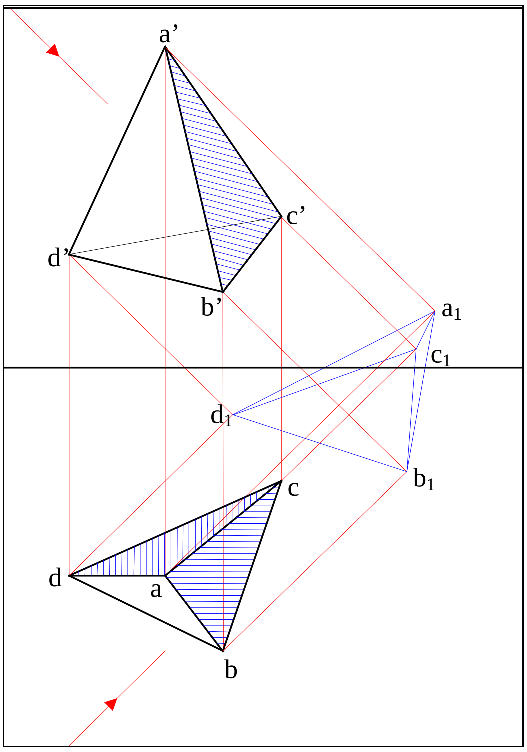
GÉOMETRIE DESCRIPTIVE

Cours de deuxième année



École d'Architecture de Nancy

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La géométrie descriptive n'est pas l'invention d'un seul homme. Si G. Monge, à la fin du XVIIIe siècle, en a développé la théorie et fixé les principes, Dürer, dés le XVI siècle, avait ébauché une méthode similaire à l'usage des peintres. Il s'agit avant tout d'une méthode graphique, c'est-à-dire *opérant graphiquement sur des êtres graphiques*, permettant de résoudre des problèmes d'angles, de dimensions, de positions, d'intersections, etc.

La géométrie descriptive telle que l'a définie Monge peut donc se percevoir comme la théorisation d'un "art du trait" utilisé depuis la naissance des métiers afin de résoudre plus ou moins empiriquement les problèmes posés par la coupe des pierres et la coupe du bois. La géométrie descriptive est une géométrie *pratique*, et en ce sens se distingue des géométries euclidienne ou analytique (l'algèbre) par essence spéculatives.

Cette dimension pratique est la raison pour laquelle l'étude de la géométrie descriptive ne requiert pas de solides connaissances mathématiques. Une étudiant ayant suivi une filière littéraire peut aborder cette discipline sans complexe.

La géométrie descriptive est aussi une des rares disciplines dont l'enseignement dans les écoles d'architecture persiste depuis le XIXe siècle, et on est en droit de se demander, à l'heure de l'informatique triomphante notamment dans la conception et la représentation des objets en trois dimensions, si cet enseignement est toujours justifié.

Certes les outils actuels permettent d'élaborer des volumes complexes plus rapidement et avec plus de précision, mais la géométrie descriptive possède deux vertus essentielles pour l'élève architecte : d'une part la gymnastique mentale qu'elle implique lui apprend à voir dans l'espace et à comprendre la représentation des objets tridimensionnels, ce qui sera de la plus grande utilité devant l'écran d'un modeleur 3D, et d'autre part le soin qu'elle exige dans la réalisation des épures apporte la rigueur nécessaire à une expression graphique pertinente, fut-elle assistée par ordinateur.

****

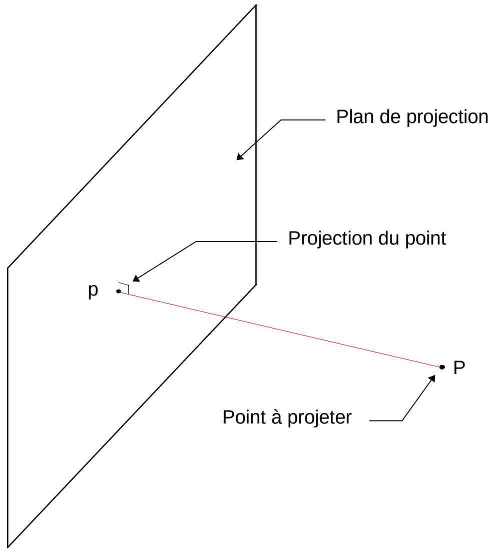
1. ELEMENTS DE FIGURES

1.1 Principes

La géométrie descriptive se propose de donner, dans les deux dimensions de la feuille de papier, une représentation *opératoire* des objets tridimensionnels : cette représentation bi-dimensionnelle doit décrire suffisamment complètement l'objet afin de pouvoir servir de support à des opérations sur celui-ci.

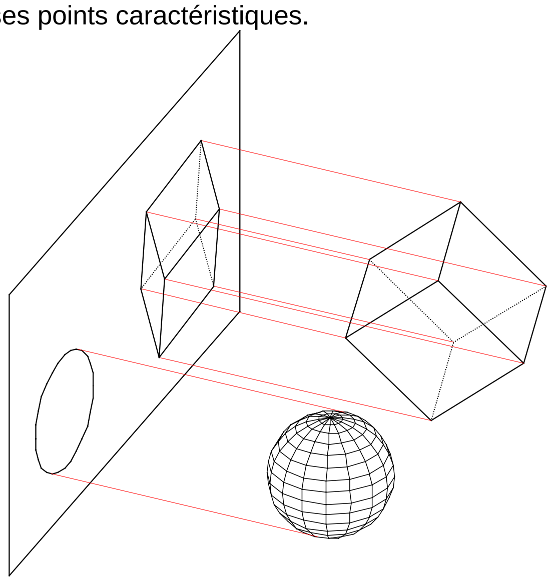
1.1.1 La projection orthogonale :

On appelle projection orthogonale d'un point (P) sur un plan le pied (p) de la perpendiculaire (Pp) abaissée de ce point sur le plan.

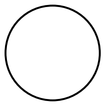


Remarque : Tous les points appartenant à une même droite perpendiculaire au plan de projection se projettent en un même point. La projection orthogonale sur un seul plan n'est donc pas suffisante pour déterminer la position du point dans l'espace.

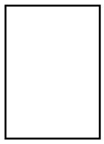
Plus généralement, la projection orthogonale d'un solide se construit en recherchant la projection de ses points caractéristiques.



La projection orthogonale sur un plan des objets tridimensionnels en donne une représentation bidimensionnelle. Cependant, une seule projection orthogonale n'est pas suffisante pour caractériser entièrement un objet dans l'espace, car dans ce passage des 3 aux 2 dimensions, de l'information est nécessairement perdue :



Est-ce la projection d'un cylindre, d'une sphère ?



Est-ce la projection d'un cylindre, d'un parallélépipède ?

Afin d'éviter cette perte d'information, la géométrie descriptive a recours à deux projections orthogonales distinctes mais coïncidentes.

1.1.2 Les deux plans de projections :

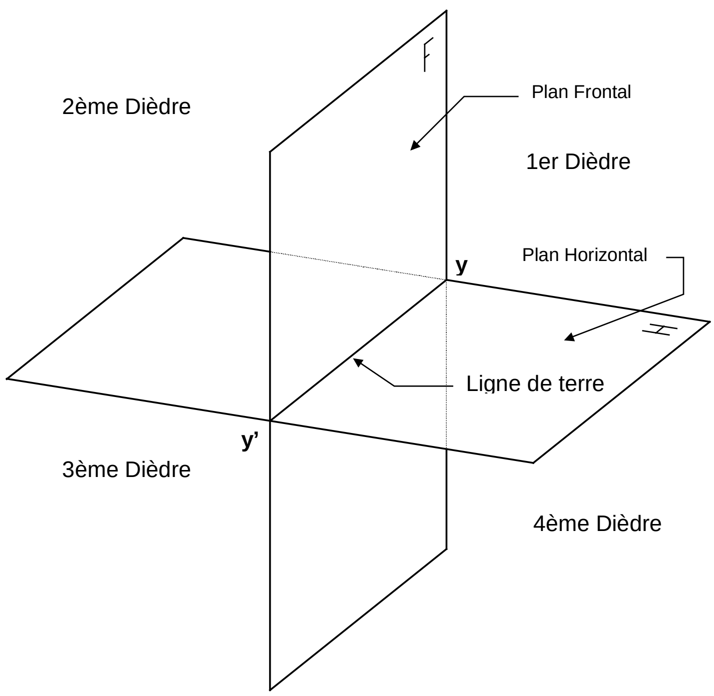
Afin de représenter les objets tridimensionnels dans les deux dimensions de la feuille de papier, on commence donc par se donner dans l'espace *deux* plans de projections perpendiculaires. Ces deux plans se coupent suivant une droite (y'y) appelée **ligne de terre**.

Le premier plan (**H**) est appelé **plan horizontal de projection**.

Le second plan (**F**) est appelé **plan frontal de projection**.

Ces deux plans découpent l'espace en quatre régions, ou **dièdres**, numérotés comme ci dessous:

1.1.3 Les quatre dièdres :

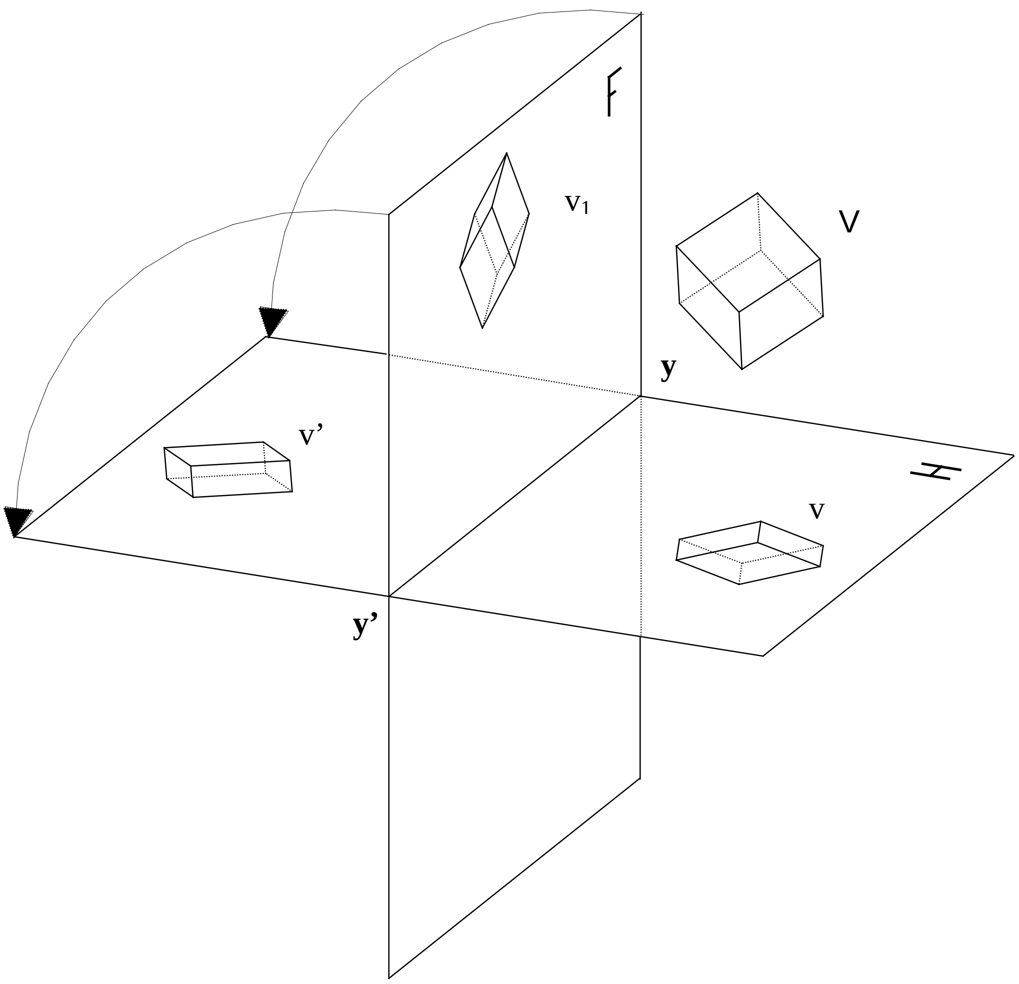


1.1.4 Rabattement du plan frontal :

Quelle que soit sa position dans l'espace, un objet tridimensionnel (V) à représenter se projette orthogonalement sur le plan horizontal en une figure bidimensionnelle (v) et sur le plan frontal en une autre figure bidimensionnelle (v_1).

(v) est appelée **projection horizontale** de (V)
(v_1) est appelée **projection frontale** de (V)

Pour obtenir les deux projections bidimensionnelles sur un même plan (la feuille de papier), et les faire ainsi coïncider, on fait tourner le plan frontal (**F**) en choisissant comme axe de rotation la ligne de terre (y'y) de façon a le rabattre sur le plan horizontal (**H**). Le projection frontale (v_1) se trouve alors en (v').

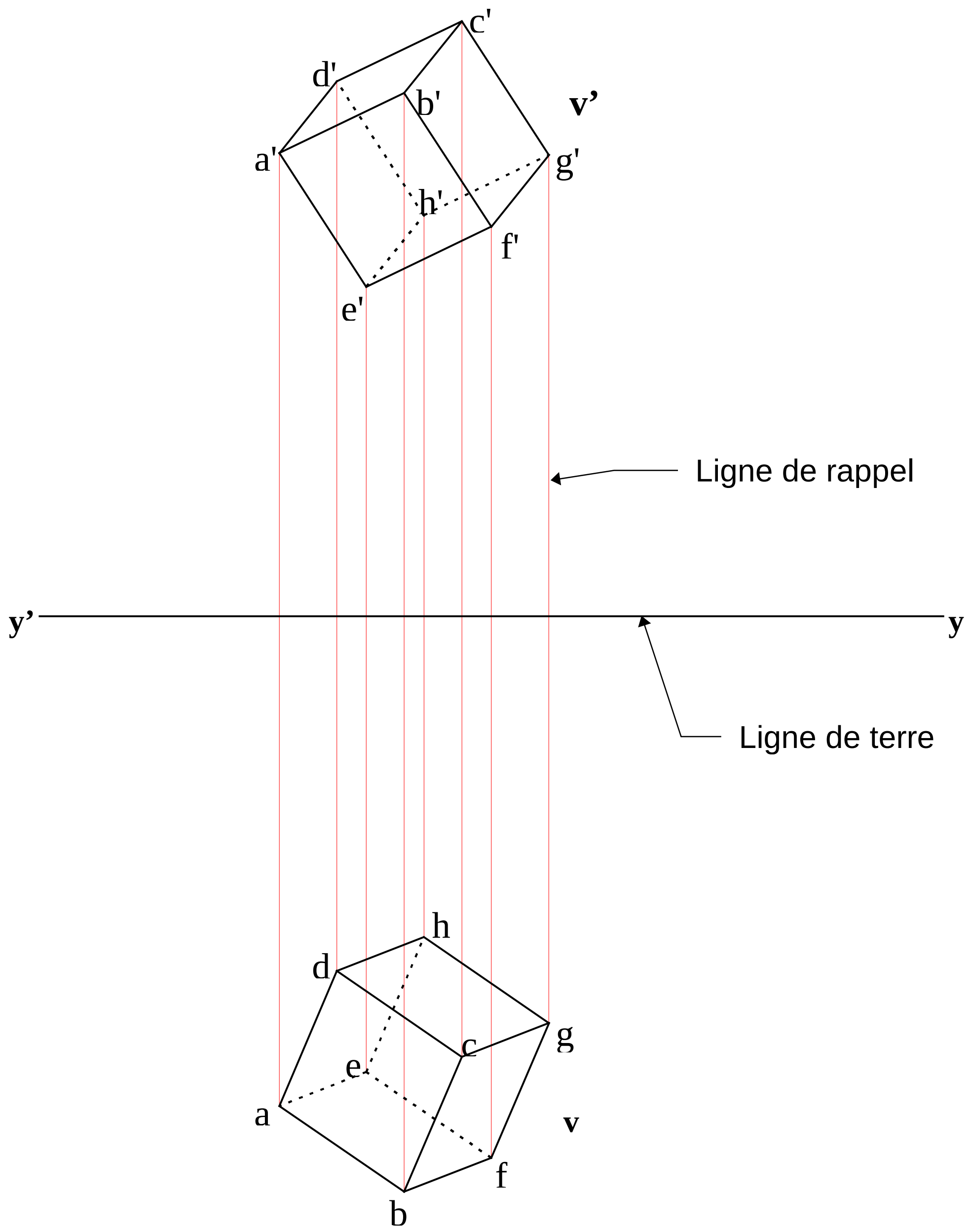


1.1.5 L’épure :

Les projections horizontale et frontale se trouvant donc sur un même plan (toujours la feuille de papier), nous avons ainsi réalisé une **épure** de l’objet tridimensionnel à représenter.

Pour faciliter la lecture d’une épure et reconstituer mentalement la forme de l’objet et sa position dans l’espace, on utilise des conventions de représentation :

Les lignes vues sont dessinées en trait plein.
Les lignes cachées en points ronds ou ponctués.
Les lignes de rappel et les lignes de constructions en trait rouge (ou noir) fin.



1.2 Le point :

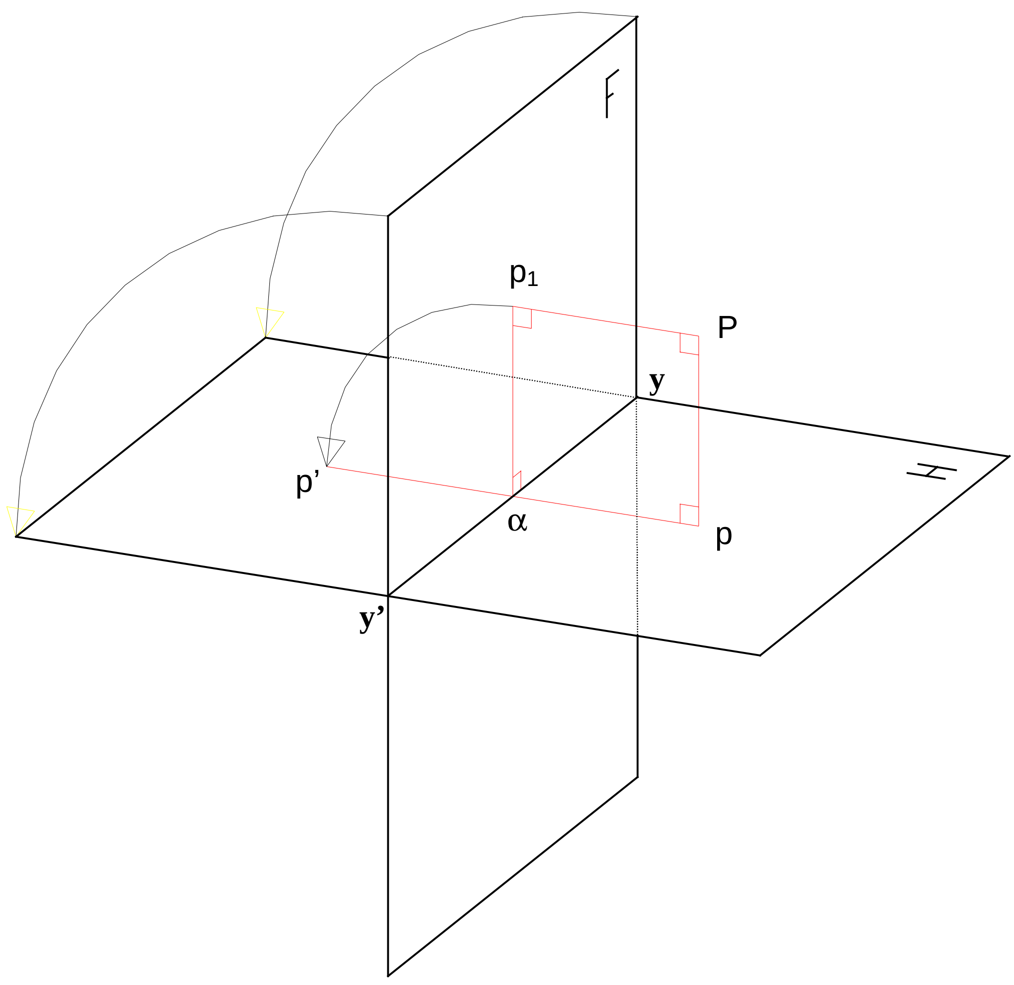
1.2.1 Représentation du point :

Soit un point (P) de l'espace. Ce point (P) se projette horizontalement sur le plan (**H**) en (p) et frontalement sur le plan (**F**) en (p_1). Le plan (pPp_1) ainsi défini est perpendiculaire aux deux plans de projection (**H**) et (**F**), et donc à la ligne de terre en (α).

Les points ($Pp\alpha p_1$) définissent un rectangle.
Les droites ($p\alpha$) et ($p_1\alpha$) sont perpendiculaires à la ligne de terre (y'y).

Ainsi, lorsque le plan frontal est amené en coïncidence avec le plan horizontal par rotation autour de (y'y), le point (p_1) décrit un quart de cercle de centre (α).

Ce point (p_1) vient donc se placer en (p') dans le prolongement de ($p\alpha$). La droite (pp') est appelée **ligne de rappel** du point (P). Cette droite est donc *nécessairement* perpendiculaire à la ligne de terre (y'y).



(p) est la projection horizontale de (P).
(p') est la projection frontale de (P).

1.2.2 Epure du point. Cote et éloignement :

Un point de l'espace est donc figuré sur une épure par ses deux projections orthogonales sur les deux plans de projections. Ces deux projections sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre appelée **ligne de rappel**.

On appelle **éloignement** d'un point la distance de ce point au plan frontal de projection.

$$\textit{Eloignement de } (P) = (Pp_1) = (p\alpha).$$

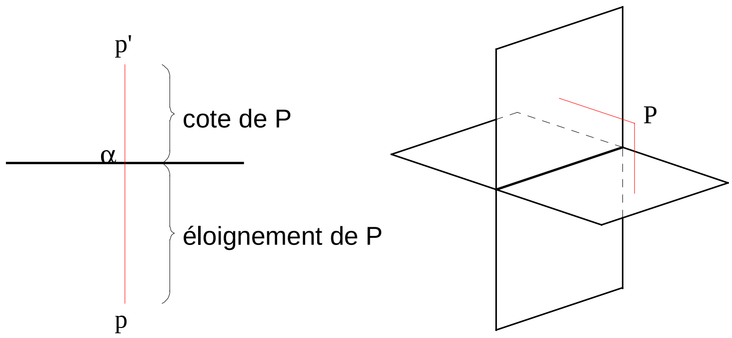
L'éloignement d'un point est considéré comme positif si ce point est situé en avant du plan frontal (1er et 4ème dièdre), il est négatif si ce point est situé en arrière du plan frontal (2ème et 3ème dièdre).

On appelle **cote** d'un point la distance de ce point au plan horizontal de projection.

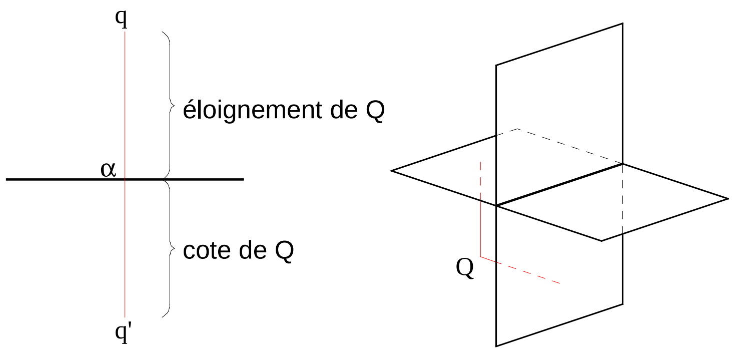
$$\textit{Cote } (P) = (Pp) = (p'\alpha).$$

La cote d'un point est considérée comme positive si ce point est situé au-dessus du plan horizontal (1er et 2ème dièdre), elle est négative si le point est situé au-dessous du plan horizontal (3ème et 4ème dièdre).

L'épure ci-dessous montre que le point (P), se projetant frontalement en (p') et horizontalement en (p), appartient au 1er dièdre. Son éloignement et sa cote sont positifs; le point (P) est donc situé en avant du plan frontal et au-dessus du plan horizontal.



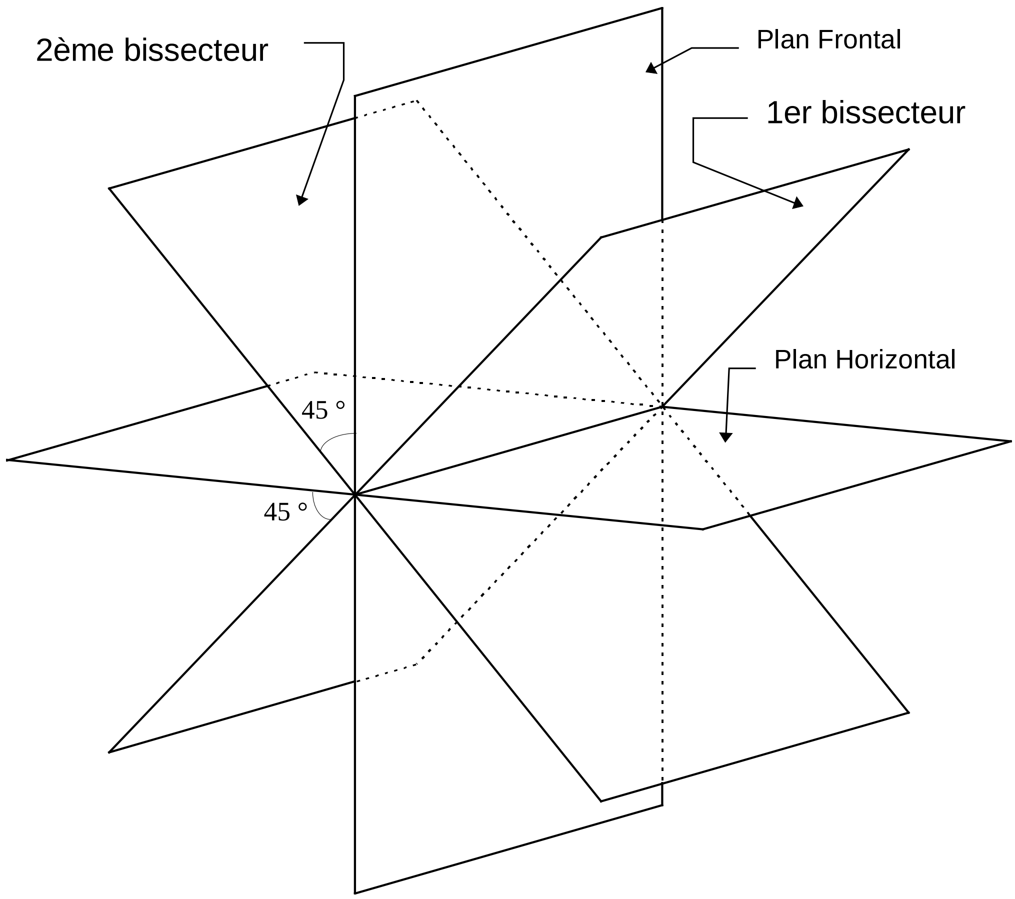
L'épure ci-dessous montre que le point (Q), se projetant en frontalement en (q') et horizontalement en (q), appartient au 3éme dièdre. Son éloignement et sa cote sont négatifs; le point (Q) est donc situé en arrière du plan frontal et au-dessous du plan horizontal.



1.2.3 Les plans bissecteurs :

Par convention, on subdivise les 4 dièdres par deux plans médians appelés **bissecteurs**.

Ces plans bissecteurs sont perpendiculaires et forment un angle de 45° avec les plans de projections. Les points appartenant aux plans bissecteurs ont donc pour caractéristique d'être à égale distance du plan de projection horizontal et du plan de projection vertical. Les cotes et éloignements de tels points sont donc égaux en valeur absolue.

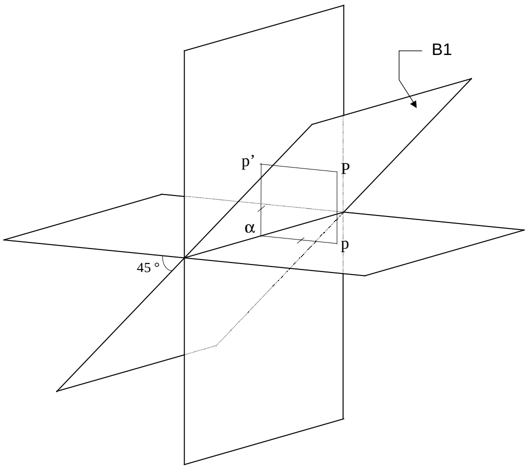


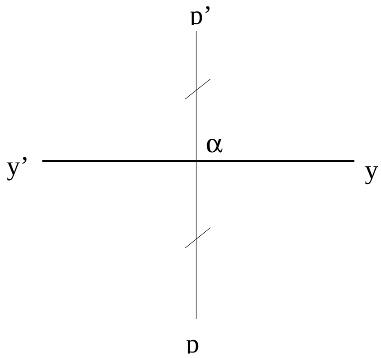
Soit (P) un point du premier bissecteur (B1).

(P) est a égale distance du plan frontal et du plan horizontal. Il appartient au 1er ou au 3ème dièdre.

Cote et éloignement sont donc de même signe.

éloignement (P) = Cote (P)



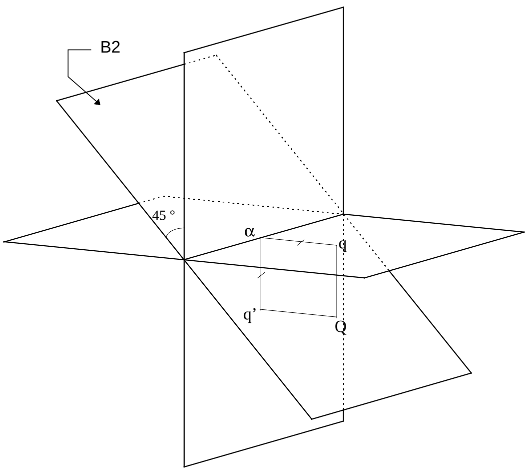


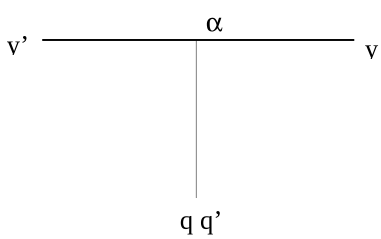
Soit (Q) un point du second bissecteur (B2).

(Q) est a égale distance du plan frontal et du plan horizontal. Il appartient au 2ème ou au 4ème dièdre.

Cote et éloignement sont par conséquent de signe opposé.

éloignement (Q) = - Cote (Q)





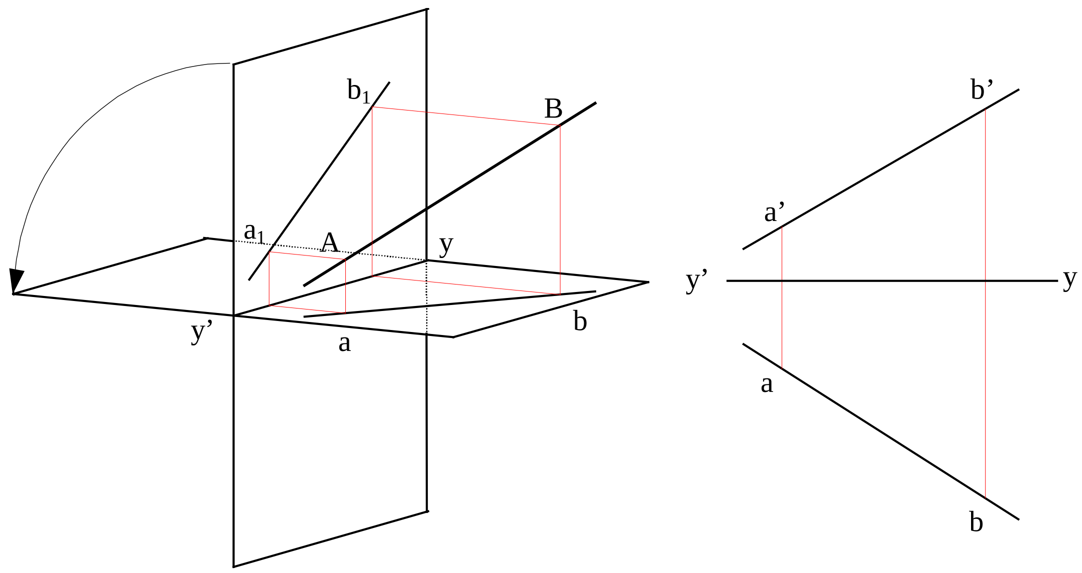
1.3 La droite :

1.3.1 Représentation de la droite :

La géométrie nous apprend qu'une droite est entièrement déterminée par deux points distincts.

Il suffira donc pour déterminer une droite dans l'épure de connaître deux de ses points par leurs projections horizontales et verticales. Une droite est ainsi elle-même définie par sa projection horizontale et sa projection frontale.

Soient (A) et (B) deux points distincts de l'espace. Par ces deux points passe une et une seule droite. Soit (a) et (b) les projections horizontales des points (A) et (B) et (a') (b') leurs projections frontales. Par (a) et (b) passe une et une seule droite : la projection horizontale de la droite (AB), et par (a') et (b') passe une et une seule droite : la projection frontale de la droite (AB).



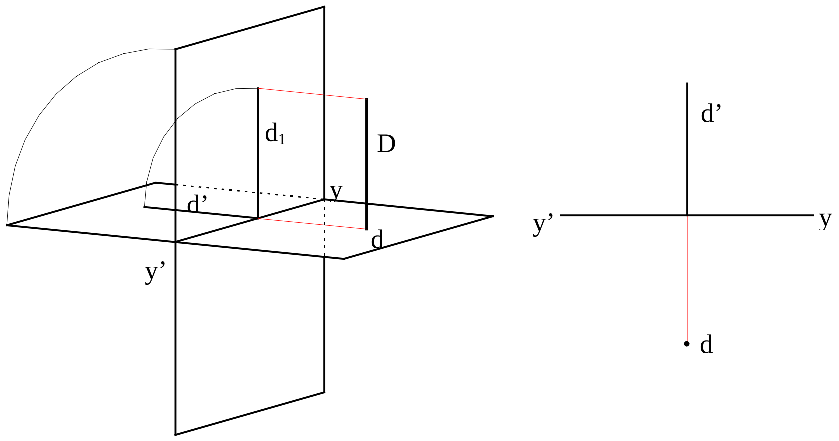
1.3.2 Droites remarquables :

Les droites particulières, qui peuvent poser certains problèmes de construction, sont les droites parallèles ou perpendiculaires au plans de projection, ou encore situées dans les plans bissecteurs.

1.3.2.1 Droite verticale :

Est dite *verticale* toute droite perpendiculaire au plan horizontal de projection. Sa projection frontale est donc perpendiculaire à la ligne de terre (y'y), et sa projection horizontale se réduit à un point.

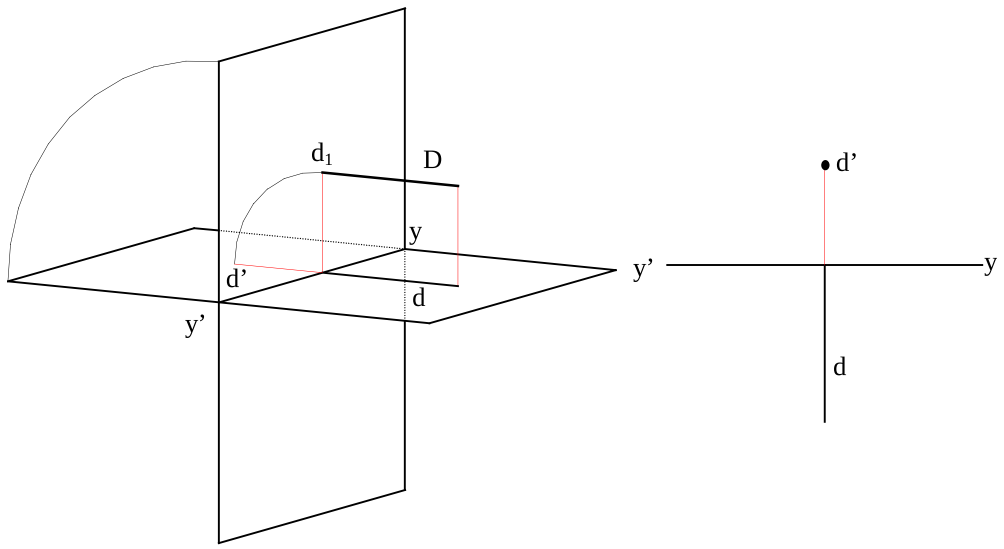
Tous les points d'une droite verticale ont même éloignement.



*1.3.2.2 Droite **de bout** :*

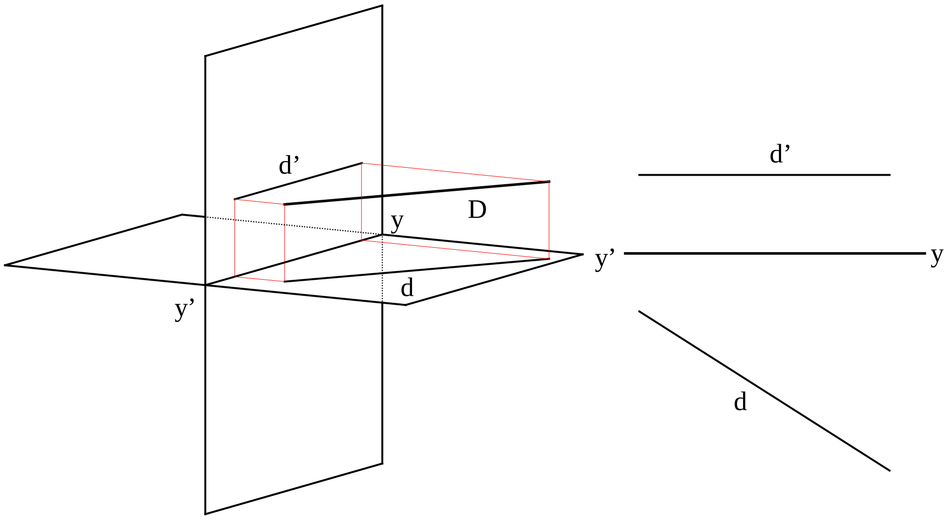
Est dite droite *de bout* toute droite perpendiculaire au plan frontal de projection. Sa projection horizontale est perpendiculaire à la ligne de terre (y'y) et sa projection frontale est réduite à un point.

Tous les points d'une droite de bout ont même cote.



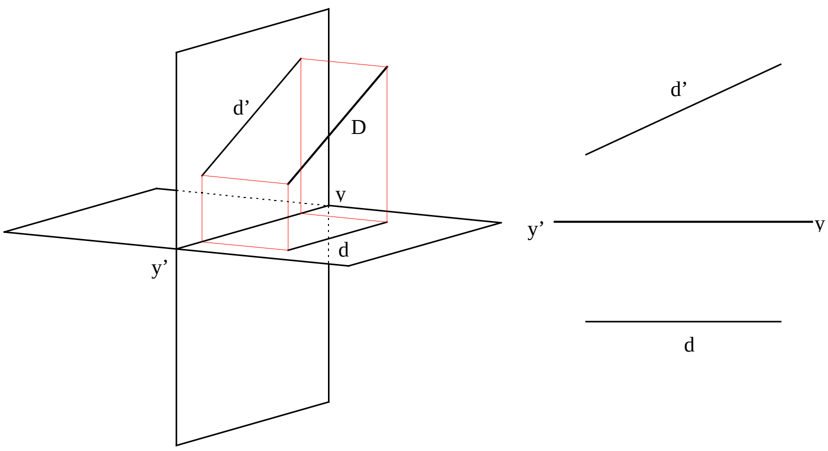
*1.3.2.3 Droite **horizontale** :*

Est dite *horizontale* toute droite parallèle au plan horizontal de projection. Tous les points d'une droite horizontale ont donc la même cote et sa projection frontale est parallèle à la ligne de terre (y'y).



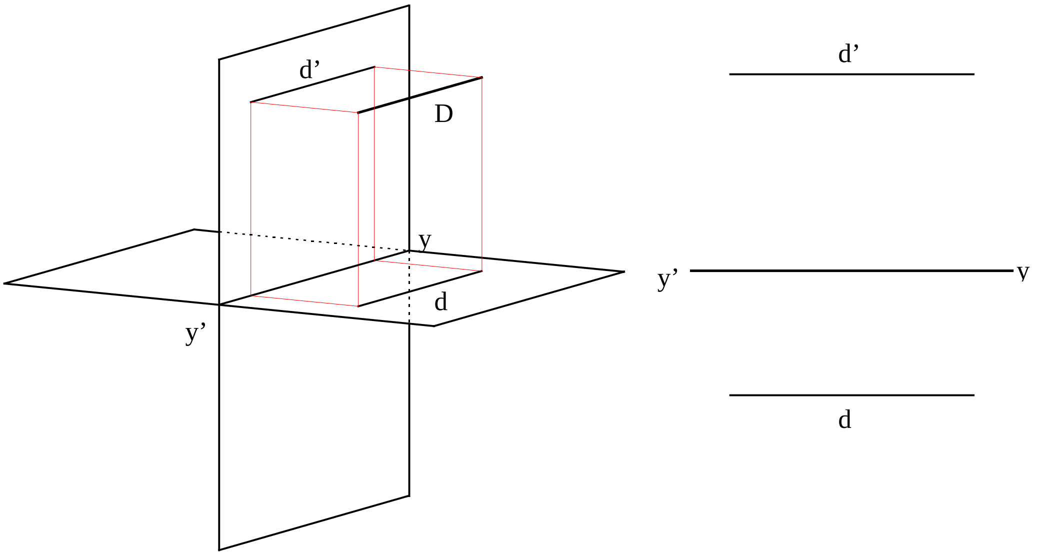
*1.3.2.4 Droite **frontale** :*

Est dite *frontale* toute droite dont parallèle au plan frontal de projection. Tous les points d'une droite frontale ont donc le même éloignement et sa projection horizontale est parallèle à la ligne de terre.



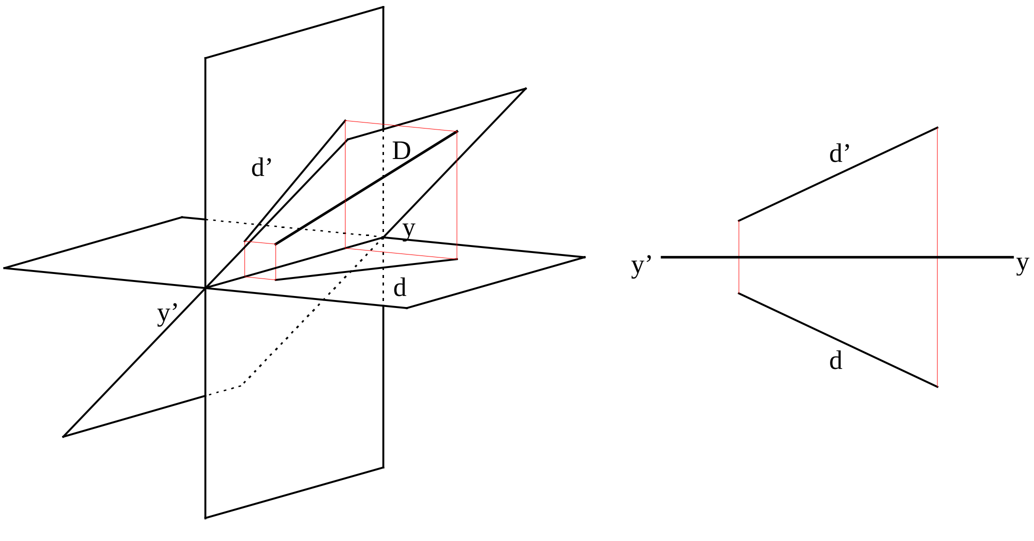
1.3.2.5 Droite ***horizonto-frontale*** *:*

Est dite *horizonto-frontale* toute droite parallèle aux deux plans de projection. Tous les points d'une telle droite ont donc même cote et même éloignement. Ses projections sont elles-mêmes parallèles à la ligne de terre.

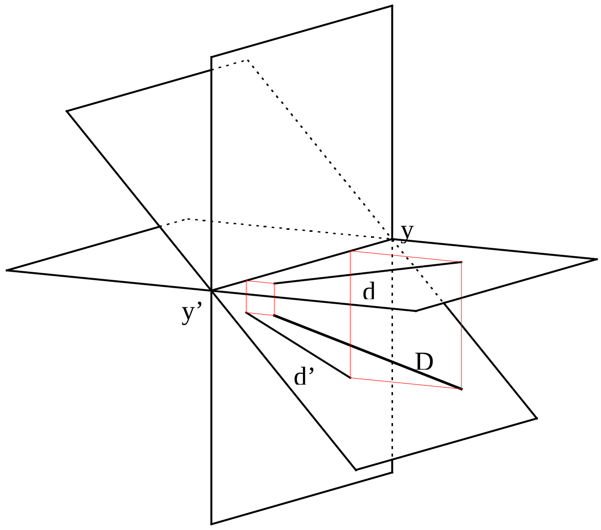


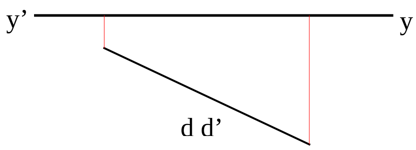
1.3.2.6 Droite ***appartenant à un plan bissecteur*** *:*

Tous les points d'une telle droite sont à équidistance des plans de projection. Si la droite appartient au 1er bissecteur, ses projections horizontale et verticale sont symétrique par rapport à la ligne de terre (y'y).



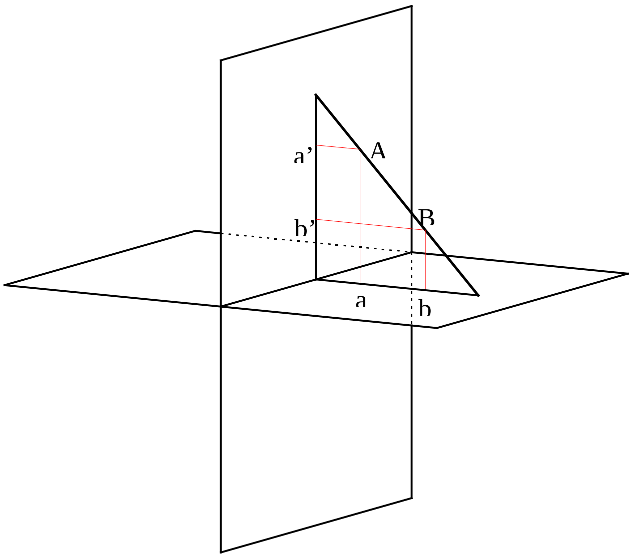
Si la droite appartient au 2ème bissecteur, ses deux projections sont confondues :

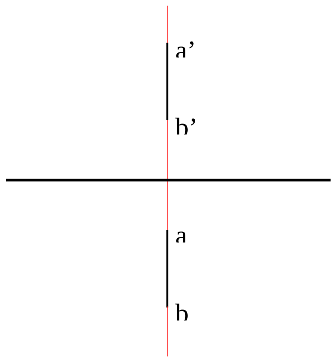




1.3.2.7 Droite ***de profil*** *:*

Est dite *de profil* toute droite appartenant à un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et ainsi aux deux plans de projections. Les deux projections d'une telle droite sont donc elles-mêmes perpendiculaires à la ligne de terre et alignées sur une même ligne de rappel. Le problème est que toutes les droites appartenant à un même plan perpendiculaire à la ligne de terre ont les mêmes projections. On ne peut alors déterminer une droite de ce plan qu'en en caractérisant deux points. Nous verrons plus loin comment traiter ce problème.



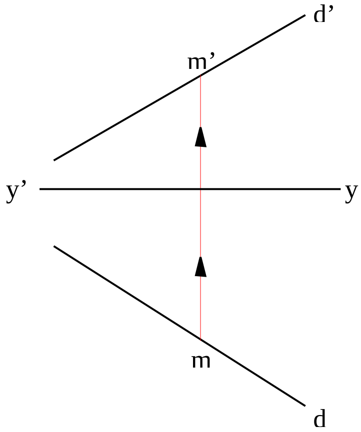


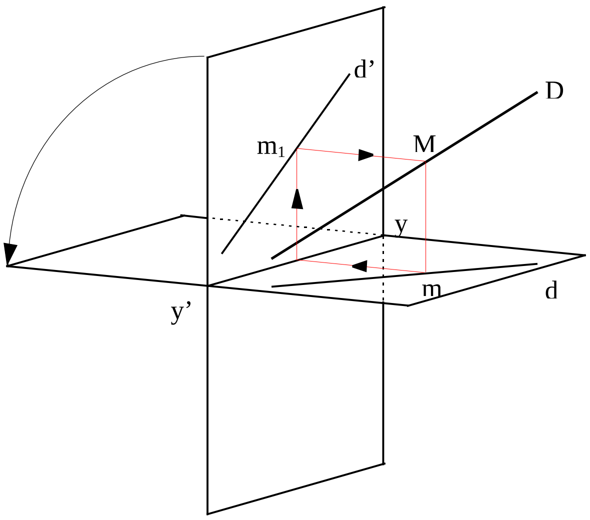
1.3.3 Constructions sur les droites :

*1.3.3.1 **Marquer un point** sur la droite :*

Soit la droite (D) dont on connaît les projections horizontale et frontale et soit (m) la projection horizontale d'un point (M) de cette droite.

La projection frontale (m') de ce point appartient nécessairement à la projection frontale (d') de la droite (D) et est située sur une ligne de rappel issue de (m). On construit donc graphiquement cette projection frontale (m') en relevant de (m) la ligne de rappel et en interceptant ainsi la projection frontale (d') de (D). Le point (M) est alors déterminé.



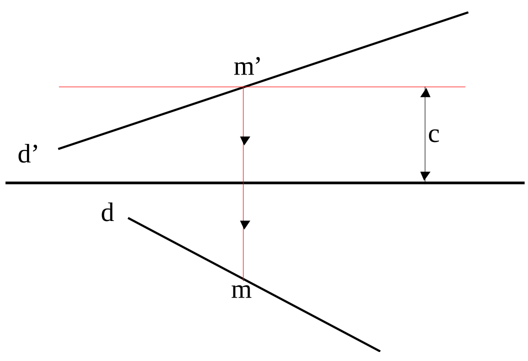


*1.3.3.2 Marquer sur une droite **un point de cote donnée** :*

Soit la droite (D) dont on connaît les projections horizontale et frontale et soit c la cote du point recherché.

Tous les points de cote égale à c se projette frontalement sur une droite parallèle à la ligne de terre, à une distance c de celle-ci.

