ; \quad x_0 = 1$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2-x}-1}{-6+3x} & si \quad x < 2 \\ \dfrac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{x-2} & si \quad x > 2 \end{cases} \quad ; \quad x_0 = 2$

Exercice 19 *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = xE\left(x - \frac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité en* 0.

Exercice 20
1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est une fonction constante.*
2. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(x^2)$. Montrer que f est une fonction constante.*

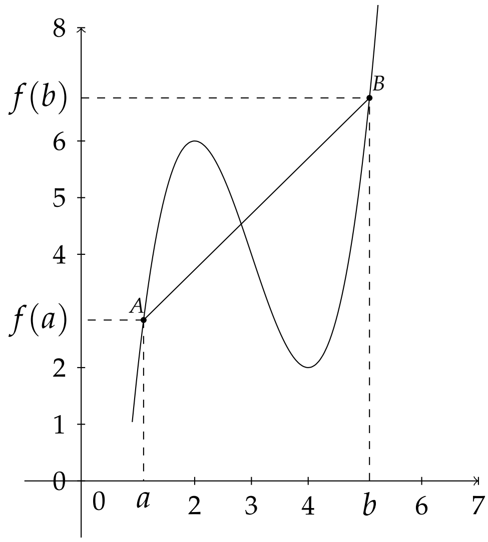
Chapitre 4

Dérivabilité

4.1 Dérivée en un point

Définition 4.1.1 (taux d'accroissement) .
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux éléments de I tels que $a \neq b$. Le taux d'accroissement ou de variation de f entre a et b est le nombre réel

$$\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}. \tag{4.1.1}$$



De façon graphique, Le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b représente la pente ou le coefficient directeur de la droite passant par les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.
Interprétation : *C'est la variation moyenne des valeurs de f entre a et b.*

Application

La quantité de bits reçue par un routeur en une durée de t secondes de réception est donnée par $Q(t) = 100 + 2t^2$. Déterminer la quantité moyenne de bits reçus entre la trentième et la

quarantième seconde.
La quantité moyenne de bits reçus par le routeur entre la trentième et la quarantième seconde est le taux d'accroissement de Q entre 30s et 40s. Ainsi

$$\frac{Q(40)-Q(30)}{40-30}=\frac{(100+2\times 40^2)-(100+2\times 30^2)}{40-30}=140.$$

En conclusion Le routeur reçoit en moyenne, entre la trentième et la quarantième seconde, 140 bits par seconde.

Remarque 4.1.2 *Cette quantité calculée est en fait la vitesse moyenne d'informations reçues par le routeur entre la trentième et la quarantième seconde.*

4.1.1 Dérivabilité en un point-Nombre dérivé

Définition 4.1.3 *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. f est **dérivable** en x_0, si la limite du taux de variation de f entre x et x_0 quand x tend vers x_0 existe c'est-à-dire que*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell,\ (\ell\in\mathbb{R}).$$

La limite ℓ est appelée le nombre dérivé de f en x_0 qui est noté $f'(x_0)$: $f'(x_0)=\ell$.

Remarque 4.1.4 *En posant $h=x-x_0$, il est clair que*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Par conséquent la dérivabilité de f en x_0 est aussi définie par

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)=\ell,\ (\ell\in\mathbb{R}).$$

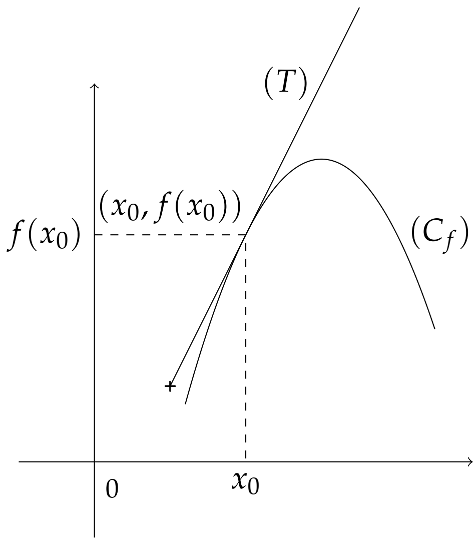
Exemple 25 *a/ Soit $f\ :\ x\mapsto x^2 ;\, x_0\in\mathbb{R}$.*

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0} x+x_0=2\,x_0$$

b/ Soit $g\ :\ x\mapsto sin\,x ;\, x_0\in\mathbb{R}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{sin\,x-sin\,x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\,sin\,\dfrac{x-x_0}{2}\,cos\,\dfrac{x+x_0}{2}}{x-x_0}=cos\,x_0$$

4.1.2 Interprétation géométrique de la dérivabilité en un point



Lorsque f est dérivable en x_0, sa courbe représentative (C_f) admet, dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, une tangente (T) non parallèle à l'axe des ordonnées au point ayant pour coordonnées $(x_0, f(x_0))$. L'équation de la tangente (T) est donnée par

$$\boxed{(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}.$$

Il est clair que le nombre dérivée de f en x_0 $(f'(x_0))$ représente la pente (c'est-à-dire le coefficient directeur) de la tangente (T) à (C_f) au point $(x_0, f(x_0))$.

Exercice 21 *On donne*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + 3x \text{ si } x < 0 \\ \\ -2x^2 + 3x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Remarque 4.1.5 *Si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0. Dans ce cas (C_f) admet, au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.*

Définition 4.1.6 .

1. *On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe c'est-à-dire $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_1$, $\ell_1 \in \mathbb{R}$. Cette limite, notée ${f_g}'(x_0)$, est appelée dérivée à gauche de f en x_0.*
2. *On dit que f est dérivable à droite en x_0 si $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe c'est-à-dire $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_2$, $\ell_2 \in \mathbb{R}$. Cette limite, notée ${f_d}'(x_0)$, est appelée dérivée de f à droite en x_0.*

Proposition 4.1.7 *f est dérivable en x_0 si et seulement si*

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell,\ \ell\in\mathbb{R}$$

c'est-à-dire que

$$f_g{}'(x_0)=f_d{}'(x_0)=\ell,\ \ell\in\mathbb{R}.$$

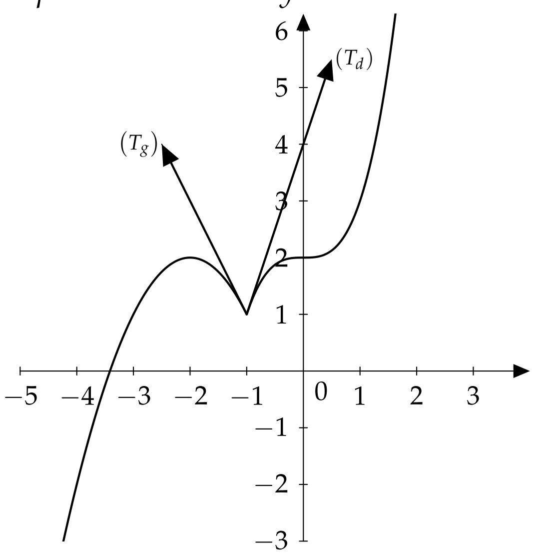
Proposition 4.1.8 *On suppose que f est dérivable à gauche en x_0 et à droite en x_0.*
Si $f_g{}'(x_0)\neq f_d{}'(x_0)$, alors f n'est pas dérivable en x_0 et (C_f) admet deux demi-tangentes au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$:

