$f \; E \to \mathbb{R}$ application

$f(E) = \{ f(x) / x \in E \}$

$\hookrightarrow$ image de E par f

$\exists m \in \mathbb{R},$
$\forall x \in E, \; f(x) \geq m$

$f(E)$ est minoré et non vide

$$\inf(f(E)) = \inf_{x \in E}(f(x))$$

$$\sup(f(E)) = \sup_{x \in E}(f(x))$$

Correction de l'exercice

Mtq $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$ est bornée et donnons $\sup f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \geq 1$ d'où $0 < \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $-1 \leq \cos x \leq 1$

$$-1 \leq \frac{-1}{1+x^2} \leq \frac{\cos x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq f(x) \leq 1$ donc f est bornée

* 1 est un majorant de $f(x)$ or $1 = f(0) \in f(x)$ donc
  $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$

c- Si f et g sont minorées alors $f \times g$ est minorée (faux)

$\exists m_1 \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad m_1 \leq f(x)$

m_1 $\quad m_2 \leq g(x)$

$f(x) = \cos x$ et $g(x) = x^2$

$g(x) \times f(x) = x^2 \cos x$

Supp $\exists m \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}$, $m \leq x^2 \cos x$

$m \leq 0$ par hyp $m \leq \underbrace{0^2 x \cos x}_{0}$

$x = \pi \times (2E(m)+1)$

$\cos x = -1$

$x^2 \cos x = -((2E(m)+1)\pi)^2$

D- Si f et g sont minorées alors $|f \times g|$ est bornée

Faux

A- Si f est borné et g est majoré alors $f-g$ est borné faux

B- Si f est borné et g majoré alors $f-g$ est minoré : Vrai

Questions

Soient $f :]-\infty,0[\to]0,1[$ et

$g :]-2,2[\to]0,+\infty[$ des applications

Soient les fonctions

$h_1(x) = g(f(2x))$, $h_2(x) = g(\ln(f(x)))$

$h_3(x) = \dfrac{g(x+1)}{f(x)}$, $h_4(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x)+g(x)}$

1- $D_{h_1} =]-1,1[$ ✗

3- $D_{h_3} =]-3,0[$ ✓

2- $D_{h_2} =]0,+\infty[$ ✗

4- $D_{h_4} =]-2,0[$ ✓

$f(2x)$ Supp $p(x) = 2x$ g $f(p(x))$ / $x \in D_p$ / $p(x) \in D_f$

$x \in \mathbb{R}$ / $2x \in]-\infty,0[$

$2x < 0 \Rightarrow x < 0$

$g(f(2x))$ / $x \in D_f$ / $f(2x) \in D_g$

$x \in]-\infty,0[$ / $f(2x) \in]-2,2[$

D_f $]0,1[$ $]-2,2[$

$D_{h_1} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R}^*_- \text{ et } f(x) \in D_g\}$

$=]-\infty, 0[$

$D_{h_2} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R}^*_- \text{ et } f(x) > 0 \text{ et } \ln f(x) \in]-2,2[$

$D_{h_3} = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \in D_g \text{ et } x \in D_f\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x+1 \in]-2,2[\text{ et } x \in]-\infty, 0[$

On a : $x+1 \in]-2,2[\Rightarrow -2 < x+1 < 2$

$\Rightarrow -3 < x < 1$

$\Rightarrow x \in]-3,1[$

On a $]-3,1[\cap]-\infty,0[\Rightarrow x \in]-3,1[$

$D_{h_3} =]-3,1[$

$D_{h_4} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ } \cancel{\text{et}}, x \in D_g \text{ et } f(x)+g(x) \neq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \in]-\infty,0[, x \in]-2,2[\text{ et } f(x)+g(x) \neq 0\}$

On a $f(x) \in]0,1[$ et $g(x) \in]0,+\infty[$

$f(x) \cancel{\in} > 0$ et $g(x) > 0$ donc $f(x)+g(x) > 0$

D'où $D_{h_4} =]-2,0[$

Question

Soient f et g deux fonctions définies respectivement par : $f(x) = \ln(x-1)$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$

Quelles sont les assertions vraies ?

A- $D_f \cap D_g = [-1, +\infty[$ ✓

B. $D_{f \circ g} = [-1, +\infty[$ ✗

C. $D_{g \circ f} =]1, +\infty[$ ✗

D. $D_{f+g} =]1, +\infty[$ ✓

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 > 0\} \Rightarrow D_f =]1, +\infty[$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0\} \Rightarrow D_g = [-1, +\infty[$