On commence donc par tracer sur l'épure cette droite des projections des points de cote égale à c. Cette droite intercepte la projection frontale (d') de la droite (D) en point (m') d'où il suffit alors de descendre une ligne de rappel vers la projection horizontale (d) de la droite (D). Le point (M) appartenant à (D) et de cote égale à c est ainsi déterminé.



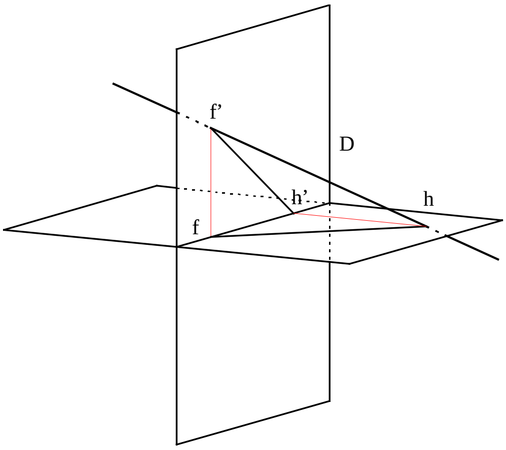
On traite de façon similaire la recherche sur une droite donnée d'un point d'éloignement donné.

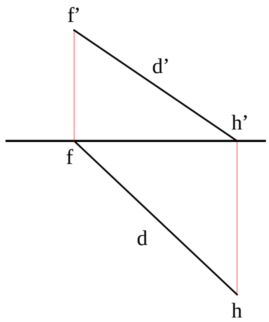
1.3.3.3 ***Traces d'une droite** sur les plans de projection :*

Les droites sont par définition infinies. Par conséquent, sauf cas particuliers vus plus haut (droites horizontales, verticales et horizonto-frontales), les droites interceptent les deux plans de projection.

On appelle **trace frontale** de la droite l'intersection de cette droite avec le plan frontal de projection.
On appelle **trace horizontale** de la droite l'intersection de cette droite avec le plan horizontal de projection.

La trace frontale de la droite est un point d'éloignement nul puisque ce point appartient au plan frontal. La recherche de ce point se réduit donc à la recherche du point de la droite d'éloignement nul. La trace horizontale de la droite est un point de cote nulle puisque ce point appartient au plan horizontal. La recherche de ce point se réduit donc à la recherche du point de la droite de cote nulle.

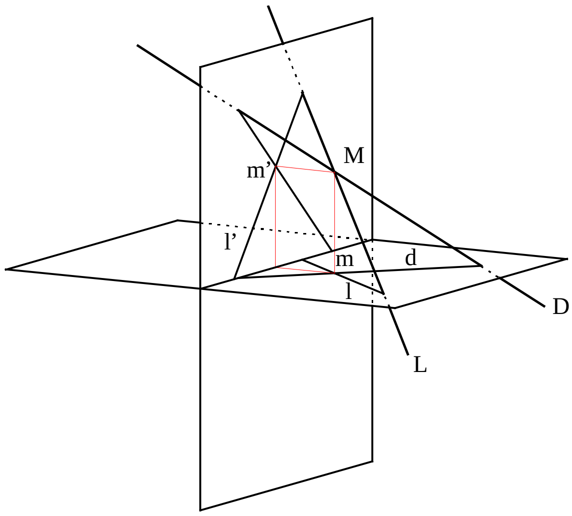


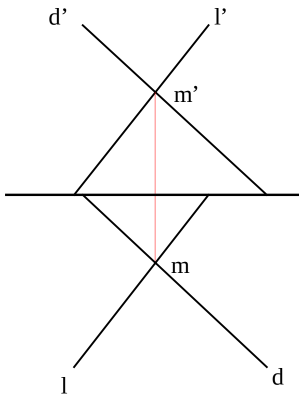


*1.3.3.4 Droites **concourantes** :*

Soient deux droites (D) et (L) de l'espace ayant un point commun (M). Ce point appartient au deux droites, et donc à leurs deux projections.

Sa projection frontale se trouvent donc à l'intersection des projections frontales (d') et (l') des deux droites, et sa projection horizontale à l'intersection des projections horizontales (d) et (l). Donc, lorsque deux droites sont sécantes, l'intersection des projections frontales et l'intersection des projections horizontales se trouvent *nécessairement* sur une même ligne de rappel.



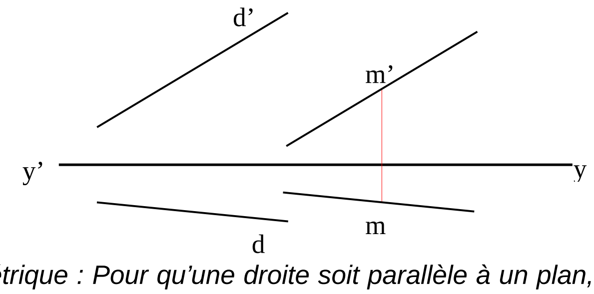


*1.3.3.5 Droites **parallèles** :*

Rappel géométrique : Si deux droites sont parallèles, leurs projections orthogonales sur un plan sont également parallèles.

Donc, si deux droites de l'espace sont parallèles, les projections frontales sont parallèles ainsi que les projections horizontales.

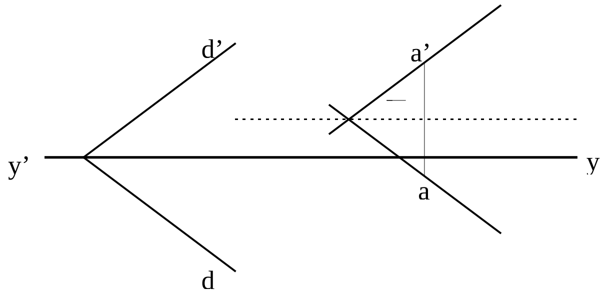
Soient (D) une droite de l'espace et (M) un point de l'espace donnés. Pour construire une droite parallèle à (D) et passant par (M), il suffit donc de construire une parallèle à la projection frontale (d') de (D) passant par la projection frontale (m') de (M) et une parallèle à la projection horizontale (d) de (D) passant par la projection horizontale (m) de (M).



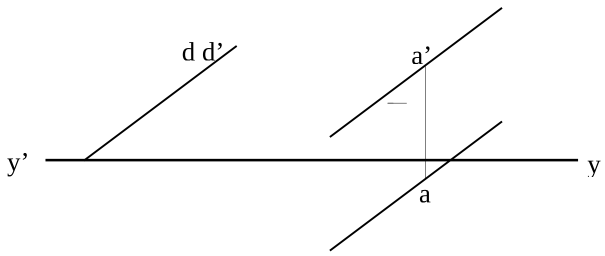
Rappel géométrique : Pour qu'une droite soit parallèle à un plan, if faut et il suffit que cette droite soit parallèle à une des droites de ce plan.

Nous allons maintenant chercher à construire une droite passant par un point donné et parallèle au premier bissecteur. Nous savons que les droites du premier bissecteur ont leurs projections horizontales et frontales symétriques par rapport à la ligne de terre.

Donc, pour construire une droite parallèle au 1er bissecteur passant par un point donné, il suffit de se donner une droite ayant ses projections horizontales et frontales symétriques par rapport à la ligne de terre et de mener des parallèles à ses projections passant par les projections horizontales et frontales du point donné.



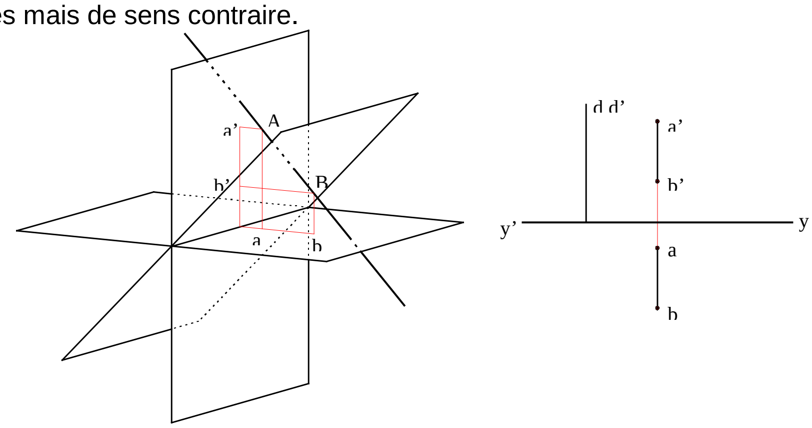
De la même façon, on construit par un point donné une parallèle au 2ème bissecteur dont on sait que les projections sont confondues.



On peut construire de même une droite perpendiculaire à un plan bissecteur passant par un point donné. Sachant que les deux plans bissecteurs sont perpendiculaires entre eux, une droite perpendiculaire à l'un est nécessairement parallèle à l'autre. Le problème ici est qu'une telle droite est également de profil, et qu'il est donc nécessaire de la caractériser par deux points.

La méthode consiste donc à se donner une droite de profil dans le bissecteur opposé, puis à mener par le point donné une parallèle à cette droite. Rappelons que pour caractériser une droite de profil sur une épure, il est nécessaire de connaître deux points de cette droite.

L'exemple ci-dessous montre la construction d'une droite perpendiculaire au 1er bissecteur passant par le point (A). On remarquera dans ce cas qu'un segment (AB) perpendiculaire au 1er bissecteur a des projections égales et de même sens. Dans le cas d'un segment perpendiculaire au 2ème bissecteur, ses projections seront égales mais de sens contraire.



1.4 Le plan :

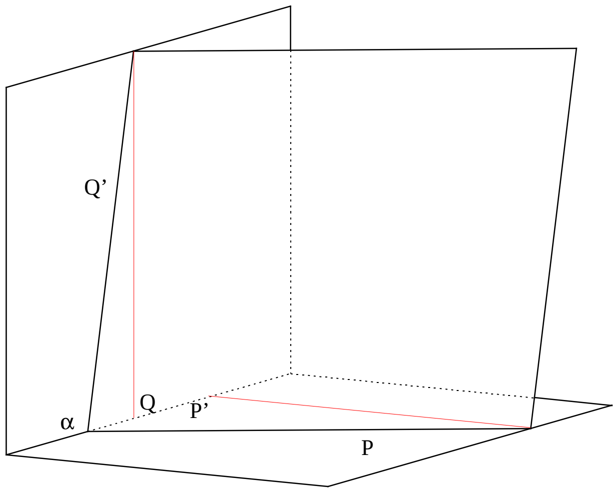
1.4.1 Détermination du plan. Traces du plan :

Rappel géométrique : Un plan est défini par

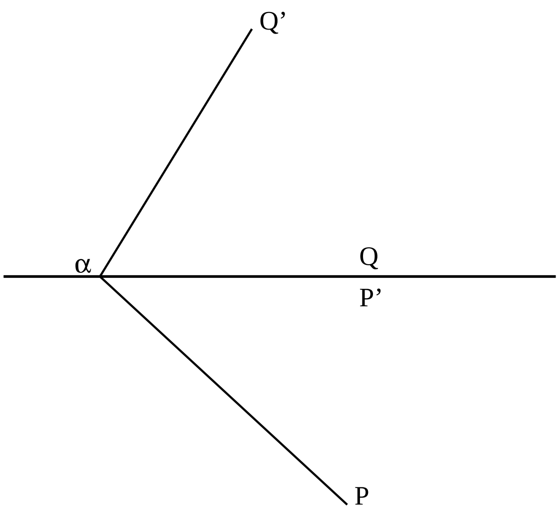
- *3 points non colinéaires*
- *1 point et une droite distincts.*
- *2 droites concourantes en un point.*
- *2 droites parallèles distinctes.*

En géométrie descriptive, un plan est le plus souvent caractérisé par deux droites concourantes, et notamment par ses **traces**.

On appelle traces d'un plan les *droites* suivant lesquelles celui-ci coupe les plans de projection. Ces deux droites — la trace horizontale (P) et la trace frontale (Q) du plan — se rencontrent sur la ligne de terre en un point (α).



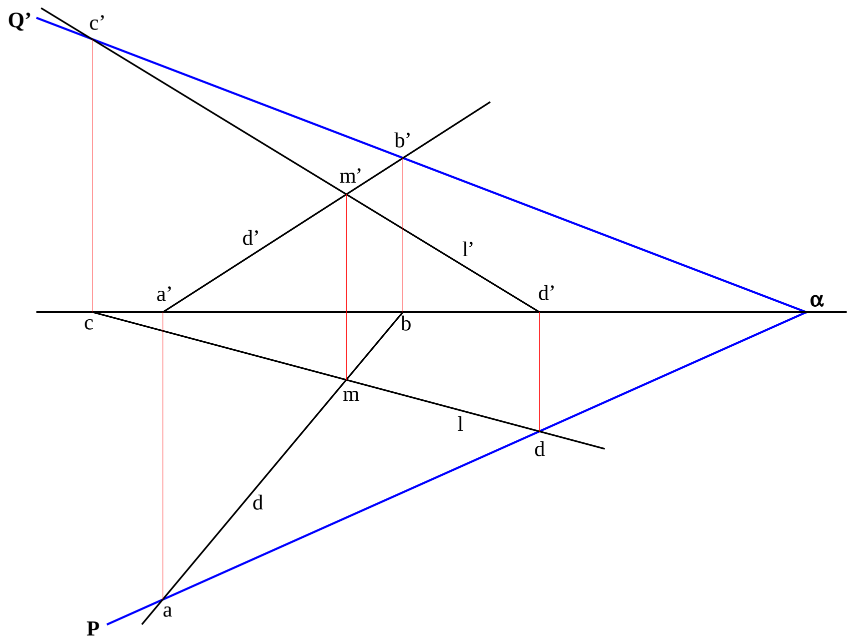
Le plan est ainsi entièrement déterminé dans l'épure par ses traces horizontale et frontale.



1.4.1.1 *Construire les traces d'un plan défini par deux droites concourantes*

Soient (D) et (L) deux droites concourantes en un point (M). On obtient les traces du plan défini par ces droites en cherchant les traces horizontales et frontales de ces droites.

Les traces horizontales (A) et (B) des droites appartiennent au plan horizontal de projection ainsi qu'au plan défini par ces droites. Elles appartiennent donc à la trace horizontale de ce plan. La trace horizontale du plan est donc la droite qui joint les deux traces horizontales des droites. De même, les traces frontales (C) et (D) des droites appartiennent au plan frontal de projection ainsi qu'au plan défini par ces droites. Elles appartiennent donc à la trace frontale de ce plan. La trace frontale du plan est donc la droite qui joint les deux traces frontales des droites.

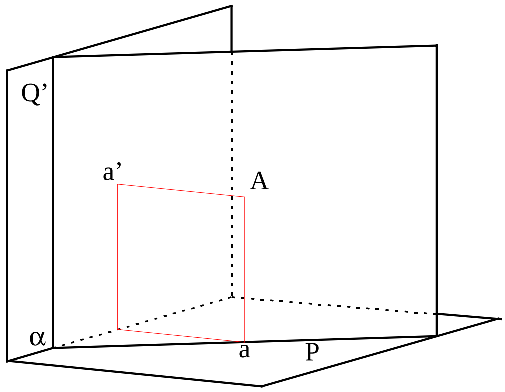


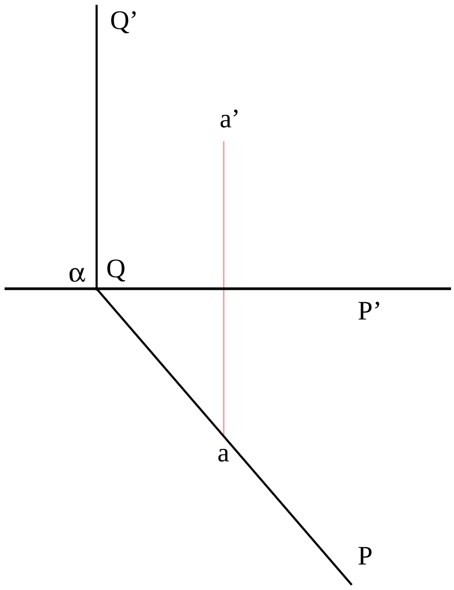
1.4.2 Plans remarquables :

Les plans remarquables sont les plans parallèles ou orthogonaux aux plans de projections ou aux plans bissecteurs.

*1.4.2.1 Plan **vertical** :*

Est dit vertical tout plan perpendiculaire au plan horizontal de projection. Sa trace frontale est donc perpendiculaire à la ligne de terre et tous les points appartenant à ce plan se projettent horizontalement sur sa trace horizontale.

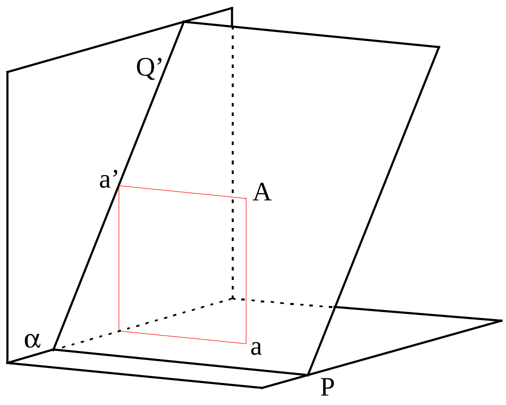


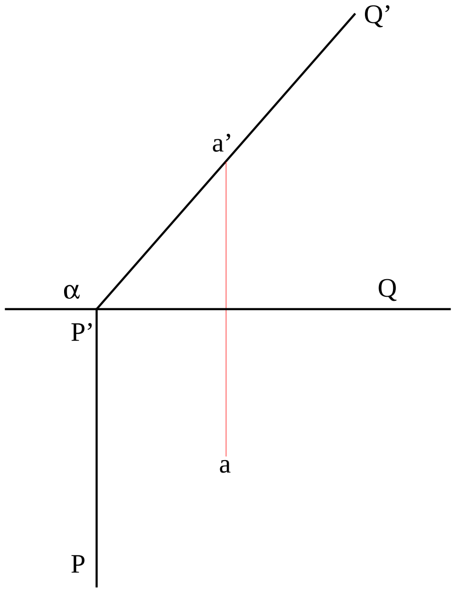


Remarque : Le plan frontal est un plan vertical particulier

*1.4.2.2 Plan **de bout** :*

Est dit de bout tout plan perpendiculaire au plan frontal de projection. Sa trace horizontale est donc perpendiculaire à la ligne de terre et tous les points appartenant à ce plan se projettent frontalement sur sa trace frontale.

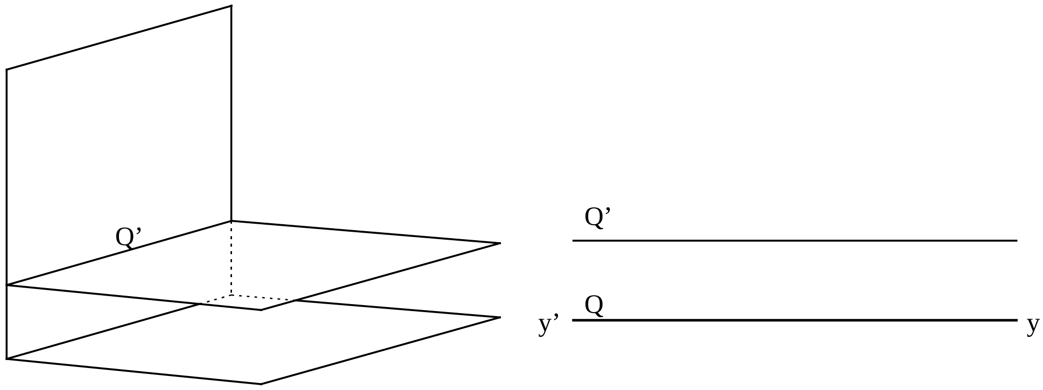




Remarque : le plan horizontal de projection est un plan de bout particulier.

*1.4.2.3 Plan **horizontal** :*

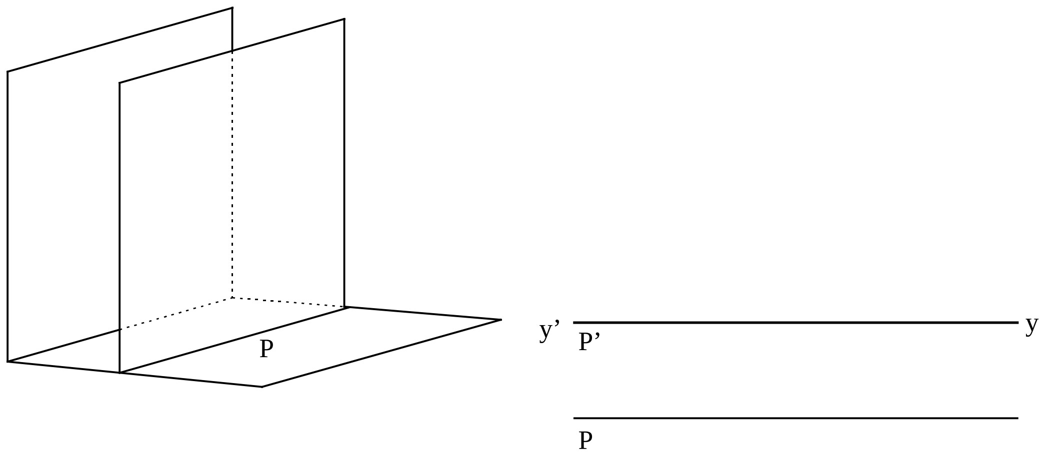
Est dit horizontal un plan parallèle au plan horizontal de projection. Tous ses points ont même cote. Il n'a donc pas de trace horizontale et sa trace frontale est parallèle à la ligne de terre.



Remarque : tout plan horizontal est aussi un plan de bout.

*1.4.2.4 Plan **frontal** :*

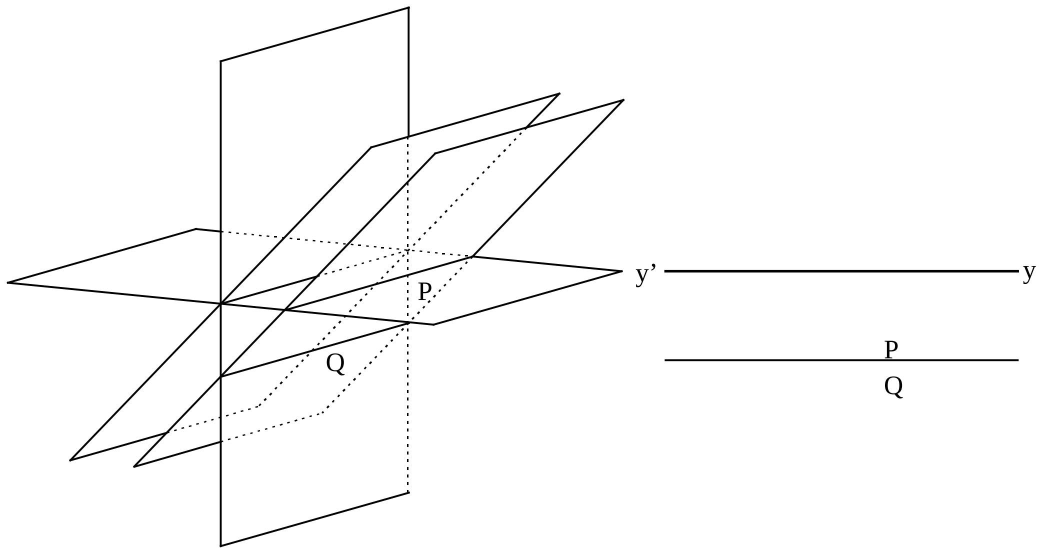
Est dit frontal un plan parallèle au plan frontal de projection. Tous ses points ont même éloignement. Il n'a donc pas de trace frontale et sa trace horizontale est parallèle à la ligne de terre.



Remarque : Tout plan frontal est aussi un plan vertical.

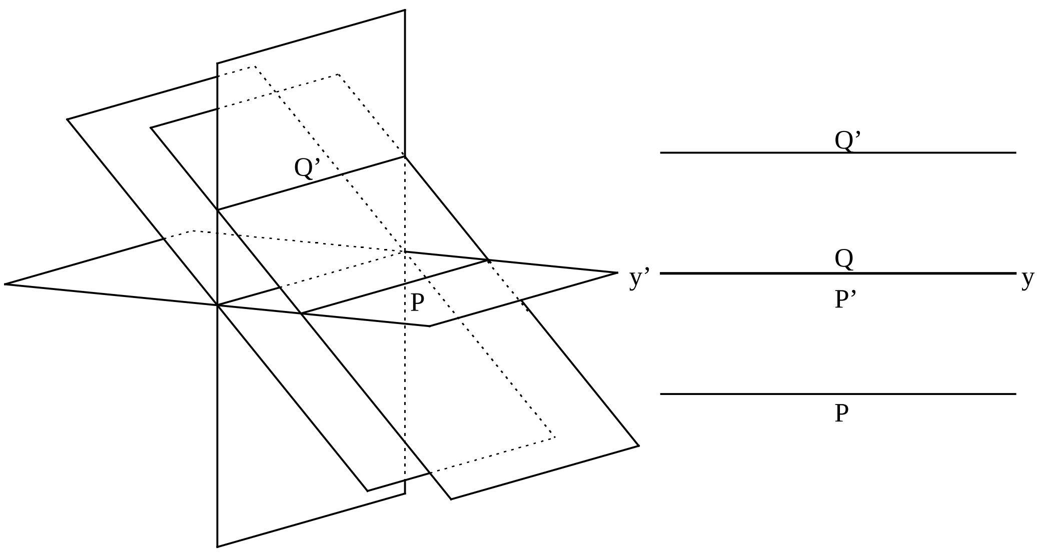
*1.4.2.5 Plan **parallèle au premier bissecteur** :*

Un plan parallèle au 1er bissecteur a ses traces horizontale et frontale confondues et parallèles à la ligne de terre.



*1.4.2.6 Plan **parallèle au deuxième bissecteur** :*

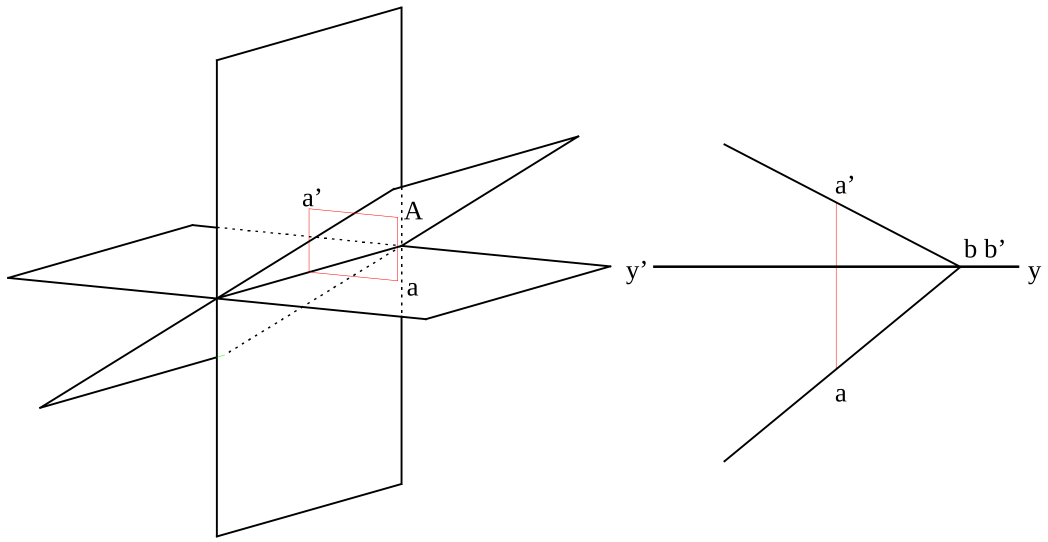
Un plan parallèle au 2ème bissecteur a ses traces horizontale et frontale parallèles à la ligne de terre et symétriques par rapport à celle-ci.



1.4.2.7 Plan ***passant par la ligne de terre*** *:*

Un plan passant par la ligne de terre a ses traces confondues avec celle-ci. Il faut et il suffit, pour définir un tel plan, de connaître un de ses points (A).

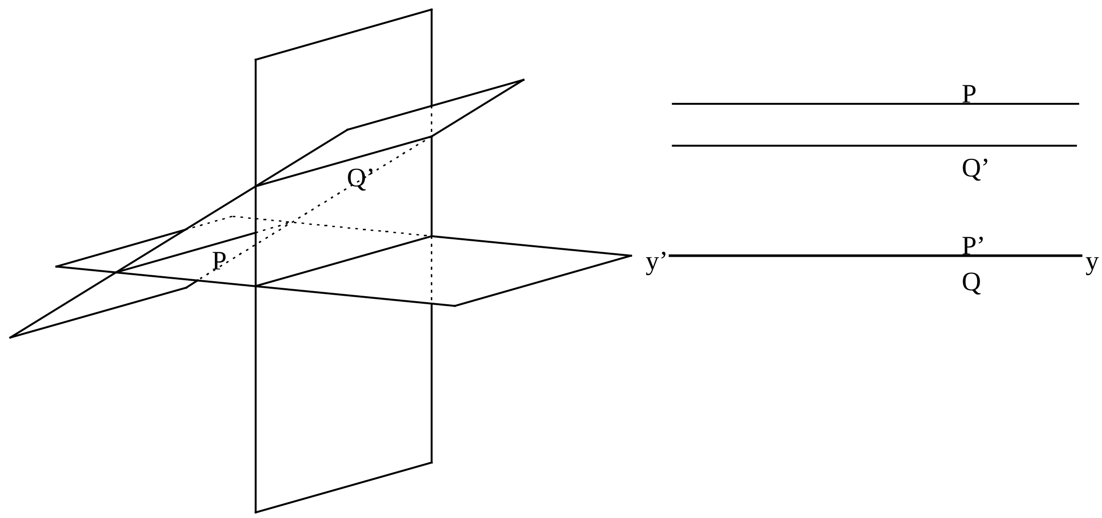
Toute droite joignant ce point et un point quelconque de la ligne de terre (B) appartient à ce plan.



Remarque : les deux bissecteurs peuvent être définis de cette façon.

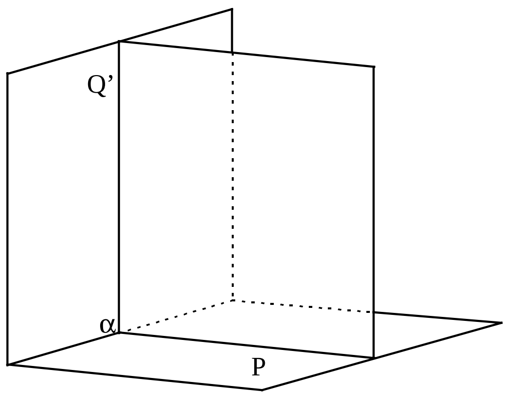
1.4.2.8 Plan ***parallèle à la ligne de terre*** *:*

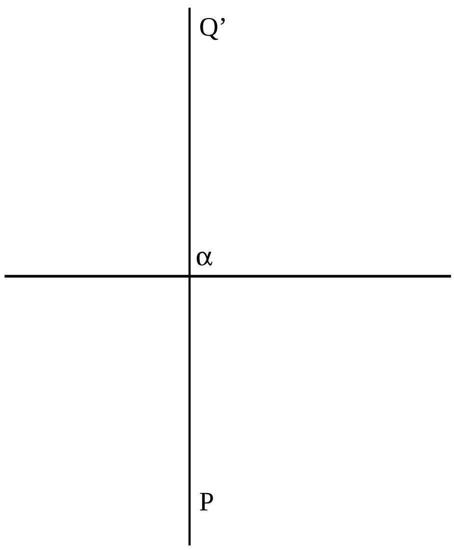
Un plan parallèle à la ligne de terre a ses traces horizontale et frontale parallèles à la ligne de terre mais non nécessairement confondues ou symétriques par rapport à celle-ci.



1.4.2.9 Plan ***de profil*** *:*

Un plan de profil est perpendiculaire au deux plans de projection, et donc à la ligne de terre. Ses traces horizontale et frontale sont alignées et perpendiculaires à la ligne de terre.





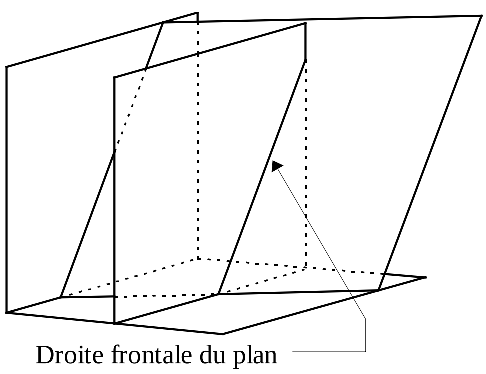
1.4.3 Droites principales d'un plan :

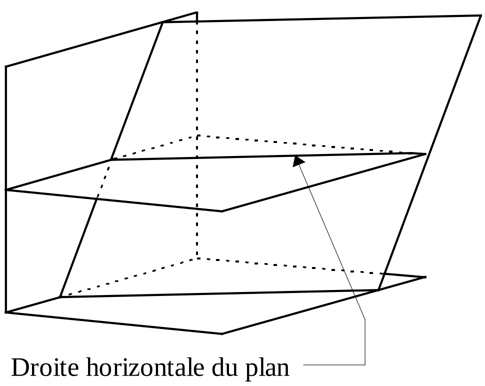
On appelle *droites principales* d'un plan les droites de ce plan parallèles au plan frontal ou au plan horizontal de projection, ainsi que les droites perpendiculaires à celles-ci, c'est-à-dire les lignes de plus grande pente.

1.4.3.1 Droites frontales et horizontales d'un plan :

Ce sont les droites appartenant au plan considéré et qui sont parallèles au plan frontal ou au plan horizontal de projection.

Les droites frontales d'un plan sont obtenues en coupant ce plan avec des plans frontaux, les droites horizontales en coupant le plan avec des plans horizontaux.





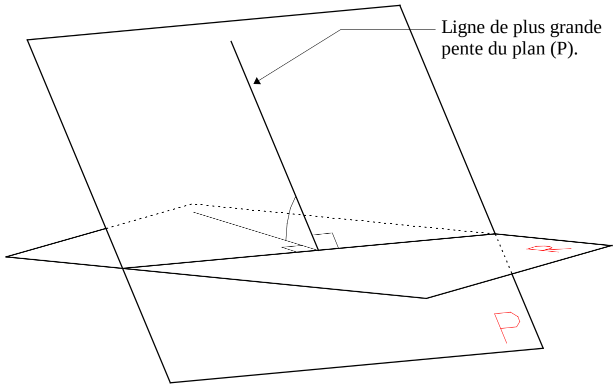
La trace frontale d'un plan est une droite frontale d'éloignement zéro de ce plan. De même, la trace horizontale du plan est la droite horizontale de cote zéro de ce plan.

1.4.3.2 ***Lignes de plus grande pente*** *d'un plan :*

On appelle lignes de plus grande pente d'un plan en référence à un plan de projection les droites de ce plan qui forment le plus grand angle possible avec ce plan de projection. En géométrie descriptive, on distingue classiquement les lignes de plus grande pente avec le plan horizontal et les lignes de plus grande pente avec le plan frontal.

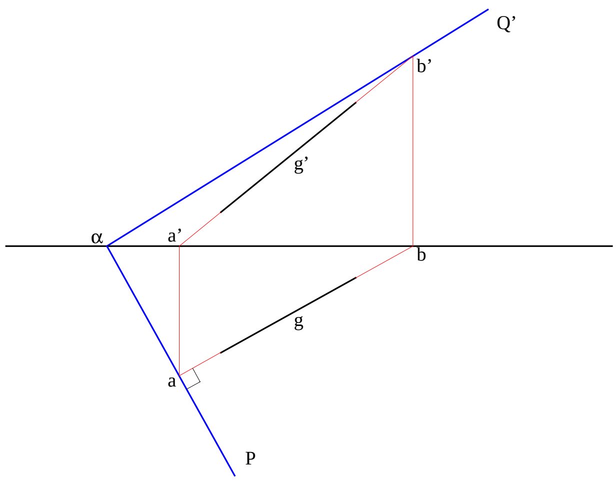
Théorème : Soient (P) et (R) deux plans se coupant selon une droite (D). Les lignes de plus grande pente du plan (P) par rapport au plan de référence (R) sont les droites de (P) perpendiculaires à (D).

Rappel géométrique : pour qu'un angle droit se projette en un angle droit, il faut et il suffit qu'un de ses cotés soit parallèle à ce plan.



La trace horizontale d'un plan représente la droite d'intersection de ce plan avec le plan horizontal de projection. Selon le plan de référence considéré, les lignes de plus grande pente du plan sont donc les droites perpendiculaires à la trace du plan correspondante. D'autre part, les droites horizontales ou frontales du plan étant parallèles respectivement aux traces horizontales ou frontales, les lignes de plus grande pente d'un plan sont également perpendiculaires aux droites horizontales ou frontales de ce même plan.

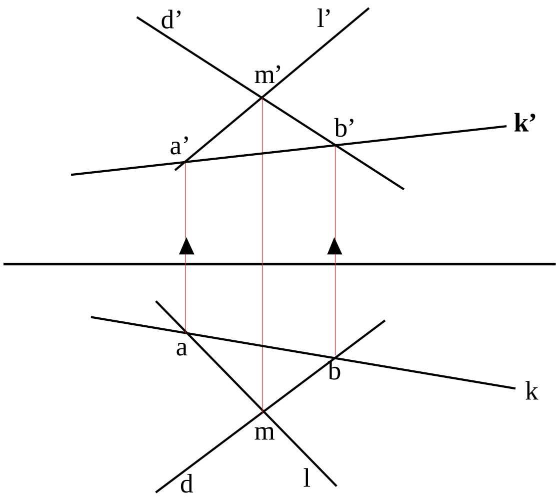
Remarque : Une ligne de plus grande pente est suffisante pour caractériser entièrement un plan. En effet, connaissant la ligne de plus grande pente (G) avec, par exemple, le plan horizontal, il est possible de construire sa trace horizontale, soit le point (A). Nous savons que la trace horizontale du plan, soit la droite (P), passe par le point (A) et est perpendiculaire à (G). Une fois construite, cette trace horizontale, nous donne le point (α) intersection de cette droite avec la ligne de terre. Ce point (α) appartient également à la trace frontale (Q') du plan. Il ne reste alors qu'à construire la trace frontale de (G), soit le point (B), pour obtenir un second point de cette trace frontale du plan.



1.4.4 Constructions sur les plans :

1.4.4.1 Marquer une droite dans un plan :

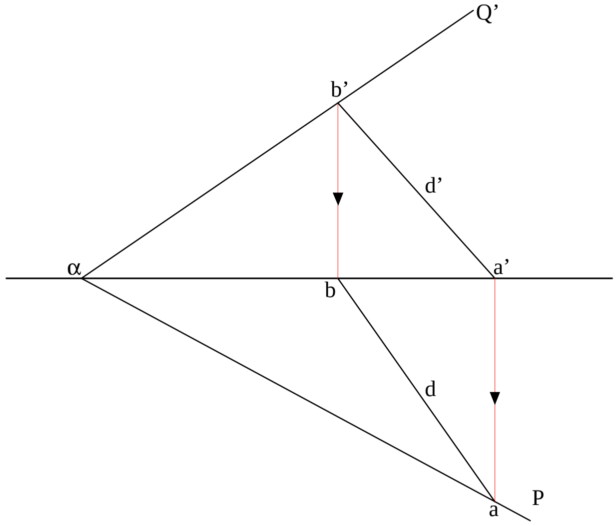
Soit un plan défini par deux droites concourantes (D) et (L). La projection horizontale (k) d'une droite (K) de ce plan est connue. Pour construire la projection frontale (k') de cette droite, il suffit de rappeler les intersections (a) et (b) de (k) avec les projections horizontales (d) et (l) de (D) et (L) sur leur projections frontales (d') et (l').



Cas d'un plan défini par ses traces (PαQ') :

Cette fois, la projection frontale (d') de la droite du plan est connue et on cherche sa projection horizontale (d).

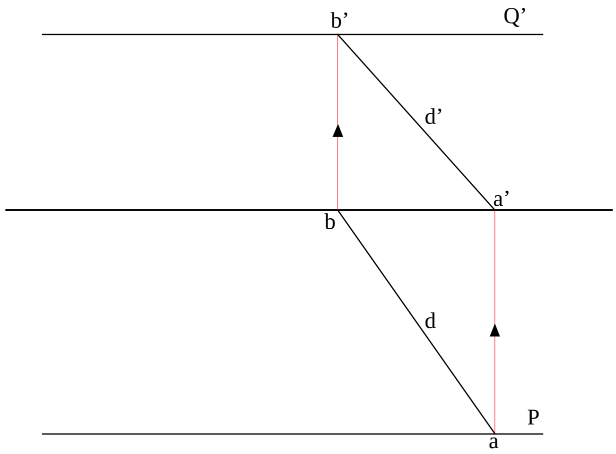
Soit (A) le trace horizontale de (D). Ce point appartient au plan horizontal de projection ainsi qu'au plan défini par (PαQ'). Il appartient donc également à la trace horizontale (P) du plan. De même la trace frontale (B) de (D) appartient au plan frontal de projection ainsi qu'au plan (PαQ'), et donc à la trace frontale (Q') de ce plan. Ces traces de la droite (D) sont connues et nous permettent donc de construire sa projection horizontale.



Cas d'un plan parallèle à la ligne de terre :

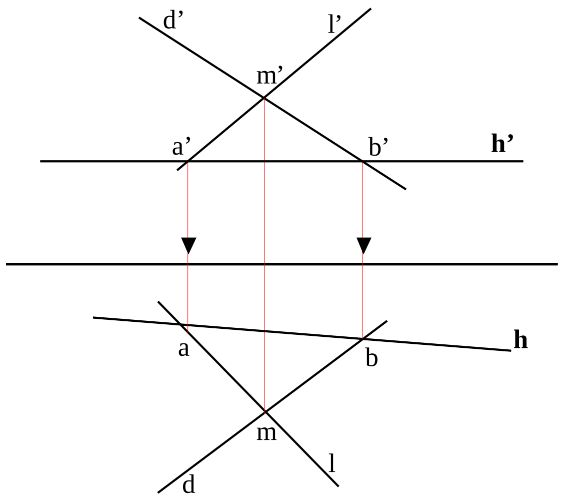
Le plan est connu par ses traces (P) et (Q) qui sont parallèles à la ligne de terre. La projection horizontale de la droite (D), soit (d), est également connue et on cherche sa projection frontale (d') de façon à caractériser (D) dans le plan.

Nous savons que la trace horizontale de (D), soit le point (A), appartient à (P) et que sa trace frontale, soit le point (B), appartient à (Q). Il suffit donc de construire ces points à partir de (d) pour trouver (d').



1.4.4.2 Construire une horizontale d'un plan défini par deux droites concourantes :

Il suffit de couper les deux projections frontales (d') et (l') des droites caractérisant le plan par une projection frontale (h') parallèle à la ligne de terre, puis de rappeler les points d'intersection sur les projections horizontales des droites afin de construire (h).



1.4.4.3 Marquer un point dans un plan :

Ici, une des projection du point est connue, et on cherche son autre projection sachant que le point appartient au plan. Le problème se décompose en deux étapes:

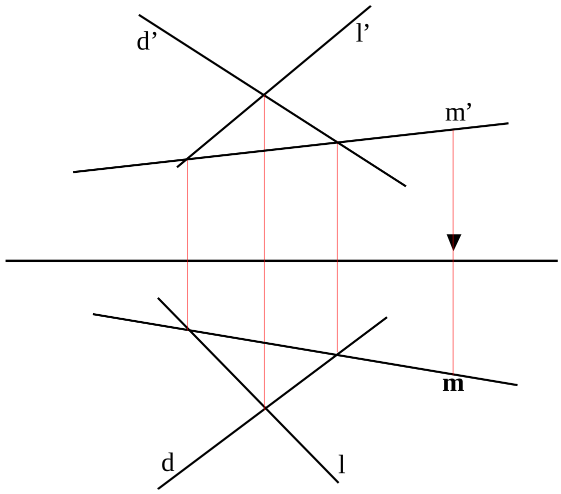
- on cherche d'abord à construire une droite passant par ce point et appartenant au plan.

- On rappelle ensuite ce point sur les projections de la droite.

Cas d'un plan défini par deux droites concourantes :

On connaît (D) et (L) deux droites sécantes définissant un plan (P) ainsi que (m'), la projection frontale d'un point dont on cherche la projection horizontale sachant que ce point appartient au plan des deux droites.

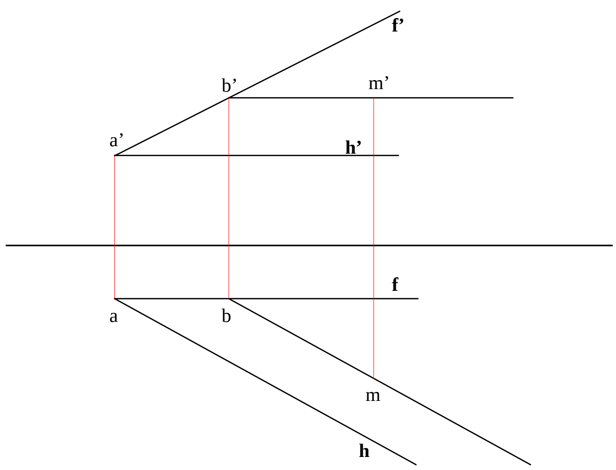
On construit donc une droite passant par (m') et coupant les droites (D) et (L). Cette droite, ainsi définie par deux points appartenant au plan (P), appartient donc elle-aussi à ce plan. Si maintenant on définit la projection horizontale (m) comme appartenant donc à cette droite, le point (M) appartiendra lui aussi au plan.



Cas d'un plan défini par deux droites principales :

Soit un plan (P) caractérisé par deux de ses droites principales, (H) et (F), concourantes en un point (A). La projection horizontale (m) du point recherché est connue. On cherche à construire sa projection frontale (m') de telle sorte que le point appartienne au plan.

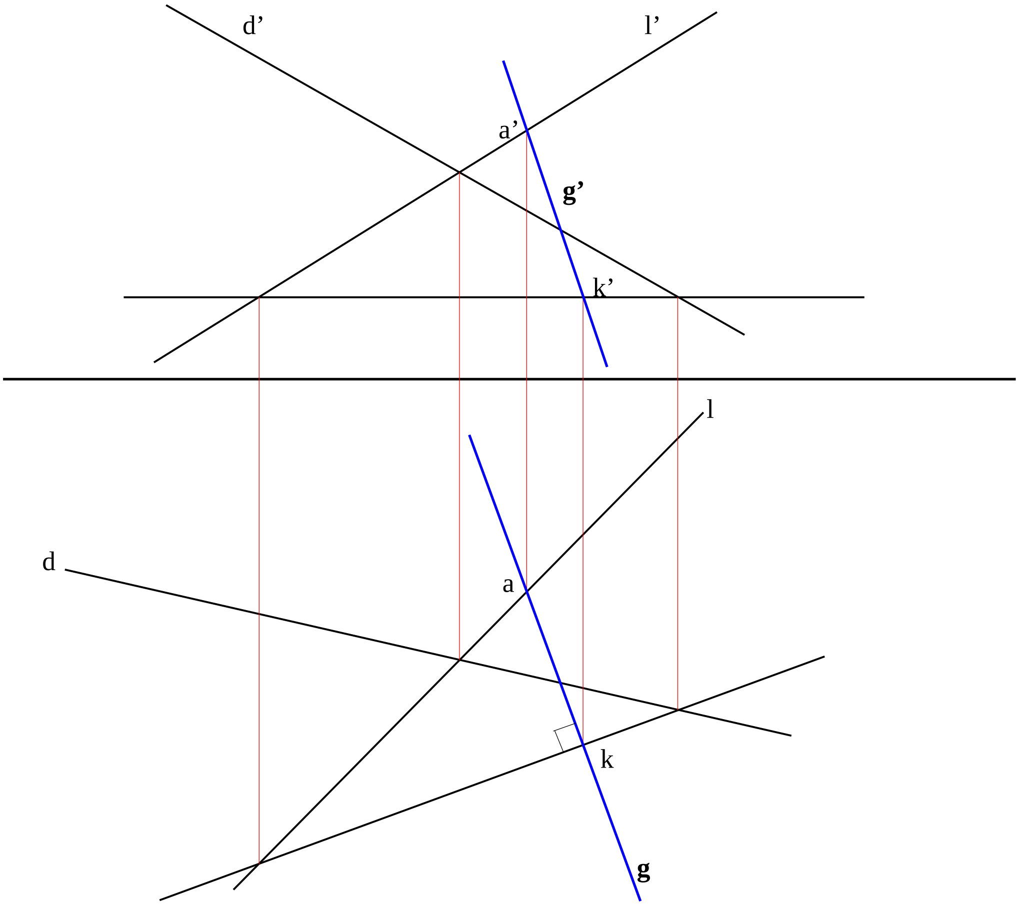
On construit tout d'abord une droite horizontale passant par (m), parallèle à (H) et qui coupe la droite (F) en un point (B). (B) est un point du plan (P). La droite ainsi définie est donc parallèle à (H) et passe par (B), un point de (P). Elle appartient donc elle aussi à (P). Il ne reste alors qu'à rappeler (m') sur cette droite pour que (M) appartienne à (P).



1.4.4.4 Construire la ligne de plus grande pente d'un plan passant par un point donné

Soit un plan (P) défini par deux droites (D) et (L) concourantes et soit (A) un point de ce plan donné. On cherche à construire la ligne de plus grande pente par rapport au plan horizontal passant par (A).

On construit tout d'abord une horizontale du plan. La droite cherchée est la perpendiculaire à cette droite menée par (A).



2. PROBLEMES SUR LES DROITES ET LES PLANS

2.1 Droite et plan parallèles

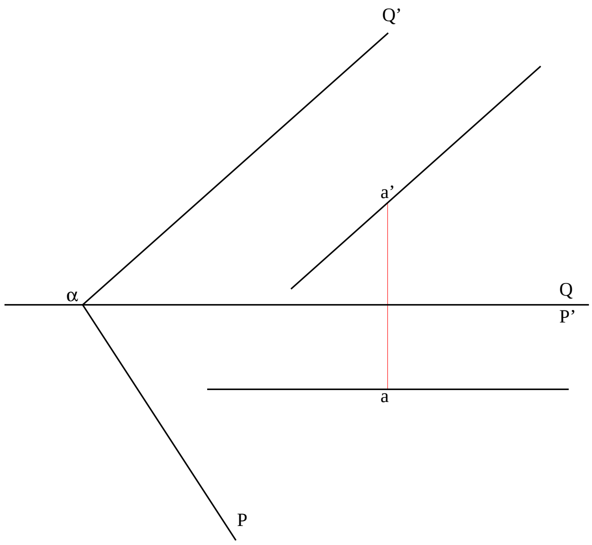
Rappel géométrique :

Pour qu'une droite soit parallèle à un plan, il faut et il suffit qu'elle soit parallèle à une des droites de ce plan.

