Calcul différentiel dans $\mathbb{R}$

Support de cours et exercices de travaux dirigés

Issa Cherif GERALDO

Novembre 2024

TABLE DES MATIÈRES

NOTE INTRODUCTIVE

Le calcul différentiel (et plus généralement l'analyse mathématique) occupe une place importante dans les sciences de l'ingénieur. Les modèles qui y sont élaborés reposent généralement sur des outils mathématiques tels que les fonctions réelles d'une variable réelle. Ce cours permet à l'étudiant d'appliquer les outils et méthodes de calcul différentiel relatifs aux fonctions réelles d'une variable réelle utilisés dans la modélisation en sciences de l'ingénieur. Ceci le rendra capable de résoudre des problèmes simples rencontrés en sciences de l'ingénieur faisant appel au calcul différentiel dans $\mathbb{R}$.

Ce support de cours s'adresse principalement aux étudiants de niveau première année de licence fondamentale en sciences de l'ingénieur mais il peut aussi intéresser, de façon plus générale, les étudiants de première année dans le domaine des sciences et technologies.

En plus du chapitre zéro portant sur les rappels, le présent document contient quatre (4) chapitres contenant chacun une présentation détaillée des notions, des exemples et des exercices d'application. Chaque chapitre finit par des exercices de travaux dirigés dont la résolution est aisée une fois les notions essentielles du chapitre maîtrisées.

CHAPITRE 0

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Sommaire

0.1 GÉNÉRALITÉS

0.1.1 Définitions

Définition 0.1 Soient E et F deux ensembles.

- Une **fonction** f de E (ensemble de départ) à valeurs dans F (ensemble d'arrivée) est une relation qui à chaque élément de E associe au plus un élément de F. On note $f : E \to F$.
- Pour tout $x \in E$, l'élément associé à x, s'il existe, est noté $f(x)$. Si $y = f(x)$, alors y est l'**image** de x par f et x est ***un* antécédent** de y par f.
- Si $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$, alors f est dite **fonction réelle d'une variable réelle**.
- Dans l'expression générale $y = f(x)$, la variable x est appelée variable **indépendante** et y est appelée variable **dépendante**.

Définition 0.2 Soient E et $F \subset \mathbb{R}$ et f une fonction de E vers F.

- L'**ensemble de définition** de f est l'ensemble des éléments de E qui possèdent une image par f :
$$D_f = \{x \in E \mid f(x) \text{ existe}\}.$$
- Si $D_f = E$, alors f est une **application**.
- L'ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)) \in E \times F \mid x \in D_f\}$ est le **graphe** de f.

Définition 0.3 Deux fonctions f et g sont **égales** si elles ont le même ensemble de définition D et le même ensemble d'arrivée et si pour tout $x \in D$, $f(x) = g(x)$.

0.1.2 Fonctions remarquables

Soient $f : E \to \mathbb{R}$ une application et $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$.

Définition 0.4 L'application f est dite **constante** s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = a$. Lorsque $a = 0$, on dit que f est la fonction **nulle**.

Définition 0.5 L'application f est dite

- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant m$; dans ce cas, $f(E)$ possède une borne inférieure et on note
$$\inf_{x \in E} f(x) = \inf f(E) = \inf\{f(x) \mid x \in E\};$$
- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant M$; dans ce cas, $f(E)$ possède une borne supérieure et on note
$$\sup_{x \in E} f(x) = \sup f(E) = \sup\{f(x) \mid x \in E\};$$
- **bornée** si f est à la fois minorée et majorée ; cela est équivalent à dire que la fonction $|f|$ est majorée c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M$.

Définition 0.6 L'application f est dite

- **paire** si pour tout $x \in E$, $-x \in E$ et $f(-x) = f(x)$;
- **impaire** si pour tout $x \in E$, $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$.

Définition 0.7 L'application f est dite **périodique** de période T si pour tout $x \in E$,
$$x + T \in E \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x).$$

0.2 Composition de fonctions

Définition 0.8 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. La **composée** de f et g est l'application $g \circ f$ définie de E dans G par :
$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right]. \tag{1}$$

Exemple 0.9 Soient les fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 2.$$

Comparons les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f[g(x)] \\ &= 2g(x) + 1 = 2(x^2 - 2) + 1 \\ &= 2x^2 - 3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g[f(x)] \\ &= (f(x))^2 - 2 = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x + 1 - 2 \\ &= 4x^2 + 4x - 1. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$.

Remarque 0.10 En général, pour deux fonctions f et g, l'on a : $g \circ f \neq f \circ g$.

0.3 FONCTION RÉCIPROQUE

Définition 0.11 Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une fonction.

- On dit que la fonction f est **bijective** si f est une application (c'est-à-dire $D_f = E$) et si à chaque $y \in F$ correspond un unique antécédent $x \in E$ c'est-à-dire si pour tout $y \in F$, l'équation d'inconnue $x \in E$ suivante :

$$f(x) = y$$

  a une unique solution.
- Dans ce cas, on appelle **réciproque** de f, l'application notée f^{-1} qui à chaque $y \in F$ fait correspondre l'unique x tel que $f(x) = y$.

Exemple 0.12 Les fonctions $x \mapsto \ln x$ (de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$) et $x \mapsto e^x$ (de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$) sont réciproques l'une de l'autre. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $\ln x = y$ a une unique solution $x = e^y \in \mathbb{R}_+^*$ et inversement.

Application 0.13 Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ et f la fonction de E dans F définie par $f(x) = x^2$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est bijective et, le cas échéant, déterminer f^{-1}.

1) $E = F = \mathbb{R}$.

2) $E = \mathbb{R}_+$ et $F = \mathbb{R}_+$.

3) $E = \mathbb{R}_-$ et $F = \mathbb{R}_+$.

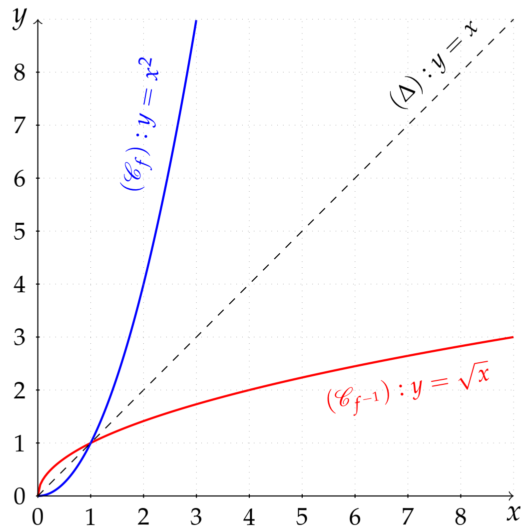


FIGURE 1 – Représentation graphique des fonctions $f : x \mapsto x^2$ (en bleu) et de son inverse $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$ (en rouge) définies de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$

Remarque 0.14 Les courbes représentatives respectives d'une fonction bijective et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ appelée **première bissectrice** (voir Figure 1 pour un exemple).

Proposition 0.15 *Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une application bijective.*

- *Pour tout $x \in E$, $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.*
- *Pour tout $y \in F$, $f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y$.*

0.4 EXERCICES

Exercice 0.1 Donner les ensembles de définition respectifs des fonctions suivantes ayant $\mathbb{R}$ comme ensemble de départ :

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad f_2(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}} \qquad f_3(x) = \ln|x-1|$$

$$f_4(x) = \ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right| \qquad f_5(x) = \ln(\ln x) \qquad f_6(x) = \ln(1 - \mathrm{e}^{-x})$$

$$f_7(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \qquad f_8(x) = \frac{1}{\sin x} \qquad f_9(x) = \frac{1}{\cos 2x}$$

Exercice 0.2 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$. Montrer que f est bornée et déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 0.3 On considère les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$u(x) = x^2 \quad \text{et} \quad v(x) = \sqrt{x}.$$

Déterminer les ensembles de définition et les expressions des fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice 0.4 On considère la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

et appelée fonction sinus hyperbolique. Démontrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Chapitre 1

Limites et continuité d'une fonction

Sommaire

1.1 Limites d'une fonction

1.1.1 Définitions

1.1.1.1 Notion de voisinage

Soit $a \in \mathbb{R}$. Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est appelée **un voisinage** de a s'il existe un réel $h > 0$ tel que $]a-h\,;\,a+h[\, \subset V$.

Exemple 1.1 $[-1,1]$ est un voisinage de 0.5 mais n'est pas un voisinage de 1.

1.1.1.2 Limite finie en $a \in \mathbb{R}$

Définition 1.2 Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. **Supposons que f soit définie dans un voisinage de a mais pas forcément en a lui-même**. On dit que f admet ℓ pour limite en a (ou que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a) si pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver $\eta > 0$ arbitrairement petit tel que :

$$|x-a| < \eta \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

On écrit : $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Exemple 1.3 Soit $f(x) = 3x$. On montre que $\lim_{x \to 2} f(x) = 6$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Cherchons $\eta > 0$ tel que

$$|x - 2| < \eta \implies |3x - 6| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

La condition $|3x - 6| < \varepsilon$ est équivalente à $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, il suffit de choisir $\eta < \frac{\varepsilon}{3}$ pour obtenir l'implication (1.1). On peut choisir par exemple, $\eta = \frac{\varepsilon}{6}$.

1.1.1.3 Limite infinie en $a \in \mathbb{R}$

Définition 1.4 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **Supposons que f soit définie dans un voisinage de a mais pas forcément en a lui-même.**

- On dit que f tend vers $+\infty$ au point a si pour tout $A > 0$ arbitrairement grand, on peut trouver $\eta > 0$ arbitrairement petit tel que :

$$|x - a| < \eta \implies f(x) > A.$$

  On note : $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- On dit que f tend vers $-\infty$ au point a si pour tout $A > 0$ arbitrairement grand, on peut trouver $\eta > 0$ arbitrairement petit tel que :

$$|x - a| < \eta \implies f(x) < -A.$$

  On note : $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exemple 1.5 Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. On montre que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. En effet, soit $A > 0$. Cherchons $\eta > 0$ tel que

$$|x| < \eta \implies \frac{1}{x^2} > A. \tag{1.2}$$

On a :

$$\frac{1}{x^2} > A \iff x^2 < \frac{1}{A} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Ainsi, il suffit de choisir $\eta < \frac{1}{\sqrt{A}}$ pour obtenir l'implication (1.2). On peut choisir par exemple, $\eta = \frac{1}{2\sqrt{A}}$.

1.1.1.4 Limites à droite et à gauche en $a \in \mathbb{R}$

Définition 1.6 Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f admet ℓ pour **limite à droite** en a si pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver $\eta > 0$ arbitrairement petit η tel que :

$$a < x < a + \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- On dit que f admet ℓ pour **limite à gauche** en a si pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver $\eta > 0$ arbitrairement petit η tel que :

$$a - \eta < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note respectivement $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ les limites à droite et à gauche en a.

Proposition 1.7 *La limite d'une fonction f en a existe si et seulement si les limites à droite et à gauche en a existent et sont identiques. Dans ce cas :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Exemple 1.8 Considérons la fonction signe sgn de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ 1 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$. La fonction sgn n'admet pas de limite en 0.

1.1.1.5 Limite finie/infinie en $+\infty$ ou $-\infty$

Définition 1.9 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver $M > 0$ arbitrairement grand tel que

$$x > M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \Big(\text{resp.} \quad x < -M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon\Big).$$

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$).

Exemple 1.10 Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Cherchons $M > 0$ tel que

$$x > M \implies \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

On a :

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \iff |x| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ainsi, il suffit de choisir $M > \frac{1}{\varepsilon}$ pour obtenir l'implication (1.3). On peut choisir par exemple, $M = \frac{1}{\varepsilon} + 1$.

Remarque 1.11 Au lieu de la limite finie ℓ, on peut définir le fait que f admette comme limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en l'infini en remplaçant dans la définition 1.9 la condition

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

par

$$f(x) > A \quad (\text{resp. } f(x) < -A),$$

où $A > 0$ est un réel arbitrairement grand.

1.1.2 Propriétés de la limite d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soient a et $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1.1.2.1 Unicité de la limite d'une fonction

Proposition 1.12 *Si f admet une limite en a, alors cette limite est unique.*

1.1.2.2 Limites d'une fonction et suites numériques

Proposition 1.13 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite (x_n) convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers ℓ.

2) Si deux suites (x_n) et (y_n) convergent vers a et si $f(x_n)$ et $f(y_n)$ ont des limites différentes, alors f n'admet pas de limite en a.

Remarque 1.14 Ce résultat est souvent utilisé pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a. Pour ce faire, il suffit de construire deux suites convergeant vers a dont les images par f ont des limites différentes.

