

TOUT EN FICHES

EXERCICES ET MÉTHODES D'
ÉLECTROMAGNÉTISME ET
ÉLECTROSTATIQUE

YVES GRANJON

Professeur à l'université de Lorraine

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



Illustration de couverture : Aurora © lhatove_inc. Fotolia.com

© Dunod, 2019
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-079517-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^e et 3^e al, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	viii
1 Charges, forces et champs électrostatiques	1
Fiche 1 Notion de charge électrique	1
Fiche 2 Loi de Coulomb	2
Fiche 3 Principe de superposition	3
Fiche 4 Champ électrostatique	3
QCM	5
Vrai ou faux ?.....	8
Exercices	10
2 Distributions de charges	28
Fiche 1 Distribution linéaire.....	28
Fiche 2 Distribution surfacique.....	29
Fiche 3 Distribution volumique.....	29
Fiche 4 Champs électriques créés par des distributions de charges.....	30
Fiche 5 Méthodes de calcul.....	32
QCM	33
Vrai ou faux ?.....	36
Exercices	38
3 Potentiel et flux électrostatiques	53
Fiche 1 Propriété du champ électrique.....	53
Fiche 2 Potentiel électrostatique.....	55
Fiche 3 Calcul du champ créé par des charges ou des distributions	56
Fiche 4 Flux du champ électrique	58
Fiche 5 Théorème de Gauss.....	58

QCM	61
Vrai ou faux ?.....	64
Exercices	66
4 Conducteurs en équilibre	89
Fiche 1 Équilibre électrostatique dans un conducteur.....	89
Fiche 2 Théorème de Coulomb	90
Fiche 3 Capacité d'un conducteur.....	91
Fiche 4 Influence électrostatique entre des conducteurs	91
Fiche 5 Condensateurs	93
QCM	95
Vrai ou faux ?.....	98
Exercices	100
5 Énergie électrostatique	121
Fiche 1 Énergie d'une charge placée dans un champ électrique....	121
Fiche 2 Énergie potentielle mutuelle d'un ensemble de charges.....	122
Fiche 3 Énergie potentielle de conducteurs chargés	123
Fiche 4 Forces électrostatiques agissant sur un conducteur isolé.....	124
QCM	126
Vrai ou faux ?.....	129
Exercices	131
6 Bases de l'électromagnétisme. Propriétés magnétiques des courants électriques	140
Fiche 1 Interaction magnétique et champ magnétique	140
Fiche 2 Force de Laplace et force de Lorentz	141
Fiche 3 Courant électrique.....	142
Fiche 4 Champ magnétique créé par des charges en mouvement	143
QCM	145
Vrai ou faux ?.....	148
Exercices	150
7 Champ magnétique créé par un courant	160
Fiche 1 Loi de Biot et Savart.....	160
Fiche 2 Champ créé par un circuit quelconque	161
Fiche 3 Champ créé par un conducteur rectiligne.....	161
Fiche 4 Distributions de courant.....	162

Fiche 5	Lignes de champ et flux du champ magnétique	163
Fiche 6	Théorème d'Ampère	165
Fiche 7	Potentiel vecteur	166
	QCM	168
	Vrai ou faux ?.....	171
	Exercices	173
8	Actions d'un champ magnétique sur des conducteurs parcourus par un courant	199
Fiche 1	Forces de Laplace	199
Fiche 2	Moment magnétique	200
Fiche 3	Action d'un champ magnétique uniforme sur un circuit plan	201
	QCM	203
	Vrai ou faux ?.....	206
	Exercices	208
9	Énergie électromagnétique - Travail des forces électromagnétiques	221
Fiche 1	Énergie potentielle d'interaction	221
Fiche 2	Théorème de Maxwell	222
Fiche 3	Règle du flux maximal.....	223
Fiche 4	Application au calcul des forces magnétiques	223
Fiche 5	Notion d'inductance	224
	QCM	226
	Vrai ou faux ?.....	229
	Exercices	231
10	Problèmes de synthèse	244
	Énoncés des problèmes	245
	Solutions des problèmes.....	252
	Formulaire mathématique	273
	Index	277

Avant-propos

L'électromagnétisme est la discipline qui s'intéresse aux interactions entre électricité et magnétisme. L'électrostatique est une branche particulière du domaine qui s'intéresse aux charges immobiles.

Cet ouvrage rassemble toutes les notions fondamentales de l'électrostatique et de l'électromagnétisme : de la simple interaction entre charges électriques, jusqu'à l'étude des actions subies par des circuits électriques placés dans un champ magnétique.

Il est structuré en quarante-deux fiches et en neuf chapitres développant chacun un thème particulier. Chaque fiche aborde un principe fondamental, une loi physique ou un théorème particulier. À la fin de chaque chapitre, un QCM permet au lecteur de tester ses connaissances et de valider ses acquis. Un ensemble de questions Vrai/faux complète cet outil d'auto-évaluation. Le lecteur pourra ensuite s'entraîner avec des exercices et des problèmes entièrement corrigés. Les solutions sont présentées dans leurs moindres détails en insistant systématiquement sur les méthodes à assimiler et sur le savoir-faire à acquérir absolument pour être capable de résoudre n'importe quel problème d'électrostatique ou d'électromagnétisme. Chaque chapitre propose des exercices de difficultés variées. Il est conseillé de les aborder dans l'ordre, sans chercher à brûler les étapes en négligeant tel ou tel qui paraît trop facile et sans succomber à la tentation de lire trop rapidement la solution. Par ailleurs, de nombreux exercices nécessitent l'utilisation de résultats des exercices précédents. Certains de ces exercices sont de grands classiques ; d'autres sont plus originaux. Ils ont tous vocation à guider l'étudiant vers la maîtrise des différentes notions et de l'aider à acquérir suffisamment d'aisance pour aborder avec succès des problèmes de plus en plus sophistiqués.

L'électromagnétisme n'est pas une discipline extrêmement compliquée pour qui l'aborde avec rigueur et méthode. Les prérequis mathématiques concernent l'analyse des fonctions réelles, le calcul différentiel et intégral et le calcul vectoriel. Le formulaire situé en annexe à la fin de l'ouvrage regroupe toutes les formules de mathématiques utiles.

Cet ouvrage a été conçu avec le souci constant de rendre l'électromagnétisme accessible au plus grand nombre. Je souhaite que chaque lecteur puisse y trouver les clés de sa réussite.

Charges, forces et champs électrostatiques

1

MOTS CLÉS

Charges électriques ■ loi de Coulomb ■ forces électrostatiques ■ permittivité diélectrique ■ principe de superposition ■ champ électrique

Ce premier chapitre est consacré à l'étude simple de l'interaction électrostatique entre des charges électriques ponctuelles immobiles. Les lois et principes fondamentaux qui y sont étudiés constituent le socle sur lequel nous bâtirons ensuite l'étude plus approfondie de l'ensemble de la discipline de l'électrostatique puis de l'électromagnétisme. On retiendra, quoi qu'il arrive, que le terme électrostatique, par définition, se réfère toujours à des charges immobiles (statiques).

Fiche 1

Notion de charge électrique

L'interaction électrostatique est l'une des quatre interactions (ou forces) fondamentales qui régissent le comportement de la matière. Elle s'exerce entre des particules ou corps chargés électriquement.

Parmi les constituants de la matière, deux particules élémentaires sont naturellement pourvues d'une charge électrique : il s'agit de l'électron, chargé négativement, et du proton, chargé positivement. Les charges de ces particules élémentaires sont :

- Pour l'électron, noté e^- : $-1,6 \times 10^{-19}$ C.
- Pour le proton : $+1,6 \times 10^{-19}$ C.

Le coulomb (C) est l'unité internationale de charge électrique.

Il ne peut exister de charge inférieure en valeur absolue à $1,6 \times 10^{-19}$ C, ce qui fait de la charge de l'électron ou du proton, la charge électrique élémentaire. Toute charge électrique est obligatoirement un multiple entier de cette charge élémentaire.

On peut électriser (ou charger) un objet par divers procédés, par exemple en frottant une règle en plastique avec un tissu. Cette électrisation correspond toujours à l'apport ou à « l'arrachage » d'électrons, qui sont les particules matérielles les plus mobiles. En

chargeant un corps quelconque, deux phénomènes peuvent se produire selon la nature du matériau :

- Soit les charges électriques restent localisées à l'endroit qui correspond à l'électrisation ; il s'agit alors d'un matériau isolant.
- Soit les charges migrent et se répartissent à l'intérieur du matériau ; celui-ci est alors conducteur.

L'électrostatique est l'étude des interactions entre corps immobiles chargés électriquement. Dans ce premier chapitre, nous ne considérerons que des objets supposés ponctuels. Dans ce cas, l'interaction ou force électrostatique peut être exprimée de manière très simple.

Fiche 2

Loi de Coulomb

Considérons deux objets ponctuels placés dans le vide en deux points quelconques M et M' et respectivement pourvus des charges Q et Q' . On pose $\overline{MM'} = \vec{r}$ ou encore, en munissant la droite (MM') d'un vecteur unitaire \vec{u} : $\overline{MM'} = \vec{r} = r\vec{u}$.

L'interaction électrostatique se traduit par l'existence d'une force exercée par M sur M' , attractive si les deux charges Q et Q' sont de signes opposés ou répulsive si ces charges sont de mêmes signes. L'expression de cette force est donnée par la loi de Coulomb :

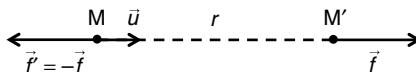
$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2} \vec{u}$$

Avec, dans le système d'unités international : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ qui représente la permittivité diélectrique du vide.

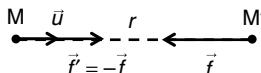
Si l'interaction se produit dans un milieu autre que le vide, non conducteur, homogène et isotrope (matériau appelé diélectrique), on remplace ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ où ϵ_r est la permittivité diélectrique relative du milieu (nombre sans dimension) et ϵ sa permittivité diélectrique absolue (toujours en $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$). Pour tous les milieux matériels (en dehors du vide), on a $\epsilon > 1$. On a par ailleurs l'habitude de considérer que la permittivité relative de l'air est la même que celle du vide, soit $\epsilon_r = 1$. Ci dessous les valeurs de ϵ_r pour quelques diélectriques usuels :

Air :	1,00058
Paraffine	2,1
Mica	8
Verre	5
Eau	80

Notons que la loi de Coulomb, puisqu'elle exprime la force exercée en M' par la charge située en M , montre bien que cette force est répulsive (positive, donc dirigée selon le vecteur unitaire) si les charges Q et Q' sont de mêmes signes et attractive dans le cas contraire (figure 1.1).



Charges de même signe



Charges de signes opposés

Figure 1.1

Symétriquement, la charge placée en M' exerce sur celle placée en M une force de même intensité, mais qui est toujours de sens opposé :

$$\vec{f}' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2} \vec{u}$$

Remarque

La force de Coulomb s'écrit parfois : $\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^3} \vec{r}$ en posant $\vec{r} = r\vec{u}$.

Fiche 3

Principe de superposition

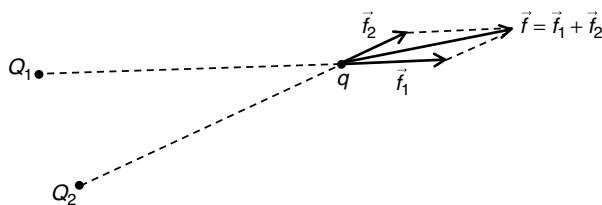


Figure 1.2

La force totale exercée sur un corps de charge q par un ensemble de charges Q_i est égale à la somme des forces exercées individuellement par chacune des charges Q_i . Ce principe est illustré sur la figure 1.2. Pratiquement, cela signifie que lorsqu'on étudie l'interaction entre une charge q d'une part, et un ensemble de charges d'autre part, on effectue la somme vectorielle des forces individuelles exercées sur q par chaque charge.

Fiche 4

Champ électrostatique

Considérons une charge ponctuelle Q_0 placée en un point O de l'espace. Soit une charge q placée à une distance r de O en un point M quelconque. \vec{u} est un vecteur unitaire de l'axe (OM).

En écrivant : $\vec{f} = q \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r^2} \vec{u}$, on met en évidence que la force en M s'exprime comme le produit de charge q et d'un vecteur dépendant de la charge Q_0 qui exerce la force.

On pose : $\vec{f} = q\vec{E}$, avec $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r^2} \vec{u}$,

Où \vec{E} est le vecteur champ électrostatique créé par Q_0 en M.

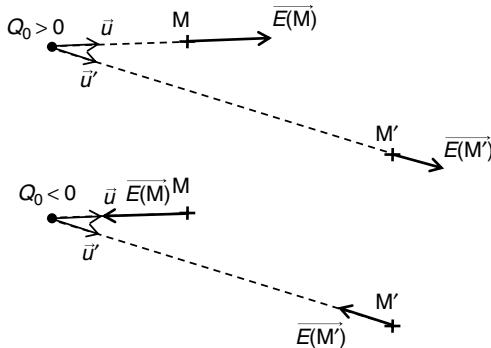


Figure 1.3

Le champ électrostatique (appelé aussi champ électrique) créé en un point M de l'espace par une charge ponctuelle Q_0 placée en O dépend de Q_0 et de la distance OM. Son unité internationale est le volt par mètre ($V \cdot m^{-1}$). Nous justifierons cette unité un peu plus tard.

L'examen de l'expression du vecteur champ montre :

- que ce champ diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de O ;
- que le champ créé par une charge ponctuelle est dirigé vers la charge si cette charge est négative et dans le sens opposé si elle est positive.

La figure 1.3 illustre ces résultats.

Le principe de superposition s'applique évidemment également au vecteur champ électrique. Ainsi, le vecteur champ créé par un ensemble de n charges Q_i en un point M quelconque de l'espace, distant de r_i de chacune des charges, est égal à la somme vectorielle des champs élémentaires créés individuellement en ce point par chaque charge.

Ce principe se résume par la relation suivante :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

La figure 1.4 illustre cette expression avec $n = 3$.

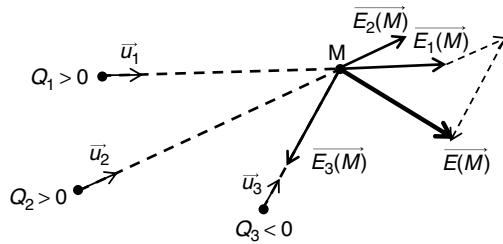


Figure 1.4

Entraînement

QCM

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être exactes.

1. Une charge électrique :

- a. Est toujours un multiple entier positif de la charge de l'électron
- b. Est toujours un multiple entier relatif de la charge du proton
- c. S'exprime en coulombs
- d. Est toujours ponctuelle

2. On considère deux charges positives différentes placées en deux points de l'espace à une distance r :

- a. Elles exercent l'une sur l'autre des forces de répulsion
- b. Les forces qui s'exercent l'une sur l'autre sont de sens opposés
- c. Les forces qui s'exercent l'une sur l'autre sont proportionnelles à la distance qui les sépare
- d. Les forces qui s'exercent l'une sur l'autre sont d'intensités différentes

3. On considère deux charges, l'une négative et l'autre positive, placées en deux points de l'espace à une distance r :

- a. Elles exercent l'une sur l'autre des forces d'attraction
- b. Les forces qui s'exercent l'une sur l'autre sont de sens opposés
- c. Les forces qui s'exercent l'une sur l'autre sont proportionnelles à la distance qui les sépare
- d. Les forces qui s'exercent l'une sur l'autre sont de même intensité

4. La permittivité diélectrique du vide :

- a. S'exprime en farad par mètre
- b. Est inférieure à la permittivité électrique de tout autre matériau
- c. Est égale à $8,854 \times 10^{12}$ U.S.I.
- d. Varie selon la distance qui sépare des charges en interaction

5. Un champ électrique créé par une charge électrique positive :

- a. S'exprime en newtons par coulomb
- b. S'exprime en volts par mètre
- c. Est d'autant plus intense que l'on s'éloigne de la charge
- d. Est dirigé vers la charge

6. Deux charges négatives Q_M et Q_P sont placées respectivement en deux points M et P séparé d'une distance r . Le vecteur \bar{u} désigne le vecteur unitaire de la droite (MP), dirigé de P vers M. Soit \bar{f} la force qu'exerce la charge Q_P sur la charge Q_M et \bar{f}' la force qu'exerce la charge Q_M sur la charge Q_P . Lesquelles de ces propositions sont vraies ?

- a. $\bar{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_M Q_P}{r^2} \bar{u}$
- b. $\bar{f}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_M Q_P}{r^2} \bar{u}$
- c. $\bar{f}' = -\bar{f}$
- d. Les forces \bar{f}' et \bar{f}' sont des forces d'attraction

7. Dans une région de l'espace où le champ électrique est nul :

- a. Il n'y a aucune charge électrique
- b. Toutes les charges électriques présentes subissent la même force electrostatique
- c. Aucune charge présente ne subit de force électrostatique

8. Deux charges Q_A et Q_B sont placées en deux points A et B quelconques de l'espace.

- a. Elles exercent l'une sur l'autre une force qui est égale à la somme des forces qui s'exerceraient individuellement sur elles en présence d'une seule des charges
- b. Elles créent en tout point de l'espace un champ électrique qui est la somme des champs individuels créés par chacune des deux charges
- c. Si une charge q est placée à égale distance des deux charges Q_A et Q_B , elle ne subit aucune force électrostatique

Réponses

- b et c.** Une charge électrique est toujours multiple entier de la charge élémentaire de l'électron ou du proton mais il s'agit bien d'un multiple entier pouvant être positif ou négatif. La proposition a laisserait supposer qu'il n'existe que des charges négatives. Une charge s'exprime bien toujours en coulombs. La proposition d est fausse car les charges peuvent être portées par des corps non ponctuels, même si ce chapitre ne concerne que les charges ponctuelles.
- a et b.** Les charges de mêmes signes exercent toujours l'une sur l'autre des forces de répulsion qui sont de sens opposés. La proposition c est fausse car les forces sont inversement proportionnelles au carré de la distance. Quant à la proposition d, elle est fausse également car l'intensité des deux forces est la même (en valeur absolue).
- a, b et d.** Pour des charges de signes différents, il s'agit bien de forces d'attraction qui sont toujours de sens opposés (voir figure 1.1, fiche 2). Leur intensité (en valeur absolue) est la même. La proposition c est fausse car les forces sont inversement proportionnelles au carré de la distance.
- a et b.** Le farad par mètre est bien l'unité internationale de permittivité absolue. (Attention la permittivité relative est sans unité. Et c'est bien le vide qui possède la plus petite permittivité, c'est-à-dire 1, étant donné que tous les autres matériaux diélectriques sont caractérisés par une permittivité relative supérieure à 1. Bien noter que $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$. La proposition c est donc fausse. De plus, ϵ_0 est une constante universelle et ne varie en aucun cas.
- b.** Le volt par mètre est bien l'unité internationale de champ électrique. Toutefois, la proposition a n'est pas tout à fait fausse. En effet, dans l'expression $\vec{f} = q\vec{E}$, on peut être tenté de considérer que le champ est homogène à une force divisée par une charge. Les réponses c et d, en revanche, sont fausses. Le champ est d'autant plus faible que l'on s'éloigne de la charge et si la charge est positive, le champ n'est pas dirigé vers la charge mais dans le sens opposé.
- a et c.** Attention les notations et conventions ne sont pas les mêmes ici que dans la fiche 1. Mieux vaut dessiner un schéma pour être certain de ne pas se tromper (figure 1.5).

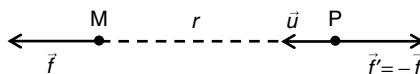


Figure 1.5

- c.** Une charge électrique q placée dans un champ électrique nul subit une force électrostatique $\vec{f} = q\vec{E} = q\vec{0} = \vec{0}$.
- b.** Il s'agit là de l'énoncé pur et simple du principe de superposition. La proposition a n'a aucun sens. Quant à la proposition c, elle est fausse également : pour ne subir aucune force électrostatique, une charge doit être placée dans un champ nul (voir question précédente). Or il n'y a aucune raison pour que le champ soit nul à équidistance de deux charges.

Entraînement

Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
1. La plus petite charge que peut porter un objet ponctuel est égale à $1,6 \times 10^{-19}$ C.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. La loi de Coulomb permet de déterminer la direction du champ électrique émanant d'une charge ponctuelle.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Dans un matériau isolant, les charges électriques restent immobiles.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. La force de Coulomb exprimant l'interaction entre deux charges données est plus intense dans le vide que dans tout autre milieu.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. La force électrique exercée par une charge ponctuelle sur une autre charge ponctuelle est portée par la droite reliant les deux charges.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Une charge positive placée en un point quelconque de l'espace crée en tout point de l'espace un champ électrique dirigé vers cette charge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Le champ créé par une charge électrique placée en un point O de l'espace est de même intensité sur une sphère de centre O et de rayon quelconque.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. L'unité internationale de force électrostatique est le coulomb par mètre.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Le principe de superposition s'applique aux forces électrostatiques mais pas aux champs électriques.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Deux charges différentes placées en deux points de l'espace M et P créent en tout point de l'espace un champ électrique porté par la droite MP.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Réponses

- 1. Faux.** La plus petite charge élémentaire est soit $+1,6 \times 10^{-19}$ C, soit $-1,6 \times 10^{-19}$ C.
- 2. Faux.** La loi de Coulomb permet d'exprimer la force électrostatique entre deux charges.
- 3. Vrai, en général.** C'est la définition d'un isolant. Toutefois, lorsqu'un milieu isolant est soumis à un champ très intense, il peut se produire ce qu'on appelle un claquage et le milieu devient conducteur ; les charges peuvent alors migrer.
- 4. Vrai.** Comme $\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{QQ'}{r^2} \vec{u}$, à charges égales et à distance égale, la force est d'autant plus intense que ϵ_r est faible et c'est bien dans le vide que l'on a la plus faible valeur de la permittivité diélectrique : $\epsilon_r = 1$.
- 5. Vrai.** Dans l'expression $\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{QQ'}{r^2} \vec{u}$, \vec{u} représente le vecteur unitaire de la droite reliant les deux charges.
- 6. Faux.** C'est l'inverse. Le champ est dirigé dans le sens opposé.
- 7. Vrai.** L'expression $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r^2} \vec{u}$ montre que l'intensité du champ, soit $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r^2}$ ne dépend que de la distance r qui sépare la charge du point d'observation. Sur une sphère de rayon r , l'intensité du champ sera donc la même.
- 8. Faux.** Dans tous les domaines de la physique, une force s'exprime en newtons.
- 9. Faux.** Il s'applique aux deux.
- 10. Faux.** Le champ créé en un point de l'espace par deux charges différentes résulte du principe de superposition : il est la somme du champ créé par M et du champ créé par P.

Entraînement

Exercices

1. On considère deux charges égales Q positives placées sur un axe Ox en deux points A et B d'abscisses respectives $+a$ et $-a$. Déterminer la force qui s'exerce sur une charge q placée sur l'axe Oy en un point M d'ordonnée y positive quelconque (voir figure 1.6).

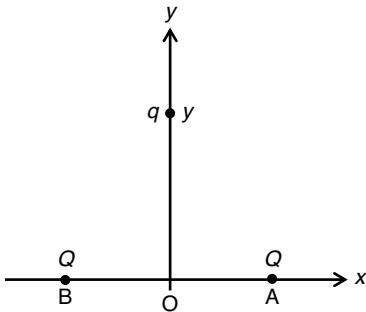


Figure 1.6

2. On considère deux charges égales Q positives placées sur un axe Ox en deux points A et B d'abscisses respectives $+a$ et $-a$ et une charge q placée sur l'axe Oy en un point M d'ordonnée y positive quelconque (voir figure 1.7).

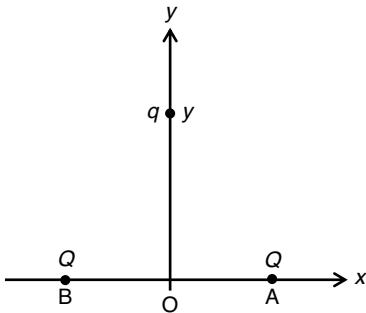


Figure 1.7

- a. Déterminer en fonction de Q la charge Q_0 qui, placée en O, exerce la même force sur q que le couple de charges placées en A et B.
- b. Montrer que si $y \gg a$, on a : $Q_0 \approx 2Q$.
- c. À partir de quelle distance y_0 peut-on considérer que cette charge Q_0 est égale à $2Q$ à 5 % près ? Application numérique : $a = 10^{-2}$ m.
3. On considère deux protons séparés d'une distance r . Soit f_e l'intensité de la force électrostatique exercée mutuellement par les deux protons. Soit f_g l'intensité de la force gravitationnelle entre les deux protons. Calculer le rapport f_e/f_g .

On rappelle que l'expression générale de l'interaction gravitationnelle entre deux corps de masses m et m' est :

$$f_g = G \frac{mm'}{r^2} \text{ avec } G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

La masse du proton est égale à $1,67 \times 10^{-27}$ kg.

4. Deux billes A et B, de mêmes masses m , supposées ponctuelles, sont suspendues chacune à un fil sans masse de longueur l . Les deux fils sont solidaires et sont espacés d'une distance d .

On charge la bille A avec une charge $+q$ et la bille B avec une charge opposée $-q$.

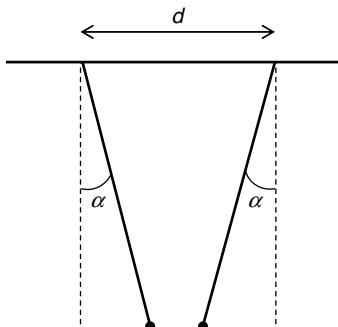


Figure 1.8

Les deux billes se rapprochent sous l'effet de l'attraction électrostatique (figure 1.8) et on mesure l'angle α que font les deux fils avec la verticale.

Calculer la charge q en fonction de α , m , d et l .

Application numérique : $l = 0,2 \text{ m}$, $d = 0,1 \text{ m}$, $m = 0,03 \text{ kg}$, $\alpha = 10^\circ$.

5. La figure 1.9 représente schématiquement le dispositif utilisé par Charles-Augustin Coulomb en 1780 pour vérifier la loi qui porte son nom : une boule métallique M est fixée à l'extrémité d'une tige isolante, suspendue en son milieu O à un fil de torsion dont la constante de torsion est C . On rappelle que le moment d'un couple de torsion a pour expression $C\alpha$. Ce système étant au repos, on approche une boule métallique A tenue par une tige isolante au contact de la boule M et on électrise les deux boules simultanément de sorte qu'elles soient pourvues de la même charge Q . La boule A est maintenue en place et la boule M s'éloigne sous l'action de la force de Coulomb. À l'équilibre, l'angle (AOM) est mesuré. Soit α cet angle. En supposant que cet angle reste petit, déterminer sa valeur.

Application numérique : $OA = OM = d = 0,15 \text{ m}$, $C = 90 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$, $Q = 10^{-6} \text{ C}$.

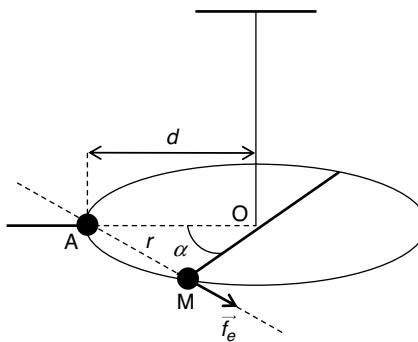


Figure 1.9

6. Deux billes porteuses des charges électriques $+q$ et $-q$ sont placées sur un axe Ox en deux points d'abscisses respectives $-d$ et $+d$. Calculer le champ électrique $E(x)$ créé en tout point de l'axe par ce couple de charges, puis tracer sommairement la courbe représentative des variations de ce champ en fonction de x .
7. Dans un plan Oxy muni d'un repère orthonormé, on place trois charges en trois points A, B et C :

A($a, 0$) : charge $Q = 10^{-4}$ C

B($-a, 0$) : charge $Q = 10^{-4}$ C

C($0, a$) : charge $-Q = -10^{-4}$ C

avec $a > 0$.

Quelle charge Q' faut-il placer au point D de coordonnées $(0, 2a)$ pour que le champ au point M($0, -a$) soit nul ?

8. Une particule de masse m et de charge $-q$ est introduite avec une vitesse initiale V_0 en un point O d'une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme E (voire figure 1.10). Cette région est délimitée par deux plaques métalliques espacées d'un entrefer $2e$ et de longueurs d .

Le problème est projeté dans un repère Oxy. On néglige le poids de la particule. Déterminer la trajectoire de la particule à l'intérieur de la région où règne le champ électrique. Déterminer la condition sur q pour la particule n'entre pas en collision avec une des plaques.

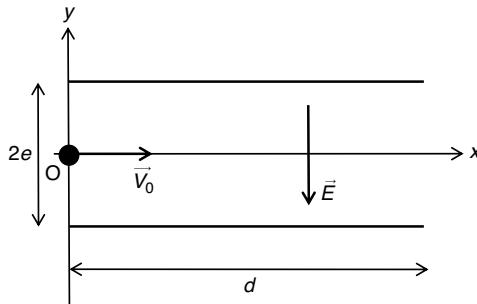


Figure 1.10

9. Deux billes A et B de masses égales m sont suspendues chacune à un fil sans masse de longueur l , les deux fils étant fixés sur un support en un même point O (figure 1.11). Les deux billes sont chargées avec la même charge q et s'écartent l'une de l'autre. Le dispositif s'immobilise dans une position d'équilibre où chaque fil fait un angle α avec la verticale. Déterminer α en supposant qu'il est petit.

Application numérique : $q = 10^{-7}$ C, $m = 20$ g, $l = 30$ cm.

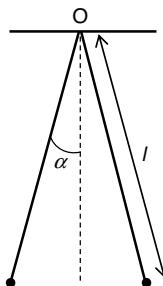


Figure 1.11

- 10.** Dans un plan Oxy muni d'un repère orthonormé, on place quatre charges en quatre points A, B, C et D :

A($-a, a$) : charge $q = 10^{-7}$ C

B($-a, -a$) : charge $-q = -10^{-7}$ C

C($a, -a$) : charge $q = 10^{-7}$ C

D(a, a) : charge $q = 10^{-7}$ C

avec $a > 0$.

Quelle charge Q faut-il placer au point M de coordonnées $(2a, 2a)$ pour que le champ électrique soit nul au point O ?

- 11.** Deux billes A et B de masses m_A et m_B sont fixées à chaque extrémité d'une tige rigide isolante sans masse de longueur 50 cm, dont le milieu repose sur le couteau d'une balance. La bille A est chargée avec une charge positive q . On maintient le système en équilibre en présentant au-dessus de la masse m_A , à une distance l , une bille chargée avec une charge Q maintenue par une tige isolante (figure 1.12). Calculer la valeur de Q qui permet d'assurer l'équilibre de la balance.

Application numérique : $q = 10^{-6}$ C, $m_A = 50$ g, $m_B = 20$ g, $l = 10$ cm.

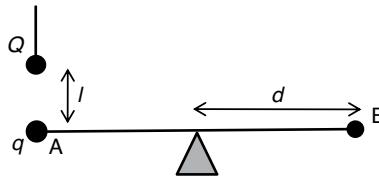


Figure 1.12

Réponses

1. Considérons tout d'abord la force exercée en M sur la charge q par la charge Q située au point A (figure 1.13).

L'intensité de cette force est :

$$\|\vec{f}_A\| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{AM^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2 + y^2}$$

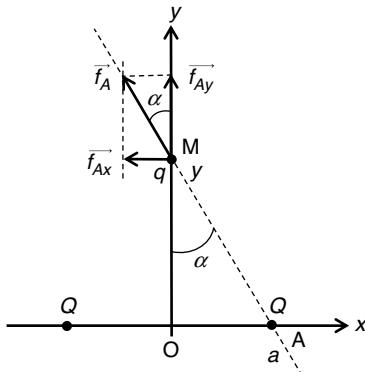


Figure 1.13

Projetons cette force sur les deux axes. On obtient, notamment pour la projection de cette force sur l'axe Oy :

$$f_{Ay} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2 + y^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

Car :

$$\cos \alpha = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

Ne calculons pas f_{Ax} pour le moment.

Considérons désormais la force exercée en M par la charge Q placée en B (figure 1.14).

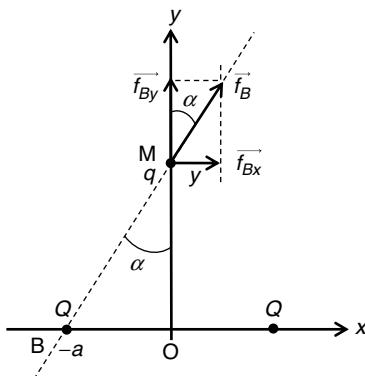


Figure 1.14

La symétrie du schéma avec celui de la figure 1.13 nous indique immédiatement que :

$$f_{By} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

Nous remarquons également que $f_{Bx} = -f_{Ax}$.

Appliquons le principe de superposition : dans le repère Oxy, la force exercée en M par les deux charges A et B a pour composantes :

$$f_x = 0$$

$$f_y = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

Soit encore, en munissant notre repère d'une base vectorielle orthonormée :

$$\vec{f} = \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j}$$

Application numérique :

$$f_y = 5,3 \text{ N}$$

Il est intéressant de noter que nous avons tiré parti de la symétrie du dispositif. Dans un problème d'électrostatique, il convient de rechercher systématiquement à exploiter toute symétrie. Dans cet exercice, cette symétrie était évidente, compte tenu de la manière dont les axes étaient placés par rapport aux deux charges.

- 2.** **a.** Exploitons le résultat de l'exercice précédent : le couple de charges placées en A et B exerce sur la charge q placée en M une force dirigée selon l'axe Oy, d'intensité f_0 telle que :

$$f = \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

Une charge Q_0 placée en O exercerait sur la charge q placée en M une force dirigée selon Oy et d'intensité f_0 telle que :

$$f_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 q}{y^2}$$

On doit donc avoir :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 q}{y^2} = \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

Soit :

$$Q_0 = \frac{2Qy^3}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

Remarque : nous venons de calculer ce qu'on appelle la charge équivalente à un ensemble de charges, c'est-à-dire la charge unique qui exerce en un point donné, la même action que cet ensemble de charges. Comme le montre le résultat, cette charge équivalente dépend de la distance entre les deux charges Q , mais également de la position du point M. Toutefois, si M se trouve suffisamment loin des deux points A et B, on peut sans doute imaginer que l'action des deux charges Q en A et B pourra être assimilée à l'action d'une charge unique $2Q$ placée en O. C'est ce que suggère la deuxième question.

b. Si on suppose que $y \gg a$ dans l'expression obtenue précédemment, on obtient :

$$Q_0 = \frac{2Qy^3}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \approx \frac{2Qy^3}{(y^2)^{3/2}} = 2Q$$

Ceci montre bien que la force électrostatique exercée par deux charges Q séparées d'une distance $2a$ est assimilable à la force exercée par une charge unique $2Q$ à condition de se trouver suffisamment loin de ces charges.

c. L'expression de Q_0 trouvée précédemment nous montre qu'en réalité, on a toujours $Q_0 < 2Q$ car $y^3 < (a^2 + y^2)^{3/2}$.

La condition posée dans l'énoncé nous amène donc à considérer que y_0 est telle que :

$$Q_0 = \frac{2Qy_0^3}{(a^2 + y_0^2)^{3/2}} = 2Q \times \frac{95}{100}$$

Soit :

$$\frac{y_0^3}{(a^2 + y_0^2)^{3/2}} = \frac{95}{100}$$

Ou encore :

$$y_0^3 = \frac{95}{100} (a^2 + y_0^2)^{3/2}$$

Élevons chaque membre à la puissance $2/3$:

$$y_0^2 = \left(\frac{95}{100}\right)^{2/3} (a^2 + y_0^2)$$

D'où :

$$y_0 = 5,4 \times a = 5,4 \text{ cm}$$

- 3.** L'expression de l'intensité de la force électrostatique exercée mutuellement par les deux protons est :

$$f_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

Avec :

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C, charge du proton.}$$

L'expression de l'interaction gravitationnelle entre les deux protons vaut :

$$f_g = G \frac{m^2}{r^2}$$

On a donc :

$$\frac{f_e}{f_g} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}}{G \frac{m^2}{r^2}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m^2}$$

Application numérique :

$$\frac{f_e}{f_g} = \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{4\pi \times 8,854 \times 10^{-12} \times 6,67 \times 10^{-11} \times (1,67 \times 10^{-27})^2}$$

Soit :

$$\frac{f_e}{f_g} = 1,24 \times 10^{36}$$

Nous voyons ici que l'intensité de l'interaction électrostatique est beaucoup plus importante que l'intensité de l'interaction gravitationnelle et justifie, le cas échéant, qu'on néglige cette dernière par rapport à la force de Coulomb.

- Considérant que le problème est complètement symétrique, étudions l'équilibre de la masse chargée A, celle de gauche, par exemple : la bille A en équilibre est soumise à son poids, à la force électrostatique exercée par la charge B et à la tension du fil (figure 1.15).

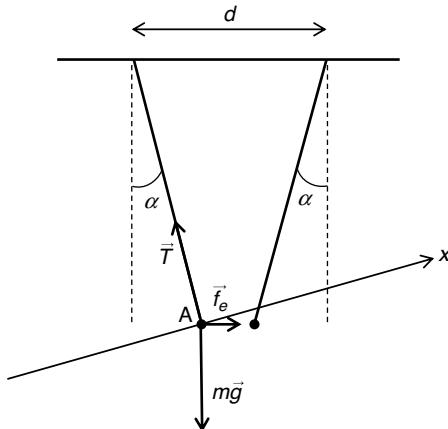


Figure 1.15

L'équilibre de la masse A se traduit par :

$$\vec{T} + \vec{f}_e + \vec{mg} = \vec{0}$$

Projetons sur un axe Ax orthogonal au fil :

$$-mg \sin \alpha + f_e \cos \alpha = 0$$

Appelons r la distance séparant les deux billes, à l'équilibre. On a naturellement :

$$f_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

Or la géométrie très simple du dispositif étudié nous montre (figure 1.16) que :

$$r = d - 2l \sin \alpha$$

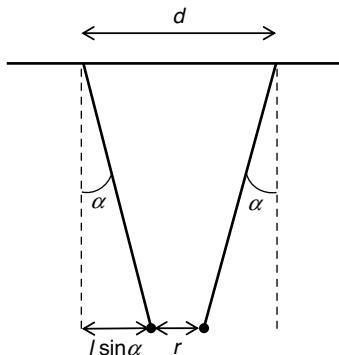


Figure 1.16

On obtient donc :

$$-mg \sin \alpha + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(d - 2l \sin \alpha)^2} \cos \alpha = 0$$

D'où :

$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0(d - 2l \sin \alpha)^2 mg \tan \alpha}$$

Application numérique :

$$q = 7,34 \times 10^{-8} \text{ C}$$

Remarque : on peut être souvent tenté de remplacer $\sin \alpha$ ou $\tan \alpha$ par α lorsque cet angle est réputé petit (et à condition de l'exprimer en radians). Il est important de rappeler que cette simplification ne peut être utilisée que si les angles sont véritablement petits, sous peine d'introduire une erreur significative. En tout état de cause, on ne l'introduit que si cela est vraiment nécessaire, ce qui n'est pas le cas ici. Dans cet exercice, l'expression exacte que nous avons trouvée ne pose pas de problème particulier. Comme le choix est parfois difficile de déclarer un angle petit ou non, la règle doit être de ne choisir cette simplification que si la complexité des calculs le nécessite.

Effectuons néanmoins le calcul avec cette approximation pour avoir une idée de l'erreur qui serait commise :

$$\alpha = 10 \text{ deg} = 0,1745 \text{ rad}$$

L'expression de la charge q devient :

$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0(d - 2l\alpha)^2 mg\alpha}, \alpha \text{ étant exprimé en radians.}$$

Application numérique : $q = 7,22 \times 10^{-8} \text{ C}$.

Soit moins de 2 % d'erreur.

5. La condition d'équilibre de tige OM en rotation se traduit par :

$$\bar{\mathcal{M}}(\bar{f}_t) + \bar{\mathcal{M}}(\bar{f}_e) = \bar{0}$$

Avec $\bar{\mathcal{M}}(\bar{f}_t)$, moment des forces de torsion et $\bar{\mathcal{M}}(\bar{f}_e)$, moment de la force de Coulomb.

Afin de calculer le moment de la force de Coulomb, établissons un schéma du dispositif en vue de dessus (figure 1.17).

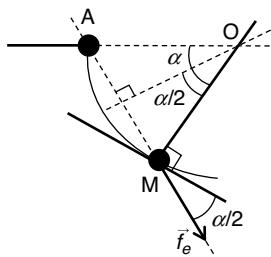


Figure 1.17

Seule la composante orthogonale à OM possède un moment non nul.

On a donc :

$$\|\bar{\mathcal{M}}(\bar{f}_e)\| = d \times f_e \cos \frac{\alpha}{2}$$

De plus, l'expression de la force de Coulomb est :

$$f_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\left(2d \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

En effet, il est relativement aisé de vérifier géométriquement sur la figure 1.17 que la distance r séparant les deux boules vaut effectivement :

$$r = 2d \sin \frac{\alpha}{2}$$

L'equation d'equilibre du systeme en rotation s'ecrit donc :

$$d \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\left(2d \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2} \cos \frac{\alpha}{2} - C\alpha = 0$$

En supposant α petit, on peut utiliser les approximations suivantes :

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} \text{ et } \cos \frac{\alpha}{2} \approx 1$$

D'où :

$$d \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(d\alpha)^2} = C\alpha$$

$$\text{Soit : } \alpha^3 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 Cd} \Rightarrow \alpha = \sqrt[3]{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 Cd}}$$

Application numérique :

$$\alpha = 8,7 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

On peut également exprimer α en degrés :

$$\alpha = 8,7 \times 10^{-2} \times \frac{180}{\pi} = 5 \text{ deg}$$

Contrairement à l'exercice précédent, il eut été difficile, ici, de calculer α sans effectuer d'approximation. Cette approximation est tout à fait justifiée compte tenu de la valeur trouv e .

- 6.** Calculons le champ électrique créé en un point x quelconque de l'axe et orientons ce vecteur champ dans le sens des x croissants (figure 1.18). Cette orientation est arbitraire puisque, de toute manière, nous ne connaissons pas encore la valeur de ce champ. Nous compterons donc positivement tout champ orienté selon les x croissants et nous le compterons négativement dans le cas contraire.

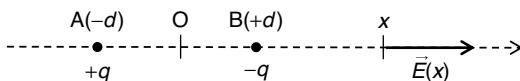


Figure 1.18

Le champ en un point quelconque d'abscisse x situé sur l'axe résulte de la superposition des champs créé respectivement par la charge A et par la charge B. Ces deux vecteurs champs sont évidemment parallèles à Ox.

En projection sur l'axe Ox, on a :

$$E(x) = E_A(x) + E_B(x)$$

$E_A(x)$ étant le champ créé en x par la charge A et $E_B(x)$ étant le champ créé en x par la charge B. Dans nos calculs, nous devrons bien entendu considérer qu'un champ est dirigé vers la charge si celle-ci est négative et dans le sens opposé si elle est positive.

- Calculons ces deux champs pour $x > d$.

$$E_A(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(d+x)^2}$$

La valeur algébrique de $E_A(x)$ est positive car le vecteur champ créé par A en un point d'abscisse $x > d$ s'éloigne de la charge A et est donc dirigé dans le sens des x croissants.

$$E_B(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{(x-d)^2}$$

La valeur algébrique de $E_B(x)$ est négative car le vecteur champ créé par B en un point d'abscisse $x > d$ est dirigé vers la charge B, donc dans le sens des x décroissants.

D'où :

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(d+x)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x-d)^2}$$

Soit :

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(d+x)^2} - \frac{1}{(x-d)^2} \right)$$

Après réduction au même dénominateur, on obtient :

$$x > d \Rightarrow E(x) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4dx}{(d+x)^2(x-d)^2} \right)$$

La valeur algébrique du champ est négative, ce qui signifie que le vecteur champ est orienté dans le sens des x décroissants.

- Calcul pour $0 < x < d$ (figure 1.19).

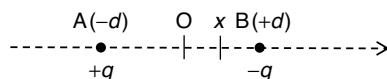


Figure 1.19

On a :

$$E_A(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(d+x)^2}$$

Et :

$$E_B(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x-d)^2}$$

$E_B(x)$, cette fois-ci, est positif car le vecteur champ créé par B est toujours dirigé vers B mais se trouve ici orienté selon les x croissants.

On a donc :

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(d+x)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x-d)^2}$$

Soit :

$$0 < x < d \Rightarrow E(x) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2(x^2 + d^2)}{(d+x)^2(x-d)^2}$$

- Calcul du champ en $x = 0$ et en $x = d$.

En $x = 0$, le champ est défini et l'expression trouvée pour $0 < x < d$ convient. On a donc :

$$E(0) = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

En $x = d$, le champ n'est pas défini puisque la distance à la charge B est nulle, ce qui correspond ainsi à un champ tendant vers l'infini.

- Calcul du champ pour $x < 0$.

L'étude du champ pour $x < 0$ peut être rapide en considérant que si on changeait l'orientation de l'axe, on trouverait les valeurs de champ recherchées, opposées à celles que l'on vient de trouver puisque les charges étant inversées, cela reviendrait à changer q en $-q$.

Si on trouve des valeurs opposées en changeant l'orientation de l'axe, cela signifie que sans changer cette orientation, on doit trouver les mêmes valeurs en changeant x en $-x$. La fonction $E(x)$ est donc paire et son graphe présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

- Tracé du graphe.

Le tracé de la fonction $E(x)$ ne pose pas de problème particulier : il suffit, en fonction de l'intervalle considéré, d'utiliser l'expression appropriée de la fonction. On retrouve évidemment la propriété de parité de la fonction $E(x)$ qui se traduit par une symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées.

La figure 1.20 présente le tracé succinct de $E(x)$.

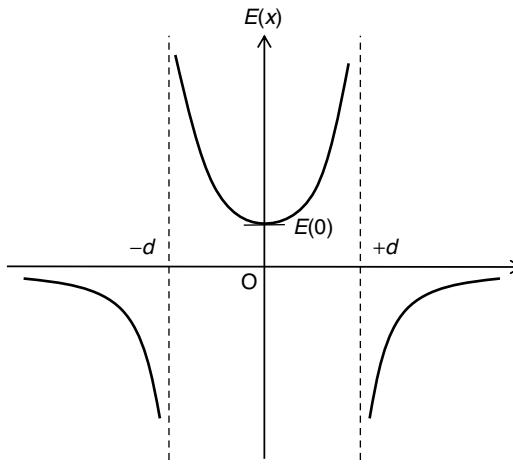


Figure 1.20

Remarque : dans ce type de problème, relativement difficile, on est souvent tenté d'en rester à l'expression trouvée pour $x > d$. Il s'agit d'un piège classique dans lequel il faut à tout prix éviter de tomber. Il faut être vigilant chaque fois que l'on cherche à exprimer un champ le long d'un axe, de part et d'autre d'une charge ou d'un ensemble de charges.

7. La méthode consiste à calculer le champ créé en M par les trois charges A, B et C, puis à chercher quelle doit être la charge Q' pour que le champ créé par Q' en M soit exactement opposé au champ créé par les trois premières charges. La géométrie du système est présentée sur la figure 1.21. Plaçons les trois champs créés en M par A, B et C.

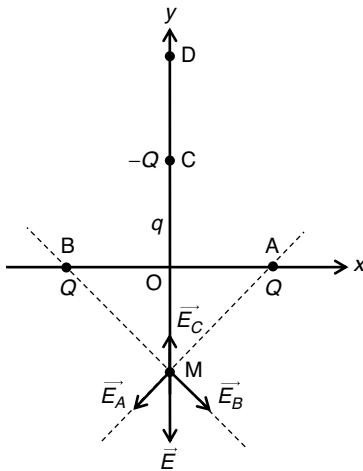


Figure 1.21

Soit \vec{E}_A le champ créé en M par A, \vec{E}_B le champ créé en M par B et \vec{E}_C le champ créé en M par C :

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$$

Calculons dans un premier temps :

$$\vec{E}' = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

Compte tenu de la symétrie des charges A et B par rapport à l'axe Oy, la résultante des champs créés par A et B se trouve parallèle à l'axe et a pour intensité le double de la projection de l'un de ces champs sur l'axe. On a donc :

$$E' = -2 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(a\sqrt{2})^2} \cos \frac{\pi}{4}$$

La valeur algébrique du champ est comptée négativement car le champ est dirigé selon les y décroissants.

Calculons maintenant E_C , valeur algébrique du vecteur champ créé en M par la charge C, vecteur qui se trouve bien entendu parallèle à l'axe Oy. La charge placée en C étant négative, ce champ sera dirigé vers C, donc dans le sens des y croissants. E_C est donc positif.

$$E_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(2a)^2}$$

En résumé, le champ électrique créé en M par les trois charges A, B et C est donc parallèle à Oy et a pour valeur algébrique :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(2a)^2} - \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(a\sqrt{2})^2} \cos \frac{\pi}{4}$$

Soit :

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{\sqrt{2}}{2a^2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{1 - 2\sqrt{2}}{4} \right)$$

Nous remarquons que la valeur de ce champ est négative. Le vecteur champ est donc orienté selon les y décroissants, comme cela était prévu sur la figure 1.21.

Nous allons à présent chercher à compenser exactement ce champ créé par A, B et C, par le champ créé par D. Nous pouvons déjà prévoir le signe de Q' . En effet, le champ qu'elle doit créer en M doit être positif, donc orienté selon les y croissants, donc dirigé vers D. Donc $Q' < 0$. Le champ créé par cette charge vaut alors :

$$E_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-Q')}{(3a)^2}$$

Qui est bien positif compte tenu du signe de Q' .

Le champ en M sera nul si et seulement si $E_D + E = 0$.

Soit :

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{9a^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{1 - 2\sqrt{2}}{4} \right) = 0$$

D'où :

$$Q' = -9Q \left(\frac{1 - 2\sqrt{2}}{4} \right)$$

Application numérique :

$$Q' = -4,1 \times 10^{-4} \text{ C}$$

Remarque : cet exercice ne présente aucune difficulté, à condition, bien sûr, de faire attention aux signes. Comme dans tout problème de physique où des vecteurs sont en jeu, il est fondamental de raisonner sur des valeurs algébriques dont les signes sont choisis conformément à un axe orienté. Il montre également la nécessité de traduire immédiatement l'énoncé par un schéma facilement exploitable. Avec un minimum d'observation et de rigueur, ce type d'exercice ne doit plus poser de difficulté.

8. La particule est soumise à une force unique d'origine électrostatique.

Soit $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ son vecteur accélération.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$m\bar{a} = \sum \bar{f} = -q\bar{E}$$

Le signe négatif est introduit par la dénomination $-q$ de la charge.

Projetons cette relation vectorielle sur les deux axes Ox et Oy :

$$\begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = qE \end{cases}$$

Notons qu'ici, le signe positif de qE est introduit par la projection du vecteur champ qui est dirigé selon les y décroissants.

Intégrons ces deux équations :

$$\begin{cases} mv_x = C_1^{\text{te}} \\ mv_y = qEt + C_2^{\text{te}} \end{cases}$$

Ces deux constantes se déterminent aisément en considérant que l'instant $t = 0$ correspond à l'instant où la particule est introduite en O. À $t = 0$, le vecteur vitesse n'a qu'une seule composante selon Ox. On a donc :

$$\begin{cases} v_x = V_0 \\ v_y = \frac{qEt}{m} \end{cases}$$

Intégrons à nouveau et considérons qu'à l'instant $t = 0$, la particule se trouve en O :

$$\begin{cases} x = V_0 t \\ y = \frac{qEt^2}{2m} \end{cases}$$

Éliminons t pour déterminer la trajectoire de la particule :

$$y = \frac{qE}{2mV_0^2} x^2$$

La trajectoire est donc une parabole orientée vers les y croissants.

Pour éviter toute collision de la particule avec la plaque supérieure, il faut impérativement que $y < e$ pour $x = d$:

$$\frac{qE}{2mV_0^2} d^2 < e$$

D'où la condition sur q :

$$q < \frac{2mV_0^2 e}{d^2 E}$$

- 9.** Compte tenu de la symétrie du dispositif, considérons l'étude de l'équilibre d'une des deux billes, par exemple celle de gauche. Plaçons les différentes forces auxquelles ce système est soumis (figure 1.22).

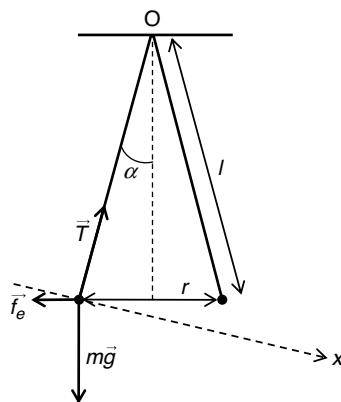


Figure 1.22

On a :

$$\vec{T} + \vec{f}_e + \vec{mg} = \vec{0}$$

Projetons cette relation vectorielle sur un axe Ox orthogonal au fil (figure 1.22) :

$$-f_e \cos \alpha + mg \sin \alpha = 0$$

Remarque : ne connaissant rien de la tension du fil, noter qu'il est judicieux de choisir l'axe de projection de sorte que la projection de \vec{T} soit nulle. Par ailleurs, bien faire attention aux signes lorsque l'on projette la relation vectorielle : choisir une orientation définitive pour l'axe, compter positivement toute mesure projetée dans le même sens que Ox et négativement toute projection orientée en sens contraire. Cette rigueur est fondamentale car toute erreur de signe conduit inévitablement à des résultats faux.

Calculons l'intensité de la force électrostatique. Soit r la distance séparant les deux billes à l'équilibre :

$$f_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

Avec :

$$r = 2l \sin \alpha$$

D'où :

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4l^2 \sin^2 \alpha} \cos \alpha + mg \sin \alpha = 0$$

Si on considère que l'angle est petit, on peut écrire :

$$\sin \alpha \approx \alpha \text{ et } \cos \alpha \approx 1$$

Soit :

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4l^2 \alpha^2} + mg\alpha = 0$$

D'où :

$$\alpha^3 = \Rightarrow \alpha = \sqrt[3]{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 mg}}$$

Application numérique :

$$\alpha = 0,108 \text{ rad} = 0,108 \times \frac{180}{\pi} = 6,2 \text{ deg}$$

10. Les quatre charges sont placées dans le plan comme indiqué sur la figure 1.23.

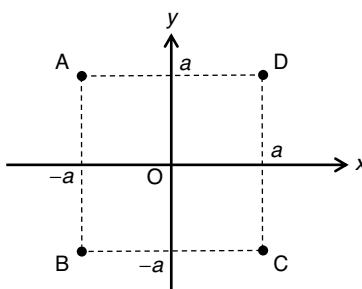


Figure 1.23

Calculons dans un premier temps le vecteur champ créé en O par l'ensemble des quatre charges placées en A, B, C et D.

Soit \vec{E}_A le champ créé en O par la charge placée en A. Soit \vec{E}_B , \vec{E}_C et \vec{E}_D les trois autres vecteurs champs créés par les trois autres charges. La figure 1.24 présente cette superposition des quatre champs présents au point O.

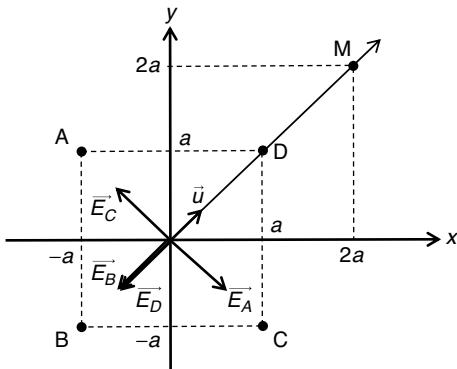


Figure 1.24

Les charges placées en A et C étant égales et la distance OA étant égale à la distance OC, on a :

$$\vec{E}_A + \vec{E}_C = \vec{0}$$

De même, on a OB = OD mais comme les charges placées en B et D sont de signes opposés, on a :

$$\vec{E}_B = \vec{E}_D$$

Il faut, afin d'annuler le champ électrique en O, placer une charge Q en M, de manière à ce que le champ \vec{E}_M créé en O par cette charge soit tel que :

$$\vec{E}_M = -2\vec{E}_D$$

Calculons donc le champ \vec{E}_D . La distance OD étant égale à $a\sqrt{2}$, on obtient :

$$\vec{E}_D = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(a\sqrt{2})^2} \vec{u}$$

avec \vec{u} , vecteur unitaire de l'axe (OD) comme indiqué sur la figure 1.24.

Une charge Q placée en M créera en O le champ \vec{E}_M tel que :

$$\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(2a\sqrt{2})^2} \vec{u}$$

On a donc :

$$\vec{E}_M = 2\vec{E}_D \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(2a\sqrt{2})^2} = -\frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(a\sqrt{2})^2}$$

D'où :

$$\frac{Q}{(2a\sqrt{2})^2} = -\frac{2q}{(a\sqrt{2})^2} \Rightarrow Q = -8q$$

Application numérique :

$$Q = -8 \times 10^{-7} \text{ C}$$

11. Exprimons l'équilibre du dispositif en rotation autour du fléau avec les moments des trois forces en présence (figure 1.25).

Remarquons au préalable que la masse m_A est supérieure à la masse m_B . Par conséquent, son poids sera supérieur et la balance aura naturellement tendance à être entraînée vers le côté de cette masse m_A . La force électrostatique créée en A par la charge Q doit donc compenser ce déséquilibre et être dirigée vers le haut. Il s'agira donc d'une force d'attraction. Comme la charge q est positive, on en déduit que la charge Q doit être négative.

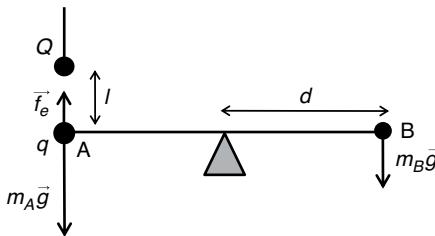


Figure 1.25

La condition d'équilibre du dispositif en rotation se traduit par la nullité de la somme des moments des forces qui s'appliquent au point de rotation (en fait, sur l'axe de rotation) :

$$\sum \vec{M}(\vec{f}) = \vec{0}$$

Soit d la distance séparant chaque masse du point de rotation. La condition d'équilibre devient :

$$m_B gd + f_e - m_A gd = 0$$

Remarque : nous comptons positivement tout moment tendant à faire pivoter le dispositif dans un sens et négativement tout moment tendant à la faire tourner dans l'autre sens.

Calculons l'intensité de la force électrostatique :

$$f_e = \|\vec{f}_e\| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q|Q|}{l^2}$$

Attention : il s'agit bien de l'intensité de la force électrostatique, autrement dit du module du vecteur force. Il s'agit d'une quantité positive. La charge Q qui apparaît dans cette expression est négative, d'où la valeur absolue.

On a donc :

$$m_B gd + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q|Q|}{l^2} - m_A gd = 0$$

Soit :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q|Q|}{l^2} = m_A gd - m_B gd$$

D'où :

$$|Q| = \frac{4\pi\epsilon_0 l^2 gd (m_A - m_B)}{q}$$

Application numérique : la longueur de la tige reposant sur le fléau de la balance étant égale à 50 cm, on en déduit $d = 25$ cm.

$$|Q| = \frac{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12} \times (0,1)^2 \times 9,81 \times 0,25 \times (30 \times 10^{-3})}{10^{-6}}$$

$$|Q| = 8,2 \times 10^{-8} \text{ C} \Rightarrow Q = -8,2 \times 10^{-8} \text{ C}$$

Distributions de charges

2

MOTS CLÉS

Distribution linéique ■ distribution surfacique ■ distribution volumique ■ densités de charges ■ calculs de champs électriques

La plupart du temps, les charges électriques ne se trouvent pas sous une forme ponctuelle mais sont distribuées selon une géométrie propre au dispositif qui les porte. Des charges électriques peuvent ainsi se trouver réparties le long d'un corps filiforme, sur une surface ou à l'intérieur d'un volume. On parle alors de distributions de charges. Ce deuxième chapitre est consacré au calcul des champs électriques produits par ces distributions.

Fiche 1

Distribution linéique

Considérons un corps filiforme AB de longueur L possédant une charge totale Q (figure 2.1). En supposant que cette charge soit répartie sur toute la longueur de l'objet, on considère qu'un élément de longueur dl de cet objet contient une charge dq . On définit alors la densité linéique de charge par :

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

La charge totale contenue sur cette distribution linéique vérifie l'équation :

$$Q = \int_{AB} dq = \int_{AB} \lambda dl$$

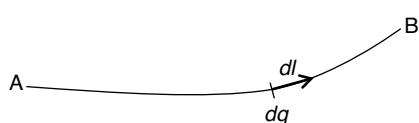


Figure 2.1

Si les charges sont distribuées de manière homogènes, on parle alors de distribution uniforme ou uniformément répartie ; la densité de charge est alors une constante :

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = C^{te} \Rightarrow Q = \lambda \int_{AB} dl = \lambda L$$

Fiche 2

Distribution surfacique

Considérons une surface S possédant une charge totale Q (figure 2.2). Cette charge étant distribuée sur toute la surface de l'objet, on considère qu'un élément de surface dS de cet objet contient une charge dq . On définit alors la densité surfacique de charge par :

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

La charge totale contenue sur cette distribution surfacique vérifie l'équation :

$$Q = \iint_S dq = \iint_S \sigma dS$$

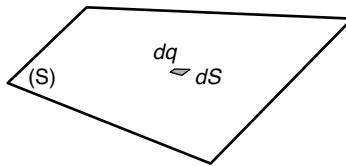


Figure 2.2

Si les charges sont distribuées de manières homogènes, on parle alors de distribution uniforme ou uniformément répartie ; la densité de charge est alors une constante :

$$\sigma = \frac{dq}{dS} = C^{te} \Rightarrow Q = \sigma \iint_S dS = \sigma S$$

Fiche 3

Distribution volumique

Considérons un volume V possédant une charge totale Q (figure 2.3), cette charge étant distribuée dans l'ensemble du volume de l'objet. On considère qu'un élément de volume dV de cet objet contient une charge dq . On définit alors la densité volumique de charge par :

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

La charge totale contenue dans cette distribution volumique vérifie l'équation :

$$Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho dV$$

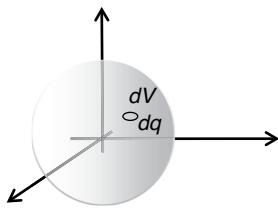


Figure 2.3

Si les charges sont distribuées de manières homogènes, on parle alors de distribution uniforme ou uniformément répartie ; la densité de charge est alors une constante :

$$\rho = \frac{dq}{dV} = C^{te} \Rightarrow Q = \rho \iiint_V dV = \rho V$$

Fiche 4

Champs électriques créés par des distributions de charges

Le calcul d'un champ électrique créé par une distribution de charges s'effectue en considérant que ce champ résulte de la superposition de tous les champs électriques élémentaires créés individuellement par chaque élément (de longueur, de surface ou de volume) de la distribution (resp. linéaire, surfacique ou volumique) de charges. Si on considère que chaque élément correspond à une quantité infinitésimale de charge, la superposition se traduit par l'intégration sur l'ensemble (de la longueur, de la surface ou du volume) de l'objet, du champ élémentaire créé par chaque élément.

Pour une distribution linéaire (figure 2.4), le champ $\overrightarrow{E(M)}$ en un point quelconque de l'espace situé au voisinage de l'objet filiforme, a pour expression :

$$\overrightarrow{E(M)} = \int_{AB} d\overrightarrow{E(M)} = \int_{AB} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u} = \int_{AB} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

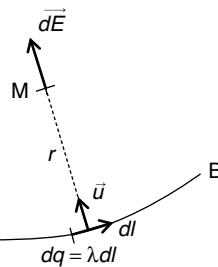


Figure 2.4

Remarque

Attention, d'une manière générale, r et \vec{u} dépendent de la position du point M par rapport à l'élément dl . Ces grandeurs varient donc lorsque l'on intègre.

Pour une distribution surfacique (figure 2.5), le champ $\overline{E(M)}$ en un point quelconque de l'espace situé au voisinage de la surface, a pour expression :

$$\overline{E(M)} = \iint_S d\overline{E(M)} = \iint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u} = \iint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}$$

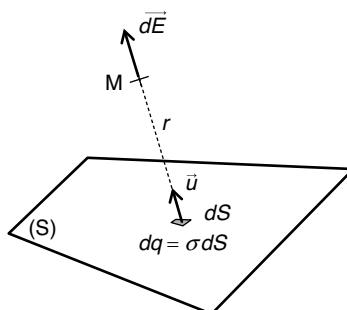


Figure 2.5

Pour une distribution volumique (figure 2.6), le champ $\overline{E(M)}$ en un point quelconque de l'espace situé au voisinage de l'objet, a pour expression :

$$\overline{E(M)} = \iiint_V d\overline{E(M)} = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u} = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \vec{u}$$

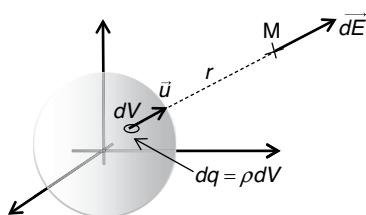


Figure 2.6

Méthodes de calcul

Le calcul d'un champ électrique créé par une distribution de charges se traduit donc toujours par le calcul d'une intégrale. Cette intégrale peut être simple (cas d'une distribution linéique), double (distribution surfacique) ou triple (distribution volumique).

La première étape consiste à analyser la géométrie du système. On recherchera, notamment, toute symétrie pouvant simplifier les calculs. Par exemple, on recherchera en priorité, pour le calcul du champ le long d'un axe, si cet axe est ou non axe de symétrie de la distribution de charges. Si tel est le cas, le champ total créé sur l'axe par la distribution est toujours dirigé selon cet axe. Ceci permet de ne calculer que la composante utile du champ sans s'embarrasser du calcul de composantes qui, de toute manière, auront une somme nulle lorsque l'on intégrera.

