Université de Lomé
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année académique: 2020-2021

TD de MTH101 N° 1: *Espaces vectoriels et applications linéaires*

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$, montrer que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que F_1 et F_2 sont deux sev de E supplémentaires dans E où F_1 (resp. F_2) est l'ensemble des applications paires (resp. impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\forall\ f, g \in E$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha.f)(x) = \alpha f(x)$.

3. On considère le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^n$ et pour tout $n \geqslant 2$ on pose $x = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On considère les sous-ensembles suivants: $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = 0\}$, $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = 1\}$, $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = x_2\}$, $E_4 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1x_2 = 0\}$, $E_5 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = x_2 = 0\}$, $E_6 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$ et $E_7 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 + x_2 = 1\}$. Pour tout $i = 1, \cdots, 7$, E_i est -il un sous-espace de $\mathbb{R}^n$? Dans l'affirmative, donner en une base et sa dimension.

4. Etudier chacun des systèmes, $S = (u, v, w)$, suivants et déterminer leur rang (en fonction du paramètre α s'il y a lieu):
   i. $u = {}^t(5, -3, 1)$, $v = {}^t(1, -2, 1)$ et $w = {}^t(3, 1, -3)$
   ii. $u = {}^t(\alpha, 1, 1)$, $v = {}^t(1, \alpha, 1)$ et $w = {}^t(1, 1, \alpha)$.

5. Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \ / \ x + y + z = 0 \quad et \quad x + iy - z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{C}^3$, et en déterminer une base et la dimension.

6. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}$. Soit $G = \{{}^t(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + 2y - z = t\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de G et donner sa dimension. Soient $s = {}^t(1, 0, 1, 0)$, $u = {}^t(0, 1, 0, 2)$, $v = {}^t(1, 1, 1, 2)$ et $w = {}^t(3, 1, 3, 2) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que le système (s, u, v, w) est lié. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (s, u, v, w). Donner une base de F. Comparer F et G.

7. Montrer que les applications suivantes sont linéaires :
   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, définie par $f(x, y, z) = (2x - y, x + y - z)$
   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par $f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$

8. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ une application linéaire donnée par $f(x, y, z, t) = (x+z, x+t, y+z, y+t)$
   (a) Trouver une base de l'image de f et le rang de f.
   (b) Trouver une base du noyau de f et sa dimension.
   (c) Montrer que f n'est pas un isomorphisme.

9. Soient E un espace vectoriel sur le corps commutatif $\mathbb{K}$, de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Soiet F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Montrer que $F + G = \{x + y / x \in F \text{ et } y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de contenant $F \cup G$.
   (b) Soit $f : F \times G \to E$ par $f(x, y) = x + y$. Montrer que f est linéaire et trouveer Ke et Imf. En utilisant la relation $dim_{\mathbb{K}}(F \times G) = dim_{\mathbb{K}}(F) + dim_{\mathbb{K}}(G)$, retrouver résultat $dim_{\mathbb{K}}(F + G) + dim_{\mathbb{K}}(F \cap G) = dim_{\mathbb{K}}(F) + dim_{\mathbb{K}}(G)$.

10. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
    Montrer que pour tout endomorphisme f de E, on a:
    $(Im\ f = Im\ f^2) \Leftrightarrow (E = Ker\ f \oplus Im\ f)$.

11. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

   (a) $W_1 = \{(a,b,0); a,b \in \mathbb{R}\}$ ☐
   (b) $W_2 = \{(a,b,c); a \geqslant 0, b,c \in \mathbb{R}\}$ ☐
   (c) $W_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; a+b+c=0\}$ ☐
   (d) $W_4 = \{(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3\}$. ☐

12. Les affirmations suivantes sont-elles correctes?

   (a) Le vecteur $u = (2,-5,3) \in \mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1,-3,2)$, $v_2 = (2,-4,-1)$ et $v_3 = (1,-5,7)$. ☐
   (b) Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de vecteurs $e_1 = (1,2,3)$, $e_2 = (0,1,2)$ et $e_3 = (0,0,1)$. ☐
   (c) Le plan $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$ est engendré par $v = (2,3,0)$ et $w = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, 0\right)$. ☐

13. Soit E un espace vectoriel de dimension 7 et soient V et W deux sous-espaces vectoriels de dimensions respectives 4 et 5. Est-il possible que $V \cap W$ soit de dimension

   1? 2? 3? 4? 5?

14. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, indiquer la famille de vecteurs qui constituent une base.

   (a) $x_1 = (1,2,-1)$, $x_2 = (-2,1,1)$, $x_3 = (1,-1,2)$ ☐
   (b) $x_1 = (1,2,3)$, $x_2 = (2,-1,1)$, $x_3 = (1,0,1)$ $x_4 = (0,1,1)$ ☐
   (c) $x_1 = (1,-1,0)$, $x_2 = (1,0,1)$, $x_3 = (1,2,3)$ ☐

15. Indiquer la valeur de $t \in \mathbb{R}$ pour laquelle les vecteurs $(1,0,t)$, $(1,1,t)$ et $(t,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

   $A : t = -1$ $B : t = 1$ $C : t = 0$

16. Parmi les application suivantes, dire laquellle est linéaire

   $A : f(x,y) = (x+1, y+1)$ $B : g(x,y) = (3x-y, 0)$ $C : h(x,y,z) = (x, xyz, z)$

17. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit f l'endomorphisme de E, $(x,y,z) \mapsto (x+3z, 0, y-2z)$. Dire laquelle des propositions suivantes est vraie.

   $A : f(e_1) = e_1 + 3e_3$, $f(e_2) = 0$, $f(e_3) = e_2 - 2e_3$
   $B : f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = 3e_1 - 2e_3$
   $C : Ker\ f = \{0\}$

18. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (2x+y, x-y, x-y)$. Indiquer laquelle des propositions suivantes est le $Ker\ f$

   $A : \{(0,0)\}$ $B : Vect(1,1)$ $C : Vect((2,1,1),(1,-1,1))$

19. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (2x+y, x-y, x-y)$. Indiquer laquelle des propositions suivantes est le $Im\ f$

   $A : Vect((0,1,0))$ $B : Vect((2,1,1),(1,-1,-1))$ $C : \mathbb{R}^3$

20. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, soit $B = (v_1, \cdots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E. Dans ce qui suit, j désigne un entier entre 1 et n. Indiquer la bonne proposition

   A : Si B est libre alors $B\ \{v_j\}$ est libre
   B : Si B est liée alors $B - \{v_j\}$ est liée
   C : Si B est liée alors $B - \{v_j\}$ est libre

Exercice 21

Résoudre le système d'équations suivantes, après avoir calculé son déterminant:

$$(S_2) : \begin{cases} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= b \\ x + y + az &= b \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Exercice 22

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$ munit de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$.Soient g l'application défininie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$g(x, y, z) = (x + 3y - 3z, x - y + z, x + y - z)$$

1. Déterminer le noyau de g et sa dimension. En déduire le rang de g.
2. g est-elle bijective? Jusitifier votre réponse.

Exercice 23

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose

$$M_a = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a^2 - 7a & a - 7 & a \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de a la matrice M_a est-elle diagonalisable?

Exercice 24

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit T un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$$

sur B.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.Donner son spectre.
2. A est-elle diagonalisable? Justifier votre réponse.
3. En déduire les vecteurs propres et les espaces propres associés à chaque valeur propre
4. On note B_p une base de vecteurs propres de T. Donner une matrice de passage P de la base B à la base B_p. (On précisera la base B_p).
5. Écrire la matrice de T dans la base B_p choisie.

Exercice 25

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit T un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 & \\ -2 & 1 & -1 & 2 & \end{pmatrix}$$

sur B.

1. Calculer les vecteurs propres et les espaces propres associés à chaque valeur propre de A.

2. A est-elle diagonalisable? Jusitifier votre réponse?

3. On note B_p une base de vecteurs propres de T. Donner une matrice de passage P de la base B à la base B_p. (On précisera la base B_p). Calculer P^{-1}

4. Écrire la matrice de T dans la base B_p choisie.