Exemple 1.15 La fonction définie par $f(x) = 1/x$ n'admet pas de limite en 0. En effet, pour les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = -\frac{1}{n},$$

on a : $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$ mais $f(u_n) = n \to +\infty$ et $f(v_n) = -n \to -\infty$.

Exemple 1.16 La fonction $x \mapsto \sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$. En effet, soient (u_n) et (v_n) les suites respectivement définies par

$$u_n = n\pi \quad \text{et} \quad v_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Les deux suites divergent vers $+\infty$ mais $\sin u_n \to 0$ et $\sin v_n \to 1$. Ce qui achève la preuve.

1.1.3 Limites remarquables

- Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors on a :

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0; \tag{1.4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^\alpha \,\mathrm{e}^{\beta x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty. \tag{1.5}$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0. \tag{1.6}$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \mathrm{e}\,. \tag{1.7}$$

1.1.4 Règles pratiques de calcul de limites

Sous réserve d'existence des limites de f et g en $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\,;\,+\infty\}$, on a :

- $\lim\limits_{x\to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim\limits_{x\to a} f(x) + \beta \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
- $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\, g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\ \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad \text{si} \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0.$

avec les conventions suivantes :

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
(+\infty)+(+\infty) & = & +\infty & k\times(+\infty) & = & +\infty \text{ pour } k>0 \\
(+\infty)+k & = & +\infty & k\times(+\infty) & = & -\infty \text{ pour } k<0 \\
(-\infty)+(-\infty) & = & -\infty & (+\infty)\times(+\infty) & = & +\infty \\
(-\infty)+k & = & -\infty & (+\infty)\times(-\infty) & = & -\infty \\
1/(0^+) & = & +\infty & 1/(0^-) & = & -\infty \\
k/\infty & = & 0 & & &
\end{array}$$

Remarque 1.17 (Formes indéterminées (FI)) Une limite ayant l'une des formes suivantes

$$(+\infty)-\infty, \quad 0\times\infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^{0}, \quad 0^{0},$$

est appelée une **forme indéterminée** (FI). Dans ce cas, on ne peut pas conclure immédiatement. Une transformation (factorisation, expression conjuguée, utilisation du logarithme et de l'exponentielle, etc…) est nécessaire pour se ramener aux cas classiques de limites mentionnés plus haut.

1.1.5 Limites et relations d'ordre

Proposition 1.18 *Soient f et g deux applications définies sur une partie de $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $f \leqslant g$ au voisinage de a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$.*

Théorème 1.19 (Théorème d'encadrement) *Soient f, g, h trois applications définies sur une partie de $\mathbb{R}$, a, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et V un voisinage de a. Alors,*

$$\left.\begin{array}{c} \forall x \in V, \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \\[2ex] \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to a} g(x) = \ell. \tag{1.8}$$

Exemple 1.20 Appliquons le théorème d'encadrement pour calculer

$$\lim_{x\to+\infty} (x+\sin x).$$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donc $x-1 \leqslant x+\sin x \leqslant x+1$. Comme les fonctions encadrant $x+\sin x$ tendent vers $+\infty$, on conclut que

$$\lim_{x\to+\infty} (x+\sin x) = +\infty.$$

Corollaire 1.21 *Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et V un voisinage de a. Pour tout $x \in V$, on a $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$. D'après le théorème 1.19,*

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = 0 \implies \lim_{x \to a} f(x) = 0. \tag{1.9}$$

Exemple 1.22 Soit à calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

On peut faire le raisonnement suivant :

$$\left.\begin{array}{c} \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x| \\ \lim_{x \to 0} |x| = 0 \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

1.1.6 Limite de fonctions composées

Théorème 1.23 *Soit deux fonctions $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. Si f admet une limite $b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et g admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en b, alors $g \circ f$ admet ℓ pour limite en a. En d'autres termes,*

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = b \quad et \quad \lim_{x \to b} g(x) = \ell\right) \implies \lim_{x \to a} g \circ f(x) = \ell. \tag{1.10}$$

Ce théorème peut s'utiliser de la façon suivante. Si l'on veut calculer

$$\lim_{x \to a} g(f(x)),$$

on peut créer une variable $X = f(x)$. Si $X \to b$ lorsque $x \to a$ et si $g(X) \to \ell$ lorsque $X \to b$, alors on conclut que la limite de départ est ℓ.

Exemple 1.24 Soit à calculer la limite

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

En posant $X = \frac{1}{x}$, on a $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin X}{X}$ et $\lim_{x \to +\infty} X = 0$ d'où

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1.$$

1.2 Continuité d'une fonction

1.2.1 Généralités

Définition 1.25 Soit f une fonction d'une variable réelle et $a \in D_f$.

- On dit que f est **continue** au point $x = a$ si on a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ou si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

- Si f n'est pas continue en $x = a$, on dit que f est **discontinue** au point a.
- On dit que f est continue sur un intervalle I si et seulement si elle est continue en tout point de I.

Exemple 1.26 Les fonctions rationnelles, polynômes, trigonométriques, exponentielles et logarithmes sont toujours continues leurs domaines de définition.

Exemple 1.27 Etudions la continuité de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$, $]0, 3[$ et $]3, +\infty[$. Il reste à étudier la continuité aux points $x = 0$ et $x = 3$.

- $f(0) = (1 + 0^2) = 1$,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (\cos x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 + x^2) = 1.$$

donc f est continue au point $x = 0$.

- $$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (1 + x^2) = 10 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (2x + 1) = 7$$

donc f n'est pas continue au point $x = 3$.

En conclusion, f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

1.2.2 Propriétés

Proposition 1.28 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*

1) *Une fonction définie comme combinaison linéaire ou produit de fonctions continues sur I est continue sur I.*
2) *Si f et g sont continues sur I et g ne s'annule pas sur I alors f/g est continue sur I.*
3) *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est une application continue de I dans J et si g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.*
4) *Si f est continue sur I alors $|f|$ est continue sur I.*
5) *Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors les fonctions*

$$\sup(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2} \quad \textit{et} \quad \inf(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

sont continues sur I.

1.2.3 Continuité et suites numériques

Proposition 1.29 *Une fonction f est continue en un point $a \in D_f$ si et seulement si pour toute suite (x_n) convergeant vers a, la suite $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.*

1.2.4 Prolongement par continuité

Définition 1.30 Soient $A \subset \mathbb{R}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$. Si f est définie en tout point de A sauf au point $a \in A$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors la fonction :

$$\tilde{f} : x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in I \setminus \{a\} \\ \\ \ell & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

est appelée **prolongement par continuité** de f au point a.

Exemple 1.31 La fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{f} : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

est un prolongement par continuité de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ au point 0.

1.2.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.32 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une application continue sur un intervalle $[a, b]$. Toute valeur y comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte (i.e. admet au moins un antécédent) dans $[a, b]$. En d'autres termes, si un réel y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.*

Lorsqu'on pose $y = 0$ dans le théorème 1.32, la condition « 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ » est équivalente à $f(a)f(b) \leqslant 0$ et on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 1.33 *Soit f une application continue sur un intervalle I. Si a et b sont deux points de I tels que $f(a)f(b) \leqslant 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*

1.2.6 Continuité de la réciproque d'une fonction bijective

Proposition 1.34 *Si f est une fonction bijective de $I \subset \mathbb{R}$ dans $J \subset \mathbb{R}$, alors sa réciproque f^{-1} est continue de J dans I.*

1.3 Exercices

Exercice 1.1 Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2}$
2) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x+2}{x^2\ln x}$
3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$
4) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$
5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1+\sqrt{x}}}{x+2}$
6) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x+2|x|}{x}$
7) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^5-1}{x-1}$
8) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$
9) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$
10) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
11) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$
12) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\sin(x\,\ln x)}{x}$
13) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x^x-1}{\ln(x+1)}$
14) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2+1}{\sin^2 x}$
15) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x-\sin 5x}{x+\sin 5x}$
16) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$
17) $\displaystyle\lim_{x\to0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$
18) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos x$

Exercice 1.2 Soient m et $n \in \mathbb{N}$. Calculer en fonction de m et n, la limite suivante :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}.$$

Exercice 1.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T. Montrer que si f n'est pas constante, alors f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 1.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Montrer que si f est croissante et majorée, alors f admet une limite en $+\infty$.

Exercice 1.5 Etudier la continuité de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}+x+1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2+x^2\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$
2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3) $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4) $f(x) = x + \sqrt{x-E(x)}$
5) $f(x) = E(x) + \sqrt{x-E(x)}$
6) $f(x) = E(x) + (x-E(x))^2$
7) $f(x) = E(x) + E(2-x)$
8) $f(x) = E(x)\sin x$
9) $f(x) = E(x)\sin(\pi x)$

Exercice 1.6 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'expression est :

$$f(x) = \frac{\ln(1-4x^2)}{x^2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Vérifier que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement par continuité $\tilde{f}$.

Exercice 1.7 Dans chacun des cas suivants, déterminer si la fonction f (d'ensemble de définition $\mathbb{R}^*$) est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et le cas échéant déterminer le prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{2x}$

2) $f(x) = \begin{cases} x \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ x\,\mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \sin(x) \ln|x|$

4) $f(x) = \sin(x) \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

5) $f(x) = \cos(x) \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

CHAPITRE 2

CALCUL DE DÉRIVÉES

Sommaire

2.1 DÉRIVATION DE FONCTIONS

2.1.1 Dérivabilité - Nombre dérivé - Fonction dérivée

2.1.1.1 Définitions

Définition 2.1 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$.

- On dit que f est **dérivable** en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{existe et est finie.} \tag{2.1}$$

- Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.
- Une fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, la fonction qui à chaque $x \in I$ associe $f'(x)$ est la **fonction dérivée** (ou **dérivée**) de f.

Exemple 2.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - (x_0)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0.$$

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie par $f'(x) = 2x$.

2.1.1.2 Autres définitions de la dérivée

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$. Dans les sciences expérimentales, la définition de la formule (2.1) peut être réécrite sous les formes équivalentes suivantes.

Définition 2.3 Soient

- $\Delta x = h = x - x_0$ l'accroissement de x à partir de x_0 et
- $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ l'accroissement de f à partir de $f(x_0)$.

On a :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{(si cette limite existe et est finie).} \tag{2.2}$$

Définition 2.4 En posant $h = x - x_0$ dans (2.1), on dit aussi que f est dérivable en x_0 si la limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existe et est finie.} \tag{2.3}$$

Le rapport

$$\tau_{f,x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.4}$$

est alors appelé le **taux d'accroissement** de f au point x_0.

2.1.1.3 Exemples en sciences expérimentales

Si $f(t)$ est une fonction du temps t, la dérivée $f'(t)$ représente la vitesse de variation de f à l'instant t.

- Si $x(t)$ représente la distance parcoure par un objet à l'instant t, alors $x'(t)$ représente sa vitesse à l'instant t.
- Si $f(t)$ représente la température (décroissante avec le temps) d'un corps, alors $f'(t)$ représente la vitesse de refroidissement du corps à l'instant t.
- Si $N(t)$ est l'effectif d'une population (individus, bactéries, microbes, etc. . .) à l'instant t, alors $N'(t)$ représente la vitesse de croissance de ladite population à l'instant t.
- Si $f(t)$ est la quantité d'eau, de gaz, de sang, etc. . . écoulée pendant la durée t, alors $f'(t)$ est le débit instantané à l'instant t.

2.1.1.4 Dérivabilité à gauche et à droite

Définition 2.5 Une fonction f définie en x_0 est dite :

- **dérivable à droite** en x_0 si la quantité
$$f'_d(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ existe et est finie.}$$
- **dérivable à gauche** en x_0 si la quantité
$$f'_g(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ existe et est finie.}$$
- **dérivable** en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et si $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple 2.6 La fonction $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$. En effet,
$$f'_g(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$
et
$$f'_d(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

2.1.2 Dérivabilité et continuité

Proposition 2.7 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

La réciproque est fausse. Une application f peut être continue en x_0 sans être dérivable en x_0. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

2.1.3 Interprétation géométrique de la dérivée

La dérivabilité en x_0 se traduit dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par l'existence, relativement à la courbe représentative de f, d'une tangente au point $M(x_0, f(x_0))$ non parallèle à l'axe $(O, \overrightarrow{j})$. Cette tangente a pour équation
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{2.5}$$

Exemple 2.8 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(|x| + 1)$ (voir Figure 2.1, page 23). De la figure 2.1, on peut déduire par exemple les propriétés suivantes démontrables rigoureusement :

- La fonction f est dérivable partout sauf au point 0 où elle ne possède pas de tangente.
- Au point $x_0 = 2$ par exemple, elle possède une tangente représentée en rouge.

