Géométrie des masses

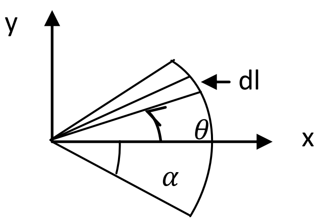
Exercice 1

Déterminer les coordonnées (x_G, y_G, z_G)du centre d'inertie G des solides suivants :

1. Un arc de cercle C(O, R) homogène vu sous un angle 2α et d'axe de symétrie l'axe Ox, de densité linéique ʎ.
2. Une plaque homogène (P) plane, d'épaisseur négligeable, ayant la forme d'un triangle rectangle OAB telle que $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}$ et $\overrightarrow{OB} = b\vec{y}$ où a et b sont des réels positifs. La densité surfacique est σ.
3. Une demi sphère pleine S (O, R) de centre O, de rayon R et d'axe de symétrie l'axe Oz. La densité de S est ρ.
4. Un cône plein homogène, de sommet O, de rayon R, de hauteur h, ayant pour axe de symétrie l'axe Oz. Son demi angle au sommet est α, et sa densité volumique ρ.

Solution

1.Calcul de centre de masse d'un arc.



L'axe Ox est un axe de symétrie, donc le centre d'inertie appartient à cet axe.

$x_G = \frac{\int x\, dm}{\int dm}$ avec $dm = \lambda\, dl = \lambda\, R\, d\theta \quad et \quad x = R cos\theta$

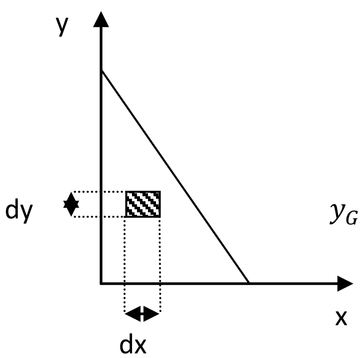
$$x_G = \frac{\int R^2\, cos\varphi\, \lambda\, d\varphi}{\int \lambda\, R\, d\varphi} = R\frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} cos\varphi\, d\varphi}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\varphi} = R\frac{sin\alpha}{\alpha}$$

2. Calcul de centre de masse de la plaque triangulaire

La plaque se trouvant dans le plan xoy, donc le centre de masse a pour composantes :

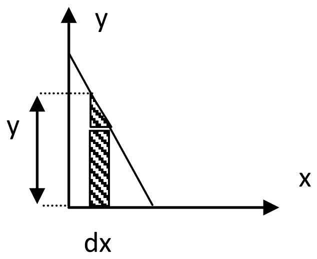
$x_G = \frac{\iint x dm}{\iint dm} \quad et \quad y_G = \frac{\iint y dm}{\iint dm}$ Or x et y ne sont pas indépendants puisque la droite AB a pour équation : $y = -\frac{b}{a}\, x + b$.

La masse de la plaque est : m =$\iint$dm=$\sigma\frac{ab}{2}$ (c'est la moitié de la masse du rectangle de côtes a et b).



$$x_G = \frac{\iint x dm}{\iint dm} = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left[\int_0^{-\frac{b}{a}x+b} dy\right]dx = \frac{a}{3}$$

$$y_G = \frac{\iint y dm}{\iint dm} = \frac{2}{ab}\int_0^a\left[\int_0^{-\frac{b}{a}x+b} y dy\right]dx = \frac{b}{3}$$



L'élément de surface choisi est : ds=y dx avec $y = -\frac{b}{a}\,x + b$

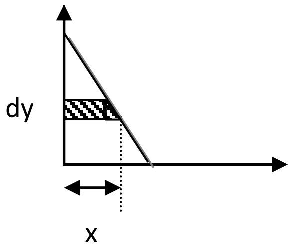
$$x_G = 2\frac{\int x\,\sigma\,ds}{ab} = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(-\frac{b}{a}\,x + b\right)dx$$

$$x_G = \frac{2}{ab}\left[-\frac{b}{3a}x^3 + \frac{b}{2}x^2\right]_0^a = \frac{a}{3}$$

On ne peut pas choisir le même élément de surface pour calculer y_G.Dans ce cas ds=x dy avec $x = -\frac{a}{b}y + a$

$$y_G = 2\frac{\int y\sigma ds}{ab} = \frac{2}{ab}\int_0^b y\left(-\frac{a}{b}y + a\right)dy$$

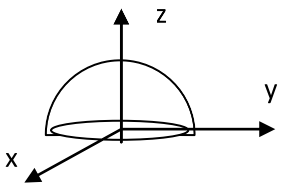
$$y_G = \frac{2}{ab}\left[-\frac{a}{3b}y^3 + \frac{a}{2}y^2\right]_0^b = \frac{b}{3}$$



Remarque

Dans cette dernière méthode, le choix du mauvais élément de surface donne des résultats faux. Pour cette raison on conseille aux étudiants de prendre le plus petit élément de surface (ds= dx dy) pour calculer les coordonnées de G .