1. *la demi-tangente à gauche (T_g) d'équation (T_g) : $y=f_g{}'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$,*
2. *la demi-tangente à droite (T_d) d'équation (T_d) : $y=f_d{}'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.*

Exemple 26 *considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x)=\begin{cases} -(x+2)^2+2 & si \quad x\in]-\infty;-1] \\ x^3+2 & si \quad x\in]-1,+\infty[\end{cases}$$

La fonction f est continue en -1, mais n'est pas dérivable en -1. En effet, elle est dérivable à gauche en -1 et à droite en 1 mais $f'_g(-1)\neq f'_d(-1)$. Ainsi la courbe représentative de f admet au point d'abscisse -1 deux demi-tangentes. La courbe représentative de f est celle de la figure ci-après. Les deux demi-tangentes au point d'abscisse -1 y sont bien mentionnées.



Proposition 4.1.9 *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Preuve. Soit $h\in\mathbb{R}^*$ tel que $x_0+h\in\mathcal{D}_f$, on a

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}.$$

La fonction f étant dérivable en x_0 la limite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$ est finie, ce qui entraîne $\lim\limits_{h\to 0}h\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}=0$ et par suite $\lim\limits_{h\to 0}f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right)$ i.e. f est continue en x_0.□

Remarque 4.1.10 *La réciproque de la Proposition 4.1.9 est fausse. Une fonction peut être continue en un point x_0 sans être dérivable en ce point. On peut, par exemple, considérer la fonction $x\mapsto |x|$ ou l'exemple 26.*

4.1.3 Différentiabilité d'une fonction

Définition 4.1.11 *Une fonction f est différentiable en un point x_0 si f est définie au voisinage de x_0 et s'il existe un réel A dépendant de x_0 tel que pour h suffisamment petit, on ait*

$$f(x_0+h)-f(x_0)=A.h+\varepsilon(h).h \tag{4.1.2}$$

avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$, ce qui revient au même :

$$f(x_0+h)-f(x_0)=A.h+\underset{0}{o}(h). \tag{4.1.3}$$

Théorème 4.1.12 *f est différentiable au point x_0 si et seulement si f est dérivable au point x_0.*

Démonstration 4 *Si f est différentiable en x_0, alors il existe $A\in\mathbb{R}$ tel que*

$$f(x_0+h)-f(x_0)=A.h+\varepsilon(h).h.$$

Ainsi $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A\in\mathbb{R}$. Par conséquent f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=A$.
Inversement, si f est dérivable en x_0, alors $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$. Il s'en suit alors que $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+o(1)$, lorsque $h\to 0$ ou encore $f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0).h+o(h)$, $h\to 0$. f est alors différentiable au point x_0.

D'après cette démonstration, il est clair que si f est différentiable en x_0, le réel A dans la relation (4.1.2) est $f'(x_0)$: $A=f'(x_0)$.

Définition 4.1.13 *Si f est différentiable en point x_0, alors l'application linéaire*

$$h\mapsto A.h=f'(x_0).h$$

est appelée ***la différentielle*** *de f en x_0. On la note df_{x_0}.*
Ainsi

$$df_{x_0}(h)=f'(x_0).h \tag{4.1.4}$$

Si on considère la fonction $g(x)=x$, on montre aisément que $g'(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$dg_{x_0}(h)=dx(h)=g'(x_0).h=1.h=h.$$

La relation (4.1.4) *s'écrit alors*

$$df_{x_0}(h)=f'(x_0)dx(h) \tag{4.1.5}$$

D'où

$$df_{x_0}=f'(x_0)dx. \tag{4.1.6}$$

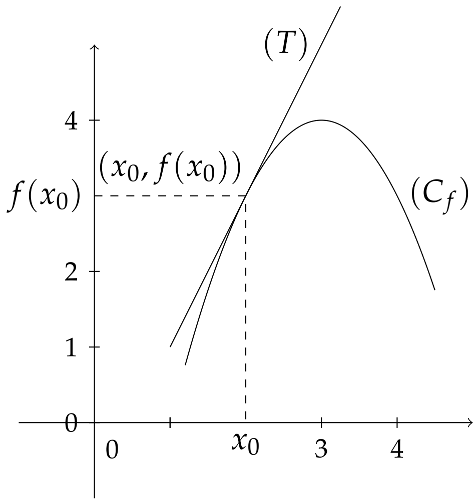
Pour une fonction f dérivable en chaque point x d'un intervalle $]a,b[$, la différentielle de f sur $]a,b[$ est notée $df=f'(x)dx$ avec $x\in]a,b[$. On a alors les notations

$$\frac{df}{dx}(x_0)=f'(x_0),\quad \frac{df}{dx}=f'(x).$$

4.1.4 Approximation affine

Soit f une fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$. On sait que la courbe de f admet alors une tangente (T) au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



On observe que la courbe de f est proche de (T) au voisinage du point $(x_0, f(x_0))$.
Nous pouvons justifier cette observation :
Quand x est voisin de x_0, son image par f est proche de $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Ainsi on déduit que la fonction $x \longmapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ **est approximation affine de la fonction** f **au voisinage de** x_0**.**

4.1.5 Dérivabilité en un point et opérations

Proposition 4.1.14 *Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Alors*

i) $f + g$ *et dérivable en* x_0 *et* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf *est dérivable en* x_0 *et* $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

iii) fg *est dérivable en* x_0 *et* $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

iv) *Si* $g(x_0) \neq 0$ *alors* $\dfrac{f}{g}$ *est dérivable en* x_0 *et* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\Big(g(x_0)\Big)^2}$.

Proposition 4.1.15 *(Dérivée de la composée de deux fonctions) Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$\Big(g \circ f\Big)'(x_0) = f'(x_0)g'\Big(f(x_0)\Big)$$

Exemple 27 *Soit $f\ : x \mapsto e^{\cos x}$; calculer $f'(x_0)$; avec $x_0 \in \mathcal{D}_f$.*

Proposition 4.1.16 *(Dérivée d'une fonction réciproque) Soit $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, dérivable en $x_0 \in I$ telle que $f'(x_0) \neq 0$. Alors l'application réciproque de f, $f^{-1}\ :\ f(I) \longrightarrow I$ est dérivable en $f(x_0)$ et*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Démonstration 5 *Remarquer que $f \circ f^{-1} = Id$. $\Box$.*

Exercice
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$. Montrer que la restriction g de f sur l'intervalle $[\dfrac{\pi}{2}, \pi[$ possède une application réciproque g^{-1}.
Donner l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de g^{-1}.
Calculer $\left(g^{-1}\right)'$
Solution
La fonction sin étant positive, strictement décroissante et continue sur $[\dfrac{\pi}{2}, \pi[$, f est strictement croissante et continue sur $[\dfrac{\pi}{2}, \pi[$, c'est donc une bijection de $[\dfrac{\pi}{2}, \pi[$ sur $[1, +\infty[$.
Autrement dit g^{-1} est définie sur $[1, +\infty[$.
De plus f est dérivable sur $[\dfrac{\pi}{2}, \pi[$ et $\forall x \in\ [\dfrac{\pi}{2}, \pi[\quad f'(x) = -\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$;
en particulier $f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{2}$. Nous en déduisons que l'ensemble de dérivabilité de g^{-1} est $]1, +\infty[$.
Posons $y = g(x)$
$\forall y\ \in]1, +\infty[, \quad \left(g^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{g'(x)} = -\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}$
où $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ tel que $\sin(x) = \frac{1}{y}$.

