

Cours de Mathématiques - ASINSA-1 Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Frédéric STURM

Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon

Année académique 2011-2012



Document téléchargeable à l'URL suivante :
<http://maths.insa-lyon.fr/~sturm/>

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Définition

Définition 1.1

On appelle système rectangulaire de type (n, p) ou $n \times p$:

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où les inconnues sont les scalaires $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$ et où les données sont :

- les coefficients $a_{ij} \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$,
- les seconds membres $b_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n$.

On appelle rang du système le rang de $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$:

F. STURM, Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon Cours de Mathématiques - Première Année ASINSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

- Enfin, un système peut avoir autant d'équations que d'inconnues : $n = p$ (système carré). C'est le cas du système 3×3 suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= m \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \end{cases}$$

Nous verrons que ce système n'admet aucune solution si $m \neq 1$. Il en admet une infinité si $m = 1$:

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1 + x_3, 2 - x_3, x_3) \text{ avec } x_3 \in \mathbb{R}.$$

ATTENTION Ce n'est pas parce qu'un système possède autant d'équations que d'inconnues qu'il possède nécessairement une solution. Le « bon » critère porte non pas sur la taille du système mais sur son rang.

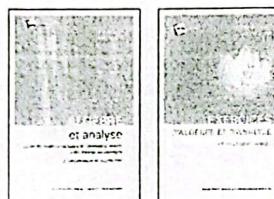


F. STURM, Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon Cours de Mathématiques - Première Année ASINSA

Pour plus de compléments, voir les deux ouvrages suivants parus aux Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR) dans la collection METIS LyonTech :

www.ppur.org

- Algèbre et analyse, 2e édition revue et augmentée, Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, S. Balac, F. Sturm, 1110 pages, paru en 2009.
- Exercices d'algèbre et d'analyse, 154 exercices corrigés de première année, S. Balac, F. Sturm, 448 pages, paru en 2011.



Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Plan du cours

- 1 Systèmes d'équations linéaires
- 2 Un outil pratique : le déterminant
- 3 Étude de l'ensemble des solutions
- 4 Résolution d'un système de Cramer
- 5 Résolution dans le cas général

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

F. STURM, Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon Cours de Mathématiques - Première Année ASINSA

5 Systèmes d'équations linéaires et déterminant

- Un système peut avoir plus d'équations que d'inconnues : $n > p$ (système surabondant). C'est le cas du système 4×3 suivant :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 5x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \end{cases}$$

- Un système peut aussi avoir moins d'équations que d'inconnues : $n < p$ (système sousabondant). C'est le cas du système 3×5 suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 6x_5 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 8x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

F. STURM, Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon Cours de Mathématiques - Première Année ASINSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Plan du cours

- 2 Un outil pratique : le déterminant

F. STURM, Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon Cours de Mathématiques - Première Année ASINSA

9 Systèmes d'équations linéaires et déterminant

SOCIALE AVEC L'ASSOCIATION

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Le déterminant d'un système 2×2

10

On considère le système 2×2 suivant :

$$(S_{2 \times 2}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

d'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Manipulons ce système. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases}$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

13

Consequences

- Soient C_1, C_2 appartenant à $M_{2,1}(\mathbb{K})$.

$$(\exists \gamma \in \mathbb{K} \quad C_2 = \gamma C_1) \implies \det(C_1, C_2) = 0.$$

- Pour tous C_1, C_2 appartenant à $M_{2,1}(\mathbb{K})$,

$$\det(C_2, C_1) = -\det(C_1, C_2).$$

On dit que le déterminant est antisymétrique.