3. Calcul de centre de masse d'une demi sphère.



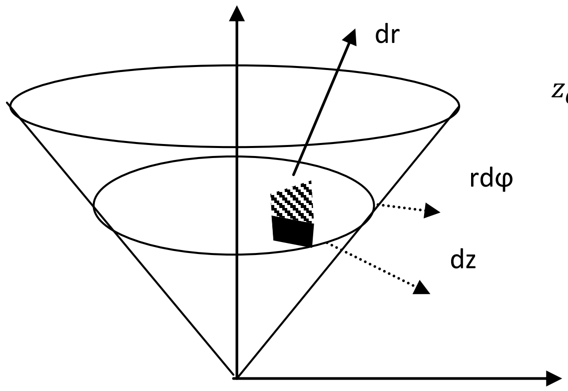
L'axe OZ est l'axe de révolution de la demi-sphère, donc son centre de masse est sur cet axe. En coordonnées sphériques :

dm=ρ r^2 sinθ dr dθ dφ et z=rcosθ

$$z_G = \frac{\iiint z dm}{\iiint dm} = \frac{\int_0^R r^3\ dr\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta\ sin\theta\ d\theta\ \int_0^{2\pi} d\varphi}{\int_0^R r^2\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta\ d\theta\ \int_0^{2\pi} d\varphi} = \frac{3}{8}\ R$$

.Calcul de centre de masse d'un cône

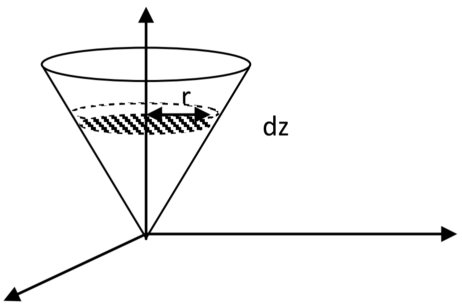
Le centre de masse est sur l'axe de révolution du cône.(avec dm=ρ r dφ dr dz)



$$z_G = \frac{\iiint z dm}{\iiint dm} = \frac{\int_0^h z\left[\int_0^{ztg\alpha} r\ dr\right] dz\int_0^{2\pi} d\varphi}{\int_0^h\left[\int_0^{ztg\alpha} r\ dr\right] dz\int_0^{2\pi} d\varphi} = \frac{3}{4}\ h$$

Autre méthode

L'élément de volume choisi est un disque d'axe oz, de rayon r et d'épaisseur dz :$dV = \pi r^2 dz$



$$z_G = \frac{\int_0^h \sigma\,\pi \left(\frac{R}{h}\right)^2 z^3 dz}{\int_0^h \sigma\,\pi \left(\frac{R}{h}\right)^2 z^2 dz} = \frac{\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^h}{\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h} = \frac{3}{4}h$$

Exercice 2

Un solide (S) a la forme d'un demi cercle de centre C, de rayon a et fermé par son diamètre. Le fil constituant (S) a une densité linéique constante λ et les dimensions de sa section sont négligeables devant le rayon a. Soit R(C, x, y, z)un repère orthonormé direct lié au solide (S) de masse m.

1. Calculer en fonction de a, la position du centre d'inertie G de (S).
2. Montrer que Cx, Cy, et Cz sont les axes principaux d'inertie de (S).
3. Déterminer la matrice d'inertie au point C dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
4. En déduire la matrice d'inertie au point G relativement à la même base.

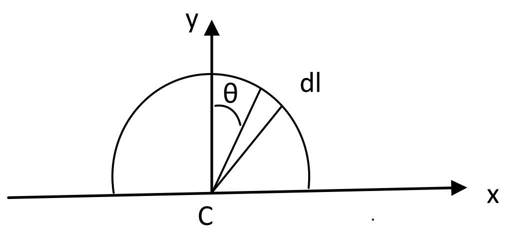
Solution

1- Calcul de centre de masse de (S)

Le centre d'inertie G_1 du diamètre de masse m_1, coïncide avec le centre géométrique C.

L'axe Cy est axe de symétrie du demi-cercle, son centre de masseG_2 est alors sur y, sa masse m_2 est égale à λπ a. Avec y=a cos θ et dm=λ a dθ, on a:

$$:y_{G_2} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos\theta\, d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\, d\theta} = a\,\frac{2}{\pi}$$



Le centre d'inertie G du solide (S) est donné par :

$$\overrightarrow{CG} = \frac{m_1\overrightarrow{CG_1} + m_2\overrightarrow{CG_2}}{m_1+m_2} \qquad \text{Or} \qquad \overrightarrow{CG_1} = 0$$

Ce qui donne avec m_1 =Λ 2a , et m_2 =Λ a π : $y_G = \frac{m_2\, y_{G_2}}{m_1+m_2} = \frac{2\,a}{\pi+2}$

2. Axes principaux d'inertie

C_y est un axe de symétrie, donc axe principal d'inertie ⟹ les produits d'inertie D=F=0.

Le plan yCz est plan de symétrie ⟹ Cx est axe principal d'inertie ⟹F=E=0.

On sait que tout axe perpendiculaire à un axe principal d'inertie est un axe principal d'inertie, ce qui signifie que Cx et Cz axes principaux d'inertie.

La matrice d'inertie est diagonale.

3.Calcul de la matrice d'inertie de S au point C.

Calcul de la matrice d'inertie du demi cercle.

Le demi cercle est dans le plan xOy, donc :$z = 0$; $y = a\, cos\theta$; $x = a\, sin\theta$ et $dm = \lambda\, a\, d\theta$

$$A=\int y^2 dm \quad , \quad B = \int x^2 dm \quad et \quad C = \int (x^2 + y^2) dm = A + B$$

$$A = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 cos^2\theta \; d\theta = \frac{\lambda a^3}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (cos2\theta + 1) d\theta = \frac{\lambda a^3}{2}\, \pi$$

$$B = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 sin^2\theta \; d\theta = \frac{\lambda a^3}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - cos2\theta) d\theta = \frac{\lambda a^3}{2}\, \pi$$

C=$\lambda a^3 \pi$

Or la masse totale du solide S est : m=$m_1 + m_2 = \lambda a(\pi + 2)$ $\Rightarrow$ $\lambda = \frac{m}{a(\pi+2)}$

$$A = B = \frac{C}{2} = \frac{ma^2}{\pi + 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I_1(C) = \frac{ma^2}{\pi + 2} \begin{bmatrix} \pi/2 & 0 & 0 \\ 0 & \pi/2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Calcul de la matrice d'inertie du diamètre.