Alors comme $\cos(x) < 0$ sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$, nous avons $\cos(x) = -\sqrt{1 - \sin(x)} = -\sqrt{1 - \dfrac{1}{y^2}}$

Finalement $\forall y\ \in]1, +\infty[, \quad \left(g^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}$

4.2 Fonction dérivée

Définition 4.2.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en tout point de I. On appelle fonction dérivée de f sur I, la fonction réelle définie sur I qui à chaque $x \in I$ associe $f'(x)$, le nombre dérivé de f en x. Elle est notée f' ou $\frac{df}{dx}$.*

4.2.1 Rappel : fonctions dérivées usuelles

Fonction f	Fonction f'	f est dérivable sur
$x \longmapsto c[c \in \mathbb{R}]$	$x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto ax(a \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^r(r \in \mathbb{Q}^*)$	$x \longmapsto rx^{r-1}$	$\mathbb{R}$ si $(r \in \mathbb{Q}_+^*)$ $\mathbb{R}^*$ si $(r \in \mathbb{Q}_-^*)$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, \infty[$
$x \longmapsto \ln x$	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$]0, \infty[$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto a^x(a > 0)$	$x \longmapsto a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto sin(x)$	$x \longmapsto cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto cos(x)$	$x \longmapsto -sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto tan(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{cos^2(x)}$	$]-\frac{\pi}{2}+k, \frac{\pi}{2}+k[(k \in \mathbb{Z})$
$x \longmapsto cotan(x)$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{sin^2(x)}$	$]k\pi, \pi + k\pi[(k \in \mathbb{Z})$

4.2.2 Dérivées et opérations

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$. λ est un réel donné.

- Dérivée d'une fonction multipliée par un réel
  λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$

- Dérivée de la somme
  $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$
- Dérivée de la différence
  $u - v$ est dérivable sur I et $(u - v)' = u' - v'$

- Dérivée du produit
  uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + v'u$

- Dérivée du quotient
  $\frac{u}{v}$ est dérivable sur $\{x \in I; v(x) \neq 0\}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.
- Si $r \in \mathbb{Q}_+^*$, u^r est dérivable sur I et $(u^r)' = ru'u^{r-1}$.
- Si $r \in \mathbb{Q}_-^*$, $u \neq 0$ sur I, alors u^r est dérivable sur I et $(u^r)' = ru'u^{r-1}$

4.2.3 Dérivée d'une composée

u est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$; v est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ contenant $f(I)$.
Alors la composée de u par v est dérivable sur I et $(v \circ u)'(x) = v'(u(x) * u'(x)$.

APPLICATIONS

Soit u une fonction dérivable sur ensemble I de $\mathbb{R}$.

fonction	$\sqrt{u}$ (avec $u > 0$ sur I)	$\ln u$ (avec $u > 0$ sur I)	e^u	$\cos(u)$	$\sin(u)$
Ensemble de dérivabilité	I	I	I	I	I
Fonction dérivée	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$	$u'cos(u)$	$u'sin(u)$

Dérivées successives

Définition 4.2.2 *Soit f une fonction dérivable sur ensemble I de $\mathbb{R}$. Si sa fonction dérivée f' est à son tour dérivable sur I, alors sa fonction dérivée $(f')'$ est appelée fonction dérivée seconde ou d'ordre 2 de f sur I et est notée f'' ou $\dfrac{d^2f}{dx^2}$. Si pour un entier n strictement positif donné, la dérivée d'ordre n de f, notée $f^{(n)}$ ou $\dfrac{d^nf}{dx^n}$, est définie et dérivable sur I, alors sa fonction dérivée première $\left(f^{(n)}\right)'$ se note $f^{(n+1)}$ et est appelée fonction dérivée d'ordre $(n+1)$ de f sur f.*
La dérivée d'ordre n de f sur I est aussi appelée la dérivée n-ième de f sur I.
En résumé,

$$\begin{aligned}
f^{(1)} &= f',\\
f^{(2)} &= \frac{d^2f}{dx^2} = f'' = (f')',\\
f^{(3)} &= \frac{d^3f}{dx^3} = (f^{(2)})',\\
&\vdots\\
f^{(n-1)} &= \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}} = \left(f^{(n-2)}\right)',\\
f^{(n)} &= \frac{d^nf}{dx^n} = \left(f^{(n-1)}\right)' \qquad .
\end{aligned}$$

Par convention, $f^{(0)} = f$.

Définition 4.2.3 .

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On notera par $C^n(I, \mathbb{R})$ ou tout simplement $C^n(I)$, l'ensemble des fonctions réelles f admettant les n premières dérivées successives telles que $f^{(n)}$ soit continue I.*
   *$f \in C^n(I)$ se dit "f **est de classe C^n sur** I" ou "f, n **-fois continûment dérivable sur** I".*
   ***<u>N.B</u>** : $f \in C^0(I)$ signifie que f est continue sur I.*
2. *Une fonction f est indéfiniment dérivable sur I si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est de classe C^k. Si f est indéfiniment dérivable sur I, alors on dit que f est de classe C^∞ sur I.*

Exemple 28 1. *Soit la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est définie par

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$$

Cependant f' n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi} = 0$ et

$$\lim_{n\to\infty} f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -1 \neq f'(0).$$

Donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. *La fonction $f : x \to \ln x$ est de classe C^∞ sur $]0, \infty[$ car*

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } \forall n > 1, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Théorème 4.2.4 (Leibniz) *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions admettant les n premières dérivées successives en un point x de I. Alors la fonction fg admet une dérivée n-ième au point x et on a la formule suivante dite de Leibniz.*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \text{(Formule de Leibniz).}$$

Exemple : Calculer la dérivée n ième de la fonction $f(x) = (x^2 + 2x - 1)\sin(x)$.$\square$

Théorème 4.2.5 (Théorème d'inversion globale) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telle que f' non nul sur I. Alors f est injective. En particulier f réalise une bijection de I dans $f(I)$. En outre la réciproque f^{-1} de f est de classe classe C^1 sur $f(I)$ et pour tout $x \in I$,*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \text{ ou } \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \forall y \in f(I).$$

Remarque 4.2.6 *Dans le théorème précédent, lorsque f est de classe C^k sur I, alors sa réciproque est de classe C^k sur $f(I)$ et par conséquent f est un C^k-difféomorphisme de I dans $f(I)$.*

4.3 Principaux théorèmes du calcul différentiel

4.3.1 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

Théorème 4.3.1 (Rolle) *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.*

$$Si \quad \begin{cases} f \text{ est continue sur } [\,a\,,\ b\,] \\ f \text{ est dérivable sur }]\,a\,,\ b\,[\\ f\,(a) = f\,(b) \end{cases}$$

alors il existe $c \in]\,a\,,\ b\,[$ tel que $f'\,(c) = 0$.

