OUTILS MATHÉMATIQUES

Séance 1 en Présentiel – PHY104 : Electrostatique et Electrocinétique

Ing. Agbassou Guenoukpati, Département du Génie Electrique, ENSI, Université de Lome, Togo

Objectif du cours

Au cours de cette presentation, vous apprendrez ce qui suit :

- le concept de champ
- le calcul vectoriel ;
- les systèmes de coordonnées ;
- les éléments de ligne, de surface et de volume ;
- l'utilisation de l'opérateur Nabla

1. Introduction

Ce cours d'introduction permet de revoir des notions déjà abordées en mécanique comme les **systèmes de coordonnées cartésienne, cylindrique ou sphérique**. Dans chacun de ces systèmes, on définit un déplacement élémentaire, de surface et de volume ; on établit également les relations entre les différents systèmes de coordonnées. Ensuite, nous abordons l'opérateur nabla qui, selon son utilisation, donne naissance au gradient, à la divergence ou au rotationnel. Le gradient est exprimé en coordonnées cartésiennes et nous montrons comment obtenir son expression en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. Mais bien avant, abordons le concept de champ

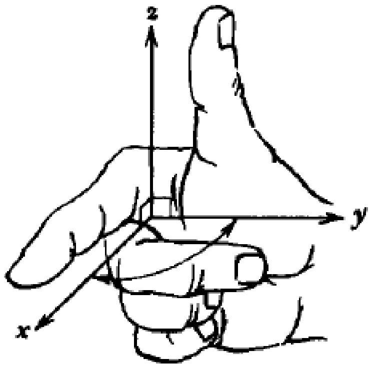
2. Les systèmes de coordonnées

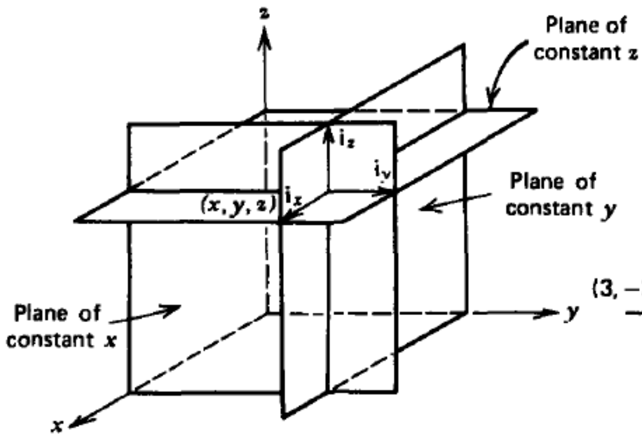
Les coordonnées sont des nombres servant à déterminer la position d'un point dans l'espace par rapport à un système de référence. En physique, selon la physionomie du problème étudié, on choisit entre trois systèmes de coordonnées :

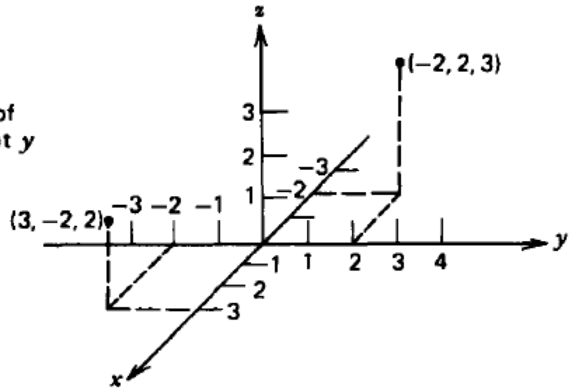
- système de coordonnées cartésiennes (**système adapté aux objets de forme cubique**) ;
- système de coordonnées cylindriques (**système adapté aux objets de forme cylindrique**) ;
- système de coordonnées sphériques (**système adapté aux objets de forme sphérique**).

2.1. Les coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes sont les coordonnées les plus faciles à manipuler. Un point quelconque de l'espace est repéré par trois coordonnées x, y et z.