$D_f \cap D_g =]1, +\infty[\cap [-1, +\infty[=$

$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g / g(x) \in D_f\}$

$= x \in [-1, +\infty[/ \sqrt{x+1} \in]1, +\infty[$

$D_{f \circ g} =]0, +\infty[$

$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f$ et $f(x) \in D_g\}$

$= x \in]1, +\infty[$ et $\ln x \in [-1, +\infty[$

$\ln x \geq 1$

$x \geq e$

$x \in [e, +\infty[$

$\ln(x-1) \geq 1$

$x-1 \geq e^{-1}$

$x \geq e^{-1}+1 \Rightarrow \mathcal{D}_{g\circ f} = [e^{-1}+1, +\infty[$

$\sqrt{x+1} \geq 1$

$x+1 \geq 1$

$x \geq 0 \Rightarrow x \in [0, +\infty[$

$f \times g = \ln(x-1)\sqrt{x+1}$

$\mathcal{D}_{f\times g} = \{x \in \mathbb{R} / x-1 > 0 \text{ et } x+1 \geq 0\}$

$\mathcal{D}_{f\times g} =]1, +\infty[$

Sujet TD

Soient $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{x}{x-1}$

$\boxed{A}$ - $g\circ g(x) = -x$ ✗

$\boxed{B}$ - $g\circ g(x) = x$ ✓

$\boxed{C}$ - $g\circ g(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$ ✗

$\boxed{D}$ - $g\circ g(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ ✗

$\boxed{E}$ - $g\circ f(x) = \frac{1}{1-x}$ ✓

$\boxed{F}$ - $g\circ f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ ✗

$\boxed{G}$ - $g\circ f(x) = \frac{1}{x-1}$ ✗

$\boxed{H}$ - Aucune bonne réponse ✗

Chap 1 : Limites et continuité d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

1-1- Limites d'une fonction

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- D_f son ensemble de définition
- $a \in \mathbb{R}$ ($a \in D_f$ ou $a \notin D_f$)

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$$

Ex 1-3 : $f(x) = 3x$, $\lim_{x \to 2} f(x) = 6$

Soit $\varepsilon > 0$ cherchons $\eta > 0$ tel que

$$|x-2| < \eta \Rightarrow |3x-6| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\eta = \frac{\varepsilon}{3}$$

Prop 1.13

1- $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow$ Toute suite (x_n) converge vers a vérifie aussi $f(x_n) \to \ell$

2- Si (x_n) et (y_n) sont deux suites convergentes vers a telles que $f(x_n)$ et $f(y_n)$ aient des limites $\neq$ alors $f(x)$ n'admet pas de limites

$\lim_{x \to +\infty} \cos x = ?$ n'existe pas

$x_n \to +\infty$ tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n)$
$y_n \to +\infty$

$x_n = 2n\pi$ $\quad f(x_n) = \cos(2n\pi) = 1$
$y_n = (2n+1)\frac{\pi}{\cancel{2}}$ $\quad f(y_n) = \cos[(2n+1)\pi] = -1$

$\arccos(1) = 0$
$\arccos(-1) = \pi$

$\lim\limits_{x \to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$0 \leq |x\sin(1/x)| \leq |x| \to 0$
$\lim\limits_{x \to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

1-24 $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

Posons $X = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin(1/x) = \lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 0$

$f(x) = x + \sqrt{x - E(x)}$
Soit $n \in \mathbb{Z}$
$\forall x \in [n-1, n[, \ f(x) = x + \sqrt{x - n + 1}$
$\forall x \in [n, n+1[\ f(x) = x + \sqrt{x - n}$
$\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = n + 1$ et $\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = n$

$\lim\limits_{x \to n^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to n^+}$ donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

5/ $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Etude de la continuité sur $\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$

$\forall x \in [n-1, n[\quad f(x) = n-1+\sqrt{x-n+1}$

$\forall x \in [n, n+1[\quad f(x) = n+\sqrt{x-n}$

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} n-1+\sqrt{n-n+1}$$

$$= n$$

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} n+\sqrt{n-n}$$

$$= n$$

$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^+} f(x) = n$ donc f est continue sur $\mathbb{Z}$ par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}$

6/ $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = \begin{cases} n-1+(x-n+1)^2 & \text{si } x \in [n-1, n[\\ n+(x-n)^2 & \text{si } x \in [n, n+1[\end{cases}$$

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = n-1+1 = n$$

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = n+(n-n)^2 = n$$

$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^+} f(x) = n$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$

1-6

$$f(x) = \frac{\ln(1-4x^2)}{x^2}$$

1- Det Df

$Df = \{x \in \mathbb{R} / 1-4x^2 > 0$ et $x^2 \neq 0\}$

On a $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

Posons $1-4x^2 = 0$

$$4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{Df =]-\tfrac{1}{2}, 0[\cup]0, \tfrac{1}{2}[}$$

2. Vérification

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-4x^2)}{x^2}$$

Posons $X = -4x^2$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{-X/4}$$

$$= \lim_{X \to 0} -4 \frac{\ln(1+X)}{X}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -4$$

Donc on a : $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-4x^2)}{x^2} & \text{si } x \in]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, \frac{1}{2}[\\ -4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1.7

1) $f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{2x}$

$Df = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

$D_f = \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{n\ln(x+1)} - 1}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{n\ln(x+1)} - 1}{e^{n\ln(x+1)}} \times \frac{n\ln(x+1)}{2x} \right)$$