5. Trouver les fonctions $x(t), y(t), z(t)$ et $u(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que:

$$(S_1)\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & 3x(t) - y(t) + z(t) - u(t) \\ y'(t) & = & y(t) \\ z'(t) & = & -4x(t) + 2y(t) - z(t) + 2u(t) \\ u'(t) & = & -2x(t) + y(t) - z(t) + 2u(t) \end{array}\right.$$

orrigé du TD sur les espaces vectoriels et les appli-
cations linéaires.

Exo 1	1-4
Exo 2	4-8
Exo 3	8-10
Exo 4	11-16
Exo 5	16-19
Exo 6	19-24
Exo 7	24-27
Exo 8	28-29
Exo 9	29-32
Exo 10	33-34
Exo 11	34
Exo 12	35
Exo 13	35
Exo 14	36
Exo 15	36
Exo 16	36
Exo 17	36
Exo 18	36
Exo 19	36
Exo 20	36

Exo 21 $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=6 \\ x+y+az=6 \end{cases}$ 37-40

Exercice 22 $g(x,y,z) = (x+3y-3z, x-y+z, x+y-z)$

Page 41

Exo 23	42-44
Exo 24	45-48
Exo 25	49-55.

TD MTH 101 N°1 : Espaces vectoriels et applications linéaires.

) Soit $E = \mathbb{R}^2$. Montrons que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace pour
montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel, il faut montrer
points regroupés en 2 groupes de 4 points.

| $(E, +, \cdot)$ est un groupe commutatif.

- $\forall x, y, z \in E$, $(x+y)+z = x+(y+z)$ (Associativité)
- $\forall x, y \in E$, $x+y = y+x$ (Commutativité).
- $\exists 0_E \in E$; $\forall x \in E$, $0_E + x = x + 0_E = x$ (0_E est neutre).
- $\forall x \in E$; $\exists x' \in E$, $x + x' = x' + x = 0_E$ (Tous les éléments sont symétrisables).

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$

: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $\alpha.(\beta.x) = \beta.(\alpha.x)$
$= (\alpha\beta).x$

$\forall x, y \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$

$\forall x \in E$, $1_{\mathbb{K}} . x = x$

st ces 8 points que nous allons vérifier pour démontrer
e $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

acher vos ceintures. Ça va être un peu long mais e
eu de compliqué.

) Soient $x = (x_1, x_2)$; $y = (y_1, y_2)$ et $z = (z_1, z_2)$ des
ments de $\mathbb{R}^2$

n a : $(x+y)+z = \big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big) + (z_1, z_2)$
$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2)$

$= ((x_1+y_1)+z_1 ; (x_2+y_2)+z_2)$

$= (x_1+(y_1+z_1) ; x_2+(y_2+z_2))$ Car la loi + est associative de $\mathbb{R}$.

Donc $(x+y)+z = (x_1,x_2)+(y_1+z_1, y_2+z_2)$

$= (x_1,x_2)+((y_1,z_1)+(y_2,z_2))$

$= x+(y+z)$ C.Q.F.D

2) $x+y = (x_1,x_2)+(y_1,y_2)$

$= (x_1+y_1, x_2+y_2)$

$= (y_1+x_1, y_2+x_2)$ Car + est Commutatif.

Donc $x+y = (y_1,y_2)+(x_1,x_2)$

$x+y = y+x$ C.Q.F.D

N.B : Vous vous demandez ce que j'appelle C.Q.F.D.(E)ien, ça veut dire ce qu'il fallait Démontrer)

3) Posons $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$

On a : $0_{\mathbb{R}^2} + (x_1,x_2) = (0,0)+(x_1,x_2)$

$= (0+x_1, 0+x_2)$

$= (x_1+0, x_2+0)$

$= (x_1,x_2)$

Donc $0_{\mathbb{R}^2}+x = x$

(C)omme + est Commutative, on a :

$0_{\mathbb{R}^2}+x = x+0_{\mathbb{R}^2} = x$ C.Q.F.D

4) Soit $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$

Posons $x' = (-x_1, -x_2)$

on a : $x + x' = (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2)$
$= (x_1 - x_1, x_2 - x_2)$
$= (0, 0)$
$= 0_{\mathbb{R}^2}$

onc $x + x' = (x' + x) = 0_{\mathbb{R}^2}$ (Car + est Commutatif)

1)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

on a : $(\alpha + \beta).x = (\alpha + \beta).(x_1, x_2)$
$= ((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)x_2)$
$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2)$
$= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2)$
$= \alpha.(x_1, x_2) + \beta.(x_1, x_2)$

$(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$

2) $\alpha.(\beta.x) = \alpha.(\beta.(x_1, x_2))$
$= \alpha.(\beta x_1, \beta x_2)$
$= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2)$ ✱✱
$= (\beta(\alpha x_1), \beta(\alpha x_2))$
$= \beta.(\alpha x_1, \alpha x_2)$

$\alpha.(\beta.x) = \beta.(\alpha.x)$

e plus la ligne ✱✱ donne :

$\alpha.(\beta.x) = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2)$
$= (\alpha\beta).(x_1, x_2)$
$= (\alpha\beta).x$

onc on a : $\alpha.(\beta.x) = \beta.(\alpha.x) = (\alpha\beta).x$

3) $\alpha.(x+y) = \alpha.((x_1, x_2) + (y_1, y_2))$

$\alpha.(x+y) = \alpha.(x_1+y_1, x_2+y_2)$

$= (\alpha(x_1+y_1), \alpha(x_2+y_2))$

$= (\alpha x_1+\alpha y_1, \alpha x_2+\alpha y_2)$

$= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2)$

$= \alpha.(x_1, x_2) + \alpha.(y_1, y_2)$

$= \alpha.x + \alpha.y$ C.Q.F.D

4) Et enfin !! Souffler

$1_{\mathbb{R}}.(x_1, x_2) = (1\times x_1, 1\times x_2)$

$= (x_1, x_2)$

$1_{\mathbb{R}}.x \quad = x$ C.Q.F.D

Montrons que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

1 Soient $f, g, h \in E$

$\forall x \in \mathbb{R}, ((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x)$

$= (f(x)+g(x)) + h(x)$

$= f(x) + (g(x)+h(x))$

$= f(x) + (g+h)(x)$

$= (f+(g+h))(x)$

Donc $(f+g)+h = f+(g+h)$ C.Q.F.D

2 $\forall x \in \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$= g(x)+f(x)$

$= (g+f)(x)$

Donc $f+g = g+f$

3 Soit $0_F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 0$

$x \in \mathbb{R}, (0_F + f)(x) = 0_F(x) + f(x)$
$= 0 + f(x)$
$= f(x)$

ne $0_F + f = f$. Comme $+$ est commutatif,
on a : $0_F + f = f + 0_F = f$

4) Soit $-f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto -f(x)$

n a : $(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$= f(x) - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$= 0$
$= 0_F(x)$

Donc $f + (-f) = 0_F$
ar Commutativité $f + (-f) = (-f) + f = 0_F$

1 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
on a : $\forall x \in \mathbb{R}, ((\alpha + \beta).f)(x) = (\alpha + \beta) f(x)$
$= \alpha f(x) + \beta f(x)$
$= (\alpha . f + \beta . f)(x)$

Donc $(\alpha + \beta).f = \alpha.f + \beta.f$

$(\alpha(\beta . f))(x) = \alpha((\beta.f)(x))$
$= \alpha(\beta f(x))$
$= (\alpha\beta) f(x)$
$= \beta(\alpha f(x))$
$= \beta.((\alpha.f)(x))$
$= (\beta.(\alpha.f))(x)$

onc $\alpha\cdot(\beta\cdot f) = \beta\cdot(\alpha\cdot f) = (\alpha\beta)\cdot f$

3) $(\alpha\cdot(f+g))(x) = \alpha(f+g)(x)$
$= \alpha(f(x)+g(x))$
$= \alpha f(x) + \alpha g(x)$
$= (\alpha\cdot f + \alpha\cdot g)(x)$

Donc $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f + \alpha\cdot g$

4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1\cdot f)(x) = 1\times f(x) = f(x)$
Donc $1\cdot f = f$ C.Q.F.D

Montrons que F_1 et F_2 sont deux sev de E supplément[aires] dans E.

