Cours de Mathématiques - ASINSA-1

Les applications linéaires

Frédéric STURM

Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon

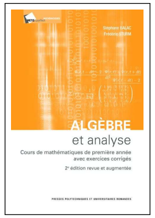
Année académique 2011-2012

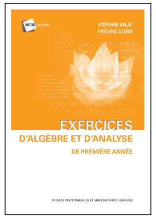
Document téléchargé à l'URL suivante :
`http://maths.insa-lyon.fr/~sturm/`

Pour plus de compléments, voir les deux ouvrages suivants parus aux Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR) dans la collection METIS LyonTech :

www.ppur.org

- **Algèbre et analyse, 2e édition revue et augmentée,** **Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés**, S. Balac, F. Sturm, 1110 pages, paru en 2009.
- **Exercices d'algèbre et d'analyse,** **154 exercices corrigés de première année**, S. Balac, F. Sturm, 448 pages, paru en 2011.





Plan du cours

Définition

Définition 1.1 (Application linéaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

- *On appelle application linéaire de E vers F toute application $f : E \longrightarrow F$ vérifiant :*

$$\begin{cases} f(\vec{x} +_E \vec{x}') = f(\vec{x}) +_F f(\vec{x}') \\ f(\alpha \cdot_E \vec{x}) = \alpha \cdot_F f(\vec{x}) \end{cases}$$

pour tout $(\vec{x}, \vec{x}') \in E^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$.

- *Une application linéaire est aussi appelée morphisme d'espaces vectoriels et on note $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.*

Remarque

Clairement, $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ et $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in E$.

Caractérisation

Proposition 1.1

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application $f : E \longrightarrow F$ soit linéaire est que

$$f(\alpha \cdot_E \vec{x} +_E \beta \cdot_E \vec{x}') = \alpha \cdot_F f(\vec{x}) +_F \beta \cdot_F f(\vec{x}')$$

pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et pour tout $(\vec{x}, \vec{x}') \in E^2$.

Exemple 1.1

- L'application $x \in \mathbb{K} \longmapsto x^2 \in \mathbb{K}$ n'est pas linéaire.
- L'application $\mathcal{D} : P \in \mathbb{K}[X] \longrightarrow P' \in \mathbb{K}[X]$ est linéaire.
- Soit $a \in \mathbb{K}$. L'application $x \in \mathbb{K} \longmapsto y = ax \in \mathbb{K}$ est linéaire.

Définition 1.2 (Cas particuliers)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- *Forme linéaire : application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.*
- *Isomorphisme : application linéaire bijective de E dans F.*
- *Endomorphisme de E : application linéaire f de E dans E. On note : $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.*
- *Si un endomorphisme f de E est bijectif alors on dit que c'est un automorphisme de E. On note : $f \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E)$.*

Exemple 1.2

La dérivation des polynômes, c'est-à-dire l'application

$$\mathcal{D} : P \in \mathbb{K}[X] \longrightarrow P' \in \mathbb{K}[X]$$

est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. On note : $\mathcal{D} \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X])$.

Isomorphisme réciproque

Proposition 1.2

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F. Si f est bijective alors son application réciproque f^{-1} est une application linéaire de F vers E. Autrement dit,

$$f^{-1}(\alpha \cdot_F \vec{y} +_F \beta \cdot_F \vec{y}') = \alpha \cdot_E f^{-1}(\vec{y}) +_E \beta \cdot_E f^{-1}(\vec{y}')$$

pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et pour tout $(\vec{y}, \vec{y}') \in F^2$.

Remarque

Bien sûr, en plus d'être linéaire, l'application réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est-elle même bijective.

Composition d'applications linéaires

Proposition 1.3

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G)$. En d'autres termes, la composée de deux applications linéaires est encore une application linéaire.

En effet, on peut vérifier les points suivants :

- Pour tout $(\vec{x}, \vec{x}') \in E^2$

$$(g \circ f)(\vec{x} +_E \vec{x}') = (g \circ f)(\vec{x}) +_G (g \circ f)(\vec{x}').$$

- Pour tout $\vec{x} \in E$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$

$$(g \circ f)(\alpha \cdot_E \vec{x}) = \alpha \cdot_G (g \circ f)(\vec{x}).$$

Structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$

Proposition 1.4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Il est suffisant de vérifier que $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est un sous-espace du $\mathbb{K}$-espace $\mathcal{A}(E, F)$. Faisons-le.