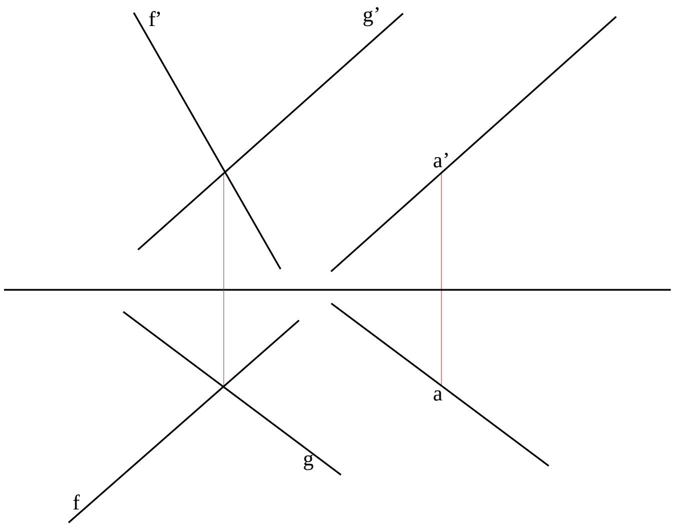
2.1.1 Mener par un point une droite parallèle à un plan :

Selon le théorème précédent, il suffit de mener par le point donné une parallèle à une droite appartenant au plan.

Dans le cas d'un plan défini par ses traces (PαQ'), il suffit donc de mener par le point (A) une droite parallèle à la trace horizontale ou à la trace frontale du plan.

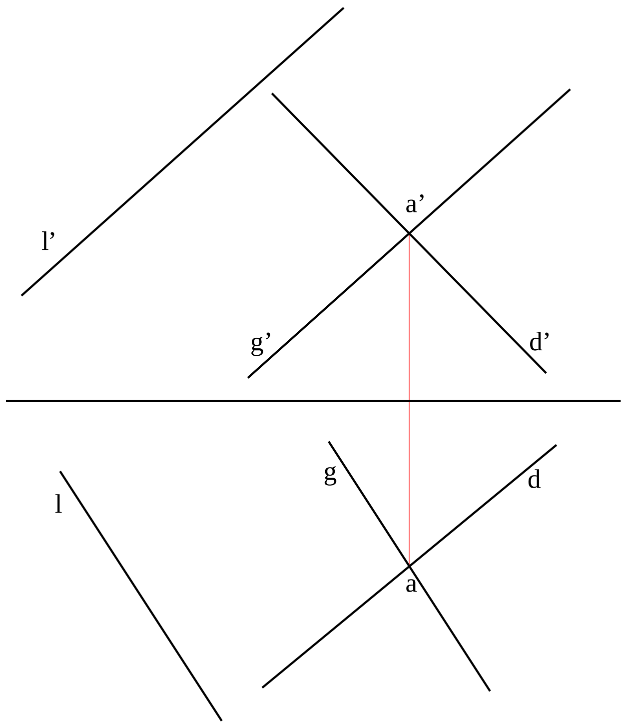


Dans le cas d'un plan défini par deux droites concourantes (F) et (G), il suffit de mener par le point (A) une droite parallèle à (F) ou à (G).



2.1.2 Mener par une droite donnée le plan parallèle à une direction donnée :

Selon le théorème précédent, il suffit de construire un plan contenant la droite (D) donnée et une droite parallèle à la direction (L), donnée également. Pour ce faire, on se donne un point (A) de la droite (D) par lequel on mène une droite (G) parallèle à (L). Les droites (D) et (G) sont concourantes en (A) et définissent donc bien un plan parallèle à (L).



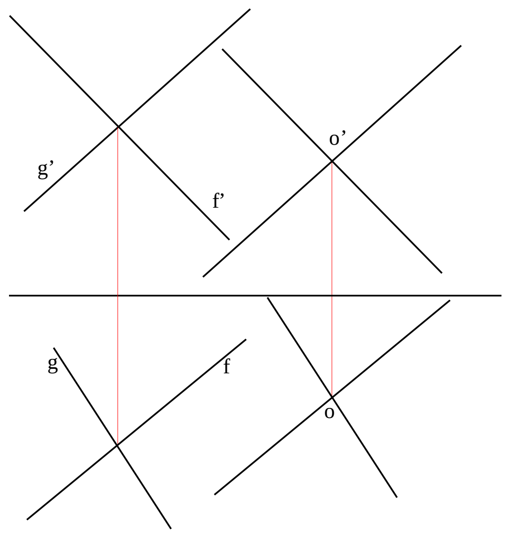
2.2 Plans parallèles

Rappel géométrique

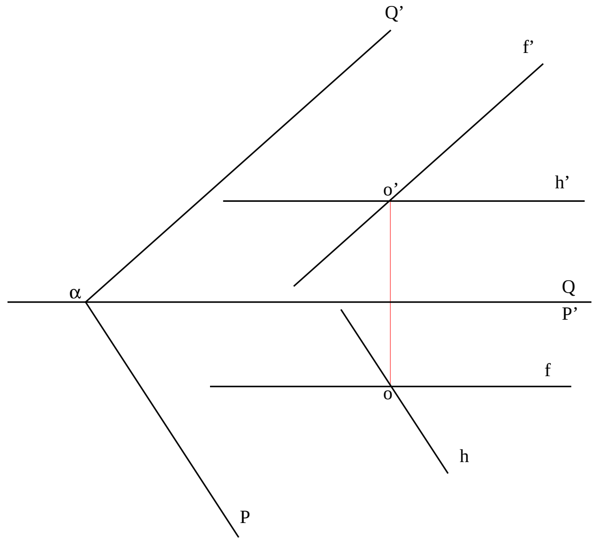
Pour que deux plans soient parallèles, il faut et il suffit que deux droites concourantes de l'un soient parallèles à l'autre.

2.2.1 Mener par un point donné un plan parallèle à un plan donné :

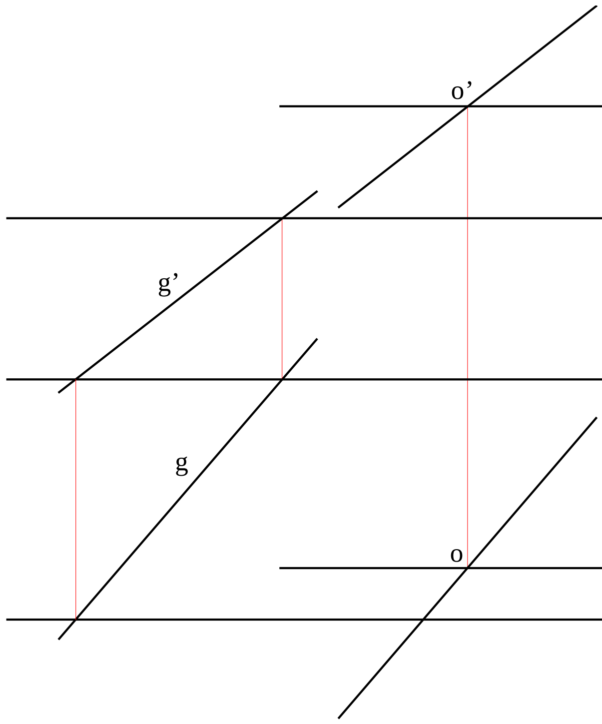
Soit (O) un point de l'espace et (P) un plan de l'espace défini par deux droites concourantes (G) et (F). Pour mener par (O) un plan parallèle à (P), if suffit de mener par (O) des droites parallèles à (G) et (F).



Soit (O) un point de l'espace et (V) un plan de l'espace défini par ses traces (PαQ'). Si ces traces ne sont pas parallèles entre elles, if suffit, pour mener par (O) un plan parallèle à (V), de mener par (O) des droites (H) et (F) parallèles aux traces horizontale et frontale de (V).



Dans le cas où le plan (V) est parallèle à la ligne de terre, ses traces horizontale et frontale sont parallèles entre elles puisque parallèles à la ligne de terre. Les parallèles à chacune de ces droites menées par (O) seront confondues et ne suffiront donc pas à déterminer un plan. Il est donc nécessaire ici de construire une autre droite (G) appartenant au plan (V) puis de mener par (O) une parallèle à cette droite.

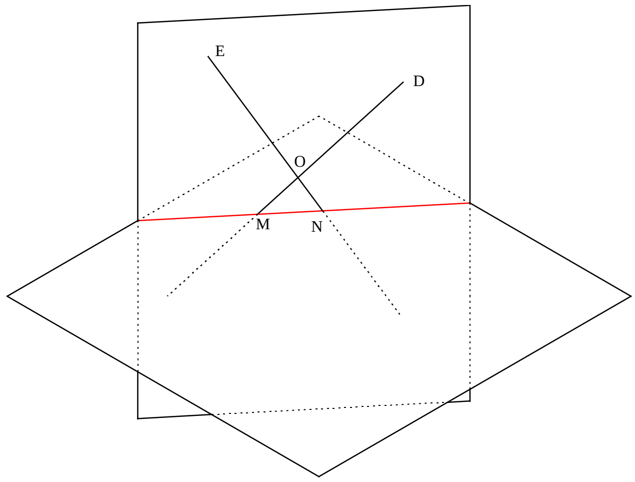


2.3 Intersection de deux plans

L'intersection de deux plans est soit une droite, soit nulle. Si deux plans se coupent, ils se coupent selon une droite et il suffira donc d'en déterminer deux points.

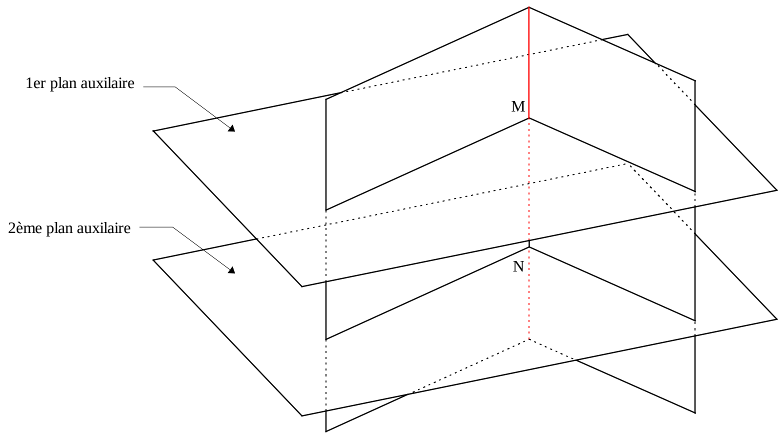
Pour ce faire, plusieurs méthodes s'offrent à nous :

On recherche l'intersection de deux droites distinctes d'un plan avec l'autre. Les deux points de l'intersection seront ainsi donnés.



On coupe les deux plans donnés dont on recherche l'intersection par un plan auxiliaire. Les droites d'intersection de ce plan auxiliaire avec les plans donnés se rencontrent en un point appartenant à l'intersection recherchée. Il suffit alors de répéter l'opération avec un autre plan auxiliaire pour déterminer un autre point de l'intersection recherchée.

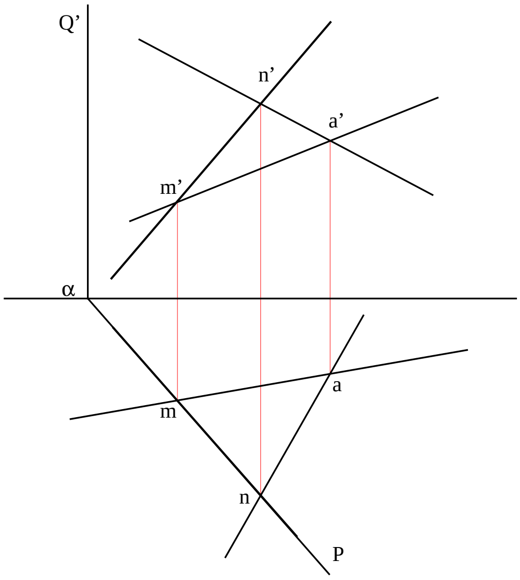
Bien entendu, les plans auxiliaires sont pris tels qu'il soit facile de déterminer leurs intersections avec les plans donnés. Ce sont en général des plans verticaux ou de bout.



2.3.1 Un des plans est perpendiculaire à un des plans de projection :

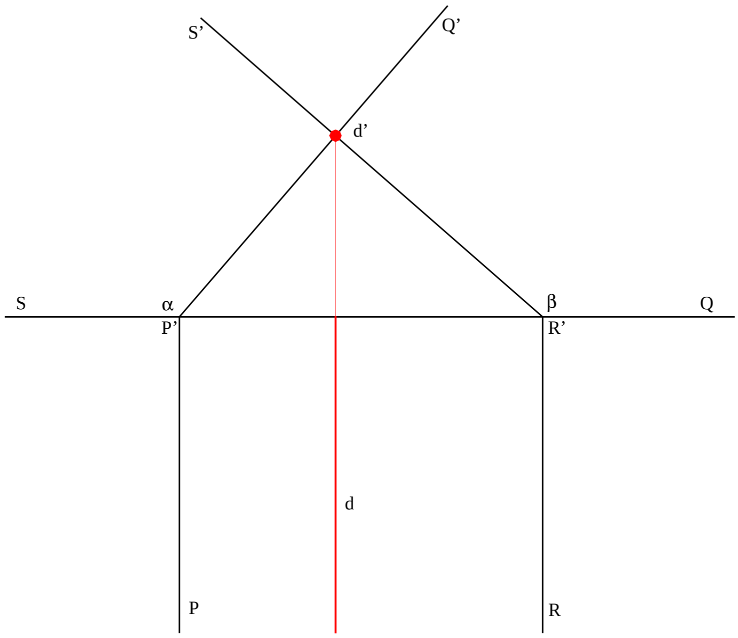
2.3.1.1 Un des plans est vertical (ou de bout) :

Soit un plan (V) vertical et un plan (P) défini par deux droites concourantes (D) et (E). Nous savons que tous les points d'un plan vertical se projettent horizontalement sur la trace horizontale de ce plan. L'intersection du plan (P) avec le plan (V) appartient au plan (V) et donc se projette également sur la trace horizontale de (V). Les intersections des droites (D) et (E) avec le plan (V) sont donc données en projection horizontale. Il ne reste alors qu'à rappeler ces intersections en projection frontale.



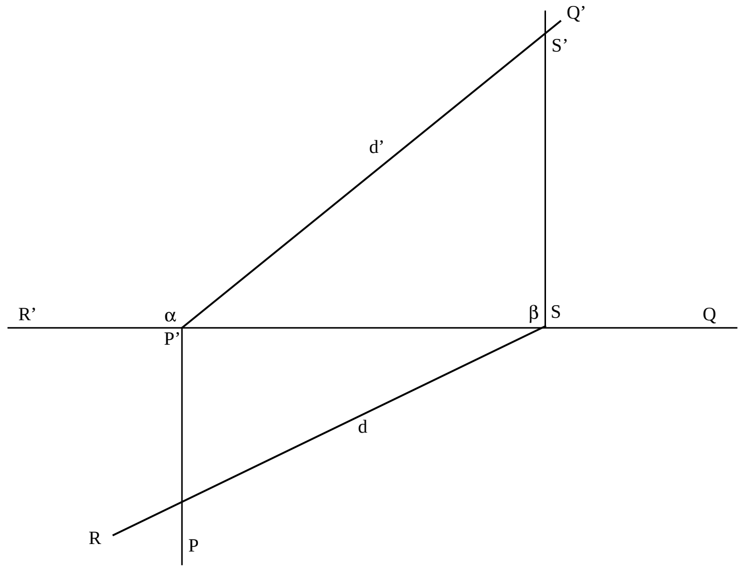
2.3.1.2 Les deux plans sont de bout :

Les plans de bout sont perpendiculaires au plan frontal. Leur intersection sera donc elle-même perpendiculaire au plan frontal, c'est-à-dire une droite de bout. Un seul point est suffisant pour la définir.



2.3.1.3 Un plan de bout et un plan vertical :

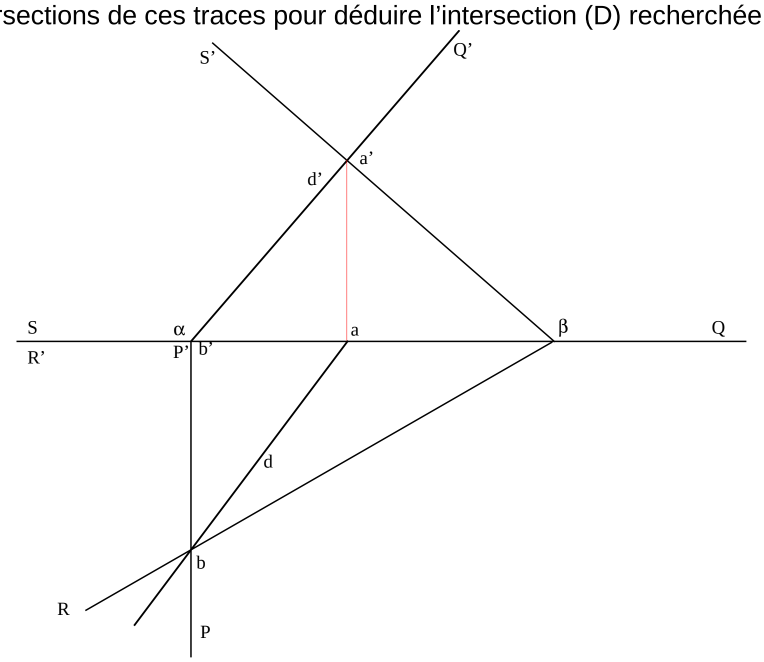
Tous les points d'un plan de bout se projettent frontalement sur sa trace frontale et tous les points d'un plan vertical se projettent horizontalement sur sa trace horizontale. L'intersection d'un plan de bout avec un plan vertical se projette donc nécessairement horizontalement sur la trace horizontale du plan vertical et frontalement sur la trace frontale du plan de bout.



2.3.1.4 Un plan de bout et un plan défini par ses traces :

Nous savons qu'en projection frontale, la droite d'intersection recherchée sera confondue avec la trace frontale du plan de bout. Il suffit donc, pour déterminer la droite (D) recherchée, de construire les points (A) et (B), intersections des traces.

On peut de plus remarquer que dans le cas de plans définis par les traces, les intersections avec deux plans auxiliaires sont données pour peu que l'on considère les plans de projections comme plans auxiliaires. Les traces d'un plan sont, rappelons-le, les intersections de ce plan avec les plans de projections. Il suffit donc de construire les deux points d'intersections de ces traces pour déduire l'intersection (D) recherchée.



2.3.2 Cas général (méthode des plans auxiliaires) :

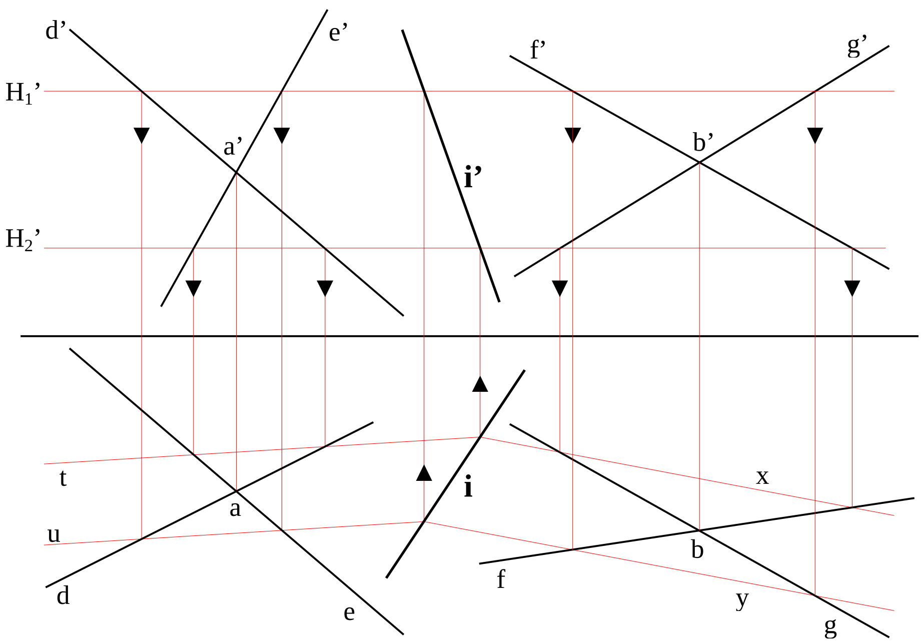
2.3.2.1 Deux plans définis par deux droites concourantes :

On considère deux plans quelconques définis chacun par deux droites concourantes. La méthode employée ici pour déterminer l'intersection de ces deux plans est celle des plans auxiliaires.

Soit un plan (P) déterminé par les droites (D) et (E) concourantes en un point (A), et un plan (V) déterminé par les droites (F) et (G) concourantes en un point (B).

On se donne ici deux plans auxiliaires horizontaux (H_1) et (H_2). Le plan (H_1) coupe le plan (P) selon la droite (T) et le plan (V) selon la droite (X). Le plan (H_2) coupe le plan (P) selon la droite (U) et le plan. (V) selon la droite (Y).

La droite (I), intersection des plans (P) et (V) recherchée, est déterminée par le point d'intersection des droites (T) et (X) et le point d'intersection des droites (U) et (Y).



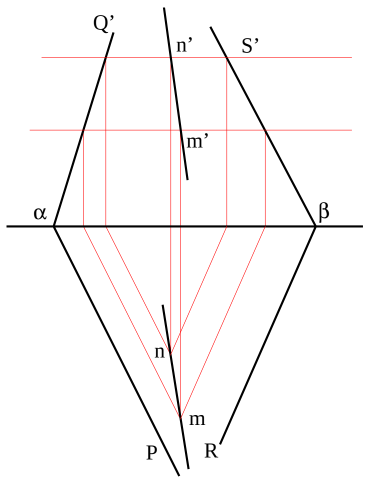
2.3.2.2 Deux plans définis par leurs traces :

La trace horizontale d'un plan est l'intersection de ce plan avec le plan horizontal de projection; sa trace frontale est son intersection avec le plan frontal de projection. Dans le cas de la recherche de l'intersection entre deux plans définis par leur traces, il suffit donc de prendre comme plans auxiliaires les plans de projections horizontal et frontal puisque les intersections des plans considérés avec de tels plans auxiliaires sont données par les traces.

Afin de déterminer l'intersection entre les deux plans considérés, il suffit de rechercher l'intersection de leurs traces horizontales et de leurs traces frontales.

2.3.2.3 Intersections des traces hors des limites de l'épure :

Si, dans le cas de plans définis par leurs traces, ces traces ne se coupent pas dans les limites de l'épure et qu'il est par conséquent difficile ou impossible de construire leurs intersections, on aura alors recours à deux autres plans auxiliaires, comme ici deux plans horizontaux.

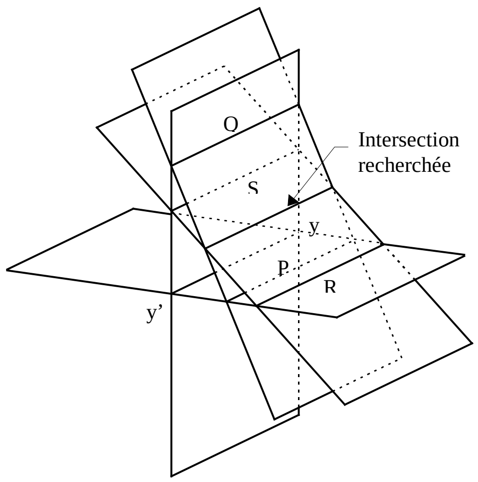


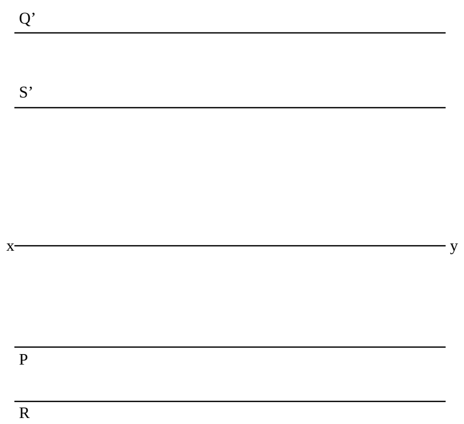
2.3.2.4 Deux plans parallèles à la ligne de terre :

Dans ce cas, les traces étant parallèles à la ligne de terre, elles n'ont pas d'intersection. Cependant, nous savons que l'intersection de deux plans parallèles à la ligne de terre sera elle-même parallèle à la ligne de terre. Il suffira donc de construire un point de cette intersection pour la déterminer.

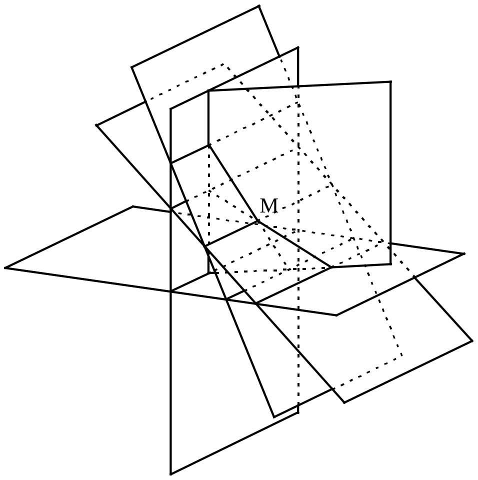
On se donne un seul plan auxiliaire que l'on prendra vertical ou de bout. Dans le cas d'un plan auxiliaire vertical (épure ci-dessous), nous savons que tous les points de ce plan se projettent horizontalement sur sa projection horizontale, et notamment les droites d'intersections entre ce plan et les plans parallèles à la ligne de terre. On construit donc aisément ces droites d'intersection. L'intersection de ces droites d'intersection donne un point de l'intersection recherchée entre les deux plans parallèles à la ligne de terre. Cette intersection recherchée étant elle-même parallèle à la ligne de terre, ce point suffit à la déterminer complètement.

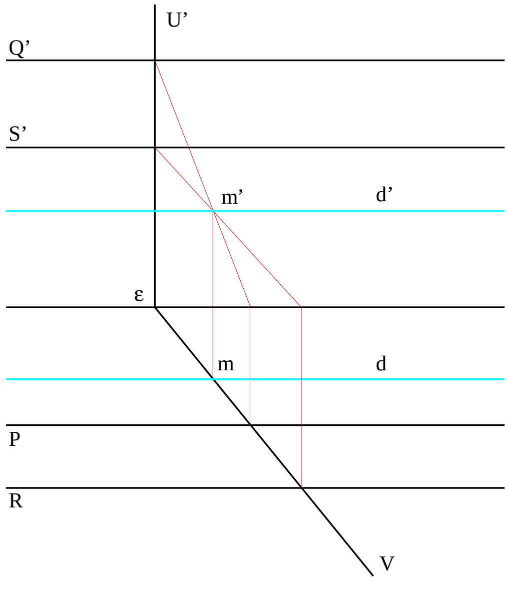
Données:





Résolution :



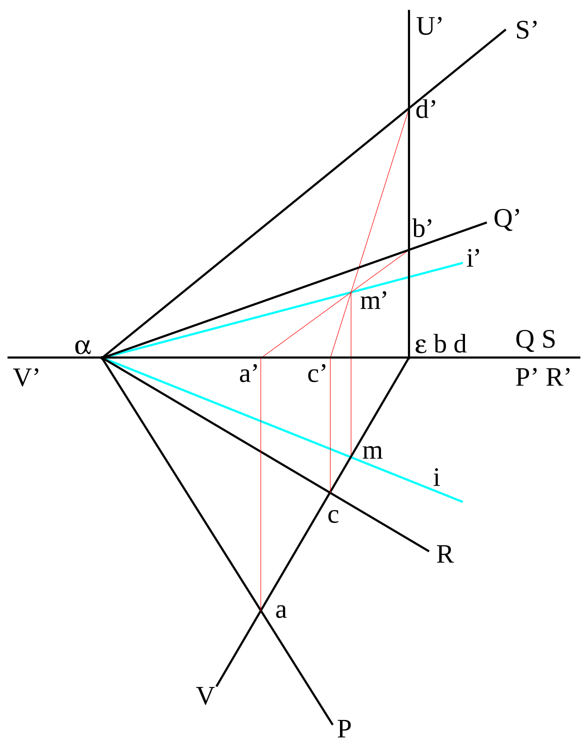


2.3.2.5 Deux plans dont les traces se coupent en un même point de la ligne de terre :

Ici encore, il n'est pas possible de déterminer l'intersection des plans par intersection des traces. Cependant, un point de l'intersection des deux plans est donné : leur point commun sur la ligne de terre. Afin de déterminer l'intersection de ces plans, il suffit donc d'en construire un deuxième point. Là encore, un seul plan auxiliaire suffit.

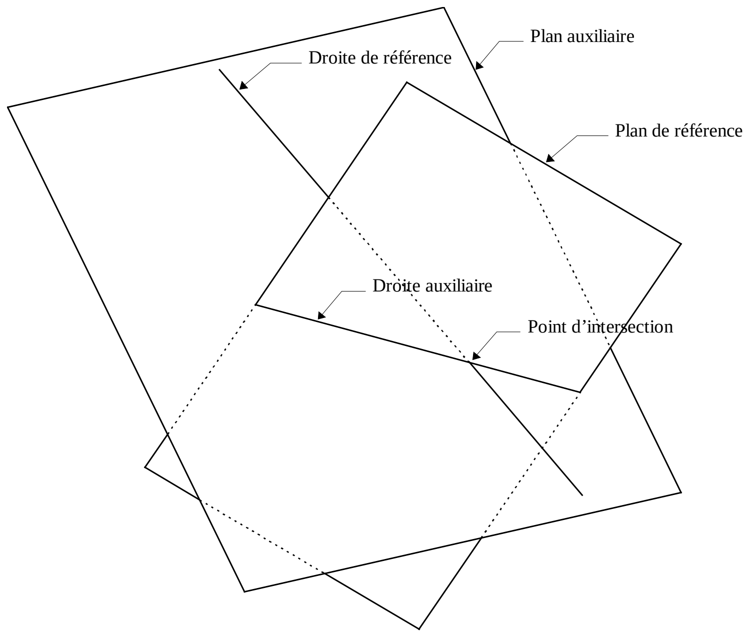
Dans l'épure ci-dessous, on recherche l'intersection entre les plans (PαQ') et (RαS'). Le point (α) est un point de cette intersection. Afin d'en déterminer un autre, on utilise un plan auxiliaire vertical (VεU').

On construit ensuite les droites (AB) et (CD) respectivement intersections de (PαQ') et de (RαS') avec (VεU'). L'intersection (M) de ces droites donne un second point de la droite (I) d'intersection recherchée.



2.4 Intersection d'une droite et d'un plan

Afin de déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan, la méthode consiste à faire passer par la droite un plan auxiliaire et à ensuite chercher l'intersection de ce plan auxiliaire avec le plan donné. Cette intersection donne une droite auxiliaire. Le point recherché est à l'intersection de cette droite auxiliaire avec la droite donnée.

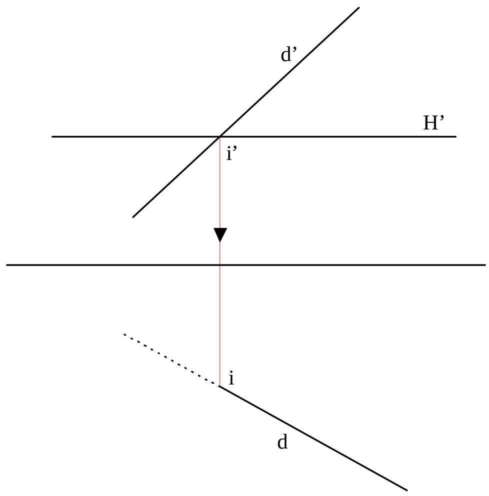


2.4.1 Le plan est parallèle ou perpendiculaire à un plan de projection :

2.4.1.1 Plan horizontal :

La construction de l'intersection d'une droite et d'un plan horizontal est immédiate en projection frontale puisque tous les points d'un plan horizontal se projettent frontalement sur sa trace frontale. Il ne reste alors qu'à rappeler la projection frontale du point d'intersection sur la projection horizontale de la droite.

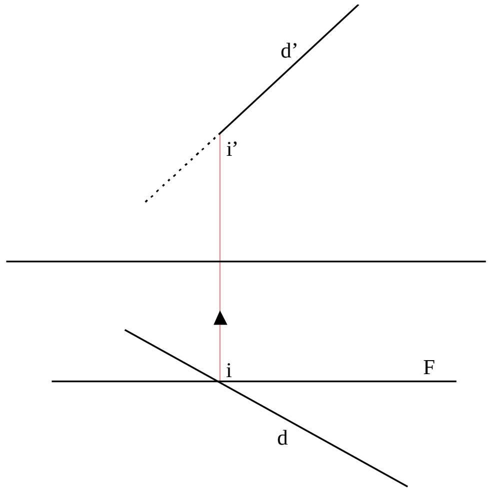
Dans l'épure ci-dessous, on considère que le plan horizontal (H) est opaque. La droite (D) est donc représentée en pointillé lorsqu'elle est masquée par le plan (H).



2.4.1.2 Plan frontal :

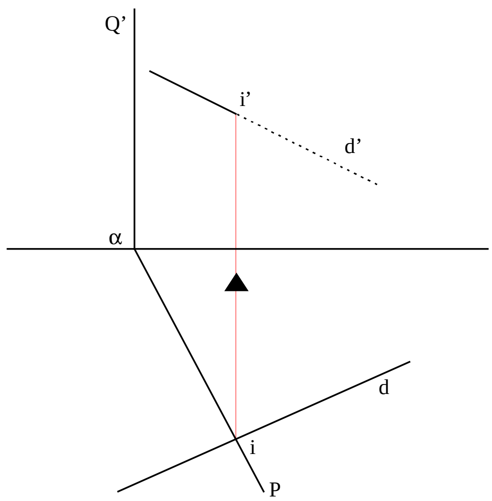
Ici l'intersection est immédiate en projection horizontale puisque tous les points du plan (F) se projettent sur sa projection horizontale.

De même, le plan (F) est considéré comme opaque.



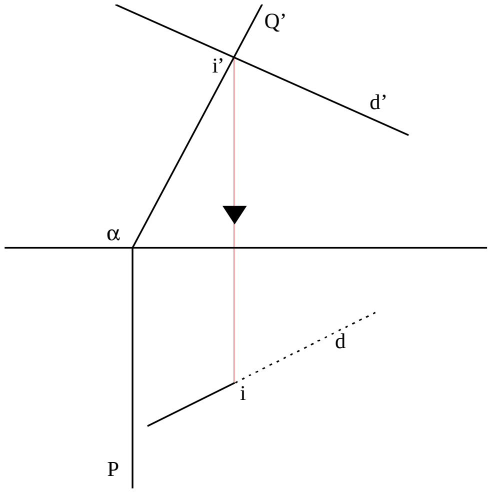
2.4.1.3 Plan vertical :

Tous les points du plan vertical (PαQ') se projettent sur sa projection horizontale. Là encore la construction de l'intersection (I) avec la droite (D) est immédiate en projection horizontale.



2.4.1.4 Plan de bout :

L'intersection entre un plan de bout (PαQ') et une droite (D) est immédiate en projection frontale.



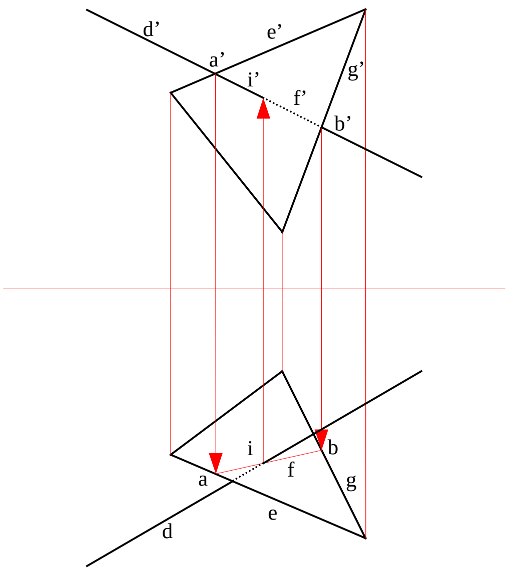
2.4.2 Le plan est quelconque

2.4.2.1 Plan défini par deux droites concourantes :

On recherche l'intersection (I) entre une droite (D) et un plan (P) défini par deux droites concourantes (E) et (G). On utilise donc la méthode du plan auxiliaire contenant la droite.

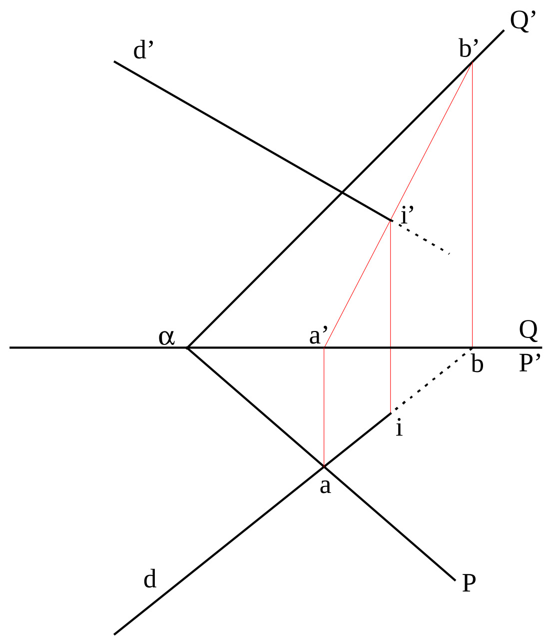
On choisira un plan auxiliaire vertical ou de bout qui projette donc la droite (D) horizontalement ou verticalement. On recherchera ensuite l'intersection de ce plan auxiliaire avec le plan (P). Le point (I) recherché est à l'intersection de cette droite (F) avec la droite (D).

Le plan (P) étant considéré comme opaque, il est nécessaire de rendre compte des parties cachées de la droite (D). Pour ce faire, on utilisera la méthode vue en 1.4.4.5. En projection frontale, la partie de la droite (D) qui est en avant de (P) sera vue; en projection horizontale, la partie de (D) au-dessus de (P) sera vue.



2.4.2.2 Le plan est défini par ses traces :

La méthode utilisée pour déterminer l'intersection (I) d'une droite (D) avec un plan (PαQ') est la même que dans le cas précédent : on recherche la droite (E) d'intersection entre le plan (P) et un plan auxiliaire vertical contenant (D). Le point (I) recherché est à l'intersection de la droite (E) et de la droite (D).



2.5 Droite et plan perpendiculaires

Rappels géométriques :

- Deux droites orthogonales se projettent sur un plan suivant un angle droit si et seulement si une des droites est parallèle au plan de projection.

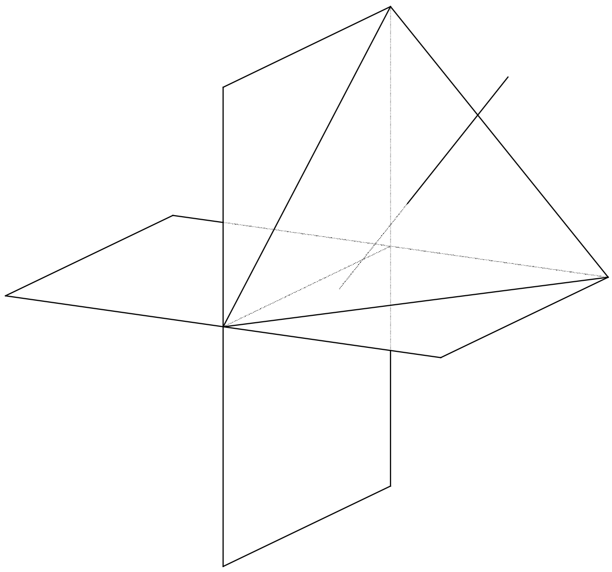
- Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites non parallèles de ce plan.

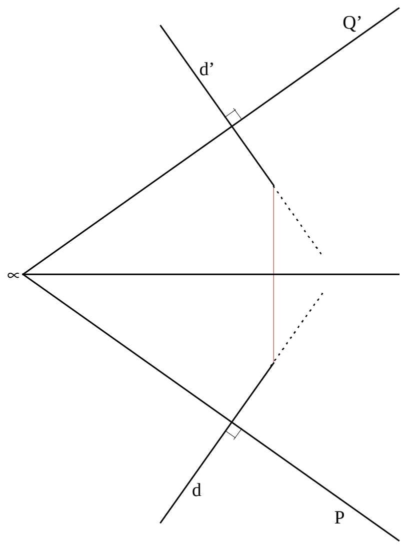
Incidence en géométrie descriptive :

Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il faut et en général il suffit :

1) que la projection horizontale de la droite soit perpendiculaire à la projection horizontale d'une horizontale du plan. (Rappel : la trace horizontale d'un plan est une des horizontales de ce plan).

2) que la projection frontale de la droite soit perpendiculaire à la projection frontale d'une frontale de ce plan. (Rappel : la trace frontale d'un plan est une des frontales de ce plan).





2.5.1 Mener par un point la droite perpendiculaire à un plan :

2.5.1.1 Le plan est défini par ses traces :

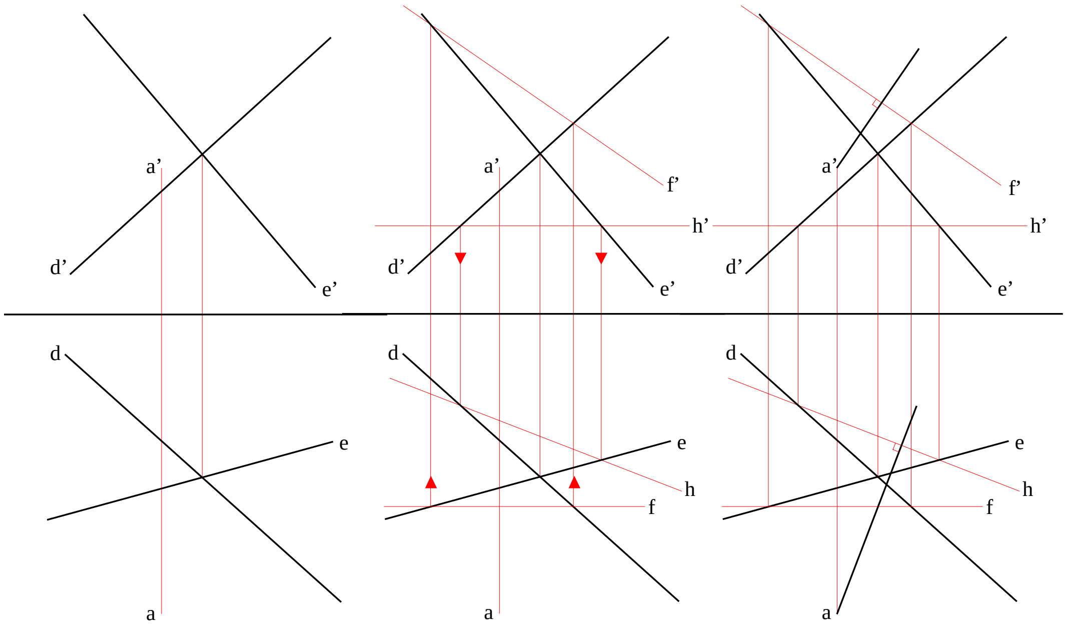
Ici, la construction est immédiate : les traces horizontale et frontale d'un plan étant des droites horizontale et frontale de ce plan, il suffit de mener par le point des perpendiculaires à ces traces.

2.5.1.2 Le plan est défini par deux droites concourantes :

Il faut d'abord se donner une horizontale et une frontale de ce plan, puis mener par le point donné une perpendiculaire à ces droites.

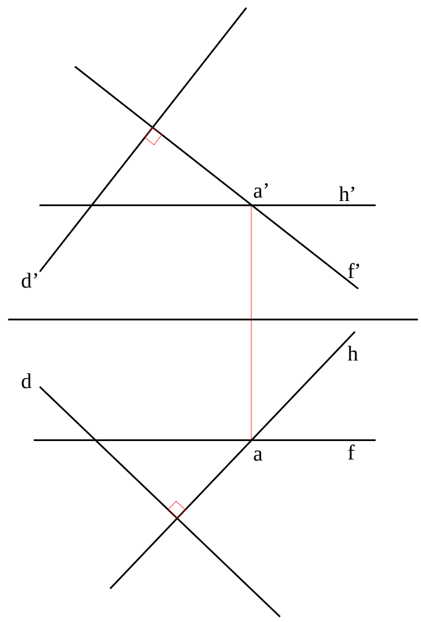
Soient le point (A) et deux droites concourantes (D) et (E) définissant un plan. On commence par se donner une horizontale (H) et une frontale (F) de ce plan. On mène ensuite par (A) une droite perpendiculaire à (F) et à (H).

Données : Construction : étape 1 étape 2



2.5.2 Mener par un point le plan perpendiculaire à une droite :

Soient (A) un point et (D) une droite de l'espace. Il suffit de déterminer le plan recherché par deux droites principales, soit une droite horizontale (H) et une droite frontale (F) sécantes en (A).



2.5.3 Mener par un point la perpendiculaire à une droite :

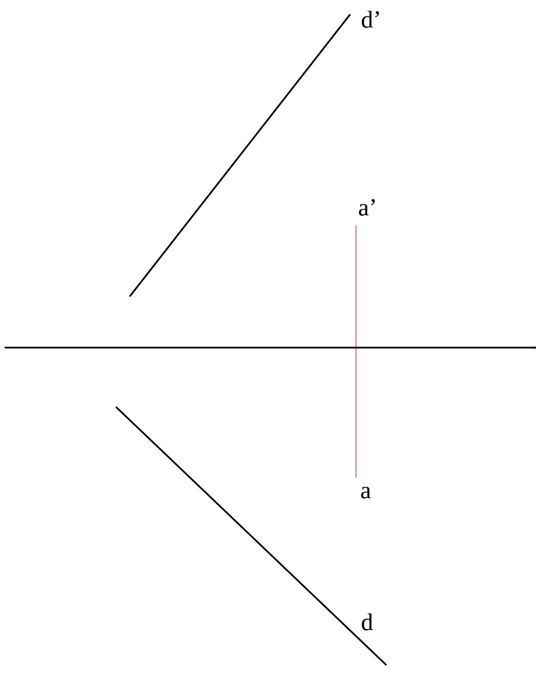
Ici, les projections de la droite (D) donnée ne sont pas nécessairement parallèles aux plans de projection. Il n'est donc pas possible de construire directement la droite perpendiculaire à celle-ci simplement en menant par (A) une droite perpendiculaire aux projections de (D). En effet, l'angle droit n'est pas conservé en projection si un des cotés n'est pas parallèle au plan de projection.

Il convient donc d'abord de construire le plan perpendiculaire à la droite (D) passant par (A) (voir ci-dessus). Toutes les droites de ce plan seront perpendiculaires à (D). Il reste alors à déterminer laquelle parmi ces droites rencontre la droite (D). Pour ce faire, il faut construire l'intersection de (D) avec ce plan qui lui est perpendiculaire passant par (A), soit un point (I).

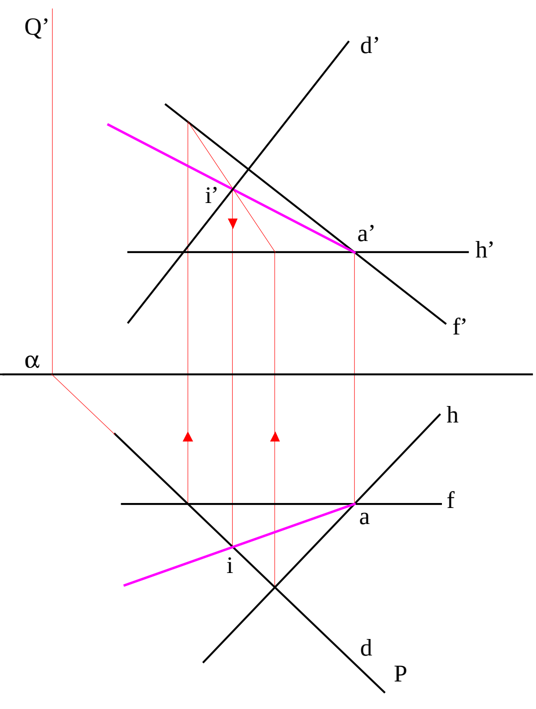
Pour déterminer (I), point d'intersection entre la droite (D) et le plan défini par les droites (H) et (F) concourantes en (A), on utilise un plan auxiliaire vertical (PαQ') projetant la droite (D) verticalement.

La droite (AI) est bien perpendiculaire à (D) et la coupe en (I).

Données :



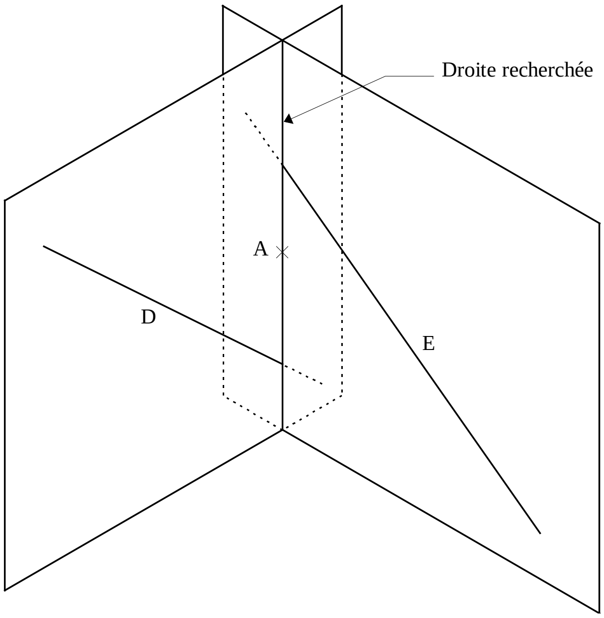
Construction :



2.6 Autres problèmes de géométrie dans l'espace

2.6.1 Recherche de la droite passant par un point et s'appuyant sur deux droites

2.6.1.1 Solution géométrique :

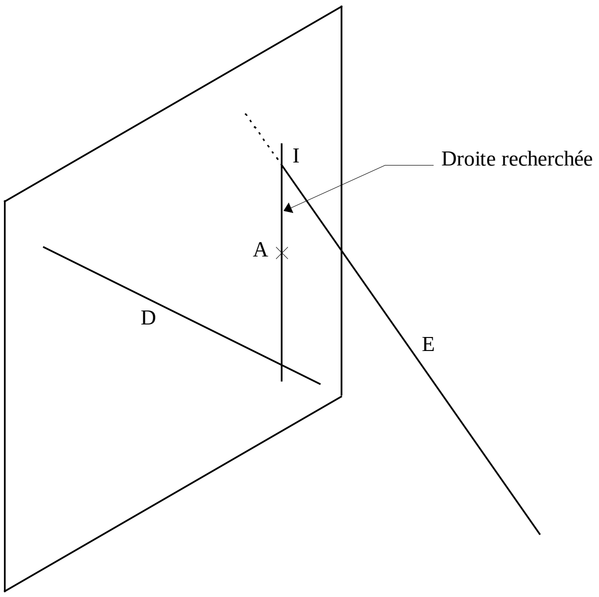


Soient (D) et (E) deux droites de l'espace et (A) un point de l'espace. On recherche la droite passant par (A) et interceptant les droites (D) et (E).