▸ Montrons que F_1 est un sous espace vectoriel de E

Rapel:

Pour montrer que F est un sev de E
on procède comme suit:

1) on montre que $O_E \in F$:
L'élément neutre de E appartient à F

2) on montre que:
$\forall x, y \in F$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha\cdot x + \beta\cdot y \in F$
C'est à dire que F est stable par combinaison liné[aire]

Ici l'élément neutre de E est la fonction nulle

$O_{\mathcal{F}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 0$

Bien évidemment $O_{\mathcal{F}}$ est paire:
En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $O_{\mathcal{F}}(-x) = 0 = O_{\mathcal{F}}(x)$
Donc $O_{\mathcal{F}} \in F_1$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F_1$

7

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(\alpha.f+\beta.g)(-x)=(\alpha.f)(-x)+(\beta.g)(-x)$$
$$=\alpha f(-x)+\beta g(-x)$$
$$=\alpha f(x)+\beta g(x)$$

Car $f(-x)=f(x)$ et $g(-x)=g(x)$ $(f, g \in F_1)$

Donc $\alpha.f+\beta.g$ est paire et alors $\alpha.f+\beta.g \in F_1$

On conclure donc que F_1 est un s.e.v de E

→ Montrez quasiment de la même façon que F_2 est également un s.e.v de E

→ Maintenant montrons que $E=F_1 \oplus F_2$

Rappel :

$$E=F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} E=F_1+F_2 & (1) \\ F_1 \cap F_2=\{0_E\} & (2) \end{cases}$$

Montrons que $E=F_1+F_2$

Soit $f \in E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$

(Vous pouvez le vérifier)

Posons $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$

On a : $g(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$

$=g(x)$ Donc g est paire

Posons $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$

On a : $h(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}$

$=-h(x)$ Donc h est impaire.

Alors $f=g+h$ où $g \in F_1$ et $h \in F_2$ D'où

$E=F_1+F_2$.

2) Montrons que $F_1 \cap F_2 = \{0_F\}$

Soit $f \in F_1 \cap F_2$

Donc $f \in F_1$: f est paire et $f \in F_2$: f est impaire

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\begin{cases} f(x) = f(-x) \\ f(x) = -f(-x) \end{cases}$

En faisant la somme membre à membre :

$$f(x) + f(x) = f(-x) - f(-x)$$

$$2f(x) = 0$$

Donc $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Alors $f = 0_F$

D'où $F_1 \cap F_2 = \{0_F\}$ C.Q.F.D

) Pour répondre à cette question, nous énonçons la propriété suivante :

Soit $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx^n = b\}$ où $a_1, a_2, \dots a_n, b$ et $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$

Si $b = 0$, alors E est un sev de $\mathbb{R}^n$

Si $b \neq 0$, alors E n'est pas un sev de $\mathbb{R}^n$

Ainsi donc : $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$; $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 - x_2 = 0\}$; $E_5 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = 0\}$; $E_6 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$ sont des sev de $\mathbb{R}^n$

Par contre $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 1\}$, $E_4 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 x_2 = 0\}$ et $E_7 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 = 1\}$ ne sont pas des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Recherche de bases et de dimensions

$x \in E_1 \Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n)$

$\Leftrightarrow x = x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + x_3(0, 0, 1, 0, \dots, 0) + \dots +$

$x_n(0, 0, \dots 0, 1)$ donc $E_1 = \text{Vect}\{e_2, e_3, e_4, \dots e_n\}$ où e base de E_B et $\dim E_B = n-1$

4/ Etudions chacun des systèmes $S = (u, v, w)$ suivants et déterminons leur rang.

i: $u = {}^t(5,-3,1)$, $v = {}^t(1,-2,1)$ et $w = {}^t(3,1,-3)$

Pour étudier un système S de vecteurs on étudie d'abord sa liberté

Rappel :

Soit $S = \{u, v, w\}$ une famille de vecteurs de E

S est libre veut dire que :

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}, \alpha u + \beta v + \gamma w = 0_E \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

Soient donc $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

on a : $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha + \beta + 3\gamma = 0 & L_1 \\ -3\alpha - 2\beta + \gamma = 0 & L_2 \\ \alpha + \beta - 3\gamma = 0 & L_3 \end{cases}$$

on fixe la ligne L_3 $\alpha + \beta - 3\gamma = 0$

on fait $3L_3 + L_2$ $\beta - 8\gamma = 0$

on fait $-5L_3 + L_1$ $-4\beta + 18\gamma = 0$

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - 3\gamma = 0 & L_1 \\ \beta - 8\gamma = 0 & L_2 \\ -4\beta + 18\gamma = 0 & L_3 \end{cases}$$

on fixe L_2 $\beta - 8\gamma = 0$.

on fait $4 L_2 + L_3$ $-14\gamma = 0$

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - 3\gamma = 0 \\ \beta - 8\gamma = 0 \\ -14\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \gamma = \beta = \alpha = 0$$

Donc $S = \{u, v, w\}$ est une famille libre

Donc $rg S = 3$ (nombre de vecteurs de S)

ii/ $u = {}^t(\alpha, 1, 1)$; $v = {}^t(1, \alpha, 1)$ et $w = {}^t(1, 1, \alpha)$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$xu + yv + zw = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow x \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha x + y + z = 0 & L_1 \\ x + \alpha y + z = 0 & L_2 \\ x + y + \alpha z = 0 & L_3 \end{cases}$$

Au fait, j'utilise la méthode de Gauss

Pour résoudre les systèmes d'équation linéaire.

Je fixe une ligne où un inconnu porte le coefficient 1

$L_3 : x + y + \alpha z = 0$ par exemple avec L_3

Vous créez des zéros dans les autres lignes :

La ligne fixée est multiplier par un coefficien approprié et est ajouté aux autres lignes

on fait $-L_3 + L_2 : (\alpha - 1) y + (1-\alpha) z = 0$

on fait $-\alpha L_3 + L_1 : (1-\alpha) y + (1-\alpha^2) z = 0$

$$xu + yv + zv = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} \alpha x + y + z = 0 \\ (1-\alpha) y + (1-\alpha^2) z = 0 \\ (\alpha - 1) y + (1-\alpha) z = 0 \end{cases}$$

on fixe maintenant L_2 $(1-\alpha) y + (1-\alpha^2) z$

on fait $L_2 + L_3 : [(1-\alpha^2) + (1-\alpha)] z = 0$

$$((1-\alpha)((1+\alpha)+1)) z = 0$$

$$(1-\alpha)(2+\alpha) z = 0$$

Donc

$$xu + yv + zw = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + y + z = 0 \\ (1-\alpha)y + (1-\alpha^2)z = 0 \\ (1-\alpha)(2+\alpha)z = 0 \end{cases}$$

Notez bien que $(1-\alpha)(2+\alpha)z = 0$ ne permet pas de dire en même temps que $z = 0$. On peut aussi avoir $\alpha = 1$ ou $\alpha = -2$

C'est pour cela qu'il faut discuter suivant les valeurs de α

- Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2, 0\}$

on a : $(1-\alpha)(2+\alpha)z = 0 \Rightarrow z = 0$ (Dans L_2)

Donc $(1-\alpha)y + (1-\alpha^2) \times 0 = 0$ Alors $y = 0$

et dans L_1 : $\alpha x + 0 + 0 = 0$ Donc $x = 0$

$$xu + yv + zw = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow x = y = z = 0$$

Donc la famille $S = (u, v, w)$ est libre

Donc $\operatorname{rg} S = 3$

- Pour $\alpha = 1$, on remarque que

$u = v = w = (1, 1, 1)$. Donc $\operatorname{vect}\{u, v, w\} = \operatorname{vect}\{u\}$

Alors $rg S = 1$

- Pour $\alpha = -2$

En remplaçant, on a :

$$xu + yv + zw = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Pour $z = 1$, $x = 1$ et $y = 1$. Il y a donc une solution différente de $(0, 0, 0)$

on a la relation de liaison $u + v + w = 0$

Donc la famille $\{u, v, w\}$ est liée

$u = -v - w$ Donc $vect\{u, v, w\} = Vect\{-v-w, v, w\}$

$Vect\{u, v, w\} = Vect\{v, w\}$

Il faut réduire la famille lorsqu'elle est liée en éjectant les vecteurs liés : Ici nous avons éjectés u qui est lié à v et w. Et il faut étudier la liberté

de la nouvelle famille obtenue : Ici,
il s'agit de la famille $\{v, w\}$. Si cette
famille est toujours liée, nous réitérons la
méthode jusqu'à ce que on trouve une
famille libre. Le rgs est le nombre de
vecteurs de la première famille libre trouvée

on a : $xv + yw = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow x\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$xv + yw = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ -2x + y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ 6y + y = 0 \\ -6y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Donc la famille $\{v, w\}$ est libre
D'où $rgS = 2$.