Un élément de longueur dl n'a pas de composantes suivant Oy et oz, ce qui donne :

Z=y=0 $\Rightarrow$ A=0 et B=C=$\int x^2 dm = \lambda \int_{-a}^{a} x^2 dx = \frac{2}{3} \lambda\, a^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{ma^2}{\lambda+2}$ avec dm= λdx.

$$I_2(C) = \frac{ma^2}{\pi + 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

La matrice d'inertie du solide (S) au centre C est :

$$I_S(C) = I_1(C) + I_2(C) = \frac{ma^2}{\pi + 2} \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\pi + 4}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\pi + 2}{3} \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

4.Calcul de la matrice d'inertie de S au centre de masse G.

D'après le théorème d'Huygens généralisé, on a: $I_S(C) = I_S(G) + I_G(C)$ $\Rightarrow$ $I_S(G) = I_S(C) - I_G(C)$

$$I_G(C) = \begin{bmatrix} my_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & my_G^2 \end{bmatrix} = \frac{m4a^2}{(\pi+2)^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

$$I_S(G) = \frac{ma^2}{\pi+2}\begin{bmatrix} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi+2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3\pi+4}{6}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{3\pi+2}{3} - \frac{4}{\pi+2}\right) \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Exercice 3

Un solide (S) homogène et plein est formé d'un cône de révolution de hauteur h et une demi sphère fixée à la base du cône de rayon R et de centre O. Soit le repère R(O, x, y, z)tel que Oz coïncide avec l'axe de révolution du cône.

1. Déterminer les centres de gravité G_1 du cône et G_2 de la demi sphère.
2. Déduire le centre de gravité G du solide (S).
3. Calculer la matrice d'inertie du solide (S) en O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
4. Calculer le moment d'inertie du solide (S) par rapport à la droite passant par O et d'équation (x=0, z=y)

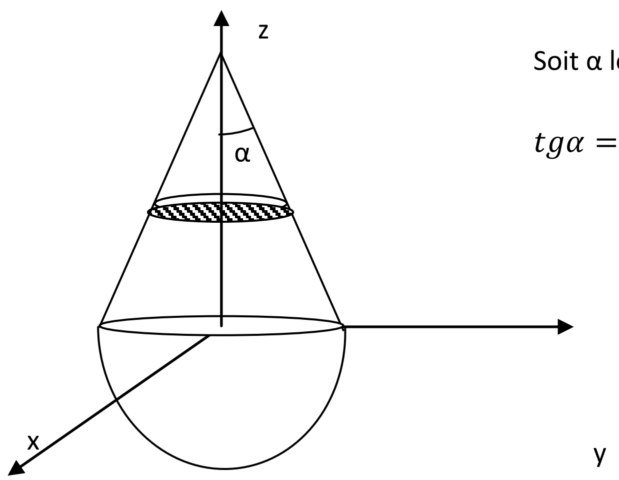
Solution

1.Centre de gravité G_1 du cône.

L'axe Oz est un axe de révolution, G_1 est sur Oz, et par conséquent :

$x_{G_1} = y_{G_1} = 0$ et

$$z_{G_1} = \frac{\iiint z dm}{\iiint dm} = \frac{\int_0^h z\,\pi r^2 dz}{\int_0^h \pi r^2 dz}$$



Soit α le demi angle au sommet du cône,

$tg\alpha = \frac{R}{h} = \frac{r}{h-z}$ d'où : $r = (h-z)\frac{R}{h}$

$$dm = \rho\pi r^2\, dz$$

$$z_{G_1} = \frac{\int_0^h z(h-z)^2 dz}{\int_0^h (h-z)^2 dz} = \frac{h}{4}$$

Centre de gravité de la demi sphère

L'élément de volume choisi, est un disque d'épaisseur dz, d'axe Oz et de rayon r, se trouvant à la distance z du centre O de la demi sphère, d'où :$R^2 = z^2 + r^2 \rightarrow r^2 = R^2 - z^2$

$$z_{G_2} = \frac{\iiint z dm}{\iiint dm} = \frac{\int z\,\pi r^2 dz}{\int \pi r^2 dz} = \frac{\int_0^{-R} z\,(R^2 - z^2)dz}{\int_0^{-R}(R^2 - z^2)dz} = -\frac{3}{8}\,R$$

$$avec \quad dm = \rho\, \pi\, r^2 dz$$

Centre d'inertie du solide.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\, \overrightarrow{OG_1} + m_2\, \overrightarrow{OG_2}}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad z_G = \frac{h^2 - 3\,R^2}{4(h + 2\,R)} \quad avec \;\; m_1 = \frac{\rho\pi R^2 h}{3} \;\; et \;\; m_2 = \frac{2\rho\pi R^3}{3}$$

3. Matrice d'inertie du solide en O dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Matrice d'inertie du cône en O.