Soient f, g dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

- Pour tout $(\vec{x}, \vec{x}') \in E^2$

$$(\alpha f + \beta g)(\vec{x} +_E \vec{x}') = (\alpha f + \beta g)(\vec{x}) +_F (\alpha f + \beta g)(\vec{x}').$$

- Pour tout $\vec{x} \in E$ et pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$

$$(\alpha f + \beta g)(\gamma \cdot_E \vec{x}) = \gamma \cdot_F \left((\alpha f + \beta g)(\vec{x})\right).$$

On a ainsi vérifié que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

Exemples d'applications linéaires

- Soient $a \in \mathbb{K}$, $b \in \mathbb{K}$ et
$$f : \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \longmapsto y = ax_1 + bx_2 \in \mathbb{K}.$$
On vérifie que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K})$.
- Soient $a \in \mathbb{K}$, $b \in \mathbb{K}$ et
$$f : x \in \mathbb{K} \longmapsto \vec{y} = (ax, bx) \in \mathbb{K}^2.$$
On vérifie que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}^2)$.
- Soient a, b, c, d appartenant à $\mathbb{K}$ et
$$f : \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \longmapsto \vec{y} = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) \in \mathbb{K}^2.$$
On vérifie que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$.

- Plus généralement, soit $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ l'application qui à $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ associe $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ où
$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \\ \vdots & & \\ y_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p \end{array}\right. .$$
On peut vérifier que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Exemple 1.3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application qui au vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur $\vec{y} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$. C'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.5

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Alors,
$$f\left(\alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_m \vec{v}_m\right) = \alpha_1 f\left(\vec{v}_1\right) + \ldots + \alpha_m f\left(\vec{v}_m\right)$$
pour tous $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ dans E et tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ dans $\mathbb{K}$.

Supposons E de dimension p. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$ une base de E. Alors,
$$f\left(\vec{x}\right) = x_1 f\left(\vec{e}_1\right) + x_2 f\left(\vec{e}_2\right) + \ldots + x_p f\left(\vec{e}_p\right)$$
où $x_1, x_2, \ldots, x_p$ désignent les coordonnées de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$.

Ainsi, pour connaître une application linéaire, il est nécessaire et suffisant de connaître son action sur une base (quelconque) de son ensemble de départ.

Plan du cours

Puissance d'endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
$$\left(\forall k \in \mathbb{N}^* \quad f^k \overset{\text{not.}}{=} \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}\right) \quad \text{et} \quad f^0 = \mathrm{id}_E.$$

Définition 2.1 (Endomorphisme nilpotent)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace et f un endomorphisme de E. On dit que f est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.

On en déduit que s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$ alors $f^{k'} = 0$ pour tout entier naturel $k' \geqslant k$. Ainsi,
$$p \overset{\text{déf.}}{=} \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^k = 0\}.$$
L'entier p est appelé l'indice de nilpotence de f.

Endomorphismes particuliers

Définition 2.2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- *Un endomorphisme p de E est un projecteur de E si $p \circ p = p$. On dit aussi projection vectorielle.*
- *Un endomorphisme s de E est une involution linéaire de E si $s \circ s = \mathrm{id}_E$. On dit aussi symétrie vectorielle.*
- *Soit $k \in \mathbb{K}^*$. Un endomorphisme h de E est une homothétie vectorielle de rapport k si $h = k\,\mathrm{id}_E$.*

Remarque

Une involution linéaire s de E et une homothétie vectorielle h de rapport $k \in \mathbb{K}^*$ constituent des bijections de E. On a :
$$s^{-1} = s \quad \text{et} \quad h^{-1} = \frac{1}{k}\mathrm{id}_E.$$

Structure d'anneau sur $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$

En plus d'être un groupe commutatif pour $+$, l'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ possède les propriétés suivantes :

- pour tous f, g, h dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- pour tous f, g, h dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$
$$\left\{\begin{array}{l} f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h), \\ (g + h) \circ f = (g \circ f) + (h \circ f). \end{array}\right.$$
- Pour tout $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, $f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ f = f$.

En résumé, on dit que $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ possède une structure d'anneau.

ATTENTION L'anneau $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ n'est pas commutatif. En effet, il existe f et g dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ tels que
$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Remarque

La composée de deux endomorphismes peut être nulle sans que l'un des deux le soit. En effet, il existe f et g dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ tels que
$$f \neq 0, \quad g \neq 0 \quad \text{et} \quad g \circ f = 0.$$
En ce sens, on dit que $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ n'est pas intègre.

Plan du cours

Noyau d'une application linéaire

Définition 3.1 (Noyau d'une application linéaire)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. On appelle noyau de f et on note $\operatorname{Ker} f$ le sous-ensemble de E défini par

$$\operatorname{Ker} f \overset{\text{déf.}}{=} \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{0}_F\}.$$

Le noyau d'une application linéaire f de E dans F n'est jamais vide puisqu'il contient le vecteur nul de E. En effet,

$$f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F.$$

Mieux encore ! On a le résultat suivant :

Proposition 3.1 (Propriété du noyau)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Alors $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de départ E.