5/ Montrons que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / \ x + y + z = 0$
et $x + iy - z = 0\}$
est un sev de $\mathbb{C}^3$ et donnons en une base

Je vais vous faire encore un rapel et je ne vais pas m'en lasser de faire à chaque fois que je juge celà nécessaire les mathématiques, c'est avant tout apprendre et surtout comprendre la théorie qui se trouve dans le cours !

Rapel :

soit E un espace vectoriel et $F \subset E$

on dit que F est un sous espace vectoriel de E lorsque :

i) $0_E \in F$

ii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$

Application :

- $0_{\mathbb{C}^3} = (0,0,0)$ et $\begin{cases} 0+0+0=0 \\ 0+i \times 0 - 0 = 0 \end{cases}$

Donc $0_{\mathbb{C}^3} \in F$

- Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ des éléments de F, α et $\beta \in \mathbb{R}$

on a : $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3)$

$= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$

$= (X, Y, Z)$

où $X = \alpha x_1 + \beta y_1$; $Y = \alpha x_2 + \beta y_2$ et

$Z = \alpha x_3 + \beta y_3$

$X + Y + Z = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3)$

$= \alpha(x_1 + x_2 + x_3) + \beta(y_1 + y_2 + y_3)$

$= \alpha \times 0 + \beta \times 0$

car $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ du fait

que $x, y \in F$

Donc $X + Y + Z = 0$

De plus,

$X + iY - Z = (\alpha x_1 + \beta y_1) + i(\alpha x_2 + \beta y_2)$

$- (\alpha x_3 + \beta y_3)$

$= \alpha(x_1 + i x_2 - x_3) + \beta(y_1 + i y_2 - y_3)$

$= \alpha \times 0 + \beta \times 0$ car $x, y \in F$

$= 0$

Donc $\begin{cases} X + Y + Z = 0 \\ X + iY - Z = 0 \end{cases}$

ainsi $\alpha x + \beta y = (X, Y, Z) \in F$

D'où F est un Sev de E.

6/ $G = \{ {}^t(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ;\ x + 2y - z = t \}$

Montrons que G est un Sev de $\mathbb{R}^4$.

. on a : $0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0)$ et $0 + 2 \times 0 - 0 = 0$

Donc $0_{\mathbb{R}^4} \in G$.

. soient $x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$; $y = {}^t(y_1, y_2, y_3, y_4)$

deux éléments de G. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

on a : $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)$

$+ (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3, \beta y_4)$

$= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_4 + \beta y_4)$.

$= (X, Y, Z, T)$

on a :

$X + 2Y - Z = (\alpha x_1 + \beta y_1) + 2(\alpha x_2 + \beta y_2)$

$- (\alpha x_3 + \beta y_3)$

$= \alpha(x_1 + 2x_2 - x_3) + \beta(y_1 + 2y_2 - y_3)$

$= \alpha x_4 + \beta y_4$ car $x, y \in G$

$X + 2Y - Z = T$

Scanné avec CamSca

D'où F est un Sev de E.

6/ $G = \{ {}^t(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ;\ x+2y-z=t \}$

Montrons que G est un Sev de $\mathbb{R}^4$

. on a : $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)$ et $0+2\times 0-0=0$

Donc $0_{\mathbb{R}^4} \in G$.

. Soient $x = {}^t(x_1,x_2,x_3,x_4)$; $y = {}^t(y_1,y_2,y_3,y_4)$

deux éléments de G. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

on a : $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)$
$+ (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3, \beta y_4)$

$= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_4 + \beta y_4)$.

$= (X, Y, Z, T)$

on a :
$X + 2Y - Z = (\alpha x_1 + \beta y_1) + 2(\alpha x_2 + \beta y_2)$
$- (\alpha x_3 + \beta y_3)$

$= \alpha(x_1 + 2x_2 - x_3) + \beta(y_1 + 2y_2 - y_3)$

$= \alpha x_4 + \beta y_4$ car $x, y \in G$

$X + 2Y - Z = T$

Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

- Base de G et dim G.

$u = {}^t(x, y, z, t) \in G \Leftrightarrow t = x + 2y - z$

$$\Leftrightarrow u = {}^t(x, y, z, x + 2y - z)$$

$$\Leftrightarrow u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x + 2y - z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow u = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{a} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{c}$$

Donc $\{a, b, c\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$

Montrons maintenant que cette famille est libre.

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc la famille $\{a, b, c\}$ est libre.

Il s'agit d'une famille libre et génératrice de G donc $\{a, b, c\}$ est une base de G.

et on a : $\dim G = 3$.

- Montrons que la famille $\{s, u, v, w\}$ est liée

soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$

$$xs + yu + zv + tw = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow x\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$xs + yu + zv + tw = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z + 3t = 0 \\ y + z + t = 0 \\ x + z + 3t = 0 \\ 2y + 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z + 3t = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

$xs + yu + zv + tw = 0 \iff \begin{cases} x = -z - 3t \\ y = -z - t \end{cases}$

Pour $t = 0$ et $z = -1$ on a :

$x = 1$ et $y = 1$

Donc $xs + yu + zv + tw = 0$ devient :

$s + u - v = 0$: $s = v - u$

La famille est donc liée

$F = \text{Vect}\{s, u, v, w\} = \text{Vect}\{v-u, u, v, w\}$

$F = \text{Vect}\{u, v, w\}$

$xu + yv + zw = 0 \iff x\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}3\\1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

$$x u + y v + z w = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3z \\ x = 2z \end{cases}$$

Pour $z = 1$, $x = 2$ et $y = -3$

Donc $2u - 3v + w = 0_{\mathbb{R}^4}$

$$w = -2u + 3v$$

La famille $\{u, v, w\}$ est liée

$$F = \text{Vect}\{u, v, w\} = \text{Vect}\{u, v, -2u + 3v\}$$

$$= \text{Vect}\{u, v\}$$

on peut voir à vu d'oeil que la famille $\{u, v\}$ ~~w~~ est libre car les vecteurs

F/#

$u = {}^t(0, 1, 0, 2)$ et $v = {}^t(1, 1, 1, 2)$ ne sont pas colinéaires Toutefois, faites encore la demonstration:

Donc $\{u, v\}$ est une base de F et

$$\dim F = 2$$

$$xu + yv + zw = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3z \\ x = 2z \end{cases}$$

Pour $z = 1$, $x = 2$ et $y = -3$

Donc $2u - 3v + w = 0_{\mathbb{R}^4}$

$$w = -2u + 3v$$

La famille $\{u, v, w\}$ est liée

$$F = \text{Vect}\{u, v, w\} = \text{Vect}\{u, v, -2u + 3v\}$$
$$= \text{Vect}\{u, v\}$$

on peut voir à vu d'oeil que la famille $\{u, v\}$ ~~w~~ est libre car les vecteurs

F/#

$u = {}^t(0, 1, 0, 2)$ et $v = {}^t(1, 1, 1, 2)$ ne sont pas colinéaires Toutefois, faites encore la demonstration:

Donc $\{u, v\}$ est une base de F et

$$\dim F = 2$$

On a : $u = {}^t(0,1,0,2)$ et $0+2\times 1-0=2$

Donc $u \in G$.

$v = {}^t(1,1,1,2)$ et $1+2\times 1-1=2$

Donc $v \in G$.

Ainsi $\mathrm{Vect}\{u, v\} \subset G$.

D'où $F \subset G$.

7/ Montrons que les applications suivantes sont linéaires

a/ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (2x-y, x+y-z)$$

Rappel : Définition d'une application linéaire.

Soient E et F deux espaces vectoriels.

f est une application linéaire de E vers F.

si et seulement si.