Dans un deuxième temps, on cherchera toujours à repérer les éléments de charge par le système de coordonnées le plus approprié, c'est-à-dire celui pour lequel les expressions sont les plus simples, donc les plus faciles à intégrer. Pour des distributions de charges présentant des symétries par rapport à un axe, on choisira souvent le système de coordonnées polaires (dans le cas d'un problème en deux dimensions) ou de coordonnées cylindriques (dans le cas d'un problème en trois dimensions).

Les exercices qui suivent illustrent ces principes et guideront le lecteur vers la maîtrise de ce type de calculs.

Entraînement

QCM

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être exactes.

1. Une densité linéique de charges s'exprime en :

- a. coulombs
- b. coulombs par mètre
- c. coulombs par mètre carré
- d. coulombs par mètre cube

2. Une densité surfacique de charges s'exprime en :

- a. coulombs
- b. coulombs par mètre
- c. coulombs par mètre carré
- d. coulombs par mètre cube

3. Une charge électrique Q distribuée uniformément sur un objet filiforme de longueur L correspond à une densité linéique de charges :

- a. $\lambda = \frac{Q}{2L}$
- b. $\lambda = \frac{L}{2Q}$
- c. $\lambda = \frac{Q}{L}$
- d. $\lambda = \frac{L}{Q}$

4. Si une charge Q n'est pas répartie uniformément sur une surface S , alors :

- a. $\sigma \neq C^{\text{te}}$
- b. σ dépend de la position du point M de l'espace où on calcule le champ
- c. σ dépend de la position de l'élément de surface dS créant le champ électrique élémentaire qui sera ensuite intégré
- d. $\sigma = C^{\text{te}}$

5. Le calcul d'un champ électrique créé par une distribution surfacique de charges s'effectue par :

- a. Une intégrale simple
- b. Une intégrale double
- c. Une intégrale triple
- d. Deux intégrales simples

6. Si une distribution de charges présente une symétrie par rapport à un axe donné, alors le champ électrique, sur un point M quelconque de cet axe est :

- a. Orthogonal à l'axe
- b. Fait un angle de 45° par rapport à cet axe
- c. Est nul
- d. Est dirigé selon cet axe

7. Si une surface est chargée uniformément avec une charge positive, le champ électrique créé au voisinage de la surface est :

- a. Dirigé vers la surface
- b. Dirigé vers l'extérieur de la surface
- c. Parallèle à la surface
- d. Constant quelle que soit la position du point où l'on mesure le champ

8. On considère une surface uniformément chargée négativement, de dimensions infinies. Le champ créé au voisinage de la surface est :

- a. Nul
- b. Orthogonal à la surface
- c. Parallèle à la surface
- d. Dirigé vers la surface

Réponses

1. **b.** Il s'agit bien d'une densité de charge linéique donc de charges par unité de longueur.
2. **c.** Une densité surfacique exprime une quantité de charges par unité de surface.
3. **c.** La densité linéique de charges, pour un objet filiforme, correspond à $\lambda = \frac{dq}{dl}$. Si la charge est uniformément répartie, cette densité est constante et vaut donc $\lambda = \frac{Q}{L}$.
4. **a et c.** Si la charge n'est pas répartie uniformément, cela signifie bien que la densité de charges n'est pas constante et dépend de l'endroit de la surface que l'on considère.
5. **b.** C'est bien par une intégrale double, a priori, que l'on calcule le champ créé par une distribution surfacique. Dans certains cas, une intégrale double peut se transformer en produit de deux intégrales simples. Ainsi, la réponse d n'est pas complètement dénuée de sens.
6. **d.** Voir fiche 5.
7. **b.** Une charge positive crée un champ qui s'éloigne de la charge. Si toute une surface est constituée de charges positives, tous les champs élémentaires sont dirigés vers l'extérieur de la surface. La résultante (superposition) de ces champs élémentaires est donc dirigée vers l'extérieur de la surface.
8. **b et d.** Si la surface est infinie, tout axe qui lui est orthogonal est un axe de symétrie. Le champ électrique est donc porté par n'importe quel axe orthogonal à la surface. Puisque la densité de charges est négative, le champ sera, de surcroît, dirigé vers la surface.

Entraînement

Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
1. Dans l'expression $\overline{E(M)} = \int_{AB} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \hat{u}$ permettant le calcul du champ créé par une distribution linéique, le paramètre r représente la distance séparant le point M de l'élément dl .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Dans l'expression $\overline{E(M)} = \iint_S d\overline{E(M)}$, le vecteur $d\overline{E(M)}$ correspond au champ électrique créé sur un élément de surface dS par l'ensemble des charges présentes sur la surface totale.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Dans l'expression $\overline{E(M)} = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{u}$, la charge dq est égale à la densité volumique de charges.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. La densité linéique de charge le long d'un objet filiforme est définie comme la charge totale portée par l'objet divisée par sa longueur.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Lorsque l'on se trouve très près d'une surface uniformément chargée, le champ électrique est orthogonal à la surface.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. L'équation suivante est valable si et seulement si la surface S est uniformément chargée : $\overline{E(M)} = \iint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \hat{u} = \sigma \iint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{r^2} \hat{u}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. La densité surfacique de charge portée par une sphère de rayon R possédant une charge totale Q uniformément répartie à sa surface a pour expression $\sigma = \frac{3Q}{4\pi R^3}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Le champ électrique créé par une distribution linéique de charge $\lambda = \text{Cte}$ rectiligne est radial.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Une surface plane chargée uniformément et négativement crée de part et d'autre d'elle-même des champs électriques présentant une symétrie complète.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. On utilise préférentiellement les coordonnées polaires lorsque l'on cherche à calculer le champ électrique créé par une distribution surfacique de charges présentant, en trois dimensions, une symétrie axiale.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Réponses

- 1. Vrai.** Bien faire attention : r varie lorsque l'on se déplace sur l'objet filiforme et ne peut donc pas être sortie de l'intégrale comme une simple constante.
- 2. Faux.** Il s'agit du champ élémentaire créé en un point M quelconque de l'espace, en dehors de la surface chargée, par un élément dS de cette surface.
- 3. Faux.** $dq = \rho dV$ où ρ^* est la densité volumique de charge et dV l'élément de volume créant le champ électrique élémentaire en M.
- 4. Faux, en général.** Cela n'est vrai que si la distribution de charges est uniforme.
- 5. Vrai.** En plaçant un point M très près de la surface chargée, la surface peut être considérée comme infinie. Dès lors, tout axe orthogonal à la surface peut être considéré comme axe de symétrie et porteur, par conséquent, du vecteur champ électrique.
- 6. Vrai.** Si la surface est uniformément chargée, alors σ est constante et peut être sortie de l'intégrale.
- 7. Faux.** Comme la surface d'une sphère est $S = 4\pi R^2$, on a $\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$. L'expression $\frac{3Q}{4\pi R^3}$ correspond à la densité volumique de charges portée par une sphère de rayon R chargée uniformément en volume avec une charge totale Q .
- 8. Vrai.** Tout axe orthogonal (donc radial) à l'axe de la distribution est axe de symétrie.
- 9. Vrai.** La géométrie des vecteurs champs créés d'un côté de la plaque dépend évidemment de la répartition des charges sur la surface. De l'autre côté de la surface, la distribution est la même.
- 10. Faux.** On utilisera dans ce cas un système de coordonnées cylindriques (voir fiche 5).

Entraînement

Exercices

1. Une tige AB supposée filiforme, porte une densité linéique de charges λ . Sa longueur est égale à $2a$ (figure 2.7). Calculer le champ électrique créé en tout point M d'un axe orthogonal à AB passant par son milieu O. la distance OM sera notée x .



Figure 2.7

2. On considère la même tige AB que dans l'exercice précédent. Calculer le champ électrique créé en tout point M de l'axe contenant la tige AB, le point O correspondant au milieu de la tige. La distance OM sera notée x (figure 2.8) et on supposera que $x > a$.

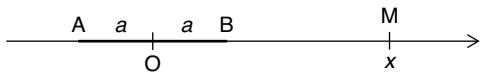


Figure 2.8

3. Un objet circulaire de rayon R_0 et de centre O, supposé filiforme, est chargé avec une densité linéique constante positive λ . Calculer le champ électrique créé par cette distribution de charges le long de l'axe Ox orthogonal au cercle et passant par son centre (figure 2.9).

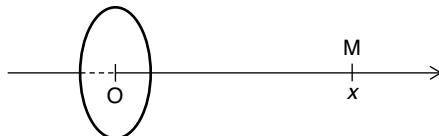


Figure 2.9

4. Un disque de rayon R_0 et de centre O est chargé uniformément avec une densité superficielle constante positive σ . Calculer l'expression du champ électrique créé en tout point d'abscisse x positive de l'axe qui lui est orthogonal et qui passe par son centre (figure 2.10).

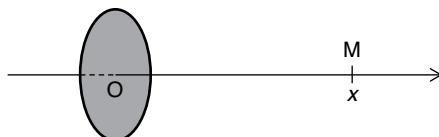


Figure 2.10

5. Une tige AB supposée filiforme, porte une densité linéique de charges λ . Sa longueur est égale à $2a$ (figure 2.11). On considère un axe Ox orthogonal à cette tige, mais situé à une distance b . On appelle O' le milieu de AB et O sa projection sur l'axe Ox. Calculer la composante selon Ox, soit E_x , du champ électrique créé par cette tige AB en un point M d'abscisse x situé sur cet axe.

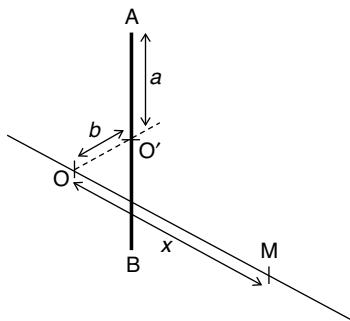


Figure 2.11

6. Un cadre carré de côté $2a$ constitué d'un conducteur filiforme est chargé uniformément avec une densité linéique positive et constante λ (figure 2.12). Calculer le champ électrique créé par cette distribution en tout point M d'abscisse x situé le long d'un axe orthogonal au cadre et passant par son centre O.

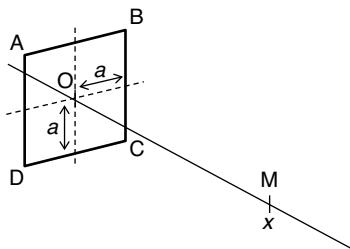


Figure 2.12

7. Une plaque rectangulaire de largeur $2a$ et de hauteur infinie est chargée avec une densité surfacique de charge positive et constante σ .

a. Calculer le champ électrique créé en tout point M d'abscisse z situé le long de l'axe orthogonal à la plaque et passant par son centre (figure 2.13).

b. Calculer la valeur particulière du champ au point O situé au centre de la plaque.

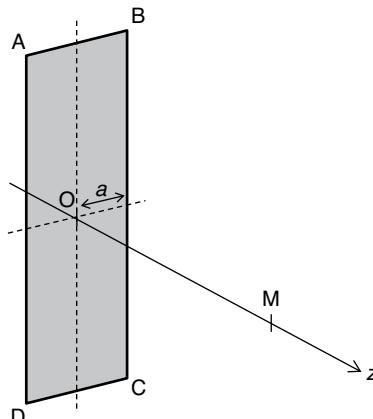


Figure 2.13

- 8.** Calculer le champ électrique créé en un point M situé à une distance x d'une plaque de dimensions infinies uniformément chargée avec une densité surfacique de charges σ .
- 9.** Calculer le champ électrique créé en un point M situé à une distance x d'une plaque d'épaisseur h , de dimensions infinies et uniformément chargée avec une densité volumique de charges ρ . On pourra considérer que le champ électrique ainsi créé résulte de la superposition de champs élémentaires créés par des éléments infinitésimaux de cette plaque.

Réponses

1. En tout premier lieu, remarquons la symétrie parfaite du dispositif par rapport à l'axe Ox. Compte tenu de cette symétrie, le champ créé en M par la tige AB chargée sera orienté selon l'axe Ox. En effet, si on considère un élément de tige de longueur dl_1 , créant un champ $d\vec{E}_1$ et un élément dl_2 symétrique par rapport à l'axe et créant un champ $d\vec{E}_2$, la figure 2.14 montre que ces deux vecteurs champs possèdent les mêmes composantes selon Ox, tandis que leurs composantes orthogonales à Ox sont opposées. La superposition d'un champ créé par un élément dl_1 et de celui créé par son symétrique dl_2 correspond donc bien à un champ dirigé selon l'axe Ox. Comme la tige est symétrique par rapport à Ox, le champ total créé en M sera porté par l'axe Ox.

Remarque : il est fondamental de débuter ce genre d'exercice par l'observation de la symétrie éventuelle du système. En effet, le fait que le champ créé par cette tige en tout point M de l'axe Ox soit parallèle à cet axe, est une information précieuse qui va nous permettre de gagner du temps dans la résolution du problème.

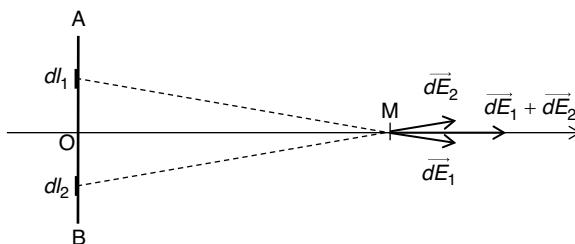


Figure 2.14

Considérons à présent un élément $d\vec{l}$ d'ordonnée l le long de l'axe de la tige et créant en M un champ $d\vec{E}$. Seule la composante selon Ox nous intéresse puisque nous venons de montrer que le champ total dû à la présence de la tige chargée est parallèle à Ox. Il nous suffit donc de calculer la composante dE_x et d'intégrer cette expression sur l'ensemble de la tige, de A à B.

D'après la figure 2.15, on a :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}$$

\vec{u} est un vecteur unitaire de l'axe joignant $d\vec{l}$ (supposé ponctuel) à M et r est la distance séparant le point M à cet élément $d\vec{l}$. Quant à dq , il s'agit de la charge portée par l'élément $d\vec{l}$.

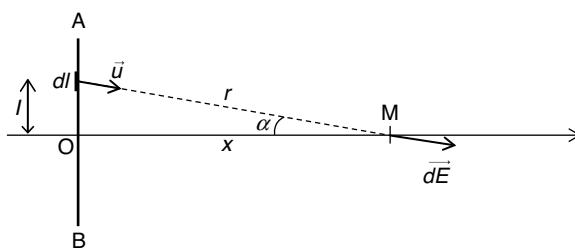


Figure 2.15

Soit α l'angle formé par l'axe Ox et celui du vecteur champ. La composante de \vec{dE} selon Ox, c'est-à-dire dE_x vaut :

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \alpha$$

Par ailleurs :

$$r = \frac{x}{\cos \alpha} \text{ et } dq = \lambda dl$$

On a donc :

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{x^2} \cos^2 \alpha \cos \alpha$$

Le calcul du champ total créé au point d'abscisse x résulte de l'intégration de cette expression sur toute la longueur de la tige. On remarquera que dans cette expression, l'élément de longueur dl est repéré par l'angle α . Il semble donc naturel de choisir α comme variable d'intégration. Il nous faut au préalable définir dl en fonction de $d\alpha$.

L'élément dl étant repéré par son ordonnée l , on a $l = x \tan \alpha$.

D'où :

$$dl = x \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

On a donc :

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x d\alpha}{x^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \cos \alpha d\alpha$$

On intègre cette expression entre $-\alpha_0$ et α_0 qui sont les deux angles délimitant la tige AB vue du point M (figure 2.16).

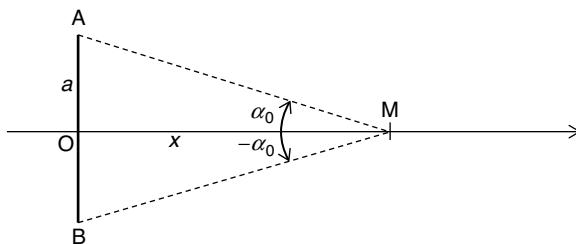


Figure 2.16

$$E = E_x = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} dE_x = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \cos \alpha d\alpha$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} [\sin \alpha]_{-\alpha_0}^{\alpha_0} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \times 2 \sin \alpha_0$$

On a donc :

$$E = \frac{\lambda \sin \alpha_0}{2\pi\epsilon_0 x}$$

On peut à présent remplacer $\sin \alpha_0$ par son expression en fonction de x et de a qui sont les données de l'énoncé. La figure 2.16 nous montre que :

$$\sin \alpha_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

D'où l'expression finale du champ électrique en M :

$$E = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 x \sqrt{a^2 + x^2}}$$

Remarque : nous avons choisi de repérer l'élément de longueur dl par sa position angulaire. Ce choix s'est avéré très intéressant puisque nous n'avons eu aucune difficulté à intégrer l'expression du champ élémentaire. Très souvent, le repérage des éléments de charge sera réalisé à l'aide de leur position angulaire car dans ces conditions, les expressions s'intègrent facilement.

2. Chaque élément chargé de longueur dl de la tige crée au point M un champ élémentaire $d\vec{E}$ parallèle à l'axe Ox (figure 2.17).

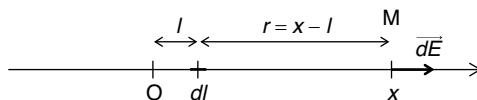


Figure 2.17

Soit dE la mesure algébrique de \vec{dE} . On a :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{(x - l)^2}$$

Il nous suffit d'intégrer cette expression pour l variant de $-a$ à a .

Attention aux habitudes : c'est l qui est la variable d'intégration.

D'où :

$$E = \int_{-a}^a \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{(x - l)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dl}{(x - l)^2}$$

Soit :

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x - l} \right]_{-a}^a = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right)$$

Finalement :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{x^2 - a^2} \right)$$

3. Compte tenu de la symétrie du système, le champ créé en M sera dirigé selon l'axe Ox. De plus, la densité de charges étant positive, il sera dirigé, pour $x > 0$, selon les x croissants.

Considérons un élément de longueur dl appartenant au cercle et portant une charge $dq = \lambda dl$ (figure 2.18).

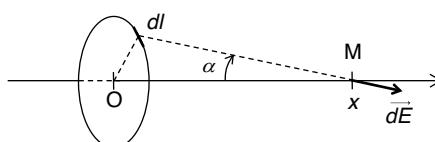


Figure 2.18

Cet élément dl crée en M un champ électrique élémentaire \vec{dE} dont seule la composante parallèle à Ox nous intéresse. Afin de mieux percevoir la géométrie du système, projetons le problème dans le plan contenant O, M et l'élément dl (supposé ponctuel). Voir figure 2.19.

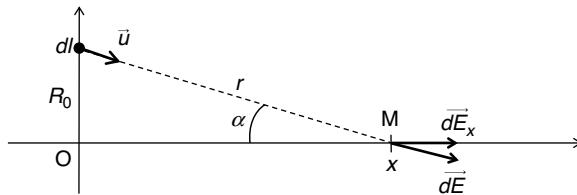


Figure 2.19

On a :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

Et :

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \alpha$$

Par ailleurs, on a : $r^2 = R_0^2 + x^2$, d'où :

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R_0^2 + x^2} \cos \alpha$$

Il nous faut désormais intégrer cette expression sur l'ensemble de la distribution circulaire. Quelle que soit la position de l'élément dl sur le cercle, il créera au point M ce même champ dE_x . En intégrant, α , x et R_0 restent constants. Pour pouvoir intégrer facilement, introduisons une variable angulaire θ qui permet de repérer facilement dl sur le cercle (figure 2.20). On voit que $dl = R_0 d\theta$.

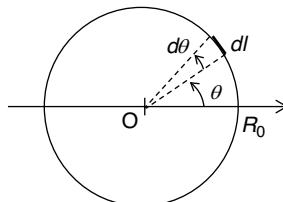


Figure 2.20

On a donc :

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R_0 d\theta}{R_0^2 + x^2} \cos \alpha$$

D'où :

$$E = \int_0^{2\pi} dE_x = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R_0}{R_0^2 + x^2} \cos \alpha \right) d\theta = \frac{\lambda R_0 \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 (R_0^2 + x^2)} \times 2\pi = \frac{\lambda R_0 \cos \alpha}{2\epsilon_0 (R_0^2 + x^2)}$$

Il nous reste à calculer $\cos \alpha$ en fonction de x . La figure 2.19 nous donne immédiatement :

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{R_0^2 + x^2}}$$

Finalement :

$$E = \frac{\lambda R_0 x}{2\epsilon_0 (R_0^2 + x^2)^{3/2}}$$

Remarque : on aurait pu utiliser un raccourci pour ces calculs. En effet, si chaque élément dl produit le même champ dE_x , il suffit de multiplier ce champ par toute la longueur du cercle, c'est-à-dire $2\pi R_0$ pour obtenir le champ total, ce qui conduit bien au même résultat.

Pour conclure, il convient de bien retenir que dans les problèmes d'électrostatique, il faut veiller à proposer systématiquement un résultat ne faisant intervenir que les données du problème. Ici, l'angle α a été introduit par nos soins mais ne doit pas subsister dans l'expression finale puisqu'il dépend de R_0 qui est une constante et de x qui repère le point M sur l'axe.

- Compte tenu de la symétrie du système, le champ créé en M sera dirigé selon l'axe Ox. De plus, la densité de charges étant positive, il sera dirigé, pour $x > 0$, selon les x croissants.

Considérons une couronne circulaire de rayon y et de largeur dy (figure 2.21).

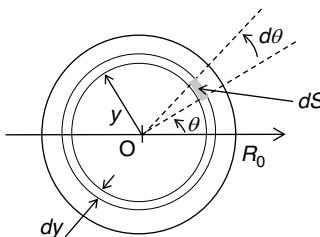


Figure 2.21

Nous choisissons un élément de surface dS appartenant à cette couronne et compris entre les angles θ et $\theta + d\theta$. On a donc :

$$dS = dy \times y d\theta$$

Cet élément dS crée un champ élémentaire \bar{dE} au point M d'abscisse x dont seule la composante selon Ox nous intéresse.

La figure 2.22 montre la géométrie du système. Nous pouvons projeter le problème dans le plan contenant O, M et l'élément de surface dS (supposé ponctuel) de manière à mieux percevoir cette géométrie (figure 2.23).

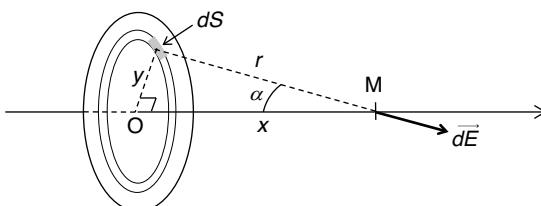


Figure 2.22

On peut alors écrire immédiatement :

$$\bar{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \hat{u}$$

D'où :

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \cos \alpha$$

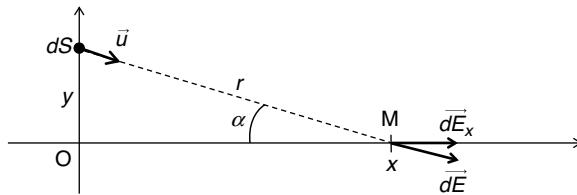


Figure 2.23

Or : $dS = dy \times yd\theta$

$$\text{Et : } y = x \tan \alpha \Rightarrow dy = \frac{x}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

Donc :

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{r^2} \times x \tan \alpha \times \frac{x}{\cos^2 \alpha} d\alpha \times \cos \alpha \times d\theta$$

De plus, on a : $r = \frac{x}{\cos \alpha}$, d'où :

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cos^2 \alpha}{x^2} \times x \tan \alpha \times \frac{x}{\cos^2 \alpha} d\alpha \times \cos \alpha \times d\theta$$

Soit :

$$dE_x = \frac{\sigma \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0} d\alpha d\theta$$

Il nous faut désormais intégrer cette expression sur toute la surface du disque, autrement dit pour θ variant de 0 à 2π et pour α variant de 0 jusqu'à un angle limite α_0 (voir figure 2.24)

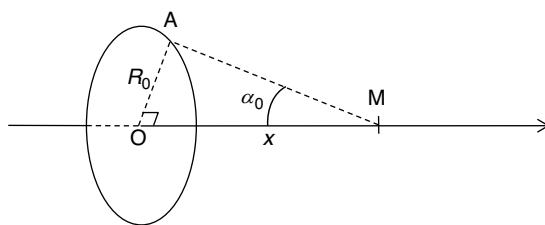


Figure 2.24

On obtient donc :

$$E = E_x = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_0} dE_x = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_0} \frac{\sigma \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0} d\alpha d\theta$$

On peut immédiatement extraire de l'intégrale les quantités constantes :

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_0} \sin \alpha d\alpha d\theta$$

Puis séparer les deux intégrales en un produit, compte tenu que les deux variables d'intégration sont indépendantes :

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha_0} \sin \alpha d\alpha$$

D'où :

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \times 2\pi \times [-\cos \alpha]_0^{\alpha_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_0)$$

Exprimons pour finir ce que vaut $\cos \alpha_0$ en fonction des grandeurs géométriques définies dans l'énoncé. On considérant le triangle OAM de la figure 2.24 qui est rectangle en O, on tire :

$$\cos \alpha_0 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R_0^2}}$$

D'où :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R_0^2}} \right)$$

5. Soit dl un élément de la tige AB, d'altitude l , porteur d'une charge $dq = \lambda dl$ et soit \vec{dE} le champ créé en M par cet élément de charge.

On a :

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

\vec{u} et r étant définis comme indiqué sur la figure 2.25.

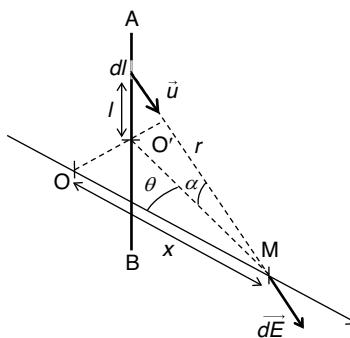


Figure 2.25

Soit θ l'angle formé par O, M et O'. Cet angle est constant (indépendant de la position de dl pour un x donné) puisqu'il ne dépend que de la position de la tige AB par rapport à M. Soit α l'angle formé par O', M et l'élément dl (supposé ponctuel). Cet angle permet de repérer la position de dl sur la tige AB. Comme nous ne cherchons que la composante sur Ox du champ créé par la tige, nous ne nous intéresserons qu'aux composantes selon Ox des champs élémentaires \vec{dE} , soit dE_x , que nous intégrerons en faisant varier α pour obtenir le résultat souhaité. Le vecteur \vec{dE} étant parallèle à \vec{u} , la figure 2.25 montre bien que pour obtenir la composante du champ selon Ox, il faut d'abord projeter \vec{dE} sur l'axe O'M, puis sur l'axe OM.

On a donc :

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \alpha \cos \theta$$

Par ailleurs, l'altitude l de l'élément dl peut s'exprimer en fonction de α :

$$l = O'M \tan \alpha$$

$$O'M = \frac{x}{\cos \theta} \Rightarrow l = \frac{x}{\cos \theta} \tan \alpha$$

$$\text{D'où : } dl = \frac{x}{\cos \theta} \times \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

De plus, $r = \frac{x}{\cos \theta \cos \alpha}$, puisque x résulte de la projection de r , d'abord sur $O'M$, puis sur OM .

L'expression de dE_x devient alors :

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cos^2 \theta \cos^2 \alpha}{x^2} \times \frac{x}{\cos \theta} \times \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \cos \alpha \cos \theta$$

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2 \theta}{x} \cos \alpha d\alpha$$

Intégrons cette expression entre les deux angles limites formés par M et la tige AB , autrement dit entre $-\alpha_0$ et α_0 tels qu'ils sont définis sur la figure 2.26.

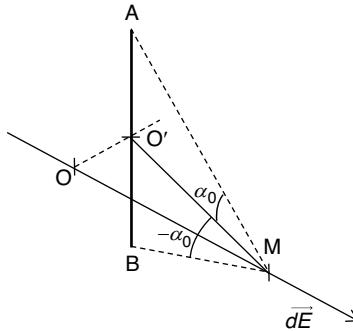


Figure 2.26

$$E_x = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} dE_x = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2 \theta}{x} \cos \alpha d\alpha$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2 \theta}{x} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2 \theta}{x} [\sin \alpha]_{-\alpha_0}^{\alpha_0}$$

Soit :

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2 \theta}{x} \times 2 \sin \alpha_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2 \theta}{x} \sin \alpha_0$$

Exprimons l'angle α_0 en fonction des différentes grandeurs données dans l'énoncé afin de proposer un résultat qui soit en cohérence avec ces paramètres :

$$\sin \alpha_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + O'M^2}} \text{ et } O'M = \frac{x}{\cos \theta}$$

$$\text{Par ailleurs, } \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}}$$

On en déduit alors :

$$\sin \alpha_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{x^2}{\cos^2 \theta}}} = \frac{a \cos \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + x^2}} = \frac{\frac{ax}{\sqrt{b^2 + x^2}}}{\sqrt{\frac{a^2 x^2}{b^2 + x^2} + x^2}}$$

D'où :

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\frac{x^2}{b^2 + x^2}}{x} \frac{\frac{ax}{\sqrt{b^2 + x^2}}}{\sqrt{\frac{a^2 x^2}{b^2 + x^2} + x^2}}$$

$$E_x = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \frac{x^2}{b^2 + x^2} \frac{1}{\sqrt{b^2 + x^2}} \sqrt{\frac{b^2 + x^2}{x^2(a^2 + b^2 + x^2)}}$$

Soit :

$$E_x = \frac{\lambda ax}{2\pi\epsilon_0(b^2 + x^2)\sqrt{a^2 + b^2 + x^2}}$$

6. Soit \vec{E}_{AB} le champ créé en M par la charge totale de la tige AB. De même, définissons \vec{E}_{BC} , \vec{E}_{CD} et \vec{E}_{DA} les champs créés en M par les charges distribuées sur les autres segments BC, CD et DA. Compte tenu de la symétrie du système, les champs $\vec{E}_{AB} + \vec{E}_{CD}$ d'une part et $\vec{E}_{BC} + \vec{E}_{DA}$ d'autre part, sont parallèles à Ox.

Le champ total en M, $\vec{E} = \vec{E}_{AB} + \vec{E}_{BC} + \vec{E}_{CD} + \vec{E}_{DA}$, est donc porté par l'axe Ox et dirigé dans le sens des x croissants puisque la densité linéique de charges est positive.

Il nous suffit donc de connaître les composantes selon Ox des quatre champs créés par chacun des segments chargés.

Par ailleurs, chacun de ces segments crée en M la même composante selon Ox compte tenu de la symétrie du système. Soit E_x l'une de ces composantes :

$$E = 4E_x$$

En appliquant le résultat trouvé dans l'exercice 5 de ce chapitre, le champ E_x créé en un point M d'abscisse x par une tige de longueur $2a$ située à une distance a de l'axe, a pour expression :

$$E_x = \frac{\lambda ax}{2\pi\epsilon_0(a^2 + x^2)\sqrt{2a^2 + x^2}}$$

Soit :

$$E = 4E_x = \frac{2\lambda ax}{\pi\epsilon_0(a^2 + x^2)\sqrt{2a^2 + x^2}}$$

7. a. Compte tenu de la symétrie axiale de la distribution de charges, le champ créé en M sera parallèle à l'axe Oz.

Considérons un élément linéique de largeur dx sur l'ensemble de la hauteur de la plaque et calculons le champ dE_z qu'il crée en M d'abscisse z . Nous définirons cet élément comme indiqué sur la figure 2.27 : nous repérons cet élément par sa coordonnée x le long de l'axe Ox.

L'élément de largeur dx ainsi défini peut être assimilé à une distribution linéique de charges placée à une distance x de l'axe, la densité linéique de charges portée par cet élément étant égale à $\lambda = \sigma dx$.

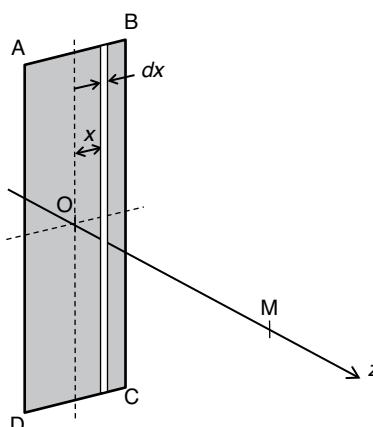


Figure 2.27

Nous pouvons alors utiliser le résultat de l'exercice 5 de ce chapitre en remplaçant, bien sûr, x par z , b par x et en faisant tendre x vers l'infini dans l'expression que nous y avons trouvée :

$$dE_z = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{z}{(x^2 + z^2) \sqrt{a^2 + x^2 + z^2}}$$

Attention : le paramètre a ne représente pas la même grandeur dans le présent exercice et dans l'exercice 5.

On en déduit :

$$dE_z = \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{z}{(x^2 + z^2)}$$

On obtient le champ électrique total créé en M par l'ensemble de la plaque en intégrant ce champ élémentaire pour x variant de $-a$ à a :

$$E_z(z) = \int_{-a}^a dE_z = \int_{-a}^a \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{z}{(x^2 + z^2)} = \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + z^2)}$$

Attention : le champ électrique dépend bien de z mais c'est bien x qui est la variable d'intégration. On peut donc sortir z de l'intégrale.

Calculons à présent cette intégrale :

$$E_z(z) = \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{z} \arctan \frac{x}{z} \right]_{-a}^a$$

Soit :

$$E_z(z) = \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{z} \arctan \frac{a}{z} - \frac{1}{z} \arctan \frac{(-a)}{z} \right]_{-a}^a$$

La fonction arctangente étant impaire, on en déduit :

$$E_z(z) = \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{z} \arctan \frac{a}{z} + \frac{1}{z} \arctan \frac{a}{z} \right)$$

Soit :

$$E_z(z) = \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{2}{z} \arctan \frac{a}{z} = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \arctan \frac{a}{z}$$

b. La valeur du champ électrique au centre de la plaque est obtenue en faisant tendre z vers 0 :

$$E(O) = E_z(0) = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\arctan \frac{a}{z} \right) = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \times \frac{\pi}{2}$$

On a donc :

$$E(O) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

- 8.** Il existe plusieurs méthodes pour déterminer le champ électrique créé par une plaque chargée de dimensions infinies. Nous proposons ici deux techniques différentes qui consistent toutes deux à effectuer un passage à la limite dans des expressions de champs créés par des distributions surfaciques de dimensions données.

▪ Méthode 1

L'exercice 7 de ce chapitre nous donne l'expression du champ créé par une plaque rectangulaire de largeur $2a$ et de hauteur infinie à une distance x :

$$E_x(x) = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \arctan \frac{a}{x}$$

Nous avons déjà démontré que ce champ est orthogonal à la plaque. Pour une plaque de dimensions infinies, le champ sera toujours orthogonal à la plaque et nous pouvons en déterminer le module en faisant tendre a vers l'infini.

On aura donc :

$$E(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sigma}{\pi \epsilon_0} \arctan \frac{a}{x} \right)$$

Soit :

$$E(x) = \frac{\sigma}{\pi \epsilon_0} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\arctan \frac{a}{x} \right) = \frac{\sigma}{\pi \epsilon_0} \times \frac{\pi}{2}$$

D'où :

$$E(x) = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

▪ Méthode 2

Le même raisonnement peut être tenu en considérant le champ créé par une plaque circulaire de rayon R_0 . Nous avons démontré dans l'exercice 4 du présent chapitre qu'une plaque circulaire uniformément chargée en surface créait en un point situé à une distance x de son centre, le champ :

$$E(x) = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R_0^2}} \right)$$

En faisant tendre R_0 vers l'infini, une telle distribution de charges peut être assimilée à une plaque de dimensions infinies uniformément chargée. On a donc :

$$E(x) = \lim_{R_0 \rightarrow +\infty} \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R_0^2}} \right)$$

Soit :

$$E(x) = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

Quelle que soit la méthode, on trouve évidemment le même résultat qui montre qu'un champ électrique créé en un point M de l'espace au voisinage d'une plaque de grande dimension uniformément chargée en surface ne dépend pas de la distance de M à la plaque. Ce champ est constant (ou uniforme) si la distance à la plaque reste petite devant les dimensions de la plaque.

- 9.** Il s'agit ici de généraliser le résultat de l'exercice précédent. Nous allons considérer un élément de volume constitué d'une épaisseur de et d'une longueur infinie, autrement dit, en quelque sorte, une tranche infiniment fine de notre plaque (figure 2.28).

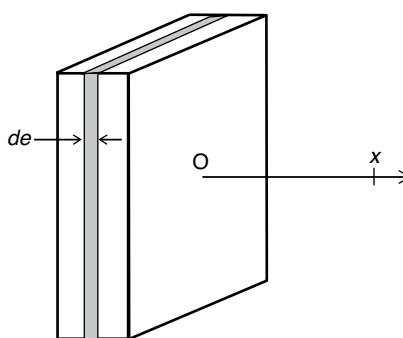


Figure 2.28

La plaque d'épaisseur h possédant une densité de charge volumique ρ , on peut considérer que notre élément de plaque d'épaisseur de se comporte comme une plaque chargée en surface dont la densité surfacique de charges est :

$$\sigma = \rho de$$

En effet, si on appelle S la surface de la plaque et Q la charge électrique portée par l'élément d'épaisseur de , on a :

$$\rho = \frac{Q}{Sde} \Rightarrow \rho de = \frac{Q}{S}$$

Le rapport $\frac{Q}{S}$ correspond bien à une densité surfacique, ce qui justifie l'assimilation de la plaque élémentaire à une surface chargée. Conformément aux résultats de l'exercice précédent, cette plaque élémentaire d'épaisseur de crée en tout point M de l'espace un champ électrique égal à :

$$dE = \frac{\rho de}{2\epsilon_0}$$

L'expression du champ ne dépend pas de la position de M.

En intégrant sur toute l'épaisseur de la plaque, on obtient le champ créé en tout point M par la distribution volumique complète. On notera que si le point O se trouve sur la surface de la plaque complète, il faut bien intégrer de $-h$ à 0 :

$$E(x) = \int_{-h}^0 \frac{\rho de}{2\epsilon_0} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{-h}^0 de$$

Soit :

$$E(x) = \frac{\rho h}{2\epsilon_0}$$

On remarquera que le résultat est tout à fait similaire à celui de l'exercice précédent, ce qui était prévisible puisque l'uniformité du champ est due aux dimensions infinies de la plaque. Que celle-ci soit simplement chargée en surface ou électrisée en volume ne change rien au phénomène créé en M au voisinage de la distribution.

3

Potentiel et flux électrostatiques

MOTS CLÉS

Lignes de champ ■ tubes de champ ■ circulation du champ ■ potentiel électrostatique ■ gradient ■ surfaces équipotentielles ■ potentiel créé par des distributions ■ flux du champ électrique ■ théorème de Gauss ■ divergence ■ équation de Poisson ■ dipôle électrique ■ moment électrique

La présence de charges dans l'espace crée non seulement un champ de vecteurs (le champ électrique) mais également un champ de scalaire appelé potentiel électrostatique. Champ électrique et potentiels sont liés entre eux comme nous allons le voir au cours de ce chapitre. Par ailleurs, il est possible de calculer directement le potentiel créé en un point de l'espace par des charges ou par une distribution de charges. Ce calcul est relativement simple puisque le potentiel est un scalaire et non un vecteur. Le fait que le vecteur champ et le potentiel soient liés permet ensuite de calculer le champ. Nous disposerons alors d'une méthode plus simple et plus rapide pour calculer des champs électriques.

Fiche 1

Propriété du champ électrique

Lignes et tubes de champ

Dans l'espace où règne un champ électrique créé par des charges ou des distributions de charges, on définit les lignes de champ par les courbes de l'espace auxquelles les vecteurs champs sont tangents (figure 3.1).

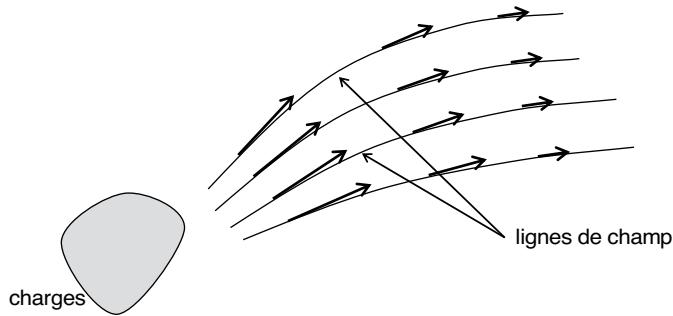


Figure 3.1

On définit également un tube de champ par tout ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé (figure 3.2).

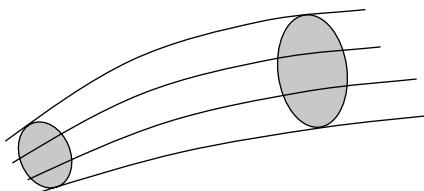


Figure 3.2

Circulation du champ électrique

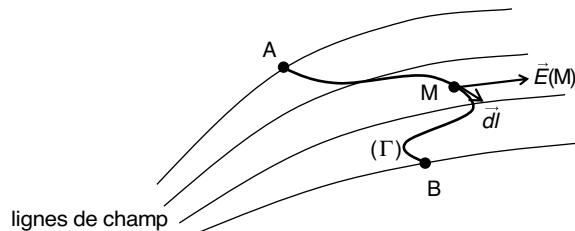


Figure 3.3

Considérons une région de l'espace où règne un champ électrique (figure 3.3). Soit une courbe (Γ) délimitée par deux points A et B. Et soit M un point de cette courbe. Le point M effectuant un déplacement élémentaire de longueur $d\vec{l}$ le long de la courbe, on définit la circulation élémentaire du champ électrique en M par le produit scalaire suivant :

$$dC = \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dl}$$

La circulation du champ électrique le long de la courbe (Γ) est définie par :

$$C = \int_{\Gamma} \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Dans le cas d'une courbe (Γ) fermée, on écrit :

$$C = \oint_{\Gamma} \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Fiche 2

Potentiel électrostatique

La circulation du champ électrique le long d'une courbe ne dépend pas du trajet suivi mais uniquement des points A et B délimitant cette courbe. On dit que la circulation du champ électrique est conservative.

Par conséquent, C dépend de deux grandeurs associées chacune à chaque point A et B, grandeurs que l'on définit comme les potentiels en chacun de ces points. On note :

$$C = \int_{\Gamma} \overrightarrow{E(M)} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B)$$

$V(A)$ est appelé potentiel électrostatique en A. $V(B)$ est le potentiel au point B. L'unité internationale de potentiel est le volt (V).

En dérivant cette relation, on obtient :

$$\overrightarrow{E(M)} \cdot d\vec{l} = -dV$$

Ou encore :

$$\overrightarrow{E(M)} = -\frac{\partial V}{\partial l}$$

Ces équations locales traduisent le fait que le champ électrique « dérive d'un potentiel ». L'équation générale exprimant la relation entre le champ électrique $\overrightarrow{E(M)}$ en un point M de l'espace et le potentiel duquel il dérive est :

$$\overrightarrow{E(M)} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$$

Remarque

Cette équation, qu'il faut lire « E égale moins gradient de V » constitue une des équations fondamentales de l'électrostatique. Nous étudierons dans ce chapitre les différentes méthodes de son utilisation.

La fonction vectorielle « gradient » est définie en coordonnées cartésiennes par les relations suivantes :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

En coordonnées cylindriques (figure 3.4), le gradient est défini par :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

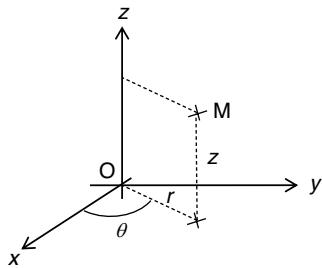


Figure 3.4

Le potentiel décroît le long des lignes de champ au fur et à mesure que l'on s'éloigne des charges créant le champ électrique. Les surfaces équipotentielles sont définies par les surfaces d'égale valeur de V . Elles sont en tous points orthogonales aux lignes de champ.

Fiche 3

Calcul du champ créé par des charges ou des distributions

Le potentiel créé par une charge q en un point M séparé d'une distance r de cette charge (figure 3.5) vaut :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

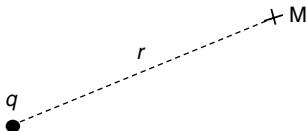


Figure 3.5

Le principe de superposition s'applique au potentiel créé en un point M par un ensemble de charges. Ainsi, le potentiel créé en M par n charges, tout comme cela était le cas pour le champ électrique, est égal à la somme des potentiels créés individuellement par chaque charge (figure 3.6). On a donc :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

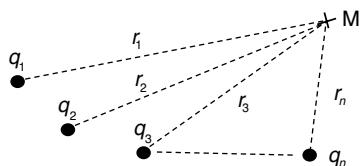


Figure 3.6

Le potentiel électrostatique créé par une distribution linéique de densité λ (figure 3.7) se calcule en intégrant sur l'ensemble de la distribution le potentiel élémentaire dV créé par un élément de longueur dl .

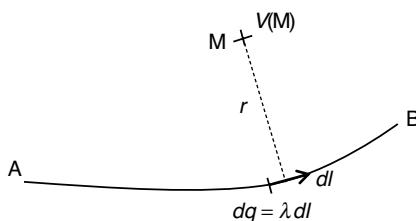


Figure 3.7

On a donc :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{AB} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{AB} \frac{\lambda dl}{r}$$

Pour une distribution surfacique (figure 3.8), on a :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r}$$

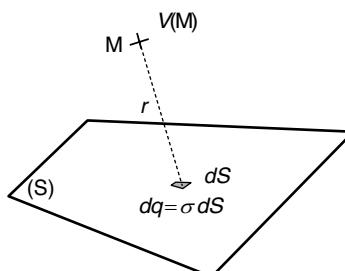


Figure 3.8

Pour une distribution volumique (figure 3.9), on a :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{r}$$

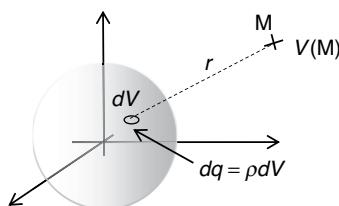


Figure 3.9

Attention

Dans les intégrales, V et dV se réfèrent au volume.

Fiche 4

Flux du champ électrique

Soit une région de l'espace où règne un champ électrique et soit une surface (S) appartenant à cet espace. On considère un point M de cette surface et un élément de surface dS situé autour du point M . Soit $\overrightarrow{E(M)}$ le vecteur champ en M et \overrightarrow{dS} le vecteur surface (de module dS et orthogonal à l'élément de surface). On définit le flux élémentaire $d\phi$ du champ électrique en M au travers de l'élément de surface dS par le produit scalaire de $\overrightarrow{E(M)}$ et de \overrightarrow{dS} .

Soit :

$$d\phi = \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Le flux total du champ électrique au travers d'une surface (S) donnée est défini par l'intégration de l'ensemble des flux élémentaires du champ sur l'ensemble des éléments de surface composant (S) (figure 3.10).

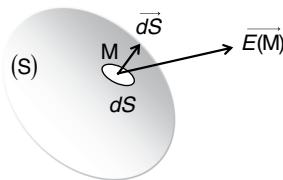


Figure 3.10

On a donc :

$$\phi = \iint_S \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dS}$$

L'unité internationale de flux du champ électrique est le volt · mètre (Vm)

Fiche 5

Théorème de Gauss

Le flux du champ électrique au travers d'une surface fermée (S) est égal à la quantité totale Q de charges contenue à l'intérieur de la surface (S), divisée par ϵ_0 (figure 3.11). Ce flux ne dépend que de Q et ne dépend pas de la répartition interne des charges. Il ne dépend pas non plus de la présence d'éventuelles charges extérieures.

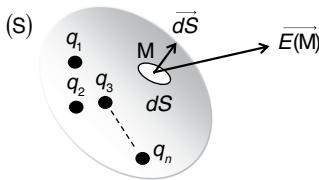


Figure 3.11

Soit :

$$Q = \sum q_i$$

On a :

$$\phi = \iint_S \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Ce théorème de Gauss possède, dans le cas d'une distribution volumique de densité $\rho(M)$, une autre forme traduite par l'équation locale de Gauss, qui exprime la « divergence » du champ électrique en M .

En effet, si on considère un volume V chargé avec une densité ρ , le flux du champ électrique au travers d'une surface fermée extérieure au volume V s'écrit :

$$\phi = \iint_S \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dS}$$

En appliquant le théorème de Gauss, on obtient :

$$\phi = \iint_S \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

Avec :

$$\iint_S \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V \operatorname{div} \overrightarrow{E(M)} dV$$

On a donc :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E(M)} = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

L'expression de la fonction « divergence » en coordonnées cartésiennes est :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

En coordonnées cylindriques, on a :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Compte tenu que l'on a : $\operatorname{div} \overrightarrow{E(M)} = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$ et $\overrightarrow{E(M)} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V(M)$, on en déduit :

$$\Delta V = -\frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

Cette forme représente l'équation de Poisson et résulte du fait que :

$$\operatorname{div} [\overrightarrow{\operatorname{grad}} V(M)] = \Delta V$$

La fonction ΔV représente le laplacien du potentiel $V(M)$. Ce laplacien a pour expression, en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

En coordonnées cylindriques, on a :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Le théorème de Gauss permet de calculer assez facilement et rapidement le champ électrique créé par des distributions de charges parfois relativement complexes.

Entraînement

QCM

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être exactes.

- 1. Dans une région donnée de l'espace, les lignes de champs :**
- a. Sont toujours parallèles
 - b. Portent les vecteurs champs électriques
 - c. Sont toujours tangentes au champ électrique
 - d. Sont orthogonales aux surfaces équipotentielles
- 2. L'unité internationale de potentiel électrostatique est :**
- a. Le volt par mètre
 - b. Le coulomb par mètre
 - c. Le volt
 - d. Le volt par coulomb
- 3. La circulation d'un champ électrique le long d'une courbe fermée :**
- a. Est nulle
 - b. Est infinie
 - c. Ne peut être calculée
 - d. Dépend de la valeur du champ
- 4. Lesquelles de ces écritures sont correctes ?**
- a. $E = -\text{grad } \bar{V}$
 - b. $E = -\text{grad } V$
 - c. $\bar{E} = -\text{grad } V$
 - d. $\bar{E} = -\text{grad } \bar{V}$
- 5. Lesquelles de ces propositions sont fausses ?**
- a. Le potentiel créé en un point M par une charge électrique décroît en fonction de la distance entre M et cette charge.
 - b. Le potentiel créé en un point M par une distribution de charge est nul à l'infini.
 - c. Le potentiel créé par un ensemble de charges est égal à la somme des potentiels créés individuellement par chaque charge.
 - d. Le calcul du potentiel créé par une distribution surfacique en un point quelconque de l'espace nécessite le calcul d'une intégrale double.

6. Lesquelles de ces expressions correspondent à une écriture correcte du théorème de Gauss ?

a. $\text{div} \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

b. $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

c. $\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

d. $\phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$

7. À quoi sert le théorème de Gauss ?

a. À calculer facilement des champs électriques

b. À calculer facilement des potentiels électrostatiques

c. À déterminer des densités volumiques de charges

d. À déterminer la forme des lignes de champ

8. Laquelle ou lesquelles de ces équations correspondent à l'équation de Poisson ?

a. $\text{div}[\text{grad } \bar{V}] = \Delta V$

b. $\overrightarrow{\text{div}}[\text{grad } V] = \Delta V$

c. $\text{div}[\overline{\text{grad }} V] = \Delta V$

d. $\text{div}[\text{grad } V] = \Delta V$

Réponses

1. **b, c et d.** Par définition, les lignes de champ sont les courbes auxquelles le vecteur champ est tangent. Elles ne sont parallèles que si le champ présente une direction uniforme. Voir fiche 1. Voir aussi fiche 2 pour la définition des surfaces équipotentielles.
2. **c.** Voir fiche 2.
3. **a.** La circulation du champ le long d'une courbe donnée a pour expression :

$$C = \int_{\Gamma} \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dl} = V(A) - V(B)$$

Si la courbe est fermée, on a forcément $A = B \Rightarrow V(A) - V(B) = 0 \Rightarrow C = 0$

4. **c.** Voir fiche 2. Le champ est un vecteur. La fonction « gradient » est un vecteur. Le potentiel est un scalaire.
5. **b.** Le potentiel n'est nul à l'infini que s'il n'y a pas de charges à l'infini, ce qui n'est pas précisé dans la proposition, même si en pratique c'est en général le cas. Toutes les autres propositions sont vraies.
6. **b et d.** Voir fiche 5. Bien faire attention aux signes et aux éléments considérés, charges ou densités de charges.
7. **a.** C'est là l'un des principaux intérêts du théorème de Gauss comme cela sera montré dans les exercices de ce chapitre
8. **c.** Ne pas oublier que le gradient est un vecteur et que la divergence ne l'est pas. Par ailleurs, on parle bien de gradient d'un scalaire et de divergence d'un vecteur.

Entraînement

Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
1. L'expression du vecteur $\overline{\text{grad}} V$ en coordonnées cartésiennes est :	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\overline{\text{grad}} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$		
2. La circulation d'un champ électrique le long d'une courbe AB restant en tout point orthogonale aux lignes de champs est nulle.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Le potentiel créé en un point M quelconque de l'espace par une distribution linéique de charges a pour expression : $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{AB} \lambda dl$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Pour tout élément de surface ds d'une surface S , le vecteur surface $d\bar{S}$ est le vecteur orthogonal à l'élément de surface et dont le module est égal à ds .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Le flux d'un champ électrique au travers d'une surface S s'exprime en volts par mètres carrés.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Le flux d'un champ électrique au travers d'une surface fermée est toujours nul.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Pour déterminer la valeur de la divergence d'un vecteur, il suffit d'avoir ses coordonnées dans un système de coordonnées adéquat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Si dans l'espace (O, x, y, z) , le potentiel électrostatique ne dépend pas de z , alors le vecteur champ \vec{E} dérivant de ce potentiel appartient au plan (O, x, y) .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Le flux du champ électrique au travers d'une surface fermée ne contenant aucune charge électrique est toujours nul.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Le laplacien d'un potentiel est un vecteur orthogonal au champ électrique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Réponses

- 1. Vrai.** Bien faire attention : il n'y a pas de signe « moins » ici. Ce dernier n'apparaît que dans l'équation $\vec{E} = -\underline{\text{grad}} V$.
- 2. Vrai.** Si les vecteurs $\overline{E(M)}$ et \overline{dl} sont systématiquement orthogonaux, alors les circulations élémentaires $dC = \overline{E(M)} \cdot \overline{dl}$ sont toutes nulles et leur somme, par conséquent, l'est aussi.
- 3. Faux.** Dans l'expression $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{AB} \frac{\lambda dl}{r}$, la distance r séparant M de chaque élément dl n'est pas obligatoirement constante. La variable r ne peut donc pas être *a priori* sortie de l'intégrale, sauf cas particuliers.
- 4. Vrai.** C'est la définition du vecteur surface.
- 5. Faux.** Le flux s'exprime en volts mètres.
- 6. Faux.** Il n'y aucune raison pour qu'il soit nul.
- 7. Vrai.** Comme par exemple en coordonnées cartésiennes : $\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$.
- 8. Vrai.** Si V ne dépend pas de z , alors $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$.
- 9. Vrai.** En effet, le théorème de Gauss prévoit que le flux au travers d'une surface fermée est égal à la somme des charges contenues à l'intérieur de cette surface divisée par ε_0 .
- 10. Faux.** Le laplacien n'est pas un vecteur.

Entraînement

Exercices

1. On considère un ensemble de deux charges ponctuelles placées respectivement en deux points A et B d'abscisses $-a$ et a d'un axe O x et portant respectivement les charges $-q$ et q (figure 3.12). Calculer en fonction de r_1 et de r_2 le potentiel $V(M)$ créé en tout point M du plan O xy par ce doublet électrique. Calculer ensuite ce potentiel en fonction de r et de θ , coordonnées polaires de M dans le plan.

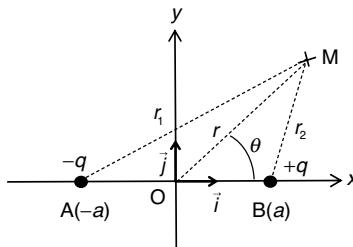


Figure 3.12

2. On considère à nouveau le doublet de l'exercice précédent (figure 3.12) mais on suppose cette fois que $a \ll r$. Le système de deux charges est alors appelé dipôle électrique. En effectuant un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{a}{r}$, déterminer un équivalent de $V(M)$. Exprimer ce potentiel en fonction du vecteur $\vec{p} = 2aq\vec{i}$ appelé moment électrique du dipôle AB. Calculer le champ électrique créé en M à partir de l'expression de $V(M)$. Déterminer les équations des équipotentialles dans le plan O xy .
3. Calculer le potentiel $V(M)$ en tout point d'abscisse x d'un axe orthogonal à un disque de rayon R_0 uniformément chargé avec une densité surfacique de charges σ (figure 3.13). Calculer en particulier le potentiel au point O, centre du cercle.

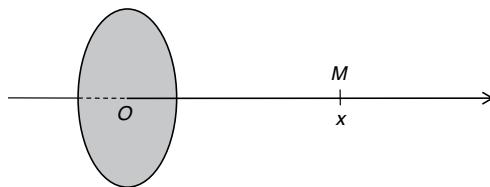


Figure 3.13

Retrouver, à partir de ce résultat, l'expression du champ au point M que nous avons déterminé dans l'exercice 4 du chapitre 2.

4. On considère une tige AB de longueur $2a$ et de milieu O, uniformément chargée avec une densité linéique de charges $\lambda > 0$ (figure 3.14). Calculer, à partir de l'expression du champ électrique, le potentiel en tout point M d'abscisse x de l'axe contenant la tige AB. On supposera que $x > a$.

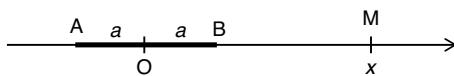


Figure 3.14

5. On considère un objet filiforme de longueur infinie uniformément chargé avec une densité linéique λ . Soit M un point quelconque de l'espace distant de r de cet objet (figure 3.15). Déterminer l'expression du champ électrique $E(r)$ au point M. En déduire le potentiel en ce point.

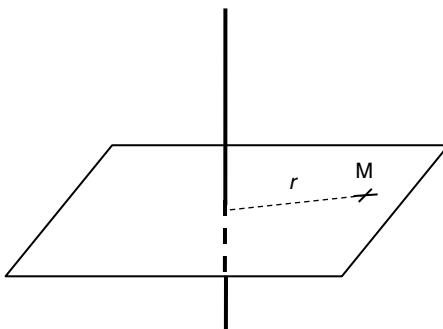


Figure 3.15

6. On considère une plaque circulaire d'épaisseur d et de rayon R_0 pourvue d'une densité surfacique de charges positive σ sur l'une de ses faces et d'une densité surfacique de charges $-\sigma$ sur l'autre face (figure 3.16).

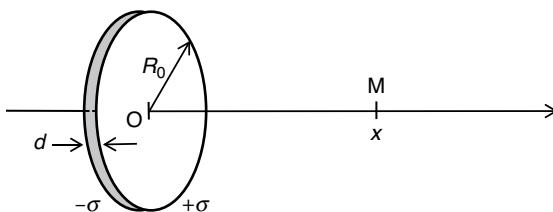


Figure 3.16

Calculer le potentiel créé par cet ensemble en un point M d'abscisse x situé le long de l'axe orthogonal à la plaque passant par son centre O. On supposera $x > 0$ et $x \gg d$ de manière à effectuer le développement limité approprié. On supposera par ailleurs que le point O appartient à la face chargée positivement.

Calculer ensuite le champ $\bar{E}(M)$ au point M.

7. On considère un plan muni d'un repère Oxy. Deux fils rigides de longueur infinie et uniformément chargés avec la même densité linéique λ traversent ce plan orthogonalement en deux points A et B de l'axe Ox, d'abscisses respectives a et $-a$ (figure 3.17).

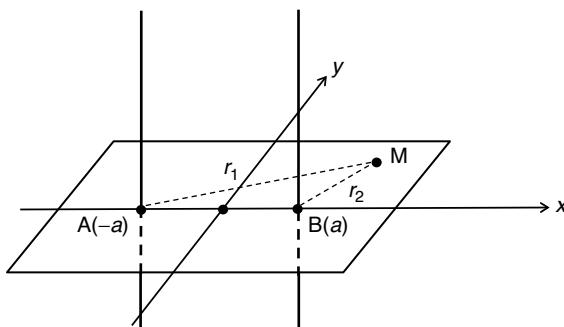


Figure 3.17

Calculer le potentiel V créé au point M en fonction de r_1 et de r_2 . Déterminer les équations des équipotentielles du plan Oxy.

8. On considère une sphère de rayon R_0 possédant une charge Q uniformément répartie à sa surface. On notera σ la densité surfacique correspondante. Soit O le centre de la sphère et Ox un axe quelconque de l'espace (figure 3.18). On se propose de déterminer la valeur du champ électrique $E(x)$ en un point M d'abscisse x de cet axe.

Calculer le flux total du champ électrique à travers une surface sphérique de centre O et de rayon x . En appliquant le théorème de Gauss, calculer l'expression de $E(x)$. On distinguera les cas $x > R_0$ et $x < R_0$. Tracer la courbe représentative de $E(x)$. Calculer le potentiel $V(x)$ au point M et tracer les variations de $V(x)$.

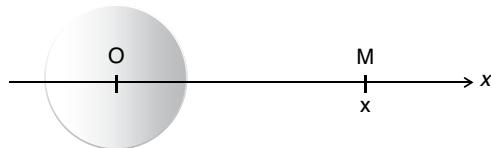


Figure 3.18

9. On considère une sphère de rayon R_0 possédant une charge Q uniformément répartie en volume. On notera ρ la densité volumique correspondante. Soit O le centre de la sphère et Ox un axe quelconque de l'espace (figure 3.19). Calculer la valeur du champ électrique $E(x)$ en un point M d'abscisse x de cet axe. En déduire le potentiel $V(x)$ au point M et tracer les variations de $E(x)$ et de $V(x)$.

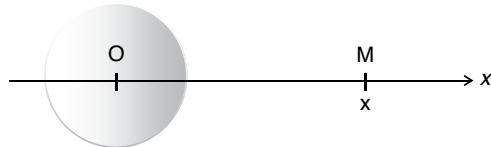


Figure 3.19

10. Un cylindre de rayon R possédant une très grande hauteur (que l'on supposera infinie) est chargé uniformément en surface avec une densité positive σ . Montrer que le champ électrique créé en tout point situé à une distance r de l'axe du cylindre est radial. Soit $E(r)$ ce champ. Calculer l'expression de $E(r)$ en utilisant le théorème de Gauss. En déduire l'expression du potentiel $V(r)$ en tout point situé à une distance r de l'axe du cylindre.

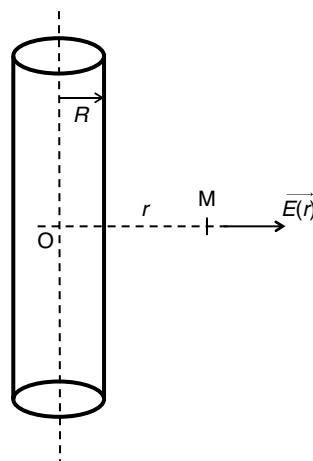


Figure 3.20

11. On considère une distribution de charges cylindrique similaire à celle de l'exercice précédent, mais cette fois-ci, volumique. Soit ρ la densité volumique de charges, supposée constante. Déterminer le champ électrique $E(r)$ et le potentiel $V(r)$ en tout point situé à une distance r de l'axe du cylindre.
12. On considère deux plaques parallèles P_0 et P_A qui coupent orthogonalement un axe Ox en deux points O et A . Ces plaques sont uniformément chargées respectivement avec une densité surfacique σ et $-\sigma$ et situées à une distance h l'une de l'autre (figure 3.21).

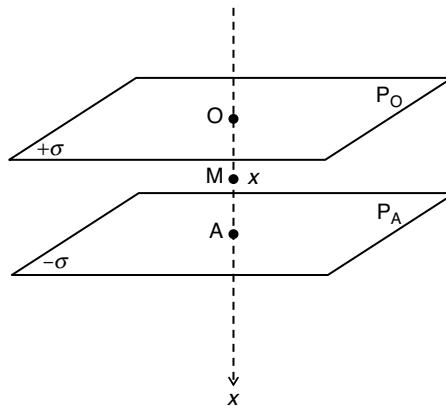


Figure 3.21

En supposant que les plaques possèdent de très grandes dimensions, calculer le champ électrique en tout point M d'abscisse x situé entre ces plaques. Calculer le potentiel au point M ainsi que les cas particuliers en O et A . Calculer la différence de potentiels entre ces deux points O et A .

Réponses

1. Soit $V_1(M)$ le potentiel créé en M par la charge $-q$ placée en A et $V_2(M)$ le potentiel créé par la charge q placée en B.

On a :

$$V_1(M) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} \text{ et } V_2(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2}$$

En vertu du principe de superposition, le potentiel créé par le doublet vaut :

$$V(M) = V_1(M) + V_2(M)$$

Soit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Calculons r_1 et r_2 en fonction de r et de θ :

$$r_1^2 = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta$$

$$r_2^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta$$

On a donc :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta}} \right)$$

2. Reprenons l'expression du potentiel trouvée dans l'exercice précédent et factorisons r au dénominateur. On obtient :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r}\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} + 2\frac{a}{r}\cos\theta}} \right)$$

Conservons uniquement les termes d'ordre 1, puis effectuons le développement limité de l'expression, toujours à l'ordre 1 :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{a}{r}\cos\theta}} \right)$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta - 1 + \frac{a}{r}\cos\theta \right)$$

Soit :

$$V(M) = \frac{2aq\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

On reconnaît dans cette expression la forme du produit scalaire :

$$\bar{p} \cdot \bar{u} = 2aq\cos\theta$$

\bar{u} étant le vecteur unitaire de l'axe (OM) orienté de O vers M.