Remarque 2.9 Si
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty,$$
alors la courbe de f admet en x_0 une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

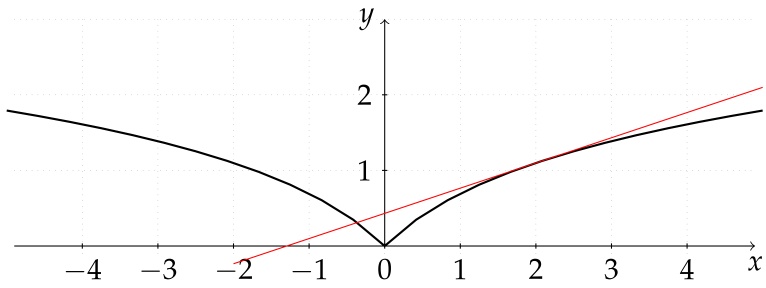


FIGURE 2.1 – Représentation graphique de la fonction $f(x) = \ln(|x| + 1)$.

2.1.4 Dérivées successives

Définition 2.10 Soit f une fonction dérivable.

- Si f' est elle aussi dérivable, sa dérivée est appelée **dérivée seconde** de f et notée f''.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction **dérivée d'ordre** n de f (ou **dérivée** n**−ième** de f) est la dérivée de la fonction dérivée d'ordre $n-1$ et notée $f^{(n)}$.

Exemple 2.11 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3$. Ses dérivées successives sont :

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 10x, \\ f''(x) = 6x + 10, \\ f^{(3)}(x) = 6, \\ f^{(n)}(x) = 0 \quad \text{pour } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Théorème 2.12 (Formule de Leibniz) *Si f et g sont dérivables à l'ordre n, alors la fonction produit fg est dérivable à l'ordre n et on a la **formule de Leibniz** suivante :*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}. \tag{2.6}$$

2.1.5 Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

Définition 2.13 Une fonction f est dite de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si elle est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $\mathscr{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

Définition 2.14 Une fonction f est dite de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si elle est indéfiniment dérivable sur I. On note $\mathscr{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

2.1.6 Notion de différentielle

2.1.6.1 Définition

Définition 2.15 Soit f une fonction définie sur I et dérivable en un point x_0 de I. On appelle **différentielle** de f en x_0, l'application linéaire notée $\mathrm{d}_{x_0} f$ et définie par :

$$\mathrm{d}_{x_0} f(h) = f'(x_0)h.$$

Exemple 2.16

- L'application identique $x \mapsto x$ a pour différentielle en x_0, $\mathrm{d}_{x_0} x(h) = h$.
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ a pour différentielle en x_0, $\mathrm{d}_{x_0} f(h) = 2x_0 h$.

2.1.6.2 Notation différentielle de la dérivée

- Comme $\mathrm{d}_{x_0} x(h) = h$, toute fonction f dérivable en x_0 vérifie $\mathrm{d}_{x_0} f(h) = f'(x_0)\mathrm{d}_{x_0} x(h)$ soit encore $f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}_{x_0} f}{\mathrm{d}_{x_0} x}$.
- La dérivée seconde de f se note $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$, ..., la dérivée $n-$ième se note $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ (les positions des exposants sont décalées afin de rappeler que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ agit n fois de suite) c'est-à-dire, pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} = f^{(n)}(x).$$

Exemple 2.17 Si $u(x) = x^3$, alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2$.

Remarque 2.18 La notation $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ exprime la dérivée de f en un point comme le rapport d'un petit accroissement de f et d'un petit accroissement de x lui correspondant. L'avantage de cette notation est qu'il s'agit d'un quotient. On peut donc l'inverser pour obtenir $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}f}$.

Exemple 2.17 (suite) Pour $u(x) = x^3$, on a $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2$ et

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3(u^{1/3})^2} = \frac{1}{3u^{2/3}} = \frac{1}{3}u^{-2/3}.$$

Ce qui est exact puisqu'on peut aussi écrire $x = \sqrt[3]{u} = u^{1/3}$ d'où

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{3}u^{-2/3}.$$

2.1.7 Opérations sur les dérivées

2.1.7.1 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Ensemble de dérivabilité	Fonction dérivée
$x \longmapsto k, \quad k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$
$x \longmapsto x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$	–	$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \cos x$
$x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto -\sin x$
$x \longmapsto \tan x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{(\cos x)^2}$
$x \longmapsto \ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \mathrm{e}^x$
$x \longmapsto a^x \quad (a > 0)$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto (\ln a) \cdot a^x$

2.1.7.2 Dérivées et opérations usuelles

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
- Si $g(x_0) \neq 0$, alors
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$
- Si $g(x_0) \neq 0$, alors
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

2.1.7.3 Dérivée de la composée de deux fonctions

Théorème 2.19 (Dérivée de la composée de deux fonctions) *Soient $I, J \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'\Big[f(x_0)\Big]. \tag{2.7}$$

Exemple 2.20 Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction d'expression $h(x) = \sin(x^2)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $h'(x) = 2x\cos(x^2)$.

Remarque 2.21 En composant une fonction f par $x \mapsto x^\alpha$ (pour $\alpha \in \mathbb{R}$), ln et exp, on obtient la table 2.1.

TABLE 2.1 – Dérivation et compositions usuelles

Fonction	Dérivée
$x \mapsto (f(x))^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \alpha f'(x)(f(x))^{\alpha-1}$
$x \mapsto \sqrt{f(x)}$	$x \mapsto \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$x \mapsto \mathrm{e}^{f(x)} = \exp(f(x))$	$x \mapsto f'(x)\,\mathrm{e}^{f(x)}$
$x \mapsto \ln\lvert f(x)\rvert$	$x \mapsto \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (dérivée logarithmique)

Application 2.22 Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:
1) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ 2) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ 3) $f(x) = \ln(x^2+1)$.

2.1.7.4 Dérivée de la réciproque d'une fonction bijective

Théorème 2.23 *Soient $E, F \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$, $f : E \longrightarrow F$ une fonction bijective. Si f est dérivable en x_0 et si f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, alors on a :*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(y_0)\right]}. \tag{2.8}$$

Exemple 2.24 On sait que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ d'expression $f(x) = x^2$ est bijective de réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ d'expression $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = 2x$. Supposons que l'on ne connaisse pas la dérivée de la fonction racine carrée. On peut appliquer la formule (2.8) et écrire pour tout $y > 0$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]} = \frac{1}{2f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

2.2 Théorèmes importants

2.2.1 Théorème de Rolle

Théorème 2.25 (Théorème de Rolle) *Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors,*

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f'(c) = 0.$$

2.2.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 2.26 (Théorème des accroissements finis) *Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors,*

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

2.3 Applications de la dérivée

2.3.1 Etude du sens de variation d'une fonction

Théorème 2.27 *Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une fonction continue et dérivable sur $]a,b[$.*

- *Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est constante sur $]a,b[$.*
- *Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est croissante sur $]a,b[$.*
- *Si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est décroissante sur $]a,b[$.*

Exemple 2.28 Déterminons le sens de variation de la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \,\mathrm{e}^{-x}.$$

On a :

$$f'(x) = 2x \,\mathrm{e}^{-x} - x^2 \,\mathrm{e}^{-x} = (2x - x^2)\,\mathrm{e}^{-x} = x(2-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La fonction f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$ et croissante sur $[0, 2]$. Sa représentation graphique est donnée par la figure 2.2 (page 28).

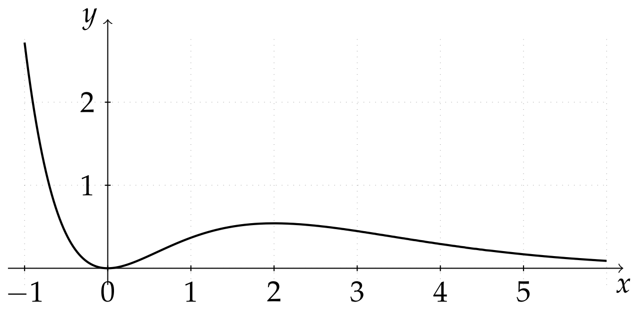


FIGURE 2.2 – Représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

Application 2.29 Dans le cadre de l'étude d'une épidémie dans un pays, on modélise le nombre de malades (en milliers) à l'aide de la fonction N définie sur l'intervalle $[0, 60]$ par

$$N(t) = t^2\,\mathrm{e}^{-0.1t},$$

où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie. Déterminer le sens de variation de $N(t)$.

2.3.2 Optimisation

Définition 2.30 Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f admet un **maximum** (resp. **minimum**) **local** en a s'il existe un voisinage J de a (un intervalle ouvert J de centre a) inclus dans I tel que pour tout $x \in J$, l'on ait :
$$f(x) \leqslant f(a) \qquad (\text{resp.} \quad f(x) \geqslant f(a)).$$
- Un maximum ou un minimum local est appelé **extremum local**.

La figure 2.3 (page 29) donne une illustration de la notion d'extremum local.

2.3.2.1 Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre (CNO-1)

Théorème 2.31 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $]a, b[\subset D_f$. Si f est dérivable en $x_0 \in]a, b[$ et si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Remarque 2.32

- Un point x^* tel que $f(x^*) = 0$ est appelé **point stationnaire** (ou **point critique**).
- Les extrema locaux de f sont nécessairement des points stationnaires mais **un point stationnaire n'est pas forcément un extremum local**. Par exemple, si $f(x) = x^3$ on a $f'(0) = 0$ alors que 0 n'est pas un extremum local.

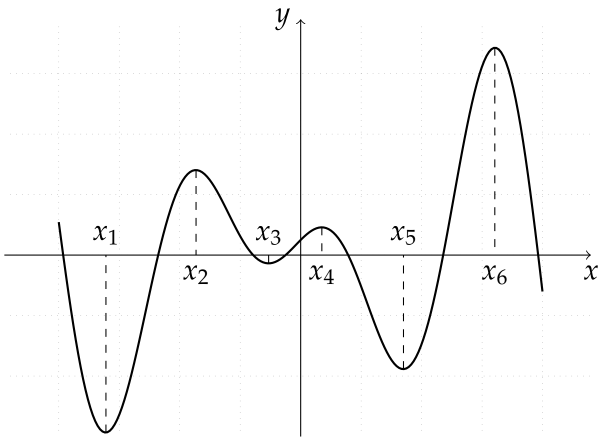


FIGURE 2.3 – Exemple de fonction admettant 3 minima locaux x_1, x_3, x_5 et 3 maxima locaux x_2, x_4 et x_6 soit au total 6 extrema locaux.

2.3.2.2 Condition suffisante d'optimalité du second ordre (CSO-2)

Théorème 2.33 *Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $x^* \in I$ un point critique de f. Alors :*

- $f''(x^*) > 0 \longrightarrow f$ *présente en x^* un minimum local.*
- $f''(x^*) < 0 \longrightarrow f$ *présente en x^* un maximum local.*

Exemple 2.34 Déterminons la valeur et la nature des extrema locaux de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$.

- On a : $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$. Ainsi, $f(x) = 0$ implique $x^2 - x - 2 = 0$. Comme $\Delta = 9 > 0$, on a deux points critiques :

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

- $f''(x) = 12x - 6$.
- $f''(-1) = -18 < 0$ donc f admet un maximum local en $x_1 = -1$.
- $f''(2) = 18 > 0$ donc f admet un minimum local en $x_2 = 2$.

La figure 2.4 (page 30) donne la représentation graphique de la fonction f.

Application 2.35 Parmi tous les rectangles de périmètre p fixé, quel est celui dont l'aire est maximale ? Quelle est cette aire maximale ?

2.3.3 Calcul de limites

Le calcul de dérivées s'applique au calcul de limites grâce à la **règle de l'Hôpital** [1] encore appelée règle de l'Hospital ou règle de Bernoulli.

1. Du nom du mathématicien français Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital.

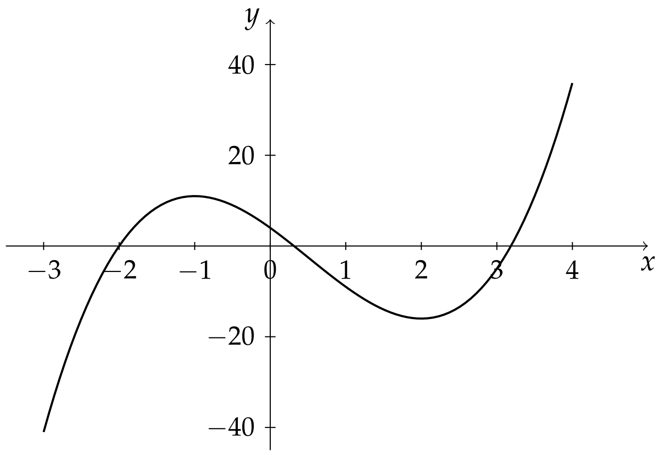


FIGURE 2.4 – Représentation graphique de la fonction d'expression $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$

Théorème 2.36 (Règle de l'Hôpital) *Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soient f et g deux fonctions dérivables dans un voisinage V de x_0 tel que $g' \neq 0$ sur V.*

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \in \left\{\frac{0}{0}\,;\,\frac{\infty}{\infty}\right\} \\[2em] \displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ \textit{existe} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemple 2.37 Nous avons vu plus tôt dans le cours la limite remarquable suivante (voir la formule (1.6) à la page 13) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Essayons de retrouver ce résultat par la règle de l'Hôpital. Posons $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x$.