Oz axe de révolution, donc : $A = B = \frac{C}{2} + \iiint z^2\, dm \;\; avec \;\; dm = \rho r\, dr\, dz\, d\theta$

Les variables r et z ne sont pas indépendants et sont reliés par l'équation : $tg\alpha = \frac{R}{h} = \frac{r_1}{h-z}$ où α est le demi angle au sommet du cône.

$$C = \iiint (x^2 + y^2) dm \quad avec\; (x^2 + y^2) = r^2$$
$$= \iiint \rho r^3 dr\, dz\, d\theta = \int_0^h \left[\int_0^{r_1} \rho r^3 dr\right] dz \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\rho\pi\pi}{2} \int_0^h r_1^4 dz$$

Avec $r_1 = \frac{R}{h}(h - z) \;\Rightarrow C = \frac{\rho\,\pi\, R^4\, h}{10}$

Or $m_1 = \frac{\rho\,\pi\, R^2\, h}{3} \quad \Rightarrow C = \frac{3}{10}\, m_1\, R^2$

$$\iiint z^2\, dm = \rho \int_0^h z^2 \left[\int_0^{r_1} r\, dr\right] dz \int_0^{2\pi} d\theta = \rho \frac{\pi R^2\, h^3}{30} = m_1 \frac{h^2}{10}$$

$$A = B = \frac{3}{20} m_1\, R^2 + m_1 \frac{h^2}{10}$$

$$[I(O, S_1)] = \frac{m_1}{10} \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2} R^2 + h^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{2} R^2 + h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 3R^2 \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Matrice d'inertie de la demi sphère.

Oz axe de révolution, donc :
$A = B = \frac{C}{2} + \iiint z^2\, dm \quad avec \quad dm = \rho r^2 sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \quad et \quad x^2 + y^2 = r^2 sin\theta^2$

$$C = \iiint (x^2 + y^2) dm = \iiint r^2 sin\theta^2 dm = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi/2} sin\theta^3 d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$C = \frac{4}{15} \rho\, \pi\, R^5 \;\; Or\; m_2 = \frac{2}{3} \rho\, \pi\, R^3 \;\Rightarrow C = \frac{2}{5}\, m_2\, R^2$$

$$\iiint z^2 dm = \rho \int_0^R r^4\, dr \int_0^{\pi/2} sin\theta\, cos\theta^2\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{5} m_2 R^2$$

$$A = B = \frac{2}{5} m_2 R^2$$

$$[I(O,S_2] = \frac{2}{5} m_2 R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

La matrice d'inertie du solide.

$$[I(O,S)] = [I(O,S_1)] + [I(O,S_2)] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

Avec $A = \frac{m_1}{20}(3R^2 + 2h^2) + \frac{2}{5} m_2 R^2 \quad et \quad C = \frac{R^2}{10}(3m_1 + 4m_2)$

4.Moment d'inertie du solide par rapport à la droite d'équation (x=0,z=y).

Le vecteur unitaire porté par cette droite est : $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{k}$

$$I_\Delta(S) = {}^t\vec{u}\,[I(O,S)]\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(A + C)$$

$$I_\Delta(S) = \frac{1}{20}\left[m_1\left(\frac{9}{2}R^2 + h^2\right) + 8m_2R^2\right]$$

Exercice 4

Soit une sphère pleine, homogène S de rayon R et de centre O.

1. Calculer la matrice d'inertie de S au point O, puis au point A(0, 0, -R).
2. Calculer le moment d'inertie de S par rapport à la droite D tangente à la sphère au point A.
3. Calculer le moment d'inertie de S en A dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, puis sa matrice d'inertie dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ qui se déduit à partir de $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par une rotation d'un angle α autour de l'axe Oy.

Solution

1.La matrice d'inertie de la sphère au centre O.

La sphère a une symétrie sphérique Tout diamètre est axe de symétrie, donc : I_{xx}=I_{yy}=I_{zz} =A ,
D=F=E=0 et 2 I_o= 3 A

$$I_0 = \iiint (x^2 + y^2 + z^2) = \iiint r^2 dm = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$I_0 = \frac{3}{5} m R^2 \quad \Rightarrow \quad [I(O,S)] = \frac{2}{5} m R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

La matrice d'inertie au point A(0, 0, -R).

Le centre d'inertie coïncide avec le centre géométrique de la sphère.

$$[I(S,A)] = [I(S,G)] + [I(G,A)]$$

Dans le repère d'origine A, d'axes Ax, Ay, Az parallèles respectivement aux axes Ox, Oy et Oz ; le centre d'inertie a pour coordonnées (0, 0 R).

$$[I(G,A)] = mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \quad \Rightarrow \quad [I(S,A)] = \frac{m}{5} R^2 \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

2.Moment d'inertie de S par rapport à la droite tangente à S au point A

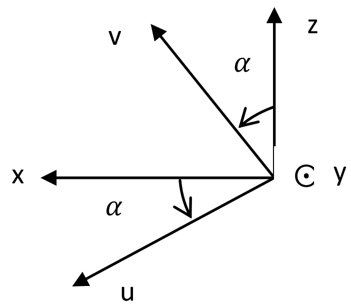
La matrice d'inertie du solide au point A est diagonale de symétrie de révolution où l'axe Az est axe de révolution de la sphère, donc tous les axes du plan xAy sont équivalents, et le moment d'inertie de la sphère par rapport à l'un de ces axes est égal au moment d'inertie par rapport à Ax et Ay:

$$I_\Delta = \frac{7}{5}\, mR^2 = I_{Ax} = I_{Ay}$$

3.Moment d'inertie de S en A(0, 0, -R)

$$I_A(S) = \frac{1}{2}\left(I_{Ax} + I_{Ay} + I_{Az}\right) = \frac{8}{5} mR^2 \quad avec \quad I_{Az} = \frac{2}{5} mR^2$$

