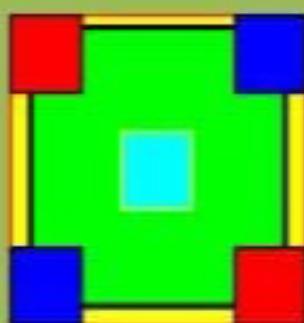


CLASSES PREPARATOIRES AUX GRANDES ECOLES
TRONC COMMUN DES UNIVERSITES (TCT)
SCIENCES TECHNIQUES (ST) semestre 3 (LMD)

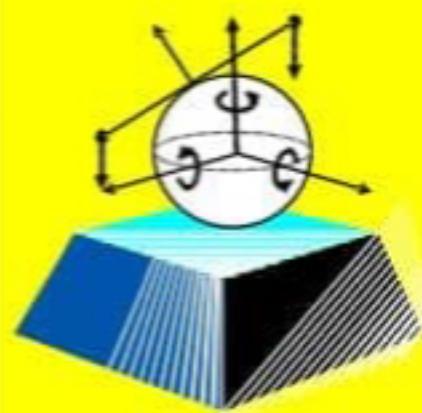
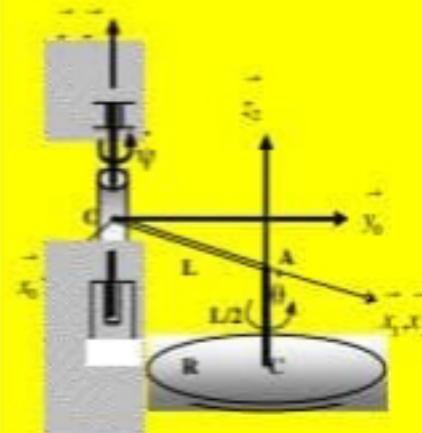
MECANIQUE RATIONNELLE

Cours & exercices résolus

Rappels sur les Vecteurs, Les Torseurs, Statique des Solides,
Géométrie des Masses, Cinématique du Point et du Solide,
Cinétique et Dynamique des Solides



A. KADI



Cet ouvrage est destiné aux étudiants de **deuxième année des classes préparatoires aux grandes écoles** et **aux étudiants du tronc commun de technologie des universités** ainsi que **les étudiants du semestre 3 des sciences techniques du système LMD**. Il contient des chapitres de cours et des exercices résolus à la fin de chaque chapitre. Les solutions sont souvent détaillées et permettent à l'étudiant de compléter sa compréhension du cours et faire soit même son évaluation.

Les deux premiers chapitres traitent les outils mathématiques notamment les torseurs utilisés pour simplifier l'écriture des équations de la mécanique.

Le chapitre trois décrit l'équilibre statique des solides et les différentes liaisons entre les solides et les équations qui les régissent.

Le chapitre quatre est consacré à la géométrie des masses donc aux centres d'inertie et aux tenseurs d'inertie des solides. Savoir utiliser le théorème de Huygens permet de résoudre un bon nombre de problèmes en mécanique des solides et vibrations.

Les chapitres cinq, six et sept traitent la cinématique du point matériel et la cinématique du solide indéformable ainsi que les contacts entre les solides. Le maniement des angles d'Euler et leur assimilation sont indispensables pour la compréhension de la mécanique des solides.

Les chapitres huit et neuf décrivent la cinétique et les théorèmes fondamentaux de la dynamique et le principe de l'action et de la réaction.

Le dernier chapitre traite la dynamique des solides en mouvements de rotation autour d'un axe et de leur équilibrage statique et dynamique.

De nombreux exercices résolus dans cet ouvrage montrent aussi la manière dont il faut utiliser les théorèmes généraux de la mécanique et combien il est important de faire un bon choix des repères pour la détermination des éléments cinématiques et cinétiques des solides.

La mécanique est la science qui décrit les lois des mouvements et de l'équilibre. Elle est à la base du dimensionnement des mécanismes, des machines, des structures, des ouvrages et autres réalisations de l'homme.

J'espère que le lecteur ayant utilisé l'ouvrage pourra à la fin, en utilisant les torseurs des actions mécaniques et les différentes liaisons, écrire les équations de mouvement d'un mécanisme quelconque et résoudre le problème.

Je tiens à remercier, toutes celles et ceux qui voudront me faire parvenir leurs critiques, remarques ainsi que leurs suggestions afin d'améliorer le contenu de cet ouvrage.

L'auteur
Email : kadikali@yahoo.fr

CHAPITRE I

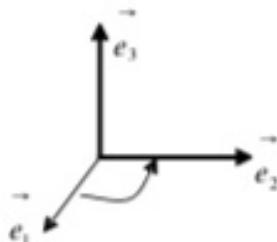
LES OUTILS MATHEMATIQUES

4. Composantes d'un vecteur

Considérons une base de l'espace R^3 notée : $R_0 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Cette base est orthonormée

$$\text{si : } \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La base R_0 est dite directe si un observateur se plaçant à l'extrémité du vecteur \vec{e}_3 verra le vecteur \vec{e}_1 tourner vers le vecteur \vec{e}_2 dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.



Dans cette base un vecteur \vec{V} de composantes $(x, y, z) \in R^3$ s'écrirait :

$$\vec{V} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$$

Les quantités réelles x, y, z sont appelées composantes du vecteur \vec{V} dans la base R_0 .

$$\text{La notation adoptée est la suivante : } \vec{V} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}_{R_0}$$

5. Loi de composition interne : Somme vectorielle

La somme de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est un vecteur \vec{W} tel que :

$$\forall \vec{V}_1, \vec{V}_2 \in R^3 \text{ nous avons } \vec{W} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \in R^3$$

Soit (a_1, a_2, a_3) les composantes du vecteur \vec{V}_1 d'où : $\vec{V}_1 = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ et

(b_1, b_2, b_3) les composantes du vecteur \vec{V}_2 d'où : $\vec{V}_2 = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$

Le vecteur somme est défini par la relation :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (a_1 + b_1) \vec{e}_1 + (a_2 + b_2) \vec{e}_2 + (a_3 + b_3) \vec{e}_3$$

L'élément neutre ou vecteur nul, est noté : $\vec{0} = (0, 0, 0)$

5.1 Propriétés de la somme vectorielle

- la somme vectorielle est commutative : $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$;

- la somme vectorielle est associative : $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$;
- l'élément neutre est défini par : $\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$;
- A tout vecteur \vec{V} correspond un vecteur opposé noté $-\vec{V}$ tel que : $\vec{V} + (-\vec{V}) = \vec{0}$

5.2 Multiplication par un scalaire

Si λ est un nombre réel et \vec{V} un vecteur, leur produit est un vecteur.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{V} \in \mathbb{R}^3 \implies \vec{W} = \lambda \vec{V} \in \mathbb{R}^3$$

Le vecteur \vec{W} est colinéaire au vecteur \vec{V} .

Si le vecteur \vec{V} a pour composantes (a, b, c) tel que : $\vec{V} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$; le vecteur \vec{W} s'écrirait : $\vec{W} = \lambda a_1 \vec{e}_1 + \lambda a_2 \vec{e}_2 + \lambda a_3 \vec{e}_3$

La multiplication d'un vecteur par un scalaire vérifie les propriétés suivantes :

- Distribution par rapport à l'addition des scalaires* : $(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{V} = \lambda_1 \vec{V} + \lambda_2 \vec{V}$;
- Distribution par rapport à la somme vectorielle* : $\lambda(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \lambda \vec{V}_1 + \lambda \vec{V}_2$;
- Associativité pour la multiplication par un scalaire* : $\lambda_1(\lambda_2 \vec{V}) = \lambda_1 \lambda_2 \vec{V}$

6. Combinaison linéaire des vecteurs

Soit les n vecteurs : $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_i, \dots, \vec{V}_n$ de l'espace \mathbb{R}^3 et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ des nombres réels. Les vecteurs $\lambda_1 \vec{V}_1, \lambda_2 \vec{V}_2, \lambda_3 \vec{V}_3, \dots, \lambda_i \vec{V}_i, \dots, \lambda_n \vec{V}_n$ sont aussi des vecteurs de l'espace \mathbb{R}^3 ainsi que leur somme \vec{W} défini par :

$$\vec{W} = \lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2 + \lambda_3 \vec{V}_3 + \dots + \lambda_n \vec{V}_n = \sum_i \lambda_i \vec{V}_i$$

Le vecteur \vec{W} est appelé combinaison linéaire des vecteurs : $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$

6.1. Dépendance et indépendance linéaire entre les vecteurs

6.1.1. Définition

On dit que les n vecteurs : $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_i, \dots, \vec{V}_n$ de l'espace \mathbb{R}^3 sont linéairement

indépendant si et seulement si, ils vérifient la relation suivante : $\sum_i \lambda_i \vec{V}_i = \vec{0}$ entraîne que tous les λ_i sont nuls.

$$\sum_i \lambda_i \vec{V}_i = \lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2 + \lambda_3 \vec{V}_3 + \dots + \lambda_n \vec{V}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0$$

Si les λ_i ne sont pas tous nuls on dit que les vecteurs sont linéairement dépendant entre eux.

6.1.2. Propriétés sur l'indépendance des vecteurs

- a) Un vecteur \vec{V} est à lui seul un vecteur linéairement indépendant ;
- b) Dans un système de vecteurs linéairement indépendants, aucun d'entre eux ne peut être un vecteur nul ;
- c) Dans un ensemble de vecteurs indépendants, tout sous ensemble prélevé sur ces vecteurs forme un système de vecteurs indépendants.

6.1.3. Propriétés sur la dépendance des vecteurs

Si n vecteurs sont dépendants entre eux alors, au moins l'un d'entre eux est une combinaison linéaire des autres. Soit les n vecteurs : $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ de l'espace R^3 et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ des nombres réels, si ces vecteurs sont linéairement dépendants la relation :

$$\sum_i \lambda_i \vec{V}_i = \vec{0}$$

Implique qu'il existe des λ_i non nuls, de telle sorte que la relation puisse s'écrire :

$$\lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2 + \lambda_3 \vec{V}_3 + \dots + \lambda_n \vec{V}_n = \vec{0} \text{ qui donne par exemple :}$$

$$\lambda_1 \vec{V}_1 = -(\lambda_2 \vec{V}_2 + \lambda_3 \vec{V}_3 + \dots + \lambda_n \vec{V}_n)$$

$$\vec{V}_1 = -\frac{1}{\lambda_1} (\lambda_2 \vec{V}_2 + \lambda_3 \vec{V}_3 + \dots + \lambda_n \vec{V}_n)$$

On dit alors que \vec{V}_1 dépend linéairement des vecteurs : $\vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$

Remarque :

- a) Si $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ sont linéairement indépendants, alors les vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n, \vec{V}_{n+1}, \vec{V}_{n+2}, \dots$ le sont aussi quel que soit les vecteurs $\vec{V}_{n+1}, \vec{V}_{n+2}, \dots$

8. Produit vectoriel de deux vecteurs

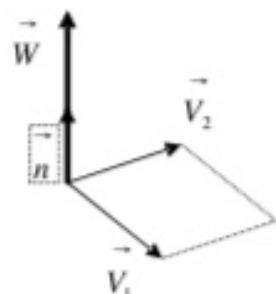
Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 de l'espace \mathbb{R}^3 est un vecteur \vec{W}

perpendiculaire à \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , défini par : $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\| \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2) \vec{n}$

ou \vec{n} : est un vecteur unitaire perpendiculaire à \vec{V}_1 et \vec{V}_2

Le produit vectoriel est nul si :

- Les deux vecteurs sont colinéaires ;
- L'un des vecteurs, est nul.



8.1. Propriétés du produit vectoriel

a) Le module du produit vectoriel est égal à l'aire du parallélogramme formé par \vec{V}_1 et \vec{V}_2

b) Le produit vectoriel est distributif à gauche et à droite pour la somme vectorielle :

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \wedge \vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{W} + \vec{V}_2 \wedge \vec{W}$$

$$\vec{W} \wedge (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{W} \wedge \vec{V}_1 + \vec{W} \wedge \vec{V}_2$$

c) Le produit vectoriel est associatif pour la multiplication par un nombre réel :

$$(\lambda \vec{V}) \wedge \vec{W} = \lambda (\vec{V} \wedge \vec{W})$$

$$\vec{V} \wedge \lambda \vec{W} = \lambda (\vec{V} \wedge \vec{W})$$

d) Le produit vectoriel est antisymétrique (anticommutatif)

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$$

Si on applique cette propriété au produit vectoriel d'un même vecteur, nous aurons :

$$\vec{V} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{V}) = \vec{0}$$

On déduit à partir de cette propriété que : deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

Si $\vec{V}_1 // \vec{V}_2$ alors $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$

En effet si $\vec{V}_1 // \vec{V}_2$ on peut écrire : $\vec{V}_1 = \lambda \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \lambda (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_2) = \vec{0}$

8.2. Produit vectoriel des vecteurs unitaires d'une base orthonormée

Si $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orthonormée nous avons :

$$\text{Sens direct : } \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

$$\text{Sens opposé : } \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

8.3. Expression analytique du produit vectoriel dans une base orthonormé direct

Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 de composantes respectives dans une base

$$\text{orthonormée direct } R: \quad \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1Z_2 - Z_1Y_2 \\ Z_1X_2 - X_1Z_2 \\ X_1Y_2 - Y_1X_2 \end{pmatrix}$$

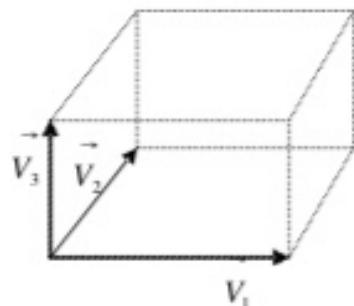
8.4. Produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ pris dans cet ordre, le nombre réel défini par : $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$

Le produit mixte est donc un scalaire égal au volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs.

Le produit mixte est nul, si :

- les trois vecteurs sont dans le même plan ;
- deux des vecteurs sont colinéaires ;
- l'un des vecteurs, est nul.



On montre facilement que, dans une base orthonormée directe, le produit mixte est un variant scalaire par permutation circulaire direct des trois vecteurs car le produit scalaire est commutatif:

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_3 \cdot (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_2 \cdot (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1)$$

Remarque :

Une notation simplifiée, dans laquelle les opérateurs n'apparaissent pas, est adoptée dans ce cas pour faciliter l'écriture des équations vectorielles :

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \text{ est équivalent à } \left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3 \right)$$

nous avons alors : $\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3 \right) = \left(\vec{V}_3, \vec{V}_1, \vec{V}_2 \right) = \left(\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1 \right)$

8.5. Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs respectifs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ est un vecteur \vec{W} exprimé par la relation : $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$. Le vecteur \vec{W} est perpendiculaire au vecteur \vec{V}_1 et au vecteur formé par le produit : $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$, il est donc dans le plan formé par les vecteurs \vec{V}_2 et \vec{V}_3 . Le vecteur \vec{W} peut s'écrire : $\vec{W} = a\vec{V}_2 + b\vec{V}_3$

Nous pouvons présenter cette relation autrement par identification des scalaires a et b , on obtient :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \vec{V}_3$$

Il faut faire attention à l'ordre des vecteurs car le produit vectoriel n'est pas commutatif.

Pour retenir cette formule, il est plus simple de l'écrire sous la forme :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

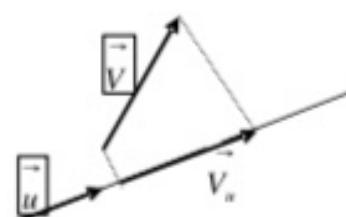
9. Projection des vecteurs

9.1. Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe

Soit \vec{V} un vecteur quelconque, et (Δ) un axe de l'espace défini par son vecteur unitaire \vec{u} .

La projection orthogonale du vecteur \vec{V} est la composante \vec{V}_α de ce vecteur sur cet axe.

$$\vec{V}_\alpha = (\vec{V} \cdot \vec{u}) \vec{u}$$



9.2. Projection orthogonale d'un vecteur sur un plan

Soit \vec{V} un vecteur quelconque, et (π) un plan de l'espace défini par la normale \vec{n} . La projection orthogonale du vecteur \vec{V} est la composante \vec{V}_π dans le plan.

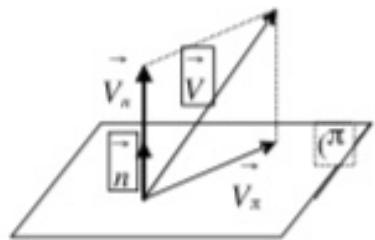
Le vecteur \vec{V} a deux composantes l'une dans le plan et l'autre perpendiculaire au plan. On a

$$\text{ainsi : } \vec{V}_\pi = \vec{V} - \vec{V}_n = \vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

$$\text{Qui s'écrit aussi sous la forme : } \vec{V}_\pi = (\vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

On retrouve la relation du double produit vectoriel

$$\text{entre les vecteurs } \vec{V} \text{ et } \vec{n} : \quad \vec{V}_\pi = \vec{n}^\wedge (\vec{V}^\wedge \vec{n})$$



10. Division vectorielle

Si $\vec{X}^\wedge \vec{V} = \vec{W}$, on dit que \vec{X} est le résultat de la division vectorielle de \vec{W} par \vec{V}

- i) \vec{V} ne doit pas être un vecteur nul ;
- ii) \vec{W} et \vec{V} doivent être orthogonaux

S'il existe une solution particulière \vec{X}_0 , alors elle est la forme $\vec{X}_0 = \alpha \vec{V}^\wedge \vec{W}$

En remplaçant cette valeur dans l'expression $\vec{X}^\wedge \vec{V} = \vec{W}$ on obtient :

$$\alpha(\vec{V}^\wedge \vec{W})^\wedge \vec{V} = \vec{W} \Leftrightarrow \alpha \vec{W}(\vec{V} \cdot \vec{V}) - \alpha \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{W}) = \vec{W}$$

Comme $\vec{V} \perp \vec{W}$ alors $\vec{V} \cdot \vec{W} = 0$; on obtient :

$$\alpha \vec{W}(\vec{V} \cdot \vec{V}) = \vec{W} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\vec{V}^2}$$

Nous avons aussi : $\vec{X}^\wedge \vec{V} = \vec{X}_0^\wedge \vec{V} \Rightarrow (\vec{X} - \vec{X}_0)^\wedge \vec{V} = 0$ cette expression montre que le vecteur $(\vec{X} - \vec{X}_0)$ est parallèle à \vec{V} , dans ce cas nous pouvons écrire que :

$$(\vec{X} - \vec{X}_0) = \lambda \vec{V} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \vec{X} = \vec{X}_0 + \lambda \vec{V}$$

finalement :
$$\vec{X} = \frac{\vec{V}^\wedge \vec{W}}{\vec{V}^2} + \lambda \vec{V}$$

12.2 Opérateur divergence dans un repère orthonormé $R(O, i, j, k)$

La divergence d'un vecteur $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$ est définie comme étant le produit scalaire

de l'opérateur : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ par le vecteur \vec{V} ; noté : $\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$

$$\text{div } \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \right) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

La divergence d'un vecteur est un scalaire.

12.3 Opérateur rotationnel dans un repère orthonormé $R(O, i, j, k)$

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$ est définie comme étant le produit

vectoriel de l'opérateur : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ par le vecteur \vec{V} ;

$$\text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} ; \quad \text{rot } \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \wedge \left(V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \right)$$

Le rotationnel d'un vecteur est aussi un vecteur.

Sous la forme matricielle nous aurons : $\text{rot}(V) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{bmatrix}$

Remarque :

Si f est un champ scalaire et A et B deux vecteurs quelconques, les relations suivantes sont vérifiées :

- $\text{div}(f; A) = f \text{div } A + A \text{ grad } f$
- $\text{rot}(\text{rot } A) = \text{grad}(\text{div } A) - \Delta \vec{A}$, avec $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$;
- $\text{rot}(f A) = \text{grad } f \wedge A + f \text{ rot}(A) ;$
- $\text{rot}(\text{grad } f) = 0 ;$
- $\text{div}(\text{rot}(A)) = 0 ;$
- $\text{div}(A \wedge B) = B \cdot \text{rot}(A) - A \cdot \text{rot}(B)$

EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 01 :

Deux points A et B, ont pour coordonnées cartésiennes dans l'espace : A(2,3,-3), B(5,7,2)

Déterminer les composantes du vecteur \vec{AB} ainsi que son module, sa direction et son sens.

Solution :

Le vecteur \vec{AB} est donné par : $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$

Son module : $AB = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

Sa direction est déterminée par les angles (α, β, θ) qu'il fait avec chacun des axes du repère.

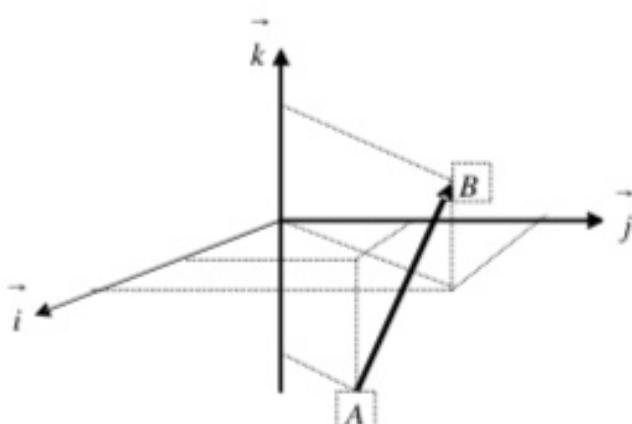
Ses angles se déduisent par le produit scalaire du vecteur \vec{AB} par les vecteurs unitaires du repère orthonormé :

$$\alpha = (\vec{AB}, \vec{i}) : \vec{AB} \cdot \vec{i} = AB \cdot 1 \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{i}}{AB} = \frac{3}{\sqrt{50}} = 0.424 \Rightarrow \alpha = 64.89^\circ$$

$$\beta = (\vec{AB}, \vec{j}) : \vec{AB} \cdot \vec{j} = AB \cdot 1 \cdot \cos \beta \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{j}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{50}} = 0.565 \Rightarrow \beta = 55.54^\circ$$

$$\theta = (\vec{AB}, \vec{k}) : \vec{AB} \cdot \vec{k} = AB \cdot 1 \cdot \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{k}}{AB} = \frac{5}{\sqrt{50}} = 0.707 \Rightarrow \theta = 44.99^\circ$$

son sens : comme le produit scalaire du vecteur \vec{AB} avec les trois vecteurs unitaires est positif alors, il a un sens positif suivant les trois axes du repère.



Exercice 02 :

La résultante de deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 est égale à 50 N et fait un angle de 30° avec la force $F_1 = 15\text{ N}$. Trouver le module de la force F_2 et l'angle entre les deux forces.

Solution :

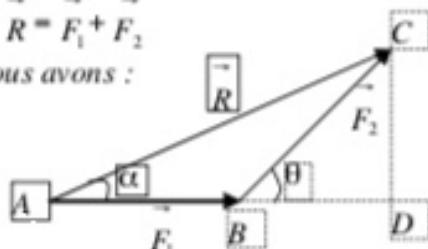
$$R = 50\text{ N} ; \quad F_1 = 15\text{ N} ; \quad \alpha = 30^\circ, \text{ nous avons : } \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Dans le triangle rectangle: ACD rectangle en D , nous avons :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$AD = AB + BD = F_1 + F_2 \cos \theta$$

$$DC = F_2 \sin \theta$$



$$\text{On obtient alors : } R^2 = (F_1 + F_2 \cos \theta)^2 + (F_2 \sin \theta)^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \theta$$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \theta \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{CD}{R} \Rightarrow CD = R \sin \alpha \\ \text{Nous avons aussi : } \sin \theta &= \frac{CD}{F_2} \Rightarrow CD = F_2 \sin \theta \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow R \sin \alpha = F_2 \sin \theta \quad (2)$$

$$\text{et } \cos \alpha = \frac{AD}{R} = \frac{F_1 + F_2 \cos \theta}{R} \Rightarrow \cos \theta = \frac{R \cos \alpha - F_1}{F_2} \quad (3)$$

en remplaçant l'expression (3) dans (1), on aboutit à :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \left(\frac{R \cos \alpha - F_1}{F_2} \right) = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1(R \cos \alpha - F_1)$$

$$\text{d'où : } F_2 = \sqrt{R^2 - F_1^2 - 2F_1(R \cos \alpha - F_1)}$$

$$F_2 = \sqrt{50^2 - 15^2 - 2 \times 15(50 \cos 30^\circ - 15)} = 44,44\text{ N}$$

$$\text{L'expression (3) nous donne : } \cos \theta = \frac{50 \cos 30^\circ - 15}{50} = 0,566 \Rightarrow \theta = 55,528^\circ$$

Exercice 03 :

Soient les vecteurs suivants : $\vec{U}_1 = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$ et $\vec{U}_2 = B_1 \vec{i} + B_2 \vec{j} + B_3 \vec{k}$

- 1) Calculer les produits scalaires : $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2$, $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_1$, $\vec{U}_2 \cdot \vec{U}_2$,

On donne : $\vec{V}_1 = 2 \vec{i} - \vec{j} + 5 \vec{k}$, $\vec{V}_2 = -3 \vec{i} + 1,5 \vec{j} - 7,5 \vec{k}$, $\vec{V}_3 = -5 \vec{i} + 4 \vec{j} + \vec{k}$

- 2) Calculer $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ et $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$;

- 3) Sans faire de représentation graphique que peut-on dire du sens et de la direction du vecteur \vec{V}_2 par rapport à \vec{V}_1 ;

- 4) Calculer les produits suivants $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ et $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$;

- 5) Déterminer la surface du triangle formé par les vecteurs \vec{V}_2 et \vec{V}_3

Solution :

1) $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$, $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_1 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$, $\vec{U}_2 \cdot \vec{U}_2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$

2) $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = -6 - 1,5 - 37,5 = -45$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & 1,5 & -7,5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1,5 & -1,5 & 1,5 \\ -7,5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

- 3) Comme le produit vectoriel des deux vecteurs est nul, alors ils sont parallèles

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2$$

De plus leur produit scalaire est négatif $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = -45$, alors les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont parallèles et de sens opposés

4) $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & 1,5 & -7,5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & -1,5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} 31,5 \\ 40,5 = 63 - 40,5 = 22,5 = 0 \\ -45 \end{cases}$

on peut retrouver ce résultat par la méthode vectorielle :

Nous avons $\vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2$ soit $\vec{W} = \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{V}_2 \perp \vec{W} \\ \vec{V}_3 \perp \vec{W} \end{cases}$, calculons $\vec{V}_1 \cdot \vec{W}$

$$\vec{V}_2 \perp \vec{W} \text{ et } \vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 \perp \vec{W} \Leftrightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{W} = 0$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1,5 & 4 \\ 5 & -7,5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 31,5 & -198 \\ -1 & 40,5 & 166,5 \\ 5 & -4,5 & 112,5 \end{vmatrix}$$

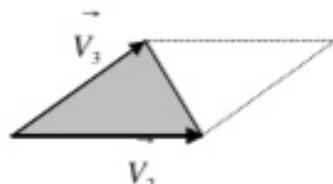
$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = -198 \vec{i} + 166 \vec{j} + 112,5 \vec{k}$$

- 5) La surface du triangle formé par les vecteurs \vec{V}_2 et \vec{V}_3 est donnée par la moitié du module du produit vectoriel des deux vecteurs :

Nous avons : $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = 31,5 \vec{i} + 40,5 \vec{j} - 4,5 \vec{k}$ alors :

$$|\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3| = \sqrt{31,5^2 + 40,5^2 + (-4,5)^2} = 51,50$$

$$S = \frac{|\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3|}{2} = \frac{51,50}{2} = 25,75$$



c'est la demi surface du parallélogramme :

Exercice 04 :

Soient les vecteurs :

$$\vec{U} = 2\vec{i} + 6\vec{k}, \vec{V} = 8\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \vec{P} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{Q} = -12\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}$$

- 1) Déterminer y et z pour que les vecteurs \vec{U} et \vec{V} soient colinéaires ;
- 2) Déterminer la valeur de y pour que les vecteurs \vec{P} et \vec{Q} soient perpendiculaires ;

Solution :

1) Si \vec{U} et \vec{V} sont colinéaires alors: $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 6 \end{cases} \wedge \begin{cases} 8 \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 24 \end{cases}$

2) Si \vec{P} et \vec{Q} sont perpendiculaires alors : $\vec{P} \cdot \vec{Q} = 0$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \\ -4 \\ 2 \end{cases} \cdot \begin{cases} -2 \\ y \\ 12 \end{cases} = 0 \Leftrightarrow -6 - 4y + 24 = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$$

Exercice 05 :

Trouvez le volume d'un parallélépipède dont les cotés sont les vecteurs : \vec{U} , \vec{P} , \vec{Q} , tel que :

$$\vec{U} = 2\vec{i} + 6\vec{j}, \vec{P} = 3\vec{i} + 5\vec{k}, \vec{Q} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k},$$

Solution :

Le volume d'un parallélépipède est un scalaire positif. On doit utiliser une opération vectorielle dont le résultat est un scalaire positif : c'est le module du produit mixte des trois

$$v = \left| \vec{U} \cdot (\vec{P} \wedge \vec{Q}) \right|$$

$$\vec{U} \cdot (\vec{P} \wedge \vec{Q}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -26 \\ 6 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -52 + 30 = -22 \Rightarrow$$

$$v = \left| \vec{U} \cdot (\vec{P} \wedge \vec{Q}) \right| = | -22 | = 22$$

Exercice 06 :

La trajectoire d'un mobile dans un repère orthonormé directe $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donnée par les

$$\text{équations paramétriques suivantes : } x = 4t^2, \quad y = 4(t - \frac{t^3}{3}), \quad z = 3t + t^3$$

Montrer que le vecteur vitesse \vec{V} fait un angle constant avec l'axe oz . Quelle est la valeur de cet angle.

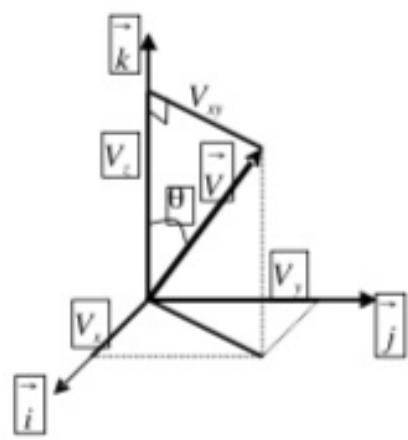
Solution :

$$\text{La vitesse du mobile est donnée par : } \vec{V} = \begin{cases} V_x = 8t \\ V_y = 4(1 - t^2) \\ V_z = 3(1 + t^2) \end{cases}$$

Nous avons en effet :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{V_x}{V_z} = \frac{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}{V_z}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{64t^2 + 16(1 - t^2)^2}}{3(1 + t^2)} = \frac{\sqrt{64t^2 + 16t^4 - 32t^2 + 16}}{3(1 + t^2)}$$



$$\tan \theta = \frac{\sqrt{16(t^2 + 2t^2 + 1)}}{3(1+t^2)} = \frac{\sqrt{16(1+t^2)^2}}{3(1+t^2)} = \frac{4(1+t^2)}{3(1+t^2)} = \frac{4}{3}$$

$\tan \theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53,13^\circ$ la valeur de l'angle est bien constante.

Exercice 07 :

La ligne d'action d'une force \vec{F} de 800 N , passe par les points $A \begin{pmatrix} 1,22 \\ 0 \\ 2,74 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1,22 \\ 0,61 \end{pmatrix}$

dans un repère orthonormé. Déterminer les composantes de cette force

Solution :

Nous avons : $\vec{AB} = \vec{AB} \vec{u}_{AB} \Rightarrow \vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$ vecteur unitaire porté par la ligne d'action.

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{-1,22\vec{i} + 1,22\vec{j} - 2,13\vec{k}}{\sqrt{(-1,22)^2 + (1,22)^2 + (-2,13)^2}} = \frac{-1,22\vec{i} + 1,22\vec{j} - 2,13\vec{k}}{2,74}$$

$$\vec{u}_{AB} = -0,445\vec{i} + 0,445\vec{j} - 0,777\vec{k}$$

La force \vec{F} s'écrira :

$$\vec{F} = F \vec{u}_{AB} = 800(-0,445\vec{i} + 0,445\vec{j} - 0,777\vec{k}) = -356\vec{i} + 356\vec{j} - 621,6\vec{k}$$

Les composantes de la force sont ainsi connues suivant les trois axes du repère.

Exercice 08 :

Soit un repère orthonormé direct $R(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dans l'espace vectoriel Euclidien \mathbb{R}^3 à trois dimensions dans le corps des nombres réels. Soit un axe $\Delta(O, \vec{u})$ passant par le point O et de

vecteur unitaire \vec{u} tel que : $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, et un vecteur quelconque $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$

CHAPITRE II

LES TORSEURS

LES TORSEURS

Les torseurs sont des outils mathématiques très utilisés en mécanique. L'utilisation des torseurs dans l'étude des systèmes mécaniques complexes est très commode car elle facilite l'écriture des équations vectorielles. Une équation vectorielle représente trois équations scalaires et une équation torsorielle est équivalente à deux équations vectorielles donc à six équations scalaires. Nous verrons dans les prochains chapitres quatre types de torseurs différents : le torseur cinématique, le torseur cinétique, le torseur dynamique et le torseur des actions.

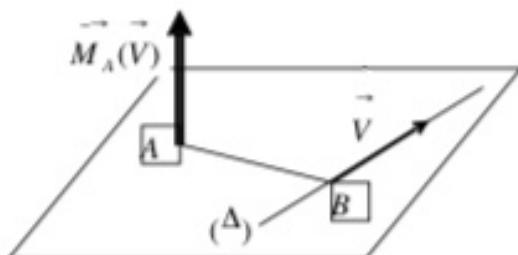
1. Moment d'un vecteur par rapport à un point

Le moment \vec{M}_A d'un vecteur \vec{V} d'origine B (glissant ou lié) par rapport à un point A est égal au produit vectoriel du vecteur

position \vec{AB} par le vecteur \vec{V} .

$$\text{Il s'écrit : } \vec{M}_A \vec{V} = \vec{AB} \wedge \vec{V}$$

Le trièdre formé respectivement par les vecteurs $(\vec{AB}, \vec{V}, \vec{M}_A)$ est direct.



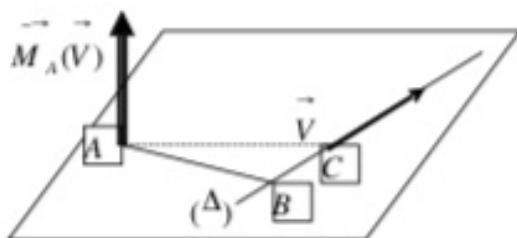
Remarque :

Le moment au point A est indépendant de la position du vecteur \vec{V} sur l'axe (Δ) . En effet nous avons :

$$\vec{M}_A \vec{V} = \vec{AC} \wedge \vec{V} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \wedge \vec{V}$$

Or nous avons : $\vec{BC} \parallel \vec{V} \Rightarrow \vec{BC} \wedge \vec{V} = 0$

$$\vec{M}_A \vec{V} = \vec{AC} \wedge \vec{V} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \wedge \vec{V} = \vec{AB} \wedge \vec{V}$$



Le moment $\vec{M}_A(\vec{V})$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs \vec{AB} et \vec{V} .

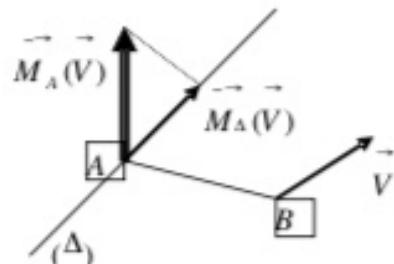
La distance AB est souvent appelée bras de levier.

2. Moment d'un vecteur par rapport à un axe

Le moment $M_\Delta(\vec{V})$ d'un vecteur \vec{V} par rapport à un axe (Δ) défini par un point A et un vecteur unitaire \vec{u} , est égal à la projection du moment $\vec{M}_A(\vec{V})$ sur l'axe (Δ) .

$$\vec{M}_\Delta(\vec{V}) = \left(\vec{M}_A(\vec{V}) \cdot \vec{u} \right) \vec{u}$$

Le moment par rapport à l'axe Δ est indépendant du point A .



3. Les torseurs

3.1. Définition

Un torseur que nous noterons $[T]$ est défini comme étant un ensemble de deux champs de vecteurs définis dans l'espace géométrique et ayant les propriétés suivantes :

- a) Le premier champ de vecteurs fait correspondre à tout point A de l'espace un vecteur \vec{R} indépendant du point A et appelé résultante du torseur $[T]$;
- b) Le second champ de vecteur fait correspondre à tout point A de l'espace un vecteur \vec{M}_A qui dépend du point A . Le vecteur \vec{M}_A est appelé moment au point A du torseur $[T]$.

3.2. Notation

La résultante \vec{R} et le moment résultant \vec{M}_A au point A , constituent les éléments de réduction du torseur au point A .

Soit \vec{R} la résultante des n vecteurs glissants : $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ appliqués respectivement aux points : $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$. Nous pouvons définir à partir de ce système de vecteurs deux grandeurs :

- La résultante des n vecteurs : $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i$;
- Le moment résultant en un point A de l'espace est donné par : $\vec{M}_A = \sum_{i=1}^n \vec{AB}_i \wedge \vec{V}_i$

Les deux grandeurs constituent le torseur développé au point A associé au système de

vecteurs donnés. On adopte la notation suivante : $\underline{P}_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{cases}$

Remarque : Un torseur n'est pas égal à un couple de vecteur, mais il est représenté au point A par ses éléments de réduction.

4. Propriétés des vecteurs moments

4.1. Formule de transport des moments

Connaissant le Torseur $\underline{P}_A = \begin{cases} \vec{R} = \sum \vec{V}_i \\ \vec{M}_A = \sum_{i=1}^n \vec{AB}_i \wedge \vec{V}_i \end{cases}$ en un point A de l'espace nous pouvons déterminer les éléments de réduction de ce même torseur en un autre point C de l'espace.

Le moment au point C s'exprime en fonction du moment au point A , de la résultante \vec{R} et du vecteur \vec{CA} . Nous avons en effet :

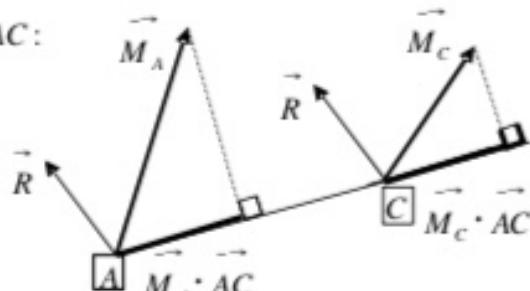
$$\begin{aligned} \vec{M}_C &= \sum_i \vec{CB}_i \wedge \vec{V}_i = \sum_i (\vec{CA} + \vec{AB}_i) \wedge \vec{V}_i = \sum_i \vec{CA} \wedge \vec{V}_i + \sum_i \vec{AB}_i \wedge \vec{V}_i = \vec{CA} \wedge \sum_i \vec{V}_i + \sum_i \vec{AB}_i \wedge \vec{V}_i \\ \vec{M}_C &= \vec{CA} \wedge \vec{R} + \vec{M}_A \\ \vec{M}_C &= \vec{M}_A + \vec{CA} \wedge \vec{R} \end{aligned}$$

Cette relation très importante en mécanique permet de déterminer le moment en un point C en connaissant le moment au point A .

4.2. Equiprojectivité des vecteurs moments

Les vecteurs moments \vec{M}_A au point A et \vec{M}_C au point C ont la même projection sur la droite AC :
 On dit que le champ des vecteurs moments, est équiprojectif.

$$\vec{M}_C = \vec{M}_A + \vec{CA} \wedge \vec{R}$$



La projection du vecteur moment sur l'axe \vec{CA} revient à faire le produit scalaire avec le vecteur \vec{CA} à un facteur multiplicatif près. Nous avons par la formule de transport :

$$\vec{M}_c = \vec{M}_A + \vec{CA}^\wedge \vec{R}$$

Multiplions cette relation scalairement par le vecteur \vec{CA} .

$$\vec{CA} \cdot \vec{M}_c = \vec{CA} \cdot \left(\vec{M}_A + \vec{CA}^\wedge \vec{R} \right) = \vec{CA} \cdot \vec{M}_A + \vec{CA} \cdot (\vec{CA}^\wedge \vec{R})$$

or $\vec{CA}^\wedge \vec{R}$ est un vecteur perpendiculaire à \vec{CA} alors : $\vec{CA} \cdot (\vec{CA}^\wedge \vec{R}) = 0$
 on obtient finalement :

$$\vec{CA} \cdot \vec{M}_c = \vec{CA} \cdot \vec{M}_A \quad \text{ou} \quad \vec{M}_c \cdot \vec{CA} = \vec{M}_A \cdot \vec{CA}$$

Le produit scalaire est commutatif.

Cette expression exprime que les projections des vecteurs moments \vec{M}_c et \vec{M}_A sur la droite \vec{CA} sont égales.

5. Opérations vectorielles sur les torseurs

5.1. Égalité de deux torseurs

Deux torseurs sont égaux (équivalents), si et seulement si, il existe un point de l'espace en lequel les éléments de réduction sont respectivement égaux entre eux. Soient deux torseurs $[q]$ et $[T_2]$ tel que : $[T_1]_{P'} = [T_2]_{P'}$ égaux au point P , cette égalité se traduit par deux égalités

$$\text{vectorielles : } [q]_{P'} = [q]_{P} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{1P} = \vec{M}_{2P} \end{cases}$$

5.2. Somme de deux torseurs

La somme de deux torseurs $[q]$ et $[T_2]$ est un torseur $[T]$ dont les éléments de réduction \vec{R} et \vec{M}_P sont respectivement la somme des éléments de réduction des deux torseurs.

$$[q]_{P'} [T_2]_{P'} \Leftrightarrow [q]_P = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_P = \vec{M}_{1P} + \vec{M}_{2P} \end{cases}$$

on voit bien que le produit scalaire, des deux éléments de réduction d'un torseur, est indépendant du point où est mesuré le moment.

7. Axe central d'un torseur

7.1. Définition

Soit un torseur donné de résultante non nulle. L'axe central (Δ) est défini par l'ensemble des points P de l'espace tel que le moment du torseur en ce point, soit parallèle à la résultante.

$$\forall P \in \Delta \Rightarrow \vec{M}_P = \alpha \vec{R} \quad \text{avec } \alpha \in IR$$

L'axe central d'un torseur est parallèle à la droite support de la résultante du torseur :

Démonstration :

Soient P et P' deux points de l'axe central, nous pouvons écrire :

$$\vec{M}_P = \alpha \vec{R} \quad \text{et} \quad \vec{M}_{P'} = \alpha' \vec{R} \quad \text{car les deux moments sont parallèles à } \vec{R}$$

et nous avons aussi par la formule de transport :

$$\begin{aligned} \vec{M}_P &= \vec{M}_{P'} + \vec{PP'} \wedge \vec{R} \\ \alpha \vec{R} &= \alpha' \vec{R} + \vec{PP'} \wedge \vec{R} \Rightarrow (\alpha - \alpha') \vec{R} = \vec{PP'} \wedge \vec{R} \end{aligned}$$

Par définition le vecteur résultat de $\vec{PP'} \wedge \vec{R}$ est perpendiculaire à $\vec{PP'}$ et \vec{R} ou nul.

La seule possibilité ici est, qu'il soit nul, alors dans ce cas : $\alpha = \alpha'$ et $\vec{PP'} \wedge \vec{R} = 0$

$$\vec{PP'} \wedge \vec{R} = 0 \Leftrightarrow \vec{PP'} \parallel \vec{R} : \text{d'où l'axe central est parallèle à la résultante du torseur.}$$

Nous allons montrer aussi que l'axe central est le lieu des points où le module du moment

$$\left\| \vec{M}_P \right\| \text{ du torseur est minimum.}$$

Soit P un point appartenant à l'axe central et soit A un point quelconque de l'espace n'appartenant pas à l'axe central. Nous pouvons écrire par la formule de transport :

$$\vec{M}_A = \vec{M}_P + \vec{AP} \wedge \vec{R}$$

on déduit alors :

$$\left\| \vec{M}_A \right\|^2 = \left\| \vec{M}_P \right\|^2 + \left(\vec{AP} \wedge \vec{R} \right)^2 + 2 \vec{M}_P \cdot \left(\vec{AP} \wedge \vec{R} \right) \quad \text{or nous avons : } \vec{M}_P = \alpha \vec{R}$$

$$\left\| \vec{M}_A \right\|^2 = \left\| \vec{M}_P \right\|^2 + \left(\vec{AP} \wedge \vec{R} \right)^2 + 2\alpha \vec{R} \cdot \left(\vec{AP} \wedge \vec{R} \right)$$

$$\left\| \vec{M}_A \right\|^2 = \left\| \vec{M}_P \right\|^2 + \left(\vec{AP} \wedge \vec{R} \right)^2 > \left\| \vec{M}_P \right\|^2$$

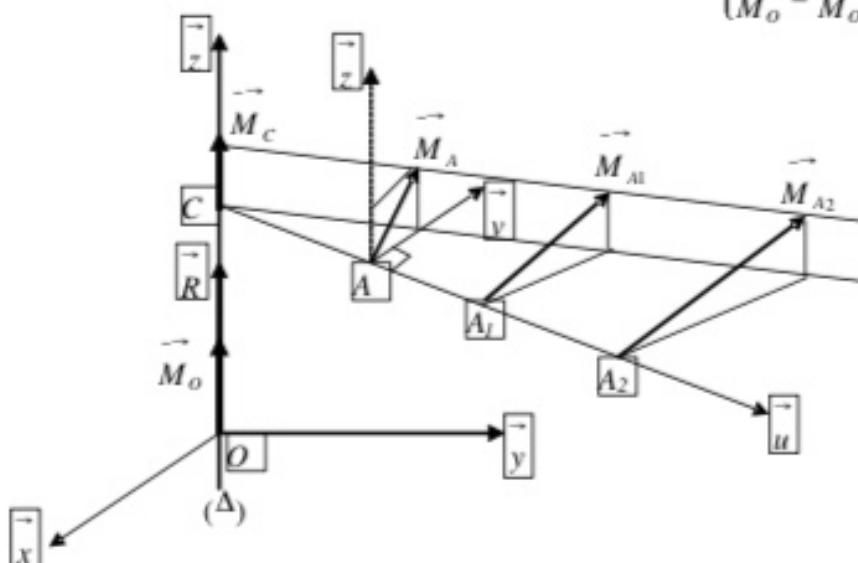
Quel que soit P appartenant à l'axe central le moment en ce point est minimum.

7.2. Symétrie du champ des moments d'un torseur

Soit un repère orthonormé direct $R(O, x, y, z)$ dont l'axe vertical est confondu avec l'axe

central (ou torsion) défini au point O par :

$$Q_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R} z \\ M_O = M_O z \end{cases}$$



On définit un autre repère local orthonormé direct en un point A quelconque de l'espace tel

que l'axe Oz reste confondu : $R(A, u, v, z)$ tel que $u \wedge v = z$

L'axe (v) rencontre l'axe (O, z) en un point C.

On pose $\vec{OC} = \vec{hz}$ et $\vec{CA} = \vec{Lu}$ d'où $\vec{OA} = \vec{OC} + \vec{CA} = \vec{hz} + \vec{Lu}$

Par la formule de transport nous pouvons écrire :

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{R} \wedge \vec{OA} = \vec{M}_O z + \vec{R} z \wedge (\vec{hz} + \vec{Lu})$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O z + \vec{RLv}$$

D'après cette relation, on constate que les vecteurs moments autour de l'axe central sont situés dans le plan (v, z) .

- Si $L = Cte$ alors : $\vec{M}_A \cdot \vec{z} = \vec{M}_o \cdot \vec{z} + \vec{R}L \cdot \vec{z} \cdot \vec{u} = \vec{M}_o$;
- Le module du moment \vec{M}_A est constant si $L = Cte$: $M_A = \sqrt{(M_o)^2 + (RL)^2}$

On remarque que les vecteurs moments situés à une même distance L de l'axe central (Δ) sont tangents au cylindre de révolution de même axe (Δ).

On constate aussi que lorsque le point A où est mesuré le moment se déplace le long de l'axe (C, u) , le moment en ce point fait des rotations. Nous avons alors

- pour $L = 0$ \vec{M}_A est parallèle à \vec{z}
- pour $L \rightarrow \infty$ \vec{M}_A est orthogonal à l'axe \vec{z}

On constate donc une torsion du moment lorsque le point A s'éloigne de l'axe central du torseur, c'est de là que vient l'origine du mot torseur.

7.3. Équation vectorielle de l'axe central

Soit O l'origine des coordonnées dans un repère orthonormé et (Δ) l'axe central d'un

torseur $[T]$. Nous avons : $\forall P \in (\Delta) \Rightarrow \vec{M}_P = \lambda \vec{R} \Leftrightarrow \vec{M}_P \parallel \vec{R} \Rightarrow \vec{M}_P \wedge \vec{R} = 0$

$$\text{Et } \vec{M}_P = \vec{M}_o + \vec{PO} \wedge \vec{R} \Rightarrow \vec{R} \wedge \vec{M}_P = \vec{R} \wedge \vec{M}_o + \vec{R} \wedge \vec{PO} \wedge \vec{R} = 0$$

En utilisant la propriété du double produit vectoriel, on aboutit à :

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_o + \vec{PO}(R^2) - \vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{PO}) = 0$$

$$\vec{OP}(R^2) = \vec{R} \wedge \vec{M}_o - \vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{PO}) \Rightarrow \vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_o}{R^2} + \frac{(\vec{R} \cdot \vec{OP})}{R^2} \vec{R}$$

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_o}{R^2} + \frac{(\vec{R} \cdot \vec{OP})}{R^2} \vec{R}$$

8.2.2. Propriétés du vecteur moment

Le moment d'un torseur couple est indépendant des points de l'espace où il est mesuré.

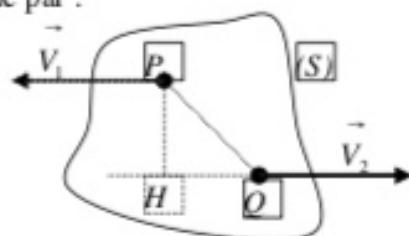
Nous avons : $V_1 = V_2$ tel que :

$$\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_2 = -\vec{V}_1$$

Le moment en un point A quelconque de l'espace est donné par :

$$\vec{M}_A = \vec{AP} \wedge \vec{V}_1 + \vec{AQ} \wedge \vec{V}_2 = \vec{AP} \wedge \vec{V}_1 - \vec{AQ} \wedge \vec{V}_1$$

$$\vec{M}_A = \vec{AP} \wedge \vec{V}_1 - \vec{AQ} \wedge \vec{V}_1 = \vec{QP} \wedge \vec{V}_1$$



On voit bien que le moment au point A est indépendant

du A. on va montrer qu'il est aussi indépendant des points P et Q.

$$\text{En effet nous avons : } \vec{M}_A = \vec{QP} \wedge \vec{V}_1 = (\vec{QH} + \vec{HP}) \wedge \vec{V}_1 = \vec{HP} \wedge \vec{V}_1$$

H est la projection orthogonale du point P sur la droite support du vecteur \vec{V}_2 .

En réalité le moment d'un torseur couple ne dépend que de la distance qui sépare les deux droites supports des deux vecteurs, il est indépendant du lieu où il est mesuré.

8.2.3. Décomposition d'un torseur couple

Soit $[T_c]$ un torseur couple défini par : $\vec{q}_c = \begin{cases} \vec{0} \\ M \end{cases}$. Ce torseur couple peut être décomposé

en deux glisseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ tel que : $[T_c] = [T_1] + [T_2]$ où les deux glisseurs sont définis

$$\text{comme suit : } \vec{q}_c = \begin{cases} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{0} \\ M = M_{1P} + M_{2P} \end{cases} \text{ où } P \text{ est un point quelconque}$$

Les invariants des deux glisseurs sont nuls: $I_1 = \vec{M}_{1P} \cdot \vec{R}_1 = 0$; $I_2 = \vec{M}_{2P} \cdot \vec{R}_2 = 0$

Il existe une infinité de solution équivalente à un torseur couple.

Le problème est résolu de la manière suivante :

a) on choisit un glisseur $[T_1]$ en se donnant :

- la résultante du glisseur : \vec{R}_1 ;

- l'axe (Δ_1) du glisseur, défini par un point P_1 tel que : $(\Delta_1) = (P_1, \vec{R}_1)$
- b) Le glisseur \boxed{q}_2 est défini alors par :
 - sa résultante $\vec{R}_2 = -\vec{R}_1$;
 - son axe (Δ_2) est déterminé facilement car il est parallèle à (Δ_1) ; il suffit alors de connaître un point P_2 de cet axe. Le point P_2 est déterminé par la relation suivante :

$$\vec{R}_1 \wedge \vec{P}_1 \vec{P}_2 = \vec{M}$$

Cette relation détermine la position du point P_2 de façon unique.

9. Torseur quelconque

9.1. Définition

Un torseur est quelconque, si et seulement si, son invariant scalaire n'est pas nul.

$$\boxed{q} \text{ est un torseur quelconque} \Leftrightarrow \vec{R} \bullet \vec{M}_P \neq 0$$

9.2. Décomposition d'un torseur quelconque

Un torseur \boxed{q} quelconque peut être décomposé d'une infinité de façon en la somme d'un torseur glisseur \boxed{q}_1 et d'un torseur couple \boxed{T}_2 .

Nous procédons de la manière suivante :

a) Choix du point P

On choisit un point P où les éléments de réduction du torseur \boxed{q} sont connus : $\boxed{q} = \begin{cases} \vec{R} \\ M_P \end{cases}$

Le choix du point P dépendra du problème à résoudre, on choisit le point le plus simple à déterminer. Une fois que le choix est fait, la décomposition du torseur quelconque est unique.

b) Construction du glisseur \boxed{q}_1

- la résultante égale à la résultante du torseur quelconque : $\vec{R}_1 = \vec{R}$, avec son axe qui passe par le point P déjà choisi ;
- Le moment est nul sur cet axe : $\vec{M}_{1P} = \vec{0}$

Le glisseur $[q]$ aura pour éléments de réduction : $[q] = \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R} \\ M_{1P} = 0 \end{cases}$

c) **Construction du torseur couple** $[T_2]$

- la résultante est nulle : $\vec{R}_2 = \vec{0}$,
- Le moment du torseur couple est égal au moment du torseur quelconque: $M_{2P} = M_P$

Le glisseur $[q]$ aura pour éléments de réduction : $[q] = \begin{cases} \vec{R}_2 = \vec{0} \\ M_{2P} = M_P \end{cases}$

On obtient ainsi $[q] = [T_1]_{\vec{t}}[T_2]$

En chaque point choisi initialement nous pouvons faire cette construction. Tous les glisseurs obtenus auront la même résultante. Ils diffèrent par leurs axes mais gardent la même direction car ils sont tous parallèles à l'axe portant la résultante du torseur quelconque.

10. Tableau récapitulatif sur les torseurs

Eléments de réduction au point A	Construction minimum	Type de torseur
$\vec{R} \neq \vec{0}$ $\vec{R} \cdot \vec{M}_A = 0$	Un vecteur lié unique	Torseur glisseur
$\vec{R} = \vec{0}$ $\vec{M}_A \neq \vec{0}$	Deux vecteurs liés formant un couple	Torseur couple
$\vec{R} \cdot \vec{M}_A \neq 0$	Un vecteur lié + 2 vecteurs liés formant un couple	Torseur quelconque
$\vec{R} = \vec{0}$ $\vec{M}_A = \vec{0}$	Vecteurs nuls	Torseur nul

EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice : 01

Dans un repère orthonormé $R(O, i, j, k)$, deux points A et B ont pour coordonnées :
 $A(2, 2, -3)$ et $B(5, 3, 2)$; Déterminer :

- 1) Le moment du vecteur glissant \overrightarrow{AB} par rapport au centre O du repère ;
- 2) Le moment du vecteur glissant \overrightarrow{AB} par rapport à la droite (Δ) passant par le point O et le point $C(2, 2, 1)$

Solution :

- 1) Le moment du vecteur \overrightarrow{AB} par rapport au point O est donné par :

$$\overrightarrow{M}_o = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -19 \\ -4 \end{pmatrix} = 13\vec{i} - 19\vec{j} - 4\vec{k};$$

- 2) Moment du vecteur \overrightarrow{AB} par rapport au point à la droite (Δ) définie par le point O et le vecteur unitaire \vec{u} tel que :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OC}}{|OC|} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3}(2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$$

$$\overrightarrow{M}_{\Delta} = (\overrightarrow{M}_o \cdot \vec{u})\vec{u} = \begin{pmatrix} 13 \\ -19 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(26 - 38 - 4)\vec{u} = -\frac{16}{3}\vec{u};$$

Exercice : 02

Soient les trois vecteurs $\vec{V}_1 = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{V}_2 = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{V}_3 = \vec{i} - \vec{j}$ définis dans un repère orthonormé $R(Oz)$, respectivement au points $A(0,1,2)$, $B(1,0,2)$, $C(1,2,0)$

- 1) Construire le torseur $[T]_o$ associé au système de vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$;
- 2) En déduire l'automoment ;
- 3) Calculer le pas du torseur ;
- 4) Déterminer l'axe central du torseur vectoriellement et analytiquement.