- D'une part, on a :
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}.$$
- D'autre part, on a $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = 1$ et
$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

Les deux conditions de la règle de l'Hôpital étant vérifiées, on peut donc conclure que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Remarque 2.38 Dans l'application de la règle de l'Hôpital, il est indispensable de vérifier les deux conditions avant de conclure sinon l'on risque de tirer de fausses conclusions. Par exemple,

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x+1}{2x+1} = \frac{5}{3} \quad \neq \quad \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x+1)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+1)} = \frac{4}{2} = 2.$$

En effet, ce n'est pas un cas où la règle de l'Hôpital peut s'appliquer puisque la limite de départ ne donne ni $0/0$ ni ∞/∞.

Remarque 2.39 Pour le calcul d'une même limite, il peut être nécessaire d'appliquer la règle de l'Hôpital n fois consécutivement ($n = 2, 3, \ldots$). Par exemple, si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g sont deux fonctions telles que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \left\{ \frac{0}{0} \, ; \, \frac{\infty}{\infty} \right\} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \left\{ \frac{0}{0} \, ; \, \frac{\infty}{\infty} \right\}$$

et si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ existe, alors d'après la règle de l'Hôpital, on peut écrire

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

En appliquant à nouveau la règle de l'Hôpital, on peut aussi écrire

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Exemple 2.40 Calculons la limite suivante en utilisant la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^3 + 5x^2}.$$

Posons $f(x) = \cos(2x) - 1$ et $g(x) = x^3 + 5x^2$. On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \quad f'(x) = -2\sin(2x), \quad g'(x) = 3x^2 + 10x \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$$

donc on ne peut rien conclure. Or,

$$f''(x) = -4\cos(2x), \quad g''(x) = 6x + 10 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = -\frac{2}{5}.$$

D'après la règle de l'Hôpital, on peut écrire $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{2}{5}$ et

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^3 + 5x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{2}{5}.$$

2.3.4 Etude de la convexité

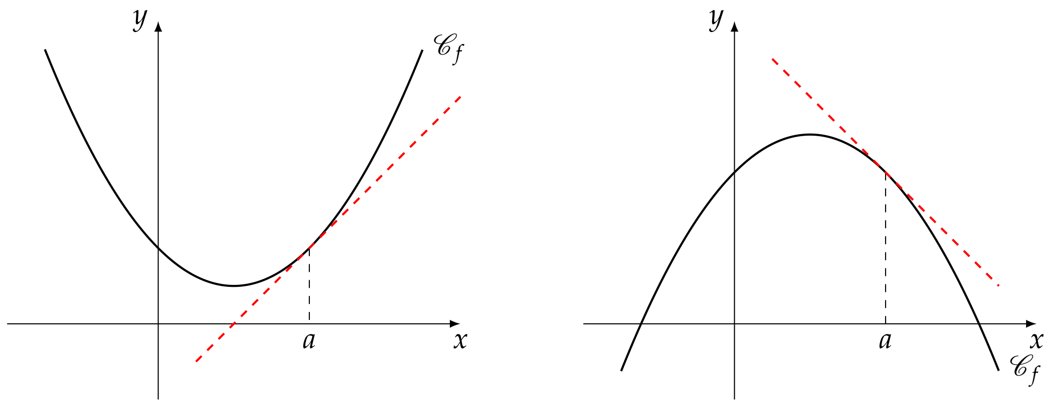
Théorème – Définition 2.41 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. On dit que f est* ***convexe*** *si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

(1) Pour tous x et $y \in I$ et pour tout $\alpha \in [0, 1]$,

$$f\big(\alpha x + (1 - \alpha) y\big) \leqslant \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y). \tag{2.9}$$

(2) Pour tout $a \in I$, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est en dessous de $\mathscr{C}_f$ c'est-à-dire

$$\forall (a, x) \in I^2, \quad f'(a)(x - a) + f(a) \leqslant f(x). \tag{2.10}$$



(a) Exemple de fonction convexe : en tout point, la tangente est en dessous de $\mathscr{C}_f$.

(b) Exemple de fonction concave : en tout point, la tangente est au dessus de $\mathscr{C}_f$.

FIGURE 2.5 – Illustration de la convexité et de la concavité

(3) Si f est dérivable, alors f' est croissante sur I.

(4) Si f est deux fois dérivable, alors f'' est positive sur I.

Définition 2.42 Une fonction f est dite **concave** si $-f$ est convexe.

La figure 2.5 (page 32) donne une illustration de la convexité et de la concavité.

Exemple 2.43

- Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto -\ln x$ sont convexes (sur leurs ensembles de définition respectifs) car elles ont des dérivées secondes positives.
- La fonction ln est concave.
- La fonction $x \mapsto x^3$ n'est ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}$ mais elle est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$.

La convexité d'une fonction permet de démontrer certaines inégalités très utilisées en analyse mathématique et appelées sous le terme général « inégalités de convexité ». On peut utiliser l'inégalité (2.10) comme suit.

Exemple 2.44 En appliquant l'inégalité (2.10) aux fonctions convexes $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto -\ln x$ respectivement pour $a = 0$ et $a = 1$, on obtient respectivement les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant x + 1, \tag{2.11}$$

$$\forall x > 0, \quad \ln x \leqslant x - 1. \tag{2.12}$$

On peut aussi utiliser le théorème suivant.

Théorème 2.45 (Inégalité de convexité) *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tous points $x_1, \ldots, x_n$ de I et pour tous réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, on a :*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i). \tag{2.13}$$

Exemple 2.46 Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Montrons que

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i. \tag{2.14}$$

En effet, on a :

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = \exp\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}\right)\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \ln\left(x_i^{\alpha_i}\right)\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i\right).$$

Par convexité de la fonction $-\ln$, on a :

$$-\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqslant -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i,$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right).$$

Ainsi, on a :

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i\right) \leqslant \exp\left(\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Remarque 2.47 En posant $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ dans l'inégalité (2.14), on a :

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

soit

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \tag{2.15}$$

L'inégalité (2.15) est l'**inégalité arithmético-géométrique**.

2.4 EXERCICES

Exercice 2.1 On considère la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2) La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

Exercice 2.2 Déterminer l'expression générale de la dérivée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$, où $a \in \mathbb{R}$ 2) $g(x) = \ln x$ 3) $h(x) = \cos x$.

Exercice 2.3 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points stationnaires et leurs natures respectives.

1) $f(x) = 2x^2 - x + 6$.
2) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.
3) $f(x) = x^3 - 3x + 3$.
4) $f(x) = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$.

Exercice 2.4 Le but de cet exercice est de calculer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle $[k, k+1]$ montrer que :
$$\ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}.$$
2) Trouver une suite (v_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leqslant u_n$.
3) En déduire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 2.5 Afin de financer vos études et vous faire un peu d'économie, vous entreprenez avec quelques amis de fabriquer et de vendre des gâteaux purement bio dont la quantité vendue en un mois q dépend du prix de vente unitaire p par la relation $q(p) = \alpha + \beta p$.

1) Dans toute la suite, on suppose que $q = 5000$ si $p = 100$ et que $q = 4000$ si $p = 200$. Déterminer α et β.
2) Quelle est la plus grande valeur possible pour p sachant que la quantité vendue q est toujours un nombre positif ?
3) Déterminer en fonction de p les recettes mensuelles $r(p)$.
4) Quelle est la valeur maximale des recettes ?
5) Le coût unitaire de fabrication est égal à 100. Déterminer en fonction de p le profit $b(p)$ total réalisé (la différence entre recettes et coût).
6) Pour quel prix le profit est-il maximal ? Quelle est la quantité correspondante ?

Exercice 2.6 Si un cultivateur de riz effectue sa récolte de riz cette semaine, il obtiendra 1200 kg valant 400 FCFA le kg. Pour chaque semaine d'attente, la récolte augmente de 100 kg mais le prix baisse de 20 FCFA par kg. Soient x le nombre de semaines d'attente avant d'effectuer sa récolte et $R(x)$ le revenu issu de la vente après récolte. Quelle valeur de x permet de maximiser le revenu $R(x)$?

Exercice 2.7 Un fil de longueur L doit être coupé en deux parties de manière à pouvoir former un triangle équilatéral avec l'une et un carré avec l'autre. Comment faut-il couper ce fil pour que l'aire totale des deux figures construites soit : (a) minimale ? (b) maximale ?

Exercice 2.8 Un camion d'une entreprise doit effectuer une livraison à un lieu situé à 400 km de l'entreprise. On suppose que durant le trajet aller-retour, lorsque le camion roule à une vitesse moyenne $v \in [30, 100]$ (en km/h), sa consommation $C(v)$ (en litres pour 100 km) est donnée par la relation :

$$C(v) = \frac{700}{v} + \frac{v}{4}.$$

Sachant que le chauffeur est payé 1 000 FCFA de l'heure et le litre de gasoil coûte 850 FCFA, quelle doit être la vitesse moyenne v^* pour minimiser le coût du trajet aller-retour ?

Exercice 2.9 Une société produit des boîtes en carton de 2 litres (2 000 cm^3), identiques en forme de parallélépipède à base carrée. Comment doivent être fixées les dimensions de chaque boîte de sorte à utiliser le moins de quantité (surface) de carton possible ?

Exercice 2.10 Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et f la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}.$$

Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}_+$ noté $\min_{x \in \mathbb{R}_+} f(x)$.

Exercice 2.11 Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de f en a en utilisant la règle de l'Hôpital :

1) $f(x) = \dfrac{x - \tan x}{x - \sin x}, \quad a = 0;$

2) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{1 - e^{2x}}, \quad a = 0;$

3) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1}, \quad a = 1;$

4) $f(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}, \quad a = 1;$

5) $f(x) = x^2 e^{-x}, \quad a = +\infty;$

6) $f(x) = \ln x \cdot \ln(1 - x), \quad a = 0^+.$

Exercice 2.12 Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, où a, b et $c \in \mathbb{R}$. Déterminer a, b et c pour que f soit convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 2.13 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique sont les quantités $\overline{X}$, G, H et Q respectivement définies par :

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n},$$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \right)^{-1} \quad \text{et} \quad Q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Montrer que l'on a : $H \leqslant G \leqslant \overline{X} \leqslant Q$.

Chapitre 3

Fonctions usuelles : compléments

Sommaire

3.1 Introduction

Nous connaissons déjà des fonctions classiques telles que les fonctions polynômes, puissances, exponentielle, logarithme népérien, cosinus, sinus et tangente. Dans ce chapitre, nous présentons de nouvelles fonctions.

3.2 Fonctions circulaires réciproques

Les **fonctions circulaires** (ou **fonctions trigonométriques**) les plus utilisées sont les trois fonctions suivantes : cosinus, sinus et tangente. En tant que fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, elles ne sont pas bijectives mais il est possible de les rendre bijectives en modifiant les ensembles de départ et d'arrivée.

3.2.1 Arc cosinus

Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ représentée sur la figure 3.1 (page 37).

Pour définir une bijection à partir de cette fonction, il faut prendre comme ensemble de départ $[0, \pi]$ et comme ensemble d'arrivée $[-1, 1]$ (voir la partie en rouge sur la figure 3.1). Sur l'intervalle $[0, \pi]$ la fonction cosinus est continue et strictement décroissante et définit donc une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.

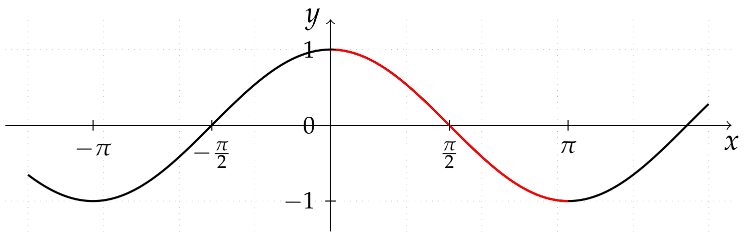


FIGURE 3.1 – Représentation de la fonction cosinus

Définition 3.1 La bijection réciproque de la restriction de la fonction cosinus sur $[0,\pi]$ est la fonction **Arc cosinus** notée arccos et définie par :

$$\begin{array}{rcl} \arccos & : & [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \\ & & x \longmapsto y \quad \text{tel que} \quad \cos y = x. \end{array} \tag{3.1}$$

En d'autres termes,

$$\forall x \in [-1,1], \quad \forall y \in [0,\pi], \quad \arccos x = y \iff \cos y = x. \tag{3.2}$$

La fonction Arc cosinus est représentée sur la figure 3.2.