- Pour tous C_1, C_2 appartenant à $M_{2,1}(\mathbb{K})$ et pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$,

$$\det(C_1 + \gamma C_2, C_2) = \det(C_1, C_2),$$

$$\det(C_1, C_2 + \gamma C_1) = \det(C_1, C_2).$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

16

Le déterminant du système 3×3 est l'élément de \mathbb{K} défini par :

$$\det(A) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} (C_1 \wedge C_2) \cdot C_3.$$

Conséquence

Si $\det(A) \neq 0$ alors il existe un unique triplet $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ solution du système 3×3 . En effet,

$$\tilde{x}_1 = \frac{(B \wedge C_2) \cdot C_3}{(C_1 \wedge C_2) \cdot C_3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{(C_1 \wedge B) \cdot C_3}{(C_1 \wedge C_2) \cdot C_3}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{(C_1 \wedge C_2) \cdot B}{(C_1 \wedge C_2) \cdot C_3}.$$

En notant $\det(A) \stackrel{\text{def}}{=} \det(C_1, C_2, C_3)$, on a :

$$\tilde{x}_1 = \frac{\det(B, C_2, C_3)}{\det(A)}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{\det(C_1, B, C_3)}{\det(A)}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{\det(C_1, C_2, B)}{\det(A)}.$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

11

Le déterminant du système 2×2 est l'élément de \mathbb{K} défini par

$$\det(A) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in \mathbb{K}.$$

Conséquence

Si $\det(A) \neq 0$ alors il existe un unique couple $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{K}^2$ solution du système 2×2 . En effet,

$$\tilde{x}_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{et} \quad \tilde{x}_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

En notant $\det(A) \stackrel{\text{def}}{=} \det(C_1, C_2)$, on a :

$$\tilde{x}_1 = \frac{\det(B, C_2)}{\det(C_1, C_2)} \quad \text{et} \quad \tilde{x}_2 = \frac{\det(C_1, B)}{\det(C_1, C_2)}.$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

14

Le déterminant d'un système 3×3

On considère le système 3×3 suivant :

$$(S_{3 \times 3}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

d'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Commençons par récrire le système sous la forme

$$x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3 = B$$

avec C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de A .

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

17

Règle de Sarrus

Pour se souvenir de la formule :

$$\det(A) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23},$$

on peut utiliser la disposition pratique suivante :

$$\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

et on convient que :

- les flèches descendantes (\searrow) correspondent aux termes précédés du signe positif ;
- les flèches montantes (\nearrow) correspondent aux termes précédés du signe négatif.

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Propriétés (forme bilinéaire alternée)

- Soit $C_2 \in M_{2,1}(\mathbb{K})$. Pour tous C_1, C'_1 dans $M_{2,1}(\mathbb{K})$ et pour tous α, β dans \mathbb{K} ,

$$\det(\alpha C_1 + \beta C'_1, C_2) = \alpha \det(C_1, C_2) + \beta \det(C'_1, C_2).$$

On dit que le déterminant est linéaire par rapport à sa première colonne.

- Le déterminant est aussi linéaire par rapport à sa deuxième colonne. On dit alors que le déterminant est une forme bilinéaire.

- Soient C_1, C_2 appartenant à $M_{2,1}(\mathbb{K})$.

$$C_1 = C_2 \implies \det(C_1, C_2) = 0.$$

On dit que le déterminant est une forme alternée.

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

15

Manipulons cette égalité vectorielle.

- On obtient :

$$x_1 [(C_1 \wedge C_2) \cdot C_3] = (B \wedge C_2) \cdot C_3.$$

- On obtient aussi :

$$x_2 [(C_2 \wedge C_1) \cdot C_3] = (B \wedge C_1) \cdot C_3 \\ = -(C_1 \wedge C_2) \cdot C_3 = -(C_1 \wedge B) \cdot C_3$$

- On obtient enfin :

$$x_3 [(C_3 \wedge C_1) \cdot C_2] = \cdot (B \wedge C_1) \cdot C_2 \\ = (C_1 \wedge C_2) \cdot C_3 = (C_1 \wedge C_2) \cdot B$$

Rappelons que :

$$(C_1 \wedge C_2) \cdot C_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

18

Propriétés (forme trilinéaire alternée)

- Soient C_2, C_3 dans $M_{3,1}(\mathbb{K})$. Pour tous C_1, C'_1 dans $M_{3,1}(\mathbb{K})$ et α, β dans \mathbb{K}^2 ,

$$\det(\alpha C_1 + \beta C'_1, C_2, C_3) = \alpha \det(C_1, C_2, C_3) + \beta \det(C'_1, C_2, C_3).$$

Le déterminant est linéaire par rapport à sa 1ère colonne.