Solution :

- 1) Les éléments de réduction du torseur $[T]_o$ sont :

$$\text{La résultante : } \vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\text{Le moment au point } O : \vec{M}_o = \vec{OA} \wedge \vec{V}_1 + \vec{OB} \wedge \vec{V}_2 + \vec{OC} \wedge \vec{V}_3$$

$$\vec{M}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$2) \text{ L'automoment : } A = \vec{R} \cdot \vec{M}_o = (\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (-\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}) = -2 - 3 = -5$$

$$3) \text{ Pas du torseur : } p = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_o}{R^2} = \frac{-5}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = -\frac{5}{\sqrt{10}}$$

- 4) Équation vectorielle de l'axe central :

$$\text{Si l'axe } (\Delta) \text{ est un axe central alors : } \forall P \in (\Delta) \Rightarrow \vec{M}_P = \lambda \vec{R}$$

$$\text{Son équation vectorielle est donnée par : } \vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_o}{R^2} + \lambda \vec{R} \quad \text{avec } \lambda \in IR$$

$$\vec{OP} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \vec{i} + \left(-\frac{3}{10} + \lambda \right) \vec{j} + \left(\frac{1}{10} + 3\lambda \right) \vec{k}$$

Si $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors : $x = \frac{1}{2}$; $y = -\frac{3}{10} + \lambda$ et $z = \frac{1}{10} + 3\lambda$

$$\text{D'où : } z = \frac{1}{10} + 3\left(y + \frac{3}{10}\right) = \frac{1}{10} + 3y + \frac{9}{10} = 3y + 1$$

L'axe central est une droite dans un plan parallèle au plan (yOz) situé à $x = \frac{1}{2}$ et d'équation : $z = 3y + 1$

Exercice : 03

Soit le torseur $[T_1]_o$ défini par les trois vecteurs $\vec{V}_1 = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$; $\vec{V}_2 = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$,

$\vec{V}_3 = -\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}$ définis dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ respectivement au points

$A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$; et le torseur $[T_2]_o = \begin{cases} \vec{R}_2 \\ M_{20} \end{cases}$ où $\vec{R}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ et

$$\vec{M}_{20} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}.$$

- 1) Déterminer les éléments de réduction du torseur $[T_1]_o$, conclusion;
- 2) Déterminer le pas et l'axe central du torseur $[T_2]_o$;
- 3) Calculer la somme et le produit des deux torseurs ;
- 4) Calculer l'automoment du torseur somme .

Solution :

1) Eléments de réduction du torseur: $[T_1]_o = \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \\ M_{10} = \vec{OA} \wedge \vec{V}_1 + \vec{OB} \wedge \vec{V}_2 + \vec{OC} \wedge \vec{V}_3 \end{cases}$

$$\vec{R}_1 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = 0$$

$$\vec{M}_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{i} + 6\vec{j}$$

$$[P]_o = \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{0} \\ \vec{M}_{10} = \vec{i} + 6\vec{j} \end{cases}$$

2) Pas et axe central du torseur $[T_2]_o$

$$\text{Pas du torseur : } P_2 = \frac{\vec{R}_2 \cdot \vec{M}_2}{R_2^2} = \frac{(2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (-3\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k})}{4 + 1 + 9} = \frac{-3 + 2 - 21}{14} = -\frac{11}{7}$$

$$\text{Axe central du torseur : } \vec{OP} = \frac{\vec{R}_2 \wedge \vec{M}_2}{R_2^2} + \lambda \vec{R}_2$$

$$\vec{OP} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{14} + 2\lambda \\ \frac{5}{14} + \lambda \\ \frac{1}{2} + 3\lambda \end{pmatrix}$$

3) Somme et produit des deux torseurs

a) Somme des deux torseurs :

$$[P]_o + [T_2]_o = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{M}_o = \vec{M}_{10} + \vec{M}_{20} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k} \end{cases}$$

b) Produit des deux torseurs :

$$[P]_o \cdot [T_2]_o = \begin{cases} \vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2 = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_{20} + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_{10} = (2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (-3\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = -25 \end{cases}$$

4) Automoment du torseur somme :

$$F = \vec{R} \cdot \vec{M}_o = (2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (-2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}) = -17$$

Exercice : 04

On considère les points $A(0, 1, 1)$, $B(0, 1, -1)$, $C(1, 1, 1)$ et $D(0, 2, -1)$ dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer :

- 1) Les éléments de réduction du torseur associé aux vecteurs \vec{AC} et \vec{BD} ;
- 2) L'axe central du torseur vectoriellement et analytiquement.

Exercice : 05

Soit A un point de l'espace dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, avec $\vec{OA} = -\frac{21}{9}\vec{i} - \frac{4}{9}\vec{j} - \frac{12}{9}\vec{k}$ et un vecteur $\vec{V}_1 = -3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ dont l'axe passe par le point A .

Soit $[T_{2_0}]$ un torseur défini au point O par ses éléments de réduction R_2 et M_{20} tel que :

$$[T_{2_0}] = \begin{cases} \vec{R}_2 = (\alpha - 4)\vec{i} + \alpha\vec{j} + 3\alpha\vec{k} \\ \vec{M}_{20} = (2\alpha + 9)\vec{j} + (-3\alpha - \frac{2}{3})\vec{k} \end{cases}$$

- 1) Déterminer les éléments de réduction du torseur $[T_1]$ dont la résultante est le vecteur \vec{V}_1 ;
- 2) Pour quelle valeur de α les deux torseurs sont égaux ;
- 3) En déduire le pas et l'axe central du torseur $[T_1]$ pour cette valeur de α .
- 4) Calculer le produit des deux torseurs pour $\alpha = 2$

Solution :**1) Éléments de réduction du torseur $[T_1]$**

$$[T_1] = \begin{cases} \vec{V}_1 = -3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{M}_{10} = \vec{OA} \wedge \vec{V}_1 \end{cases}; \text{ d'où } \vec{M}_{10} = \vec{OA} \wedge \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} -21/9 \\ -4/9 \\ -12/9 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -11/3 \end{pmatrix}$$

$$[T_1] = \begin{cases} \vec{V}_1 = -3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{M}_{10} = 11\vec{j} - (11/3)\vec{k} \end{cases}$$

2) Les deux torseurs sont égaux si leurs éléments de réductions sont égaux.

$$[T_1] = [T_{2_0}] \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{V}_1 = \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{10} = \vec{M}_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (\alpha - 4)\vec{i} + \alpha\vec{j} + 3\alpha\vec{k} \\ 11\vec{j} - \frac{11}{3}\vec{k} = (2\alpha + 9)\vec{j} + (-3\alpha - \frac{2}{3})\vec{k} \end{cases}$$

Cette égalité est vérifiée pour : $\underline{\alpha = 1}$

4) Pas et axe central du torseur $\underline{[T_2]_0}$ pour $\alpha = 1$.

Le torseur s'écrit : $\underline{[T_2]_0} = \begin{cases} \vec{R}_2 = -3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{M}_{20} = 11\vec{j} - (11/3)\vec{k} \end{cases}$

$$\text{Pas du torseur : } P_2 = \frac{\vec{R}_2 \cdot \vec{M}_{20}}{R_2^2} = \frac{1}{19} \left(-3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \right) \cdot \left(11\vec{j} - \frac{11}{3}\vec{k} \right) = 0$$

Axe central du torseur : C'est l'ensemble des point P tel que : $\vec{OP} = \frac{\vec{R}_2 \wedge \vec{M}_{20}}{R_2^2} + \lambda \vec{R}_2$

$$\vec{OP} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -11/3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{110}{57} - 3\lambda \\ \frac{57}{19} \\ -\frac{11}{19} + \lambda \\ -\frac{33}{19} + 3\lambda \end{pmatrix}$$

si (x, y, z) sont les coordonnées du point P alors : nous aurons les trois équations scalaires:

$$x = -\frac{110}{57} - 3\lambda, \quad y = \frac{57}{19}, \quad z = -\frac{11}{19} + \lambda$$

$$\text{le point } P \text{ décrit la courbe : } 2x + 3y + z = -\frac{385}{57}$$

5) Produit des deux torseurs pour $\alpha = 2$

Pour $\alpha = 2$ le torseur $\underline{[T_2]_0}$ s'écrit : $\underline{[T_2]_0} = \begin{cases} \vec{R}_2 = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} \\ \vec{M}_{20} = 13\vec{j} - \frac{20}{3}\vec{k} \end{cases}$

$$\underline{[T_1]_0} \cdot \underline{T_{20}} = \begin{cases} \vec{V}_1 \\ \vec{M}_{10} \end{cases} \cdot \begin{cases} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{20} \end{cases} = \vec{V}_1 \cdot \vec{M}_{20} + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_{10} = -7$$

Exercice : 06

Soient deux torseurs $\left[\underline{q} \right]_A$ et $\left[\underline{T}_2 \right]_A$ définis au même point A par leurs éléments de réduction dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\left[\underline{q} \right]_A = \begin{cases} \vec{R}_1 = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ M_{1A} = 4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k} \end{cases} \quad \text{et} \quad \left[\underline{T}_2 \right]_A = \begin{cases} \vec{R}_2 = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} \\ M_{2A} = 4\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k} \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'axe central et le pas du torseur $\left[\underline{T}_1 \right]_A$;
- 2) Déterminer l'automoment du torseur $\left[\underline{T}_1 \right]_A$, montrer qu'il est indépendant du point A ;
- 3) Construire le torseur $\left[\underline{q} \right]_A = a\left[\underline{q} \right]_A + b\left[\underline{T}_2 \right]_A$ avec a et $b \in IR$;
- 4) Quelle relation doivent vérifier a et b pour que le torseur $\left[\underline{T} \right]_A$ soit un torseur couple ;
- 5) Montrer que le torseur couple est indépendant du point où on le mesure ;
- 6) Déterminer le système le plus simple de vecteurs glissants associés au torseur somme : $\left[\underline{q} \right]_A + \left[\underline{T}_2 \right]_A$

Solution :

- 1) Axe central et Pas du torseur $\left[\underline{T}_1 \right]_A$

Axe central : Il est défini par l'ensemble des points P tel que : $\vec{OP} = \frac{\vec{R}_1 \wedge \vec{M}_{1A}}{\vec{R}_1^2} + \lambda \vec{R}_1$

$$\vec{OP} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -12 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{17} - 3\lambda \\ -\frac{13}{17} + 2\lambda \\ -\frac{5}{17} + 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{Pas du torseur } \left[\underline{T}_1 \right]_A : P_1 = \frac{\vec{R}_1 \cdot \vec{M}_{1A}}{\vec{R}_1^2} = \frac{1}{17} (-3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}) = -\frac{28}{17}$$

$$2) \text{ Automoment du torseur } \left[\underline{T}_1 \right]_A : \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_{1A} = (-3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}) = -28$$

L'automoment est indépendant du point A. En effet, d'après la formule de transport nous

$$\text{pouvons écrire : } \vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R}_1 \Rightarrow \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_A = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_B + \vec{R}_1 \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{R}_1)$$

$\vec{R}_1 \cdot \vec{M}_A = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_B$, on voit bien qu'il est indépendant du point A.

$$3) [\![\vec{q}]\!]_A = a[\![\vec{q}]\!]_{1A} + b[\![\vec{q}]\!]_{2A} \Leftrightarrow [\![\vec{q}]\!]_A = \begin{cases} \vec{R} = a\vec{R}_1 + b\vec{R}_2 \\ \vec{M}_{1A} = a\vec{M}_{1A} + b\vec{M}_{2A} \end{cases}$$

$$[\![\vec{q}]\!]_A = \begin{cases} \vec{R} = -3(a-b)\vec{i} + 2(a-b)\vec{j} + 2(a-b)\vec{k} \\ \vec{M}_{1A} = 4(a+b)\vec{i} - (a-b)\vec{j} - 7(a-b)\vec{k} \end{cases}$$

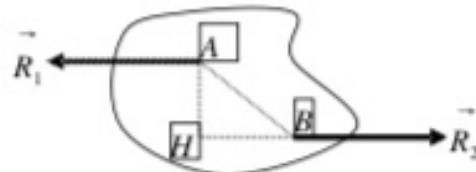
4) Condition pour que $[\![\vec{q}]\!]_A$ soit un torseur couple :

il faut que la résultante soit nulle : $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow a = b$

Le moment dans ce cas sera égal à : $\vec{M}_{1A} = 4(a+b)\vec{i} = 8a\vec{i}$

5) Le moment d'un torseur couple où les résultantes \vec{R}_1 , \vec{R}_2 ont le même module mais de sens opposées et appliquées aux points quelconque A et B s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= \vec{OA} \wedge \vec{R}_1 + \vec{OB} \wedge \vec{R}_2 = \vec{OA} \wedge \vec{R}_1 + \vec{OB} \wedge (-\vec{R}_1) \\ &= \vec{BA} \wedge \vec{R}_1 = (\vec{BH} + \vec{HA}) \wedge \vec{R}_1 \\ &= \vec{HA} \wedge \vec{R}_1 = -\vec{AH} \wedge \vec{R}_1 = \vec{AH} \wedge \vec{R}_2 \end{aligned}$$



Le moment d'un couple est indépendant de la distance entre les points A et B, il dépend uniquement de la distance qui sépare les deux droites supports des résultantes. Cette distance est appelée bras de levier.

- 6) Système simple de vecteurs glissants associés au torseur somme : $[T_1]_A [T_2]_A$

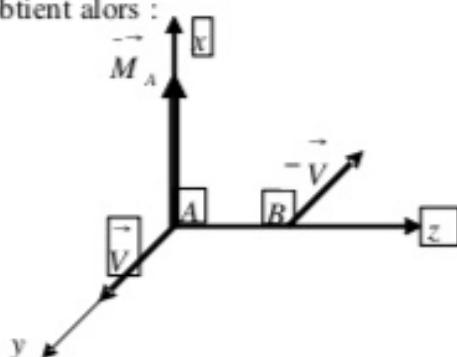
Le torseur somme $[T]_A$ est donné par : $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_A = 8\vec{i} \end{cases}$

La résultante peut être décomposées en deux vecteurs quelconque de même module et de sens opposé dont l'un des vecteurs est placé au point A, on obtient alors :

$$\vec{M}_A = \vec{AA} \wedge \vec{V} + \vec{AB} \wedge -\vec{V} = \vec{AB} \wedge -\vec{V} = 5\vec{i}$$

système de deux vecteurs glissants : (A, \vec{V})

et $(B, -\vec{V})$, tel que : $\vec{V} \cdot \vec{M}_A = 0$



Exercice : 07

Soient deux torseurs $[T]_0$ et $[T_2]_0$ définis au même point O dans un repère orthonormé

$$B(O; i, j, k)$$

$$[T]_0 = \begin{cases} \vec{R}_1 = 2\sin\alpha \vec{i} + 2\cos\alpha \vec{j} \\ \vec{M}_{10} = a\cos\alpha \vec{i} - a\sin\alpha \vec{j} \end{cases} \quad \text{et} \quad [T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R}_2 = 2\sin\alpha \vec{i} - 2\cos\alpha \vec{j} \\ \vec{M}_{20} = -a\cos\alpha \vec{i} - a\sin\alpha \vec{j} \end{cases}$$

- 1) Déterminer les pas des deux torseurs ;
- 2) Quelle est la nature des deux torseurs ;
- 3) Déterminer l'axe central du torseur $[T_2]_0$;
- 4) Déterminer l'invariant scalaire du torseur $[T_3]_0$ défini par : $[T_3]_0 = k_1 [T_1]_0 + k_2 [T_2]_0$ où k_1 et $k_2 \in IR$;
- 5) En déduire l'équation scalaire de la surface engendrée par l'axe central quand k_1 et k_2 varient ;
- 6) Calculer le produit des deux torseurs $[T_1]_0$ et $[T_2]_0$;

Exercice : 08

On considère deux points $A(0, 1, 0)$, $B(0, -1, 0)$ et deux vecteurs $\vec{AM} = -m\alpha \vec{i} + \beta \vec{k}$
 $\vec{AP} = m\alpha \vec{i} + \beta \vec{k}$ dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) Déterminer les équations de l'axe central du torseur défini par les vecteurs \vec{AM} et \vec{AP}
- 2) Déduire l'équation de la surface balayée par cette axe lorsque α et β varient en gardant m constant.

Exercice : 09

Soit $[T]$ un torseur et A un point quelconque de l'espace.

Déterminer l'ensemble des points P tels que le moment \vec{M}_P du torseur $[T]$ au point P soit parallèle au moment \vec{M}_A du torseur $[T]$ au point A .

Exercice : 10

On applique à un solide de forme quelconque deux forces tel que : $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = 200N$ aux points A et B du solide.

- 1) Quelle est la nature du torseur lié aux deux forces ;
- 2) Montrer que le moment de ce torseur est indépendant des points A et B .

UMBB Boumerdès, Faculté des sciences, Département de physique
Cours exercices, Mécanique Rationnelle : TCT et LMD-ST sem :3

A.KADI

CHAPITRE III

STATIQUE DES SOLIDES

STATIQUE

La statique est la partie de la mécanique qui étudie l'équilibre des systèmes matériels soumis à un ensemble de forces. Ces systèmes peuvent se réduire à un point matériel, un ensemble de points matériels, un solide ou à un ensemble de solides. Dans ce chapitre nous analyserons les actions mécaniques exercées sur ces systèmes à travers l'étude de l'équilibre de celui-ci.

Un système matériel est en équilibre statique par rapport à un repère donné, si au cours du temps, chaque point de l'ensemble garde une position fixe par rapport au repère.

1. Les systèmes de forces dans l'espace

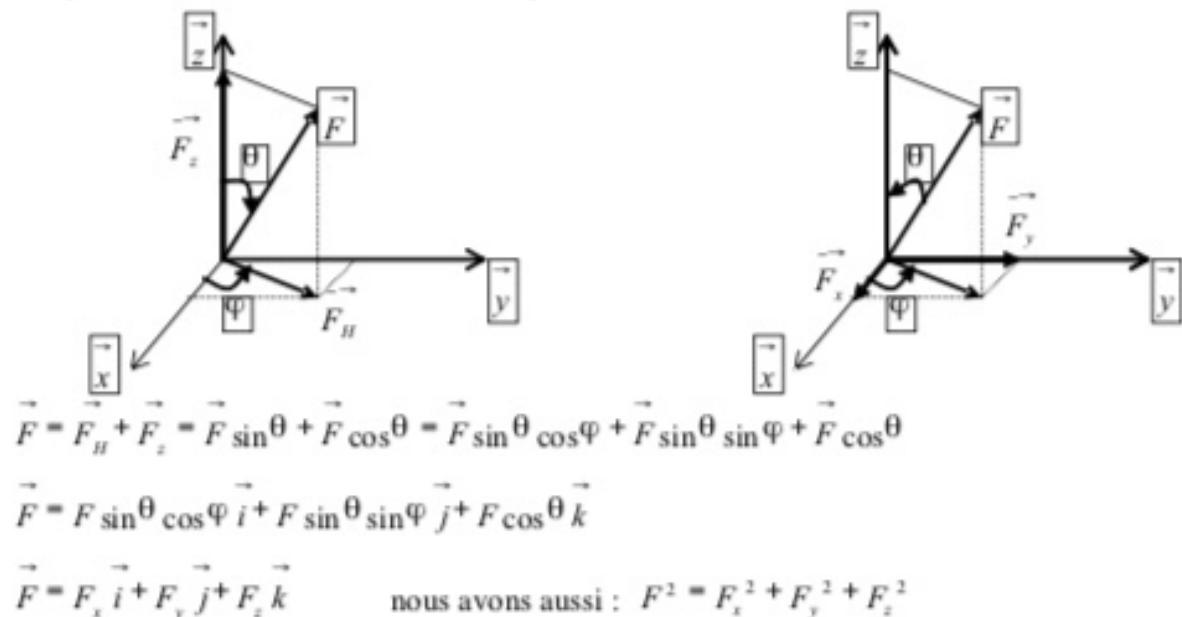
Les systèmes de forces sont classés en trois catégories :

Concourants : les lignes d'action de toutes les forces du système passent par un même point. C'est ce que l'on appelle forces concourantes en un point.

- **Parallèles** : les lignes d'actions des forces sont toutes parallèles, on dit aussi elles s'interceptent à l'infini
- **Non concourantes et non parallèles** : les forces ne sont pas toutes concourantes et pas toutes parallèles.

1.1. Composantes d'une force

Soit une force \vec{F} appliquée à l'origine O d'un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les composantes de cette force sont définies par :



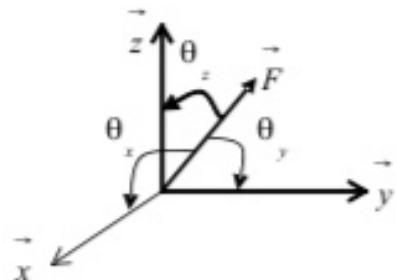
1.2. Cosinus directeurs

Les projections de la force \vec{F} sur les trois axes ox, oy, oz

donnent respectivement les angles :

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ nous aurons alors :

$$F_x = F \cos \theta_x, F_y = F \cos \theta_y, F_z = F \cos \theta_z$$



Si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont les vecteurs unitaires du repère nous aurons : $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$

$$\vec{F} = F(\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k}) = F\vec{\lambda} \quad \text{avec} \quad \vec{\lambda} = \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k}$$

Le vecteur $\vec{\lambda}$ a la même direction que la force et pour module 1. \vec{F}

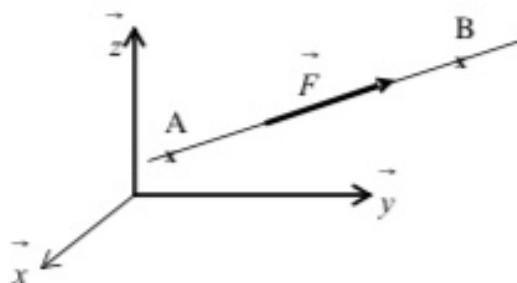
$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

2. Force définie par son module et deux points sur sa ligne d'action

Soient deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ appartenant à la droite (Δ) support de la force \vec{F} . Le vecteur \vec{AB} s'écritra : $\vec{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k}$

$$\vec{AB} = d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}$$

$$AB = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = d$$



Soit \vec{u} le vecteur unitaire le long de la ligne d'action de la force. Il est donné par :

$$\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}}{\sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}} = \frac{1}{d}(d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k})$$

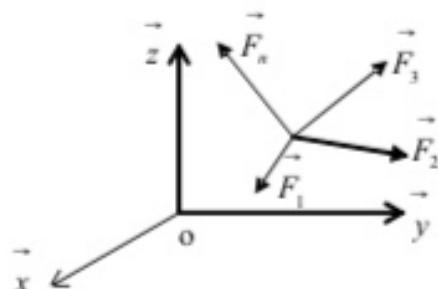
Comme la force est donnée par :

$$\vec{F} = F \vec{u} = \frac{F}{d}(d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}),$$

Composantes suivant les trois axes du repère : $F_x = F \frac{d_x}{d}, F_y = F \frac{d_y}{d}, F_z = F \frac{d_z}{d}$.

3. Equilibre d'un point matériel

On appelle, point matériel, une particule suffisamment petite pour pouvoir négliger ses dimensions et repérer sa position par ses coordonnées.



Un point matériel est en équilibre statique lorsque la somme de toutes les forces extérieures auxquelles il est soumis, est nulle.

Ces forces peuvent être coplanaires ou dans l'espace.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

Une particule soumise à deux forces est en équilibre statique si les deux forces ont le même module, la même direction mais de sens opposé tel que leur résultante, soit nulle.

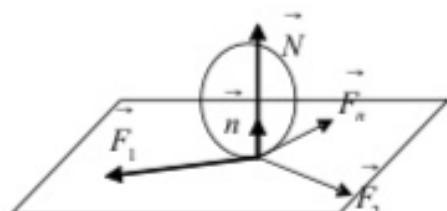
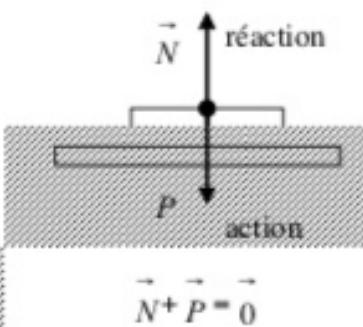
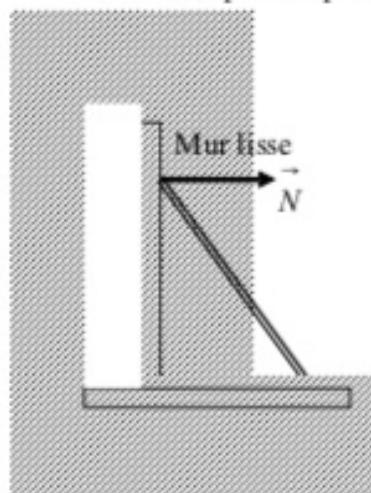
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \quad ; \quad F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$$



4. Liaisons des solides

4.1. Liaisons sans frottements

Dans le cas d'une liaison sans frottement entre un solide et un plan, la réaction est toujours normale au plan au point de contact quelques soit le nombre de forces extérieures appliquées



$$\vec{N} + \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

Dans le cas d'un contact ponctuel sans frottement, la condition d'équilibre est réalisée, si la somme de toutes les forces extérieures appliquées en ce point est égale à la réaction normale en ce même point.

$$\vec{N} + \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

4.2. Liaisons entre solides avec frottements

On pose une pièce de bois en forme de parallélépipède sur un plan horizontal. Cette pièce de bois est en équilibre statique. La réaction du plan horizontal est égale et opposée au poids de la pièce.

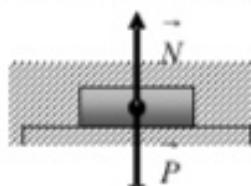


Figure : b.1

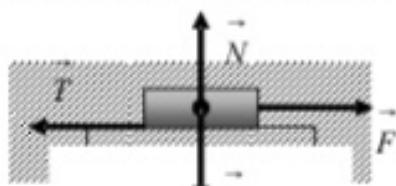


Figure : b.2

Appliquons graduellement en un point de cette pièce une force horizontale \vec{F} (figure : b.1)

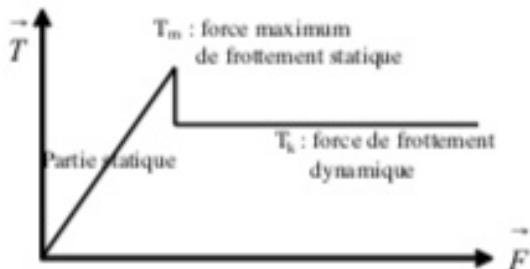
La pièce ne bougera pas tant que cette force est inférieure à une certaine valeur limite, il

existe alors une contre force \vec{T} qui équilibre et s'oppose à cette force \vec{F} . \vec{T} est appelée force de frottement statique.

Elle résulte d'un grand nombre de paramètres liés aux états de surfaces, à la nature des matériaux et aux forces de contact entre la pièce et la surface considérée.

Cette force de frottement statique obéit à la variation représentée sur la figure suivante.

Si μ_0 est le coefficient de frottement statique (*dépend uniquement de la nature des surfaces de contact*) nous pouvons écrire :

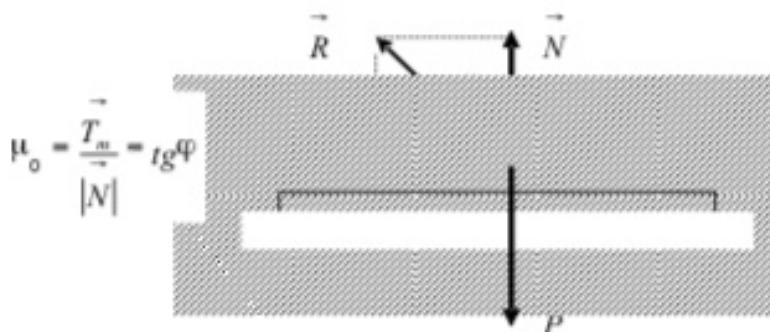


Pour que l'équilibre statique soit réalisable il faut que : $|\vec{T}| \leq \mu_0 |\vec{N}|$

A l'équilibre limite on aura : $|\vec{T}| = \mu_0 |\vec{N}|$

Dans le cas d'une surface avec frottements (figure ci-dessous), la condition d'équilibre

s'écrit : $\vec{N} + \vec{T} + \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ (la somme des actions et des réactions, est nulle)



La force de frottement \vec{T} est dirigée dans le sens contraire du mouvement et l'angle φ est appelé angle de frottement statique.

Si $\vec{F} \neq |\vec{T}_n|$ le solide se met en mouvement de glissement sur la surface.

$$\vec{T} = k |\vec{N}| \text{ avec } k < \mu_0 \text{ et } \operatorname{tg} \varphi = \frac{|\vec{T}|}{|\vec{N}|} = k$$

Ce coefficient k indépendant du temps est appelé coefficient de frottement dynamique, il est aussi indépendant de la vitesse.

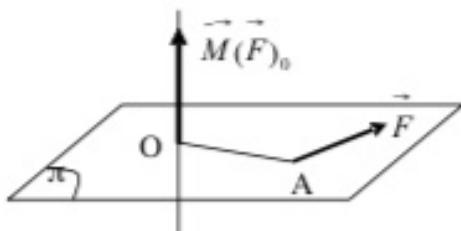
Ce tableau reprend quelques coefficients de frottement statiques et dynamiques des surfaces de matériaux en contact :

	Coefficient de frottement statique μ_0	Coefficient de frottement dynamique k
Acier / Acier	Mouillé 0.1	0.05 0.4
	A sec 0.6	
Bois / Bois	Mouillé 0.5	0.3
Métal / glace	0.03	0.01
Téflon / Acier	0.04	0.04
Cuivre / Acier	A Sec 0.5	0.4

5. Système de forces

5.1 Moment d'une force par rapport à un point

Le moment $\vec{M}(F)_0$ par rapport à un point O, d'une force \vec{F} appliquée au point A est égale au produit vectoriel : $\vec{M}(F)_0 = \vec{OA} \wedge \vec{F}$. Le trièdre formé par les vecteurs $(\vec{M}(F)_0, \vec{OA}, \vec{F})$ est direct.



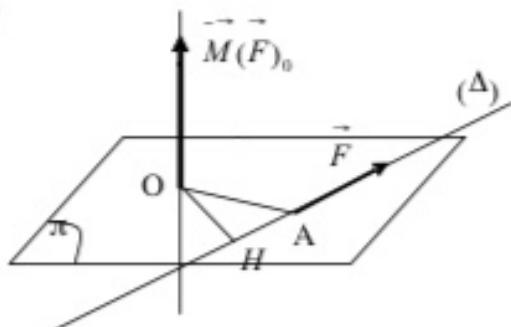
Remarque :

Le moment d'une force, glissant le long d'un axe (Δ) , par rapport à un point O est indépendant du point A où elle s'applique.

$$\vec{M}_o = \vec{OA} \wedge \vec{F} = (\vec{OH} + \vec{HA}) \wedge \vec{F} \text{ avec } \vec{OH} \perp (\Delta)$$

$$\vec{M}_o = \vec{OH} \wedge \vec{F} + \vec{HA} \wedge \vec{F} \text{ comme } \vec{HA} \parallel \vec{F}$$

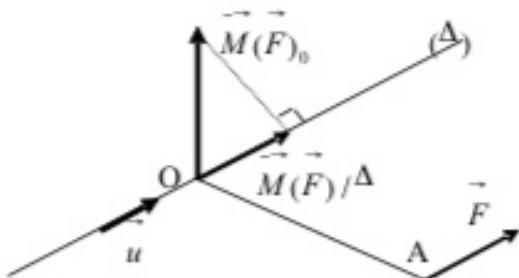
$$\text{Alors } \vec{HA} \wedge \vec{F} = \vec{0} \text{ d'où } \vec{M}_o = \vec{OH} \wedge \vec{F}$$



5.2 Moment d'une force par rapport à un axe

Soit O un point sur l'axe (Δ) et \vec{u} vecteur unitaire porté par cet axe.

On détermine le moment par rapport au point O, noté : $\vec{M}(F)/_o$, sa projection sur l'axe (Δ) est donnée par : $\vec{M}(F)/_\Delta = \left(\vec{M}(F)/_o \cdot \vec{u} \right) \vec{u}$



5.3 Théorème de VARIGNON

Le moment d'un système de forces concourantes en un point A par rapport à un point O est égal au moment de la résultante des forces par rapport au point O.

Dans les deux cas de figure nous montrerons que le moment résultant est égal au moment de la résultante des forces du système.

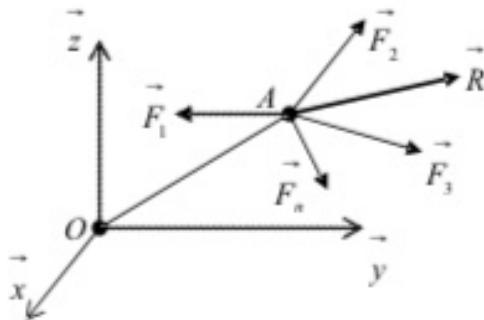


figure :a

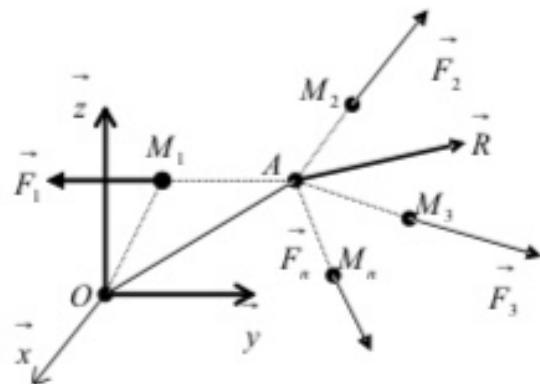


figure :b

Figure a : Nous avons $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i(A)$ et le moment au point O est donné par :

$$\vec{M}(R)_{/O} = \sum_i \vec{M}_i(F_i) = (\vec{OA} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OA} \wedge \vec{F}_2 + \dots + \vec{OA} \wedge \vec{F}_n)$$

$$\vec{M}(R)_{/O} = (\vec{OA} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n))$$

$$\vec{M}(R)_{/O} = \vec{OA} \wedge \sum_i \vec{F}_i = \vec{OA} \wedge \vec{R}$$

Figure b : Nous avons $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i(M_i)$

$$\vec{OM}_1 = \vec{OA} + \vec{AM}_1, \quad \vec{OM}_2 = \vec{OA} + \vec{AM}_2, \dots, \quad \vec{OM}_n = \vec{OA} + \vec{AM}_n$$

$$\sum_i \vec{M}_i(F_i)_{/O} = \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_2 + \dots + \vec{OM}_n \wedge \vec{F}_n$$

$$\sum_i \vec{M}_i(F_i)_{/O} = (\vec{OA} + \vec{AM}_1) \wedge \vec{F}_1 + (\vec{OA} + \vec{AM}_2) \wedge \vec{F}_2 + \dots + (\vec{OA} + \vec{AM}_n) \wedge \vec{F}_n$$

Or $\vec{AM}_i \parallel \vec{F}_i \Rightarrow \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{0}$; on obtient finalement :

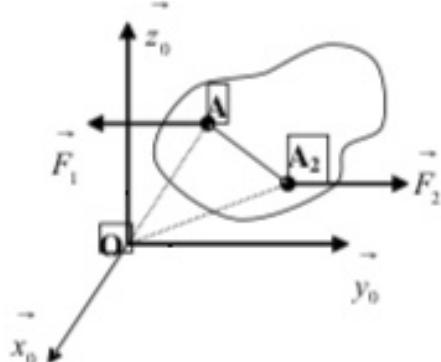
$$\sum_i \vec{M}_i(F_i)_{/O} = \vec{OA} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \vec{OA} \wedge \vec{R} = \vec{M}(R)_{/O}$$

5.4. Moment d'un couple de forces

Un couple de force est défini par deux forces de même module, de sens opposée et portées par deux droites parallèles tel que : $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$; $F_1 = F_2$

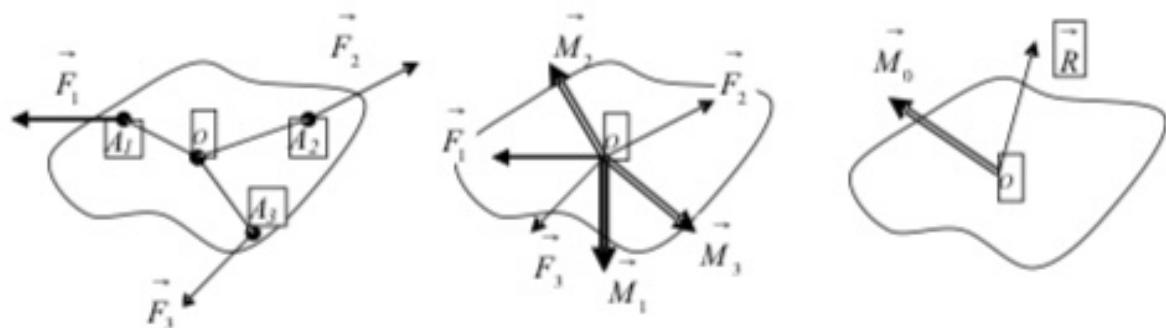
$$\begin{aligned}\sum_i \vec{M}_i(F_i)_{/O} &= \vec{M}_1(\vec{F}_1)_{/O} + \vec{M}_2(\vec{F}_2)_{/O} \\ &= \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{OA}_2 \wedge \vec{F}_2 = (-\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2) \wedge \vec{F}_2\end{aligned}$$

$$\sum_i \vec{M}_i(F_i)_{/O} = \vec{AA}_2 \wedge \vec{F}_2$$



La somme des forces, est nulle mais le moment n'est pas nul. Un couple de force produit uniquement un mouvement de rotation. Le moment d'un couple est indépendant du point où on le mesure, il dépend uniquement de la distance qui sépare les deux droites supports des deux forces.

- * Un couple ne peut jamais être remplacé par une force unique ;
- * Un système force couple tel que $\vec{M} \perp \vec{F}$ peut toujours se réduire en une résultante unique. On choisit la résultante des forces au point O où s'applique le moment de telle sorte que son propre moment soit nul et le moment en ce point serait égal à la somme des moments de toutes les forces du système.



6. Statique du solide

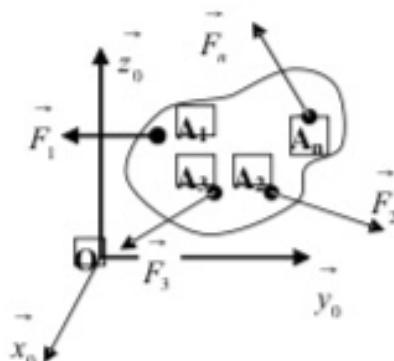
Tous les solides que nous étudierons dans ce chapitre sont considérés indéformables : la distance entre deux points du même solide reste constante quels que soit les systèmes de forces extérieures appliqués.

On considère un solide (S) quelconque soumis à des forces : $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$ appliquées aux points : $(M_1, M_2, M_3, \dots, M_n)$

6.1. Equilibre du solide

Pour que le solide soit en équilibre statique il faut et il suffit que :

- La résultante de toutes les forces extérieures appliquées au solide, soit nulle ;
- Le moment résultant de toutes ces forces en un point O , soit nul.



- $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$
- $\vec{M}_{/O} = \sum_i \vec{M}(\vec{F}_i)_{/O} = \vec{0}$

Un solide (S), soumis à des actions mécaniques extérieures est en équilibre statique si et seulement si le torseur représentant l'ensemble de ces actions est un torseur nul.

Ces deux équations vectorielles se traduisent par les six équations scalaires suivantes :

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{M}_{/O} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

Le système est complètement déterminé si le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations indépendantes.

6.2. Equilibre d'un solide dans un plan

Dans le cas d'un solide soumis à des forces coplanaires, le système précédent se réduit à trois équations scalaires.

Soit (xoy) , le plan contenant les forces appliquées au solide, nous avons alors :

$$z = 0 \text{ et } F_z = 0 \Leftrightarrow M_x = M_y = 0 \text{ et } M_z = M_{IO}$$

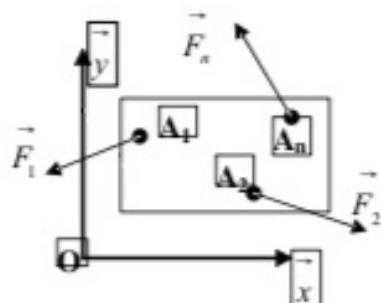
Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$R_x = \sum_i F_{ix} = 0 ; \quad R_y = \sum_i F_{iy} = 0 ; \quad M_{IO} = \sum_i M_{iz} = 0$$

$$\vec{F}_i = \begin{cases} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \end{cases} ; \quad \vec{OA}_i = \begin{cases} x_i \\ y_i \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{M}_{IO} = \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i = \begin{cases} x_i \\ y_i \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ x_i F_{iy} - y_i F_{ix} = M_{iz} \end{cases}$$

$$M_{IO} = \sum_i M_{iz} = 0$$

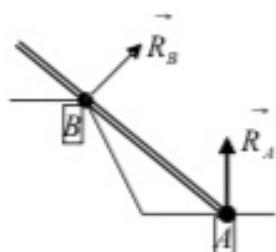
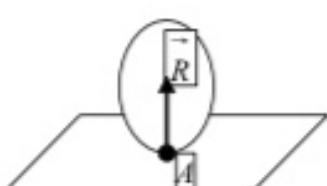
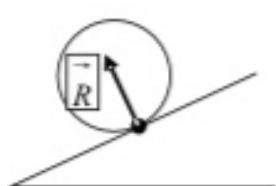


6.3. Réactions aux appuis et aux liaisons à deux dimensions

6.3.1. Appui simple d'un solide sur une surface parfaitement lisse

Les contacts entre les solides sont ponctuels.

Soit (S) un solide reposant sur une surface (P) , on dit que le point A du solide est un point d'appui s'il reste continuellement en contact de la surface (P) . Si le plan (P) est parfaitement lisse alors la force de liaison (la réaction \vec{R}) au point de contact est normale à ce plan.

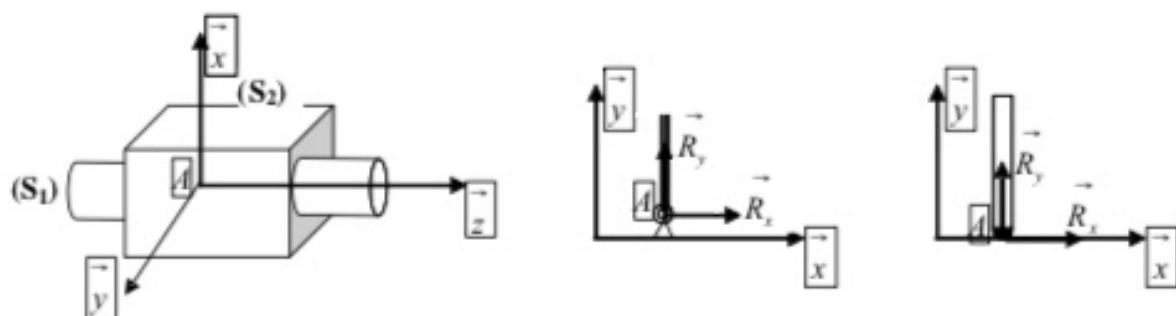


6.3.2. Articulation d'un solide

Un point A d'un solide est une articulation lorsqu'il reste en permanence en un point fixe de l'espace.

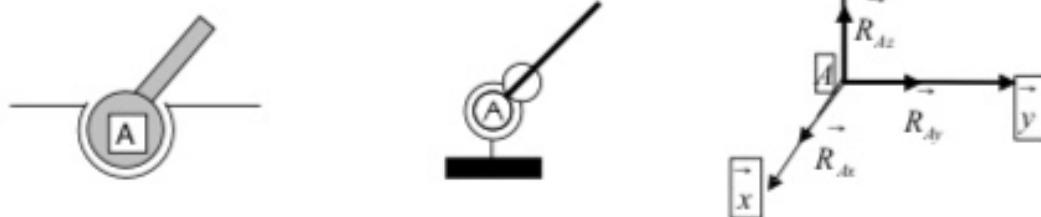
a) Liaison verrou (Articulation cylindrique)

Les solides sont en contact entre eux suivant une surface cylindrique. Le solide (S_1) a deux degrés de liberté par rapport au solide (S_2) : Une translation suivant l'axe Az , et une rotation autour du même axe.



$$\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay} \quad \text{avec} \quad \vec{R}_{Az} = \vec{0} \quad \text{La réaction suivant l'axe de l'articulation (Az) est nulle.}$$

b) Liaison rotule (Articulation sphérique)



Liaison sphérique : 3 degrés de liberté (rotations)

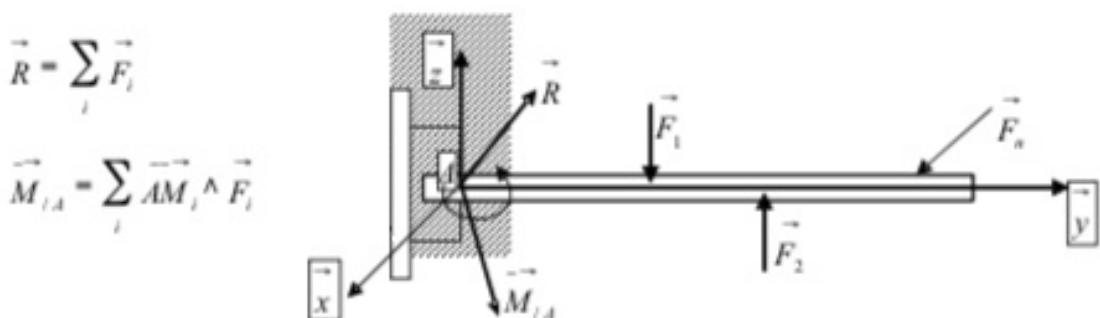
La réaction au point A de l'articulation sphérique a trois composantes : $\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay} + \vec{R}_{Az}$

c) Encastrement d'un solide

On dit qu'un solide est encastré lorsqu'il ne peut plus changer de position quels que soit les forces extérieures appliquées. Cette liaison est représentée par deux grandeurs :

\vec{R} : la résultante des forces extérieures appliquées au solide et actives au point A

\vec{M}_A : le moment résultant des forces extérieures appliquées au solide par rapport au point A

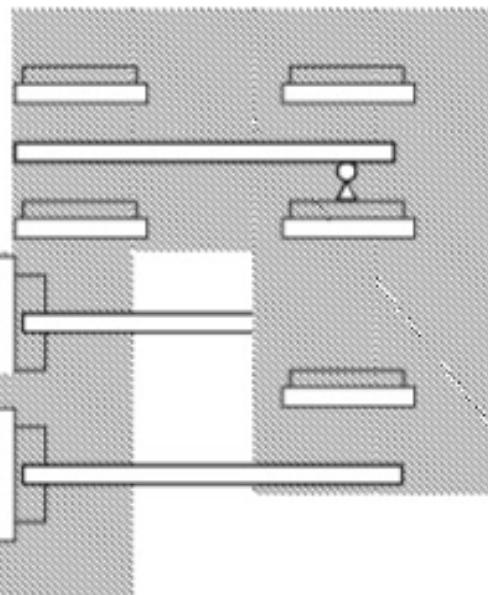


d) Combinaisons de liaisons

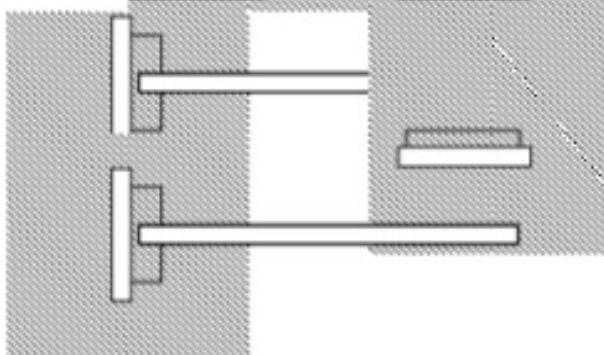
Avec ces différents types de liaisons (*Appui simple, articulation cylindrique, articulation sphérique et encastrement*) nous pouvons réaliser des combinaisons qui permettent de réaliser montages mécaniques statiquement déterminés.

Exemples:

(1) Appui simple deux fois



(2) Appui simple et une articulation



(4) Encastrement et appui simple

(3) Encastrement seul

Ces combinaisons sont dites isostatiques (statiquement déterminées) si le nombre d'inconnues est inférieures au nombre d'équations indépendantes qu'on peut établir. Certaines combinaisons ne sont pas autorisées et ne peuvent trouver la solution par la statique seule.

Exemples : 2 appuis articulés, une articulation et un encastrement, encastrement deux fois.

Certaines combinaisons sont hyperstatiques, elles ne peuvent trouver solution par la statique.

Exemple : appui simple trois fois

Nous représentons dans le tableau ci dessous les différents types d'appuis et de liaisons et les composantes des réactions associées à celles-ci.

Type de liaisons	Composantes de la réaction
Appui simple rouleau ou Surface lisse sans frottement :	\vec{R} : la réaction est normale au point d'appui.
Appui simple avec frottements	\vec{R}_x, \vec{R}_y : deux composantes dans le plan de contact
Articulation cylindrique d'axe Oz	\vec{R}_x, \vec{R}_y avec $\vec{R}_z = \vec{0}$; La composante suivant l'axe de l'articulation est nulle
Articulation sphérique	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$: trois composantes
Encastrement	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ et $\vec{M}_{/A}$ trois composantes plus le moment au point d'encastrement.

EXERCICES SOLUTIONS

Exercice 01 :

Déterminer les tensions des câbles dans les figures suivantes :

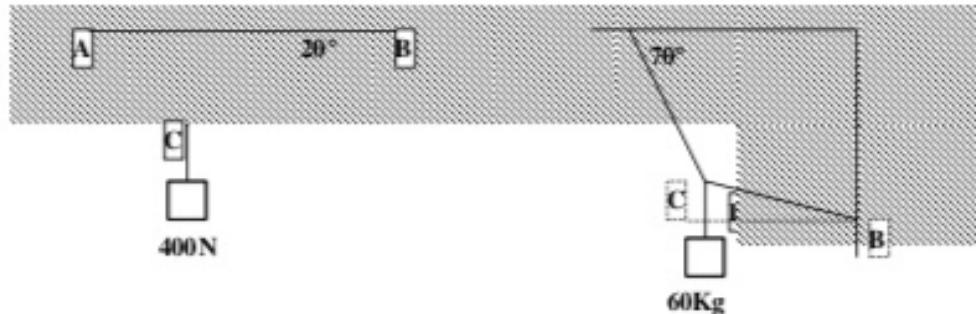


figure: 1

figure : 2

Solution :

Figure 1 :

Au point C nous avons :

$$\vec{T}_{CA} + \vec{T}_{CB} + \vec{P} = 0$$

La projection sur les axes donne :

$$-T_{CA} \cos 40^\circ + T_{CB} \cos 20^\circ = 0$$

$$T_{CA} \sin 40^\circ + T_{CB} \sin 20^\circ - P = 0$$

$$\text{d'où : } T_{CA} = 354 \text{ N} \quad ; \quad T_{CB} = 288,5 \text{ N}$$

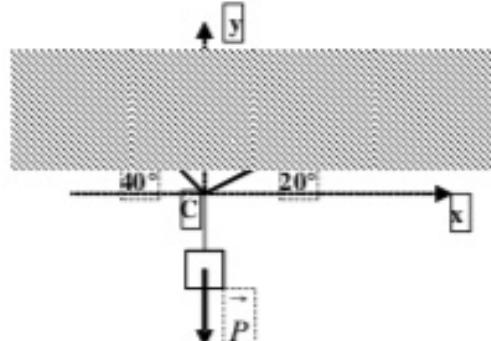


Figure 2 :

Au point C nous avons :

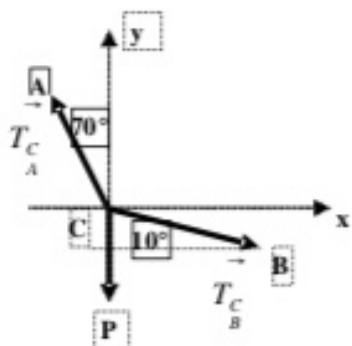
$$\vec{T}_{CA} + \vec{T}_{CB} + \vec{P} = 0$$

La projection sur les axes donne :

$$-T_{CA} \sin 70^\circ + T_{CB} \cos 10^\circ = 0$$

$$T_{CA} \cos 70^\circ - T_{CB} \sin 10^\circ - P = 0$$

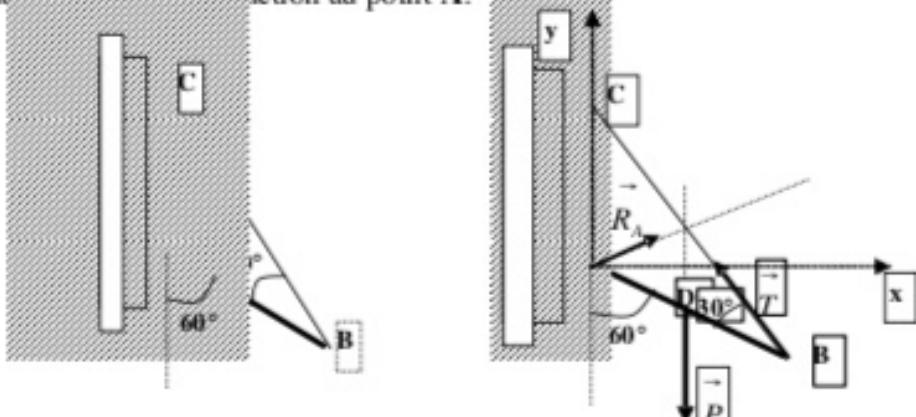
$$\text{d'où : } T_{CA} = 3390 \text{ N} \quad ; \quad T_{CB} = 3234 \text{ N}$$



Exercice 02 :

Une barre homogène pesant **80 N** est liée par une articulation cylindrique en son extrémité **A** à un mur. Elle est retenue sous un angle de **60°** avec la verticale par un câble inextensible de masse négligeable à l'autre extrémité **B**. Le câble fait un angle de **30°** avec la barre.

Déterminer la tension dans le câble et la réaction au point **A**.