Matrice d'inertie en A de S dans la base $(\vec{u}, \vec{j}, \vec{v})$



$$\vec{u} = cos\alpha\, \vec{x} - sin\alpha\, \vec{z} \;\; et \;\; \vec{v} = sin\alpha\, \vec{x} + cos\alpha\, \vec{z}$$

La matrice de changement de base est :

$$M = \begin{pmatrix} cos\alpha & 0 & -sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\alpha & 0 & cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$[I'(S,A)] = {}^tM[I(S,A)]M$$

$$[I'(S,A)] = \begin{pmatrix} cos\alpha & 0 & sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\alpha & 0 & cos\alpha \end{pmatrix} \frac{m}{5} R^2 \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \begin{pmatrix} cos\alpha & 0 & -sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\alpha & 0 & cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$[I'(S,A)] = \frac{m}{5} R^2 \begin{pmatrix} 2 + 5cos\alpha^2 & 0 & -5sin\alpha\, cos\alpha \\ 0 & 7 & 0 \\ -5sin\alpha\, cos\alpha & 0 & 2 + 5sin\alpha^2 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{y},\vec{v})}$$

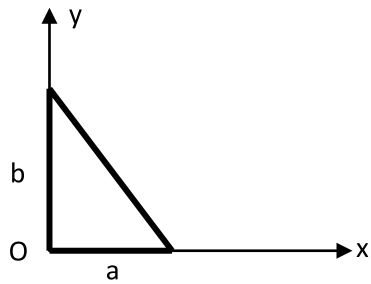
Exercice 5

Soit (P) une plaque triangulaire OAB homogène de masse m, d'épaisseur négligeable, rectangle en O et telle que : $\overrightarrow{OA}=a\vec{X},\overrightarrow{OB}=b\vec{Y}$ où a et b sont des réels positifs et $\left(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}\right)$ la base liée à (P).

1- Déterminer son centre d'inertie G par calcul direct et en utilisant le théorème de Guldin.
2- Déterminer les matrices d'inertie de (P) en O dans $\left(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}\right)$.
3- En déduire la matrice d'inertie de (P) en G dans la même base.
4- On suppose que le triangle est isocèle (a=b). Déterminer les axes principaux et les moments principaux de (P) en 0.

Solution

1- Détermination de centre de masse par application du théorème de Guldin



Le volume engendré en faisant tourner la plaque autour des axes Ox et Oy est égal au produit de la surface de la plaque par la longueur du cercle décrit par son centre de masse.
En tournant autour de Ox, la plaque engendre un cône de hauteur a et de rayon de base b, son volume est : $V=\frac{\pi b^2 a}{3}$
Son centre de masse décrit un cercle de rayon y_G centré sur Ox
De longueur L=$2\pi y_G$

.

$$V=SL\Rightarrow\frac{\pi b^2 a}{3}=\frac{ab}{2}\cdot 2\pi y_G\Rightarrow y_G=\frac{b}{3}$$

De même, en tournant autour de Oy, la plaque engendre un cône de hauteur b et de rayon a, son volume est : $V=\frac{\pi a^2 b}{3}$. Son centre de masse décrit un cercle de rayon x_G centré sur Oy

$$V=SL\Rightarrow\frac{\pi a^2 b}{3}=\frac{ab}{2}\cdot 2\pi x_G\Rightarrow x_G=\frac{a}{3}$$

2- Matrices d'inertie en O.

La plaque est dans le plan (xoy) et n'admet aucun élément de symétrie, les produit d'inertie ne sont pas tous nuls, et la matrice d'inertie en O s'écrit :

$$M_O(P)=\begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & 0\\ -I_{xy} & I_y & 0\\ 0 & 0 & I_z\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\ )}$$

X et y sont reliés par l'équation :$y=-\frac{b}{a}\ x+b$ (voir exercice 1)

$$I_x=\iint y^2\ dm=\sigma\int_0^b y^2\left[\int_0^{-\frac{a}{b}y+a}dx\right]dy=\sigma\int_0^b y^2\left(-\frac{a}{b}y+a\right)dy=\frac{\sigma}{12}\ ab^3=m\frac{b^2}{6}$$

$$I_y=\iint x^2\ dm=\sigma\int_0^a x^2\left[\int_0^{-\frac{b}{a}x+b}dy\right]dx=\sigma\int_0^a x^2\left(-\frac{b}{a}x+b\right)dx=m\frac{a^2}{6}$$

$$I_z = \iint (x^2 + y^2)\ dm = I_x + I_y = \frac{m}{6}(a^2 + b^2)$$

$$I_{xy} = \iint xy\, dm = \sigma \int_0^a x \left[\int_0^{-\frac{b}{a}x+b} dy \right] dx = m\frac{ab}{12}$$

La matrice d'inertie s'écrit alors sous la forme : $M_O(P) = \frac{m}{6}\begin{pmatrix} b^2 & -\frac{ab}{2} & 0 \\ -\frac{ab}{2} & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2+b^2) \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\ )}$

3- Matrice d'inertie en G

D'après le théorème d'Huygens généralisé la matrice d'inertie en O s'écrit :

$$M_O(P) = M_G(P) + M_O(G) \Rightarrow M_G(P) = M_O(P) - M_O(G)$$

Avec :

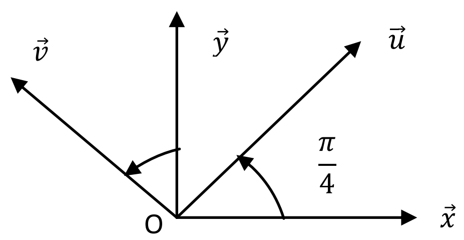
$$M_O(G) = \begin{pmatrix} my_G^2 & -mx_G\, y_G & 0 \\ -mx_G\, y_G & mx_G^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(x_G^2 + y_G^2) \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\ )} = \frac{m}{9}\begin{pmatrix} b^2 & -ab & 0 \\ -ab & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2+b^2) \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\ )}$$