$\forall x, y \in E, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

a/ Soient $x=(x_1,x_2,x_3)$; $y=(y_1,y_2,y_3)$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

on a : $\alpha x+\beta y=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)+(\beta y_1+\beta y_2,\beta y_3)$

$$=(\underbrace{\alpha x_1+\beta y_1}_{X};\underbrace{\alpha x_2+\beta y_2}_{Y},\underbrace{\alpha x_3+\beta y_3}_{Z})$$

Donc $f(\alpha x+\beta y)=f(X,Y,Z)$.

$$=(2X-Y,X+Y-Z)$$

$$=(2(\alpha x_1+\beta y_1)-(\alpha x_2+\beta y_2);(\alpha x_1+\beta y_1)+(\alpha x_2+\beta y_1)-(\alpha x_3+\beta y_3))$$

$$=(\alpha(2x_1-x_2)+\beta(2y_1-y_2);\alpha(x_1+x_2-x_3)+\beta(y_1+y_2-y_3))$$

$$=(\alpha(2x_1-x_2),\alpha(x_1+x_2-x_3))+(\beta(2y_1-y_2);\beta(y_1+y_2-y_3))$$

$$=\alpha(2x_1-x_2,x_1+x_2-x_3)+\beta(2y_1-y_2,y_1+y_2-y_3).$$

$$=\alpha f(x_1,x_2,x_3)+\beta f(y_1,y_2,y_3)$$

Donc $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)$.

on conclue que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$: f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$f(x,y,z) = (-x+y+z, x-y+z, x+y-z)$.

Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

on a : $\alpha x+\beta y = \alpha(x_1, x_2, x_3)+\beta(y_1, y_2, y_3)$

$$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)+(\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3)$$

$$= (\underbrace{\alpha x_1+\beta y_1}_{X}, \underbrace{\alpha x_2+\beta y_2}_{Y}, \underbrace{\alpha x_3+\beta y_3}_{Z})$$

Donc $f(\alpha x+\beta y) = f(X, Y, Z)$.

$$= (-X+Y+Z, X-Y+Z, X+Y-Z)$$

$$= (-\alpha x_1-\beta y_1+\alpha x_2+\beta y_2+\alpha x_3+\beta y_3 ;$$
$$\alpha x_1+\beta y_1-\alpha x_2-\beta y_2+\alpha x_3+\beta y_3 ;$$
$$\alpha x_1+\beta y_1+\alpha x_2+\beta y_2-\alpha x_3-\beta y_3)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(-x_1+x_2+x_3)+\beta(-y_1+y_2+y_3) \\ \alpha(x_1-x_2+x_3)+\beta(y_1-y_2+y_3) \\ \alpha(x_1+x_2-x_3)+\beta(y_1+y_2-y_3) \end{pmatrix}$$

Donc $f(\alpha x + \beta y) = {}^t\begin{pmatrix} \alpha(-x_1+x_2+x_3) \\ \alpha(x_1-x_2+x_3) \\ \alpha(x_1+x_2-x_3) \end{pmatrix} +$

$${}^t\begin{pmatrix} \beta(y_1+y_2-y_3) \\ \beta(y_1-y_2+y_3) \\ \beta(y_1+y_2-y_3) \end{pmatrix}$$

$$f(\alpha x+\beta y) = \alpha(-x_1+x_2+x_3, x_1-x_2+x_3, x_1+x_2-x_3)$$
$$+\beta(y_1+y_2-y_3, y_1-y_2+y_3, y_1+y_2-y_3)$$
$$= \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$: f est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$f(x,y,z,t) = (x+z, x+t, y+z, y+t)$

a) Base de $\mathrm{Im} f$ et $rg f$.

Rappel : Soit f une application linéaire de E vers F

On appelle image de f et on note $\mathrm{Im} f$ l'ensemble :

$$\mathrm{Im} f = \{ f(x) \mid x \in E \}$$

et on appelle $rg f$ la dimension de $\mathrm{Im} f$: $rg f = \dim \mathrm{Im} f$

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. $f(x,y,z,t) = {}^t\begin{pmatrix} x+z \\ x+t \\ y+z \\ y+t \end{pmatrix}$

$$f(x,y,z,t) = x \underbrace{{}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u} + y \underbrace{{}^t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v} + z \underbrace{{}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w} + t \underbrace{{}^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{s}$$

La famille $\{u, v, w, s\}$ engendre donc $\mathrm{Im} f$. De plus, on remarque aisément que cette famille est liée ; en effet, $u+v = (1,1,1,1) = w+s$; $u = w+s-v$. Ainsi, $\mathrm{Vect}\{u,v,w,s\} = \mathrm{Vect}\{v,w,s\}$. Nous allons maintenant montrer que la famille $\{v,w,s\}$ est une famille libre

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On a :

$$\alpha v + \beta w + \gamma s = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Donc la famille $\{v, w, s\}$ est effectivement libre

Ainsi donc, $\{v, w, s\}$ est libre et génératrice de $\mathrm{Im} f$

C'est une base et $\dim \mathrm{Im} f = 3$, donc $rg f = 3$.

Base de Ker$f$ et calcule de dim Ker$f$

Rappel : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. $\mathrm{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$

$\forall x \in E,\ x \in \mathrm{Ker} f \iff f(x) = 0_F$

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker} f \iff f(x,y,z,t) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\iff \begin{cases} x+z=0 \\ x+t=0 \\ y+z=0 \\ y+t=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-z \\ y=-z \\ t=z \end{cases} \iff (x,y,z,t) = (-z,-z,z,z)$$

$$\iff (x,y,z,t) = z(-1,-1,1,1)$$

Donc $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{(-1,-1,1,1)\} = \mathbb{R}(-1,-1,1,1)$

et $\dim \mathrm{Ker} f = 1$. (Une base de Ker$f$ est $\{(-1,-1,1,1)\}$)

c) Montrons que f n'est pas un isomorphisme

Rappel : Un isomorphisme est une application linéaire bijective. Pour qu'une application soit bijective, elle doit être injective et surjective. En algèbre linéaire, on a vu que si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors :

f est injective $\iff \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$

f est surjective $\iff \mathrm{Im} f = F \iff \mathrm{rg} f = \dim F$

Ici, $\dim \mathrm{Ker} f = 1$. Donc $\mathrm{Ker} f \neq \{0_E\}$ et donc f n'est pas injective, ce qui permet de dire que f n'est pas un isomorphisme.

On peut aussi dire que $\mathrm{rg} f = 3 \neq \dim \mathbb{R}^4$ ($\dim \mathbb{R}^4 = 4$). Donc f n'est pas surjective et par conséquent, n'est pas un isomorphisme.

Montrons que $F+G=\{x+y \mid x\in F \text{ et } y\in G\}$ est un sev de E contenant $F\cup G$

On a: $0_E = 0_E + 0_E$ et $0_E \in F$; $0_E \in G$ car F et G sont des sev de E. Donc $0_E \in F+G$

Soient $x, y \in F+G$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$x\in F+G$. Donc $\exists x_1\in F, \exists x_2 \in G \mid x = x_1+x_2$

$y\in F+G$. Donc $\exists y_1\in F, \exists y_2\in G / \ y=y_1+y_2$

On a: $\alpha . x + \beta . y = \alpha.(x_1+x_2) + \beta.(y_1+y_2)$

$= (\alpha.x_1+\beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2)$

Comme F et G sont des sev de E, ils sont stables par combinaison linéaire. C'est à dire:

$\forall x_1, y_1 \in F$, $\alpha.x_1+\beta y_1 \in F$ et $\forall x_2, y_2 \in G, \alpha.x_2+\beta y_2 \in G$

Donc $\alpha x+\beta y \in F+G$.

. On conclut que $F+G$ est un sev de E.

. Montrons maintenant que $F+G \supset F\cup G$

$\forall x\in F$, $x = x+0_E$ et $0_E \in G$. Donc $\forall x\in F$, $x\in F+G$

Alors $F\subset F+G$. De même $\forall x\in G$, $x = 0_E + x$ et $0_E\in F$. Donc $\forall x\in G$, $x\in F+G$. Alors $G\subset F+G$

$\begin{cases} F\subset F+G \\ G\subset F+G \end{cases}$: Alors $F\cup G \subset F+G$. (C.Q.F.D)

(b) $f: F\times G \to E$

$(x,y) \mapsto x+y$

- Montrons que f est linéaire

Soient $x=(x_1,x_2)$; $y=(y_1,y_2)$ des éléments de $F\times G$

$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a : $\alpha x+\beta y=(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2)$

Donc $f(\alpha x+\beta y)= f(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2)$

$$= (\alpha x_1+\beta y_1) + (\alpha x_2+\beta y_2)$$

$$= \alpha (x_1+x_2) + \beta (y_1+y_2)$$

$$f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Donc, f est une application linéaire.