Il existe une infinité de droite passant par (A) et rencontrant la droite (D). L'ensemble de ces droites forme un plan, soit le plan défini par la droite (D) et le point (A). De même, il existe une infinité de droite passant par (A) et rencontrant la droite (E), soit le plan défini par la droite (E) et le point (A).

Ces deux plans ont nécessairement une intersection puisse qu'ils passent tous deux par le point (A). Si cette intersection n'est pas parallèle à la droite (D) ou à la droite (E), c'est la droite cherchée.

La droite qui passe par (A) et intercepte les droites (D) et (E) est donc la droite d'intersection du plan défini par la droite (D) et le point (A) avec le plan défini par la droite (E) et le point (A).



Le problème revient donc à rechercher la droite d'intersection entre deux plans. Cependant, un des points de cette droite est donné : le point (A). Il suffit donc de construire un autre point de cette intersection pour la déterminer.

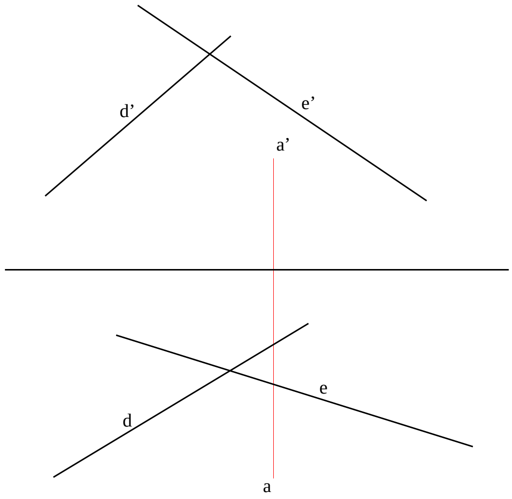
Soit (I) le point d'intersection de la droite (E) avec le plan défini par le point (A) et la droite (D).

Ce point appartient bien au plan défini par le point (A) et la droite (E) puisqu'il appartient à la droite (E). Par définition, il appartient également au plan défini par la droite (D) et le point (A).

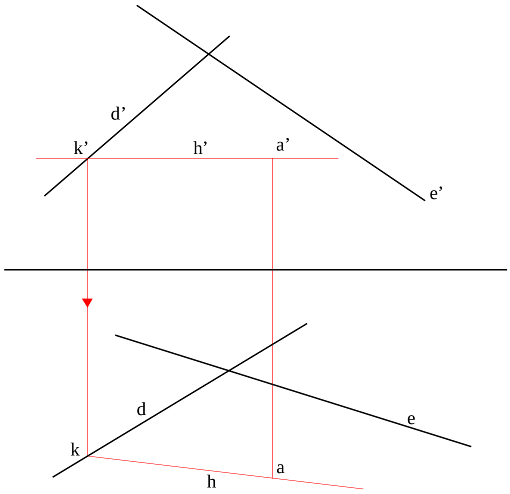
Le problème se réduit donc à rechercher l'intersection d'une des droites données avec le plan défini par l'autre droite et le point donné. La droite recherchée est la droite passant par ce point et par le point donné.

2.6.1.2 Résolution par l'épure :

Soient donc deux droites (D) et (E) et un point (A) de l'espace.

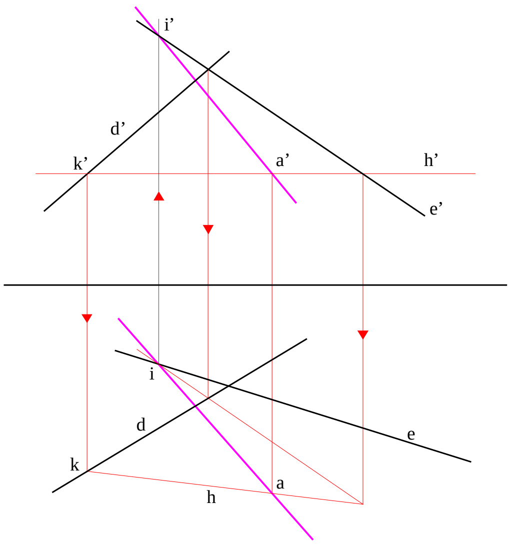


Nous allons représenter le plan défini par la droite (D) et le point (A) en nous donnant une droite horizontale (H) coupant (D) en (K) et passant par (A). Le plan est ainsi déterminé par deux droites concourantes.



Nous allons ensuite rechercher l'intersection (I) de la droite (E) avec ce plan. Pour ce faire, nous utiliserons un plan auxiliaire de bout projetant frontalement la droite (E).

Une fois ce point (I) déterminé, il ne nous reste plus qu'à représenter la droite passant par ce point (I) et le point (A) pour avoir construit la droite passant par (A) et s'appuyant sur les droites (D) et (E).



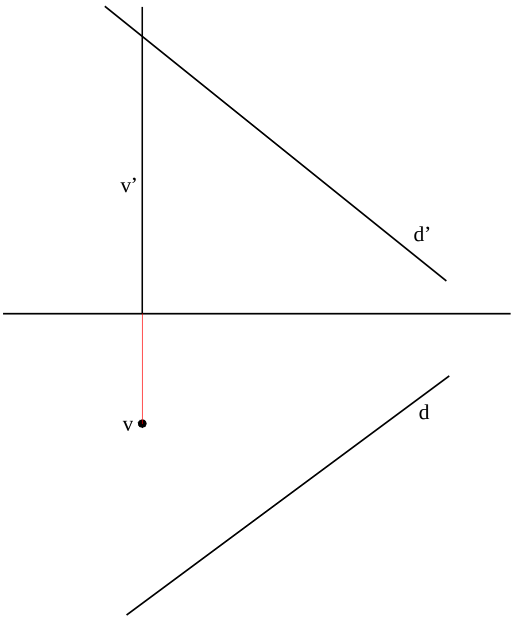
2.6.2 Recherche de la perpendiculaire commune à deux droites :

2.6.2.1 Une des droites est perpendiculaire à un plan de projection :

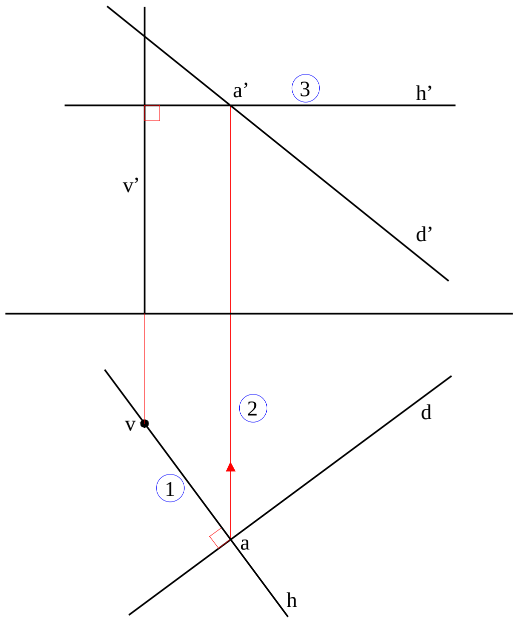
Soient les droites (D) et (V), (V) étant verticale. Si (V) est verticale, les droites qui lui sont perpendiculaires sont nécessairement horizontales. La droite (H) perpendiculaire à (D) et à (V) est donc une horizontale. D'autre part, sa projection horizontale passe par la projection horizontale de (V). La projection horizontale de la droite verticale (V) étant réduite à un point (v), la projection horizontale de la droite (H) est déterminée et coupe la droite (D) en un point (A). La projection frontale du point (A) se construit en rappelant sa projection horizontale sur la projection frontale de la droite (D).

Il ne reste alors qu'à construire en projection frontale la droite horizontale (H) passant par (A).

Données :



Construction :

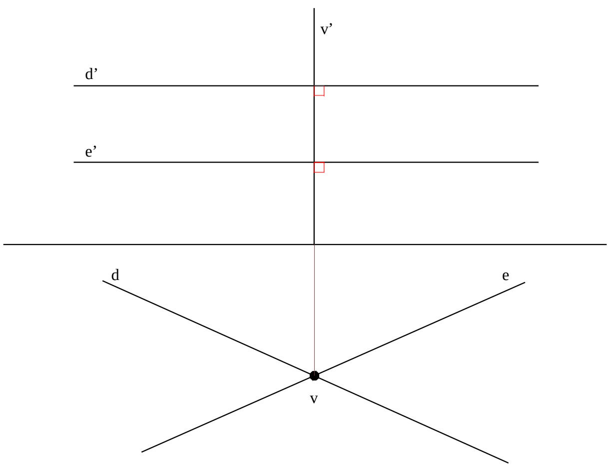


Le cas d'une droite de bout se traite de façon symétrique.

2.6.2.2 Les deux droites sont parallèles à un même plan de projection :

Soient deux droites (D) et (E) horizontales. Les perpendiculaires à (D) et à (E) sont nécessairement verticales. La droite (V) perpendiculaire à (D) et à (E) est donc verticale et sa projection horizontale est à l'intersection des projections horizontales des droites (D) et (E).

Le cas de deux droites frontales se traite de façon symétrique.



2.6.2.3 Cas général :

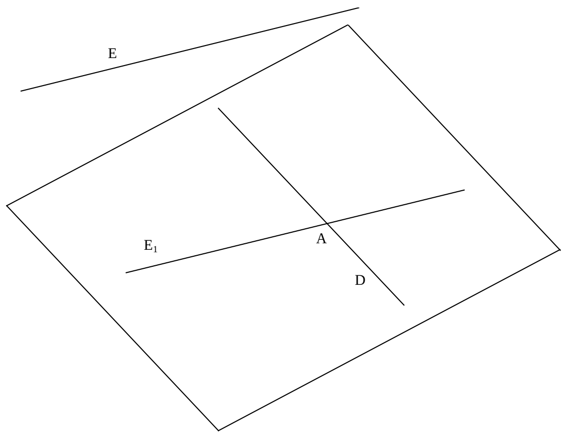
Méthode :

Soient deux droites quelconques (D) et (E) de l'espace. Nous cherchons à déterminer la droite perpendiculaire à chacune de ces deux droites.

La méthode se décompose en trois étapes :

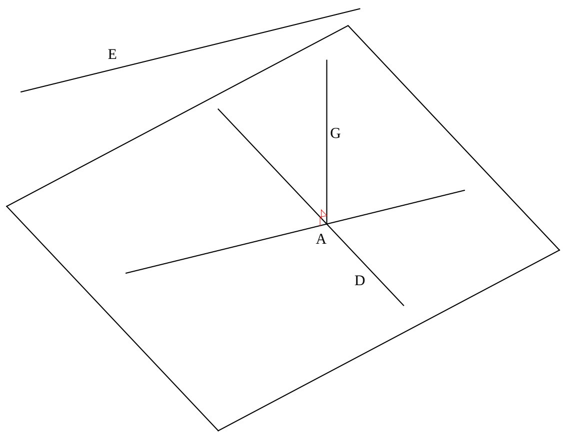
- Déterminer un plan parallèle aux deux droites données.

La droite perpendiculaire à deux droites quelconques est perpendiculaire à un plan parallèle à ces deux droites. Pour déterminer un tel plan, il suffit de mener par un point quelconque d'une des droites données une parallèle à l'autre. Choisissons par exemple de mener par un point (A) de la droite (D) une parallèle à la droite (E).



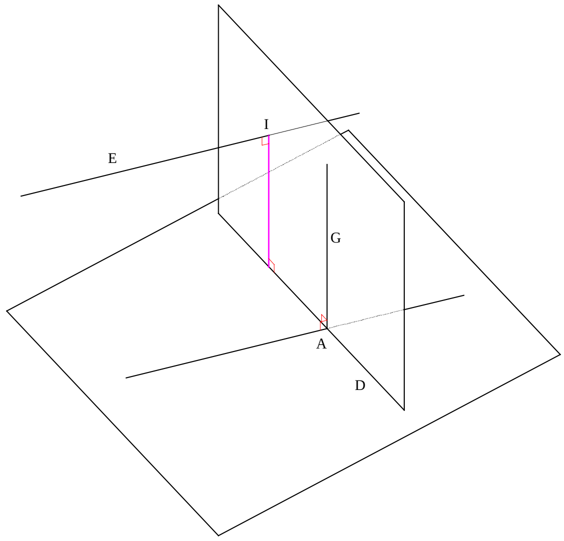
- Déterminer la direction de la droite cherchée.

Nous savons que la droite cherchée est perpendiculaire à ce plan. On construira donc une perpendiculaire à ce plan passant par (A). Cette droite (G) nous donne la direction de la droite cherchée.



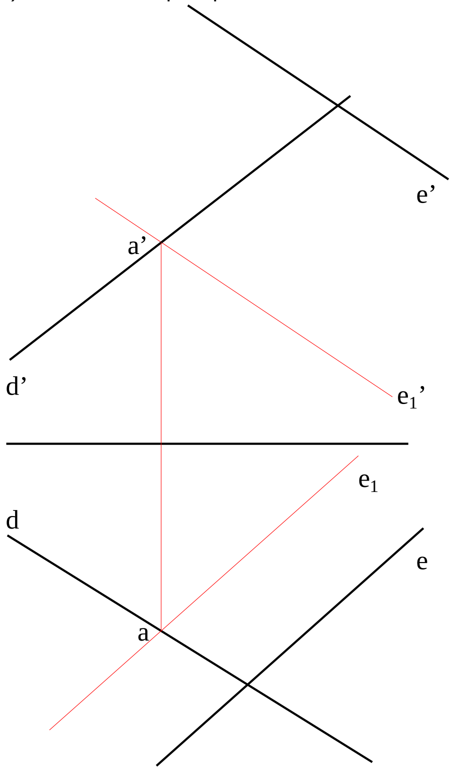
- Déterminer un point de la droite cherchée.

Considérons maintenant le plan déterminé par la droite (D) et la droite (G). Ce plan contient nécessairement la droite cherchée car il contient la droite (D) et est perpendiculaire à la droite (E). L'intersection (I) de ce plan avec la droite (E) nous donnera donc un point de la droite cherchée. Il suffit alors de mener par ce point (I) une parallèle à (G). Cette droite, de direction (G), est perpendiculaire à (D) et à (E).

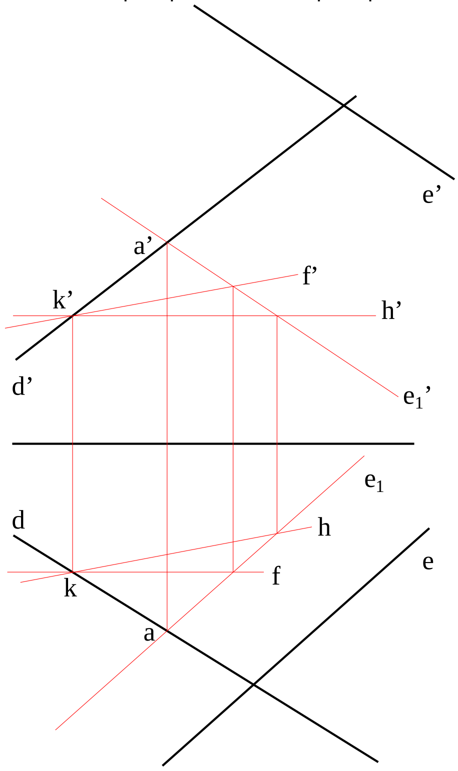


Construction dans l'épure :

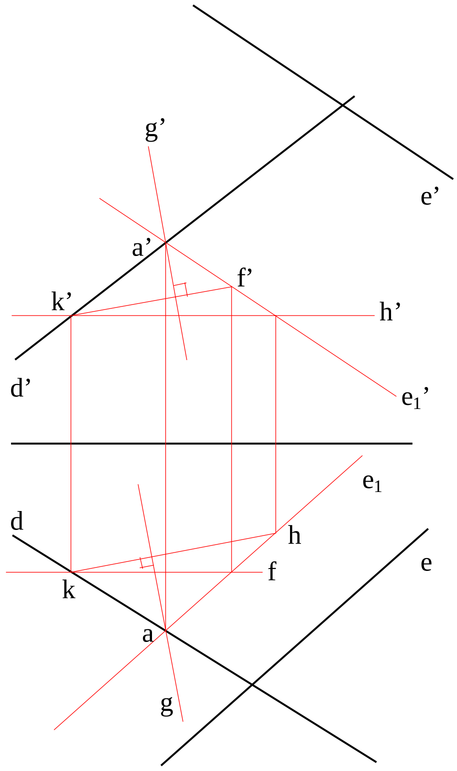
1) Déterminer un plan parallèle aux deux droites données



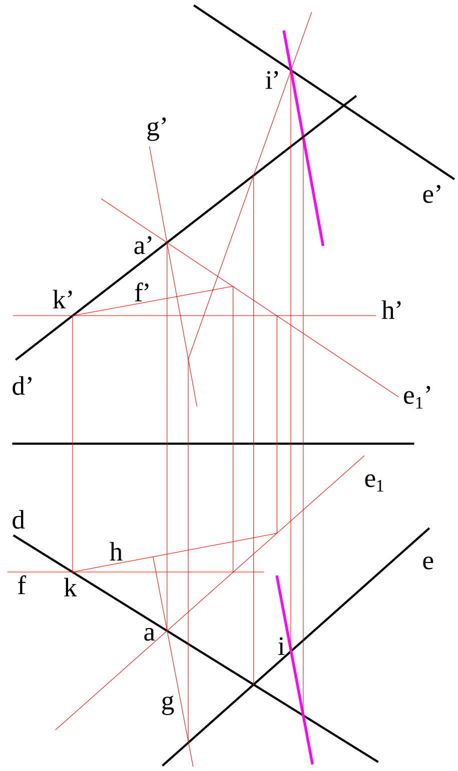
2) Déterminer le plan par ses droites principales



3) Déterminer la direction (G) de la droite recherchée



4) Déterminer le point (I) et la droite recherchée. Pour ce faire, on utilise un plan auxiliaire vertical projetant (E) horizontalement.

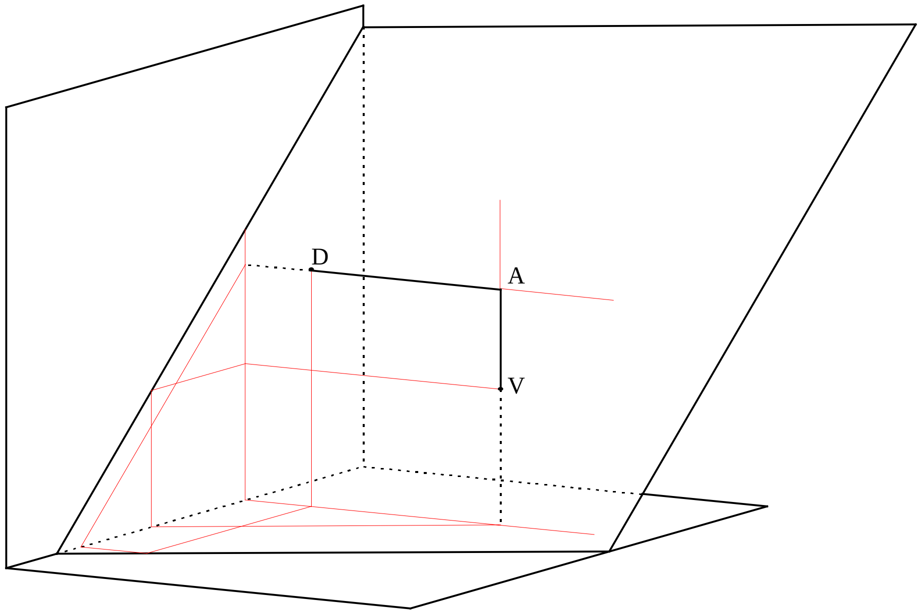


3. LES OMBRES

3.1 Ombres propres

3.1.1 Position d'un point par rapport à un plan :

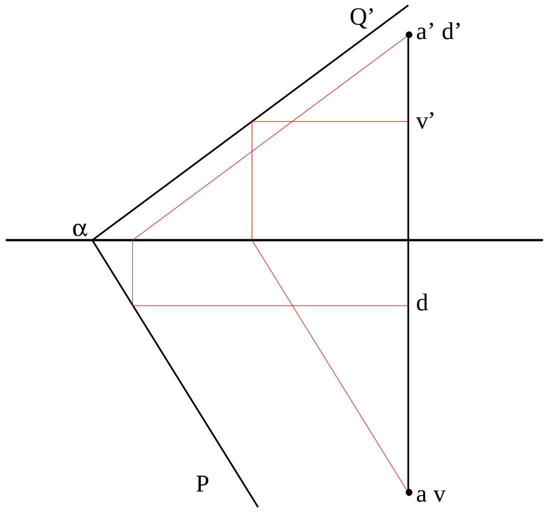
On cherche ici à déterminer la position d'un point relativement à un plan. Pour ce faire, on mène par ce point une droite de bout (perpendiculaire au plan frontal) et une droite verticale (perpendiculaire au plan horizontal), et on regarde le point de rencontre de chacune de ces droites avec le plan considéré.



On dira alors qu'un point (A) est au-dessus du plan considéré si sa cote est supérieure à la cote du point de rencontre (V) de la droite verticale issue de (A) avec ce plan. Le point (A) est dit au-dessous du plan si sa cote est inférieure à celle de (V).

De même, on dira que (A) est en avant du plan si son éloignement est supérieur à l'éloignement du point de rencontre (D) de la droite de bout issue de (A) avec ce plan, et en arrière du plan si son éloignement est inférieur à celui de (D).

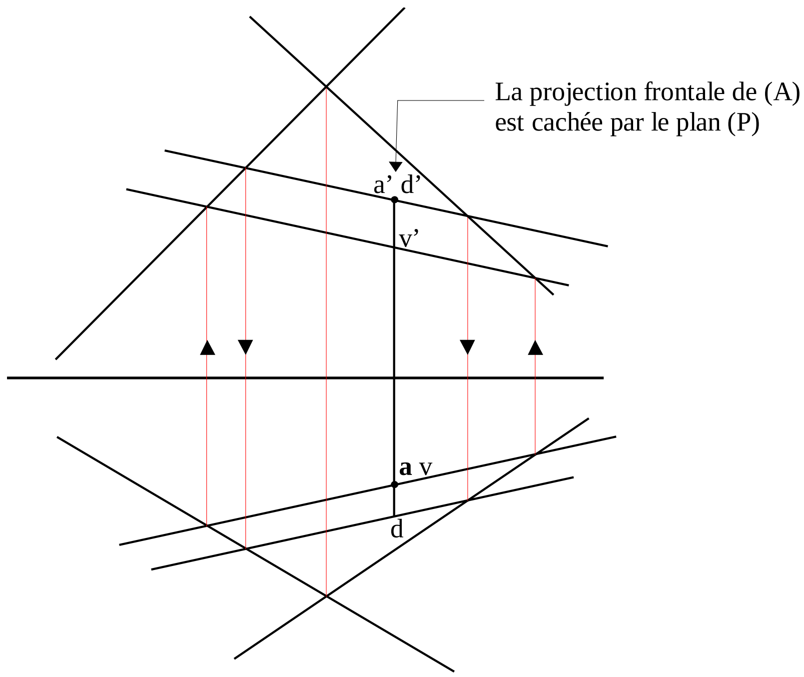
Dans cet exemple, (A) est en avant et au-dessus du plan considéré.



Cas d'un plan défini par deux droites concourantes :

Soit un plan (P) défini par deux droites concourantes et un point (A) donné. On commence donc par mener par (A) une droite de bout et une droite verticale. On recherche ensuite l'intersection de la droite de bout issue de (A) avec le plan (P), soit le point (D), et l'intersection de la droite verticale issue de (A) avec ce même plan, soit le point (V).

Dans l'épure ci-dessous, il apparaît que l'éloignement de (A) est inférieur à celui de (D), tandis que sa cote est supérieure à celle de (V). Le point (A) est donc situé au-dessus et en arrière de (P). Il sera donc vue en projection horizontale mais caché en projection frontale.

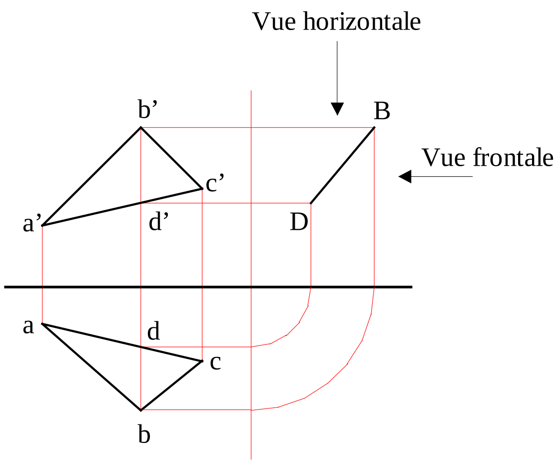


3.1.2 Faces d'un plan vues dans une épure :

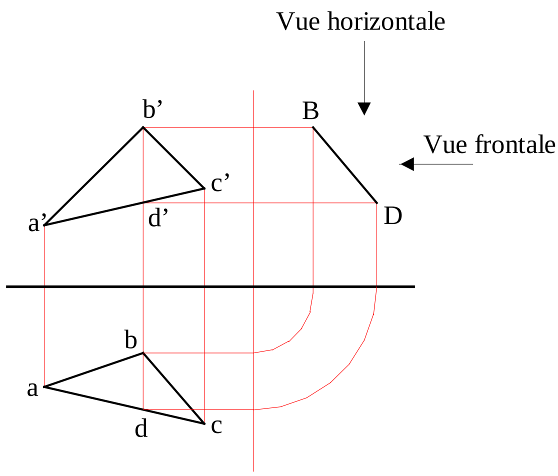
Dans la projection d'une plaque (ou d'un plan), une des deux faces de cette plaque est vue et l'autre non. Suivant la position de la plaque dans l'espace, la projection frontale et la projection horizontale peuvent montrer la même face ou montrer deux faces différentes.

Dans une épure, le moyen de déterminer si une plaque est vue par ses deux faces (une en projection frontale et une en projection horizontale) ou si les deux projections montrent la même face est le suivant :

Soit une plaque définie par trois points (ABC). On mène par un des points de la plaque - ici le point (B) - une droite de profil appartenant à la plaque. Cette droite rencontre une arête de la plaque en un point (D). Et on compare ensuite les cotes et éloignements de ces deux points. Si (B) est le point de plus grande cote et qu'il est aussi le point de plus grand éloignement, les deux faces sont vues. Si (B) est le point de plus grande cote mais aussi le point de plus petit éloignement, une seule face est vue :



Les projections sont de sens contraire.
Une face est vue en projection horizontale et l'autre face est vue en projection frontale



Les projections sont de même sens.
La même face est vue en projection horizontale et en projection frontale

Donc, si les triangles (abc) et (a'b'c') des projections horizontale et frontale sont de même sens par rapport à la ligne de terre, alors une seule face est vue dans l'épure, s'ils sont de sens contraire, alors les deux faces sont vues.

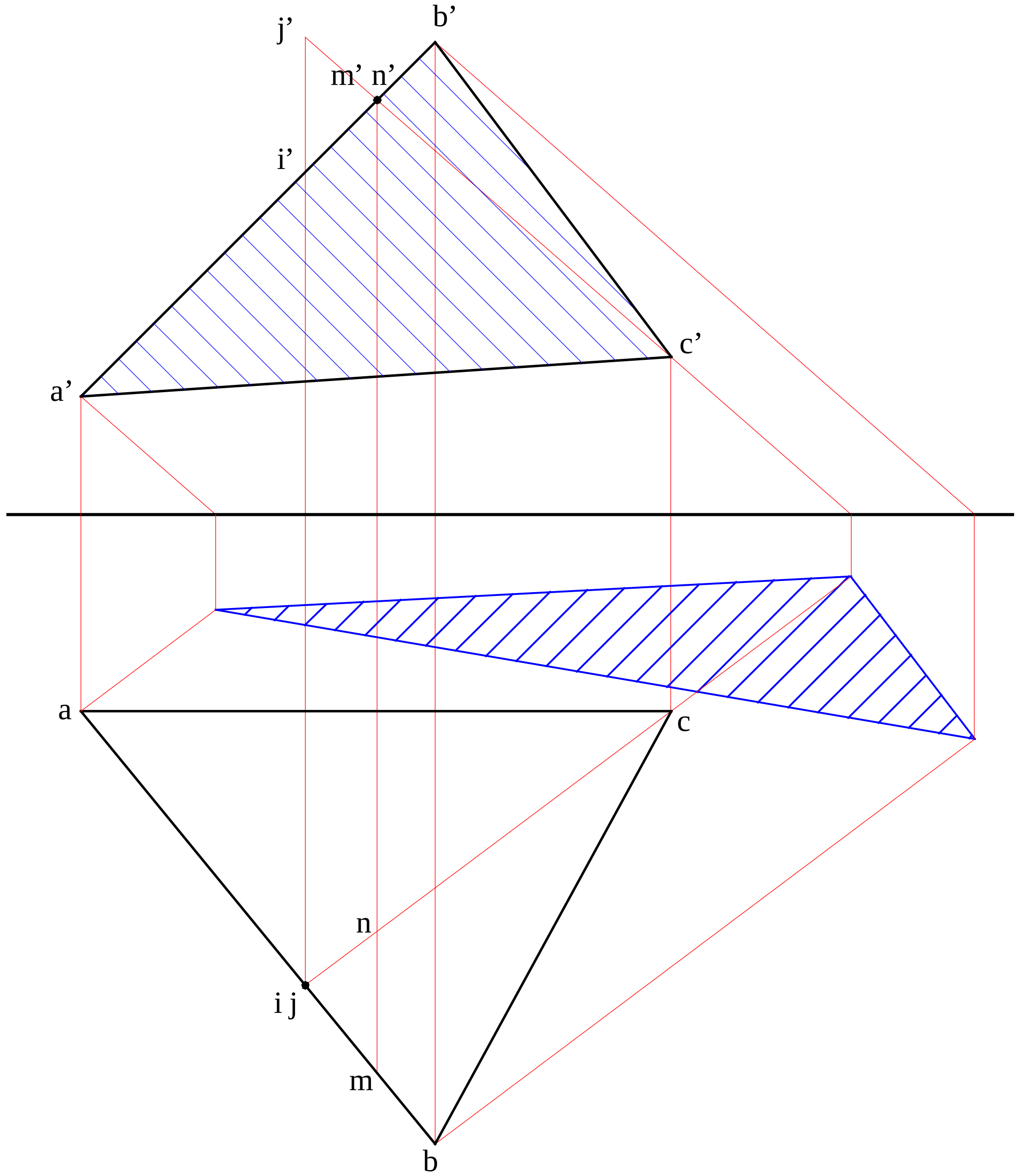
3.1.3 Ombre propre d'une plaque :

L'ombre propre d'un objet est l'ombre portée sur l'objet lui-même. Dans le cas d'une plaque éclairée, une de ses faces est éclairée et l'autre est dans l'ombre. Nous avons vu que dans une épure, lorsque les deux faces sont vues, l'une l'est dans la projection horizontale et l'autre dans la projection frontale. Il peut donc arriver qu'une des projections soit ombrée et l'autre éclairée, que les deux projections soient ombrées ou que les deux projections soient éclairées.

Afin de déterminer si dans une épure les projections d'une plaque sont ombrées ou éclairées, on commence par déterminer si les deux projections donnent à voir la même face ou si les deux faces sont vues.

On choisit ensuite l'une des projections, par exemple la projection frontale (le cas dans l'épure ci-dessous). Dans cette projection, on se donne un rayon lumineux passant par un des points de la plaque et coupant *dans cette projection* une des autres arêtes de la plaque. Il est important de noter ici que, ne travaillant que dans une des deux projections, cette intersection d'un rayon lumineux issu d'un point de la plaque avec une des arêtes de la plaque n'est qu'*apparente*. Il s'agit justement de déterminer si, en ce point d'intersection apparent, un tel rayon lumineux est *en avant* ou *en arrière* de la plaque (ou bien *au-dessus* ou *en dessous* si on a choisi la projection horizontale). On fait donc passer par ce point une droite de bout (verticale dans le cas de la projection horizontale). En ce point d'intersection apparente, un point de la droite de bout appartient au rayon lumineux (ici le point N) et un autre appartient à l'arête (ici AB) de la plaque (ici le point M). On regarde ensuite dans la projection horizontale de cette droite de bout la position respective de ces points. Dans l'épure ci-dessous, le point (M) de l'arête (AB) est en avant du point (N) du rayon lumineux. Le rayon lumineux est donc *en arrière* de la plaque. La face vue en projection frontale est donc dans l'ombre. Par ailleurs, les projections de la plaque étant de sens contraire par rapport à la ligne de terre, les deux faces sont vues et la projection horizontale de la plaque est donc éclairée.

On peut procéder symétriquement en choisissant la projection horizontale et une droite verticale (IJ).

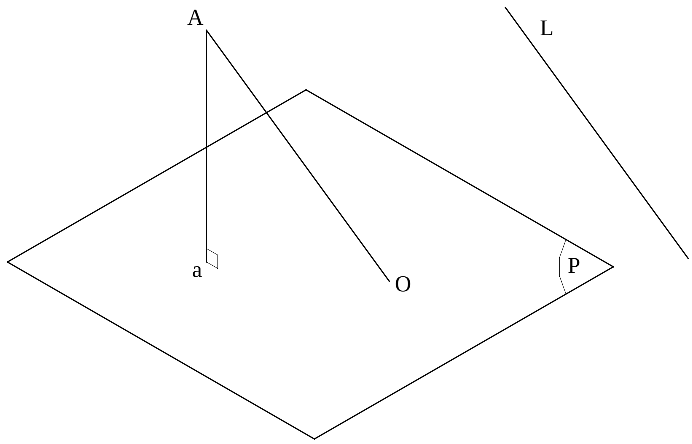


3.2 Ombres portées sur les plans de projection

3.2.1 Principe de la projection oblique

La projection oblique sur un plan se distingue de la projection orthogonale par le fait que la droite projetante (L) n'est pas orthogonale au plan de projection.

Dans la figure ci-dessous, (a) est la projection orthogonale du point (A) sur le plan (P), et (O) en est la projection oblique selon la droite projetante (L).

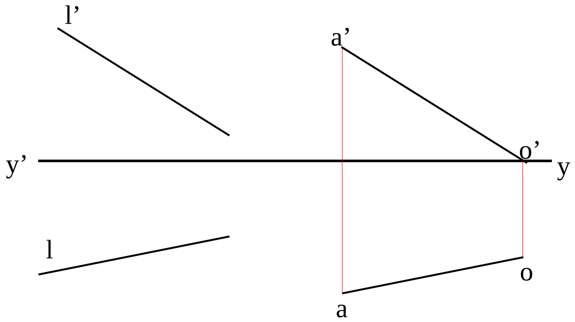


Dans l'épure ci-dessous, on recherche la projection oblique (O) du point (A) sur le plan horizontal et selon la droite projetante (L). Ceci se réalise en deux étapes :

- on mène par le point (A) une droite parallèle à (L).

- on recherche la trace horizontale de cette parallèle.

Cette trace horizontale (O) de la parallèle à (L) menée par (A) est la projection oblique selon (L) du point (A) sur le plan horizontal.

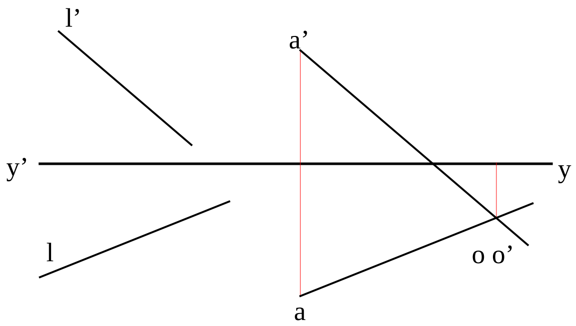


De la même façon, on construit la projection oblique du point (A) sur le deuxième bissecteur selon une projetante (L) :

- on mène par le point (A) une droite parallèle à (L).

- on recherche l'intersection de cette parallèle avec le 2ème bissecteur.

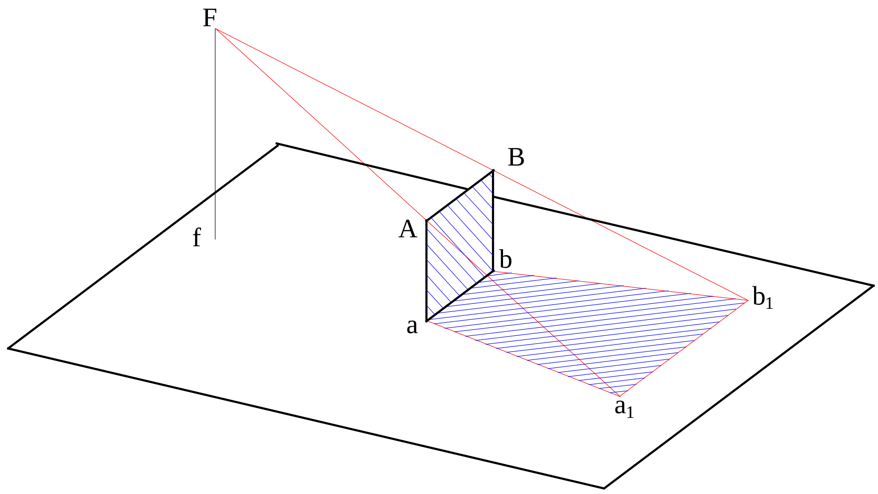
On sait que les points du deuxième bissecteur ont leurs projections confondues. L'intersection d'une droite avec le deuxième bissecteur est donc le point d'intersection de sa projection frontale avec sa projection horizontale.



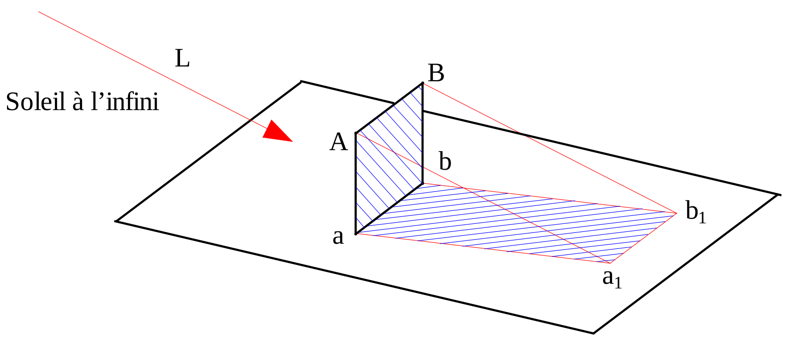
3.2.2 Application à la représentation des ombres

En géométrie descriptive, on distingue classiquement deux types d’ombres, suivant la nature de la source lumineuse.

Si celle-ci est située à une distance finie de l’objet considéré, tous les rayons lumineux partent d’un même point : la source lumineuse elle-même (le flambeau). On parle alors d’**ombre au flambeau**. Chercher l’ombre d’un objet consiste donc à chercher l’intersection des droites issues de la source lumineuse et passant par les sommets de l’objet avec les plans de projection ou avec un plan quelconque considéré comme opaque.



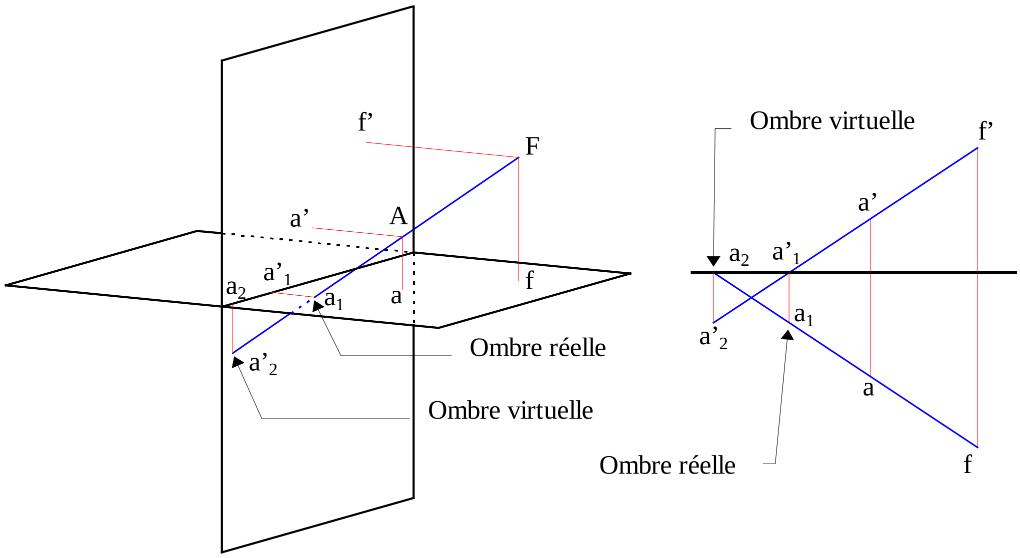
Si la source lumineuse est située à l’infini, créant ainsi des ombres similaires à celles du soleil, les rayons lumineux sont parallèles entre eux. Dans ce cas, chercher l’ombre d’un objet consiste à en faire une projection oblique selon la direction de la source lumineuse sur les plans de projection ou sur un plan quelconque considéré comme opaque.



3.2.2.1 Ombre d’un point (flambeau) :

Soit (A) un point donné du premier dièdre, et (F) un flambeau appartenant également au premier dièdre. On recherche ici l’ombre du point (A) sur les plans de projections, considérés comme opaque. L’ombre d’un point est également un point. Le point (A) aura donc deux ombres : l’une sur le plan horizontal et l’autre sur le plan frontal, mais une seule sera “vue”.

Le premier plan de projection rencontré par la droite issue de (F) et passant par (A) portera l’ombre **réelle**, c’est-à-dire vue, tandis que l’autre plan de projection portera l’ombre **virtuelle**.



3.2.2.2 Ombre d'un segment (AB) (soleil) :

On recherche ici l'ombre sur les plans de projections d'un segment (AB) situé dans le premier dièdre. La direction des rayons lumineux est celle de la droite (L).

Cette construction se décompose en deux temps :

- on recherche d'abord l'ombre (la projection) du segment sur un des plans de projection (ici le plan horizontal) en menant par (A) et (B) des parallèles à (L).

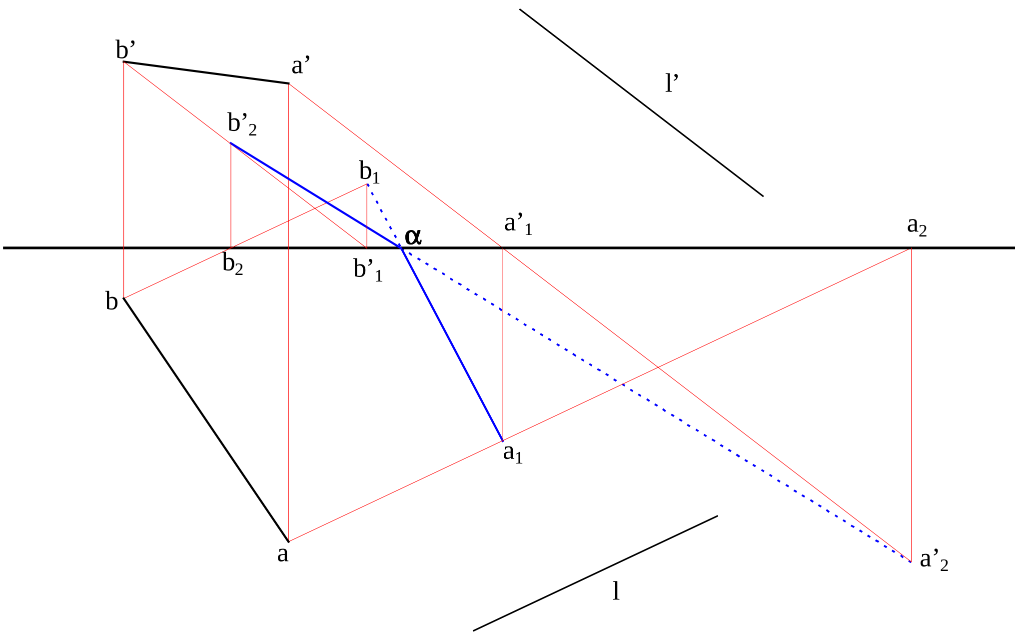
- Soit (A_1B_1) l'ombre sur le plan horizontal du segment (AB). Ici trois cas peuvent se produire :

- (A_1B_1) est entièrement dans le 1er dièdre, et dans ce cas l'ombre sur le plan horizontal sera entièrement réelle et l'ombre sur le plan frontal sera entièrement virtuelle.

- (A_1B_1) est entièrement dans le second dièdre. L'ombre horizontale est entièrement virtuelle et l'ombre frontale entièrement réelle.

- (A_1B_1) appartient en partie au 1er dièdre et en partie au second dièdre (c'est le cas dans l'épure ci-dessous). L'ombre horizontale coupe donc la ligne de terre en un point (α). Une partie de cette ombre, ici ($A_1\alpha$), sera réelle et l'autre partie, (αB_1), virtuelle car située en arrière du plan frontal. On a donc affaire à un **ressaut d'ombre** sur le plan frontal. Le point (α) appartient à l'ombre de (AB) sur le plan horizontal et à l'ombre de (AB) sur le plan frontal.

Il reste donc à construire le ressaut d'ombre sur le plan frontal. Pour se faire il n'est nécessaire que de construire l'ombre sur le plan frontal du point (B), soit (B_2).

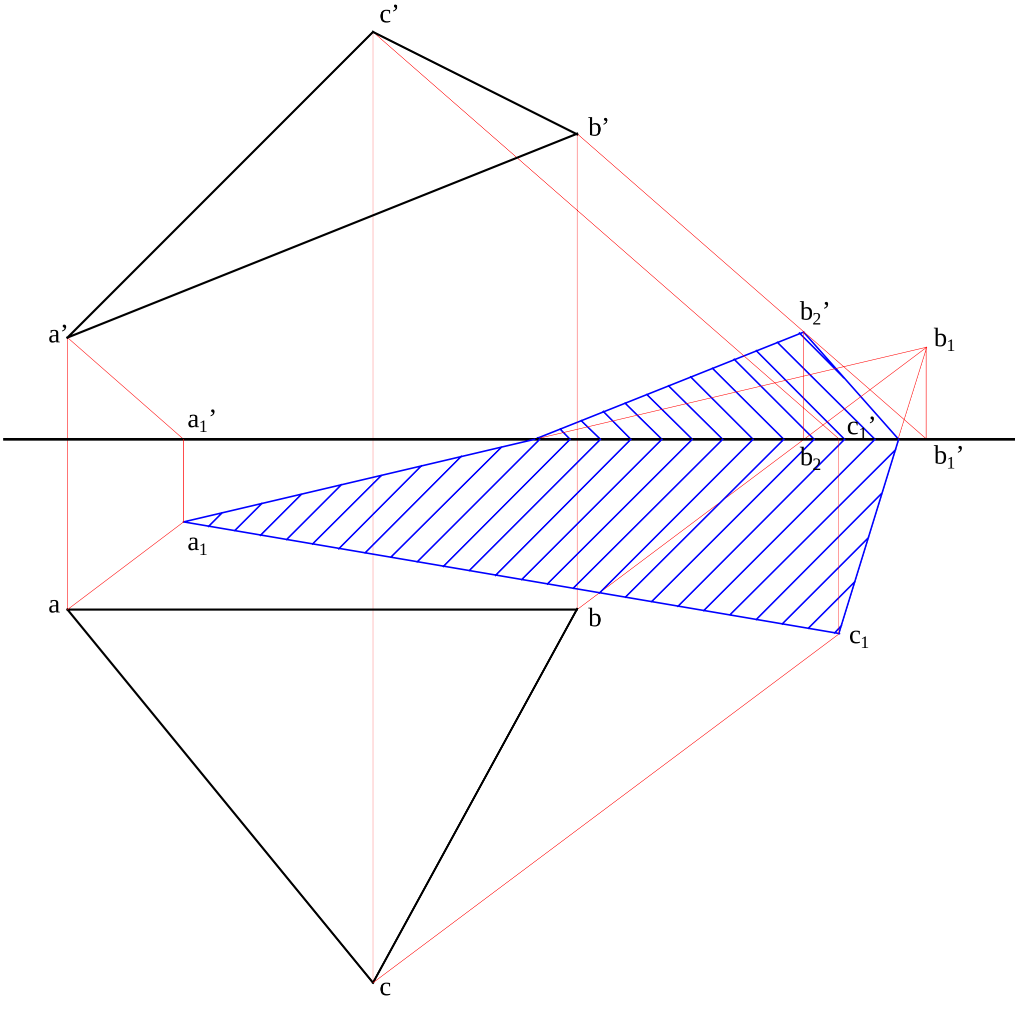


3.2.3 Ombre d'une plaque sur les plans de projection :

Soit une plaque définie par 3 points (ABC). On cherche son ombre sur les plans de projection, ceux-ci étant considérés comme opaques. De même que dans le cas d'un segment (cf 2.3.4.2.5), une plaque peut porter ombre soit entièrement sur le plan horizontal, soit entièrement sur le plan frontal, soit sur les deux plans de projections et dans ce cas on aura affaire à un ressaut.

On commence donc par rechercher l'ombre sur un des plans de projection (ici le plan horizontal), puis on complète éventuellement cette ombre dans l'autre plan.

Dans l'épure ci-dessous, le point (B) porte ombre sur le plan frontal en (B_2).