D'où :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{r^2}$$

Calculons à présent le champ électrique au point M. Utilisons la relation vectorielle liant le champ et son potentiel :

$$\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V$$

Cette équation vectorielle en coordonnées polaires dans le plan se traduit par les relations suivantes :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \text{ et } E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

E_r et E_θ sont les composantes radiales et orthoradiétales du vecteur champ électrique en M (figure 3.22) qui se calculent donc aisément :

$$E_r = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2aq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq \cos \theta}{r^3}$$

Et :

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2aq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq \sin \theta}{r^3}$$

Le champ en M est bien parfaitement déterminé puisque nous connaissons ses composantes dans le plan. Malgré l'habitude, il n'est pas toujours utile (et cela est même parfois déconseillé) d'exprimer un vecteur en coordonnées cartésiennes. Dans le cas étudié, les coordonnées polaires sont parfaitement adaptées.

Déterminons pour finir les équipotentialles dans le plan Oxy. Le problème étant posé dans un plan, nous aurons bien affaire à des courbes et non à des surfaces.

Par définition, les équipotentialles correspondent à des relations dont la forme générique est :

$$V(M) = C^e = V_0$$

Soit :

$$\frac{2aq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = V_0 \Rightarrow r^2 = \frac{2aq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 V_0}$$

Ou encore :

$$r^2 = K \cos \theta$$

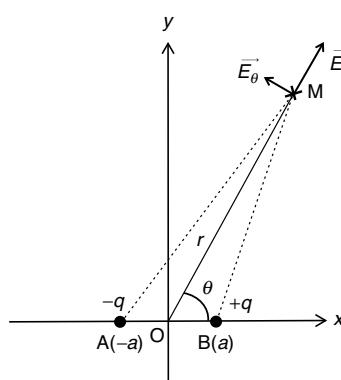


Figure 3.22

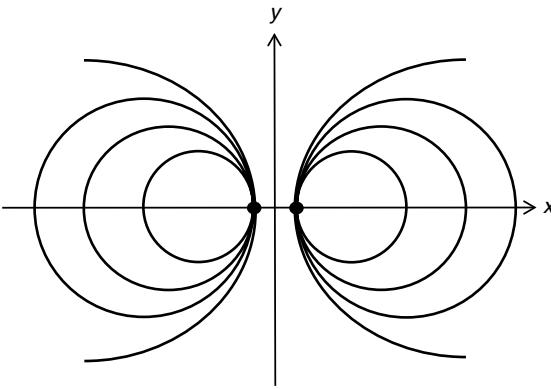


Figure 3.23

Ces équations (K étant un paramètre variable) représentent l'ensemble des équipotentielles en coordonnées polaires dans le plan.

Elles correspondent à des cercles tangents en O et de diamètres portés par Ox . La figure 3.23 propose une représentation de ces courbes équipotentielles.

3. Nous proposons ici une solution différente du problème posé dans l'exercice 4 du chapitre 2.

Considérons une couronne circulaire appartenant au disque, comprise entre les rayons z et $z + dz$ (figure 3.24).

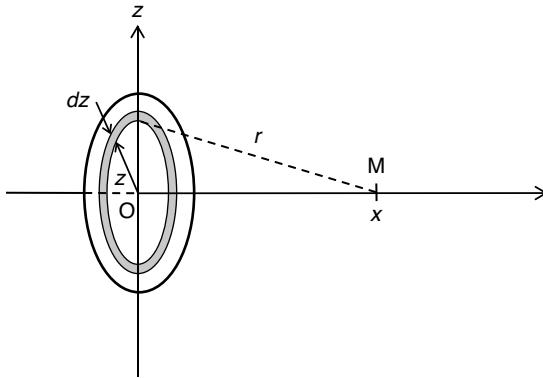


Figure 3.24

L'aire de cette couronne est égale à $2\pi zdz$. Par conséquent, la charge élémentaire contenue sur cette couronne est :

$$dq = 2\pi\sigma zdz$$

Cette charge se trouvant à une distance $r = \sqrt{z^2 + x^2}$ du point M , elle y crée un potentiel élémentaire que nous noterons dV :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma zdz}{\sqrt{z^2 + x^2}}$$

Le potentiel créé en M par l'ensemble de la charge du disque s'obtient en intégrant cette expression sur l'ensemble du disque, soit de 0 à R_0 :

$$V(M) = V(x) = \int_0^{R_0} dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{R_0} \frac{z}{\sqrt{z^2 + x^2}} dz$$

Soit :

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + x^2} \right]_0^{R_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R_0^2 + x^2} - \sqrt{x^2})$$

$$\text{Si } x > 0, \text{ on a : } V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R_0^2 + x^2} - x)$$

$$\text{Si } x < 0, \text{ on a : } V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R_0^2 + x^2} + x)$$

$$\text{Pour } x = 0, \text{ on a, quelle que soit l'expression utilisée : } V(0) = \frac{\sigma R_0}{2\epsilon_0}$$

Pour déterminer le champ en M, on utilise l'équation vectorielle :

$$\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V$$

Vu la symétrie du système, le champ est parallèle à Ox. Cette équation se traduit donc, en coordonnées cartésiennes par :

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\text{Pour } x > 0, \text{ on a : } E(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R_0^2 + x^2} - x) \right]$$

Soit :

$$E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R_0^2 + x^2}} \right)$$

$$\text{Pour } x < 0, \text{ on a : } E(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R_0^2 + x^2} + x) \right]$$

Soit :

$$E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(-1 - \frac{x}{\sqrt{R_0^2 + x^2}} \right)$$

L'expression du champ pour $x > 0$ est strictement la même que celle que nous avons trouvée à l'exercice 4 du chapitre 2. Nous remarquons simplement ici que l'on met facilement en évidence l'expression différente du champ pour $x < 0$, expression que nous n'avions pas encore calculée.

4. Nous avons déjà démontré (exercice 2 du chapitre 2) que :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{x^2 - a^2} \right)$$

Or :

$$\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V$$

Le champ étant parallèle à Ox cette équation se limite à :

$$E_x(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

D'où :

$$V(x) = - \int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{x^2 - a^2} \right) dx = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{1}{a^2 - x^2} \right) dx$$

Soit :

$$V(x) = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C^{\text{te}}$$

$$V(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + V_0$$

La constante V_0 se détermine en considérant que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = 0$$

Soit :

$$\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln(1) + V_0 = 0$$

D'où :

$$V_0 = 0$$

Au final :

$$V(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$$

5. Nous avons déjà étudié dans l'exercice 1 du chapitre 2 l'expression du champ électrique créé en un point M situé à une distance x d'une tige de longueur $2a$ uniformément chargée avec une densité linéique de charges λ :

$$E = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 x \sqrt{a^2 + x^2}}$$

Dans le présent exercice, la distance entre M et la distribution est notée r et a tend vers l'infini.

On a donc :

$$E(r) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{a^2 + r^2}} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right)$$

Soit :

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Une autre méthode consiste à considérer l'expression trouvée également dans l'exercice 1 du chapitre 2 :

$$E(r) = \frac{\lambda \sin \alpha_0}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ avec } \alpha_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Ce champ est porté par l'axe reliant le point M à la tige de longueur infinie. Il s'agit donc d'un champ radial et nous pouvons le noter :

$$E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

La relation $\vec{E} = -\nabla V$ se limite donc à sa composante radiale :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

D'où :

$$V(M) = V(r) = - \int E_r(r) dr = - \int \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r}$$

Donc :

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C^{\text{te}} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + V_0$$

Il n'est pas possible ici de considérer que $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$ comme nous l'avions fait dans l'exercice précédent. En effet, des charges électriques sont présentes en l'infini et le potentiel ne peut y être nul.

Nous ne pouvons donc déterminer le potentiel qu'à une constante près. Ceci n'est pas foncièrement gênant car on choisit souvent d'exprimer des différences de potentiels. Ainsi, en considérant deux points A et B de l'espace distants respectivement de r_A et de r_B de la distribution (figure 3.25), on pourra écrire :

$$V(A) - V(B) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_A + V_0 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_B - V_0$$

$$V(A) - V(B) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_A + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_B = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_B}{r_A}$$

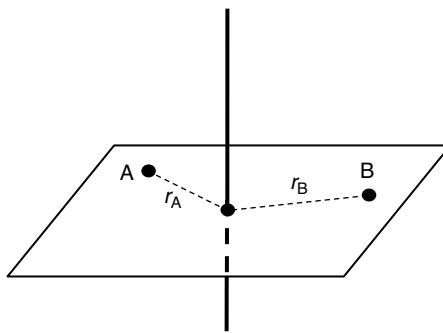


Figure 3.25

- 6.** Nous connaissons déjà, grâce au résultat de l'exercice 3 de ce chapitre, l'expression du potentiel créé en un point M d'abscisse x d'un axe par une distribution répartie sur la surface d'un disque chargé avec une densité σ .

Soit $V_1(x)$ le potentiel créé en M par le côté de la plaque chargé avec une densité σ . Compte tenu de l'expression trouvée dans l'exercice 3 et comme nous nous limitons au cas $x > 0$, on a immédiatement :

$$V_1(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R_0^2 + x^2} - x)$$

La plaque chargée négativement avec la densité surfacique $-\sigma$ crée de même un potentiel $V_2(x)$ tel que :

$$V_2(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R_0^2 + (x+d)^2} - (x+d) \right]$$

puisque cette plaque se trouve à la distance $(x+d)$ du point M.

Par conséquent, en vertu du principe de superposition, le potentiel créé en M par l'ensemble des deux plaques correspond à la somme des deux potentiels créés indépendamment par chacune d'entre elles :

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x)$$

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{R_0^2 + x^2} - x \right) - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R_0^2 + (x+d)^2} - (x+d) \right]$$

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R_0^2 + x^2} - \sqrt{R_0^2 + (x+d)^2} - (x+d) \right] + d$$

Transformons l'expression de $\sqrt{R_0^2 + (x+d)^2}$:

$$\sqrt{R_0^2 + (x+d)^2} = \sqrt{R_0^2 + x^2} \left[\sqrt{\frac{R_0^2 + (x+d)^2}{R_0^2 + x^2}} \right]$$

$$\sqrt{R_0^2 + (x+d)^2} = \sqrt{R_0^2 + x^2} \left[\sqrt{\frac{x^2 + 2xd + d^2 + R_0^2}{R_0^2 + x^2}} \right]$$

Comme $d \ll x$:

$$\sqrt{R_0^2 + (x+d)^2} \approx \sqrt{R_0^2 + x^2} \left[\sqrt{\frac{x^2 + 2xd + R_0^2}{R_0^2 + x^2}} \right]$$

D'où :

$$\sqrt{R_0^2 + (x+d)^2} \approx \sqrt{R_0^2 + x^2} \left[\sqrt{1 + \frac{2xd}{R_0^2 + x^2}} \right]$$

En effectuant le développement limité à l'ordre 1 de la racine carrée, on obtient :

$$\sqrt{R_0^2 + (x+d)^2} \approx \sqrt{R_0^2 + x^2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{2xd}{R_0^2 + x^2} \right]$$

D'où l'expression approchée du potentiel :

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R_0^2 + x^2} - \sqrt{R_0^2 + x^2} \left(1 + \frac{xd}{R_0^2 + x^2} \right) + d \right]$$

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R_0^2 + x^2} \times \frac{(-xd)}{R_0^2 + x^2} + d \right]$$

$$V(x) = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R_0^2 + x^2}} \right]$$

Compte tenu de la symétrie de la distribution de charges, le champ électrique en M est parallèle à l'axe Ox. Le vecteur $\overline{E(x)}$ est donc réduit à sa seule composante $E_x(x)$.

La relation $\vec{E} = -\nabla V$ se limite donc à : $E_x(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$.

Donc :

$$E_x(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R_0^2 + x^2}} \right) \right]$$

$$E_x(x) = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{R_0^2 + x^2}} \right)$$

$$E_x(x) = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \times \frac{\sqrt{R_0^2 + x^2} - x \frac{2x}{2\sqrt{R_0^2 + x^2}}}{R_0^2 + x^2}$$

$$E_x(x) = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \times \frac{x^2 + R_0^2 - x^2}{(R_0^2 + x^2)\sqrt{R_0^2 + x^2}}$$

Soit :

$$E_x(x) = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \frac{R_0^2}{(R_0^2 + x^2)^{3/2}}$$

7. Nous connaissons déjà, grâce au résultat de l'exercice 5 de ce chapitre, l'expression du potentiel créé en M par une distribution linéique infinie.

Soit V_1 le potentiel créé en M par la distribution linéique coupant le plan au point A.

On a :

$$V_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 + C_1^{\text{te}}$$

De même, en appelant V_2 le potentiel créé en M par l'autre distribution, on obtient :

$$V_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 + C_2^{\text{te}}$$

On en déduit donc :

$$V(M) = V_1 + V_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 + V_0$$

$$V(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_1 + \ln r_2) + V_0$$

D'où :

$$V(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_1 r_2) + V_0$$

Il n'est pas possible de déterminer la constante V_0 puisque des charges se trouvent en l'infini.

8. La distribution de charges étant sphérique, le champ en un point quelconque M de l'espace ne dépend que de la distance x qui le sépare de O. Il est de plus porté par l'axe Ox. Si on considère une sphère de rayon x quelconque et de centre O (figure 3.26), le champ $E(x)$ est donc le même en tout point de cette sphère. Il lui est également, en tout point, orthogonal.

Soit S la surface de la sphère de rayon x . Le flux total du champ électrique au travers de S est donc :

$$\phi = E(x)S$$

Comme $S = 4\pi x^2$, on a :

$$\phi = 4\pi x^2 E(x)$$

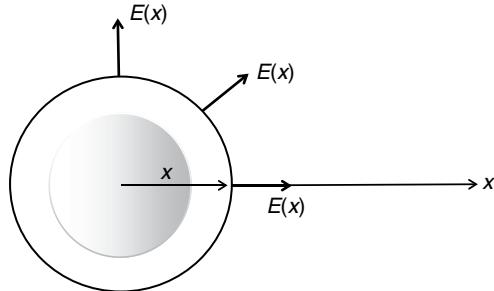


Figure 3.26

Considérons dans un premier temps que $x > R_0$ et appliquons le théorème de Gauss. Le flux total du champ électrique au travers de S est égal au rapport de la charge totale Q contenue à l'intérieur de S par ε_0 :

$$\phi = 4\pi x^2 E(x) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Comme $Q = 4\pi R_0^2 \sigma$, on peut écrire :

$$\phi = 4\pi x^2 E(x) = \frac{4\pi R_0^2 \sigma}{\varepsilon_0}$$

D'où :

$$E(x) = \frac{R_0^2 \sigma}{\varepsilon_0 x^2}$$

Si on considère à présent que l'on se trouve en un point situé à l'intérieur de la sphère, autrement dit si $x < R_0$, il n'y a plus aucune charge contenue à l'intérieur de la surface S puisque la sphère de rayon R_0 n'est chargée qu'en surface.

On a donc :

$$\phi = 4\pi x^2 E(x) = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

À l'intérieur de la sphère de rayon R_0 , on a donc :

$$E(x) = 0$$

On peut désormais représenter graphiquement les variations de $E(x)$ en tenant compte des deux cas (figure 3.27). On notera que le champ présente une discontinuité au point $x = R_0$ et que l'on a :

$$E(R_0) = \frac{R_0^2 \sigma}{\varepsilon_0 R_0^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

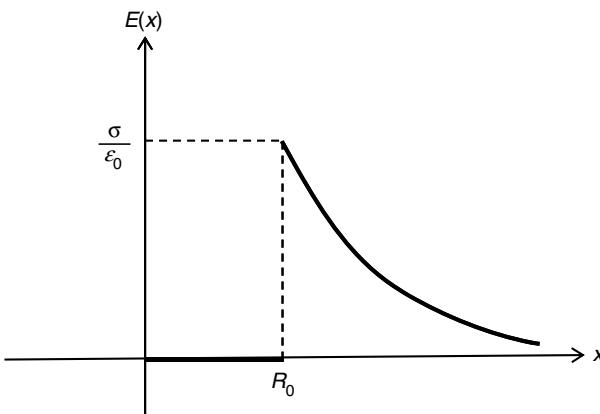


Figure 3.27

Calculons à présent le potentiel en M :

$$\bar{E} = -\overline{\text{grad } V}$$

Le champ étant parallèle à l'axe Ox, cette relation se limite à sa seule composante selon cet axe :

$$E(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Soit :

$$V(x) = -\int E(x) dx$$

Pour \$x > R_0\$, on a :

$$V(x) = -\int \frac{R_0^2 \sigma}{\epsilon_0 x^2} dx = -\frac{R_0^2 \sigma}{\epsilon_0} \int \frac{1}{x^2} dx$$

D'où :

$$V(x) = -\frac{R_0^2 \sigma}{\epsilon_0} \left(-\frac{1}{x} \right) + C^{\text{te}} = \frac{R_0^2 \sigma}{\epsilon_0 x} + V_1$$

On détermine facilement la constante \$V_1\$ en considérant que le potentiel est nul à l'infini puisqu'il n'y a pas de charge :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{R_0^2 \sigma}{\epsilon_0 x} + V_1 \right) = 0 \Rightarrow V_1 = 0$$

Par conséquent :

$$V(x > R_0) = \frac{R_0^2 \sigma}{\epsilon_0 x}$$

Pour \$x < R_0\$, \$E(x) = 0 \Rightarrow V = C^{\text{te}} = V_2\$

Cette constante \$V_2\$ se détermine en considérant que le potentiel est une fonction continue dans l'espace. Autrement dit, les deux expressions déterminées ci-dessus doivent être égales en \$R_0\$. Bien noter que pour \$x < R_0\$, il n'est pas question d'invoquer le potentiel à l'infini puisque l'expression du potentiel n'est en aucun cas applicable à l'infini étant donné qu'elle ne concerne que l'intérieur de la sphère.

On a donc :

$$V(x = R_0) = \frac{R_0^2 \sigma}{\epsilon_0 R_0} = \frac{R_0 \sigma}{\epsilon_0} \text{ et } V(x = R_0) = V_2$$

$$\text{Par conséquent, } V_2 = \frac{R_0 \sigma}{\epsilon_0}.$$

D'où :

$$V(x < R_0) = \frac{R_0 \sigma}{\epsilon_0}$$

Représentons les variations de $V(x)$ en tenant compte des deux cas (figure 3.28).

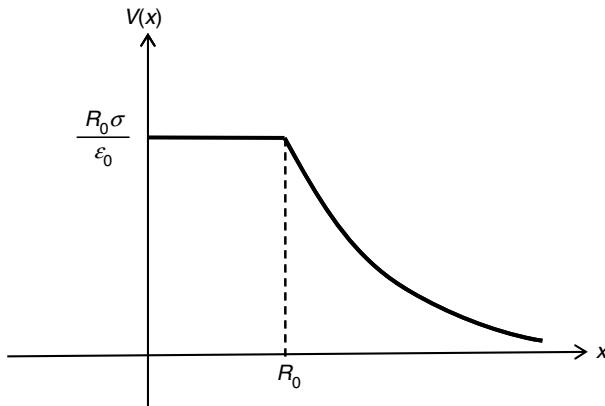


Figure 3.28

9. Le volume d'une sphère de rayon R_0 a pour expression $\frac{4}{3}\pi R_0^3$. La charge Q est donc égale à $Q = \frac{4}{3}\pi \rho R_0^3$.

Compte tenu de la symétrie du système, le champ $E(x)$ est en tout point de l'espace orthogonal à la sphère et ne dépend que de x . Il sera donc porté par l'axe Ox.

Considérons une sphère de rayon x , centrée en O et calculons le flux total du champ électrique au travers cette surface sphérique afin d'appliquer le théorème de Gauss.

Supposons dans un premier temps que $x > R_0$ (figure 3.29).

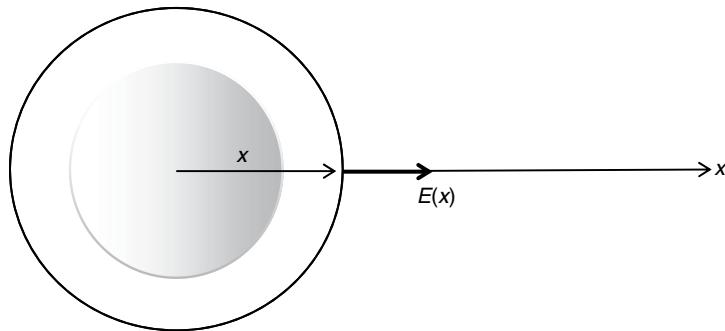


Figure 3.29

Le flux du champ électrique au point d'abscisse x a pour expression :

$$\phi = E(x)S \text{ avec } S = 4\pi x^2$$

De plus, le théorème de Gauss prévoit que :

$$\phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

On a donc :

$$\phi = \frac{Q}{\epsilon_0} = 4\pi x^2 E(x)$$

D'où :

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi\rho R_0^3}{3} \frac{x^2}{x^2} = \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 x^2}$$

Supposons à présent que $x < R_0$ (figure 3.30).

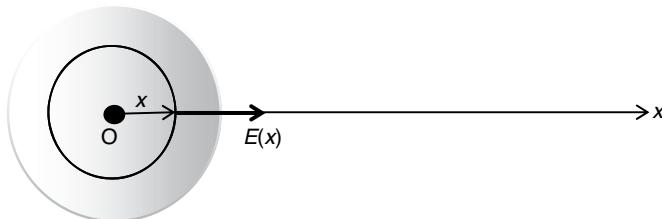


Figure 3.30

On a toujours :

$$\phi = 4\pi x^2 E(x)$$

Mais cette fois, la charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss ne correspond qu'à une partie de la charge Q évoquée précédemment. La surface de Gauss se trouvant à l'intérieur de la sphère de rayon R_0 , elle contient une charge q telle que :

$$Q = \frac{4}{3}\pi\rho x^3$$

Le théorème de Gauss nous donne alors :

$$\phi = \frac{4}{3\epsilon_0}\pi\rho x^3 = 4\pi x^2 E(x)$$

D'où :

$$E(x) = \frac{\rho x}{3\epsilon_0}$$

La figure 3.31 représente le graphe de $E(x)$ tenant compte des deux cas étudiés. On remarque qu'au point $x = R_0$, les deux expressions nous donnent la même valeur $E(R_0) = \frac{\rho R_0}{3\epsilon_0}$. Cela exprime la continuité du champ en ce point, contrairement à l'exercice précédent où le champ présentait une discontinuité.

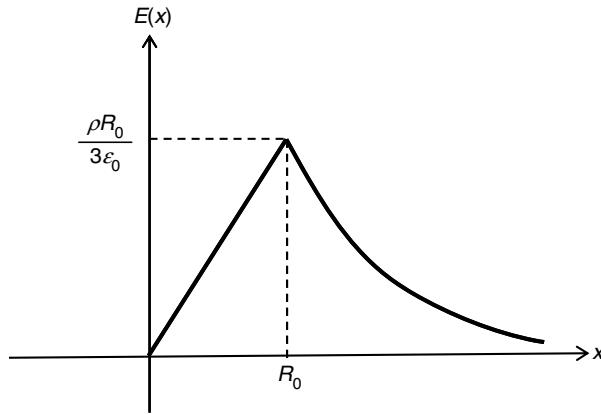


Figure 3.31

Calculons à présent le potentiel au point d'abscisse x .

Dans tous les cas :

$$\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V$$

Le champ étant parallèle à l'axe Ox, cette relation se limite à sa seule composante selon cet axe :

$$E(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Soit, pour $x > R_0$:

$$V(x > R_0) = - \int E(x) dx = - \int \frac{\rho R_0^3}{3 \epsilon_0 x^2} dx$$

$$V(x > R_0) = - \frac{\rho R_0^3}{3 \epsilon_0} \int \frac{dx}{x^2} = \frac{\rho R_0^3}{3 \epsilon_0 x} + V_0$$

Comme il n'y a aucune charge à l'infini, on peut considérer que le potentiel y est nul :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0 \Rightarrow V_0 = 0$$

Remarque : Lorsque l'on calcule un potentiel, la détermination de la constante d'intégration s'effectue en considérant que le champ est nul à l'infini à deux conditions : qu'aucune charge ne soit présente à l'infini et que l'expression du potentiel soit valable en l'infini. Ici, c'est bien le cas car l'expression invoquée concerne $x > R_0$.

En résumé :

$$V(x > R_0) = \frac{\rho R_0^3}{3 \epsilon_0 x}$$

Pour $x < R_0$:

$$V(x < R_0) = - \int E(x) dx = - \int \frac{\rho x}{3 \epsilon_0} dx$$

$$V(x < R_0) = - \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \int x dx = - \frac{\rho x^2}{6 \epsilon_0} + V_1$$

La constante V_1 ne peut pas se calculer en considérant que le potentiel est nul en l'infini puisque l'expression trouvée n'est valable que pour $x < R_0$. Autrement dit, elle n'est pas valable en l'infini. Nous allons en revanche utiliser la continuité du potentiel en $x = R_0$. Cela revient à écrire que l'expression du potentiel pour $x < R_0$ doit donner, en $x = R_0$, le même résultat que l'expression trouvée pour $x > R_0$. On a donc :

$$V(R_0) = \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 R_0} = -\frac{\rho R_0^2}{6\epsilon_0} + V_1$$

D'où :

$$V_1 = \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 R_0} + \frac{\rho R_0^2}{6\epsilon_0} = \frac{\rho R_0^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho R_0^2}{6\epsilon_0} = \frac{\rho R_0^2}{2\epsilon_0}$$

En résumé :

$$V(x < R_0) = -\frac{\rho x^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R_0^2}{2\epsilon_0} = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3R_0^2 - x^2)$$

Représentons graphiquement le potentiel $V(x)$ en tenant compte des deux expressions trouvées (figure 3.32). On remarquera notamment que $V(0) = \frac{\rho R_0^2}{2\epsilon_0}$ et que la fonction est strictement décroissante. Par ailleurs, sa courbe représentative présente une inflexion en $x = R_0$.

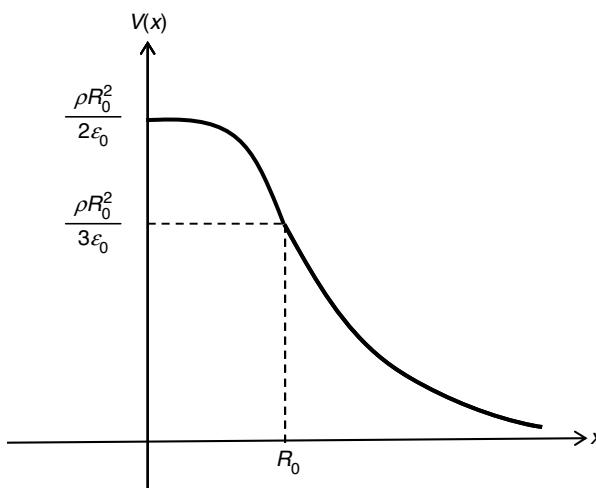


Figure 3.32

- 10.** Compte tenu de la symétrie cylindrique de révolution autour de l'axe de la distribution, le champ électrique ne dépend que de r et il est en tout point de l'espace orthogonal à la surface du cylindre. Nous sommes donc bien en présence d'un champ radial.

Considérons une surface de Gauss constituée d'un cylindre fermé de rayon r , de même axe que le cylindre chargé et de hauteur z .

Supposons dans un premier temps que $r > R$ (figure 3.33).

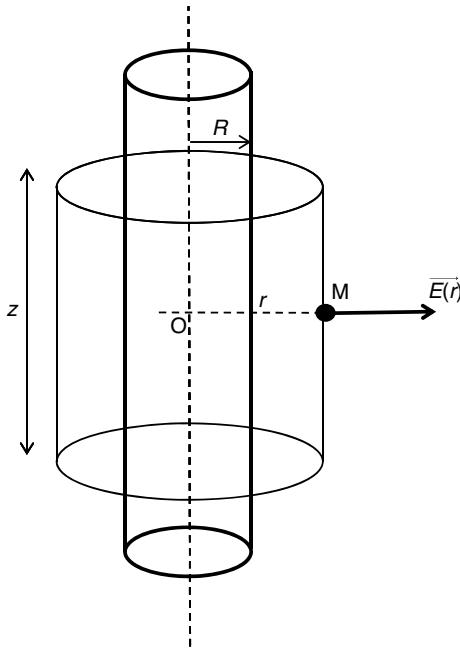


Figure 3.33

La surface totale S du cylindre est constituée de la surface des deux faces fermant le cylindre et de sa surface latérale. Comme le champ électrique est en tout point radial, il sera, en tout point des deux faces fermant le cylindre, tangent à S . En conséquence, aucun flux ne traverse les deux faces correspondant aux extrémités du cylindre.

Le flux sortant de la surface de Gauss ainsi définie se limite donc au flux traversant le contour latéral du cylindre. Soit S_1 la surface correspondante :

$$S_1 = 2\pi r z$$

Le champ étant radial, donc orthogonal à cette surface et d'intensité constante en tout point de cette surface, on a :

$$\phi = 2\pi r z E(r)$$

Appliquons le théorème de Gauss en notant Q la charge contenue à l'intérieur de cette surface :

$$\phi = 2\pi r z E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Or la charge Q correspond à la charge surfacique de la distribution de charges sur la hauteur z :

$$Q = 2\pi R z \sigma$$

D'où :

$$\phi = 2\pi r z E(r) = \frac{2\pi R z \sigma}{\epsilon_0}$$

Donc :

$$E(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$$

Le potentiel $V(r)$ se déduit alors de cette expression :

$$\bar{E} = -\overline{\text{grad}} V$$

Le champ étant radial, cette relation se limite à sa seule composante selon r :

$$E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Soit :

$$V(r) = - \int E(r) dr = - \int \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} dr$$

$$V(r) = - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} = - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln r + V_0$$

Il n'est pas possible de déterminer la constante d'intégration V_0 puisque des charges se trouvent à l'infini. Toutefois, il sera toujours possible d'exprimer des différences de potentiels entre deux points distincts de l'espace.

Si on considère à présent une surface de Gauss définie comme précédemment mais telle que $r < R$ (intérieur du cylindre chargé), on a toujours :

$$\phi = 2\pi r z E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Mais comme il n'y a aucune charge à l'intérieur du cylindre, on obtient :

$$\phi = 2\pi r z E(r) = \frac{0}{\epsilon_0}$$

D'où :

$$E(r < R) = 0$$

Le champ électrique est donc nul à l'intérieur du cylindre de rayon R chargé uniquement en surface.

- 11.** Comme pour l'exercice précédent, le champ électrique est radial et ne dépend que de la distance r . Considérons la même surface de Gauss que celle définie dans l'exercice précédent.

On a toujours :

$$\phi = 2\pi r z E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Q est la charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss. Pour $r > R$, Q correspond à la charge contenue dans le volume $z\pi R^2$ du cylindre chargé avec la densité volumique de charges ρ :

$$Q = \rho z \pi R^2$$

D'où :

$$\phi = 2\pi r z E(r) = \frac{\rho z \pi R^2}{\epsilon_0}$$

Donc :

$$E(r > R) = \frac{\rho z \pi R^2}{2\pi r z \epsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$$

Considérons à présent le cas $r < R$ (figure 3.34).

On a toujours :

$$\phi = 2\pi r z E(r) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

q étant la charge contenue dans cette nouvelle surface de Gauss.

Cette surface correspond au contour d'un volume $z\pi r^2$ chargé avec une densité volumique ρ .

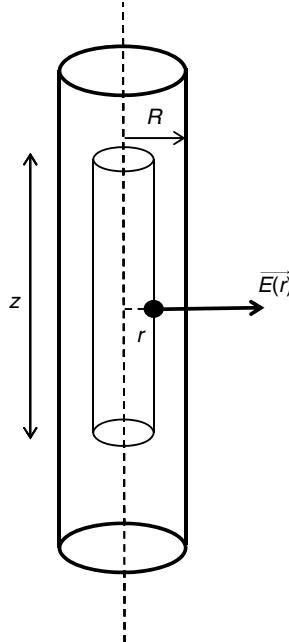


Figure 3.34

On a donc :

$$q = \rho z \pi r^2$$

D'où :

$$\phi = 2\pi r z E(r) = \frac{\rho z \pi r^2}{\epsilon_0}$$

Soit :

$$E(r < R) = \frac{\rho z \pi r^2}{2\pi r z \epsilon_0} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

Calculons à présent l'expression du potentiel $V(r)$. Pour $r > R$, on obtient l'expression :

$$V(r) = - \int E(r) dr = - \int \frac{\rho r}{2\epsilon_0} dr$$

$$V(r) = - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} = - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + V_0$$

Comme pour l'exercice précédent, la constante reste dans l'expression de $V(r)$.

Pour $r < R$, on a :

$$V(r) = - \int E(r) dr = - \int \frac{\rho r}{2\epsilon_0} dr$$

$$V(r) = - \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int r dr = - \frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + V_1$$

On peut déterminer la relation entre V_1 et V_0 en exprimant la continuité du potentiel en $r = R$, c'est-à-dire en écrivant l'égalité des deux expressions du potentiel $V(r)$ à la surface du cylindre :

$$-\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + V_1 = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln R + V_0$$

Soit :

$$V_1 = V_0 - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln R + \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} = V_0 - \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} (2 \ln R - 1)$$

En conclusion :

$$\begin{cases} V(r > R) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + V_0 \\ V(r < R) = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} - \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} (2 \ln R - 1) + V_0 \end{cases}$$

- 12.** Calculons les champs créés en M par chacune des deux plaques puis appliquons le principe de superposition. Soit $E_0(x)$ le champ créé en M d'abscisse x par la plaque P_0 et soit $E_A(x)$ le champ créé en M d'abscisse x par la plaque P_A .

D'après le résultat de l'exercice 8 du chapitre 2, on a immédiatement :

$$E_0(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Ce champ est positif donc dirigé vers les x croissants.

Appliquons ce résultat à la plaque P_A :

$$E_A(x) = -\frac{(-\sigma)}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Le potentiel au point x se calcule à partir de la relation :

$$\bar{E} = -\overline{\text{grad}} V$$

Le champ étant parallèle à Ox , cette relation se limite à sa seule composante selon x :

$$E(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Soit :

$$V(x) = - \int E(x) dx = - \int \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = - \frac{\sigma x}{\epsilon_0} + V_0$$

La constante V_0 ne peut être déterminée puisque des charges sont présentes à l'infini. On peut toutefois calculer les potentiels aux points O et A :

$$V_O = V(0) = V_0$$

$$V_A = V(h) = -\frac{\sigma h}{\epsilon_0} + V_0$$

La différence de potentiels $V_O - V_A$ a donc pour expression :

$$V_O - V_A = \frac{\sigma h}{\epsilon_0}$$

Cette différence de potentiels correspond bien à la circulation du champ électrique sur une courbe quelconque reliant O et A :

$$C = \int_{OA} \vec{E}(\vec{M}) \cdot d\vec{l} = \int_0^h \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma h}{\epsilon_0}$$

On retiendra surtout la relation :

$$V_O - V_A = Eh$$

Cette expression relie la différence de potentiels entre deux plaques chargées distantes de h et le champ électrique qu'elles créent dans la région de l'espace qu'elles délimitent. On notera que le champ électrique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants puisque $V_O > V_A$.

Conducteurs en équilibre

MOTS CLÉS

Équilibre électrostatique ■ théorème de Coulomb ■ capacité ■ théorème des éléments correspondants ■ conducteur en influence ■ influence totale ■ théorème de Faraday ■ condensateur ■ associations de condensateurs ■ pression électrostatique ■ entrefer ■ armatures

Ce chapitre est consacré aux interactions électrostatiques au sein de matériaux conducteurs. Dans de tels matériaux, les charges sont susceptibles de se mouvoir spontanément et d'atteindre un état d'équilibre. Nous étudierons également ce qui se passe lorsque deux conducteurs chargés subissent une influence mutuelle, cette notion débouchant sur le concept de condensateurs.

Fiche 1

Équilibre électrostatique dans un conducteur

Un conducteur est un milieu dans lequel les charges sont susceptibles de se mouvoir sous l'action de champs électriques. Si on considère un matériau conducteur chargé, chaque charge exerce sur les autres une action d'origine électrostatique. Quelle que soit la répartition initiale des charges à l'intérieur du conducteur, celles-ci vont inévitablement évoluer vers un état d'équilibre qui sera caractérisé par une absence totale de mouvement de charges. Cet état est appelé l'équilibre électrostatique du conducteur.

Supposons qu'une charge q soit placée à l'intérieur d'un conducteur en équilibre (figure 4.1).

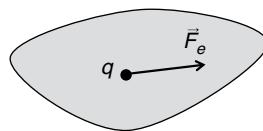


Figure 4.1

La charge étant par définition immobile, elle ne subit aucune force électrostatique. Le champ électrique \vec{E}_i en tout point situé à l'intérieur du conducteur est donc nul.

Soit :

$$\vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_i = \vec{0}$$

Le champ étant nul en tout point situé à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, le potentiel y est donc constant :

$$V_i = C^{\text{te}} = V_0$$

Fiche 2

Théorème de Coulomb

Si on applique l'équation de Poisson à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, soit :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

On a :

$$V_i = C^{\text{te}} = V_0 \Rightarrow \Delta V = 0 \Rightarrow \rho_i = 0$$

La densité volumique de charges est donc nulle à l'intérieur d'un conducteur chargé en équilibre électrostatique. Cela signifie que la charge du conducteur est uniquement répartie sur sa surface externe et ce, avec une densité surfacique de charges σ .

Le théorème de Coulomb détermine le champ électrique $\vec{E}(M)$ en tout point M situé au voisinage immédiat de la surface du conducteur (figure 4.2) :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}$$

Où \vec{u} représente le vecteur unitaire normal à la surface extérieure du conducteur proche du point M, σ étant la densité surfacique de charges au voisinage de M.

L'ensemble des propriétés du conducteur en équilibre sont vérifiées, que le conducteur soit plein ou qu'il possède une ou plusieurs cavités. Dans ce dernier cas, le champ est nul à l'intérieur de la cavité et la densité surfacique de charges sur les surfaces internes du conducteur est toujours nulle.

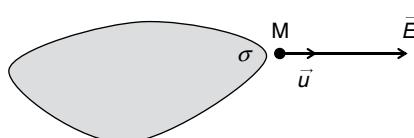


Figure 4.2

Fiche 3

Capacité d'un conducteur

On définit pour tout conducteur chargé et isolé, une constante caractéristique qui exprime que la charge portée par le conducteur est liée à son potentiel V_0 .

Pour tout conducteur chargé avec une charge totale Q et isolé, on définit la capacité C du conducteur par la relation :

$$C = \frac{Q}{V_0}$$

Cette capacité est une caractéristique intrinsèque du conducteur et s'exprime en farads (F). La définition de cette grandeur traduit le principe de superposition des états d'équilibre d'un conducteur.

Soit un premier état d'équilibre du conducteur caractérisé par une charge Q_1 et par un potentiel V_1 . On a :

$$C = \frac{Q_1}{V_1}$$

En considérant un second état d'équilibre du conducteur caractérisé par une charge Q_2 et par un potentiel V_2 . On a :

$$C = \frac{Q_2}{V_2}$$

Le conducteur chargé avec une charge $Q_1 + Q_2$ possédera un potentiel $V_1 + V_2$ et on aura :

$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{V_1 + V_2}$$

Fiche 4

Influence électrostatique entre des conducteurs

Considérons deux conducteurs chargés A et B, placés au voisinage l'un de l'autre. Les charges contenues dans A subissent des actions électrostatiques de la part des charges situées en B et réciproquement. On dit qu'il existe une influence électrostatique entre ces deux conducteurs. La répartition des charges à la surface d'un des conducteurs ne dépend plus uniquement des caractéristiques intrinsèques du conducteur mais également de cette influence subie de par la présence de l'autre conducteur. L'étude de tels systèmes conduit inévitablement à considérer l'équilibre électrostatique de l'ensemble des deux conducteurs.

Supposons que les deux conducteurs A et B soient initialement chargés avec des charges respectives Q_A et Q_B et que les deux potentiels initiaux soient respectivement V_A et V_B (figure 4.3).

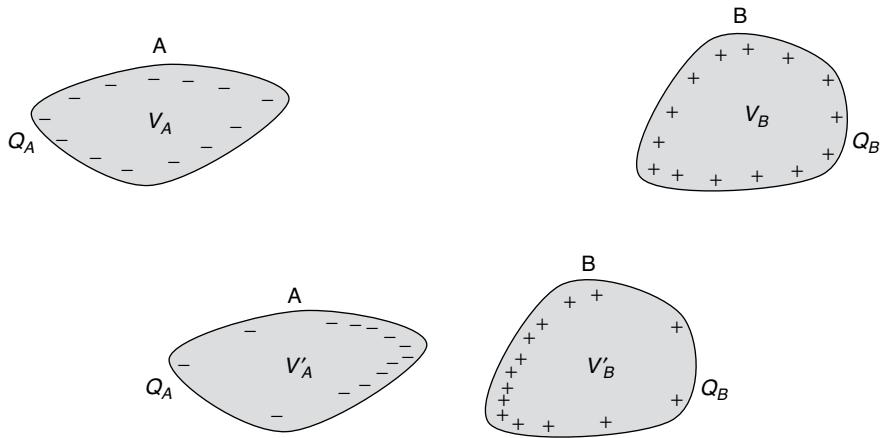


Figure 4.3

Rapprochons ces deux conducteurs (sans qu'il n'y ait contact), de manière à les placer dans une situation d'influence électrostatique (partie inférieure de la figure 4.3).

L'influence électrostatique se traduit par :

- la migration vers un nouvel état d'équilibre des charges situées sur les surfaces des deux conducteurs. Les densités surfaciques de charges sont donc modifiées ;
- les charges totales respectives Q_A et Q_B des deux conducteurs restent les mêmes s'il n'y a pas contact entre les conducteurs.

Des lignes de champ apparaissent dans l'espace situé entre les deux conducteurs. Les lignes de champ s'appuyant sur un élément de surface dS_A du conducteur A coupent un élément de surface dS_B du conducteur B. Si dq_A et dq_B sont les charges portées respectivement par ces deux surfaces, on a systématiquement :

$$dq_A + dq_B = 0$$

Cette équation constitue le théorème des éléments correspondants.

L'état d'équilibre de deux conducteurs en influence se traduit par la relation :

$$Q_A = C_{AA}V_A + C_{AB}V_B$$

C_{AA} est la capacité du conducteur A. C_{AB} est le coefficient d'influence du conducteur B sur le conducteur A.

On a toujours :

$$\begin{cases} C_{AA} > 0 \\ C_{AB} < 0 \end{cases}$$

Dans le cas de l'influence entre n conducteurs, on peut écrire :

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij}V_j = C_{ii}V_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}V_j$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \dots \\ Q_n \end{pmatrix} = [C_{ij}] \begin{pmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix}$$

On a par ailleurs toujours :

$$\begin{cases} C_{ii} > 0 \\ C_{ij} < 0 \\ C_{ij} = C_{ji} \end{cases}$$

Fiche 5

Condensateurs

On dit que deux conducteurs sont en état d'influence totale lorsque toutes les lignes de champ électrique issues d'un des conducteurs atteignent systématiquement la surface du second. Dans ce cas, on a :

$$Q_A + Q_B = 0$$

qui constitue le théorème de Faraday.

Deux conducteurs en influence totale forment un condensateur. Ces deux conducteurs sont appelés les armatures du condensateur.

Si on pose :

$$Q_A = -Q_B = Q$$

On a :

$$Q = C(V_A - V_B)$$

C est la capacité du condensateur en farads (F).

La figure 4.4 représente le schéma conventionnel d'un condensateur quelconque vu comme un dipôle. Les différentes associations types de condensateurs y sont également représentées.

Un ensemble de n condensateurs est appelé association en parallèle si les armatures de ces condensateurs sont toutes reliées à une seule différence de potentiels. Une telle association est équivalente à un condensateur qui aurait une capacité équivalente C_{eq} telle que :

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i$$

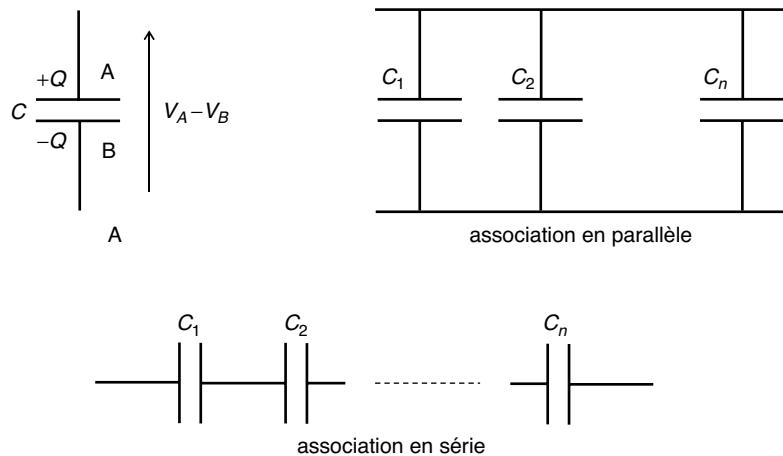


Figure 4.4

Un ensemble de n condensateurs est appelé association en série si leurs armatures sont toutes reliées deux à deux. Dans ce cas, ils possèdent tous la même charge et cette association est équivalente à un condensateur de capacité équivalente C_{eq} telle que :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Remarque

Attention, les règles de calcul des capacités équivalentes des associations en série ou en parallèle sont les inverses de celles des résistances.

Entraînement

QCM

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être exactes.

1. À l'intérieur d'un conducteur chargé en équilibre :

- a. Le champ électrique est constant
- b. Le champ électrique est nul
- c. Le champ électrique est dirigé systématiquement vers la surface
- d. Le champ électrique est dirigé de la surface vers un point unique

2. Dans un conducteur en équilibre électrostatique :

- a. Le potentiel est constant
- b. Le potentiel est nul
- c. Le potentiel est toujours négatif
- d. Le potentiel est toujours positif

3. Dans un conducteur en équilibre électrostatique :

- a. Les charges sont réparties uniformément en volume.
- b. La charge globale contenue dans le conducteur est nulle
- c. Les charges sont réparties à la surface
- d. La densité surfacique de charges est constante

4. Laquelle de ces écritures correspond au théorème de Coulomb ?

- a. $\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \vec{u}$
- b. $\vec{E} = \frac{2\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}$
- c. $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}$
- d. $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}$

5. La capacité d'un conducteur :

- a. Dépend de la charge qu'il porte.
- b. Dépend de son potentiel.
- c. Est toujours une constante pour le conducteur considéré.
- d. Varie lorsqu'on approche le conducteur d'un autre conducteur.

6. La capacité d'un conducteur :

- a. Est toujours positive.
- b. S'exprime en coulombs
- c. Permet de déterminer le potentiel d'un conducteur isolé en connaissant la charge qu'il porte.
- d. Exprime l'aptitude du conducteur à former un condensateur.

7. Lorsque l'on place en parallèle deux condensateurs de même capacité C on obtient un condensateur de capacité équivalente égale à :

- a. $2C$
- b. $C / 2$
- c. C
- d. $4C$

8. Lorsque l'on place en série trois condensateurs de 10 , 20 et $30 \mu\text{F}$, on obtient un condensateur de capacité équivalente :

- a. $C = 60 \mu\text{F}$
- b. $C = 0,18 \mu\text{F}$
- c. $C = 18 \mu\text{F}$
- d. $C = 5,45 \mu\text{F}$

Réponses

1. **a et b.** le champ électrique est nul en tout point situé à l'intérieur d'un conducteur en équilibre. La réponse a convient donc également.
2. **a.** Voir fiche 1. Le potentiel est constant et c'est une conséquence de la nullité du champ.
3. **c.** Il n'y a pas de charge présente à l'intérieur du volume. Attention, rien ne permet de dire que la densité surfacique est constante.
4. **d.** Voir fiche 2.
5. **c.** La capacité est une caractéristique intrinsèque d'un conducteur.
6. **a et c.** Voir fiche 3.
7. **a.** Dans une association en parallèle, les capacités s'ajoutent.
8. **d.** On a $\frac{1}{C} = \frac{1}{10 \mu F} + \frac{1}{20 \mu F} + \frac{1}{30 \mu F}$.

Entraînement

Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
1. L'équilibre électrostatique d'un conducteur correspond à un état dans lequel les charges sont immobiles.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Lorsqu'un conducteur en équilibre possède une cavité, des charges migrent autour de la cavité.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Le théorème de Coulomb détermine le champ électrique à la surface d'un conducteur.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Lorsqu'il ne possède aucune charge, la capacité d'un conducteur est nulle.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. La capacité d'un conducteur s'exprime en farads.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Si on double la charge portée par un conducteur en équilibre, on divise par deux son potentiel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Deux conducteurs sont en influence totale si toutes les lignes de champs issues de l'un se dirigent vers la surface de l'autre.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. En plaçant deux condensateurs en série, l'un de capacité $C_1 = 100 \mu\text{F}$, l'autre de capacité $C_2 = 20 \mu\text{F}$, on forme un condensateur de capacité équivalente $C_{eq} = 16,67 \mu\text{F}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Un conducteur de capacité $C = 2 \text{ mF}$ portant une charge de $6 \times 10^{-3} \text{ C}$ se trouve à un potentiel de 3 V.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Un condensateur de capacité $C = 2 \text{ mF}$ présentant une différence de potentiel de 10 V porte une charge totale de $2 \times 10^{-2} \text{ C}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Réponses

- 1. Vrai.** Par définition.
- 2. Faux.** Si le conducteur est en équilibre électrostatique, il n'y a aucune charge sur les parois internes du conducteur.
- 3. Faux.** Il détermine le champ au voisinage de sa surface mais pas à son contact. Voir figure 4.2.
- 4. Faux.** La capacité est une caractéristique intrinsèque d'un conducteur, qu'il soit chargé ou pas.
- 5. Vrai.**
- 6. Faux.** On double son potentiel : $C = \frac{Q}{V} = \frac{2Q}{2V}$.
- 7. Vrai.** C'est la définition de l'influence totale.
- 8. Vrai.** $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$
- 9. Vrai.** $V = \frac{Q}{C} = \frac{6 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} = 3 \text{ V}$
- 10. Faux.** Le condensateur porte effectivement une charge de $2 \times 10^{-2} \text{ C}$ sur une de ses armatures et une charge opposée, soit $-2 \times 10^{-2} \text{ C}$ sur l'autre armature. La charge totale est donc nulle.

Entraînement

Exercices

1. Calculer la capacité d'une sphère conductrice métallique de rayon R placée isolément dans le vide. Application numérique : $R = 10 \text{ cm}$.
2. Un fil conducteur cylindrique de longueur $2l$ et de rayon a porte une distribution linéique de charges uniforme λ . Calculer le potentiel V_0 du fil.
Application numérique : $l = 10 \text{ cm}$, $a = 1 \text{ mm}$, $\lambda = 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$.
3. Deux plaques métalliques de surfaces égales S dont les dimensions seront considérées très grandes, sont placées parallèlement dans le vide à une distance e l'une de l'autre. Calculer la capacité du condensateur constitué par cet ensemble de conducteurs. On supposera que les deux conducteurs sont en état d'influence totale.
4. On considère un condensateur formé d'une coque sphérique A placée autour d'une sphère B plus petite (figure 4.5). Calculer la capacité C de ce condensateur.

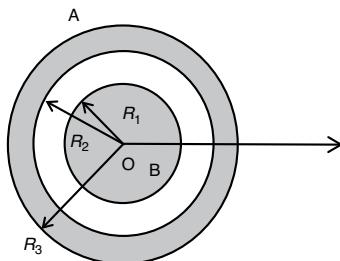


Figure 4.5

5. Un condensateur cylindrique dont la longueur sera supposée très grande est formé de deux armatures cylindriques de même axe de révolution (figure 4.6). Calculer la capacité C de ce condensateur.

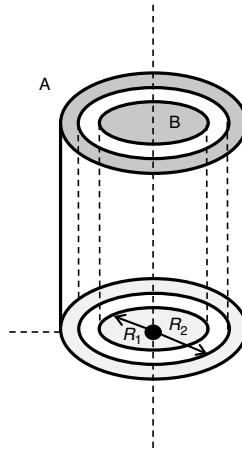


Figure 4.6

6. Deux conducteurs cylindriques de faible rayon r , de très grande longueur l , sont placés parallèlement dans l'espace et séparés d'une distance $2a$. Le premier conducteur, A, est chargé avec une densité linéique constante λ . Le second, noté B, est chargé avec la densité constante $-\lambda$.

On considère un point M quelconque de l'espace appartenant à un plan Oxy orthogonal aux deux conducteurs, distant des deux conducteurs respectivement de r_1 et de r_2 (figure 4.7).

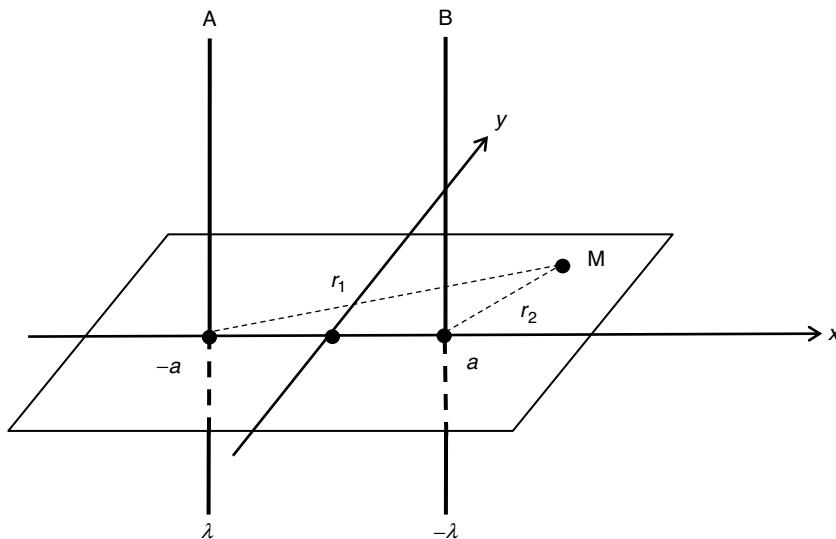


Figure 4.7

Calculer le potentiel au point M. Calculer en particulier les potentiels des deux conducteurs. On formulera l'hypothèse que les deux conducteurs forment un condensateur. Déterminer sa capacité. Discuter de la vraisemblance de cette hypothèse.

7. Un conducteur en équilibre électrostatique (figure 4.8) porte une charge totale Q . Soit A un point de sa surface et $d\bar{S}$ l'élément de surface situé autour de ce point A. On supposera que cet élément de surface est suffisamment petit pour pouvoir considérer que la densité surfacique de charges σ y est constante. Soit M un point extérieur au conducteur situé au voisinage immédiat du point A et $\bar{E}(M)$ le champ électrique créé en M par l'ensemble des charges présentes sur le conducteur.

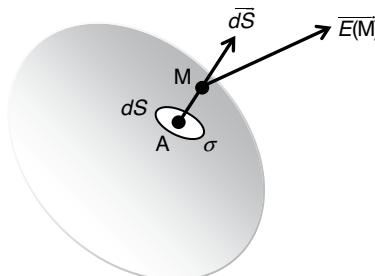


Figure 4.8

Calculer le champ électrique $\bar{E}_1(M)$ créé en M par les charges situées sur la surface élémentaire $d\bar{S}$ puis le champ électrique $\bar{E}_2(M)$ créé en ce même point par l'ensemble des autres charges présentes à la surface du conducteur.

En déduire l'expression de la force électrostatique \overline{dF} exercée par l'ensemble des autres charges sur les charges de l'élément $d\bar{S}$. Calculer la quantité $p = \frac{dF}{dS}$ appelée pression électrostatique s'exerçant sur la surface du conducteur au point A.

- 8.** Deux hémisphères conducteurs A et B pourvus de la même charge Q sont placés en contact l'un de l'autre (figure 4.9). Calculer le potentiel V du conducteur formé des deux hémisphères en contact. Calculer l'expression de la densité surfacique de charges σ en tout point de la surface du conducteur.

Calculer la force électrostatique de répulsion exercée par un des deux hémisphères sur le second, tout d'abord en fonction de Q puis en fonction de V .

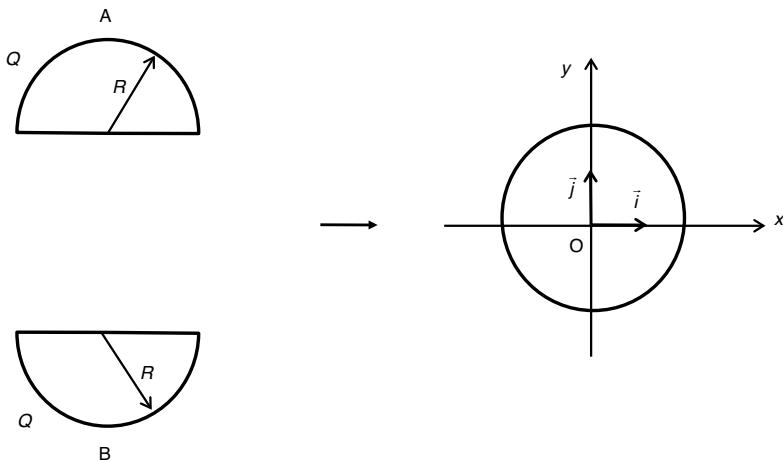


Figure 4.9

- 9.** Déterminer la force électrostatique d'attraction qui s'exerce entre les deux armatures d'un condensateur plan de capacité C dont les armatures de surface S sont séparées d'un entrefer e et présentant une différence de potentiels V .
- 10.** On considère un condensateur plan dont les armatures ne sont pas parfaitement parallèles (figure 4.10), mais forment entre elles un angle α . Chacune de ces armatures est rectangulaire de longueur b et de largeur a . La plus petite distance entre les deux plaques est notée e_0 . Calculer la capacité de ce condensateur et l'exprimer en fonction de C_0 , capacité du condensateur plan de mêmes dimensions mais d'entrefer constant e_0 . L'angle α sera supposé petit.

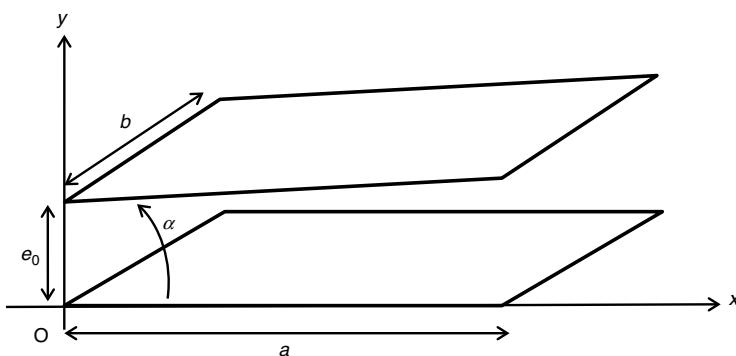


Figure 4.10

- 11.** Deux sphères identiques 1 et 2 de rayon R sont chargées indépendamment avec les charges respectives Q_1 et Q_2 . On les approche alors l'une de l'autre de manière à ce qu'elles soient séparées d'une distance a (figure 4.11). On supposera que $R \ll a$.

Déterminer les 4 coefficients de la matrice $[C]$ définie par :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = [C] \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

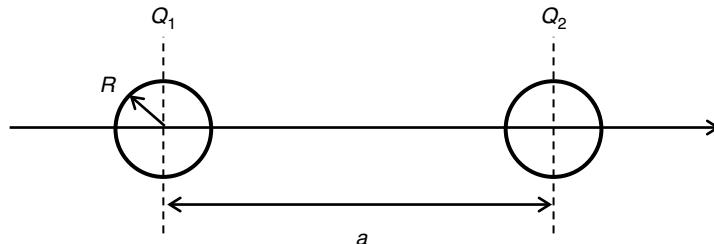


Figure 4.11

- 12.** Trois sphères identiques de rayon R sont chargées indépendamment avec les charges Q_1 , Q_2 et Q_3 . On les place alors aux sommets d'un triangle équilatéral de côté a (figure 4.12). On supposera que $R \ll a$. Déterminer les coefficients de la matrice $[C]$ définie par :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = [C] \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

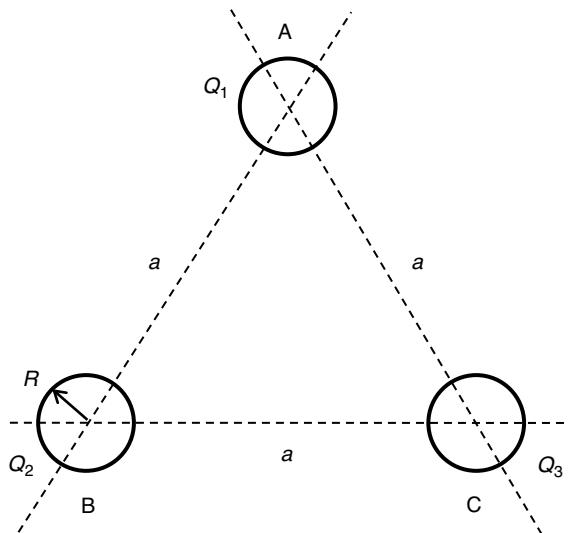


Figure 4.12

On exploitera immédiatement les propriétés de symétrie du système afin de montrer que certains coefficients sont égaux et on exploitera les résultats de l'exercice précédent de manière à éviter tout calcul inutile.

Réponses

1. Tout d'abord, il est fondamental de comprendre que la capacité d'un conducteur isolé en équilibre ne dépend que du conducteur. Il s'agit bien d'une caractéristique intrinsèque de l'objet. Toutefois, pour calculer cette capacité, il est nécessaire de supposer qu'il est chargé et qu'il se trouve à un certain potentiel. C'est à partir de ces deux grandeurs qu'on parviendra à déterminer C mais cette capacité ne doit en aucun cas dépendre de cette charge ou de ce potentiel.

Supposons que la sphère est chargée avec une charge Q et qu'elle se trouve en équilibre électrostatique. Cette charge est répartie obligatoirement sur la surface de la sphère. Cette distribution surfacique est uniforme et on a :

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$4\pi R^2$ étant la surface de la sphère.

Le potentiel V étant constant à l'intérieur de la sphère, il suffit de le calculer en un point particulier de cette sphère où son calcul sera simple. Nous avons montré dans l'exercice 8 du chapitre 3 que le potentiel à l'intérieur d'une sphère pourvue d'une charge surfacique de densité σ avait pour expression :

$$V = \frac{R}{\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Par définition, $C = \frac{Q}{V}$.

D'où :

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Remarque : La capacité d'une sphère conductrice en équilibre et isolée, ne dépend que du rayon de la sphère. Il ne dépend en aucun cas du matériau conducteur utilisé.

Application numérique :

$$C = 4 \times \pi \times 8.854 \times 10^{-12} \times 0,03 = 3,34 \times 10^{-12} \text{ F}$$

Remarque : le farad est une unité très grande. De ce fait, les valeurs des capacités sont toujours relativement faibles et on préfère utiliser les sous-multiples de cette unité : le microfarad ($1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$), le nanofarad ($1 \text{nF} = 10^{-9} \text{ F}$) et le picofarad ($1 \text{pF} = 10^{-12} \text{ F}$), par exemple. On remarquera également la cohérence des unités : ϵ_0 s'exprime en farads par mètre et R , naturellement, en mètres.

2. Nous trouverons facilement le potentiel créé en un point quelconque situé à l'extérieur du conducteur en calculant le potentiel créé en un point M situé à une distance x du fil sur un axe Ox orthogonal au fil et passant par son milieu (figure 4.13) et en faisant un passage à la limite dans cette expression pour faire tendre M vers un point appartenant au fil.

Considérons un élément du fil de longueur dy situé sur l'axe Oy à une ordonnée y . Cet élément étant situé à une distance r de M, il y crée un potentiel dV tel que :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Intégrons sur la longueur totale du fil, soit de $-l$ à l :

$$V(x) = \int_{-l}^l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

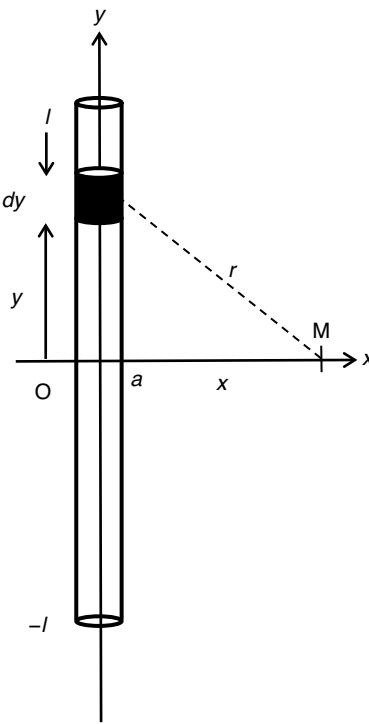


Figure 4.13

D'où, après intégration :

$$V(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln|y + \sqrt{x^2 + y^2}| \right]_{-l}^l$$

$$V(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln|l + \sqrt{x^2 + l^2}| - \ln|-l + \sqrt{x^2 + l^2}| \right]$$

$$V(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{l + \sqrt{x^2 + l^2}}{-l + \sqrt{x^2 + l^2}} \right| = V(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{l + \sqrt{x^2 + l^2}}{-l + \sqrt{x^2 + l^2}} \right)$$

Les valeurs absolues peuvent en effet être enlevées, chaque terme étant positif.

Multiplions numérateur et dénominateur de la fraction par $l + \sqrt{x^2 + l^2}$

$$V(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(l + \sqrt{x^2 + l^2})(l + \sqrt{x^2 + l^2})}{(-l + \sqrt{x^2 + l^2})(l + \sqrt{x^2 + l^2})} \right]$$

$$V(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(l + \sqrt{x^2 + l^2})^2}{x^2} \right] = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{l + \sqrt{x^2 + l^2}}{x} \right]$$

Pour calculer le potentiel du conducteur, il suffit de faire tendre le point M vers celui-ci, autrement dit de considérer que :

$$V_0 = \lim_{x \rightarrow a} V(x)$$

Soit :

$$V_0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(I + \sqrt{x^2 + I^2})}{x} \right] = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(I + \sqrt{a^2 + I^2})}{a} \right]$$

Attention : ne pas tomber dans le piège de calculer la limite de $V(x)$ quand x tend vers 0. L'expression de $V(x)$ n'est valable qu'à l'extérieur du fil puisque le potentiel est constant à l'intérieur. L'expression trouvée reste valable à la surface du conducteur, pour des raisons de continuité, comme nous l'avons vu à maintes reprises. C'est pourquoi nous avons choisi de calculer le potentiel en $x = a$.