En posant $X = n\ln(x+1)$ on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{n\ln(x+1)} - 1}{n\ln(x+1)} = \lim_{X\to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{n\ln(x+1)}{2x} = \frac{n}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{n}{2}$$

Donc on a

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1+x)^n - 1}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{n}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$E(x) = \begin{cases} k-1 & \text{si } x \in [k-1, k[\\ k & \text{si } x \in [k, k+1[\end{cases}$$

$$E(2-x) = \begin{cases} k-1 & \text{si } k-1 < 2-x < k \\ k & \text{si } k \leq 2-x < k+1 \end{cases}$$

$$E(2-x) = \begin{cases} k-1 & \text{si } 2-k < x \leq 3-k \\ k & \text{si } 1-k < x \leq 2-k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} k & \text{si } 1-k < x \leq 2-k \\ k-1 & \text{si } 2-k < x \leq 3-k \end{cases}$$

$$E(x) = \begin{cases} 1-k & \text{si } 1-k < x \leq 2-k \\ 2-k & \text{si } x = 2-k \\ 2-k & \text{si } 2-k < x \leq 3-k \\ 3-k & \text{si } x = 3-k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-k & \text{si } 1-k < x \leq 2-k \\ 2-k & \text{si } 2-k \leq x < 3-k \\ 3-k & \text{si } x = 3-k \end{cases}$$

4) $f(x) = \sin x \sin(1/x)$

$f(x) = \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin(1/x)}{1/x}$

• $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

• Posons $X = \frac{1}{x}$ (quand $x \to 0$)

$0 \leq \left| \frac{\sin X}{X} \right| \leq \frac{1}{|X|} \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$\lim_{X \to +\infty} \frac{\sin X}{X} = 0$ et par suite $\lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$

d'où $\lim_{x \to 0} \sin x \sin(1/x) = 0$

Par conséquent f est prolongeable par continuité en 0 et le prolongement est

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Autre méthode

$0 \leq \sin x \sin(1/x) \leq |\sin x| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

d'où $\lim_{x \to 0} \sin x \sin(1/x) = 0$

Question

Soit $f(x) = x\sin(\pi x) - \ln(x) - 1$ définie sur $]0,1]$

Quelles sont les assertions vraies

A - f est bornée

B - f est majorée

C - f est minorée

D - $\exists\, c \in]0,1]$ tel que $f(c) = 0$.

E - Aucune bonne réponse

Réponse

On a $f(x) = x\sin(\pi x) - \ln(x) - 1$

$0 < x \leq 1 \Rightarrow \ln(x) \leq 0$

$\Rightarrow -\ln(x) \geq 0$

$\Rightarrow -\ln(x) - 1 \geq -1$

Par suite $x \in]0,1] \Rightarrow 0 \leq \sin \pi x \leq 1$

Donc on a $\quad -1 \leq -\sin(\pi x) - 1 \geq 0$

$$\begin{cases} -1 \leq -\ln(x) - 1 \\ 0 \leq \sin(\pi x) \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$-1 \leq \sin(\pi x) - \ln(x) - 1 \Rightarrow -1 \leq f(x)$

On en déduit que f est minorée par -1

A - f est bornée Faux

B - f est majorée Faux

C - f est minorée Vrai

D - $\exists\, c \in]0,1]$ tel que $f(c) = 0$ Vrai

Justification : f est continue sur $]0,1]$.

On a aussi $f(1) = -1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sin\left(\pi/2\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{2} + \ln(2)$

$f(1) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires D est vraie

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$N'(t) = 2te^{-0,1t} + (-0,1)x^2e^{-0,1t}$$
$$= 2te^{-0,1t} - 0,1x^2e^{-0,1t}$$
$$= e^{-0,1t}(2t - 0,1x^2)$$

Posons : $N'(t) = 0$

$e^{-0,1t} = 0 \Rightarrow -0,1t = \ln(1) \times$

$1\ 9,82$

$\cancel{2t^2 - 0,1t}$ $-0,1t^2 + 2t = 0$

$t(-0,1t + 2) = 0$

$t = 0$ ou $-0,1t = -2$

$$t = \frac{2}{0,1} = 20$$

t	0		20		60
$e^{-0,1t}$		+		+	
t		+		+	
$-0,1t^2+2t$		+		−	
$N'(t)$		+		−	

Exo 2.1

1-/ Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

* f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
* Etudions la dérivabilité au point 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin(1/x)$$

Encadrement : $0 \leq |x \sin(1/x)| \leq |x|$
$\lim x = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$ car $\lim_{x \to 0} x = 0$

donc f est dérivable en 0 et dérivable ~~en~~ sur $\mathbb{R}$

* Dérivée

$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ si $x \neq 0$
0 si $x = 0$

2-/ Vérifions si la fonction est de classe C^1
f est une fois dérivable reste à montrer la continuité de $f'(x)$ en 0
Vu que $\cos(1/x)$ n'a pas de limite on utilise la méthode des suites
Soient deux suites $u_n = \frac{1}{2n(\pi)}$ et $v_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$

$u_n \to 0$ $\quad f'(u_n) = \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1$