3.3 Ombres portées par la méthode du point de perte

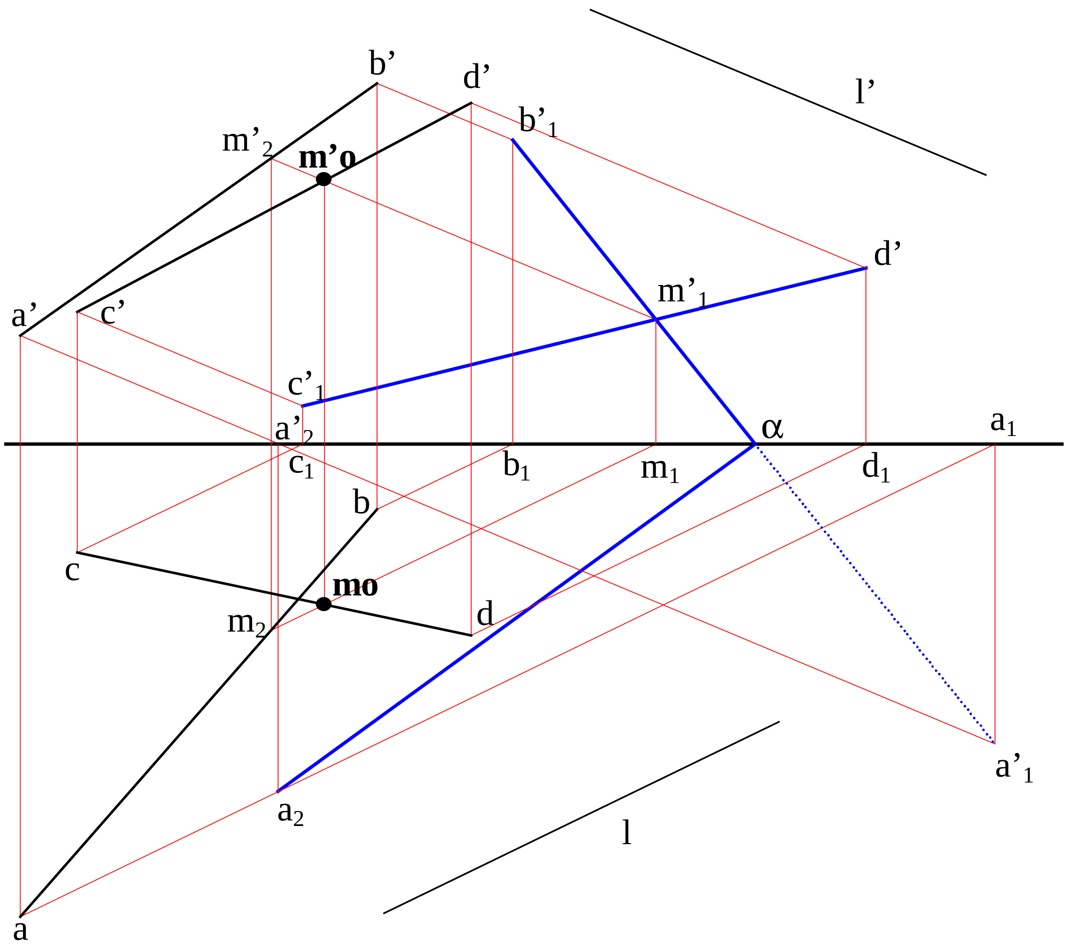
3.3.1 Ombre d'une droite sur une autre droite :

Soient (D) et (E) deux droites non coplanaires. On cherche ici à définir si une droite porte une ombre sur l'autre et si oui en quel point.

La méthode consiste à projeter sur un des plans projection (ici le plan frontal) l'ombre des deux droites selon la direction des rayons lumineux (L). Si ces ombres se coupent, alors une des droites porte ombre sur l'autre, et le point d'intersection des ombres (M_1) s'appelle **point de perte**.

On trouve alors, par retour inverse de la lumière à partir du point de perte, le point qui porte ombre (M_2) et le point d'ombre (M_0).

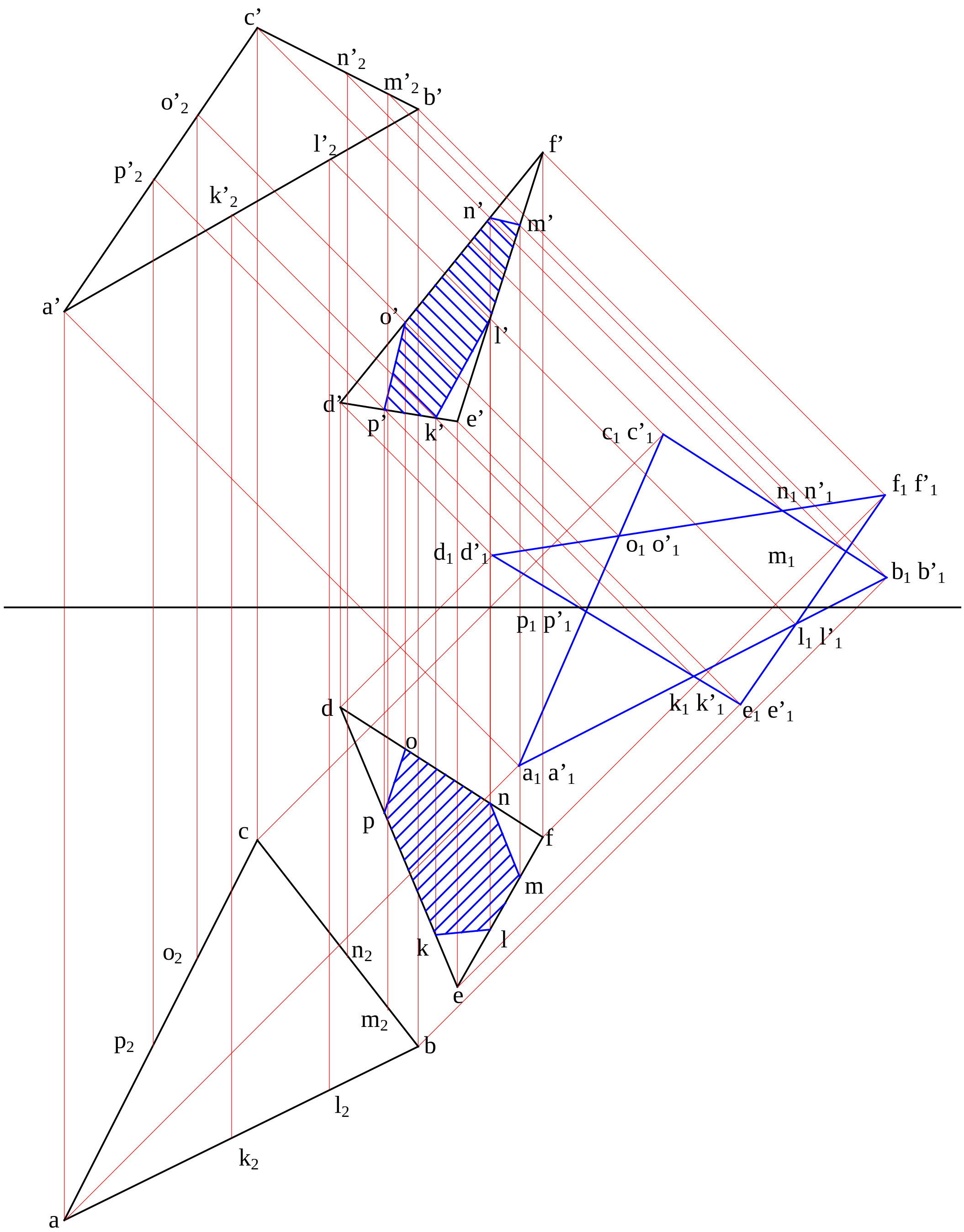
Dans l'épure ci-dessous, il est par ailleurs nécessaire de compléter le ressaut de l'ombre de la droite (AB) sur le plan horizontal.



3.3.2 Ombre d'une plaque sur une autre plaque

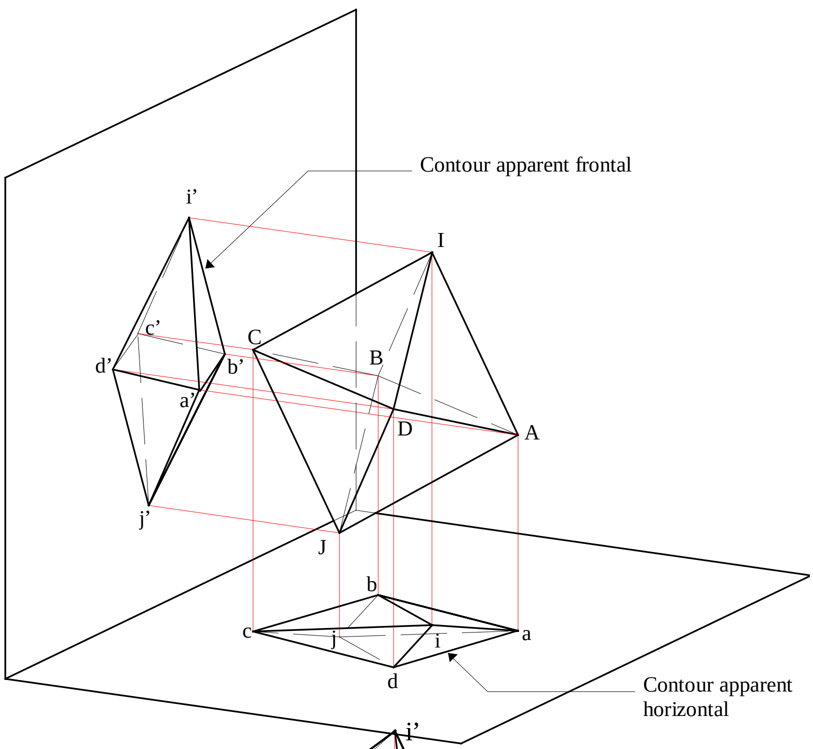
Soient deux plaques (ABC) et (DEF) dans l'espace. On recherche ici si une plaque porte ombre sur l'autre. La méthode employée est tout à fait similaire à la recherche de l'ombre d'une droite sur une autre vue en 2.3.4.2.6.

On construit l'ombre des deux plaques sur un plan de projection (ici le deuxième bissecteur) en les projetant suivant une direction parallèle au rayon lumineux. Si ces deux ombres se coupent, alors une plaque porte ombre sur l'autre. Pour déterminer les points d'ombre, on mène par les points de perte (points d'intersection des ombres, ici les points K, L, M, N, O et P) des parallèles au rayon lumineux et par retour inverse de la lumière on construit ces points sur les plaques.



4. LES POLYÈDRES

4.1 Représentation :



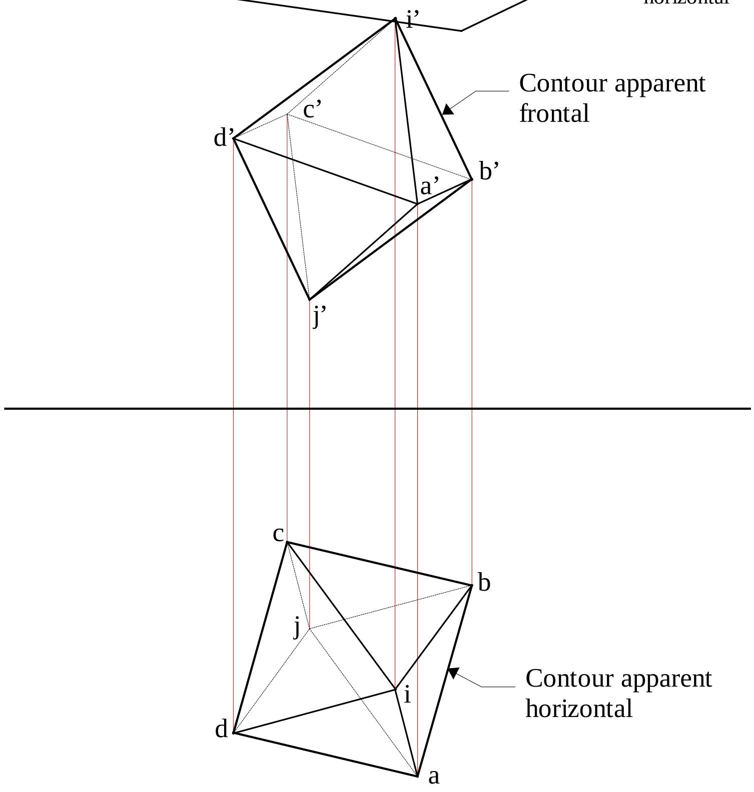
Ponctuation :

Son but est de distinguer les parties vues des parties cachées.

Un sommet du polyèdre peut être vu dans une des deux projections et caché dans l’autre.

Le polygone convexe qui contient la portion du plan de projection où se projettent tous les sommets du polyèdre s’appelle le contour apparent.

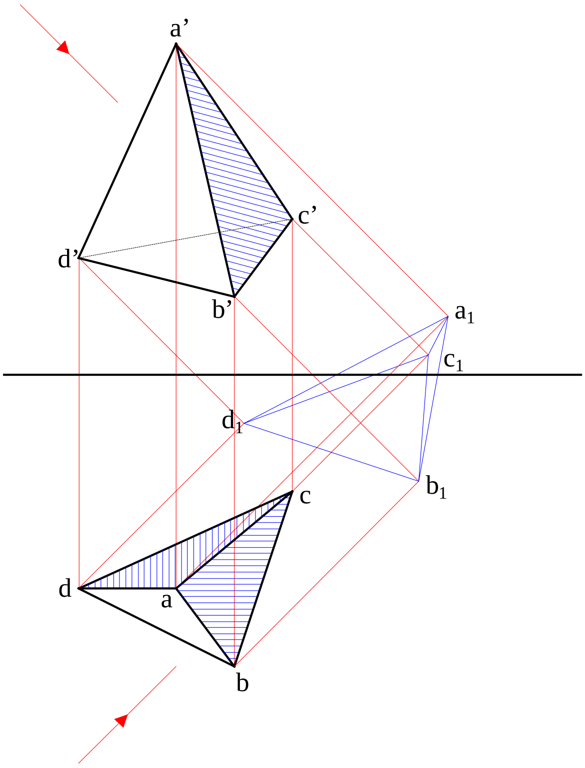
Il y a donc un contour apparent horizontal et un contour apparent frontal. Ces contours sont toujours vus dans les plans de projection correspondants et ils séparent les parties vues des parties cachées.



En projection horizontale, les faces ayant la plus grande cote sont vues; et en projection frontale , les faces vues ont le plus grand éloignement.

4.2 Ombres propres :

4.2.1 Le point de perte

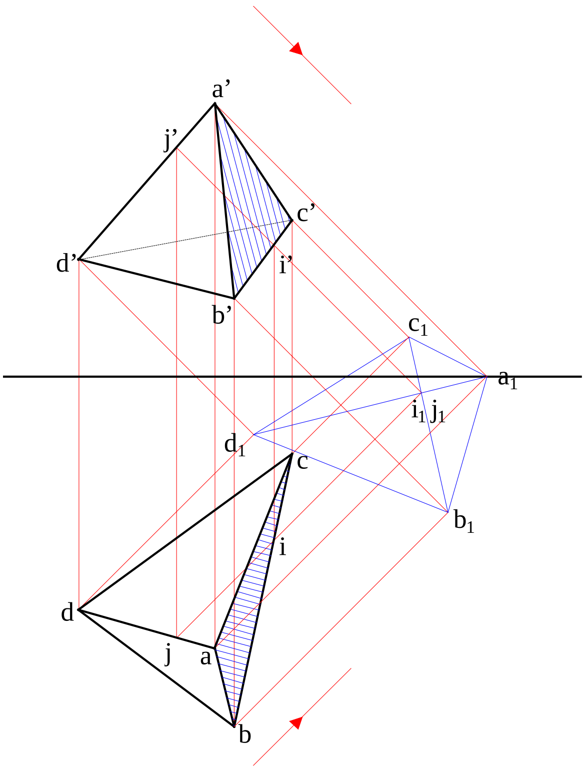


Pour déterminer les ombres propres, d'un prisme ou d'une pyramide, on peut procéder face par face selon la méthode de détermination des ombres propres des plaques. Il est également possible de déterminer les ombres propres en construisant d'abord les ombres portées sur un plan quelconque. On choisira si possible le 2ième bissecteur.

L'ombre portée est un polygone contenant en son intérieur tous les sommets du polyèdre. De la même façon que le contour apparent, ce polygone d'ombre sépare les parties éclairées des parties ombrées.

Par retour inverse de la lumière à partir du polygone d'ombre, on trouve les ombres propres du polyèdre.

Dans le cas ci-contre, la face (ABD) porte ombre sur les faces (ABC) et (ACD).

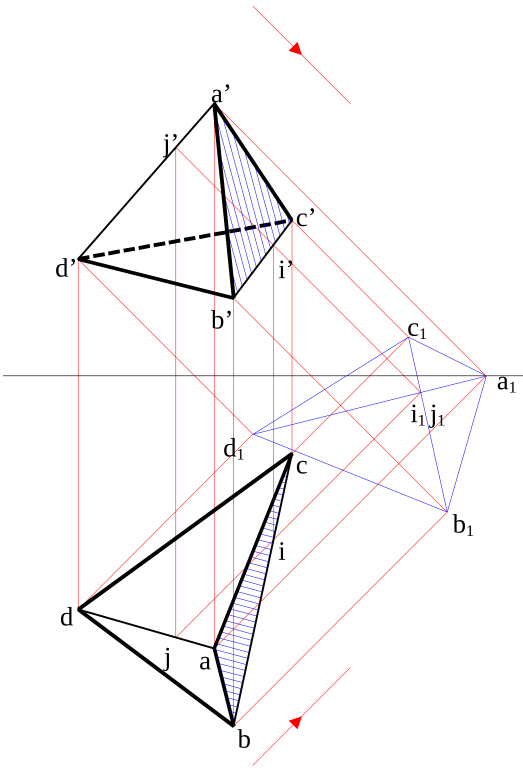


Si par contre aucune ombre portée ne recouvre les autres, il est nécessaire de déterminer, à partir du point de perte intérieur au contour apparent de l'ombre, quelle arête porte ombre sur l'autre. On procède par retour inverse de la lumière à partir de ce point.

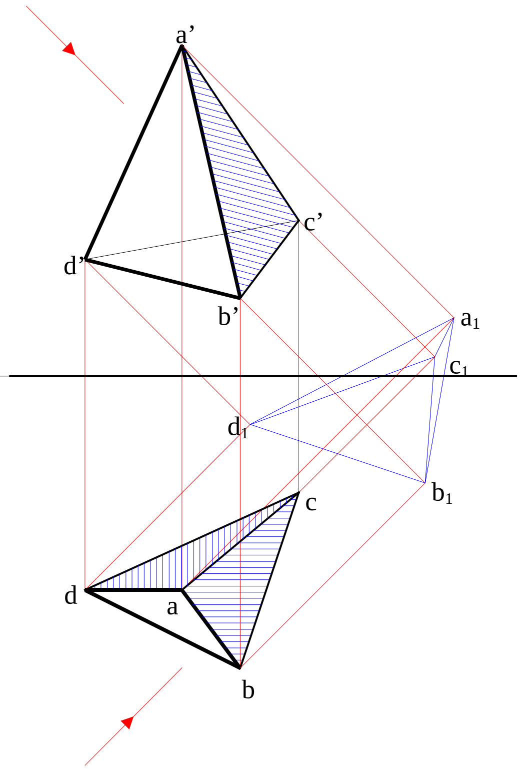
Dans le cas ci-contre, l'arête (AD) porte ombre sur l'arête (CB).

4.2.2 La séparatrice d'ombre propre

La partie ombrée et la partie éclairée d'un polyèdre convexe sont séparées par un contour fermé, appelé **ligne séparatrice d'ombre propre**. Elle est la ligne de contact, avec le polyèdre, de tous les rayons lumineux tangents.
La projection de cette ligne sur un plan quelconque donne **l'ombre portée du polyèdre**. L'ombre portée est une projection oblique de la séparatrice.
Pour déterminer l'ombre propre d'un polyèdre, on peut donc représenter son ombre portée sur un plan quelconque (le second bissecteur par exemple), et reporter le contour d'ombre portée sur le polyèdre. Parmi es deux parties obtenues, la plus proche de la source lumineuse est éclairée alors que l'autre est ombrée.



La ligne ACDB sépare les faces éclairées ABD et ACD des faces ombrées ABC et BCD. Une fois la ligne tracée, on peut distinguer la partie éclairée de la partie ombrée en appliquant la méthode du point de perte à un point particulier.



La ligne ABD sépare la face éclairée ABD, la plus proche de la lumière, des autres faces, qui sont ombrées

5. MÉTHODES

Rappelons ici que la géométrie descriptive a pour vocation de représenter *sans ambiguïté* les objets en trois dimensions dans les deux dimensions de la feuille de papier et que cet objectif est atteint par une double représentation bi-dimensionnelle des objets (les projections horizontale et frontale) rendue cohérente par les lignes de rappel.

Les deux projections planes d'un ou de plusieurs objets en trois dimensions que met en place la géométrie descriptive permettent donc de les décrire totalement. Cependant, il est parfois nécessaire de modifier ou d'enrichir cette représentation afin de traiter certains problèmes, comme notamment les problèmes métriques (longueurs et angles réels).

Les méthodes décrites ici permettent donc de **modifier la représentation des objets** afin d'amener les figures dans des positions particulières (en général parallèles à un plan de projection).

La représentation des objets étant, en géométrie descriptive, dépendante des plans de projections (le plan horizontal et le plan frontal), la première méthode permettant de modifier la représentation des objets consiste à changer de plan de projection.

L'autre façon de modifier la représentation des objets est d'agir sur les objets eux-mêmes, sans modifier les plans de projection. On distinguera ici les rotations et les rabattements.

5.1 Changements de plans de projection

Les changements de plans de projection permettent de modifier la représentation des objets sans agir sur les objets eux-mêmes.

Le but est de construire une nouvelle représentation des objets permettant par exemple de les voir en vraie grandeur. On se donnera donc un nouveau plan horizontal ou/et un nouveau plan frontal de projection parallèle à la figure que l'on souhaite voir en vraie grandeur.

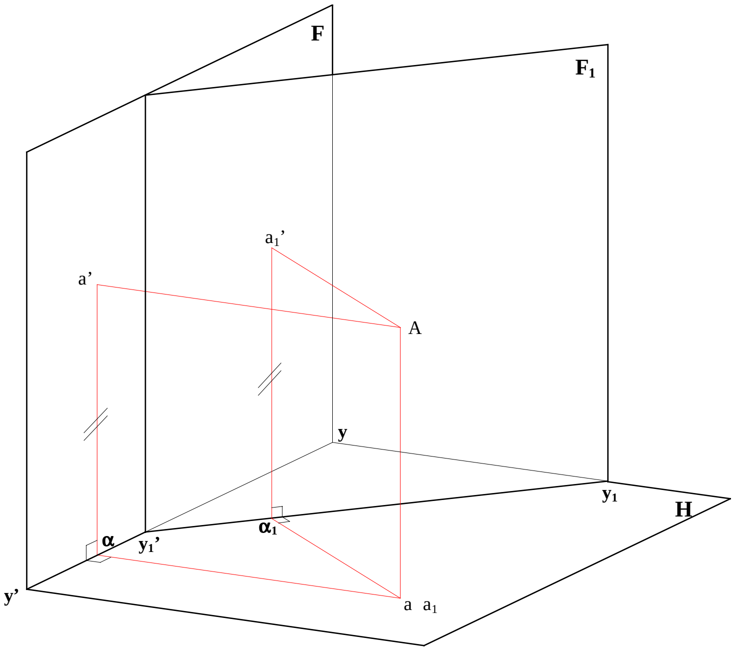
Pour expliciter la démarche, nous allons voir comment s'opère un changement de plan frontal puis un changement de plan horizontal pour un point; et ensuite nous appliquerons la méthode à une droite afin de la voir en vraie grandeur.

5.1.1 Changement de plan frontal de projection

On se donne un nouveau plan de projection frontal (F_1), ce nouveau plan étant perpendiculaire au plan de projection horizontal (H). On se donne donc ainsi une nouvelle ligne de terre (x_1y_1). Le plan horizontal étant inchangé, les cotes et les projections horizontales sont inchangées.

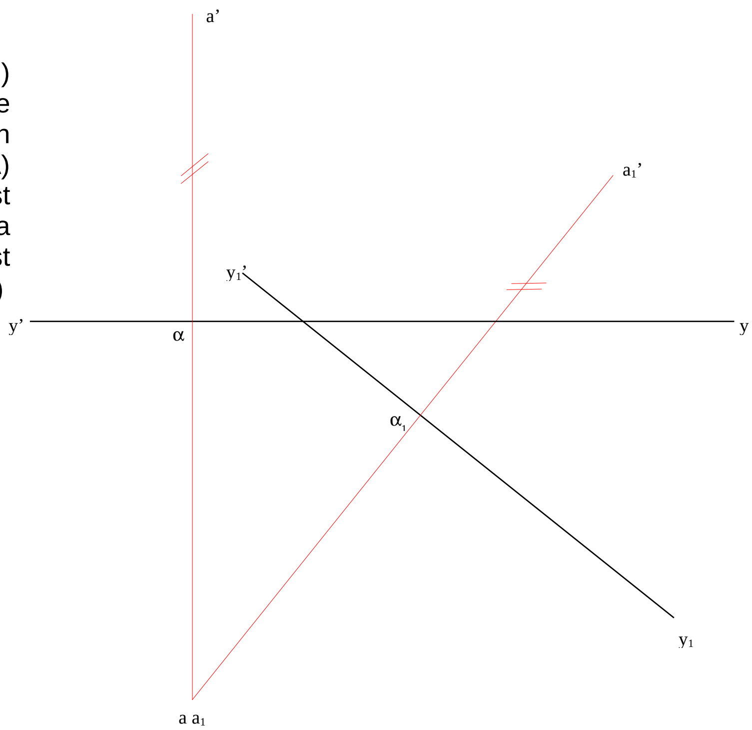
Dans l'espace :

Le point (A) n'est pas modifié. On se donne un nouveau plan de projection frontal (F1) perpendiculaire au plan horizontal de projection (H). La projection horizontale du point (A) est inchangée et sa cote est conservée.



Epure :

La représentation (a a') du point (A) est changée en (a_1 a'_1). La projection horizontale du point (A) est inchangée : (a) est confondu avec (a_1) et la cote du point (A) est conservée : (αa') = ($\alpha_1 a_1$')

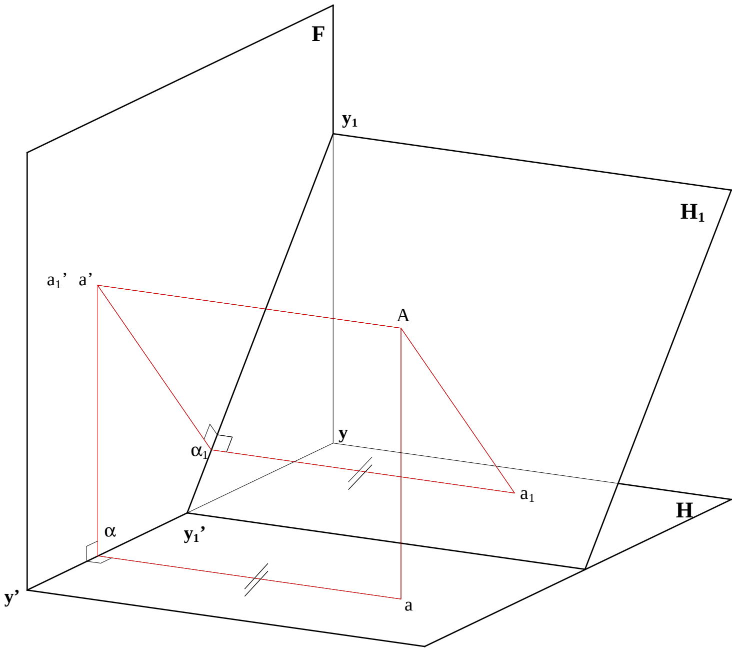


5.1.2 Changement de plan horizontal de projection

On se donne un nouveau plan de projection horizontal (H_1), ce nouveau plan étant perpendiculaire au plan de projection frontal (F). On se donne donc ainsi une nouvelle ligne de terre (x_1y_1). Le plan frontal étant inchangé, les éloignements et les projections frontales sont inchangés.

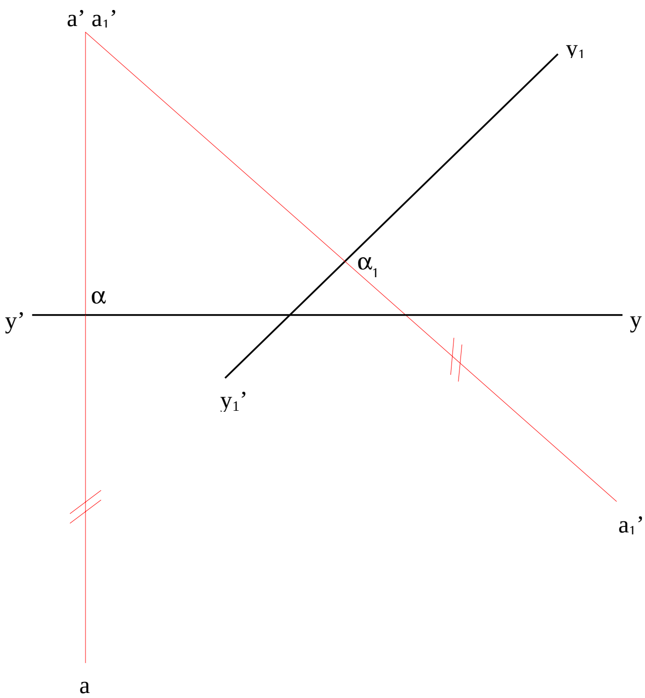
Dans l'espace :

Le point (A) n'est pas modifié. On se donne un nouveau plan de projection horizontal (H1) perpendiculaire au plan frontal de projection (F). La projection frontale du point (A) est inchangée et son éloignement est conservé.



Epure :

La représentation (a a') du point (A) est changée en (a_1 a'_1). La projection frontale du point (A) est inchangée : (a') est confondu avec (a_1') et l'éloignement du point (A) est conservé : (αa) = ($\alpha_1 a_1$)



5.1.3 Changement de plan de projection pour une droite

5.1.3.1 Principe

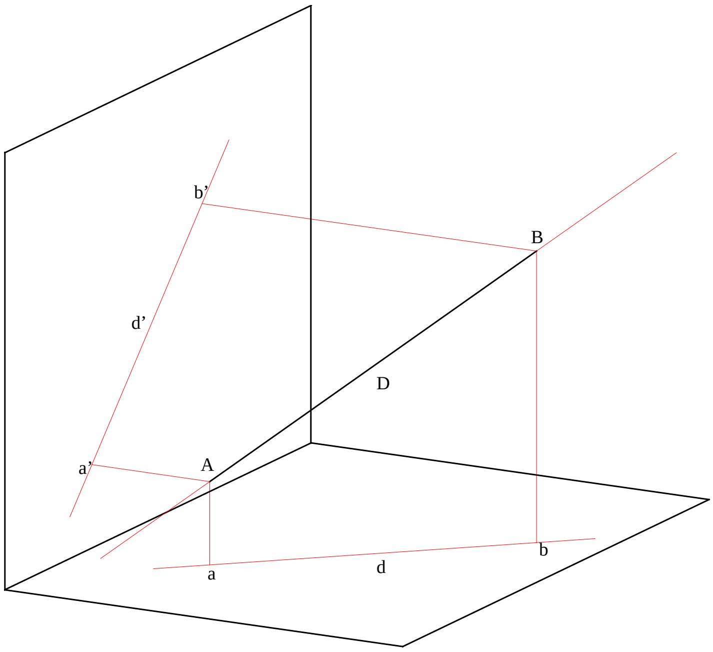
Pour effectuer le changement de plan de projection pour une droite, il suffit d'appliquer la méthode à deux points de la droite. Cette opération est nécessaire pour effectuer des mesures sur la droite.

En effet, pour que les distances prises sur un segment de droite soient conservées en projection, il faut et il suffit que le plan de projection soit parallèle au segment. Ainsi, dans la majorité des cas, une droite n'est pas vue en vraie grandeur dans sa projection frontale comme dans sa projection horizontale.

<u>Seules la projection frontale d'une droite frontale et la projection horizontale d'une droite horizontale sont vues en vraie grandeur.</u>

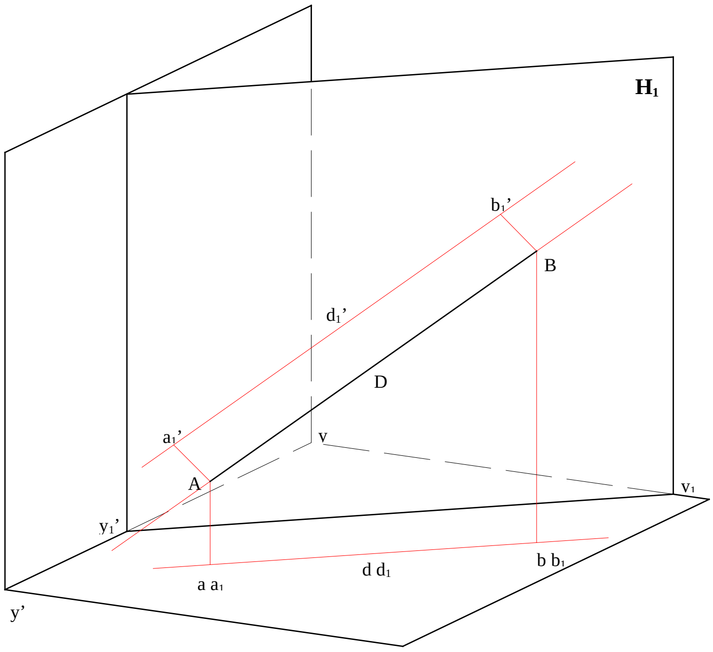
Afin de prendre des mesures sur une droite quelconque, il est donc nécessaire d'effectuer un changement de plan de projection en choisissant le nouveau plan de projection de telle sorte qu'il soit parallèle à la droite : par ce changement de plan, nous allons rendre la droite à mesurer soit frontale, soit horizontale. Le nouveau plan de projection étant soit vertical (perpendiculaire au plan horizontal), soit de bout (perpendiculaire au plan frontal), il sera donc parallèle soit à la projection horizontale de la droite soit, à sa projection frontale.

5.1.3.2 Rendre une droite frontale (ou horizontale)



Soit (D) la droite sur laquelle on souhaite prendre la mesure du segment (AB). Cette droite n'étant parallèle à aucun des plans de projection, le segment (AB) n'est vu en vraie grandeur ni dans sa projection horizontale, ni dans sa projection frontale.

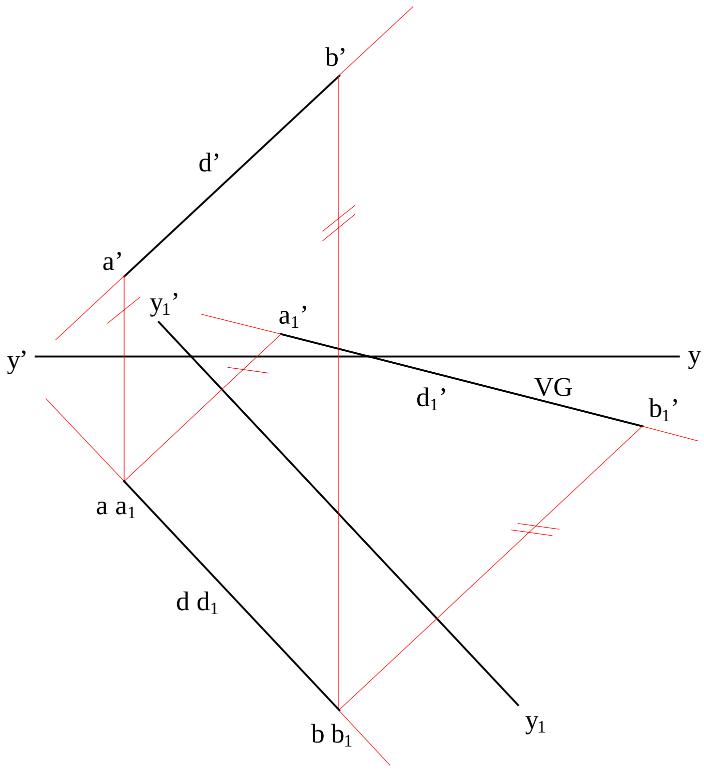
Il est donc nécessaire de rendre la droite (D) frontale ou horizontale par changement de plan.



Nous choisissons ici de rendre cette droite frontale en nous donnant un nouveau plan de projection frontal (H_1) parallèle à la projection horizontale (d) de la droite (D)

La droite (D) étant frontale par rapport au nouveau plan de projection frontal (H_1), la projection frontale (a_1'b_1') du segment (AB) sur ce nouveau plan de projection est vue en vraie grandeur. La mesure du segment (AB) peut donc être prise sur (a_1'b_1').

Epure :



Pour réaliser le changement de plan de la droite, il suffit d'effectuer le changement de plan pour deux point de la droite.

Le segment (A_1B_1) étant rendu frontal, il est vu en vraie grandeur dans sa projection frontale (a_1'b_1') sur le nouveau plan frontal de projection représenté par la nouvelle ligne de terre (x_1y_1).

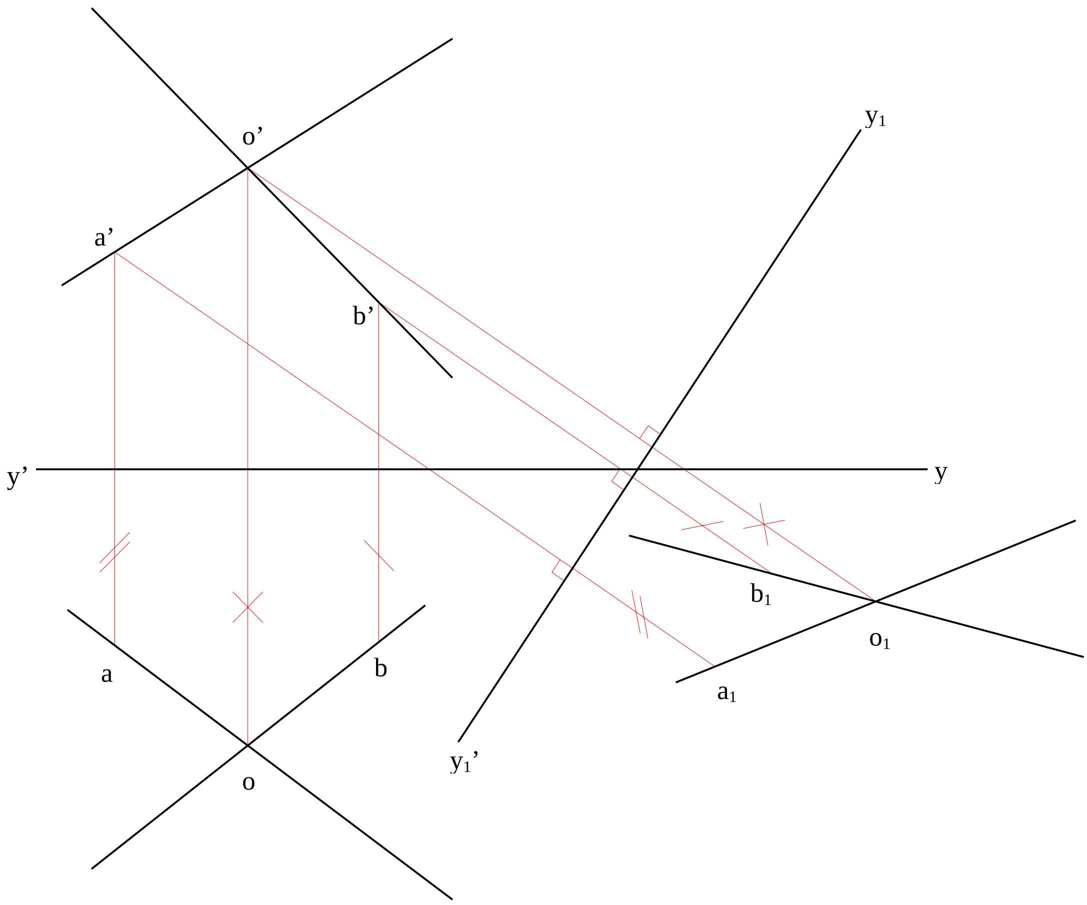
Remarque :

S'agissant de rendre la droite frontale afin de la voir en vraie grandeur, le nouveau plan frontal de projection (x_1y_1) peut être pris n'importe où pourvu qu'il soit parallèle à la projection horizontale de la droite (D), et notamment sur cette projection horizontale, ce qui simplifie la construction.

5.1.4 Changement de plan de projection pour un plan :

5.1.4.1 Plan défini par des droites concourantes

La méthode consiste à effectuer le changement de plan pour 3 points : le point d'intersection (O) et un point sur chacune des droites.

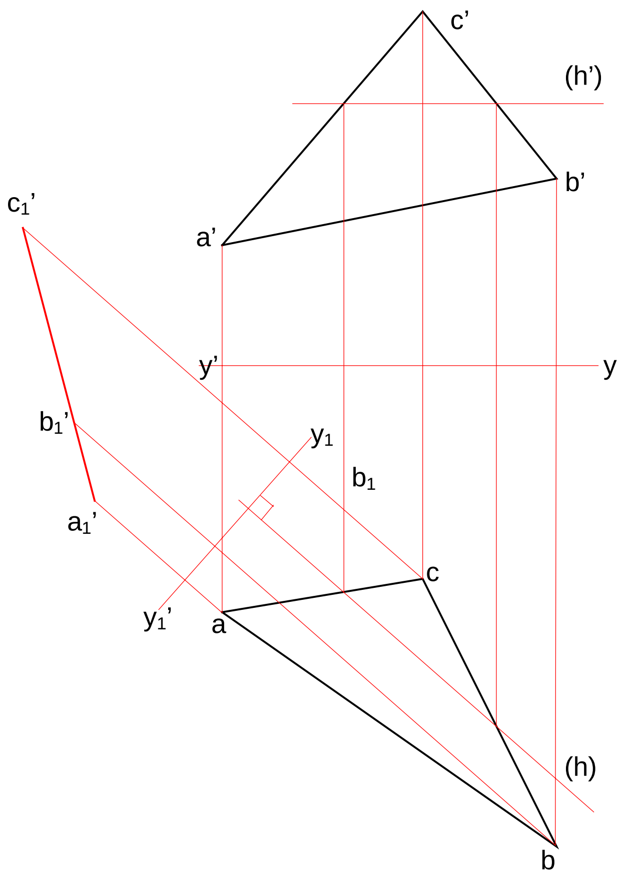


5.1.4.2 Rendre un plan de bout (ou vertical)

Rendre un plan de bout a pour but principal de faciliter la recherche de son intersection avec une droite, sans recours à la méthode du plan auxiliaire.

Le changement de plan est choisi de manière à transformer une droite horizontale en droite de bout, ce qui caractérise les plans de bout.

La ligne de terre est donc placée perpendiculairement à la projection horizontale d'une horizontale du plan.



5.2 Rotations

Dans cette méthode, les figures sont transformées alors que les plans de projection sont inchangés.

Une rotation est définie par un **axe** et un **angle**.

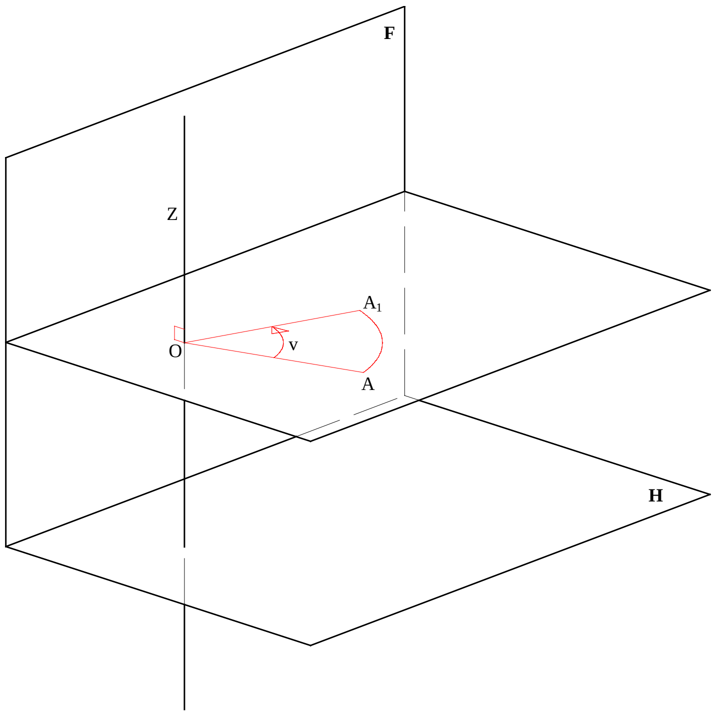
Le plan de rotation du point est le plan perpendiculaire à l'axe de rotation contenant le point. Le centre de rotation est donc l'intersection de l'axe de rotation avec le plan de rotation. Les axes de rotations seront généralement des droites verticales ou de bout.

5.2.1 Rotation d'un point

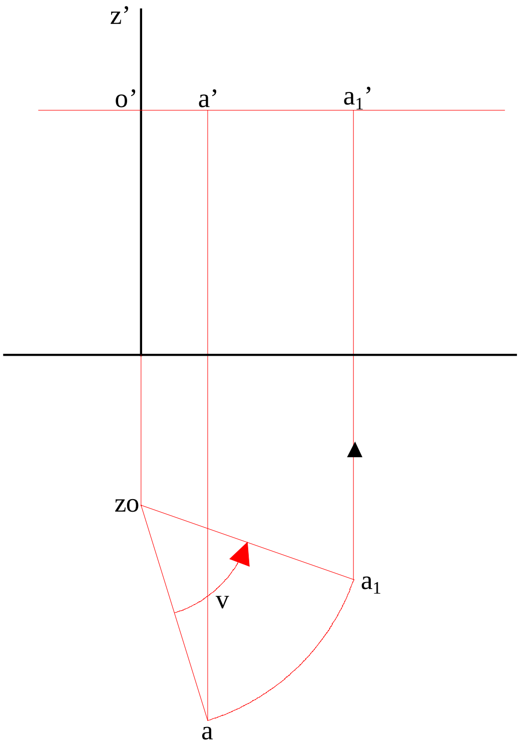
Soit par exemple un point (A) de l'espace, (Z) un axe de rotation et (v) un angle. Dans l'exemple ci-dessous l'axe (Z) est une droite verticale. Le plan de rotation est donc un plan horizontal contenant (A). Le point (A) va donc se transformer en un point (A_1) après avoir parcouru un arc de cercle déterminé par l'angle (v) et centré sur le point (O) intersection du plan de rotation avec l'axe (Z).

L'axe de rotation étant une droite de bout, l'angle de rotation sera vu en vraie grandeur en projection horizontale.

Dans l'espace:



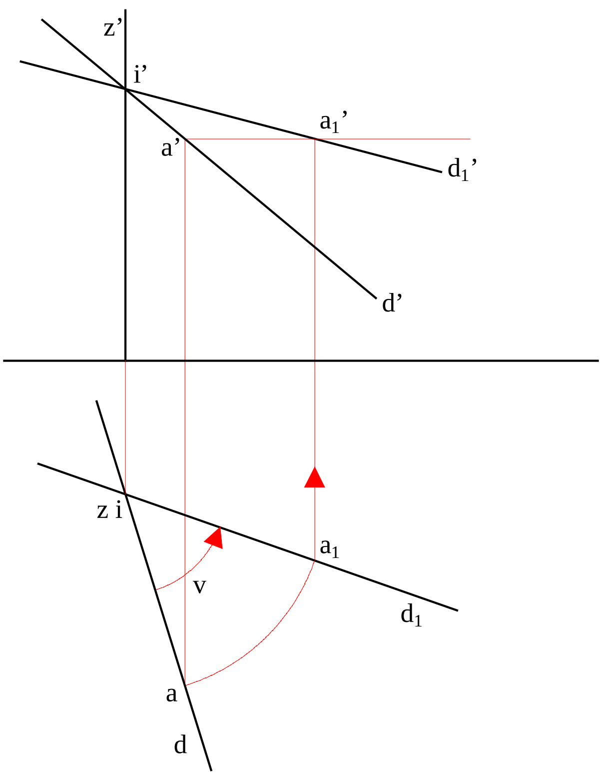
Epure :



Le point (A), l'axe (Z) et l'angle (v) sont donnés. La rotation étant vue en vraie grandeur sur le plan de projection horizontal, il suffit, pour déterminer le point (A_1), d'effectuer la rotation en projection horizontale sur la projection horizontale (a) du point (A), ce qui donne (a_1), puis de déterminer la projection verticale (a_1') du point (A_1) en rappelant (a_1) sur le plan de rotation.

5.2.2 Rotation d'une droite

5.2.2.1 Principe

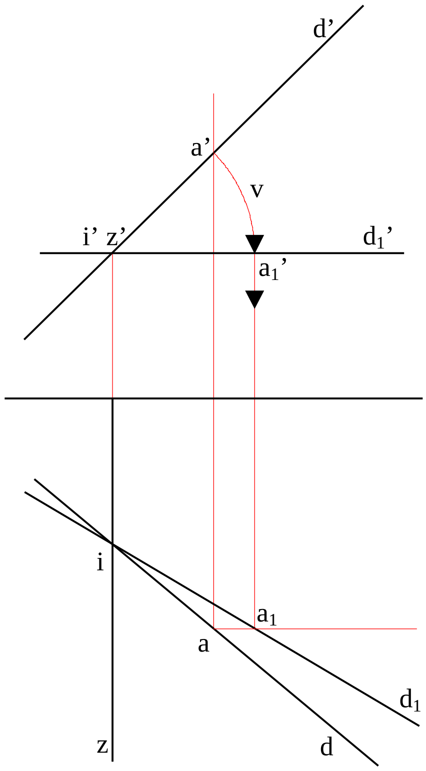


Pour effectuer la rotation d'une droite, il est plus aisé de choisir un axe de rotation qui rencontre la droite.

Le point commun à la droite et à l'axe de rotation étant invariant, la construction de la transformée de la droite est simplifiée.

La rotation d'un seul point de la droite suffit à déterminer la rotation de la droite entière.

5.2.2.2 Rendre une droite horizontale (ou frontale)



Une droite horizontale étant parallèle au plan de projection horizontal, sa projection frontale est parallèle à la ligne de terre.

Afin d'amener par rotation la projection frontale (d') d'une droite quelconque (D) parallèlement à la ligne de terre, il convient d'utiliser un axe de rotation de bout.

Le seul but ici étant de rendre la droite (D) horizontale, l'axe de rotation (Z) peut être choisi librement pourvu qu'il soit de bout. Afin d'alléger la construction, il est notamment possible de choisir un axe (Z) coupant la droite (D). Le point d'intersection (I) est donc invariant dans la rotation.

Il suffit alors d'amener la projection frontale (d') de la droite (D) parallèlement à la ligne de terre en la faisant tourner autour de (i'), ce qui détermine la valeur (v) de l'angle de rotation. Il ne reste qu'à se donner un point (A) de la droite (D) et d'en effectuer la rotation pour construire la projection horizontale (d_1) de la transformée de (D). (d_1) est alors vue en vraie grandeur.