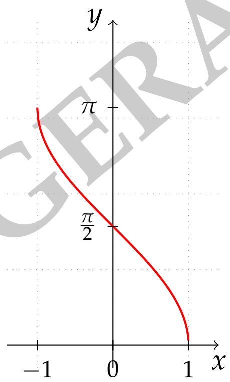


FIGURE 3.2 – Représentation graphique de la fonction Arc cosinus.

Application 3.2 Calculer

- $\arccos(0)$
- $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$
- $\arccos(1)$
- $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\arccos(-1)$
- $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

Remarque 3.3 Par définition de la bijection réciproque, on a :

$$\cos(\arccos x) = x, \quad \forall x \in [-1,1]; \tag{3.3}$$

$$\arccos(\cos(x)) = x, \quad \forall x \in [0,\pi]. \tag{3.4}$$

Exemple 3.4

- $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ car $\frac{\pi}{3} \in [0,\pi]$;
- $\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{3}\right) \neq \frac{7\pi}{3}$ car $\frac{7\pi}{3} \notin [0,\pi]$. On a plutôt

$$\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{3}\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3} - 2\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

De la figure 3.2 (page 37), on peut déduire certaines propriétés démontrables. Par exemple, la fonction arccos n'est ni paire ni impaire. Par contre, elle vérifie la propriété suivante.

Proposition 3.5 *Pour tout* $x \in [-1,1]$, *on a :*

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x). \tag{3.5}$$

Preuve : Soit $\theta = \arccos x \in [0,\pi]$. On a $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta = -x$ et $\pi - \theta \in [0,\pi]$ d'où $\arccos(-x) = \pi - \theta$. ■

La proposition suivante donne la dérivée de la fonction Arc cosinus.

Proposition 3.6 *Pour tout* $x \in]-1,1[$, *on a :*

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3.6}$$

Preuve : Soit $x \in]-1,1[$. On considère l'égalité $\cos(\arccos x) = x$. La fonction d'expression $\cos(\arccos x)$ est une fonction composée $g \circ f$ où $g(x) = \cos x$ et $f(x) = \arccos x$. On dérive l'égalité $\cos(\arccos x) = x$ à gauche et à droite pour obtenir :

$$\arccos'(x) \times \cos'(\arccos x) = 1$$

soit encore

$$\arccos'(x) \times (-\sin(\arcsin x)) = 1$$

qui est équivalent à

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos x)}. \tag{3.7}$$

Posons $y = \arccos x$. On sait que $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ donc $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$. Ainsi $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$. Or $y \in [0,\pi]$ donc $\sin y > 0$. Ainsi $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ d'où en remplaçant dans (3.7), on a

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-(\cos(\arccos x))^2}}.$$

Comme $\cos(\arccos x) = x$, on conclut que

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

3.2.2 Arc sinus

Considérons la fonction sinus cos : $\mathbb{R} \to [-1,1]$ représentée sur la figure 3.3. Pour définir une bijection à partir de cette fonction, il faut prendre comme ensemble de départ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et comme ensemble d'arrivée $[-1,1]$ (voir la partie en rouge sur la figure 3.3). Sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ la fonction sinus est continue et strictement croissante et définit donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1,1]$.

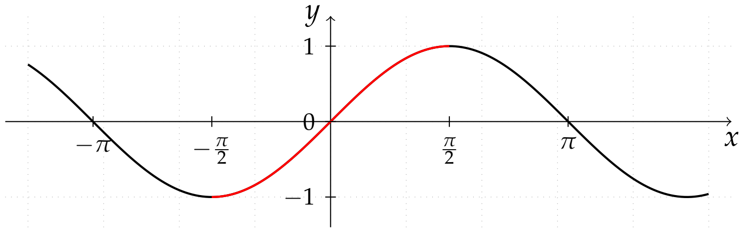


FIGURE 3.3 – Représentation de la fonction sinus

Définition 3.7 La bijection réciproque de la restriction de la fonction sinus sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est la fonction **Arc sinus** notée arcsin et définie par :

$$\begin{array}{rcccl} \arcsin & : & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ & & x & \longmapsto & y \quad \text{tel que} \quad \sin y = x. \end{array} \tag{3.8}$$

En d'autres termes,

$$\forall x \in [-1,1], \quad \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin x = y \iff \sin y = x. \tag{3.9}$$

La fonction Arc sinus est représentée sur la figure 3.4.

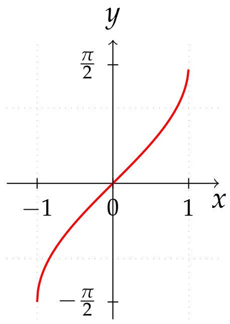


FIGURE 3.4 – Représentation graphique de la fonction Arc sinus.

Application 3.8 Calculer

- $\arcsin(0)$
- $\arcsin(1)$
- $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$
- $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\arcsin(-1)$
- $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

De la figure 3.4, on peut déduire certaines propriétés démontrables. Par exemple, la fonction arcsin est impaire (voir Proposition 3.9 ci-après).

Proposition 3.9 *Pour tout $x \in [-1,1]$, on a :*

$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x). \tag{3.10}$$

Preuve : Soit $\theta = \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a $\sin(-\theta) = -\sin\theta = -x$ et $-\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ d'où $\arcsin(-x) = -\theta$. ■

Remarque 3.10 Par définition de la bijection réciproque, on a :

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \forall x \in [-1,1]; \tag{3.11}$$

$$\arcsin(\sin(x)) = x, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{3.12}$$

Exemple 3.11

- $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ car $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{3}\right) \neq \frac{7\pi}{3}$ car $\frac{7\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On a plutôt

$$\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{3} - 2\pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

La proposition suivante donne la dérivée de la fonction Arc sinus.

Proposition 3.12 *Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3.13}$$

Preuve : Elle se fait en utilisant un raisonnement similaire à celui de la preuve pour la dérivée de la fonction arccos. ■

La proposition suivante donne la relation entre les fonctions Arc sinus et Arc cosinus.

Proposition 3.13 (Relation entre Arc sinus et Arc cosinus) *Pour tout $x \in [-1,1]$, on a :*

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}. \tag{3.14}$$

Preuve : Posons $f(x) = \arccos x + \arcsin x$. On a

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

donc f est une fonction constante c'est-à-dire $f(x) = k$. Pour connaître k, calculons $f(0)$. On a $f(0) = k$ et aussi

$$f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

donc $k = \frac{\pi}{2}$. On conclut donc que

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

■

3.2.3 Arc tangente

Considérons la fonction tangente $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ représentée sur la figure 3.5.

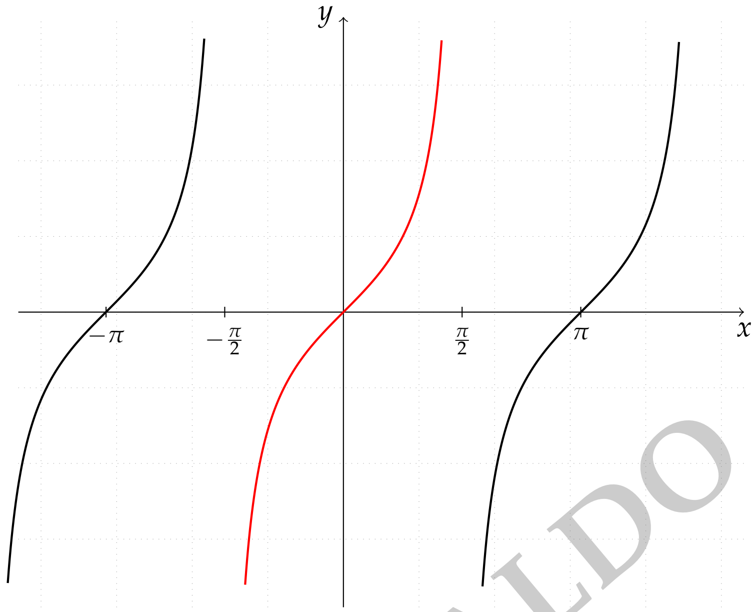


FIGURE 3.5 – Représentation de la fonction tangente

Pour définir une bijection à partir de cette fonction, il faut prendre comme ensemble de départ $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et comme ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ (voir la partie en rouge sur la figure 3.5). Sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la fonction tangente est continue et strictement croissante et définit donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.14 La bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est la fonction **Arc tangente** notée arctan et définie par :

$$\begin{array}{rccll} \arctan & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & & x & \longmapsto & y \quad \text{tel que} \quad \tan y = x. \end{array} \tag{3.15}$$

En d'autres termes,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan x = y \iff \tan y = x. \tag{3.16}$$

La fonction Arc tangente est représentée sur la figure 3.6 (page 42).

Application 3.15 Calculer

- $\arctan(0)$
- $\arctan(\sqrt{3})$
- $\arctan(-1)$
- $\arctan(1)$
- $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

De la figure 3.6, on peut déduire certaines propriétés démontrables. Par exemple,

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}. \tag{3.17}$$

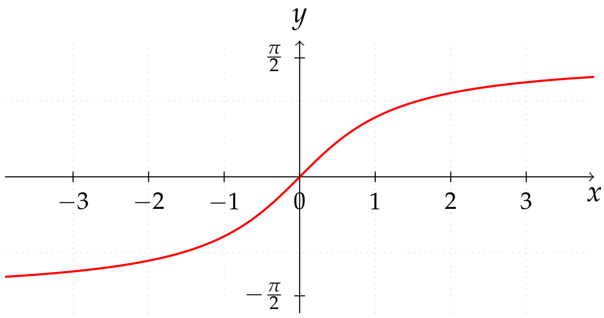


FIGURE 3.6 – Représentation graphique de la fonction Arc tangente.

Une autre propriété suggérée par la figure 3.6 est que la fonction arctan est impaire (voir Proposition 3.16 ci-après).

Proposition 3.16 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\arctan(-x) = -\arctan(x). \tag{3.18}$$

Preuve : La preuve est similaire à celle faite pour arcsin. ∎

Remarque 3.17 Par définition de la bijection réciproque, on a :

$$\tan(\arctan x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \tag{3.19}$$

$$\arctan(\tan(x)) = x, \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \tag{3.20}$$

La proposition suivante donne la dérivée de la fonction Arc tangente.

Proposition 3.18 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}. \tag{3.21}$$

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère l'égalité $\tan(\arctan x) = x$. On dérive à gauche et à droite pour obtenir :

$$\arctan'(x) \times \tan'(\arctan x) = 1$$

soit encore

$$\arctan'(x) \times (1 + \tan^2(\arctan x)) = 1.$$

Comme $\tan(\arctan x) = x$, on conclut que

$$\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

∎

3.3 FONCTIONS HYPERBOLIQUES ET HYPERBOLIQUES RÉCIPROQUES

3.3.1 Fonctions hyperboliques

On appelle fonctions hyperboliques, les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique.

Définition 3.19 On appelle :

- **sinus hyperbolique** la fonction notée sinh (ou sh) et définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\sinh(x) = \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}; \tag{3.22}$$

- **cosinus hyperbolique** la fonction notée cosh (ou ch) et définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\cosh(x) = \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}; \tag{3.23}$$

- **tangente hyperbolique** la fonction notée tanh (ou th) et définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tanh(x) = \mathrm{th}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}. \tag{3.24}$$

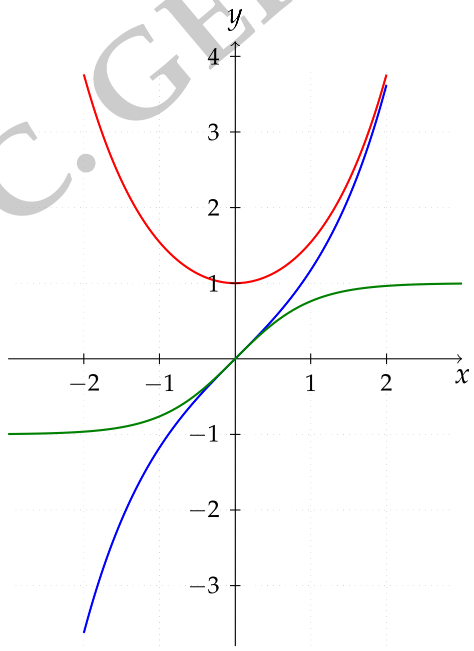


FIGURE 3.7 – Représentation graphique des fonctions sinh (en bleu), cosh (en rouge) et tanh (en vert).