$v_n \to 0$

$$f'(v_n) = \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin[(2n+1)\pi] - \cos[(2n+1)\pi] = 1$$

$\lim_{n\to+\infty} f'(u_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f'(v_n)$ donc la fonction $f'(x)$ n'est pas continue en 0

Par conséquent f n'est pas de classe C^1

Exercice 2.2

Expression de la dérivé d'ordre n

1/ $f(x) = e^{ax}$

f est dérivable n fois sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée d'ordre n est

$f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$

2/ $g(x) = \ln x$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivé est

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f^{(3)} = \frac{2}{x^3}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$

$g^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

3/ $h(x) = \cos x$

h est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$h'(x) = -\sin x$, $h''(x) = -\cos x$, $h^{(3)} = \sin x$

$h^{4}(x) = \cos x$ $h^{(5)} = \sin x$

$h^n(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ ou $h^n(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } n = 4k \\ -\sin x & \text{si } n = 4k+1 \\ -\cos x & \text{si } n = 4k+2 \\ \sin x & \text{si } n = 4k+3 \end{cases}$

Exercice 2.3

Det les points stationnaires et leurs natures

1/ $f(x) = 2x^2 - x + 6$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x - 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

$f''(x) = 4$

$f''(\frac{1}{4}) = 4 > 0 \Rightarrow x$ est un minimum local

2/ $f(x) = -x^2 + 4x + 3$

$f'(x) = -2x + 4$, $f''(x) = -2$

$f''(2) = -2 < 0 \Rightarrow x = 2$ est un maximum local

3/ $f(x) = x^3 - 3x + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 3$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) > 0$: $x = 1$ est un minimum local

$f''(-1) < 0$: $x = -1$ est un maximum loc

4/ $f(x) = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$

$f'(x) = -3x^2 - 12x - 9$

$\Delta' = 36 - (-3)(-9)$

$\Delta' = 9$

$x_1 = \frac{6 - 3}{-3} = -1$ $x_2 = \frac{6 + 3}{-3} = -3$

$f''(x) = -6x - 12$

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow f$ présente en $x = -1$ un maximum local

$f''(-3) = 6 > 0 \Rightarrow f$ présente en $x = -3$ un minimum local

Exercice 2.4

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

1/ Mtq :

$$\ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k}$$

La fonction f est continue et dérivable sur $[k, k+1]$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$
D'après le TAF $\exists\, c \in]k, k+1[$ tel que

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \frac{1}{c}$$

$$k < c < k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{k} \Rightarrow \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$$

2/ Trouvons une suite V_n telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n \leq U_n$
D'après ce qui précède on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$$

$k = 1$ $\quad \ln 2 - \ln 1 < 1$

$k = 2$ $\quad \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$

$\ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3}$

$\vdots$

$\ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$

$$\ln(n+1) < \sum \frac{1}{n} = U_n$$

TAF

$a<b$ f est continue sur $[a,b]$
dérivable sur $]a,b[$

$\exists c \in]a,b[$ $f'(c)=0$ $\times$ (Rolle)

$\exists c \in]a,b[$, $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\ln(n+1) < U_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

Exercice 27

Triangle équilatéral de côté x : $A = \frac{x^2}{2} \times \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

Carré : de côté x : $A = x^2 \times A = t^2$

or $L = 3x + 4t$

$$A_{totale} = A_{tr} + A_C$$

$$= \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + t^2$$

$$= \frac{4x^2\sqrt{3}}{16} + \frac{L^2 - 6xL + 9x^2}{16}$$

$$A_{totale} = \frac{L^2 - 6xL + (4\sqrt{3}+9)x^2}{16}$$

$\cancel{\Delta' = 9x^2 -}$ $\Delta' = 9x^2 - 4\sqrt{3}x^2 + 9x^2 / \cancel{0}$

$=$

$$A_{totale} = 0 \Rightarrow (4\sqrt{3}+9)x^2 - 6Lx + L^2 = 0$$

$$\Delta' = 9L^2 - (4\sqrt{3}+9)L^2 > 0$$

$$Aire'_{total} = \frac{1}{16}\left(2(4\sqrt{3}+9)x - 6L\right)$$

$$= \frac{(4\sqrt{3}+9)x - 3L}{8}$$

Posons $A'_{totale} = 0 \Rightarrow \frac{(4\sqrt{3}+9)x - 3L}{8} = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{3L}{4\sqrt{3}+9}$$

$$A''_{totale} = \frac{1}{16}\,2(4\sqrt{3}+9) = \frac{4\sqrt{3}+9}{8} > 0$$

la fonction $Aire_t$ admet un minimum local en

$$\boxed{x^* = \frac{3}{4\sqrt{3}+9}L}$$

$$4y + 3x = L \Rightarrow 4y = \frac{-9}{4\sqrt{3}+9}L + L$$

$$= \frac{-9L + 4\sqrt{3}L + 9L}{4\sqrt{3}+9}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+9}L$$