Preuve La fonction f étant continue sur $[a,\, b]$, elle est bornée sur $[a,\, b]$ et atteint ses bornes. Il existe donc x_m et $x_M \in [a,\, b]$ tels que Posons $f(x_m) = m = \min\limits_{x\in[a,\,b]} f(x)\,, \quad f(x_M) = M = \max\limits_{x\in[a,\,b]} f(x)$.

- Si $m = M$ alors f est constante et donc $f'(x) = 0$ pout tout $x \in]a\,,\, b[$
- Si $m \neq M$, alors on ne peut avoir simultanément $m = f(a)$ et $M = f(a)$. Sans perte de généralité, supposons que $M \neq f(a)$. Ainsi $x_M \in]a\,,\, b[$ (du fait de l'hypothèse $f(a) = f(b)$ on a $x_M \neq b$). Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x_M + h \in [a\,,\, b]$, on a

$$\frac{f(x_M+h) - f(x_M)}{h} \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{si} \quad h < 0 \\ \leq 0 & \text{si} \quad h > 0 \end{cases}.$$

f étant dérivable en x_M par hypothèse en en déduit que $f'(x_M) = 0$.$\square$

Théorème 4.3.2 ***(des accroissements finis ou égalité des accroissement finis)*** *Soient $(a\,,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f\; :\; [a\,,\; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue sur $[\,a\,,\; b\,]$ et dérivable sur $]\,a\,,\; b\,[$, alors il existe $c \in]\,a\,,\; b\,[$ tel que*

$$f\,(b) - f\,(a) = (b-a)\, f'\,(c) \tag{4.3.1}$$

ce qui s'écrit encore il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f\,(b) - f\,(a) = (b-a)\, f'\,(a + \theta(b-a)). \tag{4.3.2}$$

Démonstration 6 *Considérons la fonction*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [a,\, b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a) \end{array}$$

La fonction φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]\,a\,,\; b\,[$. D'autre part $\varphi(a) = \varphi(b)$, il existe donc, d'après le théorème de Rolle (theorème 4.3.1), $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ i.e. $f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{b-a}$.$\square$

Corollaire 4.3.3 (Inégalité des accroissements finis) *Soit $f\; :\; I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. S'il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant M$, alors*

$$\forall x, y \in I,\; |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|.$$

Démonstration 7 *Soit $x, y \in I$. f étant dérivable sur I, alors f est continue sur $[x, y]$ (ou $[y, x]$) et dérivable sur $]x, y[$ (ou $]y, x[$). Il existe alors $c \in]x, y[$ ou $]y, x[$, tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$. Comme $|f'(c)| \leqslant M$, alors on a*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|.$$

Exemple 29 *Considérons la fonctions sinus dérivable sur $I = \mathbb{R}$: $f(x) = \sin x$. On a $f'(x) = \cos x$ et $\forall x \in \mathbb{R},\; |\cos x| \leqslant 1$. Ainsi d'après l'inégalité des accroissement finis,*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\; |\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|.$$

Pour $y = 0$, on déduit alors que

$$\forall x \in \mathbb{R},\; |\sin x| \leqslant |x|.$$

Théorème 4.3.4 *(des accroissements finis généralisé)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ tels que $\forall\, x \in]\,a\,,\, b\,[\; g'(x) \neq 0$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.3.3}$$

Démonstration 8 *Considérer la fonction*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [a,\, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)). \end{array}$$

Appliquer ensuite le théorème de Rolle à la fonction φ.

4.3.2 Variation de fonctions

4.3.3 Monotonie d'une fonction dérivable

Soient $a\,,\, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, $I = [a\,,\, b]$ (ou $[a\,,\, b[\,,\ ]a\,,\, b]\,,\ ]a\,,\, b[$)

Théorème 4.3.5 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue sur I et dérivable sur $]\,a,\ b\,[$, alors $f'(x) = 0$ sur $]\,a,\ b\,[$ si et seulement si f est une fonction constante sur I.*

Démonstration 9 *Supposons que $f'(x) = 0$ sur $]\,a,\ b\,[$. Soit $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$. D'apres le théorème des accroissements finis, appliqué à f sur $[x_1\,,\ x_2]$, il existe $c \in]x_1\,,\ x_2[$ tel que*

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)\, f'(c) = 0.$$

D'où $f(x_1) = f(x_2)$.
Inversement, si f est constante sur I, alors il est évident que $f' = 0$ sur $]\,a,\ b\,[$.

Théorème 4.3.6 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $]\,a\,,\ b\,[$. Pour que f soit croissante (resp. décroissante) sur I, si et seulement si*

$$\forall\, x \in]\,a\,,\ b\,[\; f'(x) \geq 0 \text{ (} resp.\ f'(x) \leq 0).$$

Démonstration 10 *Si f est croissante sur I, alors pour tout $x \in]a, b[$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $x + h \in]a, b[$, on a $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$. Ainsi*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \geqslant 0.$$

D'où $f' \geqslant 0$ sur $]a, b[$.
Réciproquement, supposons $f' \geqslant 0$ sur $]a, b[$ et montrons que f est croissante sur I.
Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$. D'après le théorème des accroissements finis, f étant continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Comme $f'(c) \geqslant 0$, on a $f'(c)(x_2 - x_1) \geqslant 0$ et par conséquent, $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. D'où f est croissant sur I.

4.3.4 Etude des extrémums pour une fonction dérivable

Soient $a\,,\,b\ \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, $I = [a\,,\,b]$ (ou $[a\,,\,b[\,,\ ]a\,,\,b]\,,\ ]a\,,\,b[$)

Définition 4.3.7 *Soit $x_0 \in\ I$, $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur I.*

i) On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local $f(x_0)$ en x_0 s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset I$ et $\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$,

$$f(x) \leq f(x_0)\ (\ resp.\ \ f(x) \geq f(x_0)).$$

ii) On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local strict $f(x_0)$ en x_0 s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset I$ et $\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\}$,

$$f(x) < f(x_0)\ (\ resp.\ \ f(x) > f(x_0))$$

iii) On dit que f admet un extremum local (resp. extremum local strict) en x_0 si et seulement si f admet soit un maximum ou soit un minimum local en x_0 (resp. soit maximum local strict ou soit un minimum local strict en x_0).

Théorème 4.3.8 *Soit $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I., dérivable sur $]a, b[$. f admet un extremun local en $x_0 \in]a, b[$ si et seulement si f' s'annule en x_0 en changeant de signe.*

Remarque 4.3.9 *1/ Le Théorème4.3.8 tombe en défaut si x_0 est une extrémité de I.*

Exemple 30

$$f\ :\ \begin{array}{ccc} [0\,,\,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}.$$

f admet un minimum local en $x_0 = 0$ mais $f'\,(0) = 1$.

2/ Une fonction peut admettre un extremum local en x_0 sans être dérivable en x_0.