Ce qui donne :

$$M_G(P) = \frac{m}{18}\begin{pmatrix} b^2 & \frac{ab}{2} & 0 \\ \frac{ab}{2} & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(a^2+b^2)}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

1- Axes et moments principaux si (P) est isocèle

La plaque (P) est isocèle, elle admet comme axe de symétrie l'axe Ou faisant l'angle π/4 avec l'axe Ox



$$\vec{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{v}$$
$$\vec{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{v}$$

La matrice de passage de la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$est :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

L'axe Ou est axe de symétrie, il est par conséquent axe principal d'inertie. Les axes Ov et Oz sont perpendiculaires à Ou, donc sont axes principaux d'inertie, et la matrice d'inertie en O dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ est diagonale et a pour expression :avec a=b

$$M'^{(P)}_O = {}^t\mathcal{M}\, M^{(P)}_O\, \mathcal{M} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{m}{12}\begin{pmatrix} 2a^2 & -a^2 & 0 \\ -a^2 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$M'^{(P)}_O = \frac{m}{24}a^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$M'^{(P)}_O = \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{z})}$$

Rappel

D'une manière générale, Déterminer les moments d'inertie et les axes principaux d'inertie revient à diagonaliser la matrice d'inertie ; pour cela, il faut déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice d'inertie diagonalisée.

Valeurs propres ou moments d'inertie

$$det\left[M^{(P)}_O - \lambda \bar{\bar{I}}\right] = 0 \qquad \text{où} \quad \bar{\bar{I}}\ est\ la\ matrice\ identité$$

$$det\left[\boldsymbol{M^{(P)}_O} - \boldsymbol{\lambda \bar{\bar{I}}}\right] = \begin{vmatrix} \frac{ma^2}{6} - \lambda & -\frac{ma^2}{12} & 0 \\ -\frac{ma^2}{12} & \frac{ma^2}{6} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{ma^2}{3} - \lambda\right)\left[\left(\frac{ma^2}{6} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{ma^2}{12}\right)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{ma^2}{3} - \lambda\right)\left[\left(\frac{ma^2}{6} - \lambda\right) + \frac{ma^2}{12}\right]\left[\left(\frac{ma^2}{6} - \lambda\right) - \frac{ma^2}{12}\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{ma^2}{3} \\ \lambda_2 = \frac{ma^2}{4} \\ \lambda_3 = \frac{ma^2}{12} \end{cases}$$

Vecteurs propres ou axes principaux d'inertie

$$\vec{u}\ est\ vecteur\ propre\ correspodant\ à\ la\ valeur\ propre\ \lambda\ si\ \ M^{(P)}_O\vec{u} = \lambda\vec{u}$$

- $\boldsymbol{\lambda_1 = \frac{ma^2}{3}}$ soit $\overrightarrow{u_1} = \alpha_1\overrightarrow{e_x} + \beta_1\overrightarrow{e_y} + \gamma_1\overrightarrow{e_z}$

$$\left[\boldsymbol{M_O^{(P)}} - \boldsymbol{\lambda_1}\,\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}\right]\overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{ma^2}{6} - \frac{ma^2}{3}\right) & -\frac{ma^2}{12} & 0 \\ -\frac{ma^2}{12} & \left(\frac{ma^2}{6} - \frac{ma^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{ma^2}{3} - \frac{ma^2}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{ma^2}{12}(\beta_1 + 2\alpha_1) = 0 \\ -\frac{ma^2}{12}(\alpha_1 + 2\beta_1) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0 \quad et \ \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} = (0,0,\gamma)$$

Or $\overrightarrow{u_1}$ normé, donc$\gamma = 1$ et par conséquent $\overrightarrow{u_1} = \vec{z}$

- $\boldsymbol{\lambda_2 = \frac{ma^2}{4}}$ soit $\overrightarrow{u_2} = \alpha_2\overrightarrow{e_x} + \beta_2\overrightarrow{e_y} + \gamma_2\overrightarrow{e_z}$

$$\left[\boldsymbol{M_O^{(P)}} - \boldsymbol{\lambda_2}\,\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}\right]\overrightarrow{\boldsymbol{u_2}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{ma^2}{6} - \frac{ma^2}{4}\right) & -\frac{ma^2}{12} & 0 \\ -\frac{ma^2}{12} & \left(\frac{ma^2}{6} - \frac{ma^2}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{ma^2}{3} - \frac{ma^2}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{ma^2}{12}(\alpha_2 + \beta_2) = 0 \\ -\frac{ma^2}{12}(\alpha_2 + \beta_2) = 0 \\ \frac{ma^2}{12}\gamma_2 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_2 = -\beta_2 \\ \gamma_2 = 0 \end{array}\right.$$

Or $\overrightarrow{u_2}$ normé, donc $\beta_2 = -\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et par conséquent $\overrightarrow{u_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{e_x}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{e_y}} = \vec{\boldsymbol{v}}$

