Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Lomé

Année Académique
2020 - 2021

Travaux Dirigés de Calcul Diffrentiel dans $\mathbb{R}^n$

1. **Les fonctions suivantes sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?**
   a) $f(x\,,\,y) = |\,x^2 - y^2\,|$; **b)** $f(x\,,\,y) = |\,x^3 - y^3\,|$; **c)** $f(x\,,\,y) = |\,x - y\,|$;
   $f(x\,,\,y) = exp\left(\dfrac{1}{|\,x-y\,|}\right)$

2. **Soit** $(E\,,\,d)$ **un espace métrique. Montrer que:**
   - **i) si** $e(x\,,\,y) = \min\{1\,,\,d(x\,,\,y)\}$ **alors** $(E\,,\,e)$ **est un espace métrique.**
   - **ii) si** $f(x\,,\,y) = \dfrac{d(x\,,\,y)}{1 + d(x\,,\,y)}$ **alors** $(E\,,\,f)$ **est un espace métrique**
   - **iii) les deux distances** e **et** f **sont bornées.**

3. **Soit** $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ **et soit** $f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1\,,\,+1]$ **avec** $f(x) = \dfrac{x}{1 + |\,x\,|}$ **si** $x \in \mathbb{R}$, $f(-\infty) = -1$, $f(+\infty) = 1$. **Montrer que** $d(x\,,\,y) = |\,f(x) - f(y)\,|$ **est une distance sur** $\overline{\mathbb{R}}$.

4. **Soit** $(a\,,\,b) \in \mathbb{R}^2$ **avec** $a \leq b$, **et soit** $E = \mathcal{C}([a\,,\,b]\,,\,\mathbb{R})$ **l'ensemble des fonctions réelles continues définies sur** $[a\,,\,b]$. **Montrer l'application** d **suivante est une distance sur** E.
$$d : (f\,,\,g) \mapsto \sup_{x \in [a\,,\,b]} |f(x) - g(x)|$$

5. **Soit** ϕ **une fonction réelle strictement croissante, définie sur** $\mathbb{R}_+$ **telle que** $\phi(0) = 0$ **et vérifiant la relation** $\phi(x + y) \leq \phi(x) + \phi(y)$. **Montrer que si** d **est une distance sur un ensemble** E **alors** $\phi \circ d$ **est également une distance sur** E.
   ***Application*: Montrer que si** d **est une distance sur un ensemble** E **alors les applications** $d_1 = \dfrac{d}{1+d}$ **et** $d_2 = \ln(1 + d)$ **sont également des distances sur** E.

6. **Sur** $E = \mathbb{R}^n$, **pour** $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$ **les applications** $d_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 3$, **de** $E \times E \to \mathbb{R}_+$ **suivantes définissent des distances.**
$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\ ;\ d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}\ ;\ d_3(x,y) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|.$$
   (a) Représenter graphiquement, dans le cas $n = 2$ **la boule unité fermée**
$$B = \left\{x \in \mathbb{R}^2 / d(0,x) \leqslant 1\right\},$$
   où d **représente chacune des distances** $d_1,\ d_2,\ d_3$.
   (b) Démontrer les inégalités suivantes :
   - **i.** $d_3(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant n d_3(x,y)$.
   - **ii.** $d_3(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant \sqrt{n} d_3(x,y)$.
   - **iii.** $d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant \sqrt{n} d_2(x,y)$.

7. **Soient** $(E\,,\,d)$ **un espace métrique,** $\mathcal{O}$ **l'ensemble de ses ouverts,** F **l'ensemble de ses fermés, on note** $V(a)$ **l'ensemble des voisinages d'un point** a **de** E**.**

Soit $A \subset E$**, la restriction** d' **de** d **à** A^2 **est une distance sur** A **qui en fait un espace métrique. On note** $\mathcal{O}'$, F',$V'(a)$ **les ouverts, fermés, voisinages d'un point** a **de** A **dans** $(A\,,\,d')$; $\mathcal{O}'$ **est dite topologie induite par** $\mathcal{O}$**.**

α) **Prouver que les ouvert de** A **sont les traces des ouverts de** E **sur** A **(i.e. si** $w' \subset A$**, on a** $w' \in \mathcal{O}' \Longleftrightarrow \exists\, w \in \mathcal{O} \quad w' = w \cap A$**). Donner des critères analogues pour les fermés et les voisinages.**

β) **Prouver que les ouverts de** E **inclus dans** A **sont des ouverts de** A **mais que la réciproque est fausse, sauf une condition que l'on déterminera. Etablir des résultats analogues pour les fermés.**

γ) **Etablir pour** $a \in A$**, l'équivalence** $\Big($$a$ **est un point isolé de** A**, considéré comme partie de** $E\Big) \Longleftrightarrow \{a\}$ **est un ouvert de** A**.**

8. **(a) Soient** A **et** B **deux parties fermées non vides disjointes (**$A \cap B = \emptyset$**) d'un espace métrique** $(E\,,\,d)$**. On pose:**
$U_A = \{u \in E/\ d(u\,,\,A) < d(u\,,\,B)\}\,;\quad U_B = \{u \in E/\ d(u\,,\,A) > d(u\,,\,B)\}\,;$
$I = \{u \in E/\ d(u\,,\,A) = d(u\,,\,B)\}$

i. Montrer que $U_A \cap U_B = \emptyset$

ii. Définir $V_A = E\backslash U_A$ **et** $V_B = E\backslash U_B$

iii. Soient $(x_n)_n$ **une suite convergente d'éléments de** V_A **de limite** x**. Montrer que** $x \in V_A$ **et en déduire que** U_A **est ouvert contenant** A**.**

iv. Soient $(y_n)_n$ **une suite convergente d'éléments de** V_B **de limite** y**. Montrer que** $y \in V_B$ **et en déduire que** U_B **est ouvert contenant** B**.**

v. Montrer que I **est fermé**

(b) Soient E **et** F **deux ensembles,** d **une distance sur** F **et** $f\,:\,E \longrightarrow f$ **une application injective. Montrer que l'application** $\delta\,:\,E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **définie par:**

$$\delta\,(u\,,\,v) = d\,\Big(f(u)\,,\,f(v)\Big)$$

est une distance sur E**.**