- Le déterminant est aussi linéaire par rapport à sa 2ème colonne et à sa 3ème colonne. On dit que le déterminant est une forme trilinéaire.

- Soient C_1, C_2, C_3 appartenant à $M_{3,1}(\mathbb{K})$.

$$(C_1 = C_2 \text{ ou } C_1 = C_3 \text{ ou } C_2 = C_3) \implies \det(C_1, C_2, C_3) = 0.$$

On dit alors que le déterminant est une forme alternée.

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

19

Systèmes d'équations linéaires et déterminant Conséquences

19

- Si une des colonnes est combinaison linéaire des deux autres alors le déterminant est nul. Par exemple, pour tous C_1, C_2, C_3 dans $M_{3,1}(\mathbb{K})$,

$$(\exists (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{K}^2 \quad C_3 = \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2) \implies \det(C_1, C_2, C_3) = 0.$$

- Si l'on permute deux colonnes parmi les trois, alors le déterminant change de signe. Par exemple, pour tous C_1, C_2, C_3 dans $M_{3,1}(\mathbb{K})$,

$$\det(C_1, C_2, C_3) = -\det(C_3, C_2, C_1) = -[-\det(C_2, C_3, C_1)].$$

- Le déterminant ne change pas lorsque l'on ajoute à l'une des colonnes une combinaison linéaire des deux autres colonnes. Par exemple, pour tous C_1, C_2, C_3 dans $M_{3,1}(\mathbb{K})$ et γ_1, γ_2 dans \mathbb{K} ,

$$\det(C_1, C_2, C_3 + \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2) = \det(C_1, C_2, C_3).$$

F. STURM, Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon | Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

22

Déterminant d'une matrice carrée

Définition 2.1

Soit A une matrice carrée d'ordre n sur \mathbb{K} .

- Le déterminant de A est défini par récurrence sur n par

$$\det(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n [(-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{(i,j)})]$$

où j prend une valeur quelconque entre 1 et n , et où $A^{(i,j)}$ est une matrice carrée d'ordre $n-1$ sur \mathbb{K} . Elle s'obtient en supprimant dans A la i -ième ligne et la j -ième colonne.

- Par convention, si $n=1$, c'est-à-dire si $A = (a_{11})$, alors

$$\det(A) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}.$$

F. STURM, Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon | Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

25

Puisque le déterminant d'une matrice et celui de sa matrice transposée sont égaux, on peut aussi développer le déterminant suivant n'importe quelle ligne. Par exemple, en développant par rapport à la première ligne, on a :

$$\begin{vmatrix} 2^{(+)} & 0^{(-)} & 0^{(+)} \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

En développant par rapport à la deuxième ligne, on a :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 9 \\ 2^{(-)} & -7^{(+)} & 0^{(-)} & 0^{(+)} \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 0 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

20

Un déterminant d'ordre 3 peut se décomposer en une combinaison linéaire de 3 déterminants d'ordre 2. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(\quad).$$

Or, d'après ce qui précède,

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23},$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13},$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

F. STURM, Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon | Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

23

Remarque

On utilise aussi la notation : $\det(A) \stackrel{\text{def}}{=} \det(C_1, C_2, \dots, C_n)$ où C_1, C_2, \dots, C_n désignent les colonnes de A .

Le calcul d'un déterminant est indépendant du choix de la colonne par rapport à laquelle on effectue le développement. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 2^{(+)} & 0 & 0 \\ 5^{(-)} & -1 & 2 \\ 3^{(+)} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0^{(-)} & 0 \\ 5 & -1^{(+)} & 2 \\ 3 & 0^{(-)} & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

F. STURM, Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon | Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

26

Règles de calcul

- Si tous les éléments d'une rangée d'une matrice sont nuls alors son déterminant est nul. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

- Si l'on permute deux rangées parallèles d'une matrice alors son déterminant change de signe. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

F. STURM, Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon | Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

21

On a donc obtenu que :

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(+)} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^{(-)} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^{(+)} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

On a développé le déterminant par rapport à sa 1ère colonne.