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+9}L}$$

b / Aire maximale

x	0		$L/3$
$Aire_t$	$\searrow$		$\nearrow$

$$Aire_t = \frac{1}{16}\left(4x^2\sqrt{3} + (L-3x)^2\right)$$

$$\lim_{x \to 0} Aire_t = \frac{L^2}{16}$$

$$\lim_{x \to L/3} Aire_t = \frac{4L^2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{}$$

$$= \frac{L^2\sqrt{3}}{36}$$

$\frac{L^2}{16} > \frac{L^2\sqrt{3}}{36}$ Aire max pour $x = 0$

Pour que $Aire_t$ soit maximale on doit couper $\frac{9L}{4\sqrt{3}+9}$ pour faire le triangle et le reste pour le carré

Exercice 28

$$C(v) = \frac{700}{v} + \frac{v}{4}, \quad v \in [30, 100]$$

Distance totale = 800 km

$$f = v + C(v)$$
$$= v + \frac{700}{v} + \frac{v}{4}$$
$$= \frac{v^2 + 700}{v} + \frac{v}{4} = \frac{4v^2 + 2800 + v^2}{4v} = 800$$
$$= v$$

$$K = 1000 \times h \qquad v = \frac{D}{h} \Rightarrow h = \frac{D}{v}$$
$$= \frac{1000D}{v} + C \qquad C = 8\,C(s)$$
$$= \frac{1000D}{v} + 8\left(\frac{700}{v} + \frac{v}{4}\right)$$
$$= \frac{1000D}{v} + \frac{5600}{v} + \frac{8v}{4}$$

Exercice 2.11
Limite

1/ $f(x) = \dfrac{x - \tan x}{x - \sin x}$ $a = 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = \lim_{x \to a} \frac{1 - (1 + \tan^2 x)}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{-2(1 + \tan^2 x) \tan x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \to a} -2(1 + \tan^2 x) \times \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\sin x}$$

$$= -2$$

2/ $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{1 - e^{2x}}$ $a = 0$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{e^x + e^{-x}}{-2e^{2x}}$$

$$= -1$$

3/ $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1}$, $a = 1$

$$= \frac{x - 1 - \ln x}{\ln x (x - 1)}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1) + \ln x}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}(x-1) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

4/ $f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ $\quad a = 1$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{n x^{n-1}}{1}$

$= n$

5/ $f(x) = x^2 e^{-x}$ $\quad a = +\infty$

$= \frac{x^2}{e^x}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{2x}{e^x}$

$= \lim \frac{2}{e^x}$

$= 0$

6/ $f(x) = \ln x \cdot \ln(1-x)$ $\quad a = 0^+$

$= \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{-1/x}{\ln^2 x}}$

$= \lim\limits_{x \to a} -\frac{1}{1-x} \times \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x \to a} -\frac{1}{1-x} \times x \ln^2 x$

$= \cancel{1}\ 0$

Exo 2.12

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

Det a, b, c pour que f soit convexe sur $\mathbb{R}_+$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$f''(x) = 6x + 2a$

f convexe $\Rightarrow f''(x) \geq 0 \Rightarrow 6x + 2a \geq 0 \Rightarrow$ 6x>

$6x \geq -2a$

$x = -\frac{2a}{6} \Rightarrow x = -\frac{a}{3} \Rightarrow a \geq 0$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+ & f''(x) \geq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_- & f''(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{a}{3} \text{ avec } x \geq 0 \\ f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{a}{2} \text{ avec } x \leq 0 \end{cases}$$

Pour verifier les deux conditions il faut que $\begin{cases} a \geq 0 \\ a \leq 0 \end{cases}$

donc $a = 0$

f est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$ si $a = 0$

et $b, c \in \mathbb{R}$

Exercice 2.10

$n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq 2$

$x^{n-1}(1+x) - (1+x^n)$

$x^{n-1} + x^n - 1 - x^n$

$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$$f'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x)^n - n(1+x)^{n-1} \times (1+x^n)}{(1+x)^{2n}}$$

$2n-n+1$

$$= \frac{n(1+x)^{n-1}\left[(1+x) - (1+x^n)\right]}{(1+x)^{2n}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{n\left[x^{n-1} - 1\right]}{(1+x)^{n+1}}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow n(x^{n-1} - 1) = 0 \Rightarrow x^{n-1} - 1 = 0$

$\Rightarrow x^{n-1} = 1 \Rightarrow x = 1$ car $x \geq 0$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$$f''(x) = \frac{n(n-1)x^{n-2}(1+x)^{2n+1} - (2n+1)(1+x)^{2n}}{(1+x)^{4n+2}}$$

$$= \frac{n(n-1)(2)^{2n+1} - (2n+1)(2)^{2n}}{(2)^{4n+2}}$$

$=$

$f''($

g

$$f''(x) = \frac{n(n-1)x^{n-2}(1+x)^{n+1} - (n+1)(1+x)^n [n(x^{n-1}-1)]}{(1+x)^{2n+2}}$$

$$= \frac{n(n-1)(2)^{n+1}}{(2)^{2n+2}} - \frac{(n+1)(2)^{n}0}{}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} > 0$$ donc f admet en 1 un minimum