**Solution :**

Le système est en équilibre statique dans le plan (*xoy*), nous avons alors :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_A + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\sum_i \vec{M}_{AA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} \wedge \vec{T} + \vec{AD} \wedge \vec{P} = \vec{0} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \begin{cases} L \cos 30^\circ \\ L \sin 30^\circ \end{cases} ; \quad \vec{AD} = \begin{cases} (L/2) \cos 30^\circ \\ (L/2) \sin 30^\circ \end{cases} ; \quad \vec{P} = \begin{cases} 0 \\ -P \end{cases} ; \quad \vec{T} = \begin{cases} -T \cos 60^\circ \\ T \sin 60^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{L'équation (1) projetée sur les axes donne : } R_{Ax} - T \cos 60^\circ = 0 \quad (3)$$

$$R_{Ay} + T \sin 60^\circ - P = 0 \quad (4)$$

$$\text{L'équation (2) s'écrit : } \begin{pmatrix} L \cos 30^\circ \\ L \sin 30^\circ \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T \cos 60^\circ \\ T \sin 60^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (L/2) \cos 30^\circ \\ (L/2) \sin 30^\circ \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$LT \cos 30^\circ s \sin 60^\circ + LT \cos 60^\circ s \sin 30^\circ - \frac{PL}{2} \cos 30^\circ = 0 \quad (5)$$

$$(5) \Rightarrow T = \frac{P}{2} \cos 30^\circ = 34,64N$$

$$(3) \Rightarrow R_{Ax} = T \cos 60^\circ = 17,32N$$

$$(4) \Rightarrow R_{Ay} = P - T \sin 60^\circ = 30N$$

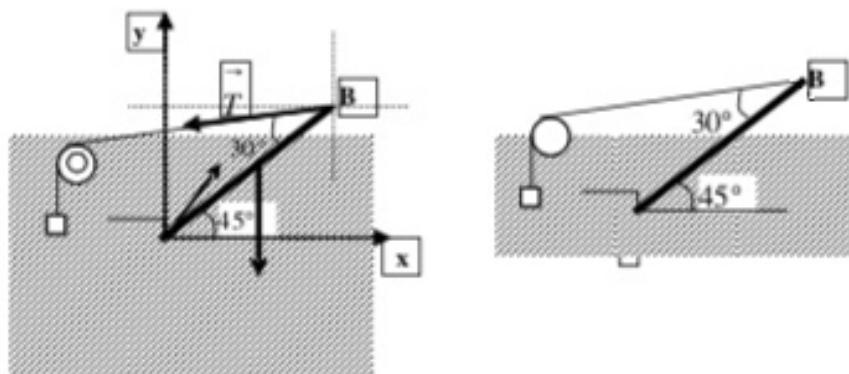
d'où $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 34,64N$ et l'angle que fait la réaction avec l'axe **ox** est donné par :

$$\cos \theta = \frac{R_{Ax}}{R_A} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^\circ$$

Exercice 03 :

On maintient une poutre en équilibre statique à l'aide d'une charge **P** suspendue à un câble inextensible de masse négligeable, passant par une poulie comme indiqué sur la figure. La poutre a une longueur de **8m** et une masse de **50 Kg** et fait un angle de **45°** avec l'horizontale et **30°** avec le câble.

Déterminer la tension dans le câble ainsi que la grandeur de la réaction en **A** ainsi que sa direction par rapport à l'horizontale.



Solution :

Toutes les forces agissant sur la poutre sont dans le plan (*xoy*). Le système est en équilibre statique d'où

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\sum_i \vec{M}_{(A)} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{AB} \wedge \vec{T} + \vec{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \quad (2)$$

Nous avons $T = P$, et $\vec{AB} \begin{cases} 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{cases}$; $\vec{AG} \begin{cases} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{cases}$; $\vec{P} \begin{cases} 0 \\ -P \end{cases}$; $\vec{T} \begin{cases} -T \cos 15^\circ \\ -T \sin 15^\circ \end{cases}$; $\vec{R_A} \begin{cases} R_{Ax} \\ R_{Ay} \end{cases}$

$$\text{L'équation (1) projetée sur les axes donne : } R_{Ax} - T \cos 15^\circ = 0 \quad (3)$$

$$R_{Ay} - T \sin 15^\circ - P = 0 \quad (4)$$

$$\text{L'équation (2) s'écrit : } \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T \cos 15^\circ \\ -T \sin 15^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-4T\sqrt{2}\sin 15^\circ + 4T\sqrt{2}\cos 15^\circ - 2P\sqrt{2} = 0 \quad (5)$$

$$T = \frac{2P\sqrt{2}}{4\sqrt{2}(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)} \Rightarrow T = 353,55N$$

$$(3) \Rightarrow R_{Ax} = 341,50N \text{ et } (4) \Rightarrow R_{Ay} = 591,50N$$

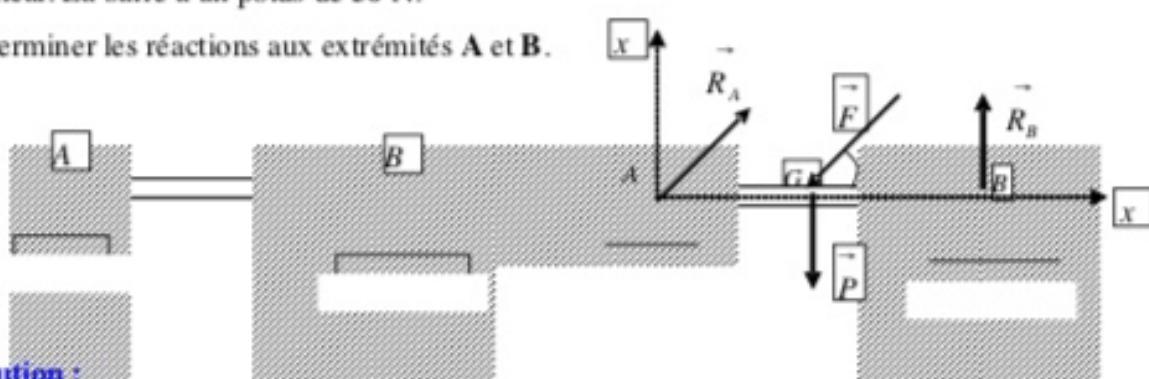
d'où $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 683N$ et l'angle que fait la réaction avec l'axe **ox** est donné par :

$$\cos \theta = \frac{R_{Ax}}{R_A} = 0,577 \Rightarrow \theta = 54,76^\circ$$

Exercice 04 :

La barre **AB=L** est liée en **A** par une articulation cylindrique et à son extrémité **B**, elle repose sur un appui rouleau. Une force de **200 N** agit en son milieu sous un angle de **45°** dans le plan vertical. La barre a un poids de **50 N**.

Déterminer les réactions aux extrémités **A** et **B**.



Solution :

Toutes les forces agissant sur la poutre sont situées dans le plan (*xoy*). Le système est en équilibre statique, nous avons alors :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\sum_i \vec{M}_{i/A} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AG} \wedge \vec{F} + \vec{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \quad (2)$$

La projection de l'équation (1) sur les axes donne :

$$R_{Ay} - F \cos 45^\circ = 0 \quad (3)$$

$$R_{Ax} + R_B - F \sin 45^\circ - P = 0 \quad (4)$$

En développant l'équation (2) on aboutit à :

$$\begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F \cos 45^\circ \\ -F \sin 45^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = 0$$

$$LR_B - \frac{L}{2}F \cos 45^\circ - \frac{L}{2}P = 0 \Leftrightarrow R_B - \frac{F\sqrt{2}}{4} - \frac{P}{2} = 0 \quad (5)$$

$$(5) \Rightarrow R_B = 95,71 \text{ N}$$

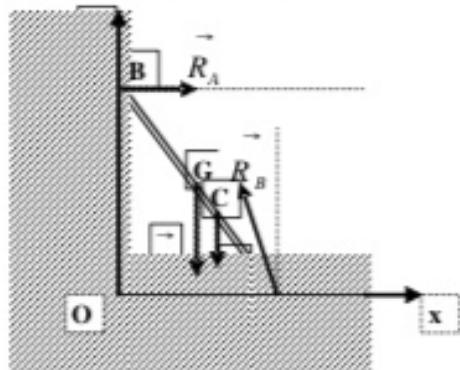
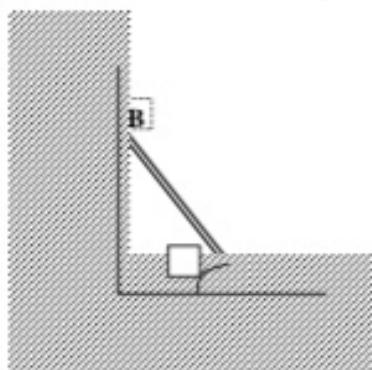
$$(3) \Rightarrow R_{Ax} = 141,42 \text{ N}$$

$$(4) \Rightarrow R_{Ay} = 95,71 \text{ N} ; \text{ d'où } R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 170,76 \text{ N}$$

Exercice 05 :

Une échelle de longueur **20 m** pesant **400 N** est appuyée contre un mur parfaitement lisse en un point situé à **16 m** du sol. Son centre de gravité est situé à **1/3** de sa longueur à partir du bas. Un homme pesant **700 N** grimpe jusqu'au milieu de l'échelle et s'arrête. On suppose que le sol est rugueux et que le système reste en équilibre statique.

Déterminer les réactions aux points de contact de l'échelle avec le mur et le sol.



$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\sum_i \vec{M}_{i/A} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AG} \wedge \vec{F} + \vec{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \quad (2)$$

La projection de l'équation (1) sur les axes donne :

$$R_{Ay} - F \cos 45^\circ = 0 \quad (3)$$

$$R_{Ax} + R_B - F \sin 45^\circ - P = 0 \quad (4)$$

En développant l'équation (2) on aboutit à :

$$\begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F \cos 45^\circ \\ -F \sin 45^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = 0$$

$$LR_B - \frac{L}{2}F \cos 45^\circ - \frac{L}{2}P = 0 \Leftrightarrow R_B - \frac{F\sqrt{2}}{4} - \frac{P}{2} = 0 \quad (5)$$

$$(5) \Rightarrow R_B = 95,71 \text{ N}$$

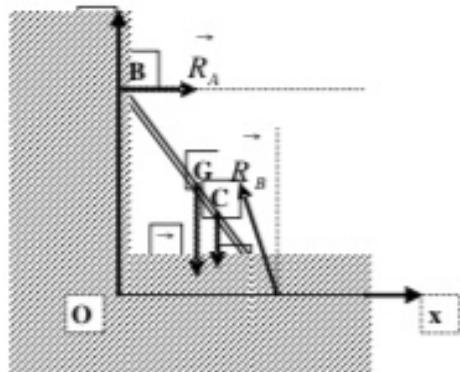
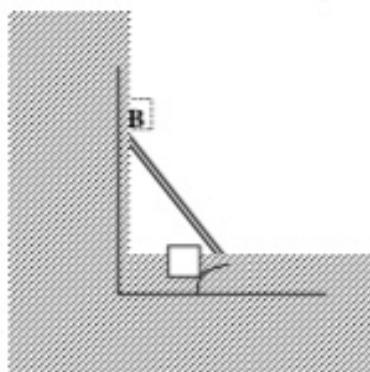
$$(3) \Rightarrow R_{Ax} = 141,42 \text{ N}$$

$$(4) \Rightarrow R_{Ay} = 95,71 \text{ N} ; \text{ d'où } R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 170,76 \text{ N}$$

Exercice 05 :

Une échelle de longueur **20 m** pesant **400 N** est appuyée contre un mur parfaitement lisse en un point situé à **16 m** du sol. Son centre de gravité est situé à **1/3** de sa longueur à partir du bas. Un homme pesant **700 N** grimpe jusqu'au milieu de l'échelle et s'arrête. On suppose que le sol est rugueux et que le système reste en équilibre statique.

Déterminer les réactions aux points de contact de l'échelle avec le mur et le sol.



Solution :

$$AB=L=20\text{ m}, OB=16\text{ m}, Q=700\text{ N}, P=400\text{ N}, \sin\alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{16}{20} = 0,8 \Rightarrow \alpha = 53,13^\circ$$

L'échelle est en équilibre statique. La résultante des forces est nulle. Le moment résultant par rapport au point A est aussi nul.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{Q} + \vec{P} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\sum_i \vec{M}_{i/A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AG} \wedge \vec{Q} + \vec{AC} \wedge \vec{P} = \vec{0} \quad (2)$$

Nous avons aussi :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -L \cos\alpha \\ L \sin\alpha \end{pmatrix}; \vec{AG} \begin{pmatrix} -(L/2) \cos\alpha \\ (L/2) \sin\alpha \end{pmatrix}; \vec{AC} \begin{pmatrix} -(L/3) \cos\alpha \\ (L/3) \sin\alpha \end{pmatrix}; \vec{R}_B \begin{pmatrix} R_B \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ -Q \end{pmatrix}; \vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix}$$

La projection de l'équation (1) sur les axes donne les équations scalaires :

$$-R_A + R_B = 0 \quad (3)$$

$$R_{Ay} - Q - P = 0 \quad (4)$$

En développant l'équation (2), on aboutit à :

$$\begin{pmatrix} -L \cos\alpha \\ L \sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(L/2) \cos\alpha \\ (L/2) \sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(L/3) \cos\alpha \\ (L/3) \sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-R_B L \sin\alpha + Q \frac{L}{2} \cos\alpha + P \frac{L}{3} \cos\alpha = 0 \quad (5)$$

$$(5) \Rightarrow R_B = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \left(\frac{Q}{2} + \frac{P}{3} \right) \quad \text{d'où } R_B = 362,5\text{ N}$$

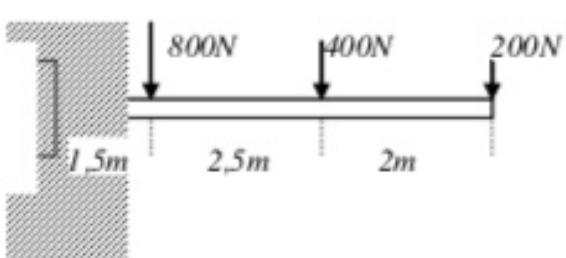
$$(3) \Rightarrow R_A = R_B = 362,5\text{ N}$$

$$(4) \Rightarrow R_{Ay} = 1100\text{ N} ; \text{ on déduit : } R_A = 1158,34\text{ N}$$

Exercice 06 :

On applique trois forces sur une poutre de masse négligeable et encastrée au point A.

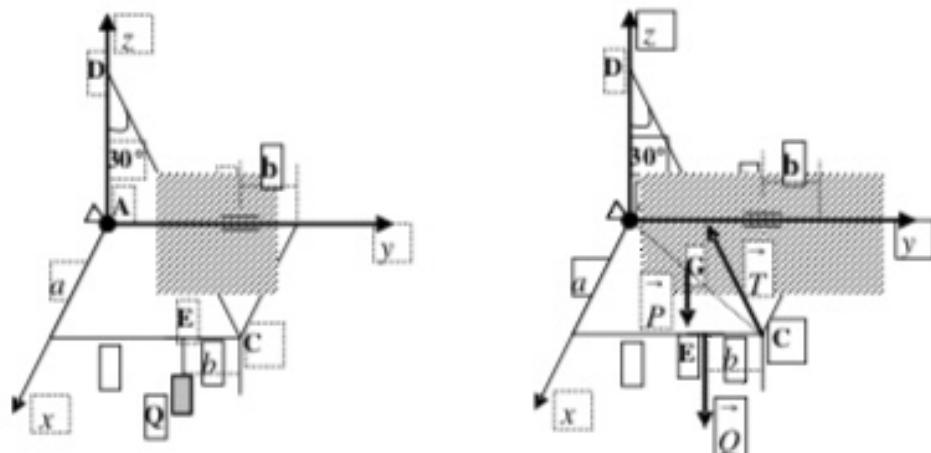
Déterminer la réaction à l'enca斯特rement.



Exercice 07 :

Un plaque carrée de coté a , de poids P est fixée à un mur à l'aide d'une articulation sphérique au point **A** et d'une articulation cylindrique au point **B**. Un câble **CD** inextensible et de masse négligeable maintient la plaque en position horizontale. Une charge $Q = 2P$ est suspendue au point **E** de la plaque. Les données sont : $b = \frac{a}{3}$; $\alpha = 30^\circ$

Déterminer les réactions des articulations en **A** et **B** ainsi que la tension dans le câble en fonction de a et P



Solution :

La plaque est en équilibre statique dans le plan horizontale, nous pouvons écrire :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T} + \vec{Q} + \vec{P} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\sum_i \vec{M}_{AA} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AC} \wedge \vec{T} + \vec{AE} \wedge \vec{Q} + \vec{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \quad (2)$$

Articulation sphérique en **A** : R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}

Articulation cylindrique en **B** et d'axe **y**: R_B

Le triangle **ACD** est rectangle en **A**, et l'angle (**DA,DC**) = 30° alors l'angle (**CA,CD**) = 60°

La tension aura pour composantes : $\vec{T} = \begin{pmatrix} -T \cos 60 \cos 45 \\ -T \cos 60 \sin 45 \\ T \sin 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(T\sqrt{2})/4 \\ -(T\sqrt{2})/4 \\ (T\sqrt{3})/2 \end{pmatrix}$

$$\vec{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2P \end{pmatrix}; \quad \vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix}; \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 2a/3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} a \\ 2a/3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Projetons l'équation (1) sur les axes du repère :

$$R_{Ax} + R_{Bz} - (T\sqrt{2})/4 = 0 \quad (3)$$

$$R_{Ay} - (T\sqrt{2})/4 = 0 \quad (4)$$

$$R_{Az} + R_{Bz} - (T\sqrt{3})/2 - 2P - P = 0 \quad (5)$$

L'équation (2) se traduira par :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2a/3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_B \\ 0 \\ R_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -(T\sqrt{2})/4 \\ -(T\sqrt{2})/4 \\ (T\sqrt{3})/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 2a/3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ a/2 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le développement de ce produit vectoriel donnera trois équations :

$$\frac{2a}{3}R_{Bz} + aT \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4aP}{3} - \frac{aP}{2} = 0 \quad (6)$$

$$-aT \frac{\sqrt{3}}{2} + 2aP + \frac{aP}{2} = 0 \quad (7)$$

$$-\frac{2a}{3}R_{Bz} = 0 \quad (8)$$

La résolution de ce système d'équations donne :

$$(8) \Rightarrow R_{Bz} = 0; \quad (7) \Rightarrow T = \frac{5\sqrt{3}}{3}P; \quad (6) \Rightarrow R_{Bz} = -P$$

$$(5) \Rightarrow R_{Az} = \frac{3}{2}P; \quad (4) \Rightarrow R_{Ay} = \frac{5\sqrt{6}}{12}P; \quad (3) \Rightarrow R_{Ax} = \frac{5\sqrt{6}}{12}P$$

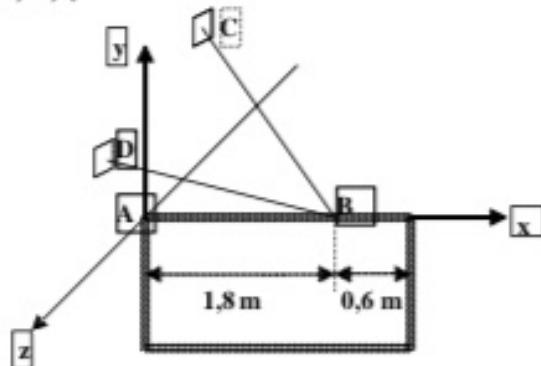
$$R_A = 17,39P \text{ et } R_B = P$$

Exercice 08 :

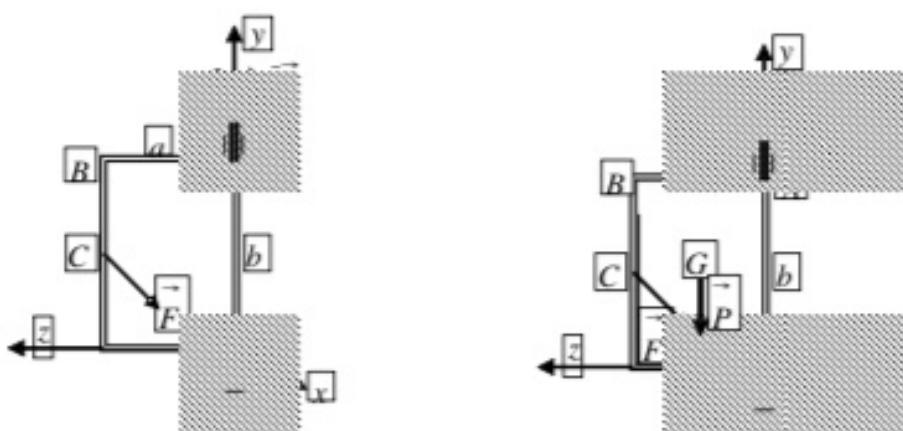
Une enseigne lumineuse rectangulaire de densité uniforme de dimension **1,5 x 2,4 m** pèse **120 Kg**. Elle est liée au mur par une articulation sphérique et deux câbles qui la maintiennent en position d'équilibre statique, comme indiqué sur la figure. Déterminer les tensions dans chaque câble et la réaction au point A.

83 sur 414

....., ..., ..., ..., $D(0 ; 0,9 ; 0,6)$.

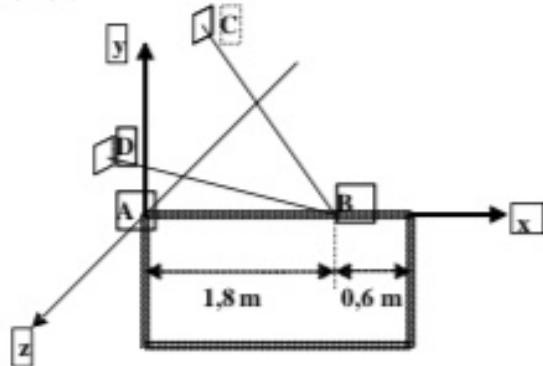
**Exercice 09 :**

Une porte métallique rectangulaire de densité uniforme de dimensions $a \times b$, de poids P , est maintenue en position verticale par deux articulations, l'une sphérique au point O et l'autre cylindrique au point A . Une force F est appliquée perpendiculairement au plan de la porte au point C milieu de la longueur. Afin de maintenir cette porte en position fermée, on applique un moment M au point A . Déterminer les réactions aux niveau des articulation O et A ainsi que la force F nécessaire pour ouvrir la porte. On donne : $a = 2\text{m}$, $b = 3\text{m}$, $BC = b/2$, $M = 400\text{N}$, $P = 800\text{N}$

**Solution :**

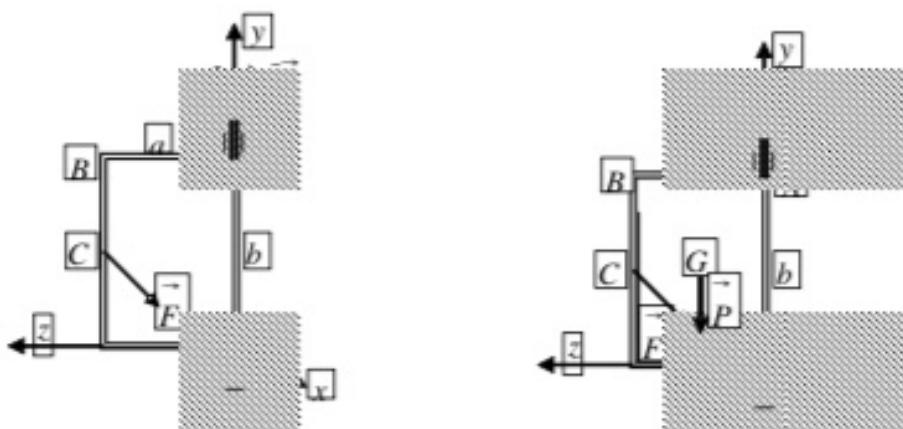
Nous avons : $\vec{OA} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ b/2 \\ a/2 \end{pmatrix}$; $\vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ b/2 \\ a \end{pmatrix}$

On donne : $C(0 ; 1,2 ; -2,4)$, $D(0 ; 0,9 ; 0,6)$.



Exercice 09 :

Une porte métallique rectangulaire de densité uniforme de dimensions $a \times b$, de poids P , est maintenue en position verticale par deux articulations, l'une sphérique au point O et l'autre cylindrique au point A . Une force F est appliquée perpendiculairement au plan de la porte au point C milieu de la longueur. Afin de maintenir cette porte en position fermée, on applique un moment M au point A . Déterminer les réactions aux niveau des articulation O et A ainsi que la force F nécessaire pour ouvrir la porte. On donne : $a = 2\text{m}$, $b = 3\text{m}$, $BC = b/2$, $M = 400\text{N}$, $P = 800\text{N}$



Solution :

Nous avons : $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ b/2 \\ a/2 \end{pmatrix}$; $\vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ b/2 \\ a \end{pmatrix}$

Et aussi : $\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{F} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{R}_O = \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix}$; $\vec{R}_A = \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ 0 \\ R_{Az} \end{pmatrix}$

La porte est en équilibre statique, nous pouvons écrire :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_O + \vec{R}_A + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\sum_i \vec{M}_{i/O} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OA} \wedge \vec{R}_B + \vec{OC} \wedge \vec{F} + \vec{OG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \quad (2)$$

Projetons l'équation (1) sur les axes du repère :

$$R_{Ox} + R_{Ax} + F = 0 \quad (3)$$

$$R_{Oy} - P = 0 \quad (4)$$

$$R_{Oz} + R_{Az} = 0 \quad (5)$$

L'équation (2) se traduira par :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ 0 \\ R_{Az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b/2 \\ a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b/2 \\ a/2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$bR_{Az} + \frac{aP}{2} = 0 \quad (6)$$

$$aF - M = 0 \quad (7)$$

$$-bR_{Ax} - \frac{bF}{2} = 0 \quad (8)$$

la résolution de ce système d'équation nous donne :

$$(4) \Rightarrow R_{Oy} = P = 800N; \quad (6) \Rightarrow R_{Az} = \frac{-aP}{2b} = -266,66N$$

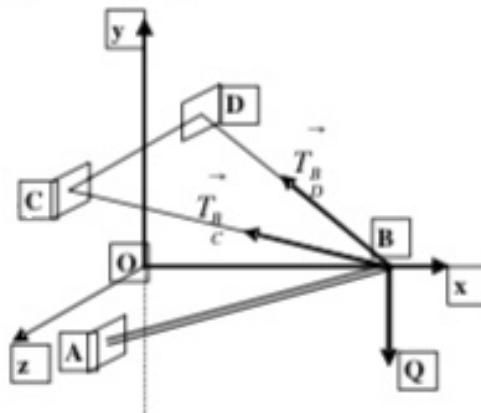
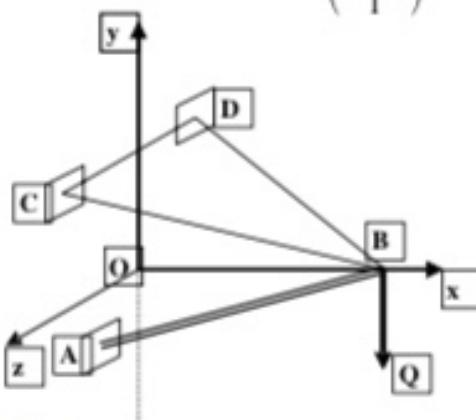
$$(7) \Rightarrow F = \frac{M}{a} = 200N; \quad (8) \Rightarrow R_{Ax} = \frac{-F}{2} = -100N$$

$$(5) \Rightarrow R_{Oz} = -R_{Az} = 266,66N; \quad (3) \Rightarrow R_{Ox} = -R_{Ax} - F = -100N$$

on déduit : $R_O = 849N$; $R_A = 284,8N$

Exercice 10 :

Une barre **AB** de masse négligeable supporte à son extrémité **B** une charge de **900 N**, comme indiqué sur la figure ci-dessous. Elle est maintenue en **A** par une articulation sphérique et en **B** par deux câbles attachés aux points **C** et **D**. Déterminer la réaction au point **A** et la tension dans chaque câble. Données : $A(-1,5, 1)$; $B(0, 0)$; $C(3, 3, 1,5)$; $D(3, -1,5)$



Solution :

Le système est en équilibre statique. La résultante des forces est nulle et le moment résultant de toutes les forces par rapport au point A est nul. Nous avons alors :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_A + \vec{T}_{B/C} + \vec{T}_{B/D} + \vec{Q} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\sum_i \vec{M}_{A/A} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} \wedge \vec{R}_A + \vec{AB} \wedge \vec{T}_{B/C} + \vec{AB} \wedge \vec{T}_{B/D} = \vec{0} \quad (2)$$

Nous avons une articulation sphérique en **A** : $R_{A_x}, R_{A_y}, R_{A_z}$

Déterminons les composantes des tensions dans les câbles **BC** et **BD** :

Les vecteurs unitaires suivant les axes **BC** et **BD** sont donnés par :

$$\vec{u}_{BC} = \frac{\vec{BC}}{|BC|} = \frac{-3\vec{i} + 3\vec{j} + 1,5\vec{k}}{\sqrt{3^2 + 3^2 + (1,5)^2}} = -0,66\vec{i} + 0,66\vec{j} + 0,33\vec{k}$$

$$\vec{u}_{BD} = \frac{\vec{BD}}{|BD|} = \frac{-3\vec{i} + 3\vec{j} - 1,5\vec{k}}{\sqrt{3^2 + 3^2 + (1,5)^2}} = -0,66\vec{i} + 0,66\vec{j} - 0,33\vec{k}$$

Les tensions dans les deux câbles s'écriront sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{T}_{Bc} &= T_{Bc} \hat{u}_B = -0,66T_B \hat{i} + 0,66T_B \hat{j} + 0,33T_B \hat{k} \\ \vec{T}_{BD} &= T_{BD} \hat{u}_B = -0,66T_B \hat{i} + 0,66T_B \hat{j} - 0,33T_B \hat{k} \end{aligned}$$

La projection de l'équation (1) sur les axes donne les trois équations scalaires :

$$R_A - 0,66T_B - 0,66T_B = 0 \quad (3)$$

$$R_{Ay} + 0,66T_{BC} + 0,66T_{BD} - Q = 0 \quad (4)$$

$$R_{Az} + 0,33T_B - 0,33T_B = 0 \quad (5)$$

L'équation (2) s'écrira :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -Q \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0,66T_{BC} \\ 0,66T_{BC} \\ 0,33T_{BC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0,66T_{BD} \\ 0,66T_{BD} \\ -0,33T_{BD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En développant ce produit vectoriel, nous obtenons les trois équations suivantes :

$$-Q + (1,5 \cdot 0,33)T_B + 0,66T_B - (1,5 \cdot 0,33)T_B + 0,66T_B = 0 \quad (6)$$

$$(-3 \cdot 0,33)T_B + 0,66T_B + (3 \cdot 0,33)T_B + 0,66T_B = 0 \quad (7)$$

$$-3Q + (3 \cdot 0,66)T_B + (1,5 \cdot 0,66)T_B + (3 \cdot 0,66)T_B + (1,5 \cdot 0,66)T_B = 0 \quad (8)$$

A partir de l'équation (7) on déduit que : $T_B = 5T_B$

En remplaçant dans l'équation (6) on obtient : $T_B = \frac{Q}{5,61} = 160,43N$

D'où : $T_B = 802,15N$

$$(3) \quad R_A = 0,66(T_B + T_B) = 635,30N$$

$$(4) \quad R_{Ay} = Q - 0,66(T_B + T_B) = 264,70N$$

$$(5) \quad R_{Az} = 0,33(T_B - T_B) = -156,70N$$

$$R_A = \sqrt{R_A^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = 705,85N$$

UMBB Boumerdès, Faculté des sciences, Département de physique
Cours exercices, Mécanique Rationnelle : TCT et LMD-ST sem :3

A.KADI

CHAPITRE IV

GEOMETRIE DES MASSES

GEOMETRIE DES MASSES

Objectifs du chapitre

Afin de comprendre et de pouvoir décrire les mouvements des systèmes matériels, il est important de connaître la répartition géométrique afin de se préparer aux concepts de cinématiques et dynamiques des solides.

L'intérêt de cette partie est de nous permettre de connaître un certain nombre de données sur la répartition des masses des systèmes. Nous, nous intéresserons à la détermination :

- des centres de masse du solide
- des moments d'inertie, des produits d'inertie par rapport à des axes et aux tenseurs d'inertie des solides quelconques dans différents repères.

L'opérateur d'inertie sert à caractériser la répartition des masses d'un solide, afin d'étudier par la suite, un mouvement quelconque de celui-ci.

1. Notions de masse d'un système matériel

A chaque système matériel (S) est associé, une quantité scalaire positive invariable en mécanique classique, appelée : **masse du système**

La masse d'un solide fait référence à la quantité de matière contenue dans le volume de ce solide.

Cet invariant scalaire obéit aux propriétés mathématiques suivantes :

Aditivité des masses

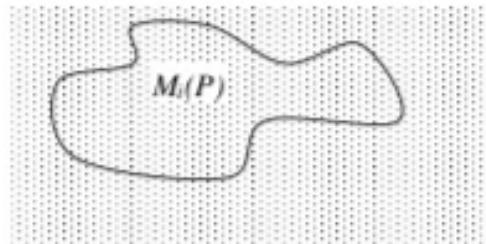
La masse d'un système matériel (S) est égale à la somme des masses qui le composent.

Exemple : masse d'un livre = somme des masses des feuilles qu'il contient.

La masse d'un système matériel est définie par la grandeur scalaire suivante :

$$M = \int_{P \in (S)} dm(P)$$

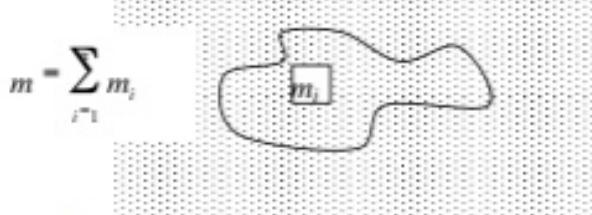
L'élément $dm(P)$ est la mesure de la masse au voisinage du point (P).



Un système matériel est un ensemble discret ou continu des points matériels ou encore une réunion d'ensembles continus ou discrets de points matériels.

1.1. Systèmes discrets

La masse d'un système discret est la somme des n points matériels discrets de masses m_i :



1.2. Systèmes continus

Si le système est constitué d'un ensemble continu de masses, la masse du système

s'écrirait sous la forme d'une intégrale continue : $m = \int_{(S)} dm(P)$

- **Le système (S) est un volume**

La masse s'écrirait : $m = \int_V \rho(P) dv$

$\rho(P)$ est la masse volumique au point P et dv un élément de volume du solide (S)

- **Le système (S) est une surface :** (cas des plaques fines) l'épaisseur est négligeable devant les deux autres dimensions.

La masse s'écrirait : $m = \int_S \sigma(P) ds$

$\sigma(P)$ est la densité surfacique au point P et ds un élément de surface du solide (S)

- **Le système (S) est linéaire :** (cas des tiges fines) les deux dimensions sont négligeables devant la longueur de la tige.

La masse s'écrirait : $m = \int_L \lambda(P) dl$

$\lambda(P)$ est la densité linéique au point P et dl un élément de longueur du solide (S)

Dans les systèmes homogènes (solides homogènes) la densité des solides est constante.

2. Centre d'inertie (centre de masse) des solides

On appelle centre d'inertie d'un système matériel (S) le point G défini par la relation :

$$\int_{P \in (S)} \vec{GP} dm = \vec{0}$$

où P est un point du solide avec $\vec{OP} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ et $\vec{OG} = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k}$

Soit O le centre d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nous pouvons écrire dans ce

repère : $\vec{OP} = \vec{OG} + \vec{GP}$ $\iiint_P \vec{O} d m = \vec{O} d m + \vec{G} d m$ alors nous obtenons :

$$\frac{\vec{O}}{G} = \frac{1}{\int d} \int_{P \in (S)} \vec{O} dm ; \quad \frac{\vec{O}}{G} = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} \vec{O} dm$$

Les coordonnées du centre d'inertie G d'un système homogène sont déterminées par des calculs utilisant les éléments infinitésimaux tel que : dl pour les éléments linéaires, ds pour les éléments surfaciques et d pour les éléments volumiques. Ainsi nous pouvons écrire :

$$x_G = \frac{\int_x d}{\int d} = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} x dm , \quad y_G = \frac{\int_y d}{\int d} = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} y dm , \quad z_G = \frac{\int_z d}{\int d} = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} z dm$$

Remarques :

- Le centre d'inertie des masses homogènes coïncide avec le centre d'inertie de leurs volumes s'ils sont volumiques ou de leurs surfaces s'ils sont surfaciques.
- Si le solide présente des éléments de symétrie (axes ou plans) son centre d'inertie est nécessairement situé sur ces éléments de symétrie.

3. Centre d'inertie d'un système composé

Dans la réalité c'est le cas le plus souvent rencontré, les calculs sont élémentaires en résonnant sur chacun des éléments qui composent les systèmes.

On détermine d'abord le centre d'inertie de chaque élément Δ_i du système au point G_i , puis on détermine le centre d'inertie G du système comme barycentre des points G_i .

Soient les éléments d'un système composé : $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ ayant pour centres d'inertie respectifs : G_1, G_2, \dots, G_n ayant pour vecteurs positions dans un repère $R(O, i, j, k) : \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$:

$$\text{Le centre d'inertie de ce système est donné par : } \vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \Delta_i}{\sum_{i=1}^n \Delta_i} ; \text{ où } \Delta_i \text{ est la } i^{\text{ème}}$$

quantité.

Elle peut être un élément de longueur, de surface, de volume ou de masse.

Le centre d'inertie du système aura pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta_i}{\sum_{i=1}^n \Delta_i}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta_i}{\sum_{i=1}^n \Delta_i}, \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \Delta_i}{\sum_{i=1}^n \Delta_i}$$

où : x_i, y_i, z_i sont les coordonnées des points G_i où l'élément Δ_i est concentré.

Si les Δ_i sont des éléments de masses alors on peut écrire :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

4. Théorème de Guldin

Une seconde méthode pour la détermination des centres d'inertie des solides linéaires ou surfaciques homogènes fut trouvée par Guldin. Elle consiste à faire tourner ces solides autour des axes qu'ils n'interceptent pas. Les solides linéaires décriront des surfaces et les solides surfaciques décriront des volumes.

4.1. 1^{er} Théorème de Guldin

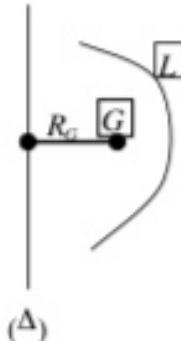
La surface S engendrée par la rotation d'un arc de courbe de longueur L autour d'un axe (Δ) sans l'intercepter dans son plan est égale au produit de la longueur L de l'arc par la longueur de la circonférence $2\pi R_G$ décrite par le centre d'inertie G de l'arc de courbe.

2

Soit L la longueur de l'arc et R_G son centre d'inertie.

La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie G par rapport à l'axe (Δ) est donnée par: $2\pi R_G$, alors la surface décrite par cet élément est égale à :

$$S_{/\Delta} = 2\pi R_G L \quad \text{d'où} \quad R_G = \frac{S_{/\Delta}}{2\pi L}$$



Dans le cas d'un système homogène de plusieurs éléments on aura: $R_G = \frac{S_{totale}/\Delta}{2\pi L_{totale}}$

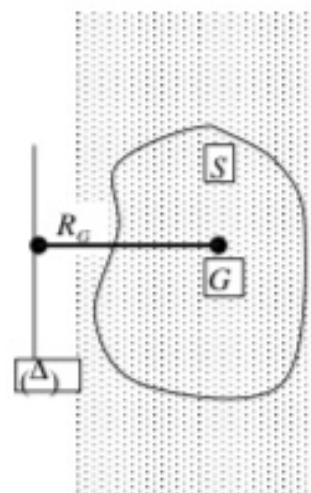
si l'axe (Δ) représente l'axe (O, \vec{y}) nous aurons: $x_G = \frac{S_{totale}}{2\pi L}$

si l'axe (Δ) représente l'axe (O, \vec{x}) nous aurons: $y_G = \frac{S_{totale}}{2\pi L}$

4.2. 2^{ième} Théorème de Guldin

Une surface plane homogène S , limitée par une courbe fermée simple et tournant autour d'un axe (Δ) sans le rencontrer engendre un volume V .

Le volume V engendré est égal au produit de la surface S par la longueur du périmètre $2\pi R_G$ décrit par le centre d'inertie G de cette surface autour de l'axe (Δ).



Soit S la surface et R_G la distance de son centre d'inertie à (Δ) .

La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie G par rapport à l'axe (Δ) est donnée par : $2\pi R_G$, alors le volume décrit par cette surface est égal à :

$$V_{\Delta} = 2\pi R_G S \quad \text{d'où} \quad R_G = \frac{V_{\Delta}}{2\pi S}$$

Dans le cas d'un système homogène composé de plusieurs surfaces on aura :

$$R_G = \frac{V_{\text{totale}} / \Delta}{2\pi S_{\text{totale}}}$$

si l'axe (Δ) représente l'axe (O, \vec{y}) nous aurons : $x_G = \frac{V_{\text{totale}} / \Delta}{2\pi S_{\text{totale}}}$

si l'axe (Δ) représente l'axe (O, \vec{x}) nous aurons : $y_G = \frac{V_{\text{totale}} / \Delta}{2\pi S_{\text{totale}}}$

5. Opérateur d'inertie (tenseur d'inertie) : Moment d'inertie et produit d'inertie

La notion d'opérateur d'inertie permet d'exprimer les divers torseurs, déjà vue précédemment, afin de faciliter l'étude de la cinétique et de la dynamique des solides.

5.1 Opérateur produit vectoriel

Considérons deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} dont les composantes sont exprimées dans une base orthonormée directe $R(O, i, j, k)$:

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}, \quad \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\text{Le produit vectoriel des deux vecteurs s'écrit : } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_y Z - u_z Y \\ u_z X - u_x Z \\ u_x Y - u_y X \end{bmatrix}$$

Comme le vecteur \vec{u} est connu et \vec{V} quelconque, on constate que l'on peut passer du vecteur \vec{V} au vecteur $\vec{u} \wedge \vec{V}$ par une opération linéaire très simple à vérifier. Le produit vectoriel est distributif, par rapport à l'addition et à la multiplication, nous pouvons alors écrire:

$$\forall \lambda \in IR \quad \forall \vec{V} \in IR^3 \quad \text{on a: } \vec{u} \wedge \lambda \vec{V} = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{V})$$

$$\forall \vec{V}_1, \vec{V}_2 \in IR^3 \quad \text{on a aussi: } \vec{u} \wedge (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{u} \wedge \vec{V}_1 + \vec{u} \wedge \vec{V}_2$$

on peut conclure que l'on passe du vecteur \vec{V} au vecteur $\vec{u} \wedge \vec{V}$, par application d'un opérateur linéaire que l'on notera: $\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}$; d'où l'écriture: $\vec{u} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \vec{V}$ qui se traduit sous forme matricielle dans la base orthonormée $R(O, i, j, k)$ par:

$$\begin{bmatrix} u_x Z - u_z Y \\ u_z X - u_x Z \\ u_x Y - u_z X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Lamatrice $\begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$ est antisymétrique dans cette base.

Pour déterminer le tenseur d'inertie, nous avons besoin d'un nouvel opérateur qui est le double produit Vectoriel : $(\vec{u} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{u})) = -(\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{V}))$ car le produit vectoriel est antisymétrique. D'après les relations précédentes, nous pouvons écrire cet opérateur sous la forme: $(\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{V})) = \vec{u} \wedge (\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \vec{V}) = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^2 \vec{V}$.

Cet opérateur est aussi un opérateur linéaire et son écriture sous la forme matricielle dans la

base $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

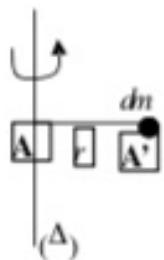
$$[\vec{A}]^2 = \begin{bmatrix} -(u_y^2 + u_z^2) & u_x u_y & u_x u_z \\ u_x u_y & -(u_x^2 + u_z^2) & u_y u_z \\ u_x u_z & u_y u_z & -(u_x^2 + u_y^2) \end{bmatrix}$$

On voit bien que la matrice $[\vec{A}]^2$ est symétrique et de même pour la matrice $[\vec{B}] = -[\vec{A}]^2$, alors nous utiliserons cette dernière afin de représenter les tenseurs d'inertie d'un solide dans une base orthonormée $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

5.2. Opérateur d'inertie

5.2.1. Définition du moment d'inertie d'un solide

Soit un solide de masse d lié à une tige (AA') de masse négligeable, en rotation autour d'un axe (Δ) . Si on applique un couple au système (tige + masse), il se mettra à tourner librement autour de l'axe (Δ) . L'étude dynamique de ce système se fera dans les prochains chapitres. Le temps nécessaire à cet élément de masse $\frac{d}{m}$ pour atteindre une vitesse de rotation donnée est proportionnel à la masse $\frac{d}{m}$ et au carré de la distance r qui sépare la masse de l'axe (Δ) . C'est pour cette raison que le produit $r^2 dm$ est appelé moment d'inertie de la masse $\frac{d}{m}$ par rapport à l'axe (Δ) .



5.2.2. Matrice d'inertie : Moments et produits d'inertie d'un solide

Soit un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et un solide (S) tel que $O \in (S)$. Le moment d'inertie de ce solide par rapport au point O est obtenu en intégrant la relation $r^2 dm$. $I_O = \int_{(S)} r^2 dm$

les intégrales sont calculées sur le solide. Celui-ci peut être linéaire, surfacique ou volumique. L'élément d'intégration $dm(P)$ est situé en un point P du solide.

L'opérateur d'inertie s'écrit : $I_o(\vec{V}) = - \int_{(S)} \vec{O} \wedge (\vec{O} \wedge \vec{V}) dm$, le vecteur \vec{V} est indépendant du

point P . Le point P est un point quelconque du solide (S) et d est l'élément de masse entourant le point P . Le tenseur d'inertie du solide au point O est représenté dans la base

$R(O, i, j, k)$ par une matrice notée $I_o(S)_{ijk}$: appelée matrice d'inertie en O dans la base

$$\text{du solide } (S) : I_o(S)_{ijk} = \begin{bmatrix} A & -D & -E \\ -D & B & -F \\ -E & -F & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

La matrice $I_o(S)_{ijk}$ est symétrique, réelle et diagonalisable. Elle admet trois valeurs propres réelles et trois directions propres réelles et orthogonales.

- Les valeurs propres sont appelées moments principaux d'inertie ;
- Les directions propres sont appelées axes principaux d'inertie.

Si le point P a pour coordonnées (x, y, z) dans la base $R(O, i, j, k)$, le vecteur \vec{OP} a pour

expression : $\vec{O}_P = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ et d'après ce que l'on vient de voir précédemment,

$I_o(\vec{V}) = - \int_{(S)} \vec{O} \wedge (\vec{O} \wedge \vec{V}) dm$, les éléments de la matrice d'inertie s'écriraient sous la forme :

Moment d'inertie par rapport à l'axe (Ox) : $I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm$

Moment d'inertie par rapport à l'axe (Oy) : $I_{yy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm$

Moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) : $I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm$

Moment d'inertie par rapport au plan (Oxy) : $I_{xy} = \int_{(S)} xy dm$: ou produit d'inertie

Moment d'inertie par rapport au plan (Oxz) : $I_{xz} = \int_{(S)} xz dm$: ou produit d'inertie

Moment d'inertie par rapport au plan (Oyz) : $I_{yz} = \int_{(S)} yz dm$: ou produit d'inertie

5.2.3. Solides présentant des plans de symétrie

Certains solides présentent des formes particulières admettant des plans de symétrie par rapport aux axes du repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ choisi. Pour chaque plan de symétrie, les produits d'inertie sur les deux autres plans sont nuls :

$$(xOy) \text{ plan de symétrie} \implies I_{xz} = I_{yz} = 0$$

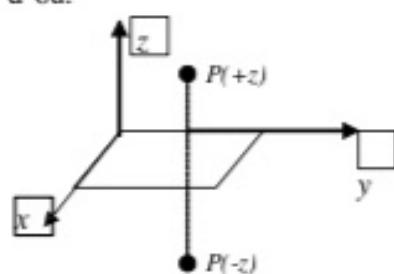
$$(yOz) \text{ plan de symétrie} \implies I_{xz} = I_{xy} = 0$$

$$(xOz) \text{ plan de symétrie} \implies I_{xy} = I_{yz} = 0$$

a) si (xOy) est un plan de symétrie du solide

$P(+z)$ est symétrique du point $P(-z)$ par rapport au plan (xOy) d'où:
 $\int_{(S)} xz dm = 0$ et $\int_{(S)} yz dm = 0$ donc $I_{xz} = I_{yz} = 0$

$$I_O(S)_{/R} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$



Dans ce cas l'axe Oz qui est perpendiculaire au plan (xOy) est un axe principal d'inertie ; nous pouvons le montrer facilement par le produit suivant :

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = I_{zz} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

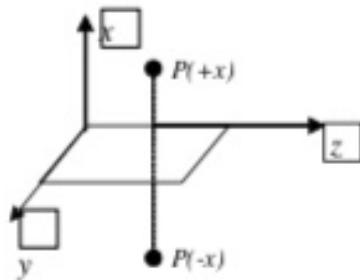
En effet, tout axe orthogonal à un plan de symétrie matérielle est axe principal d'inertie sur tous les points du plan.

b) si (yOz) est un plan de symétrie du solide

$P(+x)$ est symétrique du point $P(-x)$ par rapport au plan (yOz) d'où:

$$\int_{P \in (S)} xz dm = 0 \text{ et } \int_{P \in (S)} xy dm = 0 \text{ donc } I_{xz} = I_{xy} = 0$$

$$I_O(S)_{IK} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & -I_{yz} \\ 0 & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$



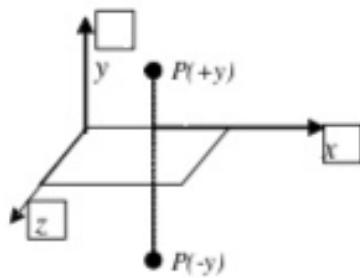
Dans ce cas l'axe $\overset{\leftrightarrow}{Ox}$ perpendiculaire au plan (yOz) est un axe principal d'inertie .

c) si (xOz) est un plan de symétrie du solide

$P(+y)$ est symétrique du point $P(-y)$ par rapport au plan (xOz) d'où:

$$\int_{P \in (S)} yz dm = 0 \text{ et } \int_{P \in (S)} xy dm = 0 \text{ donc } I_{yz} = I_{xy} = 0$$

$$I_O(S)_{IK} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$



Dans ce cas l'axe $\overset{\leftrightarrow}{Oy}$ perpendiculaire au plan (xOz) est un axe principal d'inertie .

5.2.4 Solides présentant un axe de symétrie

Soit $\overset{\leftrightarrow}{Ox}$ un axe de symétrie matérielle d'un solide (S) . Pour chaque élément de masse dm du solide ayant une coordonnée $(+x)$ nous pouvons lui associer un élément dm symétrique

par rapport à l'axe $\overset{\leftrightarrow}{Ox}$ et de coordonnée $(-x)$ de telle sorte que:

$$\int_{P \in (S)} xz dm = 0 \text{ et } \int_{P \in (S)} xy dm = 0$$

On remarque de la même manière que précédemment, l'axe \vec{Ox} est un axe principal d'inertie. Tout axe de symétrie matériel est un axe principal d'inertie sur tous les points de l'axe.

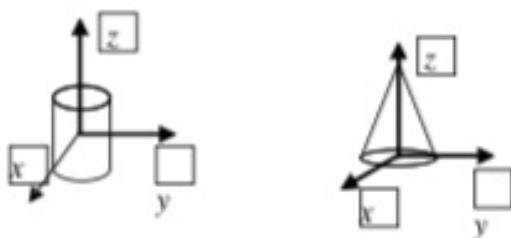
Remarques

- * Tout repère orthogonal direct, dont deux de ses plans sont des plans de symétrie matérielle du solide, est un repère principal d'inertie du solide.
- * Tout repère orthogonal direct, dont deux de ses axes sont des axes de symétrie matérielle du solide, est un repère principal d'inertie du solide.

5.3. Solides à symétrie de révolution

Dans le cas des solides ayant un axe de révolution tel que (cylindre, disque, cône, etc...), la masse est répartie de façon symétrique autour de cet axe. Soit un cylindre d'axe de révolution \vec{Oz} dans un repère orthonormé $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Tout plan passant par l'axe \vec{Oz} est un plan de symétrie, d'après ce que l'on a vu précédemment tous les produits d'inertie sont nuls.

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz}$$

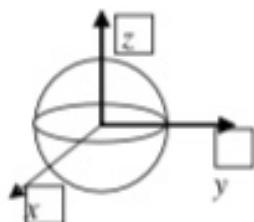


5.4. Solides à symétrie sphérique

Pour tout solide à symétrie sphérique (sphère pleine ou creuse)

de centre O , tous les repères $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ayant pour centre le même point O sont des repères principaux d'inertie.

Les trois axes du repère jouent le même rôle, alors tous les moments d'inertie sont égaux :



On remarque de la même manière que précédemment, l'axe \vec{Ox} est un axe principal d'inertie. Tout axe de symétrie matériel est un axe principal d'inertie sur tous les points de l'axe.

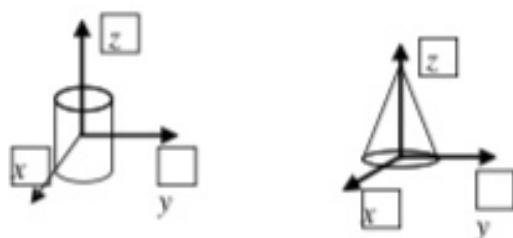
Remarques

- * Tout repère orthogonal direct, dont deux de ses plans sont des plans de symétrie matérielle du solide, est un repère principal d'inertie du solide.
- * Tout repère orthogonal direct, dont deux de ses axes sont des axes de symétrie matérielle du solide, est un repère principal d'inertie du solide.

5.3. Solides à symétrie de révolution

Dans le cas des solides ayant un axe de révolution tel que (cylindre, disque, cône, etc...), la masse est répartie de façon symétrique autour de cet axe. Soit un cylindre d'axe de révolution \vec{Oz} dans un repère orthonormé $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Tout plan passant par l'axe \vec{Oz} est un plan de symétrie, d'après ce que l'on a vu précédemment tous les produits d'inertie sont nuls.

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz}$$

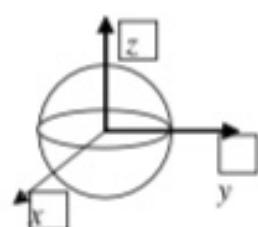


5.4. Solides à symétrie sphérique

Pour tout solide à symétrie sphérique (sphère pleine ou creuse)

de centre O , tous les repères $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ayant pour centre le même point O sont des repères principaux d'inertie.

Les trois axes du repère jouent le même rôle, alors tous les moments d'inertie sont égaux :



$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ et tous les produits d'inertie sont nuls car tous les plans sont des plans de symétrie: $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

Nous pouvons écrire :

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 3I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm + \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm + \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm = 2 \int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

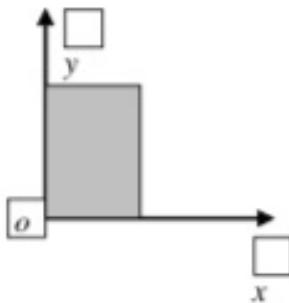
$$I_{xx} = \frac{2}{3} \int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

5.5. Solides plans

Dans le cas des solides plans, l'une des coordonnées de l'élément, dm est nulle. Si le solide est dans le plan (xOy) alors $z = 0$.

On déduit immédiatement que : $I_{xx} = \int_{(S)} y^2 dm$, $I_{yy} = \int_{(S)} x^2 dm$ d'où:

$$I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm = I_{xx} + I_{yy} ; \text{ et } I_{xz} = I_{yz} = 0 ; \quad I_{xy} = \int_{(S)} xy dm$$



Le moment d'inertie par rapport à l'axe perpendiculaire au plan du solide est égal à la somme des moments par rapport aux deux axes du plan du solide.