Utilisant une écriture plus concise,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^3 [(-1)^{i+1} a_{1i} \det(A^{(i,1)})]$$

où $A^{(i,1)}$ est la matrice carrée d'ordre 2 obtenue en supprimant dans A la i -ième ligne et la 1ère colonne. Cette remarque motive la définition du déterminant d'ordre n sous forme récurrente.

F. STURM, Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon | Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

24

Proposition 2.1

Soit n un entier naturel non nul.

- $\det(I_n) = 1$.
- Soit A une matrice carrée d'ordre n sur \mathbb{K} . A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.
- Pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$. En particulier, si A est inversible alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

- Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det(A^T)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ d'où } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est inversible.}$$

F. STURM, Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon | Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

27

- Si deux rangées parallèles d'une matrice sont égales alors son déterminant est nul. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 9 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

- Si l'on multiplie par $\alpha \in \mathbb{K}$ tous les éléments d'une rangée alors son déterminant est multiplié par α . Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

En particulier,

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

F. STURM, Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon | Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

Scanné avec CamScanner

- Si une rangée est combinaison linéaire des rangées parallèles alors son déterminant est nul. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

car $C_1 + 2C_2 = C_3$.

- Le déterminant ne change pas lorsque l'on ajoute à une rangée une combinaison linéaire des autres rangées parallèles (et uniquement des autres rangées parallèles). Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

avec $C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1 + C_2$.

F-STURM, Pole de Mathématiques, INSA de Lyon

Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

31

Interprétation vectorielle

Le système (S) peut s'écrire sous la forme vectorielle :

$$(EV) \quad f(\vec{x}) = \vec{b}.$$

Les données sont :

- l'application linéaire $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ canoniquement associée au système,
- le vecteur $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ de \mathbb{K}^n .

L'inconnue est le vecteur $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p)$ de \mathbb{K}^p .

L'ensemble des solutions de (EV) est défini par

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{ \vec{x} \in \mathbb{K}^p \mid f(\vec{x}) = \vec{b} \}.$$

Nota bene : si $\vec{b} = \vec{0}_{\mathbb{K}^n}$ alors $S = \text{Ker } f \neq \emptyset$.

F-STURM, Pole de Mathématiques, INSA de Lyon

Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

34

Discutons un peu...

Remarque : si on note $r \stackrel{\text{def}}{=} \text{rg } f$ alors $\dim_{\mathbb{K}} (\text{Ker } f) = p - r$.

Supposons qu'il existe une solution particulière \vec{x}_{part} .

- Supposons $r = p$ (c'est-à-dire : $\dim_{\mathbb{K}} (\text{Ker } f) = 0$). Il n'y a alors qu'une seule solution : $S = \{\vec{x}_{\text{part}}\}$.
- Supposons $r < p$ (c'est-à-dire : $\dim_{\mathbb{K}} (\text{Ker } f) \geq 1$). Notons $B_{\text{Ker } f} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p-r})$ une base de $\text{Ker } f$. Pour tout $\vec{x} \in S$, $\exists ! (\alpha_1, \dots, \alpha_{p-r}) \in \mathbb{K}^{p-r} \quad \vec{x} = \vec{x}_{\text{part}} + \underbrace{\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_{p-r} \vec{v}_{p-r}}_{\in \text{Ker } f}$.

Par conséquent, la forme générale d'une solution dépend de $p - r$ paramètre(s).

Il y a donc une infinité de solutions puisque $p - r > 0$.