Si on considère, comme cela est suggéré dans l'énoncé, que $a \ll I$, on peut proposer une simplification de cette expression :

$$V_0 = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(I + \sqrt{I^2})}{a} \right] = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{2I}{a}$$

Remarque : cette simplification n'est pas absolument nécessaire mais elle permet de proposer une écriture plus compacte du potentiel.

Application numérique :

$$V_0 = \frac{2 \times 10^{-8}}{4\pi \times 8,854 \times 10^{-12}} \ln \frac{2 \times 0,1}{10^{-3}}$$

Soit :

$$V_0 = 952 \text{ V}$$

Ce résultat montre qu'une distribution de charges relativement faible peut créer un potentiel électrostatique très important.

3. Supposons que les deux conducteurs soient chargés. Etant en état d'influence totale, les deux armatures portent respectivement une charge Q et $-Q$. Notons σ et $-\sigma$ les densités surfaciques correspondantes (figure 4.14).

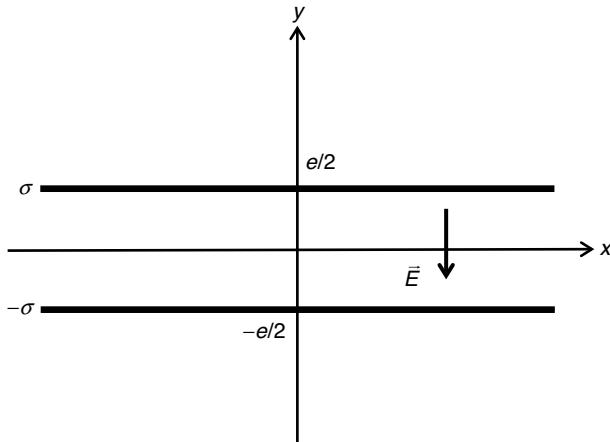


Figure 4.14

L'exercice 12 du chapitre 3 nous a permis de démontrer que le champ est constant dans l'espace situé entre les deux armatures (on dit aussi l'entrefer des deux armatures), qu'il

est orienté de la plaque chargée positivement vers la plaque chargée négativement et qu'il a pour expression :

$$E = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Le signe moins est introduit pour tenir compte du fait que le champ est orienté dans le sens des y décroissants.

On peut aussi écrire :

$$\bar{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \bar{j}$$

\bar{j} étant le vecteur unitaire de l'axe Oy .

Comme $\bar{E} = -\overline{\text{grad}} V$, on a $E(y) = -\frac{\partial V}{\partial y}$

D'où :

$$V(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} x + V_0$$

On en déduit alors l'expression de la différence de potentiels entre les deux plaques A et B :

$$V_A - V_B = V\left(\frac{e}{2}\right) - V\left(-\frac{e}{2}\right) = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} \frac{e}{2} + \frac{\sigma e}{\epsilon_0} \frac{e}{2} = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$$

Par définition :

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = Q \frac{\epsilon_0}{\sigma e}$$

Remplaçons Q par son expression en fonction de σ :

$$Q = \sigma S \Rightarrow C = \sigma S \frac{\epsilon_0}{\sigma e}$$

Finalement :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Nous obtenons ainsi l'expression très connue de la valeur de la capacité d'un condensateur plan. Notons que si l'entrefer est constitué d'un milieu diélectrique de permittivité relative ϵ_r , on a :

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e}$$

4. Supposons que les deux conducteurs soient chargés. Ils sont évidemment en état d'influence totale puisque la sphère B est entièrement contenue dans la coque sphérique A.

Considérons la coque A pourvue d'une charge Q positive. Cette charge se trouve répartie sur la surface interne de la coque et la sphère B porte sur sa surface la charge $-Q$. Compte tenu de la symétrie du dispositif, ces charges sont uniformément réparties.

Calculons le champ électrique en un point M de l'axe Ox situé à l'abscisse x entre les deux armatures. Ce champ est radial, donc porté par l'axe Ox et ce, toujours à cause de la symétrie du système. Appliquons le théorème de Gauss en considérant une surface de Gauss sphérique fermée passant par M (figure 4.15).

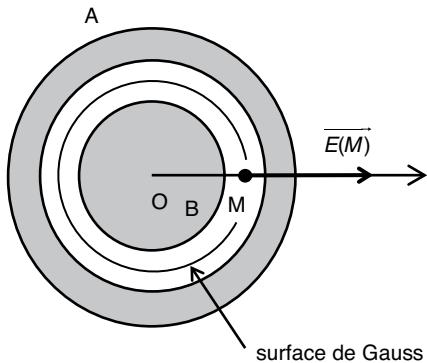


Figure 4.15

Cette surface de Gauss contient la charge $-Q$. Le théorème de Gauss nous permet de considérer que le flux du champ électrostatique la traversant est tel que :

$$\phi = 4\pi x^2 E(M) = -\frac{Q}{\epsilon_0}$$

On en déduit alors immédiatement l'expression du champ électrique au point M :

$$E(M) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

Le signe moins signifie que le vecteur champ est orienté effectivement vers le centre du dispositif.

Calculons à présent le potentiel en ce point :

L'expression $\bar{E} = -\nabla V$ se résume à : $E(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$ puisque le champ est radial.

D'où :

$$V(x) = - \int E(x) dx = - \int \left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \right) dx$$

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x} + V_0$$

Utilisons cette expression pour déterminer le potentiel des deux conducteurs. Le potentiel de la coque sphérique A correspond à :

$$V_A = V(R_2) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + V_0$$

De même :

$$V_B = V(R_1) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + V_0$$

On a donc :

$$V_A - V_B = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

Soit :

$$V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

Comme $C = \frac{Q}{V_A - V_B}$, on tire :

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Cet exercice, tout comme le précédent, montre que la méthode à utiliser pour déterminer la capacité d'un condensateur de forme quelconque est toujours la même :

- Calcul du champ électrique entre les deux armatures après avoir supposé que ces armatures sont chargées avec des charges opposées (influence totale).
 - Calcul du potentiel en tout point de l'entrefer.
 - Calcul de la différence de potentiels entre les deux armatures.
5. Supposons que les deux conducteurs soient chargés. Ils sont évidemment en état d'influence totale. Appelons $+Q$ la charge portée par le cylindre interne B, Q étant répartie uniformément à sa surface. La surface interne de l'armature A porte, en conséquence, la charge $-Q$ répartie uniformément sur sa surface interne. Soit un point M situé dans l'entrefer de ce condensateur à une distance r de l'axe (figure 4.16). Compte tenu de la symétrie du système, le champ électrique est radial. Considérons une surface de Gauss cylindrique passant par M. Le champ étant radial, le flux traversant cette surface de Gauss correspond au flux traversant sa surface latérale :

$$\phi = 2\pi rhE(r)$$

Appliquons le théorème de Gauss de manière à déterminer l'expression du champ électrique en M.

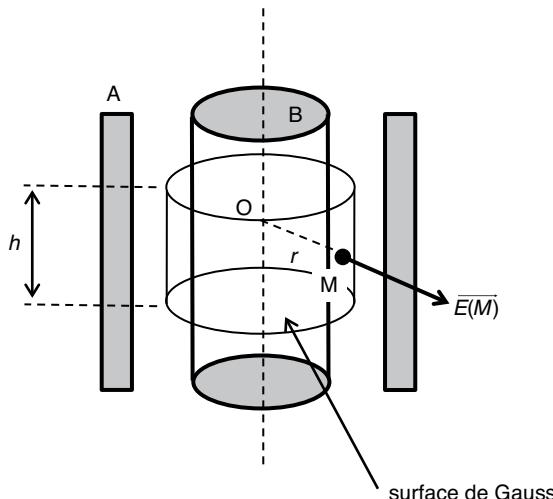


Figure 4.16

On obtient :

$$\phi = 2\pi rhE(r) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

q étant la charge portée par le cylindre interne B, sur une hauteur h correspondant à la hauteur du cylindre fermé constituant la surface de Gauss.

On en déduit :

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 hr}$$

Compte tenu de la symétrie radiale du condensateur, on a :

$$E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Soit :

$$V(r) = -\int E(r) dr = -\int \frac{q}{2\pi\epsilon_0 hr} dr$$

$$V(r) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln r + V_0$$

La différence de potentiels entre les armatures B et A est donc :

$$V_B - V_A = V(R_1) - V(R_2)$$

Attention : bien veiller aux notations. Dans un calcul de capacité, toujours exprimer la différence entre le potentiel le plus élevé et le plus faible. Dans notre cas, le cylindre B est supposé chargé positivement. Cela est la raison pour laquelle nous exprimons ici $V_B - V_A$.

On a donc :

$$V_B - V_A = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln R_1 + V_0 - \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln R_2 - V_0$$

Soit :

$$V_B - V_A = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

La capacité s'obtient alors sans peine :

$$C = \frac{q}{V_B - V_A} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

6. Le potentiel $V(M)$ au point M résulte de la superposition du potentiel créé par le conducteur A, soit $V_1(M)$ et de celui créé par le conducteur B, soit $V_2(M)$.

On a donc :

$$V(M) = V_1(M) + V_2(M)$$

Nous connaissons déjà l'expression du potentiel créé à une distance r par un conducteur cylindrique portant une densité linéique de charge λ (exercice 5 du chapitre 3) :

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + V_0$$

Dans notre cas, on a :

$$V_1(M) = V_1(r_1) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 + V_0$$

De même, le potentiel créé en M par la distribution B a pour expression :

$$V_2(M) = V_2(r_2) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 + V'_0$$

On obtient donc, en appliquant le principe de superposition :

$$V(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 + V_0 + V'_0$$

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} + V_0 + V'_0$$

On remarquera que pour $r_2 = r_1$, c'est-à-dire au point O, le potentiel est obligatoirement nul puisque ce point est à équidistance de deux charges opposées.

Donc :

$$V(O) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{a} + V_0 + V'_0 = 0$$

Soit :

$$V_0 + V'_0 = 0$$

Finalement :

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Appelons V_A et V_B les potentiels respectifs des deux conducteurs A et B. On obtient ces valeurs en appliquant l'expression de $V(M)$ en deux points situés à la surface de ces deux conducteurs (figure 4.17).

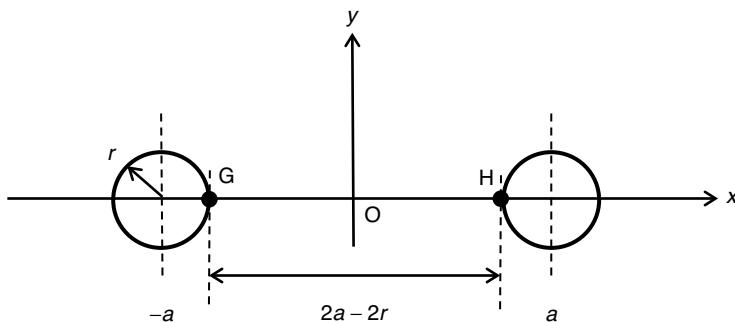


Figure 4.17

Soit G le point appartenant à la surface du conducteur A dont les coordonnées dans le plan Oxy sont $(-a + r, 0)$. Ce point G est séparé des axes des deux conducteurs des distances :

$$\begin{cases} r_1 = r \\ r_2 = 2a - r \end{cases}$$

On a donc :

$$V_A = V(G) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2a - r}{r}$$

De même, soit H le point situé à la surface du conducteur B dont les coordonnées dans le plan Oxy sont $(a - r, 0)$. Ce point H est séparé des axes des deux conducteurs des distances :

$$\begin{cases} r_1 = 2a - r \\ r_2 = r \end{cases}$$

On a donc :

$$V_B = V(H) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{2a - r}$$

La différence de potentiels entre les deux conducteurs est donc :

$$V_A - V_B = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2a - r}{r} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{2a - r}$$

En considérant r comme petit, on peut écrire :

$$V_A - V_B = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2a}{r} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{2a} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{2a}{r} - \ln \frac{r}{2a} \right)$$

$$V_A - V_B = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{2a}{r}$$

Considérons un élément de longueur l du condensateur formé de l'ensemble de ces deux conducteurs. Cet élément possède une charge $q = \lambda l$ en ce qui concerne le conducteur A et une charge $-q = -\lambda l$ pour le conducteur B.

La capacité C de cet élément est égale à :

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{2a}{r}} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{2a}{r}}$$

La capacité du condensateur par unité de longueur, appelée capacité linéique de l'ensemble des deux conducteurs a donc pour expression :

$$C_i = \frac{C}{l} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2a}{r}}$$

Il est clair que les deux conducteurs ne sont pas vraiment en état d'influence totale puisque des lignes de champ issues de l'un et l'autre sont sans doute dirigées vers l'infini. Toutefois, comme les charges des deux distributions sont opposées, il est fréquent que l'on mette en évidence l'influence partielle de deux conducteurs parallèles par cette capacité linéique. Elle intervient notamment dans les lignes de transport d'électricité et traduit le phénomène capacitif parasite bien connu des électriciens.

7. La charge contenue à la surface de l'élément dS est égale à :

$$dq = \sigma(A)dS$$

Nous notons $\sigma(A)$ la densité surfacique de charges autour du point A afin de nous souvenir que cette densité n'est pas obligatoirement constante sur l'ensemble du conducteur mais dépend sans doute du point considéré.

Si le point M se trouve très proche du point A, l'élément de surface dS est assimilable à un plan de grande dimension uniformément chargé. Nous avons vu à l'exercice 8 du chapitre 2 que le champ au point M est alors orthogonal au plan et à pour expression :

$$E_1(M) = \frac{\sigma(A)}{2\epsilon_0}$$

Soit encore, en définissant par \bar{u} le vecteur unitaire normal à la surface dS :

$$\overrightarrow{E_1(M)} = \frac{\sigma(A)}{2\epsilon_0} \bar{u}$$

Le champ total créé en M par l'ensemble des charges réparties sur le conducteur vérifie le principe de superposition : nous pouvons donc considérer qu'il est la somme du champ $\overline{E_1(M)}$ créé par l'élément dS seul et du champ $\overline{E_2(M)}$ créé par l'ensemble des autres charges :

$$\overline{E(M)} = \overline{E_1(M)} + \overline{E_2(M)}$$

D'après le théorème de Coulomb :

$$\overline{E(M)} = \frac{\sigma(A)}{\epsilon_0} \bar{u}$$

Donc :

$$\overline{E_2(M)} = \frac{\sigma(A)}{2\epsilon_0} \bar{u}$$

qui constitue l'expression du champ créé en un point M extérieur au conducteur, voisin du point A, par l'ensemble des charges réparties à la surface du conducteur, exceptée la charge située autour du point A.

Puisque ce champ règne autour du point A, l'élément de surface dS est soumis à l'action de ce champ et la charge dq qu'il contient est soumise à une force électrostatique dF telle que :

$$\overline{dF} = dq \overline{E_2(M)}$$

Soit :

$$\overline{dF} = \sigma(A) dq \frac{\sigma(A)}{2\epsilon_0} \bar{u} = \frac{\sigma^2(A)}{2\epsilon_0} dS \bar{u}$$

Ou encore :

$$\overline{dF} = \frac{\sigma^2(A)}{2\epsilon_0} \overline{dS}$$

On en déduit immédiatement :

$$\frac{\overline{dF}}{\overline{dS}} = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2(A)}{2\epsilon_0}$$

Cette expression est bien homogène à une pression puisqu'il s'agit d'un rapport d'une force à une surface. Cela rappelle la pression hydrostatique exercée par un liquide sur les parois d'un récipient. De la même manière, la force électrostatique dite de pression, est toujours dirigée vers l'extérieur du conducteur.

- 8.** Une fois en contact, les deux éléments forment une sphère chargée avec une charge $2Q$. Soit C la capacité de cette sphère.

On a :

$$2Q = CV$$

Nous avons déjà démontré (exercice 1 de ce chapitre) que la capacité d'une sphère conductrice avait pour expression :

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

D'où :

$$2Q = 4\pi\epsilon_0 RV$$

D'où :

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Par ailleurs, la forme parfaitement sphérique du système (après contact entre les deux hémisphères) nous permet de conclure que la densité surfacique de charges est constante à la surface de la sphère.

Soit :

$$\sigma = \frac{2Q}{4\pi R^2} = \frac{Q}{2\pi R^2}$$

Calculons pour finir la force électrostatique exercée par un hémisphère sur le second, par exemple par l'hémisphère A sur l'hémisphère B. Considérons un élément de surface dS autour d'un point M de l'hémisphère B (figure 4.18). D'après les résultats de l'exercice précédent, cet élément de surface subit une force électrostatique \bar{dF} telle que :

$$\bar{dF} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \bar{u}$$

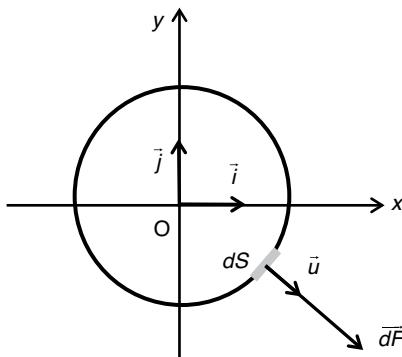


Figure 4.18

L'hémisphère B subit une force totale \bar{F} qui correspond à la somme de toutes les forces élémentaires \bar{dF} agissant à sa surface :

$$\bar{F} = \iint_{S_B} \bar{dF}$$

S_B représente la surface de l'hémisphère B.

D'où :

$$\bar{F} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \iint_{S_B} \bar{u} dS$$

En intégrant les vecteurs $\bar{u} dS = \bar{dS}$ sur toute la surface de l'hémisphère, on ne somme en réalité que les composantes des éléments \bar{dS} qui sont parallèles à \bar{j} . La figure 4.19 montre bien que la composante de \bar{dS} parallèle à \bar{j} n'est rien d'autre que la projection de dS sur le plan de contact entre les deux hémisphères.

Autrement dit :

$$\iint_{S_B} \bar{u} dS = - \iint_{S_B} dS_x \bar{j} = -S_x \bar{j}$$

S_x n'est rien d'autre que la surface du disque de contact entre les deux hémisphères (cercle de rayon R). Le signe négatif est introduit car les composantes sommées sont bien comptées négativement sur l'axe Oy.

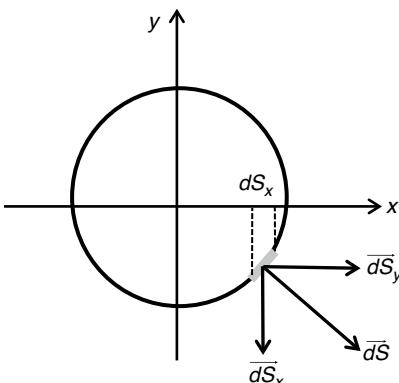


Figure 4.19

Donc :

$$\bar{F} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\pi R^2 \vec{j}$$

Remplaçons σ par son expression en fonction de Q :

$$\bar{F} = -\frac{1}{2\epsilon_0}\frac{Q^2}{4\pi^2R^4}\pi R^2 \vec{j} = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R^2} \vec{j}$$

On peut également exprimer Q en fonction de V :

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow Q = 2\pi\epsilon_0 RV$$

D'où :

$$\bar{F} = -\frac{(2\pi\epsilon_0 RV)^2}{8\pi\epsilon_0 R^2} \vec{j} = -\frac{\pi\epsilon_0 V^2}{2} \vec{j}$$

Il s'agit bien d'une force de répulsion puisque celle-ci est dirigée dans le sens des y décroissants. Cela est tout à fait logique puisque nous sommes en présence de deux distributions de charges de même signe.

9. Notons A et B les deux armatures du condensateur et supposons A chargée positivement avec une charge $+Q$ et B chargée négativement avec la charge $-Q$ (figure 4.20).

Soit \bar{E} le champ électrique créé par l'armature A. Ce champ est constant à l'intérieur du condensateur. Les charges réparties sur l'armature B en subissent l'action sous la forme d'une force électrostatique \bar{F} telles que :

$$\bar{F} = -Q\bar{E}$$

Or le champ créé par l'armature A a pour expression :

$$\bar{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{j}$$

Attention : il s'agit bien du champ créé par une seule des deux armatures et non du champ régnant à l'intérieur du condensateur qui, lui, vaut le double.

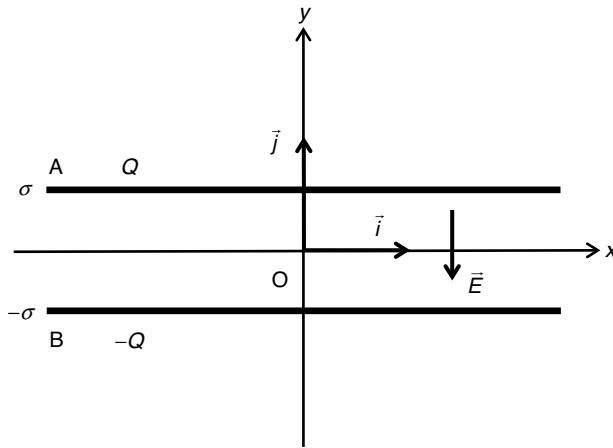


Figure 4.20

On a donc :

$$\bar{F} = Q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \bar{j} = Q \frac{Q}{2S\epsilon_0} \bar{j} = \frac{Q^2}{2S\epsilon_0} \bar{j}$$

Par ailleurs :

$$Q = CV = \frac{\epsilon_0 S}{e} V$$

Donc :

$$\bar{F} = \frac{1}{2S\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_0 S}{e} V \right)^2 \bar{j}$$

Soit :

$$\bar{F} = \frac{\epsilon_0 S V^2}{2e^2} \bar{j}$$

Il s'agit bien d'une force d'attraction puisque celle-ci est dirigée dans le sens des y croissants, donc vers l'armature A. Ceci est tout à fait logique puisque nous sommes en présence de deux distributions de charges de signes opposés.

- 10.** Considérons que le condensateur proposé dans l'énoncé est en réalité formé de l'association en parallèle d'un très grand nombre de petits condensateurs élémentaires positionnés à l'abscisse x , de largeur dx , de longueur b et dont les armatures sont espacées par un entrefer e (qui dépend de x) (figure 4.21).

Soit dC la capacité de ce condensateur élémentaire. Les condensateurs élémentaires peuvent être considérés comme associés en parallèle. La capacité totale C est donc la somme des capacités élémentaires :

$$C = \int dC$$

Considérons que le condensateur élémentaire décrit ci-dessus est plan et appliquons l'expression permettant de déterminer sa capacité :

$$dC = \frac{\epsilon_0 b dx}{e}$$

La figure 4.22 nous montre que $e = e_0 + x \tan \alpha$.

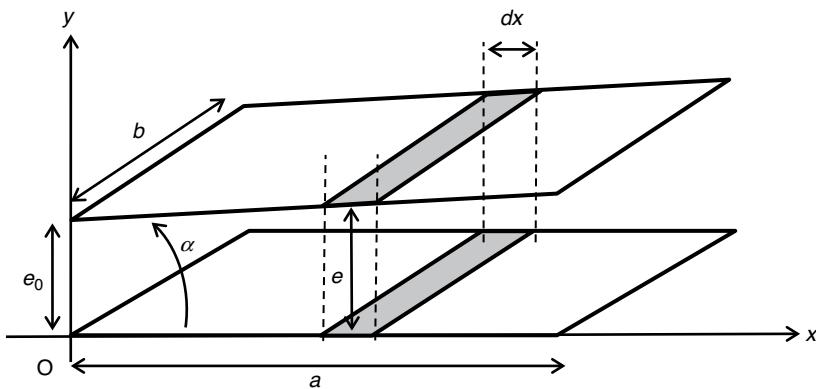


Figure 4.21

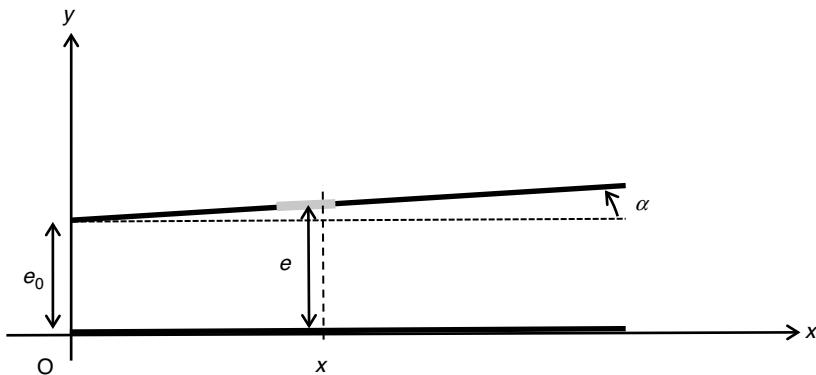


Figure 4.22

D'où :

$$dC = \frac{\epsilon_0 b dx}{e_0 + x \tan \alpha}$$

En considérant que α est petit et exprimé en radians, on peut utiliser l'approximation $\tan \alpha \approx \alpha$:

$$dC = \frac{\epsilon_0 b dx}{e_0 + x \alpha}$$

On obtient alors sans peine la capacité totale du condensateur en intégrant sur toute la largeur a du condensateur :

$$C = \int_0^a dC = \int_0^a \frac{\epsilon_0 b dx}{e_0 + x \alpha} = \epsilon_0 b \int_0^a \frac{dx}{e_0 + x \alpha}$$

Soit :

$$C = \frac{\epsilon_0 b}{\alpha} \left[\ln \frac{e_0 + x \alpha}{e_0} \right]_0^a = \frac{\epsilon_0 b}{\alpha} \ln \frac{e_0 + a \alpha}{e_0}$$

Ou encore :

$$C = \frac{\epsilon_0 b}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{a \alpha}{e_0} \right)$$

La capacité C_0 du condensateur plan parfait est :

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 b a}{\epsilon_0}$$

Pour exprimer C en fonction de C_0 , il est préférable d'effectuer un développement limité en α de l'expression de C . Cela est justifié par le fait que l'angle α est petit.

Rappelons que le développement limité du logarithme népérien à l'ordre deux est :

$$\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2}.$$

Nous choisissons le développement à l'ordre deux car à l'ordre 1, l'expression de C ne comporterait plus de terme en α . On a donc :

$$C = \frac{\epsilon_0 b}{\alpha} \left(\frac{a\alpha}{\epsilon_0} - \frac{a^2 \alpha^2}{2\epsilon_0^2} \right)$$

Soit :

$$C = \frac{\epsilon_0 ab}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{a\alpha}{2\epsilon_0} \right) = C_0 \left(1 - \frac{a\alpha}{2\epsilon_0} \right)$$

11. L'écriture matricielle peut être développée :

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

V_1 et V_2 sont les potentiels respectifs des deux sphères A et B. Calculons ces deux potentiels en fonction des charges Q_1 et Q_2 .

Le potentiel V_1 est égal à la superposition du potentiel créé par les propres charges de A et du potentiel créé par les charges de B. Écrivons cette propriété :

$$V_1 = V_{1A} + V_{1B}$$

V_{1A} correspond au potentiel de A créé par ses propres charges, indépendamment de la présence de la sphère B. Nous pouvons donc écrire, comme nous l'avons vu dans l'exercice 1 de ce chapitre :

$$V_{1A} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R}$$

V_{1B} correspond au potentiel créé en A par les charges de la sphère B. Comme $R \ll a$, nous assimilerons V_{1B} au potentiel créé à une distance a par une charge Q_2 :

$$V_{1B} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

On a donc :

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Le problème étant parfaitement symétrique, on en déduit immédiatement que le potentiel V_2 se décompose, de la même manière, en la somme d'un potentiel V_{2B} créé par le conducteur B par ses propres charges et d'un potentiel V_{2A} créé en B par les charges de la sphère A.

On obtient alors l'expression symétrique suivante :

$$V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Les équations de V_1 et de V_2 peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

Cette écriture est en réalité la forme matricielle inverse de celle que nous recherchons. En effet :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

Une matrice carrée d'ordre deux s'inverse très facilement (à condition d'être inversible, autrement dit à condition que son déterminant soit non nul) :

$$\text{Si } [A] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ alors } [A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{a^2}\right)} \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a^2 R^2}{a^2 - R^2} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

Comme $R \ll a$, on peut faire l'approximation :

$$\left(\frac{a^2 R^2}{a^2 - R^2} \right) \approx R^2$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = 4\pi\epsilon_0 R^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

Soit, en posant $x = \frac{R}{a}$:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = 4\pi\epsilon_0 R \begin{pmatrix} 1 & -\frac{R}{a} \\ -\frac{R}{a} & 1 \end{pmatrix} = 4\pi\epsilon_0 R \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

Comme prévu, les coefficients C_{ii} sont positifs tandis que les C_{ij} sont négatifs. On remarque également que C_{11} et C_{22} correspondent bien aux capacités propres des deux sphères.

On notera que le calcul de la matrice de coefficients d'influence a été fait ici en calculant les potentiels en fonction des charges, puis, en inversant la matrice obtenue. Cela n'est pas tout à fait illogique car ce sont les charges qui sont le plus souvent connues et il s'agit bien de déterminer les différents potentiels en fonction de ces charges.

- 12.** Les coefficients C_{ii} correspondent aux capacités propres de chacune des trois sphères. Ils sont tous égaux à la capacité d'une sphère de rayon R . On a donc :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Quant aux autres coefficients C_{ij} , ils représentent tous les coefficients d'influence d'une sphère chargée j sur une autre sphère i située à une distance a . Non seulement ces coefficients sont tous égaux mais on peut appliquer le résultat de l'exercice précédent qui nous donne immédiatement :

$$C_{ij} = -4\pi\epsilon_0 R \times \frac{R}{a}$$

L'expression matricielle :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = [C] \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

nous donne :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = 4\pi\epsilon_0 R \begin{pmatrix} 1 & -\frac{R}{a} & -\frac{R}{a} \\ -\frac{R}{a} & 1 & -\frac{R}{a} \\ -\frac{R}{a} & -\frac{R}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

Soit, en posant $x = \frac{R}{a}$:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = 4\pi\epsilon_0 R \begin{pmatrix} 1 & -x & -x \\ -x & 1 & -x \\ -x & -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

La solution adoptée dans cet exercice est beaucoup plus intéressante que celle de l'exercice précédent car nous y avons fait l'économie d'une inversion matricielle. Nous avons en réalité tenu compte directement de la symétrie du système et du principe de superposition en recherchant les relations entre chaque charge et chaque potentiel.

Énergie électrostatique

MOTS CLÉS

Énergie potentielle ■ énergie d'interaction ■ énergie potentielle mutuelle ■ énergie potentielle de conducteurs chargés ■ densité volumique d'énergie potentielle ■ forces de translation ■ moment résultant ■ torseur

Ce chapitre propose une interprétation énergétique des phénomènes liés à l'électrostatisique. L'introduction de la notion d'énergie potentielle permet de relier la discipline aux autres domaines de la physique dans lesquels cette notion joue un rôle fondamental, en particulier celui de la mécanique. Nous aborderons en effet le lien entre la notion d'énergie potentielle électrostatique et les actions mécaniques subies par les conducteurs chargés.

Fiche 1

Énergie d'une charge placée dans un champ électrique

Définition

Soit une charge ponctuelle q placée en un point M de l'espace où règnent un champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$ et un potentiel $V(M)$. On définit l'énergie potentielle W_q de la charge placée dans ce champ électrique par l'énergie nécessaire pour amener cette charge au point M depuis l'infini (où il ne règne aucun champ).

Cette énergie potentielle est aussi appelée énergie d'interaction de la charge avec le champ électrique. Elle correspond au travail de la force électrostatique le long d'un chemin (C) partant de l'infini et aboutissant à M .

On a donc :

$$W_q = \int_{(C)} \overrightarrow{F}_e \cdot d\overline{l}$$

Soit :

$$W_q = \int_{(C)} (-q\vec{E}) \cdot d\vec{l} = -q \int_{+\infty \rightarrow M} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Expression de l'énergie en fonction du potentiel en M

L'expression de l'énergie de la charge q est donc égale au produit de l'opposé de cette charge par la circulation du champ électrique entre $+\infty$ et M .

Donc :

$$W_q = -q[V(+\infty) - V(M)] = qV(M)$$

Fiche 2

Énergie potentielle mutuelle d'un ensemble de charges

Cas d'un ensemble fini de charges ponctuelles

On définit l'énergie potentielle mutuelle d'un ensemble de n charges placées dans l'espace par le travail fourni pour amener, depuis l'infini, l'ensemble de ces charges dans leur position, l'espace étant initialement vide (de toute charge et de tout champ électrique).

Cette énergie potentielle est notée W_p et a pour expression :

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

Les q_i sont les valeurs des charges supposées ponctuelles.

Les V_i correspondent aux potentiels créés aux points où se situent les q_i par les $(n-1)$ autres charges.

Cette énergie s'appelle également énergie de constitution d'une famille de charges. Elle peut être positive ou négative et s'exprime en joules (J).

Remarque

Ne pas confondre l'énergie mutuelle d'un ensemble de charges avec l'énergie potentielle de ces mêmes charges placées dans un champ électrique. L'expression de W_p correspond à l'énergie nécessaire pour amener les n charges dans leur position finale dans un espace initialement vide de tout champ électrique. Si $n = 1$, notamment, cette énergie potentielle est nulle puisqu'aucune autre charge ne crée un potentiel à l'endroit où elle se trouve.

Cas d'une distribution de charges

On considère une distribution de charges (linéique, surfacique ou volumique) placée dans l'espace initialement vide de toute autre charge et de tout champ électrique.

Pour une distribution linéique, l'énergie potentielle de la distribution de charges est définie par l'intégrale des énergies potentielles de chaque élément λdl soumis au potentiel V créé autour de lui par l'ensemble de la distribution.

On a donc :

$$W_p = \frac{1}{2} \int_L V \lambda dl$$

Attention

En général, V varie lorsque l'on intègre puisqu'il s'agit du potentiel au point où l'on considère l'élément de longueur dl .

Pour une distribution surfacique de densité σ ou une distribution volumique de densité ρ , le principe est exactement le même que pour la distribution linéique.

On a donc, pour une distribution surfacique :

$$W_p = \frac{1}{2} \iint_S V \sigma dS$$

Et pour une distribution volumique :

$$W_p = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} V \rho d\omega$$

Remarque

Contrairement à notre habitude, nous ne notons pas le volume avec la lettre V , réservant cette variable au potentiel.

Fiche 3

Énergie potentielle de conducteurs chargés

Soit un conducteur isolé en équilibre électrostatique chargé avec une charge Q . Soit V le potentiel de ce conducteur et C sa capacité.

L'énergie potentielle emmagasinée dans le conducteur a pour expression :

$$W_p = \frac{1}{2} V Q = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Dans le cas d'un condensateur, c'est-à-dire pour un ensemble formé de deux conducteurs en influence totale, l'énergie potentielle emmagasinée possède la même expression :

$$W_p = \frac{1}{2} Q(V_A - V_B) = \frac{1}{2} C(V_A - V_B)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Q est la charge positive présente sur l'armature A du condensateur. Par voie de conséquence, une charge $-Q$ est donc obligatoirement présente sur l'armature B.

V_A et V_B représentent les potentiels respectifs des armatures chargées positivement et négativement.

Dans un condensateur, l'énergie potentielle est localisée dans la région de l'espace où règne le champ électrique. Pour un conducteur isolé, elle est localisée dans l'espace entourant le conducteur (en théorie, de son voisinage à l'infini). Soit $d\omega$ un élément de volume d'une région où une énergie potentielle est localisée. On définit la densité volumique d'énergie potentielle électrostatique par la quantité d'énergie stockée par unité de volume :

$$\nu = \frac{dW}{d\omega}$$

Soit E le module du champ électrique régnant dans cette région dans l'élément de volume $d\omega$.

On montre que :

$$\nu = \frac{dW}{d\omega} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Fiche 4

Forces électrostatiques agissant sur un conducteur isolé

Nous avons déjà mis en évidence la notion de pression électrostatique agissant à la surface d'un conducteur (exercice 7 du chapitre 4). Cette pression met en évidence des forces élémentaires $d\vec{f}$ agissant sur chaque élément de surface $d\vec{S}$ du conducteur.

En considérant l'ensemble des forces élémentaires agissant sur toute la surface extérieure du conducteur, on obtient une force de translation résultante \vec{F} et un moment résultant $\vec{\Gamma}$.

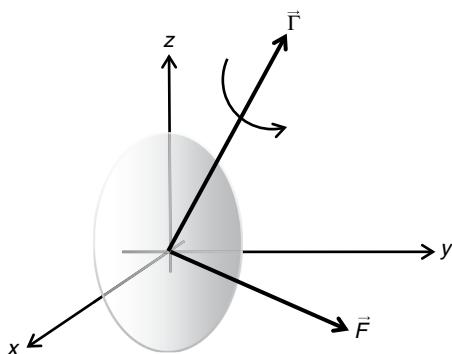


Figure 5.1

Autrement dit, tout conducteur chargé est soumis globalement à une force de translation et à un moment. On dit qu'il est soumis à un torseur.

Les composantes de la force résultante \vec{F} et du moment $\vec{\Gamma}$ peuvent être calculées à partir de l'énergie potentielle du conducteur. Soit $Oxyz$ un repère quelconque de l'espace dans lequel on souhaite calculer ces composantes.

Pour le calcul de \vec{F} , on obtient la composante F_x en imaginant un déplacement dx du conducteur. La variation d'énergie potentielle consécutive à ce déplacement permet de calculer F_x par la relation :

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x}$$

De même, les autres composantes du vecteur force \vec{F} s'obtiennent en imaginant respectivement des déplacements dy et dz :

$$F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y} \text{ et } F_z = -\frac{\partial W_p}{\partial z}$$

En utilisant un principe analogue, on calcule les composantes du moment $\vec{\Gamma}$ sur les trois axes Ox , Oy et Oz en imaginant des rotations élémentaires $d\alpha$, $d\beta$ et $d\gamma$ autour de ces trois axes et en évaluant les variations d'énergie potentielle correspondantes.

On a :

$$\Gamma_x = -\frac{\partial W_p}{\partial \alpha}$$

$$\Gamma_y = -\frac{\partial W_p}{\partial \beta}$$

$$\Gamma_z = -\frac{\partial W_p}{\partial \gamma}$$

Entraînement

QCM

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être exactes.

1. Une charge Q placée dans un champ électrique $\vec{E}(M)$ possède :

- a. Une énergie potentielle.
- b. Une énergie d'interaction.
- c. Une énergie potentielle mutuelle.
- d. Une énergie mécanique

2. L'énergie potentielle d'une charge Q isolée en un point M dans l'espace :

- a. Est nulle.
- b. Est égale à $Q \cdot V(M)$.
- c. Est égale à $\frac{1}{2}Q \cdot V(M)$.
- d. Est infinie.

3. Lorsque deux charges ponctuelles sont présentes au voisinage l'une de l'autre leur énergie potentielle mutuelle :

- a. Est nulle.
- b. Vaut $\frac{1}{2}Q_1 \cdot V_1 + \frac{1}{2}Q_2 \cdot V_2$, où V_1 est le potentiel créé par la charge Q_2 au point où se trouve Q_1 (et réciproquement).
- c. Vaut $\frac{1}{2}Q_1 \cdot V_1 + \frac{1}{2}Q_2 \cdot V_2$, où V_1 est le potentiel créé par la charge Q_1 au point où se trouve Q_2 (et réciproquement).
- d. Vaut $\frac{1}{2}Q_1 \cdot V_1 + \frac{1}{2}Q_2 \cdot V_2$, où V_1 est le potentiel créé par la charge Q_1 au point où se trouve Q_1 (et symétriquement pour Q_2).

4. L'énergie potentielle d'un électron placé en un point de l'espace où règne un potentiel de 1000 V vaut :

- a. 1600 eV
- b. $1,6 \times 10^{-16}$ J
- c. $0,8 \times 10^{-16}$ J
- d. $-1,6 \times 10^{-16}$ J

5. L'énergie de constitution d'une famille de n charges :

- a. Est toujours négative.
- b. Peut être positive ou négative.
- c. Est toujours positive.
- d. Est la somme des énergies potentielles d'interaction de chacune des charges.

6. Un condensateur de capacité $C_0 = 1000 \mu\text{F}$ possède une énergie emmagasinée égale à W_0 . Soit V_0 la différence de potentiels entre ses armatures. Quelle serait l'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité $C_1 = 2000 \mu\text{F}$ soumis à la même différence de potentiels.

- a. $W_0 / 2$.
- b. $W_0 / 4$.
- c. $2W_0$.
- d. $4W_0$.

7. Un condensateur plan de capacité $C = 100 \mu\text{F}$ est chargé de sorte qu'il présente à ses bornes une différence de potentiels de 100 V. Quelle énergie a-t-il emmagasinée ?

- a. 1 J
- b. 0,5 W
- c. 1 W
- d. 0,5 J

8. Tout conducteur chargé et isolé dans l'espace :

- a. Ne subit aucune force de translation
- b. Subit une force de translation
- c. Subit un moment
- d. Subit soit une force, soit un moment

Réponses

1. **a et b.** Voir fiche 1. L'énergie potentielle et l'énergie d'interaction sont synonymes pour une charge placée dans un champ électrique.
2. **a et b.** La réponse b correspond à l'écriture générale de l'énergie potentielle d'interaction d'une charge soumise à un champ électrique (et donc à un certain potentiel). Si la charge est isolée, elle n'est soumise à aucun potentiel (par définition du mot « isolée »). Par conséquent l'énergie potentielle est nulle. La réponse c donnerait aussi un résultat nul mais correspond à une expression qui, ici, ne convient pas.
3. **b.** Voir fiche 2.
4. **d.** L'énergie potentielle considérée a pour expression :

$$W_q = qV = -e \times 1000 = -1,6 \times 10^{-16} \text{ J}$$

Attention, donc au signe moins. Le résultat peut aussi s'écrire sous la forme $W_q = -1600 \text{ eV}$, avec $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$

5. **b.** Voir fiche 2.
6. **c.** $W_0 = \frac{1}{2}C_0V_0^2$, donc $W_1 = \frac{1}{2}C_1V_0^2 = \frac{1}{2} \times 2C_0V_0^2 = 2W_0$
7. **d.** $W_p = \frac{1}{2}C(V_A - V_B)^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times 10^{-6} \times 10^4 = 0,5 \text{ J}$. Attention, l'énergie s'exprime en joules et non en watts.
8. **b et c.** Un conducteur chargé et isolé subit à la fois une force et un moment, en règle générale.

Entraînement

Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
1. L'énergie potentielle d'une charge placée dans un champ électrique est égale à l'énergie qu'il faudrait déployer pour amener cette charge de l'infini vers sa position.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. L'énergie potentielle d'une charge q placée dans un champ électrique en un point M est égale à $\int_0^{+\infty} \overline{E(M)} \cdot d\vec{l}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. L'énergie potentielle d'une charge q placée dans un champ électrique en un point M est égale à $-qV(M)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. L'énergie mutuelle d'un ensemble de charges est égale à la somme des énergies d'interaction des différentes charges.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. L'énergie de constitution d'une famille de charges et l'énergie potentielle mutuelle sont une seule et même chose.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. L'énergie potentielle emmagasinée dans un conducteur est d'autant plus importante que sa capacité est grande.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Un torseur est un opérateur mécanique composé d'une force et d'un moment.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. La densité volumique d'énergie exprime la manière dont l'énergie est emmagasinée dans un condensateur.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. La densité volumique d'énergie varie en fonction du carré du module du champ électrique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Dans un objet conducteur en équilibre, la densité volumique d'énergie est nulle à l'intérieur.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Réponses

- 1. Vrai.** Par définition.
- 2. Faux.** $W_q = -q \int_{+\infty \rightarrow M} \vec{E} \cdot d\vec{l}$.
- 3. Faux.** Il n'y a pas de signe moins : $W_q = qV(M)$.
- 4. Faux.** Ces deux notions n'ont rien à voir. Voir fiche 2.
- 5. Vrai.** Ces deux termes sont synonymes.
- 6. Vrai.** $W_p = \frac{1}{2}CV^2$. Donc pour un même potentiel, plus la capacité est grande, plus grande sera l'énergie potentielle.
- 7. Vrai.** C'est la définition du torseur.
- 8. Vrai.** Voir fiche 3.
- 9. Vrai.** $v = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$
- 10. Vrai.** Car il n'y a aucun champ électrique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre.

Entraînement

Exercices

1. On considère un dipôle électrique constitué de deux charges $-q$ et q placées respectivement en deux points A et B de l'espace et séparées d'une distance $2a$ (figure 5.2).
Calculer l'énergie potentielle mutuelle de cet ensemble de deux charges.

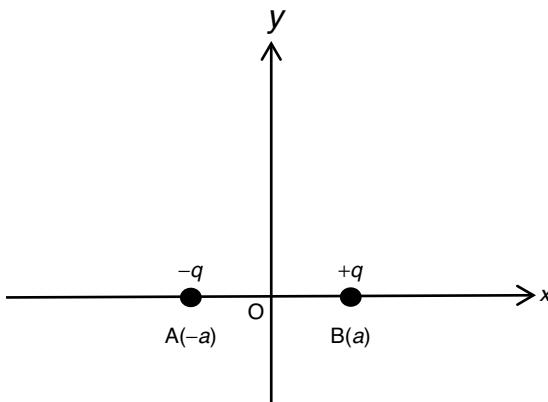


Figure 5.2

2. Calculer l'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle électrique AB constitué d'une charge $-q$ et d'une charge q séparées d'une distance $2a$ et placé dans le champ électrique créé par une charge Q située à une distance $2a$ des deux charges précédemment décrites (figure 5.3).

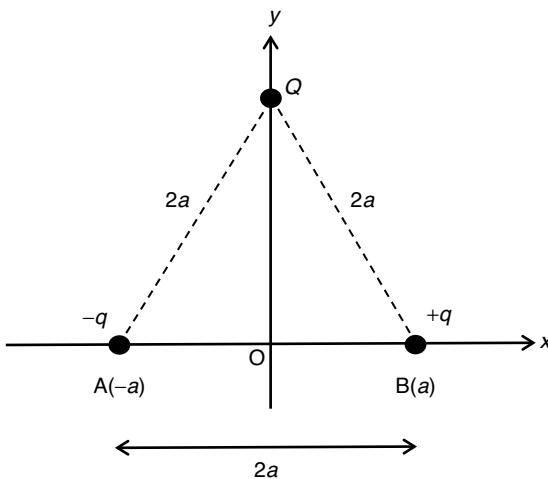


Figure 5.3

3. Calculer l'énergie emmagasinée autour d'une sphère conductrice de rayon R chargée avec une charge Q positive et isolée dans l'espace. Que vaut cette énergie si la sphère est pourvue d'une charge $-Q$?
4. On considère un condensateur plan dont l'armature A est chargée avec la charge Q positive. Les armatures ont une surface S et l'entrefer entre les deux armatures est égal à e . À partir de l'expression du champ électrique régnant entre les armatures, calculer la densité volumique d'énergie emmagasinée dans le condensateur. En déduire l'expression de l'énergie totale qui y est emmagasinée. Vérifier ce résultat en utilisant directement la valeur de la capacité C de ce condensateur.
5. Montrer que l'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle AB de moment électrique \vec{p} (charges $-q$ et q en A et B distantes de $2a$) avec un champ électrique quelconque est égale à $W_q = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.
6. Calculer la force d'attraction \vec{F} d'une armature sur l'autre dans un condensateur plan chargé (charge Q sur l'armature positive) à partir de l'expression de l'énergie emmagasinée dans le condensateur. On note x la valeur de l'entrefer et S la surface des armatures. Exprimer cette force en fonction de la différence de potentiels V aux bornes du condensateur.
7. Un dipôle électrique AB est caractérisé par une charge $-q$ en A et une charge q en B. A et B sont situés de part et d'autre du point O sur un axe Ox. $AB = 2a$. L'espace est muni d'un repère Oxyz et le dipôle est soumis à l'action d'un champ électrique \vec{E} supposé uniforme dans la région du dipôle et contenu dans le plan Oxy (figure 5.4).

a. Calculer les forces électrostatiques dues au champ \vec{E} agissant sur chacune des deux charges. Montrer que les deux forces forment un moment que l'on exprimera en fonction de \vec{E} et du moment électrique du dipôle.

b. Calculer l'expression de ce moment à partir de l'énergie potentielle d'interaction du dipôle avec le champ \vec{E} . Que remarque-t-on ? Pourquoi ?

On notera $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$ et α l'angle formé par \vec{p} et \vec{E} dans le plan Oxy.

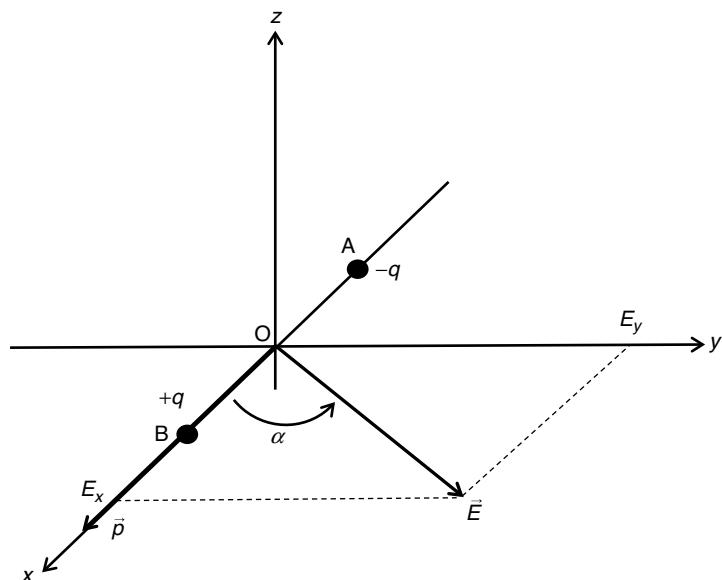


Figure 5.4

Réponses

1. L'énergie potentielle du dipôle a pour expression :

$$W_p = \frac{1}{2}(-q)V_A + \frac{1}{2}qV_B$$

V_A est le potentiel créé en A par la charge q présente en B. V_B est le potentiel créé en B par la charge q présente en A.

Le potentiel V_A est le potentiel créé par une charge q à une distance $2a$:

$$V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a}$$

De même, V_B est le potentiel créé par une charge $-q$ à une distance $2a$:

$$V_B = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a}$$

D'où :

$$W_p = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a} - \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a}$$

Ou encore :

$$W_p = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

2. D'après sa définition, l'énergie potentielle d'interaction d'une charge q placée en un point M dans un champ électrique est égale à :

$$W_q = qV(M)$$

$V(M)$ étant le potentiel en M correspondant au champ électrique dans lequel est plongée la charge q .

Appliquons ce résultat à notre ensemble de charges $-q$ et q soumises à l'action du champ (donc du potentiel) généré par la charge Q . Dans notre exercice, la charge $-q$ placée en A est soumise au potentiel créé par une charge Q distante de $2a$. Le potentiel créé par Q en A a donc pour expression :

$$V(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a}$$

L'énergie potentielle d'interaction de la charge $-q$ avec le champ créé par Q est donc :

$$W_{-q} = -q \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} = -\frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 a}$$

De la même manière, l'énergie d'interaction de la charge q placée en B, avec le champ créé par Q , a pour expression :

$$W_q = qV(B)$$

Or le potentiel créé par Q en B est donné par :

$$V(B) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a}$$

D'où :

$$W_q = q \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Le principe de superposition s'applique aux énergies d'interaction des ensembles de charges. Par conséquent, l'énergie totale d'interaction du dipôle avec le champ créé par la charge Q vaut donc :

$$W = W_{-q} + W_q = 0$$

Attention : ne pas confondre :

- l'énergie potentielle d'interaction d'un ensemble de charges avec le champ créé par une autre charge (et d'une manière générale avec un champ électrique quelconque),
- l'énergie potentielle de constitution (ou mutuelle) de cet ensemble de charges.

Cet exercice, ainsi que l'exercice précédent, mettent en évidence la différence fondamentale existant entre ces deux notions.

- 3.** L'énergie emmagasinée dans un conducteur isolé et chargé a pour expression :

$$W_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

C étant la capacité du conducteur.

Dans le cas d'une sphère de rayon R , on a : $C = 4\pi\epsilon_0 R$.

On a donc :

$$W_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Dans le cas où la sphère est chargée avec la charge $-Q$, on a évidemment :

$$W_p = \frac{1}{2} \frac{(-Q)^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

On voit ici que l'énergie électrostatique emmagasinée dans un conducteur isolé ne dépend pas du signe de la charge portée par ce conducteur.

- 4.** Nous savons déjà que le champ électrique créé par un condensateur plan n'est présent qu'entre les armatures, qu'il est uniforme dans tout l'entrefer, qu'il est dirigé dans le sens des potentiels décroissants et que son module à pour expression :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

σ représentant la densité surfacique de charges présentes sur l'armature chargée positivement.

Soit :

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

D'où :

$$E = \frac{Q}{S\epsilon_0}$$

Par ailleurs, la densité volumique d'énergie emmagasinée dans l'entrefer séparant les deux conducteurs peut être déterminée à partir de l'expression du champ électrique :

$$v = \frac{dW}{d\omega} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Comme le champ électrique est uniforme, la valeur de cette densité est donc constante dans tout l'entrefer.

On a donc :

$$\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{\varepsilon_0 S} \right)^2 = \frac{Q^2}{2 \varepsilon_0 S^2}$$

Cette densité représente la quantité d'énergie par unité de volume. On a donc :

$$\nu = \frac{W_p}{\Omega}$$

W_p étant l'énergie totale emmagasinée dans le condensateur (elle n'est emmagasinée que dans l'espace situé entre les deux armatures, précisément où règne le champ électrique). Ω représente le volume de l'entrefer où est emmagasinée l'énergie :

$$\Omega = Se$$

On en déduit donc la valeur de ν :

$$\nu = \frac{W_p}{Se} = \frac{Q^2}{2 \varepsilon_0 S^2}$$

Puis :

$$W_p = \frac{Q^2 e}{2 \varepsilon_0 S}$$

Vérifions cette expression en utilisant simplement la relation :

$$W_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \text{ avec } C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

Soit :

$$W_p = \frac{Q^2 e}{2 \varepsilon_0 S}$$

On retrouve évidemment la même expression.

5. Nous avons vu dans l'exercice 2 du chapitre 3 que le moment électrique d'un dipôle tel qu'il est défini ici avait pour expression :

$$\vec{p} = 2aq\vec{i}$$

\vec{i} étant le vecteur unitaire de l'axe portant les deux charges A et B, orienté de A vers B (de la charge $-q$ vers la charge q , voir figure 5.5).

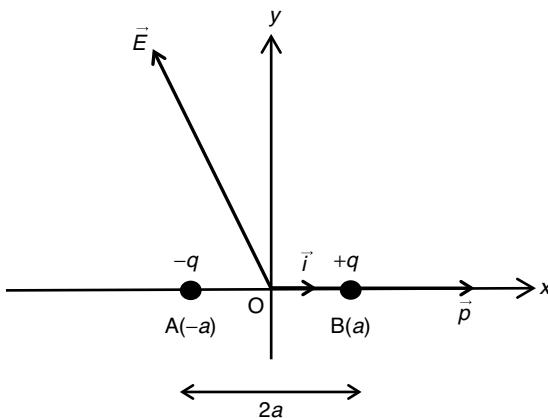


Figure 5.5

Rappelons que le dipôle électrique est défini comme un couple rigide de charges, qu'il est caractérisé par une distance $2a$ suffisamment petite pour pouvoir considérer que le champ électrique est le même en A et en B.

Calculons l'énergie d'interaction de la charge $-q$ placée en A avec le champ \vec{E} quelconque régnant au voisinage du dipôle. Par définition :

$$W_{-q} = -(q) \int_{+\infty \rightarrow A} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

De même l'énergie d'interaction de la charge q placée en B, avec le champ \vec{E} est :

$$W_q = q \int_{+\infty \rightarrow B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

L'énergie d'interaction totale du dipôle avec le champ électrique est :

$$W = q \int_{+\infty \rightarrow A} \vec{E} \cdot d\vec{l} - q \int_{+\infty \rightarrow B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Imaginons que le chemin emprunté depuis $+\infty$ pour amener ces charges dans leur position finale soit parcouru sur l'axe. L'expression précédente devient :

$$W = q \int_{+\infty}^{-a} \vec{E} \cdot i dx - q \int_{+\infty}^a \vec{E} \cdot i dx$$

Soit :

$$W = q \int_{+\infty}^{-a} \vec{E} \cdot i dx + q \int_a^{+\infty} \vec{E} \cdot i dx = q \int_a^{-a} \vec{E} \cdot i dx$$

D'où :

$$W = -2aq\vec{E} \cdot \vec{i} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

- 6.** L'énergie emmagasinée dans un condensateur plan a pour expression :

$$W_p = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 S}$$

Plaçons un axe Ox orthogonalement aux armatures et imaginons un déplacement élémentaire dx de l'une d'entre elles (figure 5.6). Soit dW_p la variation d'énergie potentielle correspondante.

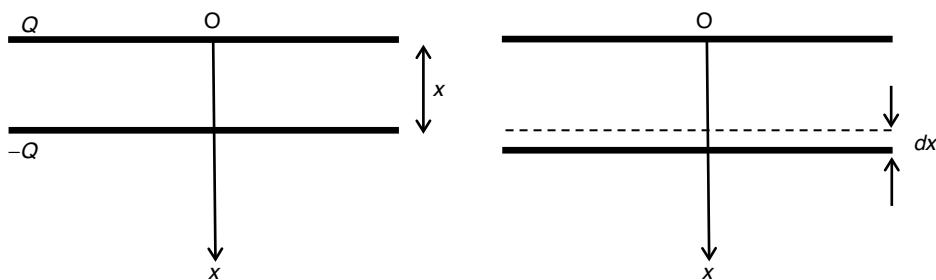


Figure 5.6

La force d'attraction agissant sur l'armature inférieure étant, compte tenu de la symétrie du système, parallèle à Ox, seule la composante F_x nous intéresse. On a :

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x} = -\frac{dW_p}{dx}$$

D'où :

$$F_x = -\frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 S} \right) = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

La force trouvée est négative, donc dirigée dans le sens des x décroissants. Elle attire bien l'armature inférieure vers l'armature supérieure.

Exprimons cette force en fonction de la différence de potentiels V aux bornes du condensateur.

On a :

$$Q = CV = \frac{\epsilon_0 S}{e} V$$

D'où :

$$|F_x| = \frac{1}{2\epsilon_0 S} \times \frac{\epsilon_0^2 S^2}{e^2} V^2$$

$$|F_x| = \frac{\epsilon_0 S V^2}{2e^2}$$

Nous avons bien trouvé le même résultat que dans l'exercice 9 du chapitre 4 en utilisant, cette fois-ci, une méthode originale qui montre, de surcroît, que le calcul des actions mécaniques sur un conducteur chargé ne pose pas vraiment de difficulté. On notera que le condensateur étant considéré comme isolé (charges constantes), nous avons utilisé les expressions qui correspondent à ce cas précis. Nous insistons sur le fait que si le conducteur ou l'ensemble de conducteurs n'est pas isolé mais relié à un potentiel fixe, ces expressions ne sont plus valables.

- 7. a.** Soit \vec{f}_{-q} et \vec{f}_q les forces subies respectivement par A et B. Ces deux forces, représentées dans le plan Oxy sur la figure 5.7, ont pour expression :

$$\vec{f}_{-q} = -q\vec{E} \text{ et } \vec{f}_q = q\vec{E}$$

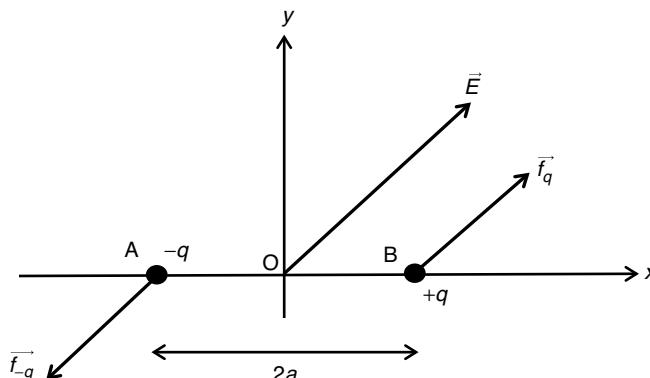


Figure 5.7

Deux forces opposées agissant sur un ensemble rigide forment bien un moment que l'on notera $\vec{\Gamma}$ et qui tend à faire tourner le dipôle autour de l'axe Oz (sens trigonométrique donc moment positif selon Oz) et dont le module est égal au double du produit du bras de levier a par la projection d'une des deux forces sur Oy (figure 5.8).

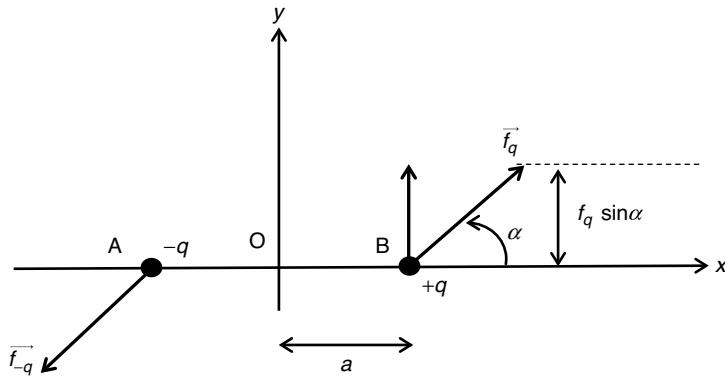


Figure 5.8

On a donc :

$$\Gamma = 2aqE \sin \alpha$$

Un moment tendant à faire tourner un objet autour d'un axe se représente sur cet axe. C'est ce que nous proposons sur la figure 5.9.

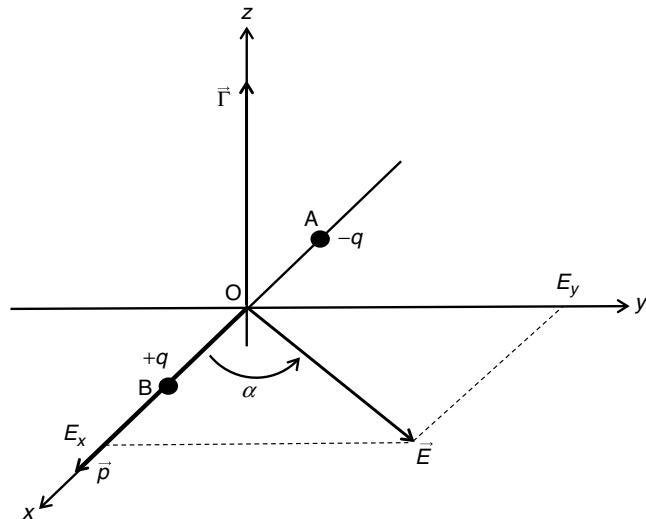


Figure 5.9

L'expression de Γ peut être transformée :

$$\Gamma = 2aqE \sin \alpha = pE \sin \alpha$$

Le vecteur $\bar{\Gamma}$ présente donc toutes les caractéristiques du produit vectoriel :

$$\bar{\Gamma} = \bar{p} \wedge \bar{E}$$

b. Vérifions ce résultat à l'aide du calcul de l'énergie potentielle. Nous savons déjà (exercice 5 du présent chapitre), que l'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle électrique de moment \bar{p} avec un champ \bar{E} a pour expression :

$$W_p = -\bar{p} \cdot \bar{E}$$

Comme le dipôle est isolé électriquement, ses charges restent constantes. Seule une rotation élémentaire du dipôle par rapport au champ électrique est susceptible de modifier l'énergie potentielle. Le moment résultant est donc porté par l'axe Oz. La composante Γ_z sera seule calculée.

Imaginons une rotation élémentaire du dipôle d'un angle $d\alpha$ autour de Oz. La composante Γ_z a pour expression :

$$\Gamma_z = -\frac{\partial W_p}{\partial \alpha}$$

D'où :

$$\Gamma_z = -\frac{\partial}{\partial \alpha}(-pE \cos \alpha) = pE \frac{d \cos \alpha}{d \alpha}$$

$$\Gamma_z = -pE \sin \alpha$$

Le résultat est... presque le même que celui trouvé à la question (a), au signe près. Ceci semble de prime abord paradoxal. En réalité, cette différence, bien que gênante, s'explique facilement : on comprend bien lors de la résolution de la question (a) que le couple qui s'exerce sur le dipôle est un couple de rappel qui va tendre à aligner le moment électrique avec le champ. Ce moment ne peut donc pas avoir pour effet une diminution de l'angle α . Or dans la deuxième partie de l'exercice, nous imaginons une rotation élémentaire d'un angle $d\alpha$ qui, implicitement, est positif. Ce déplacement qui va donc en sens contraire de ce qui est prévisible, correspond bien à un couple qui n'est pas un couple de rappel mais qui tend, au contraire, à faire tourner le dipôle dans l'autre sens. Il est donc tout à fait logique que la valeur trouvée pour ce couple, qui a tendance à éloigner le moment électrique du champ, soit négative.

6

Bases de l'électromagnétisme

Propriétés magnétiques des courants électriques

MOTS CLÉS

Électromagnétisme • champ magnétique • force de Laplace • force de Lorentz • règle du tire-bouchon • courant électrique • densité de courant • perméabilité absolue • perméabilité relative • effet Hall

Certains matériaux, notamment les matériaux dits ferromagnétiques, ont la propriété d'exercer une attraction sur d'autres corps, par exemple en fer. On dit que ces matériaux sont des aimants et qu'ils peuvent exercer une force ou interaction magnétique. Il s'agit d'une interaction à distance. Comme pour la force electrostatique et l'interaction gravitationnelle, cette interaction peut se modéliser par la présence d'un champ : ainsi, un aimant crée un champ magnétique dans l'espace qui l'environne et un objet placé dans ce champ peut interagir avec cet aimant comme une charge q interagit avec une autre charge Q lorsqu'elle se trouve dans une région où règne un champ créé par Q .