Exemple 31 *$f\ :\ x \longrightarrow |x|$ et $x_0 = 0$.*

3/ Si f est dérivable en x_0 et $f'\,(x_0) = 0$, on ne peut pas déduire que f admet un extremum local en x_0.

Exemple 32 *$f\ :\ x \longrightarrow x^3$ et $x_0 = 0$.*

4.4 Dérivées et calcul de limites

Théorème 4.4.1 (de l'Hospital) *ou **Règle de l'Hopital** Soient f et g deux fonctions dérivables au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et $g'(x) \neq 0$ pour $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ avec $\delta > 0$.*
Si ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$) et $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infinie,

$$alors\ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemple 33 *Calculer* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin(x) - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4}$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{4x^3} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-\sin(x) + x}{12x^2} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-\cos(x) + 1}{24x}$$
$$= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{24} = 0$$

Remarque 4.4.2 *La conclusion de la règle de l'Hospital reste inchangée pour d'autres types de limites, notamment lorsque* $x \to x_0$ *est remplacé par :* $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$, $x \to -\infty$ *et* $x \to +\infty$

Tableau de dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$sinx$	$\cos x$
$cosx$	$-\sin x$
$tanx$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$Arctanx$	$\frac{1}{1+x^2}$
$Arctan\frac{x}{a}$	$\frac{a}{x^2+a^2}$
$Arcsinx$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$Arcosx$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
shx	chx
chx	shx
thx	$1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$
$Argthx$	$\frac{1}{1-x^2}$
$Argshx$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$Argchx$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

TD : dérivabilité

Exercice 1

Calculer les limites des fonctions f

a) $f(x) = \dfrac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ $(x \to \dfrac{\pi}{4})$

b) $f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^3}{x^3 - 1}$ $(x \to 1)$

c) $f(x) = x\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ $(x \to +\infty)$

d) $f(x) = x + \ln(1 - e^{2-x}) - \ln(x-2)$ $(x \to 2)$

Exercice 2
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 + 2 & \text{si} \quad x \in]-\infty; -1] \\ x^3 + 2 & \text{si} \quad x \in]-1, +\infty[\end{cases}$$

a) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$
b) Étudier la dérivabilité de f en -1.
c) Donner si possible les équations des demi-tangentes en -1.

Exercice 3
Soit n un entier strictement positif. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Etudier suivant les valeurs de n, si
a) f est continue sur $\mathbb{R}$
b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$
c) f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$

Exercice 4
On considère la fonction $h(x) = \frac{2}{\cos x}$.

1. Montrer que la restriction j de h sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ possède une application réciproque j^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.
2. Déterminer l'ensemble sur lequel j^{-1} est dérivable.
3. Calculer alors $\left(j^{-1}\right)'$ sur cet ensemble.

Exercice 5

a) En utilisant la formule de Leibniz, calculer les dérivées successives des fonctions suivantes :
$f(x) = x^2 e^x$, $g(x) = x^2(1+x)^n$ et $h(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$

b) Soient a, b deux réels et $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}(x)$ et en déduire $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$.

Exercice 6

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que f est dérivable sur $]a,b[$, et que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

Exercice 7

Soit $\alpha \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

a) Prouver que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1-\alpha}{(k+1)^\alpha} \leq (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{k^\alpha}$$

b) En déduire un équivalent de u_n.

c) Etudier le cas $\alpha = 1$.

Chapitre 5

Fonctions trigonométriques inverses et fonctions hyperboliques

5.1 Théorèmes de base

Théorème 5.1.1 *Si f est une fonction réelle strictement monotone et continue sur un intervalle I de bornes a, b, alors f est une bijection de I dans $f(I)$ et sa bijection réciproque est continue et strictement monotone de même monotonie que celle de f.*

Remarque 5.1.2 *$f(I)$ dans le théorème 5.1.1 est un intervalle de bornes $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in I}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in I}} f(x)$.*

Théorème 5.1.3 *Soit f une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle I et dérivable sur I. Si K est une partie de I telle que $\forall x \in K$, $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur $f(K)$ et*

$$\forall y \in f(K),\ \text{on a :}\ \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{f'(x)}\ \text{avec}\ y = f(x),\ x \in K.$$

5.2 Fonctions trigonométriques inverses

5.2.1 Fonction arc sinus

La fonction sinus c-à-d la fonction $x \mapsto \sin x$ est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle définie donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1, 1]$. On appelle *fonction arc sinus*, notée *Arcsin*, la bijection réciproque de cette bijection. Ainsi La fonction arcsinus est une fonction à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ définie et continue sur $[-1, 1]$. ELLe est impaire et n'est dérivable que sur $]-1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, Arcsin'(x) = (Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Propriété 9 .

1. $\forall x \in [-1, 1], \forall y \in \mathbb{R},\ y = Arcsinx \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

2. $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $Arcsin(sin x) = x$.
3. $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(Arcsin x) = x$.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$Arcsin y$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	y

$\forall x \in [-1;1], \forall y \in [-1;1]$, *si* $(Arcsin x + Arcsin y) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *alors*

$$Arcsin(x) + Arcsin(y) = Arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Remarque 5.2.1 *Si* $x > 0, y > 0$, *alors*

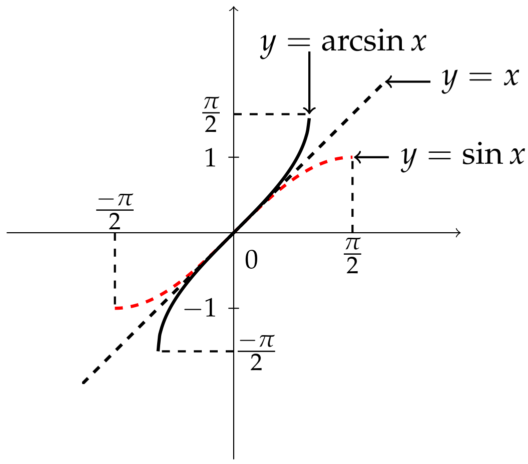


FIGURE 5.1 – Restriction de la fonction sinus sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et la fonction arc sinus

5.2.2 Fonction arc cosinus

La fonction cosinus c-à-d la fonction $x \mapsto \cos x$ est continue et strictement croissante sur $[0, \pi]$. Elle définie donc une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$. On appelle *fonction arc cosinus*, notée *Arccos*, la bijection réciproque de cette bijection. Ainsi La fonction arccos est une fonction à valeurs dans $[0, \pi]$ définie et continue sur $[-1, 1]$. ELLe n'est ni pair ni impaire. Elle est dérivable sur $]-1, 1[$ (et même de classe C^∞ sur $]-1, 1[$) et on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, Arccos'(x) = (Arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Propriété 10 .