Exemple 2.1

$$\begin{vmatrix} 1+i & 1-2i & 1+i \\ 3 & 3 & 3 \\ 1-2i & 1+i & 1+i \\ 3 & 3 & 3 \\ 1+i & 1+i & 1-2i \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 1+i & 1-2i & 1+i \\ 1-2i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 1-2i \\ 1+i & -3i & 0 \\ 1-2i & 3i & 3i \\ 1+i & 0 & -3i \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 1+i & -3i & 0 \\ 2-i & 3i & 0 \\ 1+i & 0 & -3i \end{vmatrix} = -\frac{3i}{27} \begin{vmatrix} 1+i & -3i & 0 \\ 2-i & 3i & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

F-STURM, Pole de Mathématiques, INSA de Lyon

Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

32

Exemple 3.1

Soit $m \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre le système réel 3×3 :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et l'équation vectorielle : $f(\vec{x}) = \vec{b}$ où $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{b} = (m, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ avec

$$\vec{y} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3).$$

F-STURM, Pole de Mathématiques, INSA de Lyon

Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

35

... et résumons-nous !

En résumé, une équation vectorielle peut

- ne posséder aucune solution ; c'est le cas si

$$\vec{b} \notin \text{Im } f;$$

- posséder une solution unique ; c'est le cas si

$$\vec{b} \in \text{Im } f \text{ et } \text{Ker } f = \{\vec{0}_{\mathbb{K}^p}\};$$

- en posséder une infinité ; c'est le cas si

$$\vec{b} \in \text{Im } f \text{ et } \text{Ker } f \neq \{\vec{0}_{\mathbb{K}^p}\}.$$

Il n'y a pas d'autres cas de figure !

F-STURM, Pole de Mathématiques, INSA de Lyon

Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

1. Étude des systèmes linéaires

2. Calcul pratique : le déterminant

3. Étude de l'ensemble des solutions

4. Résolution numérique de Cramer

5. Résolution générale

F-STURM, Pole de Mathématiques, INSA de Lyon

Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

33

Discussion sur les solutions

Nous avons vu qu'une équation homogène n'est jamais impossible (elle admet toujours $\vec{0}_{\mathbb{K}^p}$ pour solution).

Et si elle n'est pas homogène ?

Proposition 3.1

Soit \vec{b} un vecteur de \mathbb{K}^p .

- $\text{Si } \vec{b} \notin \text{Im } f \text{ alors } S = \emptyset$.

- $\text{Si } \vec{b} \in \text{Im } f$ (*l'équation (EV) est dite compatible*) alors

$$S = \{ \vec{x}_0 + \vec{x}_{\text{part}} \mid \vec{x}_0 \in \text{Ker } f \}$$

où \vec{x}_{part} est une solution particulière de (EV), c'est-à-dire :

$$\vec{x}_{\text{part}} \in \mathbb{K}^p \text{ et } f(\vec{x}_{\text{part}}) = \vec{b}.$$

F-STURM, Pole de Mathématiques, INSA de Lyon

Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

36

Plan du cours

1. Systèmes d'équations linéaires

2. Calcul pratique : le déterminant

3. Résolution d'un système de Cramer

F-STURM, Pole de Mathématiques, INSA de Lyon

Cours de Mathématiques - Première Année AS/INSA

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Définition d'un système de Cramer

Définition 4.1

Un système linéaire de type (n, p) est dit de Cramer s'il possède autant d'équations que d'inconnues ($n = p$) et si le rang r du système vérifie :

$$r = n = p.$$

Un système de Cramer est un système de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \neq 0.$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Exemple 4.1

Considérons dans \mathbb{R} le système 3×3 d'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est un système de Cramer car son déterminant est non nul (il vaut -1). Son unique solution est $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \in \mathbb{R}^3$ avec

$$\tilde{x}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}$$

On obtient $\tilde{x}_1 = 5$, $\tilde{x}_2 = 3$ et $\tilde{x}_3 = 4$.

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Un peu d'Histoire !