5.6. Moments d'inertie par rapport à O , aux axes et aux plans du repère $R(O, x, y, z)$

Le moment d'inertie d'un solide (S) déjà défini précédemment par rapport à un point O , un axe où un plan est donné par l'intégrale : $\int_{(S)} r^2 dm(P)$ où P est un point du solide et r la

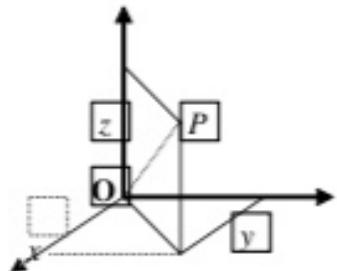
distance du point P par rapport au point O , par rapport à l'axe ou par rapport aux plans du repère.

a) Moment d'inertie par rapport au point O.

il est donné par: $I_o = \int_{(S)} r^2 dm(P)$

où r^2 : représente la distance $O_P^2 = x^2 + y^2 + z^2$

alors: $I_o = \int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) dm(P)$



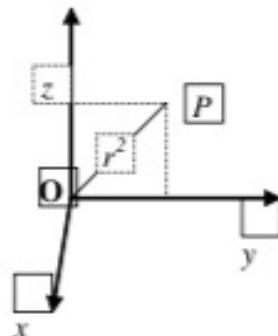
b) Moment d'inertie par rapport aux axes

b.1.) axe \overrightarrow{Ox}

il est donné par: $I_{xx} = \int_{(S)} r^2 dm(P)$

où r^2 : représente la distance du point P à l'axe Ox ;

d'où $O_P^2 = y^2 + z^2$; alors: $I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm(P)$

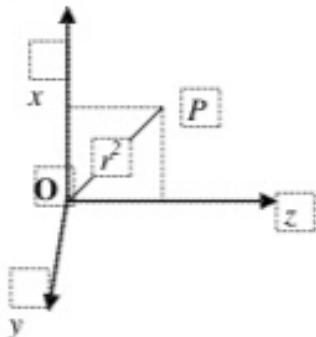


b.2.) axe \overrightarrow{Oy}

il est donné par: $I_{yy} = \int_{(S)} r^2 dm(P)$

où r^2 : représente la distance du point P à l'axe Oy ;

d'où $O_P^2 = x^2 + z^2$; alors: $I_{yy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm(P)$

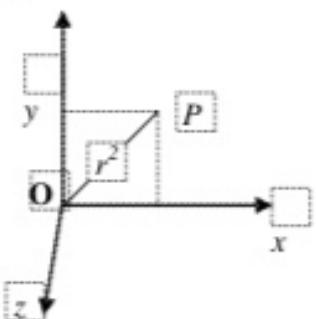


b.3.) axe \overrightarrow{Oz}

il est donné par: $I_{zz} = \int_{(S)} r^2 dm(P)$

où r^2 : représente la distance du point P à l'axe Oz ;

d'où $O_P^2 = x^2 + y^2$; alors: $I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm(P)$



Les moments d'inertie par rapport aux plans (xOy), (xOz), (yOz) sont donnés en fonction de la distance qui sépare le point (P) du plan considéré, ce qui se traduit par les équations suivantes:

$$I_{xOy} = \int_S z^2 dm(P) , \quad I_{xOz} = \int_S y^2 dm(P) , \quad I_{yOz} = \int_S x^2 dm(P)$$

Il résulte des différentes relations précédentes que :

- a) La somme des moments d'inertie d'un solide par rapport aux trois axes d'un repère orthonormé est égale au double du moment d'inertie du solide par rapport au centre du repère.

$$\begin{aligned} I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} &= \int_S (y^2 + z^2) dm + \int_S (x^2 + z^2) dm + \int_S (x^2 + y^2) dm \\ &= 2 \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2I_o \end{aligned}$$

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2I_o$$

- b) La somme des moments d'inertie d'un solide par rapport à deux plans perpendiculaires est égale au moment d'inertie du solide par rapport à l'axe d'intersection des deux plans.

$$I_{yOz} + I_{zOx} = I_{xx} , \quad I_{xOy} + I_{zOx} = I_{yy} , \quad I_{xOy} + I_{yOz} = I_{zz}$$

6. Détermination des axes principaux et des moments principaux d'inertie

Soit une matrice d'inertie d'un solide (S), dans une base orthonormée $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, de la

forme: $I_o(S)_{/R} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$, il existe au moins une base orthonormée de même

centre O et de vecteurs unitaires $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, notée $R_p(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ appelée base principale ou repère principal d'inertie au point O .

Dans cette base principale, les axes $(\vec{O}, \vec{e}_1), (\vec{O}, \vec{e}_2), (\vec{O}, \vec{e}_3)$ sont les axes principaux d'inertie et la matrice d'inertie est une matrice diagonale. Les éléments de cette diagonale sont appelés moments principaux d'inertie dans cette base.

La matrice d'inertie dans la base $R_p(\vec{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ s'écrirait: $I_O(S)_{/R_p} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$

avec I_1, I_2, I_3 moments principaux.

Les axes $(\vec{O}, \vec{e}_1), (\vec{O}, \vec{e}_2), (\vec{O}, \vec{e}_3)$ étant des axes principaux, nous pouvons écrire :

$$I_O(S)_{/R} \vec{e}_1 = I_1 \vec{e}_1, \quad I_O(S)_{/R} \vec{e}_2 = I_2 \vec{e}_2, \quad I_O(S)_{/R} \vec{e}_3 = I_3 \vec{e}_3$$

D'une façon générale nous aurons :

$$\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A - I_1 & -F & -E \\ -F & B - I_2 & -D \\ -E & -D & C - I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs unitaires $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ne sont pas nuls, alors ce système admet une solution si le

déterminant de la matrice est nul : $\begin{vmatrix} A - I_1 & -F & -E \\ -F & B - I_2 & -D \\ -E & -D & C - I_3 \end{vmatrix} = 0$

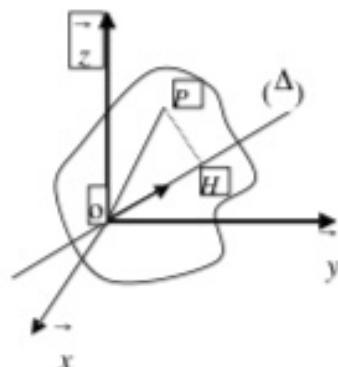
La solution de cette équation scalaire donne les trois valeurs propres qui sont les moments

principaux d'inertie. En reportant ces valeurs propres dans l'équation $I_O(S)_{/R} \vec{e}_i = I_i \vec{e}_i$ on obtient les vecteurs propres qui ne sont autre que les directions principales.

7. Moment d'inertie par rapport à un axe $\overset{\rightarrow}{\Delta}(O,n)$ quelconque dans un repèreorthonormé direct $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Soit (P) un point du solide (S) de masse m et un axe $\overset{\rightarrow}{\Delta}$ passant par le centre O du repère t de vecteur unitaire \vec{n} . Le moment d'inertie par rapport à l'axe $\overset{\rightarrow}{\Delta}$ est donné par :

$$I_{\Delta} = \int_{(P \in S)} r^2 dm = \int_{(P \in S)} H P^2 dm ; \text{ avec } H = \frac{\vec{H}}{P} = \left| \frac{\vec{H}}{P} \right| = r ; \text{ distance de l'élément matériel } dm(P)$$

à l'axe $\overset{\rightarrow}{\Delta}$, H est la projection orthogonale de P sur cet axe.

$$\text{Nous avons : } \overset{\rightarrow}{OP} = \overset{\rightarrow}{OH} + \overset{\rightarrow}{HP} , \text{ on déduit que : } \hat{n} \hat{O} \vec{H} + \vec{P} = \hat{n} \hat{O} \vec{H} + \hat{n} \hat{O} \vec{P}$$

$$\text{Comme } \begin{cases} \hat{n} \hat{O} \vec{H} \\ \hat{n} \perp \overset{\rightarrow}{HP} \end{cases} \text{ et } |\hat{n}| = 1 \text{ alors: } \left| \hat{n} \hat{O} \vec{P} \right| = \left| \hat{n} \hat{O} \vec{H} \right| = \left| \overset{\rightarrow}{OP} \right| = r$$

$$\text{Si } \hat{n} \text{ et } \overset{\rightarrow}{OP} \text{ ont pour coordonnées } \hat{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ et } \overset{\rightarrow}{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Les composantes du vecteur unitaire \hat{n} porté par l'axe $\overset{\rightarrow}{\Delta}$ sont appelées cosinus directeurs.

$$\text{Nous avons alors } \left| \hat{n} \hat{O} \vec{P} \right| = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta z - \gamma y \\ \gamma x - \alpha z \\ \alpha y - \beta x \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où: } \left| \begin{matrix} \vec{n} & \vec{O} \\ P & P \end{matrix} \right|^2 = \left| \begin{matrix} \vec{n} & \vec{H} \\ P & P \end{matrix} \right|^2 = (\beta\gamma)(\gamma_y^2 + \gamma_x - \alpha_z^2 + \alpha_y - \beta_x^2) = r^2$$

En remplaçant r^2 dans l'expression: $I_\Delta = \int_{(P \in S)} r^2 dm$ on aboutit à:

$$I_\Delta = \int_{(P \in S)} (\beta\gamma(\gamma_y^2 + \gamma_x - \alpha_z^2 + \alpha_y - \beta_x^2)) dm$$

$$I_\Delta = \alpha^2 \int_{(P \in S)} (y^2 + z^2) dm + \beta^2 \int_{(P \in S)} (x^2 + z^2) dm + \gamma^2 \int_{(P \in S)} (x^2 + y^2) dm \\ - 2\alpha\beta \int_{(P \in S)} xy dm - 2\alpha\gamma \int_{(P \in S)} x dm - 2\beta\gamma \int_{(P \in S)} y dm$$

$$I_\Delta = \alpha^2 I_{xx} + \beta^2 I_{yy} + \gamma^2 I_{zz} - 2\alpha\beta I_{xy} - 2\alpha\gamma I_{xz} - 2\beta\gamma I_{yz} ; \text{ cette expression représente}$$

l'ellipsoïde d'inertie, elle peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$I_\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \vec{n}^T I_o(S) \cdot \vec{n}$$

Le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe $\vec{(\Delta)}$ passant par un point O et de

vecteur \vec{n} est égal au produit doublement contracté du tenseur d'inertie O par le vecteur unitaire \vec{n} .

8. Produit d'inertie par rapport à deux axes orthogonaux $\vec{\Delta}(O, \vec{u})$ et $\vec{\Delta}(O, \vec{v})$

8.1. Définition

Le produit d'inertie noté I_m est défini comme étant l'intégrale des coordonnées x_u et x_v

$$\text{du point } P \text{ relativement aux axes } \vec{\Delta}(O, \vec{u}) \text{ et } \vec{\Delta}(O, \vec{v}) : I_m = \int_{P(S)} x_u x_v dm$$

x_u : coordonnée de P sur l'axe $\vec{\Delta}(O, \vec{u})$ tel que: $x_u = \vec{OP} \cdot \vec{u}$

x_v : coordonnée de P sur l'axe $\vec{\Delta}(O, \vec{v})$ tel que: $x_v = \vec{OP} \cdot \vec{v}$

Le tenseur d'inertie étant connu au point O , le produit d'inertie par rapport aux deux axes a pour expression: $I_{uv} = -\vec{v} \cdot \vec{I}_o(S) \cdot \vec{u}$

8.2. Démonstration

Deux propriétés vectorielles seront utilisées dans la démonstration de l'expression du produit d'inertie:

- le produit mixte dont on connaît la règle de permutation

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = (\vec{V}_3, \vec{V}_1, \vec{V}_2) = (\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1)$$

- le double produit vectoriel dont on connaît le résultat.

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

on pose: $\vec{A} = \frac{\vec{O}}{P}$, $\vec{B} = \vec{u}$, $\vec{C} = \frac{\vec{O}}{P}$, $\vec{D} = \vec{v}$

$$\left(\frac{\vec{O}}{P} \wedge \vec{u} \right) \cdot \left(\frac{\vec{O}}{P} \wedge \vec{v} \right) = \left(\frac{\vec{O}}{P} \cdot \vec{u} \right) \left(\vec{u} \cdot \vec{v} \right) - \left(\frac{\vec{O}}{P} \cdot \vec{v} \right) \left(\vec{u} \cdot \frac{\vec{O}}{P} \right) = - \left(\frac{\vec{O}}{P} \cdot \vec{v} \right) \left(\vec{u} \cdot \frac{\vec{O}}{P} \right)$$

car: $(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\vec{O}}{P} \cdot \vec{v} \right) \left(\vec{u} \cdot \frac{\vec{O}}{P} \right) &= - \left(\frac{\vec{O}}{P} \wedge \vec{u} \right) \cdot \left(\frac{\vec{O}}{P} \wedge \vec{v} \right) \\ &= - \left(\vec{u} \wedge \frac{\vec{O}}{P} \right) \cdot \left(\vec{v} \wedge \frac{\vec{O}}{P} \right) \\ &= - \left(\left(\frac{\vec{u}}{P}, \vec{v}, \frac{\vec{O}}{P} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{OP} \cdot \vec{v})(\vec{u} \cdot \vec{OP}) &= - \left(\left(\vec{u} \wedge \vec{OP}, \vec{v}, \vec{OP} \right) \right) = - \left(\vec{v}, \vec{OP}, \left(\vec{u} \wedge \vec{OP} \right) \right) = - \vec{v} \cdot (\vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP})) \\ &= - \vec{v} \cdot \left[\vec{u} \left(\frac{\vec{O}}{P} \cdot \frac{\vec{O}}{P} \right) - \frac{\vec{O}}{P} \left(\vec{u} \cdot \frac{\vec{O}}{P} \right) \right] = - \left(\vec{v} \cdot \vec{u} \right) \left(\vec{O} \cdot \frac{\vec{O}}{P} \right) + \left(\vec{v} \cdot \frac{\vec{O}}{P} \right) \left(\vec{u} \cdot \vec{O} \right) \\ &\quad \text{1 4424} \quad \text{P 4434} \quad \text{1 424} \quad \text{2 434} \end{aligned}$$

Soit: $\frac{\vec{O}}{P} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}; \quad \vec{u} = \begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{cases}; \quad \vec{v} = \begin{cases} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{cases}$

$$(1) : - \left(\begin{array}{c} \vec{v} \\ \vec{u} \end{array} \right) (\vec{OP} \cdot \vec{OP}) = -(v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= -v_1 u_1 (x^2 + y^2 + z^2) - v_2 u_2 (x^2 + y^2 + z^2) - v_3 u_3 (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$(2) \quad \left(\begin{array}{c} \vec{v} \\ \vec{O} \\ \vec{P} \end{array} \right) (\vec{u} \cdot \vec{O} \cdot \vec{P}) = (v_1 x + v_2 y + v_3 z)(u_1 x + u_2 y + u_3 z) = v_1 u_1 \frac{x^2}{z} + v_1 u_2 \frac{xy}{z} + v_1 u_3 \frac{x}{z}$$

$$+ v_2 u_1 \frac{xy}{z} + v_2 u_2 \frac{y^2}{z} + v_2 u_3 \frac{y}{z}$$

$$+ v_3 u_1 \frac{x}{z} + v_3 u_2 \frac{y}{z} + v_3 u_3 \frac{z^2}{z}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow x_x x_x = -v_1 u_1 (y^2 + z^2) - v_2 u_2 (x^2 + z^2) - v_3 u_3 (x^2 + y^2)$$

$$+ (v_1 u_2 + v_2 u_1) xy + (v_1 u_3 + v_3 u_1) xz + (v_2 u_3 + v_3 u_2) yz$$

Le produit d'inertie est donné par l'intégrale : $I_{xx} = \int_{P(S)} x_x x_x dm$ d'où

$$I_{xx} = -v_1 u_1 \int_{P(S)} (y^2 + z^2) dm - v_2 u_2 \int_{P(S)} (x^2 + z^2) dm - v_3 u_3 \int_{P(S)} (x^2 + y^2) dm$$

$$+ (v_1 u_2 + v_2 u_1) \int_{P(S)M} xy dm + (v_1 u_3 + v_3 u_1) \int_{P(S)M} xz dm + (v_2 u_3 + v_3 u_2) \int_{P(S)M} yz dm$$

Cette expression s'écrira sous forme matricielle :

$$I_{xx} = (-v_1, -v_2, -v_3) \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow I_{xx} = -\vec{v} \cdot I_O(S) \cdot \vec{u}$$

Le produit d'inertie du solide (S) par rapport aux axes orthogonaux $\Delta(O, \vec{u})$ et $\Delta(O, \vec{v})$ est égal à l'opposé du produit doublement contracté du tenseur d'inertie $I_O(S)$ par les vecteurs unitaires \vec{u} et \vec{v} .

9. Changement de repère.

Soit un repère orthonormé fixe: $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et un repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en rotation par rapport à celui-ci. A l'aide de la matrice de passage nous pouvons exprimer le moment d'inertie dans l'un des repères et le déduire dans l'autre repère et inversement.

En effet nous pouvons écrire :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = P_{R_1 \rightarrow R_0} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = P_{R_0 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}, \text{ avec } P_{R_0 \rightarrow R_1} = P_{R_1 \rightarrow R_0}^T$$

La matrice de passage de R_0 vers R_1 notée : $P_{R_0 \rightarrow R_1}$; permet de déduire la matrice d'inertie du solide dans le repère R_1 en la connaissant dans le repère R_0 et inversement.

$$I_O(S)_{/R_1} = P_{R_0 \rightarrow R_1}^T I_O(S)_{/R_0} P_{R_0 \rightarrow R_1}$$

$$I_O(S)_{/R_0} = P_{R_1 \rightarrow R_0}^T I_O(S)_{/R_1} P_{R_1 \rightarrow R_0}$$

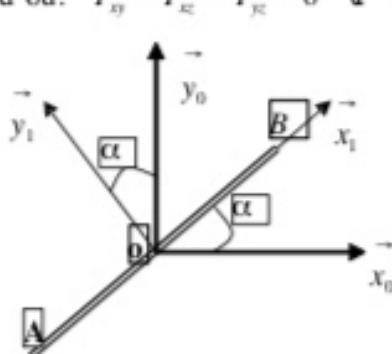
Exemple d'application :

Déterminer la matrice d'inertie de la barre AB de longueur L de masse m dans le repère

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en rotation par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

En déduire la matrice d'inertie dans le repère R_0 .

On détermine la matrice d'inertie de la barre dans le repère R_1 : Nous avons un solide linéaire: $dm = \lambda dx$; $y = 0$ et $z = 0$ d'où: $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ et $I_{xx} = 0$



$$I_{yy} = I_{zz} = \int_S x^2 d\vec{m} = \int_{-L}^L x^2 \lambda d\vec{x} = \frac{mL^2}{3} \quad \text{d'où: } I_O(S)_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}_{R_1}$$

On détermine la matrice de passage de R_1 vers R_0 en exprimant les vecteurs unitaires de R_1 en fonction de ceux de R_0 :

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \cos \alpha \vec{x}_0 + \sin \alpha \vec{y}_0 + 0 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{y}_1 &= -\sin \alpha \vec{x}_0 + \cos \alpha \vec{y}_0 + 0 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{z}_1 &= 0 \cdot \vec{x}_0 + 0 \cdot \vec{y}_0 + \vec{z}_0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec: } P_{R_1 \rightarrow R_0} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P_{R_0 \rightarrow R_1} = P_{R_1 \rightarrow R_0}^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice d'inertie dans le repère R_0 sera égale à: $I_O(S)_{R_0} = P_{R_1 \rightarrow R_0}^T I_O(S)_{R_1} P_{R_1 \rightarrow R_0}$

$$I_O(S)_{R_0} = P_{R_1 \rightarrow R_0}^T I_O(S)_{R_1} P_{R_1 \rightarrow R_0} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_O(S)_{R_0} = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3} \sin^2 \alpha & -\frac{mL^2}{3} \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ -\frac{mL^2}{3} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{mL^2}{3} \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}_{R_0}$$

10. Translation du repère R de centre O vers un centre A

On considère un solide (S) dont la matrice d'inertie est connue au point O d'un repère fixe

$R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Soit un point A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) centre du repère

$R(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en translation par rapport à $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

La matrice d'inertie au point A du solide (S) est donnée par :

$$I_A(S)_{R_0} = \begin{bmatrix} I_{Axx} & -I_{Axy} & -I_{Axz} \\ -I_{Ayx} & I_{Ayy} & -I_{Ayz} \\ -I_{Axz} & -I_{Ayz} & I_{Azz} \end{bmatrix}_{R_0}$$

Les éléments de cette matrice s'obtiennent en

remplaçant le vecteur \vec{OP} comme précédemment
par le vecteur \vec{AP} dans l'opérateur d'inertie.

Nous avons en effet : $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = (x - x_A)\vec{x}_0 + (y - y_A)\vec{y}_0 + (z - z_A)\vec{z}_0$

On obtient ainsi les moments et les produits d'inertie en A :

$$I_{Axx} = \int_{(S)} (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 dm$$

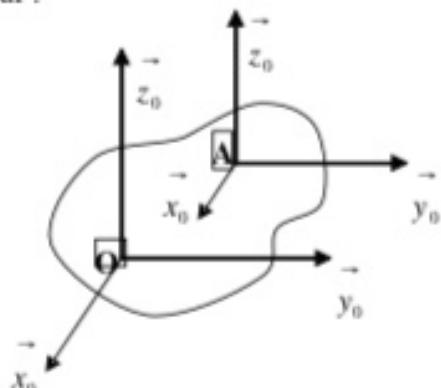
$$I_{Ayy} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm + y_A^2 \int_{(S)} dm + z_A^2 \int_{(S)} dm - 2y_A \int_{(S)} y dm - 2z_A \int_{(S)} z dm$$

Soit m la masse du solide (S) et G son centre d'inertie. Les coordonnées (x_G, y_G, z_G) du

centre d'inertie dans le repère $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ déjà exprimé au début du chapitre, ont pour

expression : $x_G = \frac{1}{m} \int_{(S)} x dm ; y_G = \frac{1}{m} \int_{(S)} y dm ; z_G = \frac{1}{m} \int_{(S)} z dm$

$$\int_{(S)} x dm = mx_G ; \int_{(S)} y dm = my_G ; \int_{(S)} z dm = mz_G$$



En remplaçant ces termes dans l'expression de I_{Axz} , on obtient :

$$I_{Axz} = I_{Oxz} + m(y_A^2 + z_A^2) - 2y_A y_G - 2z_A z_G \quad \text{et par permutation les autres termes}$$

$$I_{Ayx} = I_{Oyx} + m(x_A^2 + z_A^2) - 2x_A x_G - 2z_A z_G$$

$$I_{Ayz} = I_{Oyz} + m(x_A^2 + y_A^2) - 2x_A x_G - 2y_A y_G$$

De la même manière pour les produits d'inertie nous avons :

$$I_{Axy} = \int_{(S)} (x - x_A)(y - y_A) dm = \int_{(S)} xy dm - x_A \int_{(S)} y dm - y_A \int_{(S)} x dm + x_A y_A \int_{(S)} dm$$

$$I_{Axy} = I_{Oxy} - m(x_A y_G + y_A x_G - x_A y_A) \quad \text{et par permutation les autres termes}$$

$$I_{Axz} = I_{Oxz} - m(x_A z_G + z_A x_G - x_A z_A)$$

$$I_{Ayz} = I_{Oyz} - m(y_A z_G + z_A y_G - y_A z_A)$$

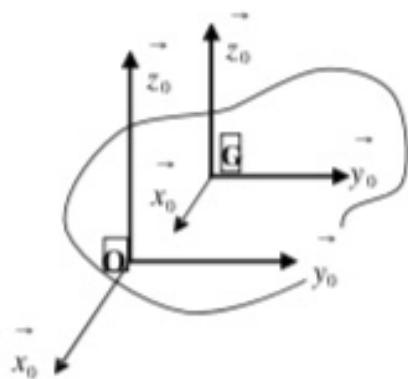
II. Théorème de HUYGENS

Si le tenseur d'inertie est connu au centre d'inertie G du solide (S) dans la base

$\vec{R}(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$; alors on peut déterminer le tenseur d'inertie au point O dans la même base.

Reprendons le cas précédent avec le point A qui coïncide avec le centre d'inertie du solide

(S) , nous aurons dans le repère $R(G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: $\vec{GP} = \vec{OP} - \vec{OG}$



En remplaçant par les opérateurs d'inertie on obtient : $I_G(S)_{R_0} = I_O(S)_{R_0} - J_{OG}(S)_{R_0}$

En utilisant les relations trouvées précédemment, en changeant le centre du repère en G , nous déduisons facilement :

$$I_{Gxx} = I_{Oxx} + m(y_G^2 + z_G^2) - 2y_G y_G - 2z_G z_G = I_{Oxx} - m(y_G^2 + z_G^2)$$

$$I_{Gyy} = I_{Oyy} + m(x_G^2 + z_G^2) - 2x_G x_G - 2z_G z_G = I_{Oyy} - m(x_G^2 + z_G^2)$$

$$I_{Gzz} = I_{Ozz} + m(x_G^2 + y_G^2) - 2x_G x_G - 2y_G y_G = I_{Ozz} - m(x_G^2 + y_G^2)$$

De la même manière pour les produits d'inertie nous avons :

$$I_{Gxy} = I_{Oxy} - m(x_G y_G + y_G x_G - x_G y_G) = I_{Oxy} - mx_G y_G$$

$$I_{Gxz} = I_{Oxz} - m(x_G z_G + z_G x_G - x_G z_G) = I_{Oxz} - mx_G z_G$$

$$I_{Gyz} = I_{Oyz} - m(y_G z_G + z_G y_G - y_G z_G) = I_{Oyz} - my_G z_G$$

$$\text{d'où : } J_{OG}(S)_{R_0} = \begin{bmatrix} m(y_G^2 + z_G^2) & -mx_G y_G & -mx_G z_G \\ -mx_G y_G & m(x_G^2 + z_G^2) & -my_G z_G \\ -mx_G z_G & -my_G z_G & m(x_G^2 + y_G^2) \end{bmatrix}_{R_0}$$

Ces expressions permettent de déterminer la matrice d'inertie du solide en O : $I_O(S)_{R_0}$, dans

le repère $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, en connaissant la matrice d'inertie en G : $I_G(S)_{R_0}$ dans le même repère car elle est plus souvent facile à déterminer.

$$I_O(S)_{R_0} = I_G(S)_{R_0} + J_{OG}(S)_{R_0}$$

Cette expression permet de connaître les six relations de Huygens, qui lient les moments d'inertie et les produits d'inertie en un point O d'un repère et le centre d'inertie G du solide dans le même repère.

$$I_{Oxx} = I_{Gxx} + m(y_G^2 + z_G^2)$$

$$I_{Oxy} = I_{Gxy} + mx_G y_G$$

$$I_{Oyy} = I_{Gyy} + m(x_G^2 + z_G^2)$$

$$I_{Oxz} = I_{Gxz} + mx_G z_G$$

$$I_{Ozz} = I_{Gzz} + m(x_G^2 + y_G^2)$$

$$I_{Oyz} = I_{Gyz} + my_G z_G$$

Le théorème de Huygens est très pratique car il permet de déterminer le moment d'inertie

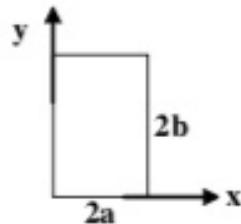
d'un solide dans n'importe point O de l'espace centre du repère $\vec{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, en connaissant le moment d'inertie au centre d'inertie G de coordonnées $((x_G, y_G, z_G))$ par rapport au même repère.

Exemple :

Déterminer le moment d'inertie au point O de la plaque mince rectangulaire de masse m , de longueur $2a$ et de largeur $2b$ de centre d'inertie $G(a, b, 0)$

On détermine le moment d'inertie de la plaque au point G , puis par le théorème de Huygens, on le déduit au point O .

Les plans (xGz) et (yGz) sont des plans de symétrie, alors tous les produits d'inertie sont nuls : $I_{Gxy} = I_{Gxz} = I_{Gyz} = 0$; la matrice d'inertie en G est diagonale.



Masse de la plaque : $m = \sigma 4ab$

Nous avons un solide plan : $z = 0 \Rightarrow I_{Gz} = I_{Gxx} + I_{Gyy}$,

$$I_{Gxx} = \int_S y^2 dm = \int_S y^2 \sigma ds = \sigma \int_S y^2 dx dy = \sigma \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b y^2 dy = \sigma \cdot 2a \cdot \frac{2}{3}b^3 = \sigma 4ab \frac{b^2}{3} = \frac{mb^2}{3}$$

$$I_{Gyy} = \int_S x^2 dm = \int_S x^2 \sigma ds = \sigma \int_S x^2 dx dy = \sigma \int_{-a}^a x^2 dx \int_{-b}^b dy = \sigma \cdot \frac{2}{3}a^3 \cdot 2b = \sigma 4ab \frac{a^2}{3} = \frac{ma^2}{3}$$

$$I_{Gz} = I_{Gxx} + I_{Gyy} = \frac{m}{3}(a^2 + b^2)$$

La matrice d'inertie au point G s'écrit : $I_G(S) = \begin{bmatrix} \frac{mb^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2 + b^2)}{3} \end{bmatrix}$

On déduit par le théorème de Huygens :

$$I_{Ox} = \frac{mb^2}{3} + mb^2 = \frac{4}{3}mb^2 ; \quad I_{Oy} = 0 + mab$$

$$I_{Oy} = \frac{ma^2}{3} + ma^2 = \frac{4}{3}ma^2 ; \quad I_{Oz} = 0 + ma \cdot 0 = 0$$

$$I_{Ox} = \frac{m}{3}(a^2 + b^2) + m(a^2 + b^2) = \frac{4}{3}m(a^2 + b^2) ; \quad I_{Oz} = 0 + mb \cdot 0 = 0$$

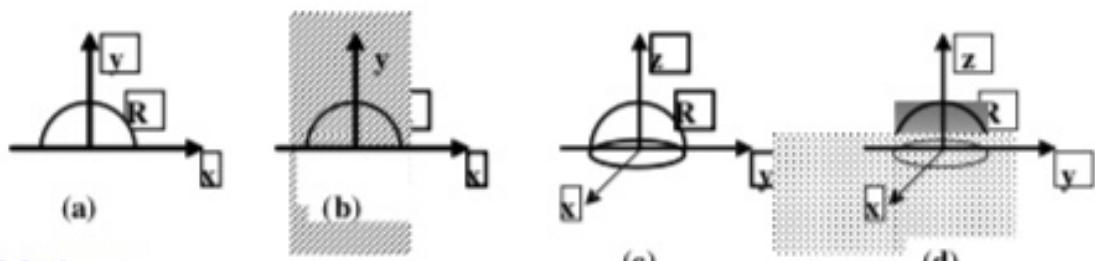
La matrice d'inertie au point O est égale à : $I_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}mb^2 & -mab & 0 \\ -mab & \frac{4}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$

EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 01 :

Déterminer le centre d'inertie des corps solides homogènes suivants :

- Un demi-cercle matériel de rayon R ;
- Un demi disque matériel de rayon R ;
- Une demi sphère matérielle creuse de rayon R ;
- Une demi sphère matérielle pleine de rayon R .

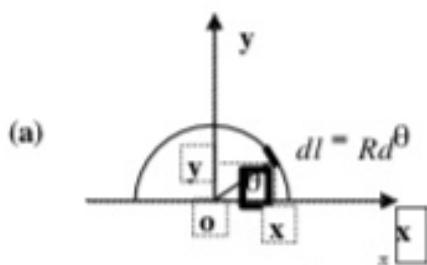


Solution :

a) L'axe (Oy) est un axe de symétrie donc : $x_G = 0$, le centre de masse du solide est situé sur l'axe de symétrie. On a : $y_G = \frac{1}{m_s} \int dm$

Le solide est linéaire ayant la forme d'un demi cercle, sa masse est donnée par : $m = \int \lambda dl$ où : λ est la densité linéaire et dl un élément de longueur. L'élément de longueur

dl a pour coordonnées : $dl \begin{cases} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{cases}$ avec : $0 \leq \theta \leq \pi$



La masse du solide est donnée par : $m = \int_S \lambda dl = \int_0^\pi \lambda R d\theta = \lambda \pi R$

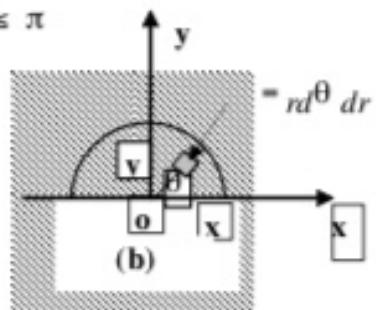
$$y_G = \frac{1}{m_s} \int y dm = \frac{1}{m_s} \int y \lambda dl = \frac{1}{\lambda \pi R} \int_0^\pi R \sin \theta R d\theta = \frac{R}{\pi} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = \frac{2R}{\pi}; \quad \text{d'où : } G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{2R}{\pi} \end{cases}$$

b) L'axe (Oy) est un axe de symétrie donc : $x_G = 0$, le centre de masse du solide est situé sur

l'axe de symétrie. On a : $y_G = \frac{1}{m_s} \int dm$. Le solide est un demi disque, sa masse est donnée

par : $m = \int_S \sigma ds$ où : σ est la densité surfacique et ds un élément de surface. L'élément de

surface ds a pour coordonnées : $ds \begin{cases} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{cases}$ avec : $0 \leq \theta \leq \pi$



La masse du solide est donnée par :

$$m = \int_S \lambda ds = \int_0^{\pi} \int_0^R r d\theta dr = \lambda \int_0^{\pi} r dr \int_0^R d\theta = \sigma \frac{\pi R^2}{2}$$

$$y_G = \frac{1}{m_s} \int y dm = \frac{1}{m_s} \int y \sigma ds = \frac{2}{\sigma \pi R^2} \int_0^{\pi} r \sin \theta r d\theta dr = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta$$

$$y_G = \frac{4R}{3\pi} \quad \text{d'où : } G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{4R}{3\pi} \end{cases}$$

c) Les plans (xOz) et (yOz) sont des plans de symétrie donc : $x_G = y_G = 0$, le centre de

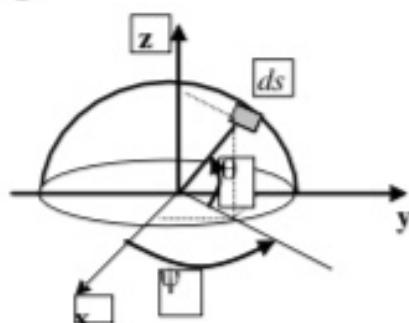
masse du solide est situé sur l'axe de symétrie. On a : $z_G = \frac{1}{m_s} \int dm$

Le solide est une demi sphère creuse, sa masse est donnée par :

$m = \int_S \sigma ds$ où : σ est la densité surfacique et ds un élément de surface. L'élément de surface

ds est donné par : $ds = Rd\theta R\psi \cos \theta$ et a pour coordonnées : $ds \begin{cases} R \cos \theta \cos \psi \\ R \cos \theta \sin \psi \\ R \sin \theta \end{cases}$

avec : R constant ; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq \psi \leq 2\pi$



La masse du solide est donnée par : $m = \int_S \sigma dS = \sigma R^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \sigma 2\pi R^2$

$$z_G = \frac{1}{m} \int_S z dm = \frac{1}{m} \int_S z \sigma dS = \frac{\sigma R^3}{\sigma 2\pi R^2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{R}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta) \int_0^{2\pi} d\psi$$

$$z_G = \frac{R}{2\pi} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = \frac{R}{2} \quad ; \quad d'où : G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = R/2 \end{cases}$$

d) Les plans (xOz) et (yOz) sont des plans de symétrie donc : $x_G = y_G = 0$, le centre de

masse du solide est situé sur l'axe de symétrie (Oz). On a alors : $z_G = \frac{1}{m} \int_S dm$

Le solide est une demi sphère pleine, sa masse est donnée par : $m = \int_S \rho dv$ où : ρ est la

densité volumique et dv un élément de volume. L'élément de volume dv est donné

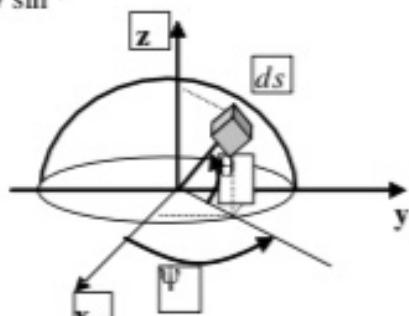
par : $dv = r d\theta r d\psi dr \cos \theta$ et a pour coordonnées : $dv = \begin{cases} r \cos \theta \cos \psi \\ r \cos \theta \sin \psi \\ r \sin \theta \end{cases}$

avec : $0 \leq r \leq R$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq \psi \leq 2\pi$

La masse du solide est donnée par :

$$m = \int_S \rho dv = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \rho \frac{2}{3}\pi R^3$$

on déduit :

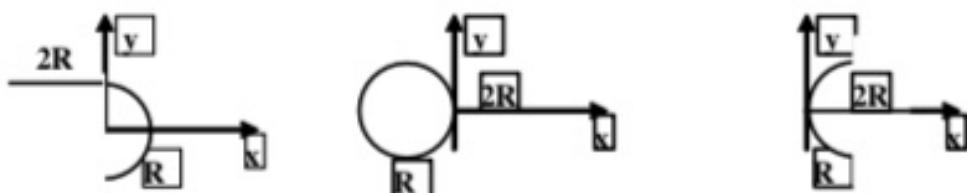


$$z_G = \frac{1}{m} \int_S z dm = \frac{1}{m} \int_S z \rho dv = \frac{\rho}{m} \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{\rho}{\rho \frac{2}{3}\pi R^3} \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = \frac{3R}{8}$$

$$z_G = \frac{3R}{8} \quad ; \quad d'où : G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = 3R/8 \end{cases}$$

Exercice 02 :

Déterminer le centre d'inertie des masses linéaires homogènes suivantes :



Exercice 03 :

Déterminer le centre d'inertie de la surface triangulaire homogène suivante.

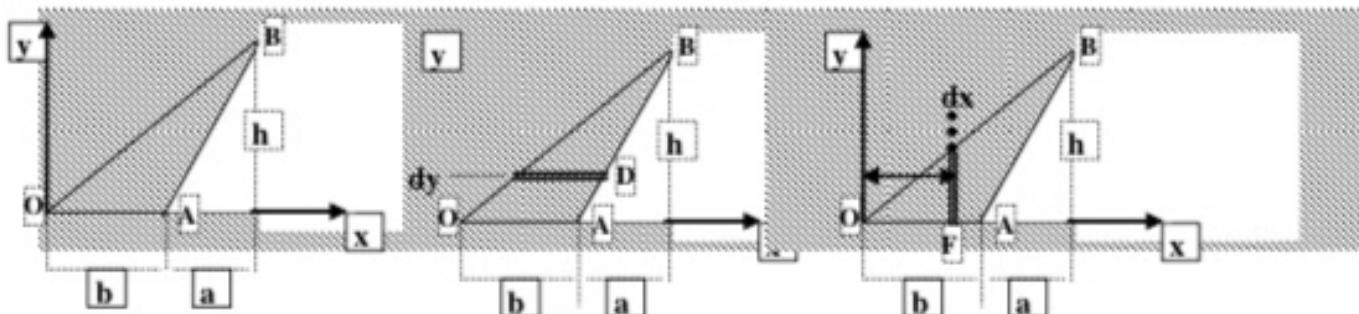


Figure 01

Figure 02

Figure 03

$$\text{Masse du solide plan : } m = \sigma S = \sigma \cdot \frac{1}{2} b h$$

$$\text{Calculons } y_G = \frac{1}{m_s} \int y dm = \frac{1}{m_s} \int y \sigma ds \quad (\text{figure 02})$$

L'élément de surface est donné par : $ds = L_1 dy$; avec $L_1 = CD$

$$\text{Dans les triangles semblables } OAB \text{ et } CBD, \text{ nous avons : } \frac{CD}{OA} = \frac{h-y}{h} \Leftrightarrow \frac{L_1}{b} = \frac{h-y}{h}$$

$$L_1 = \frac{b}{h}(h-y) \text{ ce qui donne : } ds = \frac{b}{h}(h-y)dy \text{ avec } 0 \leq y \leq h$$

$$y_G = \frac{1}{m_s} \int y \sigma ds = \frac{2}{bh_s} \int y \frac{b}{h}(h-y)dy = \frac{2}{h^2} \left[\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{h}{3} ; \quad y_G = \frac{h}{3}$$

$$\text{Calculons } x_G = \frac{1}{m_s} \int x dm = \frac{1}{m_s} \int x \sigma ds \quad (\text{figure 03})$$

L'élément de surface est donné par : $ds = L_2 dx$; avec $L_2 = EF$ et $0 \leq x \leq a+b$

Dans les triangles semblables OEF et OBC , nous avons : $\frac{EF}{OF} = \frac{BC}{OC} \Leftrightarrow \frac{L_1}{x} = \frac{h}{a+b}$

$$L_1 = \frac{h}{a+b} \cdot x \quad , \quad \text{ce qui donne : } ds = \frac{h}{a+b} \cdot x dx$$

$$x_G = \frac{1}{m_S} \int x \sigma ds = \frac{2}{bh} \int_0^b x \frac{h}{a+b} x dx = \frac{2}{b(a+b)} \int_0^b x^2 dx = \frac{2}{3} \frac{(a+b)^2}{b} ; \quad x_G = \frac{2}{3} \frac{(a+b)^2}{b}$$

Exercice 04:

Déterminer, par intégration et par le théorème de Guldin, les coordonnées des centres d'inertie des corps surfaciques homogènes suivants :

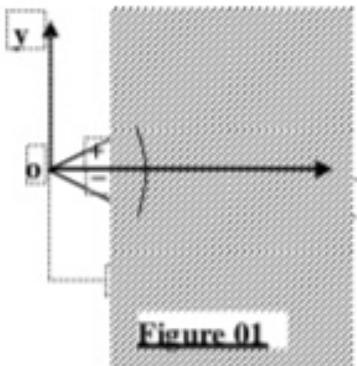


Figure 01

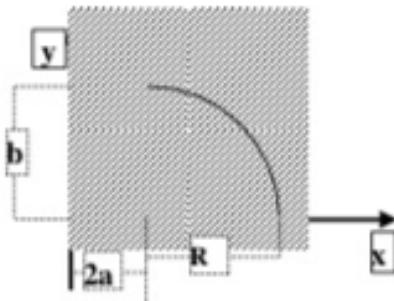


Figure 02

Solution :

figure 01 :

Centre d'inertie par intégration :

Par raison de symétrie, le centre d'inertie est sur l'axe (**Ox**), alors $y_G = 0$

On calcule d'abord le centre d'inertie du triangle puis celui de la portion de disque, ensuite on déduit le centre d'inertie du solide.

a) Centre d'inertie du triangle :

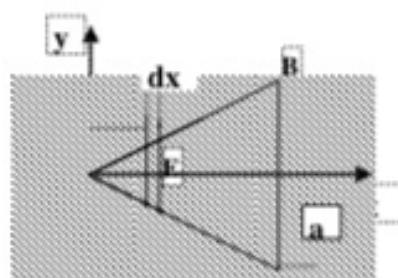
$$\text{masse du triangle : } m_1 = \sigma S_1 = \sigma \frac{2a \cdot 2R}{2} = 2aR ;$$

on choisit un élément de surface :

$$ds_1 = CD dx = L_1 dx ; \text{ avec : } 0 \leq x \leq 2R .$$

Les triangles **OED** et **OFB** sont semblables ;

$$\text{Nous pouvons écrire : } \frac{OE}{OF} = \frac{ED}{FB} \Leftrightarrow \frac{x}{2R} = \frac{L_1/2}{a} \Rightarrow L_1 = \frac{a}{R} x$$



$$x_{1G} = \frac{1}{m_1} \int x dm_1 = \frac{1}{m_1} \int x \sigma ds_1 = \frac{1}{\sigma 2aR} \int_0^R x \sigma \frac{a}{R} x dx = \frac{1}{2R^2} \int_0^R x^2 dx = \frac{4R}{3}$$

b) Centre d'inertie de la portion de disque :

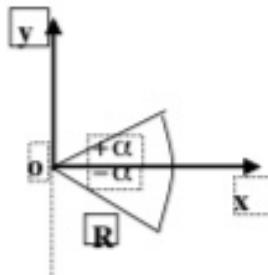
Masse de la portion de disque :

$$m_2 = \int \sigma ds_2 = \sigma \int_0^R r dr \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta = \sigma \alpha R^2$$

on choisit un élément de surface $ds_2 = rd\theta dr$

de coordonnées : $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$

avec : $-\alpha \leq \theta \leq +\alpha$ et $0 \leq r \leq R$



$$\text{On déduit alors : } x_{2G} = \frac{1}{m_2} \int x dm_2 = \frac{1}{m_2} \int x \sigma ds_2 = \frac{1}{\sigma \alpha R^2} \int_0^R x \sigma r dr d\theta$$

$$x_{2G} = \frac{1}{\alpha R^2} \int_0^R r^2 dr \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta d\theta = \frac{1}{\alpha R^2} \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 2 \sin \alpha = \frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} ; \quad x_{2G} = \frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Centre d'inertie du solide :

$$x_G = \frac{x_{1G} m_1 - x_{2G} m_2}{m_1 - m_2} = \frac{x_{1G} s_1 - x_{2G} s_2}{s_1 - s_2}$$

$$x_G = \frac{\frac{4R}{3} \cdot 2aR - \frac{2R}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \alpha R^2}{2aR - \alpha R^2} = \frac{2R}{3} \cdot \frac{4a - R \sin \alpha}{2a - \alpha R}$$

Centre d'inertie du solide par le théorème de Guldin :

La rotation se fait autour de l'axe Oy

$$x_G = \frac{V_{int} / y}{2\pi S_{int}} = \frac{(2aR) \cdot 2\pi \cdot \frac{4R}{3} - (\alpha R^2) \cdot 2\pi \cdot \frac{2R}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha}}{2\pi (2aR - \alpha R^2)} = \frac{2R}{3} \cdot \frac{4a - R \sin \alpha}{2a - \alpha R}$$

figure 02 :

Centre d'inertie par intégration :

On calcul le centre d'inertie des trois solides (rectangle, quart de disque, disque) séparément puis on déduit le centre d'inertie du solide entier.

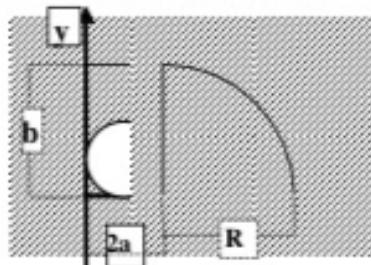
a) Centre d'inertie du rectangle :

Masse du rectangle : $dm_1 = \sigma ds_1 = \sigma dx dy$

Avec $0 \leq x \leq 2a$; $0 \leq y \leq b$; $m_1 = \sigma 2ab$

$$x_{IG} = \frac{1}{m_1} \int_{S_1} x dm_1 = \frac{1}{m_1} \int_{S_1} x \sigma ds_1 = \frac{\sigma}{\sigma 2ab} \int_0^{2a} x dx \int_0^b dy = a$$

$$y_{IG} = \frac{1}{m_1} \int_{S_1} y dm_1 = \frac{1}{m_1} \int_{S_1} y \sigma ds_1 = \frac{\sigma}{\sigma 2ab} \int_0^{2a} dx \int_0^b y dy = \frac{b}{2}$$



b) Centre d'inertie du quart de disque :

On fait une translation de repère de $2a$ suivant l'axe (Ox) puis on calcule les coordonnées du centre de masse du quart de disque. On choisit un élément de surface :

$$dm_2 = \sigma ds_2 = \sigma r d\theta dr \quad \text{avec : } 0 \leq r \leq R ; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} ; \text{ d'où } m_2 = \sigma \frac{\pi R^2}{4}$$

Les coordonnées du centre de masse seront données par :

$$x_{2G} = 2a + \frac{1}{m_2} \int_{S_1} x dm_2 = 2a + \frac{1}{m_2} \int_{S_1} x \sigma ds_2 = 2a + \frac{\sigma}{\sigma \frac{\pi R^2}{4}} \int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 2a + \frac{4R}{3\pi}$$

$$y_{2G} = \frac{1}{m_2} \int_{S_1} y dm_2 = \frac{1}{m_2} \int_{S_1} y \sigma ds_2 = \frac{\sigma}{\sigma \frac{\pi R^2}{4}} \int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \frac{4R}{3\pi}$$

c) Centre d'inertie du disque :

Masse du disque : $m_3 = \sigma \pi a^2$

Les coordonnées du centre de masse sont : $x_{3G} = a$ et $y_{3G} = a$

Le solide est homogène, alors le centre d'inertie des masses est le même que le centre d'inertie des surfaces. Les coordonnées du centre d'inertie du solide qui est un système composé seront données par les relations suivantes :

$$\text{Sur l'axe des x:} \quad x_G = \frac{x_{1G} m_1 + x_{2G} m_2 + x_{3G} m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{x_{1G} s_1 + x_{2G} s_2 + x_{3G} s_3}{s_1 + s_2 + s_3}$$

$$\text{d'où : } x_G = \frac{\frac{a}{2}ab + \left(a + \frac{4R}{3\pi}\right) \cdot \frac{\pi R^2}{4} - a\pi a^2}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2} = \frac{\frac{a^2b}{2} + \left(a + \frac{4R}{3\pi}\right) \cdot \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^3}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2}$$

de même sur l'axe des **y**

$$y_G = \frac{y_{1G}m_1 + y_{2G}m_2 - y_{3G}m_3}{m_1 + m_2 - m_3} = \frac{y_{1G}s_1 + y_{2G}s_2 - y_{3G}s_3}{s_1 + s_2 - s_3}$$

d'où :

$$y_G = \frac{\frac{b}{2}ab + \frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{4} - a\pi a^2}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2} = \frac{\frac{ab^2}{2} + \frac{R^3}{3} - \pi a^3}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2}$$

Les coordonnées du centre d'inertie du solide composé sont :

$$G \left(\frac{\frac{a^2b}{2} + \left(a + \frac{4R}{3\pi}\right) \cdot \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^3}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2}, \frac{\frac{ab^2}{2} + \frac{R^3}{3} - \pi a^3}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2} \right)$$

- d) Par le théorème de Guldin, en faisant tourner le solide autour des axes, nous déduisons le centre d'inertie du solide composé.

*La rotation par rapport à l'axe **y** donne la coordonnée x_G :*

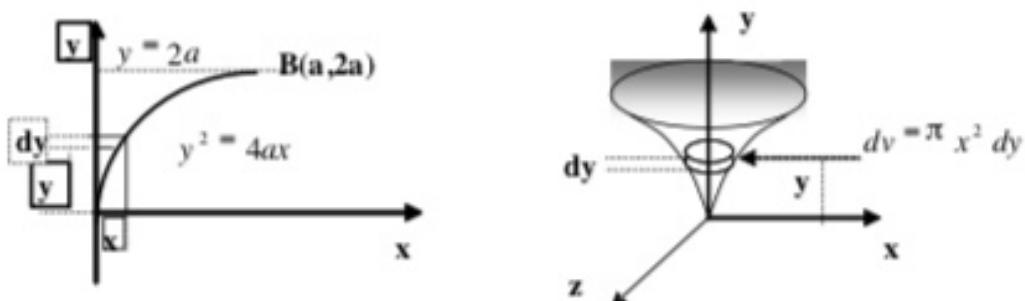
$$x_G = \frac{V_{tot}/y}{2\pi S_{tot}} ; \quad x_G = \frac{\pi a^2 b + 2\pi \left(a + \frac{4R}{3\pi}\right) \cdot \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2 \cdot 2\pi a}{2\pi \left(ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2\right)} = \frac{\frac{a^2b}{2} + \left(a + \frac{4R}{3\pi}\right) \cdot \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^3}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2}$$

*La rotation par rapport à l'axe **x** donne la coordonnée y_G :*

$$y_G = \frac{V_{tot}/x}{2\pi S_{tot}} ; \quad y_G = \frac{\pi b^2 a + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) - \pi a^2 \cdot 2\pi a}{2\pi \left(ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2\right)} = \frac{\frac{ab^2}{2} + \frac{R^3}{3} - \pi a^3}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2}$$

Exercice 05:

En faisant tourner la surface limitée par l'axe **oy**, la courbe parabolique d'équation $y^2 = 4ax$ et la droite d'équation $y = 2a$, nous obtenons un volume, comme représenté sur la figure ci-dessous. Déterminer le centre d'inertie de ce volume.



Solution :

$$\text{Nous avons } y^2 = 4ax \Rightarrow x = \frac{y^2}{4a} \text{ pour : } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = a \Rightarrow y = 2a \end{cases}$$

La rotation de cette surface par rapport à l'axe des **y** donne un solide de révolution d'axe **y**.

Par raison de symétrie, le centre de masse sera sur l'axe **Oy**, alors : $x_G = 0$ et $y_G = 0$

A une hauteur y , on choisit un élément de volume (couronne) dv ayant une surface circulaire égale à πx^2 et d'épaisseur dy tel que : $dv = \pi x^2 dy$ avec $0 \leq y \leq 2a$

Le volume total décrit par la rotation de cette surface est égal à :

$$V = \int_0^{2a} \pi x^2 dy = \int_0^{2a} \pi \left(\frac{y^4}{16a^2} \right) dy = \frac{\pi}{16a^2} \cdot \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^{2a} = \frac{2}{5} \pi a^3$$

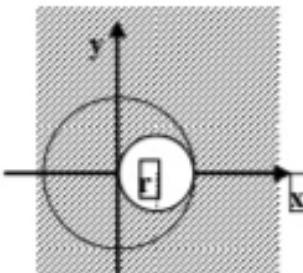
La coordonnée du centre de masse du volume suivant l'axe **Oy** est donnée par :

$$y_G = \frac{1}{m_S} \int y dm = \frac{1}{\rho V} \int y \rho dv = \frac{1}{V} \int_0^{2a} y \cdot \pi \left(\frac{y^4}{16a^2} \right) dy = \frac{1}{V} \int_0^{2a} y \cdot \pi \left(\frac{y^2}{4a} \right)^2 dy$$

$$y_G = \frac{\pi}{16a^2 V} \int_0^{2a} y^5 dy = \frac{\pi}{16a^2 \cdot \frac{2}{5} \pi a^3} \left[\frac{y^6}{6} \right]_0^{2a} = \frac{5}{3} a$$

Exercice 06:

Déterminer le centre d'inertie du disque homogène après avoir percé un trou de rayon r , comme indiqué sur la figure.



Exercice 07:

Déterminer les coordonnées du centre d'inertie, par le théorème de Guldin, des solides homogènes suivants :

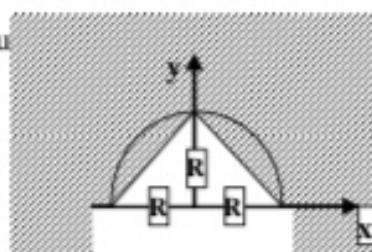


Figure 01

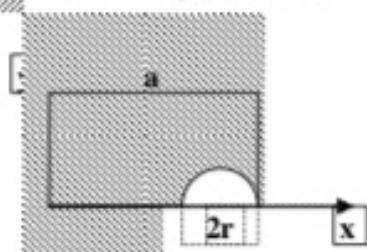


Figure 02

Solution :

a) figure 01:

Le solide est constitué d'un demi disque évidé d'un triangle isocèle dont la base est le diamètre du disque et la hauteur le rayon du disque.