5.2.3 Rotation d'un plan :

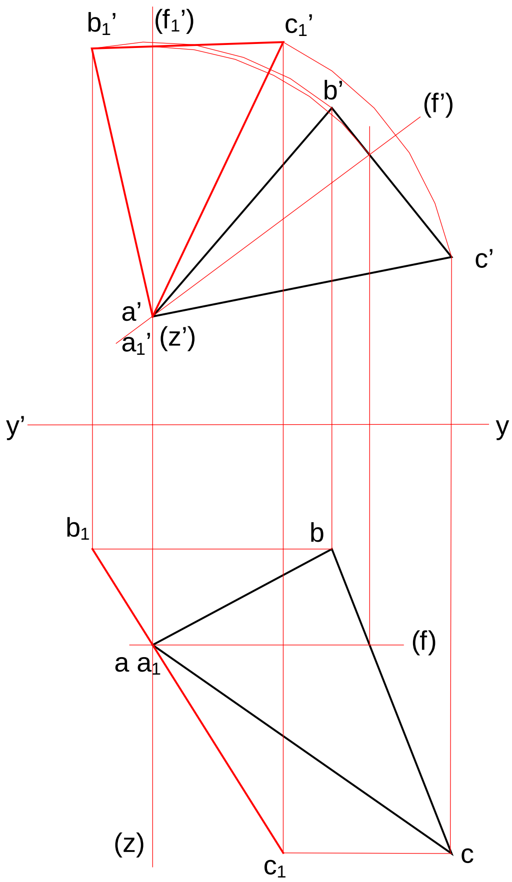
5.2.3.1 Le plan est défini par deux droites concourantes

Dans ce cas, il suffit d'effectuer la rotation pour 3 points : le point (O) d'intersection des droites et un point sur chaque droite

5.2.3.2 Rendre un plan vertical (ou de bout)

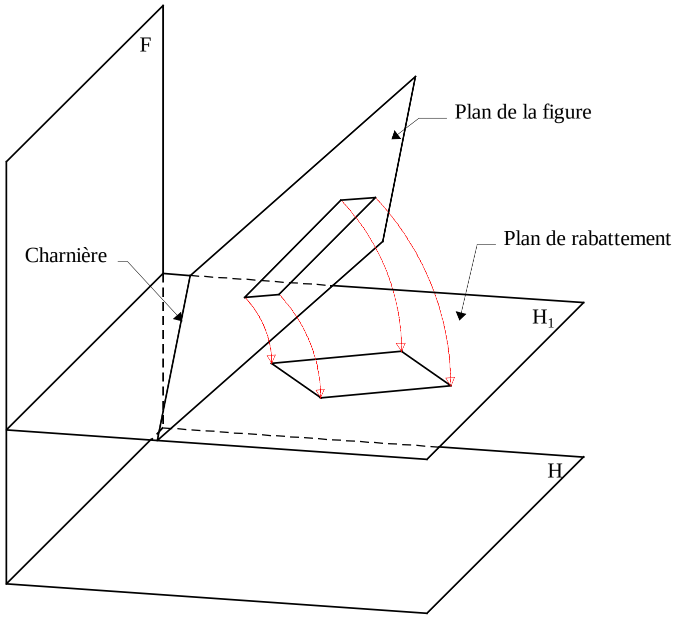
Rendre un vertical a pour but principal de faciliter la recherche de son intersection avec une droite, sans recours à la méthode du plan auxiliaire.

L'angle de rotation est choisi de manière à transformer une droite frontale en droite verticale, ce qui caractérise les plans verticaux.



5.3 Rabattements

Le rabattement consiste à faire tourner une figure plane (dont tous les points sont coplanaires) autour d'une des droites du plan qui la porte afin rendre cette figure parallèle à un des plans de projection.



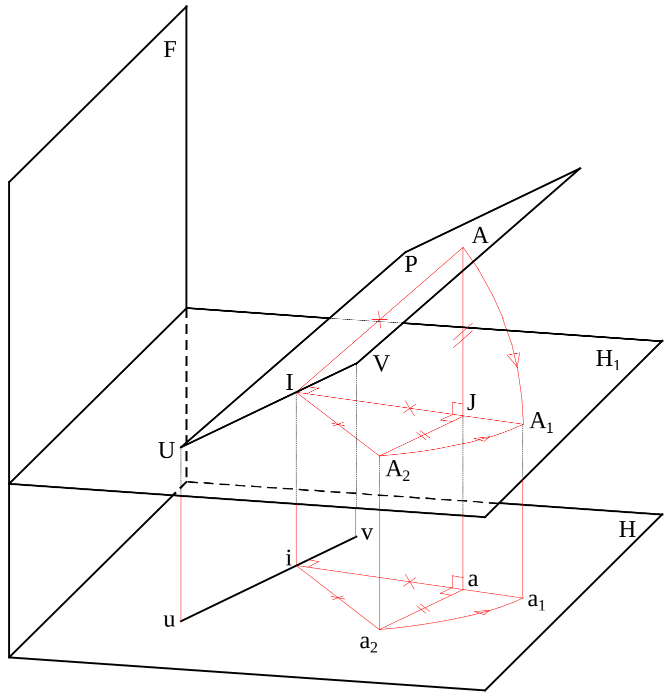
La droite autour de laquelle la figure tourne est appelée **charnière**. Si la figure est rabattue sur un plan horizontal, la charnière est nécessairement une droite horizontale et elle est nécessairement une droite frontale dans le cas d'un rabattement sur un plan frontal.

La charnière est invariante dans le rabattement.

Le rabattement peut se comparer à une rotation autour d'un axe défini par la charnière. En fait les rabattements sont similaires à des rotations autour d'axes frontaux ou horizontaux.

5.3.1 Rabattement d'un point :

Soit donc un point (A) que l'on désire rabattre sur un plan horizontal (H_1) et soit (P) le plan à rabattre. La charnière (UV) est déterminée par l'intersection de (P) avec (H_1).



Considérons la ligne de plus grande pente du plan (P) relativement au plan (H1) et passant par (A). Cette droite est perpendiculaire à la charnière (UV), (UV) étant une horizontale de (P), et la coupe en un point (I).

SI l'on compare le rabattement sur (H_1) autour de (UV) à une rotation d'axe (UV), le plan (AIA_1) est le plan de rotation.

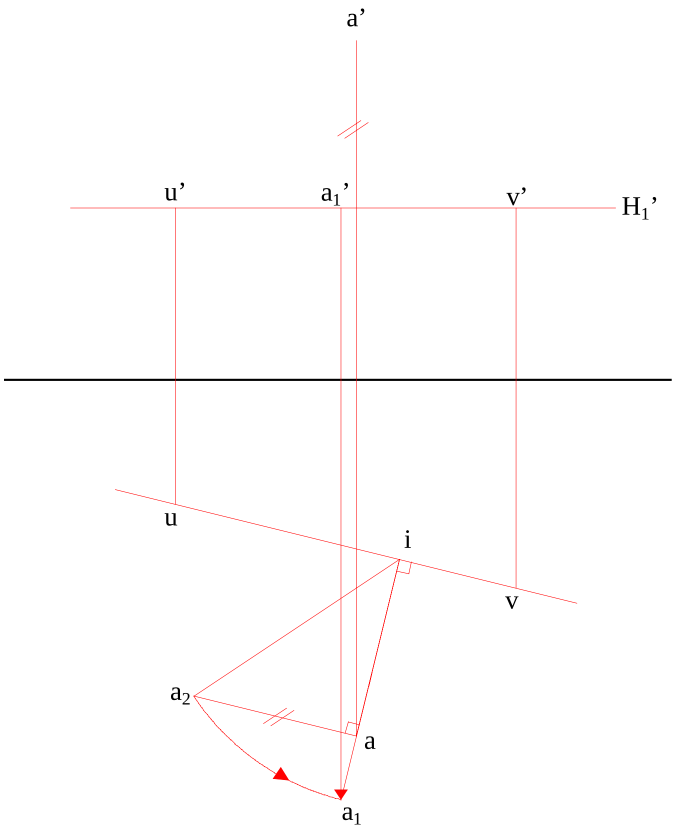
Le point (A_1) transformé du point (A) dans le rabattement, se trouve donc sur une perpendiculaire à (UV) issue de (I) à une distance (IA_1) = (IA).

Soit (J) le point d'intersection de la verticale issue de (A) avec le plan (H_1). La distance (AJ) est égale à la différence de cote entre le point (A) et le plan (H_1).

Dans l'épure :

Le problème est ici de voir (AJ) en vraie grandeur. La méthode consiste à reproduire sur le plan de projection parallèle au plan de rabattement (ici le plan de projection horizontal) le triangle rectangle (IAJ) en construisant un point (A_2) situé sur une perpendiculaire à (AI) issue de (A) à une distance (aa_2) = (AJ), (AJ) étant égal à la différence de cote entre (A) et le plan (H_1). Le point (J) étant situé sur une verticale issue de (A), sa projection horizontale est confondue avec celle de (A), soit (j) = (a). On reproduit donc le triangle rectangle (IAJ) en (ia_2a). Ce triangle est appelé **triangle de rabattement** et il est vu en vraie grandeur dans (ia_2a).

En construisant un tel point (A_2), on a (IA) = (IA_2). Il suffit alors de reporter cette distance (IA_2) sur la droite (IA) pour déterminer le point (A_1), rabattu du point (A) sur (H_1).



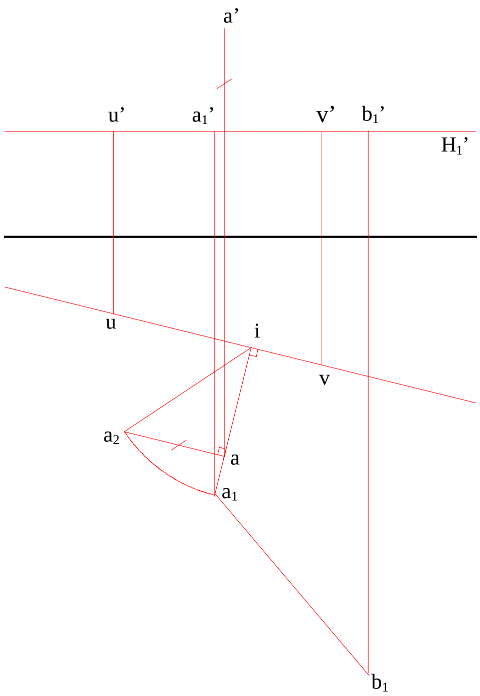
Avec le point (A_2), on reproduit donc le triangle de rabattement sur le plan de projection parallèle au plan de rabattement.

Ce point (A_2) ne servant qu'à déterminer la distance (IA) afin de construire (A_1), il n'est pas nécessaire de donner sa projection frontale, de même que pour le point (I). Ces points appartenant à (H_1), leur projection frontale est confondue avec (u'v').

Remarque géométrique : Tous les triangles de rabattement d'une même figure sont des triangles semblables (leurs angles sont égaux).

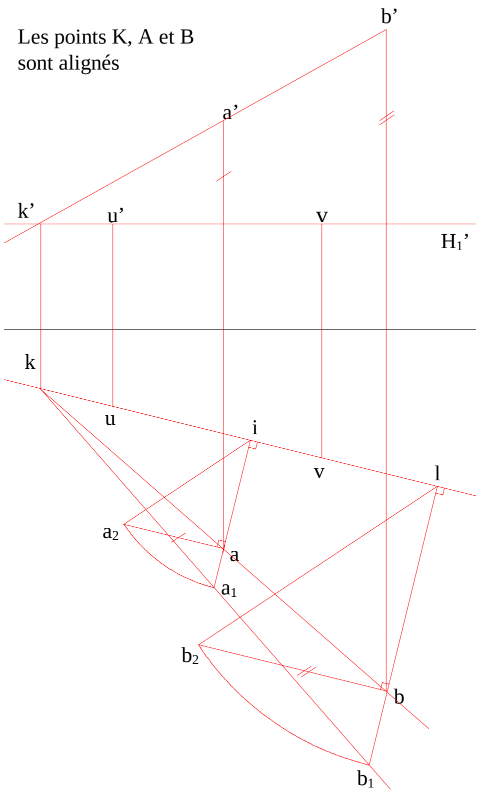
5.3.2 Relèvement d'un point :

Le relèvement d'un point est l'opération inverse du rabattement de ce point.



Soient donc un point (A) rabattu en (A_1) et un point (B_1), rabattu d'un point (B) que l'on cherche à déterminer.

La droite (A_1B_1) appartient au plan de rabattement (H_1); c'est donc une horizontale et elle coupe (UV) en un point (K). Ce point (K), appartenant à (UV), est invariant.



La projection horizontale (b) du point (B) se trouve donc sur la droite (ka) projection horizontale de la droite (KA) relevée de la droite (KA_1).

D'autre part, nous savons que (b) se trouve sur une perpendiculaire à (uv) issue de (b_1). Soit (l) le pied de cette perpendiculaire. (b) se trouve donc à l'intersection de (b_1l) avec (ka).

Afin maintenant de déterminer la projection frontale (b') du point (B), il est nécessaire de déterminer sa cote.
Pour ce faire, nous allons reproduire le triangle de rabattement sur le plan horizontal en construisant le point (b_2). Ce point est situé sur une perpendiculaire à (b_1l) issue de (b). Sachant que (lb_2) = (lb_1), (b_2) est donc déterminé par l'arc de cercle de centre (l) et de rayon (lb_1) et la perpendiculaire à (b_1l) issue de (b). (bb_2) étant égal à la différence de cote entre (B) et (H_1), la cote de (B) est également connue. (b') est donc déterminé.

Remarque : (b_2) peut être déterminé différemment en remarquant que les points (k), (a_2) et (b_2) sont alignés.

5.3.3 Rabattement par la frontale :

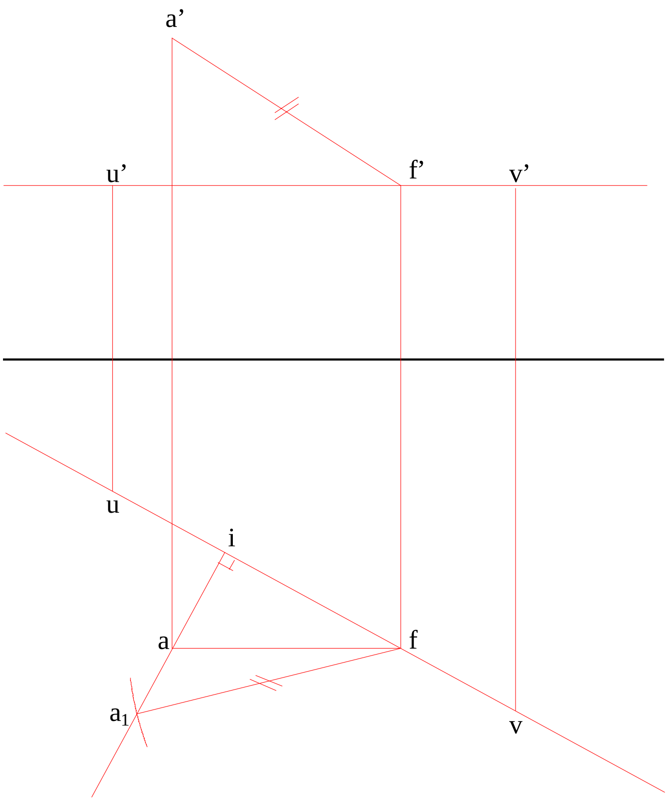
Cette méthode permet également de rabattre ou de relever un point en construisant une frontale issue de ce point appartenant au plan à rabattre.

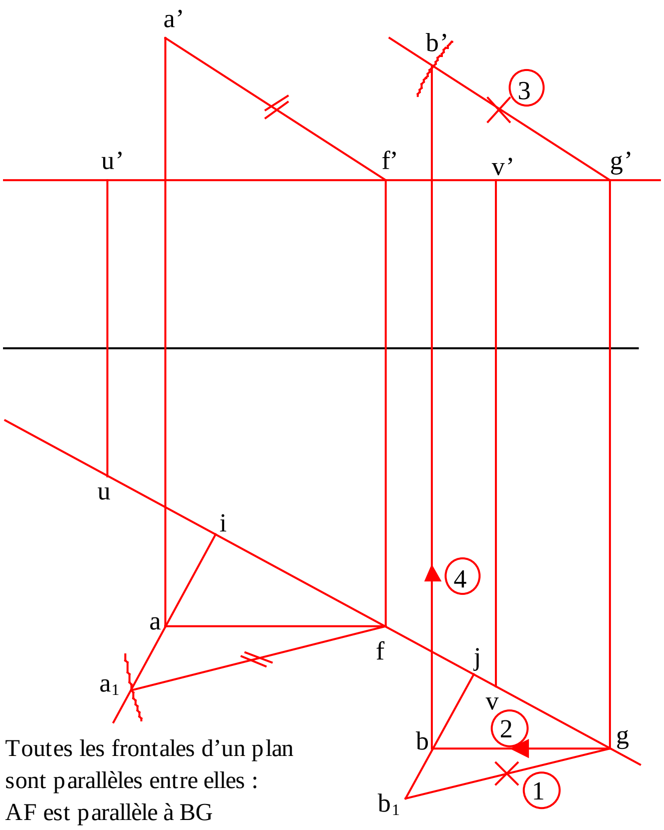
Soit donc un point (A) que l'on cherche à rabattre sur un plan horizontal autour d'une charnière (UV).

On commence par construire la frontale du plan à rabattre passant par (A). Cette frontale coupe la droite (UV) en (F). Etant frontale, elle est vue frontalement en vraie grandeur.

Cette frontale, appartenant au plan à rabattre, sera, une fois rabattue, également vue en vraie grandeur dans sa projection horizontale.

Le point (F) étant invariant, on a (f'a')=(fa$_1$), (A$_1$) étant le rabattu du point (A). Nous savons également que (a$_1$) se trouve sur une perpendiculaire à (uv) issue de (a). (a$_1$) est donc déterminé par l'intersection de cette droite avec le cercle de centre (f) et de rayon (a'f').





On peut également utiliser la méthode de la frontale pour relever un point. Soit donc un point (A) dont on connaît le rabattement (A$_1$) et un point (b$_1$) que l'on cherche à relever en (B).

On sait que la frontale rabattue (a$_1$f) est parallèle à la frontale rabattue (b$_1$g), ce qui permet de déterminer (g), (g') et (b).

Pour déterminer (b'), il suffit de déterminer l'intersection d'un cercle de centre (g') et de rayon (b$_1$g) avec la ligne de rappel issue de (b).

6. PROBLÈMES MÉTRIQUES

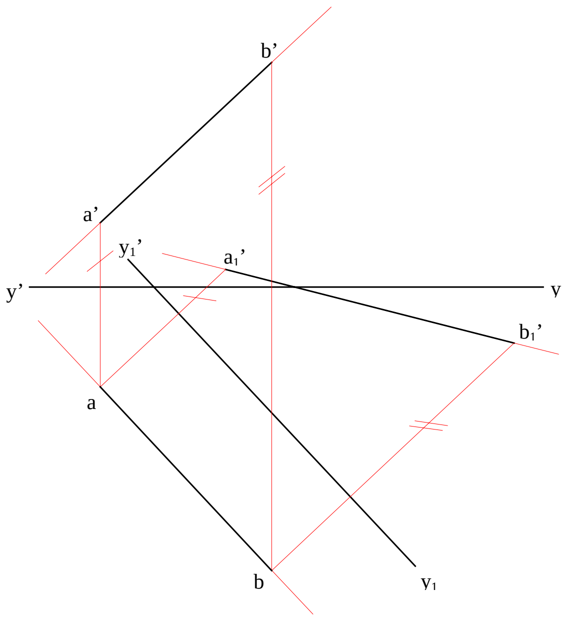
Les problèmes métriques ne se résolvent que lorsque les figures sont vues en vraie grandeur. Il est donc nécessaire de mettre en oeuvre les méthodes vues au chapitre précédent afin d'y répondre.

6.1 Les distances :

6.1.1 Distance entre deux points :

Deux méthodes permettent de résoudre ce problème. La droite joignant les deux points est rendue horizontale ou frontale soit par changement de plan, soit par rotation.

6.1.1.1 Changement de plan :

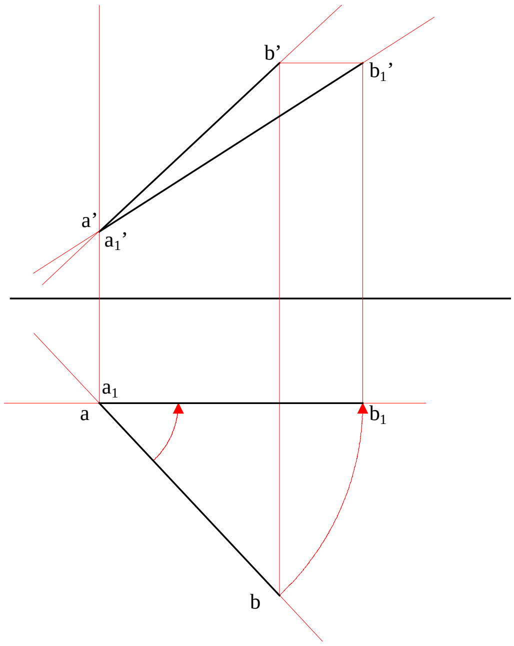


La droite (AB) est rendue frontale par changement de plan de projection frontal, ce nouveau plan frontal étant parallèle à (AB).

La droite est rendue frontale, elle sera vue en vraie grandeur sur sa projection frontale.

(AB) = (a_1'b_1')

6.1.1.2 Rotation :



La droite (AB) est rendue frontale par rotation autour d’un axe vertical passant par (A).

Etant rendue frontale, elle est vue en vraie grandeur sur sa nouvelle projection frontale :

$(AB) = (a_1'b_1')$

6.1.2 Distance d'un point à une droite :

Deux méthodes sont possibles :

1- On construit le plan perpendiculaire à la droite passant par le point donné, puis on recherche l'intersection (I) de ce plan avec la droite. On est ainsi ramené au problème de la distance entre deux points.

2- On rabat le plan constitué de la droite et du plan sur un plan parallèle à un des plans de projection. On choisit par exemple le plan horizontal et la charnière passant par (A).

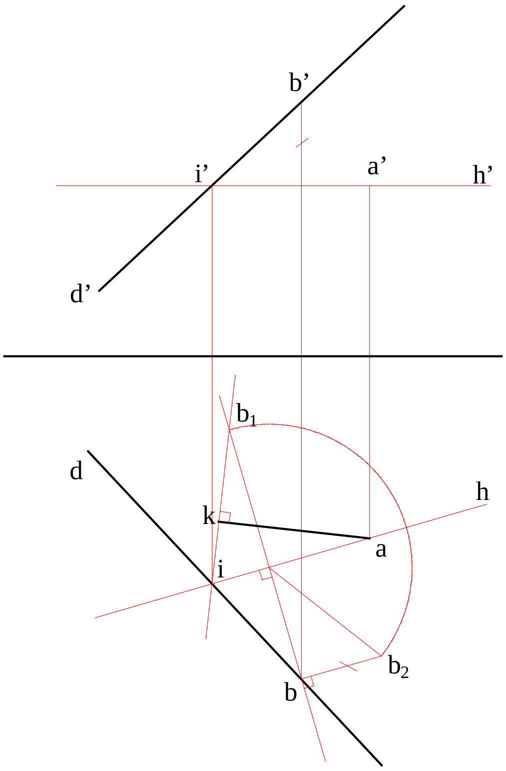
Il suffit ensuite de mener la perpendiculaire à la droite rabattue passant par (a) pour la mesurer en vraie grandeur.

On choisit donc le plan de rabattement horizontal passant par (A) ce qui détermine la charnière (H). Ce plan coupe (D) en (I).

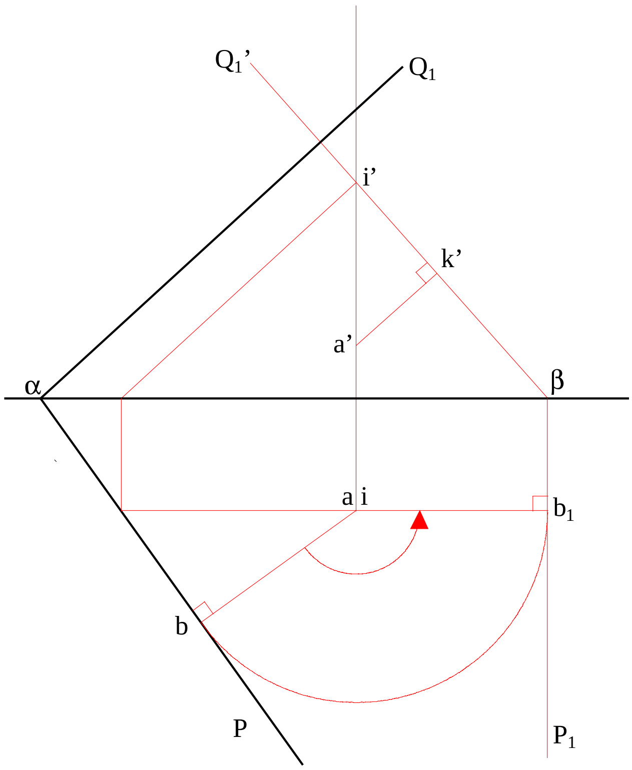
On construit ensuite le rabattement de la droite (D) en rabattant un de ses points (B).

Les points (I) et (A) sont invariants dans le rabattement. La vraie distance entre (A) et (D) peut donc être vue en vraie grandeur sur la perpendiculaire à (ib_1) issue de (A).

(ak)



6.1.3 Distance d'un point à un plan :



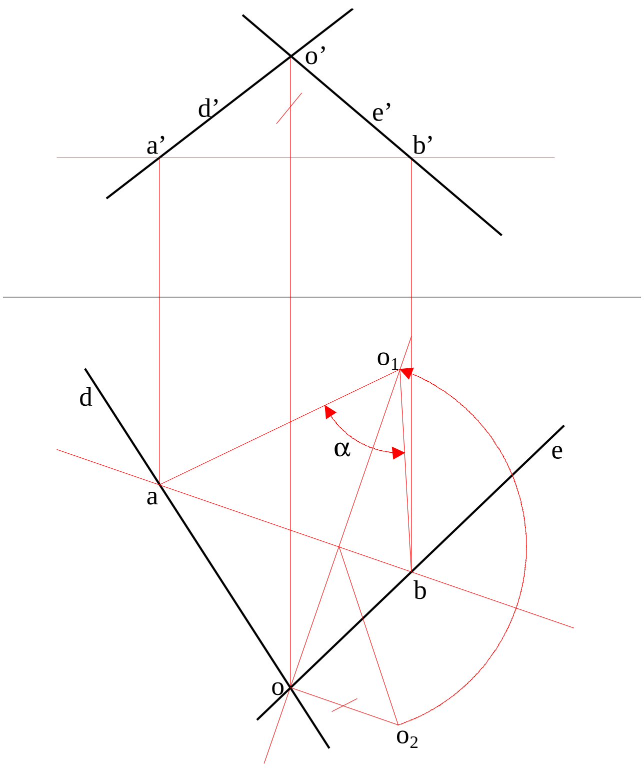
On recherche la distance du point (A) au plan (PαQ').

On amène le plan (PαQ') perpendiculairement à un plan de projection (ici le plan frontal) par rotation autour d'un axe (ici vertical) passant par (A). Le plan ($P_1βQ_1$') étant de bout, on va pouvoir mener de (A) une perpendiculaire au plan vue en vraie grandeur dans la projection frontale.

6.2 Angles :

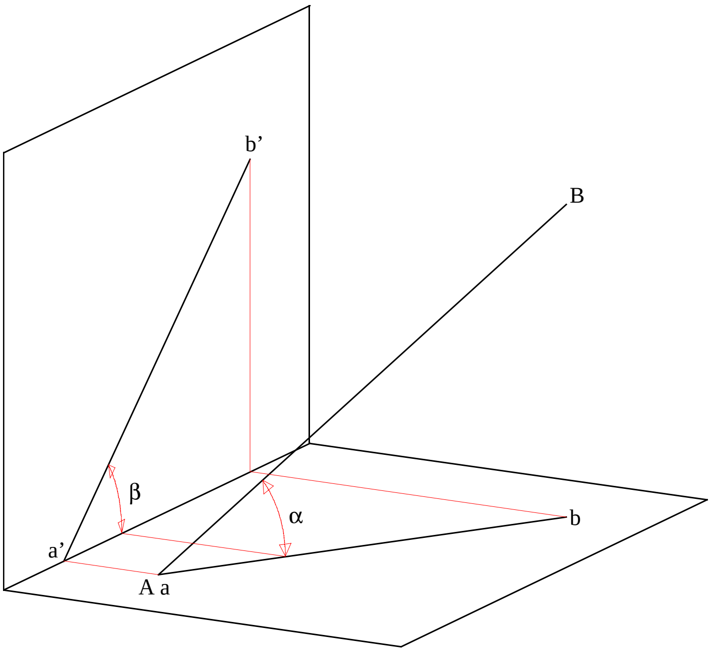
6.2.1 Angle de deux droites :

On cherche à déterminer l'angle de deux droites. Si les deux droites ne sont pas coplanaires, on mènera par un point de l'une une parallèle à l'autre.



Les droites étant coplanaires ou rendues telles, on rabat ensuite le plan des deux droites sur un plan parallèle à un des plans de projection. L'angle ainsi rabattu est vu en vraie grandeur.

6.2.2 Angle d'une droite avec les plans de projection :



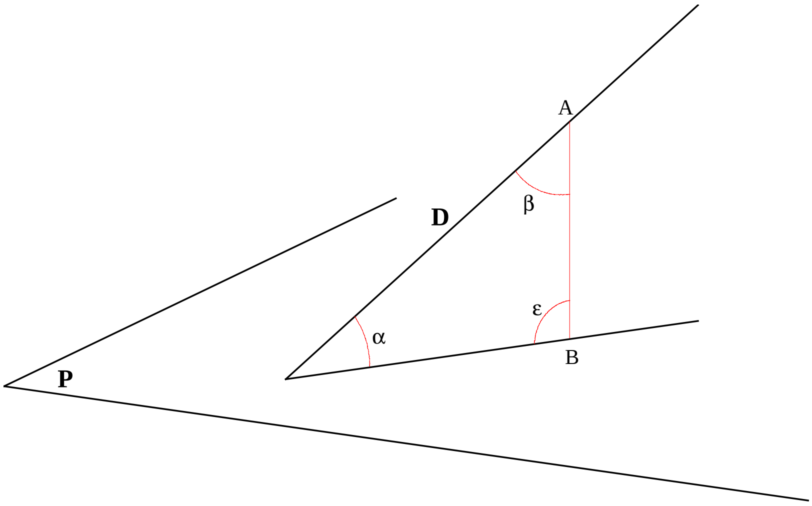
Afin de voir l'angle que fait une droite quelconque avec le plan frontal ou avec le plan horizontal de projection, il est nécessaire de la rendre horizontale ou frontale.

L'angle d'une droite avec le plan horizontal se lisant en projection frontale, il faut rendre la droite frontale afin de lire cet angle en vraie grandeur. De même, l'angle d'une droite avec le plan frontal se lit en projection horizontale une fois la droite rendue horizontale.

6.2.3 Angle d'une droite et d'un plan :

Méthode :

Soit une droite (D) et un plan (P). Pour déterminer l'angle entre (P) et (D), on va construire par un point (A) de la droite (D) une perpendiculaire au plan (P).

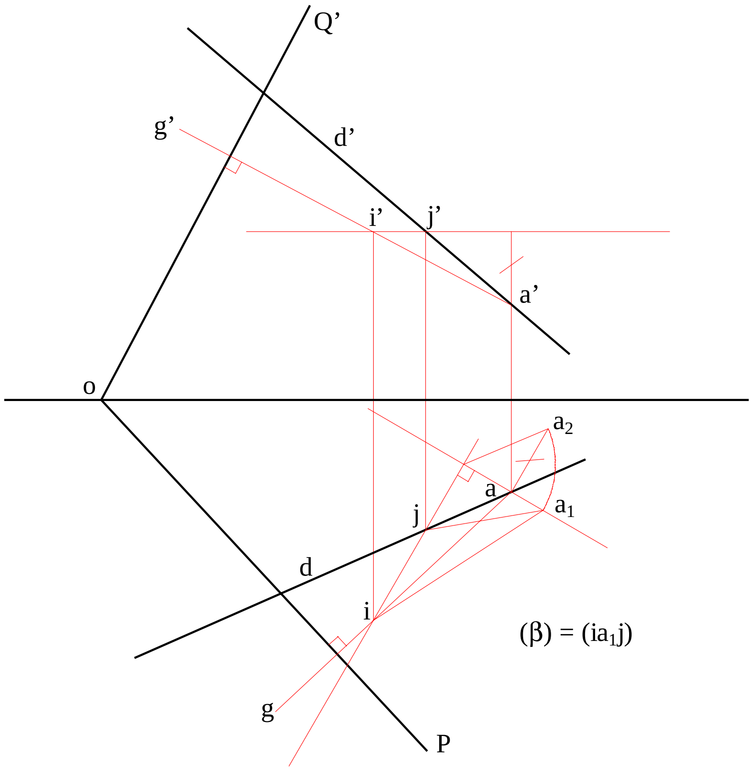


Nous savons que (α) + (β) + (ε) = 180°. (ε) valant 90°, (α) + (β) = 90° et donc

(α) = 90° - (β).

L'angle (β) étant l'angle de la droite (D) avec la droite (AB), nous sommes revenus au problème de l'angle entre deux droites.

Epure :



On recherche l'angle en une droite (D) et un plan (PoQ').

Par un point (A) de (D), on construit une perpendiculaire (G) au plan (PoQ').

L'angle (α) recherché est égal au complémentaire à 90° de l'angle entre (G) et (D), soit l'angle (β) = (IAJ).

Afin de voir cet angle en vraie grandeur, il est nécessaire de le rabatte sur un des plans de projection (ici le plan horizontal).

6.2.4 Angle de deux plans :

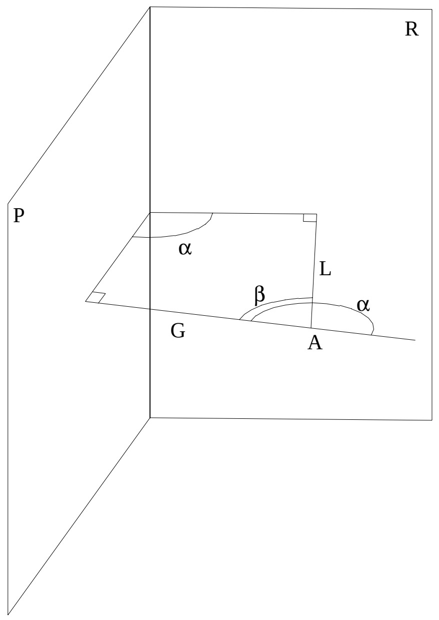
Méthode :

Soient deux plans (P) et (R) dont on recherche l'angle (α).

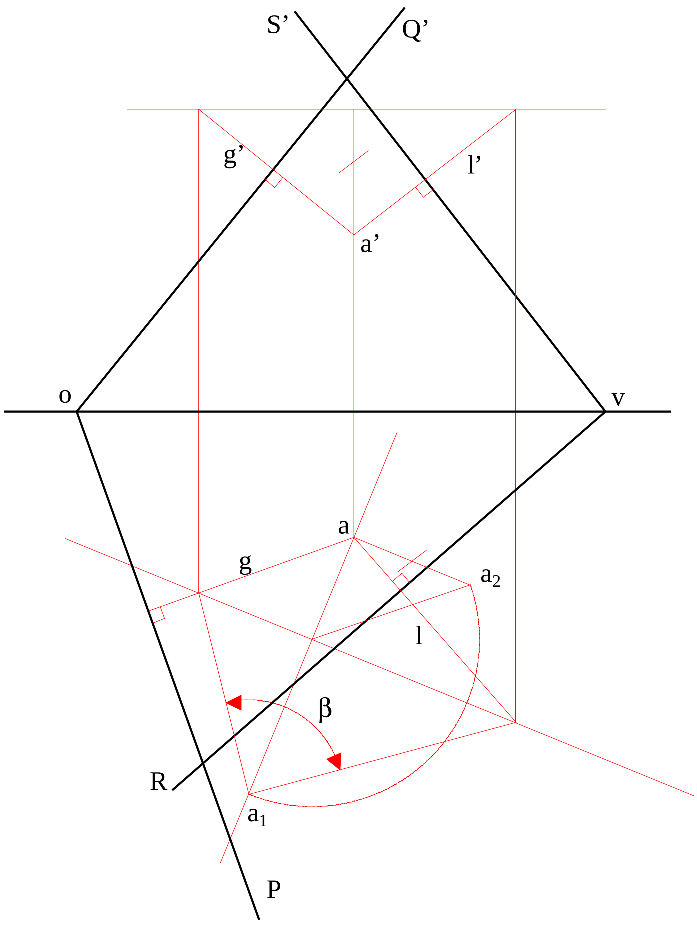
Si, par un point (A) de l'espace, on mène une perpendiculaire (G) au plan (P) et une perpendiculaire (L) au plan (R), l'angle (β) que forme ces deux droites est supplémentaire à l'angle (α) recherché :

$$(\alpha) = 180° - (\beta)$$

On est donc ramené au problème de l'angle de deux droites.



Epure :



Soient les plans (PoQ') et (RvS') définis par leurs traces.

Par un point (A) de l'espace, on mène une perpendiculaire (G) à (PoQ') et une perpendiculaire (L) à (RvS').

L'angle (β) que forme ces deux droites est supplémentaire de l'angle (α) recherché.

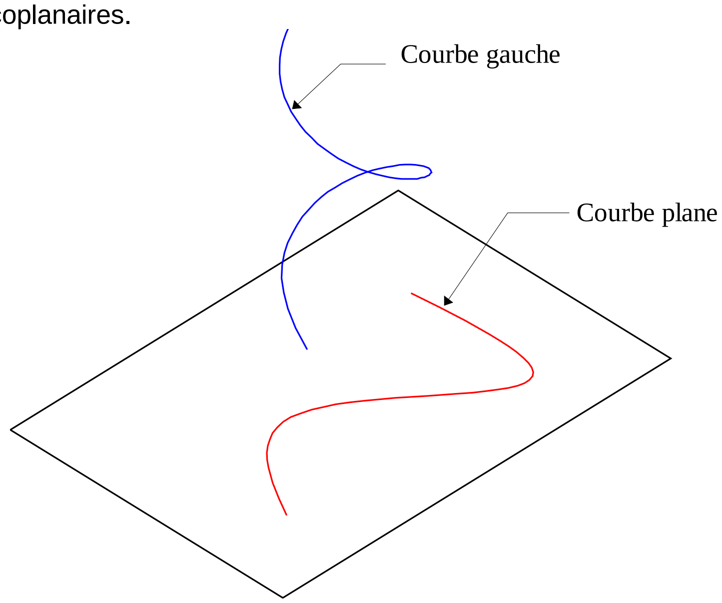
Afin de voir l'angle (β) en vraie grandeur, il est nécessaire de le rabattre (ici sur le plan horizontal).

7. GÉNÉRALITES SUR LES COURBES

7.1 Définitions

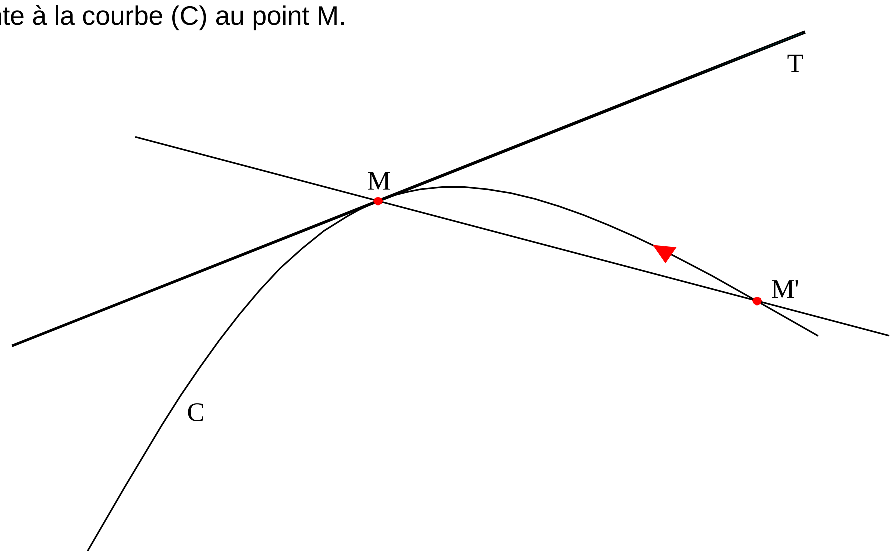
7.1.1 Courbe plane et courbe gauche

Une courbe plane, contrairement à une courbe gauche, est une courbe dont les points sont tous coplanaires.



7.1.2 Tangente à une courbe

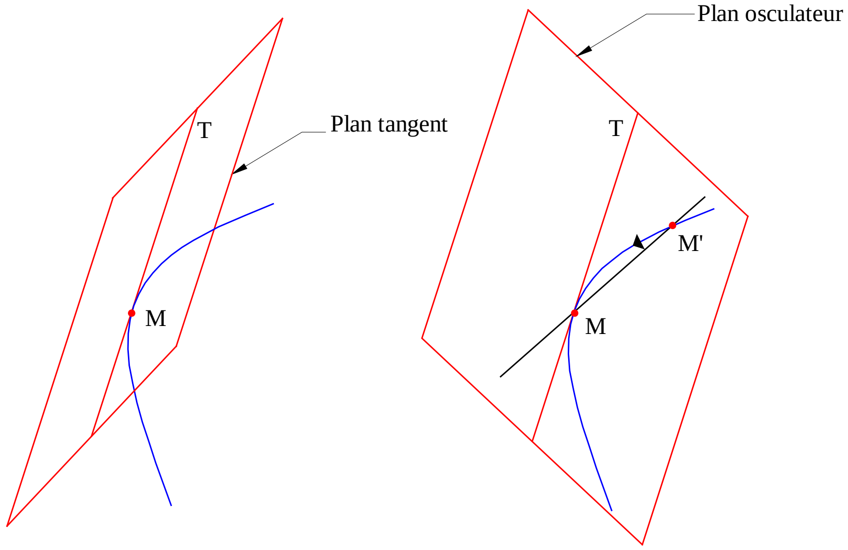
Lorsque le point M' parcourt la courbe (C), la droite (MM') tourne autour du point M. Si cette droite admet une position limite lorsque (M') se rapproche de (M), elle est dite tangente à la courbe (C) au point M.



7.1.3 Plan tangent et plan osculateur

Tout plan qui contient une tangente T en un point M à une courbe est un **plan tangent** à cette courbe au point M.
Quand le point M' se rapproche du point M, le plan (MTM') admet une position limite. Ce plan est le **plan osculateur** de la courbe au point (M). Le plan osculateur est un plan tangent remarquable.

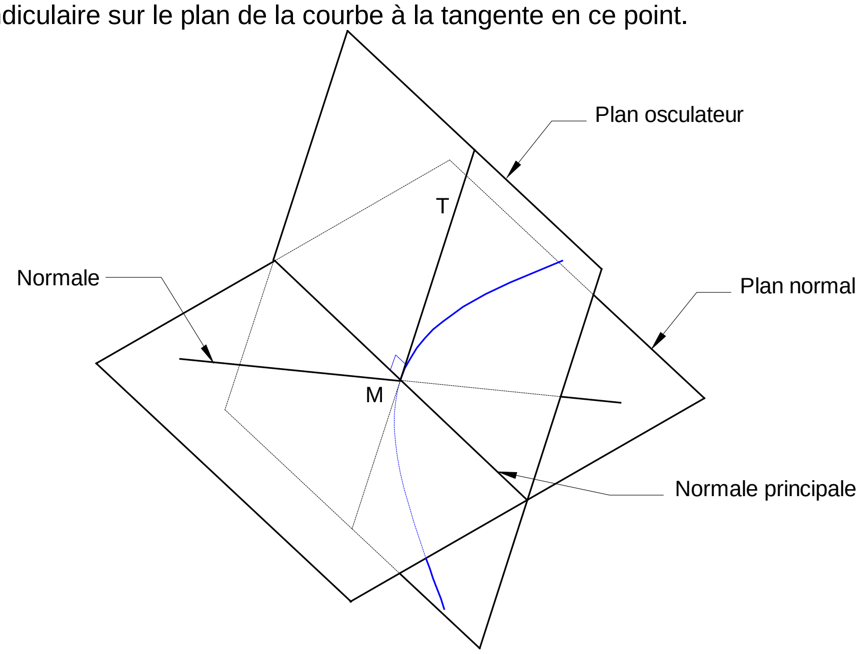
Si la courbe est plane, le plan osculateur est le plan contenant la courbe.



7.1.4 Plan normal et normale principale

On appelle **plan normal** à une courbe en un point M le plan passant par ce point et perpendiculaire à la tangente. Toutes les droites contenues dans ce plan normal sont des normales à la courbe. Celle appartenant au plan osculateur est appelée **normale principale**

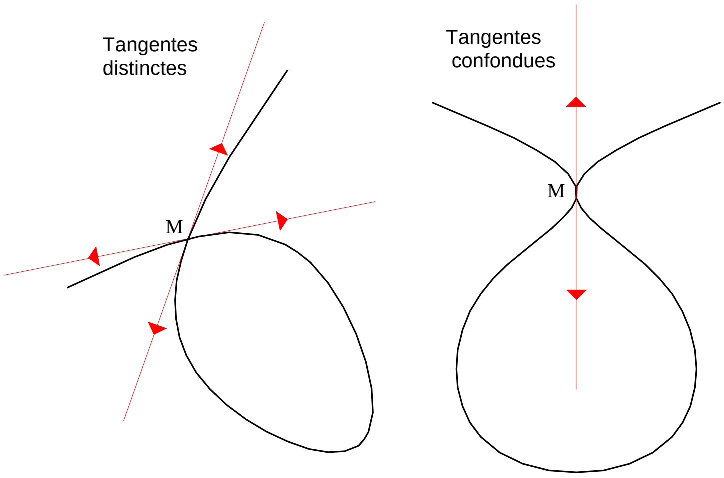
Par conséquent, le normale principale d'une courbe plane en un point donné est la perpendiculaire sur le plan de la courbe à la tangente en ce point.



7.1.5 Points particuliers

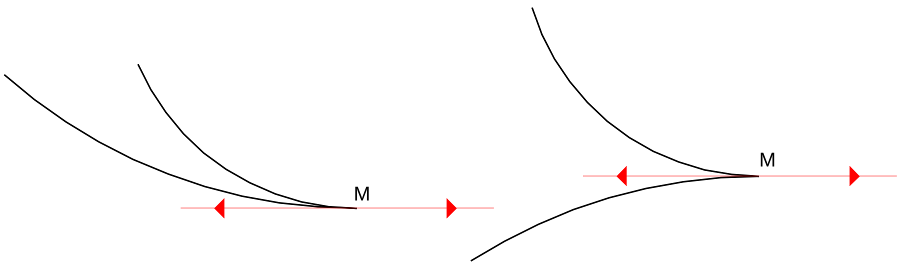
7.1.5.1 Point double

On dit qu'un point de la courbe est double s'il passe deux branches de la courbe par ce point. En ce point les tangentes à la courbe peuvent être distinctes ou confondues



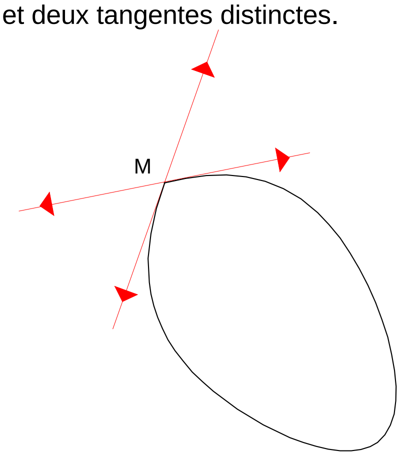
7.1.5.2 Point de rebroussement

Point où deux arcs de la courbe sont tangents. Il ont même tangente en ce point.



7.1.5.3 Point anguleux

Point de la courbe qui admet deux tangentes distinctes.



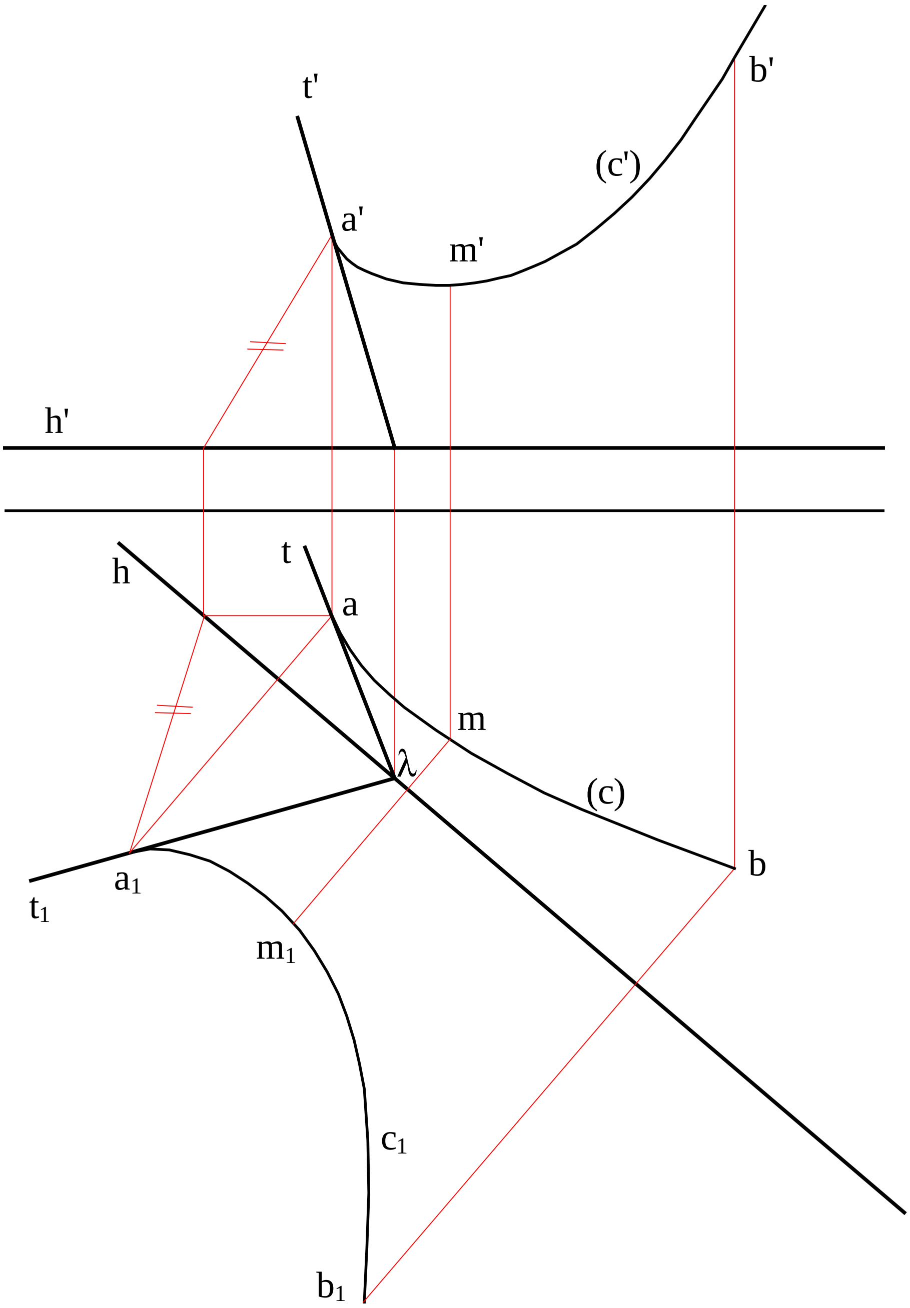
7.2 Projection d’une courbe plane

7.2.1 Propriétés

En projection, aussi bien cylindrique (parallèle) que conique (perspective), la tangente à une courbe se conserve. On démontre, qu'en règle générale :

la projection de la tangente est la tangente à la projection

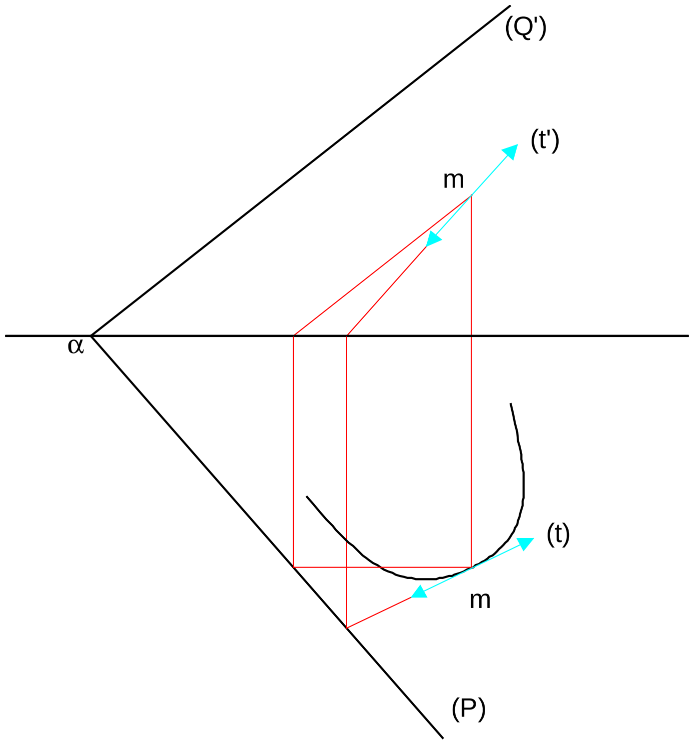
Sur l'épure, cela se traduit également par le fait que, lors d'un rabattement, la normale à une courbe se conserve. La tangente à la courbe rabattue est la rabattue de la tangente à la projection.