La méthode est due à



Karl Friedrich Gauss
(1777, Brunswick - 1855, Göttingen)

En fait, la paternité de la méthode revient à



Liu Hui
(220, Chine - 280, Chine)

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

- Interprétation vectorielle d'un système de Cramer
L'application linéaire $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ est bijective :

$$f \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n).$$

Ainsi, pour tout vecteur \vec{b} de \mathbb{K}^n , il existe une unique solution $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$. On a :

$$f(\vec{x}) = \vec{b} \iff \vec{x} = f^{-1}(\vec{b}).$$

- Interprétation matricielle d'un système de Cramer
La matrice A carrée d'ordre n est inversible :

$$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Ainsi, pour tout $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une unique solution $\tilde{X} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. On a :

$$A\tilde{X} = B \iff \tilde{X} = A^{-1}B.$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Plan du cours

1.1 Système linéaire et équation

1.2 Système linéaire et équation matricielle

1.3 Méthode des zéros échelonnés

1.4 Résolution d'un système de Cramer

5 Résolution dans le cas général

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Étape d'élimination

But : écrire le système (S) sous une forme échelonnée.

Opérations utilisées : elles sont identiques à celles utilisées dans la méthode des zéros échelonnés :

- Multiplication de l'équation E_k par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}^*$:

$$E_k \leftarrow \alpha E_k \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{K}^*.$$

- Addition à une équation d'un multiple d'une autre :

$$E_k \leftarrow E_k + \beta E_{k'}, \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{K}.$$

- Échange d'équations : $E_k \leftrightarrow E_{k'}$.

- Échange de colonnes : $C_k \leftrightarrow C_{k'}$.

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Proposition 4.1

Un système de Cramer possède une solution et une seule.



Gabriel Cramer

(1704, Genève - 1752, Bagnols-sur-Cèze)

Proposition 4.2 (Formules de Cramer)

Les coordonnées $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ de l'unique solution d'un système de Cramer d'équation matricielle $A\tilde{X} = B$ sont :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \tilde{x}_j = \frac{\det(C_1, \dots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \dots, C_n)}{\det(A)}$$

où C_1, C_2, \dots, C_n désignent les colonnes de la matrice A.

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Méthode de Gauss

Qu'est-ce que la méthode de Gauss ? C'est une méthode de résolution systématique d'un système linéaire de type (n, p) :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{array} \right.$$

avec, a priori, aucune condition ni sur l'entier n , ni sur l'entier p (il faut, bien sûr, $n \geq 1$ et $p \geq 1$). On procède en trois étapes :

- une étape d'élimination,
- suivie d'une étape de discussion,
- suivie (éventuellement) d'une étape de remontée.

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Exemple 5.1

Soit $m \in \mathbb{R}$. Considérons dans \mathbb{R} le système 3×3 suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = m \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{array} \right.$$

Effectuons à partir du système (S) l'opération élémentaire $E_3 \leftarrow E_3 - E_1$, puis $E_3 \leftarrow E_3 - E_2$. On obtient le système échelonné :

$$(S') \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = m \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 0 = 1 - m \end{array} \right.$$

Le système (S') est équivalent au système (S). Ici $r = 2$.

Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Scanné avec CamScanner

À l'issue de l'étape d'élimination, nous nous retrouvons avec le système (S') , échelonné et équivalent à (S) , de la forme :

$$(S') \left\{ \begin{array}{l} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \dots + a'_{1r}x'_r + \dots = b'_1 \\ a'_{21}x'_1 + \dots + a'_{2r}x'_r + \dots = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{rr}x'_r + \dots = b'_r \\ 0 = b'_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b'_n \end{array} \right.$$

où les coefficients (pivots) $a'_{11}, a'_{22}, \dots, a'_{rr}$ sont tous non nuls et où (en l'absence de permutation des colonnes)

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad \dots, \quad x'_p = x_p.$$

Étape de remontée

Comment obtenir la (ou les) solution(s) ?

On procède en deux temps.

- On commence par écrire le système (S'') obtenu à partir du système échelonné (S')

- en supprimant les équations de la forme « $0 = 0$ »,
- en faisant passer aux seconds membres les x'_{r+1}, \dots, x'_p .

Les inconnues sont à présent les scalaires x'_1, x'_2, \dots, x'_r . Ce sont les inconnues principales. Le système (S'') est de Cramer.

- On résout ensuite (S'') en partant de la dernière équation, puis en remontant jusqu'à la première équation.