- $\boldsymbol{\lambda_3 = \frac{ma^2}{12}}$ soit $\overrightarrow{u_3} = \alpha_3\overrightarrow{e_x} + \beta_3\overrightarrow{e_y} + \gamma_3\overrightarrow{e_z}$

$$\left[\boldsymbol{M_O^{(P)}} - \boldsymbol{\lambda_3}\,\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}\right]\overrightarrow{\boldsymbol{u_3}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{ma^2}{6} - \frac{ma^2}{12}\right) & -\frac{ma^2}{12} & 0 \\ -\frac{ma^2}{12} & \left(\frac{ma^2}{6} - \frac{ma^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{ma^2}{3} - \frac{ma^2}{12}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{ma^2}{12}(\alpha_3 - \beta_3) = 0 \\ -\frac{ma^2}{12}(\alpha_3 - \beta_3) = 0 \\ \frac{3ma^2}{12}\gamma_3 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_3 = \beta_3 \\ \gamma_3 = 0 \end{array}\right.$$

$Or\ \overrightarrow{u_3}$ normé, donc $\alpha_3 = \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et par conséquent $\overrightarrow{u_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{e_x}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{e_y}} = \vec{\boldsymbol{u}}$

- La matrice d'inertie dans $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})\ s'écrit$:

$$M_O^{(P)} = \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{z})}$$

Exercice 6

Soit V le volume délimité par la surface : $x^2+y^2=2pz$. Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct tel que la paraboloïde se trouve dans l'espace définit par z>0 (.figure 4)

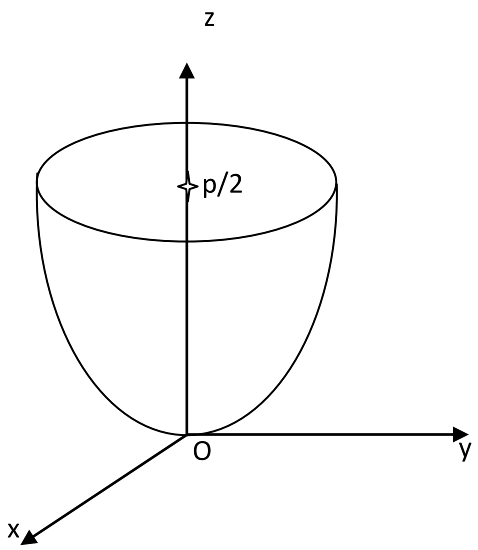
1- Calculer le volume de cette paraboloïde de révolution d'axe Oz.
2- Calculer la position de son centre de masse.
3- Calculer sa matrice d'inertie au sommet O.

Solution

1- Volume de la paraboloïde

L'élément de volume choisi est une portion d'une couronne centrée sur l'axe Oz et d'épaisseur dz telle que :$r^2 = x^2 + y^2 = 2pz$

Les variables r et z ne sont pas indépendantes, on ne peut pas séparer les intégrales.



.

$$V = \iiint dV = \iiint r\, dr\, d\varphi\, dz = \int_0^{\frac{p}{2}}\left[\int_0^{\sqrt{2pz}} r\, dr\right] dz \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi p \int_0^{\frac{p}{2}} z\, dz = \frac{\pi}{4}\, p^3$$

$$\boldsymbol{V = \frac{\pi}{4}\, p^3}$$

2- Position de centre de masse

Oz axe de symétrie, donc le centre d'inertie se trouve sur cet axe.

$X_G = Y_G = 0$ et $Z_G = \frac{1}{m}\iiint z\, dm \quad Or\quad m = \rho V = \rho\frac{\pi}{4}\, p^3$

$$Z_G = \frac{4}{\pi p^3}\int_0^{\frac{p}{2}} z^2\, 2p\,\pi\ dz = \frac{p}{3} \qquad \boldsymbol{G\left(0, 0, \frac{p}{3}\right)}$$

3- Matrice d'inertie de (S) au point O

Oz est axe de révolution, donc tous les produits d'inertie sont nuls et $I_{Ox} = I_{Oy}$

$$A = B = \frac{C}{2} + \iiint z^2\ dm \qquad avec \qquad C = \iiint (x^2 + y^2)\, dm$$

$$C = \rho\int_0^{\frac{p}{2}}\left[\int_0^{\sqrt{2pz}} r^3\ dr\right]\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\rho\pi\, p^2\int_0^{\frac{p}{2}} z^2\, dz = \frac{m}{3}\, p^2$$

$$\iiint z^2 dm = \rho \int_0^{\frac{p}{2}} z^2 \left[\int_0^{\sqrt{2pz}} r\, dr \right] dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{m}{8} p^2 \Rightarrow A = B = \frac{7m}{24} p^2$$

$$M_0^{(S)} = \frac{m}{3} p^2 \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(x\,\vec{y},\vec{z})}$$

Exercice 7

Calculer la matrice d'inertie :

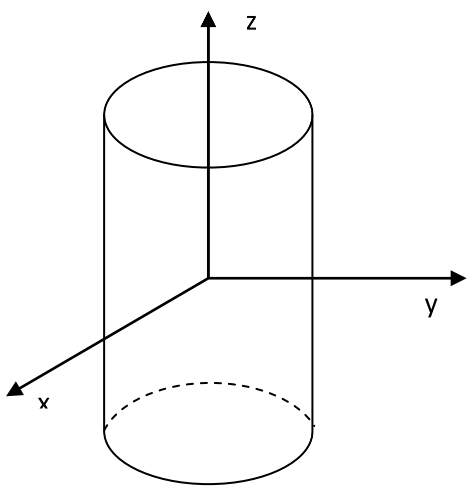
1- en son centre d'inertie d'un cylindre plein droit à base circulaire.
2- en son centre d'inertie d'une sphère pleine.
3- en son centre d'inertie d'un parallélépipède droit
4- en son sommet d'un cône de révolution homogène de hauteur h dont le rayon du cercle de base est R

Solution.