7.2.2 Conséquences

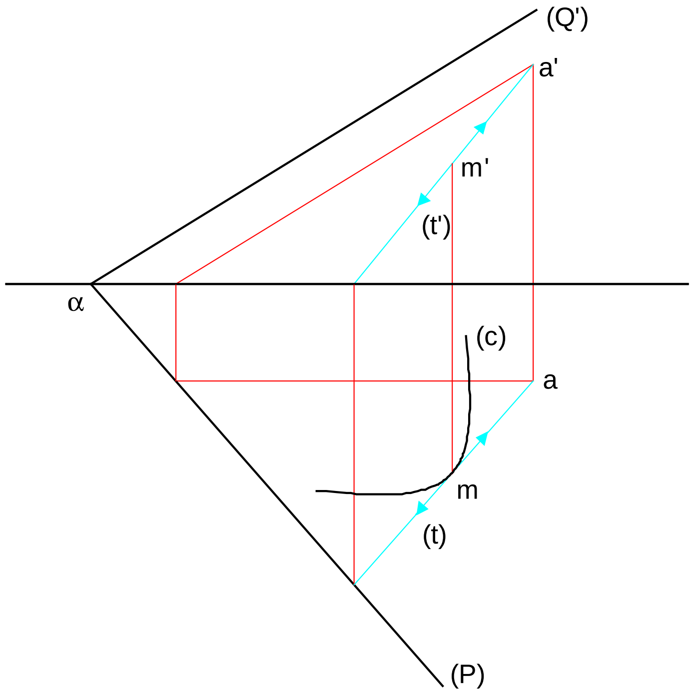
7.2.2.1 Déterminer la seconde projection de la tangente à une courbe plane

Connaissant la courbe plane (C) par son plan et une de ses projections ainsi que la tangente en un point sur cette projection, il s'agit de déterminer l'autre projection de la tangente.
Données : **m, (c) et (t).**
Inconnues : **m' et (t').**
La méthode consiste à faire appartenir le point M à deux droites du plan : la tangente (T) et une droite frontale du plan par exemple. Il est aisé de trouver la projection frontale de la droite frontale (parallèle à la trace frontale (Q') du plan). Nous pouvons ainsi en déduire la projection frontale du point M puis la projection frontale (t') de la tangente sachant que celle-ci appartient au plan et contient le point M.



7.2.2.2 Mener la tangente à une courbe plane passant par un point donné du plan

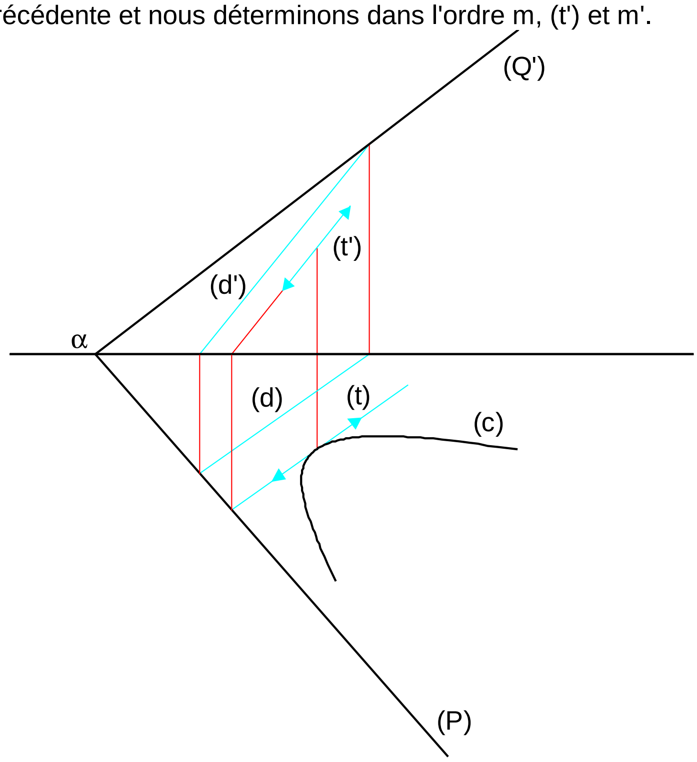
Connaissant une courbe plane (C) par son plan et une de ses projections, mener par un point (A) du plan la tangente à la courbe dans les deux projections.
Données : **(c), a et a'.**
Inconnues : **m, m', (t) et (t').**
La méthode consiste d'abord à tracer la tangente à la courbe sur la projection connue de la courbe. Le point M est alors trouvé sur la projection horizontale.
La projection frontale (t') de la tangente passe par sa trace horizontale et par le point a' et m' est trouvé à l'intersection de (t') et de la ligne de rappel passant par m.



7.2.2.3 Mener la tangente à une courbe plane parallèle à une direction donnée du plan

Connaissant une courbe (C) par son plan et une de ses projections, mener dans la tangente à la courbe parallèle à une direction du plan donnée.
Données : **(c), (d) et (d').**

Inconnues : **m, m', (t) et (t').**
La tangente est tracée sur la projection connue de la courbe. La méthode est ensuite similaire à la précédente et nous déterminons dans l'ordre m, (t') et m'.



8. L'ELLIPSE

Il existe deux façons de définir une ellipse :

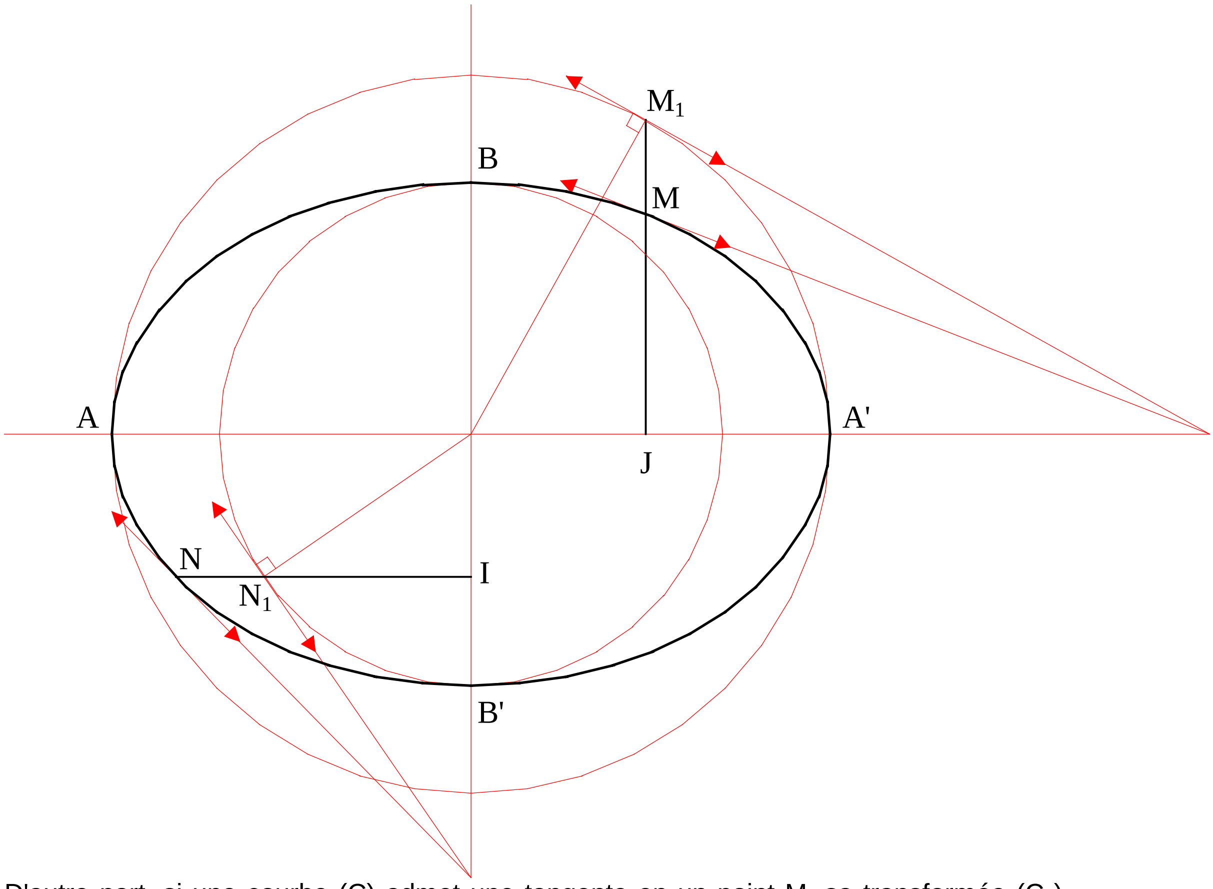
- comme la transformation d'un cercle par une affinité d'axe et de rapport donnés (8.1),

à partir de deux de ses diamètres conjugués (8.2), qui sont souvent la projection de diamètres perpendiculaires d'un cercle situé sur un plan quelconque (8.3).

8.1 Définition par affinité du cercle

Toute ellipse de grand axe AA' = 2a et de petit axe BB' = 2b peut être considérée comme l'une de ces deux transformées :

- la transformée de son cercle principal dans l'affinité orthogonale d'axe AA' et de rapport $\frac{b}{a}$ (ou $-\frac{b}{a}$), soit $\frac{MJ}{M_1J} = \frac{b}{a}$.
- la transformée de son cercle secondaire dans l'affinité orthogonale d'axe BB' et de rapport $\frac{a}{b}$ (ou $-\frac{a}{b}$) soit $\frac{NI}{N_1I} = \frac{a}{b}$.

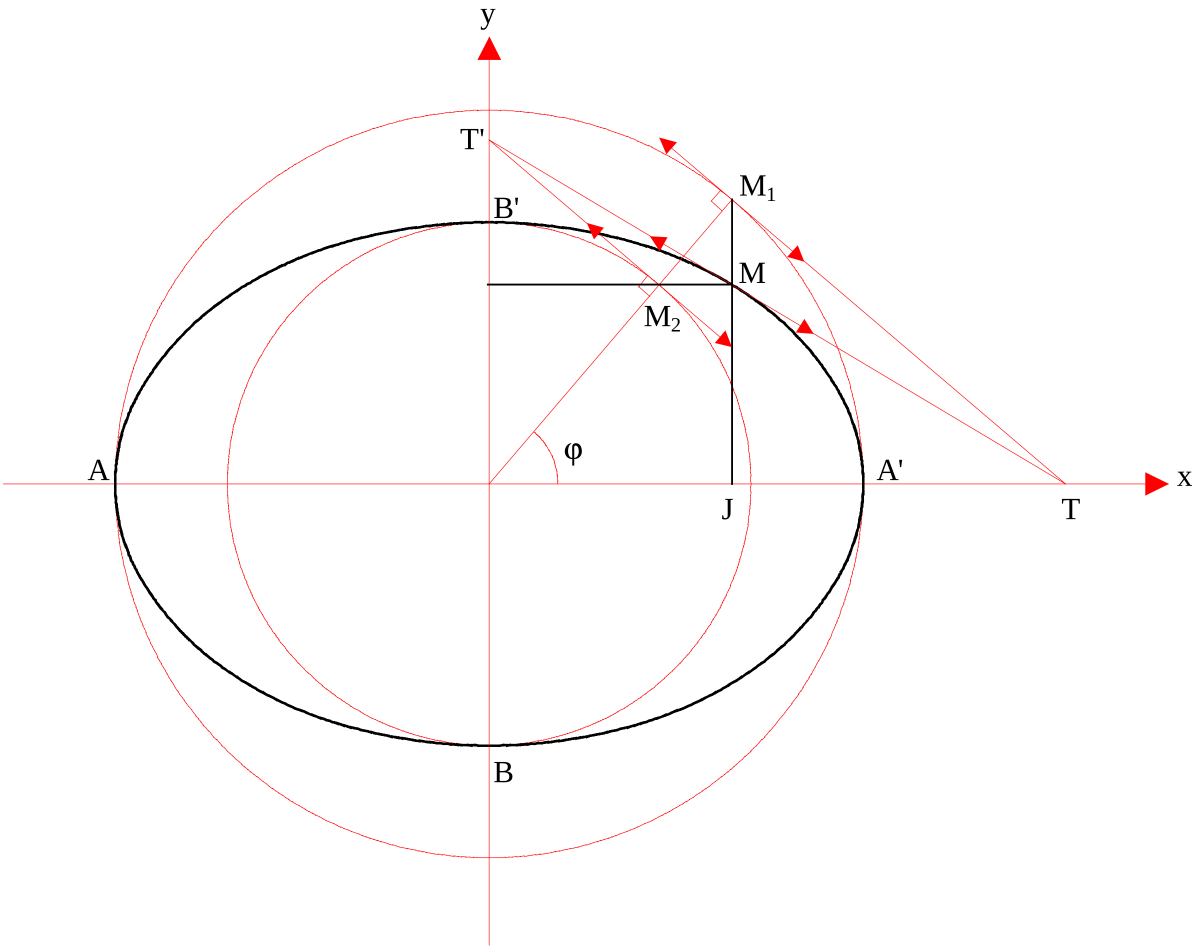


D'autre part, si une courbe (C) admet une tangente en un point M, sa transformée (C_1) par affinité admet également une tangente en un point M_1 transformé du point (M) par la même affinité.

Les deux tangentes se correspondent dans l'affinité. L'ensemble des points doubles (ou invariants) de l'affinité étant l'axe de l'affinité, les deux tangentes sont sécantes sur cet axe.

8.1.1 Construction

Connaissant le cercle principal ou le cercle secondaire d'une ellipse, le point (M) se construit par affinité d'axe AA' de la tangente en (M_1) au cercle principal ou par affinité d'axe BB' de la tangente en (M_2) au cercle secondaire.
Les trois points (T), (M) et (T') sont alignés.

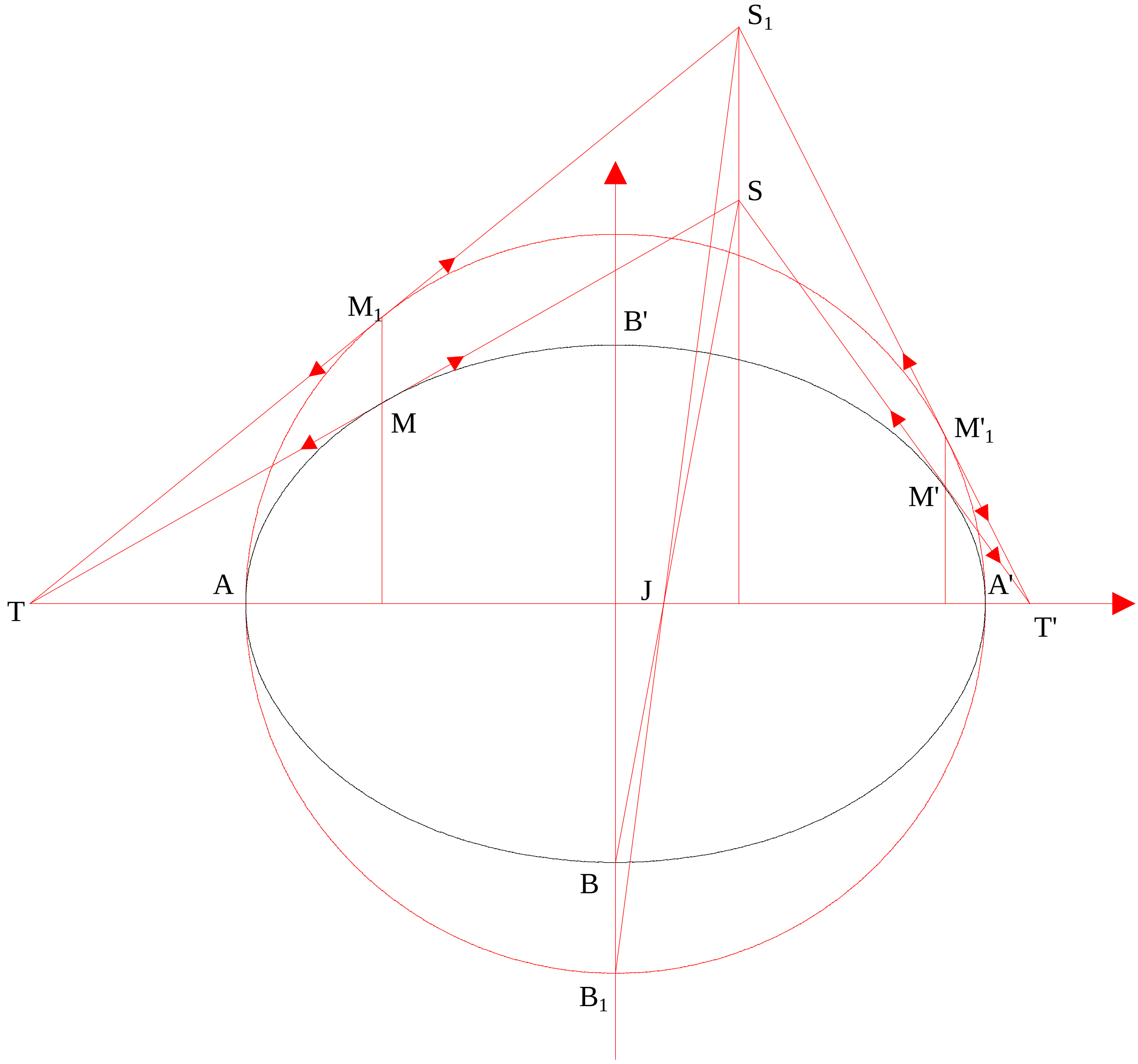


Pour ne pas avoir à manipuler les rapports d'affinité et réduire le nombre de constructions, il est possible de construire un point M de l'ellipse en utilisant deux points M_1 et M_2 situés sur un même rayon, l'un sur le cercle principal et l'autre sur le cercle secondaire.
Tout couple de points (M_1,M_2) génère un point de l'ellipse

8.1.2 Problèmes

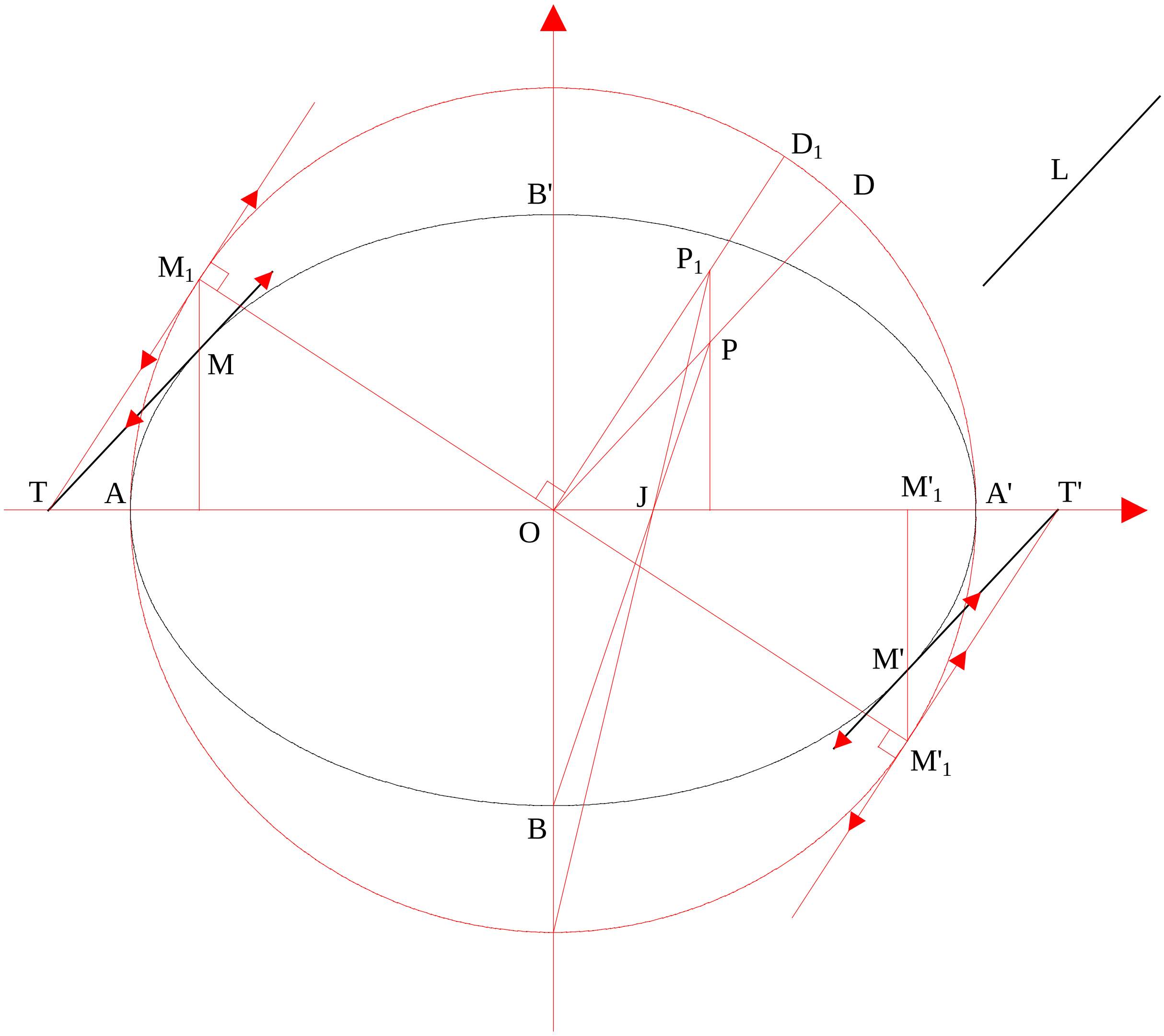
8.1.2.1 Mener les tangentes à une ellipse passant par un point

On détermine le transformé S_1 du point S par l'affinité transformant l'ellipse en son cercle principal.
On recherche ensuite les tangentes menées par S_1 au cercle principal.
On détermine enfin par affinité inverse les tangentes (ST) et (ST') à l'ellipse.



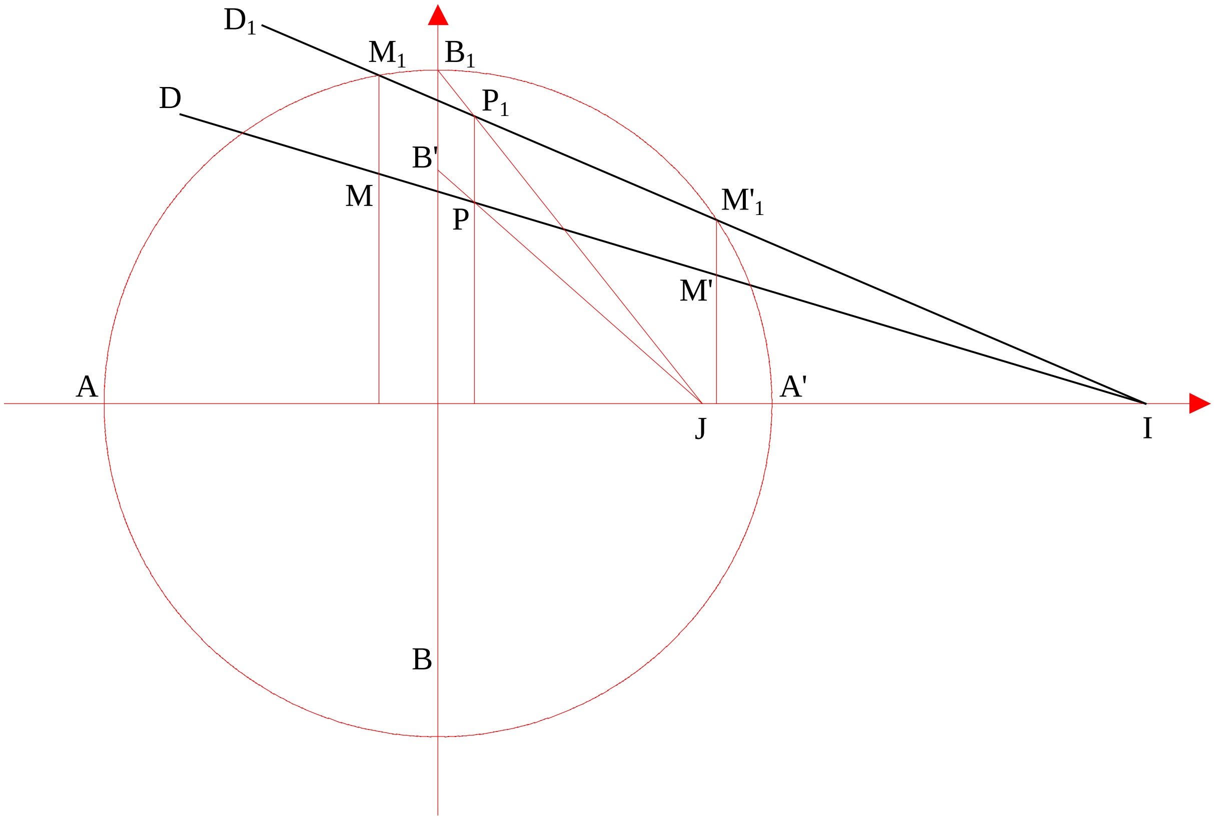
8.1.2.2 Mener les tangentes à une ellipse parallèles à une direction

Soit (L) une direction donnée. On recherche les tangentes parallèles à (L) avec une ellipse d'axes (AA') et (BB').
On mène par (O), centre de l'ellipse, une parallèle (D) à (L). Considérant l'affinité qui transforme l'ellipse en son cercle principal, on en déduit (D_1) transformée de (D).
On construit ensuite les tangentes au cercle principal (M_1T) et (M'_1T') parallèles à (D_1).
Par affinité inverse, on en déduit les tangentes (MT) et (M'T') à l'ellipse parallèles à (L).



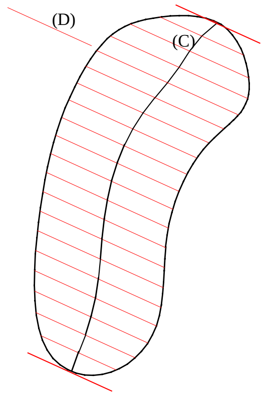
8.1.2.3 Trouver l'intersection d'une droite et d'une ellipse

Soit (D) une droite donnée dont on recherche les intersections avec une ellipse. L'ellipse elle-même est connue par ses axes (AA') et (BB').
On considère l'affinité transformant l'ellipse en son cercle principal. L'axe de l'affinité est alors l'axe (AA').
Pour construire la droite (D_1) transformée de (D) selon la même affinité, on choisit un point J quelconque sur (AA'). J est un point double, donc invariant dans l'affinité. La droite (B'J) coupe la droite (D) en un point P. Connaissant B', point de l'ellipse, nous connaissons son transformé B_1 qui est sur le cercle principal. (B'J) se transforme donc en (B_1J), ce qui nous donne le point P_1 transformé du point P.
D'autre part, la droite (D) coupe l'axe de l'affinité en un point double I. Le point I appartient donc également à la transformé (D_1) de (D). (D_1) est donc déterminée par (I) et (P_1). Les intersections de (D1) avec le cercle principal donnent les points M_1 et M'_1 et donc par affinité inverse les points M et M', intersections de (D) avec l'ellipse.

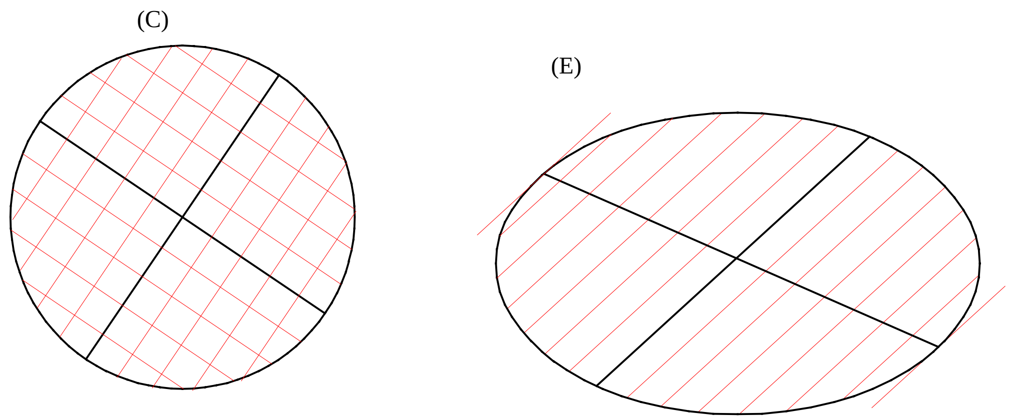


8.2 Définition par deux diamètres conjugués

On appelle courbe diamétrale conjuguée d'une direction (D) le lieu des milieux des cordes parallèles à (D). Cette courbe passe par les points de contact des tangentes parallèles à (D).



Dans le cas d'un cercle, la courbe diamétrale conjuguée d'une direction (D) est le diamètre du cercle perpendiculaire à cette direction.
Deux diamètres perpendiculaires d'un cercle sont l'un à l'autre leur courbe diamétrale. Ils portent le nom de diamètres conjugués.



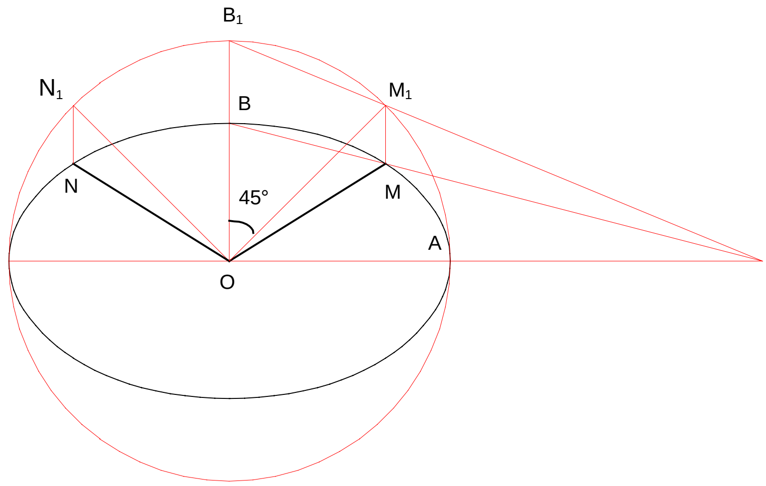
Par affinité ou par projection, deux diamètres perpendiculaires d'un cercle se transforment en un système de diamètres conjugués. Il arrive souvent que, dans une épure, l'ellipse soit définie uniquement par deux diamètres conjugués.
Pour la construire, on peut envisager soit de déterminer ses axes à partir de ces diamètres conjugués (8.2.1), soit de repérer des points de son contour directement à partir de ces mêmes diamètres (8.2.2).

8.2.1 Construction par détermination des axes

Le but est, une fois les axes déterminés, de construire l'ellipse avec précision. Deux cas peuvent se présenter :

8.2.1.1 Les diamètres conjugués sont égaux

Ils sont donc les transformés de deux diamètres perpendiculaires du cercle principal formant un angle de 45° avec l'axe de l'affinité.
Les deux axes de l'ellipse sont alors les bissectrices intérieures et extérieures de l'angle formé par les deux diamètres conjugués.
M_1 ayant été trouvé à partir de M, il nous est possible de déduire B à partir de B_1 par l'affinité inverse.

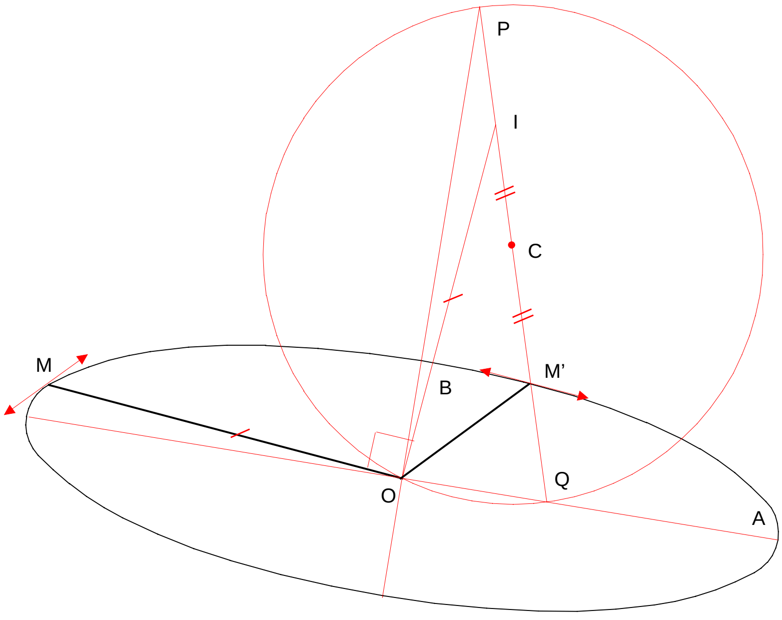


8.2.1.2 Les diamètres conjugués sont inégaux

Etant donné deux diamètres OM et OM_1, on détermine les axes de la manière suivante :

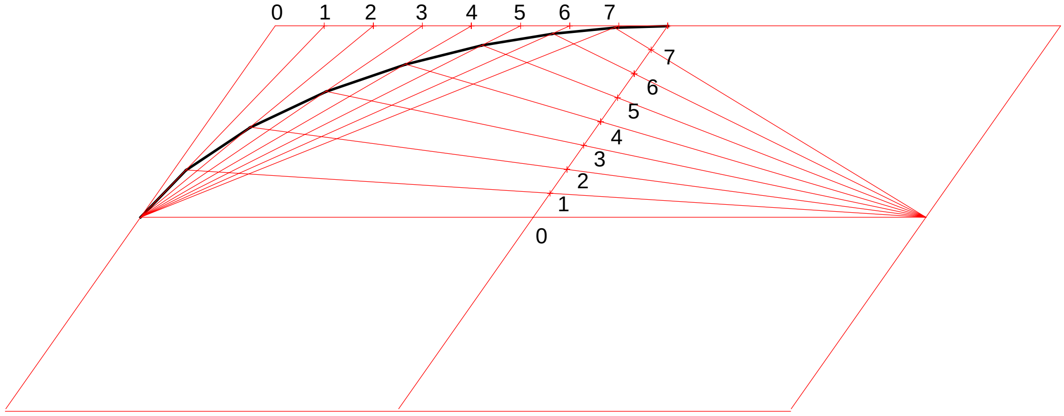
- Par O, on construit la perpendiculaire à OM soit (D).
- Sur (D), on mesure OI = OM
- On trace le segment IM' et on repère le milieu C de ce segment.
- On trace le cercle de centre C et de rayon CO qui rencontre IM' en P et Q.

Les axes de l'ellipse ont pour directions OP e OQ et pour longueurs respectives M'P et M'Q.



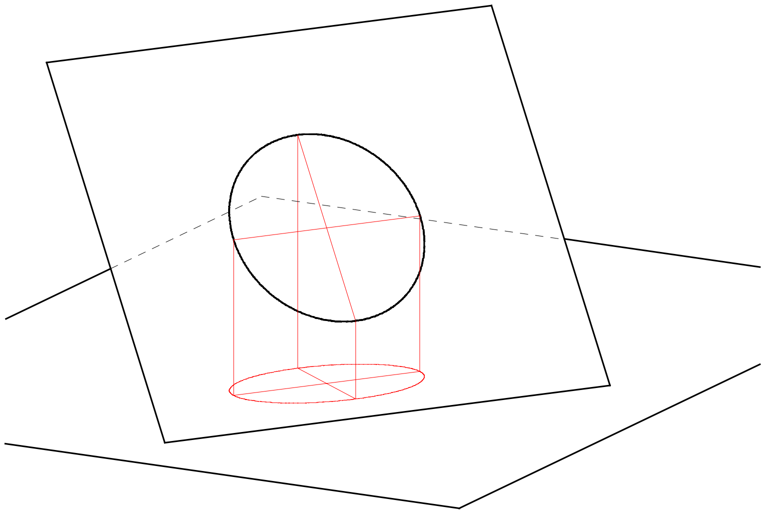
8.2.2 Construction par points

La méthode permet de construire l'ellipse en déterminant un nombre suffisant de points de son contour.
Etant donné deux diamètres conjugués MM' et NN', on construit un parallélogramme ayant pour côtés les droites portant les tangentes en M, M', N et N'.
Chaque quart d'ellipse peut être construit à partir d'un nombre fini de points, obtenus de la manière suivante :



8.3 L'ellipse comme projection d'un cercle

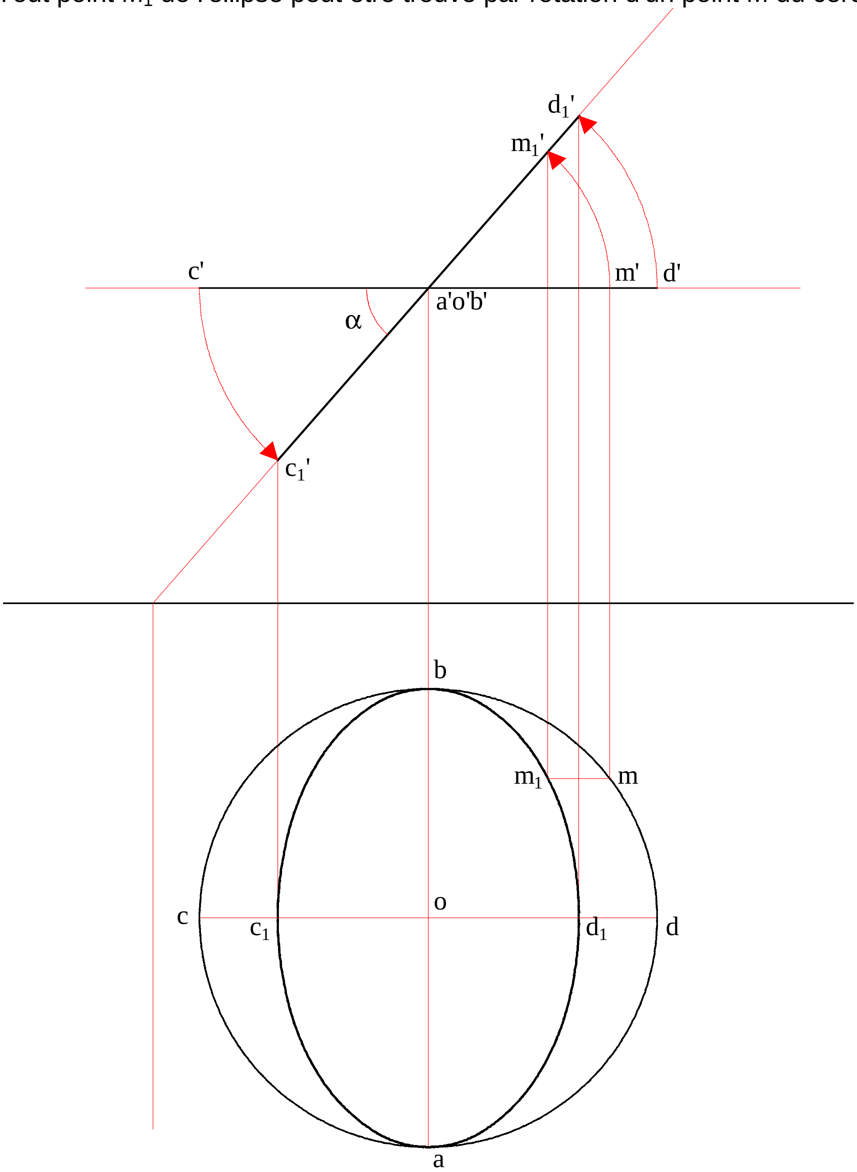
La projection orthogonale d'un cercle sur un plan est une ellipse.
Le grand axe de cette ellipse est la projection du diamètre du cercle parallèle au plan de projection.
Le petit axe de l'ellipse est la projection du diamètre du cercle porté par la ligne de plus grande pente passant par le centre du cercle.
Réciproquement, toute ellipse peut être considérée comme la projection orthogonale d'un cercle.



Par ailleurs, tout couple de diamètres perpendiculaires du cercle sont projetés en diamètres conjugués de l'ellipse. Cette propriété est valable également pour les projections obliques (ombres, par exemple).

8.3.1 Construction de la projection d'un cercle situé sur un plan de bout

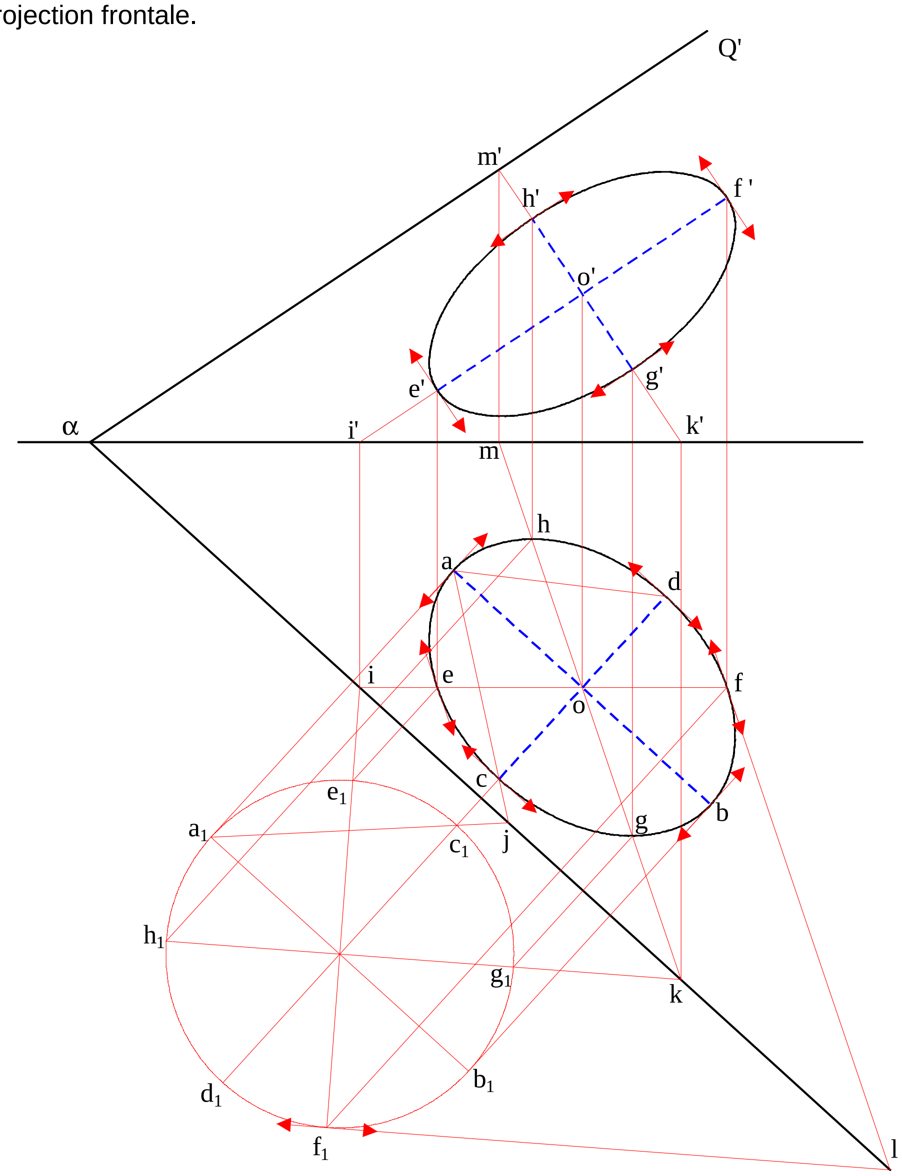
La projection d'un cercle situé dans un plan de bout peut se faire en représentant d'abord le cercle horizontal de même centre et de même diamètre. Il suffit d'appliquer ensuite à ce cercle une rotation autour de son diamètre de bout (AB).
La projection horizontale du cercle est une ellipse ayant pour grand axe le diamètre de bout (ab) inchangé lors de la rotation, et pour petit axe le diamètre de front (c_1d_1).
Tout point M_1 de l'ellipse peut être trouvé par rotation d'un point M du cercle.



8.3.2 Construction d'un cercle situé sur un plan quelconque

Pour déterminer les deux projections d'un cercle, de centre O et de rayon R connus, appartenant à un plan donné, le principe est de construire les ellipses correspondantes en déterminant leurs axes.
Pour cela, il suffit de rabattre le plan du cercle sur le plan horizontal et de représenter sur le cercle rabattu puis de relever les éléments suivants :

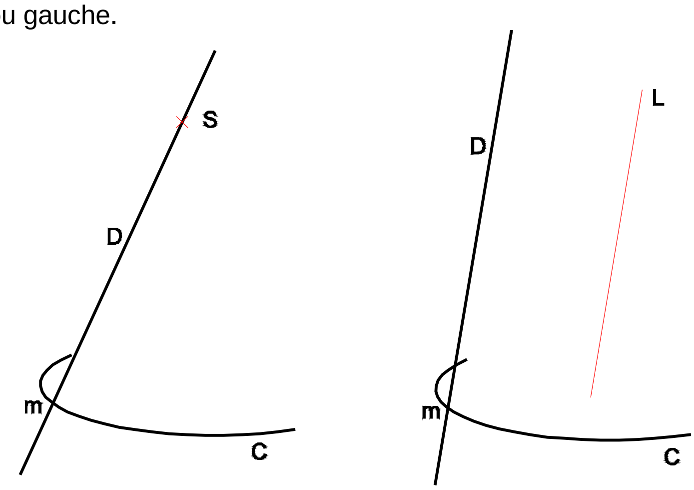
- le diamètre horizontal, grand axe de l'ellipse en projection horizontale
- le diamètre de plus grande pente par rapport au plan horizontal, petit axe de l'ellipse en projection horizontale.
- le diamètre frontal, grand axe de l'ellipse en projection frontale
- le diamètre de plus grande pente par rapport au plan frontal, petit axe de l'ellipse en projection frontale.



9. CÔNES ET CYLINDRES

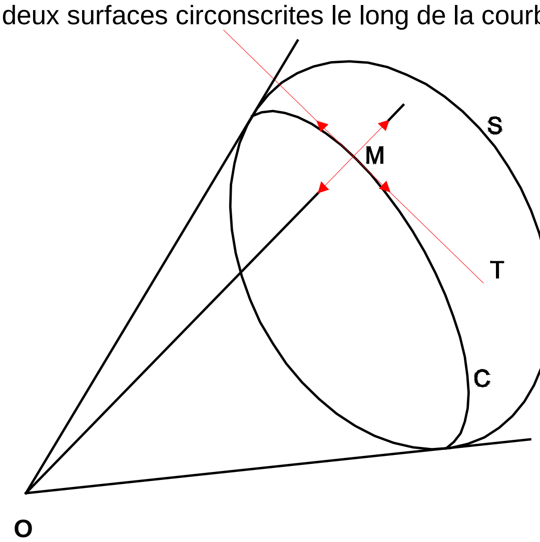
9.1 Définition

On appelle surface conique (ou cylindrique) la surface engendrée par une droite mobile (D) passant par un point S (ou parallèle à une direction donnée (L) et s'appuyant sur une courbe plane ou gauche.



9.2 Cône ou cylindre circonscrit à une surface

Soit une surface (S) et un point O. Considérons l'ensemble des plans tangents à (S) passant par O. Les points de contact de ces plans avec la surface (S) déterminent une courbe (C) tracée sur (S).
Soit (M) un point de la courbe (C) et (MT) la tangente à (C). Le plan tangent à (S) en M est aussi un plan tangent pour le cône de sommet O et de directrice (C). Ce cône et la surface (S) sont donc deux surfaces circonscrites le long de la courbe (C).

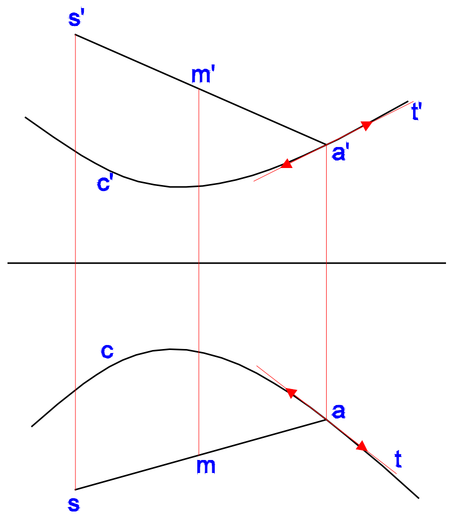


9.3 Détermination des cônes et cylindres

Une surface est dite *déterminée* quand on peut construire le plan tangent en chacun de ses points.