Par convention, on utilise la règle de la main droite de sorte que l'index indique la direction x, le majeur pour y et le pouce pour z. Cette convention est nécessaire pour lever les ambiguïtés directionnelles.
Les directions des coordonnées sont représentées par les vecteurs unitaires i_x, i_y, et i_z. Les coordonnées cartésiennes sont faciles à manipuler car les vecteurs unitaires pointent toujours la même direction et ne changent pas de direction d'un point à l'autre

Dans ce système de coordonnées, un déplacement élémentaire est noté :

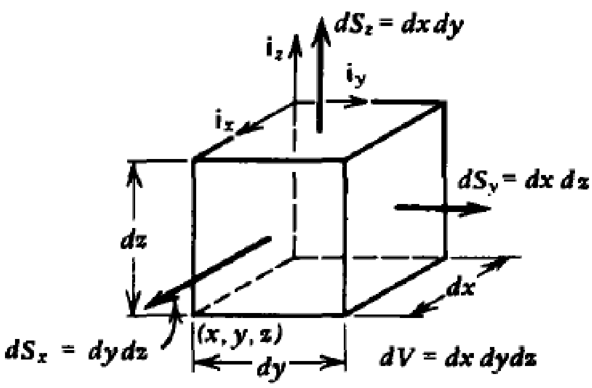
$$\overrightarrow{dl} = dx\,\overrightarrow{i_x} + dy\,\overrightarrow{i_y} + dz\,\overrightarrow{i_z}$$

On peut aussi définir une surface élémentaire (dans le plan xOy par exemple) :

$$dS_x = dx \cdot dy$$

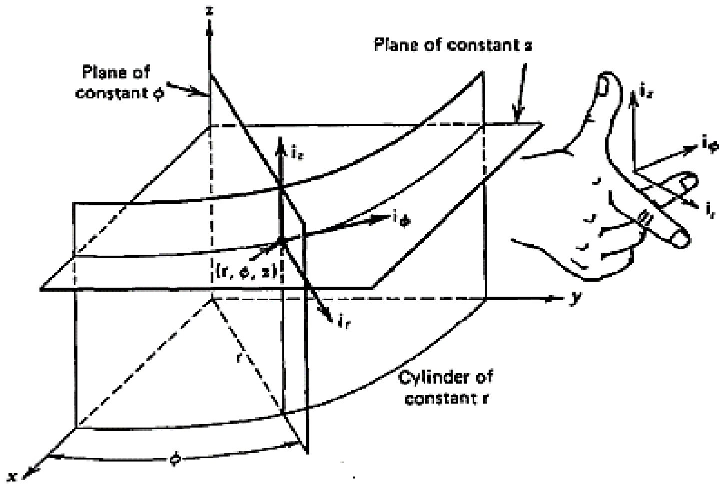
Enfin, on peut définir un volume élémentaire :

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$



2.2. Les coordonnées cylindriques

Dans ce système de coordonnées, un point de l'espace est repéré par un rayon r, un angle ϕ (angle entre l'axe Ox et la projection du rayon sur le plan xOy), et une hauteur z (par rapport au plan xOy). On définit aussi trois vecteurs unitaires (i_r, i_ϕ, et i_z) que l'on place généralement au niveau du point ou de son projeté sur la plan xOy.



Dans ce système de coordonnées, un déplacement élémentaire s'écrit :