. Déterminons $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Soient $(x,y) \in F \times G$.

$$(x,y) \in \operatorname{Ker} f \iff f(x,y)=0$$

$$\iff x+y=0$$

$$\iff y=-x$$

$$\iff (x,y)=(x,-x)$$

Donc $\operatorname{Ker} f = \{(x,-x) \mid x \in F \cap G\}$

• Déterminons $\operatorname{Im} f$

$\forall (x,y) \in F \times G$, $f(x,y) = x+y$. Donc $\operatorname{Im} f = F+G$.

• Retrouvons le résultat

$$\dim_{\mathbb{K}}(F+G) + \dim_{\mathbb{K}}(F\cap G) = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G$$

D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim_{\mathbb{K}} F \times G = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

(Le théorème du rang dit que la dimension de l'espace de départ d'une application linéaire est la somme des dimensions de son noyau et de son image)

De plus, $\dim_{\mathbb{K}}(F \times G) = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G$

Donc $\dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

Or : $\operatorname{Im} f = F + G$. Donc $\dim \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}}(F+G)$

et $\operatorname{Ker} f = \{(x,-x) \mid x \in F \cap G\}$. L'application linéaire

$$g : \begin{array}{rcl} F \cap G & \longrightarrow & \operatorname{Ker} f \\ x & \longmapsto & (x,-x) \end{array}$$ est un isomorphisme.

Donc $\dim \operatorname{Ker} f = \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G)$.

D'où $\dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G = \dim_{\mathbb{K}} F \cap G + \dim_{\mathbb{K}}(F+G)$

10 Soit

Soit $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$. Montrons que

$$(Im f = Im f^2) \iff (E = Ker f \oplus Im f)$$

Supposons que $Im f = Im f^2$ et montrons que $E = Ker f \oplus Im f$.

bord nous allons montrer que $E = Ker f + Im f$. Pour
i, nous allons montrer que tout élément x de E
la somme d'un élément de $Ker f$ et d'un élément
$Im f$. Soit alors $x \in E$. On a: $f(x) \in Im f$.
mme $Im f = Im f^2$, alors $f(x) \in Im f^2$. Ainsi donc,
$x' \in E$, $f(x) = f^2(x')$. (N.B: $f^2 = f \circ f$) Donc $f(x) = f(f(x'))$
lors $f(x) - f(f(x')) = 0_E$. Comme f est une application
inéaire, on a: $f(x - f(x')) = f(x) - f(f(x')) = 0_E$
$-f(x')) = 0_E$. On déduit que $x - f(x') \in Ker f$. On
ut maintenant dire que: $x = (x - f(x')) + f(x')$
t comme $x - f(x') \in Ker f$; $f(x') \in Im f$, on déduit
ue $x \in Ker f + Im f$. Ainsi $E \subset Ker f + Im f$. Or,
f et $Im f$ sont des sous espaces vectoriels de E. Donc
f $+ Im f \subset E$. D'où $E = Ker f + Im f$
($f \in End(E)$) Donc, d'après le théorème du rang, on a:
$\dim E = \dim Ker f + \dim Im f$. Au total, on a: $\begin{cases} E = Ker f + Im f \\ \dim E = \dim Ker f + \dim Im f \end{cases}$

On conclue donc que $E = Ker f \oplus Im f$.

) Supposons que $E = Ker f \oplus Im f$ et montrons que $Im f = Im f^2$.

$\in Im f^2 \Rightarrow \exists x' \in E \mid x = f^2(x')$

$\Rightarrow x = f(f(x'))$ $x' \in E$

$\Rightarrow x = f(x'')$ où $x'' = f(x') \in E$

$\Rightarrow x \in Im f$

Donc $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$.

Réciproquement, Soit $x \in \mathrm{Im} f$. $\exists x' \in E,\ x = f(x')$

Comme $x' \in E$ et que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$, on a:

$x' = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \mathrm{Ker} f$ et $x_2 \in \mathrm{Im} f$.

Donc $x = f(x') = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

Or: $x_1 \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow f(x_1) = 0_E$ et $x_2 \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \exists x_2' \in E /$

$x_2 = f(x_2')$.

Donc, $x = 0_E + f(f(x_2'))$. D'où $x = f^2(x_2')$ où $x_2' \in E$

Ainsi, $x \in \mathrm{Im} f^2$. On a donc $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$. Au total

$\begin{cases} \mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f \\ \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2 \end{cases}$. Donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$

On peut ainsi conclure que

$$(\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2) \Longleftrightarrow (E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f)$$

11

(a) W_1 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 dont l'une des bases est $B = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$

(b) W_2 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$ car $(1,0,0) \in W_2$ mais $-1 \cdot (1,0,0) = (-1,0,0) \notin W_2$.

(c) W_3 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 dont l'une des bases est $B = \{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$

(d) W_4 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$ car $(1,1,1) \in W_3$ mais $\sqrt{2} \cdot (1,1,1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin W_3$.

2

(a) On remarque que $3v_1 = v_2 + v_3$.

Donc $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect}\{v_2, v_3\}$

On peut montrer que la famille $\{u, v_2, v_3\}$ est libre. Donc $u \notin \text{Vect}\{v_2, v_3\}$. Alors $u \notin \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$

Réponse : FAUX

(b) On montre aisément que la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre et alors ~~et~~, comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \text{Card}\{e_1, e_2, e_3\}$ cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3.

Réponse : VRAIE

(c) On voit que $v = 12w$. Donc $\text{Vect}\{v, w\} = \text{Vect}\, v$

$\text{Vect}\, v =$ droite vectorielle dirigée par v.

Réponse : FAUX

3 On a : $V \cap W \subset V$. Donc $\dim V \cap W \leq \dim V$

Alors $\dim V \cap W \leq 4$, De plus,

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim V \cap W$$

Donc $\dim V \cap W = -\dim(V+W) + 9$

$0 \leq \dim V \cap W \leq 4$. Donc $0 \leq 9 - \dim(V+W) \leq 4$

Alors $5 \leq \dim(V+W) \leq 9$. Comme $V+W \subset E$,

$\dim(V+W) \leq \dim E$. Donc $\dim(V+W) \leq 7$

$$5 \leq \dim(V+W) \leq 7$$
$$-7 \leq -\dim V+W \leq -5$$
$$2 \leq 9 - \dim V+W \leq 4$$

Alors $2 \leq \dim(V+W) \leq 4$

(1) Il s'agit d'une base. Vérifiez

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & t \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = t^2-1 = (t-1)(t+1)$$

Il s'agit d'une base pour $t \neq 1$ et $t \neq -1$

A/ f n'est pas linéaire car $f(0,0)=(1,1) \neq (0,0)$

B/ g est linéaire. Vérifiez

C/ h n'est pas linéaire. $h(2,2,2)=(2,8,2)$

et $h(1,1,1)=(1,1,1)$. $h(2,2,2) \neq 2h(1,1,1)$

17/

A. Faux

B. Vraix

C. Faux

En effet $e_1=(1,0,0)$; $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$

$f(e_1)=(1+3\times0,0,0-2\times0)=(1,0,0)=e_1$

$f(e_2)=(0+3\times0,0,1-2\times0)=(0,0,1)=e_3$

$f(e_3)=(0+3\times1,0,0-2\times1)=(3,0,-2)=3(1,0,0)-2(0,0,1)$

$=3e_1-2e_3$

18/ A/ $\ker f=\{(0,0)\}$

19/ B/ $\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}\{(2,1,1),(1,-1,-1)\}$

20

A: Si B est libre

B- $\{v_j\}$ est libre

…ice 21

Résolvons le système d'équations

$$(S_2)\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = b \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Soit $\Delta = \det(S_2)$. $\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$