Exemple 3.1

Reprenons l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui à $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur $\vec{y} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$. Déterminons le noyau de f. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{Ker} f$. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

D'où $x_2 = -x_3$ et $x_1 = x_3$. Ainsi,

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_3, -x_3, x_3) = x_3(1, -1, 1).$$

Le noyau de f est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, -1, 1)$:

$$\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}\vec{u} \text{ avec } \vec{u} = (1, -1, 1).$$

Caractérisation d'une application linéaire injective

Proposition 3.2

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour qu'une application linéaire f de E dans F soit injective, il faut et il suffit que

$$\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}_E\}.$$

Exemple 3.2

Reprenons l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui à $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur $\vec{y} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$. Cette application linéaire f n'est pas injective car

$$\operatorname{Ker} f \neq \{(0, 0, 0)\}.$$

Image d'une application linéaire

Rappelons que $\operatorname{Im} f \overset{\text{not.}}{=} f(E) \overset{\text{déf.}}{=} \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in E\}$.

Proposition 3.3

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Alors $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble d'arrivée F.

Remarque

Rappelons que si f désigne une application de E dans F, on a alors l'équivalence suivante :

$$f \text{ surjective} \iff \operatorname{Im} f = F.$$

Cette caractérisation est vraie même si f n'est pas linéaire.

Proposition 3.4 (Image d'une famille génératrice)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\mathcal{G}$ une famille de vecteurs de E. Si $\mathcal{G}$ engendre E alors $f(\mathcal{G})$ engendre $\operatorname{Im} f$.

Exemple 3.3

Reprenons l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui à $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur $\vec{y} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$. Alors,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}\Big(f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1))\Big) \\ &= \operatorname{Vect}\Big((1,0,1), (1,1,2), (0,1,1)\Big) \\ &= \operatorname{Vect}\Big((1,0,1), (0,1,1)\Big). \end{aligned}$$

car $(1,1,2) = (1,0,1) + (0,1,1)$. L'application (linéaire) f n'est pas surjective car $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$.

Cas d'une espace E de dimension finie

Soit E est de dimension finie. Supposons que $\dim_{\mathbb{K}}(E) = p$.

L'espace E possède une base finie $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$. D'où

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\mathcal{B})) = \operatorname{Vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_p)).$$

On en déduit : $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) \leqslant p$.

Proposition 3.5

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Si E est de dimension finie alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

On dit qu'une application linéaire ne peut pas « augmenter » la dimension.

Image d'une famille libre

Proposition 3.6 (Image d'une famille libre)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Si f est injective alors $f(\mathcal{L})$ est une famille libre de F.

Proposition 3.7 (Image d'une base)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et $\mathcal{B}$ une base de E.

- *Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective est que $f(\mathcal{B})$ soit une base de $\operatorname{Im} f$.*
- *En particulier, f est bijective si, et seulement si, $f(\mathcal{B})$ est une base de F.*

Plan du cours

Dans ce paragraphe, on considère que :

- l'espace de départ E est de dimension finie ;
- l'espace d'arrivée F est de dimension finie ou infinie.

Définition 4.1 (Rang d'une application linéaire)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. On appelle rang de f et on note $\operatorname{rg} f$ la dimension de l'image de f, c'est-à-dire :

$$\operatorname{rg} f \overset{\text{déf.}}{=} \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f).$$

Remarque

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$ désigne une base de E alors

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\Big(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_p)\Big).$$

On en déduit : $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}\Big(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_p)\Big) \leqslant p$. Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{rg} f \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E).}$$

Remarque

Si, de plus, l'espace d'arrivée F est de dimension finie alors

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

puisque $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace de F. On a ainsi :

$$\boxed{\operatorname{rg} f \leqslant \min\{\dim_{\mathbb{K}}(E), \dim_{\mathbb{K}}(F)\}.}$$

Le théorème suivant est… fondamental ! Jugez plutôt :

Théorème 4.1 (Théorème fondamental du rang)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$. Si E est de dimension finie alors

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \operatorname{rg} f + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f).$$

Exemple 4.1

Reprenons l'exemple de l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui à (x_1, x_2, x_3) associe $(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$. Rappelons que : $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = 1$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) = 2$. On a :

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^3)}_{=3} = \underbrace{\operatorname{rg} f}_{=2} + \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f)}_{=1}.$$

Remarque

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$. Supposons E et F de dimensions finies (non nécessairement égales).

- Si f est surjective alors $\dim_{\mathbb{K}}(E) \geqslant \dim_{\mathbb{K}}(F)$.
- Si f est injective alors $\dim_{\mathbb{K}}(E) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(F)$.
- Si f est bijective alors $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

Proposition 4.1

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces de dimensions finies (non nécessairement identiques) et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$. Alors

- *f est surjective si, et seulement si, $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(F)$;*
- *f est injective si, et seulement si, $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(E)$;*
- *f est bijective ssi $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$.*

Corollaire 4.1

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$. Si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$ alors

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}.$$