9.3.1 Les deux projections de la directrice sont connues

On se donne une des deux projections d'un point d'une surface conique ou cylindrique, trouver l'autre projection du point et le plan tangent à la surface en ce point :
On construit la génératrice (sm) qui coupe la courbe en a, d'où m'.
Le plan tangent est déterminé par (SAT), T étant la tangente à la courbe (C) en A.

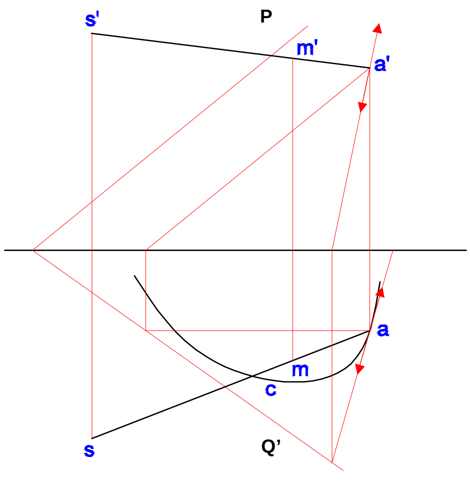


9.3.2 Le plan de la directrice et une de ses projections sont connus

On connaît la projection horizontale de la courbe plane (C) et le plan qui la porte.

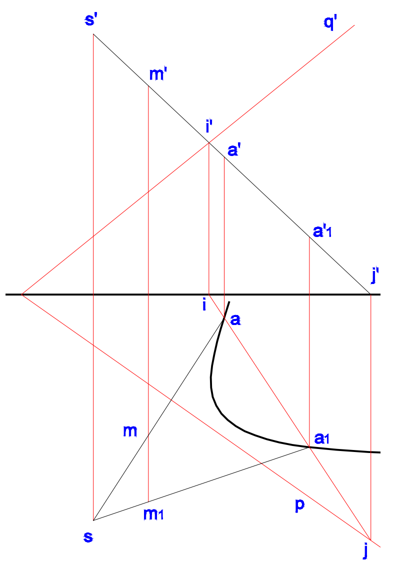
9.3.2.1 Cas 1

On se donne m, trouver m' et le plan tangent.



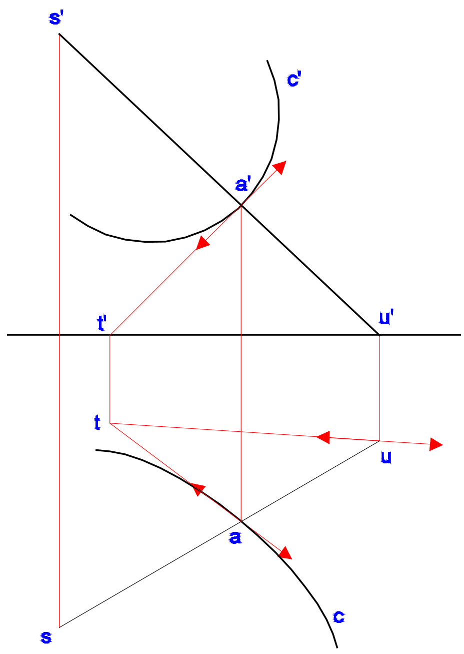
9.3.2.2 Cas 2

On se donne cette fois la projection frontale m' du point de la surface.
Pour déterminer m et le plan tangent en ce point, on s'aide d'un plan auxiliaire projetant frontalement la droite (SM) dont on recherche la trace (IJ) sur le plan portant la courbe (C). La projection horizontale de cette trace (IJ) coupe la courbe (C) en un ou deux points A et A_1, d'où m et m_1.



9.4 Trace sur un plan de projection

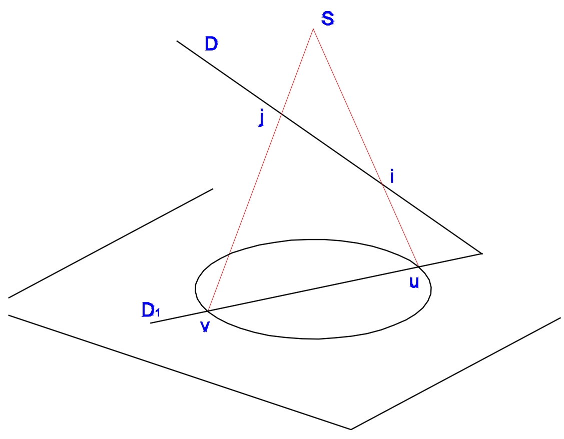
On recherche ici la trace du plan tangent sur le plan horizontal.
Pour ce faire, on recherche la trace horizontale d'une génératrice (SA) et la trace du plan tangent le long de cette génératrice.



9.5 Intersection avec une droite

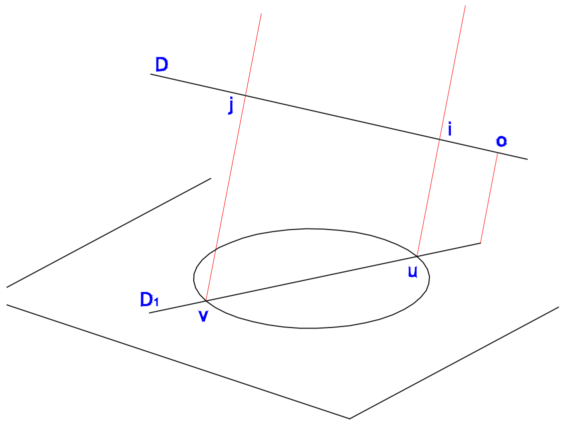
9.5.1 Cas du cône

Méthode : On considère le plan déterminé par le sommet (S) du cône et la droite (D).
On recherche ensuite la trace de ce plan sur le plan de base du cône (plan de la courbe directrice). Cette trace coupe la directrice en deux points U et V.
Les droites (SU) et (SV) appartiennent au plan considéré et coupe donc la droite (D) en deux points I et J, solutions du problème.



9.5.2 Cas du cylindre

Méthode : Par un point O de la droite (D) on mène une parallèle aux génératrices du cylindre.
On considère la plan déterminé par cette droite et la droite (D).
On recherche la trace de ce plan sur le plan de la courbe directrice, d'où les points U et V par lesquels on mène des parallèles aux génératrices. Les intersections I et J de ces droites avec la droite (D) sont les points recherchés.

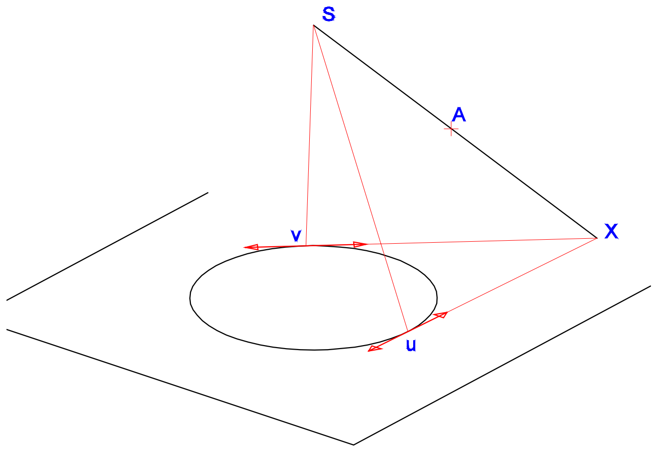


9.6 Problèmes sur les plans tangents

9.6.1 Plan tangent passant par un point donné

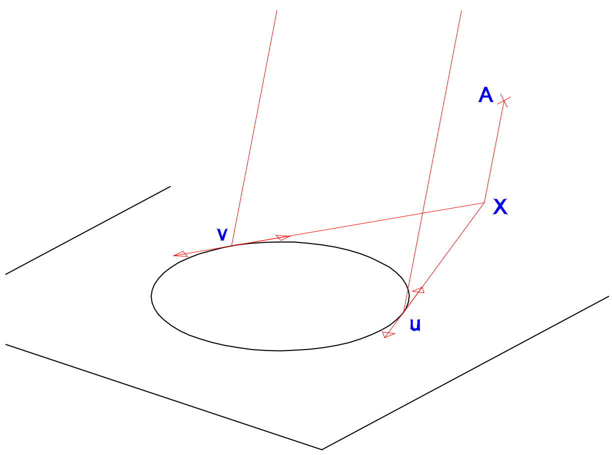
9.6.1.1 Cas du cône

Le plan tangent passant par le point A, la droite (SA) appartient à ce plan. Soit X la trace de (SA) sur le plan de la courbe directrice. Par X on mène les tangentes à la courbe (XU) et (XV).
Les plans tangents au cône passant par A sont les plans (SXU) et (SXV). Si (SA) est parallèle au plan de la base du cône, on recherchera les tangentes à la courbe parallèles à (SA).



9.6.1.2 Cas du cylindre

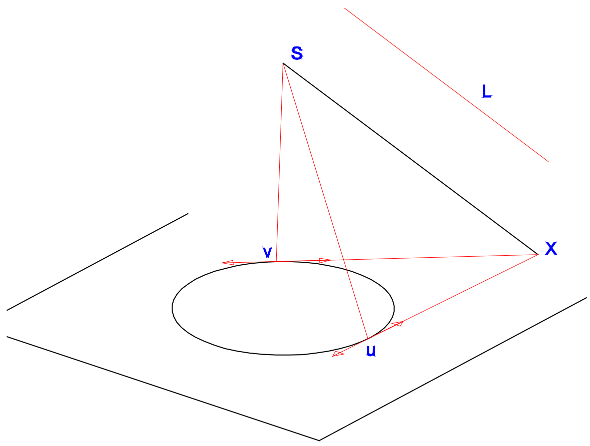
Tous les plans tangents à un cylindre sont parallèles aux génératrices.
Par A on mène donc une telle parallèle.
Soit X sa trace sur le plan de base.
Par X on mène les tangentes à la courbe de base. Les plans tangents sont les plans (AXU) et (AXV).



9.6.2 Plan tangent parallèle à une direction donnée

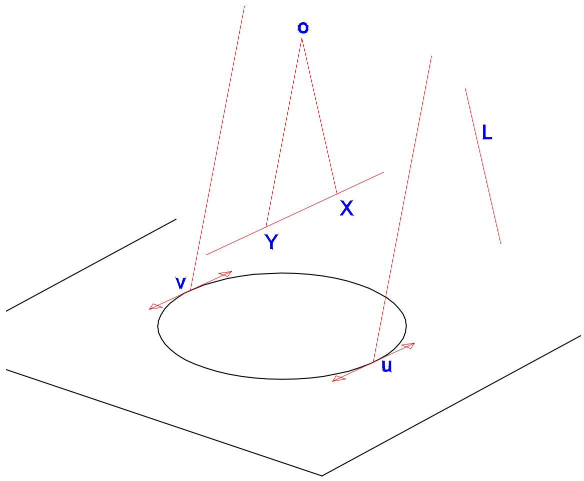
9.6.2.1 Cas du cône

Les plans tangents à un cône passent par le sommet. Les plans tangents contiendront donc la parallèle à (L) issue du sommet (S).



9.6.2.2 Cas du cylindre

Par un point quelconque (O) on mène une parallèle aux génératrices et une parallèle à la direction (L).
On recherche ensuite les traces de ces droites sur le plan de base du cylindre. La droite (XY) ainsi déterminée donne la direction des tangentes à la courbe directrice.
Les plans tangents sont déterminés par ces tangentes et les directrices aux points de tangence.

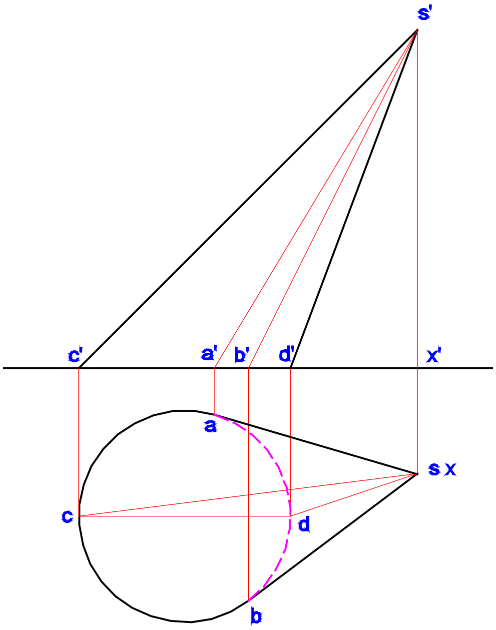


9.7 Contours apparents des cônes et des cylindres

La recherche du contour apparent d'une projection de surface revient à trouver les plans tangents à la surface parallèles à la direction de projection.
Ainsi, trouver le **contour apparent horizontal** d'une surface consiste à déterminer les traces horizontales des **plans tangents verticaux**.
De manière analogue, trouver le **contour apparent frontal** consiste à déterminer les traces frontales des **plans tangents de bout**.

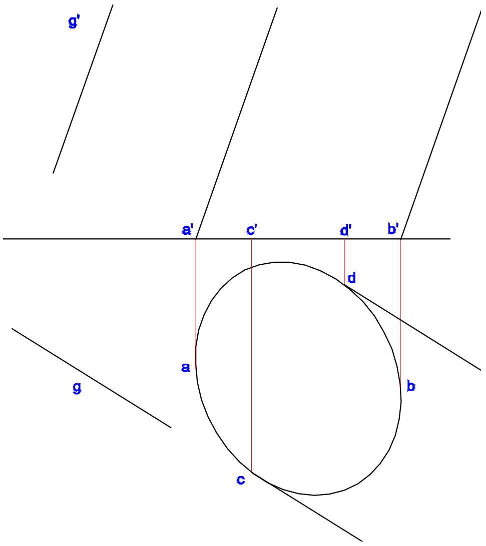
9.7.1 Directrice dans un plan horizontal

9.7.1.1 Cas du cône



Contour apparent horizontal :
On mène au cône des plans tangents verticaux. Ces plans sont parallèles à une verticale. On mène donc par S une verticale (SX) afin de construire ces plans.
Contour apparent frontal :
On mène par le sommet du cône des plan tangents de bout.

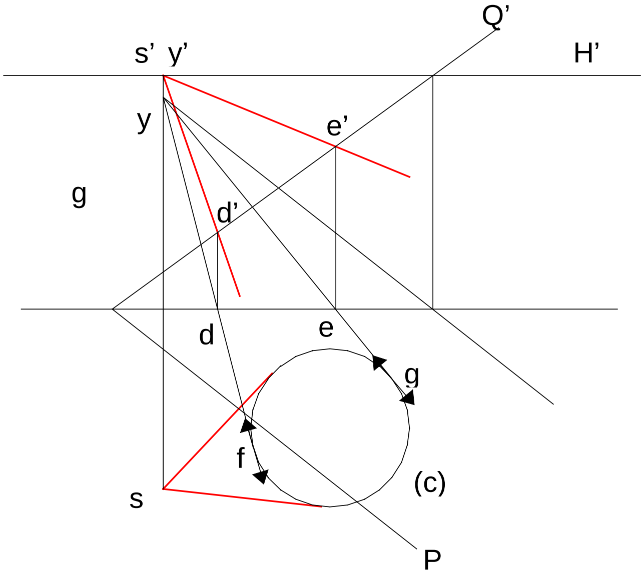
9.7.1.2 Cas du cylindre



Contour apparent horizontal :
On mène des plans tangents verticaux parallèles à (G), direction des génératrices.
Contour apparent frontal :
On mène des plans tangents de bout parallèles à (G), direction des génératrices.

9.7.2 Directrice dans un plan quelconque

On recherche ici le contour apparent d'un cône dont la base est dans un plan quelconque et dont on ne connaît que la projection horizontale
Contour apparent horizontal : par le sommet S, on mène les tangentes à la directrice.
Contour apparent frontal : les plans tangents à la surface sont de bout. On cherche l'intersection Y de la droite de bout passant par S avec le plan PαQ'. On utilise pour cela le plan auxiliaire horizontal H'. Par Y, on mène les tangentes à la directrice pour déterminer les points de tangence F et G. Le contour apparent frontal est constitué de SF et SG.



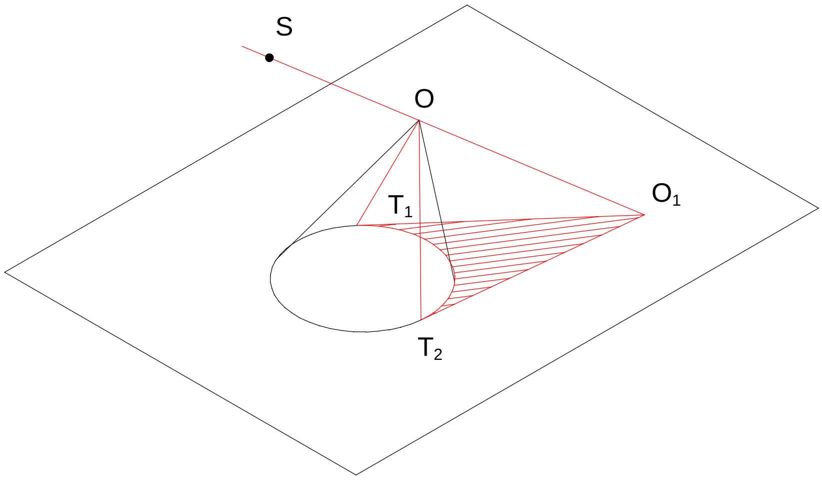
9.8 Ombres des cônes et des cylindres

La représentation des ombres de cônes et cylindres revient à trouver des plans tangents à ces surfaces.
Les traces de ces plans tangents sur un plan donné permettent de déterminer l'ombre portée de la surface.
Les droites d'intersection de ces plans tangents avec la surface délimitent une zone éclairée et une zone ombrée et permettent ainsi de déterminer l'ombre propre de la surface.

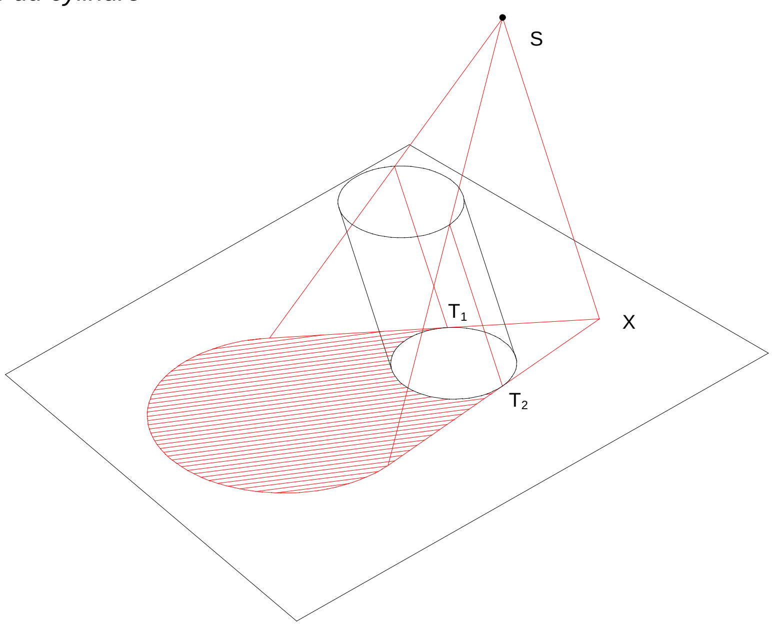
9.8.1 Ombre au flambeau

Plans tangents à la surface passant par un point donné (cf. 9.6.1).

9.8.1.1 Cas du cône



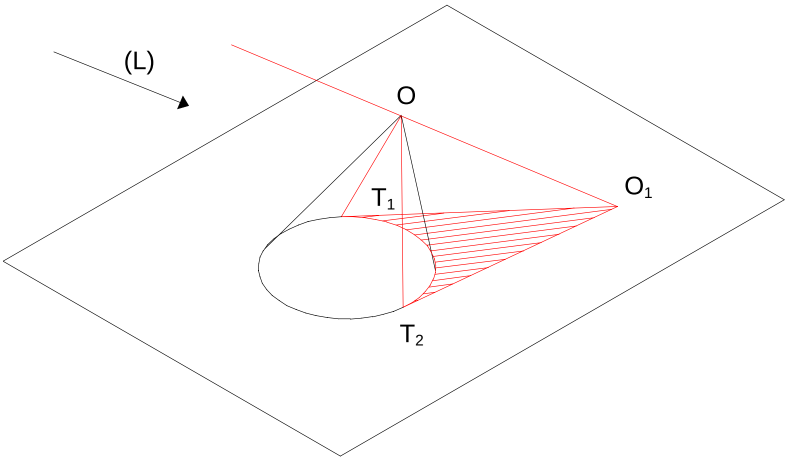
9.8.1.2 Cas du cylindre



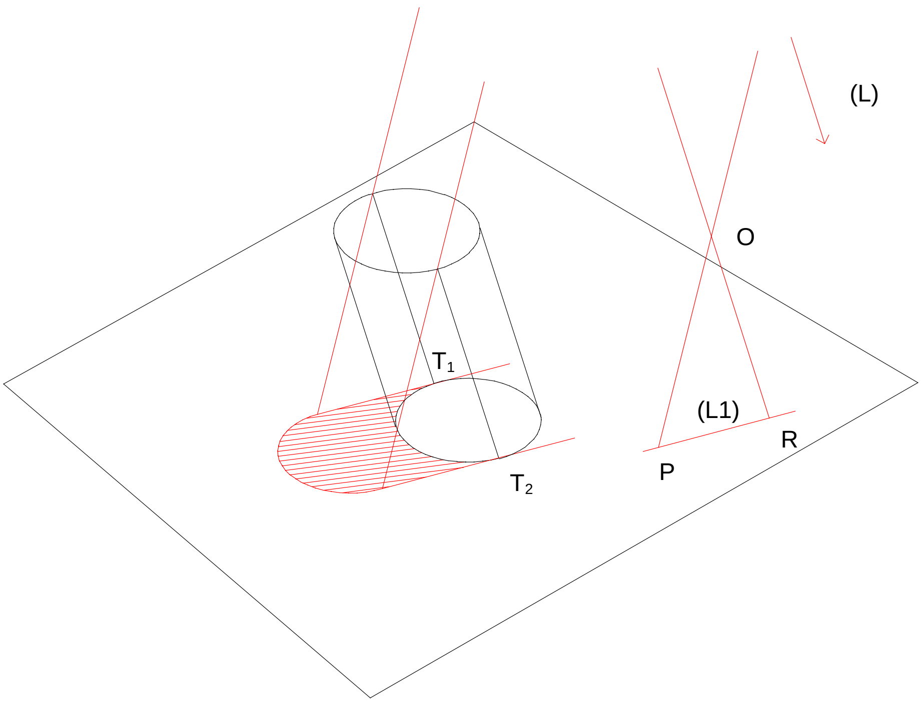
9.8.2 Ombre au soleil

Plans tangents à la surface parallèles à une direction donnée (cf. 9.6.2).

9.8.2.1 Cas du cône



9.8.2.2 Cas du cylindre



10. Section plane des cônes et cylindres

10.1 Définition

On considère une section plane comme le lieu de rencontre des génératrices du cône ou du cylindre avec un plan sécant.
L'intersection du plan tangent le long d'une génératrice avec le plan sécant donne la tangente en un point à la section plane.
Nous nous intéressons plus précisément, dans ce chapitre, aux cônes et cylindres de révolution c'est-à-dire pouvant être obtenus par révolution d'une génératrice autour d'un axe. Ces volumes ont une section droite circulaire et sont circonscrits à une sphère.

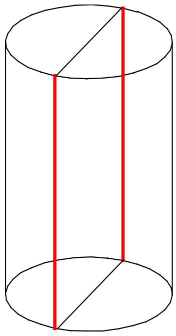
10.2 Détermination de la section

10.2.1 Nature de la section

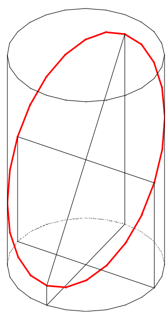
La section d'un cône ou d'un cylindre est la projection depuis un point ou parallèlement à une direction de la base sur le plan sécant. Cette figure peut être construite par points en recherchant les projections d'un ensemble de points de la base sur le plan sécant.
Dans le cas des cônes et cylindres à base circulaire (circonscrits à une sphère), cette section est une figure régulière qui peut être, selon la disposition du plan sécant par rapport aux génératrices, une ou deux droites une ellipse, une parabole ou une hyperbole.
Nous nous intéresserons dans les parties suivantes de ce chapitre uniquement aux sections elliptiques de ces volumes.

10.2.1.1 Section d'un cylindre de révolution

Si le plan est tangent, son intersection avec le cylindre se limite à une droite.
Dans le cas où le plan sécant est parallèle aux génératrices du cylindre, son intersection avec la surface du cylindre se limite à **deux droites**.
Dans le cas courant, la section d'un cylindre par un plan est une **ellipse** qui a les caractéristiques suivantes :



Deux droites

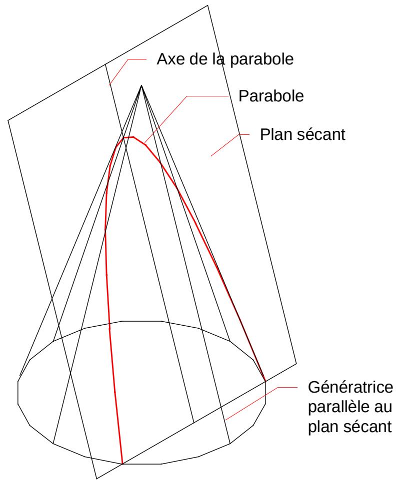


Ellipse

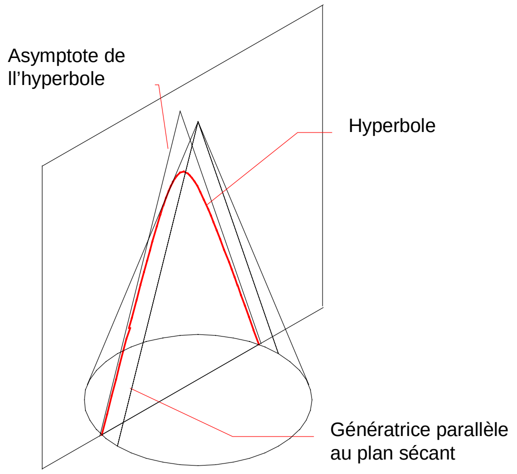
10.2.1.2 Section d'un cône de révolution

Si le plan est tangent, son intersection avec le cylindre se limite à une droite.

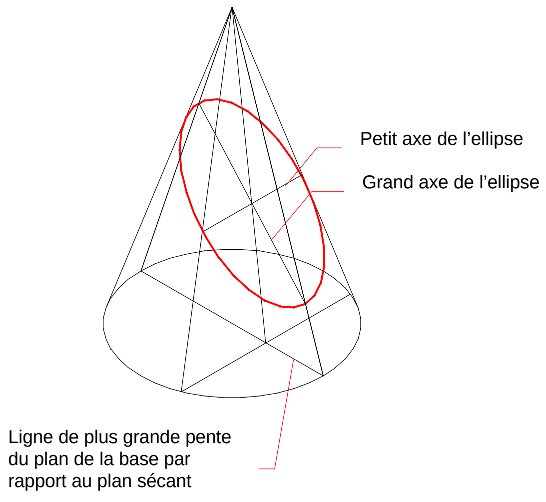
Dans le cas où le plan sécant est parallèle à une génératrice du cône, c'est-à-dire qu'il forme avec le plan de la base un angle **égal** à celui que font les génératrices avec ce plan, son intersection avec la surface du cylindre est une parabole ayant pour axe une parallèle à la génératrice parallèle au plan sécant.



Dans le cas où le plan sécant est parallèle à deux génératrices du cône, c'est-à-dire qu'il forme avec le plan de la base un angle **supérieur** à celui que font les génératrices avec ce plan, son intersection avec la surface du cylindre est une hyperbole ayant pour asymptotes deux parallèles aux deux génératrices citées ci-dessus.

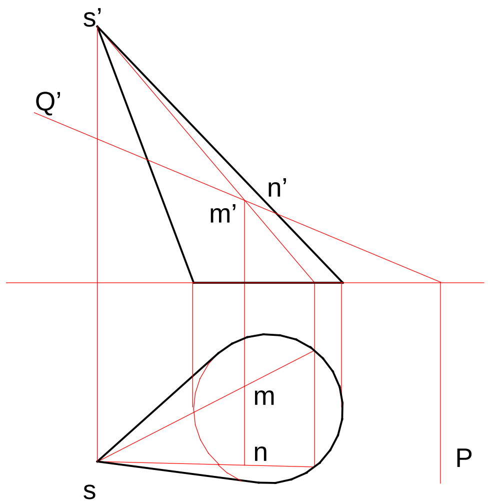


Dans le cas où le plan sécant n'est parallèle à aucune génératrice, c'est-à-dire qu'il forme avec le plan de la base un angle **inférieur** à celui que font les génératrices avec ce plan, la section du cône est une ellipse.
Le grand axe de cette ellipse est la ligne de plus grande pente du plan sécant par rapport au plan de la base. Cette ligne passe par le transformé du centre du cercle. Le petit axe de l'ellipse est la parallèle au plan de la base passant par le milieu du grand axe.
Dans le cas d'un cône à base elliptique, les axes de la base permettent de définir un système de diamètres conjugués.



10.2.2 Cas d'un plan perpendiculaire à un plan de projection

L'intersection d'un plan de bout avec un cône ou un cylindre peut se faire en repérant les intersections du plan avec des génératrices directement sur la projection frontale.
Il est intéressant de déterminer, en particulier, la section des génératrices faisant partie des contours apparents horizontal et frontal.



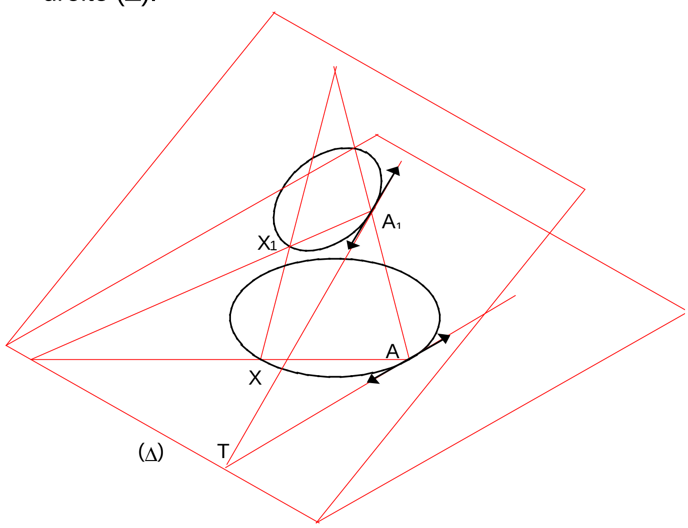
10.2.3 Cas d'un plan quelconque

Dans le cas de la section d'un cône ou d'un cylindre par un plan quelconque, deux méthodes sont envisageables :

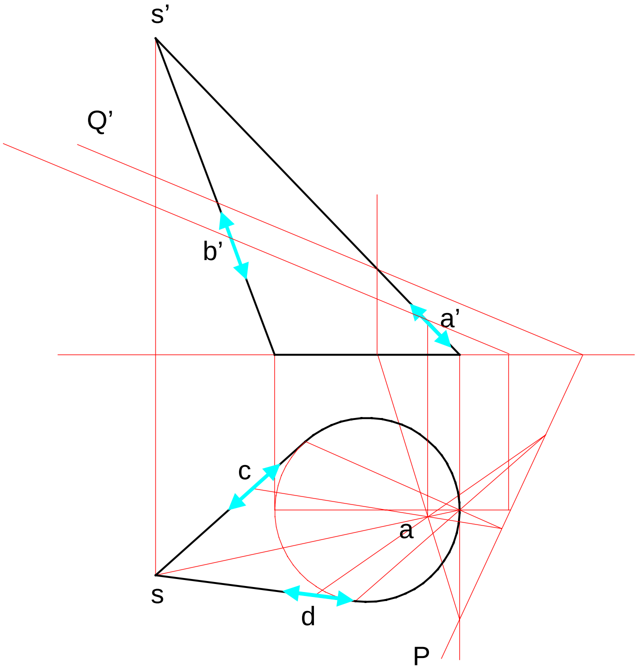
- effectuer un changement de plan pour se ramener au cas précédent en rendant le plan sécant de bout ou vertical.
- utiliser la généralisation de la méthode des sections indiquée pour les prismes et pyramides.

Cette dernière méthode comporte les étapes suivantes :

- on recherche l'intersection (Δ) du plan sécant et du plan de la courbe directrice.
- par le sommet (pour le cône) ou parallèlement aux génératrices (pour le cylindre), on mène une droite quelconque qui rencontre le plan de la directrice en un point X et la plan sécant en un point X_1. Il est courant de choisir comme droite (SX) une génératrice du cône ou du cylindre.
- toute génératrice partant d'un point A est coupée par le plan en un point A_1 tel que les droites (XA) et (X_1A_1), qui appartiennent à un même plan tangent, soient concourantes en un point de la droite (Δ).
- le plan tangent au volume en AA_1 contient la tangente à la directrice en A et la tangente à la section en A_1. Ces deux tangentes sont également concourantes en un point de la droite (Δ).



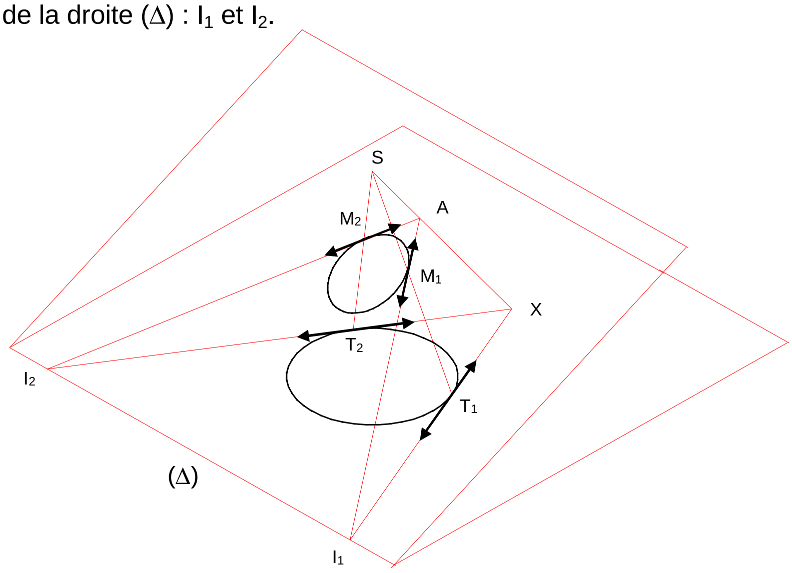
On s'intéressera plus particulièrement sur l'épure aux points d'intersection **génératrices appartenant aux contours apparents** horizontal et frontal avec le plan sécant ainsi qu'aux tangentes en ces points.



10.3 Tangentes à la section

10.3.1 Tangentes à la section passant par un point donné

La recherche des tangentes à la section passant par un point donné du plan sécant revient à trouver les plans tangents au volume passant par ce point (cf. 9.6.1).
Les tangentes AM_1 et AM_2 recherchées sont les intersections de ces plans tangents avec le plan sécant. Elles rencontrent les tangentes à la base XT1 et XT2 en deux points invariants de la droite (Δ) : I_1 et I_2.

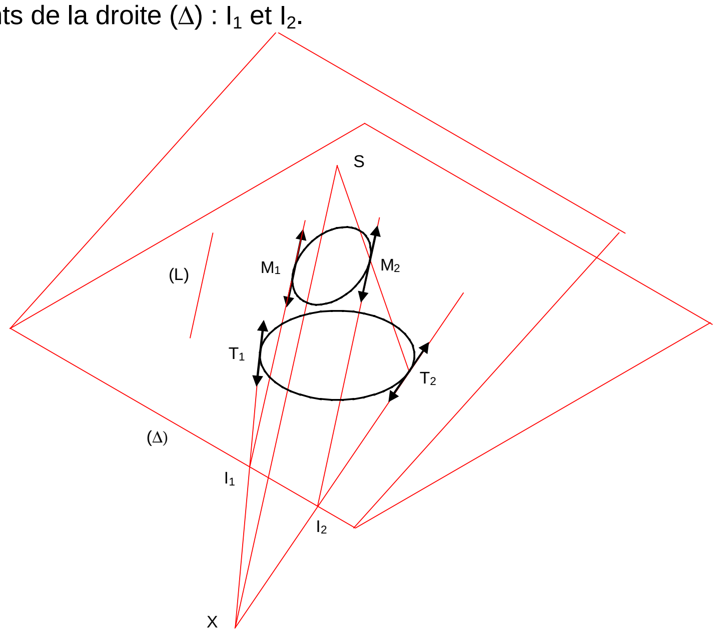


10.3.2 Tangentes à la section parallèles à une direction donnée

La recherche des tangentes à la section parallèles à une direction donnée revient à trouver les plans tangents au volume et parallèles à cette direction. (cf. 9.6.2).
Les tangentes AM_1 et AM_2 recherchées sont les intersections de ces plans tangents avec le plan sécant.

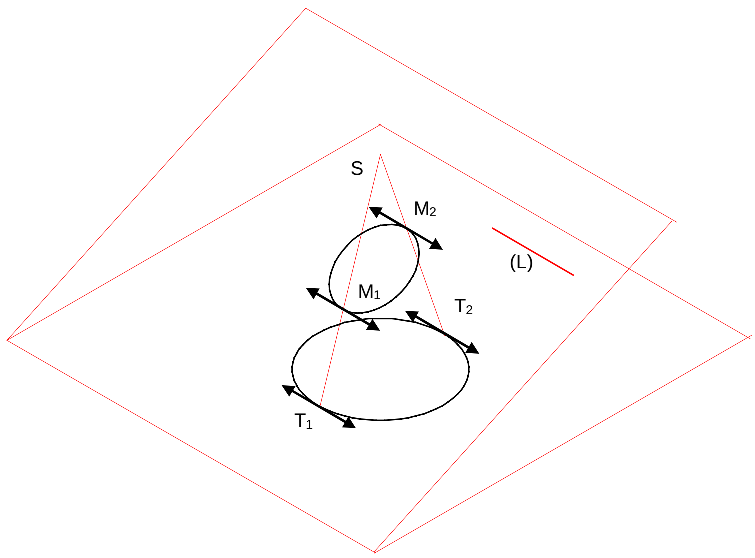
10.3.2.1 La direction rencontre le plan de la base

Les tangentes en M_1 et M_2 rencontrent les tangentes à la base en T1 et T2 en deux points invariants de la droite (Δ) : I_1 et I_2.



10.3.2.2 La direction est parallèle au plan de la base

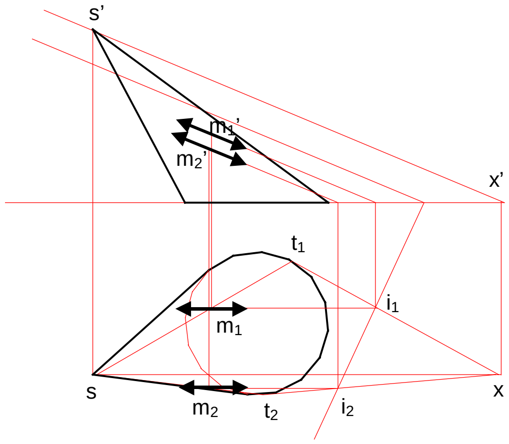
Les tangentes en M_1 et M_2 sont parallèles aux tangentes à la base parallèles à la direction (L).



10.3.3 Applications :

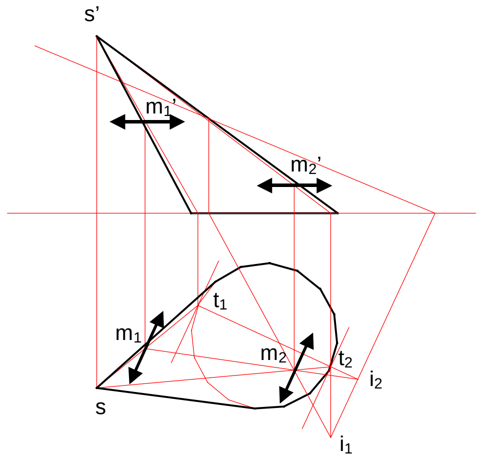
10.3.3.1 Trouver les points de la section à tangentes frontales

Par le point S on mène la droite parallèle aux frontales du plan sécant.
Depuis le point X d'intersection de cette droite avec le plan de la base, on mène les tangentes à la base aux points T_1 et T_2.
Les intersections des tangentes à la base avec la droite d'intersection des deux plans donnent les points I_1 et I_2 par lesquelles passent les tangentes frontales au cône.



10.3.3.2 Trouver les points de la section à tangentes horizontales

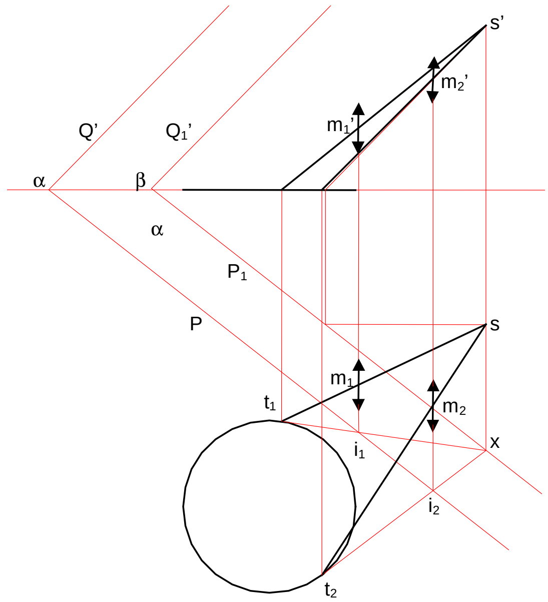
La droite passant par S et parallèle aux horizontales du plan sécant ne rencontre pas le plan de la base.
On mène alors, parallèlement à cette direction, les tangentes à la base aux points T_1 et T_2.
Les génératrices passant par ces deux points rencontrent le plan sécant en deux points M1 et M2 par lesquels passent les tangentes horizontales au cône.



10.3.3.3 Trouver les points de la section à tangentes de profil

10.3.3.4

La méthode consiste à mener par le sommet une droite de profil parallèle au plan sécant et de trouver le point X d'intersection de cette droite avec le plan de la base. La difficulté de ce problème vient donc essentiellement de la particularité des droites de profil.
Cette droite de profil appartient à un plan $P_1\beta Q_1$' parallèle au plan sécant. Le point X, trace de cette droite sur le plan horizontal appartient donc à la trace horizontale du plan $P_1\beta Q_1$'. Une fois le point X trouvé, la méthode s'apparente aux deux précédentes.



10.4 Développement de cônes et de cylindres de révolution

Pour effectuer le développement d'un cône ou d'un cylindre, il est utile d'effectuer celui du cercle ou de l'arc de cercle. Il existe, outre les définitions analytiques de ces grandeurs, des méthodes graphiques permettant une représentation approximative de la longueur d'un (arc de) cercle.

10.4.1 Développement approximatif du cercle

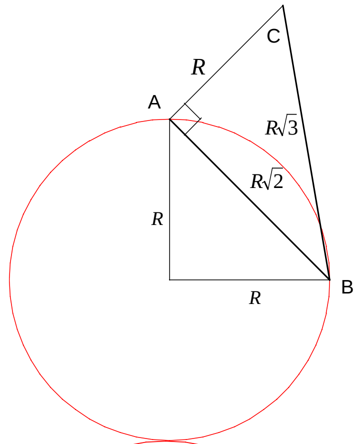
La première méthode d'approximation de la longueur d'un cercle tire profit du fait que :

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\cong\pi$$

à 4.10^{-4} près

On peut donc admettre que le périmètre du cercle est très proche du double de la somme des longueurs de AB et AC.

$$2\pi R\approx 2(AB+BC)$$



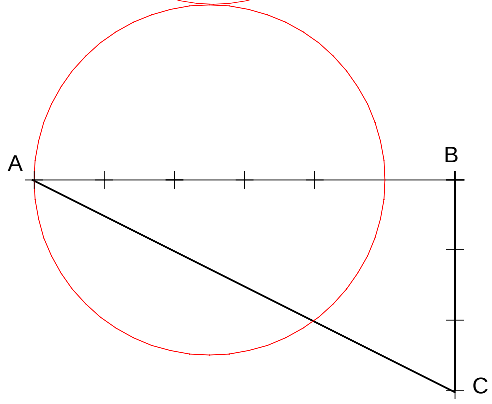
La seconde méthode d'approximation exploite le fait que :

$$\frac{6}{5}+\frac{3}{5}+\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}\cong\pi$$

à 5.10^{-5} près

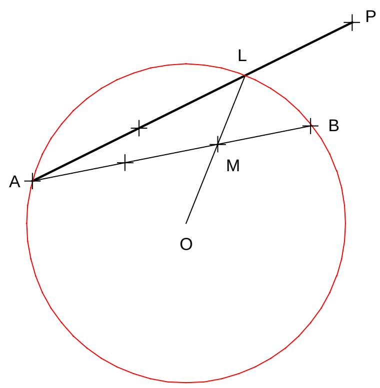
On peut admettre que le périmètre du cercle est très proche de celui du triangle ABC.

$$\boxed{2\pi R\approx AB+BC+CA}$$



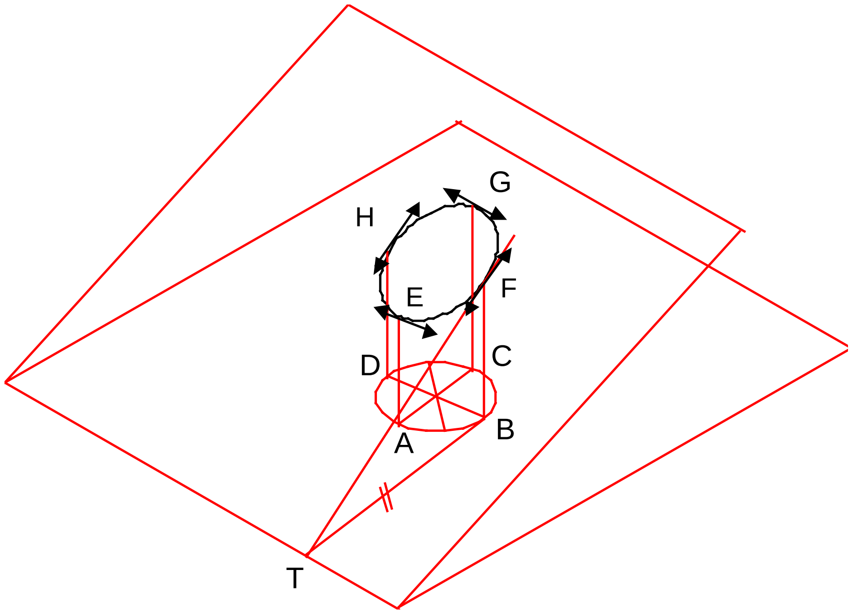
10.4.2 Développement approximatif d'un arc de cercle

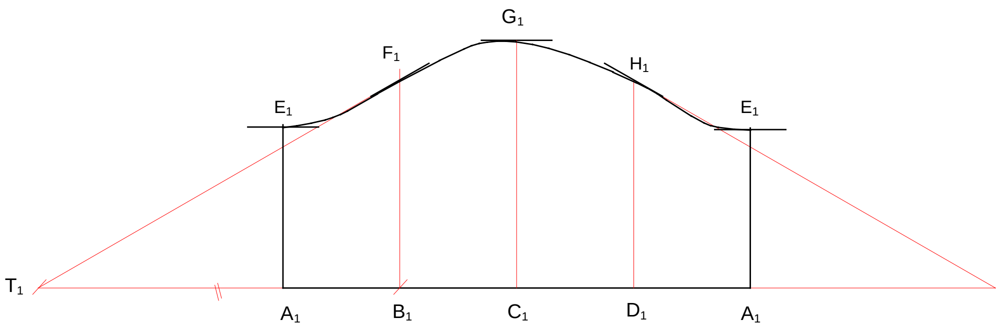
Pour trouver la longueur de l'arc AB, on trace la corde AB et on repère sur cette corde le point M situé aux 2/3.
L'intersection L du rayon OM avec le cercle donne le point L.
La longueur approximative de l'arc AB est égale 1,5 fois la corde AL soit la distance AP.



10.4.3 Développement d'un cylindre et de la section plane d'un cylindre

Un cylindre de révolution se développe toujours par rapport à sa section droite pour exploiter le fait qu'en un point de cette section, la génératrice et la tangente sont perpendiculaires.
Une fois la section droite développée, on reporte les longueurs des génératrices (AE, BF, CG et DH, par exemple)
La dernière étape consiste à retrouver, sur le développé, les tangentes aux génératrices aux points E, F, G et H. Lorsque les tangentes ne sont pas parallèles à la base, il est possible de retrouver leurs directions en utilisant le fait que deux tangentes en B et F se rencontrent en un point T de la droite (D). Il suffit de représenter ce point T pour en déduire la tangente en F.





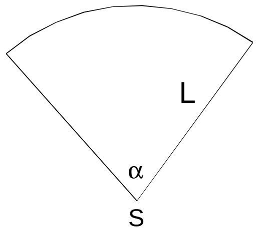
10.4.4 Développement d'un cône et de la section plane d'un cône

10.4.4.1 Cas d'un cône à base quelconque

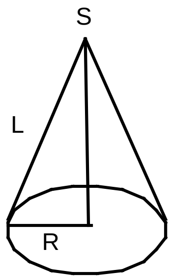
Si le cône est quelconque, il n'y a pas d'autre méthode de développement que de subdiviser le périmètre de la base en un grand nombre de segments et à développer la pyramide ainsi obtenue.
Nous obtiendrons le développement d'une section du cône en reportant sur le développé de la pyramide les longueurs des génératrices.

10.4.4.2 Cas d'un cône de révolution

La surface du cône de révolution se développe suivant un secteur circulaire dont le rayon est la longueur L de la génératrice et dont l'angle est à définir. La longueur de cet arc de cercle est égal au périmètre de la base du cône. On peut donc poser l'équation suivante :



$$2\pi R = \alpha L \Rightarrow \alpha = 2\pi \frac{R}{L}$$



Une fois la surface du cône développée, nous pouvons reporter sur le développé les longueurs des génératrices ainsi que les tangentes à la section.
A titre d 'exemple, la tangente à la base au point B est perpendiculaire à la génératrice BS. Pour retrouver la tangente au point F à la section plane, il suffit d'utiliser le fait que FT et BT sont concourantes sur la droite (Δ).
Une fois le point T représenté sur le développé, la tangente FT peut être tracée.