On fixe L_3 $\quad 1 \quad 1 \quad a$

On fait $-L_3 + L_2$ $\quad 0 \quad a-1 \quad 1-a$

On fait $-aL_3 + L_1$ $\quad 0 \quad 1-a \quad 1-a^2$

On obtient $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

$$\Delta = (1-a)(1-a) - (a-1)(1-a^2)$$

Donc $\Delta = (1-a)^2\left[(1+ \quad + (1+a)\right] = (1-a^2)\left[1+(1+a)\right]$

$$\Delta = (a+2)(a-1)^2$$

$\Delta = 0 \iff a = -2$ ou $a = 1$

→ Pour $a \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$, $\Delta \neq 0$. (S_2) est un système de CRAMER possédant une unique solution $(x, y, z) = \left(\frac{\Delta x}{\Delta}, \frac{\Delta y}{\Delta}, \frac{\Delta z}{\Delta}\right)$

Pour calculer Δx, on remplace la colonne de x qui est $\begin{matrix} a \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$ par la colonne $\begin{matrix} 1 \\ b \\ b \end{matrix}$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & 1 \\ b & 1 & a \end{vmatrix}$$

On fixe L_1 : $1 \quad 1 \quad 1$

On fait $-bL_1 + L_2$ $\quad 0 \quad a-b \quad 1-b$

On fait $-bL_1 + L_3$ $\quad 0 \quad 1-b \quad a-b$

Donc $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 1-b \\ 0 & 1-b & a-b \end{vmatrix}$

$$= (a-b)^2 - (1-b)^2$$

$$\Delta_x = (a-1)(a-2b+1)$$

Pour calculer Δ_z, on remplace la colonne des z

$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ a \end{matrix}$ par la colonne $\begin{matrix} 1 \\ b \\ b \end{matrix}$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix}$$

On fixe L_3 $\quad 1 \quad 1 \quad b$

On fait $-L_3 + L_2$ $\quad 0 \quad a-1 \quad 0$

On a : $\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix}$

On développe sur la ligne L_2 :

$$\Delta_z = +(a-1)(ab-1)$$

calculer Δ_y, on remplace la colonne des y.

1
b
b

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}$$

fixe L_3 $\quad 1 \quad b \quad a$

fait $-L_3 + L_2$ $\quad 0 \quad 0 \quad 1-a$

trouve $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \\ 1 & b & a \end{vmatrix}$

développe sur L_2: $\Delta_y = -(1-a)(ab-1)$

$\Delta_y = (a-1)(ab-1)$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{(a-1)(a-2b+1)}{(a+2)(a-1)^2}$$

$$x = \frac{a-2b+1}{(a+2)(a-1)}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{(a-1)(ab-1)}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{ab-1}{(a+2)(a-1)}$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{(a-1)(ab-1)}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{ab-1}{(a+2)(a-1)}$$

Donc l'ensemble solution est

$$S = \left\{ \left(\frac{ab-1}{(a+2)(a-1)} ; \frac{ab-1}{(a+2)(a-1)} ; \frac{ab-1}{(a+2)(a-1)} \right) \right\}$$

Pour $a=1$

$$(S_2) : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

* Si $b=1$, $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y+z=1\}$
* Si $b\neq 1$, $S=\emptyset$

Pour $a=-2$

$$(S_2) : \begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=6 \\ x+y-2z=6 \end{cases}$$

n fixe L_3 ; on fait $-L_3+L_2$ et $2L_3+L_1$

$$(S_2) : \begin{cases} 3y-3z=2b+1 \\ -3y+3z=0 \\ x+y-2z=6 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} 2b+1=0 \\ -y+z=0 \\ x+y-2z=6 \end{cases}$$

* Si $b\neq -\frac{1}{2}$, $S=\emptyset$
* Si $b=-\frac{1}{2}$ $\begin{cases} y=z \\ x=z+b=z-\frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $S=\{(z-\frac{1}{2}, z, z), z\in\mathbb{R}\}$

$g(x,y,z) = (x+3y-3z, x-y+z, x+y-z)$

Exo 22

Déterminons Ker g et dim Ker g.

$(x,y,z) \in \text{Ker } g \iff g(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\iff \begin{cases} x+3y-3z = 0 & L_1 \\ x-y+z=0 & L_2 \\ x+y-z=0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2y-2z=0 & L_1 \leftarrow -L_3+L_1 \\ -2y+2z=0 & L_2 \leftarrow -L_3+L_2 \\ x+y-z=0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\iff (x,y,z) = (0,z,z)$$

$$\iff (x,y,z) = z(0,1,1)$$

Donc $\text{Ker } g = \text{Vect}\{(0,1,1)\}$ et $\dim \text{Ker } g = 1$

$\text{Ker } g \neq \{(0,0,0)\}$. Donc g n'est pas injective, donc pas bijective. On conclut que g n'est pas un isomorphisme

D'après le théorème du rang, $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker } g + rg(g)$

Donc $3 = 1 + rg\, g$ Alors $rg\, g = 2$

On peut aussi dire que $rg\, g = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$ Donc g n'est pas surjective et donc n'est pas un isomorphisme

Exercice 23

1) $M_a = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a^2-7a & a-7 & a \end{pmatrix}$

Valeurs de a pour lesquelles Ma est diagonalisable

$P_a(\lambda) = \det(M_a - \lambda I_3)$

$$= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ a^2-7a & a-7 & a-\lambda \end{vmatrix}$$

En développant suivant la 3e colonne

$$= (a-\lambda)\left[(6-\lambda)(3-\lambda)-4\right]$$

$$= (a-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 14)$$

$$= -(\lambda-a)(\lambda-2)(\lambda-7)$$

Lorsque $a \neq 2$ et $a \neq 7$, Pa possède 3 racines distinctes : Pa est scindé et a toutes ses racines simples. Donc Pa est diagonalisable.

Pour $a = 2$; $P_a(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-7)$

Recherche des vecteurs propres :

$u = {}^t(x, y, z)$.

$u \in E_2 \Longleftrightarrow (M_2 - \lambda I_3)\, u = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -10 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u \in E_2 \iff \begin{cases} 4x+2y=0 \\ 2x+y=0 \\ -10x-5y=0 \end{cases}$

$\iff y=-2x$

$\iff u = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ z \end{pmatrix} \iff u = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

onc $E_2 = \mathrm{Vect}\{(1,-2,0);(0,0,1)\}$. $\dim E_2 = 2$

qui correspond à l'ordre de multiplicité de la
valeure propre 2 dans $-(\lambda-2)^2(\lambda-7)$
e plus, $\dim E_7 = 1$ car 7 est une racine simple
du polynôme caractéristique.
Donc $\dim E_2 + \dim E_7 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Alors M a
est diagonalisable.

Pour $a=7$; $P_a(\lambda) = -(\lambda-7)^2(\lambda-2)$

Recherche des vecteurs propres.

Soit $u = {}^t(x,y,z)$

$u \in E_7 \iff \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} -x+2y=0 \\ 2x-4y=0 \end{cases}$

$\iff x=2y$

$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $E_7 = \text{Vect}\{(2,1,0),(0,0,1)\}$

Alors $\dim E_7 = 2$. De plus, $\dim E_2 = 1$ car

2 est une racine simple du polynôme caractéristique

Donc, $\dim E_7 + \dim E_2 = 3 \neq \dim \mathbb{R}^3$.

...u 24

...lynôme caractéristique de A

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & -8 & 6 \\ -1 & -8-\lambda & 7 \\ 1 & -14 & 11-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

...fixe L_3 : $1 \quad -14 \quad 11-\lambda$

...fait $L_3 + L_2$: $0 \quad -22-\lambda \quad 18-\lambda$

...fait $\lambda L_3 + L_1$: $0 \quad -8-14\lambda \quad \lambda(11-\lambda)+6$

$-\lambda^2 + 11\lambda + 6$

...nc $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -8-14\lambda & -\lambda^2+11\lambda+6 \\ 0 & -22-\lambda & 18-\lambda \\ 1 & -14 & 11-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-8-14\lambda)(18-\lambda) + (22+\lambda)(-\lambda^2+11\lambda+6)$

$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12$

$= -(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3)$

- Spectre de A

$Sp_A = \{-2, 2, 3\}$

2.) A est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racine simples.