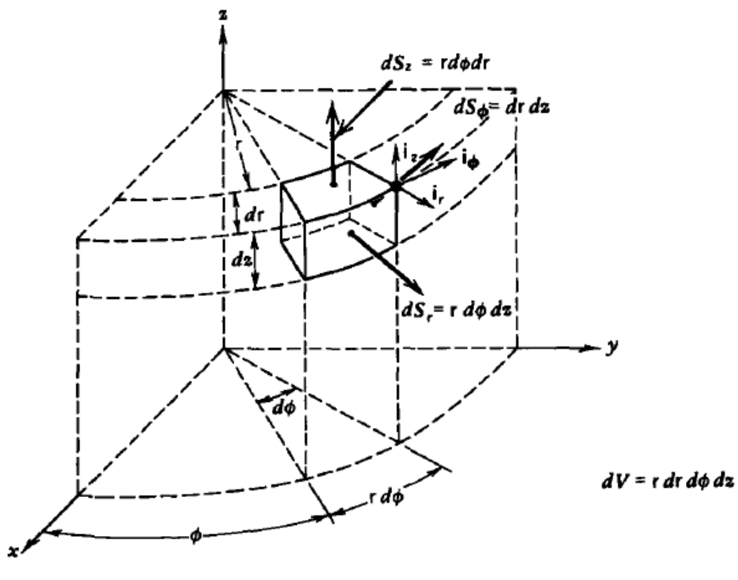
$$\overrightarrow{dl} = dr\,\overrightarrow{i_r} + rd\phi\,\overrightarrow{i_\phi} + dz\,\overrightarrow{i_Z}$$

Ainsi une surface élémentaire s'écrit :

$$dS_r = rd\phi \cdot dz$$

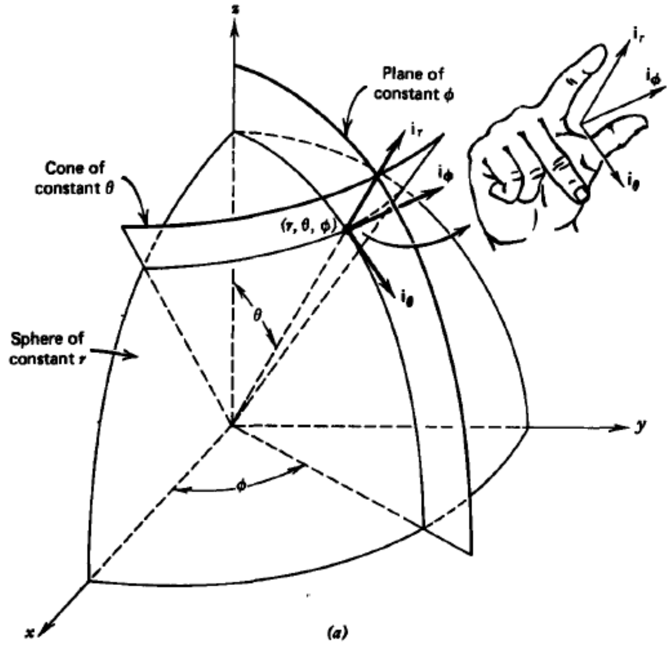
Et un volume élémentaire est défini par :

$$dV = dr \cdot rd\phi \cdot dz$$



2.3. Les coordonnées sphériques

Dans ce système de coordonnées, un point de l'espace est repéré par un rayon r, et deux angles : un angle θ (angle entre l'axe Oz et le rayon r) et un angle ϕ (angle entre l'axe Ox et la projection du rayon sur le plan xOy). Trois vecteurs unitaires (i_r, i_θ, et i_ϕ) donnent l'orientation du repère.



Dans ce système de coordonnées, un déplacement élémentaire s'écrit :