1- Matrice d'inertie d'un cylindre droit

L'axe Gz est axe de révolution, les axes Gx et Gy sont équivalents et les moments d'inertie par rapport à ces axes sont égaux. La matrice s'écrit alors sous la forme :

$$M_G(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_R \text{ avec } A = \frac{C}{2} + \iiint z^2 dm \quad ; \quad c = \iiint r^2\, dm \quad et \quad dm = \rho r\, dr\, d\theta\, dz$$



C=$\rho \iiint r^3 dr\, d\theta dz = \rho \int_0^R r^3\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = \rho \frac{R^4}{4} 2\pi h$

C=$\frac{1}{2}\, mR^2$

$$\iiint z^2 dm = \rho \int_0^R r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{1}{12} mh^2$$

A= $\frac{m}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right)$

$$M_G(S) = \frac{m}{4} \begin{pmatrix} \left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}_R$$

2- Matrice d'inertie d'une sphère pleine en G

Tout diamètre de la sphère est axe de révolution, c-à-d ,axe principal d'inertie ; donc tous les axes passant par le centre de la sphère sont équivalents, et les moments d'inertie par rapport à ces axes sont, par conséquent, tous égaux. La matrice d'inertie s'écrit alors :

$$M_G(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}_R \quad avec\ A = \frac{2}{3}\, I_G \quad \text{où}\ I_G = \rho \iiint r^4\, sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

I_G est le moment d'inertie de la sphère par rapport à son centre G.

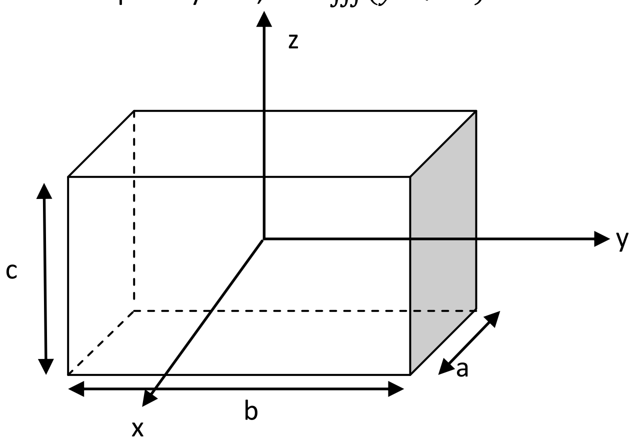
$$I_G = \rho \int_0^R r^4 \int_0^\pi sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{5} mR^2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2}{5} mR^2$$

$$M_G(S) = \frac{2}{5} mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_R$$

3- <u>Matrice d'inertie d'un parallélépipède plein en G</u>

Les trois axes Gx, Gy et Gz sont des axes de symétrie et par conséquent des axes principaux d'inertie, donc tous les produits d'inertie sont nuls.

dm =ρ dx dy dz ; A=$\iiint (y^2 + z^2) dm$ $\quad B = \iiint (x^2 + z^2) dm \quad C = \iiint (x^2 + y^2) dm$



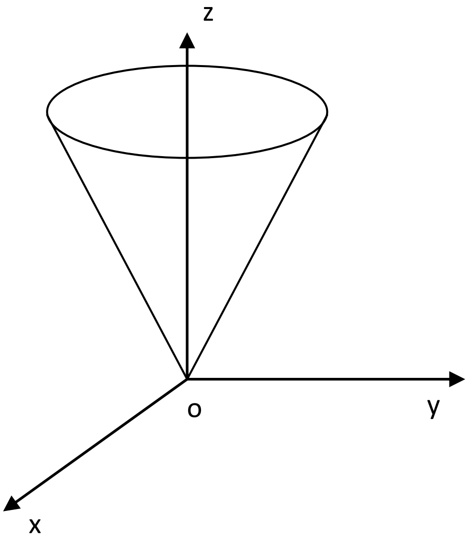
$$A = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz + \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dz = \frac{\rho}{12}\, abc\, (b^2 + c^2) = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$

$$B = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz + \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dz = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$$

$$C = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz + \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

$$M_G(S) = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} (b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & (a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2) \end{pmatrix}_R$$

4- <u>Matrice d'inertie d'un cône en son sommet</u>



L'axe Oz est axe de révolution $\Rightarrow$

$$A = B = \frac{C}{2} + \iiint z^2 dm$$

$$avec\ dm = \rho\, rdr\, d\theta\, dz \Rightarrow$$

$$m = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \left[\int_0^{\frac{R}{h}z} r\, dr\right] dz$$

Car $tg\alpha = \frac{R}{h} = \frac{r}{z} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{h} z$

m$= \rho\, \pi \int_0^h \frac{R^2}{h^2} z^2\ dz = \rho\, \frac{\pi}{3} R^2 h \Rightarrow \rho = \frac{3m}{\pi R^2 h}$

$$C = \iiint r^2\, dm = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \left[\int_0^{\frac{R}{h}z} r^3 dr\right] dz$$

$$C = \rho \frac{\pi}{2} \frac{R^4}{h^4} \int_0^h z^4 dz = \rho \frac{\pi}{10}\ R^4 h = \frac{3}{10}\ mR^2$$

$$\iiint z^2 dm = \ \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h z^2 \left[\int_0^{\frac{R}{h}z} rdr\right] dz = \rho\pi \frac{R^2}{h^2}\ \int_0^h z^4\ dz = \rho \frac{\pi}{5}\ R^2 h^3\ = \frac{3}{5} mh^2$$

$$A = \frac{3}{5} m \left(\frac{R^2}{4} + h^2\right) \qquad M_G(S) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} m \begin{pmatrix} \left(\frac{R^2}{4} + h^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{R^2}{4} + h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_R$$