On a $\min_{x \in \mathbb{R}_+} f(x) = f(1)$

$$= \frac{2}{2^n}$$

$$\boxed{\min_{x \in \mathbb{R}_+} f(x) = 2^{n-1}}$$

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x \geq 0 \Rightarrow$ convexe

~~$e^x \geq 0$~~

$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$

$e^{[tx+(1-t)y]} \leq te^x + (1-t)e^y$

$tx + (1-t)y \leq \ln[te^x + (1-t)e^y]$

$e^{tx} \times e^{(1-t)y} = \ln(e^{tx} \times e^{(1-t)y}) = \ln(e^{tx}) + \ln(e^{(1-t)y})$

$= tx + (1-t)y$

Application:
Calculons

- $\arccos(0)$

Trouvons $y \in [0, \pi]$ tel que $\cos y = 0$

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$y = \frac{\pi}{2}$$

- $\arccos(1/2) = \frac{\pi}{3}$
- $\arccos(1) = 0$
- $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$
- $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$
- $\arccos(-1) = \pi$
- $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

Application 2

- $\arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6}$
- $\arcsin(0) = 0$
- $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ etc...

Arcsin est impaire

$$\tan \left]-\frac{k\pi}{2}; \frac{k\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{\tan'(\arctan x)}$$

$$= \frac{1}{1+(\tan(\arctan x))^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

tout $\in [0,\pi]$

$\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$

$\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3} - 2\pi\right)\right) = \arccos(\cos \pi/3)$

$= \frac{\pi}{3}$

$$\cosh x = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Exercice 3.1

Resolvons les equations suivantes

1/ $\arccos x = \frac{\pi}{3}$

$\cancel{\cos x = \frac{\pi}{3}}$ $\quad y \in [0,\pi] / \cos y = x$

$\cos\frac{\pi}{3} = x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

↳ et $x \in [-1,1]$

$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) =$

2/ $\arcsin x = \pi$ impossible n'a pas de solution

Exercice 3.2
Calculons

1/ $\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{4}\right) = \arccos\left[\cos\left(\frac{9\pi}{4}-2\pi\right)\right]$

$= \arccos\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= \frac{\pi}{4}$

$\arccos\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi\right)\right]$ X

2/ $\arccos\left[\cos\left(-\pi/4\right)\right] =$

$= \frac{\pi}{4}$

3/ $\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right) = \arccos\left(-\cos\left(+\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{4}$

4/ $\arcsin\left(\sin\frac{9\pi}{4}\right) = \arcsin\left[\sin\left(\frac{9\pi}{4}-2\pi\right)\right]$

$= \arcsin\left(\sin\left(\pi/4\right)\right)$

$= \frac{\pi}{4}$

5/ $\arcsin\left(\sin\left(-\pi/4\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$

6/ $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \arcsin\left[\sin\left(\frac{3\pi}{4}-2\pi\right)\right]$ X

$= \arcsin\left(\sin\pi/4\right)$

$= \frac{\pi}{4}$

7/ $\arctan(\tan(-\frac{\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4}$

8/ $\arctan(\tan\frac{2\pi}{3}) =$

Exercice 3.3

$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

1- Det $\mathcal{D}f$

$\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R} / 1-x^2 > 0\}$

$\boxed{\mathcal{D}_f =]-1, 1[}$

2/ Calculons $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}} = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$$

$f(x) = \arctan(u(x))$

$f'(x) = u'(x) \times \arctan'(u(x))$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \times 1-x^2$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

3 2/ Mq f et arcsin ont même expression sur D_f

$f :]-1, 1[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\quad$ arcsin : $[-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

f et arcsin ont même définition et $f'(x) = \arcsin'$ donc les deux fonctions ont même expression sur D_f

$\exists c \in \mathbb{R}$ tel que ~~$f(x) = \arctan() + c$~~ $f(x) = \arcsin() + c$ $(\forall x \in D_f)$

Cherchons c : $f(0) = \arcsin(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0$

4/ Construisons à partir de f, $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = -1 \\ f(x) & \text{si } x \in]-1, 1[\\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Ou $\tilde{f} = \arcsin$

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x-1}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2 \sqrt{\frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2}}}$$

$$= \frac{1}{(x-1)\sqrt{(x^2-1) - 1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{(x-1)^4 (x-1)^2 - 1}{(x-1)^2}}}$$

$$1 - \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 [(x-1)^2 - 1]}}$$

Exercice 3.4

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

Etude de f

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{1+x} \in [-1,1]\}$

$-1 \leq \frac{1}{1-x} \leq 1 \Rightarrow \boxed{D_f = \mathbb{R}} \ \forall \ \boxed{D_f =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[}$

Dérivée

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1-x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1-x}\right)^2}} \qquad f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x-1}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x-1}\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\sqrt{\frac{x^2-2x}{(1-x)^2}}} \qquad = \frac{-\frac{1}{(x-1)^2}}{\sqrt{\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)(\sqrt{x^2-2x})} \qquad f'(x) = +\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x^2-2x})}$$