Proposition 3.20 *Les fonctions* sinh, cosh *et* tanh *vérifient les propriétés suivantes :*

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{3.25}$$

- *Pour tous réels a et b, on a :*

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b; \tag{3.26}$$
$$\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 a; \tag{3.27}$$
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a; \tag{3.28}$$
$$\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} a; \tag{3.29}$$
$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \cdot \tanh b}. \tag{3.30}$$

Proposition 3.21 *Les fonctions* sinh, cosh *et* tanh *sont dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh} x; \tag{3.31}$$
$$\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch} x; \tag{3.32}$$
$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}. \tag{3.33}$$

3.3.2 Fonctions hyperboliques réciproques

En observant la figure 3.7, l'on peut dégager plusieurs propriétés mathématiquement démontrables :

- les fonctions sinus hyperbolique et tangente hyperbolique sont bijectives respectivement de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$;
- par contre, la fonction cosinus hyperbolique n'est pas bijective.

Proposition 3.22 *Soit $y \in \mathbb{R}$.*

1) L'ensemble des solutions de l'équation $\cosh(x) = y$ *est :*

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \emptyset & \textit{si} \quad y < 1, \\ \{0\} & \textit{si} \quad y = 1, \\ \left\{ \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right), \ \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \right\} & \textit{si} \quad y > 1. \end{cases}$$

2) L'équation $\sinh(x) = y$ *admet une unique solution* $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

3) L'ensemble des solutions de l'équation $\tanh(x) = y$ *est :*

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \right\} & \textit{si} \quad -1 < y < 1, \\ \emptyset & \textit{sinon}. \end{cases}$$

Preuve :

1)

$$\begin{aligned}
\cosh(x) = y &\iff \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = y \iff \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2y \\
&\iff \mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 2y \iff \frac{(\mathrm{e}^x)^2 + 1}{\mathrm{e}^x} = 2y \\
&\iff (\mathrm{e}^x)^2 + 1 = 2y\,\mathrm{e}^x \\
&\iff (\mathrm{e}^x)^2 - 2y\,\mathrm{e}^x + 1 = 0.
\end{aligned}$$

En posant $X = \mathrm{e}^x$, il s'agit alors de résoudre l'équation $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant

$$\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y-1)(y+1)$$

Le signe de Δ est donné par le tableau suivant :

y	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

(a) Si $y \in]-1, 1[$, il n'y a pas de solution.

(b) Si $y \in \{-1, 1\}$, il y a une solution double $X_0 = y$. Le changement de variable $X = \mathrm{e}^x$ ne permet pas de retenir le cas $y = -1$. Pour $y = 1$, $X_0 = 1$ et $x = \ln X_0 = 0$.

(c) Si $y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, il y a deux solutions :

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{2y - \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 - 1} \\
X_2 &= \frac{2y + \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y + \sqrt{y^2 - 1}
\end{aligned}$$

- Si $y \in]-\infty, -1[$, les deux solutions sont négatives
- Si $y \in]1, +\infty[$, les deux solutions sont positives. On a donc $\mathrm{e}^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$ ou $\mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ soit $x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})$ ou $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

En conclusion, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad y < 1, \\ \{0\} & \text{si} \quad y = 1, \\ \left\{ \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}),\ \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \right\} & \text{si} \quad y > 1. \end{cases}$$

2)

$$\begin{aligned}
\sinh(x) = y &\iff \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = y \iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 2y \\
&\iff \mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 2y \iff \frac{(\mathrm{e}^x)^2 - 1}{\mathrm{e}^x} = 2y \\
&\iff (\mathrm{e}^x)^2 - 1 = 2y\,\mathrm{e}^x \\
&\iff (\mathrm{e}^x)^2 - 2y\,\mathrm{e}^x - 1 = 0.
\end{aligned}$$

En posant $X = \mathrm{e}^x$, il s'agit alors de résoudre l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4y^2 + 4 > 0$ donc admet deux solutions

$$X_1 = \frac{2y - \sqrt{4y^2+4}}{2} = \frac{2y - 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y - \sqrt{y^2+1}$$
$$X_2 = \frac{2y + \sqrt{4y^2+4}}{2} = \frac{2y + 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}$$

La solution X_1 est négative et la solution X_2 est positive. En effet, $y^2 + 1 > y^2$ donc $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y|$. Ce qui implique que

$$y - \sqrt{y^2+1} < y - |y| \leqslant 0 \quad \text{et} \quad y + \sqrt{y^2+1} > y + |y| \geqslant 0.$$

On a donc $\mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2+1}$ soit $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

3)

$$\begin{aligned} \tanh(x) = y &\iff \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = y \iff \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = y \\ &\iff \mathrm{e}^{2x} - 1 = y(\mathrm{e}^{2x} + 1) \iff \mathrm{e}^{2x}(1-y) = 1 + y \\ &\iff \mathrm{e}^{2x} = \frac{1+y}{1-y}, \quad y \neq 1 \\ &\iff (\mathrm{e}^x)^2 = \frac{1+y}{1-y}, \quad y \neq 1. \end{aligned}$$

Le signe de $\frac{1+y}{1-y}$ est donné par :

y	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+y$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-y$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1+y}{1-y}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

La quantité $(\mathrm{e}^x)^2$ est strictement positive, donc on ne peut trouver une solution que si $y \in]-1, 1[$. Ainsi,

- Si $-1 < y < 1$, on applique ln et on obtient

$$x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

- Sinon, il n'y a pas de solution.

En conclusion, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \right\} & \text{si} \quad -1 < y < 1 \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

■

Les bijections réciproques respectives des fonctions hyperboliques sont définies dans les conditions suivantes.

Définition 3.23

- La fonction cosh est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$ et sa réciproque, appelée **argument cosinus hyperbolique** est définie comme suit :

$$\begin{array}{rccl} \text{Argch} & : & [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \longmapsto & \text{Argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right). \end{array} \tag{3.34}$$

- La fonction sinh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa réciproque, appelée **argument sinus hyperbolique** est définie comme suit :

$$\begin{array}{rccl} \text{Argsh} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \text{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right). \end{array} \tag{3.35}$$

- La fonction tanh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$ et sa réciproque, appelée **argument tangente hyperbolique** est définie comme suit :

$$\begin{array}{rccl} \text{Argth} & : &]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \text{Argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right). \end{array} \tag{3.36}$$

Les fonction Argsh, Argch et Argth sont représentées sur la figure 3.8.

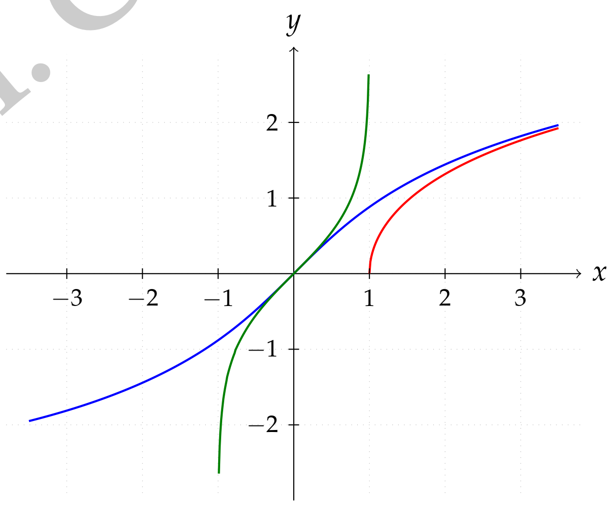


FIGURE 3.8 – Représentation graphique des fonctions Argsh (en bleu), Argch (en rouge) et Argth (en vert).

Proposition 3.24 *Les fonctions* Argch, Argsh *et* Argth *sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs et leurs dérivées sont respectivement données par :*

$$\operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1); \tag{3.37}$$

$$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (x \in \mathbb{R}); \tag{3.38}$$

$$\operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2} \quad (-1 < x < 1). \tag{3.39}$$

3.4 EXERCICES

Exercice 3.1 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $\arccos x = \dfrac{\pi}{3}$
2) $\arcsin x = \pi$.

Exercice 3.2 Calculer

1) $\arccos\left(\cos\dfrac{9\pi}{4}\right)$
2) $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$
3) $\arccos\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}\right)$
4) $\arcsin\left(\sin\dfrac{9\pi}{4}\right)$
5) $\arcsin\left(\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$
6) $\arcsin\left(\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$
7) $\arctan\left(\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$
8) $\arctan\left(\tan\dfrac{7\pi}{4}\right)$
9) $\arctan\left(\tan\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

Exercice 3.3 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'expression

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.
3) Montrer que les fonctions f et arcsin ont même expression sur D_f mais elles ne sont pas égales.
4) Construire à partir de f, la fonction $\tilde{f}$ telle que $\tilde{f}$ et arcsin soient égales.

Exercice 3.4 Etudier la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'expression $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Exercice 3.5 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'on a :

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 3.6 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes :

$$f(x) = \cos(2\arcsin(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(2\arctan(x)).$$

Exercice 3.7 Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Exercice 3.8 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \arccos(\cos(x)).$$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) Calculer, si elles existent, les limites de f aux bornes de D_f.

3) Réécrire, sans faire usage de la dérivée, $f(x)$ sans le symbole arccos et cos.
4) Retrouver la réponse à la question précédente en utilisant la dérivée.
5) Donner le sens de variation de f.
6) Représenter graphiquement f.

Exercice 3.9 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\sinh(2x)}{1+\cosh(2x)} = \tanh x$.

Exercice 3.10 Etudier la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'expression $f(x) = \operatorname{Argth}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

CHAPITRE 4

ETUDE LOCALE ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Sommaire

4.1 COMPARAISON LOCALE DE FONCTIONS

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

4.1.1 Fonctions négligeables

Définition 4.1 Une fonction f est dite **négligeable** devant une fonction g au voisinage de a si :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On note $f \underset{a}{=} o(g)$ et on lit « f **égale petit** o **de** g ».

Exemple 4.2 $x^2 = o(x)$ au voisinage de 0.

Proposition 4.3 *Soient f_1, f_2, g, g_1 et g_2 des fonctions.*

$$f_1 \underset{a}{=} \mathrm{o}(g) \quad et \quad f_2 \underset{a}{=} \mathrm{o}(g) \quad \Longrightarrow \quad f_1 + f_2 \underset{a}{=} \mathrm{o}(g).$$

$$f_1 \underset{a}{=} \mathrm{o}(g_1) \quad et \quad f_2 \underset{a}{=} \mathrm{o}(g_2) \quad \Longrightarrow \quad f_1 f_2 \underset{a}{=} \mathrm{o}(g_1 g_2).$$

4.1.2 Fonctions dominées

Définition 4.4 Une fonction f est dite **dominée** par une fonction g au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a et un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in V, \quad |f(x)| \leqslant M|g(x)|.$$

On note $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$ et on lit "f **égale grand** O **de** g".

Exemple 4.5 On a $x = \mathrm{O}(x^2)$ au voisinage de $+\infty$ car $\forall x \in V =]10, +\infty[$,

$$x \leqslant \frac{x^2}{10}.$$

4.1.3 Fonctions équivalentes

Définition 4.6 Deux fonctions f et g sont dites **équivalentes** au voisinage de a s'il existe une fonction h définie de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = h(x)g(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} h(x) = 1.$$

On note $f \sim g$ au voisinage de a ou plus simplement $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemple 4.7 Lorsque x tend vers $+\infty$, on a : $x^3 - 3x^2 + 1 \sim x^3$. En effet,

$$x^3 - 3x^2 + 1 = x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 1.$$

Remarque 4.8 Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors on a aussi $g \underset{a}{\sim} f$.

Proposition 4.9 *Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage V de $a \in \mathbb{R}$. Si g ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$, alors*

$$f \underset{a}{\sim} g \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{4.1}$$

Remarque 4.10 Soient f et g deux fonctions et $a \in \mathbb{R}$.

- Si f et g n'ont pas la même limite en a, alors elles ne sont pas équivalentes en a.

- Le fait que f et g aient la même limite en a n'implique pas forcément qu'elles sont équivalentes en a. Par exemple, les fonctions définies par $f(x) = x$ et $g(x) = 2x$ ont la même limite lorsque $x \to 0$ mais elles ne sont pas équivalentes puisque

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

Exemple 4.11 (Equivalences usuelles) Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)(x-a)} = 1$$

d'où :

$$f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a). \tag{4.2}$$

En appliquant cette dernière égalité aux fonctions usuelles **au voisinage de 0**, on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^x - 1 \sim x & ; & \ln(1+x) \sim x \\ \sin x \sim x & ; & \tan x \sim x \\ (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R}) & & \end{array} \tag{4.3}$$

La figure 4.1 (page 54) donne une illustration de quelques équivalences usuelles au voisinage de 0.