1. $\forall x \in [-1,1], \forall y \in \mathbb{R},\ y = Arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$
2. $\forall x \in [0, \pi]$, $Arccos(\cos x) = x$.
3. $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(Arccos x) = x$.

y	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$Arccosx$
$\cos y$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	x

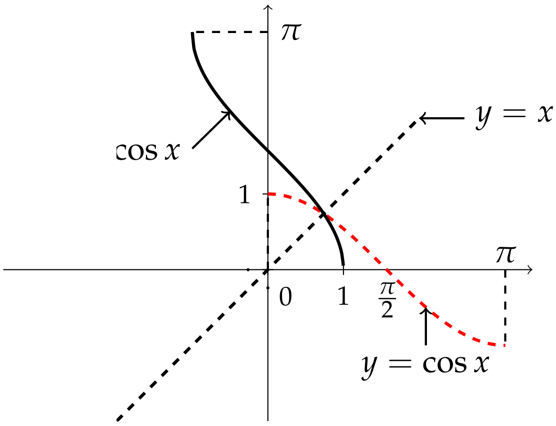


FIGURE 5.2 – Restriction de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$ et la fonction arc cosinus

Remarque 5.2.2 $\forall x \in [-1, 1],\ \cos(Arcsin(x)) = sin(Arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

5.2.3 Fonction arc tangente

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\left]\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\ >}} \tan x, \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ <}} \tan x\right[= \mathbb{R}$. On appelle *fonction arc tangente* sa bijection réciproque. Elle est notée Arctan et est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction arc tangente est impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ (et même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$).

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{on a } (Arctan)'(x) = Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Propriété 11

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ y = Arctan(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(Arctan(x)) = x.$

3. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ Arctan(\tan(x)) = x.$

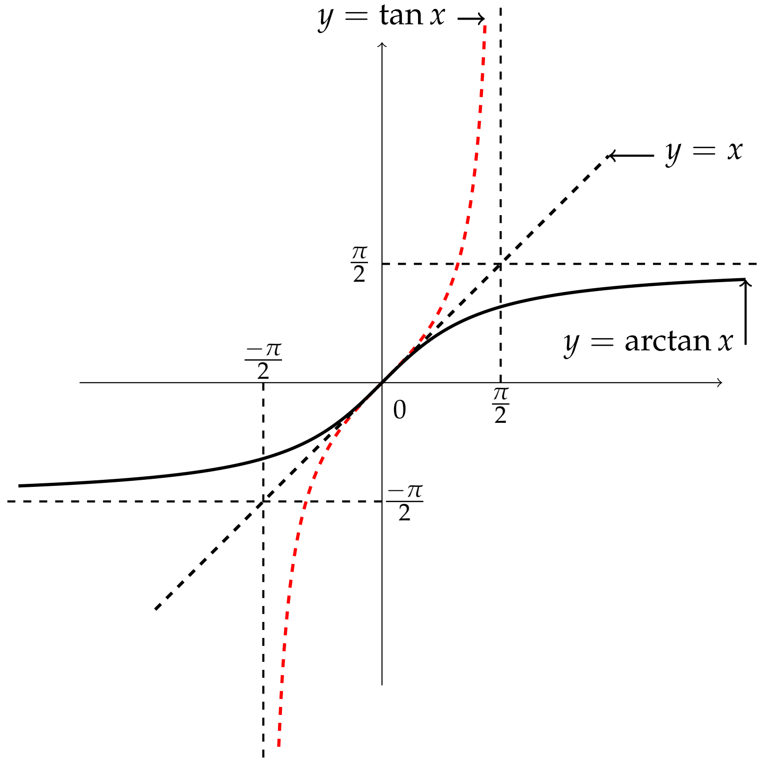


FIGURE 5.3 – Restriction de la fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et la fonction arc tangente

5.3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

5.3.1 Fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique

⋆ Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle *sinus hyperbolique de x*, noté $sh(x)$, et *cosinus hyperbolique de x*, noté $ch(x)$, les réels :

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

⋆ Les fonctions sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (plus encore elles sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$). La fonction sh est impaire alors que ch est paire. On a :

$$sh' = ch \qquad \text{et} \qquad ch' = sh$$

.

⋆ $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

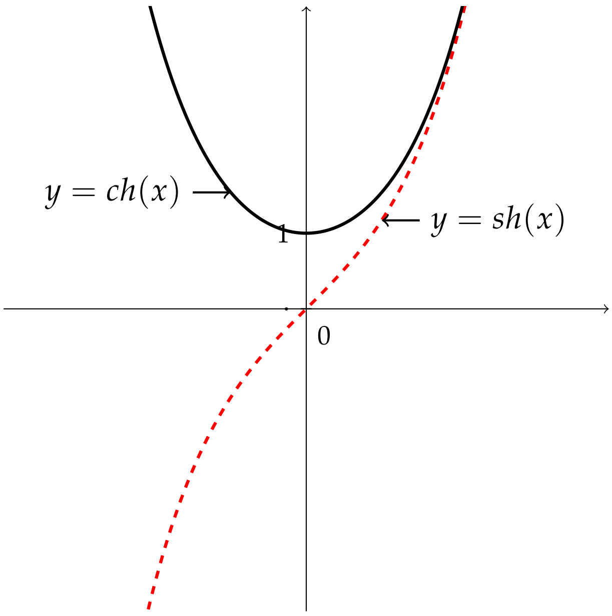


FIGURE 5.4 – Fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique

5.3.2 Fonction tangente hyperbolique

⋆ Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle *tangente hyperbolique de x*, noté $th(x)$, le réel :

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$$

⋆ La fonction th est impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ (et même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$). On a :

$$th' = 1 - th^2 = \frac{1}{ch^2}$$

.

⋆ La droite d'équation $y = 1$ (resp. $y = -1$) est asymptote à la courbe représentative de la fonction th en $+\infty$ (resp. $-\infty$)

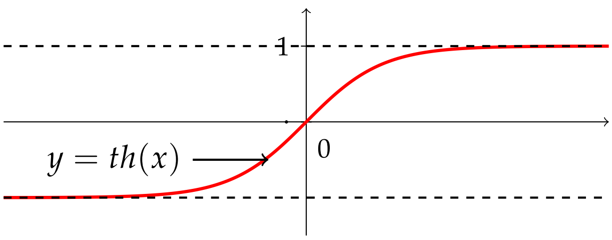


FIGURE 5.5 – Fonction tangente hyperbolique

5.3.3 Fonctions hyperboliques inverses

Fonctions arguments sinus et cosinus hyperboliques

⋆ La fonction sinus hyperbolique réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On appelle *fonction argument sinus hyperbolique* sa réciproque, notée $Argsh$. La fonction argument sinus hyperbolique est une fonction impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ (et même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$). On montre que,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ Argsh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ Argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Propriété 12 *1.* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ y = Argsh(x) \Leftrightarrow x = sh(y)$.

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ sh(Argsh(x)) = x$.

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ Argsh(sh(x)) = x$.