Sens de variation

Posons $f'(x) = 0$

$1-x = 0$ ou $x(x-2) = 0$

$x = 1$ ou $x = 0$ ou $x = 2$

x	$-\infty$ -1	0	1	2
$1-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
x^2-2x	$+$	$+$	$-$	$-$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$x-1$						
$\sqrt{x^2-2x}$						

$$[(\dot{\varphi}\vec{i_1} + \dot{\theta}\vec{k_1}) \wedge \vec{j_2}] = \dot{\varphi}\vec{k_1} - \dot{\theta}\vec{i_1}$$

* limite

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \arccos\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim \arccos\left(\frac{1}{1-x}\right) \text{ n'est } x-1$$

$$= \pi$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \arccos\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad x-1$$

$$= 0$$

$\arccos(0) = y$

$\cos y = 0$

$\arccos(0) = y \in [0, \pi]$

$\cancel{x}$ $0 = \tan y \Rightarrow y = 0$

$0 \cancel{= \tan}$

$y = \cos(0) = 1$

$\cos(\arccos(x)) = x \quad \forall x \in [-1,1]$
$\arccos(\cos(x)) = x \quad \forall x \in [0,\pi]$

Si $x \in [0,\pi]$ $\cos(x) = y \Leftrightarrow x = \arccos y$

$\sin(\arcsin(x)) = x \quad \forall x \in [-1,1]$
$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$\tan(\arctan(x)) = x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\ \mathbb{R}$
$\arctan(\tan(x)) = x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$, $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$
$x \longmapsto y$ $\qquad x \longmapsto y$

$\tan :]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$

$y = \arctan(x)$ (avec $y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $x \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow x = \tan y = \cancel{\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \frac{\sin y}{\cos y}$$

$$x^2 + 1 = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}$$

$$x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \cos y = \pm\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos(\arctan(x))$$

$y = \arctan(x)$
$x = \tan y$

$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$

$\sin^2(y) = 1 - \cos^2(y)$

$= 1 - \frac{1}{1+x^2}$

$= \frac{1+x^2-1}{1+x^2}$

$= \frac{x^2}{1+x^2}$

$\sin(y) = \pm\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$ ou $\frac{-|x|}{\sqrt{1+x^2}}$

↳ même signe que x

$\cos(2\arcsin(x)) \neq y \quad (y \in [0, \pi]$

$\cancel{x} \; y = 2\arcsin(x) \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$x = \sin(y)$ X

$x = \sin(\frac{y}{2})$

Exercice 35

Simplifions les expressions suivantes

$f(x) = \cos(2\arcsin(x))$

$\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y$ avec $y = \arcsin(x)$

$g(x) = \cos(\arcsin(x))$

$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ avec $y = \arcsin x$ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$= 1 - x^2$

$\cos y = \pm\sqrt{1-x^2}$ or $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ $\cos y \geq 0$

$\cos y = \sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow \cos 2y = 1 - x^2 - x^2$

$\Rightarrow \cos 2y = 1 - 2x^2$

$$\boxed{f(x) = 1 - 2x^2}$$

$t(x) = \cos(2\arctan(x))$

$\tan 2y = \frac{\sin 2y}{\cos 2y}$

$\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y$ ✗

$\cos 2y = \frac{\sin 2y}{\tan 2y}$

$\cos 2y = \frac{\sin 2y}{\tan 2y}$

✶ $\sin(2\arctan(x))$

$\sin(2y) = 2\sin y \cos y$

$= 2\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$\sin(2y) = 2\,\frac{x}{1+x^2}$

$1 - \frac{2x^2}{(1+x^2)}$

$\Rightarrow \cos(2y) = \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{}$

$\frac{1+x^2-2x^2}{1+x^2}$

$\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y$$
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\cos 2y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Exo 38

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \arccos(\cos x)$

1- Det l'ens de définition D_f de f

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq \cos x \leq 1\}$

$\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2- Calcul des limites de f aux bornes de D_f

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \arccos(\cos x)$ n'existe pas (on peut le démontrer par les suites)

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ n'existe pas non plus

3/ Réécrivons l'expression de f

~~arccos x x~~ $\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$

$f(x) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$

• Pour $x \in [\pi, 2\pi]$

$f(x) = \arccos(\cos x)$

$= \arccos(\cos(2\pi - x))$

$= 2\pi - x$

• $\forall x \in [2\pi, 3\pi]$

$f(x) = \arccos(\cos x)$

$= \arccos(\cos(x - 2\pi))$

$= x - 2\pi$

• $\forall x \in [3\pi, 4\pi]$

$f(x) = \arccos(\cos x)$

$= \arccos(\cos(x - 3\pi))$

$= x - 3\pi$

$= \arccos(\cos(4\pi - x))$

Pour le moment on a :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \\ x - 2\pi & \text{si } 2\pi \leq x \leq 3\pi \\ 4\pi - x & \text{si } 3\pi \leq x \leq 4\pi \end{cases}$$