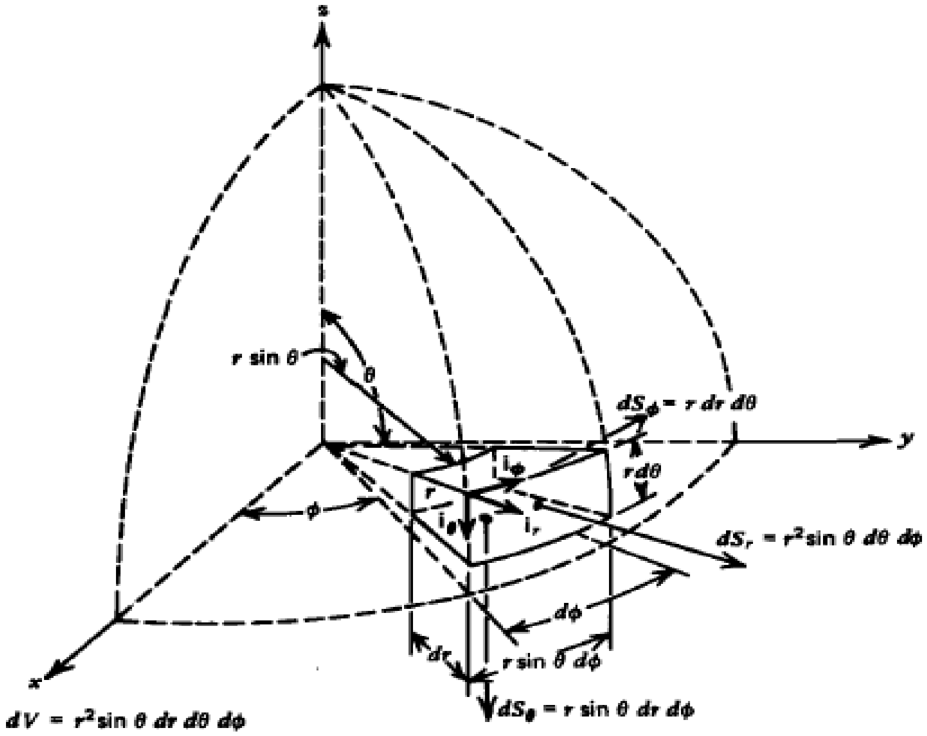
$$\overrightarrow{dl} = dr\,\overrightarrow{i_r} + rd\theta\,\overrightarrow{i_\theta} + r\sin\theta d\phi\,\overrightarrow{i_\phi}$$

Une surface élémentaire s'écrit :

$$dS_r = rd\theta \cdot r\sin\theta d\phi$$

Et un volume élémentaire est défini par :

$$dV = dr \cdot rd\theta \cdot r\sin\theta d\phi$$



4. Relation entre les différents systèmes de coordonnées

Il peut être intéressant de connaître les relations entre les différents systèmes de coordonnées : par exemple entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques, que vaut r en fonction de x et y ? Que vaut θ ou ϕ ? Quelles relations y a t il entre les vecteurs unitaires de la base cartésienne, et ceux de la base cylindrique ? Le tableau ci-dessus présente les relations à connaître et à savoir retrouver.