3.) Espaces propres et vecteurs propres

$u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$u \in E_2 \iff (A - 2I_3)^t u = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -1 & -10 & 7 \\ 1 & -14 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 10y + 7z = 0 \\ x - 14y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -36y + 24z = 0 \\ -24y + 16z = 0 \\ x - 14y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3y + 2z = 0 \\ x - 14y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{2}{3} z \\ x = \frac{z}{3} \end{cases} \iff u = \begin{pmatrix} z/3 \\ 2z/3 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff u = \frac{z}{3}(1, 2, 3)$$

Donc $u_2 = (1, 2, 3)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2. et $E_2 = \text{Vect}\{u_2\}$

$u \in E_{-2} \iff (A + 2I_3)u = 0$

$$\iff \begin{cases} 2x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 6y + 7z = 0 \\ x - 14y + 13z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 20y - 20z = 0 \\ -20y + 20z = 0 \\ x - 14y + 13z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases} \iff u = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u_{-2} = (1,1,1)$ est un vecteur propre associé à

valeur propre -2 et $E_{-2} = \mathrm{Vect}\{u_2\}$

$$E_3 \iff \begin{cases} -3x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 11y + 7z = 0 \\ x - 14y + 8z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -50y + 30z = 0 \\ -25y + 15z = 0 \\ x - 14y + 8z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{3}{5} z \\ x = \frac{2}{5} z \end{cases} \iff u = \begin{pmatrix} 2z/5 \\ 3z/5 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff u = \frac{z}{5} (2, 3, 5)$$

Donc $u_3 = (2,3,5)$ est un vecteur propre associé

à la valeur propre 3 et $E_3 = \mathrm{Vect}\{u_3\}$

$B_p = (u_2, u_{-2}, u_3)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Soit A' la matrice de T dans la base B_p

$$A' = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

...e 25

...ynôme caractéristique de A

$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_4)$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -4 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$ (On a développé selon la 2ème ligne)

...n fixe L_1 : $3-\lambda \quad 1 \quad -1$

...n fait L_3+L_1 : $1-\lambda \quad 0 \quad 1-\lambda$ dans L_3

...n fait $L_2+(1+\lambda)L_1$ $(1+\lambda)(3-\lambda)-4 \quad 0 \quad -(1+\lambda)+2$

$-\lambda^2+2\lambda+3-4 \quad 0 \quad -\lambda+1$

$-(\lambda-1)^2 \quad 0 \quad 1-\lambda$ dans L

$$\text{Donc } P_A(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -(\lambda-1)^2 & 0 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\left[(\lambda-1)^3 - (\lambda-1)^2\right]$$

$$P_A(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)$$

es valeurs propres de A sont 1 et 2.

$Sp(A) = \{1, 2\}$ est le spectre de A

Soit $u = {}^t(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3$

$$u \in E_1 \iff (A - I)u = 0$$

$$\iff \begin{cases} 2x - y + z - t = 0 \\ -4x + 2y - 2z + 2t = 0 \\ -2x + y - z + t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - y + z - t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

$$\iff 2x - y + z - t = 0$$

$$\iff t = 2x - y + z$$

$$\iff u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 2x - y + z \end{pmatrix}$$

$$\iff u = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $E_1 = \text{Vect}\{(1,0,0,2); (0,1,0,-1); (0,0,1,1)\}$

est l'espace propre associé à la valeur propre 1.

Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont :

$u_1 = (1,0,0,2)$; $u_2 = (0,1,0,-1)$ et $u_3 = (0,0,1,1)$

$$u \in E_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ -y = 0 \\ -4x + 2y - 3z + 2t = 0 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z - t = 0 \\ -4x - 3z + 2t = 0 \\ -2x - z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -2x \\ t = -x \end{cases} \Longleftrightarrow u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -2x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à

la valeur propre 2 et $E_2 = \mathrm{Vect}\{u_4\}$

) P_A est scindé (c'est à dire qu'il est sous la forme $(\lambda - \alpha_1)^{n_1} (\lambda - \alpha_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \alpha_p)^{n_p}$)

De plus, $\dim E_1 + \dim E_2 = 3 + 1 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$

Donc A est diagonalisable.

3.) Déterminons la matrice de passage P de la base B à la base B_p

$B_p = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

$$B \xrightarrow{P} B_p$$

$$\begin{cases} e_1 = -u_1 + 4u_3 + 2u_4 \\ e_2 = u_1 + u_2 - 2u_3 - u_4 \\ e_3 = -u_1 + 3u_3 + u_4 \\ e_4 = u_1 - 2u_3 - u_4 \end{cases}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4) Écrivons la matrice de T dans la base B_P

Soit A' cette matrice

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"] & B \\ B_P \arrow[u, "P^{-1}"] \arrow[r, "A'"] & B_P \end{tikzcd}$$

$A' = P^{-1} A P.$

Pour trouver A', il suffit de mettre sur la diagonale les valeurs propres associées à chaque vecteur propre de B dans le sens de leur ordre dans la base $B_P = (u_1, u_2, u_3, u_4)$. Donc

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On a : $P : B \longrightarrow B_P$ $\quad P = \| u_1, u_2, u_3, u_4 \|_B$

$P^{-1} : B_P \longrightarrow B$ $\quad P^{-1} = \| e_1, e_2, e_3, e_4 \|_{B_P}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcul de P^{-1}

Interprétation de P : $\begin{cases} u_1 = e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 \\ u_2 = 0e_1 + e_2 + 0e_2 - e_4 \\ u_3 = 0e_1 + 0e_2 + e_3 + e_4 \\ u_4 = e_1 + 0e_2 - 2e_3 - e_4 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u_1 = e_1 + 2e_4 \\ u_2 = e_2 - e_4 \\ u_3 = e_3 + e_4 \\ u_4 = e_1 - 2e_3 - e_4 \end{cases}$

Il faut maintenant tirer les e_i en fonction des u_j

$\begin{cases} e_1 + 2e_4 = u_1 \\ e_2 - e_4 = u_2 \\ e_3 + e_4 = u_3 \\ e_1 - 2e_3 - e_4 = u_4 \end{cases}$: $\begin{cases} e_1 + 2e_4 = u_1 \\ e_2 - e_4 = u_2 \\ e_3 + e_4 = u_3 \\ -2e_3 - 3e_4 = u_1 \end{cases}$ $L_4 - L_1$

Après résolution du système, on trouve

Déterminons $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ et $u(t)$

$$(E): \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + z(t) - u(t) \\ y'(t) = \quad\quad y(t) \\ z'(t) = -4x(t) + 2y(t) - z(t) + 2u(t) \\ u'(t) = -2x(t) + y(t) - z(t) + 2u(t) \end{cases}$$

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$ dans B

L'équation matricielle de (E) est : $X'(t) = AX(t)$

Cette équation est écrite dans la base canonique B

nous, allons la réécrire dans la base

propre B_p

Soit $Y(t)$ le représentant de $X(t)$ dans la base

B_p

$$B \xrightarrow{P} B_p$$

$$X(t) \xleftarrow{P^{-1}} Y(t)$$

Posons $Y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \\ d(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$

L'équation matricielle dans la base B_p

s'écrit : $Y'(t) = A'Y(t)$

(En effet, $X'(t) = AX(t)$ Donc $P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t)$

Alors $P^{-1}X'(t) = (P^{-1}AP)(P^{-1}X(t))$ car $PP^{-1} = I$

$(P^{-1}X(t))' = (P^{-1}AP)(P^{-1}X(t))$

Soit $Y'(t) = A'Y(t)$)

Donc $\begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \\ d(t) \end{pmatrix}$

Alors $\begin{cases} a'(t) = a(t) \\ b'(t) = b(t) \\ c'(t) = c(t) \\ d'(t) = 2d(t) \end{cases}$

La solution générale de l'équation $y' = \alpha y$ est : $y = C e^{\alpha x}$ $(C \in \mathbb{R})$

On a donc $\begin{cases} a(t) = C_1 e^t \\ b(t) = C_2 e^t \\ c(t) = C_3 e^t \\ d(t) = C_4 e^{2t} \end{cases}$ $(C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R})$

Rappelons que $X(t) = P \cdot Y(t)$

Donc $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \\ d(t) \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x(t) = a(t) + d(t) \\ y(t) = b(t) \\ z(t) = c(t) - 2d(t) \\ u(t) = 2a(t) - b(t) + c(t) \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_4 e^{2t} \\ y(t) = C_2 e^t \\ z(t) = C_3 e^t - 2C_4 e^{2t} \\ u(t) = 2C_1 e^t - C_2 e^t + C_3 e^t - C_4 e^{2t} \end{cases}$ $(C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R})$