Nous allons voir dans ce chapitre que les phénomènes électriques et magnétiques sont intimement liés, à un point tel qu'ils sont en réalité deux facettes d'une seul et même caractéristique du monde physique qui nous entoure : l'électromagnétisme.

Fiche 1

Interaction magnétique et champ magnétique

Le champ magnétique qui règne dans une région de l'espace est représenté en tout point M de cette région par un vecteur champ magnétique dont la direction, le sens et l'intensité varient en général avec la position de ce point M. Dans une région où le vecteur champ est constant, on dit que le champ magnétique est uniforme. Le champ magnétique terrestre, par exemple, n'est pas uniforme puisque, quelle que soit notre position à la surface du globe, le vecteur champ est toujours dirigé vers le pôle nord magnétique. Toutefois, on peut localement le considérer comme uniforme, compte tenu des dimensions de la planète.

Outre le champ magnétique terrestre, un champ magnétique peut être créé par un aimant ou par des charges électriques en mouvement (donc des courants électriques). Nous verrons à maintes reprises qu'électricité et magnétisme sont des phénomènes imbriqués et que l'on parle souvent d'électromagnétisme.

Le champ magnétique se note en général \vec{B} et s'exprime en teslas (T).

Les corps qui subissent une action magnétique lorsqu'ils sont placés dans un champ magnétique sont les métaux ferreux, certains alliages métalliques et les charges électriques en mouvement (donc les conducteurs parcourus par des courants).

Fiche 2

Force de Laplace et force de Lorentz

La force de Laplace est la force subie par une charge électrique q en mouvement placée dans un champ magnétique.

Soit q une charge électrique située en un point M, animée d'un vecteur vitesse \vec{v} et soit \vec{B} le champ magnétique régnant au point M.

La charge q subit une force \vec{F}_B dite de Laplace telle que :

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Compte tenu des propriétés du produit vectoriel, la force magnétique est orthogonale au plan formé par le vecteur vitesse et le vecteur champ magnétique. Par ailleurs, son intensité est déterminée par l'expression :

$$F_B = qvB \sin \alpha$$

Où α représente l'angle formé par les vecteurs \vec{v} et \vec{B} .

Le sens de la force magnétique est déterminé en imaginant la progression d'un tire-bouchon qui tournerait de \vec{v} vers \vec{B} . La figure 6.1 illustre ces propriétés.

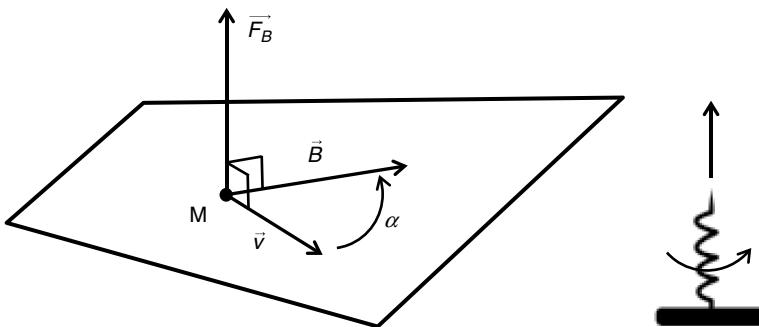


Figure 6.1

On rappelle que l'expression du produit vectoriel de deux vecteurs dans une base orthonormée, en coordonnées cartésiennes, est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy - bz \\ -cx + az \\ bx - ay \end{pmatrix}$$

Si la charge q est soumise à la fois à un champ électrique \vec{E} et à un champ magnétique \vec{B} , elle subit non seulement l'interaction magnétique (à condition d'être en mouvement), mais également une force électrostatique (qu'elle soit fixe ou en mouvement).

Dans ces conditions, la force globale subie par la charge q résulte donc à la fois de l'interaction électrostatique et de l'interaction magnétique. Elle est alors appelée force de Lorentz et a donc pour expression :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Fiche 3

Courant électrique

Un courant électrique est un mouvement global de charges mobiles dans un conducteur. Puisque des charges en mouvement sont susceptibles de subir des interactions magnétiques, il est clair qu'un conducteur parcouru par un courant sera le siège de forces magnétiques. On a l'habitude de traiter des mouvements globaux de charges, ce qui nous conduit à définir la notion de courant électrique dans un conducteur.

Soit un conducteur rectiligne de section S dans lequel des charges électriques libres sont animées d'un mouvement global rectiligne de vitesse moyenne v (figure 6.2).

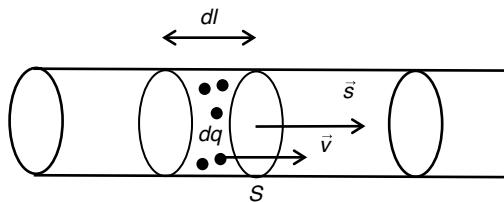


Figure 6.2

Pendant un temps dt , une charge dq contenue dans l'élément de volume Sdl va traverser la section S du conducteur. En appelant ρ la quantité de charges mobiles par unité de volume, on a :

$$dq = \rho Sdl$$

Comme les charges sont animées d'une vitesse v , on a :

$$dl = vdt$$

On définit le courant électrique i au travers de la surface S par :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Soit encore :

$$i = \frac{\rho S dl}{dt} = \rho \vec{v} \cdot \vec{S} = \vec{j} \cdot \vec{S}$$

On définit par \vec{j} le vecteur densité de courant au travers de la surface S .

Fiche 4

Champ magnétique créé par des charges en mouvement

Non seulement les charges en mouvement subissent des forces dues à la présence d'un champ magnétique, mais elles créent également dans leur environnement un champ magnétique, preuve, une fois de plus, que l'électricité et le magnétisme sont toujours liés.

Ainsi, une charge ponctuelle q placée dans le vide en un point M et animée d'un vecteur vitesse \vec{v} , crée en un point N quelconque de l'espace un champ magnétique $\overrightarrow{B(M)}$ ayant pour expression :

$$\overrightarrow{B(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Avec :

$$r = MN$$

Et \vec{u} étant défini comme le vecteur unitaire de la droite (MN) :

$$\vec{u} = \frac{\overline{MN}}{MN}$$

On a :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ H} \times \text{m}^{-1} \text{ (henrys par mètre)}$$

μ_0 est la perméabilité magnétique du vide.

On note aussi parfois :

$$\overrightarrow{B(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \wedge \overline{MN}}{MN^3}$$

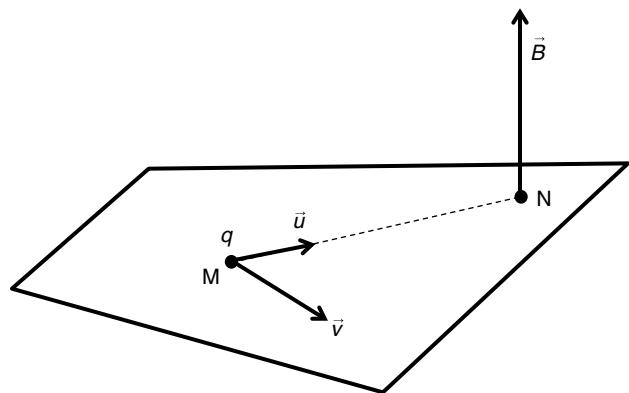


Figure 6.3

Lorsque le milieu considéré n'est pas le vide, on remplace μ_0 par $\mu = \mu_r \mu_0$ où μ_r est la perméabilité magnétique relative de ce milieu, μ étant sa perméabilité absolue. On notera que la perméabilité magnétique de l'air est très voisine de celle du vide.

Entraînement

QCM

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être exactes.

1. Lesquelles de ces phrases sont fausses :

- a. Une densité surfacique de charge répartie à la surface d'une sphère isolante crée en son voisinage un champ magnétique.
- b. Une densité surfacique de charge répartie à la surface d'une sphère conductrice crée en son voisinage un champ magnétique.
- c. Un courant circulant dans un fil conducteur crée en son voisinage un champ magnétique.
- d. Une nappe de courant circulant à la surface d'un isolant crée en son voisinage un champ magnétique.

2. Une charge immobile placée en un point M de l'espace et soumise à un champ magnétique \vec{B} :

- a. Est mise en mouvement avec une vitesse \vec{v} parallèle à \vec{B} .
- b. Reste immobile.
- c. Se déplace avec une vitesse orthogonale à \vec{B} .
- d. Se déplace dans le plan défini par les vecteurs \vec{v} et \vec{B} .

3. Dans une base orthonormée et en coordonnées cartésiennes, on donne $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v}_2 = \vec{j} + 2\vec{k}$. Que vaut le produit vectoriel $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$?

- a. $4\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$
- b. $5\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$
- c. $5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$
- d. $5\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$

4. Une densité de courant s'exprime en :

- a. Ampères par mètre carré
- b. Coulombs par mètre carré et par seconde
- c. Coulombs par seconde
- d. Coulombs par mètre carré

5. Une charge q suivant une trajectoire rectiligne sur une droite (D) avec une vitesse \vec{v} crée un champ magnétique \vec{B} :

- a. Orthogonal à la trajectoire.
- b. D'autant plus intense que l'on s'éloigne de la droite (D).
- c. Proportionnel à la charge.
- d. Proportionnel à la vitesse.

6. Un conducteur rectiligne parcouru par un courant constant :

- a. Crée un champ magnétique donc l'intensité ne dépend que de la distance avec ce conducteur.
- b. Crée un champ radial autour de lui.
- c. Crée un champ magnétique qui ne dépend pas du sens du courant.
- d. Crée un champ orthoradial autour de lui.

7. Un électron se déplaçant dans le vide à une vitesse de 200 000 km/s créé à son passage et à une distance de $1\mu\text{m}$, un champ magnétique d'intensité :

- a. 5,8 mT
- b. 5,8 μT
- c. 58 μT
- d. 0,58 μT

8. La perméabilité magnétique du vide vaut :

- a. $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$
- b. 10^{-7} H/m
- c. $4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}$
- d. $10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}$

Réponses

1. **a, b et d.** Seules des charges en mouvement peuvent créer un champ magnétique. Les réponses a et b sont donc fausses. Quant à la réponse d, il n'est pas possible qu'un courant circule dans un objet isolant.
2. **b.** Sans vitesse initiale, une charge ne subit aucune force magnétique et restera donc immobile.
3. **c.** Il suffit d'appliquer la méthode de calcul rappelée dans la fiche 2 en faisant très attention aux signes.
4. **a et b.** L'expression $i = \bar{j} \cdot \bar{S}$ montre que \bar{j} est homogène un courant divisé par une surface. Soit pour unité, des ampères par mètre carré. La réponse b peut convenir au sens où l'ampère est défini comme un coulomb par seconde.
5. **a, c et d.** Voir fiche 4. L'expression $\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\bar{v} \wedge \bar{u}}{r^2}$ montre que toutes les propositions sont vraies sauf la réponse b puisque le champ est d'autant plus faible que l'on s'éloigne des charges en mouvement.
6. **a et d.** Un courant électrique correspond à des charges électriques en mouvement. Par conséquent, l'expression $\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\bar{v} \wedge \bar{u}}{r^2}$ montre que le champ ne dépend que de r pour un courant constant. Le champ n'est pas radial, ce qui signifierait que \bar{B} et \bar{u} sont colinéaires. Or ils sont orthogonaux (produit vectoriel). Le champ est bien orthoradial. Le sens du champ dépend du sens du courant.
7. **b.** $B = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{v}{r^2} = 10^{-7} \times 1,6 \times 10^{-19} \times \frac{3 \times 10^8}{(10^{-6})^2} = 5,8 \times 10^{-6} \text{ T.}$
8. **a.** Voir fiche 4. C'est $\frac{\mu_0}{4\pi}$ qui vaut 10^{-7} H/m et l'unité de perméabilité magnétique est bien le henry par mètre.

Entraînement

Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
1. La force de Lorentz correspond à la superposition de la force de Coulomb et de la force de Laplace.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Une charge électrique en mouvement selon un axe Ox dans une région où règne un champ magnétique parallèle à Ox est freinée par ce champ.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est maximal lorsque les deux vecteurs sont orthogonaux.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. La règle du tire-bouchon permet de déterminer le sens du champ magnétique créé par une charge en mouvement.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. La force de Laplace est nulle si une charge se déplace dans la direction perpendiculaire à un champ magnétique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. La force de Lorentz reste valable pour des charges fixes dans l'espace.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Le courant électrique est défini comme la quantité de charges continues dans un élément de volume d'un conducteur.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Deux conducteurs placés au voisinage l'un de l'autre et parcourus par des courants électriques créent entre eux une interaction magnétique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. En un point quelconque de la terre, le champ magnétique naturel de la planète est toujours horizontal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Le milieu qui possède la plus faible perméabilité magnétique est le vide.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Réponses

- 1. Vrai.** La force de Coulomb, $q\vec{E}$ superposée à la force de Laplace $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ donne la force de Lorentz.
- 2. Faux.** La force qui s'exerce alors sur la charge a pour expression $q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ si les deux vecteurs \vec{v} et \vec{B} sont parallèles.
- 3. Vrai.** $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| = vB\sin\alpha$, qui est maximal pour $\sin\alpha = 1$, soit $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
- 4. Vrai.** Il permet (fiche 1) de déterminer le sens de la force de Laplace mais comme il s'agit d'une astuce permettant de déterminer le sens d'un produit vectoriel, elle fonctionne aussi pour déterminer le champ magnétique créé par une charge en mouvement. Sur la figure 6.3, on peut, à l'instar du schéma de la figure 6.1, imaginer le sens que prend le tire-bouchon en le faisant tourner de \vec{v} vers \vec{u} .
- 5. Faux.** L'expression $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est non nulle dès lors que l'angle formé par les deux vecteurs est non nul également.
- 6. Vrai.** Mais évidemment, seule la partie $q\vec{E}$ est non nulle.
- 7. Faux.** C'est la quantité de charges qui traverse une surface donnée du conducteur par unité de temps.
- 8. Vrai.** Chaque conducteur génère un champ magnétique auquel l'autre est sensible.
- 9. Faux.** Il est dirigé vers le pôle nord magnétique donc possède une composante horizontale et une composante verticale.
- 10. Vrai.** Si μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, alors pour un milieu matériel donné, la perméabilité absolue est définie par $\mu = \mu_r \mu_0$ où μ_r est la perméabilité magnétique relative qui est toujours supérieure à 1.

Entraînement

Exercices

1. On considère un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et une charge q placée au point O . Cette charge est en mouvement et possède un vecteur vitesse \vec{v} tel que :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } v_0 = 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Au point O règne un champ magnétique ayant pour expression :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } B_x = 10^{-3} \text{ T et } B_y = 2 \times 10^{-3} \text{ T}$$

Calculer l'expression puis la valeur de la force de Laplace qui s'exerce sur la charge q .
On prendra $q = 10^{-7}$ C.

2. On considère un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et une charge q placée au point O . Cette charge est en mouvement et possède un vecteur vitesse \vec{v} tel que :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression du champ magnétique créé par cette charge en tout point du plan Oxy.

3. Déterminer la valeur moyenne de la vitesse des électrons dans un conducteur cylindrique en cuivre de section $S = 3 \text{ mm}^2$ et parcouru par un courant continu $I = 1 \text{ A}$. On supposera que chaque atome de cuivre possède un électron mobile. La masse volumique du cuivre est égale à $v = 8800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, sa masse atomique est égale à $M_A = 63,6 \text{ g}$ et le nombre d'Avogadro vaut $N = 6 \times 10^{23}$.

Remarque : nous avons désigné ici, chose inhabituelle, la masse volumique par la lettre v (Nu) et ce, afin d'éviter toute ambiguïté ou confusion avec ρ qui, dans ce chapitre, désigne la quantité de charges mobiles par unité de volume.

4. On considère un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et une charge Q positive placée au point O . Cette charge est en mouvement et possède un vecteur vitesse \vec{v} tel que :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

On place une seconde charge q , fixe et positive, en un point M d'abscisse x de l'axe Ox.
Déterminer les vecteurs champ électrique et champ magnétique en M ainsi que la force de Lorentz que subit q .

5. Déterminer l'expression du champ magnétique créé par un dipôle AB en son milieu M appartenant à un axe Ox, ce dipôle AB étant formé de deux charges $+q$ et $-q$ situées de part et d'autre de l'axe, à une même distance et se déplaçant à la même vitesse \vec{v} parallèlement à cet axe (figure 6.4)

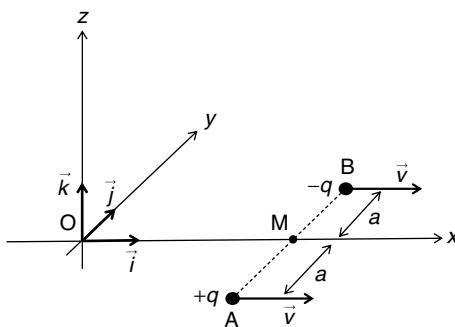


Figure 6.4

6. Un ruban de cuivre de largeur a et d'épaisseur b est placé perpendiculairement à un champ magnétique uniforme \vec{B} . Le ruban est parcouru par un courant continu I (figure 6.5).

Calculer la vitesse des électrons se déplaçant dans le ruban.

Montrer qu'un champ électrique \vec{E} apparaît dans le ruban, perpendiculairement au champ magnétique. Calculer sa valeur ainsi que la différence de potentiels qui apparaît entre les points O et M. On supposera que chaque atome de cuivre possède un électron libre.

Application numérique :

$$a = 1 \text{ cm}, b = 1 \text{ mm}, B = 2 \text{ T}, I = 80 \text{ A}$$

$$\rho = 8800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \text{masse volumique du cuivre}$$

$$M_A = 63,6 \text{ g, masse atomique du cuivre}$$

$$N = 6 \times 10^{23}, \text{nombre d'Avogadro}$$

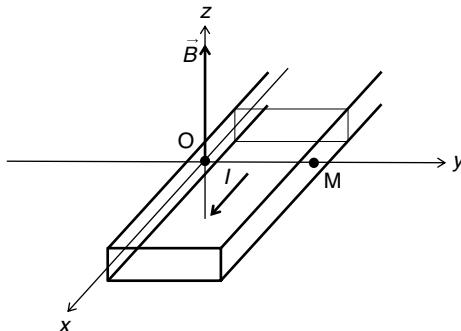


Figure 6.5

7. Une charge Q se déplace dans le vide à vitesse constante v_0 sur un axe Oy (figure 6.6). On suppose qu'elle se situe au point O à l'instant $t = 0$.

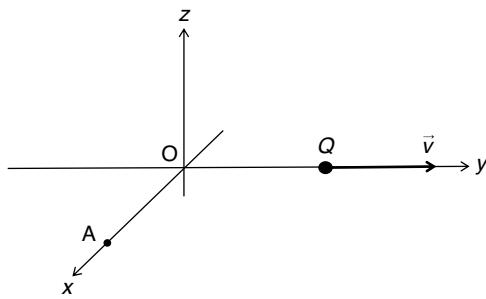


Figure 6.6

Calculer en fonction du temps le vecteur champ magnétique \vec{B} créé par cette charge en mouvement au point A de coordonnées $(x = a, y = 0, z = 0)$. Tracer l'évolution de ce champ magnétique en fonction du temps.

Application numérique : $Q = 10^{-4} \text{ C}$, $a = 3 \text{ cm}$, $v = 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

8. Une particule ponctuelle chargée positivement avec une charge Q , de masse m , est introduite à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale \vec{v}_0 dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} (figure 6.7).

Dans l'ensemble de l'exercice, on négligera le poids de la particule compte tenu de l'intensité des autres forces mises en jeu.

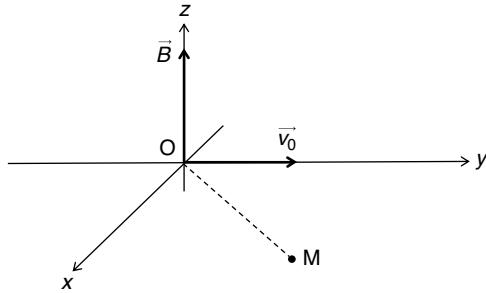


Figure 6.7

Montrer que la trajectoire de la particule est un cercle contenu dans le plan Oxy et passant par O. Déterminer le rayon de cette trajectoire en fonction du champ magnétique, de la masse de la particule, de sa vitesse initiale et de sa charge.

Application numérique : $Q = 10^{-6} \text{ C}$, $v_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $B = 10^{-1} \text{ T}$, $m = 3 \times 10^{-9} \text{ kg}$

Réponses

1. On applique tout simplement la loi de Laplace :

$$\bar{F}_B = q\bar{v} \wedge \bar{B}$$

Soit :

$$\bar{F}_B = q \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 B_y \end{pmatrix} = q v_0 B_y \bar{k}$$

Application numérique :

$$F_B = 2 \times 10^{-12} \text{ N}$$

2. Il s'agit bien ici de calculer le champ magnétique créé par la charge Q à l'instant précis où celle-ci se trouve au point O. Comme elle est animée d'une vitesse constante, ce champ magnétique va évidemment évoluer au cours du temps (la distance entre la charge et le plan Oxy va varier), mais il n'est pas question dans cet exercice, d'étudier cette évolution.

Considérant que le vecteur vitesse de la charge est porté par l'axe Oz, nous savons déjà que le vecteur champ magnétique en un point M du plan Oxy appartient à ce même plan Oxy (figure 6.8). Posons $r = OM$.

On a :

$$\bar{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\bar{v} \wedge \bar{OM}}{r^3}$$

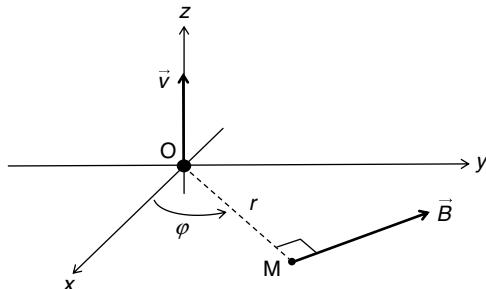


Figure 6.8

Compte tenu que $\bar{B}(M)$ est orthogonal à \bar{OM} et à \bar{v} , nous pouvons le positionner avec précision sur la figure 6.8.

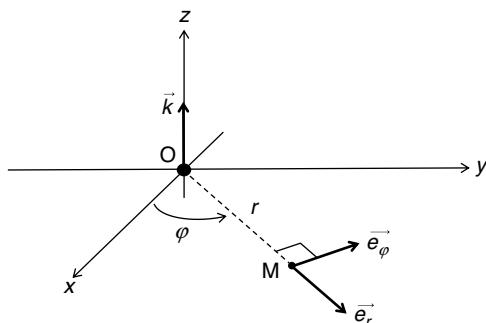


Figure 6.9

Il est clair que le problème présente une symétrie de révolution autour de l'axe Oz. Il semble donc judicieux de le traiter en coordonnées cylindriques (r, φ, z) : en tout point M du plan Oxy, le vecteur champ magnétique ne possède qu'une composante orthoradiale (orthogonale à \vec{OM}). En travaillant dans la base cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ comme indiqué sur la figure 6.9, on a :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{v}{r^2} \vec{e}_\varphi$$

Remarque : dans tout problème d'électromagnétisme, on choisira le type de coordonnées le plus judicieux pour déterminer et exprimer les résultats recherchés. Chaque fois qu'une symétrie de révolution autour d'un axe est évidente, on choisira systématiquement le jeu de coordonnées cylindriques. Les calculs s'en trouveront toujours réduits à leur plus simple expression comme cela vient d'être démontré dans cet exercice.

3. Il s'agit évidemment d'appliquer la définition du courant électrique circulant à travers un conducteur. On a :

$$I = \rho v \cdot S$$

En supposant, comme c'est presque toujours le cas, que le déplacement global des électrons est normal à la section du conducteur, on a :

$$I = \rho v S$$

D'où :

$$v = \frac{I}{\rho S}$$

Il nous suffit de déterminer ρ qui correspond à la quantité de charges mobiles par unité de volume. Chaque atome de cuivre étant supposé posséder un électron mobile, il suffit de calculer la quantité d'atomes de cuivre dans 1m^3 et de multiplier par la charge unitaire de l'électron pour avoir la charge mobile volumique.

Soit :

$$\rho = \frac{\sigma}{M} Ne$$

D'où :

$$v = \frac{IM}{N\sigma Se}$$

Application numérique :

$$v = \frac{1 \times 63,6 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{23} \times 8800 \times 3 \times 10^{-6} \times 1,6 \times 10^{-19}}$$

$$v = 2,5 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$$

Contrairement à une idée fausse très répandue, la vitesse moyenne de déplacement des charges dans un conducteur est somme toute très faible. Ne pas confondre cette vitesse d'ensemble avec la vitesse instantanée locale d'un électron libre qui, elle, est d'un ordre de grandeur comparable à la vitesse de la lumière.

4. La charge Q crée en M d'abscisse x un champ électrique \vec{E} tel que :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{i}}{x^2}$$

Comme cette charge est aussi en mouvement, elle crée également un champ magnétique \vec{B} en ce point M (figure 6.10) :

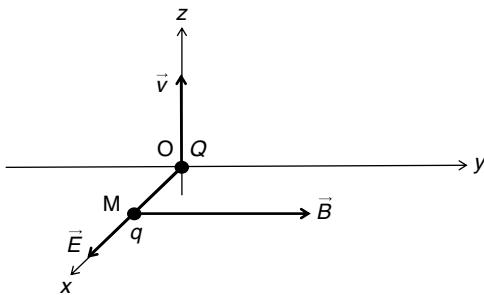


Figure 6.10

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q \vec{v} \wedge \overrightarrow{OM}}{x^3} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi x^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi x^3} \begin{pmatrix} 0 \\ vx \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 Q v}{4\pi x^2} \hat{j}$$

La charge q située au point M subit une force de Lorentz dont l'expression générale est :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}_q \wedge \vec{B})$$

\vec{v}_q est le vecteur vitesse de cette charge q . Dans notre exercice, la charge q est fixe. Le champ \vec{B} présent en M ne crée donc aucune interaction sur cette charge. La loi de Lorentz se réduit donc ici à :

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{i}}{x^2}$$

Remarque : dans l'expression de la force de Lorentz ou de la force de Laplace, ne pas confondre la vitesse de la charge qui crée le champ magnétique avec la vitesse de la charge qui subit ce champ. Dans le cas où une charge immobile est placée dans un champ magnétique, elle ne subit aucune interaction magnétique.

5. Soit \vec{B}_A le champ créé en M par la charge q située en A et se déplaçant à la vitesse \vec{v} . On a :

$$\vec{B}_A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \wedge \overrightarrow{AM}}{a^3}$$

De même, le champ créé en M par la charge $-q$ située en B et se déplaçant à la vitesse \vec{v} vaut :

$$\vec{B}_B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(-q) \vec{v} \wedge \overrightarrow{BM}}{a^3}$$

Calculons ces deux vecteurs champs magnétiques :

$$\vec{B}_A = \frac{\mu_0 q}{4\pi a^3} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 q}{4\pi a^3} va \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}_B = -\frac{\mu_0 q}{4\pi a^3} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 q}{4\pi a^3} va \end{pmatrix}$$

Le champ total créé en M par l'ensemble des deux charges en mouvement est donc :

$$\vec{B} = \vec{B}_A + \vec{B}_B = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 q}{4\pi a^3} v a \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 q v}{2\pi a^2} \vec{k}$$

6. Soit $\bar{v} = -\vec{v}$ la vitesse des électrons dans le ruban ($v > 0$: les électrons se déplaçant dans le sens contraire du courant, ils se dirigent bien dans le sens des x décroissants, d'où le signe moins).

Soit ρ la densité de charges mobiles par unité de volume dans le ruban. On a :

$$I = \rho v S = \rho v ab$$

S étant la section du ruban.

Calculons ρ : il s'agit de la quantité de charges mobiles par mètre cube, donc du nombre d'électrons libres par mètre cube, multiplié par la charge élémentaire de l'électron.

$$\rho = \frac{\sigma Ne}{M_A} = \frac{8800 \times 6 \times 10^{23} \times 1,6 \times 10^{-19}}{63,3 \times 10^{-3}}$$

Soit :

$$\rho = 1,33 \times 10^{10} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$$

On en déduit la vitesse des électrons :

$$v = \frac{I}{\rho ab} = \frac{80}{1,33 \times 10^{10} \times 10^{-2} \times 10^{-3}}$$

$$v = 6 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Les électrons se déplaçant à la vitesse \bar{v} dans le champ magnétique \vec{B} sont soumis à une force de Laplace \vec{f}_B (voir figure 6.11).

Les électrons en mouvement vont donc être déplacés vers le point O. Cet excès d'électrons va se traduire par l'apparition d'une charge négative du côté du point O et, par conséquent d'une charge positive du côté du point M. Un champ électrique \vec{E} apparaît donc dans le sens MO.

Les charges en mouvement sont également soumises à l'action de ce champ électrique et chaque électron subit une force de Coulomb \vec{f}_E :

$$\vec{f}_E = -e\vec{E} = eE\vec{j}$$

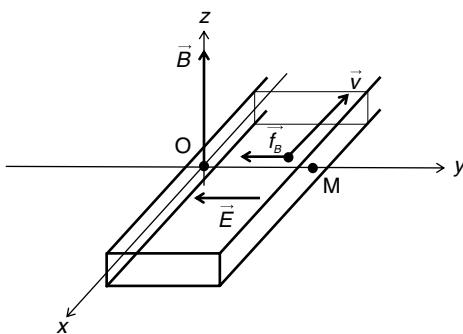


Figure 6.11

Cette force s'opposant à la force magnétique qui pousse les électrons vers le côté O, les deux phénomènes tendent inévitablement à s'équilibrer. À l'équilibre, on a :

$$\bar{f}_E = -e\bar{f}_B$$

Soit :

$$-e\bar{E} = ev\bar{B}$$

D'où la valeur du champ électrique :

$$\bar{E} = -v\bar{B}$$

Ce champ électrique fait apparaître une différence de potentiels telle que :

$$V_M - V_O = Ea = vBa = \frac{IBa}{\rho ab} = \frac{IB}{\rho b}$$

Application numérique :

$$V_M - V_O = 12 \mu V$$

L'apparition d'une différence de potentiels transversale dans un conducteur plat parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique orthogonal est connue sous le nom d'effet Hall. On remarquera dans l'expression de cette différence de potentiels, que celle-ci est d'autant plus importante que la concentration en électrons libres est faible. L'effet Hall sera donc beaucoup plus prononcé dans des semi-conducteurs, notamment, dans lesquels cette concentration est beaucoup plus faible que dans des métaux conducteurs comme le cuivre.

7. Contrairement aux exercices précédents, on étudie ici l'évolution du champ magnétique créé par la charge en mouvement en fonction du temps.

Soit M le point de coordonnées $(0, y, 0)$ où se trouve la charge Q à un instant t quelconque. Le champ magnétique créé en A vaut :

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\bar{v} \wedge \bar{MA}}{MA^3}$$

Comme la charge se déplace à vitesse constante et qu'elle se trouve en O à l'instant $t = 0$, les coordonnées du point M sont : $M(0, vt, 0)$.

D'où :

$$\bar{MA} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ vt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -vt \\ 0 \end{pmatrix}$$

La distance MA, quant à elle, vaut : $MA = \sqrt{a^2 + v^2t^2}$.

Calculons le champ \bar{B} :

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\bar{v} \wedge \bar{MA}}{MA^3} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi (\sqrt{a^2 + v^2t^2})^3} \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ -vt \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi (\sqrt{a^2 + v^2t^2})^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -va \end{pmatrix} = \frac{-\mu_0 Qva}{4\pi (\sqrt{a^2 + v^2t^2})^3} \bar{k}$$

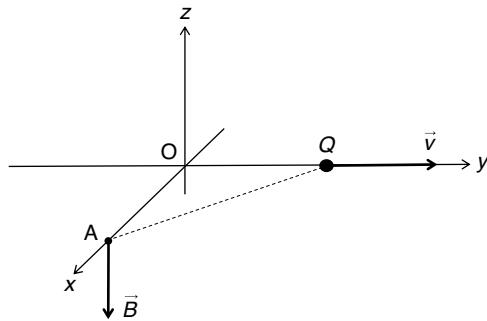


Figure 6.12

On remarquera (figure 6.12) que ce champ magnétique est dirigé dans le sens des z décroissants.

Traçons pour finir la courbe représentative $B(t) = \frac{-\mu_0 Q v a}{4\pi (\sqrt{a^2 + v^2 t^2})^3}$ (figure 6.13).

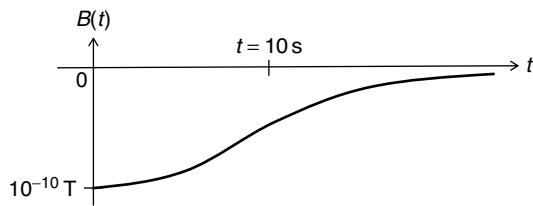


Figure 6.13

8. Considérons qu'à un instant t quelconque, la particule se trouve en un point M de l'espace, animée d'un vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt}$$

et soumise à un vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overline{OM}}{dt^2}$$

La particule subit une force magnétique :

$$\vec{f}_B = Q\vec{v} \wedge \vec{B} = Q \frac{d\overline{OM}}{dt} \wedge \vec{B}$$

Comme on néglige le poids de la particule, \vec{f}_B est la seule force qu'elle subit. Par conséquent, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m \frac{d^2\overline{OM}}{dt^2} = Q \frac{d\overline{OM}}{dt} \wedge \vec{B}$$

Cette équation montre que le vecteur accélération est orthogonal au champ magnétique. Il est donc compris dans le plan Oxy. Comme le vecteur vitesse initial appartient à ce plan, cela signifie que le point M restera toujours dans le plan Oxy. De plus, ce même vecteur accélération étant orthogonal au vecteur vitesse, l'accélération sera normale à la trajectoire puisque le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire.

On a donc :

$$\frac{d^2\overline{OM}}{dt^2} \cdot \frac{d\overline{OM}}{dt} = 0$$

D'où :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\overline{OM}}{dt} \right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{d\overline{OM}}{dt} \right)^2 = C^{\text{te}}$$

car :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\overline{OM}}{dt} \right)^2 = 2 \frac{d\overline{OM}}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\overline{OM}}{dt} \right)$$

Cela correspond à la formule de dérivation de deux fonctions composées :

$$\frac{d}{dt} u[v(t)] = v'(t)u'[v(t)]$$

Donc :

$$\|\vec{v}\| = C^{\text{te}} = v_0$$

Comme la trajectoire est contenue dans le plan Oxy, le vecteur vitesse est toujours orthogonal à \vec{B} . On peut donc écrire :

$$m \left\| \frac{d^2 \overline{OM}}{dt^2} \right\| = Q \left\| \frac{d\overline{OM}}{dt} \right\| \times \|\vec{B}\|$$

D'où :

$$\|\vec{a}\| = \frac{Qv_0 B}{m}$$

Seul le mouvement circulaire uniforme est caractérisé par deux vecteurs vitesse et accélération orthogonaux et de modules constants.

L'accélération \vec{a} est donc toujours dirigée de M vers O et son module est tel que :

$$a = \frac{v_0^2}{R}$$

On en déduit :

$$a = \frac{v_0^2}{R} = \frac{Qv_0 B}{m}$$

D'où :

$$R = \frac{mv_0}{QB}$$

Application numérique :

$$R = \frac{3 \times 10^{-9} \times 20}{10^{-6} \times 10^{-1}} = 0,6 \text{ m}$$

En conclusion, la trajectoire est un cercle appartenant au plan Oxy, ce centre C($R, 0, 0$) et de rayon R avec $R = 0,6 \text{ m}$ (figure 6.14).

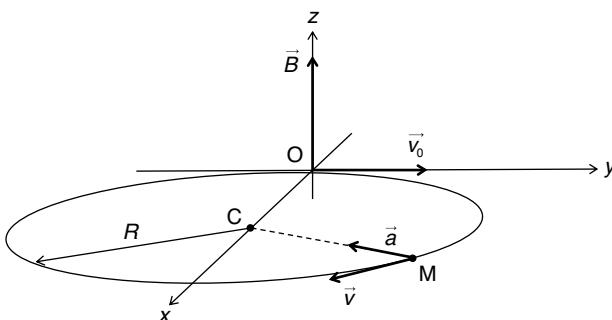


Figure 6.14

Champ magnétique créé par un courant

MOTS CLÉS

Électromagnétisme ■ loi de Biot et Savart ■ règle de l'observateur d'Ampère ■ nappe de courant ■ tube de courant ■ densité de courant ■ lignes de champ magnétique ■ tube de champ magnétique ■ flux du champ magnétique ■ circulation du champ magnétique ■ théorème d'Ampère ■ potentiel vecteur ■ rotationnel ■ théorème de Stokes-Ampère

Au cours du chapitre précédent, nous avons étudié, notamment, les champs magnétiques créés par les charges électriques en mouvement. Or s'il y a un dispositif caractérisé par des mouvements de charges, c'est bien un conducteur parcouru par un courant.

Nous allons voir, dans ce chapitre 7, comment un courant électrique crée un champ magnétique et comment caractériser ce champ.

À l'instar de ce que nous avons étudié dans le cas de charges statiques, nous définirons également la notion de flux du champ magnétique, notion qui permet de calculer facilement les champs magnétiques induits par des courants.

Fiche 1

Loi de Biot et Savart

Dans un conducteur filiforme (dont la section est faible par rapport au rayon de courbure), chaque élément $d\vec{l}$ du circuit crée en un point M quelconque de l'espace un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$ défini par la loi de Biot et Savart (figure 7.1) :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Dans cette expression, r représente la distance entre le point M et l'élément de circuit $d\vec{l}$ tandis que \vec{u} représente le vecteur unitaire de la droite reliant $d\vec{l}$ et le point M.

Remarque

La quantité $i d\vec{l}$ est appelée élément de courant et peut se noter $d\vec{i}$.

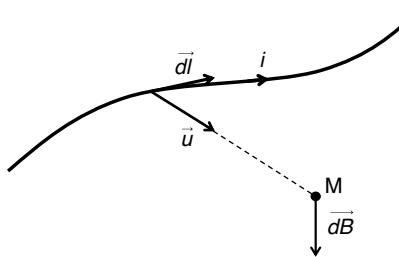


Figure 7.1

Fiche 2

Champ créé par un circuit quelconque

Le champ magnétique créé en un point M quelconque au voisinage d'un circuit (C) parcouru par un courant i s'obtient en intégrant, c'est-à-dire en sommant l'ensemble des champs élémentaires $d\vec{B}$ créés par chaque élément $d\vec{l}$ du circuit et définis par la loi de Biot et Savart :

$$\overrightarrow{B(M)} = \int_{(C)} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Soit, en considérant que $\frac{\mu_0}{4\pi}$ est une constante :

$$\overrightarrow{B(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C)} \frac{i d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

De même, le courant étant le même dans tout le circuit, on a :

$$\overrightarrow{B(M)} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{(C)} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Fiche 3

Champ créé par un conducteur rectiligne

Un conducteur rectiligne filiforme, de longueur infinie, parcouru par un courant i , crée en tout point M situé à son voisinage à une distance r_0 du conducteur, un champ magnétique $\overrightarrow{B(M)}$ d'intensité :

$$B(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r_0}$$

Ce champ étant à la fois orthogonal au conducteur et à la normale \vec{u} au conducteur orientée vers M, il en résulte que le champ $\overrightarrow{B(M)}$ est dirigé comme indiqué sur la figure 7.2.

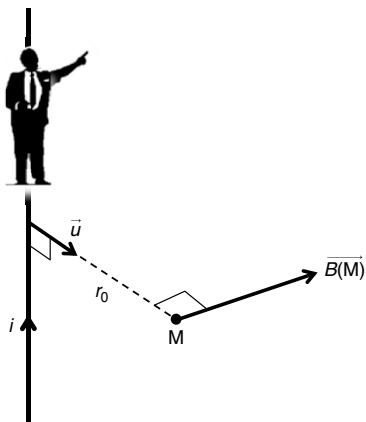


Figure 7.2

Règle de l'observateur d'Ampère

Bien que la direction et le sens de $\overrightarrow{B(M)}$ soient facilement déterminables par le fait que ce champ est le résultat d'un produit vectoriel, on utilise parfois la règle dite de l'observateur d'Ampère (ou plus familièrement du bonhomme d'Ampère) pour les déterminer.

Un observateur placé sur le conducteur de telle sorte qu'il soit traversé par le courant i des pieds à la tête et faisant face au point M, « voit » le champ magnétique $\overrightarrow{B(M)}$ dirigé vers sa gauche (figure 7.2).

Fiche 4

Distributions de courant

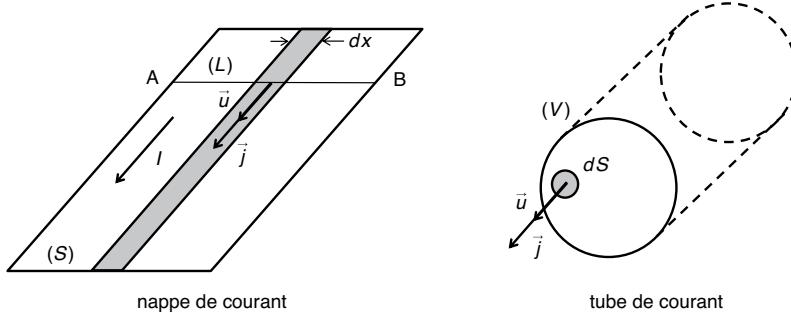


Figure 7.3

Les courants électriques ne circulent pas uniquement dans des conducteurs filiformes. Ils peuvent circuler sur la surface conductrice d'un objet ou encore dans des objets conducteurs en volume. On parle alors respectivement de nappes de courant ou de tubes de courant (figure 7.3).

Pour une nappe de courant, considérons une ligne $(L) = AB$ de la surface conductrice et supposons que le courant traverse cette ligne orthogonalement. On définit la densité de courant j par :

$$I = \int_L \vec{j} \cdot \vec{u} \, dx$$

\vec{u} étant le vecteur unitaire normal à la ligne (L) .

Dans le cas d'un tube de courant, le courant I traverse une section (S) du conducteur. On définit la densité de courant \vec{j} par :

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{u} \, dS$$

Dans les deux cas, la loi de Biot et Savart s'applique pour calculer le champ magnétique créé par la distribution de courant en un point M quelconque de l'espace (figure 7.4).

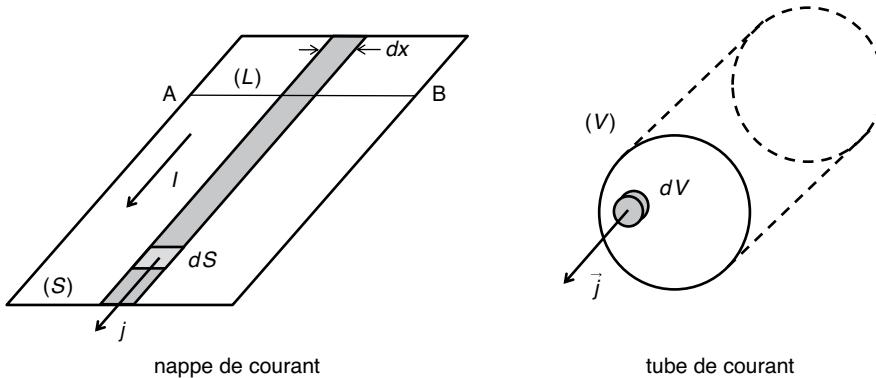


Figure 7.4

Ainsi, dans le cas d'une nappe de courant, chaque élément de surface dS de la nappe séparé de M d'une distance r y crée un champ magnétique élémentaire défini par :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} dS \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Pour un tube de courant, chaque élément de volume dV du conducteur crée en M un champ élémentaire :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} dV \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Fiche 5

Lignes de champ et flux du champ magnétique

Lignes de champ magnétique

Les lignes d'égale intensité du champ magnétique créé par un circuit ou une distribution quelconque sont appelées lignes de champ magnétique. Le vecteur champ y est en tout point tangent (figure 7.5). Les lignes de champ magnétique sont toujours fermées.

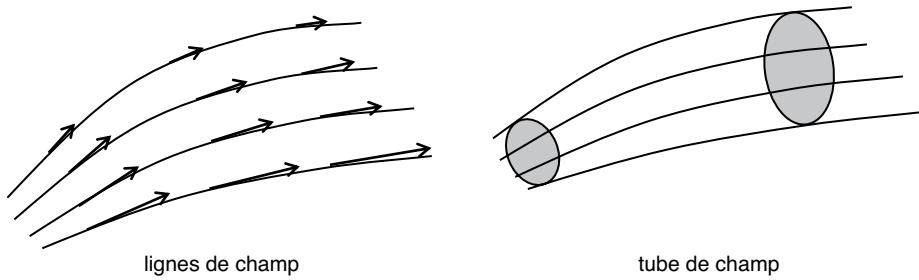


Figure 7.5

Attention

Bien noter que la définition des lignes de champ magnétique est très différente de celle des lignes de champ électrique.

Tube de champ magnétique

Un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé constitue un tube de champ. Comme les lignes de champ magnétique sont toujours fermées, cet ensemble est parfois appelé tube de champ torique.

Flux du champ magnétique à travers une surface

Soit (S) une surface traversée par des lignes de champ magnétique (figure 7.6). Soit M un point de cette surface et $d\vec{S}$ l'élément de surface situé autour de M .

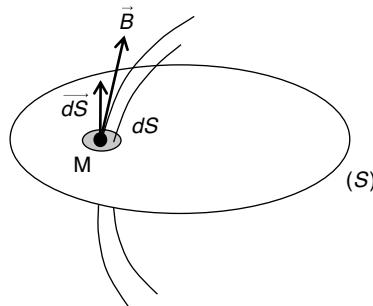


Figure 7.6

Soit $\overrightarrow{B(M)}$ le vecteur champ magnétique en ce point. On définit le flux élémentaire du champ magnétique en M au travers de la surface dS par :

$$d\phi = \overrightarrow{B(M)} \cdot \overrightarrow{dS}$$

En intégrant sur toute la surface (S) , on définit le flux total du champ magnétique traversant cette surface :

$$\phi = \iint_S \overrightarrow{B(M)} \cdot \overrightarrow{dS}$$

La grandeur ϕ est appelée également flux magnétique et s'exprime en webers (W).

Important

Le flux du champ magnétique au travers de toute surface fermée est nul. On dit que le champ magnétique est conservatif.

Cette propriété se traduit par l'équation locale :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Fiche 6

Théorème d'Ampère

Circulation du champ magnétique

Soit une région de l'espace où règne un champ magnétique et deux points A et B de cette région. Soit (L) un chemin quelconque entre ces deux points et M un point appartenant à (L) . On définit la circulation élémentaire du champ magnétique en M par :

$$dC = \overline{B(M)} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Dans cette expression, \overrightarrow{dl} est un déplacement élémentaire en M le long de la courbe (L) . La circulation du champ magnétique le long de la courbe (L) , de A à B, a pour expression :

$$C = \int_L \overline{B(M)} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé (L) est égale au produit de μ_0 par l'intensité du courant qui traverse toute surface s'appuyant sur ce contour (figure 7.7).

Soit :

$$\oint_L \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I$$

Cette expression constitue le théorème d'Ampère.

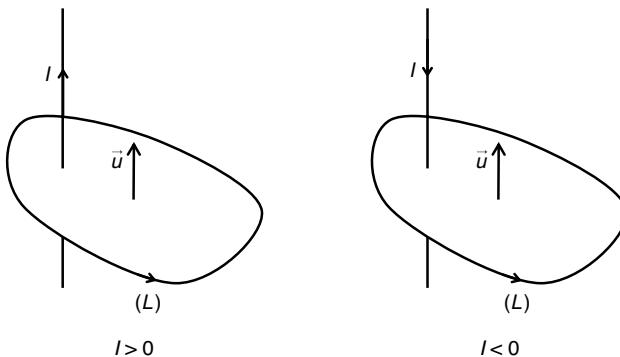


Figure 7.7

La normale \vec{u} à la surface étant orientée selon le sens de parcours du contour (figure 7.7 – pensez à la règle du tire-bouchon), le courant sera compté positivement s'il est dirigé dans le même sens que \vec{u} et négativement dans le cas contraire. Si plusieurs conducteurs coupent la surface s'appuyant sur le contour, le courant I intervenant dans le théorème d'Ampère correspond à la somme algébrique des différents courants dans ces conducteurs (figure 7.8).

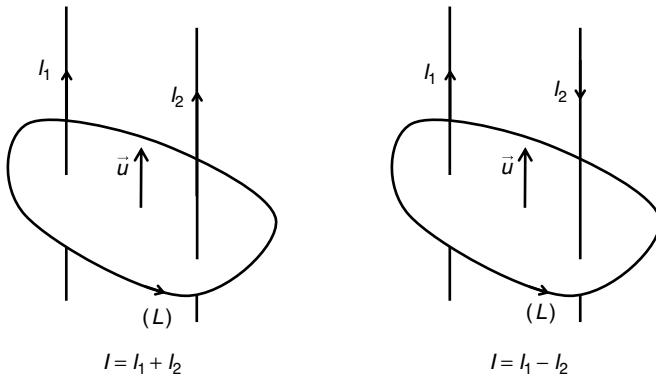


Figure 7.8

Fiche 7

Potentiel vecteur

On définit le potentiel vecteur en un point M de l'espace où règne un champ magnétique \vec{B} par la relation :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Il faut lire « rotationnel de \vec{A} » et cette fonction vectorielle, en coordonnées cartésiennes, a pour expression :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

En coordonnées cylindriques (voir chapitre 3, figure 3.4 pour la définition de ce système de coordonnées), on a :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial [rA_\theta]}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Une expression générale permet de calculer le potentiel vecteur créé en un point M par un courant I circulant dans un conducteur de longueur (L) situé à une distance r de M :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Idl}{r}$$

Par ailleurs, le théorème de Stokes-Ampère prévoit que le flux du champ magnétique à travers une surface (S) s'appuyant sur un contour (L) est égal à la circulation du potentiel vecteur le long de ce contour :

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Entraînement

QCM

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être exactes.

- 1.** Dans la loi de Biot et Savart $\overline{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \overline{dl} \wedge \overline{u}}{r^2}$:

- a. \overline{u} est un vecteur unitaire orthogonal à \overline{dl} .
- b. $i \overline{dl}$ est appelé élément de courant.
- c. r représente la distance entre l'élément \overline{dl} et le point où l'on calcule le champ élémentaire \overline{dB} .
- d. \overline{dB} est parallèle à \overline{dl} .

- 2.** Un conducteur rectiligne filiforme de longueur infinie et parcouru par un courant i crée à son voisinage, à une distance r , un champ magnétique d'intensité :

- a. $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$.
- b. $B = \frac{\mu_0 i}{4\pi r}$.
- c. $B = \frac{\mu_0 i}{\pi r}$.
- d. $B = \frac{\mu_0}{2\pi} r \cdot i$.

- 3.** Lorsqu'on utilise la règle de l'observateur d'Ampère :

- a. Le courant entre par sa tête et sort par ses pieds.
- b. Le champ magnétique est dirigé vers sa droite.
- c. On ne fait qu'utiliser les propriétés du produit vectoriel
- d. L'observateur d'Ampère regarde dans la direction de \overline{u}

- 4.** Dans une distribution de courant, la densité de courant peut s'exprimer en :

- a. Ampères par mètre carré
- b. Ampères par mètre
- c. Ampères
- d. Ampères par mètre cube

- 5.** La forme locale du théorème d'Ampère s'écrit :

- a. $\overrightarrow{\text{rot}} \bar{B} = \mu_0 \bar{j}$.
- b. $\text{rot} \bar{B} = \mu_0 I$.
- c. $\overleftarrow{\text{rot}} B = \mu_0 \bar{j}$.
- d. $\text{rot} \bar{B} = \mu_0 J$.

6. Laquelle ou lesquelles de ces équations est (sont) fausse(s) ?

- a. $\vec{\text{div}} \vec{B} = \vec{0}$.
- b. $\vec{\text{div}} \vec{B} = 0$.
- c. $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{A}$.
- d. $\text{rot} \vec{B} = A$.

7. Dans l'expression $d\phi = \vec{B} \cdot \vec{dS}$:

- a. $d\phi$ s'exprime en webers.
- b. \vec{B} est le champ magnétique régnant sur l'élément de surface \vec{dS} .
- c. \vec{B} est le champ élémentaire créé par le courant traversant l'élément de surface \vec{dS} .
- d. \vec{dS} est parallèle à \vec{B} .

8. La circulation du champ magnétique le long d'une courbe AB :

- a. Ne dépend que des points de départ et d'arrivée A et B.
- b. Est nulle si la courbe est fermée.
- c. Est égale à l'intégrale des circulations élémentaires le long de la courbe.
- d. Est donnée par le théorème d'Ampère.

Réponses

1. **b et c.** le vecteur unitaire \bar{u} est dirigé de \bar{dl} vers M et ne lui est donc en général pas orthogonal. $d\bar{B}$ est orthogonal à \bar{dl} puisqu'il s'agit d'un produit vectoriel.
2. **a.** Voir fiche 3.
3. **c et d.** Voir fiche 3 et figure 7.2.
4. **a et b.** Dans le cas d'une nappe de courant, l'expression $I = \int_L \bar{j} \cdot \bar{u} dx$ montre que \bar{j} est homogène un courant divisé par une longueur. Soit pour unité, des ampères par mètre. Dans le cas d'un tube de courant, l'expression $I = \int_S \bar{j} \cdot \bar{u} dS$ montre que \bar{j} est homogène un courant divisé par une surface. Soit pour unité, des ampères par mètre carré.
5. **a.** Attention, le rotationnel est un vecteur qui opère sur un vecteur.
6. **a, b, c et d.** Toutes ces équations sont fausses. L'opérateur divergence est un scalaire et non un vecteur. Le rotationnel est un vecteur mais on a $\overline{\text{rot}} \bar{A} = \bar{B}$ et non l'inverse (voir fiche 7).
7. **a et b.** Dans l'expression du flux élémentaire du champ magnétique au travers d'une surface \bar{dS} , on ne parle pas de ce qui crée le champ magnétique et le champ magnétique possède une direction quelconque. En revanche, le vecteur \bar{dS} est normal à l'élément de surface dS .
8. **c.** Voir fiche 6.

Entraînement

Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
1. Les lignes de champ magnétique sont définies comme les lignes aux- quelles le vecteur champ magnétique est tangent.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Le théorème d'Ampère est à l'électromagnétisme ce que le théorème de Gauss est à l'électrostatique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Le champ magnétique est conservatif.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Le long d'une ligne de champ magnétique, le vecteur champ reste constant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Dans un champ magnétique uniforme, le flux du champ au travers d'une surface orthogonale à ce champ est nul.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Les lignes de champ magnétique sont toujours fermées.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Le flux du champ magnétique à travers une surface (S) est égal à la circulation du potentiel vecteur le long du contour de cette surface.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Dans le cas d'une nappe de courant, la loi de Biot et Savart s'écrit : $\frac{d\vec{B}}{d\vec{l}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} dl \wedge \vec{u}}{r^2}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Si deux conducteurs traversent l'intérieur d'un contour fermé avec des courants identiques mais de sens opposés, alors le champ magnétique est nul.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Quand on cherche à calculer l'intensité du champ magnétique créé par un courant, on utilise la règle de l'observateur d'Ampère.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Réponses

1. **Faux.** Même si les vecteurs champs sont tangents aux lignes de champ, ce n'est pas là leur définition. Les lignes de champ sont les lignes d'égale intensité du champ magnétique.
2. **Vrai.** Même si ce ne sont pas les mêmes objets qui sont manipulés dans les expressions, il s'agit bien d'un outil permettant de calculer facilement le champ magnétique créé par un courant électrique.
3. **Faux.** C'est le flux du champ magnétique qui est conservatif.
4. **Faux.** C'est sa norme qui est constante mais il peut changer en direction.
5. **Vrai.** Si le champ est orthogonal à la surface, il l'est aussi à tout élément de surface $d\vec{S}$ de cette surface. Le produit scalaire $d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$ sera donc nul en tout point de la surface et l'intégrale de ces flux élémentaires sera nulle.
6. **Vrai.** Voir fiche 5.
7. **Vrai.** C'est le théorème de Stokes-Ampère.
8. **Faux.** Elle s'écrit $\overline{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overline{j}dS \wedge \vec{u}}{r^2}$.
9. **Faux.** C'est la circulation du champ magnétique $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = 0$ qui est nulle (théorème d'Ampère, voir fiche 6).
10. **Faux.** On l'utilise pour déterminer la direction et le sens du vecteur champ, pas son intensité.

Entraînement

Exercices

1. Déterminer le champ magnétique créé en tout point M autour d'un conducteur rectiligne de longueur finie AB et parcouru par un courant I (figure 7.9). À partir de ce résultat, retrouver l'expression du champ créé en un point M quelconque au voisinage d'un conducteur rectiligne uniforme de longueur infinie (fiche 3).

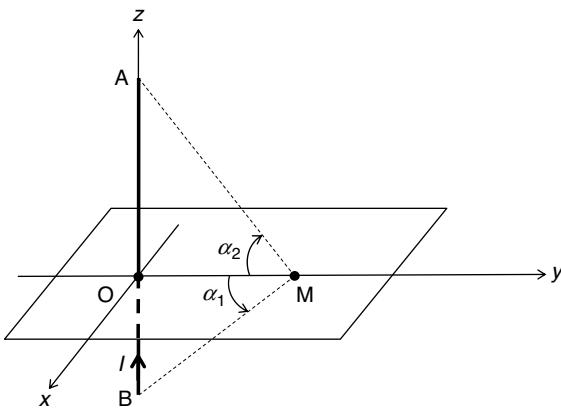


Figure 7.9

On suppose que M appartient à un plan Oxy, O appartenant à l'axe Oz qui porte le conducteur (mais attention, le point O n'est pas le milieu du conducteur). On posera $OM = r_0$ et on choisit de repérer le point M en hauteur par rapport au conducteur par deux angles α_1 et α_2 . Conformément au schéma sur lequel on peut voir l'orientation de ces angles, on aura $\alpha_1 < 0$ et $\alpha_2 > 0$.

2. Une spire circulaire de rayon R et de centre O est parcourue par un courant I constant (figure 7.10). Soit Ox l'axe perpendiculaire à la spire passant par O. Calculer le champ magnétique $\vec{B}(x)$ en tout point M d'abscisse x de cet axe. On démontrera au préalable que ce vecteur champ est parallèle à l'axe. Tracer les variations de $B(x)$ pour $-\infty < x < +\infty$.

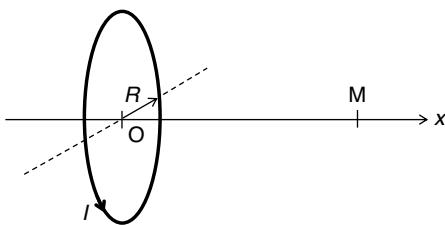


Figure 7.10

3. Une spire circulaire de rayon R et de centre O appartenant à un plan Oxy est parcourue par un courant I constant (figure 7.11). Calculer le champ magnétique créé en tout point M d'abscisse x de l'axe Oz dans le cas où M est très éloigné de la spire ($x \gg R$).

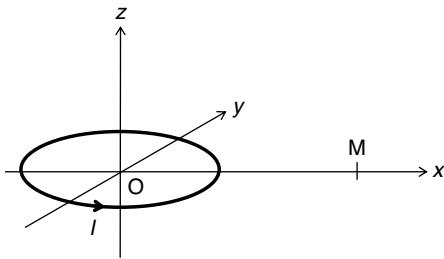


Figure 7.11

4. Un grand nombre de spires sont enroulées, jointives, autour d'une sphère de centre O et de rayon R (figure 7.12). Ces spires sont parcourues par le même courant I . Calculer le champ magnétique créé en O.

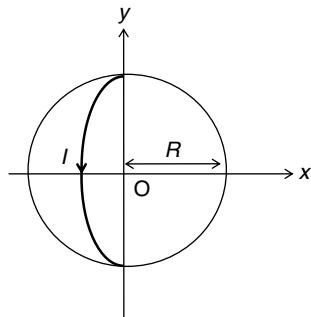


Figure 7.12

5. Deux fils conducteurs de longueur infinie, parcourus par des courants opposés I sont disposés parallèlement dans l'espace, à une distance $2a$ l'un de l'autre. On munit l'espace d'un repère Oxyz orthonormé de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Voir figure 7.13.

Calculer le champ magnétique créé par cet ensemble en un point M du plan Oxy séparé respectivement des deux fils d'une distance r_1 et r_2 . Déterminer en particulier l'expression de l'intensité de ce champ magnétique pour un point M de l'axe Oy.

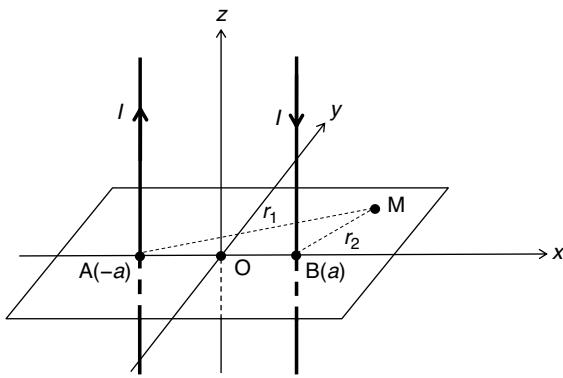


Figure 7.13

6. On considère un solénoïde (dispositif composé d'un enroulement de N spires autour d'un cylindre de longueur L et de rayon R . Ces spires sont jointives et parcourues par le même courant I (figure 7.14).

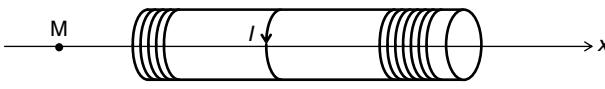


Figure 7.14

Soit Ox l'axe du solénoïde et M un point de cet axe repéré par deux angles θ_1 et θ_2 (figure 7.15).

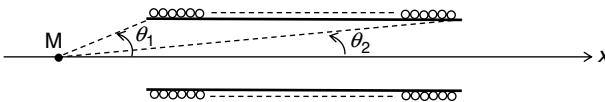


Figure 7.15

On note $n = \frac{N}{L}$ le nombre de spires par unité de longueur. Calculer le champ magnétique créé par le solénoïde au point M . En faisant tendre θ_1 et θ_2 vers deux valeurs limites appropriées, calculer le champ magnétique le long de l'axe d'un solénoïde infiniment long.

7. On considère un solénoïde de longueur infinie de rayon R , parcouru par un courant I_0 et caractérisé par un nombre n de spires jointives par unité de longueur. En utilisant le théorème d'Ampère le long de courbes judicieusement choisies, montrer que le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde et nul à l'extérieur.
8. On considère une nappe de courant caractérisée par des dimensions infinies et par une densité de courant \vec{j} circulant dans le plan Oxy . Soit M un point de l'axe Oz d'altitude z (figure 7.16). Calculer le champ magnétique créé en M par la distribution surfacique de courant.

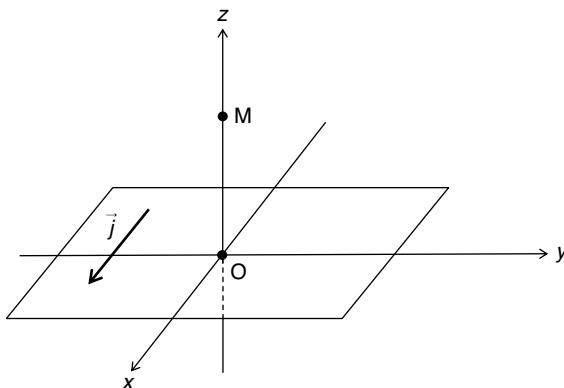


Figure 7.16

9. Un courant I_0 circule dans un conducteur cylindrique de longueur infinie, d'axe Oz et de rayon R , avec une densité \vec{j} constante au travers d'une section quelconque du conducteur et parallèle à Oz (figure 7.17).

Calculer le vecteur champ magnétique en tout point M de l'espace situé au voisinage de cette distribution volumique de courant et tracer ses variations en fonction de la distance r qui sépare M de l'axe Oz .

On considérera d'abord la symétrie du système afin de déterminer la direction et le sens du champ magnétique, puis on calculera son expression respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur en utilisant le théorème d'Ampère.

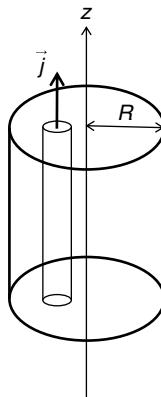


Figure 7.17

10. Un disque isolant d'épaisseur négligeable est chargé avec une densité surfacique constante σ puis mis en rotation autour de son axe avec une vitesse angulaire constante ω (figure 7.18). Calculer le champ magnétique régnant en un point M d'abscisse x de cet axe. Calculer une approximation de cette expression pour $x \gg R$.

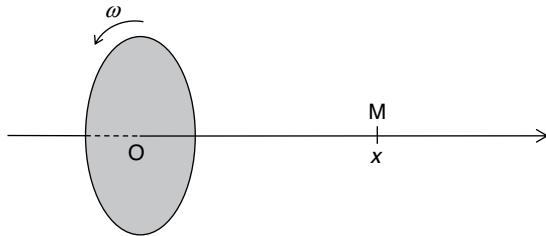


Figure 7.18

Ce dispositif est connu sous le nom de disque de Rowland. Les charges électrostatiques initialement immobiles à la surface du disque sont mises en mouvement par rotation et se comportent donc comme un courant électrique. On calculera en tout premier lieu l'expression de la densité de courant à la surface du disque sur un élément de surface correspondant à une couronne circulaire comprise entre les cercles de rayons r et $r + dr$.

11. On considère une nappe de courant de dimensions infinies, de densité j analogue à celle étudiée dans l'exercice 8 de ce chapitre. Calculer le potentiel vecteur au point M d'altitude z placée sur l'axe Oz en utilisant l'expression $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$.