Par raison de symétrie le solide a son centre d'inertie sur l'axe des y , d'où : $x_G = 0$

$$y_G = \frac{V_{tot}/x}{2\pi S_{tot}} = \frac{Vol(sphère) - Vol(2cônes)}{2\pi (S_{disque} - S_{triangle})} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^3}{2\pi (\frac{\pi R^2}{2} - R^2)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{\pi - 2}$$

b) figure 02:

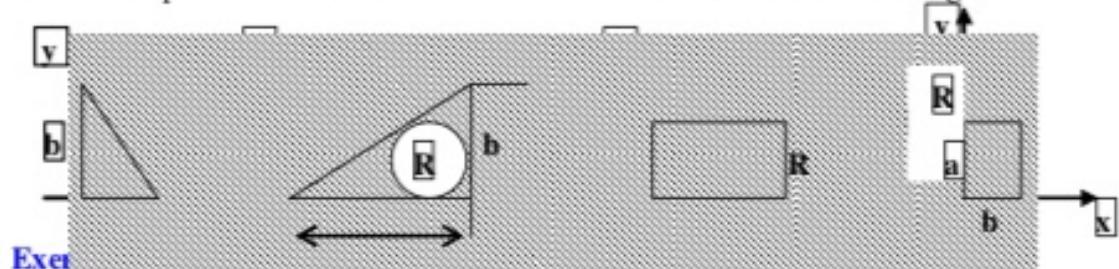
Le solide est constitué d'une plaque rectangulaire évidée d'un demi disque.

$$x_G = \frac{V_{tot}/y}{2\pi S_{tot}} = \frac{Vol(cylindre) - Vol(demi-disque)}{2\pi (S_{disque} - S_{triangle})} = \frac{\frac{\pi a^2 b}{2} - \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot 2\pi (a - r)}{2\pi (ab - \frac{\pi r^2}{2})} = \frac{a^2 b - \pi r^2 (a - r)}{2ab - \pi r^2}$$

$$y_G = \frac{V_{tot}/x}{2\pi S_{tot}} = \frac{Vol(cylindre) - Vol(sphère)}{2\pi (S_{disque} - S_{triangle})} = \frac{\frac{\pi b^2 a}{3} - \frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi (ab - \frac{\pi r^2}{2})} = \frac{3ab^2 - 4r^3}{3(2ab - \pi r^2)}$$

Exercice 08:

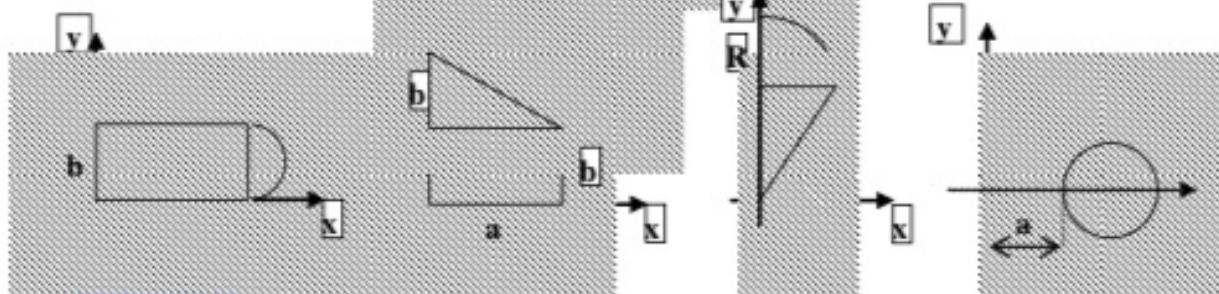
Déterminer par le théorème de Guldin le centre d'inertie des solides homogènes suivants :



Exercice 08:

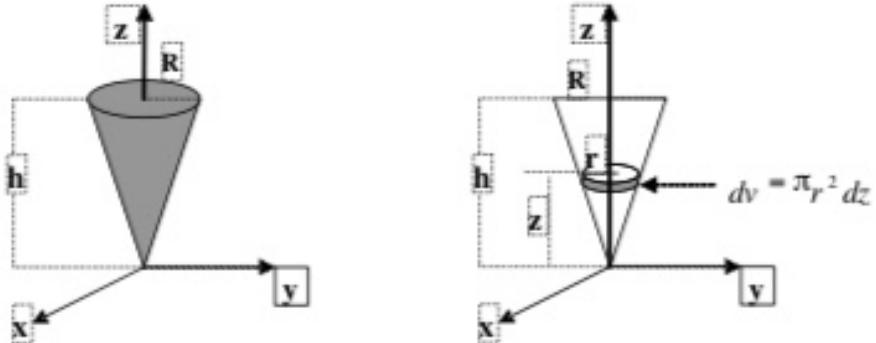
Calculer les volumes en

dessous autour de l'axe y ?



Exercice 10:

Déterminer le centre d'inertie d'un cône de hauteur h et de rayon de base R par rapport à son sommet.



Par raison de symétrie le centre d'inertie du cône est situé sur l'axe Oz. On choisit un élément

$$\text{de volume : } dv = \pi r^2 dz \text{ et situé à une hauteur } z \text{ tel que : } \frac{r}{z} = \frac{R}{h} \Rightarrow r = \frac{R}{h} z$$

$$\text{Le centre d'inertie est donné par : } z_G = \frac{1}{m_s} \int z dm \quad \text{avec : } 0 \leq z \leq h$$

Calculons d'abord la masse du cône. Nous avons : $dm = \rho dv$

$$m_s = \rho \int_S dm = \rho \int_S \pi r^2 dz = \rho \pi \int_0^h \frac{R^2}{h^2} z^2 dz = \rho \pi \frac{R^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \rho \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$\text{d'où : } z_G = \frac{1}{m_s} \int z dm = \frac{1}{m_s} \int z \rho \pi r^2 dz = \frac{3}{\rho \pi R^2 h} \int z \rho \pi \left(\frac{R^2}{h^2} z^2 \right) dz = \frac{3}{h^3} \int z^3 dz = \frac{3}{4} h$$

Exercice 11 :

Déterminer les tenseurs d'inertie en **O** relativement au repère orthonormé $R(O,x,y,z)$ des solides homogènes (**S**) suivants :

1. (**S**) est une barre **AB** de longueur **L**, de milieu **O**, portée par l'axe **Oy** ;
2. (**S**) est un cercle de centre **O**, de rayon **R**, d'axe **Oz** ;
3. (**S**) est un disque de centre **O**, de rayon **R**, d'axe **Oz** ;
4. (**S**) est une sphère creuse de centre **O**, de rayon **R** ;
5. (**S**) est une sphère pleine de centre **O**, de rayon **R** ;
6. (**S**) est une plaque rectangulaire de dimension **a** x **b** de centre de gravité **O**, l'axe **Oz** est perpendiculaire à la plaque ;
7. (**S**) est un parallélépipède plein de dimension **2a** x **2b** x **2c** et le centre du repère est en **O** milieu du côté **2a**.

Solution :**1. Le solide est une barre de longueur L**

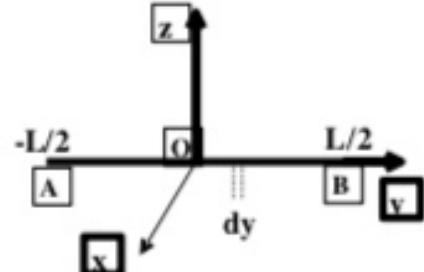
Nous avons un solide linéaire **AB = L** de masse **m** et de densité linéaire **λ** tel que :

$$m = \int_S dm = \int_S \lambda dy = \lambda L \Rightarrow \lambda = \frac{m}{L}$$

On choisit un élément de longueur **dy** ayant pour coordonnées : $(0, y, 0)$ tel que : $-L \leq y \leq +L$

Les moments d'inertie sont données par :

$$I_{xx} = \int_S (y^2 + z^2) dm ; I_{yy} = \int_S (x^2 + z^2) dm ; I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm$$



$$\text{Les produits d'inertie sont données par : } I_{xy} = \int_S xy dm ; I_{xz} = \int_S xz dm ; I_{yz} = \int_S yz dm$$

On remarque que les axes **Ox** et **Oz** jouent le même rôle vis à vis du solide, alors : $I_{xy} = I_{xz}$

L'élément de longueur choisi a pour coordonnées $x = 0$ et $z = 0$ alors $I_{yy} = 0$ et tous les produits d'inertie sont nuls : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

CHAPITRE V

CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

CINÉMATIQUE DU POINT MATERIEL

1. Définition

La cinématique est l'étude des mouvements dans l'espace et le temps indépendamment des causes qui les a produit et des phénomènes qui les influencent. La position du point matériel P est déterminée dans l'espace à chaque instant du mouvement.

Par rapport à la statique où à la géométrie des masses, traités dans les chapitres précédents, la cinématique introduit un nouveau paramètre qui est le temps. Ce paramètre sert à fixer et à repérer toutes les positions occupées par le point matériel, parmi toutes les positions qu'il a occupé auparavant.

La notion de temps permet de rendre compte de la simultanéité de deux événements, de l'ordre de leurs successions et de la durée de l'intervalle qui les sépare. Ceci nous amène à travailler dans un repère où un observateur lié à ce repère, peut étudier le mouvement dans l'espace et le temps.

2. Hypothèses fondamentales

Pour étudier le mouvement d'un point matériel P où plus généralement d'un système de particules où de solides un observateur doit repérer leur position :

- dans l'espace ;
- dans le temps.

En cinématique classique, on suppose que :

- l'espace est Euclidien (à trois dimensions) ;
- le temps est absolu (indépendant de l'observateur)

3. Les référentiels

Afin d'étudier complètement le mouvement cinématique, l'observateur doit définir :

- un repère d'espace, lié à l'observateur, avec une origine O et une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le trièdre $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ainsi constitué définit complètement le repère d'espace ;
- un repère de temps (échelle de temps) par une origine et une unité de mesure. Dans le système MKSA la seconde est l'unité de mesure du temps.

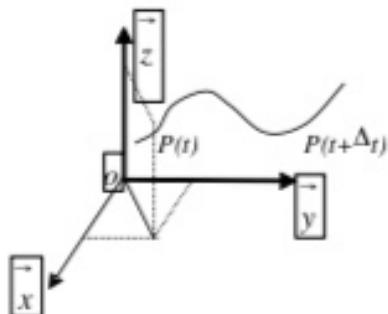
Le repère d'espace et le repère de temps définissent à eux deux le repère <<espace temps>> noté (R).

Dans ce repère, à un instant donné par l'horloge,

la position d'un point $P(t)$ est définie par ses coordonnées, $x(t)$; $y(t)$; $z(t)$ tel que :

$$\overrightarrow{OP} = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$$

La position du point P est connue de façon instantanée dans l'espace et dans le temps.

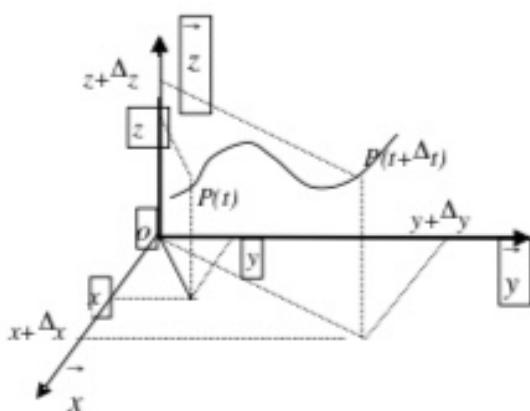


3.1. Trajectoires et vecteurs vitesses

Soit P un point matériel repéré dans un référentiel $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixe. Sa position est donnée à chaque instant par le vecteur : $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP(t)} = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$. On dit que le vecteur

$\vec{r}(t)$ a pour composante dans le repère fixe : $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$ à l'instant t .

Le déplacement du point P dans l'espace est donné par les équations paramétriques des coordonnées (x , y , z) en fonction du temps. En éliminant le paramètre temps entre elles, on obtient la trajectoire décrite par ce point dans l'espace.



$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP(t)}$: position du point P dans $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à l'instant t .

$\vec{r}(t + \Delta t) = \overrightarrow{OP(t + \Delta t)}$: position du point P dans $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à l'instant $t + \Delta t$.

Le vecteur déplacement de la position

$\vec{r}(t)$ à est donné par

$\vec{\Delta r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$. Les positions occupées par le point P dans l'espace, décrivent une trajectoire (Γ) par rapport au référentiel $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ choisi.

Exemple : $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = 2t^2 + 3 \\ y(t) = t/2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$, en éliminant t on obtient : $x = 8y^2 + 3$

C'est l'équation d'une parabole dans le plan (xoy). Le mouvement se fait selon une trajectoire parabolique.

La trajectoire à elle seule n'est pas suffisante pour caractériser complètement le mouvement du point P . Il est nécessaire de préciser et d'étudier les variations du vecteur déplacement car ceci nous amènera à connaître le vecteur vitesse du point par la première dérivée et le vecteur accélération par la seconde dérivée par rapport au temps. Ces deux vecteurs permettent de caractériser totalement le mouvement du point P sur la trajectoire.

3.2. Vecteur vitesse

Le point matériel se déplace de la position $P(t)$ à la position $P(t + \Delta t)$ pendant la durée de

temps Δt à la vitesse moyenne : $\vec{V}_{avg}(t) = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{\Delta r}(t)}{\Delta t}$;

Le vecteur vitesse instantanée est obtenu lorsque : $\Delta t \rightarrow 0$, elle est définie par :

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{avg}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}(t)}{\Delta t} , \text{ on a ainsi la vitesse instantanée: } \vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

3.3. Vecteur accélération

La dérivée du vecteur vitesse dans le même repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ donne l'accélération

instantanée du point P : $\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$

Les deux vecteurs cinématiques permettent de comprendre la nature du mouvement et de prévoir les différentes phases selon le que le vecteur vitesse est de même sens ou de sens contraire au vecteur accélération.

4. Les systèmes de coordonnées

Le point matériel P peut être repéré dans l'espace dans un repère fixe (R) de centre O par trois types de coordonnées différentes mais liées entre elles :

- Cartésiennes : (x, y, z) vecteurs unitaires du repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- Cylindriques : (r, θ, z) vecteurs unitaires du repère $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$
- Sphériques : (r, θ, φ) vecteurs unitaires du repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

Ces trois types de coordonnées permettent de décrire tous les types de mouvements du point P dans l'espace.

4.1. Les coordonnées cartésiennes

Elles sont aussi appelées coordonnées rectangulaires.

Si le point P est repéré dans $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par les coordonnées cartésiennes (x, y, z) qui dépendent du temps, alors le vecteur position \vec{OP} s'écrirait : $\vec{OP} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$; on déduit le vecteur vitesse et le vecteur accélération par la première et la seconde dérivée :

$$\vec{V}(t) = \frac{d \vec{OP}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} ; \text{ notée sous forme : } \vec{V}(t) = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}$$

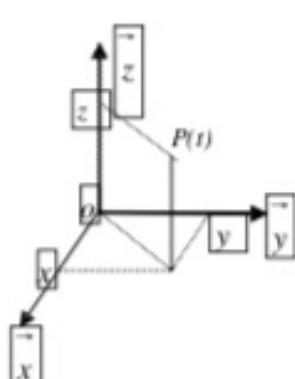
$$\text{avec : } |\vec{V}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d \vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} ; \text{ notée sous forme : } \vec{\gamma}(t) = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}$$

$$\text{avec : } |\vec{\gamma}(t)| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

$$\vec{OP} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} ; \quad \vec{OP} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$$

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



4.2. Les coordonnées cylindriques (r, θ, z)

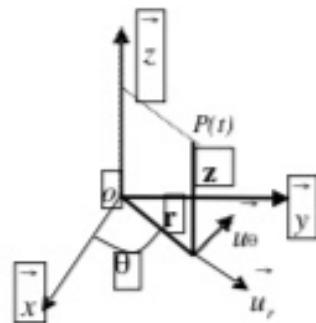
Si le point P est repéré par les coordonnées cylindriques : (r, θ, z) qui dépendent du temps dans un repère $R(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, le vecteur position s'écrit : $\vec{OP} = r \vec{u}_r + z \vec{k}$

$$\vec{V} = \frac{d \vec{OP}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \frac{d \vec{u}_r}{dt} + \dot{z} \vec{k}$$

$$\text{avec } \frac{d \vec{u}_r}{dt} = \frac{d \vec{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta, \text{ on obtient ainsi :}$$

$$\vec{V} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{k}$$

$$V_r = \dot{r}, V_\theta = r \dot{\theta}, V_z = \dot{z}$$



$$\text{Dans le repère } R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ le vecteur } \vec{OP} \text{ s'écrit: } \vec{OP} = \begin{cases} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{cases}$$

L'accélération est déterminée par :

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2 \vec{OP}}{dt^2} = \frac{d \vec{V}}{dt} = \frac{d(r \vec{u}_r)}{dt} + \frac{d(r \dot{\theta} \vec{u}_\theta)}{dt} + \frac{d \vec{k}}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \ddot{r} \vec{u}_r + r \frac{d \vec{u}_r}{dt} + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d \vec{u}_\theta}{dt} + \ddot{z} \vec{k}$$

$$\text{or nous avons: } \frac{d \vec{u}_r}{dt} = \frac{d \vec{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta; \quad \frac{d \vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d \vec{u}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

L'expression de l'accélération devient :

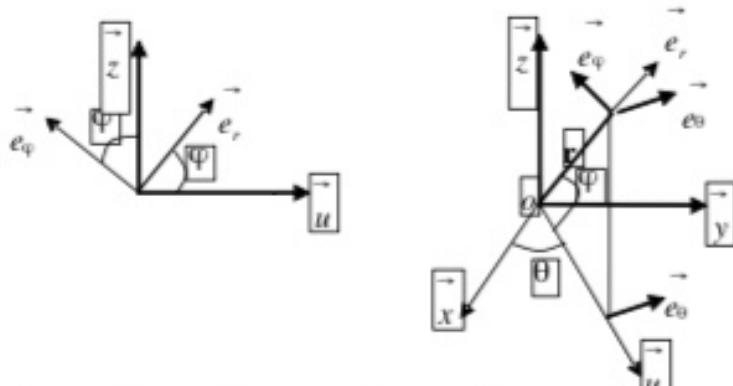
$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2r \dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{k} \quad \text{d'où: } \gamma = \sqrt{(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2)^2 + (r \ddot{\theta} + 2r \dot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}$$

$$\gamma_r = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2); \quad \gamma_\theta = (r \ddot{\theta} + 2r \dot{\theta}); \quad \gamma_z = \ddot{z}$$

4.3. Les coordonnées sphériques (r, θ, φ)

Dans le repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le vecteur \vec{OP} a pour composantes : $\vec{OP} = \begin{cases} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \end{cases}$

En coordonnées sphériques il s'écrit : $\vec{OP} = OP \cdot \vec{e}_r = r \vec{e}_r$



avec :

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{e}_u}{s} \cos \Psi + \sin \Psi \vec{k} ; \quad \vec{e}_\theta = -\sin \Psi \vec{e}_u + \cos \Psi \vec{k}$$

$$\vec{u} = \cos \Psi \vec{e}_r - \sin \Psi \vec{e}_\theta ; \quad \frac{d \vec{u}}{d\theta} = \vec{e}_\theta ; \quad \frac{d \vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{u} ; \quad \frac{d \vec{e}_r}{d\Psi} = \vec{e}_\theta ; \quad \frac{d \vec{e}_\theta}{d\Psi} = -\vec{e}_r$$

$$\text{alors: } \frac{d \vec{e}_r}{dt} = -\dot{\Psi} \sin \Psi \vec{u} + \cos \Psi \frac{d \vec{u}}{dt} + \dot{\Psi} \cos \Psi \vec{k} = \dot{\theta} \cos \Psi \vec{e}_\theta - \dot{\Psi} \sin \Psi \vec{u} + \dot{\Psi} \cos \Psi \vec{k}$$

$$\frac{d \vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \cos \Psi \vec{e}_\theta + \dot{\Psi} (-\sin \Psi \vec{u} + \cos \Psi \vec{k}) = \dot{\theta} \cos \Psi \vec{e}_\theta + \dot{\Psi} \vec{e}_\theta ; \text{ on déduit la vitesse du point } P :$$

$$\vec{V} = \frac{d \vec{OP}}{dt} = \frac{d(r \vec{e}_r)}{dt} = r \vec{e}_r + r \frac{d \vec{e}_r}{dt} = r \vec{e}_r + r \dot{\theta} \cos \Psi \vec{e}_\theta + r \dot{\Psi} \vec{e}_\theta ; \Rightarrow \vec{V} = \begin{cases} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r \dot{\theta} \cos \Psi \\ V_\Psi = r \dot{\Psi} \end{cases}$$

l'accélération se déduit facilement en dérivant l'expression de la vitesse par rapport au temps :

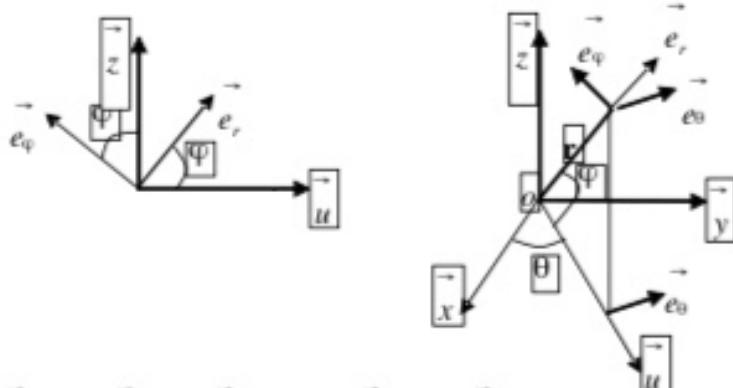
$$\vec{\gamma} = \frac{d \vec{V}}{dt} = \frac{d(r \vec{e}_r)}{dt} + \frac{d(r \dot{\theta} \cos \Psi \vec{e}_\theta)}{dt} + \frac{d(r \dot{\Psi} \vec{e}_\theta)}{dt}$$

$$(1) : \frac{d(r \vec{e}_r)}{dt} = \frac{d \vec{e}_r}{dt} + r \dot{\theta} \cos \Psi \vec{e}_\theta + \dot{\Psi} \vec{e}_\theta = \frac{d \vec{e}_r}{dt} + r \dot{\theta} \cos \Psi \vec{e}_\theta + r \dot{\Psi} \vec{e}_\theta$$

$$(2) : \frac{d(r \dot{\theta} \cos \Psi \vec{e}_\theta)}{dt} = r \dot{\theta} \cos \Psi \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \cos \Psi \vec{e}_\theta - r \dot{\theta} \dot{\Psi} \sin \Psi \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \cos \Psi \frac{d \vec{e}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d \vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d \vec{e}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u} = -\dot{\theta} (\cos \Psi \vec{e}_r - \sin \Psi \vec{e}_\phi)$$

$$\frac{d(r \dot{\theta} \cos \Psi \vec{e}_\theta)}{dt} = r \dot{\theta} \cos \Psi \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \cos \Psi \vec{e}_\theta - r \dot{\theta} \dot{\Psi} \sin \Psi \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \cos \Psi (\cos \Psi \vec{e}_r - \sin \Psi \vec{e}_\phi)$$



avec :

$$\vec{e}_r = \cos \varphi \vec{u} + \sin \varphi \vec{k} ; \quad \vec{e}_\theta = -\sin \varphi \vec{u} + \cos \varphi \vec{k}$$

$$\vec{u} = \cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\theta ; \quad \frac{du}{d\theta} = \vec{e}_\theta ; \quad \frac{de_\theta}{d\theta} = -\vec{u} ; \quad \frac{de_r}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi ; \quad \frac{de_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_r$$

alors: $\frac{de_r}{dt} = -\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{u} + \cos \varphi \frac{du}{dt} + \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{k} = \dot{\theta} \cos \varphi \vec{e}_\theta - \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{u} + \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{k}$

$$\frac{de_r}{dt} = \dot{\theta} \cos \varphi \vec{e}_\theta + \dot{\varphi} (-\sin \varphi \vec{u} + \cos \varphi \vec{k}) = \dot{\theta} \cos \varphi \vec{e}_\theta + \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi ; \text{ on déduit la vitesse du point } P :$$

$$\vec{V} = \frac{d \vec{OP}}{dt} = \frac{d(r \vec{e}_r)}{dt} = r \vec{e}_r + r \frac{d \vec{e}_r}{dt} = r \vec{e}_r + r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{e}_\theta + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi ; \Rightarrow \vec{V} = \begin{cases} V_r = r \\ V_\theta = r \dot{\theta} \cos \varphi \\ V_\varphi = r \dot{\varphi} \end{cases}$$

l'accélération se déduit facilement en dérivant l'expression de la vitesse par rapport au temps :

$$\vec{\gamma} = \frac{d \vec{V}}{dt} = \frac{d(r \vec{e}_r)}{dt} + \frac{d(r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{e}_\theta)}{dt} + \frac{d(r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)}{dt}$$

$$(1) : \frac{d(r \vec{e}_r)}{dt} = r \vec{e}_r + r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{e}_\theta + \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = r \vec{e}_r + r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{e}_\theta + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$(2) : \frac{d(r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{e}_\theta)}{dt} = r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \cos \varphi \vec{e}_\theta - r \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \cos \varphi \frac{de_\theta}{dt}$$

$$\frac{de_\theta}{dt} = \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u} = -\dot{\theta} (\cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\theta)$$

$$\frac{d(r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{e}_\theta)}{dt} = r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \cos \varphi \vec{e}_\theta - r \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \cos \varphi (\cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\theta)$$

$$\frac{d(r\dot{\theta} \cos \varphi e_0)}{dt} = -r\dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi e_r + (\ddot{r}\dot{\theta} \cos \varphi + r\ddot{\theta} \cos \varphi - r\dot{\theta}^2 \sin \varphi) e_0 + r\dot{\theta}^2 \cos \varphi \sin \varphi e_\varphi$$

$$(3) : \frac{d(r\dot{\varphi} e_\varphi)}{dt} = \ddot{r}\dot{\varphi} e_\varphi + r\ddot{\varphi} e_\varphi + r\dot{\varphi} \frac{d e_\varphi}{dt} = \ddot{r}\dot{\varphi} e_\varphi + r\ddot{\varphi} e_\varphi + r\dot{\varphi} \frac{d e_\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

comme $\frac{d e_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi} e_r$ alors $\frac{d(r\dot{\varphi} e_\varphi)}{dt} = \ddot{r}\dot{\varphi} e_\varphi + r\ddot{\varphi} e_\varphi - r\dot{\varphi}^2 e_r$

En sommant les trois termes, on aboutit à :

$$\gamma_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi$$

$$\gamma_\varphi = r\ddot{\theta} \cos \varphi + r\dot{\theta} \cos \varphi + r\ddot{\theta} \cos \varphi - r\dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi = \frac{\cos \varphi}{r} \cdot \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) - r\dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\gamma_\varphi = r\ddot{\varphi} + r\dot{\theta}^2 \cos \varphi \sin \varphi + r\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) + r\dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

5. Les mouvements curvilignes

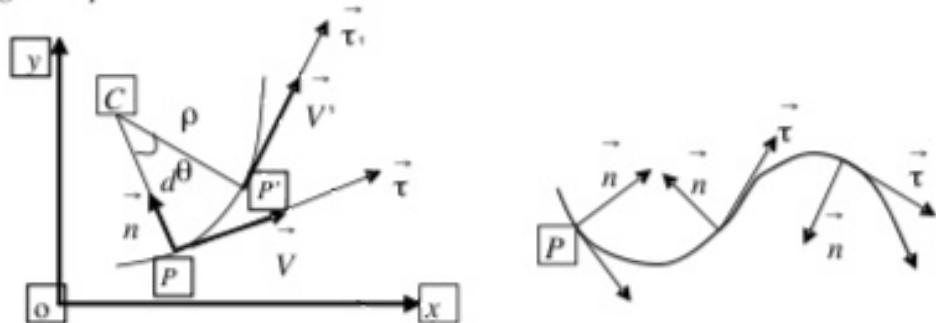
Soit P un point matériel décrivant une trajectoire curviligne le long d'une courbe (Γ) . Les composantes normale \vec{n} et tangentielle $\vec{\tau}$ à la courbe au point P sont naturellement les plus usitées pour décrire les mouvements curvilignes. Les composantes sont en mouvement avec le point matériel, le long de la trajectoire. Le sens positif de la normale est choisi dans toutes les positions vers le centre de la courbure. Ainsi le sens de la normale change en fonction de la courbure de la trajectoire.

La vitesse et l'accélération du point matériel P sont déterminées à partir de ces composantes et de leur changement de direction. Considérons un élément de cette courbe et étudions le mouvement du point matériel sur cette trajectoire.

5.1. Abscisse curviligne

Pendant une petite variation de temps dt , le point matériel est passé de la position P vers P' parcourant une distance ds (longueur d'arc) le long de la courbe avec un rayon de courbure ρ . Les points P et P' sont infiniment voisins de telle sorte que la longueur de l'arc $\overset{\curvearrowright}{PP'}$ compris, entre les deux points soit confondue avec la longueur $ds = \overset{\curvearrowright}{PP'}$.

La courbe est alors orientée dans le sens positif des s croissant. La variable s est appelée *abscisse curviligne du point P*.



5.2. Tangente, Normale et Rayon de courbure

A partir de la définition de l'abscisse curviligne nous pouvons écrire: $ds = \rho d\theta$

Le vecteur déplacement \vec{OP} est une fonction paramétrique de la variable angulaire θ .

Le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ tangent à la courbe est donné par la relation :

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{OP}}{ds} = \frac{d\vec{OP}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{OP}}{dt} \cdot \frac{1}{V} = \frac{1}{V} \frac{d\vec{OP}}{dt} \text{ et nous avons aussi } V = \frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\vec{OP}}{dt} \right\|$$

Nous avons aussi: $\vec{\tau}^2 = 1$ alors $\frac{d\vec{\tau}}{d\theta} = 2\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\theta}}{d\theta} = 0$, alors $\frac{d\vec{\tau}}{d\theta}$ est perpendiculaire à $\vec{\tau}$

on pose $\frac{d\vec{\tau}}{d\theta} = \vec{n}$; nous pouvons écrire: $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{n}$

comme $\frac{ds}{d\theta} = \rho$; alors $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}$.

- le vecteur unitaire \vec{n} de direction normale à la courbe (Γ) au point P est dirigé vers le centre de la courbure ;

- ρ est un scalaire positif appelé rayon de courbure de la courbe (Γ) au point P .

on déduit à partir du produit vectoriel du vecteur unitaire tangent à la courbe et du vecteur unitaire perpendiculaire à la courbe au même point P un troisième vecteur unitaire appelé

binormale: $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$. Ces trois vecteurs $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ forment une base orthonormée directe.

Nous avons aussi : $\vec{n}^2 = 1 \Rightarrow \vec{n} \cdot \frac{\vec{d}n}{ds} = 0$ alors $\frac{\vec{d}n}{ds}$ a des composantes dans le plan

perpendiculaire à \vec{n} , il s'écrit alors : $\frac{\vec{d}n}{ds} = \lambda \vec{\tau} + \mu \vec{b}$

$$\frac{\vec{db}}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{\tau} \wedge \vec{n}) = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \wedge \vec{n} + \vec{\tau} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{n} \wedge \vec{\tau} + \vec{\tau} \wedge (\lambda \vec{\tau} + \mu \vec{b}) = \vec{\tau} \wedge \mu \vec{b} = -\mu \vec{n}$$

d'où $\frac{db}{ds} = -\mu \vec{n}$. on pose par convention $\frac{-}{\mu} = \frac{1}{T}$; nous obtenons finalement :

$\frac{db}{ds} = \frac{\vec{n}}{T}$: le scalaire $\frac{1}{T}$ est appelé torsion au point P de la courbe (Γ) il peut être

positif ou négatif suivant que le vecteur $\frac{db}{ds}$ a même sens que le vecteur \vec{n} ou le sens

contraire. Nous pouvons aussi écrire :

$$\frac{\vec{dn}}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{b} \wedge \vec{\tau}) = \frac{db}{ds} \wedge \vec{\tau} + \vec{b} \wedge \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{T} \vec{n} \wedge \vec{\tau} + \vec{b} \wedge \frac{1}{\rho} \vec{n} = -\frac{\vec{b}}{T} - \frac{\vec{\tau}}{\rho}$$

on déduit finalement une relation entre les trois vecteurs de la base :

$$\frac{\vec{dn}}{ds} = -\frac{\vec{b}}{T} - \frac{\vec{\tau}}{\rho}$$

5.3. Repère de Frénet

Les deux vecteurs unitaires ainsi définis, tangentiel $\vec{\tau}$ et normal \vec{n} au point P constituent les premiers vecteurs de la base de Frénet. Le troisième vecteur unitaire \vec{b} de la base est obtenu par le produit vectoriel des deux premiers, il est appelé binormale à la courbe (Γ) au point P est défini par : $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$.

La base ainsi obtenue est appelée base de Frénet. Elle dépend de l'abscisse curviligne s liée au point P . Le repère $R(P, \vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ lié au point P est appelé repère de Frénet.

5.4. Vitesse et accélération du point P dans le repère de Frénet

Pendant une petite variation de temps dt le point matériel est passé de P à P' parcourant une distance ds le long de la courbe ayant un rayon de courbure ρ .

Nous pouvons écrire : $ds = \rho d\theta$ où $d\theta$ est la variation de l'angle compris entre le vecteur unitaires $\vec{\tau}$ et $\vec{\tau}'$ tangents à la courbe aux points P et P' .

- * La vitesse du point P est donnée par : $V = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\theta}{dt}$; sous la forme vectorielle, elle s'écrit: $\vec{V} = \rho \frac{d\theta}{dt} \vec{\tau} = \rho \dot{\theta} \vec{\tau} = V \vec{\tau}$ avec $V = \rho \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{V}{\rho}$

- * L'accélération du point P est donnée par :

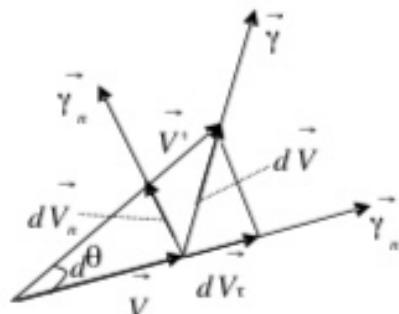
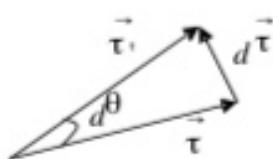
$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = V \frac{d\vec{\tau}}{dt} + \frac{dV}{dt} \vec{\tau} \text{ nous savons : } \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{n} \text{ et } \frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d\vec{n}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{\tau}$$

on déduit : $\vec{\gamma} = V \dot{\theta} \vec{n} + \frac{dV}{dt} \vec{\tau}$; comme $\dot{\theta} = \frac{V}{\rho}$ l'expression de l'accélération devient :

$$\vec{\gamma} = \frac{V^2}{\rho} \vec{n} + V \ddot{\theta} \vec{\tau}$$

Cette expression peut aussi s'écrire en fonction de s et de t car $V = \frac{ds}{dt}$

$$\vec{\gamma} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right) \vec{n} + \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \right) \vec{\tau}$$



6. Les mouvements particuliers

6.1. Mouvement à trajectoire circulaire

On dit que la trajectoire d'un point P est circulaire dans un repère orthonormé $R(O, i, j, k)$ fixe, si le point P se déplace le long du périmètre du cercle de rayon a constant et appartenant au même repère.

On choisit un cercle dans le plan (Oxy) de telle sorte que son centre coïncide avec celui du repère. Le point P sur le cercle est repéré par deux coordonnées :

Lerayon a du cercle et l'angle $\theta = \overrightarrow{(Ox, OP)}$ que fait les vecteurs \overrightarrow{OP} avec l'axe \overrightarrow{Ox} .

Soit \vec{e}_r le vecteur défini par: $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OP}}{OP}$, alors nous avons: $\overrightarrow{OP} = OP \cdot \vec{e}_r$

Le vecteur unitaire \vec{e}_r change de direction avec l'angle θ : d'où $\frac{d \vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta$ et $\frac{d \vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$

Le rayon de courbure est ici constant, la vitesse du point P est donnée par la dérivée du vecteur position:

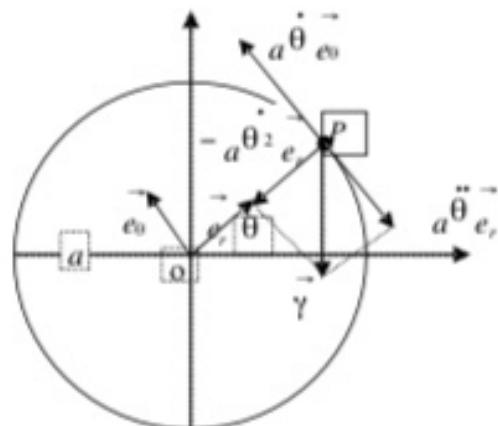
$$\vec{V}(P) = \frac{d \overrightarrow{OP}}{dt} = a \frac{d \vec{e}_r}{dt} = a \frac{d \vec{e}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = a \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

L'accélération du point P se déduit par:

$$\vec{\gamma}(P) = \frac{d \vec{V}(P)}{dt} = -a \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + a \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$\dot{\theta} = \omega$: vitesse angulaire du point P ;

$\ddot{\theta} = \omega$: accélération angulaire du point P .



La vitesse du point P est tangente au cercle et a pour valeur algébrique: $V(P) = a \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

L'accélération du point P a deux composantes: l'une tangentielle: $\gamma_r = a \ddot{\theta} = a \omega^2$, l'autre normale: $\gamma_n = -a \dot{\theta}^2 = -a \omega^2$. On remarque que le vecteur accélération normal $\vec{\gamma}_n$ est toujours de sens opposé au vecteur position \overrightarrow{OP} : $\vec{\gamma}_n = -a \omega^2 \vec{e}_r = -\omega^2 \overrightarrow{OP}$

Connaissant la vitesse et l'accélération angulaire nous pouvons connaître la nature du mouvement:

Si $\ddot{\theta} > 0$ le mouvement est accéléré

Si $\ddot{\theta} < 0$ le mouvement est retardé

Si $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = C_t$ le mouvement est uniforme, l'accélération tangentielle est nulle, mais l'accélération normale ne l'est pas.

6.2. Mouvement à trajectoire hélicoïdale

Un point P est en mouvement sur une trajectoire hélicoïdale dans un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ s'il décrit une hélice droite, dessinée sur un cylindre de rayon a .

Les coordonnées cartésiennes du point P dans ce repère sont données par les équations paramétriques en fonction du temps t sous la forme suivante :

$$\vec{OP} = \begin{cases} x(\theta) = a \cos \theta(t) \\ y(\theta) = a \sin \theta(t) \\ z(\theta) = b \theta(t) \end{cases}; \quad a : \text{rayon de l'hélice}$$

L'angle θ joue le même rôle que dans les coordonnées cylindriques ou polaires. Le paramètre $b = Cte$ est appelé pas de l'hélice. On remarque que, lorsque l'angle θ augmente de 2π les positions x et y ne changent pas mais suivant l'axe vertical z on fait un déplacement de : $2\pi b$

$$x(\theta + 2\pi) = x(\theta); \quad y(\theta + 2\pi) = y(\theta)$$

$$z(\theta + 2\pi) = b(\theta + 2\pi) = b\theta + 2\pi b = z(\theta) + 2\pi b$$

Le vecteur position du point P dans le repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donné par :

$$\vec{OP} = a \vec{e}_r + z \vec{k} = a \vec{e}_r + b \dot{\theta} \vec{k}$$

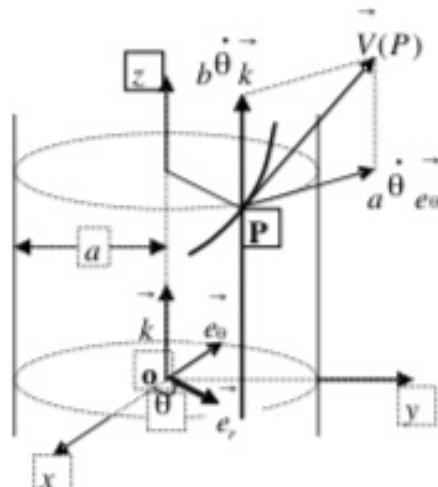
Les vecteurs vitesse et accélération s'écriront :

$$\vec{V}(P) = a \dot{\theta} \vec{e}_r + b \ddot{\theta} \vec{k} = V_0 \vec{e}_r + V_z \vec{k}$$

$$\vec{\gamma}(P) = -a \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + a \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + b \ddot{\theta} \vec{k}$$

On remarque que le rapport entre les composantes de la vitesse suivant les vecteurs unitaires \vec{e}_θ et \vec{k} est indépendant de l'angle θ .

$$\frac{V_z}{V_0} = \frac{b \dot{\theta}}{a \dot{\theta}} = \frac{b}{a}$$



Cette expression traduit le fait que toute tangente en un point P de l'hélice fait un angle constant avec la verticale passant par le point P et parallèle au vecteur \vec{k} . Le mouvement hélicoïdal est uniforme si la vitesse angulaire de rotation est constante, donc indépendante du paramètre temps ($\dot{\theta} = \omega = Cte$).

Dans ce cas la vitesse et l'accélération auront pour expressions :

$$\vec{V}(P) = a\omega \vec{e}_\theta + b\omega \vec{k} \quad \text{avec} \quad V(P) = \omega \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

$$\vec{\gamma}(P) = -a\omega^2 \vec{e}_r, \quad \text{l'accélération est dirigée vers l'intérieur de la courbure.}$$

On a vu précédemment dans les mouvements curvilignes que l'accélération du point P s'écrivait sous la forme : $\vec{\gamma}(P) = \frac{d\vec{V}}{dt} \tau + \frac{V^2}{\rho} \vec{n}$ où les vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ et \vec{n} sont les vecteurs, tangentiel et normal au point P de la courbe.

En appliquant cette relation dans le cas du mouvement hélicoïdal uniforme où $\vec{\tau} = \vec{e}_\theta$ et $\vec{n} = -\vec{e}_r$, sont les vecteurs tangentiel et normal au point P de la courbe nous obtenons :

$$\vec{\gamma}(P) = -a\omega^2 \vec{e}_r = \frac{V^2}{\rho} \vec{n} \Rightarrow -a\omega^2 \vec{e}_r = -\frac{V^2}{\rho} \vec{e}_r \Leftrightarrow a\omega^2 = \frac{V^2}{\rho} \quad \text{en remplaçant la vitesse par son expression on aboutit à : } a\omega^2 = \frac{\omega^2(a^2 + b^2)}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{(a^2 + b^2)}{a} = a + \frac{b^2}{a}$$

Comme la normale en P est toujours dirigée vers l'intérieur de la courbure, on peut déterminer facilement le centre C de la courbure en écrivant la relation suivante :

$$\vec{PC} = -\rho \vec{e}_r$$

Nous pouvons aussi associer au point P le repère de Frénet $R(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

7. Mouvements à trajectoires planes

7.1. Définition

Soit O le centre d'un repère cartésien $R(O, i, j, k)$ fixe, tel que $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ et P un point en mouvement sur une trajectoire (Γ) dans le plan (xoy) de ce repère.

En utilisant les coordonnées polaires (r, θ) le vecteur position du point P s'écrit :

$$\vec{OP} = r \vec{e}_r \text{ avec } r > 0 \quad \text{avec : } \vec{e}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \Rightarrow \vec{e}_\theta = \frac{d \vec{e}_r}{d\theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}; \text{ d'où}$$

$$\frac{d \vec{e}_\theta}{d\theta} = -\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j} = -\vec{e}_r \quad \text{ainsi nous avons : } \vec{k} = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$$

La vitesse du point P en fonction de \vec{e}_r et \vec{e}_θ est donnée par :

$$\vec{V} = \frac{d \vec{OP}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

L'accélération aura pour expression :

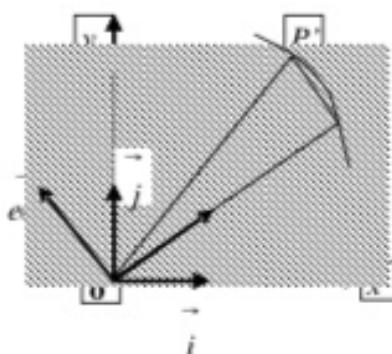
$$\vec{\gamma} = \frac{d \vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{OP}}{dt^2} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2r \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

Géométriquement, les positions des points P et P' sont infiniment voisines sur la trajectoire.

En passant de P à P' le vecteur position balaie l'aire dS qui est la surface du triangle OPP' :

$$dS = \frac{1}{2} \left| \vec{OP} \wedge d\vec{OP} \right| = \frac{1}{2} r r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

La dérivée de cette expression par rapport au temps, notée : \dot{S} est appelée vitesse aréolaire.



Elle représente l'aire balayée par unité de temps : $\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$

7.2. Loi des aires

Nous avons vu précédemment que le mouvement du point P étant dans un plan, sa vitesse

s'écrivait : $\vec{V} = \frac{d\vec{OP}}{dt} = \vec{r} \dot{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$; le produit vectoriel du vecteur déplacement par le

vecteur vitesse conduit à la relation suivante :

$$\vec{C} = \vec{OP} \wedge \frac{d\vec{OP}}{dt} = \vec{r} \dot{e}_r \wedge \left(\vec{r} \dot{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \right) = r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{k} = r^2 \dot{\theta} \vec{k}$$

On pose : $\vec{C} = C \vec{k}$ avec $C = r^2 \dot{\theta}$, en comparant avec la vitesse aréolaire, on aboutit à

$$\text{la relation suivante : } \dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{C}{2};$$

$$\dot{S} = \frac{C}{2}; \quad C : \text{est appelée constante des aires.}$$

On remarque aussi que la dérivée de la constante des aires est reliée à l'accélération γ_0 , car

$$\text{nous avons : } \dot{C} = d(r^2 \dot{\theta}) = 2r \dot{r} \dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta} = r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = r\gamma_0 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{\dot{C}}{r}$$

7.3. Mouvement à accélération centrale

a) Définition

On dit qu'un point P décrit un mouvement à accélération centrale dans le repère orthonormé

$R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ si et seulement si, le vecteur position \vec{OP} du point P est colinéaire avec son vecteur accélération $\vec{\gamma}(P)$. Dans ce cas nous pouvons écrire : $\vec{\gamma}(P) = \lambda \vec{OP}$ avec $\lambda \in IR$.

Le mouvement à accélération centrale est un mouvement à trajectoire plane, il résulte de la

condition de la colinéarité que donne l'équation : $\vec{OP} \wedge \vec{\gamma}(P) = \vec{0}$ avec $\vec{\gamma}(P) = \frac{d^2 \vec{OP}}{dt^2}$

En dérivant l'expression vectorielle $\vec{OP} \wedge \frac{d\vec{OP}}{dt}$ et en tenant compte de la condition de

colinéarité entre le vecteur position et le vecteur accélération, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{OP} \wedge \frac{d\vec{OP}}{dt} \right) = \frac{d\vec{OP}}{dt} \wedge \frac{d\vec{OP}}{dt} + \vec{OP} \wedge \frac{d^2\vec{OP}}{dt^2} = \vec{0}$$

ce qui signifie que : $\vec{OP} \wedge \frac{d\vec{OP}}{dt} = \vec{C}$ est une constante indépendante du temps et appelée constante des aires comme précédemment.

$$\vec{OP} \wedge \frac{d\vec{OP}}{dt} = \vec{C} = r^2 \dot{\theta} \vec{k} \quad C = r^2 \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

b) Expressions des vecteurs, vitesse et accélération, en fonction de la constante des aires

En remplaçant $\dot{\theta}$ en fonction de C dans toute expression, nous avons :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{d\theta} \frac{d\dot{r}}{d\theta} = \frac{C}{r^2} \frac{d}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(-C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$r\dot{\theta} = \frac{C}{r} \quad \text{et} \quad r\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^3}$$

En remplaçant ces expressions dans celles des vitesses et accélérations nous obtenons :

$$\vec{V}(P) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{e}_r + \frac{C}{r} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{V}(P) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta = \left(-\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{C^2}{r^3} \right) \vec{e}_r = -\frac{C^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \vec{e}_r$$

c) Expression de la trajectoire en coordonnées polaires

Nous avons une relation entre l'accélération du point P et le vecteur position, elle est donnée par : $\vec{\gamma}(P) = \lambda \vec{OP}$; en les remplaçant leurs expressions respectives en coordonnées polaires et on obtient :

$$-\frac{C^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \vec{e}_r = \lambda r \vec{e}_r \Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\lambda}{C^2} r^3 + \frac{1}{r} = 0$$

Lorsque la valeur de λ est connue, la résolution de cette équation permet de déterminer l'expression de r en fonction de θ .

On obtient la loi du temps du mouvement à partir de la loi des aires, en effet nous avons :

$$C = r^2 \dot{\theta} \iff C = r^2 \frac{d\theta}{dt} ; \text{ d'où } dt = \frac{1}{C} r^2 d\theta \quad \text{or } r \text{ est une fonction de } \theta : r = f(\theta)$$

$$dt = \frac{1}{C} f(\theta)^2 d\theta \Rightarrow t - t_0 = \frac{1}{C} \int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)^2 d\theta ; \text{ à partir de cette équation, on reconstruit la}$$

trajectoire du point P .

EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 01 :

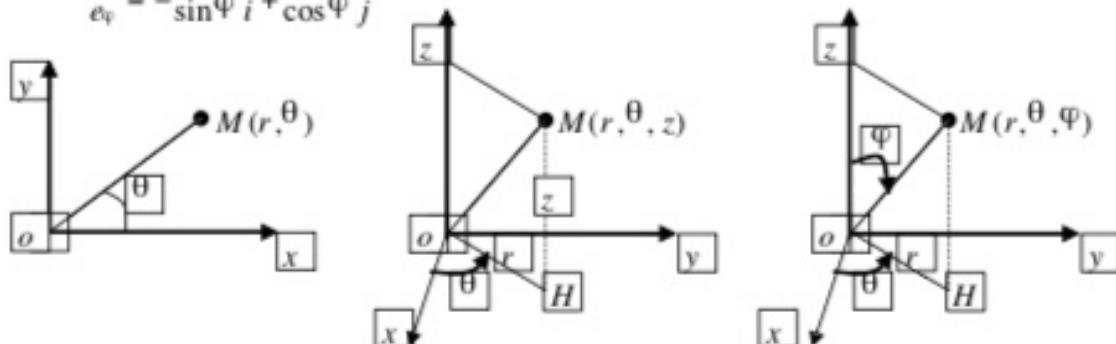
- Représenter les points A et B de coordonnées polaires : $(1,0)$ et $(2, \frac{5\pi}{4})$;
- Représenter les points C et D de coordonnées cylindriques : $(2, \frac{\pi}{2}, 2)$ et $(2, \pi - 2)$.

Exprimer les vecteurs \vec{OA} et \vec{OB} dans les repères locaux correspondant.

- Représenter les points E et F de coordonnées sphériques : $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ et $(1, \frac{1}{3}, \frac{3\pi}{4})$;

Exprimer le vecteur \vec{EF} dans le repère local : $(E, e_r, e_\theta, e_\varphi)$.

On donne : $e_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$
 $e_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}$
 $e_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$



Solution :

- Les coordonnées polaires : $M(r, \theta)$ avec $\vec{OM} = r \vec{u}_r$, où \vec{u}_r est un vecteur unitaire

$$A(1, 0) \Rightarrow \vec{OA} = r \vec{u}_r = \vec{u}_r \text{ et } \theta = 0$$

$$B(2, \frac{5\pi}{4}) \Rightarrow \vec{OB} = r \vec{u}_r = 2 \vec{u}_r \text{ et } \theta = \frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$$

- Les coordonnées cylindriques : $M(r, \theta, z)$

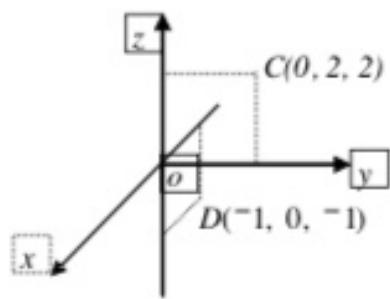
$$\vec{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{k} \quad \text{où } \vec{u}_r \text{ est un vecteur unitaire}$$

$$C(2, \frac{\pi}{2}, 2) \Rightarrow \vec{OC} = 2 \vec{u}_r + 2 \vec{k}, \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$C(x = 2 \cos \frac{\pi}{2}, y = 2 \sin \frac{\pi}{2}, z = 2)$$

$$D(1, \pi, -1) \Rightarrow \vec{OD} = \vec{u}_r - \vec{k}, \theta = \pi$$

$$D(x = 1 \cos \pi, y = 1 \sin \pi, z = -1)$$



Expressions des vecteurs \vec{OA} et \vec{OB} dans leurs repères locaux respectifs :

Le \vec{OA} peut s'écrire : $\vec{OA} = (\vec{OA} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r + (\vec{OA} \cdot \vec{u}_\theta) \vec{u}_\theta + (\vec{OA} \cdot \vec{k}) \vec{k}$

Dans le repère local : $(A, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ avec $\theta = \frac{\pi}{2}$ nous avons :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos \frac{\pi}{2} \vec{i} + \sin \frac{\pi}{2} \vec{j} = \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin \frac{\pi}{2} \vec{i} + \cos \frac{\pi}{2} \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

d'où : $\vec{OA} = (\vec{OA} \cdot \vec{j}) \vec{j} + (\vec{OA} \cdot (-\vec{i})) \vec{u}_\theta + (\vec{OA} \cdot \vec{k}) \vec{k} = 2\vec{u}_r + 2\vec{k}$

De la même manière pour le vecteur \vec{OB}

Le \vec{OB} peut s'écrire : $\vec{OB} = (\vec{OB} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r + (\vec{OB} \cdot \vec{u}_\theta) \vec{u}_\theta + (\vec{OB} \cdot \vec{k}) \vec{k}$

Dans le repère local : $(B, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ avec $\theta = \pi$ nous avons :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos \pi \vec{i} + \sin \pi \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{u}_\theta = -\sin \pi \vec{i} + \cos \pi \vec{j} = -\vec{j} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

d'où : $\vec{OB} = (\vec{OB} \cdot (-\vec{i})) \vec{u}_r + (\vec{OB} \cdot (-\vec{j})) \vec{u}_\theta + (\vec{OB} \cdot \vec{k}) \vec{k} = \vec{u}_r - \vec{k}$

3. Les coordonnées sphériques (r, θ, φ)

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r \quad \text{où } \vec{e}_r \text{ est un vecteur unitaire } OM \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \cos \theta \sin \varphi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

$$E(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \vec{OE} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \sqrt{2} \end{cases} ; \text{ et } F(2, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}) \Rightarrow \vec{OF} \begin{cases} x = -\sqrt{6}/4 \\ y = \sqrt{6}/4 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

Expression du vecteur \vec{EF} dans le repère local $(E, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ avec : $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$$\text{On donne : } \vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \Rightarrow \vec{e}_r = \frac{1}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k}$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \Rightarrow \vec{e}_\theta = \frac{1}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \Rightarrow \vec{e}_\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

$$\text{nous avons : } \vec{EF} = \vec{OF} - \vec{OE} = -\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + 1\right) \vec{i} + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - 1\right) \vec{j} + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}\right) \vec{k}$$

$$\vec{EF} = \left(\vec{EF} \cdot \vec{e}_r \right) \vec{e}_r + \left(\vec{EF} \cdot \vec{e}_\theta \right) \vec{e}_\theta + \left(\vec{EF} \cdot \vec{e}_\varphi \right) \vec{e}_\varphi$$

$$\text{En développant cette expression on abouti à : } \vec{EF} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right) \vec{e}_r - \frac{\sqrt{2}}{4} \vec{e}_\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_\varphi$$

Exercice 02 :

Un point matériel se déplace sur une trajectoire décrite par les équations paramétriques

$$\text{suivantes : } \begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 \\ z = 0 \end{cases}; \text{ Déterminer :}$$

1. Le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire ;
2. Le rayon de courbure ρ ;
3. La normale \vec{n} à la trajectoire ;
4. La binormale \vec{b} ;

Solution :

1. Vecteur unitaire $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire

$\vec{\tau}$ a la même direction et le sens que le vecteur vitesse. $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

La vitesse s'écrit : $\vec{v} = \begin{cases} v_x = 1 \\ v_y = 4t \\ v_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \vec{i} + 4t\vec{j}$ et $\vec{\gamma} = \begin{cases} \gamma_x = 0 \\ \gamma_y = 4 \\ \gamma_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = 4$

$$\text{et } |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{1 + 16t^2}$$

On déduit : $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{i} + 4t\vec{j}}{\sqrt{1 + 16t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 16t^2}}\vec{i} + \frac{4t}{\sqrt{1 + 16t^2}}\vec{j}$

2. Le rayon de courbure ρ :

Dans la base de Frénet, l'accélération du point matériel est égale s'écrit : $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_N + \vec{\gamma}_T$

Où $\vec{\gamma}_N$ et $\vec{\gamma}_T$ sont respectivement l'accélération normale et tangentielle.