Tableau 1 : Relation entre les differents systèmes de coordonnées

CARTESIAN		**CYLINDRICAL**		**SPHERICAL**
x	$=$	$r\cos\phi$	$=$	$r\sin\theta\cos\phi$
y	$=$	$r\sin\phi$	$=$	$r\sin\theta\sin\phi$
z	$=$	z	$=$	$r\cos\theta$
$\mathbf{i}_x$	$=$	$\cos\phi\,\mathbf{i}_r-\sin\phi\,\mathbf{i}_\phi$	$=$	$\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{i}_r+\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{i}_\theta-\sin\phi\,\mathbf{i}_\phi$
$\mathbf{i}_y$	$=$	$\sin\phi\,\mathbf{i}_r+\cos\phi\,\mathbf{i}_\phi$	$=$	$\sin\theta\sin\phi\,\mathbf{i}_r+\cos\theta\sin\phi\,\mathbf{i}_\theta+\cos\phi\,\mathbf{i}_\phi$
$\mathbf{i}_z$	$=$	$\mathbf{i}_z$	$=$	$\cos\theta\,\mathbf{i}_r-\sin\theta\,\mathbf{i}_\theta$
CYLINDRICAL		**CARTESIAN**		**SPHERICAL**
r	$=$	$\sqrt{x^2+y^2}$	$=$	$r\sin\theta$
ϕ	$=$	$\tan^{-1}\frac{y}{x}$	$=$	ϕ
z	$=$	z	$=$	$r\cos\theta$
$\mathbf{i}_r$	$=$	$\cos\phi\,\mathbf{i}_x+\sin\phi\,\mathbf{i}_y$	$=$	$\sin\theta\,\mathbf{i}_r+\cos\theta\,\mathbf{i}_\theta$
$\mathbf{i}_\phi$	$=$	$-\sin\phi\,\mathbf{i}_x+\cos\phi\,\mathbf{i}_y$	$=$	$\mathbf{i}_\phi$
$\mathbf{i}_z$	$=$	$\mathbf{i}_z$	$=$	$\cos\theta\,\mathbf{i}_r-\sin\theta\,\mathbf{i}_\theta$
SPHERICAL		**CARTESIAN**		**CYLINDRICAL**
r	$=$	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$=$	$\sqrt{r^2+z^2}$
θ	$=$	$\cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$=$	$\cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$
ϕ	$=$	$\cot^{-1}\frac{x}{y}$	$=$	ϕ
$\mathbf{i}_r$	$=$	$\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{i}_x+\sin\theta\sin\phi\,\mathbf{i}_y+\cos\theta\,\mathbf{i}_z$	$=$	$\sin\theta\,\mathbf{i}_r+\cos\theta\,\mathbf{i}_z$
$\mathbf{i}_\theta$	$=$	$\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{i}_x+\cos\theta\sin\phi\,\mathbf{i}_y-\sin\theta\,\mathbf{i}_z$	$=$	$\cos\theta\,\mathbf{i}_r-\sin\theta\,\mathbf{i}_z$
$\mathbf{i}_\phi$	$=$	$-\sin\phi\,\mathbf{i}_x+\cos\phi\,\mathbf{i}_y$	$=$	$\mathbf{i}_\phi$

5. Opérateur nabla : gradient, divergence ou rotationnel

L'opérateur nabla noté $\vec{\nabla}$ peut agir sur un champ scalaire (comme le potentiel électrostatique) ou sur un champ de vecteurs (comme le champ électrostatique).
Dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, celui-ci s'écrit :

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i_x}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{i_y}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{i_z}$$

Selon comment il est appliqué au champ (scalaire ou vectoriel) en question, l'opérateur nabla prend d'autres noms.

5.1. Gradient d'un champ scalaire

5.1.1. Gradient en coordonnées cartésiennes

On peut appliquer l'opérateur nabla directement sur un champ de scalaire, on a alors en coordonnées cartésiennes.

$$\vec{\nabla}\,V=\overrightarrow{\text{grad}}\,V=\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i_x}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{i_y}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{i_z}$$

Lien entre gradient et différentielle totale d'une fonction

En mathématique, si une fonction f dépend de trois variables (x, y et z), sa différentielle totale s'écrit

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

On peut écrire cette différentielle comme étant le produit scalaire entre le gradient de f et le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$:

$$df = \overrightarrow{grad}\, f \bullet \overrightarrow{dl} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{i_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{i_z}\right) \bullet \left(dx\,\overrightarrow{i_x} + dy\,\overrightarrow{i_y} + dz\,\overrightarrow{i_z}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix}$$

5.1.2. Gradient en coordonnées cylindriques

Grâce à la formule ci-dessus, on peut exprimer le gradient dans d'autres systèmes de coordonnées. On exprime la différentielle totale de f dans le système de coordonnées :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

On identifie celle-ci avec la différentielle donnée par le produit scalaire calculé dans l'équation

$$df = \overrightarrow{grad}\, f \cdot \overrightarrow{dl} = \begin{vmatrix} \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_r \\ \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_\phi \\ \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dr \\ rd\phi \\ dz \end{vmatrix}$$

$$df = \left(\left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_r \overrightarrow{i_r} + \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_\phi \overrightarrow{i_\phi} + \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)_z \overrightarrow{i_z}\right) \cdot \left(dr\,\overrightarrow{i_r} + rd\phi\,\overrightarrow{i_\phi} + dz\,\overrightarrow{i_z}\right)$$