On montrera au préalable que le potentiel vecteur au point M ne dépend que de z .

Redémontrer le résultat en utilisant le théorème de Stokes-Ampère sur un contour que l'on choisira judicieusement.

Réponses

1. Considérons un élément de circuit $d\vec{l}$ comme indiqué sur la figure 7.19. Cet élément, parcouru par le courant I , crée au point M un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$ tel que :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

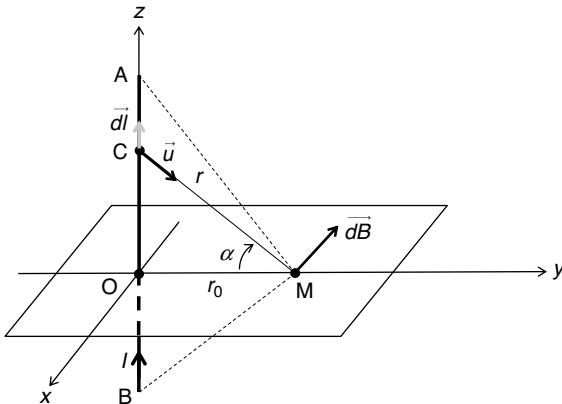


Figure 7.19

Ce vecteur champ, compte tenu des propriétés du produit vectoriel (ou de la règle de l'observateur d'Ampère) appartient au plan orthogonal à l'axe Oz passant par M et est dirigé comme indiqué sur la figure 7.19.

Soit C le point où est situé cet élément $d\vec{l}$ sur l'axe Oz. Repérons ce point par rapport à M à l'aide des paramètres α et r (voir figure 7.19).

Pour connaître le champ total créé en M par l'ensemble du circuit, il nous faut sommer tous les champs élémentaires $d\vec{B}$ créés par tous les éléments $d\vec{l}$.

Remarque : les termes de l'énoncé (position de M par rapport au circuit définie par des angles) nous suggèrent d'intégrer par rapport à l'angle α .

Exprimons $d\vec{l}$ en fonction de α : soit I l'ordonnée du point C sur l'axe Oz. On a :

$$I = r_0 \tan \alpha$$

$$\text{D'où : } d\vec{l} = r_0 \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \vec{k} \quad \text{ou encore } d\vec{l} = r_0 \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \vec{k}$$

On notera que pour calculer $d\vec{l}$, nous calculons d'abord I dont nous exprimons ensuite la différentielle.

$$\text{Par ailleurs, } r^2 = \frac{r_0^2}{\cos^2 \alpha} \text{ et } \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix}$$

On en déduit donc l'expression de $\bar{d}\vec{B}$:

$$\bar{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{r_0 d\alpha}{\cos^2 \alpha} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\bar{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0^2} \begin{pmatrix} -\frac{r_0 d\alpha}{\cos \alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\mu_0 I \cos \alpha}{4\pi r_0} d\alpha \vec{i}$$

On calcule alors le champ total \bar{B} en intégrant de α_1 à α_2 :

$$\bar{B} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(-\frac{\mu_0 I \cos \alpha}{4\pi r_0} d\alpha \vec{i} \right) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha \right) \vec{i}$$

$$\bar{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} ([\sin \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2}) \vec{i} = -\frac{\mu_0 I (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)}{4\pi r_0} \vec{i}$$

On notera que la valeur algébrique du champ magnétique est négative, ce qui correspond à un vecteur champ dirigé selon les x décroissants, ce qui est conforme au schéma de la figure 7.19.

Le cas du conducteur de longueur infinie correspond aux valeurs limites $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, on obtient :

$$\bar{B} = -\frac{\mu_0 I \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]}{4\pi r_0} \vec{i} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \vec{i}$$

Cette expression correspond bien à celle énoncée dans la fiche 3 de ce chapitre.

- 2.** Montrons tout d'abord que le champ magnétique en un point M de l'axe, lui est parallèle. Considérons deux éléments de circuit $I d\vec{l}$ et $I d\vec{l}'$ diamétralement opposés (figure 7.20).

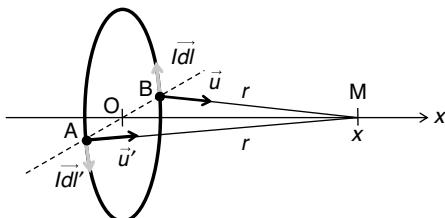


Figure 7.20

Chacun des deux éléments crée en M un champ magnétique élémentaire, soit respectivement $\bar{d}\vec{B}$ et $\bar{d}\vec{B}'$. Sur la figure 7.20, il n'est pas facile de représenter ces deux champs. En revanche, si on projette le dispositif dans le plan(ABM), cette représentation est plus aisée (figure 7.21). En effet, ces deux champs élémentaires ont pour expression :

$$\bar{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} \text{ et } \bar{d}\vec{B}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}' \wedge \vec{u}'}{r^2}$$

Dans ces expressions, r représente la distance entre M et l'un des éléments de longueur.

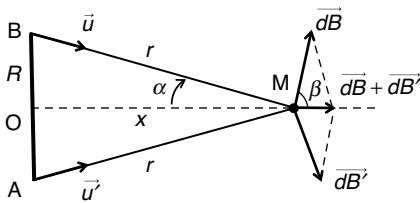


Figure 7.21

Le vecteur \vec{dB} étant orthogonal à $|dl|$, il est bien contenu dans le plan (ABM). Il en est de même pour \vec{dB}' .

La règle du tire-bouchon ou plus simplement la définition du produit vectoriel permet de déterminer la direction et le sens de ces deux champs élémentaires (figure 7.21). Compte tenu de la symétrie du système, les deux vecteurs champs élémentaires sont symétriques par rapport à l'axe Ox. Leur sens dépend bien sûr de l'orientation choisie pour le courant. Par rapport à notre choix, ces vecteurs ont une composante selon Ox qui est positive.

On a donc :

$$\vec{dB} + \vec{dB}' = 2dB_x \vec{i}$$

\vec{i} étant un vecteur unitaire de Ox.

En sommant chaque couple d'éléments de courant autour de la spire, on obtiendra bien un champ magnétique en M parallèle à Ox. Le calcul de $B(x)$ correspond donc à l'intégration de dB_x sur toute la longueur de la spire :

$$B(x) = \int_L dB_x$$

où L représente le contour de la spire.

Comme dB_x est la projection de \vec{dB} sur Ox, on a :

$$dB_x = dB \cos \beta$$

β étant l'angle formé par le vecteur \vec{dB} et l'axe. La figure 7.21 nous montre que $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Donc :

$$dB_x = dB \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = dB \sin \alpha$$

Avec :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|dl|}{r^2}$$

D'où :

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|dl|}{r^2} \sin \alpha$$

Par ailleurs :

$$\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \text{ et } r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

Finalement :

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{(R^2 + x^2)} \times \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Soit :

$$dB_x = \frac{\mu_0 R}{4\pi} \frac{Idl}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Intégrons sur l'ensemble de la spire :

$$B(x) = \int_L \frac{\mu_0 R}{4\pi} \frac{Idl}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Extrayons de l'intégrale toutes les grandeurs constantes :

$$B(x) = \frac{\mu_0 RI}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} \int_L dl$$

Sur l'ensemble de la spire, $\int_L dl$ représente sa longueur totale, soit le périmètre de la spire :

$$B(x) = \frac{\mu_0 RI}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} \times 2\pi R = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

On remarque que le champ est toujours positif, autrement dit, orienté selon les x croissants. Quel que soit le point M de l'axe, le champ est toujours orienté dans le même sens.

Traçons à présent les variations de $B(x)$. Nous remarquons tout d'abord que le champ sera maximal en $x = 0$ puisque, dans ce cas, le dénominateur de l'expression est minimal. Ce maximum vaut :

$$B_{\max} = B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

La fonction $B(x)$ est paire, puisque $B(x) = B(-x)$. De plus, elle est strictement décroissante pour $x > 0$. On note également que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} B(x) = 0$$

Ces renseignements suffisent à tracer sommairement la courbe mais le calcul de la dérivée de $B(x)$ et éventuellement de sa dérivée seconde permettent d'obtenir plus de précision :

$$\frac{dB}{dx} = \frac{\mu_0 R^2 I}{2} \frac{d}{dx} [(R^2 + x^2)^{-3/2}]$$

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{3}{2} \times 2x \times \frac{\mu_0 R^2 I}{2} (R^2 + x^2)^{-5/2} = -\frac{3\mu_0 R^2 I x}{2} (R^2 + x^2)^{-5/2}$$

$$\frac{dB}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Cela confirme qu'il n'y a pas d'autre extremum qu'en $x = 0$ et que la tangente à la courbe en ce point est horizontale.

La dérivée seconde de $B(x)$ a pour expression :

$$\frac{d^2B}{dx^2} = -\frac{3\mu_0 R^2 I}{2} \frac{d}{dx} [x(R^2 + x^2)^{-5/2}]$$

Soit :

$$\frac{d^2B}{dx^2} = -\frac{3\mu_0 R^2 I}{2} \left[(R^2 + x^2)^{-5/2} - \frac{5}{2} \times 2x \times x \times (R^2 + x^2)^{-7/2} \right]$$

$$\frac{d^2B}{dx^2} = -\frac{3\mu_0 R^2 I}{2} (R^2 + x^2)^{-7/2} [R^2 - 4x^2]$$

Cette dérivée seconde s'annule pour $x = \pm \frac{R}{2}$.

La courbe représentative de $B(x)$ présente donc une inflexion en ces deux points. Voir figure 7.22.

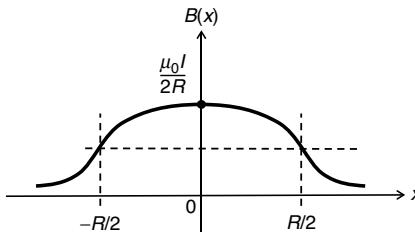


Figure 7.22

Le résultat de cet exercice peut être généralisé au calcul du champ magnétique créé dans l'axe d'un groupe de N spires de faible largeur parcourues par le même courant I et possédant le même rayon R . Dans ce cas, on a :

$$B(x) = \frac{\mu_0 N R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

3. Considérons un élément de courant $d\vec{l}$ situé en un point P de la spire (figure 7.23) et calculons le champ élémentaire $d\vec{B}$ créé par cet élément en M. Soit r la distance entre P et M et α l'angle sous lequel $d\vec{l}$ est vu du point O.

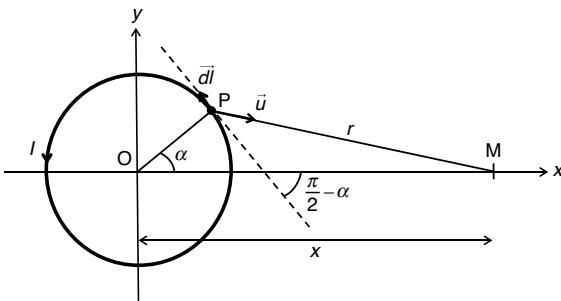


Figure 7.23

On a :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

Les deux vecteurs $d\vec{l}$ et \vec{u} appartiennent tous les deux au plan Oxy. Le vecteur $d\vec{B}$ est donc parallèle à Oz. Toutefois, en fonction de la position de P sur la spire, son signe peut varier. Il est donc plus commode d'écrire :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge (\vec{PO} + \vec{OM})}{PM^3}$$

Calculons séparément le produit vectoriel :

$$I\bar{dl} \wedge (\bar{PO} + \bar{OM}) = \begin{pmatrix} -Idl \sin \alpha \\ Idl \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} -R \cos \alpha \\ -R \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Soit :

$$I\bar{dl} \wedge (\bar{PO} + \bar{OM}) = \begin{pmatrix} -Idl \sin \alpha \\ Idl \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x - R \cos \alpha \\ -R \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I\bar{dl} \wedge (\bar{PO} + \bar{OM}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ IRdl \sin^2 \alpha - Ixdl \cos \alpha + IRdl \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

$$I\bar{dl} \wedge (\bar{PO} + \bar{OM}) = Idl(R - x \cos \alpha) \bar{k}$$

Donc :

$$\bar{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl(R - x \cos \alpha)}{PM^3} \bar{k}$$

Par ailleurs :

$$r = PM = \sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \alpha}$$

D'où :

$$\bar{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl(R - x \cos \alpha)}{(R^2 + x^2 - 2Rx \cos \alpha)^{3/2}} \bar{k}$$

Il faut à présent intégrer cette expression sur l'ensemble du périmètre de la spire. Par expérience, nous savons qu'il est toujours plus facile d'intégrer des fonctions trigonométriques. Remplaçons donc dl par son expression en fonction d'une variation angulaire (voir figure 7.24) :

$$d\alpha = \frac{dl}{R}$$

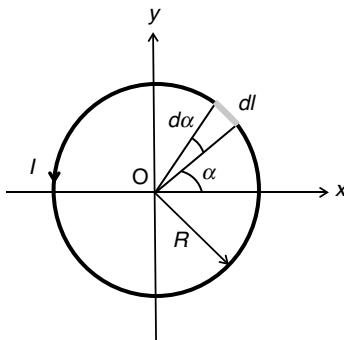


Figure 7.24

D'où :

$$dB = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \frac{(R - x \cos \alpha)}{(R^2 + x^2 - 2Rx \cos \alpha)^{3/2}} d\alpha$$

Il nous est suggéré dans l'énoncé que $x \gg R$. Nous allons effectuer un développement limité de l'expression se trouvant au dénominateur :

$$dB = \frac{\mu_0 IR}{4\pi x^3} \frac{(R - x \cos \alpha)}{\left(1 - 2\frac{R}{x} \cos \alpha + \frac{R^2}{x^2}\right)^{3/2}} d\alpha \approx \frac{\mu_0 IR}{4\pi x^3} \frac{(R - x \cos \alpha)}{1 - \frac{3}{2}\left(\frac{R}{x} \cos \alpha\right)} d\alpha$$

D'où :

$$dB \approx \frac{\mu_0 IR}{4\pi x^3} (R - x \cos \alpha) \left(1 + 3\frac{R}{x} \cos \alpha\right) d\alpha$$

On obtient le champ total créé en M en faisant varier α de 0 à 2π .

Auparavant, développons l'expression de manière à intégrer des formes simples :

$$B(x) \approx \frac{\mu_0 IR}{4\pi x^3} \int_0^{2\pi} \left(R + 3\frac{R^2}{x} \cos \alpha - x \cos \alpha - 3R \cos^2 \alpha\right) d\alpha$$

Remarquons que $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1)$.

Donc :

$$3R \cos^2 \alpha = \frac{3}{2}R \cos 2\alpha + \frac{3}{2}R$$

D'où :

$$\begin{aligned} B(x) &\approx \frac{\mu_0 IR}{4\pi x^3} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{R}{2} + \left(3\frac{R^2}{x} - x\right) \cos \alpha - \frac{3}{2}R \cos 2\alpha\right] d\alpha \\ B(x) &\approx \frac{\mu_0 IR}{4\pi x^3} \left[\int_0^{2\pi} \left(-\frac{R}{2}\right) d\alpha + \int_0^{2\pi} \left(3\frac{R^2}{x} - x\right) \cos \alpha d\alpha + \int_0^{2\pi} \left(-\frac{3}{2}R \cos 2\alpha\right) d\alpha \right] \end{aligned}$$

Comme l'intégrale d'une fonction $\cos n\alpha$ entre 0 et 2π est nulle, cette expression se résume à :

$$B(x) = \frac{\mu_0 IR}{4\pi x^3} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\mu_0 IR}{4\pi x^3} \left(-\frac{R}{2}\right) \times 2\pi = -\frac{\mu_0 IR^2}{4x^3}$$

Ou encore, sous forme vectorielle :

$$\overline{B(x)} = -\frac{\mu_0 IR^2}{4x^3} \vec{k}$$

Le champ magnétique est dirigé selon les z décroissants puisque son expression est négative. Ceci est représenté sur la figure 7.25. Si le courant I avait été orienté dans l'autre sens, le champ magnétique aurait été bien évidemment positif.

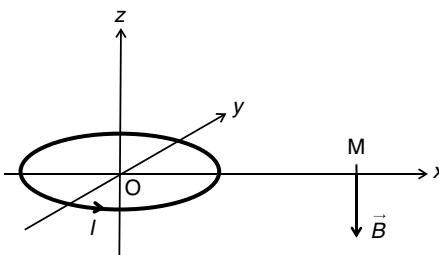


Figure 7.25

4. Considérons une spire particulière de la sphère, repérée par son abscisse x sur l'axe Ox ou encore par l'angle α qu'elle forme avec le point O (figure 7.26). Soit r le rayon de cette spire. Conformément au résultat de l'exercice 2 de ce chapitre, cette spire crée au point O situé à une distance x , le champ magnétique :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 r^2 I}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} \vec{i}$$

Compte tenu de l'orientation du courant, ce champ est bien positif (règle du tire-bouchon).

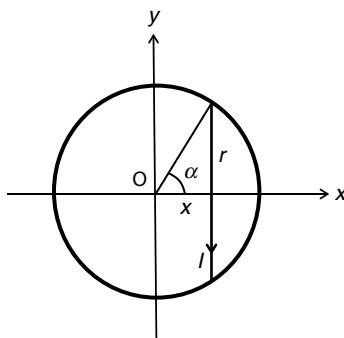


Figure 7.26

Considérons à présent un groupe de dn spires, situées autour de la spire précédente, dn étant suffisamment petit pour pouvoir considérer que toutes ces spires sont positionnées en x , qu'elles ont toutes le même rayon r et qu'elles produisent le même champ magnétique en O. Ces dn spires sont disposées autour de la sphère entre les angles α et $\alpha + d\alpha$ (figure 7.27).

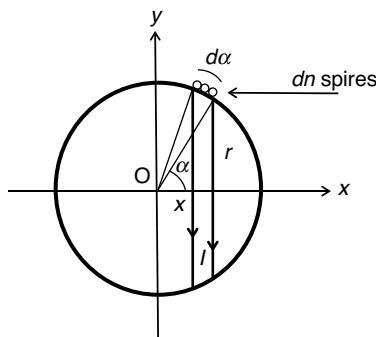


Figure 7.27

Comme le nombre total de spires sur la sphère est égal à N (correspondant à un angle π), on a : $dn = \frac{N}{\pi} d\alpha$.

Le groupe de dn spires crée donc en O le champ élémentaire :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 r^2 I}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} \frac{N}{\pi} d\alpha \vec{i}$$

Ce champ magnétique étant paramétré par l'angle α , exprimons les variables en fonction de cet angle de manière à intégrer facilement pour α variant entre 0 et π . De simples considérations géométriques sur la figure 7.26 nous donnent immédiatement :

$$r = R \sin \alpha \text{ et } x = R \cos \alpha$$

D'où :

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0 R^2 I \sin^2 \alpha}{2(R^2 \sin^2 \alpha + R^2 \cos^2 \alpha)^{3/2}} \frac{N}{\pi} d\alpha \vec{i}$$

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0 R^2 N I \sin^2 \alpha}{2\pi R^3} d\alpha \vec{i} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R} \sin^2 \alpha d\alpha \vec{i}$$

On a alors :

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R} \left(\int_0^\pi \sin^2 \alpha d\alpha \right) \vec{i}$$

Comme $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, on a :

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 N I}{4\pi R} \left(\int_0^\pi d\alpha - \int_0^\pi \cos 2\alpha d\alpha \right) \vec{i}$$

Soit, en module :

$$\|\bar{B}\| = \frac{\mu_0 N I}{4\pi R} \left(\pi - \left[\frac{\sin 2\alpha}{2} \right]_0^\pi \right) = \frac{\mu_0 N I}{4\pi R} (\pi - 0)$$

Au final :

$$\|\bar{B}\| = \frac{\mu_0 N I}{4R} \text{ ou encore } \bar{B} = \frac{\mu_0 N I}{4R} \vec{i}$$

5. Le champ magnétique \bar{B} présent en M résulte de la superposition du champ qui est créé par le fil A, soit \bar{B}_1 , et du champ qui y est créé par le fil B, soit \bar{B}_2 :

$$\bar{B} = \bar{B}_1 + \bar{B}_2$$

Nous avons déjà démontré (exercice 1 de ce chapitre), que le champ magnétique créé par un conducteur en un point quelconque M de son voisinage est contenu dans le plan qui passe par M et qui est orthogonal au fil.

En conséquence, les deux vecteurs \bar{B}_1 et \bar{B}_2 appartiennent au plan Oxy. Il en est donc de même pour le vecteur \bar{B} . Projetons alors le problème dans ce plan (figure 7.28).

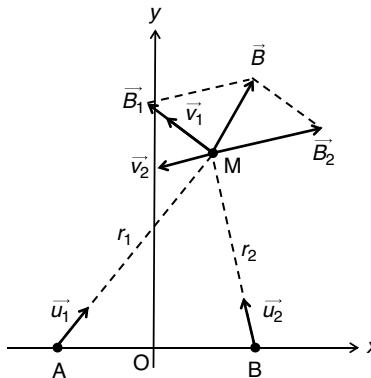


Figure 7.28

Soient \bar{u}_1 et \bar{u}_2 les vecteurs unitaires respectivement portés par les droites (AM) et (BM) et orientés vers M et soient \bar{v}_1 et \bar{v}_2 les deux vecteurs unitaires qui leur sont respectivement

orthoradiaux en M. La règle de l'observateur d'Ampère permet de déterminer le sens de \vec{B}_1 et de \vec{B}_2 .

On a :

$$\vec{B}_1 = B_1 \vec{v}_1 \text{ et } \vec{B}_2 = -B_2 \vec{v}_2$$

Il suffit alors d'appliquer pour chacun de ces deux vecteurs l'expression du champ créé par un conducteur filiforme parcouru par un courant I :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \vec{v}_1 \text{ et } \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \vec{v}_2$$

D'où :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \vec{v}_1 - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \vec{v}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{\vec{v}_1}{r_1} - \frac{\vec{v}_2}{r_2} \right)$$

Si M appartient à l'axe Ox, on peut poser : $r_1 = r_2 = r$

Par ailleurs, si on appelle α l'angle formé par l'axe Ox et la droite (AM), alors les vecteurs \vec{B}_1 et \vec{B}_2 forment ce même angle α avec l'axe Oy (figure 7.29). Le vecteur champ magnétique \vec{B} étant donc parallèle à Oy, on peut écrire :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 2B_{1y} \vec{j} = 2B_{2y} \vec{j}$$

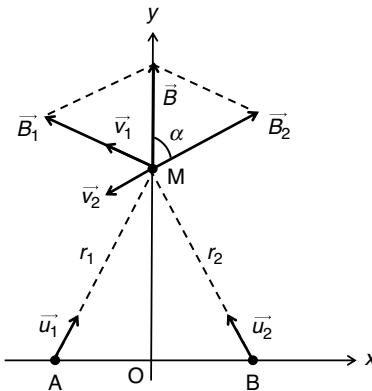


Figure 7.29

On a donc :

$$\vec{B} = 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \alpha \vec{j}$$

$$\text{Or : } r = \sqrt{y^2 + a^2} \text{ et } \cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

Au final :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{\pi(y^2 + a^2)} \vec{j}$$

6. Considérons (figure 7.30) un élément de longueur dx du solénoïde comportant donc un nombre ndx de spires et situé à une distance x du point M. Conformément au résultat de l'exercice 2 de ce chapitre, cet ensemble de spires circulaires crée en M un champ magnétique $d\vec{B}$ tel que :

$$dB = \frac{\mu_0 I R^2 n dx}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Compte tenu de l'orientation du courant, ce champ est dirigé selon les x croissants. Soit en notant \vec{i} un vecteur unitaire de l'axe Ox :

$$\overline{dB} = \frac{\mu_0 I R^2 n dx}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{i}$$

Le point M étant repéré par les deux angles θ_1 et θ_2 (figure 7.15), il sera plus commode d'intégrer cette expression en faisant apparaître une quantité $d\theta$.

$$\text{On a : } x = \frac{R}{\tan \theta} \Rightarrow dx = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$$

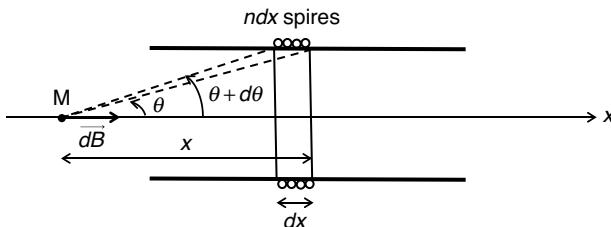


Figure 7.30

Soit :

$$dB = -\frac{\mu_0 I R^2 n}{2\left(R^2 + \frac{R^2}{\tan^2 \theta}\right)^{3/2}} \times \frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$dB = -\frac{\mu_0 I R^3 n d\theta}{2R^3 \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}\right)^{3/2}}$$

$$\text{Or : } 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

D'où :

$$dB = -\frac{\mu_0 I R^3 n d\theta}{2R^3 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\sin^2 \theta}\right)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 n l \sin \theta d\theta}{2}$$

Il nous reste à intégrer cette expression du champ élémentaire entre θ_1 et θ_2 :

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dB = -\frac{\mu_0 n l}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta$$

Soit :

$$B = -\frac{\mu_0 n l}{2} [-\cos \theta]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\mu_0 n l}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

On obtient l'expression du champ magnétique régnant le long de l'axe d'un solénoïde de longueur infinie en faisant tendre θ_1 vers π et θ_2 vers 0 :

$$B = \frac{\mu_0 n l}{2} (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{\mu_0 n l}{2} (1 + 1)$$

Donc :

$$B = \mu_0 n l$$

7. Avant même de calculer le champ magnétique en tout point situé à l'intérieur du solénoïde, nous pouvons déjà prévoir, compte tenu de la symétrie du système, que ce champ est parallèle à Ox et qu'il ne dépend pas de x . Il est donc constant pour une ordonnée y donnée (figure 7.31). Considérons un tronçon de longueur L de ce solénoïde et un chemin ABCD sur lequel nous pouvons calculer la circulation du champ magnétique. Choisissons cette courbe (ABCD) rectangulaire en faisant coïncider l'un de ses côtés avec l'axe Ox où nous connaissons le champ (exercice précédent). Soit B le champ magnétique inconnu régnant le long du côté DA de la courbe et B_0 le champ régnant sur l'axe.

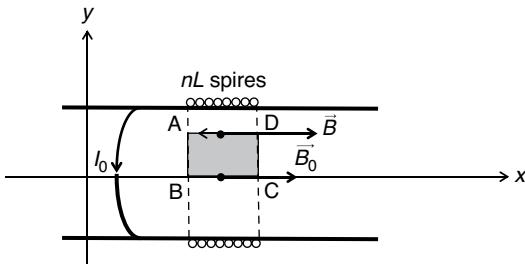


Figure 7.31

Appliquons le théorème d'Ampère en calculant la circulation du champ magnétique sur le contour ABCD :

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Dans cette expression, I représente la somme algébrique des courants circulant au travers de la surface délimitée par la courbe ABCD. Pour notre cas de figure, il est clair que $I = 0$. Par ailleurs, puisque le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est en tout point parallèle à Ox , sa circulation le long des segments AB et CD est nulle. On a donc :

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{BC} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} + \oint_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Soit :

$$\vec{B}_0 \cdot \vec{BC} + \vec{B} \cdot \vec{DA} = 0$$

$$B_0 L - BL = 0$$

Remarque : attention au signe du produit scalaire.

Finalement :

$$B = B_0$$

Le champ magnétique est donc constant et égal à $B_0 = \mu_0 n l_0$ en tout point situé à l'intérieur du solénoïde.

Pour calculer le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde, considérons à présent la circulation du champ le long de la nouvelle courbe ABCD représentée sur la figure 7.32.

Soit \vec{B}_{ext} le champ magnétique régnant en un point quelconque du segment DA à l'extérieur du solénoïde. Pour des raisons de symétrie, ce champ, s'il existe, est parallèle à Ox . Faisons coïncider le segment BC avec l'axe du solénoïde, là où règne le champ \vec{B}_0 .

(N'importe quel axe parallèle à Ox peut convenir puisque le champ est constant à l'intérieur du solénoïde).

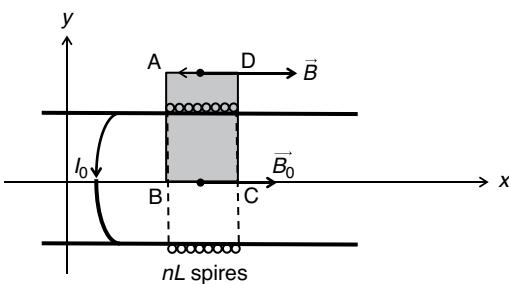


Figure 7.32

Appliquons le théorème d'Ampère en calculant la circulation du champ magnétique sur le contour ABCD :

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

À présent, un courant total $I = nLI_0$ traverse la surface s'appuyant sur le contour ABCD. Par ailleurs, la circulation du champ le long de AB et de CD est toujours nulle puisque le champ est orthogonal aux vecteurs \overline{AB} et \overline{CD} . On a donc :

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{BC} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} + \oint_{DA} \vec{B}_{ext} \cdot d\vec{l} = \mu_0 nLI_0$$

Soit :

$$\overline{B}_0 \cdot \overline{BC} + \overline{B}_{ext} \cdot \overline{DA} = \mu_0 nLI_0$$

$$B_0 L - B_{ext} L = \mu_0 nLI_0$$

Or : $B_0 = \mu_0 nI_0$

Soit :

$$\mu_0 nLI_0 - B_{ext} L = \mu_0 nLI_0$$

D'où :

$$B_{ext} = 0$$

Cet exercice a permis de démontrer deux résultats absolument fondamentaux concernant le solénoïde de longueur infinie (autrement dit de grande longueur) : le champ magnétique est uniforme à l'intérieur des spires et nul en tout point situé à l'extérieur. On considérera ces résultats comme valables pour un solénoïde de longueur finie à condition de ne pas se situer vers les extrémités de ce solénoïde.

8. Considérons un élément linéique de la nappe, de coordonnée y et de largeur dy , coupant l'axe Oy en un point A.

Le champ magnétique $d\vec{B}$ créé en M par cet élément qui peut être assimilé à un conducteur rectiligne parcouru par un courant jdy a pour expression :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 jdy}{2\pi r} \hat{v}$$

\hat{v} est un vecteur unitaire orthogonal à \overline{AM} et à \vec{j} . La règle de l'observateur d'Ampère nous permet d'orienter ce vecteur $d\vec{B}$ sur la figure 7.33.

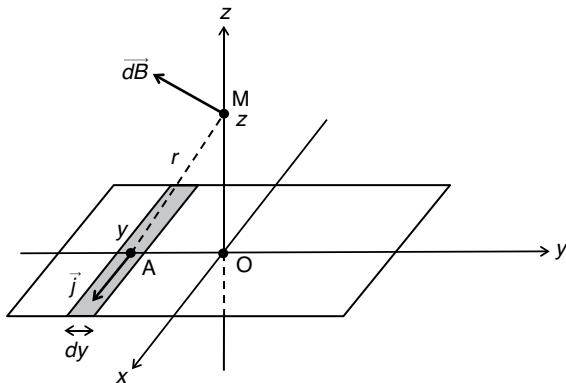


Figure 7.33

Il est contenu dans le plan Oyz et il est donc plus commode de le visualiser sur la figure 7.34 qui représente la projection du problème dans ce plan.

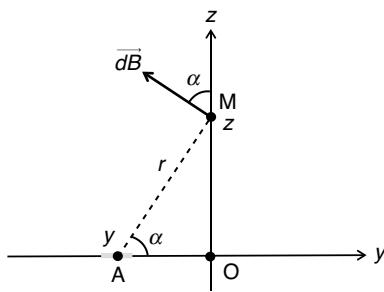


Figure 7.34

L'astuce consiste à calculer le champ élémentaire $\overrightarrow{dB'}$ résultant de la superposition en M du champ créé par cet élément linéique et du champ $\overrightarrow{dB_s}$ créé par son symétrique par rapport à Oz . Ce champ $\overrightarrow{dB_s}$ pouvant facilement être positionné en utilisant la règle de l'observateur d'Ampère, il est clair que pour des raisons de symétrie, le champ $\overrightarrow{dB'}$ est parallèle à Oy , dirigé selon les y décroissants (figure 7.35) et que son intensité est égale au double de la projection de \overrightarrow{dB} sur cet axe.

Ainsi :

$$\overrightarrow{dB'} = -2dB \sin \alpha \overrightarrow{e_y}$$

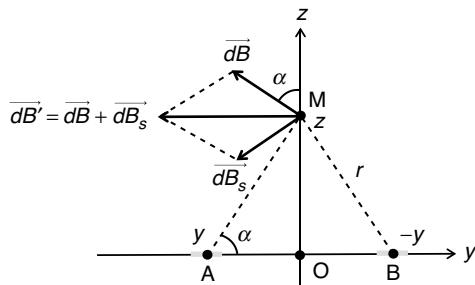


Figure 7.35

Remarque : afin d'éviter toute confusion avec le vecteur densité de courant, nous notons ici $\overrightarrow{e_y}$ le vecteur unitaire de l'axe Oy .

On a donc :

$$\overrightarrow{dB'} = -2 \frac{\mu_0 j dy}{2\pi r} \sin \alpha \overrightarrow{e_y} = -\frac{\mu_0 j dy \sin \alpha}{\pi r} \overrightarrow{e_y}$$

Pour intégrer cette expression pour α variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, exprimons toutes les variables en fonction de cet angle :

$$y = -\frac{z}{\tan \alpha} \Rightarrow dy = \frac{zd\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

Attention : sur notre schéma, y est négatif.

De plus :

$$r = \frac{z}{\sin \alpha}$$

Donc :

$$\overrightarrow{dB'} = -\frac{\mu_0 j \sin^2 \alpha}{\pi z} \frac{zd\alpha}{\sin^2 \alpha} \overrightarrow{e_y}$$

Soit :

$$\overrightarrow{dB'} = -\frac{\mu_0 j}{\pi} d\alpha \overrightarrow{e_y}$$

Le champ créé en M par la nappe de courant a donc pour expression :

$$\overrightarrow{B} = -\frac{\mu_0 j}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\alpha \overrightarrow{e_y} = -\frac{\mu_0 j}{2} \overrightarrow{e_y}$$

Le champ magnétique en M ne dépend pas de l'altitude z du point. En conséquence, le champ créé par la nappe de courant de dimensions infinies est uniforme dans tout l'espace.

9. Le système possédant une symétrie de révolution parfaite autour de l'axe Oz, le champ magnétique en un point M quelconque de l'espace ne dépend que de la distance r qui le sépare de l'axe Oz. On peut donc le noter $\overrightarrow{B(r)}$. De plus, la règle de l'observateur d'Ampère (figure 7.36) nous montre immédiatement que $\overrightarrow{B(r)}$ est dirigé dans le sens de rotation direct autour de l'axe Oz. Il s'agit d'un champ orthoradial.

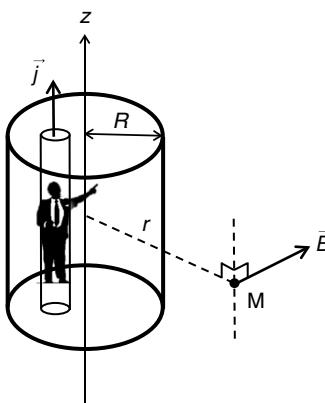


Figure 7.36

Calcul du champ à l'extérieur du cylindre

Puisqu'il s'agit d'appliquer le théorème d'Ampère, choisissons un contour relativement simple à partir duquel on pourra calculer la circulation du champ. Comme le champ ne dépend que de r , optons pour un contour circulaire passant par M. La figure 7.37 illustre ce choix dans une projection dans un plan orthogonal à Oz.

La circulation du champ magnétique le long de ce contour (L) a pour expression :

$$C = \oint_L \vec{B}(r) \cdot d\vec{l}$$

Or en tout point de ce cercle, le vecteur champ est tangent au contour. La quantité $\vec{B}(r) \cdot d\vec{l}$ est donc constante (bien noter que l'on a choisi le contour pour qu'il en soit ainsi) et on a :

$$C = \oint_L \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = B(r) \times 2\pi r$$

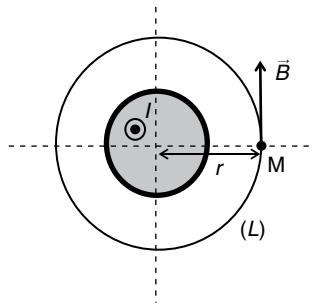


Figure 7.37

D'après le théorème d'Ampère :

$$C = B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I$$

Comme I représente la somme algébrique des courants qui traversent la surface s'appuyant sur le contour, on a naturellement $I = I_0$. D'où l'expression du champ magnétique :

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$$

Calcul du champ à l'intérieur du cylindre

Soit M un point quelconque situé à l'intérieur du conducteur à une distance r de l'axe. Nous allons appliquer la même méthode que pour le calcul du champ externe mais en choisissant, cette fois, un contour circulaire passant par M, donc contenu dans une section du conducteur (figure 7.38).

La circulation du champ magnétique le long de ce contour (L) a toujours pour expression :

$$C = \oint_L \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = B(r) \times 2\pi r$$

D'après le théorème d'Ampère, on a toujours :

$$C = B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I$$

I représente toujours la somme algébrique des courants qui traversent la surface s'appuyant sur le contour. Dans le cas d'un contour placé à l'intérieur du conducteur, le courant qui traverse cette surface (S) a pour expression, par définition :

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

La densité de courant étant constante et normale à la section du conducteur, on a :

$$I = j\pi r^2$$

D'où :

$$B(r) \times 2\pi r = \mu_0 j\pi r^2$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 j\pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 jr}{2}$$

On peut remplacer j par son expression en fonction du courant I_0 :

$$j = \frac{I_0}{\pi R^2}$$

Soit :

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R^2} r$$

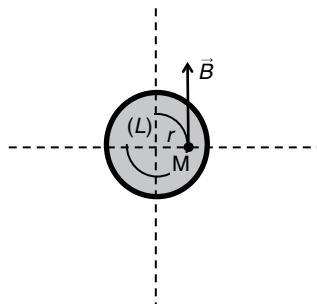


Figure 7.38

Tracé du champ magnétique

Il suffit de tracer sur un même diagramme (figure 7.39) les deux expressions trouvées en remarquant la continuité du champ en $r = R$.

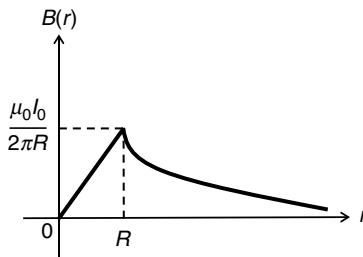


Figure 7.39

- 10.** Considérons un élément de surface dS du disque en forme de couronne circulaire comprise entre les rayons r et $r + dr$ (figure 7.40).

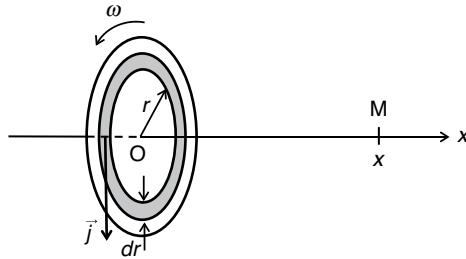


Figure 7.40

Les charges présentes sur la surface dS étant en mouvement, elles forment un courant dl de densité j . Cette densité, par définition, correspond à l'expression $j = \sigma \vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse de translation des charges. On a donc :

$$j = \sigma \omega r$$

Comme $j = \frac{dl}{dr}$, on a :

$$dl = \sigma \omega r dr$$

Exploitons (encore une fois) le résultat de l'exercice 2 de ce chapitre : la spire de rayon r et d'épaisseur dr produit un M un champ magnétique \overline{dB} parallèle à Ox , orienté selon les x croissants et dont l'intensité est :

$$dB = \frac{\mu_0 r^2 dl}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 r^2 \sigma \omega r dr}{2(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Soit :

$$dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \frac{r^3}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dr$$

Comme nous en avons désormais l'habitude, exprimons la variable r à l'aide d'un paramètre angulaire afin de pouvoir intégrer plus facilement. La figure 7.41 nous conduit à considérer les équations suivantes :

$$r = x \tan \alpha \Rightarrow dr = x \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

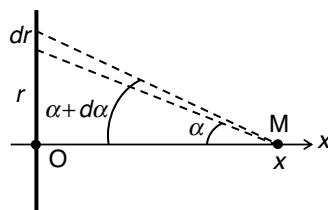


Figure 7.41

Remplaçons à présent r et dr par ces expressions dans dB :

$$dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \frac{x^3 \tan^3 \alpha}{(x^2 \tan^2 \alpha + x^2)^{3/2}} \times x \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \frac{x^4 \tan^3 \alpha}{x^3 (\tan^2 \alpha + 1)^{3/2} \cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0 \sigma \omega x \cos^3 \alpha \tan^3 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega x}{2} \cos \alpha \tan^3 \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \sigma \omega x}{2} \cos \alpha \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0 \sigma \omega x}{2} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

Remarque : toujours rechercher la forme trigonométrique la plus simple.

Intégrons cette expression en faisant varier α de 0 à α_0 , angle limite défini sur la figure 7.42.

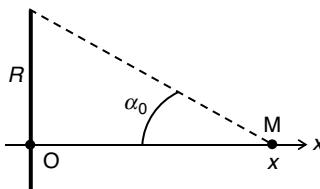


Figure 7.42

Attention : ne pas intégrer de $-\alpha_0$ à α_0 . On balaie toute la surface du disque en n'intégrant que de 0 à α_0 .

On a :

$$B(x) = \int_0^{\alpha_0} dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega x}{2} \int_0^{\alpha_0} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

Remarquons que :

$$\sin^3 \alpha d\alpha = \sin^2 \alpha \sin \alpha d\alpha = -\sin^2 \alpha \times d(\cos \alpha) = (\cos^2 \alpha - 1)d(\cos \alpha)$$

Donc :

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{\mu_0 \sigma \omega x}{2} \int_0^{\alpha_0} \frac{(\cos^2 \alpha - 1)d(\cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} \\ B(x) &= \frac{\mu_0 \sigma \omega x}{2} \int_0^{\alpha_0} \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) d(\cos \alpha) = \frac{\mu_0 \sigma \omega x}{2} \left[\cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}\right]_0^{\alpha_0} \\ B(x) &= \frac{\mu_0 \sigma \omega x}{2} \left[\cos \alpha_0 + \frac{1}{\cos \alpha_0} - 2\right] \end{aligned}$$

Or d'après la figure 7.42, on a :

$$\cos \alpha_0 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{\mu_0 \sigma \omega x}{2} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} + \frac{\sqrt{x^2 + R^2}}{x} - 2 \right] \\ B(x) &= \frac{\mu_0 \sigma \omega x}{2} \left[\frac{2x^2 + R^2}{x\sqrt{x^2 + R^2}} - 2 \right] = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{2x^2 + R^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 2x \right] \end{aligned}$$

Si $x \gg R$, on peut effectuer un développement limité en $\frac{R}{x}$:

$$B(x) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{2x^2 + R^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 2x \right] = \frac{\mu_0 \sigma \omega x^2}{2R} \left[R \frac{2 + \frac{R^2}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} - 2 \frac{R}{x} \right]$$

$$B(x) \approx \frac{\mu_0 \sigma \omega x^2}{2R} \left[\frac{2\frac{R}{x} + \frac{R^3}{x^3} - 2\frac{R}{x} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2} - \frac{1}{8}\frac{R^4}{x^4}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2} - \frac{1}{8}\frac{R^4}{x^4}\right)} \right]$$

$$B(x) \approx \frac{\mu_0 \sigma \omega x^2}{2R} \left[\frac{\frac{1}{4}\frac{R^5}{x^5}}{\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2} - \frac{1}{8}\frac{R^4}{x^4}\right)} \right] \approx \frac{\mu_0 \sigma \omega x^2}{2R} \times \frac{1}{4}\frac{R^5}{x^5} = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^4}{8x^3}$$

11. Calcul direct

La relation $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ se traduit, en coordonnées cartésiennes, par les expressions données dans la fiche 7 de ce chapitre :

$$B_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \quad B_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \quad B_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

La nappe de courant étant de dimensions infinies, la position du point M dans le plan parallèle à Oxy d'altitude z n'a aucune importance. Le potentiel vecteur \vec{A} ne peut donc en aucun cas dépendre de x ou de y . On a donc :

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$$

D'où :

$$B_x = \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \quad B_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \quad B_z = 0$$

On sait déjà, d'après le résultat de l'exercice 8 de ce chapitre, que le champ \vec{B} en M a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_0 j}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} = -\frac{\mu_0 j}{2} \end{cases}$$

A_y et A_x ne dépendant ni de x ni de y , on en déduit :

$$\begin{cases} A_y = C_1 \\ A_x = -\frac{\mu_0 j}{2}z + C_2 \end{cases}$$

Deux problèmes se posent : la détermination des deux constantes ainsi que l'absence de l'expression de la composante A_z du potentiel vecteur.

Nous avons dans la fiche 7 qu'il était possible de calculer le potentiel vecteur directement à partir de l'expression :

$$\overline{A(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Idl}{r}$$

Cette expression suggère que le potentiel vecteur est parallèle au vecteur densité de courant. Dans notre cas, cela implique :

$$\begin{cases} A_x = -\frac{\mu_0 j}{2} z + C_2 \\ A_y = 0 \\ A_z = 0 \end{cases}$$

Nous ne pouvons pas déterminer la constante C_2 , ce qui laisse penser que le potentiel vecteur est défini à une constante près.

Calcul à l'aide du théorème de Stokes-Ampère

Nous ne redémontrerons pas, évidemment, que le potentiel vecteur est dirigé selon l'axe Ox et qu'il ne dépend que de z. On peut donc noter son intensité $A_x(z)$. Soient M et N deux points de l'axe Oz d'altitudes respectives z_2 et z_1 . Le même champ magnétique \vec{B} règne en ces deux points, comme en tout point de l'espace. Choisissons une surface (S) s'appuyant sur un contour (L) rectangulaire contenu dans le plan Oxz (figure 7.43).

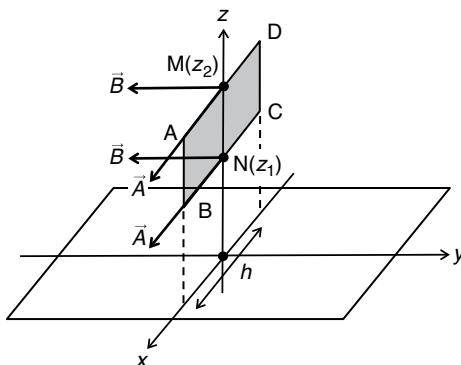


Figure 7.43

Cette surface n'est pas choisie par hasard : elle est perpendiculaire au champ magnétique ; le flux sera donc très facile à calculer. Par ailleurs la circulation du potentiel vecteur le long du contour de cette surface se limitera aux deux segments horizontaux.

Soit ABCD le contour sur lequel nous allons calculer la circulation du potentiel vecteur. Soit h la largeur de ce contour. Sa hauteur est bien évidemment égale à $z_2 - z_1$. Le théorème de Stokes-Ampère prévoit que :

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Or :

$$\oint_{ABCD} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{AB} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \oint_{BC} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \oint_{CD} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \oint_{DA} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Soit :

$$\oint_{ABCD} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0 - A_x(z_1)h + 0 + A_x(z_2)h$$

Par ailleurs :

$$\phi = \iint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = B \times (z_2 - z_1)h = -\frac{\mu_0 j}{2}(z_2 - z_1)h$$

Donc :

$$[A_x(z_2) - A_x(z_1)]h = -\frac{\mu_0 j}{2}(z_2 - z_1)h$$

$$A_x(z_2) - A_x(z_1) = -\frac{\mu_0 j}{2}(z_2 - z_1)$$

Nous n'obtenons qu'une différence de potentiels vecteurs, preuve que ceux-ci ne peuvent être déterminés qu'à une constante près.

Sans véritablement retrouver le résultat trouvé à l'aide de la première méthode, nous pouvons malgré tout vérifier que cette équation est cohérente avec les expressions :

$$\begin{cases} A_x(z_2) = -\frac{\mu_0 j}{2}z_2 + C_2 \\ A_x(z_1) = -\frac{\mu_0 j}{2}z_1 + C_2 \end{cases}$$

Actions d'un champ magnétique sur des conducteurs parcourus par un courant

MOTS CLÉS

Forces de Laplace ■ moment magnétique ■ couple ■ balance de Cotton ■ mesure d'un champ magnétique ■ roue de Barlow ■ galvanomètre ■ dipôle magnétique

Au chapitre 6, nous avons étudié l'action magnétique subie par des charges en mouvement dans un champ magnétique. Nous allons à présent généraliser les résultats obtenus aux charges mobiles à l'intérieur de conducteurs, autrement dit aux courants électriques circulant dans des circuits.

Fiche 1

Forces de Laplace

Considérons un conducteur filiforme parcouru par un courant I et placé dans un champ magnétique \vec{B} (figure 8.1). Soit $d\vec{l}$ un élément de ce conducteur situé en un point M. Cet élément subit une force élémentaire dite de Laplace dont l'expression est :

$$\vec{df} = I \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

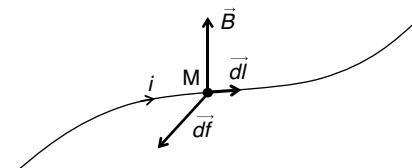


Figure 8.1

La direction et le sens de la force \vec{df} résultent des propriétés du produit vectoriel. Cette force élémentaire est donc toujours orthogonale à $d\vec{l}$ et au vecteur champ magnétique.

On peut également utiliser la règle du tire-bouchon en le faisant tourner de $d\vec{l}$ vers \vec{B} . La progression du tire-bouchon indique alors le sens de la force. On peut aussi utiliser

la règle de l'observateur d'Ampère : un observateur placé sur le conducteur de sorte que le courant le traverse des pieds à la tête et regardant dans le même sens que le champ magnétique, voit la force magnétique dirigée vers sa gauche (figure 8.2).

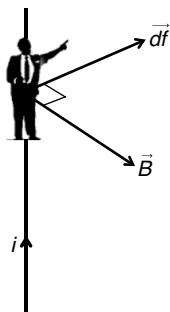


Figure 8.2

La force totale agissant sur un conducteur ou un circuit complet (C) s'obtient en intégrant les forces élémentaires de Laplace qui agissent sur chaque élément $d\vec{l}$ du conducteur ou du circuit :

$$\vec{F} = \int_C d\vec{f} = \int_C I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Attention

Le vecteur champ magnétique peut très bien varier en fonction de la position de $d\vec{l}$ et par conséquent, sauf pour le cas d'un champ uniforme, il dépend de la variable d'intégration et ne peut être sorti de l'intégrale comme une simple constante. En revanche, si le courant I est le même dans tout le circuit, ce qui est souvent le cas, alors I peut être sorti de l'intégrale.

Fiche 2

Moment magnétique

On considère un circuit filiforme de contour (L) parcouru par un courant I . Soit (S) une surface s'appuyant sur ce contour (L) (figure 8.3). On définit le moment magnétique du circuit par l'expression :

$$\vec{M} = I \int_S d\vec{S}$$

Ou encore :

$$\vec{M} = \frac{I}{2} \int_C \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{l}$$

Dans cette expression, le point O désigne n'importe quelle origine choisie arbitrairement dans l'espace.

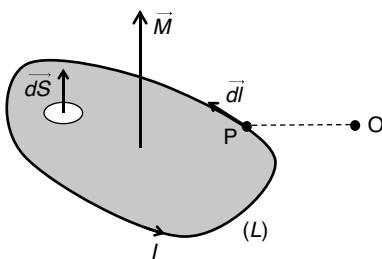


Figure 8.3

Pour un circuit plan, le moment magnétique est orthogonal à la surface s'appuyant sur le contour du circuit et orienté dans le sens direct du parcours.

Dans ce cas particulier, on a :

$$\vec{M} = I \vec{S}$$

Fiche 3

Action d'un champ magnétique uniforme sur un circuit plan

Un circuit plan parcouru par un courant I , de moment magnétique \vec{M} et placé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} (figure 8.4) est soumis à un couple de moment $\vec{\Gamma}$ tel que :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

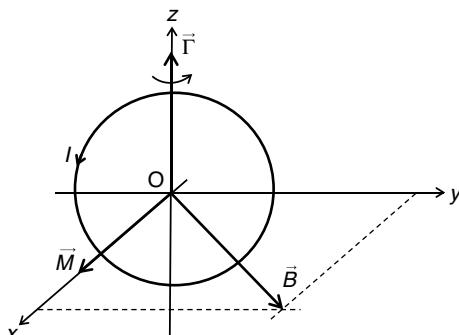


Figure 8.4

Remarque

Sur la figure 8.4, le circuit plan est contenu dans le plan Oyz. Le moment magnétique du circuit est donc porté par Ox. Le vecteur champ magnétique a été choisi appartenant au plan Oxy.

Le vecteur $\vec{\Gamma}$ est porté par l'axe orthogonal au plan (\vec{M}, \vec{B}) . Le couple de moment $\vec{\Gamma}$ a donc tendance à faire pivoter le circuit plan autour de son axe. D'une manière générale, le moment du couple $\vec{\Gamma}$ tend à ramener le moment magnétique \vec{M} dans l'alignement du champ magnétique \vec{B} .

Dans le cas représenté sur la figure 8.4, le moment du couple $\vec{\Gamma}$ tend à faire pivoter le circuit d'un huitième de tour vers la droite.

Entraînement

QCM

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être exactes.

1. Les forces de Laplace :

- a. Sont la cause de l'apparition d'un champ magnétique au voisinage d'un circuit en mouvement.
- b. Peuvent mettre en mouvement des circuits électriques placés dans un champ magnétique.
- c. Attirent des circuits électriques dans la direction du champ magnétique.
- d. Ne sont présentes que pour les conducteurs parcourus par un courant.

2. Lorsqu'un conducteur rectiligne est parcouru par un courant électrique, il subit une force qui :

- a. Tend à le déplacer latéralement.
- b. Tend à le faire pivoter.
- c. Tend à le déplacer le long de son axe.
- d. Tend à l'aligner avec le champ magnétique

3. Un moment magnétique s'exprime en :

- a. Newtons mètres.
- b. Newton mètres par tesla.
- c. Ampères mètres carrés
- d. Newtons par ampères

4. Le moment magnétique :

- a. Se manifeste par la tendance qu'a un objet à s'aligner avec le champ magnétique
- b. Caractérise l'intensité d'une source magnétique
- c. S'annule lorsqu'un circuit n'est pas placé dans un champ magnétique
- d. Permet de mesurer un champ magnétique

5. La force totale qui s'exerce sur un circuit de longueur L placé dans un champ uniforme d'intensité B et parcouru par un courant i est :

- a. Nulle.
- b. Égale à BiL .
- c. Inférieure ou égale à BiL .
- d. Supérieure ou égale à BiL .

6. Laquelle ou lesquelles de ces équations est (sont) toujours vraie(s) ?

- a. $\bar{M} = I \int_S d\bar{S}$.
- b. $\bar{M} = I \int_S d\bar{S} = I \bar{S}$.
- c. $\bar{M} = \frac{I}{2} \int_C \overline{OP} \wedge d\bar{l}$.
- d. $\bar{M} = \frac{I}{2} S^2$.

7. Dans l'expression $\bar{\Gamma} = \bar{M} \wedge \bar{B}$:

- a. Γ s'exprime en teslas.
- b. Γ s'exprime en newtons mètres carrés.
- c. Γ s'exprime en newtons mètres
- d. $\Gamma = 0$ si \bar{M} est parallèle à \bar{B}

8. Le moment magnétique d'une spire circulaire de rayon R et parcourue par un courant I :

- a. Est orthogonal au plan de la spire.
- b. A son module égal à $\|\bar{M}\| = I \times \pi \frac{R^2}{4}$.
- c. Est dans le plan de la spire.
- d. A son module égal à $\|\bar{M}\| = I \times \pi R^2$.

Réponses

1. **b et d.** Voir fiche 1.
2. **a.** Voir fiche 1, figure 8.2.
3. **b et c.** Les expressions $\bar{M} = I \int_S d\bar{S}$ et $\bar{\Gamma} = \bar{M} \wedge \bar{B}$ montrent que les deux propositions sont valables et on peut effectivement utiliser les deux même si l'ampère mètre carré est plus souvent utilisé.
4. **a et b et d.** En effet, l'expression $\bar{\Gamma} = \bar{M} \wedge \bar{B}$ montre que tout circuit (ou objet car les aimants possèdent aussi un moment magnétique) subit un couple qui tend à aligner \bar{M} sur \bar{B} . Ce phénomène est d'autant plus intense que $\|\bar{M}\|$ est élevée. D'où la réponse b. Enfin, en mesurant le couple agissant sur un objet ou un circuit dont on connaît le moment magnétique, on peut en déduire le champ magnétique qui règne autour de cet objet.
5. **c.** Dans l'expression $\bar{F} = \int_C I \bar{d}l \wedge \bar{B}$, on ne peut pas automatiquement sortir \bar{B} de l'intégrale, même s'il est constant. En effet, l'angle que forme $\bar{d}l$ et \bar{B} peut varier et le produit vectoriel s'en trouve donc affecté. À supposer que tous les éléments $\bar{d}l$ forment un angle droit avec \bar{B} , on aurait effectivement une force totale égale à BiL : $\bar{F} = I \left[\int_C \bar{d}l \right] \wedge \bar{B} = BiL$. Si tel n'est pas le cas, on ne peut obtenir qu'un résultat inférieur à BiL .
6. **a et c.** La réponse b n'est valable que dans le cas d'un circuit plan. Quant à l'expression proposée en d, elle n'est pas homogène à un moment magnétique.
7. **c et d.** Le newton mètre est bien l'unité internationale de moment d'un couple (à ne pas confondre avec le moment magnétique). Le produit vectoriel est bien nul lorsque les deux vecteurs sont parallèles.
8. **a et d.** Nous avons vu dans la fiche 2 que pour un circuit plan (et c'est bien le cas d'une spire circulaire), le moment magnétique est orthogonal à la surface s'appuyant sur le contour du circuit. On a $\bar{M} = I \bar{S}$. Soit $\|\bar{M}\| = I \|\bar{S}\| = I \times \pi R^2$.

Entraînement

Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
1. Un aimant naturel possède un moment magnétique au même titre qu'un circuit parcouru par un courant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Les forces de Laplace qui agissent sur un conducteur parcouru par un courant électrique correspondent à l'action du champ magnétique sur les atomes du matériau dont est fait le conducteur.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. La force magnétique que subit un conducteur rectiligne parcouru par un courant est toujours orthogonale au vecteur champ magnétique si celui-ci est uniforme.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Une spire circulaire parcourue par un courant et placée dans un champ magnétique uniforme parallèle à un axe orthogonal à la spire aura tendance à pivoter.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Pour calculer la force totale agissant sur un conducteur parcouru par un courant, on peut en général écrire : $\bar{F} = \int_C d\bar{f} = \int_C I d\bar{l} \wedge \bar{B} = I \int_C d\bar{l} \wedge \bar{B}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. On peut calculer le moment magnétique d'un circuit filiforme uniquement à partir du contour de ce circuit.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Une spire carrée de côté $a = 10 \text{ cm}$ parcourue par un courant de 10 A possède un moment magnétique égal à $0,1 \text{ N.m}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Le moment d'un couple de forces peut s'exprimer en newtons mètres par tesla.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Un fil conducteur rectiligne de longueur égale à un mètre, isolé dans l'espace et placé dans un champ magnétique uniforme n'est soumis à aucune force magnétique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Pour déterminer le sens d'une force magnétique, on peut utiliser la règle du tire-bouchon.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

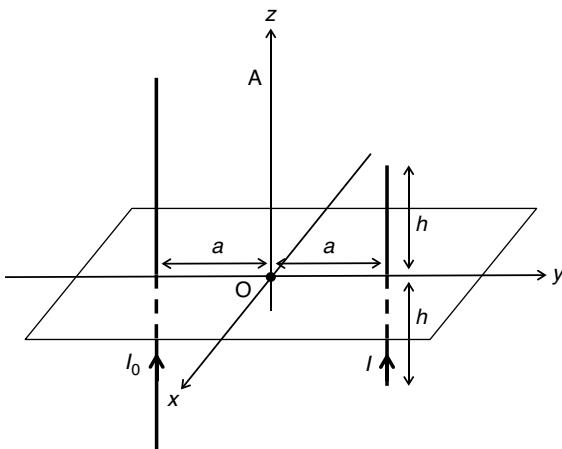
Réponses

- 1. Vrai.** Le moment magnétique d'un aimant caractérise l'intensité de la source magnétique qu'il constitue.
- 2. Faux.** Elles correspondent à l'action du champ magnétique sur les charges qui sont en mouvement dans le conducteur.
- 3. Vrai.** Dans ce cas, les forces élémentaires sont toutes orthogonales au vecteur champ et leur somme, par conséquent, l'est aussi.
- 4. Faux.** Dans ce cas, \bar{M} et \bar{B} sont parallèles et donc $\bar{\Gamma} = \bar{M} \wedge \bar{B} = \vec{0}$. La spire ne sera soumise à aucun couple et restera donc dans sa position.
- 5. Vrai.** En règle générale, on a affaire à des conducteurs parcourus par un seul et même courant. Pour l'intégrale, il est donc une constante.
- 6. Vrai.** Voir fiche 2 et figure 8.3 : $\bar{M} = \frac{I}{2} \int_C \overline{OP} \wedge d\bar{l}$
- 7. Faux.** $M = 0,1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$.
- 8. Faux.** Le moment d'un couple s'exprime toujours en newtons mètres. Encore une fois, ne pas confondre le moment d'un couple et le moment magnétique.
- 9. Vrai.** Un simple fil conducteur ne peut pas être parcouru par un courant s'il n'est pas inclus dans un circuit.
- 10. Vrai.** On peut aussi utiliser la règle de l'observateur d'Ampère.

Entraînement

Exercices

1. Un conducteur A de longueur $2h$ parcouru par un courant I est placé au voisinage d'un conducteur B de longueur infinie parcouru par un courant I_0 . Les deux conducteurs sont parallèles, séparés d'une distance $2a$ et les deux courants sont orientés dans le même sens (figure 8.5).



Calculer la force totale que le conducteur de longueur infinie exerce sur le conducteur de longueur $2h$.

Que devient cette force lorsque les deux courants sont orientés dans le sens opposé.

2. On considère le dispositif de la figure 8.6 qui représente une balance de Cotton, système permettant de mesurer l'intensité d'un champ magnétique uniforme.

Un circuit filiforme parcouru par un courant I est plongé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} . Ce circuit est composé de deux arcs de cercle AB et CD de centre O. Le segment BC possède une longueur d et est placé horizontalement, soit orthogonalement au champ magnétique qui, lui, est dirigé de l'arrière vers l'avant du schéma. Le segment DA, quant à lui, n'est pas soumis à l'action du champ magnétique.

Ce système est solidaire d'une balance que l'on cherche à maintenir en équilibre autour d'un axe passant par O, à l'aide d'une masse m .

Montrer que les actions du champ magnétique sur les segments AB et CD ne créent aucun moment autour de O.

En déduire l'expression de la force magnétique \vec{F} qui s'exerce sur le circuit et établir la relation entre le champ B et la masse m lorsque la balance est en équilibre.

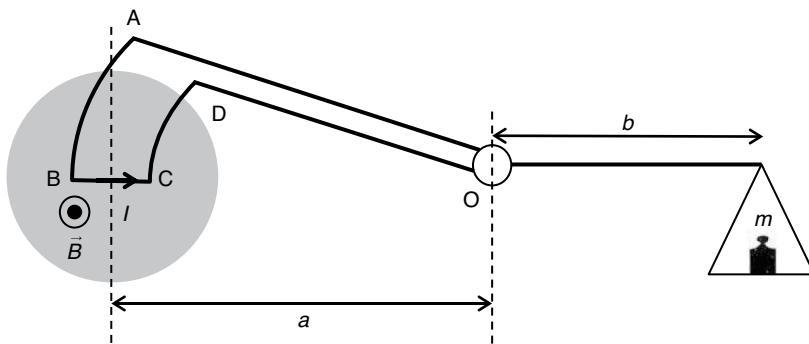


Figure 8.6

3. Un disque conducteur de centre O et de rayon R , mobile en rotation autour de son axe, est placé dans un circuit électrique de sorte qu'il est parcouru par un courant I dirigé de son centre vers sa base qui reste en contact permanent avec un bain de mercure (figure 8.7). On supposera que ce contact se produit en un point A et que le courant circule dans un volume du disque qui sera assimilé à un conducteur filiforme OA. La moitié inférieure du disque est placée dans un champ magnétique uniforme dirigé de l'arrière vers l'avant.

Calculer la force \vec{df} qui s'exerce sur un élément $d\vec{l}$ du segment conducteur OA parcouru par le courant I . Montrer que cette force crée en O un moment élémentaire qui tend à faire tourner le disque autour de son axe. Calculer le moment total qui s'exerce sur l'axe de rotation.

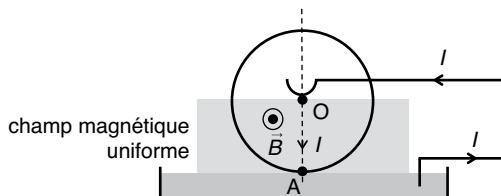


Figure 8.7

Remarque : ce dispositif est appelé roue de Barlow et est l'ancêtre du moteur électrique.

4. Une spire rectangulaire ABCD de hauteur $2b$ et de largeur $2a$ appartenant à un plan Oyz est placée dans un champ magnétique. Le vecteur \vec{B} appartient au plan Oxy (figure 8.8) et fait un angle α avec l'axe Ox. Il est uniforme dans tout l'espace. La spire est parcourue par un courant I . Calculer les forces \vec{F}_{AB} , \vec{F}_{BC} , \vec{F}_{CD} et \vec{F}_{DA} qui s'exercent respectivement sur les segments AB, BC, CD et DA du circuit. Montrer que seules \vec{F}_{AB} et \vec{F}_{CD} possèdent une résultante non nulle correspondant à un couple de moment $\vec{\Gamma}$ que l'on calculera.

