

1. Calculer les déterminants suivants:

$$(a) \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{vmatrix} \text{ où } w = e^{\frac{2\pi i}{3}}, w^3 = 1 \text{ et } 1 + w + w^2 = 0,$$

$$(c) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \text{ avec } a, b, c \text{ et } d \text{ des réels.}$$

$$2. \text{ Etudier le rang de la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -t \\ t & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

$$3. \text{ Considérons la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}. (a) \text{ Calculer } \det A. (b) \text{ Trouver } \operatorname{cof} A \text{ la matrice des cofacteurs de } A. (c) \text{ Vérifier que } A(\operatorname{cof} A)^t = (\det A) \cdot I_3 \text{ où } I_3 \text{ est la matrice unité d'ordre 3. (d) Trouver } A^{-1}.$$

$$4. \text{ On considère la matrice suivante de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

 (a) Montrer que cette matrice est inversible et calculer A^{-1} .

 (b) En déduire l'expression de A^n en fonction de A , pour tout entier naturel n .

$$5. \text{ Résoudre les systèmes d'équations suivants: } (S_1) \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases} \text{ et } (S_2) \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b \\ x + y + z + at = b \end{cases} \text{ avec } a \text{ et } b \text{ des réels.}$$

 i. Résoudre dans \mathbb{R}^3 , et discuter suivant les valeurs des paramètres réels a, b, c et d le système suivant

$$(S) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

 Résoudre le système suivant (inconnue $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, paramètres $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} \\ x_n + x_1 = 2a_n \end{cases}$$

 Soit a un réel différent de 1. Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on note

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

 Calculer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2} . Montrer que $D_n = \frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2}$. Combien vaut D_n si $a = 1$?