Proposition 4.12 (Equivalence et composition à droite (ou changement de variable)) *Soit u une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \to a} u(x) = b$ et si f et g sont deux fonctions équivalentes en b, alors $f(u(x))$ et $g(u(x))$ sont équivalentes en a.*

Exemple 4.13 Lorsque $x \to 0$, $u = \sin x \to 0$ et $\mathrm{e}^u - 1 \sim u$. On en déduit que, lorsque x tend vers 0, on a :

$$\mathrm{e}^{\sin x} - 1 \sim \sin x.$$

Remarque 4.14 L'équivalence n'est pas compatible avec la composition à gauche. En d'autres termes,

$$f_1 \underset{a}{\sim} f_2 \quad \text{n'implique pas} \quad g \circ f_1 \underset{a}{\sim} g \circ f_2.$$

Par exemple, lorsque $x \to +\infty$, $x + 1 \sim x$ mais e^{x+1} n'est pas équivalent à e^x car

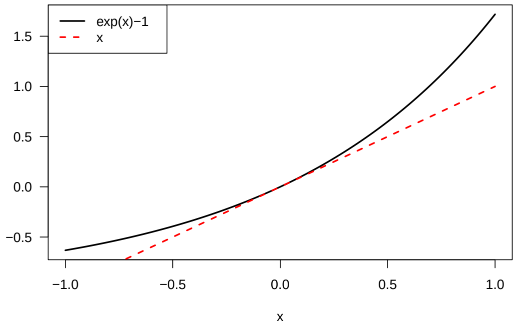
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e} \neq 1.$$

Proposition 4.15 *Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si g possède une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a, alors*

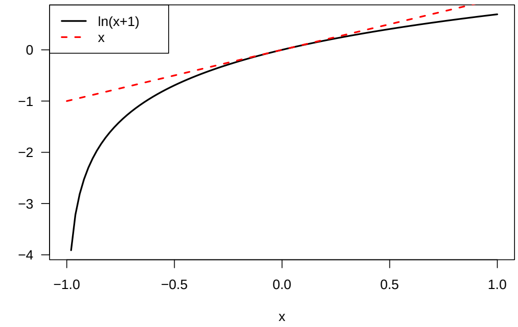
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \ell.$$

Proposition 4.16 *L'équivalence est compatible avec le produit et le quotient. En d'autres termes,*

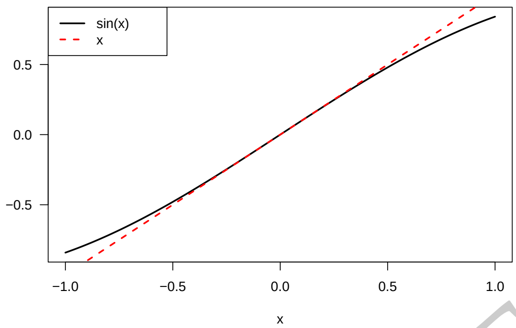
$$f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \quad \Longrightarrow \quad f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2 \quad \text{et} \quad \frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}. \tag{4.4}$$



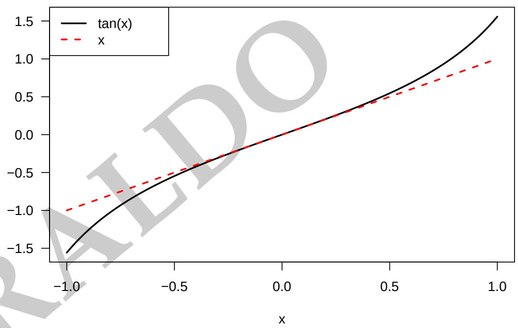
(a) $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$



(b) $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$



(c) $\sin x \underset{0}{\sim} x$



(d) $\tan x \underset{0}{\sim} x$

FIGURE 4.1 – Illustration de quelques équivalences usuelles au voisinage de $x = 0$

Remarque 4.17 L'équivalence n'est compatible ni avec la somme ni avec la différence. En d'autres termes,

$$f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \quad \text{n'implique pas} \quad f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2.$$

Par exemple, lorsque $x \to +\infty$, $f_1(x) = x^2 + x \sim g_1(x) = x^2$ et $f_2(x) = -x^2 + 1 \sim g_2(x) = -x^2$ mais $f_1(x) + f_2(x) = x + 1$ n'est pas équivalent à $g_1(x) + g_2(x) = 0$ puisque ces deux fonctions n'ont pas la même limite en $+\infty$.

4.2 Notion de développement limité

Soit f une fonction dérivable en un réel a. On sait que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

donc on peut écrire

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0.$$

Ainsi on peut trouver une fonction ε telle que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = \varepsilon(x)$$

c'est-à-dire

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + r(x)$$

avec

$$r(x) = (x - a)\varepsilon(x) \to 0, \quad x \to a.$$

On peut donc faire une approximation de f par une fonction polynôme au voisinage de a.

Définition 4.18 Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que f admet un **développement limité (DL) d'ordre** n **au voisinage de** a s'il existe $n+1$ réels $b_0, b_1, \ldots, b_n$ tels que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \cdots + b_n(x - a)^n + \mathrm{o}((x - a)^n). \tag{4.5}$$

- Dans ce cas, le polynôme

$$P(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \cdots + b_n(x - a)^n = \sum_{k=0}^{n} b_k(x - a)^k$$

  est appelé la **partie régulière** et $R(x) = \mathrm{o}((x - a)^n)$ est appelé le **reste**.

Remarque 4.19 Si une fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de a, alors ce DL est unique.

La définition du DL s'étend en $+\infty$ et en $-\infty$ comme suit.

Définition 4.20 Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a_1, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a_2[$). On dit que f admet un DL d'ordre n en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) s'il existe $n+1$ réels $b_0, b_1, \ldots, b_n$ tels que pour tout $x \in]a_1, +\infty[$ (resp. $x \in]-\infty, a_2[$), l'on ait :

$$f(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots + \frac{b_n}{x^n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^n}\right). \tag{4.6}$$

4.3 Formules de Taylor

Théorème 4.21 (Formule de Taylor-Lagrange) *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(]a, b[)$ tels que $a < b$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c). \tag{4.7}$$

Remarque 4.22 La formule de Taylor-Lagrange est une généralisation du théorème des accroissements finis.

En posant dans la formule de Taylor-Lagrange, $b = a + x$, on peut voir que l'énoncé « il existe $c \in]a, a + x[$ » est équivalent à l'énoncé » il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $c = a + \theta x$ ». On obtient la **formule de Taylor avec reste de Lagrange** :

$$f(a+x) = f(a) + \frac{x}{1!}f'(a) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta x). \tag{4.8}$$

Pour $a = 0$, on obtient la **formule de MacLaurin** :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x), \tag{4.9}$$

où le nombre

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \tag{4.10}$$

est appelé **reste de Lagrange**.

Théorème 4.23 (Formule de Taylor-Young) *Soient $f \in \mathscr{C}^n(I)$ et $a \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre n en a donné par :*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) \ + \ (x-a)f'(a) \ + \ \frac{(x-a)^2}{2!}\,f^{(2)}(a) \ + \ \cdots \\ + \ \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a) \ + \ \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

ou plus simplement

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\,f^{(k)}(a) \ + \ \mathrm{o}\left((x-a)^n\right). \tag{4.12}$$

Exemple 4.24 Le développement limité d'ordre 5 de e^x au voisinage de 0 est donné par :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \mathrm{o}\left(x^5\right).$$

4.4 Calcul de développements limités

4.4.1 Développement limité des fonctions usuelles en 0

On a les développements limités suivants à l'ordre n en 0 :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \tag{4.13}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n) \tag{4.14}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n) \tag{4.15}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) \tag{4.16}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) \tag{4.17}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \tag{4.18}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \mathrm{o}(x^6) \tag{4.19}$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \mathrm{o}(x^6) \tag{4.20}$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 + \mathrm{o}(x^6) \tag{4.21}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) \tag{4.22}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) \tag{4.23}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \tag{4.24}$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \mathrm{o}(x^6) \tag{4.25}$$

$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \mathrm{o}(x^6) \tag{4.26}$$

$$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) \tag{4.27}$$

Remarque 4.25 Il n'existe pas de DL de la fonction Argch au voisinage de 0 car Argch est définie sur $[1, +\infty[$.

La figure 4.2 (page 58) donne une illustration de l'approximation de la fonction exponentielle au voisinage du point $x = 0$ par des DL d'ordres 1 à 3. La figure 4.3 (page 58) donne une illustration de l'approximation de la fonction cosinus au voisinage du point $x = 0$ par des DL d'ordres 2, 4 et 6. On remarque que plus l'ordre du DL est grand, plus l'intervalle dans lequel l'approximation est « collée » à la vraie fonction est grand.

Remarque 4.26 Dans ce cours, nous nous limitons aux DL en 0 car les DL en $a \in \mathbb{R}$ et en l'infini peuvent être ramenés à un DL en 0 en utilisant un changement de variable.

- S'il existe, le DL d'une fonction f au voisinage de $a \in \mathbb{R}^*$ peut être obtenu en faisant le changement de variable $x = a + h$. En effet, $x \to a$ est équivalent à $h \to 0$ et donc, le

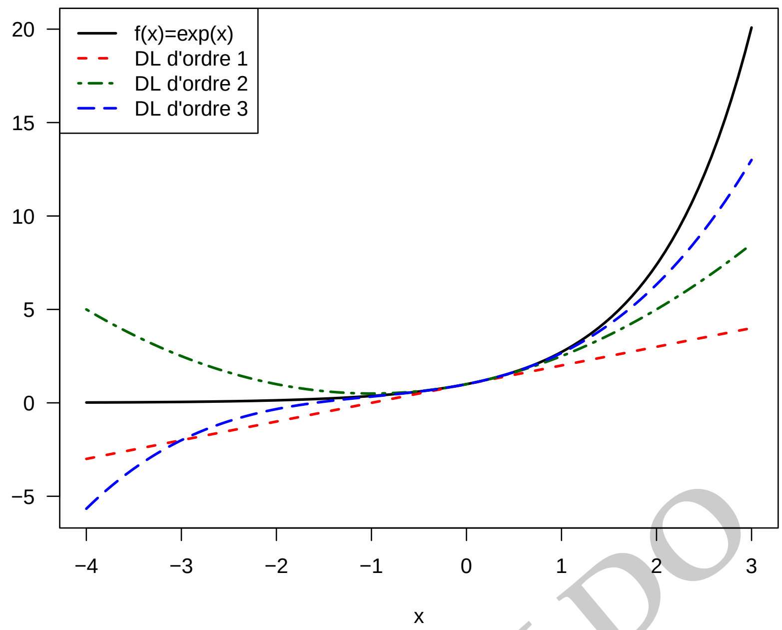


FIGURE 4.2 – Illustration de l'approximation de la fonction exponentielle au voisinage du point $x = 0$ par des DL d'ordres 1 à 3

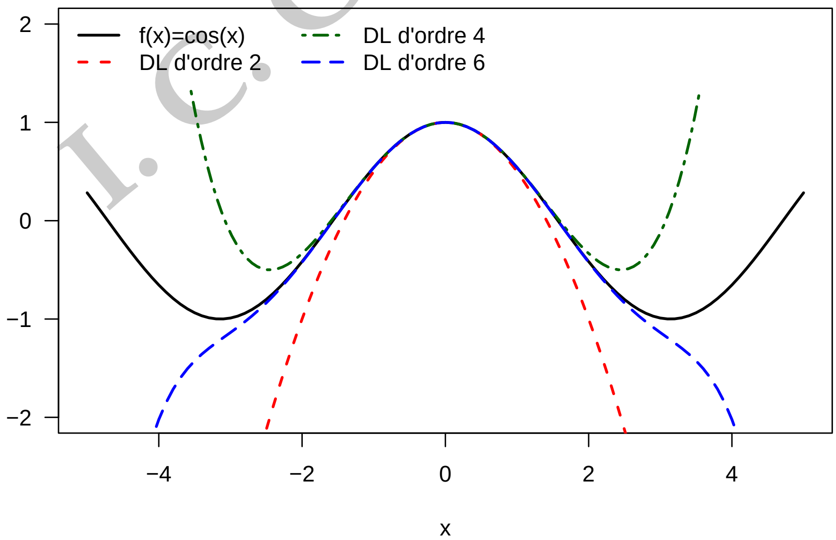


FIGURE 4.3 – Illustration de l'approximation de la fonction cosinus au voisinage du point $x = 0$ par des DL d'ordres 2, 4 et 6

DL de $f(x)$ au voisinage de a peut être obtenu à partir du DL de $f(a+h)$ en fonction de la variable h au voisinage de 0.