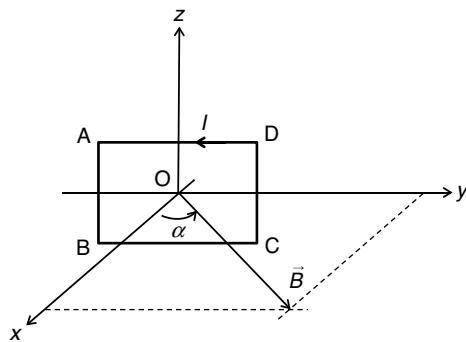


Figure 8.8

5. On reprend la spire rectangulaire décrite dans l'exercice précédent. Calculer son moment magnétique \bar{M} . En déduire directement l'expression du couple $\bar{\Gamma}$ agissant sur le circuit.
6. Un élément de circuit AB de forme quelconque contenu dans un plan Oxy est parcouru par un courant I et soumis à l'action d'un champ magnétique \vec{B} uniforme et orthogonal à ce plan (figure 8.9).
 - a. En intégrant les forces élémentaires $d\vec{f}$ qui agissent sur chaque élément de ce circuit, montrer que la force totale \vec{F} agissant sur l'ensemble du circuit ne dépend que des points A et B et non de la forme du circuit.
 - b. En déduire le module F de la force \vec{F} dans le cas où le circuit est un demi-cercle de rayon R et dans le cas où le circuit est fermé (A confondu avec B).
 - c. Soit \bar{M} le moment magnétique du circuit AB fermé. Calculer l'expression du couple $\bar{\Gamma}$ exercé par le champ magnétique sur le circuit. Montrer que le résultat est cohérent avec l'expression de \vec{F} .

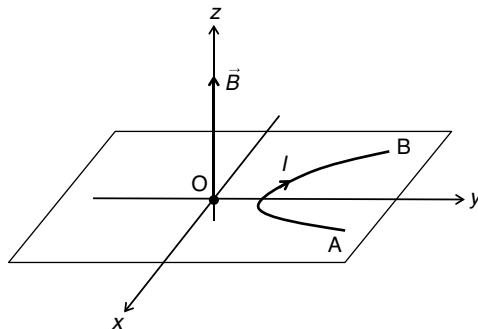


Figure 8.9

7. Un circuit carré de côté $2a$ est parcouru par un courant continu d'intensité I (figure 8.10). Calculer le champ magnétique créé en un point d'abscisse x suffisamment éloigné de O et situé sur l'axe Ox.
Exprimer ce champ en fonction du moment magnétique \bar{M} du circuit.

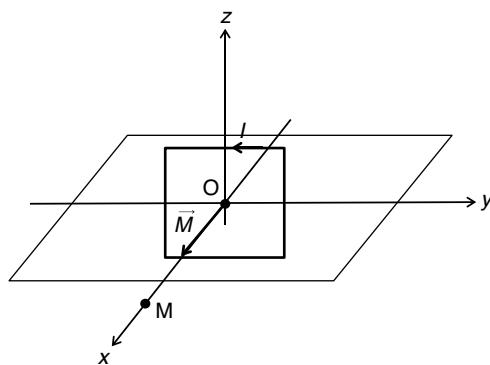


Figure 8.10

8. La figure 8.11 représente le cadre mobile d'un galvanomètre, dispositif permettant de mesurer l'intensité d'un courant. Ce cadre est composé de N spires carrées de côté a et est placé dans un champ magnétique \vec{B} uniforme. Le cadre est maintenu verticalement par deux fils qui assurent un couple de torsion dont le module est $C\alpha$.

Lorsqu'aucun courant ne circule dans le cadre, celui-ci est parallèle au champ magnétique (position de repos). En présence d'un courant I , le moment magnétique \vec{M} du circuit a tendance à s'aligner avec le champ magnétique.

Montrer que le cadre s'immobilise dans une position angulaire α repérée à partir d'une origine qui correspond à la position de repos et calculer la valeur de α , supposée petite.

Application numérique : $N = 100$, $I = 1\text{A}$, $a = 3\text{ cm}$, $B = 4 \times 10^{-3}\text{ T}$, $C = 3,53 \times 10^{-4}\text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$

Remarque : signalons que ceci n'est qu'un modèle simple du galvanomètre. Dans la réalité, le champ magnétique n'est pas uniforme et varie en fonction de la position angulaire.

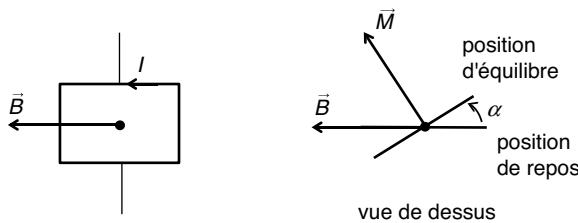


Figure 8.11

Réponses

1. Considérons un élément de longueur $d\vec{l}$ appartenant au conducteur A autour d'un point M (figure 8.12). Le champ magnétique \vec{B} régnant au point M est créé par le courant I_0 circulant dans le conducteur B de longueur infinie. Comme celui-ci se trouve à une distance $2a$, on a :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I_0}{4\pi a} \vec{i}$$

La force élémentaire $d\vec{f}$ qui s'exerce sur l'élément $d\vec{l}$ a pour expression :

$$d\vec{f} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Soit :

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= I \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dl \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 I_0}{4\pi a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_0 I_0}{4\pi a} dl \\ 0 \end{pmatrix} \\ d\vec{f} &= -\frac{\mu_0 I_0}{4\pi a} dl \vec{j} \end{aligned}$$

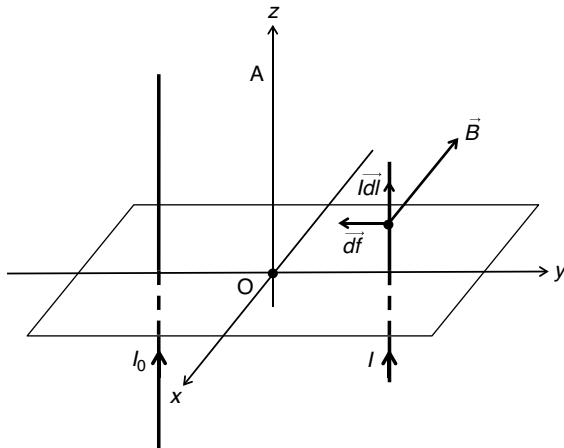


Figure 8.12

Quelle que soit la position de l'élément $d\vec{l}$ sur le conducteur A, le champ magnétique conserve la même valeur puisque le conducteur B est de longueur infinie et que la distance séparant les deux conducteurs est constante. Soit \vec{F} la force totale s'exerçant sur le conducteur A, on a donc :

$$\vec{F} = \int_L d\vec{f} = -\frac{\mu_0 I_0 I}{4\pi a} \int_{-h}^h dl \vec{j}$$

Soit :

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_0 I h}{2\pi a} \vec{j}$$

La force étant d'intensité négative, elle est dirigée selon les y décroissants ; il s'agit donc d'une force d'attraction.

Si le courant I circule dans l'autre sens (figure 8.13), l'élément $d\vec{l}$ doit être considéré dans le sens opposé à celui utilisé précédemment. Que ce soit par le calcul du produit vectoriel ou tout simplement en utilisant la règle de l'observateur d'Ampère, on remarque, de toute évidence que la force $d\vec{f}$ est désormais orientée selon les y croissants.

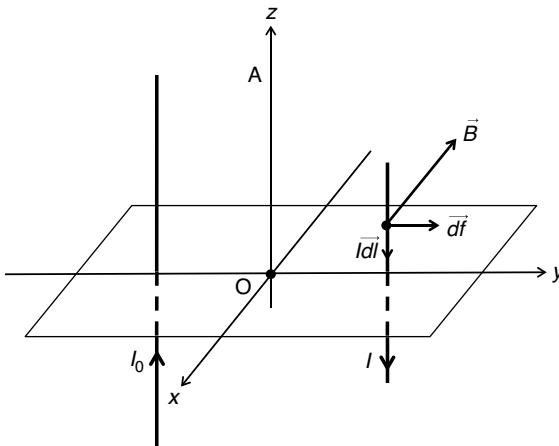


Figure 8.13

On a donc :

$$d\vec{f} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi a} |dI| \hat{j}$$

D'où :

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_0 h}{2\pi a} \hat{j}$$

La force étant positive, elle est dirigée selon les y croissants. Il s'agit donc d'une force de répulsion.

2. Considérons autour d'un point M un élément de longueur $d\vec{l}$ appartenant à la portion AB du circuit. La règle de l'observateur d'Ampère nous indique la direction et le sens de la force $d\vec{f}$ qui s'exerce sur cet élément (figure 8.14).

Cette force élémentaire est orthogonale à $d\vec{l}$. Puisque cet élément $d\vec{l}$ est un arc de cercle de centre O, le vecteur $d\vec{f}$ est parallèle à \overline{OM} . Il ne crée donc aucun moment autour de O. Cette propriété restant vraie pour tout élément de longueur de la portion AB, la force totale s'exerçant sur ce segment est donc sans influence sur l'équilibre de la balance. Il en est de même pour le segment CD puisqu'il est également constitué d'un conducteur en forme d'arc de cercle de centre O. La seule portion du circuit à subir une action magnétique influant sur l'équilibre de la balance est donc le segment BC.

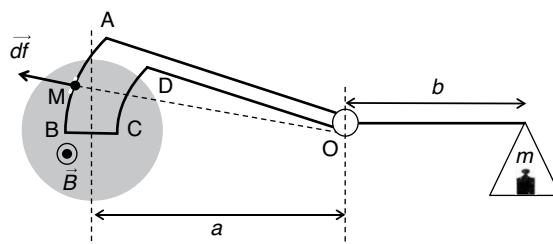


Figure 8.14

Considérons un élément $d\vec{l}$ de ce segment. Il est soumis à une force magnétique $d\vec{f}$ dirigée vers le bas (application de la règle de l'observateur d'Ampère) telle que :

$$d\vec{f} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Soit, en module :

$$df = IBdl$$

La force totale agissant sur le segment AB a pour expression :

$$F = \int_{BC} IBdl$$

Le champ étant uniforme dans la zone de l'espace où le circuit est plongé, on a :

$$F = IB \int_{BC} dl = IBd$$

Lorsque la balance est en équilibre, la somme des moments des forces s'exerçant en O est nulle. Comme on considère toujours que les moments qui tendent à faire tourner le système dans un sens sont opposés à ceux qui tendent à la faire tourner dans l'autre sens, on a :

$$IBda - bmg = 0$$

D'où :

$$B = \frac{bmg}{l da}$$

Remarque : dans la réalité, le circuit est composé de n spires qui sont toutes parcourues par le même courant I . Le circuit étant très plat, on considère que le résultat est inchangé. Il suffit de remplacer le courant I par nl :

$$B = \frac{bmg}{nlda}$$

3. Plaçons tout d'abord un repère dans l'espace : soit Oxyz. L'axe Ox est porté par (OA) et dirigé vers le bas. L'axe Oy est dirigé vers la droite. L'axe Oz est dirigé vers l'avant (même sens que le champ magnétique). Considérons un élément $d\vec{l}$ du segment OA situé à une distance l du point O. Cet élément subit une force élémentaire $d\vec{f}$ telle que :

$$d\vec{f} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

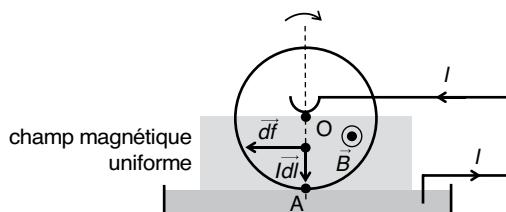


Figure 8.15

Compte tenu des propriétés du produit vectoriel ou tout simplement en considérant la règle de l'observateur d'Ampère, cette force est orthogonale à $I d\vec{l}$ et à \vec{B} , donc parallèle à Oy et dirigée selon les y décroissants. On a donc :

$$d\vec{f} = -IBdl\hat{j}$$

Cette force qui s'exerce à une distance l de l'axe crée donc un moment élémentaire dy qui tend à faire tourner le disque dans le sens trigonométrique inverse, comme indiqué sur la figure 8.15.

Vectoriellement, il s'agit d'un moment $\overline{d\gamma}$ parallèle à l'axe Oz et dirigé selon les z décroissants. On a donc $d\gamma < 0$. L'expression de ce moment est donnée par :

$$d\gamma = -IBldl$$

Pour calculer le moment total Γ qui s'exerce sur l'axe de rotation, il suffit d'intégrer cette expression sur l'ensemble du segment OA :

$$\Gamma = \int_0^R d\gamma = - \int_0^R IBldl$$

B ne dépend pas de l , donc :

$$\Gamma = -IB \int_0^R ldI = -IB \left[\frac{l^2}{2} \right]_0^R$$

Soit :

$$\Gamma = -\frac{R^2 IB}{2}$$

4. Considérons un élément de courant ldl du segment AB (figure 8.16). Cet élément subit une force élémentaire \overline{df} telle que :

$$\overline{df} = ldI \wedge \vec{B}$$

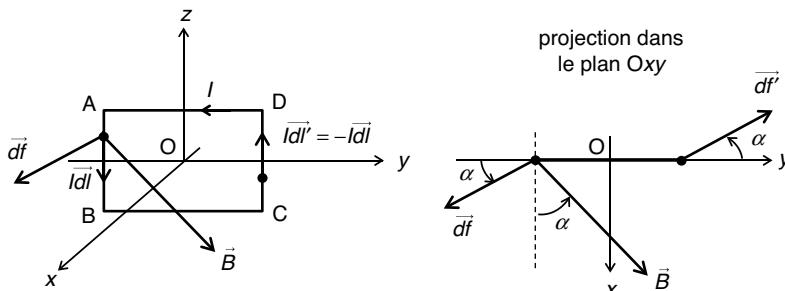


Figure 8.16

L'élément de courant symétrique appartenant à CD est caractérisé par un courant opposé, donc par une force \overline{df}' opposée. Le schéma en projection dans le plan Oxy est plus explicite. On oriente facilement le vecteur force en utilisant la règle de l'observateur d'Ampère.

On a donc :

$$\begin{cases} \overline{df} = IBldI \sin \alpha \vec{i} - IBldI \cos \alpha \vec{j} \\ \overline{df}' = -IBldI \sin \alpha \vec{i} + IBldI \cos \alpha \vec{j} \end{cases}$$

On obtient les forces $\overline{F_{AB}}$ et $\overline{F_{CD}}$ en intégrant ces expressions sur les portions de circuit concernées :

$$\begin{cases} \overline{F_{AB}} = \int_{AB} \overline{df} = 2IBb \sin \alpha \vec{i} - 2IBb \cos \alpha \vec{j} \\ \overline{F_{CD}} = \int_{CD} \overline{df}' = -2IBb \sin \alpha \vec{i} + 2IBb \cos \alpha \vec{j} \end{cases}$$

Considérons à présent un élément de courant ldl appartenant au segment BC (figure 8.17).

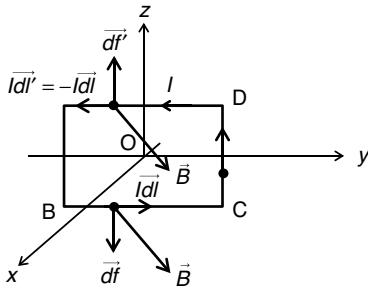


Figure 8.17

Cet élément est soumis à une force élémentaire \vec{df} telle que :

$$\vec{df} = I\vec{dl} \wedge \vec{B}$$

L'élément de courant symétrique appartenant à DA est caractérisé par un courant opposé, donc par une force \vec{df}' opposée. Compte tenu des propriétés du produit vectoriel ou en utilisant la règle de l'observateur d'Ampère, on en déduit que ces deux forces sont parallèles à l'axe Oz :

$$\begin{cases} \vec{df} = -IBdl\vec{k} \\ \vec{df}' = IBdl\vec{k} \end{cases}$$

En intégrant sur chacun des segments, on obtient :

$$\begin{cases} \overline{F_{BC}} = \int_{BC} \vec{df} = -2IBa\vec{k} \\ \overline{F_{DA}} = \int_{DA} \vec{df}' = 2IBa\vec{k} \end{cases}$$

La géométrie de ce système de quatre forces nous montre que $\overline{F_{AB}}$ et $\overline{F_{CD}}$ constituent un couple de forces. $\overline{F_{BC}}$ et $\overline{F_{DA}}$ s'équilibrivent et n'ont aucune action résultante sur le circuit.

Ce sont au final les composantes selon Ox de $\overline{F_{AB}}$ et $\overline{F_{CD}}$ qui ont pour résultante le moment Γ recherché. Le couple tend à faire tourner le circuit dans le sens de x vers y. Γ est donc dirigé selon les z croissants et son intensité est positive :

$$\Gamma = F_{ABx} \times 2a = 4IBabsin\alpha$$

5. Par définition, le moment magnétique d'un circuit plan a pour expression :

$$\overline{M} = I\overline{S}$$

Dans notre cas, cela nous donne :

$$\overline{M} = I \times 2a \times 2b\vec{i} = 4abI\vec{i}$$

Le moment que subit le circuit a donc pour expression :

$$\Gamma = 4abI\vec{i} \wedge \vec{B}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 4abI \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B\cos\alpha \\ B\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4IBabsin\alpha \end{pmatrix} = 4IBabsin\alpha\vec{k}$$

On retrouve bien évidemment le même résultat que dans l'exercice précédent. On peut apprécier ici la rapidité de la technique qui utilise la notion de moment magnétique.

- 6.** **a.** Considérons un élément de circuit $d\vec{l}$ (figure 8.18). Cet élément est soumis à l'action d'une force élémentaire de Laplace. Cette force a pour expression :

$$d\vec{f} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

L'expression de la force totale agissant sur le circuit AB s'obtient en intégrant cette force élémentaire sur tout le circuit :

$$\vec{F} = \int_{AB} d\vec{f}$$

Le courant et le champ magnétique étant constants, on en déduit :

$$\vec{F} = \int_{AB} I d\vec{l} \wedge \vec{B} = I \left(\int_{AB} d\vec{l} \right) \wedge \vec{B}$$

D'où :

$$\vec{F} = I \vec{AB} \wedge \vec{B}$$

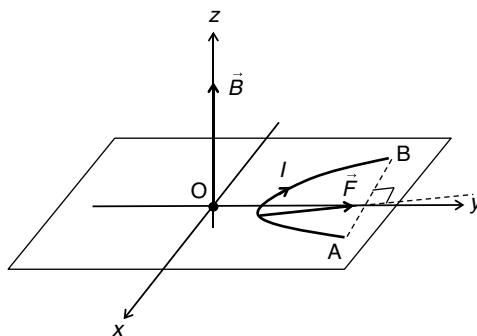


Figure 8.18

La force résultante agissant sur le circuit ne dépend donc que du vecteur \vec{AB} et non de la forme du circuit. Il est donc très facile de placer cette force sur le schéma de la figure 8.18.

- b.** Pour un circuit formé d'un demi-cercle de rayon R , l'intensité de la force a pour expression :

$$F = 2RIB$$

Pour un circuit fermé, on a évidemment $A = B$, soit $\vec{AB} = \vec{0}$.

On a donc :

$$F = 0$$

Un circuit plan fermé soumis à l'action d'un champ magnétique qui lui est orthogonal ne subit donc aucune interaction résultante.

- c.** Comme le circuit fermé est plan, son moment magnétique est orthogonal à ce plan (figure 8.19). On notera que le sens de \vec{M} est conforme à l'orientation du courant dans le circuit (règle du tire-bouchon).

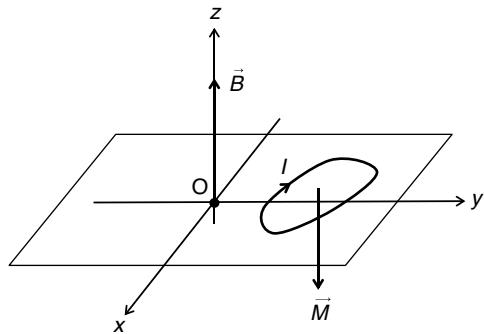


Figure 8.19

L'expression générale du couple agissant sur un circuit plan est donnée par la relation :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

Le champ magnétique étant orthogonal au circuit, il est donc parallèle à son moment magnétique (figure 8.19). Par conséquent, ce produit vectoriel est nul :

$$\vec{\Gamma} = \vec{0}$$

Ce résultat conduit à la même conclusion que précédemment : le circuit ne subit aucune action résultante.

7. Compte tenu de la symétrie de révolution du dispositif autour de l'axe Ox, nous pouvons d'ores et déjà prévoir que le vecteur champ magnétique \vec{B} créé par le circuit est parallèle à cet axe. Considérons un élément de circuit $d\vec{l}$ appartenant au segment AB du circuit (figure 8.20). L'élément de courant $I d\vec{l}$ crée en M un champ magnétique $d\vec{B}$ dont l'expression est donnée par la loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

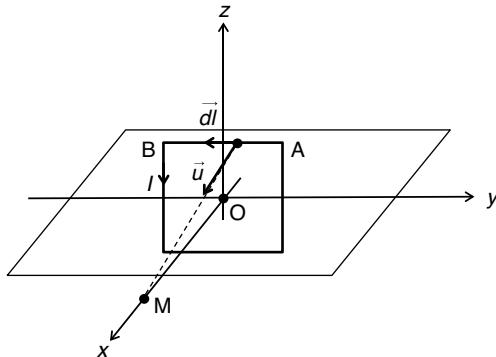


Figure 8.20

Compte tenu du choix de l'élément $d\vec{l}$ (qui est parallèle à Oy), le champ magnétique $d\vec{B}$ sera contenu dans le plan Oxz . Projetons le problème dans ce plan afin de déterminer la composante dB_x qui seule nous intéresse (figure 8.21).

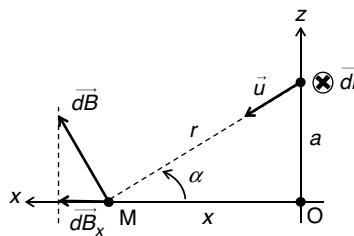


Figure 8.21

On a :

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin\alpha$$

Or :

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \text{ et } r = \sqrt{a^2 + x^2}$$

Donc :

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{(a^2 + x^2)} \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi} \frac{dl}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

La composante B_x du champ magnétique créé par l'ensemble du conducteur AB s'obtient alors en intégrant cette expression :

$$B_x = \int_{-a}^a dB_x = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} \int_{-a}^a dl$$

$$B_x = \frac{\mu_0 Ia^2}{2\pi (a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Comme chaque côté du carré crée en M le même champ magnétique, on en déduit l'expression du champ total créé en ce point par l'ensemble du circuit :

$$\bar{B} = 4B_x \vec{i} = \frac{2\mu_0 Ia^2}{\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} \vec{i}$$

Si on suppose $x \gg a$, cette expression devient :

$$\bar{B} = \frac{2\mu_0 Ia^2}{\pi x^3} \vec{i}$$

Calculons à présent ce champ magnétique en fonction du moment magnétique \bar{M} du circuit. Celui-ci a pour expression :

$$\bar{M} = I\bar{S} = 4Ia^2\vec{i}$$

On a donc :

$$\bar{B} = \frac{4\mu_0 Ia^2}{2\pi x^3} \vec{i} = \frac{\mu_0}{2\pi x^3} \bar{M}$$

Ce résultat rappelle l'expression du champ électrique \bar{E} créé par un dipôle électrique de moment \bar{p} en un point suffisamment éloigné. Par analogie, nous dirons que le champ magnétique \bar{B} est créé par un dipôle magnétique de moment \bar{M} lorsque le circuit créant le champ est suffisamment éloigné. L'expression $\bar{B} = \frac{\mu_0}{2\pi x^3} \bar{M}$ reste valable pour calculer le champ créé par un circuit plan de moment magnétique \bar{M} en tout point de l'axe qui lui est orthogonal, distant de x .

8. Le moment magnétique d'une spire carrée de côté a est défini par :

$$\vec{m} = I\vec{S} = Ia^2\vec{n}$$

\vec{n} est le vecteur unitaire normal au circuit.

Un cadre formé de N spires possède un moment magnétique égal au produit de \vec{m} par N . Soit :

$$\vec{M} = Nla^2\vec{n}$$

Le cadre du galvanomètre, placé dans un champ magnétique \vec{B} subit un couple de moment $\vec{\Gamma}$ tel que :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

Le cadre étant soumis au couple $\vec{\Gamma}$ et au couple de torsion qui, ici, joue le rôle d'un couple de rappel, il s'immobilise dans une position d'équilibre caractérisée par l'égalité des modules des deux moments s'exerçant sur le cadre :

$$\|\vec{\Gamma}\| = C\alpha$$

Or :

$$\|\vec{\Gamma}\| = MB\sin\alpha$$

Donc :

$$MB\sin\alpha = C\alpha$$

Effectuons un développement limité de $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$$

On obtient alors :

$$MB\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6}\right) = C\alpha$$

$$MB\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right) = C$$

$$\alpha = \sqrt{6\left(1 - \frac{C}{MB}\right)} = \sqrt{6\left(1 - \frac{C}{Nla^2B}\right)}$$

On remarquera que le développement limité à l'ordre 3, seul, permet de calculer l'angle α ; un développement à l'ordre 1 ne permet pas d'exprimer la condition d'équilibre.

Application numérique :

$$\alpha = \sqrt{6\left(1 - \frac{3,53 \times 10^{-4}}{100 \times 1 \times 9 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^{-3}}\right)}$$

D'où :

$$\alpha = 0,34 \text{ rad}$$

Soit, en degrés :

$$\alpha = 0,34 \times \frac{180}{\pi} = 19 \text{ deg}$$

L'angle α n'est pas réellement petit. Toutefois, l'approximation est raisonnable compte tenu que le développement limité a été effectué à l'ordre 3. La résolution exacte de l'équation dont α est la solution n'étant pas aisée, nous nous contenterons de ce résultat.

Énergie électromagnétique - Travail des forces électromagnétiques

MOTS CLÉS

Énergie potentielle d'interaction ■ travail ■ théorème de Maxwell ■ règle du flux maximal ■ forces ■ couples ■ inductance mutuelle ■ formule de Neumann ■ inductance propre ■ électrodynamomètre ■ coefficient de couplage

Comme pour tous les domaines de la physique, il est possible de proposer une interprétation énergétique (certains diraient thermodynamique) de l'électromagnétisme. Dans ce chapitre, nous allons voir comment une vision énergétique des phénomènes électromagnétiques permet de disposer d'outils prédictifs de comportement très performants.

Fiche 1

Énergie potentielle d'interaction

L'énergie potentielle d'interaction d'un circuit filiforme rigide parcouru par un courant I , avec un champ magnétique \vec{B} est définie comme le travail à fournir pour amener ce circuit d'une position située en l'infini (où il ne règne aucun champ magnétique) à sa position actuelle. Soit ϕ le flux du champ magnétique au travers de la surface \vec{S} qui s'appuie sur le contour du circuit (le vecteur surface étant orienté dans le sens de la rotation directe du courant sur le contour). En supposant que le circuit est plan et que le champ magnétique est uniforme au travers de toute sa surface (figure 9.1), on a :

$$W = -I\phi = -I\vec{B} \cdot \vec{S}$$

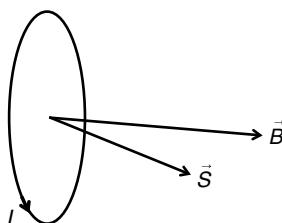


Figure 9.1

Théorème de Maxwell

On considère un circuit (L) parcouru par un courant I placé dans un champ magnétique \vec{B} . On suppose que le circuit effectue un déplacement élémentaire en passant d'une position A à une position B (figure 9.2).

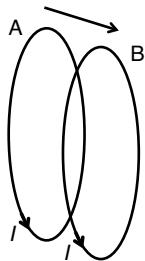


Figure 9.2

Le travail dW des forces magnétiques qui agissent sur le circuit a pour expression :

$$dW = Id\phi$$

Où $d\phi$ représente la variation élémentaire de flux subie par le circuit au cours de ce déplacement. On parle souvent de flux coupé par le circuit lors de son déplacement.

Si on suppose qu'un circuit rigide parcouru par un courant I se déplace dans un champ magnétique \vec{B} et passe d'une position 1 à une position 2 (figure 9.3), on énonce le théorème de Maxwell comme suit :

Le travail des forces magnétiques agissant sur un circuit au cours d'un déplacement fini est égal au produit de l'intensité I du courant par la variation de flux à travers le circuit.

Soit :

$$W = I(\phi_2 - \phi_1)$$

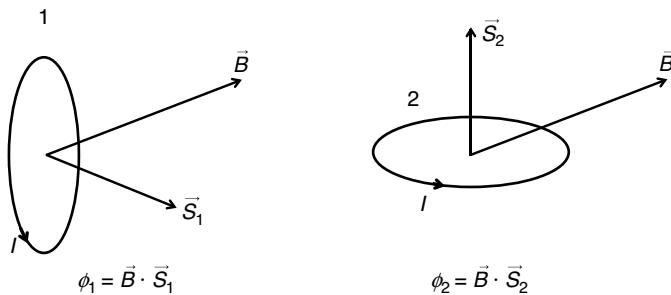


Figure 9.3

Fiche 3

Règle du flux maximal

Un circuit rigide parcouru par un courant I et placé dans un champ magnétique \vec{B} est en équilibre stable lorsque le flux magnétique qui le traverse est maximal.

Par voie de conséquence, un circuit parcouru par un courant I , placé dans un champ magnétique et abandonné à lui-même évolue spontanément vers un état d'équilibre caractérisé par un flux maximal.

Ainsi, un circuit plan (figure 9.4) placé dans un champ magnétique uniforme et parcouru par un courant I a tendance à s'orienter spontanément de sorte que les vecteurs \vec{B} et \vec{S} soient parallèles.

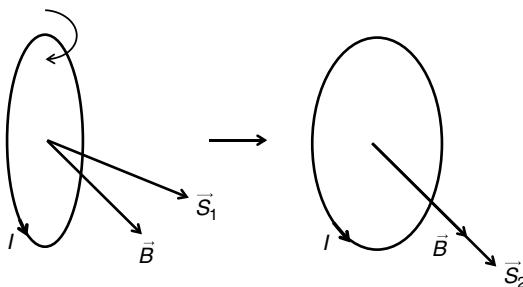


Figure 9.4

Fiche 4

Application au calcul des forces magnétiques

On suppose qu'un circuit rigide parcouru par un courant I et placé dans un champ magnétique \vec{B} subit une translation élémentaire $d\vec{l}$. Au cours de ce déplacement, les forces magnétiques \vec{f} agissant sur le circuit effectuent un travail dW tel que :

$$dW = \vec{f} \cdot d\vec{l} = Id\phi$$

En généralisant cette expression, on peut déterminer les composantes (dans un repère Oxyz quelconque) de la force résultante agissant sur un circuit quelconque à partir de l'expression du flux au travers de la surface s'appuyant sur le contour du circuit. Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = I \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ F_y = I \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ F_z = I \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{array} \right.$$

De la même manière, un circuit rigide parcouru par un courant I et placé dans un champ magnétique \vec{B} subit un couple de moment $\vec{\Gamma}$. Ce couple est responsable de déplacements angulaires, toujours dans un repère Oxyz quelconque. En appelant $d\alpha$, $d\beta$ et $d\gamma$ les déplacements angulaires élémentaires du circuit autour des axes Ox, Oy et Oz, les composantes du couple de moment $\vec{\Gamma}$, c'est-à-dire $(\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z)$ effectuent un travail dW tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} dW = \Gamma_x d\alpha = Id\phi \\ dW = \Gamma_y d\beta = Id\phi \\ dW = \Gamma_z d\gamma = Id\phi \end{array} \right.$$

Cela permet de déterminer les composantes du couple résultant agissant sur un circuit à partir de l'expression du flux au travers de la surface qui s'appuie sur son contour :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_x = I \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \\ \Gamma_y = I \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \\ \Gamma_z = I \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \end{array} \right.$$

α , β et γ sont les angles de rotation autour des axes Ox, Oy et Oz.

Fiche 5

Notion d'inductance

Inductance mutuelle de deux circuits

Considérons deux circuits A et B parcourus respectivement par des courants I_A et I_B et placés au voisinage l'un de l'autre (figure 9.5).

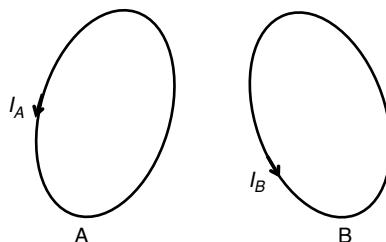


Figure 9.5

On note ϕ_{AB} le flux au travers de la surface du conducteur A du champ magnétique créé par le conducteur B. De même, on note ϕ_{BA} le flux au travers de la surface du conducteur B du champ magnétique créé par le conducteur A.

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{AB} = MI_B \\ \phi_{BA} = MI_A \end{array} \right.$$

Où M est l'inductance mutuelle des deux circuits. Cette grandeur s'exprime en henrys (H).

La formule de Neumann permet de calculer directement l'inductance mutuelle de deux circuits à partir de leur conformation géométrique (figure 9.6) :

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int_A \frac{\overrightarrow{dl}_A \cdot \overrightarrow{dl}_B}{r}$$

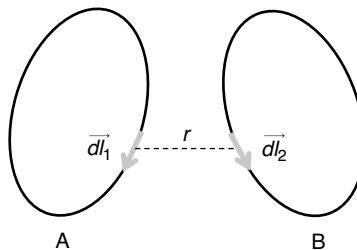


Figure 9.6

Inductance propre d'un circuit

Un circuit isolé rigide parcouru par un courant I crée un champ magnétique \vec{B} à son voisinage. Ce circuit subit évidemment l'influence de ce champ magnétique (son propre champ) et si ϕ est le flux du champ magnétique créé par ce circuit au travers de sa propre surface, on a :

$$\phi = LI$$

Où L représente l'inductance propre du circuit, parfois appelée auto-inductance ou self (de l'anglais self-inductance). L s'exprime en henrys (H).

Entraînement

QCM

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être exactes.

1. L'énergie potentielle d'interaction d'un circuit avec un champ magnétique :

- a. Est toujours négative ou nulle.
- b. S'exprime en joules.
- c. Correspond à l'énergie à déployer pour amener le circuit dans sa position actuelle dans le champ.
- d. Existe même si aucun courant ne circule dans le circuit.

2. Pour un circuit plan parcouru par un courant / et placé dans un champ magnétique \vec{B} :

- a. Le vecteur surface est orthogonal au champ magnétique.
- b. Le vecteur surface appartient au plan du circuit.
- c. Le vecteur surface est dirigé en appliquant la règle du tire-bouchon selon le sens du courant.
- d. Le vecteur surface est orthogonal au plan du circuit.

3. Un circuit plan circulaire de centre O et d'axe Ox se déplace longitudinalement le long de cet axe d'une distance dx . Dans l'espace autour de la spire règne un champ magnétique uniforme \vec{B} .

- a. Le travail des forces magnétiques qui agissent sur le circuit est nul dans tous les cas.
- b. Le travail des forces magnétiques qui agissent sur le circuit est nul si $\vec{B} \perp \text{Ox}$.
- c. Le travail des forces magnétiques qui agissent sur le circuit est nul si $\vec{B} \parallel \text{Ox}$.
- d. Le travail des forces magnétiques qui agissent sur le circuit est strictement positif.

4. Un circuit plan circulaire de centre O, de rayon R , parcouru par un courant / et d'axe Ox est placé initialement dans un champ magnétique \vec{B} parallèle à l'axe Ox. On suppose que le vecteur \vec{S} et \vec{B} sont orientés dans le même sens. On fait ensuite pivoter la spire selon un axe Oz orthogonal à Ox.

- a. Le flux initial au travers de la spire est nul.
- b. Le flux au travers de la spire, en position finale, est nul.
- c. Le travail des forces magnétiques, lors de cette rotation, est égal à $W = 2\pi R BI$.
- d. Le travail des forces magnétiques, lors de cette rotation, est égal à $W = -2\pi R BI$.

5. Un circuit plan circulaire de centre O, de rayon R , parcouru par un courant I et d'axe Ox est placé initialement dans un champ magnétique \vec{B} parallèle à l'axe Ox. Il est abandonné à lui-même :

- a. Il pivote de 90 degrés.
- b. Il reste immobile.
- c. Il pivote de 45 degrés.
- d. Il pivote de 180 degrés.

6. La règle du flux maximal :

- a. Permet de calculer facilement la force qui s'exerce sur un circuit.
- b. Permet de calculer facilement le moment magnétique d'un circuit.
- c. Permet de calculer facilement le moment du couple agissant sur un circuit.
- d. Permet de calculer facilement l'inductance d'un circuit.

7. La formule de Neumann :

- a. Traduit mathématiquement la règle du flux maximal.
- b. Permet de calculer l'inductance propre d'un circuit.
- c. Permet de calculer le flux induit par un circuit sur un autre circuit situé à son voisinage.
- d. Permet de calculer l'inductance mutuelle de deux circuits.

8. L'inductance propre d'un circuit :

- a. S'exprime en henrys.
- b. Traduit l'influence sur lui-même du champ magnétique créé par un circuit.
- c. Est déterminée par la formule de Neumann
- d. Dépend du flux induit dans le circuit.

Réponses

1. **b et c.** Voir fiche 1. Attention, le signe moins devant l'expression ne doit pas induire le lecteur en erreur ; le produit scalaire $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ peut être négatif. S'il n'y a pas de courant qui circule dans le circuit, l'énergie potentielle d'interaction est nulle. Enfin, le joule est l'unité internationale de travail ou d'énergie et le travail à fournir est bien synonyme d'énergie à déployer. Il fallait donc bien répondre b et c.
2. **c et d.** Voir fiche 1.
3. **a, b et c.** Le travail est nul dans tous les cas. En effet, le vecteur surface reste le même, tout comme le vecteur champ. Le flux, par conséquent, ne varie pas et donc le travail des forces magnétiques est nul et ce quel que soit l'angle que forment les deux vecteurs. Les réponses b et c sont donc valables également.
4. **b et d.** En effet, Le flux initial est tel que $\phi_1 = \vec{B} \cdot \vec{S}_1 = 2\pi RB$ (angle nul entre les deux vecteurs). Le flux final est tel que $\phi_2 = \vec{B} \cdot \vec{S}_1 = 0$ puisque l'angle formé par les deux vecteurs vaut $\pi / 2$. On a donc $W = I(\phi_2 - \phi_1) = -2\pi RBI$.
5. **b.** Dans sa position initiale, le circuit est déjà caractérisé par un flux maximal. Il restera donc immobile.
6. **a et c.** Voir fiche 4.
7. **c et d.** Voir fiche 5. La formule de Neumann permet avant tout de calculer l'inductance mutuelle qui, à son tour, donne accès aux flux induits entre deux circuits.
8. **a et b.** Le henry est bien l'unité internationale d'inductance propre et traduit l'influence du champ magnétique créé par un circuit sur lui-même. Voir fiche 5.

Entraînement

Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
1. Le travail des forces magnétiques qui agissent sur un circuit est indépendant du courant qui circule dans le circuit.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Le travail des forces magnétiques qui agissent sur un circuit est nul si le champ \vec{B} est orthogonal au vecteur surface du circuit.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Le théorème de Maxwell permet de calculer le travail des forces magnétiques qui agissent sur un circuit au cours d'un déplacement quelconque de ce dernier.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Le travail des forces agissant sur un circuit ne dépend que de la position initiale et de la position finale du circuit.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Un circuit circulaire de rayon $R = 1\text{ cm}$, parcouru par un courant $I = 1\text{ A}$ et placé dans un champ $B = 1\text{ T}$ faisant un angle de 60 degrés avec le vecteur surface du circuit est traversé par un flux de $0,0628\text{ Vm}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Le flux traversant un circuit plan placé dans un champ magnétique dépend du courant qui circule dans le circuit.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Si un circuit plan se déplace parallèlement à son vecteur surface, alors il ne subit aucune force magnétique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Un circuit plan parcouru par un courant de 1 A et possédant une inductance propre de 12 mH est traversé par un flux magnétique de 12 mWb .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Si un circuit 1 parcouru par un courant I_1 génère au travers d'un circuit 2 un flux ϕ_{21} et que le circuit 2 parcouru par un courant I_2 génère au travers du circuit 1 un flux ϕ_{12} , alors on a nécessairement $\phi_{21} = \phi_{12}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Le flux coupé par un circuit en déplacement correspond à la variation de flux au travers de ce circuit au cours de ce déplacement.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Réponses

- 1. Faux.** $W = -I\phi$.
- 2. Vrai.** Dans ces conditions, le produit scalaire du champ et de la surface est nul.
- 3. Vrai.** Voir fiche 2.
- 4. Vrai.** Voir fiche 2.
- 5. Faux.** $\phi = \bar{B} \cdot \bar{S} = BS \cos \frac{\pi}{3} = 1 \times 2\pi \times 10^{-2} \times \frac{1}{2} = 0,0314 \text{ Vm}$
- 6. Faux.** $\phi = \bar{B} \cdot \bar{S}$ et ni \bar{B} , ni \bar{S} ne dépendent du courant.
- 7. Vrai.** Dans ces conditions, le flux est constant.
- 8. Vrai.** $\phi = LI$.
- 9. Faux.** On a $\phi_{21} = MI_1$ et $\phi_{12} = MI_2$. La proposition n'est donc vraie que si les deux circuits sont parcourus par le même courant.
- 10. Vrai.** Voir fiche 2.

Entraînement

Exercices

Fiches

QCM

Vrai ou faux ?

Exercices

9. Énergie électromagnétique

1. Un conducteur filiforme AB repose sur deux rails conducteurs parallèles séparés d'une distance a et alimentés de sorte qu'un courant I traverse l'ensemble du circuit. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} comme indiqué sur la figure 9.7.
- a. Montrer à l'aide de l'expression de la force de Laplace que la force magnétique \vec{F} qui agit sur AB tend à l'éloigner du point O et que par conséquent la tige mobile se déplace sur ses deux rails.
- b. En appliquant le théorème de Maxwell, déterminer le travail de la force magnétique au cours d'un déplacement Δy de AB. Retrouver la force \vec{F} à partir de cette expression.

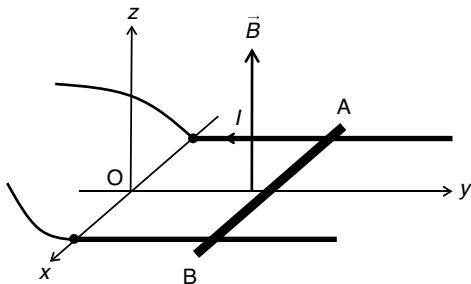


Figure 9.7

2. On place une spire circulaire de rayon r parcourue par un courant i orthogonalement à l'intérieur d'un solénoïde de rayon R infiniment long possédant n spires par unité de longueur (figure 9.8). Une fois la spire en place, on alimente le solénoïde avec un courant I . La spire interne est mobile autour d'un axe MM'.

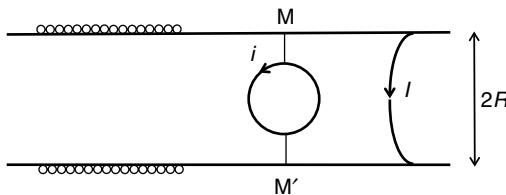


Figure 9.8

- a. Calculer le travail des forces magnétiques qui agissent au cours de la rotation de cette spire en utilisant le théorème de Maxwell.
- b. Au cours de son déplacement, la spire interne de rayon r passe par une position angulaire α (figure 9.9). Calculer la variation de flux $d\phi$ au travers de sa surface pendant le déplacement angulaire élémentaire entre α et $\alpha + d\alpha$.

En déduire l'expression du couple s'exerçant sur cette spire lorsqu'elle se trouve dans une position angulaire α . Calculer le travail élémentaire de ce couple au cours du déplacement $d\alpha$ puis, en intégrant sur l'ensemble du déplacement, retrouver le résultat précédent.

vue de dessus

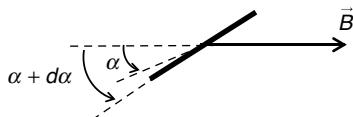


Figure 9.9

Attention : l'angle α ne représente pas ici l'angle formé par les vecteurs \vec{B} et \vec{S} .

3. Un solénoïde de longueur L_1 , de rayon R , possédant N_1 spires, est parcouru par un courant I_1 . Un deuxième solénoïde de longueur $L_2 < L_1$, possédant N_2 spires, de rayon supérieur à R et parcouru par un courant I_2 est disposé autour du premier solénoïde de sorte que leurs axes coïncident (figure 9.10). On suppose que l'expression générale du champ créé par un solénoïde de grande longueur s'applique aux deux solénoïdes. Soit \vec{B}_1 le champ magnétique créé par le solénoïde 1 et \vec{B}_2 le champ créé par le solénoïde 2.

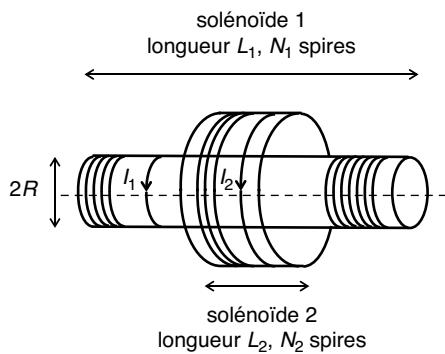


Figure 9.10

- a. Calculer le flux ϕ_{21} créé par le champ magnétique \vec{B}_1 au travers du solénoïde 2.
 - b. Calculer le flux ϕ_{12} créé par le champ magnétique \vec{B}_2 au travers du solénoïde 1.
 - c. Calculer l'inductance mutuelle des deux solénoïdes.
4. Calculer l'inductance propre d'une spire circulaire de rayon R . En déduire l'inductance propre d'un circuit plat composé de N de ces spires.
5. Calculer l'inductance propre d'un solénoïde de grande longueur d , de rayon R et composé de N spires.
- Application numérique : $R = 1,5 \text{ cm}$, $d = 8 \text{ cm}$ et $N = 160$.
6. Un électrodynamomètre balance est un dispositif destiné à mesurer des intensités de courants électriques : un solénoïde 1 de longueur d possédant N spires, contient un second solénoïde plus petit comportant n spires de section S . L'axe du petit solénoïde est orthogonal à l'axe du premier (figure 9.11).

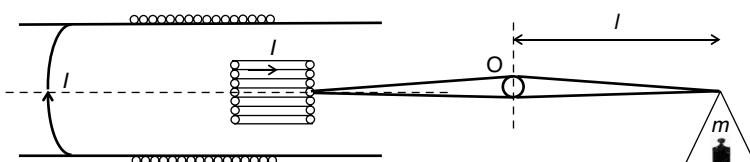


Figure 9.11

Le petit solénoïde est solidaire du fléau d'une balance à l'extrême de laquelle un plateau peut recevoir des masses marquées d'une masse totale m . Le même courant I circulant dans les deux bobines, calculer le couple Γ s'exerçant sur le petit solénoïde. En déduire la relation entre le courant I et la masse m déposée sur le plateau pour équilibrer la balance.

7. La figure 9.12 représente deux enroulements 1 et 2 de longueurs respectives d_1 et d_2 comportant respectivement N_1 et N_2 spires de même section S . Les deux enroulements, assimilés à des solénoïdes de grandes longueurs, sont disposés autour du même noyau de fer doux qui possède la propriété de « canaliser » les flux magnétiques créés par les enroulements.

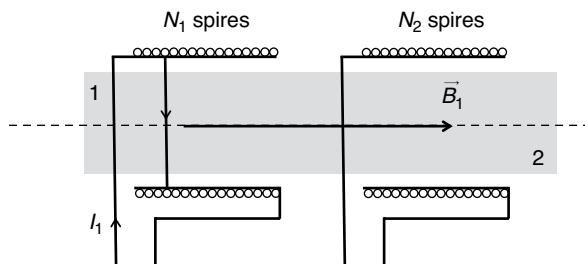


Figure 9.12

En conséquence, toutes les spires de l'enroulement 2 sont traversées par le champ magnétique \vec{B}_1 créé par le solénoïde 1 lorsque celui-ci est alimenté par un courant I_1 .

Calculer les inductances propres L_1 et L_2 de chacun des enroulements et leur inductance mutuelle M . La perméabilité magnétique relative du fer doux étant notée μ_r , on posera $\mu = \mu_r \mu_0$.

Calculer le rapport $\rho = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ appelé coefficients de couplage entre les deux enroulements.

8. Un fil conducteur rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant I et un circuit carré de côté a parcouru par un courant i sont placés dans le même plan (figure 9.13) à une distance b l'un de l'autre.

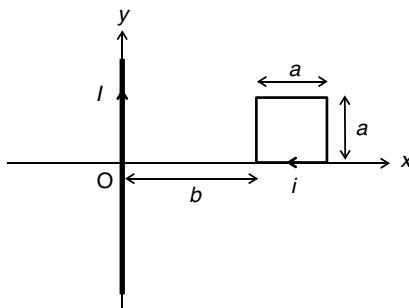


Figure 9.13

Calculer l'énergie potentielle d'interaction W_p du circuit carré avec le champ magnétique créé par le fil rectiligne puis calculer la résultante des forces qui s'exercent sur ce circuit carré.

9. On considère un circuit composé de deux spires jointives de rayon R parcourues par le même courant I (figure 9.14). Déterminer la force s'exerçant entre les deux spires. Le diamètre du fil est noté a .

On supposera que le champ magnétique créé par une spire est uniforme dans le plan de la spire.

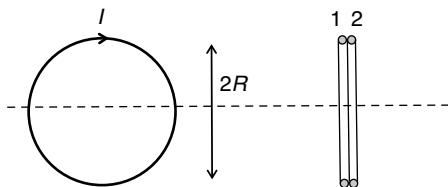


Figure 9.14

Réponses

- 1. a.** Considérons un élément $d\vec{l}$ de la tige AB (figure 9.15). Cet élément subit l'action d'une force élémentaire \vec{df} telle que :

$$\vec{df} = I \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

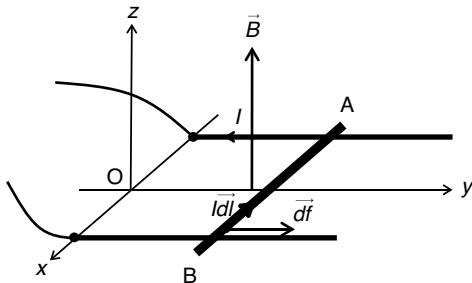


Figure 9.15

Conformément à la règle de l'observateur d'Ampère, cette force est parallèle à Oy et dirigée selon y croissants.

On a donc :

$$\vec{df} = IBdl \vec{j}$$

La force totale \vec{F} qui s'exerce sur le conducteur AB s'obtient en intégrant l'expression de cette force élémentaire sur toute la longueur du segment AB :

$$\vec{F} = \int_{AB} \vec{df} = IB \int_{AB} dl \vec{j} = IBa \vec{j}$$

Le conducteur AB est donc soumis à une force qui tend à l'éloigner du point O. Il va donc avoir tendance naturellement à se déplacer vers la droite sur les deux rails.

- b.** Considérons un déplacement Δy du segment AB qui l'amène dans la position A'B' (figure 9.16).

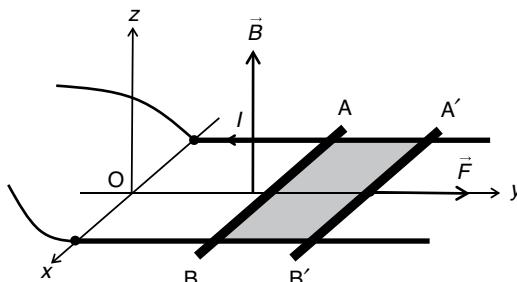


Figure 9.16

Au cours de déplacement, la force \vec{F} effectue, conformément au théorème de Maxwell, un travail W tel que :

$$W = I(\phi_2 - \phi_1)$$

Où ϕ_1 représente le flux du champ magnétique au travers de la surface initiale du circuit (position AB du segment mobile) et ϕ_2 , le flux au travers de la surface finale (position A'B').

La différence ($\phi_2 - \phi_1$) représente le flux coupé par le circuit au cours de son déplacement (partie grisée sur la figure 9.16).

Comme le circuit est orthogonal au champ magnétique, on a :

$$(\phi_2 - \phi_1) = B\Delta S$$

ΔS étant l'aire balayée au cours du déplacement Δy .

Donc :

$$W = IB\Delta S = IBa\Delta y$$

Ce travail étant le travail d'une force de translation sur un déplacement Δy , on a naturellement :

$$W = IBa\Delta y = F\Delta y$$

Ce qui nous permet de retrouver l'expression de la force :

$$F = IBa$$

2. a. Conformément à la règle du flux maximal, la spire interne, mobile, va s'orienter de manière à ce que son moment magnétique s'aligne avec le champ \vec{B} créé par le solénoïde. \vec{B} étant parallèle à son axe, la spire effectuera une rotation de $\pi / 2$ autour de son axe MM' (figure 9.17).

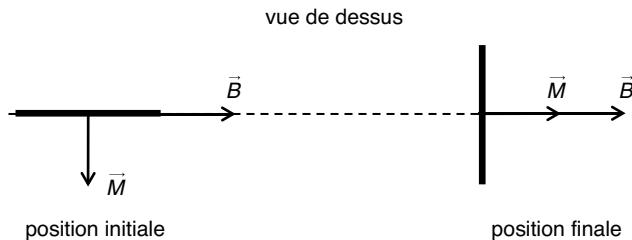


Figure 9.17

Dans la position initiale, le flux ϕ_1 du champ magnétique au travers de la spire est nul :

$$\phi_1 = \vec{B} \cdot \vec{S} = 0$$

Dans la position finale, le flux est maximal et vaut :

$$\phi_2 = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\pi r^2$$

Le travail des forces magnétiques au cours de ce déplacement a donc pour expression :

$$W = I(\phi_2 - \phi_1) = iB\pi r^2$$

Or le champ magnétique créé par le solénoïde est donné par la relation que nous avons démontrée dans l'exercice 6 du chapitre 7 :

$$B = \mu_0 nI$$

D'où :

$$W = \mu_0 nIi\pi r^2$$

b. Lorsque la spire se trouve dans la position repérée par l'angle α (angle quelconque entre la position de la spire et sa position de départ, voir figure 9.18), le flux magnétique au travers de la surface de la spire a pour expression :

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\pi r^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = B\pi r^2 \sin\alpha$$

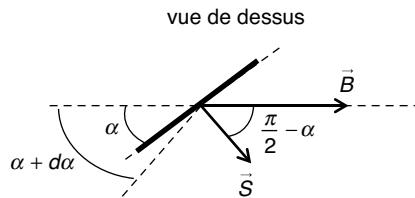


Figure 9.18

Lors d'un déplacement angulaire $d\alpha$, la variation de flux a donc pour expression :

$$d\phi = B\pi r^2 d[\sin\alpha]$$

Soit :

$$d\phi = B\pi r^2 \cos\alpha d\alpha$$

Le couple Γ qui s'exerce sur la spire a donc pour expression :

$$\Gamma = i \frac{d\phi}{d\alpha} = B\pi r^2 i \cos\alpha$$

Ce couple est porté par l'axe MM'. Au cours du déplacement angulaire $d\alpha$, ce couple effectue le travail :

$$dW = \Gamma d\alpha = B\pi r^2 i \cos\alpha d\alpha$$

Au cours du déplacement global, depuis la position initiale jusqu'à la position finale (figure 9.17), le travail effectué par les forces magnétiques a donc pour expression :

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dW = \int_0^{\frac{\pi}{2}} B\pi r^2 i \cos\alpha d\alpha$$

Soit :

$$W = B\pi r^2 i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha d\alpha = B\pi r^2 i [\sin\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} = B\pi r^2 i$$

D'où en remplaçant le champ magnétique B par son intensité :

$$W = \mu_0 n I \pi r^2$$

Nous retrouvons évidemment le même résultat que précédemment, tout en appréciant l'aspect plus simple et plus rapide de l'utilisation du théorème de Maxwell qui fournit une expression « toute intégrée ».

- 3.** Les vecteurs surfaces des différentes spires étant, tout comme les vecteurs champs magnétiques, parallèles à l'axe commun des solénoïdes (et tous dirigés dans le même sens), nous pouvons décider de travailler uniquement avec les modules de ces vecteurs.

a. Soit $(\phi_{21})_1$ le flux créé par le champ magnétique \vec{B}_1 au travers d'une seule spire du solénoïde 2. Bien qu'une spire du solénoïde 2 ait une plus grande surface qu'une spire du solénoïde 1, le champ \vec{B}_1 ne règne qu'à l'intérieur d'une section d'aire πR^2 , étant donné que le champ créé par un solénoïde n'existe qu'à l'intérieur de celui-ci.

On a donc :

$$(\phi_{21})_1 = B_1 \pi R^2$$

Le champ B_1 a pour expression :

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{L_1} I_1$$

En conséquence :

$$(\phi_{21})_1 = \mu_0 \frac{N_1}{L_1} I_1 \pi R^2$$

Le flux total ϕ_{21} créé par le champ magnétique \vec{B}_1 au travers des N_2 spires du solénoïde 2 est donc :

$$\phi_{21} = N_2 (\phi_{21})_1 = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L_1} I_1 \pi R^2$$

b. Soit $(\phi_{12})_1$ le flux créé par le champ magnétique \vec{B}_2 au travers d'une seule spire du solénoïde 1 :

$$(\phi_{12})_1 = B_2 \pi R^2$$

Le champ B_2 a pour expression :

$$B_2 = \mu_0 \frac{N_2}{L_2} I_2$$

En conséquence :

$$(\phi_{12})_1 = \mu_0 \frac{N_2}{L_2} I_2 \pi R^2$$

Le solénoïde 2 ayant une longueur L_2 plus petite que L_1 , toutes les spires du solénoïde 1 ne sont pas traversées par un flux créé par \vec{B}_2 : seules $\frac{L_2}{L_1} N_1$ sont concernées. On a donc :

$$\phi_{12} = \frac{L_2}{L_1} N_1 (\phi_{12})_1 = \frac{L_2}{L_1} N_1 \times \mu_0 \frac{N_2}{L_2} I_2 \pi R^2$$

Soit :

$$\phi_{12} = \mu_0 \frac{N_2 N_1}{L_1} I_2 \pi R^2$$

c. L'inductance mutuelle M des deux circuits est définie par :

$$M = \frac{\phi_{12}}{I_2} = \frac{\phi_{21}}{I_1}$$

Les deux expressions nous donnent :

$$M = \mu_0 \frac{N_2 N_1}{L_1} \pi R^2$$

Remarque : on notera que l'inductance mutuelle de deux circuits ne dépend jamais des courants qui les traversent. Toutefois, il est en général nécessaire d'introduire les courants pour effectuer le calcul de M .

- 4.** Supposons la spire parcourue par un courant I . Conformément au résultat de l'exercice 2 du chapitre 7, le champ magnétique créé au centre de la spire a pour expression :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Ce champ étant orthogonal au plan de la spire, on a :

$$\phi = \bar{B} \cdot \bar{S} = \frac{\mu_0 I}{2R} \times \pi R^2 = \frac{\mu_0 I \pi R}{2}$$

Par définition, l'inductance propre L de la spire est telle que :

$$\phi = LI$$

On a donc :

$$L = \frac{\mu_0 \pi R}{2}$$

Si on considère un circuit plat composé de N spires identiques parcourues par le même courant I , on obtient :

$$L = \frac{\mu_0 N \pi R}{2}$$

- 5.** Le champ magnétique créé à l'intérieur d'un solénoïde de grande longueur d , composé de N spires de rayon R a pour expression :

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N}{d} I$$

n étant le nombre de spires par unité de longueur, soit $\frac{N}{d}$.

En nommant \bar{S} le vecteur surface d'une des spires, le flux ϕ_1 au travers d'une spire du solénoïde est égal, par définition à :

$$\phi_1 = \bar{B} \cdot \bar{S} = BS = \mu_0 \frac{N}{d} I \times \pi R^2$$

Le flux total au travers des N spires est donc :

$$\phi = N\phi_1 = \mu_0 \frac{N^2}{d} I \times \pi R^2$$

L'inductance propre L du solénoïde étant définie par $\phi = LI$, on a donc :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{d}$$

Application numérique :

$$L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 160^2 \times \pi \times (1,5 \times 10^{-2})^2}{8 \times 10^{-2}}$$

Soit :

$$L = 2,8 \times 10^{-4} \text{ H}$$

- 6.** Soit \bar{B} le champ magnétique créé par le grand solénoïde et soit \bar{S} le vecteur surface d'une des spires du petit solénoïde. Compte tenu de l'orientation des courants proposée sur la figure 9.11, ces deux vecteurs sont orientés comme indiqués sur la figure 9.19. Conformément à la règle du flux maximal, le petit solénoïde aura tendance à pivoter vers la gauche, dans le sens d'un alignement de \bar{S} sur \bar{B} . Soit α l'angle formé par les axes des deux solénoïdes ; à la position d'équilibre, cet angle doit être égal à $\pi / 2$.

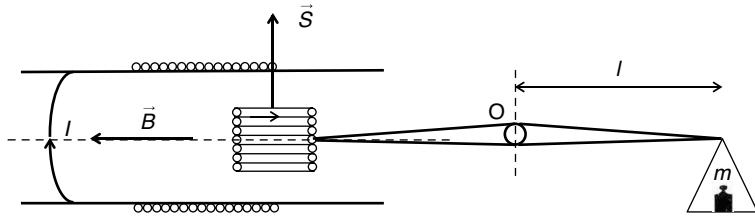


Figure 9.19

Afin de calculer le couple Γ qui s'exerce sur le petit solénoïde, calculons le flux total créé par \vec{B} au travers de ses n spires et ce, en fonction de l'angle α formé par les deux axes (figure 9.20).

Remarque : bien que l'objectif soit d'obtenir un angle α égal à 90 degrés, il est indispensable de disposer de l'expression du flux en fonction de cet angle α (en tant que variable) afin de déterminer le couple Γ .

On a :

$$\phi = n\vec{B} \cdot \vec{S} = nBS \cos \alpha$$

D'où :

$$\Gamma = l \frac{d\phi}{d\alpha} = -nBIS \sin \alpha$$

À l'équilibre, c'est-à-dire lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le module de ce couple est maximal et vaut :

$$|\Gamma| = nBIS$$

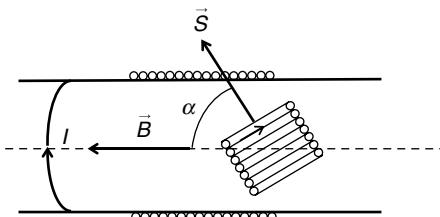


Figure 9.20

La condition de cet équilibre est traduite par l'égalité des modules des couples qui tendent à faire tourner le dispositif dans un sens et de ceux qui tendent à le faire tourner dans l'autre sens. On a donc :

$$nBIS = mgl$$

Le champ magnétique créé par le grand solénoïde a pour expression :

$$B = \mu_0 \frac{N}{d} I$$

D'où :

$$\frac{\mu_0 n N}{d} I^2 S = mgl$$

Soit :

$$I = \sqrt{\frac{dmgl}{\mu_0 n NS}}$$

7. Les deux enroulements étant considérés comme des solénoïdes très longs, on peut appliquer le résultat de l'exercice 5 de ce chapitre et calculer immédiatement les deux inductances propres L_1 et L_2 .

Soit :

$$L_1 = \frac{\mu N_1^2 S}{d_1} \text{ et } L_2 = \frac{\mu N_2^2 S}{d_2}$$

Remarque : il suffit, dans l'expression trouvée à l'exercice 5 de ce chapitre, de remplacer πR^2 par S et μ_0 par μ pour obtenir immédiatement les inductances propres recherchées.

Pour calculer l'inductance mutuelle des deux circuits, supposons que l'enroulement 1 est alimenté par un courant I_1 . Le champ magnétique ainsi créé a pour expression :

$$B_1 = \mu \frac{N_1}{d_1} I_1$$

Compte tenu de la présence du noyau de fer doux, ce champ magnétique crée un flux ϕ dans l'ensemble du solénoïde 2, c'est-à-dire au travers de chacune de ses spires.

Comme les courants I_1 et I_2 sont orientés dans le même sens, le vecteur \bar{B}_1 et les vecteurs surfaces de l'enroulement 2 sont dirigés dans le même sens et on a donc :

$$\phi = N_2 B_1 S = \mu \frac{N_1 N_2}{d_1} I_1 S$$

Par définition :

$$M = \frac{\phi}{I_1}$$

D'où :

$$M = \mu \frac{N_1 N_2}{d_1} S$$

On en déduit donc :

$$\rho = \frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{\mu^2 \frac{N_1^2 N_2^2}{d_1^2} S^2}{\mu \frac{N_1^2 S}{d_1} \times \mu \frac{N_2^2 S}{d_2}}$$

Soit :

$$\rho = \frac{d_2}{d_1}$$

Remarque : lorsque deux enroulements sont en influence totale et que leurs longueurs sont égales, le coefficient de couplage ρ est égal à 1.

8. Le champ magnétique \bar{B} créé en un point donné M par le fil de longueur infinie ne dépend que de la distance entre M et le fil. Considérons un élément de surface rectangulaire dS du circuit carré, de largeur dx , de hauteur a et placé au point d'abscisse x (figure 9.21).