On a donc l'expression ci-dessous pour le gradient de f en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} f = \overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{i_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\overrightarrow{i_\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{i_z}$$

Ce travail nous permet d'écrire l'expression de l'opérateur nabla en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{i_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\overrightarrow{i_\phi} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{i_z}$$

5.1.3. Gradient en coordonnées sphériques

Grâce à la formule ci-dessus, on peut exprimer le gradient dans d'autres systèmes de coordonnées. On exprime la différentielle totale de f dans le système de coordonnées :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

On identifie celle-ci avec la différentielle donnée par le produit scalaire calculé dans l'équation :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{dl} = \begin{vmatrix} \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)_r \\ \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)_\theta \\ \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)_\phi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dr \\ rd\phi \\ dz \end{vmatrix}$$

$$df = \left(\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)_r \overrightarrow{i_r} + \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)_\theta \overrightarrow{i_\theta} + \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)_\phi \overrightarrow{i_\phi}\right) \cdot \left(dr\,\overrightarrow{i_r} + rd\theta\,\overrightarrow{i_\theta} + r\sin\theta d\phi\,\overrightarrow{i_\phi}\right)$$

On a donc l'expression ci-dessous pour le gradient de f en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} f = \overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{i_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{i_\theta} + \frac{\partial f}{r\sin\theta\partial\phi}\overrightarrow{i_\phi}$$

Ce travail nous permet d'écrire l'expression de l'opérateur nabla en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{i_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{i_\theta} + \frac{\partial}{r\sin\theta\partial\phi}\overrightarrow{i_\phi}$$

- l'amplitude du gradient en un point est la valeur maximale possible de la dérivé à ce moment ;
- la direction du gradient est la direction dans laquelle la dérivée directionnelle prend son maximum valeur.

Qu'est-ce que cela signifie physiquement ? Supposons que vous soyez sur une colline, pas tout à fait au sommet. Si vous voulez venir jusqu'à la base, il y a de nombreuses directions que vous pouvez prendre. Parmi toutes ces directions possibles, le plus rapide sera celui qui est le plus raide, c'est-à-dire avec une pente maximale

Figure 1 : Représentation de la direction de la pente sur une colline

5.1. Divergence d'un champ vectoriel

Si on effectue le produit scalaire entre l'opérateur nabla et un champ de vecteurs, on calcule la divergence de ce champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes.

$$\mathrm{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Notons que la divergence est un opérateur qui prend un champ vectoriel en entrée et qui renvoie un scalaire.

Remarques

En coordonnées cylindriques par exemple, les vecteurs unitaires de la base peuvent dépendre des coordonnées. On ne peut donc pas forcément les sortir des dérivations, les simplifications sont moindres et l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques est plus compliquée.

5.3. Rotationnel d'un champ vectoriel

Enfin, si on effectue un produit vectoriel entre l'opérateur nabla et un champ de vecteurs, on calcule le rotationnel de ce champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i_x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{i_y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{i_z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i_x} & \overrightarrow{i_y} & \overrightarrow{i_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Notons que le rotationnel est un opérateur qui prend un champ vectoriel en entrée et qui renvoie un vecteur.

Remarque

Au vu de cette expression, déjà compliquée, on imagine la complexité de l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques ou sphériques

Références

[1] Electromagnétisme PCSIP. Krempf - Editions Bréal 2003

[2] Physique Cours compagnon PCSI T. Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009

[3] Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI - JM.Brébec - Editions Hachette

[4] Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique - D.Cordier – Editions Dunod

[5] La physique en fac cours et exercices corrigés - Emile Amzallag - Joseph Cipriani - Jocelyne Ben Aïm - Norbert Piccioli

[6] http://wiki.sillages.info/index.php/Coordonnées_polaires_et_cylindriques

[7] http://epiphys.emn.fr

[8] http://turrier.fr/maths-physique/coordonees/systemes-de-coordonnees.html

[9] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/