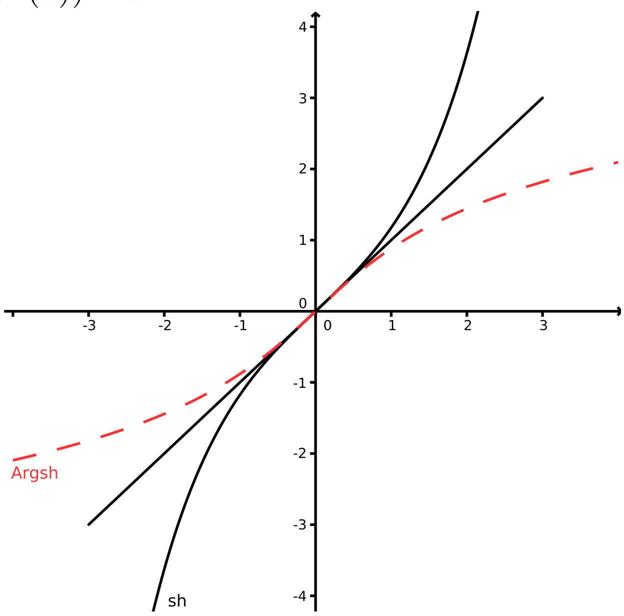


FIGURE 5.6 – Fonctions sinus hyperbolique et argument sinus hyperbolique

⋆ La fonction cosinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$. Sa bijection réciproque, définie de $[1,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$, est appelée *fonction argument cosinus hyperbolique* et est notée $Argch$. C'est une fonction dérivable sur $]1,+\infty[$ (et même de classe de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$).

$$\forall\, x \in [1,+\infty[,\ Argch(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \text{ et } \forall\, x \in]1,+\infty[,\ (Argch)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Propriété 13 *1.* $\forall x \in [1,+\infty[, \forall y \in \mathbb{R},\ y = Argch(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = chy \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

2. $\forall x \geqslant 1,\ ch(Argch(x)) = x$.

3. $\forall x \geqslant 0,\ Argch(ch(x)) = x.$

Remarque 5.3.1 *$Argsh(x)$ et $Argch(x)$ se lisent respectivement "Arg sinus de x" et "Arg cosinus de x".*

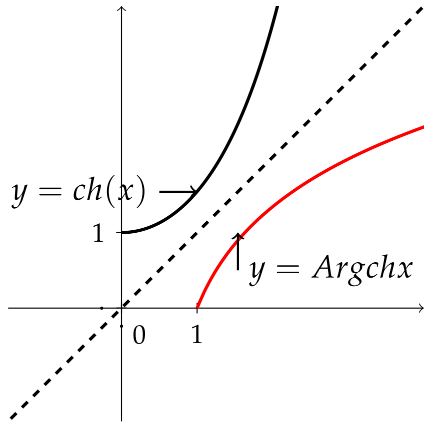


FIGURE 5.7 – Restriction de cosinus hyperbolique sur $[0, +\infty[$ et la fonction argument cosinus hyperbolique

Fonction argument tangente hyperbolique

La fonction tangente hyperbolique réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Sa bijection réciproque, définie de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$, est appelée *fonction argument tangente hyperbolique* et notée $Argth$. L'expression "$Argth(x)$" se lit "Arg tangente de x". $Argth$ est une fonction impaire et de classe C^∞ sur $]-1,1[$. On montre que,

$$\forall\, x \in]-1,1[,\ Argth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{et sa dérivée :} \quad \forall\, x \in]-1,1[,\ (Argth)'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Propriété 14 1. $\forall x \in]-1,1[, \forall y \in \mathbb{R},\ y = Argth(x) \Leftrightarrow x = th(y).$

2. $\forall x \in]-1,1[,\ th(Argth(x)) = x.$

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ Argth(th(x)) = x.$

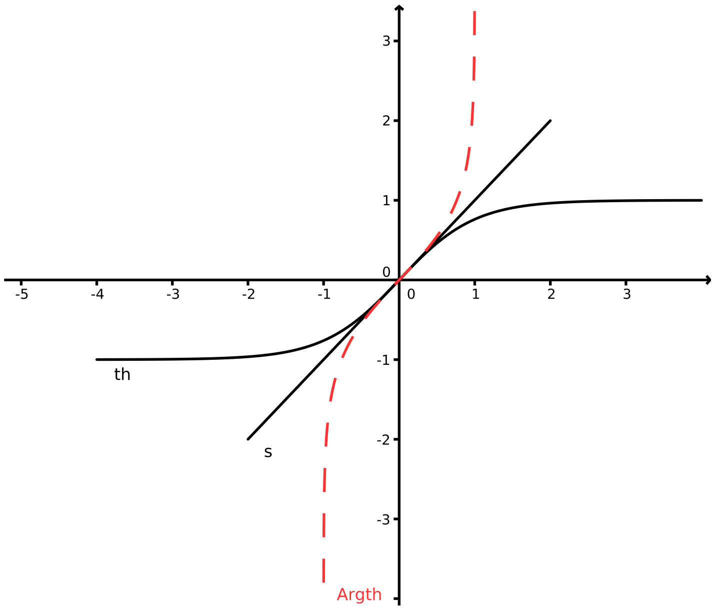


FIGURE 5.8 – Fonctions tangente hyperbolique et argument tangente hyperbolique

TD : Fonction trigonométriques inverses et fonctions hyperboliques

Exercice 1

Après avoir donné le domaine de définition, calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = argth\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$
2. $g(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$
3. $h(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
4. $i(x) = \arcsin(\ln x)$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :
a) $g(x) = \cos(2\arcsin(x))$
b) $g(x) = \cos(2\arctan(x))$

Exercice 3

Etudier et représenter sans faire usage de la dérivée, la fonction définie par :

$$f(x) = \arccos(\cos(x))$$

Exercice 3

Etudier et représenter graphiquement la fonction suivante :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

Domaine de définition, limites aux bornes du domaine et tableau de variation.

Chapitre 6

Développements limités

6.1 Définition et propriétés

Définition 6.1.1 *Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction réelle d'une variable réelle définie au voisinage de* 0*. On dit que f admet un développement limité (en abrégé* **d.l.***) d'ordre n au voisinage de* 0 *s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que*

i) deg $P \leq n$

ii) au voisinage de 0*, $f(x) = P(x) + \underset{0}{\circ}(x^n)$.*

Si
$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
alors
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \underset{0}{\circ}(x^n).$$

Le polynôme P est appelé la partie régulière (ou polynomiale ou principale) de f et $\circ_0(x^n)$ est le reste ou le terme complémentaire. Le polynôme P constitue en quelque sorte une approximation polynomiale de la fonction f dans un intervalle contenant 0.

Remarque

f admet un d.l. d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un polynôme P à cœfficients réels et une application $\varepsilon : x \mapsto \varepsilon(x)$ tels que :

i) deg $P \leq n$

ii) au voisinage de 0, $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

La définition précédente s'étend à un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.

Définition 6.1.2 *On dit que f admet un dl d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré au plus n, tel que*

$$f(x) = P(x - x_0) + \underset{x_0}{\circ}((x - x_0)^n)$$

soit

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \underset{x_0}{\circ}((x - x_0)^n).$$

La définition s'étend aussi à un voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

Définition 6.1.3 *On dit que f admet un dl d'ordre n au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré au plus n, tel que*

$$f(x) = P(\frac{1}{x}) + \underset{\infty}{\circ}(\frac{1}{x^n})$$

soit

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \underset{\infty}{\circ}(\frac{1}{x^n}).$$

N.B. Les propriétés qui suivent concernent les d.l. au voisinage de 0. Cependant elles s'étendent immédiatement au d.l. au voisinage de x_0 (fini ou infini). En effet, en posant

$$u = x - x_0 \text{ ou } u = \frac{1}{x},$$

on ramène l'étude d'une fonction au voisinage de x_0 (fini ou infini) à l'étude de cette fonction au voisinage de 0.