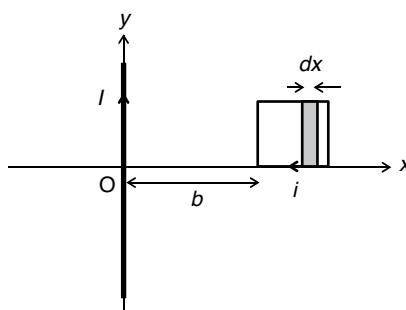


Figure 9.21

Compte tenu de l'orientation des courants, les vecteurs \vec{B} et \vec{dS} sont dirigés de l'avant vers l'arrière et le flux $d\phi$ du champ \vec{B} au travers de cette surface élémentaire a pour expression :

$$d\phi = \vec{B} \cdot \vec{dS} = BdS = Badx$$

L'expression du champ B qui traverse l'élément de surface dS a été démontrée dans l'exercice 1 du chapitre 7 :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

On a donc :

$$d\phi = \frac{\mu_0 I a dx}{2\pi x}$$

Pour déterminer le flux total du champ \vec{B} au travers de tout le circuit carré, il suffit d'intégrer pour x variant de b à $b + a$:

$$\phi = \int_b^{b+a} d\phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{dx}{x}$$

D'où :

$$\phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} [\ln x]_b^{b+a} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} [\ln(b+a) - \ln b]$$

Soit :

$$\phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b}$$

L'énergie potentielle d'interaction W_p est définie par :

$$W_p = -\phi i$$

On a donc :

$$W_p = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b}$$

Compte tenu de la symétrie du système, la force résultante des actions magnétiques sur le circuit est parallèle à Ox . Soit F_x l'intensité de cette force.

Imaginons à présent un déplacement élémentaire db positif (déplacement élémentaire du circuit carré vers la droite). La variation de flux consécutive à ce déplacement étant notée $d\phi$, la résultante F_x a pour expression :

$$F_x = i \frac{d\phi}{db}$$

Soit :

$$F_x = i \frac{d}{db} \left(\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b} \right)$$

Attention : la variable de dérivation est b .

$$F_x = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{d}{db} \left(\ln \frac{b+a}{b} \right) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{d}{db} \left(\frac{b+a}{b} \right)$$

$$F_x = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{\left(\frac{b-b-a}{b^2} \right)}{\left(\frac{b+a}{b} \right)} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left(\frac{a}{b(b+a)} \right)$$

La force F_x étant négative, elle sera dirigée selon les x décroissants ; il s'agit donc d'une force d'attraction.

- 9.** Supposons que les deux spires soient séparées d'une distance x petite. Calculons le flux ϕ créé par la spire 1 au travers de la spire 2. Comme les deux spires sont parcourues par le même courant (dans le même sens), on a :

$$\phi = \bar{B} \cdot \bar{S} = BS$$

S étant la surface de la spire au travers de laquelle le flux est calculé.

Comme les deux pires sont jointives, on peut formuler l'hypothèse que le champ B créé par la spire 1 et qui traverse la spire 2 a pour expression :

$$B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2R^3 \left[1 + \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

Ce qui correspond au champ magnétique créé par une spire parcourue par un courant I à une distance x de son centre, le long de son axe (exercice 2 du chapitre 7).

Si on suppose que le champ est uniforme dans le plan de la spire, le flux, au travers de la spire 2, a pour expression :

$$\phi = \frac{\mu_0 I}{2R \left[1 + \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right]^{3/2}} S = \frac{\mu_0 I \pi R}{2 \left[1 + \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

Effectuons un développement limité en x :

$$\phi = \frac{\mu_0 I \pi R}{2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right]$$

La force résultante subie par la spire 2 est donc :

$$F_x = I \frac{d\phi}{dx} = \frac{\mu_0 I^2 \pi R}{2} \frac{d}{dx} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right]$$

Soit :

$$F_x = -\frac{3\mu_0 I^2 \pi x}{2}$$

Cette expression correspond à la force d'attraction (car négative) exercée par une spire sur l'autre quand elles sont distantes de x .

Comme les deux spires sont jointives, on a $x = a$. Donc :

$$F_x = -\frac{3\mu_0 I^2 \pi a}{2}$$

Remarque : l'hypothèse du champ magnétique dans le plan de la spire n'est pas très raisonnable mais cet exercice permet de mettre en évidence une force d'attraction entre les spires jointives d'un circuit plan.

Problèmes de synthèse

10

Ce chapitre regroupe quelques problèmes de synthèse et leurs solutions complètes. Les problèmes 1 à 3 concernent uniquement l'électrostatique. Les autres sont consacrés à l'électromagnétisme.

Énoncés des problèmes

Problème 1 Expérience de Millikan

Ce problème a pour objectif de mettre en équation la célèbre expérience du physicien américain Robert Millikan qui a permis, au début du xx^e siècle, de mettre en évidence la nature quantique de l'électricité, autrement dit de démontrer que toute charge électrique était un multiple d'une quantité élémentaire égale à $1,6 \times 10^{-19}$ C.

On considère une enceinte (figure 10.1) dans laquelle on injecte de très fines gouttelettes d'huile au moyen d'une buse. Le passage des gouttelettes dans la buse suffit, par frottement, à les électriser. Par simple effet de gravité, ces gouttelettes tombent naturellement vers la partie inférieure de cette enceinte et certaines d'entre elles peuvent pénétrer dans une deuxième partie du dispositif par l'intermédiaire d'un trou très fin pratiqué dans le fond de l'enceinte. Cette deuxième partie est en fait composée d'un condensateur plan aux bornes duquel on impose une différence de potentiels. Le champ électrique ainsi créé agit sur les gouttelettes d'huile chargées.

A. Écrire le bilan des forces qui s'appliquent sur une gouttelette isolée dans la partie supérieure du dispositif où ne règne aucun champ électrique. On supposera qu'il n'existe aucune interaction électrostatique entre les gouttelettes et on considérera que la force de frottement dans l'air subie par une gouttelette a pour expression :

$$\vec{f}_f = -6\pi\eta r\vec{v}$$

Cette expression constitue la formule de Stokes avec :

r , rayon de la gouttelette (environ $1\text{ }\mu\text{m}$).

$\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$, coefficient de viscosité de l'air.

\vec{v} , vecteur vitesse de la gouttelette.

En déduire l'expression de la vitesse d'une gouttelette dans l'enceinte supérieure. Montrer que cette vitesse tend très rapidement vers une constante v_0 .

B. La gouttelette d'huile entrant avec une vitesse v_0 entre les armatures du condensateur où règne le champ électrique \vec{E} , montrer que sa vitesse tend à présent vers une constante v_e que l'on calculera.

C. Montrer que la mesure de v_0 et de v_e permet de mesurer le rayon et la charge d'une gouttelette ainsi « piégée ». Calculer ce rayon et cette charge.

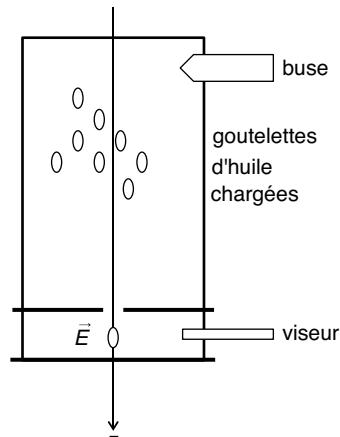


Figure 10.1

Problème 2

Étude de la répulsion entre deux sphères chargées

On considère deux sphères conductrices identiques de rayon R . Ces deux sphères sont en contact en un point O et possèdent chacune une charge positive identique. Compte tenu des phénomènes de répulsion électrostatique, la densité surfacique sur les deux sphères n'est pas uniforme et on admet qu'elle « s'organise » de sorte qu'en un point M quelconque repéré par un angle α (voir figure 10.2), on a :

$$\sigma = \sigma_0 \cos^2 \alpha$$

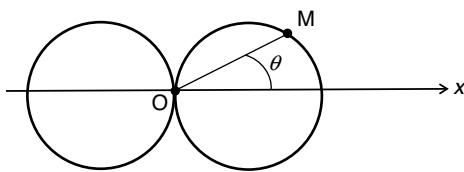


Figure 10.2

- A.** Calculer le potentiel des deux sphères.
- B.** Calculer la charge totale Q portée par l'ensemble des deux sphères en fonction de σ_0 et de R .
- C.** En déduire la valeur de la capacité de l'ensemble.
- D.** Calculer la force de répulsion qui s'exerce entre les deux sphères.

Problème 3

Électromètre à plateau

Un électromètre à plateau est un dispositif permettant de mesurer des différences de potentiels aux bornes de deux armatures d'un condensateur plan (figure 10.3). Soit S la surface des armatures et e leur entrefer.

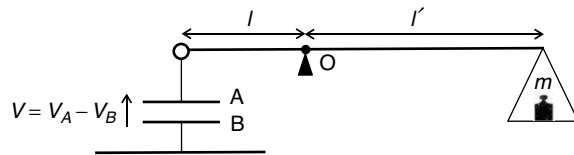


Figure 10.3

L'opérateur dispose sur le plateau de droite les masses marquées nécessaires au maintien de l'équilibre de la balance, autrement dit à la compensation de la force d'attraction électrostatique entre les armatures du condensateur.

- A.** Calculer la force d'attraction qui agit entre les deux armatures du condensateur.
- B.** En écrivant la condition d'équilibre de la balance, exprimer la différence de potentiels V en fonction de la masse m que l'on a placée sur le plateau.
- C.** Montrer que l'équilibre mécanique du dispositif est un équilibre instable.

Problème 4 Bobines de Helmholtz

Deux spires circulaires S_1 et S_2 identiques de rayon R et de centres A et B sont parcourues par le même courant constant I . Soit Ox l'axe perpendiculaire aux spires passant par A et par B. La distance AB est notée $2a$.

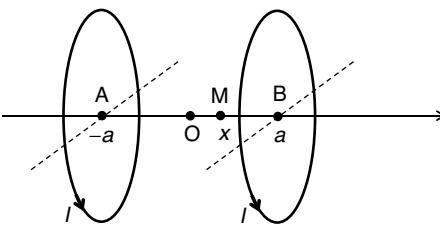


Figure 10.4

- A.** Calculer le champ magnétique $\overline{B(x)}$ en tout point d'abscisse x de cet axe. Calculer les valeurs particulières du champ en O, A et B.
- B.** Calculer la dérivée de $B(x)$ et montrer que cette dérivée s'annule en $x = 0$. Comparer les valeurs du champ magnétique en O et en B et en déduire que le champ peut être maximal ou minimal relatif en O selon la valeur donnée au paramètre a . Tracer alors qualitativement le champ magnétique $B(x)$ dans les différents cas et montrer que pour une valeur particulière de a , le champ peut être considéré comme uniforme entre les deux spires.

Problème 5 Équilibre magnétique d'un conducteur mobile

On considère le dispositif de la figure 10.5 : un courant circule dans un conducteur A vertical et immobile, puis dans un second conducteur B mobile en rotation autour d'un point O. La continuité du circuit est assurée par un bain de mercure dans lequel les deux conducteurs sont plongés. Les deux conducteurs possèdent une longueur l . Le plan est muni d'un repère Oxy défini comme indiqué la figure 10.5.

- A.** Montrer par un raisonnement qualitatif que le conducteur B s'écarte du conducteur A et atteint une position d'équilibre repérée par l'angle α qu'il fait avec la verticale.
- B.** Soit dx un élément de longueur du conducteur B. Calculer la force magnétique $d\vec{f}$ due au champ magnétique créé par le conducteur A, qui s'exerce sur cet élément de longueur. En déduire le moment dy de cette force élémentaire agissant au point O. On supposera que le conducteur A est suffisamment long pour pouvoir utiliser l'expression du champ créé par un conducteur de longueur infinie à une distance r .
- C.** En intégrant sur l'ensemble du conducteur B, calculer le moment résultant agissant au point O pour l'ensemble du conducteur mobile. Calculer l'angle α correspondant à la position d'équilibre en supposant que le poids du conducteur B s'exerce en son milieu.

Application numérique : $m = 3 \text{ g}$, $l = 80 \text{ cm}$, $h = 2 \text{ cm}$, $I = 5 \text{ A}$.

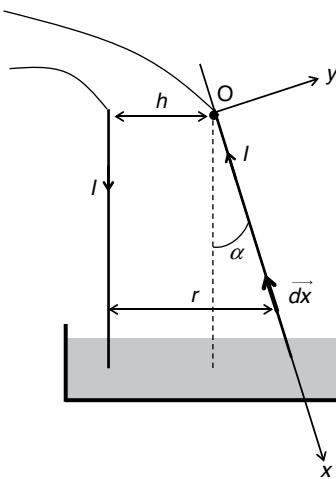


Figure 10.5

Problème 6 Interaction magnétique de deux solénoïdes

Deux solénoïdes de même longueur L , possédant le même nombre de spires mais de rayons différents R_1 et R_2 sont disposés et maintenus comme indiqué sur la figure 10.6. Ils sont parcourus respectivement par des courants I_1 et I_2 .

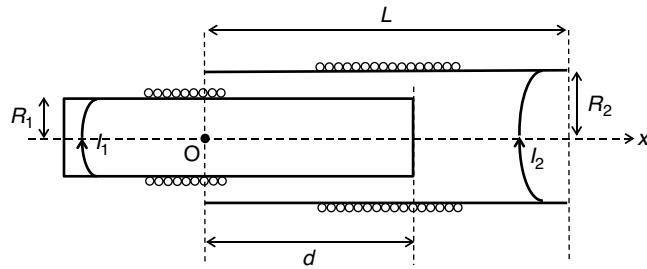


Figure 10.6

- A.** Calculer la résultante des forces qui s'exercent sur le petit solénoïde.
- B.** Déterminer l'expression de l'énergie potentielle d'interaction W_i du petit solénoïde.
- C.** Déterminer le coefficient d'inductance mutuelle des deux circuits.
- D.** On abandonne le petit solénoïde à lui-même, le grand restant fixe. Déterminer la position finale du petit solénoïde ainsi que son énergie potentielle d'interaction W_f dans cet état final. En déduire le travail des forces magnétiques au cours de ce déplacement.

Problème 7

Mesure du champ magnétique terrestre

Une aiguille aimantée mobile en rotation autour d'un axe possède la propriété de s'orienter spontanément dans le sens du champ magnétique auquel elle est soumise. On place une telle aiguille dans une position quelconque dans un environnement où elle n'est soumise qu'au champ magnétique terrestre (figure 10.7).

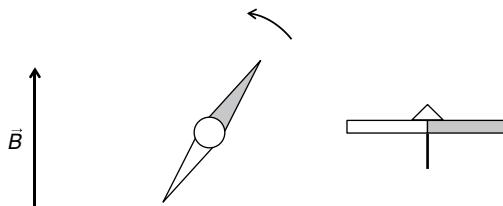


Figure 10.7

Soit \vec{B} le champ magnétique terrestre et \vec{B}_t sa composante horizontale. Le lieu d'observation se trouve à une latitude α à la surface de la terre (figure 10.8). On rappelle qu'en tout point de la surface terrestre, le champ \vec{B} est dirigé vers le pôle nord magnétique. On note R le rayon de la terre.

A. Montrer qu'il est possible d'annuler l'influence de la composante verticale \vec{B}_v du champ magnétique terrestre sur l'aiguille en plaçant son axe dans une position bien précise (on n'cherchera pas à calculer cette position).

B. On place l'aiguille à l'intérieur d'un solénoïde de longueur très grande, possédant n spires par unité de longueur et parcouru par un courant I . L'axe du solénoïde est disposé orthogonalement au champ \vec{B}_t . L'aiguille s'oriente alors selon un angle θ par rapport à sa position initiale (figure 10.9). Calculer l'expression de B_t en fonction de θ puis sa valeur numérique correspondant au lieu où l'observation est effectuée.

Application numérique : $n = 200$, $I = 1\text{A}$, $\theta = 85,5 \text{ deg}$.

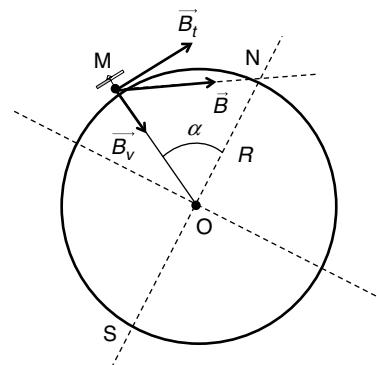


Figure 10.8

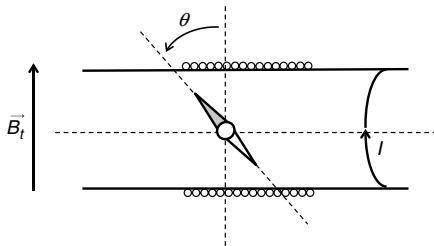


Figure 10.9

Problème 8

Champ magnétique créé par un tore

Un tore (forme géométrique de révolution générée par la rotation d'un cercle de rayon a autour d'un axe Oz à une distance R) est entièrement bobiné avec N spires jointives de fil conducteur parcouru par un courant I (figure 10.10). Le tore est réalisé dans un matériau ferromagnétique possédant une perméabilité magnétique absolue μ .

A. À l'aide du théorème d'Ampère, montrer que le champ magnétique est nul à l'extérieur du tore et calculer sa valeur à l'intérieur du bobinage. Calculer notamment la valeur particulière du champ au milieu du matériau.

B. On suppose à présent que le tore possède un entrefer d'épaisseur e (figure 10.11). Calculer le champ magnétique au centre de l'entrefer en supposant que μ est très grand.

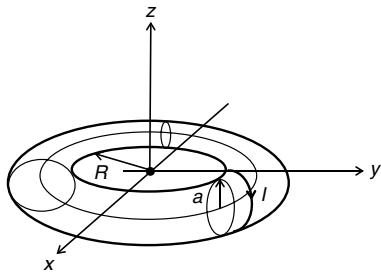


Figure 10.10

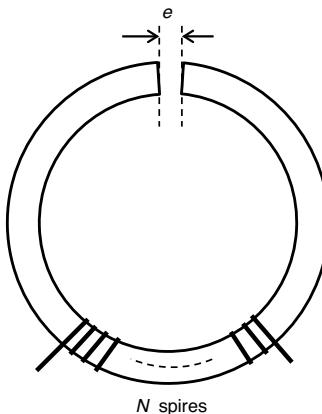


Figure 10.11

Application numérique : $N = 4000$, $I = 10$ A, $e = 5$ mm.

Problème 9

Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

Une particule de masse m et de charge q , initialement au repos en un point O , est soumise à l'action simultanée d'un champ électrique \vec{E} et d'un champ magnétique \vec{B} . Les deux champs sont uniformes dans l'espace, orthogonaux et on munit l'espace d'un repère $Oxyz$ fixe. Soit \vec{v} le vecteur vitesse de la particule dans ce repère. On néglige le poids de la particule.

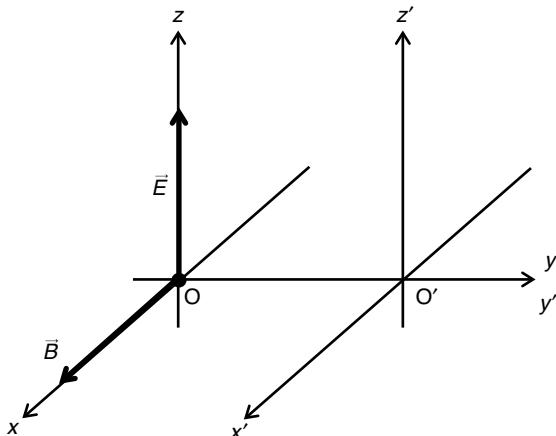


Figure 10.12

- A.** Écrire le principe fondamental de la dynamique et montrer que la trajectoire de la particule est inscrite dans le plan Oyz .
- B.** On considère un second repère $O'x'y'z'$, mobile, animé par rapport à $Oxyz$ d'une vitesse de translation constante $\vec{v}_0 = \frac{E}{B} \vec{j}$. On note \vec{v}' le vecteur vitesse de la particule dans ce repère mobile. Écrire l'équation du mouvement dans ce repère. En déduire que la trajectoire de la particule dans le repère $O'x'y'z'$ est un cercle dont on déterminera le rayon.
- C.** Tracer l'allure approximative de la courbe de la trajectoire de la particule dans le plan Oyz .

Solutions des problèmes

Problème 1

- A. Considérons comme système élémentaire une gouttelette en mouvement dans l'enceinte supérieure. Comme aucun champ n'y règne, les seules forces auxquelles elle est soumise sont son poids et la force de frottement de l'air. On a donc :

$$\vec{f}_f + m\vec{g} = m\vec{a}$$

En projection sur l'axe Oz et en tenant compte que la force de frottement s'oppose au mouvement et est donc dirigée vers le haut, on obtient :

$$-6\pi\eta rv + mg = m \frac{dv}{dt}$$

Soit :

$$\frac{m}{6\pi\eta r} \frac{dv}{dt} + v(t) = \frac{mg}{6\pi\eta r}$$

Cette équation différentielle admet pour solution :

$$v(t) = v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Avec :

$$\begin{cases} v_0 = \frac{mg}{6\pi\eta r} \\ \tau = \frac{m}{6\pi\eta r} \end{cases}$$

τ est la constante de temps de l'équation. Dès que $t \gg \tau$ (en pratique lorsque $t > 5\tau$, on peut considérer que :

$$v(t) \approx v_0$$

Remarque : le lecteur vérifiera sans peine qu'au bout d'un temps t égal à 3τ , la vitesse de la gouttelette atteint déjà 95 % de sa valeur limite et qu'au bout de 5τ , on atteint plus de 99 % de cette valeur limite.

En considérant que la masse volumique de l'huile est voisine de $\rho = 800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et que les gouttelettes sont sphériques de rayon r , on peut écrire :

$$\tau = \frac{\rho}{6\pi\eta r} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2\rho r^2}{9\eta} = \frac{2 \times 800 \times 10^{-12}}{9 \times 1,8 \times 10^{-5}} = 10^{-5} \text{ s}$$

On peut donc considérer que la vitesse se stabilise très rapidement à la valeur v_0 dès l'introduction de la gouttelette dans l'enceinte supérieure.

- B.** Dès que la gouttelette pénètre entre les armatures du condensateur, elle subit, en plus de son poids et de la force de frottement, une force électrostatique $q\vec{E}$, q étant la charge qu'elle porte.

On a donc :

$$\vec{f}_f + \vec{mg} + q\vec{E} = m\vec{a}$$

Soit, en projection sur Oz et en prenant soin de diriger la force électrostatique dans le sens des x croissants :

$$-6\pi\eta rv + mg + qE = m \frac{dv}{dt}$$

D'où :

$$\frac{m}{6\pi\eta r} \frac{dv}{dt} + v(t) = \frac{mg + qE}{6\pi\eta r}$$

Comme précédemment, cette équation admet pour solution :

$$v(t) = v_e \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Avec :

$$\begin{cases} v_e = \frac{mg + qE}{6\pi\eta r} \\ \tau = \frac{m}{6\pi\eta r} \end{cases}$$

Pour les mêmes raisons qu'à la question A, la gouttelette atteint très rapidement la vitesse v_e .

- C.** En mesurant la vitesse v_0 , on peut évaluer le rayon r de la gouttelette :

$$v_0 = \frac{mg}{6\pi\eta r} = \frac{\rho g}{6\pi\eta r} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2\rho g}{9\eta} r^2$$

D'où :

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2\rho g}}$$

Par ailleurs :

$$v_e - v_0 = \frac{mg + qE}{6\pi\eta r} - \frac{mg}{6\pi\eta r} = \frac{qE}{6\pi\eta r}$$

D'où :

$$q = \frac{6\pi\eta r(v_e - v_0)}{E}$$

La charge q peut donc être déduite de la mesure de v_e et de celle de v_0 , r étant déterminé par la seule mesure de v_0 . En réalisant cette expérience, Millikan a remarqué que les valeurs des charges mesurées étaient systématiquement des multiples de $1,6 \times 10^{19} \text{ C}$, établissant ainsi qu'il ne pouvait y avoir de charge plus faible que cette quantité élémentaire.

Problème 2

A. Calcul du potentiel.

Les deux sphères étant en contact, elles forment un seul conducteur qui présente donc en tout point, le même potentiel. Il nous suffit donc de calculer le potentiel en un point particulier, par exemple le point O.

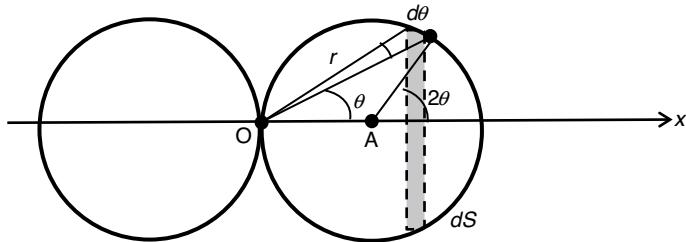


Figure 10.13

Considérons (figure 10.13), une couronne sphérique élémentaire située à une distance angulaire θ du point O sur une des sphères. Cette couronne sphérique de surface dS se trouve à une distance r de O et y crée donc le potentiel élémentaire dV tel que :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r}$$

dS est vue du point O entre les angles θ et $\theta + d\theta$. Elle est vue du point A, centre de la sphère, avec un angle 2θ .

Soit S la surface totale d'une des deux sphères. Le potentiel créé en O par l'ensemble des deux sphères est donc :

$$V = 2 \int_S dV = 2 \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r}$$

Remplaçons σ , dS et r par leurs expressions en fonction de θ et intégrons pour θ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ de manière à « balayer » la surface totale d'une sphère.

La surface d'une couronne sphérique est égale au produit de la largeur de cette couronne, soit $2Rd\theta$ par son rayon $R\sin2\theta$, le tout multiplié par 2π :

$$dS = 4\pi R^2 \sin2\theta d\theta$$

Par ailleurs :

$$r = 2R\cos\theta$$

Rappelons également que l'énoncé nous donne :

$$\sigma = \sigma_0 \cos^2 \theta$$

On en déduit alors l'expression de dV :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R^2 \sigma_0 \cos^2 \theta \sin2\theta d\theta}{2R\cos\theta}$$

$$dV = \frac{R\sigma_0}{2\epsilon_0} \cos\theta \sin2\theta d\theta$$

$$dV = \frac{R\sigma_0}{2\epsilon_0} \cos\theta (2\sin\theta\cos\theta) d\theta$$

$$dV = \frac{R\sigma_0}{\epsilon_0} \cos^2\theta \sin\theta d\theta$$

D'où :

$$V = 2 \int_S \frac{R\sigma_0}{\epsilon_0} \cos^2\theta \sin\theta d\theta$$

$$V = 2 \frac{R\sigma_0}{\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \times d(-\cos\theta) = -2 \frac{R\sigma_0}{\epsilon_0} \left[\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi/2}$$

Finalement :

$$V = \frac{2R\sigma_0}{3\epsilon_0}$$

B. Calcul de la charge totale.

En conservant les notations utilisées pour la question A, on peut écrire :

$$Q = 2 \int_S \sigma dS$$

Soit :

$$Q = 2 \int_0^{\pi/2} \sigma_0 \cos^2\theta \times 4\pi R^2 \sin 2\theta d\theta$$

$$Q = 8\pi R^2 \sigma_0 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin 2\theta d\theta = 16\pi R^2 \sigma_0 \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \sin\theta d\theta$$

$$Q = 16\pi R^2 \sigma_0 \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \times d(-\cos\theta) = 16\pi R^2 \sigma_0 \left[\frac{\cos^4\theta}{4} \right]_0^{\pi/2}$$

D'où :

$$Q = 4\pi R^2 \sigma_0$$

C. Calcul de la capacité

Connaissant la charge totale Q portée par l'ensemble des deux sphères ainsi que leur potentiel, on en déduit immédiatement l'expression de la capacité de cet ensemble de deux conducteurs :

$$C = \frac{Q}{V}$$

Soit :

$$C = \frac{4\pi R^2 \sigma_0}{\frac{2R\sigma_0}{3\epsilon_0}} = \frac{4\pi R^2 \sigma_0}{2R\sigma_0} \times 3\epsilon_0$$

D'où :

$$C = 6\pi R \epsilon_0$$

D. Calcul de la force de répulsion

En un point quelconque M de l'élément de surface dS s'exerce une force de pression électrostatique normale à la sphère (figure 10.14). Le module de la force totale agissant sur dS a pour expression :

$$df = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS$$

Or seule la composante selon Ox , soit df_x participe à la force résultante de répulsion entre les deux sphères.

Soit :

$$df_x = df \cos 2\theta = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cos 2\theta dS$$

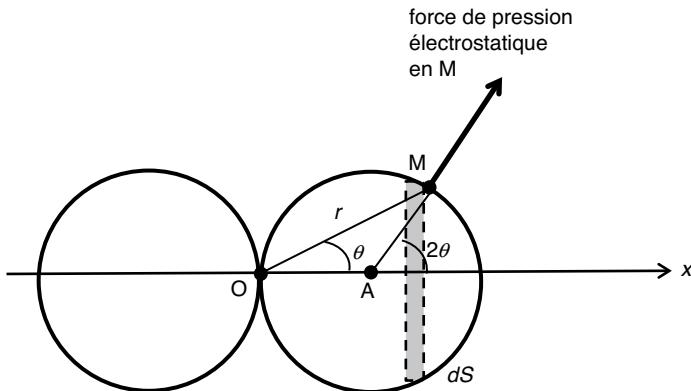


Figure 10.14

La force de répulsion totale est donc :

$$F = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cos 2\theta dS = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma_0^2 \cos^4 \theta}{2\epsilon_0} \cos 2\theta \times 4\pi R^2 \sin 2\theta d\theta$$

$$F = \frac{4\pi R^2 \sigma_0^2}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \cos 2\theta \times \sin 2\theta d\theta$$

$$F = \frac{4\pi R^2 \sigma_0^2}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta (2\cos^2 \theta - 1) \times 2\sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$F = \frac{4\pi R^2 \sigma_0^2}{\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta (2\cos^2 \theta - 1) \times d(-\cos \theta)$$

$$F = -\frac{8\pi R^2 \sigma_0^2}{\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos^7 \theta \times d(\cos \theta) + \frac{4\pi R^2 \sigma_0^2}{\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta \times d(\cos \theta)$$

$$F = \frac{8\pi R^2 \sigma_0^2}{\epsilon_0} \left[\frac{\cos^6 \theta}{12} - \frac{\cos^8 \theta}{8} \right]_0^{\pi/2}$$

Finalement :

$$F = \frac{\pi R^2 \sigma_0^2}{3\epsilon_0}$$

Le lecteur remarquera les astuces utilisées pour intégrer facilement, dans ce problème, les différentes expressions faisant intervenir de nombreuses fonctions trigonométriques. À cet égard, ce problème constitue un modèle du genre. Force est de reconnaître, malgré tout, qu'il s'agit là d'un cas relativement difficile.

Problème 3

- A.** Nous avons déjà démontré (exercice 9 du chapitre 4 et exercice 6 du chapitre 5), que la force électrostatique d'attraction s'exerçant entre les armatures d'un condensateur plan avait pour expression :

$$F = \frac{\epsilon_0 S}{2e^2} V^2$$

- B.** La balance est en équilibre lorsque la somme des moments autour de son axe est nulle. Soit :

$$Fl = mgl'$$

Soit :

$$\frac{\epsilon_0 S}{2e^2} V^2 l = mgl'$$

D'où :

$$V^2 = \frac{2gl'e^2}{l\epsilon_0 S} m$$

Ou encore :

$$V = k\sqrt{m} \text{ avec } k = \sqrt{\frac{2gl'e^2}{l\epsilon_0 S}}$$

- C.** Un système est en équilibre stable si en l'écartant de sa position d'équilibre, il a tendance, spontanément, à y revenir. L'équilibre est instable si le système, au contraire, a tendance à quitter irrémédiablement sa position d'équilibre.

Imaginons un léger déséquilibre du côté du plateau destiné à supporter les masses marquées. Le poids $m\bar{g}$ entraînant la balance de son côté, les armatures du condensateur ont tendance à s'écartez légèrement l'une de l'autre. L'entrefer e va donc augmenter. La force électrostatique attirant les deux armatures aura donc tendance à diminuer, amplifiant ainsi le déséquilibre.

De même, si un déséquilibre se crée du côté du condensateur, autrement dit si la force électrostatique est légèrement plus importante que sa valeur d'équilibre, l'entrefer e aura tendance à diminuer. La force électrostatique augmentera donc encore, amplifiant le déséquilibre.

L'électromètre à plateau est donc, par conception même, un dispositif qui ne peut être qu'en équilibre instable. Cela constitue le principal défaut de ce système et de fait, l'électromètre à plateau est un instrument de mesure délicat à mettre en œuvre.

Problème 4

- A. Soit M un point de l'axe Ox, d'abscisse x . Le champ magnétique qui règne en M résulte de la superposition des deux champs magnétiques $\overline{B_1(x)}$ et $\overline{B_2(x)}$ qui y sont créés respectivement par les spires S_1 et S_2 .

$$\overline{B(x)} = \overline{B_1(x)} + \overline{B_2(x)}$$

Conformément aux résultats de l'exercice 2 du chapitre 7, les deux champs $\overline{B_1(x)}$ et $\overline{B_2(x)}$ sont parallèles à l'axe Ox et dirigés selon les x croissants. Il en est donc de même pour le champ $\overline{B(x)}$.

Le point M d'abscisse x est séparé de B d'une distance $|x - a|$ et séparé de A d'une distance $|x + a|$.

En conséquence, l'intensité $B(x)$ du champ magnétique $\overline{B(x)}$ a pour expression :

$$B(x) = \frac{\mu_0 R^2 I}{2[R^2 + (x + a)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 R^2 I}{2[R^2 + (x - a)^2]^{3/2}}$$

$$B(x) = \frac{\mu_0 R^2 I}{2} \left([R^2 + (x + a)^2]^{-3/2} + [R^2 + (x - a)^2]^{-3/2} \right)$$

On remarque déjà que cette fonction est paire.

Le champ en O correspond à cette expression pour $x = 0$:

$$B(0) = \frac{\mu_0 R^2 I}{2} \left([R^2 + a^2]^{-3/2} + [R^2 + a^2]^{-3/2} \right)$$

$$B(0) = \mu_0 R^2 I [R^2 + a^2]^{-3/2}$$

Par ailleurs :

$$B(a) = B(-a) = \frac{\mu_0 R^2 I}{2} [R^2 + 4a^2]^{-3/2}$$

Ce qui nous donne l'expression du champ aux points particuliers A et B.

- B. Calculons la dérivée de $B(x)$:

$$\frac{dB}{dx} = \frac{\mu_0 R^2 I}{2} \left(-3(x + a)[R^2 + (x + a)^2]^{-5/2} - 3(x - a)[R^2 + (x - a)^2]^{-5/2} \right)$$

Pour $x = 0$, on a :

$$\frac{dB}{dx}(0) = \frac{\mu_0 R^2 I}{2} \left(-3a[R^2 + a^2]^{-5/2} + 3a[R^2 + a^2]^{-5/2} \right) = 0$$

Le champ magnétique présente donc un extremum relatif en $x = 0$.

Comparons à présent les valeurs du champ magnétique en O et en B en évaluant la différence $B(0) - B(a)$:

$$B(0) - B(a) = \mu_0 R^2 I [R^2 + a^2]^{-3/2} - \frac{\mu_0 R^2 I}{2} [R^2 + 4a^2]^{-3/2}$$

$$B(0) - B(a) = \frac{\mu_0 R^2 I}{2} \left(2[R^2 + a^2]^{-3/2} - [R^2 + 4a^2]^{-3/2} \right)$$

On aura $B(0) > B(a)$ si et seulement si :

$$2[R^2 + a^2]^{-3/2} > [R^2 + 4a^2]^{-3/2}$$

Donc, en éllevant chaque membre de cette équation à la puissance 2/3 :

$$2^{2/3}[R^2 + a^2] > [R^2 + 4a^2]$$

Soit :

$$R^2(\sqrt[3]{4} - 1) > (4 - \sqrt[3]{4})a^2$$

$$a < R\sqrt{\frac{\sqrt[3]{4} - 1}{4 - \sqrt[3]{4}}}$$

En prenant la valeur approchée de la racine carrée, on obtient la condition recherchée :

$$B(0) > B(a) \Leftrightarrow a < \frac{R}{2}$$

Cela signifie que si la distance a entre les deux spires S_1 et S_2 est suffisamment petite, le champ magnétique est plus intense en O qu'aux points A ou B.

La figure 10.15 qui représente un tracé qualitatif du champ magnétique résultant $B(x)$ en superposant les champs $B_1(x)$ et $B_2(x)$ met en évidence le fait que le champ est bien maximal en O.

Le graphe n'est que sommaire. Il serait nécessaire, pour obtenir un tracé plus conforme à la réalité, d'étudier la fonction $B(x)$ de manière classique. Cela ne pose aucune difficulté mais ne présente pas grand intérêt puisque notre raisonnement qualitatif a permis de mettre en évidence le résultat attendu.

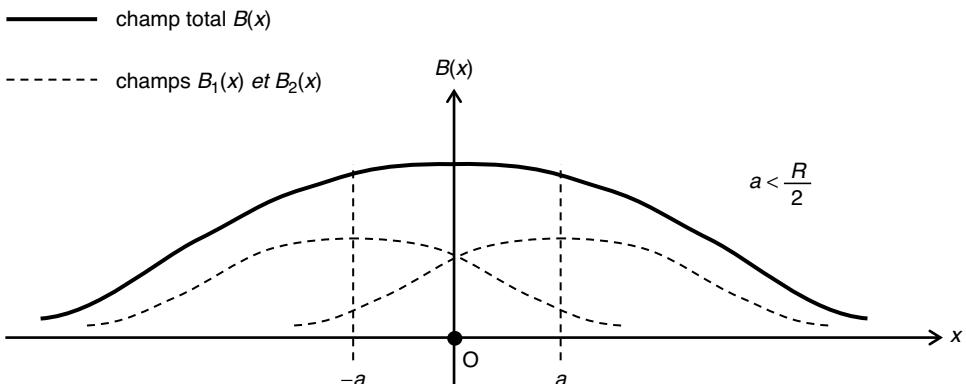


Figure 10.15

La condition trouvée ci-dessus a pour conséquence immédiate :

$$B(0) < B(a) \Leftrightarrow a > \frac{R}{2}$$

Dans ce cas précis, le champ n'est pas maximal en O puisqu'aux points A et B, celui-ci est plus intense. En revanche, comme la dérivée du champ est nulle en O, $B(x)$ présente bien un minimum relatif en $x = 0$ (figure 10.16).

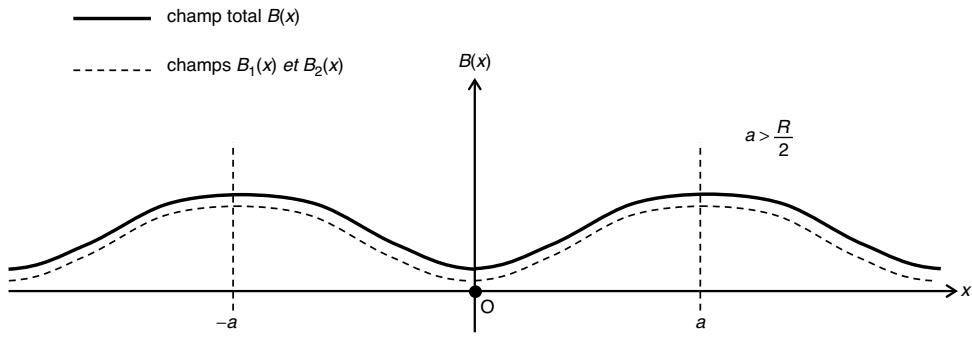


Figure 10.16

Pour finir, si $a = \frac{R}{2}$, on a : $B(0) = B(a)$.

En superposant les tracés de $B_1(x)$ et de $B_2(x)$, il apparaît nettement que le champ est pratiquement uniforme entre les deux spires (figure 10.17).

Une fois de plus, ce raisonnement ne constitue pas une preuve tangible de la constance du champ. Il permet de comprendre le phénomène. Une étude plus complète de la fonction $B(x)$ permettrait de justifier le résultat.

Les bobines de Helmholtz sont très connues pour cette propriété de quasi uniformité du champ magnétique dans l'espace compris entre les deux spires lorsque la distance qui les sépare est égale à leur rayon.

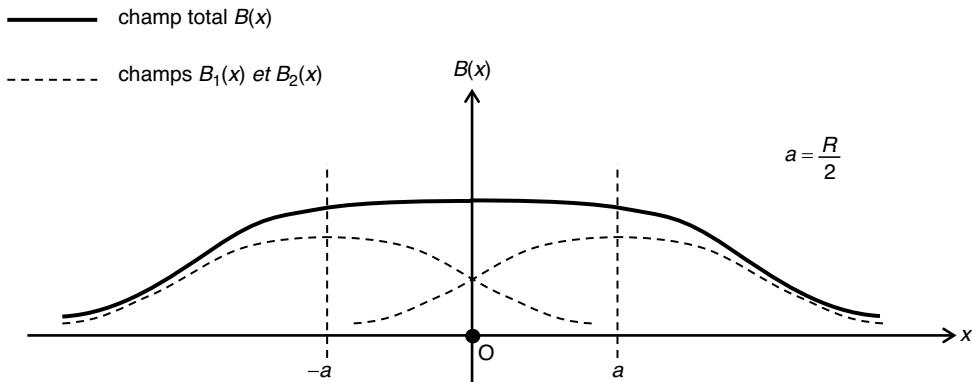


Figure 10.17

Problème 5

- A. Le conducteur A crée un champ magnétique dans son voisinage. Compte tenu de l'orientation du courant I dans ce conducteur, ce champ magnétique créé autour de tout élément $d\vec{x}$ du conducteur B est orienté selon la règle de l'observateur d'Ampère, c'est-à-dire orthogonalement au conducteur dirigé d'arrière en avant comme indiqué sur la figure 10.18. Toujours selon la règle de l'observateur d'Ampère, la force magnétique agissant sur l'élément $d\vec{x}$ est parallèle à Oy et dirigée selon les y croissants. Il s'agit donc bien d'une force de répulsion qui a tendance à écarter le conducteur B de sa position verticale initiale.

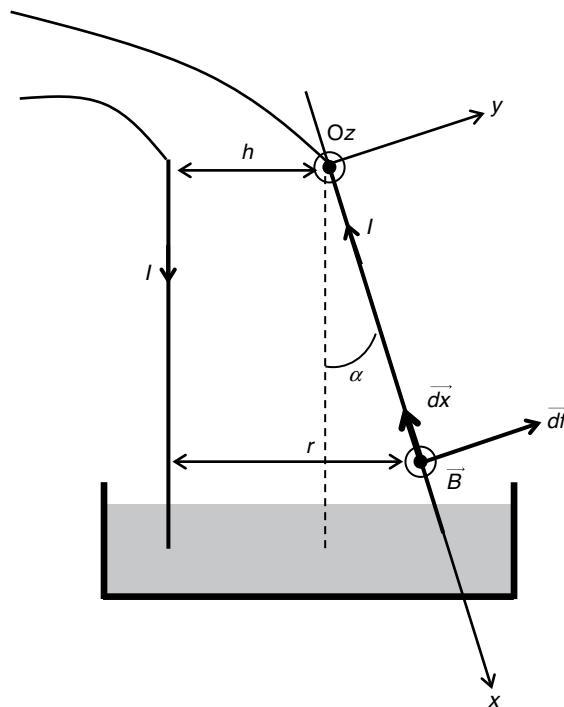


Figure 10.18

L'ensemble des forces élémentaires qui agissent sur chaque élément de longueur du conducteur B agit dans le même sens. Le conducteur sera donc soumis, globalement, à une action magnétique ayant tendance à l'écartier du conducteur A.

Cette action magnétique peut être assimilée à un moment de rotation agissant sur le conducteur B au point O. En munissant l'espace d'un axe Oz dirigé de l'arrière vers l'avant, ce moment sera vectoriellement dirigé selon les z croissants. Comme B est également soumis à l'action de son propre poids qui aura tendance, naturellement, à s'opposer à cet écartement, il atteindra une position pour laquelle les deux actions s'équilibreront.

- B.** Soit r la distance séparant, à l'équilibre, l'élément de longueur \overline{dx} du conducteur A et soit x la position de \overline{dx} sur le conducteur B.

Le champ magnétique créé en A autour de l'élément \overline{dx} a pour expression :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{k}$$

La force \overline{df} exercée par ce champ magnétique sur \overline{dx} a pour expression :

$$\overline{df} = I \overline{dx} \wedge \vec{B} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} dx \vec{j}$$

Remplaçons r par son expression en fonction de la position x de l'élément \overline{dx} sur l'axe du conducteur B :

$$r = h + x \sin \alpha$$

D'où :

$$\overline{df} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi(h + x \sin \alpha)} dx \vec{j}$$

Cette force \overline{df} possède un moment $\overline{d\gamma}$ autour de l'axe Oz tel que :

$$\overline{d\gamma} = x \overline{df} \vec{k} = \frac{x \mu_0 I^2}{2\pi(h + x \sin \alpha)} dx \vec{k}$$

Effectuons un développement limité de cette expression puisque α est supposé petit :

$$\overline{d\gamma} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{h} \alpha\right)} dx \vec{k} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} x \left(1 - \frac{x}{h} \alpha\right) dx \vec{k}$$

- C.** Le moment total résultant de l'action magnétique sur chaque élément de longueur du conducteur B a pour expression :

$$\overline{\Gamma} = \int_0^l d\gamma \vec{k} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} \int_0^l x \left(1 - \frac{x}{h} \alpha\right) dx \vec{k}$$

$$\overline{\Gamma} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} \int_0^l x dx \vec{k} - \frac{\mu_0 I^2 \alpha}{2\pi h^2} \int_0^l x^2 dx \vec{k}$$

$$\overline{\Gamma} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} \frac{l^2}{2} \vec{k} - \frac{\mu_0 I^2 \alpha}{2\pi h^2} \frac{l^3}{3} \vec{k} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} \frac{l^2}{2} \left(1 - \frac{2l\alpha}{3h}\right) \vec{k}$$

À l'équilibre, la somme des moments autour de l'axe de rotation doit être nulle ; si nous comptons positivement le moment Γ , le moment du poids du conducteur B sera compté négativement. Le poids étant supposé agir au milieu du conducteur (figure 10.19), son moment de rotation a pour expression :

$$\overline{M_{mg}} = -mg \times \frac{l}{2} \sin \alpha \vec{k} \approx -mg \times \frac{l}{2} \alpha$$

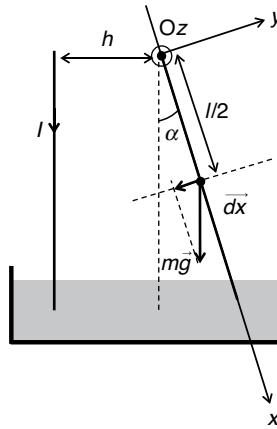


Figure 10.19

La condition d'équilibre du système s'écrit donc :

$$\frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} \frac{l^2}{2} \left(1 - \frac{2l\alpha}{3h}\right) = mg \times \frac{l}{2} \alpha$$

$$\frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} l \left(1 - \frac{2l\alpha}{3h}\right) = mg\alpha$$

$$\frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi h} = \alpha \left(mg + \frac{\mu_0 I^2 l^2}{3\pi h^2} \right)$$

Donc :

$$\alpha = \frac{\frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi h}}{mg + \frac{\mu_0 I^2 l^2}{3\pi h^2}} = \frac{1}{\frac{2\pi h m g}{\mu_0 I^2 l} + \frac{2l}{3h}}$$

Application numérique :

$$\alpha = \frac{1}{\frac{2\pi \times 0,02 \times 3 \times 10^{-3} \times 9,81}{2\pi \times 10^{-7} \times 5^2 \times 0,8} + \frac{2 \times 0,8}{3 \times 0,02}}$$

Soit :

$$\alpha = 5,75 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Ou encore :

$$\alpha = 5,75 \times 10^{-3} \times \frac{180}{\pi} = 0,33 \text{ deg}$$

L'angle trouvé est petit, ce qui justifie l'approximation utilisée et montre que l'action magnétique n'est pas extrêmement spectaculaire, hormis pour des courants très intenses.

Problème 6

- A.** Soit B_2 le champ créé par le grand solénoïde. Compte tenu de l'orientation du courant I_2 , ce champ est dirigé comme indiqué sur la figure 10.20.

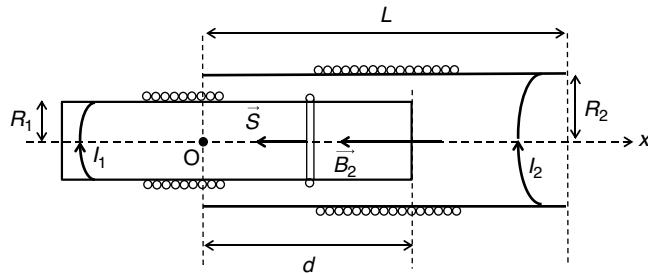


Figure 10.20

Calculons le flux φ créé par ce champ au travers d'une spire du petit solénoïde. Soit \bar{S} le vecteur surface de cette spire, dirigé dans le même sens que \bar{B}_2 , compte tenu de l'orientation de I_1 :

$$\varphi = \bar{B}_2 \cdot \bar{S} = B_2 S$$

Or :

$$B_2 = -\mu_0 \frac{N}{L} I_2 \text{ et } S = -\pi R_1^2$$

D'où :

$$\varphi = \mu_0 \frac{N}{L} I_2 \pi R_1^2$$

Le nombre de spires du petit solénoïde soumises au champ magnétique \bar{B}_2 est égal à $N \frac{x}{L}$. En conséquence, le flux total créé par le grand solénoïde au travers du petit a pour expression :

$$\phi = N \frac{x}{L} \varphi = N \frac{x}{L} \mu_0 \frac{N}{L} I_2 \pi R_1^2 = \frac{\mu_0 \pi N^2 I_2 R_1^2}{L^2}$$

L'expression de ce flux en fonction de x nous permet de calculer la force qui s'exerce sur le petit solénoïde :

$$F_x = I_1 \frac{d\phi}{dx} = \frac{\mu_0 \pi N^2 I_1 I_2 R_1^2}{L^2}$$

Cette force est positive car dirigée dans le sens des x croissants. Elle a donc tendance à faire progresser le petit solénoïde à l'intérieur du grand. Ceci est conforme à la règle du flux maximal puisque celui-ci est proportionnel à x .

- B.** L'énergie potentielle d'interaction du petit solénoïde est définie par :

$$W_i = -I_1 \phi$$

Soit :

$$W_i = -\frac{\mu_0 \pi N^2 I_1 I_2 R_1^2}{L^2}$$

- C.** Par définition, le coefficient d'inductance mutuelle est tel que :

$$\phi = MI_2$$

On en déduit immédiatement :

$$M = \frac{\mu_0 \pi x N^2 R_1^2}{L^2}$$

- D.** Lorsqu'on lâche le petit solénoïde, il a tendance à progresser à l'intérieur du grand. La règle du flux maximal nous indique que sa position finale correspondra au maximum de flux au travers de l'ensemble de ses spires.

Par conséquent, le petit solénoïde atteint un état d'équilibre lorsque $x = L$ c'est-à-dire lorsqu'il est entièrement contenu dans le grand.

Dans ces conditions, le nouveau flux total a pour expression :

$$\phi = N\varphi = \frac{\mu_0 \pi N^2 I_2 R_1^2}{L}$$

L'énergie potentielle d'interaction du petit solénoïde dans cet état final a donc pour expression :

$$W_f = -I_1 \phi = -\frac{\mu_0 \pi N^2 I_1 I_2 R_1^2}{L}$$

On peut alors en déduire le travail W des forces magnétiques au cours de ce déplacement. Le principe de conservation de l'énergie nous donne :

$$W = W_i - W_f = -\frac{\mu_0 \pi x N^2 I_1 I_2 R_1^2}{L^2} + \frac{\mu_0 \pi N^2 I_1 I_2 R_1^2}{L}$$

$$W = \frac{\mu_0 \pi N^2 I_1 I_2 R_1^2}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

On notera que le calcul du travail des forces à partir de l'énergie potentielle d'interaction s'effectue en faisant la différence « énergie initiale » moins « énergie finale ». Cela est tout à fait logique puisque l'énergie potentielle d'interaction est définie comme le travail à fournir pour amener le petit solénoïde depuis l'infini jusqu'à sa position d'interaction. Notons qu'il est sans doute plus prudent de calculer le travail des forces magnétiques à l'aide du théorème de Maxwell qui, bien évidemment, conduit au même résultat :

$$W = I_1 (\phi_{final} - \phi_{initial}) = I_1 \left(\frac{\mu_0 \pi N^2 I_2 R_1^2}{L} - \frac{\mu_0 \pi x N^2 I_2 R_1^2}{L^2} \right)$$

$$W = \frac{\mu_0 \pi N^2 I_1 I_2 R_1^2}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

Problème 7

- A.** Si l'aiguille aimantée est suspendue par son centre de gravité (figure 10.21), elle s'orientera selon le champ magnétique terrestre total \vec{B} . Elle forme donc avec l'horizontale du lieu, un angle β qu'il est très facile de calculer en observant, sur la figure 10.8, que le triangle OMN est isocèle.

En effet, dans un triangle quelconque, la somme des trois angles est égale à π . Dans un triangle isocèle, deux angles sont égaux. Comme l'autre angle, α , est connu, on a :

$$2\beta + \alpha = \pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

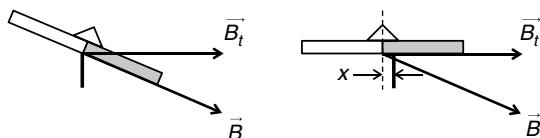


Figure 10.21

La suspension de l'aiguille à une distance x de son centre de gravité permet donc de compenser cette inclinaison due à la composante verticale du champ magnétique terrestre. Il s'agit de suspendre l'aiguille de manière telle qu'un couple mécanique compense exactement le couple magnétique auquel l'aiguille est soumise de par la composante \vec{B}_v .

- B.** Le champ magnétique créé par le solénoïde a pour intensité :

$$B_0 = \mu_0 n I$$

Compte tenu de l'orientation du courant, ce champ est dirigé comme indiqué sur la figure 10.22.

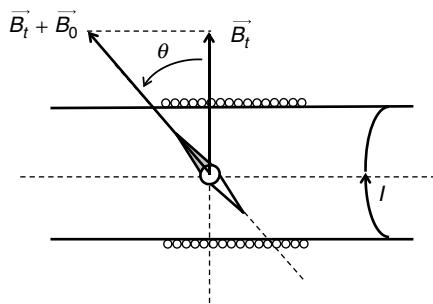


Figure 10.22

L'aiguille va donc s'orienter selon une direction parallèle au champ magnétique résultant $\vec{B}_t + \vec{B}_0$. On a donc :

$$\frac{B_0}{B_t} = \tan \theta$$

D'où :

$$B_t = \frac{B_0}{\tan\theta} = \frac{\mu_0 n I}{\tan\theta}$$

Application numérique :

$$B_t = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 200 \times 1}{\tan(85,5 \text{ deg})}$$

Soit :

$$B_t = 2 \times 10^{-5} \text{ T}$$

Cette valeur de la composante horizontale du champ magnétique dépend évidemment de la latitude du lieu de l'expérience. Ici, il s'agit de la valeur couramment admise à la latitude de Paris.

Problème 8

- A. En tout premier lieu, remarquons que compte tenu de la symétrie de révolution, le champ magnétique ne dépend que de la distance par rapport à l'axe Oz. De plus, le champ est orthoradial.

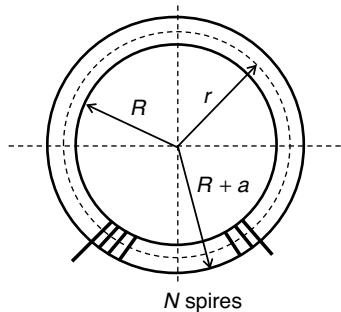


Figure 10.23

Sur le schéma de la figure 10.23 représentant le tore vu de dessus, choisissons un contour circulaire (C) de rayon r et de même axe que le tore. Quelle que soit la valeur de r , l'intensité du champ magnétique est constante le long du contour.

Si $r < R$ ou si $r > R + a$, le théorème d'Ampère nous donne :

$$\int_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 i = 0$$

En effet, dans ces deux cas, aucun courant ne traverse la surface s'appuyant sur le contour (C). Le champ est donc nul en tout point situé à l'extérieur du tore, comme dans le cas du solénoïde.

En revanche, si $R < r < R + a$, on a :

$$\int_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu NI$$

Remarque : ne pas oublier de remplacer μ_0 par μ puisque le champ magnétique règne dans un milieu ferromagnétique.

On en déduit donc :

$$B \times 2\pi r = \mu NI$$

D'où :

$$B = \frac{\mu NI}{2\pi r}$$

Remarque : à la différence du solénoïde, le champ magnétique n'est pas uniforme à l'intérieur du bobinage torique.

En particulier, pour $r = R + \frac{a}{2}$, on a : $B = \frac{\mu NI}{2\pi \left(R + \frac{a}{2}\right)} = \frac{\mu NI}{\pi(2R + a)}$

- B.** Le tore étant désormais pourvu d'un entrefer e , le théorème d'Ampère appliqué à un contour circulaire de centre $r = R + \frac{a}{2}$ nous amène à décomposer la circulation du champ le long du contour (C) en deux termes : un terme correspondant à la circulation dans le matériau ferromagnétique et un autre correspondant à la circulation dans l'entrefer.

Soit B_m le champ dans le matériau et B_e celui régnant dans l'entrefer.

Nota Bene : lorsqu'un circuit magnétique est composé d'éléments de perméabilités magnétiques différentes, on applique le théorème d'Ampère à la grandeur $\frac{B}{\mu}$.

On obtient :

$$\int_C \frac{\bar{B}}{\mu} \cdot d\bar{l} = \frac{B_m}{\mu} (2\pi r - e) + \frac{B_e}{\mu_0} e = NI$$

Si on suppose que $\mu \gg 1$, on en déduit l'approximation suivante :

$$\frac{B_e}{\mu_0} e = NI \Rightarrow B_e = \frac{\mu_0 NI}{e}$$

Application numérique :

$$B_e = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 4000 \times 10}{5 \times 10^{-3}} = 10 \text{ T}$$

Remarque : il est possible, grâce à de tels électroaimants, d'obtenir, dans des régions de l'espace très petites, des champs magnétiques très intenses.

Problème 9

- A. La particule est soumise à l'action de la force de Lorentz. En conséquence, on a :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Puisqu'on néglige le poids de la particule, celle-ci n'est soumise qu'à l'action de cette force et l'équation fondamentale de la dynamique nous donne immédiatement :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Cette équation montre que le vecteur accélération $\frac{d\vec{v}}{dt}$ est toujours orthogonal au champ magnétique \vec{B} . Comme la particule est initialement au repos, elle ne peut donc rester que dans un plan orthogonal à \vec{B} . Autrement dit, sa trajectoire est contenue dans le plan Oyz

- B. Dans le repère O'x'y'z', la vitesse de la particule est telle que :

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$$

Remplaçons \vec{v} par $\vec{v}' + \vec{v}_0$ dans l'équation du mouvement :

$$m \frac{d}{dt}(\vec{v}' + \vec{v}_0) = q\vec{E} + q(\vec{v}' + \vec{v}_0) \wedge \vec{B}$$

D'où, comme le vecteur \vec{v}_0 est constant :

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v}' \wedge \vec{B} + q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$$

Remplaçons \vec{v}_0 par la valeur proposée dans l'énoncé :

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v}' \wedge \vec{B} + q \frac{E}{B} \vec{j} \wedge \vec{B}$$

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v}' \wedge \vec{B} + qE\vec{j} \wedge \vec{i} = q\vec{E} + q\vec{v}' \wedge \vec{B} - qE\vec{k}$$

D'où :

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = q\vec{v}' \wedge \vec{B}$$

Nous avons déjà rencontré cette équation dans l'exercice 8 du chapitre 6. Nous pouvons appliquer ici le résultat que nous y avons trouvé en prenant soin de considérer que la vitesse initiale de la particule dans le repère O'x'y'z' est égale à $-\vec{v}_0$ puisque ce repère est en mouvement et que la particule est initialement immobile dans le repère Oxyz.

La trajectoire est donc un cercle de rayon R tel que :

$$R = \frac{mv_0}{qB}$$

Conformément aux résultats de l'exercice 8 du chapitre 6, ce cercle appartient au plan O'yz et est tangent à l'axe O'y' (figure 10.24).

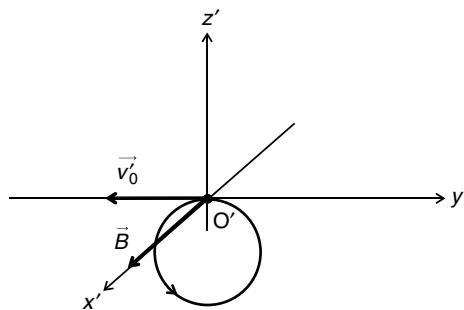


Figure 10.24

La trajectoire de la particule dans le repère $Oxyz$ correspond donc au roulement sans glissement d'un cercle se déplaçant à une vitesse constante le long de l'axe Oy .

Une telle courbe est une cycloïde. La figure 10.25 présente l'allure de cette trajectoire plane qui est composée d'arcs cycliques situés dans le demi-plan $z < 0$.

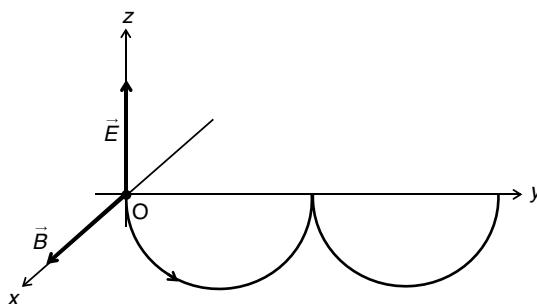


Figure 10.25

On remarquera que dans le repère mobile, l'influence du champ électrique est en quelque sorte annulée. Cela démontre que la notion de champ électrique est propre à un repère.

Formulaire mathématique

Trigonométrie

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi - x) = \tan x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p + q)}{\cos p \cos q}$$

Dérivées

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u[v(x)])' = (u \circ v(x))' = u'[v(x)] \times v'$$

Infiniment petits ($x \rightarrow 0$)

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx$$

$$(1 - x)^n \approx 1 - nx$$

$$\frac{1}{1 + x} \approx 1 - x$$

$$\frac{1}{1 - x} \approx 1 + x$$

$$\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

$$\sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

$$e^x \approx 1 + x$$

$$\sin x \approx x \text{ (} x \text{ en rad)}$$

$$\tan x \approx x \text{ (} x \text{ en rad)}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \text{ (} x \text{ en rad)}$$

Primitives et intégrales

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C^{\text{te}}$$

$$\int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} + C^{\text{te}}$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + C^{\text{te}}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C^{\text{te}}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C^{\text{te}}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C^{\text{te}}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C^{\text{te}}$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C^{\text{te}}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C^{\text{te}}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C^{\text{te}}$$

Index

A

action d'un champ magnétique uniforme sur un circuit plan 201

aimants 140

armatures 93

B

balance de Cotton 208

bobines de Helmholtz 247

C

calcul des forces magnétiques 223

capacité 92, 93

capacité d'un conducteur 91

capacité équivalente 93

champ créé par un circuit quelconque 161

champ créé par un conducteur rectiligne 161

champ électrique 4

champ électrique créé par une distribution de charges 30

champ électromagnétique 251

champ electrostatique 4

champ magnétique 140

champ magnétique créé par des charges en mouvement 143

champ magnétique terrestre 140, 249

charge électrique 1

circulation du champ électrique 54

D

circulation du champ magnétique 165

coefficient d'influence 92

condensateur 93

condensateur plan 132

conducteur 2, 89

coulomb 1

couple de torsion 11

courant électrique 142

E

densité de courant 143, 163

densité linéique de charge 28

densité surfacique de charge 29

densité volumique de charge 29

densité volumique d'énergie potentielle électrostatique 124

diélectrique 2

dipôle électrique 131

disque de Rowland 176

distribution de courant 163

distribution linéique 28, 30

distribution surfacique 29, 31

distribution volumique 29, 31

divergence 59

F

électron 1

élément de courant 160

énergie de constitution d'une famille de charges 122

énergie d'interaction 121

énergie potentielle 121

énergie potentielle de conducteurs chargés 123

énergie potentielle d'interaction 221

énergie potentielle mutuelle 122

équation de Poisson 60

équation locale de Gauss 59

équilibre électrostatique dans un conducteur 89

équilibre magnétique d'un conducteur mobile 247

expérience de Millikan 245

G

farad 91

flux coupé 222

flux du champ électrique 58

flux du champ magnétique à travers une surface 164

flux magnétique 164

force de Laplace 141, 199

force de Lorentz 142

force électrostatique 2

forces électrostatiques agissant sur un conducteur isolé 124

H

galvanomètre 211

gradient 55

H

henry 143

I

inductance mutuelle de deux circuits 224
inductance propre d'un circuit 225
influence électrostatique entre des conducteurs 91
influence totale 93
interaction électrostatique 1
interaction magnétique 140
interaction magnétique de deux solénoïdes 248
isolant 2

L

lignes de champ magnétique 163
lignes de champ 53
loi de Biot et Savart 160
loi de Coulomb 2
M
matériaux ferromagnétiques 140
moment magnétique 200

N

nappe de courant 163, 175, 176

P

particules 1
perméabilité absolue 144
perméabilité magnétique du vide 143
perméabilité magnétique relative 144
permittivité diélectrique absolue 2
permittivité diélectrique du vide 2
permittivité diélectrique relative 2
potentiel électrostatique 55
potentiel électrostatique créé par une distribution linéaire 57
potentiel vecteur 166
pression électrostatique 102
principe de superposition 3, 4
produit vectoriel 142
proton 1

R

règle de l'observateur d'Ampère 162, 200
règle du flux maximal 223
rotationnel 166
roue de Barlow 209

S

solénoïde 174, 175
surfaces équipotentielles 56

T

tesla 141
théorème d'Ampère 165
théorème de Coulomb 90
théorème de Faraday 93
théorème de Gauss 59
théorème de Maxwell 222
théorème des éléments correspondants 92
théorème de Stokes-Ampère 167
tore 250
torseur 124
travail de la force électrostatique 121
travail des forces magnétiques 222
tube de champ 54
tube de champ magnétique 164
tube de courant 163

V

volt 55

W

weber 164