Or nous savons que : $\vec{\gamma}_N = \frac{\vec{v}^2}{\rho}$, calculons $\vec{\gamma}_N$:

Comme $\vec{\gamma}_T = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2}32t\vec{i} + 16t^2\vec{j} = \frac{16t}{\sqrt{1 + 16t^2}}$ et que $\gamma^2 = \gamma_N^2 + \gamma_T^2$

On déduit : $\gamma_N^2 = \gamma^2 - \gamma_T^2 = 16 - \frac{16t^2}{1 + 16t^2} = \frac{16}{1 + 16t^2} \Rightarrow \gamma_N = \frac{4}{\sqrt{1 + 16t^2}}$

$$\rho = \frac{\gamma^2}{\gamma_N} = \frac{1 + 16t^2}{\frac{4}{\sqrt{1 + 16t^2}}} = \frac{(1 + 16t^2)^{\frac{3}{2}}}{4}$$

3. La normale n à la trajectoire

Soit s l'abscisse curviligne, la normale à la trajectoire est donnée par la relation :

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{d\theta} = \rho \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho \frac{d\vec{\tau}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\rho}{v} \frac{d\vec{\tau}}{dt} \quad \text{car } v = \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{n} = \frac{\rho}{v} \left(\frac{4\vec{j}(1 + 16t^2)^{\frac{1}{2}} - (\vec{i} + 4t\vec{j})16(1 + 16t^2)^{-\frac{1}{2}}}{1 + 16t^2} \right) = \frac{\rho}{v} \frac{4(-4\vec{i} + \vec{j})}{(1 + 16t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1 + 16t^2)^{\frac{3}{2}}}{4(1 + 16t^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{4(-4\vec{i} + \vec{j})}{(1 + 16t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

d'où : $\vec{n} = \frac{-4t}{\sqrt{1 + 16t^2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{1 + 16t^2}}\vec{j}$

4. La binormale

C'est un vecteur unitaire perpendiculaire au deux premiers, d'où : $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+16t^2)} \\ \frac{-4t}{(1+16t^2)} \\ \frac{4t}{(1+16t^2)} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4t \\ (1+16t^2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 03 :

Un mobile se déplace à vitesse scalaire constante sur une trajectoire d'écrite par des équations paramétriques en coordonnées cylindriques :

$$z = k r$$

$r = r_0 e^{c\varphi}$, où k, r_0, c : sont des constantes positives.

1. Trouver l'équation horaire $r(t)$ sachant qu'à : $t = 0 \Rightarrow \varphi = 0$;
2. Déterminer le vecteur accélération et le rayon de courbure de la trajectoire.

Solution :

1. Equation horaire

La vitesse du mobile en coordonnées cylindriques est données par :

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi + \vec{v}_z = r \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{k} \quad \text{on déduit les composantes de la vitesse:}$$

$$v_r = r_0 \dot{\varphi} c . e^{c\varphi} = c \dot{\varphi} . r \quad ; \quad v_\varphi = r \dot{\varphi} \quad ; \quad v_z = kr = kr_0 \dot{\varphi} c . e^{c\varphi} = kc \dot{\varphi} . r$$

$$\text{on abouti finalement à: } v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} = \sqrt{c^2 \dot{\varphi}^2 r^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + k^2 c^2 \dot{\varphi}^2 . r^2}$$

$$v = r \dot{\varphi} \sqrt{1 + c^2 (1 + k^2)} \quad \text{comme la vitesse étant constante: } v = v_0 = Cte$$

$$v_0 = r \dot{\varphi} \sqrt{1 + c^2 (1 + k^2)}, \text{ or nous savons que: } \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{et que: } \sqrt{1 + c^2 (1 + k^2)} = K$$

$$v_0 = r \frac{d\varphi}{dt} K \quad \text{on remplace } r \text{ par son expression: } v_0 = r_0 e^{c\varphi} \frac{d\varphi}{dt} K \quad \Leftrightarrow \quad e^{c\varphi} d\varphi = \frac{v_0}{K r_0} dt$$

on intègre cette expression par rapport au temps et on obtient :

$$\int_0^t e^{c\varphi} d\varphi = \frac{v_0}{Kr_0} dt \Rightarrow \frac{1}{c} e^{c\varphi} = \frac{v_0}{Kr_0} t + A$$

sachant qu'à $t = 0$ $\varphi = 0$, alors : $A = \frac{1}{c}$; ce qui donne : $\frac{1}{c} e^{c\varphi} = \frac{v_0}{Kr_0} t + \frac{1}{c}$

$$e^{c\varphi} = \frac{cv_0}{Kr_0} t + 1 \Leftrightarrow r_0 e^{c\varphi} = \frac{cv_0}{K} t + r_0 \text{ on sait que } r(t) = r_0 e^{c\varphi} \text{ d'où : } r(t) = \frac{cv_0}{K} t + r_0$$

2. Vecteur accélération

En coordonnées cylindriques l'expression du vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{k}$$

on sait que : $\dot{\varphi} = Cte \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$; $v = Cte \Rightarrow \ddot{r} = 0$

l'accélération devient : $\vec{\gamma} = -r\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r + 2r\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$

$$\vec{\gamma} = -r\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r + 2\dot{r}c\dot{\varphi} e^{c\varphi} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = -r\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r + c\dot{\varphi}^2 r \vec{e}_\varphi$$

Le rayon de courbure se déduit à partir de la relation : $\omega = \frac{v}{\rho}$ comme $\omega = \dot{\varphi}$ alors :

$$\rho = \frac{v}{\dot{\varphi}} = \frac{r\dot{\varphi} \sqrt{1 + c^2(1 + k^2)}}{\dot{\varphi}} = r\sqrt{1 + c^2(1 + k^2)} ; \quad \rho = r\sqrt{1 + c^2(1 + k^2)}$$

Exercice 04 :

Un mobile supposé ponctuel, décrit la courbe plane dont l'équation en coordonnées polaires

(ρ, θ) est donnée par : $\rho = \frac{1}{2} \rho_0(1 + \cos\theta)$ où ρ_0 : constant désigne une longueur donnée.

1. Quelle est l'allure de la trajectoire du mobile ?

- Précisez les positions des points d'intersection de cette trajectoire avec les axes cartésiens ox et oy ;
- Exprimer en fonction de θ , l'abscisse curviligne s du mobile, compté à partir du point A qui correspond à $\theta = 0$;
- Pour quel angle polaire nous avons $s = \rho_0$, on notera par B la position correspondante

- d. En déduire le périmètre de cette trajectoire fermée étudiée ici.
2. On choisira comme origine des temps, l'instant où le mobile est au point A . On admet que la trajectoire est décrite avec une vitesse angulaire ω constante.
- Exprimer la vitesse linéaire du mobile en fonction du temps puis en fonction de ρ ;
 - Déterminer les composantes d'accélération radiale γ_r et orthoradiale γ_θ ; en déduire l'accélération γ du mobile en fonction du temps ;
 - En utilisant les expressions de γ_r et γ_θ , déterminer l'accélération normale γ_N à l'instant t ;
 - En déduire le rayon de courbure de la trajectoire en fonction de θ ; Retrouver ce résultat directement.

Solution :

a) **Tracé de la courbe et intersection avec les axes**

La trajectoire dont l'équation en coordonnées polaires s'écrit $\rho = \frac{1}{2} \rho_0 (1 + \cos \theta)$ est une

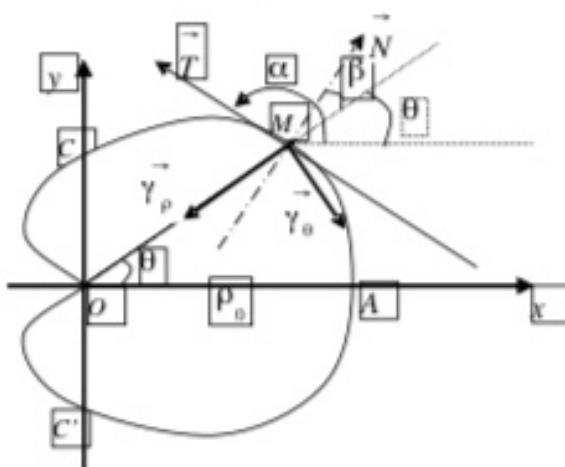
courbe fermée appelé cardoïde. L'axe Ox est un axe de symétrie car : $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$

$$\text{Pour : } \theta = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0 = OA \quad ; \quad \theta = \pi \Rightarrow \rho = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{2} = OC \quad ; \quad \theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{2} = OC'$$

La courbe coupe l'axe Ox en O et A avec $OA = \rho_0$

La courbe coupe l'axe Oy en C et C' avec $OC = OC' = \frac{\rho_0}{2}$



b) L'abscisse curviligne S en fonction de θ

Les composantes du point M en coordonnées polaires sont : $M \begin{cases} \rho \\ \theta \end{cases}$ et les variations de longueur par : $d\rho$ et $\rho_d\theta$. S étant l'abscisse curviligne nous aurons alors :

$$(dS)^2 = (d\rho)^2 + (\rho_d\theta)^2 \Rightarrow dS = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho_d\theta)^2}$$

comme : $d\rho = -\frac{1}{2}\rho_0 \sin \theta d\theta$ on déduit facilement :

$$dS = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\rho_0 \sin \theta d\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\rho_0(1 + \cos \theta)d\theta\right)^2} = \frac{1}{2}\rho_0 d\theta \sqrt{\sin^2 \theta + 1 + \cos^2 \theta}$$

$$dS = \frac{1}{2}\rho_0 d\theta \sqrt{2(1 + \cos \theta)} ; \text{ or nous savons que : } 1 + \cos \theta = 2\cos^2 \frac{\theta}{2}$$

on déduit finalement : $dS = \rho_0 \cos \frac{\theta}{2} d\theta$

on obtient l'abscisse curviligne par intégration de cette relation :

$$S = \rho_0 \int \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 2\rho_0 \sin \frac{\theta}{2} + S_0$$

Les conditions initiales impose qu'au point A ($\theta = 0$) alors $S_0 = 0$

$$\text{La relation entre } S \text{ et } \theta \text{ devient : } S = 2\rho_0 \sin \frac{\theta}{2}$$

c) Angle polaire pour lequel $S = \rho_0$

Soit B le point pour lequel nous avons : $S = \overset{\curvearrowright}{AB} = \rho_0$

$$S = \rho_0 \Rightarrow 2 \sin \frac{\theta}{2} = 1 \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

d) Périmètre de la trajectoire fermée

Soit P le périmètre de cette trajectoire. Le demi périmètre est donné par :

$$\frac{P}{2} = \overset{\curvearrowright}{AO} = \int_A^B ds = \rho_0 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \Rightarrow \frac{P}{2} = 2\rho_0 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi = 2\rho_0$$

d'où : $P = 4\rho_0$ périmètre de la cardioïde.

2. Vitesse linéaire instantanée du mobile

a.1 Vitesse linéaire en fonction du temps

L'origine des temps est prise au point A et la vitesse angulaire ω est constante donc :

$$\theta = \omega t. \text{ La vitesse est donnée par la relation : } v = \frac{dS}{dt} \text{ or nous avons : } dS = \rho_0 \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$v = \frac{dS}{dt} = \rho_0 \cos \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{dt} = \rho_0 \cos \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{dt} = \rho_0 \omega \cos \frac{\omega t}{2}$$

Ce résultat peut être obtenu d'une autre manière en déterminant les composantes radiales et orthoradiale de la vitesse. En effet nous savons que : $\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho$

$$\text{La vitesse s'écrit : } \vec{v} = \frac{d \vec{OM}}{dt} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\text{Avec : } \dot{\rho} = -\frac{1}{2} \rho_0 \omega \sin \omega t \quad \text{et} \quad \rho \dot{\theta} = \frac{1}{2} \rho_0 \omega (1 + \cos \omega t)$$

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\theta})^2} = \frac{1}{2} \rho_0 \omega \sqrt{\sin^2 \omega t + (1 + \cos^2 \omega t)^2}$$

$$v = \frac{1}{2} \rho_0 \omega \sqrt{2(1 + \cos \omega t)} = \frac{1}{2} \rho_0 \omega \sqrt{2(2 \cos^2 \frac{\omega t}{2})} = \rho_0 \omega \cos \frac{\omega t}{2}$$

a.2 Vitesse linéaire en fonction de ρ

L'équation de la cardioïde qui s'écrit : $\rho = \frac{1}{2} \rho_0 (1 + \cos \theta)$ peut aussi s'écrire :

$$\rho = \rho_0 \cos^2 \frac{\theta}{2} = \rho_0 \cos^2 \frac{\omega t}{2} \Rightarrow \cos^2 \frac{\omega t}{2} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

Or l'expression de la vitesse en fonction du temps est : $v = \rho_0 \omega \cos \frac{\omega t}{2} = \rho_0 \omega \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}$

$$\text{Ce qui donne : } v = \omega \sqrt{\rho \rho_0}$$

b. Les composantes de l'accélération : radiale γ_ρ et orthoradiale γ_θ

nous avons : $\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho$ et $\vec{v} = \frac{d \vec{OM}}{dt} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ on déduit :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} - \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta \quad \text{avec } \ddot{\theta} = 0 \quad \text{car } \dot{\theta} = \omega = \text{Cte}$$

$$\gamma_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -\frac{1}{2}\rho_0\omega^2 \cos\omega t - \frac{1}{2}\rho_0\omega^2(1 + \cos\omega t) = -\frac{1}{2}\rho_0\omega^2(1 + 2\cos\omega t)$$

$$\gamma_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} = 2\left(-\frac{1}{2}\rho_0\omega \sin\omega t\right)\omega = -\rho_0\omega^2 \sin\omega t$$

L'accélération $\vec{\gamma}$ du mobile se calcule par :

$$\gamma = \sqrt{\gamma_\rho^2 + \gamma_\theta^2} = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 \sqrt{(1 + 2\cos\omega t)^2 + (2\sin\omega t)^2} = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 \sqrt{1 + 4(1 + \cos\omega t)}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 \sqrt{1 + 8\cos^2 \frac{\omega t}{2}}$$

c. Détermination de l'accélération normale γ_N à partir des accélérations γ_ρ et γ_θ

Nous avons : $\alpha = \vec{\alpha}(T, Ox)$ et $\beta = \vec{\beta}(N, OM)$, on sait que : $(N, T) = \frac{\pi}{2}$ et $(u_\rho, u_\theta) = \frac{\pi}{2}$

On projette les deux accélérations sur l'axe portant la normale \vec{N} , on obtient :

$$\gamma_N = -\gamma_\rho \cos\beta - \gamma_\theta \sin\beta$$

Exprimons l'angle α et β en fonction de θ :

En coordonnées polaires nous avons : $x = \rho \cos\theta$ et $y = \rho \sin\theta$ alors :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d(\rho \sin\theta)}{dt} = \frac{(1 + \cos\theta)\cos\theta - \sin^2\theta}{-(1 + \cos\theta)\sin\theta - \sin\theta \cos\theta} = -\frac{\cos\theta + \cos 2\theta}{\sin\theta + \sin 2\theta} = -\cot g\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\cot g\left(\frac{3\theta}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2}\right) \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2}$$

nous avons aussi géométriquement : $\alpha = \theta + \beta + \frac{\pi}{2}$ on déduit : $\beta = \frac{\theta}{2}$

On remplace β dans l'expression de γ_N , ce qui donne :

$$\gamma_N = -\gamma_\rho \cos\beta - \gamma_\theta \sin\beta = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2(1 + 2\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2} + \rho_0\omega^2 \sin\theta \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\gamma_N = \frac{3}{2}\rho_0\omega^2 \cos\frac{\theta}{2} = \frac{3}{2}\rho_0\omega^2 \cos\frac{\omega t}{2}$$

c. Rayon de courbure

On sait que dans les mouvements curvilignes : $\gamma_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{\gamma_N}$

$$\text{Ce qui donne : } R = \frac{v^2}{\gamma_N} = \frac{\rho_0^2 \omega^2 \cos^2 \frac{\omega t}{2}}{\frac{3}{2} \rho_0 \omega^2 \cos \frac{\omega t}{2}} = \frac{2}{3} \rho_0 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$R = \frac{2}{3} \rho_0 \cos \frac{\theta}{2}$$

On peut aussi déduire le rayon de courbure d'une autre manière en sachant que :

$$S = 2\rho_0 \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad \alpha = \theta + \beta + \frac{\pi}{2}$$

$$R = \frac{dS}{d\alpha} = \frac{\rho_0 \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\frac{3}{2} d\theta} = \frac{2}{3} \rho_0 \cos \frac{\theta}{2}$$

est donnée par : $\rho = \frac{V^2}{\gamma_N}$, ce qui donne : $\rho = \frac{\left(\omega \sqrt{6} e^{\omega t}\right)}{\omega^2 \sqrt{2} e^{\omega t}} = 3\sqrt{2} e^{\omega t}$

Or nous avons : $z = 2e^{\omega t} \Rightarrow e^{\omega t} = \frac{z}{2}$, ce qui conduit à : $\rho = \frac{3\sqrt{2}}{2} z$

3. Equation polaire du point H .

H appartient au plan (xOy) ces coordonnées sont données par les équations paramétriques :

$$x = \sin \omega t e^{\omega t}; \quad y = \cos \omega t e^{\omega t}$$

Les coordonnées polaires du point H sont (ρ, θ) tel que : $\vec{OH} = \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ avec

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \vec{OH} = r \vec{u}, \quad \text{où} \quad \vec{u}, \quad \text{vecteur unitaire.}$$

$$\text{Nous avons ainsi : } r = \sqrt{\left(\frac{\sin \omega t e^{\omega t}}{e^{\omega t}}\right)^2 + \left(\frac{\cos \omega t e^{\omega t}}{e^{\omega t}}\right)^2} = e^{\omega t}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\sin \omega t e^{\omega t}}{e^{\omega t}} = \sin \omega t \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\cos \omega t e^{\omega t}}{e^{\omega t}} = \cos \omega t$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \sin \omega t \\ \sin \theta = \cos \omega t \end{cases} \quad \text{par conséquent ces deux équations nous} \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \omega t \Leftrightarrow \omega t = \frac{\pi}{2} - \theta$$

ce qui nous ramène à l'équation polaire du point H : $r = e^{\frac{\pi}{2}-\theta}$

Exercice 06 :

Soit M un point repéré dans le plan (xoy) par les équations paramétriques suivantes :

$$x = 4t^2 - 1 \quad \text{et} \quad y = 2\sqrt{2}t \quad \text{Déterminer:}$$

1. Le vecteur vitesse du point M en fonction du temps ainsi que son module ;
2. Le vecteur accélération du point M en fonction du temps ainsi que son module ; En déduire les accélérations tangentielle et normale ;
3. Le rayon de courbure de la trajectoire ;
4. On considère que le repère cartésien et le repère polaire ont la même origine et que l'angle θ est repéré par rapport à l'axe ox . Calculer les vitesses, radiale, orthoradiale et angulaire.

Exercice 05 :

Dans un repère orthonormé $R(O, x, y, z)$ la position d'un point M est déterminé par les équations paramétriques suivantes : $x = \sin \omega t e^{\omega t}$; $y = \cos \omega t e^{\omega t}$; $z = 2 e^{\omega t}$

Déterminer :

1. Les modules de la vitesse et de l'accélération du point M ;
2. Le rayon de courbure en fonction de z ;
3. Soit H la projection orthogonale du point M sur le plan xoy , quelle est l'équation polaire du point H .

Solution :

1. Vitesse et accélération du point M

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{cases} V_x = \omega e^{\omega t} (\sin \omega t + \cos \omega t) \\ V_y = \omega e^{\omega t} (\cos \omega t - \sin \omega t) \\ V_z = 2\omega e^{\omega t} \end{cases}; \text{ on déduit le module de la vitesse par :}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \omega \sqrt{6} e^{\omega t}$$

L'accélération est donnée par :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \begin{cases} \gamma_x = 2\omega^2 e^{\omega t} \cos \omega t \\ \gamma_y = -2\omega^2 e^{\omega t} \sin \omega t \\ \gamma_z = 2\omega^2 e^{\omega t} \end{cases}; \text{ on déduit le module de l'accélération par :}$$

$$\gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2} = 2\sqrt{2}\omega^2 e^{\omega t}$$

2. Rayon de courbure en fonction de z

Dans la base de Frênet, l'accélération tangentielle est égale à la dérivée du module de la

$$\text{vitesse, ce qui donne : } \gamma_t = \frac{dV}{dt} = \omega^2 \sqrt{6} e^{\omega t}$$

L'accélération normale se déduit à partir de la relation : $\gamma^2 = \gamma_t^2 + \gamma_N^2$

$$\gamma_N^2 = \gamma^2 - \gamma_t^2 = 2\sqrt{2}\omega^2 e^{\omega t} - \omega^2 \sqrt{6} e^{\omega t} = 2(\omega^2 e^{\omega t})$$

$$\gamma_N = \omega^2 \sqrt{2} e^{\omega t}$$

D'autre part nous avons une relation entre le rayon de courbure et l'accélération normale qui

Solution :

1. Vitesse et accélération du point M

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{cases} V_x = 8t \\ V_y = 2\sqrt{2} \end{cases}; \text{ on déduit le module de la vitesse par :}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 2\sqrt{2}\sqrt{8t^2 + 1}$$

2. Accélération du point M ainsi que γ_r et γ_N

$$\text{L'accélération est donnée par : } \vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \begin{cases} \gamma_x = 8 \\ \gamma_y = 0 \end{cases}; \text{ d'où : } \gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} = 8$$

$$\text{Dans la base de Frénet nous avons : } \gamma^2 = \gamma_r^2 + \gamma_N^2 \quad \text{avec: } \gamma_r = \frac{dV}{dt}$$

$$\gamma_r = 2\sqrt{2} \frac{d\left(\sqrt{8t^2 + 1}^{\frac{1}{2}}\right)}{dt} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} 16t \sqrt{8t^2 + 1}^{-\frac{1}{2}} = \frac{16t\sqrt{2}}{\sqrt{8t^2 + 1}}$$

$$\text{comme nous avons : } \gamma_N^2 = \gamma^2 - \gamma_r^2$$

$$\gamma_N^2 = 8^2 - \left(\frac{16t\sqrt{2}}{\sqrt{8t^2 + 1}} \right)^2 = 64 - \frac{512t^2}{8t^2 + 1} = \frac{64}{8t^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_N = \frac{8}{\sqrt{8t^2 + 1}}$$

3. Rayon de courbure de la trajectoire

$$\text{il est donné par la relation : } \rho = \frac{V^2}{\gamma_N}$$

$$\text{d'où: } \rho = \frac{8 \cdot \sqrt{8t^2 + 1} \sqrt{8t^2 + 1}}{8} = \frac{8}{\sqrt{8t^2 + 1}}$$

4. Vitesses : radiale, orthoradiale et angulaire

a. Vitesse radiale

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{d(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{dt} \quad \text{car} \quad r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$V_r = \frac{d\left(\sqrt{16t^4 + 1}^{\frac{1}{2}}\right)}{dt} = \frac{d(16t^4 + 1)^{\frac{1}{2}}}{dt} = \frac{1}{2} 64t^3 (16t^4 + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{32t^3}{\sqrt{16t^4 + 1}}$$

b. Vitesse orthoradiale

Nous avons la relation : $V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 \Rightarrow V_\theta^2 = V^2 - V_r^2$

$$V_\theta^2 = 8(8t^2 + 1) - \left(\frac{32t^3}{\sqrt{16t^4 + 1}} \right)^2 = 64t^2 + 8 - \frac{1024t^6}{16t^4 + 1} = \frac{64t^2 + 128t^4 + 8}{16t^4 + 1}$$

$$V_\theta = \pm 2\sqrt{2} \frac{4t^2 + 1}{\sqrt{16t^4 + 1}}$$

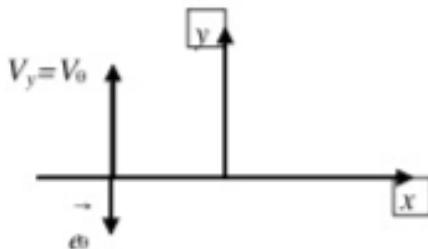
on voit dans cette expression que la vitesse radiale est continue et ne s'annule jamais alors elle ne change pas de signe. En coordonnées polaires nous avons : $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$

nous avons ainsi pour $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = 0 \\ \cos\theta = -1 \end{cases}$ d'où : $\theta = \pi$

au même instant $t = 0$ nous avons : $\begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Ces deux conditions nous conduisent à la situation suivante :

Pour $t = 0 \Rightarrow \theta = \pi$



On voit que pour $t = 0$ la vitesse radial V_θ est négative et comme elle ne change pas, elle le restera et par conséquent elle aura pour expression : $V_\theta = -2\sqrt{2} \frac{4t^2 + 1}{\sqrt{16t^4 + 1}}$

c. Vitesse angulaire

$$\text{Nous savons que : } V_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{V_\theta}{r} = \frac{-2\sqrt{2} \frac{4t^2 + 1}{\sqrt{16t^4 + 1}}}{r} = -2\sqrt{2} \frac{4t^2 + 1}{16t^4 + 1}$$

CHAPITRE VI

CINÉMATIQUE DU SOLIDE

CINÉMATIQUE DU SOLIDE

1. Généralités

Un solide est dit indéformable, si la distance entre deux points de celui-ci reste constante et invariable au court du temps : $d[\overrightarrow{A}](t) \overrightarrow{B}(t) = \|\overrightarrow{AB}\| = Cte$

La mécanique des solides permet d'étudier le comportement des solides et déterminer tous les paramètres cinématiques de l'ensemble de ses points quel que soit la nature du mouvement. La notion de torseur, déjà étudiée dans les chapitres précédents, sera très utile dans la cinématique des solides. La formule de transport permet, connaissant la vitesse d'un seul point du solide de déduire facilement la vitesse de tous les points du solide.

L'objectif de la cinématique du solide est de connaître la position, la vitesse et l'accélération de tous les points du solide par rapport à un repère déterminé.

2. Notion de Repères et Référentiels

Pour étudier le mouvement d'un solide où d'un système composé de plusieurs solides, il est indispensable de repérer la position de chaque point ainsi que les vecteurs cinématiques dans l'espace et le temps.

Nous considérons en cinématique classique que l'espace est Euclidien, à trois dimensions et le temps est absolu et indépendant de l'observateur.

Afin de repérer le solide, l'observateur va définir :

- Un repère d'espace défini par une origine O et une base orthonormée $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. Le trièdre $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ défini complètement le repère d'espace dans lequel peuvent être exprimées les coordonnées de tous les points du solide.
- Un repère de temps (appelé aussi échelle de temps) avec une origine et une unité de temps. Dans le système MKSA l'unité de temps est la seconde.

Ces deux repères définissent un repère espace-temps appelé en cinématique classique référentiel ou simplement repère. Nous choisissons ensuite un point O_s quelconque du

solide. La position de ce point est donnée à chaque instant par le vecteur position $\vec{OO_s}$, exprimé dans le repère $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Les coordonnées du point O_s dépendent du temps et permettent de connaître à chaque instant la position du repère $R(O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ lié au solide. Le passage du repère $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ vers le repère $R(O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ lié au solide est déterminé par la matrice de passage qui exprime les vecteurs unitaires $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en fonction des vecteurs unitaires $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$. Cette matrice de passage s'exprime en fonction des angles d'Euler que nous verrons dans ce chapitre. L'orientation du repère lié au solide est indépendante du choix du point O_s .

L'ensemble des paramètres de translation et de rotation constituent les paramètres de situation ou degrés de liberté du solide dans l'espace par rapport au repère $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Si le nombre de paramètres est égale à 6 (3 rotations et 3 translations) on dit que le solide est complètement libre dans $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Si le nombre de paramètres est inférieur à 6, on dit que le solide est lié ou soumis à des liaisons, certains paramètres ne varient pas au cours du temps.

3. Systèmes de notations

Dans l'étude de la cinématique nous adoptons la notation suivante :

Soit $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un repère lié à l'observateur et P un point du solide, nous avons :

$\vec{O_iP}$: vecteur position du point P par rapport au repère R_i ;

$\vec{V^i}(P) = \frac{d^i \vec{O_iP}}{dt}$: vitesse du point P par rapport au repère R_i ;

$\vec{\gamma^i}(P) = \frac{d^i \vec{V^i}(P)}{dt}$: accélération du point P par rapport au repère R_i ;

Les paramètres cinématiques sont toujours liés au repère.

4. Repère d'étude, lié à l'observateur et repère de projection

Les paramètres cinématiques (vecteurs vitesse et accélération) des points du solide sont

étudiés dans un repère $\vec{R}_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ lié à l'observateur. Ce repère est appelé repère d'étude.

Les composantes des vecteurs vitesses $\vec{V}^i(P)$ et accélération $\overset{\rightarrow}{\gamma}^i(P)$ étant mesurés et définis

dans le repère $\vec{R}_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ nous pouvons connaître leurs composantes dans n'importe

quel repère de l'espace $\vec{R}_p(O_p, \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$ que l'on appellera repère de projection.

Le choix de ce repère de projection permet d'exprimer les paramètres cinématiques avec des expressions mathématiques plus simples. Il est souvent intéressant de choisir le repère de projection différent du repère d'étude afin de simplifier et réduire les calculs. Le repère de projection étant mobile par rapport au repère d'étude, il faut faire attention lors des dérivations que les vecteurs unitaires du repère de projection changent de direction donc il faut en tenir compte.

5. Mouvement d'un repère R_k par rapport à un repère R_i lié à l'observateur

Soit $\vec{R}_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un repère lié à l'observateur et $\vec{R}_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ un repère en mouvement quelconque par rapport au premier. Tout point de l'espace peut être repéré totalement dans R_k et déduire ses composantes dans R_i où inversement en connaissant le mouvement de R_k par rapport à R_i .

Le mouvement du repère R_k est totalement connu si :

- La position de son centre O_k est totalement connu dans R_i ;
- L'orientation des axes de R_k est connu par rapport à ceux de R_i .
-

5.1. Repérage du centre O_k du repère R_k

Le repérage du point O_k centre du repère R_k est déterminé par les composantes du vecteur

$\overset{\rightarrow}{O_i O_k}$ liant les deux centres des repères dans R_i ou R_k , ceci se traduit par les relations

suyvantes :

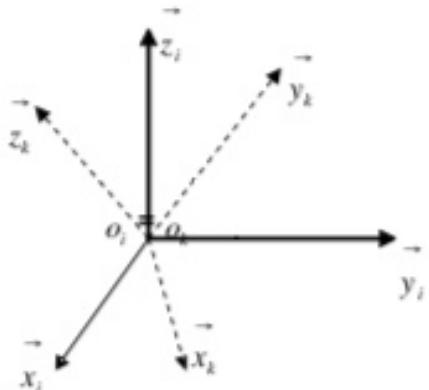
$$\text{Dans } R_i : \begin{cases} \vec{O_i O_k} \cdot \vec{x}_i \\ \vec{O_i O_k} \cdot \vec{y}_i \\ \vec{O_i O_k} \cdot \vec{z}_i \end{cases} ; \quad \text{Dans } R_k : \begin{cases} \vec{O_i O_k} \cdot \vec{x}_k \\ \vec{O_i O_k} \cdot \vec{y}_k \\ \vec{O_i O_k} \cdot \vec{z}_k \end{cases}$$

5.2 Repérage de l'orientation des axes du repère

Pour repérer l'orientation des axes du repère R_k , on ramène ce repère en O_i de telle sorte que les centres O_i et O_k soient confondues ($O_i = O_k$).

Le repère R_k est en rotation quelconque par rapport au repère R_i , dans ce cas chacun des vecteurs unitaires $(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ aura des composantes dans le repère R_i ; nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \vec{x}_i &= \alpha_{11} \vec{x}_k + \alpha_{12} \vec{y}_k + \alpha_{13} \vec{z}_k \\ \vec{y}_i &= \alpha_{21} \vec{x}_k + \alpha_{22} \vec{y}_k + \alpha_{23} \vec{z}_k \\ \vec{z}_i &= \alpha_{31} \vec{x}_k + \alpha_{32} \vec{y}_k + \alpha_{33} \vec{z}_k \end{aligned}$$



Ces trois équations peuvent se mettre sous la forme matricielle, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \\ \vec{z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_k \\ \vec{y}_k \\ \vec{z}_k \end{pmatrix}$$

La matrice $[P]$ (3x3) définie par les éléments α_{ij} est appelée matrice de passage du repère R_i au repère R_k . La matrice $[P]$ est orthogonale droite, trois paramètres indépendants permettent de repérer l'orientation du repère R_k . Les paramètres indépendants les plus utilisés pour déterminer l'orientation de la base mobile sont les angles d'Euler que l'on présentera en détail dans ce chapitre. Nous allons d'abord étudier les relations existant entre les deux bases R_i et R_k puis expliciter la formule de la base mobile et ses conséquences.

5.3. Formule de la base mobile

Soit $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un repère fixe et $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ un repère mobile par rapport au premier. Les vecteurs unitaires du repère R_k sont orthogonaux entre eux et de module constant et égale à 1, mais ils changent de direction dans l'espace.

$$\|\vec{x}_k\| = \|\vec{y}_k\| = \|\vec{z}_k\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{x}_k \cdot \vec{y}_k = 0, \quad \vec{x}_k \cdot \vec{z}_k = 0, \quad \vec{y}_k \cdot \vec{z}_k = 0$$

Nous allons déterminer les dérivées de ces vecteurs dans le repère R_i :

$$\frac{d^i \vec{x}_k}{dt}, \quad \frac{d^i \vec{y}_k}{dt}, \quad \frac{d^i \vec{z}_k}{dt}$$

Soit $\vec{\Omega}_k^i = \dot{\theta}(\vec{a} \vec{x}_k + \vec{b} \vec{y}_k + \vec{c} \vec{z}_k)$, le vecteur rotation de la base $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ par rapport à la base $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$.

Nous avons alors les relations suivantes :

$$\frac{d^i \vec{x}_k}{d\theta} \perp \vec{x}_k \Rightarrow \frac{d^i \vec{x}_k}{d\theta} \in (\vec{y}_k, \vec{z}_k) ; \text{ nous pouvons écrire : } \frac{d^i \vec{x}_k}{d\theta} = 0 \vec{x}_k + c \vec{y}_k - b \vec{z}_k$$

$$\frac{d^i \vec{x}_k}{dt} = \frac{d^i \vec{x}_k}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (0 \vec{x}_k + c \vec{y}_k - b \vec{z}_k) \dot{\theta} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{x}_k$$

$$\frac{d^i \vec{y}_k}{d\theta} \perp \vec{y}_k \Rightarrow \frac{d^i \vec{y}_k}{d\theta} \in (\vec{x}_k, \vec{z}_k) ; \text{ nous pouvons écrire : } \frac{d^i \vec{y}_k}{d\theta} = -c \vec{x}_k + 0 \vec{y}_k + a \vec{z}_k$$

$$\frac{d^i \vec{y}_k}{dt} = \frac{d^i \vec{y}_k}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (-c \vec{x}_k + 0 \vec{y}_k + a \vec{z}_k) \dot{\theta} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{y}_k$$

$$\frac{d^i \vec{z}_k}{d\theta} \perp \vec{z}_k \Rightarrow \frac{d^i \vec{z}_k}{d\theta} \in (\vec{x}_k, \vec{y}_k) ; \text{ nous pouvons écrire : } \frac{d^i \vec{z}_k}{d\theta} = b \vec{x}_k - a \vec{y}_k + 0 \vec{z}_k$$

$$\frac{d^i \vec{z}_k}{dt} = \frac{d^i \vec{z}_k}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (b \vec{x}_k - a \vec{y}_k + 0 \vec{z}_k) \dot{\theta} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{z}_k$$

Nous avons donc : $\frac{d^i \vec{x}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{x}_k ; \quad \frac{d^i \vec{y}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{y}_k ; \quad \frac{d^i \vec{z}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{z}_k$

5.4. Dérivée dans le repère R_i d'un vecteur $\vec{V}(t)$ exprimé dans un repère R_k

Le vecteur $\vec{V}(t)$ s'écrit : $\vec{V}(t) = \vec{X}_k \vec{x}_k + \vec{Y}_k \vec{y}_k + \vec{Z}_k \vec{z}_k$ dans le repère R_k .

Sa dérivée dans le repère R_k a pour expression : $\frac{d^k \vec{V}(t)}{dt} = \dot{\vec{X}}_k \vec{x}_k + \dot{\vec{Y}}_k \vec{y}_k + \dot{\vec{Z}}_k \vec{z}_k$

Sa dérivée dans le repère R_i s'écrit :

$$\frac{d^i \vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^k \vec{V}(t)}{dt} + \vec{X}_k \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{x}_k + \vec{Y}_k \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{y}_k + \vec{Z}_k \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{z}_k$$

$$\frac{d^i \vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^k \vec{V}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{X}_k \vec{x}_k + \vec{Y}_k \vec{y}_k + \vec{Z}_k \vec{z}_k \right) = \frac{d^k \vec{V}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}(t)$$

$$\text{On obtient finalement : } \frac{d^i \vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^k \vec{V}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}(t)$$

5.5. Propriétés du vecteur $\vec{\Omega}_k^i$

- a) Le vecteur $\vec{\Omega}_k^i$ est antisymétrique par rapport aux indices i et j : $\vec{\Omega}_k^i = -\vec{\Omega}_k^j$
- b) Formule de Chasles : $\vec{\Omega}_k^i = \vec{\Omega}_k^j + \vec{\Omega}_j^i$ (principe de composition)
- c) $\frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} = \frac{d^k \vec{\Omega}_k^i}{dt}$ égalité des dérivées par rapport aux indices.

6. Angles d'Euler

6.1 Angles d'Euler de type 1

Soit $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un repère fixe et $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ un repère lié au solide (S), en mouvement quelconque dans l'espace. Le centre O_k du repère R_k appartient au solide $O_k \in (S)$.

Dans le cas des angles d'Euler de type 1, on considère que les centres O_i et O_k des deux repères sont confondus : $O_i = O_k$, ce qui signifie que le repère R_k ne fait que des rotations

par rapport au repère R_i . Trois paramètres indépendants sont nécessaires pour définir complètement l'orientation du repère R_k par rapport à celle de R_i .

Le passage du repère R_i vers le repère R_j se fera par trois rotations en utilisant deux repères intermédiaires R_1 et R_2 .

6.1.1. Passage du repère R_i vers le repère R_j : (précession)

La rotation se fait autour de l'axe $\vec{z}_i = \vec{z}_1$.

On passe du repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ vers le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en faisant une rotation d'angle Ψ : appelé angle de précession. La vitesse de rotation est donnée par :

$$\vec{\Omega}_1 = \dot{\Psi} \vec{z}_i = \dot{\Psi} \vec{z}_1 \text{ car } \vec{z}_i \text{ est confondu avec } \vec{z}_1.$$

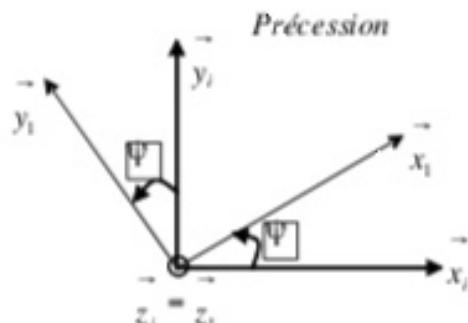
La représentation se fait par des figures planes, à partir desquelles nous construisons les matrices de passage. Nous avons ainsi :

$$\vec{x}_1 = \cos \Psi \vec{x}_i + \sin \Psi \vec{y}_i + 0 \cdot \vec{z}_i$$

$$\vec{y}_1 = -\sin \Psi \vec{x}_i + \cos \Psi \vec{y}_i + 0 \cdot \vec{z}_i$$

$$\vec{z}_1 = 0 \cdot \vec{x}_i + 0 \cdot \vec{y}_i + \vec{z}_i$$

Ces trois équations peuvent être mise sous forme matricielle et nous obtenons:



$$\Psi = (\vec{x}_i, \vec{x}_1) = (\vec{y}_i, \vec{y}_1) \text{ avec } \vec{z}_1 = \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_1$$

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \\ \vec{z}_i \end{pmatrix}$$

$P_{R_i \rightarrow R_1} = \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage du repère R_i vers le repère R_1 .

La matrice de passage de R_i vers R_j est égale à la transposée de $P_{R_1 \rightarrow R_1}$: $P_{R_i \rightarrow R_j} = P^T_{R_1 \rightarrow R_j}$

6.1.2. Passage du repère R_2 vers le repère R_1 : (Nutation)

La rotation se fait autour de l'axe $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$.

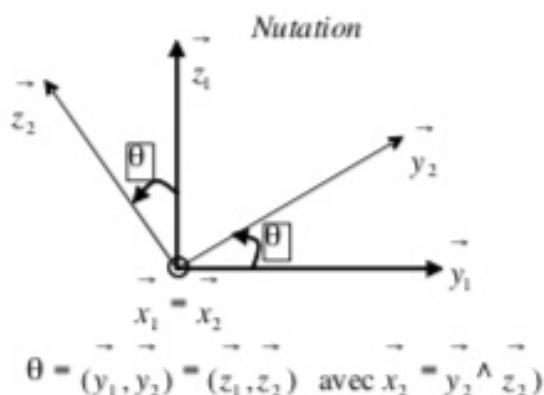
On passe du repère $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ vers le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en faisant une rotation d'angle θ : appelé angle de Nutation. La vitesse de rotation est donnée par :

$$\vec{\Omega}_2 = \dot{\theta} \vec{x}_1 = \dot{\theta} \vec{x}_2 \quad \text{car } \vec{x}_1 \text{ est confondu avec } \vec{x}_2.$$

Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{x}_2 &= \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{y}_1 + 0 \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{y}_2 &= 0 \cdot \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1 + \sin \theta \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 &= 0 \cdot \vec{x}_1 - \sin \theta \vec{y}_1 + \cos \theta \vec{z}_1\end{aligned}$$

Sous forme matricielle et nous obtenons:



$$\begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$$P_{R2 \rightarrow R1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ est la matrice de passage du repère } R_2 \text{ vers le repère } R_1.$$

6.1.3. Passage du repère R_k vers le repère R_2 : (Rotation propre)

La rotation se fait autour de l'axe $\vec{z}_2 = \vec{z}_k$.

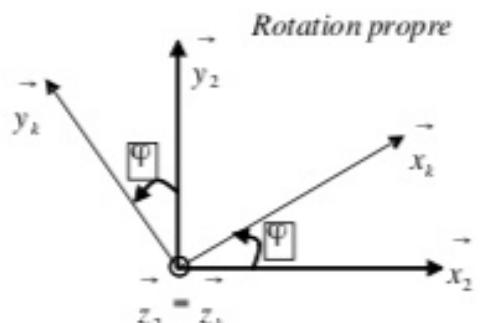
On passe du repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ vers le repère $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en faisant une rotation d'angle φ : appelé angle de Rotation propre. La vitesse de rotation est donnée par :

$$\vec{\Omega}_k = \dot{\varphi} \vec{z}_2 = \dot{\varphi} \vec{z}_k \quad \text{car } \vec{z}_2 \text{ est confondu avec } \vec{z}_k.$$

Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{x}_k &= \cos\varphi \vec{x}_2 + \sin\varphi \vec{y}_2 + 0 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{y}_k &= -\sin\varphi \vec{x}_2 + \cos\varphi \vec{y}_2 + 0 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{z}_k &= 0 \cdot \vec{x}_2 + 0 \cdot \vec{y}_2 + \vec{z}_2\end{aligned}$$

Sous forme matricielle et nous obtenons:



$$\varphi = (\vec{x}_2, \vec{x}_k) = (\vec{y}_2, \vec{y}_k) \quad \text{avec } \vec{z}_k = \vec{x}_k \wedge \vec{y}_k$$

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_k \\ \vec{y}_k \\ \vec{z}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

$P_{R_k \rightarrow R_2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage du repère R_k vers le repère R_2 .

Le passage du repère R_k vers le repère R_i ou inversement se fait par trois rotations successives de telle sorte que tous les axes de R_k occupent des positions différentes de celle de R_i . La matrice de passage de R_k vers R_i est donnée par le produit des trois matrices successives, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_k \\ \vec{y}_k \\ \vec{z}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\psi - \sin\psi \cos\theta \sin\varphi & \cos\varphi \sin\psi + \sin\psi \cos\theta \cos\varphi & \sin\varphi \sin\theta \\ -\sin\varphi \cos\psi - \sin\psi \cos\theta \cos\varphi & -\sin\varphi \sin\psi + \sin\psi \cos\theta \cos\varphi & \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\theta \sin\varphi & -\sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \\ \vec{z}_i \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de R_i vers R_k est donnée par la transposée de cette dernière.

Le vecteur rotation instantané du repère R_k par rapport à R_i aura pour expression vectorielle : $\vec{\Omega}_k^i = \dot{\psi} \vec{z}_i + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\varphi} \vec{z}_2$.

Il aura une expression différente selon qu'il soit écrit dans l'un ou l'autre des deux repères.

Dans R_i , nous aurons : $\vec{\Omega}_i = \begin{cases} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\varphi} \cos \psi + \dot{\psi} \end{cases}$

Dans R_k , nous aurons : $\vec{\Omega}_k = \begin{cases} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \psi \end{cases}$

Ce vecteur instantané de rotation permet de déduire la vitesse de tous les points du solide en connaissant la vitesse d'un seul point appartenant au solide.

7. Champs des vitesses et accélérations d'un solide

Soit un repère fixe $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ et un solide (S_k) lié à un repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ en mouvement quelconque dans l'espace. Pour tout point du solide (S_k) nous pouvons lui associer son vecteur position, donc son vecteur vitesse et vecteur accélération.

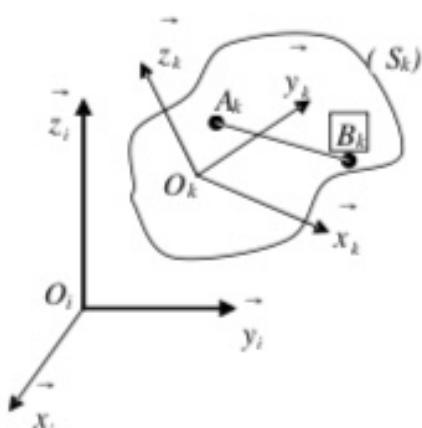
Considérons deux points A_k et B_k appartenant au solide (S_k) , nous allons chercher une relation entre leur vitesse et leur accélération.

7.1. Champs des vitesses

Le solide (S_k) est indéformable, alors la

distance $\vec{A}_k \vec{B}_k = Cte$ reste constante au cours du temps dans les deux repères.

Ce vecteur s'exprimera de façon différente dans R_i et R_k . Les vitesses des points A_k et B_k sont différentes car le solide a un mouvement quelconque.



Dans le repère R_i nous avons : $\vec{O_iB_k} = \vec{O_iA_k} + \vec{A_kB_k} \Rightarrow \vec{A_kB_k} = \vec{O_iB_k} - \vec{O_iA_k} = Cte$

Dans le repère R_k nous avons : $\vec{O_kB_i} = \vec{O_kA_i} + \vec{A_iB_i} \Rightarrow \vec{A_iB_i} = \vec{O_kB_i} - \vec{O_kA_i} = Cte$

Des deux expressions nous pouvons déduire une relation entre les vitesses des deux points appartenant au solide.

Les vitesses des deux points par rapport au repère R_i sont données par:

$$\vec{V^i}(A_k) = \frac{d^i \vec{O_iA_k}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{V^i}(B_k) = \frac{d^i \vec{O_iB_k}}{dt}$$

Ses deux expressions peuvent s'écrire sous la forme :

$$\vec{V^i}(A_k) = \frac{d^i \vec{O_iA_k}}{dt} = \frac{d^k \vec{O_iA_k}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O_iA_k} \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\vec{V^i}(B_k) = \frac{d^i \vec{O_iB_k}}{dt} = \frac{d^k \vec{O_iB_k}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O_iB_k} \quad \dots \dots \dots (2)$$

En faisant la différence entre les deux expressions (2) - (1) : on aboutit à :

$$\vec{V^i}(B_k) - \vec{V^i}(A_k) = \frac{d^i (\vec{O_iB_k} - \vec{O_iA_k})}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\vec{O_iB_k} - \vec{O_iA_k})$$

$$\text{or on sait que : } \frac{d^i (\vec{O_iB_k} - \vec{O_iA_k})}{dt} = \frac{d^i \vec{A_kB_k}}{dt} = 0 \quad \text{car} \quad \vec{O_iB_k} - \vec{O_iA_k} = \vec{A_kB_k}$$

On obtient ainsi la relation de distribution des vitesses dans un solide :

$$\vec{V^i}(B_k) = \vec{V^i}(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{A_kB_k}$$

Cette relation est d'une grande importance dans la cinématique et la dynamique des solides.

Elle permet, à partir de la vitesse d'un point du solide de déduire la vitesse de tous les autres points du solide en connaissant la vitesse de rotation du repère lié à celui-ci.

Remarques :

a) Si le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_k^i = \vec{0}$, alors le solide est en mouvement de translation

pur et tous les points du solide ont la même vitesse : $\vec{V^i}(B_k) = \vec{V^i}(A_k)$;

b) Si $\vec{V^i}(A_k) = \vec{0}$ et $\vec{V^i}(B_k) = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{A_kB_k}$, on dit que le solide est en mouvement de rotation pur autour du point $A_k \in (S_k)$;

- c) Le mouvement quelconque (général) d'un solide peut être décrit comme étant composé d'un mouvement de translation du point $A_k \in (S_k)$ à la vitesse $\vec{V}^i(A_k)$ et d'un mouvement de rotation autour du point $A_k \in (S_k)$ à la vitesse de rotation $\vec{\Omega}_k$.

7.2. Equiprojectivité du champ des vitesses d'un solide

Nous pouvons le montrer par deux méthodes différentes.

- a) Nous avons montré précédemment que $\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{A}_k B_k$

En multipliant cette expression par le vecteur $\vec{A}_k B_k$, nous obtenons :

$$\vec{A}_k B_k \cdot (\vec{V}^i(B_k)) = \vec{A}_k B_k \cdot \vec{V}^i(A_k) + \vec{A}_k B_k \cdot (\vec{\Omega}_k \wedge \vec{A}_k B_k)$$

Par permutation circulaire du produit mixte, nous pouvons facilement voir que l'expression :

$$\vec{A}_k B_k \cdot (\vec{\Omega}_k \wedge \vec{A}_k B_k) = \vec{\Omega}_k \cdot (\vec{A}_k B_k \wedge \vec{A}_k B_k) = 0$$

On obtient ainsi l'égalité : $\vec{A}_k B_k \cdot \vec{V}^i(B_k) = \vec{A}_k B_k \cdot \vec{V}^i(A_k)$

(propriété d'équiprojectivité du champ des vitesses du solide)

- b) Cette expression peut être retrouvée

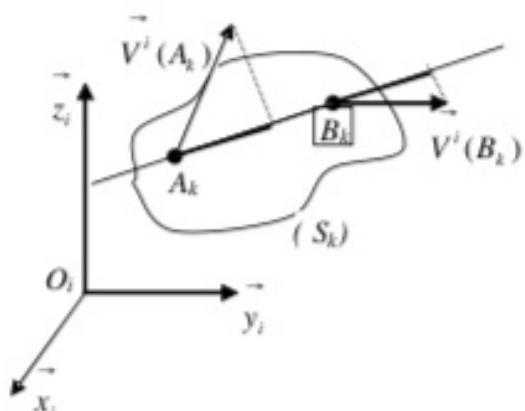
d'une autre façon.

Le solide (S_k) est indéformable

et la distance $\vec{A}_k B_k$ est constante alors :

$$\frac{d\left(\vec{A}_k B_k\right)^2}{dt} = 0$$

$$\frac{d\left(\vec{A}_k B_k\right)^2}{dt} = 2 \vec{A}_k B_k \cdot \frac{d \vec{A}_k B_k}{dt} = 0$$



$$2 \vec{A}_k B_k \cdot \left(\vec{V}^i(B_k) - \vec{V}^i(A_k) \right) = 0 \quad \text{d'où} \quad \vec{A}_k B_k \cdot \vec{V}^i(B_k) = \vec{A}_k B_k \cdot \vec{V}^i(A_k)$$

Cette propriété d'équiprojectivité entraîne l'existence d'un vecteur libre $\vec{\Omega}_k^i$ tel que :

$\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k$, ce qui permet d'introduire la notion de torseur cinématique.

7.3. Champs des accélérations

Pour chaque point du solide (S_k) lié au repère R_k , on déduit l'accélération à partir de la

vitesse à partir de la relation : $\vec{\gamma}^i(A_k) = \frac{d^i \vec{V}^i(A_k)}{dt}$

Nous allons chercher une relation qui lie les accélérations : $\vec{\gamma}^i(A_k)$ et $\vec{\gamma}^i(B_k)$

Nous avons déjà établi une relation entre les vitesses des deux points :

$$\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k$$

Nous déduirons la relation entre les accélérations par dérivation de l'expression des vitesses.

$$\vec{\gamma}^i(B_k) = \frac{d^i \vec{V}^i(B_k)}{dt} = \frac{d^i \vec{V}^i(A_k)}{dt} + \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k + \vec{\Omega}_k^i \wedge \frac{d^i \vec{A}_k \vec{B}_k}{dt}$$

$$\text{et comme : } \frac{d^i \vec{A}_k \vec{B}_k}{dt} = \frac{d^k \vec{A}_k \vec{B}_k}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k \quad \text{car } \frac{d^k \vec{A}_k \vec{B}_k}{dt} = \vec{0}$$

on obtient finalement la relation entre les accélérations des deux points A_k et B_k du solide :

$$\vec{\gamma}^i(B_k) = \vec{\gamma}^i(A_k) + \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k)$$

On constate que si la vitesse de rotation est constante $\vec{\Omega}_k^i = \vec{0}$ l'expression devient :

$$\vec{\gamma}^i(B_k) = \vec{\gamma}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k) = \vec{\gamma}^i(A_k) - \vec{A}_k \vec{B}_k \left(\vec{\Omega}_k^i \right)^2$$

7.4. Torseur cinématique

La formule de distribution des vitesses est donnée par la relation :

$$\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k$$

La formule de transport des moments entre deux points A_k et B_k du solide a pour expression :

$\vec{M}(B_k) = \vec{M}(A_k) + \vec{R} \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k$; nous constatons qu'il y a équivalence entre ces deux équations.

Le vecteur vitesse au point B_k est le moment au point B_k d'un torseur que nous noterons :

$\boxed{\Omega}_{B_k}$ et la résultante n'est autre que le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_k$.

Le torseur cinématique au point B_k ou (torseur de distribution des vitesses) relatif au mouvement du solide par rapport à R_i a pour éléments de réduction :

- le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_k$;
- la vitesse au point B_k : $\vec{V}^i(B_k)$

il sera noté sous la forme : $\boxed{\Omega}_{B_k} = \begin{cases} \vec{\Omega}_k \\ \vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k \end{cases}$

Le torseur cinématique est d'un grand intérêt car il caractérise complètement le mouvement d'un solide par rapport au repère R_i en ce qui concerne les vitesses.

Comme les éléments de réduction du torseur cinématique sont des fonctions du temps alors le torseur cinématique en dépend, il a donc à chaque instant une résultante et un champ de vitesse différent.

7.5. Axe instantané de rotation

On appelle axe instantané de rotation l'axe central du torseur cinématique. Nous avons montré précédemment que l'axe central est l'ensemble des points P tels que le moment du torseur en ce point soit parallèle à la résultante. Dans le cas du torseur cinématique, l'ensemble de ces points constitue l'axe dont les vitesses sont parallèles au vecteur vitesse instantanée de rotation.

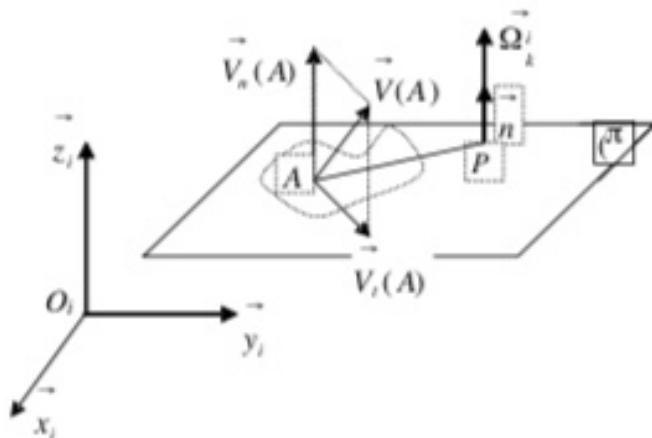
A chaque instant le mouvement du solide peut être considéré comme étant la composition

d'un mouvement de rotation de vitesse de rotation $\vec{\Omega}_k$ autour de l'axe instantané et d'une translation dont la direction instantanée est parallèle au vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_k$.