- Au voisinage de l'infini, on peut utiliser le changement de variable $x = 1/t$ (car $x \to \infty$ implique $t \to 0$) et utiliser un DL en 0 par rapport à la variable t.

4.4.2 Somme et produit de développements limités

Proposition 4.27 *Soient f et g deux fonctions admettant des DL d'ordre n en a. Alors $f+g$ et fg admettent des DL d'ordre n en a. Plus précisément si*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

et

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right),$$

alors

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k)(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \tag{4.28}$$

et

$$(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right)(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right). \tag{4.29}$$

Exemple 4.28 Le développement limité d'ordre 3 de $(\mathrm{e}^x)^2$ en 0 est donné par :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{e}^x)^2 &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)\right) \\
&= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)+x+x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+\mathrm{o}(x^3)x \\
&\quad +\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{12}+\mathrm{o}(x^3)\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^5}{12}+\frac{x^6}{36}+\mathrm{o}(x^3)\frac{x^3}{6} \\
&\quad +\mathrm{o}(x^3)+\mathrm{o}(x^3)x+\mathrm{o}(x^3)\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^3)\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)\times\mathrm{o}(x^3).
\end{aligned}$$

On sait que $u(x) = \mathrm{o}(x^3)$ au voisinage de 0 si $\frac{u(x)}{x^3} \to 0$ lorsque $x \to 0$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 4$, $x^n = \mathrm{o}(x^3)$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{o}(x^3)x^m = \mathrm{o}(x^3)$. De plus, $\mathrm{o}(x^3)\times\mathrm{o}(x^3) = \mathrm{o}(x^3)$ car

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{o}(x^3)\times\mathrm{o}(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{o}(x^3)}{x^3}\times\frac{\mathrm{o}(x^3)}{x^3}\times x^3\right) = 0.$$

On a donc :

$$(\mathrm{e}^x)^2 = 1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3).$$

4.4.3 Développement limité de la composée de deux fonctions

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction réelle définie sur I telle que $f(a) = b$ et g une fonction définie sur $f(I)$. Si f admet un DL en a et g admet un DL en b, alors le DL de $g \circ f$ en a à l'ordre n s'obtient en remplaçant la variable du DL de g en b par le DL de f en a.

Exemple 4.29 Calculons à nouveau le DL de $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$ en utilisant cette fois-ci la composition. Le développement limité d'ordre 3 de e^x en 0 est

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3).$$

Lorsque $x \to 0$, on a aussi $2x \to 0$ donc on peut remplacer x par $2x$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2x} &= 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \\
&= 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \\
&= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3).
\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat de l'exemple 4.28.

Exemple 4.30 Déterminons le développement limité d'ordre 3 de $\mathrm{e}^{\cos x - 1}$ en 0. Posons $u = \cos x - 1$. On sait que lorsque $x \to 0$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)$$

d'où

$$u = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3).$$

Lorsque $x \to 0$, $u \to 0$ et on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\cos x - 1} &= \mathrm{e}^u \\
&= 1 + u + \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2) \\
&= 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)\right)^2 + \mathrm{o}(u^2).
\end{aligned}$$

On a :

$$u^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)\right)^2 = \frac{x^4}{4} - \mathrm{o}(x^3) \times x^2 + \mathrm{o}(x^3) \times \mathrm{o}(x^3) = \mathrm{o}(x^3)$$

car $x^n = \mathrm{o}(x^3)$ pour tout $n \geqslant 4$, $\mathrm{o}(x^3)x^m = \mathrm{o}(x^3)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{o}(x^3) \times \mathrm{o}(x^3) = \mathrm{o}(x^3)$ étant donné que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{o}(x^3) \times \mathrm{o}(x^3)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\mathrm{o}(x^3)}{x^3} \times \frac{\mathrm{o}(x^3)}{x^3} \times x^3\right) = 0.$$

Ainsi,

$$\mathrm{e}^{\cos x - 1} = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3).$$

4.4.4 Développement limité de l'inverse d'une fonction

Soit f une fonction admettant le DL d'ordre n suivant en 0 :

$$f(x) = P_n(x) + \mathrm{o}(x^n) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \mathrm{o}(x^n).$$

Pour obtenir le DL de $\dfrac{1}{f}$ en 0, on peut procéder de deux façons.

- On peut soit effectuer une division de 1 par $P_n(x)$ suivant les puissances croissantes à l'ordre n :

$$\begin{array}{c|c} 1 & P_n(x) \\ \cline{2-2} P_n(x)T_n(x) & T_n(x) \\ \cline{1-1} x^{n+1}R(x) & \end{array}$$

$$1 = P_n(x) \times T_n(x) + x^{n+1}R(x),$$

  où le quotient $T_n(x)$ est un polynôme de degré n et le reste $x^{n+1}R(x)$ est de degré supérieur ou égal à $n+1$. Ainsi,

$$1 = (f(x) - \mathrm{o}(x^n)) \times T_n(x) + x^{n+1}R(x)$$

  soit encore

$$\begin{aligned} 1 &= f(x)T_n(x) - \mathrm{o}(x^n) \times T_n(x) + x^{n+1}R(x) \\ &= f(x)T_n(x) + \mathrm{o}(x^n) \end{aligned}$$

  car

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\mathrm{o}(x^n) \times T_n(x) + x^{n+1}R(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{-\mathrm{o}(x^n)}{x^n} T_n(x) + xR(x) \right) = 0.$$

  Ainsi,

$$\frac{1}{f(x)} = T_n(x) + \mathrm{o}(x^n).$$

- Si $b_0 \neq 0$, on peut factoriser le DL f en 0 par b_0 sous la forme $f(x) = b_0(1 - u(x))$ où $u(0) = 0$ et utiliser le DL de $\dfrac{1}{1-u}$ par rapport à u en 0.

Exemple 4.31 Vérifions que l'on a le DL d'ordre 5 suivant au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5).$$

Le développement limité d'ordre 5 de $\cos x$ en 0 est :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5).$$

- Pour la méthode de division, on a :

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & & & & & & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \\ \cline{7-7}
1 & -\frac{x^2}{2} & +\frac{x^4}{24} & & & & 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24} \\ \cline{1-3}
 & \frac{x^2}{2} & -\frac{x^4}{24} & & & & \\
 & \frac{x^2}{2} & -\frac{x^4}{4} & +\frac{x^6}{48} & & & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{5x^4}{24} & -\frac{x^6}{48} & & & \\
 & & \frac{5x^4}{24} & -\frac{5x^6}{48} & +\frac{5x^8}{576} & & \\ \cline{3-5}
 & & & \frac{x^6}{12} & -\frac{5x^8}{576} & &
\end{array}
\tag{4.30}
$$

On a :

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}} = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\frac{\frac{x^6}{12}-\frac{5x^8}{576}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}}$$

et

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^5}\times\frac{\frac{x^6}{12}-\frac{5x^8}{576}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{12}-\frac{5x^3}{576}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}} = 0.$$

Ainsi, on a

$$\frac{\frac{x^6}{12}-\frac{5x^8}{576}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}} = \mathrm{o}(x^5)$$

et

$$\frac{1}{\cos x} = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\mathrm{o}(x^5).$$

- Pour la seconde méthode, on peut remarquer que

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^5)} = \frac{1}{1-u},$$

où

$$u = \frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^5).$$

Quand x tend vers 0, u tend vers 0 et on a :

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+u^4+\cdots+u^n+\mathrm{o}(u^n).$$

Comme le plus petit degré de u est 2, il suffit de prendre $n=2$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= 1+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^5)\right)+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^5)\right)^2+\mathrm{o}(x^5)\\
&= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^8}{576}+\frac{x^6}{24}+\mathrm{o}(x^5)\\
&= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\mathrm{o}(x^5).
\end{aligned}$$

4.4.5 Développement limité du quotient de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions admettant des DL d'ordre n en 0 comme suit :

$$f(x) = P_n(x) + \mathrm{o}(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_n(x) + \mathrm{o}(x^n).$$

Si $g(0) \neq 0$, on peut obtenir le DL d'ordre n de $\frac{f}{g}$ en effectuant une division de $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ suivant les puissances croissantes à l'ordre n :

$$\begin{array}{c|c} P_n(x) & Q_n(x) \\ \cline{2-2} Q_n(x)T_n(x) & T_n(x) \\ \cline{1-1} x^{n+1}R(x) & \end{array}$$

$$P_n(x) = Q_n(x) \times T_n(x) + x^{n+1}R(x),$$

où le quotient $T_n(x)$ est un polynôme de degré n et le reste $x^{n+1}R(x)$ est de degré supérieur ou égal à $n+1$. Ainsi,

$$f(x) - \mathrm{o}(x^n) = (g(x) - \mathrm{o}(x^n)) \times T_n(x) + x^{n+1}R(x)$$

soit encore

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)T_n(x) + \mathrm{o}(x^n)(1 - T_n(x)) + x^{n+1}R(x) \\ &= g(x)T_n(x) + \mathrm{o}(x^n) \end{aligned}$$

car

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{o}(x^n) \times (1 - T_n(x)) + x^{n+1}R(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\mathrm{o}(x^n)}{x^n}(1 - T_n(x)) + xR(x) \right) = 0.$$

Ainsi,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = T_n(x) + \mathrm{o}(x^n).$$

Comme exemple de division suivant les puissances croissantes, on peut s'inspirer de l'équation (4.30) (page 62).

4.4.6 Dérivation et intégration d'un développement limité

Théorème 4.32 *Soit f une fonction admettant le DL d'ordre n suivant en 0 :*

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \mathrm{o}(x^n).$$

- *Pour toute primitive F de f (toute fonction F telle que $F'(x) = f(x)$), on a :*

$$F(x) = F(0) + b_0 x + \frac{b_1}{2}x^2 + \frac{b_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{b_{n+1}}{n+1}x^{n+1} + \mathrm{o}(x^{n+1}). \tag{4.31}$$

- *Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors*

$$f'(x) = b_1 + 2b_2 x + \cdots + nb_n x^{n-1} + \mathrm{o}(x^{n-1}). \tag{4.32}$$

Exemple 4.33 Le DL de cos peut être obtenu en dérivant celui de sin et ce dernier peut être retrouvé par intégration du premier.

4.5 Application des développements limités au calcul de limites

On peut utiliser le développement limité pour lever une indétermination. En fonction de l'expression de la fonction, on peut commencer par un petit ordre et augmenter l'ordre si le résultat n'est pas concluant.

Exemple 4.34 Calculons la limite suivante en utilisant le développement limité :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}.$$

Au voisinage de 0, on a :

$$e^x = 1 + x + o(x).$$

Or, lorsque $x \to 0$, on a aussi $x^2 \to 0$ d'où

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^{x^2} - \cos x &= \left(1 + x^2 + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= \frac{3x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x\to} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} &= \lim_{x\to} \frac{\frac{3x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to} \left(\frac{3}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right) = \frac{3}{2} + 0 \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

4.6 EXERCICES

Exercice 4.1 Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. En utilisant le développement limité d'ordre 2 de f en x_0, montrer que :

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}.$$

Exercice 4.2 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin 2x$. Calculer le développement limité (DL) à l'ordre 5 de f en 0 en :

1) utilisant le DL de la fonction sin ;
2) utilisant la formule de Taylor-Young ;
3) remarquant que $\sin 2x = 2\sin x \, \cos x$.

Exercice 4.3 On considère la suite (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

1) Appliquer la formule de Mac-Laurin à la fonction d'expression $f(x) = \ln(x+1)$ pour $x = 1$ et montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |S_n - \ln 2| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
2) Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

Exercice 4.4 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{(1-\mathrm{e}^x)^2}.$$

Calculer de deux façons la limite de f en 0 : (1) à l'aide des développements limités et (2) à l'aide de la règle de l'Hopital.

Exercice 4.5 Calculer les limites suivantes en utilisant les développements limités :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{1/x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right).$$

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. Bodin, N. Borne & L. Desideri – « Cours de mathématiques première année », ch. Fonctions usuelles, p. 173–182, Exo7, 2016, http://exo7.emath.fr/cours/cours-exo7.pdf.

[2] — , « Cours de mathématiques première année », ch. Dérivée d'une fonction, p. 185–201, Exo7, 2016, http://exo7.emath.fr/cours/cours-exo7.pdf.

[3] C. Deschamps & A. Warusfel – *Mathématiques tout-en-un 1ère année, cours et exercices corrigés*, Dunod, 2003.

[4] Y. Mensah – *Exercices d'analyse mathématique*, 2012.

[5] D. Müller – *Analyse*, http://www.nymphomath.ch/MADIMU2/ANALY/INDEX.HTM, 2016.

[6] N. Pindra, Y. Mensah & A. J. M. Tchalla – *MTH103 : Calcul différentiel dans* $\mathbb{R}$, 2019.