Proposition 6.1.4 *Si f admet un d.l. d'ordre n au voisinage de* 0*, elle admet dans ce voisinage, un d.l. d'ordre r pour tout entier $r \leq n$.*

Proposition 6.1.5 *Si f admet un d.l. d'ordre n au voisinage* 0 *alors ce d.l. est unique.*

Proposition 6.1.6 *Si f admet un d.l. d'ordre n au voisinage* 0 *de partie régulière P et si f est paire (resp. impaire) alors P est paire (resp. impaire).*

Théorème 6.1.7 (de Taylor-Young) *Si f est de classe C^{n-1} dans un voisinage de* 0 *et si $f^{(n)}(0)$ existe alors f admet un d.l. d'ordre n dans ce voisinage de* 0 *donné par*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{0}{\circ}(x^n).$$

Exemple

Considérons $f(x) = \exp(x)$. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout n,

$$f^{(n)}(x) = \exp x \text{ donc } f^{(n)}(0) = 1$$

Il vient alors

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{0}{\circ}(x^n).$$

6.2 Développements limités et opérations

Proposition 6.2.1 (Combinaison linéaire) *Si f et g admettent des d.l. au voisinage de* 0 *de parties régulières respectives P et Q alors $\alpha f + \beta g$ admet un d.l. au voisinage de* 0 *de partie régulière $\alpha P + \beta Q$.*

Exemple

D.l. d'ordre 5 au voisinage de 0 de $f(x) = \exp x - 2\sqrt{1+x}$

Proposition 6.2.2 (Multiplication) *Si f et g admettent des d.l. d'ordre n au voisinage 0 de parties régulières respectives P et Q alors fg admet un d.l. dont la partie régulière est obtenue en tronquant PQ au degré n.*

Exemple

D.l. d'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x) = \frac{\exp x}{\sqrt{1+x}}$.

Proposition 6.2.3 (Quotient) *Si f et g admettent des d.l. d'ordre n au voisinage de 0 de partie régulières respectives P et Q et si la valuation de Q est nulle (i.e $Q(0) \neq 0$) alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet un d.l. au voisinage de 0 dont la partie régulière est le quotient de la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre n, de P par Q.*

Exemple

D.l. d'ordre 4 au voisinage de 0 de $\frac{\cos x}{chx}$.

Proposition 6.2.4 (Composition) *Si f et g admettent des d.l. d'ordre n au voisinage 0 de parties régulières respectives P et Q et si la valuation de Q est non nulle (i.e $Q(0) = 0$) alors $f \circ g$ admet un d.l. d'ordre n dont la partie régulière est obtenue en tronquant au degré n le polynôme $P \circ Q$.*

Exemple

D.l. d'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x) = sh[\ln(1+x)]$.

Proposition 6.2.5 (Integration) *Si f est dérivable dans un voisinage de 0 et si f' admet un d.l. d'ordre n au voisinage de 0*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \underset{0}{\circ}(x^n)$$

alors f admet un d.l. d'ordre $n+1$ au voisinage de 0 obtenu par intégration terme à terme :

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \underset{0}{\circ}(x^{n+1}).$$

Exemple

D.l. d'ordre 5 au voisinage de 0 de $f(x) = Arctan \frac{x+a}{1-ax}$.

Proposition 6.2.6 (Dérivation) *Si $f^{(n)}(0)$ existe et si le d.l. d'ordre n de f s'écrit*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \underset{0}{\circ}(x^n)$$

alors f' admet un d.l. d'ordre $n-1$ obtenu en dérivant terme à terme le d.l. de f :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \underset{0}{\circ}(x^{n-1}).$$

6.3 Développements limités généralisés

Soit la fonction f définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0. S'il existe un réel r tel que

$$x^r f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \underset{0}{\circ}(x^n)$$

alors

$$f(x) = \frac{1}{x^r}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) + \underset{0}{\circ}(x^{n-r}).$$

C'est le d.l. généralisé de f à l'ordre $n - r$ au voisinage de 0.

Exemple

D.l. généralisé d'ordre 4 de $cotanx$.

6.4 Applications des développements limités

6.4.1 Calculs de limites

Les d.l. interviennent dans la recherche de certaines limites, notamment dans l'étude de formes indéterminées.

Exemple

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x - \ln(1+x)}, \lim_{x\to +\infty} \frac{\exp\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, \ 0 < a < b.$$

6.4.2 Asymptôte oblique

On cherche une écriture de f sous la forme

$$f(x) = ax + b + \frac{c_p}{x^p} + \underset{0}{\circ}(\frac{1}{x^p}).$$

Alors la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à C_f. La position de C_f par rapport à Δ est donnée par le signe de $\frac{c_p}{x^p}$.

Méthode pratique

Pour obtenir le développement cherché pour f il est d'usage de poser $x = \frac{1}{t}$ et de chercher le d.l. de $tf(\frac{1}{t})$ au voisinage de 0 sous la forme :

$$tf(\frac{1}{t}) = a + bt + c_p t^{p+1} + \underset{0}{\circ}(t^{p+1})$$

où c_p est le premier coefficient d'ordre supérieur ou égal à 2 qui ne soit pas nul.

Exemple

Asymptote (oblique) à la courbe de C_f avec

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - e^{-3/x}}{x^3 + x^2 - 1}.$$

Tableau des d.l. usuels (au voisinage de 0)

$f(x)$	d.l. de $f(x)$
$\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$
$(1+x)^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$
$sinx$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$
shx	$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$
$cosx$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$
chx	$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$
$tanx$	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$
thx	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$
$Arcsinx$	$x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$
$Arccosx$	$\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$
$Arctanx$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$
$Argshx$	$x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$
$Argthx$	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$

TD : Développement limité

Exercice 1

Déterminer le développement limité, au voisinage de zéro, à l'ordre n des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ $(n=3)$

b) $f(x)=\sqrt{1+\sin(x)}$ $(n=3)$

c) $f(x)=\ln\left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)$ $(n=4)$

d) $f(x)=\ln(1+e^x)$ $(n=4)$

e) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(n=3)$

f) $f(x)=\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}+x}{1+x\sqrt{3}}\right)$ $(n=3)$

Exercice 2

a) Ecrire le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de $x_0=1$, de la fonction $f(x)=\frac{x\ln(x)}{x^2-1}$

b) Ecrire le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de $+\infty$, de la fonction $f(x) = \ln(x^2+2x+3) - \ln(x^2+x+1)$

c) Montrer que $f(x)$ est un infiniment petit d'ordre 4 au voisinage de zéro $f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin(x))$

Exercice 3

Etudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f : $f(x) = \sqrt{x^4+x^2+x+1} - (x+2)\sqrt{x^2+3}$

Exercice 4

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$.
Démontrer que l'on peut prolonger f en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.