Soit un solide (S) lié à un repère R_k en mouvement quelconque par rapport à un repère R_i et $\vec{\Omega}_k$ le vecteur rotation instantané du solide par rapport à R_i .

On considère un point $A \in (S)$. Soit (π) un plan de normale \vec{n} et contenant le point A tel que la vitesse de rotation du solide soit parallèle à \vec{n} : $\vec{\Omega}_k = \vec{\Omega}_k \cdot \vec{n}$. Le vecteur vitesse du point $A \in (\pi)$ peut se décomposer en deux vecteurs, l'un dans le plan (π) et l'autre perpendiculaire à (π) , ce qui donne :

$$\vec{V}(A) = \vec{V}_r(A) + \vec{V}_n(A) \text{ avec } \vec{V}_r(A) \in (\pi) \text{ et } \vec{V}_n(A) \perp (\pi)$$



D'après ce que l'on a développé sur les torseurs, il est possible de trouver un point P tel que : $\vec{V}_r(A) = \vec{\Omega}_k \wedge \vec{PA}$, alors l'expression de la vitesse du point A s'écrira :

$$\vec{V}(A) = \vec{V}_n(A) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{PA}$$

Quelque soit $Q \in (\pi)$ nous pouvons par la formule de transport écrire :

$$\begin{aligned} \vec{V}(Q) &= \vec{V}(A) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{AQ} = \vec{V}_n(A) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{PA} + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{AQ} = \vec{V}_n(A) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{PQ} \\ \vec{V}(Q) &= \vec{V}_n(A) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{PQ} \end{aligned}$$

Nous pouvons conclure que le vecteur vitesse du point $Q \in (\pi)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{V}(Q) &= \vec{V}_r(Q) + \vec{V}_n(Q) \\ \text{avec : } \vec{V}_r(Q) &= \vec{\Omega}_k \wedge \vec{PQ} \quad \text{et} \quad \vec{V}_n(Q) = \vec{V}_n(A) \end{aligned}$$

On constate que la composante de la vitesse, normale au plan (π) est la même pour tous les points du solide. On obtient finalement quelque soit P et Q :

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}_n(Q) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{PQ}$$

Le mouvement du solide dans ce cas se décompose à chaque instant en un mouvement de translation dans le plan et en un mouvement de rotation autour d'un axe passant par le point P et parallèle au vecteur unitaire \vec{n} .

L'axe ainsi défini par le point P et le vecteur unitaire $\vec{n} \parallel \vec{\Omega}_k^i$ constitue l'axe instantané de rotation du solide par rapport au repère R_i .

Nous savons que l'axe central d'un torseur est le lieu des points P où le moment est minimum ou nul. Dans le cas d'un torseur cinématique, la vitesse instantanée est nulle sur tous les points de l'axe central. *On déduit que si la vitesse est nulle, en deux points distincts d'un solide, alors l'axe joignant les deux points est forcément un axe de rotation donc un axe central du torseur cinématique.*

8. Lois de composition des mouvements

8.1. Loi de composition des vitesses

Soit $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un repère fixe de référence et $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ un repère en mouvement quelconque par rapport au repère fixe. On considère un solide (S_k) dont le mouvement est connu dans le repère relatif $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$.

Soit P un point du solide, nous pouvons écrire à chaque instant : $\vec{O}_i P = \vec{O}_i O_k + \vec{O}_k P$

La vitesse du point P dans le repère R_i est donnée par la dérivée du vecteur $\vec{O}_i P$ dans ce même repère.

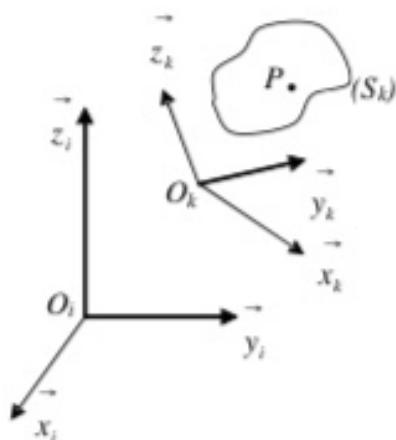
$$\vec{V}^i)P = \frac{d^i \vec{O}_i P}{dt} = \frac{d^i \vec{O}_i O_k}{dt} + \frac{d^i \vec{O}_k P}{dt}$$

Développons les deux termes de la vitesse, ce qui donne :

$$\frac{d^i \vec{O}_i O_k}{dt} = \vec{V}^i(O_k) : \text{vitesse du centre du repère } R_k$$

par rapport au repère R_i ;

$$\frac{d^i \vec{O}_k P}{dt} = \frac{d^k \vec{O}_k P}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O}_k P = \vec{V}^k)P + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O}_k P$$



Finalement la vitesse du point P dans le repère R_i s'écrit :

$$\vec{V}^i(P) = \vec{V}^k(P) + \left(\vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O}_k P \right) \text{ qui s'écrit aussi sous la forme :}$$

$$\vec{V}^i(P) = \vec{V}^k(P) + \vec{V}_k^i(P)$$

$\vec{V}^i(P)$: vitesse absolue du point P pour un observateur lié R_i

$\vec{V}^k(P)$: vitesse relative du point P par rapport à R_k en mouvement par rapport à R_i

$\vec{V}_k^i(P)$: Vitesse d'entraînement du point P s'il était immobile dans R_k .

8.1.1. Propriétés mathématiques du vecteur $\vec{V}_k^i(P)$

- $\vec{V}_k^i(P) = -\vec{V}_i^k(P)$: antisymétrique par rapport aux indices donc aux repères ;
- $\vec{V}_k^i(P) = \vec{V}_k^j(P) + \vec{V}_j^i(P)$

8.2. Loi de composition des accélérations

L'accélération absolue $\vec{\gamma}^i(P)$ du point P se déduit à partir de la vitesse absolue :

$$\vec{\gamma}^i(P) = \frac{d^i \vec{V}^i(P)}{dt} = \frac{d^i \vec{V}^k(P)}{dt} + \frac{d^i \vec{V}^i(O_k)}{dt} + \frac{d^i (\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O}_k P)}{dt}$$

Développons chacun des trois termes :

$$\text{i)} \quad \frac{d^i \vec{V}^k(P)}{dt} = \frac{d^k \vec{V}^k(P)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}^k(P) = \vec{\gamma}^k(P) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}^k(P) ;$$

$$\text{ii)} \quad \frac{d^i \vec{V}^i(O_k)}{dt} = \vec{\gamma}^i(O_k) ;$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \frac{d^i (\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O}_k P)}{dt} &= \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{O}_k P + \vec{\Omega}_k^i \wedge \frac{d^i \vec{O}_k P}{dt} \\ &= \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{O}_k P + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\frac{d^k \vec{O}_k P}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O}_k P \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{O}_k P + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{V}^k(P) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O}_k P \right)$$

La somme des trois termes donne :

$$\vec{\gamma}^i(P) = \vec{\gamma}^k(P) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{V}^k(P) + \vec{\gamma}^i(O_k) + \frac{d^i \vec{\Omega}_k}{dt} \wedge \vec{O}_k P + \vec{\Omega}_k \wedge (\vec{V}^k(P) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{O}_k P)$$

$$\vec{\gamma}^i(P) = \vec{\gamma}^k(P) + \left(\vec{\gamma}^i(O_k) + \frac{d^i \vec{\Omega}_k}{dt} \wedge \vec{O}_k P + \vec{\Omega}_k \wedge (\vec{\Omega}_k \wedge \vec{O}_k P) \right) + 2 \vec{\Omega}_k \wedge \vec{V}^k(P)$$

Cette expression peut s'écrire sous une forme réduite :

$$\vec{\gamma}^i(P) = \vec{\gamma}^k(P) + \vec{\gamma}_k^i(P) + \vec{\gamma}_c(P)$$

$\vec{\gamma}^i(P)$: accélération absolue du point P (par rapport à R_i fixe)

$\vec{\gamma}^k(P)$: accélération relative du point P (par rapport au repère R_k)

$\vec{\gamma}_k^i(P) = \vec{\gamma}^i(O_k) + \frac{d^i \vec{\Omega}_k}{dt} \wedge \vec{O}_k P + \vec{\Omega}_k \wedge (\vec{\Omega}_k \wedge \vec{O}_k P)$: accélération d'entraînement du repère R_k

$\vec{\gamma}_c(P) = 2 \vec{\Omega}_k \wedge \vec{V}^k(P)$: accélération de Coriolis (accélération complémentaire)

L'accélération de Coriolis est une composition entre la vitesse de rotation $\vec{\Omega}_k$ du repère R_k

par rapport au repère R_i et la vitesse relative $\vec{V}^k(P)$ du point P .

L'accélération de coriolis du point P est nulle, si et seulement si :

- La vitesse de rotation du repère relatif par rapport au repère absolu est nulle : $\vec{\Omega}_k = \vec{0}$;
- La vitesse relative du point P est nulle : $\vec{V}^k(P) = \vec{0}$;
- La vitesse de rotation est colinéaire avec la vitesse relative : $\vec{\Omega}_k \parallel \vec{V}^k(P)$

9. Mouvements particuliers fondamentaux

9.1. Mouvement de translation pur

Un solide (S_k) lié à un repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ est dit en mouvement de translation pur par rapport à un repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ si les axes de $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ gardent une direction

fixe par rapport à ceux de $R_i(O_i, x_i, y_i, z_i)$, au cours du temps.

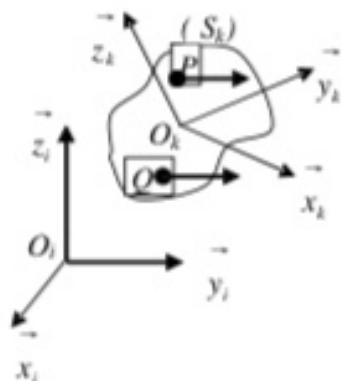
Tous les points du solide ont la même vitesse et la même accélération que le point $P \in (S_k)$.

La vitesse de rotation du solide est nulle par rapport à R_i .

On peut écrire : $\vec{V}^i(P) = \vec{V}^i(O_k)$ et $\vec{\Omega}_k \wedge \vec{O_k P} = \vec{0}$

Comme $\vec{O_k P} \neq \vec{0}$ alors $\vec{\Omega}_k = \vec{0}$

Dans ce cas le champ des vitesses est un champ uniforme.



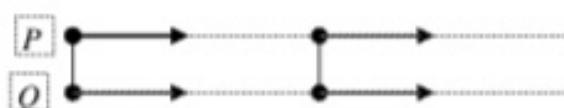
Le torseur cinématique qui décrit le mouvement de translation pur est un torseur couple, dont la résultante est nulle mais le moment n'est pas nul.

$$\boxed{C_{k/i/P}} = \begin{cases} \vec{\Omega}_k = \vec{0} \\ \vec{V}^i(P) = \vec{V}^i(Q) \neq \vec{0} \end{cases}$$

Comme tous les points du solide ont la même vitesse à chaque instant alors les points décrivent des trajectoires parallèles. Trois types de trajectoires peuvent être décrites :

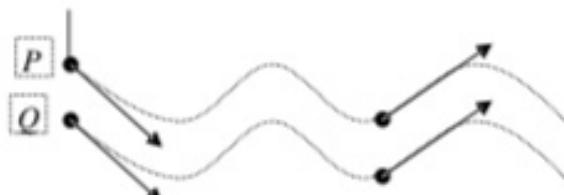
Soient P et Q deux points du solide :

- Trajectoire en translation rectiligne :



- Trajectoire en translation curviligne :

les vitesses de points P et Q sont parallèles et égales.



- Trajectoire en translation circulaire,

les points P et Q décrivent des cercles de même rayons à la même vitesse



9.2. Mouvement de rotation pur autour d'un axe du solide

9.2.1. Vitesse d'un point P du solide

Un solide (S_k) lié à un repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ est dit en mouvement de rotation pur par rapport à un repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ si un axe de $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ reste fixe à tout instant et d'une manière permanente dans le repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$. Nous avons donc deux points distincts O_k et I du solide (S_k) qui restent fixe dans le repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ au cours du mouvement de rotation.

Le repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ est en rotation pur par rapport au repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ à une vitesse angulaire donnée par : $\vec{\Omega}_k = \dot{\psi} \vec{z}_i = \dot{\psi} \vec{z}_k$ et $\vec{V}^i(O_k) = \vec{0}$

Soit P un point quelconque du solide et n'appartenant pas à l'axe de rotation tel que :

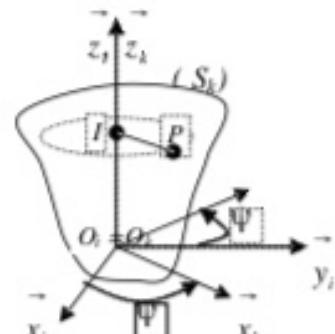
$$\vec{IP} = r \vec{x}_k$$

Quel que soit $I \in \vec{z}_i$ et \vec{z}_k , on peut écrire :

$$\vec{V}^i(I) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{O}_k I, \text{ or nous avons :}$$

$$\vec{\Omega}_k \parallel \vec{O}_k I \Rightarrow \vec{\Omega}_k \wedge \vec{O}_k I = \vec{0} \text{ d'où :}$$

$$\vec{V}^i(I) = \vec{V}^i(O_k) = \vec{0}$$



I et P sont deux points du solide, nous pouvons alors écrire :

$$\vec{V}^i(P) = \vec{V}^i(I) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP} = \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP} \Rightarrow \vec{V}^i(P) = \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP}$$

On remplace $\vec{\Omega}_k$ et \vec{IP} par leurs expressions, la vitesse du point P devient :

$$\vec{V}^i(P) = \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP} = \dot{\psi} \vec{z}_k \wedge r \vec{x}_k = r \dot{\psi} \vec{y}_k$$

Dans un mouvement de rotation pur, le torseur des vitesses est équivalent au torseur glisseur

défini par : $\boxed{Q_{k/i/p}} = \begin{cases} \vec{\Omega}_k \neq \vec{0} \\ V^i(I) = \vec{0} \end{cases} \quad \text{avec } I \in \vec{z}_i \text{ et } \vec{z}_k$

9.2. Mouvement de rotation pur autour d'un axe du solide

9.2.1. Vitesse d'un point P du solide

Un solide (S_k) lié à un repère $R_k(O_k, x_k, y_k, z_k)$ est dit en mouvement de rotation pur par rapport à un repère $R_i(O_i, x_i, y_i, z_i)$ si un axe de $R_k(O_k, x_k, y_k, z_k)$ reste fixe à tout instant et d'une manière permanente dans le repère $R_i(O_i, x_i, y_i, z_i)$. Nous avons donc deux points distincts O_k et I du solide (S_k) qui restent fixe dans le repère $R_i(O_i, x_i, y_i, z_i)$ au cours du mouvement de rotation.

Le repère $R_k(O_k, x_k, y_k, z_k)$ est en rotation pur par rapport au repère $R_i(O_i, x_i, y_i, z_i)$ à une vitesse angulaire donnée par : $\vec{\Omega}_k = \dot{\psi} \vec{z}_k = \dot{\psi} \vec{z}_k$ et $\vec{V}^i(O_k) = \vec{0}$

Soit P un point quelconque du solide et n'appartenant pas à l'axe de rotation tel que :

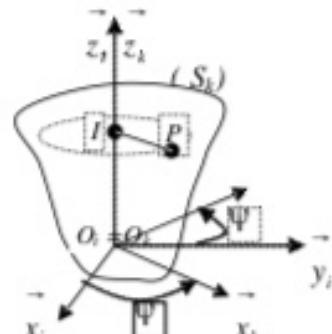
$$\vec{IP} = r \vec{x}_k$$

Quel que soit $I \in \vec{z}_i$ et \vec{z}_k , on peut écrire :

$$\vec{V}^i(I) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{O}_k I, \text{ or nous avons :}$$

$$\vec{\Omega}_k \parallel \vec{O}_k I \Rightarrow \vec{\Omega}_k \wedge \vec{O}_k I = \vec{0} \text{ d'où :}$$

$$\vec{V}^i(I) = \vec{V}^i(O_k) = \vec{0}$$



I et P sont deux points du solide, nous pouvons alors écrire :

$$\vec{V}^i(P) = \vec{V}^i(I) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP} = \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP} \Rightarrow \vec{V}^i(P) = \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP}$$

On remplace $\vec{\Omega}_k$ et \vec{IP} par leurs expressions, la vitesse du point P devient :

$$\vec{V}^i(P) = \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP} = \dot{\psi} \vec{z}_k \wedge r \vec{x}_k = r \dot{\psi} \vec{y}_k$$

Dans un mouvement de rotation pur, le torseur des vitesses est équivalent au torseur glisseur

défini par : $\boxed{D_{k/i/p}} = \begin{cases} \vec{\Omega}_k \neq \vec{0} \\ V^i(I) = \vec{0} \end{cases} \quad \text{avec } I \in \vec{z}_i \text{ et } \vec{z}_k$

9.2.2. Accélération du point P du solide

Nous avons trouvé précédemment la vitesse du point P , elle est donnée par :

$$\vec{V}^i(P) = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{IP} ; \text{ on déduit l'accélération par dérivation de cette expression :}$$

$$\vec{\gamma}^i(P) = \frac{d^i \vec{V}^i(P)}{dt} = \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{IP} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \frac{d^i \vec{IP}}{dt} \quad \text{or nous avons :}$$

$$\frac{d^i \vec{IP}}{dt} = \frac{d^k \vec{IP}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{IP} ; \text{ comme } \vec{IP} = Cte \text{ dans le repère } R_k \text{ alors } \frac{d^k \vec{IP}}{dt} = 0$$

$$\text{ce qui donne : } \frac{d^i \vec{IP}}{dt} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{IP}, \text{l'expression de l'accélération devient :}$$

$$\vec{\gamma}^i(P) = \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{IP} + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{IP})$$

En développant cette expression on obtient :

$$\vec{\gamma}^i(P) = \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{IP} + \vec{\Omega}_k^i (\vec{\Omega}_k^i \cdot \vec{IP}) - \vec{IP} (\vec{\Omega}_k^i \cdot \vec{\Omega}_k^i)$$

$$\text{or nous avons : } \vec{\Omega}_k^i \perp \vec{IP} \Rightarrow \vec{\Omega}_k^i \cdot \vec{IP} = 0 \text{ et } \vec{\Omega}_k^i \cdot \vec{\Omega}_k^i = \vec{\Omega}_k^{i2}$$

l'expression finale de l'accélération sera :

$$\vec{\gamma}^i(P) = -\vec{IP} \cdot \vec{\Omega}_k^{i2} + \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{IP}$$

Accélération normale *Accélération tangentielle*
suivant \vec{IP} *au point* P

En remplaçant $\vec{\Omega}_k^i = \dot{\psi} \vec{z}_k$, $\vec{IP} = r \vec{x}_k$ et $\frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} = \ddot{\psi} \vec{z}_k$ par leur expressions

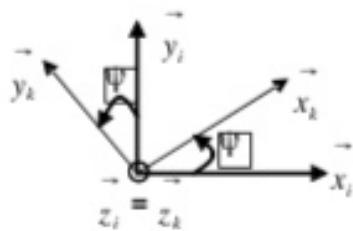
respectives

$$\vec{\gamma}^i(P) = -r \dot{\psi}^2 \vec{x}_k + r \ddot{\psi} \vec{y}_k = \vec{\gamma}_n(P) + \vec{\gamma}_t(P)$$

Les expressions de la vitesse et de l'accélération peuvent s'exprimer facilement dans le repère

$R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ en déterminant la matrice de passage du repère R_i vers le repère R_k : $P_{R_k \rightarrow R_i}$

$$\begin{aligned}\vec{x}_k &= \cos\psi \vec{x}_i + \sin\psi \vec{y}_i + 0 \cdot \vec{z}_i \\ \vec{y}_k &= -\sin\psi \vec{x}_i + \cos\psi \vec{y}_i + 0 \cdot \vec{z}_i \\ \vec{z}_k &= 0 \cdot \vec{x}_i + 0 \cdot \vec{y}_i + \vec{z}_i \\ \text{d'où } P_{R_k \rightarrow R_i} &= \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$



La vitesse et l'accélération, aurons pour expression dans R_i :

$$\begin{aligned}\vec{V}'(P) &= r\dot{\psi} \vec{y}_k = r\dot{\psi}(-\sin\psi \vec{x}_i + \cos\psi \vec{y}_i) = -r\dot{\psi} \sin\psi \vec{x}_i + r\dot{\psi} \cos\psi \vec{y}_i \\ \vec{\gamma}'(P) &= -r\dot{\psi}^2 \vec{x}_k + r\ddot{\psi} \vec{y}_k = -r\dot{\psi}^2(\cos\psi \vec{x}_i + \sin\psi \vec{y}_i) + r\ddot{\psi}(-\sin\psi \vec{x}_i + \cos\psi \vec{y}_i) \\ \vec{\gamma}'(P) &= -r(\dot{\psi}^2 \cos\psi + \ddot{\psi} \sin\psi) \vec{x}_i + r(-\dot{\psi}^2 \sin\psi + \ddot{\psi} \cos\psi) \vec{y}_i\end{aligned}$$

9.3. Mouvement hélicoïdal (rotation + translation)

Un solide (S_k) lié à un repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ décrit un mouvement hélicoïdal par rapport à un repère fixe $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ si :

- Un axe du repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ reste en coïncidence à tout instant avec un axe du repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$
- La coordonnée du point (O_k) centre du repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ suivant l'axe de coïncidence, est proportionnelle à l'angle de rotation du repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ par rapport au repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ au cours du mouvement de rotation.

Nous avons alors : $\overrightarrow{O_i O_k} = \lambda \cdot \psi(t) \vec{z}_i = \lambda \cdot \psi(t) \vec{z}_k$, le scalaire λ représente le pas du mouvement hélicoïdal le long de l'axe de coïncidence.

Nous avons deux mouvements qui se superposent :

- Un mouvement de translation le long de l'axe commun $\vec{z}_i = \vec{z}_k$;
- Un mouvement de rotation autour de ce même axe $\vec{z}_i = \vec{z}_k$.

Soit P un point du solide, nous avons à chaque instant : $\overrightarrow{O_i P} = \overrightarrow{O_i O_k} + \overrightarrow{O_k P}$

Le vecteur $\overrightarrow{O_i O_k}$ s'écrit dans le repère R_j : $\overrightarrow{O_i O_k} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \lambda \psi(t) \end{cases}_{R_j}$

Le vecteur $\overrightarrow{O_k P}$ s'écrit dans le repère R_k : $\overrightarrow{O_k P} = \begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases}_{R_k}$ et dans R_j : $\overrightarrow{O_k P} = \begin{cases} a \cos \psi(t) \\ b \sin \psi(t) \\ c \end{cases}_{R_j}$

La somme des deux vecteurs nous donne le vecteur $\overrightarrow{O_i P}$ dans le repère R_j :

$$\overrightarrow{O_i P} = \begin{cases} a \cos \psi(t) \\ b \sin \psi(t) \\ c + \lambda \psi(t) \end{cases}_{R_j}$$

La vitesse et l'accélération du point P dans le repère R_j se déduisent facilement par dérivation dans le même repère :

$$\vec{V}(P) = \frac{d^i \overrightarrow{O_i P}}{dt} = \begin{cases} -a \dot{\psi} \sin \psi(t) \\ b \dot{\psi} \cos \psi(t) \\ \lambda \ddot{\psi}(t) \end{cases}_{R_j} \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}(P) = \frac{d^i \vec{V}(P)}{dt} = \begin{cases} -a \ddot{\psi} \sin \psi(t) - a \dot{\psi}^2 \cos \psi(t) \\ b \ddot{\psi} \cos \psi(t) - b \dot{\psi}^2 \sin \psi(t) \\ \lambda \ddot{\psi}(t) \end{cases}_{R_j}$$

Exercice 06: Simulateur de vol

Pour simuler les conditions de vol des avions, les ingénieurs ont conçu un appareil spécial pour l'entraînement des pilotes qui consiste en **un bras (1)** en rotation dans le plan horizontal tel que : $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: repère fixe ;

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: repère mobile lié au bras, avec $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \Psi$ sens positif ;

Un cockpit (2) en rotation autour de l'axe \vec{x}_1 tel que $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta$ sens positif ; $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: repère lié au cockpit avec **OB = R**.

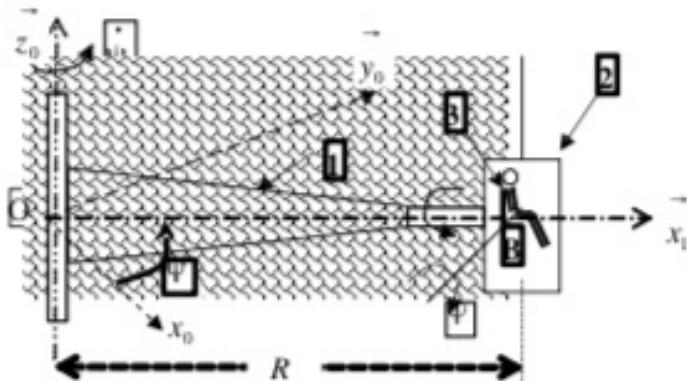
Un siège-pilote (3) en rotation autour de l'axe \vec{y}_2 tel que : $\vec{y}_2 = \vec{y}_3$ et $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3) = \varphi$ sens positif. $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$: repère lié au siège-pilote. Le pilote est lié au siège, sa tête est repérée par le vecteur position $\vec{BT} = L\vec{z}_3$.

Tous ces éléments sont en rotation contrôlée par l'ordinateur pour simuler les différentes manœuvres. Il a fallu faire des calculs pour déterminer les paramètres cinématiques afin de les varier de façon sensée pour savoir à quelles accélérations seront soumis les pilotes.

Vous êtes l'ingénieur responsable de ces calculs, il vous est demandé de :

- 1) Etablir les figures planes représentatives des trois rotations et les matrices de passages correspondantes ;
- 2) Trouver le vecteur position du point T, ainsi que le vecteur rotation du siège pilote par rapport à R_0 ;
- 3) Déterminer le vecteur vitesse absolue du point T par composition de mouvement et par la cinématique du solide .
- 4) Déterminer l'accélération absolue du point T par composition de mouvement.

On prendra R_2 comme repère de projection



Solution :

1. Figures planes des trois rotations et les matrices de passages correspondantes ;

a) Rotation du bras

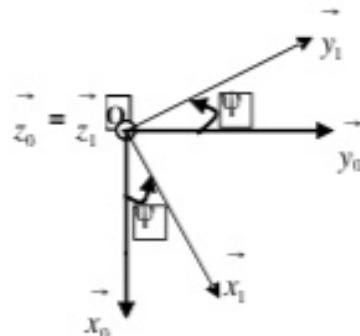
Nous avons : $OB = R$ et $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe. R_1 : étant le repère de projection on exprimera toute les données dans ce repère.

$R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: en rotation / à R_0 tel que : $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi$ sens positif

Matrice de passage de R_0 vers R_1

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$$P_{R_0 \rightarrow R_1}$$



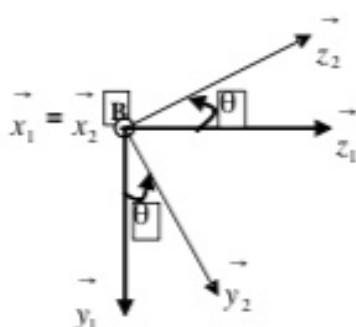
a) Rotation du cockpit

$R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: en rotation / R_1 tel que $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta$ sens positif ;

Matrice de passage de R_1 vers R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

$$P_{R_1 \rightarrow R_2}$$



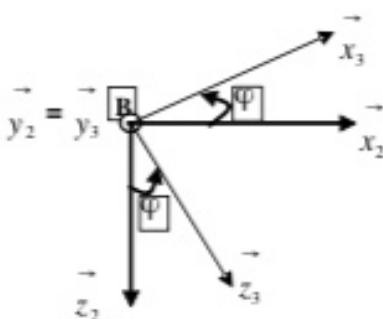
a) Rotation du siège pilote

$R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ en rotation / tel que : $\vec{y}_2 = \vec{y}_3$ et $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3) = \varphi$ sens positif.

Matrice de passage de R_2 vers R_3

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

$$P_{R_2 \rightarrow R_3}$$



2. Vecteur position du point T par rapport à R_0 exprimé dans R_1

Nous avons : $\vec{OT} = \vec{OB} + \vec{BT}$, sachant que $\vec{BT} = L\vec{z}_3$

$$\vec{OB} = \begin{cases} R \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1, R_2} ; \quad \vec{BT} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ L \end{cases}_{R_3} = \begin{cases} L \sin \varphi \\ 0 \\ L \cos \varphi \end{cases}_{R_2} \text{ d'où : } \vec{OT} = \begin{cases} R + L \sin \varphi \\ 0 \\ L \cos \varphi \end{cases}_{R_2}$$

Vecteur rotation du siège pilote :

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^1 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\varphi} \vec{y}_2 + \dot{\theta} \vec{x}_2 + \dot{\psi} \vec{z}_1 ;$$

Par la matrice de passage de R_1 vers R_2 le vecteur \vec{z}_1 s'écrit : $\vec{z}_1 = \sin \theta \vec{y}_2 + \cos \theta \vec{z}_2$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \dot{\varphi} \vec{y}_2 + \dot{\theta} \vec{x}_2 + \dot{\psi} \left(\sin \theta \vec{y}_2 + \cos \theta \vec{z}_2 \right) = \dot{\theta} \vec{x}_2 + \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta \right) \vec{y}_2 + \dot{\psi} \cos \theta \vec{z}_2$$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{cases}_{R_2}$$

3. Vecteur vitesse du point T

3.1. Par composition de mouvement

$$\vec{V}_{abs} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{ent} \Leftrightarrow \vec{V}^0(T) = \vec{V}^2(T) + \vec{V}_2^0(T)$$

$$\text{La vitesse relative est donnée par : } \vec{V}^2(T) = \frac{d^2 \vec{BT}}{dt} \begin{cases} \dot{L} \varphi \cos \varphi \\ 0 \\ -L \varphi \sin \varphi \end{cases}_{R_2}$$

$$\text{La vitesse relative s'écrit : } \vec{V}_2^0(T) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OT}$$

$$\vec{V}_2^0(T) = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} R + L \sin \varphi \\ 0 \\ L \cos \varphi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} L \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ -L \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \cos \theta R + L \sin \varphi n \\ -\dot{\psi} \sin \theta R + L \sin \varphi n \end{cases}_{R_2}$$

En faisant la somme on obtient :

$$\vec{V}^0(T) = \begin{cases} \dot{L}\Psi \cos\varphi + \dot{L}\Psi \sin\theta \cos\varphi \\ -\dot{L}\theta \cos\varphi + \dot{\Psi} \cos\frac{n}{R}\theta + L \sin\theta \dot{\varphi} \\ -\dot{L}\Psi \sin\theta - \dot{\Psi} \sin\theta \frac{n}{R}\theta + L \sin\theta \dot{\varphi} \end{cases}$$

3.2. Par la cinématique du solide

La vitesse relative s'écrit : $\vec{V}^0(T) = \vec{V}^0(B) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{BT}$

$$\text{Nous savons : } \vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OB} = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \sin\theta \\ \dot{\Psi} \cos\theta \end{cases} \quad \vec{R}_2 = \begin{cases} R \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ R\Psi \cos\theta \\ -R\Psi \sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{BT} = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \sin\theta \\ \dot{\Psi} \cos\theta \end{cases} \quad \vec{R}_2 = \begin{cases} L \sin\theta \dot{\varphi} \\ \frac{n}{R} \\ L \cos\theta \end{cases} = \begin{cases} \dot{L}\Psi \cos\varphi + \dot{L}\Psi \sin\theta \cos\varphi \\ -\dot{L}\theta \cos\varphi + \dot{\Psi} \cos\theta \sin\theta \dot{\varphi} \\ -\dot{L}\Psi \sin\theta - \dot{\Psi} \sin\theta \frac{n}{R}\theta \end{cases}$$

La somme des deux expressions donne :

$$\vec{V}^0(T) = \begin{cases} \dot{L}\Psi \cos\varphi + \dot{L}\Psi \sin\theta \cos\varphi \\ -\dot{L}\theta \cos\varphi + \dot{\Psi} \cos\frac{n}{R}\theta + L \sin\theta \dot{\varphi} \\ -\dot{L}\Psi \sin\theta - \dot{\Psi} \sin\theta \frac{n}{R}\theta + L \sin\theta \dot{\varphi} \end{cases}$$

4. Accélération absolue du point T par composition de mouvement

Son expression est donnée par la relation suivante : $\vec{\gamma}_{ab}(T) = \vec{\gamma}_r(T) + \vec{\gamma}_{cor}(T) + \vec{\gamma}_{coriol}(T)$
 $\vec{\gamma}^0(T) = \vec{\gamma}^z(T) + \vec{\gamma}_2^0(T) + \vec{\gamma}_c(T)$

Explicitons chacun des termes de cette relation :

$$(1) : \vec{\gamma}^2(T) = \frac{d^2 \vec{V}^2(T)}{dt} = R_2 \begin{cases} \ddot{L}\varphi \cos\varphi - L\dot{\varphi}^2 \sin\varphi \\ 0 \\ -L\dot{\varphi} \sin\varphi - L\dot{\varphi}^2 \cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}_2(T) = \vec{\gamma}(O) + \frac{d^0 \vec{\Omega}_2}{dt} \wedge \vec{OT} + \vec{\Omega}_2 \wedge (\vec{\Omega}_2 \wedge \vec{OT})$$

$$\vec{\gamma}(O) = \vec{0}$$

$$\frac{d^0 \vec{\Omega}_2}{dt} \wedge \vec{OT} = \frac{d^2 \vec{\Omega}_2}{dt} \wedge \vec{OT} = R_2 \begin{cases} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \sin\theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos\theta \\ \ddot{\psi} \cos\theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin\theta \end{cases} = R_2 \begin{cases} R + L \sin\varphi \\ 0^n \\ L \cos\varphi \end{cases}$$

$$(2) : \frac{d^0 \vec{\Omega}_2}{dt} \wedge \vec{O} = R_2 \begin{cases} L \cos\varphi (\ddot{\psi} \sin\theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos\theta) \\ L \ddot{\theta} \cos\varphi + (R + L \sin\varphi) (\ddot{\psi} \cos\theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin\theta) \\ - (R + L \sin\varphi) (\ddot{\psi} \sin\theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos\theta) \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_2 \wedge \left(\vec{\Omega}_2 \wedge \vec{O} \right) = R_2 \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin\theta \wedge \\ \dot{\psi} \cos\theta \end{cases} = R_2 \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin\theta \wedge \\ \dot{\psi} \cos\theta \end{cases} = R_2 \begin{cases} R + L \sin\varphi \\ 0^n \\ L \cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_2 \wedge \left(\vec{\Omega}_2 \wedge \vec{O} \right) = R_2 \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin\theta \wedge \\ \dot{\psi} \cos\theta \end{cases} = R_2 \begin{cases} L \dot{\psi} \cos\varphi \sin\theta \\ -L \dot{\theta} \cos\varphi + \dot{\psi} \cos\theta (R + L \sin\varphi) \\ -\dot{\psi} \sin\theta (R + L \sin\varphi) \end{cases}$$

$$(3) : \vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{O} \right) = \begin{cases} -\dot{\psi}^2 \left(\ddot{R} + L \sin \varphi + L \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta \right) \\ \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \left(\ddot{R} + L \sin \varphi + L \dot{\psi}^2 \cos \varphi \cos \theta \sin \theta \right) \\ -L \dot{\theta}^2 \cos \varphi + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \left(\ddot{R} + L \sin \varphi - L \dot{\psi}^2 \cos \varphi \sin^2 \theta \right) \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}_c(T) = 2 \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}(T) \right)$$

$$(4) : \vec{\gamma}_c(T) = 2 \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{cases} \wedge \begin{cases} L \dot{\psi} \cos \varphi \\ 0 \\ -L \dot{\psi} \sin \varphi \end{cases} = \begin{cases} -2L \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi \\ 2\dot{\psi} \dot{\theta} \sin \varphi + 2L \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi \\ -2L \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi \end{cases}$$

La somme de ces expressions donne l'accélération absolue du point T

$$\vec{\gamma}^0(T) = (1) + (2) + (3) + (4)$$

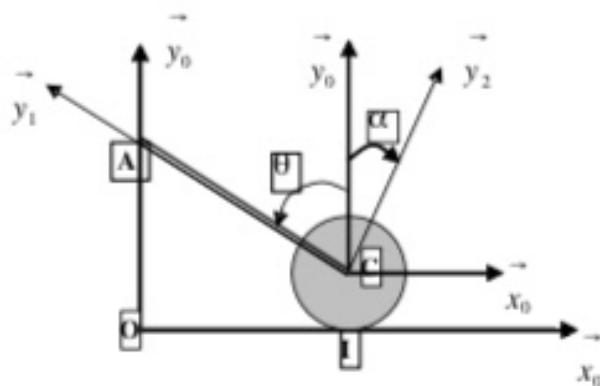
Exercice 10 :

Soit un système constitué de deux solides (**S₁**) lié au repère $R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et (**S₂**) lié au repère $R_2(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ par rapport à un repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

(**S₁**) : est une barre de longueur **L**, de masse **m** dont l'extrémité **A** glisse sur un mur et l'autre extrémité **B** est articulée au disque ;

(**S₂**) : est un disque de masse **M** et de rayon **R** qui roule sans glisser sur un plan horizontal tel que représenté sur la figure ci-dessous.

1. Déterminer la relation exprimant le non glissement du disque sur le plan au point **I** ;
2. Déterminer le centre instantané de rotation (C.I.R.) de la barre :
 - Géométriquement
 - Analytiquement.



Solution :

$$R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) : \text{repère fixe} ; \quad R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) : \text{lié à la barre} ; \quad R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) : \text{lié au disque} ;$$

$$\begin{aligned} & \vec{\omega}_R = \begin{cases} L \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{cases} & \vec{\omega}_1 = \begin{cases} L \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{cases} \\ & \vec{\omega}_2 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} & \vec{\omega}_0 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\vec{R}_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: lié à la barre ; tel que : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\theta} \vec{z}_1 = \dot{\theta} \vec{z}_0$

$\vec{R}_2(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: lié au disque ; tel que : $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ et $\vec{\Omega}_2^0 = -\dot{\alpha} \vec{z}_2 = -\dot{\alpha} \vec{z}_0$

1. Condition de roulement sans glissement

La condition de non glissement du disque sur le plan est vérifiée si, la vitesse du point **I**

appartenant au disque est nulle : $\vec{V}(I) = \vec{0}$ par la cinématique du solide écrire :

$$\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{CI} = \vec{0} \quad \text{avec: } \vec{V}^0(C) = \frac{d^0 \vec{O}}{dt} = \begin{cases} L \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

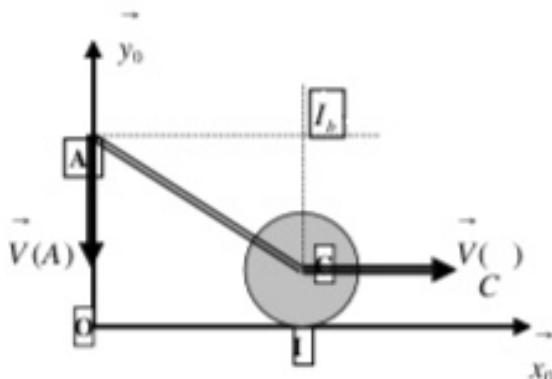
$$R_0 \begin{cases} \dot{L\theta} \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{cases} + R_0 \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\dot{\alpha} \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ -R \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dot{L\theta} \cos \theta - R \dot{\alpha} = 0$$

2. Centre instantané de rotation de la barre

a) Gométriquement

Soit I_b le centre de rotation instantanée (C.I.R.) de la barre.

Sa position est repéré en traçant deux droites, l'une perpendiculaire à la vitesse $\vec{V}(A)$ au point A et l'autre perpendiculaire à $\vec{V}(C)$ au point C . Le point d'intersection de ces deux droites est le (C.I.R.) de la barre.



En effet nous avons :

$$\vec{V}(I_b) = \vec{V}(A) + \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{AI_b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}(A) = \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{I_b A} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}(A) \perp \vec{\Omega}_1 \\ \vec{V}(A) \perp \vec{I_b A} \end{cases}$$

$$\vec{V}(I_b) = \vec{V}(C) + \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{CI_b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}(C) = \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{I_b C} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}(C) \perp \vec{\Omega}_1 \\ \vec{V}(C) \perp \vec{I_b C} \end{cases}$$

a) Analytiquement

$$\text{Soit } \vec{OI_b} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \Rightarrow \vec{CI_b} = \begin{cases} x - L \sin \theta \\ y - R \cos \theta \\ z \end{cases}$$

$$\text{On sait que : } \vec{V}(I_b) = \vec{V}(C) + \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{CI_b} = \vec{0}$$

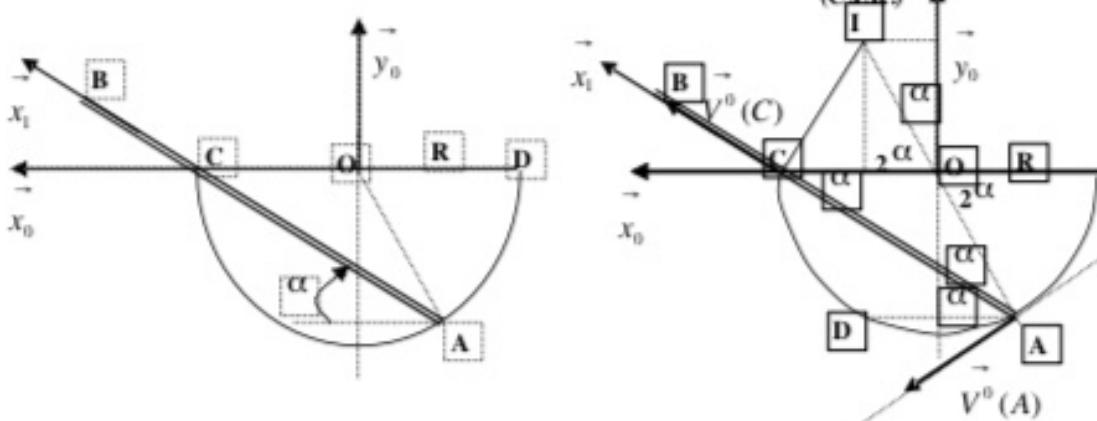
$$\vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_z^0 \wedge \vec{CI}_b = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{L\theta} \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ R_0 \theta \end{cases} \begin{cases} x - L \sin \theta \\ y - R \\ z \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ R_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{L\theta} \cos \theta - (y - R)\dot{\theta} = 0 \\ (x - L \sin \theta)\dot{\theta} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = R + L \cos \theta \\ x = L \sin \theta \\ z = 0 \end{cases}$$

Exercice 11 :

Soit $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ un repère fixe lié à un demi cylindre creux de rayon R , sur lequel se déplace une barre de longueur $2L$. Le mouvement se fait dans le plan vertical (x_0y_0). La barre est en contact permanent avec le demi cylindre en deux points, l'extrémité A en contact avec la surface du cylindre et le point C avec son bord.

1. Déterminer les coordonnées du centre instantané de rotation (C.I.R.) géométriquement ;
2. Retrouver les coordonnées du centre instantané de rotation (C.I.R.) analytiquement ;
3. En déduire la vitesse du point C de la barre.



Solution :

1. Coordonnées du C.I.R. géométriquement :

La vitesse du point A est tangente au cercle de rayon R . On trace la perpendiculaire à $\vec{V}^0(A)$, elle passe par le point O et elle rencontre la perpendiculaire à $\vec{V}^0(C)$ au point I . La vitesse du point C est portée par la barre.

Le triangle CAI est rectangle en C car il est inscrit à l'intérieur d'un cercle de diamètre CI .

Le triangle COA est isocèle : $OC = OA = R$, les angles $(CO, CA) = (AO, AC) = \alpha$

Le triangle COI est isocèle : $OC = OI = R$, les angles $(CO, CI) = (IO, IC) = 2\alpha$

On déduit facilement les coordonnées du point I tel que : $\vec{OI} = R_0 \begin{cases} x_I = R \cos 2\alpha \\ y_I = R \sin 2\alpha \end{cases}$

2. Coordonnées du C.I.R. analytiquement :

On sait que la vitesse du centre instantané de rotation (C.I.R.) de la barre est nul :

$\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{AI} = \vec{0}$; Déterminons d'abord la vitesse du point A :

$$\text{Nous savons : } \vec{OA} = R_0 \begin{cases} -R \cos 2\alpha \\ -R \sin 2\alpha \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}^0(A) = R_0 \begin{cases} 2R \dot{\alpha} \sin 2\alpha \\ -2R \dot{\alpha} \cos 2\alpha \\ 0 \end{cases} \text{ et } \vec{AI} = R_0 \begin{cases} x_I + R \cos 2\alpha \\ y_I + R \sin 2\alpha \\ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2R \dot{\alpha} \sin 2\alpha \\ -2R \dot{\alpha} \cos 2\alpha \\ 0 \end{cases} + R_0 \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{cases} \wedge R_0 \begin{cases} x_I + R \cos 2\alpha \\ y_I + R \sin 2\alpha \\ 0 \end{cases} = R_0 \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$2R \dot{\alpha} \sin 2\alpha - \dot{\alpha}(y_I + R \sin 2\alpha) = 0 \Rightarrow y_I = R \sin 2\alpha$$

$$-2R \dot{\alpha} \cos 2\alpha + \dot{\alpha}(x_I + R \cos 2\alpha) = 0 \Rightarrow x_I = R \cos 2\alpha$$

3. Vitesse du point C de la barre

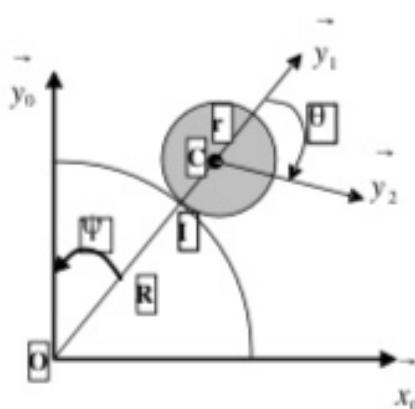
Nous savons : $\vec{V}^0(C) = \vec{V}^0(I) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{IC}$; or : $\vec{V}^0(I) = \vec{0}$

$$\vec{V}^0(C) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{IC} = R_0 \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{cases} \wedge R_0 \begin{cases} R - R \cos 2\alpha \\ -R \sin 2\alpha \\ 0 \end{cases} = R_0 \begin{cases} R \dot{\alpha} \sin 2\alpha \\ R \dot{\alpha} (-\cos 2\alpha) \\ 0 \end{cases}$$

Exercice 12 :

Soit un système constitué d'un cylindre fixe de rayon R lié au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et d'un disque de masse m de rayon r lié au repère $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en mouvement de rotation autour du cylindre comme représenté sur la figure ci-dessous. Déterminer :

1. La matrice d'inertie du disque au point \mathbf{O} , dans le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
2. La relation entre $\dot{\Psi}$ et $\dot{\Phi}$ exprimant la condition de non glissement du disque au point \mathbf{I} ;
3. La vitesse et l'accélération du point \mathbf{M} par composition de mouvement.



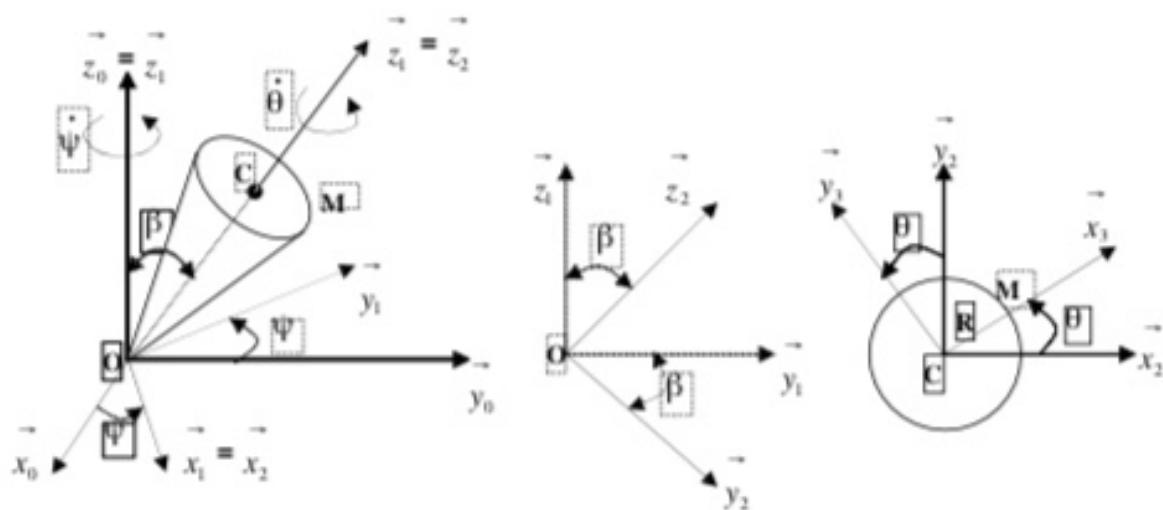
Exercice 13 :

Un cône homogène de hauteur \mathbf{h} , de rayon de base \mathbf{R} est en mouvement de rotation autour de l'axe vertical \vec{z}_0 d'un repère orthonormé fixe, avec une vitesse angulaire $\dot{\Psi} = Ct$. L'axe principal du cône est incliné d'un angle β constant par rapport à cet axe. Le cône tourne aussi autour de son axe principal avec une vitesse angulaire $\dot{\theta} = Cte$ comme représenté sur la figure ci-dessous. Le repère R_2 est le repère relatif.

On prendra aussi le repère R_1 comme repère de projection.

Déterminer:

1. Les matrices de passage de R_1 vers R_2 et de R_3 vers R_2 ;
2. La vitesse et l'accélération du point \mathbf{C} par dérivation ;
3. La vitesse et l'accélération du point \mathbf{M} par composition de mouvement ;



Solution :

1. Les matrices de passage de R_1 vers R_2 et de R_3 vers R_2 ;

Nous savons : $OC = h$ et $R_0(x_0, y_0, z_0)$ un repère fixe et R_2 : le repère de projection.

$R_1(x_1, y_1, z_1)$: tel que : $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et $(x_0, x_1) = (y_0, y_1) = \Psi$ avec $\dot{\Omega}_1 = \dot{\Psi} \vec{z}_0 = \dot{\Psi} \vec{z}_1$, $\dot{\Psi} = Ct$

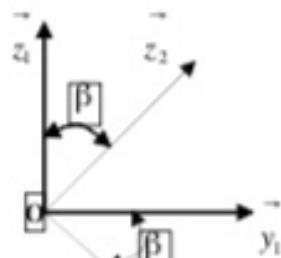
$R_2(x_2, y_2, z_2)$: tel que : $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ et $(y_1, y_2) = (z_1, z_2) = \beta = Ct$ avec $\dot{\Omega}_2 = \dot{\beta} \vec{x}_1 = \dot{\beta} \vec{x}_2$, $\dot{\beta} = 0$

$R_3(x_3, y_3, z_3)$: tel que : $\vec{z}_2 = \vec{z}_3$ et $(x_2, x_3) = (y_2, y_3) = \theta = Cte$ avec $\dot{\Omega}_3 = \dot{\theta} \vec{z}_2 = \dot{\theta} \vec{z}_3$, $\dot{\theta} = Cte$

Matrice de passage de R_1 vers R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

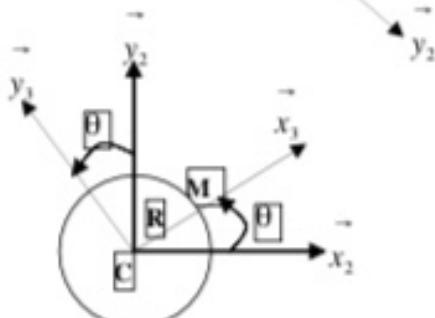
$P_{R_1 \rightarrow R_2}$



Matrice de passage de R_3 vers R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

$P_{R_3 \rightarrow R_2}$



2. Vitesse et accélération du point C par dérivation ;

2.1. Vitesse

$$\text{Nous avons : } \vec{O} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ h \end{cases}, \vec{O} = \vec{O} + \vec{C} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ h \end{cases} + \begin{cases} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ 0^n \end{cases} = \begin{cases} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ 0^n \end{cases}$$

$$\vec{V}^0(C) = \frac{d^0 \vec{OC}}{dt} = \frac{d^2 \vec{OC}}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OC}, \text{ avec : } \vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi} \vec{z}_1$$

$$\text{or: } \vec{z}_1 = -\dot{\psi} \vec{y}_2 + \cos \beta \vec{z}_2 \text{ d'où: } \vec{\Omega}_2^0 = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi} \sin \beta \\ \dot{\psi} \cos \beta \end{cases}$$

$$\vec{V}^0(C) = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi} \sin \beta \\ \dot{\psi} \cos \beta \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ h \end{cases} = \begin{cases} -\dot{\psi} h \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

2.2. Accélération :

$$\vec{\gamma}^0(C) = \frac{d^0 \vec{V}^0(C)}{dt} = \frac{d^2 \vec{V}^0(C)}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^0(C)$$

$$\vec{\gamma}^0(C) = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi} \sin \beta \\ \dot{\psi} \cos \beta \end{cases} \wedge \begin{cases} -\dot{\psi} h \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}^2 h \sin \beta \cos \beta \\ -\dot{\psi}^2 h \sin \beta \sin \beta \end{cases}$$

3. Vitesse et accélération du point M par composition de mouvement ;

3.1 Vitesse :

$$\text{Nous avons : } \vec{V}^0(M) = \vec{V}^2(M) + \vec{V}_2^0(M),$$

$$\text{avec: } \vec{O} = \begin{cases} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ h^n \end{cases} \Rightarrow \vec{V}^2(M) = \frac{d^2 \vec{O}}{dt^2} = \begin{cases} -R \dot{\theta} \sin \theta \\ R \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{V}_2^0(M) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OM} = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}_{si} \beta \\ \dot{\psi}_{co}^n \beta \end{cases} \wedge \begin{cases} R_{co} \theta \\ R_{si} \theta \\ h^n \end{cases} = \begin{cases} -\dot{\psi}_{hs} \beta - R \dot{\psi}_{co} \beta_{si} \theta \\ R \dot{\psi}_{co}^n \beta_{co} \theta \\ R \dot{\psi}_{si}^n \beta_{co}^s \theta \end{cases}$$

ce qui donne : $\vec{V}^0(M) = \begin{cases} -\dot{\psi}_{hs} \beta - R \dot{\psi}_{co} \beta_{si} \theta - R \dot{\theta}_{si} \theta \\ R \dot{\psi}_{co}^n \beta_{co} \theta + R \dot{\theta}_{co}^n \theta \\ R \dot{\psi}_{si}^n \beta_{co}^s \theta \end{cases}$

3.2 Accélération :

Nous savons : $\vec{\gamma}^0(M) = \vec{\gamma}^2(M) + \vec{\gamma}_2^0(M) + \vec{\gamma}_c(M)$,

$$\vec{\gamma}^2(M) = \frac{d^2 \vec{V}^2(M)}{dt} = \begin{cases} -R \dot{\theta}_2^2 \cos \theta \\ -R \dot{\theta}_2^2 \sin \theta \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}_2^0(M) = \vec{\gamma}^0(O) + \frac{d^0 \vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge (\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OM}) ; \quad \text{avec : } \vec{\gamma}^0(O) = \vec{0}$$

$$\frac{d^0 \vec{\Omega}_2^0}{dt} = \frac{d^2 \vec{\Omega}_2^0}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\Omega}_2^0 = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge (\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OM}) = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}_{si} \beta \\ \dot{\psi}_{co}^n \beta \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}_{si} \beta \\ \dot{\psi}_{co}^n \beta \end{cases} = \begin{cases} R_{co} \theta \\ R_{si} \theta \\ h^n \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge (\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OM}) = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}_{si} \beta \\ \dot{\psi}_{co}^n \beta \end{cases} \wedge \begin{cases} -\dot{\psi}_{hs} \beta - R \dot{\psi}_{co} \beta_{si} \theta \\ R \dot{\psi}_{co}^n \beta_{co} \theta \\ R \dot{\psi}_{si}^n \beta_{co}^s \theta \end{cases} = \begin{cases} -\dot{\psi}_{hs} \beta - R \dot{\psi}_{co} \beta_{si} \theta \\ R \dot{\psi}_{co}^n \beta_{co} \theta \\ R \dot{\psi}_{si}^n \beta_{co}^s \theta \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{O} \\ M \end{pmatrix} = \begin{cases} -R\dot{\psi}^2 \cos \theta \\ -\dot{\psi}^2 \frac{s}{n} \beta \dot{\theta}_{si} \beta + R \cos \beta \sin \theta \\ -\dot{\psi}^2 \frac{s}{n} \beta \dot{\theta}_{si}^n \beta + R \cos \beta \sin^n \theta \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2 \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge V^2(M) \right) = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}_{si} \beta \\ \dot{\psi}_{co}^n \beta \end{cases}$$

$$R_2 \quad R_2 \quad R_2$$

$$= \begin{cases} -R\dot{\theta}_{si} \theta \\ R\dot{\theta}_{co} \theta \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} -2R\dot{\theta}\dot{\psi}_{co} \theta_{co} \beta \\ -2R\dot{\theta}\dot{\psi}_{si}^s \theta_{co}^s \beta \\ -2R\dot{\theta}\dot{\psi}_{si}^n \theta_{si}^s \beta \end{cases}$$

$$R_2 \quad R_2 \quad R_2$$

La somme de toutes ces expressions donne :

$$\vec{\gamma}^0(M) = \begin{cases} -R \cos \theta \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{\psi}_{co} \beta \right) \\ -\dot{\psi}^2 \cos \beta \dot{\theta}_{si} \beta + R \cos \beta \sin \theta - R \sin \theta \left(\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{\psi}_{co} \beta \right) \\ -\dot{\psi}^2 \sin \beta \dot{\theta}_{si} \beta + R \cos \beta \sin \theta - 2R\dot{\theta}\dot{\psi}_{si} \theta_{si} \beta \end{cases}$$

$$R_2 \quad R_2 \quad R_2$$

CHAPITRE VI

CINÉMATIQUE DU SOLIDE

CINÉMATIQUE DU SOLIDE

1. Généralités

Un solide est dit indéformable, si la distance entre deux points de celui-ci reste constante et invariable au court du temps : $d[\overrightarrow{A}](t) \overrightarrow{B}(t) = \|\overrightarrow{AB}\| = Cte$

La mécanique des solides permet d'étudier le comportement des solides et déterminer tous les paramètres cinématiques de l'ensemble de ses points quel que soit la nature du mouvement. La notion de torseur, déjà étudiée dans les chapitres précédents, sera très utile dans la cinématique des solides. La formule de transport permet, connaissant la vitesse d'un seul point du solide de déduire facilement la vitesse de tous les points du solide.