À l'issue de cette étape de remontée, les inconnues principales x'_1, x'_2, \dots, x'_r s'expriment en fonction de x'_{r+1}, \dots, x'_p .

Étude d'un système sousabondant

Considérons dans \mathbb{R} le système 3×5 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 6x_5 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 8x_4 + 3x_5 = 0 \end{array} \right.$$

- Étape d'élimination : elle conduit au système échelonné équivalent ($r = 3$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 6x_5 = 3 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_3 - 3x_5 = 2 \end{array} \right.$$

- Discussion : le système est compatible. Il y a au moins une solution qui dépend de $5 - 3 = 2$ paramètres. Il y a donc une infinité de solutions.

Étape de discussion

Deux cas peuvent se produire :

- S'il existe $i \in \{r+1, \dots, n\}$ tel que $b'_i \neq 0$ alors l'égalité « $0 = b'_i$ » est absurde. Le système n'est pas compatible :

$$S = \emptyset.$$

- Si $b'_i = 0$ pour tout $i \in \{r+1, \dots, n\}$ alors le système est compatible ($S \neq \emptyset$) : il existe au moins une solution (c'est un vecteur de \mathbb{K}^p) qui dépend de $p - r$ paramètre(s).

- Cette solution est peut-être unique. C'est le cas si

$$r = p.$$

- Il y en a peut-être une infinité. C'est le cas si

$$r < p.$$

Exemple 5.2

Reprendons l'exemple précédent. Considérons donc le système échelonné :

$$(S') \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = m \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 0 = 1 - m \end{array} \right.$$

Ici $r = 2$. Considérons les deux cas suivants :

- Si $m \neq 1$ alors le système est incompatible. Il n'y a donc pas de solution : $S = \emptyset$.

- Si $m = 1$ alors le système est compatible. Il y a au moins une solution qui dépend de $3 - 2 = 1$ paramètre. Il y a donc une infinité de solutions.

Exemple 5.3

Reprendons l'exemple précédent. Soit $m = 1$ ($S \neq \emptyset$).

Remplaçons (S') par le système suivant :

$$(S'') \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = 2 - x_3 \end{array} \right.$$

d'inconnues x_1, x_2 et paramétré par x_3 . On obtient : $x_2 = 2 - x_3$, puis $x_1 = -1 + x_3$. Une solution générale est un vecteur de \mathbb{R}^3 d'expression :

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1 + x_3, 2 - x_3, x_3) \text{ avec } x_3 \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des solutions s'écrit ainsi :

$$S = \{\tilde{x}_0 + \tilde{x}_{\text{part}} \mid \tilde{x}_0 \in \text{Ker } f\}$$

avec $\tilde{x}_{\text{part}} = (-1, 2, 0)$ et $\text{Ker } f = \mathbb{R}(1, -1, 1)$.

- Étape de remontée : on résout le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 - 6x_4 + 6x_5 \\ x_2 + x_3 = 1 + 2x_4 \\ x_3 = 2 + 3x_5 \end{array} \right.$$

d'inconnues x_1, x_2 et x_3 et paramétré par x_4 et x_5 . On a :

$$x_3 = 2 + 3x_5, \quad x_2 = -1 + 2x_4 - 3x_5, \quad x_1 = -1 - 3x_5.$$

Une solution générale est un vecteur de \mathbb{R}^5 de la forme :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1 - 3x_5, -1 + 2x_4 - 3x_5, 2 + 3x_5, x_4, x_5)$$

où chacun des paramètres x_4 et x_5 parcourt \mathbb{R} . L'ensemble des solutions s'écrit ainsi :

$$S = \{\tilde{x}_0 + \tilde{x}_{\text{part}} \mid \tilde{x}_0 \in \text{Ker } f\} \text{ avec } \tilde{x}_{\text{part}} = (-1, -1, 2, 0, 0)$$

et $\text{Ker } f = \text{Vect}((0, 2, 0, 1, 0), (-3, -3, 3, 0, 1))$.