* Si $x \in [-\pi, 0]$

$f(x) = \arccos(\cos(-x))$

$= -x$

* Si $x \in [-2\pi, -\pi]$

$f(x) = \arccos$

Developpement limité

Negligeabilité : $f = o(g)$ en a $\frac{f}{g} \to 0 \Rightarrow \frac{o(g)}{g} \to 0$

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$h = x - a$

$\lim_{x \to 0} \frac{o(x^5)}{x^5} = 0$

$x = x_0 + h$

$x \to 0$

$\Rightarrow h \to -x_0$

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a)$$

Question (Sans une seule bonne réponse)

Question (Possibilité d'avoir plusieurs bonnes réponses)

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to a} \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) - f(x_0-h)}{h^2} - f''(x_0) \right) = 0$$

$$f(x_0+h) - 2f(x_0) - f(x_0-h) - f''(x_0)h^2 = 0$$

$$2f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0-h) - f''(x_0)h^2$$

$f(x_0) =$

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0)$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + o(x-a)^2$$

$$h = x-a$$

$\forall h \in \mathbb{R}$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

$$\begin{cases} f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + o(h^2) \\ f(x_0-h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + o(h^2) \end{cases}$$

$$\frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0) + \underbrace{\frac{o(h^2)}{h^2}}_{\to 0}$$

$f(x) = \sin 2x$

DL $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

~~Reponse~~ DL $\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!}$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$$= 2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)$$

$$= 2\left(x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} + x\,o(x^5) + \frac{x^5}{3!\,2!} - \frac{x^3}{3!}\,o(x^5)\right)$$

$$x^2 = \frac{1}{2}x^2 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}(2x^2)$$

1 = Sinx 2 Cosx 3 -Sinx 3 -Cosx

4 Sinx -Cosx Sinx

Cosx

$\sin x = \sin 0 + (\sin x)' x$

$= 1 \times x + (-1)\frac{x^3}{3!} - x$

$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$\cos x = 1 + \frac{x^3}{3!}\ \frac{x^2}{2!} + x$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

$f(x) = \frac{1-\cos x}{(1-e^x)^2}$

Au voisinage de 0 on a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!}$

$1 + e^{2x} - 2e^x \Rightarrow$ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$ et $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!}$

$e^{2x} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} x$

$$f(x) = \frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{1+1+2x+\frac{4x^2}{2!}+o(x^2)-2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}$$

$$= \frac{\frac{x^2}{2!} + o(x^2)}{\frac{3x^2}{2!} - o(x^2)} = \frac{\frac{x^2+2!\,o(x^2)}{2!}}{\frac{2x^2-2\,o(x^2)}{2!}} = \frac{x^2+2!\,o(x^2)}{2x^2-2!\,o(x^2)}$$

$$= \frac{1 - \frac{2o(x^2)}{x^2}}{2 - \frac{2o(x^2)}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Representation en graphique des fonctions

Sympy
matplotlib
numpy

(2) Resolution d'equation $f(x)=0$

(3) Calcul des limites (Sympy)

(4) Optimisations

```
import sympy as sp
sp.symbols('x')
f=sp. function ("f")
f=x*x+2*x+5
sp.plot (f, (x,0,10))
```

Matplotlib

```
import numpy as np
import matplotlib as plt
def f(x):
return x**2+2*x+5
x=np. linespace (0, 200, 100)
F=f(x)
```

→ nbre de position
→ max
→ min

plt.figure()
plt.plot(x, f1, label = courbe 1)

Révision de calcul différentiel

Question 1

$\ln x$ et $\frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2}\right)$$

$$\frac{e^x - 1}{2x} = \frac{e^x}{2}$$

Soit $g(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$\frac{2x + x^2}{2}$ $\quad \frac{x}{\ln x} \to 0$

Réponse A

$\frac{\ln x}{x} \to 0$

$x \to +\infty$

Question 2

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{x+1}{x}$$

$$\frac{\left(\frac{1+x}{1 + x + \frac{x^2}{2}}\right)}{2x}$$

=

Réponse B

$$\frac{1+x}{2x\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}$$

Question 3

$$\frac{1+x}{2x + 2x^2 + x^3}$$

Reponse : B

$$\frac{1}{2 + 4x + 3x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2 + x}{x^2} = \frac{2x + 1}{2x} = \frac{2}{2} = 1$$

Question 4 : ~~A~~

Réponse C

Question 5

Réponses C et D

Question 6

$$h(x) = \frac{1 - \frac{x}{2} - \sqrt{1-x}}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{+\frac{\frac{2(-1)}{2\sqrt{1-x}}}{4(1-x)}}{2}$$

$$= \frac{1}{8}$$

Réponse : B

Question 7

Réponses A et E

Question 8

Développement limité à l'ordre 4 $\quad f(x) = u \circ v(x)$

$$f'(x) = \cancel{u'(v(x)) \times v'(u(x))}$$

$$= u'(v(x)) \times v'(x)$$