L'objectif de la cinématique du solide est de connaître la position, la vitesse et l'accélération de tous les points du solide par rapport à un repère déterminé.

2. Notion de Repères et Référentiels

Pour étudier le mouvement d'un solide où d'un système composé de plusieurs solides, il est indispensable de repérer la position de chaque point ainsi que les vecteurs cinématiques dans l'espace et le temps.

Nous considérons en cinématique classique que l'espace est Euclidien, à trois dimensions et le temps est absolu et indépendant de l'observateur.

Afin de repérer le solide, l'observateur va définir :

- Un repère d'espace défini par une origine O et une base orthonormée $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Le trièdre $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ défini complètement le repère d'espace dans lequel peuvent être exprimées les coordonnées de tous les points du solide.
- Un repère de temps (appelé aussi échelle de temps) avec une origine et une unité de temps. Dans le système MKSA l'unité de temps est la seconde.

Ces deux repères définissent un repère espace-temps appelé en cinématique classique référentiel ou simplement repère. Nous choisissons ensuite un point O_s quelconque du

solide. La position de ce point est donnée à chaque instant par le vecteur position $\vec{OO_i}$, exprimé dans le repère $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Les coordonnées du point O_i dépendent du temps et permettent de connaître à chaque instant la position du repère $R(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ lié au solide. Le passage du repère $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ vers le repère $R(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ lié au solide est déterminé par la matrice de passage qui exprime les vecteurs unitaires $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en fonction des vecteurs unitaires $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$. Cette matrice de passage s'exprime en fonction des angles d'Euler que nous verrons dans ce chapitre. L'orientation du repère lié au solide est indépendante du choix du point O_i .

L'ensemble des paramètres de translation et de rotation constituent les paramètres de situation ou degrés de liberté du solide dans l'espace par rapport au repère $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Si le nombre de paramètres est égale à 6 (3 rotations et 3 translations) on dit que le solide est complètement libre dans $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Si le nombre de paramètres est inférieur à 6, on dit que le solide est lié ou soumis à des liaisons, certains paramètres ne varient pas au cours du temps.

3. Systèmes de notations

Dans l'étude de la cinématique nous adoptons la notation suivante :

Soit $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un repère lié à l'observateur et P un point du solide, nous avons :

$\vec{O_iP}$: vecteur position du point P par rapport au repère R_i ;

$\vec{V^i}(P) = \frac{d^i \vec{O_iP}}{dt}$: vitesse du point P par rapport au repère R_i ;

$\vec{\gamma^i}(P) = \frac{d^i \vec{V_i}(P)}{dt}$: accélération du point P par rapport au repère R_i ;

Les paramètres cinématiques sont toujours liés au repère.

4. Repère d'étude, lié à l'observateur et repère de projection

Les paramètres cinématiques (vecteurs vitesse et accélération) des points du solide sont

étudiés dans un repère $\vec{R}_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ lié à l'observateur. Ce repère est appelé repère d'étude.

Les composantes des vecteurs vitesses $\vec{V}^i(P)$ et accélération $\overset{\rightarrow}{\gamma}^i(P)$ étant mesurés et définis

dans le repère $\vec{R}_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ nous pouvons connaître leurs composantes dans n'importe

quel repère de l'espace $\vec{R}_p(O_p, \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$ que l'on appellera repère de projection.

Le choix de ce repère de projection permet d'exprimer les paramètres cinématiques avec des expressions mathématiques plus simples. Il est souvent intéressant de choisir le repère de projection différent du repère d'étude afin de simplifier et réduire les calculs. Le repère de projection étant mobile par rapport au repère d'étude, il faut faire attention lors des dérivations que les vecteurs unitaires du repère de projection changent de direction donc il faut en tenir compte.

5. Mouvement d'un repère R_k par rapport à un repère R_i lié à l'observateur

Soit $\vec{R}_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un repère lié à l'observateur et $\vec{R}_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ un repère en mouvement quelconque par rapport au premier. Tout point de l'espace peut être repéré totalement dans R_k et déduire ses composantes dans R_i où inversement en connaissant le mouvement de R_k par rapport à R_i .

Le mouvement du repère R_k est totalement connu si :

- La position de son centre O_k est totalement connu dans R_i ;
- L'orientation des axes de R_k est connu par rapport à ceux de R_i .
-

5.1. Repérage du centre O_k du repère R_k

Le repérage du point O_k centre du repère R_k est déterminé par les composantes du vecteur

$\overset{\rightarrow}{O_i O_k}$ liant les deux centres des repères dans R_i ou R_k , ceci se traduit par les relations

suyvantes :

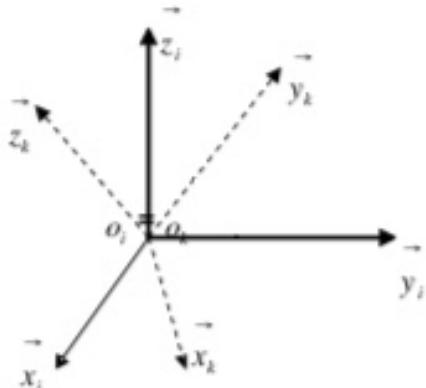
$$\text{Dans } R_i : \begin{cases} \overrightarrow{O_i O_k} \cdot \overrightarrow{x_i} \\ \overrightarrow{O_i O_k} \cdot \overrightarrow{y_i} \\ \overrightarrow{O_i O_k} \cdot \overrightarrow{z_i} \end{cases}; \quad \text{Dans } R_k : \begin{cases} \overrightarrow{O_i O_k} \cdot \overrightarrow{x_k} \\ \overrightarrow{O_i O_k} \cdot \overrightarrow{y_k} \\ \overrightarrow{O_i O_k} \cdot \overrightarrow{z_k} \end{cases}$$

5.2 Repérage de l'orientation des axes du repère

Pour repérer l'orientation des axes du repère R_k , on ramène ce repère en O_i de telle sorte que les centres O_i et O_k soient confondues ($O_i = O_k$).

Le repère R_k est en rotation quelconque par rapport au repère R_i , dans ce cas chacun des vecteurs unitaires $(\overrightarrow{x_k}, \overrightarrow{y_k}, \overrightarrow{z_k})$ aura des composantes dans le repère R_i ; nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x_i} &= \alpha_{11} \overrightarrow{x_k} + \alpha_{12} \overrightarrow{y_k} + \alpha_{13} \overrightarrow{z_k} \\ \overrightarrow{y_i} &= \alpha_{21} \overrightarrow{x_k} + \alpha_{22} \overrightarrow{y_k} + \alpha_{23} \overrightarrow{z_k} \\ \overrightarrow{z_i} &= \alpha_{31} \overrightarrow{x_k} + \alpha_{32} \overrightarrow{y_k} + \alpha_{33} \overrightarrow{z_k}\end{aligned}$$



Ces trois équations peuvent se mettre sous la forme matricielle, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{x_i} \\ \overrightarrow{y_i} \\ \overrightarrow{z_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{x_k} \\ \overrightarrow{y_k} \\ \overrightarrow{z_k} \end{pmatrix}$$

La matrice $[P]$ (3x3) définie par les éléments α_{ij} est appelée matrice de passage du repère R_i au repère R_k . La matrice $[P]$ est orthogonale droite, trois paramètres indépendants permettent de repérer l'orientation du repère R_k . Les paramètres indépendants les plus utilisés pour déterminer l'orientation de la base mobile sont les angles d'Euler que l'on présentera en détail dans ce chapitre. Nous allons d'abord étudier les relations existant entre les deux bases R_i et R_k puis expliciter la formule de la base mobile et ses conséquences.

5.3. Formule de la base mobile

Soit $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un repère fixe et $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ un repère mobile par rapport au premier. Les vecteurs unitaires du repère R_k sont orthogonaux entre eux et de module constant et égale à 1, mais ils changent de direction dans l'espace.

$$\|\vec{x}_k\| = \|\vec{y}_k\| = \|\vec{z}_k\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{x}_k \cdot \vec{y}_k = 0, \quad \vec{x}_k \cdot \vec{z}_k = 0, \quad \vec{y}_k \cdot \vec{z}_k = 0$$

Nous allons déterminer les dérivées de ces vecteurs dans le repère R_i :

$$\frac{d^i \vec{x}_k}{dt}, \quad \frac{d^i \vec{y}_k}{dt}, \quad \frac{d^i \vec{z}_k}{dt}$$

Soit $\vec{\Omega}_k^i = \dot{\theta}(\vec{a} \vec{x}_k + \vec{b} \vec{y}_k + \vec{c} \vec{z}_k)$, le vecteur rotation de la base $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ par rapport à la base $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$.

Nous avons alors les relations suivantes :

$$\frac{d^i \vec{x}_k}{d\theta} \perp \vec{x}_k \Rightarrow \frac{d^i \vec{x}_k}{d\theta} \in (\vec{y}_k, \vec{z}_k); \text{ nous pouvons écrire : } \frac{d^i \vec{x}_k}{d\theta} = 0 \cdot \vec{x}_k + c \vec{y}_k - b \vec{z}_k$$

$$\frac{d^i \vec{x}_k}{dt} = \frac{d^i \vec{x}_k}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (0 \cdot \vec{x}_k + c \vec{y}_k - b \vec{z}_k) \dot{\theta} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \vec{x}_k = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{x}_k$$

$$\frac{d^i \vec{y}_k}{d\theta} \perp \vec{y}_k \Rightarrow \frac{d^i \vec{y}_k}{d\theta} \in (\vec{x}_k, \vec{z}_k); \text{ nous pouvons écrire : } \frac{d^i \vec{y}_k}{d\theta} = -c \vec{x}_k + 0 \cdot \vec{y}_k + a \vec{z}_k$$

$$\frac{d^i \vec{y}_k}{dt} = \frac{d^i \vec{y}_k}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (-c \vec{x}_k + 0 \cdot \vec{y}_k + a \vec{z}_k) \dot{\theta} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \vec{y}_k = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{y}_k$$

$$\frac{d^i \vec{z}_k}{d\theta} \perp \vec{z}_k \Rightarrow \frac{d^i \vec{z}_k}{d\theta} \in (\vec{x}_k, \vec{y}_k); \text{ nous pouvons écrire : } \frac{d^i \vec{z}_k}{d\theta} = b \vec{x}_k - a \vec{y}_k + 0 \cdot \vec{z}_k$$

$$\frac{d^i \vec{z}_k}{dt} = \frac{d^i \vec{z}_k}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (b \vec{x}_k - a \vec{y}_k + 0 \cdot \vec{z}_k) \dot{\theta} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \vec{z}_k = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{z}_k$$

Nous avons donc : $\frac{d^i \vec{x}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{x}_k$; $\frac{d^i \vec{y}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{y}_k$; $\frac{d^i \vec{z}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{z}_k$

5.4. Dérivée dans le repère R_i d'un vecteur $\vec{V}(t)$ exprimé dans un repère R_k

Le vecteur $\vec{V}(t)$ s'écrit : $\vec{V}(t) = \vec{X}_k \vec{x}_k + \vec{Y}_k \vec{y}_k + \vec{Z}_k \vec{z}_k$ dans le repère R_k .

Sa dérivée dans le repère R_k a pour expression : $\frac{d^k \vec{V}(t)}{dt} = \dot{\vec{X}}_k \vec{x}_k + \dot{\vec{Y}}_k \vec{y}_k + \dot{\vec{Z}}_k \vec{z}_k$

Sa dérivée dans le repère R_i s'écrit :

$$\frac{d^i \vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^k \vec{V}(t)}{dt} + \vec{X}_k \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{x}_k + \vec{Y}_k \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{y}_k + \vec{Z}_k \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{z}_k$$

$$\frac{d^i \vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^k \vec{V}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\vec{X}_k \vec{x}_k + \vec{Y}_k \vec{y}_k + \vec{Z}_k \vec{z}_k) = \frac{d^k \vec{V}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}(t)$$

$$\text{On obtient finalement : } \frac{d^i \vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^k \vec{V}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}(t)$$

5.5. Propriétés du vecteur $\vec{\Omega}_k^i$

- a) Le vecteur $\vec{\Omega}_k^i$ est antisymétrique par rapport aux indices i et j : $\vec{\Omega}_k^i = -\vec{\Omega}_k^j$
- b) Formule de Chasles : $\vec{\Omega}_k^i = \vec{\Omega}_k^i + \vec{\Omega}_j^i$ (principe de composition)
- c) $\frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} = \frac{d^k \vec{\Omega}_k^i}{dt}$ égalité des dérivées par rapport aux indices.

6. Angles d'Euler

6.1 Angles d'Euler de type 1

Soit $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un repère fixe et $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ un repère lié au solide (S), en mouvement quelconque dans l'espace. Le centre O_k du repère R_k appartient au solide $O_k \in (S)$.

Dans le cas des angles d'Euler de type 1, on considère que les centres O_i et O_k des deux repères sont confondus : $O_i = O_k$, ce qui signifie que le repère R_k ne fait que des rotations

par rapport au repère R_i . Trois paramètres indépendants sont nécessaires pour définir complètement l'orientation du repère R_i par rapport à celle de R_j .

Le passage du repère R_i vers le repère R_j se fera par trois rotations en utilisant deux repères intermédiaires R_1 et R_2 .

6.1.1. Passage du repère R_i vers le repère R_j : (précession)

La rotation se fait autour de l'axe $\vec{z}_i = \vec{z}_1$.

On passe du repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ vers le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en faisant une rotation d'angle Ψ : appelé angle de précession. La vitesse de rotation est donnée par :

$$\vec{\Omega}_1 = \dot{\Psi} \vec{z}_i = \dot{\Psi} \vec{z}_1 \text{ car } \vec{z}_i \text{ est confondu avec } \vec{z}_1.$$

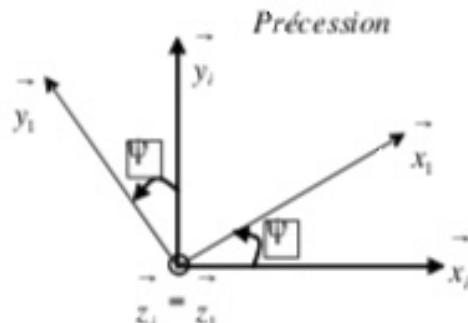
La représentation se fait par des figures planes, à partir desquelles nous construisons les matrices de passage. Nous avons ainsi :

$$\vec{x}_1 = \cos\Psi \vec{x}_i + \sin\Psi \vec{y}_i + 0.\vec{z}_i$$

$$\vec{y}_1 = -\sin\Psi \vec{x}_i + \cos\Psi \vec{y}_i + 0.\vec{z}_i$$

$$\vec{z}_1 = 0.\vec{x}_i + 0.\vec{y}_i + \vec{z}_i$$

Ces trois équations peuvent être mise sous forme matricielle et nous obtenons:



$$\Psi = (\vec{x}_i, \vec{x}_1) = (\vec{y}_i, \vec{y}_1) \text{ avec } \vec{z}_1 = \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_1$$

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \\ \vec{z}_i \end{pmatrix}$$

$P_{R_i \rightarrow R_1} = \begin{pmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage du repère R_1 vers le repère R_i .

La matrice de passage de R_i vers R_1 est égale à la transposée de $P_{R_1 \rightarrow R_i}$: $P_{R_i \rightarrow R_1} = P^T_{R_1 \rightarrow R_i}$

6.1.2. Passage du repère R_2 vers le repère R_1 : (Nutation)

La rotation se fait autour de l'axe $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$.

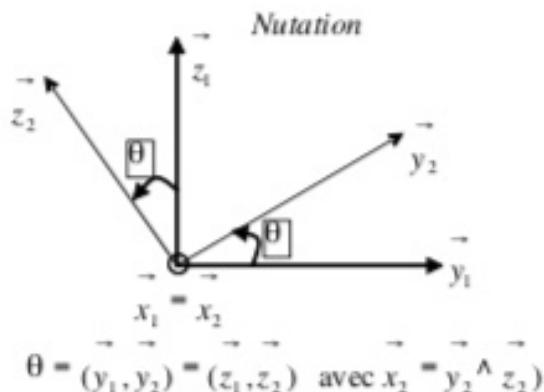
On passe du repère $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ vers le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en faisant une rotation d'angle θ : appelé angle de Nutation. La vitesse de rotation est donnée par :

$$\vec{\Omega}_2 = \dot{\theta} \vec{x}_1 = \dot{\theta} \vec{x}_2 \quad \text{car } \vec{x}_1 \text{ est confondu avec } \vec{x}_2.$$

Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{x}_2 &= \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{y}_1 + 0 \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{y}_2 &= 0 \cdot \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1 + \sin \theta \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 &= 0 \cdot \vec{x}_1 - \sin \theta \vec{y}_1 + \cos \theta \vec{z}_1\end{aligned}$$

Sous forme matricielle et nous obtenons:



$$\theta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) \quad \text{avec } \vec{x}_2 = \vec{y}_2 \wedge \vec{z}_2$$

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$P_{R2 \rightarrow R1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est la matrice de passage du repère R_2 vers le repère R_1 .

6.1.3. Passage du repère R_k vers le repère R_2 : (Rotation propre)

La rotation se fait autour de l'axe $\vec{z}_2 = \vec{z}_k$.

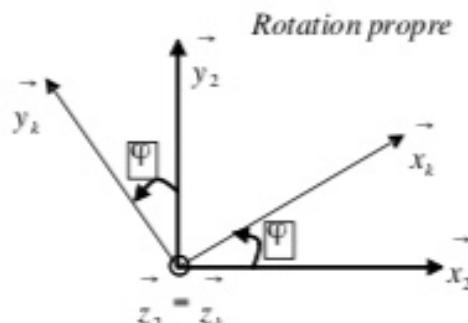
On passe du repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ vers le repère $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en faisant une rotation d'angle φ : appelé angle de Rotation propre. La vitesse de rotation est donnée par :

$$\vec{\Omega}_k = \dot{\varphi} \vec{z}_2 = \dot{\varphi} \vec{z}_k \quad \text{car } \vec{z}_2 \text{ est confondu avec } \vec{z}_k.$$

Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{x}_k &= \cos\varphi \vec{x}_2 + \sin\varphi \vec{y}_2 + 0 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{y}_k &= -\sin\varphi \vec{x}_2 + \cos\varphi \vec{y}_2 + 0 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{z}_k &= 0 \cdot \vec{x}_2 + 0 \cdot \vec{y}_2 + \vec{z}_2\end{aligned}$$

Sous forme matricielle et nous obtenons:



$$\Psi = (\vec{x}_2, \vec{x}_k) = (\vec{y}_2, \vec{y}_k) \quad \text{avec } \vec{z}_k = \vec{x}_k \wedge \vec{y}_k$$

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_k \\ \vec{y}_k \\ \vec{z}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

$P_{R_k \rightarrow R_2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage du repère R_k vers le repère R_2 .

Le passage du repère R_k vers le repère R_i ou inversement se fait par trois rotations successives de telle sorte que tous les axes de R_k occupent des positions différentes de celle de R_i . La matrice de passage de R_k vers R_i est donnée par le produit des trois matrices successives, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_k \\ \vec{y}_k \\ \vec{z}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\psi - \sin\psi \cos\theta \sin\varphi & \cos\varphi \sin\psi + \sin\psi \cos\theta \cos\varphi & \sin\varphi \sin\theta \\ -\sin\varphi \cos\psi - \sin\psi \cos\theta \cos\varphi & -\sin\varphi \sin\psi + \sin\psi \cos\theta \cos\varphi & \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\theta \sin\varphi & -\sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \\ \vec{z}_i \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de R_i vers R_k est donnée par la transposée de cette dernière.

Le vecteur rotation instantané du repère R_k par rapport à R_i aura pour expression vectorielle : $\vec{\Omega}_k = \dot{\psi} \vec{z}_i + \dot{\theta} \vec{x}_i + \dot{\varphi} \vec{z}_2$.

Il aura une expression différente selon qu'il soit écrit dans l'un ou l'autre des deux repères.

Dans R_i , nous aurons : $\vec{\Omega}_i = \begin{cases} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\varphi} \cos \psi + \dot{\psi} \end{cases}$

Dans R_k , nous aurons : $\vec{\Omega}_k = \begin{cases} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \psi \end{cases}$

Ce vecteur instantané de rotation permet de déduire la vitesse de tous les points du solide en connaissant la vitesse d'un seul point appartenant au solide.

7. Champs des vitesses et accélérations d'un solide

Soit un repère fixe $R_i(O_i, x_i, y_i, z_i)$ et un solide (S_k) lié à un repère $R_k(O_k, x_k, y_k, z_k)$ en mouvement quelconque dans l'espace. Pour tout point su solide (S_k) nous pouvons lui associer son vecteur position, donc son vecteur vitesse et vecteur accélération.

Considérons deux points A_k et B_k appartenant au solide (S_k) , nous allons chercher une relation entre leur vitesse et leur accélération.

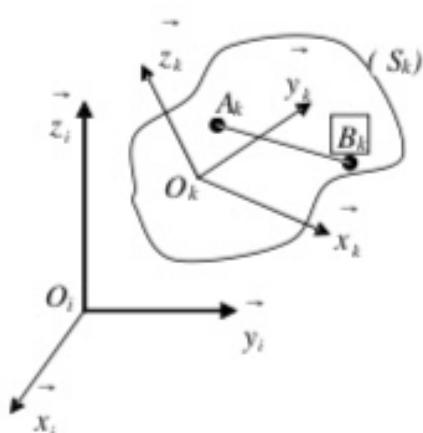
7.1. Champs des vitesses

Le solide (S_k) est indéformable, alors la

distance $\overrightarrow{A_k B_k} = Cte$ reste constante au cours du temps dans les deux repères.

Ce vecteur s'exprimera de façon différente dans R_i et R_k . Les vitesses des points

A_k et B_k sont différentes car le solide a un mouvement quelconque.



Dans le repère R_i nous avons : $\vec{O_iB_k} = \vec{O_iA_k} + \vec{A_kB_k} \Rightarrow \vec{A_kB_k} = \vec{O_iB_k} - \vec{O_iA_k} = Cte$

Dans le repère R_k nous avons : $\vec{O_kB_k} = \vec{O_kA_k} + \vec{A_kB_k} \Rightarrow \vec{A_kB_k} = \vec{O_kB_k} - \vec{O_kA_k} = Cte$

Des deux expressions nous pouvons déduire une relation entre les vitesses des deux points appartenant au solide.

Les vitesses des deux points par rapport au repère R_i sont données par:

$$\vec{V^i}(A_k) = \frac{d^i \vec{O_iA_k}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{V^i}(B_k) = \frac{d^i \vec{O_iB_k}}{dt}$$

Ses deux expressions peuvent s'écrire sous la forme :

$$\vec{V^i}(A_k) = \frac{d^i \vec{O_iA_k}}{dt} = \frac{d^k \vec{O_iA_k}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O_iA_k} \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\vec{V^i}(B_k) = \frac{d^i \vec{O_iB_k}}{dt} = \frac{d^k \vec{O_iB_k}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O_iB_k} \quad \dots \dots \dots (2)$$

En faisant la différence entre les deux expressions (2) - (1) : on aboutit à :

$$\vec{V^i}(B_k) - \vec{V^i}(A_k) = \frac{d^i (\vec{O_iB_k} - \vec{O_iA_k})}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\vec{O_iB_k} - \vec{O_iA_k})$$

$$\text{or on sait que : } \frac{d^i (\vec{O_iB_k} - \vec{O_iA_k})}{dt} = \frac{d^i \vec{A_kB_k}}{dt} = 0 \quad \text{car} \quad \vec{O_iB_k} - \vec{O_iA_k} = \vec{A_kB_k}$$

On obtient ainsi la relation de distribution des vitesses dans un solide :

$$\vec{V^i}(B_k) = \vec{V^i}(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{A_kB_k}$$

Cette relation est d'une grande importance dans la cinématique et la dynamique des solides.

Elle permet, à partir de la vitesse d'un point du solide de déduire la vitesse de tous les autres points du solide en connaissant la vitesse de rotation du repère lié à celui-ci.

Remarques :

- a) Si le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_k^i = \vec{0}$, alors le solide est en mouvement de translation pur et tous les points du solide ont la même vitesse : $\vec{V^i}(B_k) = \vec{V^i}(A_k)$;
- b) Si $\vec{V^i}(A_k) = \vec{0}$ et $\vec{V^i}(B_k) = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{A_kB_k}$, on dit que le solide est en mouvement de rotation pur autour du point $A_k \in (S_k)$;

- c) Le mouvement quelconque (général) d'un solide peut être décrit comme étant composé d'un mouvement de translation du point $A_k \in (S_k)$ à la vitesse $\vec{V}^i(A_k)$ et d'un mouvement de rotation autour du point $A_k \in (S_k)$ à la vitesse de rotation $\vec{\Omega}_k$.

7.2. Equiprojectivité du champ des vitesses d'un solide

Nous pouvons le montrer par deux méthodes différentes.

- a) Nous avons montré précédemment que $\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k$

En multipliant cette expression par le vecteur $\vec{A}_k \vec{B}_k$, nous obtenons :

$$\vec{A}_k \vec{B}_k \cdot (\vec{V}^i(B_k)) = \vec{A}_k \vec{B}_k \cdot \vec{V}^i(A_k) + \vec{A}_k \vec{B}_k \cdot (\vec{\Omega}_k \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k)$$

Par permutation circulaire du produit mixte, nous pouvons facilement voir que l'expression :

$$\vec{A}_k \vec{B}_k \cdot (\vec{\Omega}_k \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k) = \vec{\Omega}_k \cdot (\vec{A}_k \vec{B}_k \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k) = 0$$

On obtient ainsi l'égalité : $\vec{A}_k \vec{B}_k \cdot \vec{V}^i(B_k) = \vec{A}_k \vec{B}_k \cdot \vec{V}^i(A_k)$

(propriété d'équiprojectivité du champ des vitesses du solide)

- b) Cette expression peut être retrouvée

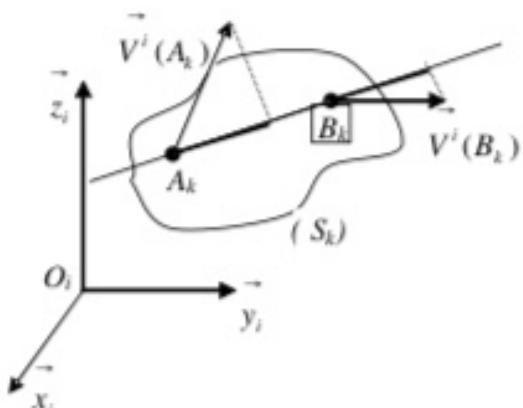
d'une autre façon.

Le solide (S_k) est indéformable

et la distance $\vec{A}_k \vec{B}_k$ est constante alors :

$$\frac{d(\vec{A}_k \vec{B}_k)^2}{dt} = 0$$

$$\frac{d(\vec{A}_k \vec{B}_k)^2}{dt} = 2 \vec{A}_k \vec{B}_k \frac{d \vec{A}_k \vec{B}_k}{dt} = 0$$



$$2 \vec{A}_k \vec{B}_k \cdot (\vec{V}^i(B_k) - \vec{V}^i(A_k)) = 0 \quad \text{d'où} \quad \vec{A}_k \vec{B}_k \cdot \vec{V}^i(B_k) = \vec{A}_k \vec{B}_k \cdot \vec{V}^i(A_k)$$

Cette propriété d'équiprojectivité entraîne l'existence d'un vecteur libre $\vec{\Omega}_k^i$ tel que :

$\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k}$, ce qui permet d'introduire la notion de torseur cinématique.

7.3. Champs des accélérations

Pour chaque point du solide (S_k) lié au repère R_k , on déduit l'accélération à partir de la

vitesse à partir de la relation : $\vec{\gamma}^i(A_k) = \frac{d^i \vec{V}^i(A_k)}{dt}$

Nous allons chercher une relation qui lie les accélérations : $\vec{\gamma}^i(A_k)$ et $\vec{\gamma}^i(B_k)$

Nous avons déjà établi une relation entre les vitesses des deux points :

$$\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k}$$

Nous déduirons la relation entre les accélérations par dérivation de l'expression des vitesses.

$$\vec{\gamma}^i(B_k) = \frac{d^i \vec{V}^i(B_k)}{dt} = \frac{d^i \vec{V}^i(A_k)}{dt} + \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \overrightarrow{A_k B_k} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \frac{d^i \overrightarrow{A_k B_k}}{dt}$$

$$\text{et comme : } \frac{d^i \overrightarrow{A_k B_k}}{dt} = \frac{d^k \overrightarrow{A_k B_k}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k} \quad \text{car} \quad \frac{d^k \overrightarrow{A_k B_k}}{dt} = \vec{0}$$

on obtient finalement la relation entre les accélérations des deux points A_k et B_k du solide :

$$\vec{\gamma}^i(B_k) = \vec{\gamma}^i(A_k) + \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \overrightarrow{A_k B_k} + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k})$$

On constate que si la vitesse de rotation est constante $\vec{\Omega}_k^i = \vec{0}$ l'expression devient :

$$\vec{\gamma}^i(B_k) = \vec{\gamma}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k}) = \vec{\gamma}^i(A_k) - \overrightarrow{A_k B_k} (\vec{\Omega}_k^i)^2$$

7.4. Torseur cinématique

La formule de distribution des vitesses est donnée par la relation :

$$\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k}$$

La formule de transport des moments entre deux points A_k et B_k du solide a pour expression :

$\vec{M}(B_k) = \vec{M}(A_k) + \vec{R} \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k$; nous constatons qu'il y a équivalence entre ces deux équations.

Le vecteur vitesse au point B_k est le moment au point B_k d'un torseur que nous noterons :

$\boxed{\Omega}_{B_k}$ et la résultante n'est autre que le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_k$.

Le torseur cinématique au point B_k ou (torseur de distribution des vitesses) relatif au mouvement du solide par rapport à R_i a pour éléments de réduction :

- le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_k$;
- la vitesse au point B_k : $\vec{V}^i(B_k)$

il sera noté sous la forme : $\boxed{\Omega}_{B_k} = \begin{cases} \vec{\Omega}_k \\ \vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{A}_k \vec{B}_k \end{cases}$

Le torseur cinématique est d'un grand intérêt car il caractérise complètement le mouvement d'un solide par rapport au repère R_i en ce qui concerne les vitesses.

Comme les éléments de réduction du torseur cinématique sont des fonctions du temps alors le torseur cinématique en dépend, il a donc à chaque instant une résultante et un champ de vitesse différent.

7.5. Axe instantané de rotation

On appelle axe instantané de rotation l'axe central du torseur cinématique. Nous avons montré précédemment que l'axe central est l'ensemble des points P tels que le moment du torseur en ce point soit parallèle à la résultante. Dans le cas du torseur cinématique, l'ensemble de ces points constitue l'axe dont les vitesses sont parallèles au vecteur vitesse instantanée de rotation.

A chaque instant le mouvement du solide peut être considéré comme étant la composition

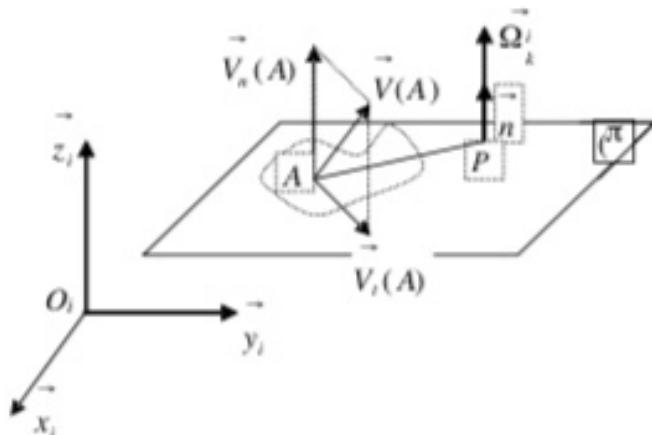
d'un mouvement de rotation de vitesse de rotation $\vec{\Omega}_k$ autour de l'axe instantané et d'une translation dont la direction instantanée est parallèle au vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_k$.

Soit un solide (S) lié à un repère R_k en mouvement quelconque par rapport à un repère R_i et

$\vec{\Omega}_k$ le vecteur rotation instantané du solide par rapport à R_i .

On considère un point $A \in (S)$. Soit (π) un plan de normale \vec{n} et contenant le point A tel que la vitesse de rotation du solide soit parallèle à \vec{n} : $\vec{\Omega}_k = \vec{\Omega}^i \vec{n}$. Le vecteur vitesse du point $A \in (\pi)$ peut se décomposer en deux vecteurs, l'un dans le plan (π) et l'autre perpendiculaire à (π) , ce qui donne :

$$\vec{V}(A) = \vec{V}_i(A) + \vec{V}_n(A) \text{ avec } \vec{V}_i(A) \in (\pi) \text{ et } \vec{V}_n(A) \perp (\pi)$$



D'après ce que l'on a développé sur les torseurs, il est possible de trouver un point P tel que : $\vec{V}_i(A) = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{PA}$, alors l'expression de la vitesse du point A s'écrira :

$$\vec{V}(A) = \vec{V}_n(A) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{PA}$$

Quelque soit $Q \in (\pi)$ nous pouvons par la formule de transport écrire :

$$\begin{aligned} \vec{V}(Q) &= \vec{V}(A) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{AQ} = \vec{V}_n(A) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{PA} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{AQ} = \vec{V}_n(A) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{PQ} \\ \vec{V}(Q) &= \vec{V}_n(A) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{PQ} \end{aligned}$$

Nous pouvons conclure que le vecteur vitesse du point $Q \in (\pi)$ s'écrit :

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}_i(Q) + \vec{V}_n(Q)$$

$$\text{avec : } \vec{V}_i(Q) = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{PQ} \quad \text{et} \quad \vec{V}_n(Q) = \vec{V}_n(A)$$

On constate que la composante de la vitesse, normale au plan (π) est la même pour tous les points du solide. On obtient finalement quelque soit P et Q :

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}_n(Q) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{PQ}$$

Le mouvement du solide dans ce cas se décompose à chaque instant en un mouvement de translation dans le plan et en un mouvement de rotation autour d'un axe passant par le point P et parallèle au vecteur unitaire \vec{n} .

L'axe ainsi défini par le point P et le vecteur unitaire $\vec{n} \parallel \vec{\Omega}_k^i$ constitue l'axe instantané de rotation du solide par rapport au repère R_i .

Nous savons que l'axe central d'un torseur est le lieu des points P où le moment est minimum ou nul. Dans le cas d'un torseur cinématique, la vitesse instantanée est nulle sur tous les points de l'axe central. *On déduit que si la vitesse est nulle, en deux points distincts d'un solide, alors l'axe joignant les deux points est forcément un axe de rotation donc un axe central du torseur cinématique.*

8. Lois de composition des mouvements

8.1. Loi de composition des vitesses

Soit $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un repère fixe de référence et $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ un repère en mouvement quelconque par rapport au repère fixe. On considère un solide (S_k) dont le mouvement est connu dans le repère relatif $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$.

Soit P un point du solide, nous pouvons écrire à chaque instant : $\vec{O}_i P = \vec{O}_i O_k + \vec{O}_k P$

La vitesse du point P dans le repère R_i est donnée par la dérivée du vecteur $\vec{O}_i P$ dans ce même repère.

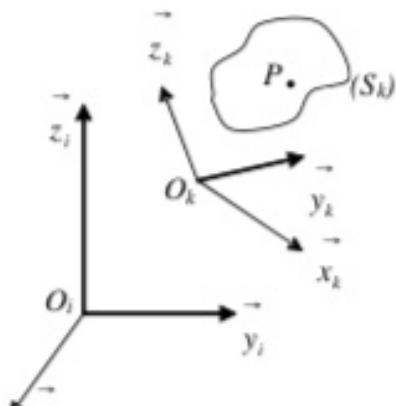
$$\vec{V}^i)P = \frac{d^i \vec{O}_i P}{dt} = \frac{d^i \vec{O}_i O_k}{dt} + \frac{d^i \vec{O}_k P}{dt}$$

Développons les deux termes de la vitesse, ce qui donne :

$$\frac{d^i \vec{O}_i O_k}{dt} = \vec{V}^i(O_k) : \text{vitesse du centre du repère } R_k$$

par rapport au repère R_i ;

$$\frac{d^i \vec{O}_k P}{dt} = \frac{d^k \vec{O}_k P}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O}_k P = \vec{V}^k(P) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O}_k P$$



Finalement la vitesse du point P dans le repère R_i s'écrit :

$$\vec{V}^i(P) = \vec{V}^k(P) + \left(\vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O}_k P \right) \text{ qui s'écrit aussi sous la forme :}$$

$$\vec{V}^i(P) = \vec{V}^k(P) + \vec{V}_k^i(P)$$

$\vec{V}^i(P)$: vitesse absolue du point P pour un observateur lié R_i

$\vec{V}^k(P)$: vitesse relative du point P par rapport à R_k en mouvement par rapport à R_i

$\vec{V}_k^i(P)$: Vitesse d'entraînement du point P s'il était immobile dans R_k .

8.1.1. Propriétés mathématiques du vecteur $\vec{V}_k^i(P)$

- * $\vec{V}_k^i(P) = -\vec{V}_i^k(P)$: antisymétrique par rapport aux indices donc aux repères ;
- * $\vec{V}_k^i(P) = \vec{V}_k^j(P) + \vec{V}_j^i(P)$

8.2. Loi de composition des accélérations

L'accélération absolue $\vec{\gamma}^i(P)$ du point P se déduit à partir de la vitesse absolue :

$$\vec{\gamma}^i(P) = \frac{d^i \vec{V}^i(P)}{dt} = \frac{d^i \vec{V}^k(P)}{dt} + \frac{d^i \vec{V}^i(O_k)}{dt} + \frac{d^i (\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O}_k P)}{dt}$$

Développons chacun des trois termes :

i) $\frac{d^i \vec{V}^k(P)}{dt} = \frac{d^k \vec{V}^k(P)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}^k(P) = \vec{\gamma}^k(P) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}^k(P) ;$

ii) $\frac{d^i \vec{V}^i(O_k)}{dt} = \vec{\gamma}^i(O_k) ;$

iii)
$$\begin{aligned} \frac{d^i (\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O}_k P)}{dt} &= \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{O}_k P + \vec{\Omega}_k^i \wedge \frac{d^i \vec{O}_k P}{dt} \\ &= \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{O}_k P + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\frac{d^k \vec{O}_k P}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O}_k P \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{O}_k P + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{V}^k(P) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O}_k P \right)$$

La somme des trois termes donne :

$$\vec{\gamma}^i(P) = \vec{\gamma}^k(P) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{V}^k(P) + \vec{\gamma}^i(O_k) + \frac{d^i \vec{\Omega}_k}{dt} \wedge \vec{O}_k P + \vec{\Omega}_k \wedge \left(\vec{V}^k(P) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{O}_k P \right)$$

$$\vec{\gamma}^i(P) = \vec{\gamma}^k(P) + \left(\vec{\gamma}^i(O_k) + \frac{d^i \vec{\Omega}_k}{dt} \wedge \vec{O}_k P + \vec{\Omega}_k \wedge (\vec{\Omega}_k \wedge \vec{O}_k P) \right) + 2 \vec{\Omega}_k \wedge \vec{V}^k(P)$$

Cette expression peut s'écrire sous une forme réduite :

$$\vec{\gamma}^i(P) = \vec{\gamma}^k(P) + \vec{\gamma}_k^i(P) + \vec{\gamma}_c(P)$$

$\vec{\gamma}^i(P)$: accélération absolue du point P (par rapport à R_i fixe)

$\vec{\gamma}^k(P)$: accélération relative du point P (par rapport au repère R_k)

$\vec{\gamma}_k^i(P) = \vec{\gamma}^i(O_k) + \frac{d^i \vec{\Omega}_k}{dt} \wedge \vec{O}_k P + \vec{\Omega}_k \wedge (\vec{\Omega}_k \wedge \vec{O}_k P)$: accélération d'entraînement du repère R_k

$\vec{\gamma}_c(P) = 2 \vec{\Omega}_k \wedge \vec{V}^k(P)$: accélération de Coriolis (accélération complémentaire)

L'accélération de Coriolis est une composition entre la vitesse de rotation $\vec{\Omega}_k$ du repère R_k par rapport au repère R_i et la vitesse relative $\vec{V}^k(P)$ du point P .

L'accélération de coriolis du point P est nulle, si et seulement si :

- La vitesse de rotation du repère relatif par rapport au repère absolu est nulle : $\vec{\Omega}_k = \vec{0}$;
- La vitesse relative du point P est nulle : $\vec{V}^k(P) = \vec{0}$;
- La vitesse de rotation est colinéaire avec la vitesse relative : $\vec{\Omega}_k \parallel \vec{V}^k(P)$

9. Mouvements particuliers fondamentaux

9.1. Mouvement de translation pur

Un solide (S_k) lié à un repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ est dit en mouvement de translation pur par rapport à un repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ si les axes de $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ gardent une direction

fixe par rapport à ceux de $R_i(O_i, x_i, y_i, z_i)$, au cours du temps.

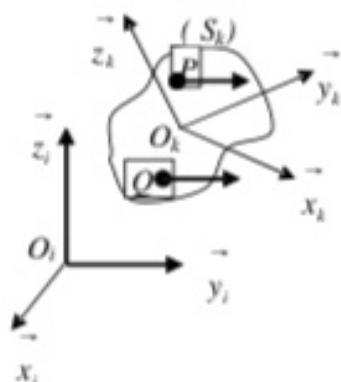
Tous les points du solide ont la même vitesse et la même accélération que le point $P \in (S_k)$.

La vitesse de rotation du solide est nulle par rapport à R_i .

On peut écrire : $\vec{V}^i(P) = \vec{V}^i(O_k)$ et $\vec{\Omega}_k \wedge \vec{O_k P} = \vec{0}$

Comme $\vec{O_k P} \neq \vec{0}$ alors $\vec{\Omega}_k = \vec{0}$

Dans ce cas le champ des vitesses est un champ uniforme.



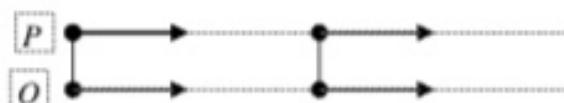
Le torseur cinématique qui décrit le mouvement de translation pur est un torseur couple, dont la résultante est nulle mais le moment n'est pas nul.

$$\boxed{Q_{k/i/P}} = \begin{cases} \vec{\Omega}_k = \vec{0} \\ \vec{V}^i(P) = \vec{V}^i(Q) \neq \vec{0} \end{cases}$$

Comme tous les points du solide ont la même vitesse à chaque instant alors les points décrivent des trajectoires parallèles. Trois types de trajectoires peuvent être décrites :

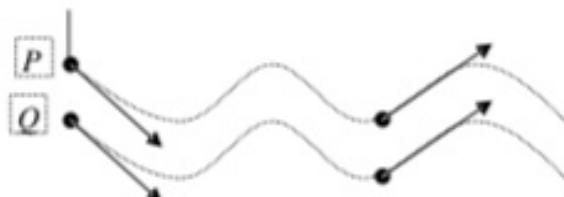
Soient P et Q deux points du solide :

- Trajectoire en translation rectiligne :



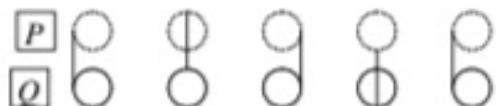
- Trajectoire en translation curviligne :

les vitesses de points P et Q sont parallèles et égales.



- Trajectoire en translation circulaire,

les points P et Q décrivent des cercles de même rayons à la même vitesse



9.2. Mouvement de rotation pur autour d'un axe du solide

9.2.1. Vitesse d'un point P du solide

Un solide (S_k) lié à un repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ est dit en mouvement de rotation pur par rapport à un repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ si un axe de $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ reste fixe à tout instant et d'une manière permanente dans le repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$. Nous avons donc deux points distincts O_k et I du solide (S_k) qui restent fixe dans le repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ au cours du mouvement de rotation.

Le repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ est en rotation pur par rapport au repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ à une vitesse angulaire donnée par : $\vec{\Omega}_k = \dot{\psi} \vec{z}_i = \dot{\psi} \vec{z}_k$ et $\vec{V}^i(O_k) = \vec{0}$

Soit P un point quelconque du solide et n'appartenant pas à l'axe de rotation tel que :

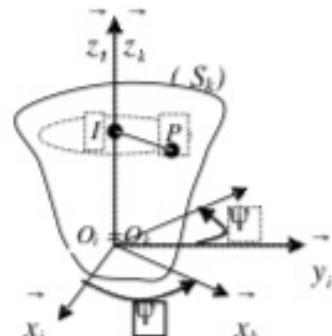
$$\vec{IP} = r \vec{x}_k$$

Quel que soit $I \in \vec{z}_i$ et \vec{z}_k , on peut écrire :

$$\vec{V}^i(I) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{O}_k I, \text{ or nous avons :}$$

$$\vec{\Omega}_k \wedge \vec{O}_k I \Rightarrow \vec{\Omega}_k \wedge \vec{O}_k I = \vec{0} \text{ d'où :}$$

$$\vec{V}^i(I) = \vec{V}^i(O_k) = \vec{0}$$



I et P sont deux points du solide, nous pouvons alors écrire :

$$\vec{V}^i(P) = \vec{V}^i(I) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP} = \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP} \Rightarrow \vec{V}^i(P) = \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP}$$

On remplace $\vec{\Omega}_k$ et \vec{IP} par leurs expressions, la vitesse du point P devient :

$$\vec{V}^i(P) = \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP} = \dot{\psi} \vec{z}_k \wedge r \vec{x}_k = r \dot{\psi} \vec{y}_k$$

Dans un mouvement de rotation pur, le torseur des vitesses est équivalent au torseur glisseur

défini par : $\boxed{D_{k/i/P}} = \begin{cases} \vec{\Omega}_k \neq \vec{0} \\ V^i(I) = \vec{0} \end{cases} \quad \text{avec } I \in \vec{z}_i \text{ et } \vec{z}_k$

9.2. Mouvement de rotation pur autour d'un axe du solide

9.2.1. Vitesse d'un point P du solide

Un solide (S_k) lié à un repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ est dit en mouvement de rotation pur par rapport à un repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ si un axe de $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ reste fixe à tout instant et d'une manière permanente dans le repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$. Nous avons donc deux points distincts O_k et I du solide (S_k) qui restent fixe dans le repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ au cours du mouvement de rotation.

Le repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ est en rotation pur par rapport au repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ à une vitesse angulaire donnée par : $\vec{\Omega}_k = \dot{\psi} \vec{z}_i = \dot{\psi} \vec{z}_k$ et $\vec{V}^i(O_k) = \vec{0}$

Soit P un point quelconque du solide et n'appartenant pas à l'axe de rotation tel que :

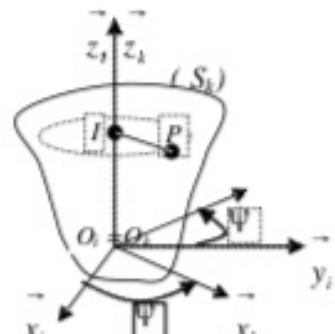
$$\vec{IP} = r \vec{x}_k$$

Quel que soit $I \in \vec{z}_i$ et \vec{z}_k , on peut écrire :

$$\vec{V}^i(I) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{O}_k I, \text{ or nous avons :}$$

$$\vec{\Omega}_k \parallel \vec{O}_k I \Rightarrow \vec{\Omega}_k \wedge \vec{O}_k I = \vec{0} \text{ d'où :}$$

$$\vec{V}^i(I) = \vec{V}^i(O_k) = \vec{0}$$



I et P sont deux points du solide, nous pouvons alors écrire :

$$\vec{V}^i(P) = \vec{V}^i(I) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP} = \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP} \Rightarrow \vec{V}^i(P) = \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP}$$

On remplace $\vec{\Omega}_k$ et \vec{IP} par leurs expressions, la vitesse du point P devient :

$$\vec{V}^i(P) = \vec{\Omega}_k \wedge \vec{IP} = \dot{\psi} \vec{z}_k \wedge r \vec{x}_k = r \dot{\psi} \vec{y}_k$$

Dans un mouvement de rotation pur, le torseur des vitesses est équivalent au torseur glisseur

défini par : $\boxed{D_{k/i/p}} = \begin{cases} \vec{\Omega}_k \neq \vec{0} \\ V^i(I) = \vec{0} \end{cases} \quad \text{avec } I \in \vec{z}_i \text{ et } \vec{z}_k$

9.2.2. Accélération du point P du solide

Nous avons trouvé précédemment la vitesse du point P , elle est donnée par :

$$\vec{V}^i(P) = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{IP} ; \text{ on déduit l'accélération par dérivation de cette expression :}$$

$$\vec{\gamma}^i(P) = \frac{d^i \vec{V}^i(P)}{dt} = \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{IP} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \frac{d^i \vec{IP}}{dt} \quad \text{or nous avons :}$$

$$\frac{d^i \vec{IP}}{dt} = \frac{d^i \vec{IP}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{IP} ; \text{ comme } \vec{IP} = Cte \text{ dans le repère } R_k \text{ alors } \frac{d^i \vec{IP}}{dt} = 0$$

ce qui donne : $\frac{d^i \vec{IP}}{dt} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{IP}$, l'expression de l'accélération devient :

$$\vec{\gamma}^i(P) = \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{IP} + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{IP})$$

En développant cette expression on obtient :

$$\vec{\gamma}^i(P) = \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{IP} + \vec{\Omega}_k^i (\vec{\Omega}_k^i \cdot \vec{IP}) - \vec{IP} (\vec{\Omega}_k^i \cdot \vec{\Omega}_k^i)$$

$$\text{or nous avons : } \vec{\Omega}_k^i \perp \vec{IP} \Rightarrow \vec{\Omega}_k^i \cdot \vec{IP} = 0 \text{ et } \vec{\Omega}_k^i \cdot \vec{\Omega}_k^i = \vec{\Omega}_k^{i2}$$

l'expression finale de l'accélération sera :

$$\vec{\gamma}^i(P) = -\vec{IP} \vec{\Omega}_k^{i2} + \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{IP}$$

Accélération normale *Accélération tangentielle*
suivant IP *au point P*

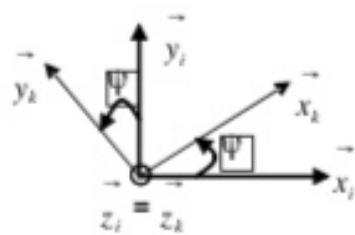
En remplaçant $\vec{\Omega}_k^i = \dot{\psi} \vec{z}_k$, $\vec{IP} = r \vec{x}_k$ et $\frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} = \ddot{\psi} \vec{z}_k$ par leur expressions

respectives

$$\vec{\gamma}^i(P) = -r \dot{\psi}^2 \vec{x}_k + r \ddot{\psi} \vec{y}_k = \vec{\gamma}_n(P) + \vec{\gamma}_t(P)$$

Les expressions de la vitesse et de l'accélération peuvent s'exprimer facilement dans le repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ en déterminant la matrice de passage du repère R_i vers le repère $R_k : P_{R_k \rightarrow R_i}$

$$\begin{aligned}\vec{x}_k &= \cos \Psi \vec{x}_i + \sin \Psi \vec{y}_i + 0 \cdot \vec{z}_i \\ \vec{y}_k &= -\sin \Psi \vec{x}_i + \cos \Psi \vec{y}_i + 0 \cdot \vec{z}_i \\ \vec{z}_k &= 0 \cdot \vec{x}_i + 0 \cdot \vec{y}_i + \vec{z}_i \\ \text{d'où } P_{R_k \rightarrow R_i} &= \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$



La vitesse et l'accélération, aurons pour expression dans R_i :

$$\begin{aligned}\vec{V}'(P) &= \dot{r}\vec{\Psi} \vec{y}_k = \dot{r}\vec{\Psi}(-\sin \Psi \vec{x}_i + \cos \Psi \vec{y}_i) = -\dot{r}\vec{\Psi} \sin \Psi \vec{x}_i + \dot{r}\vec{\Psi} \cos \Psi \vec{y}_i \\ \vec{\gamma}'(P) &= -r\Psi^2 \vec{x}_k + \ddot{r}\vec{\Psi} \vec{y}_k = -r\Psi^2(\cos \Psi \vec{x}_i + \sin \Psi \vec{y}_i) + \ddot{r}\vec{\Psi}(-\sin \Psi \vec{x}_i + \cos \Psi \vec{y}_i) \\ \vec{\gamma}'(P) &= -r(\Psi^2 \cos \Psi + \ddot{\Psi} \sin \Psi) \vec{x}_i + r(-\ddot{\Psi}^2 \sin \Psi + \ddot{\Psi} \cos \Psi) \vec{y}_i\end{aligned}$$

9.3. Mouvement hélicoïdal (rotation + translation)

Un solide (S_k) lié à un repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ décrit un mouvement hélicoïdal par rapport à un repère fixe $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ si :

- Un axe du repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ reste en coïncidence à tout instant avec un axe du repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$
- La coordonnée du point (O_k) centre du repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ suivant l'axe de coïncidence, est proportionnelle à l'angle de rotation du repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ par rapport au repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ au cours du mouvement de rotation.

Nous avons alors : $\overrightarrow{O_i O_k} = \lambda \vec{\Psi}(t) \vec{z}_i = \lambda \vec{\Psi}(t) \vec{z}_k$, le scalaire λ représente le pas du mouvement hélicoïdal le long de l'axe de coïncidence.

Nous avons deux mouvements qui se superposent :

- Un mouvement de translation le long de l'axe commun $\vec{z}_i = \vec{z}_k$;
- Un mouvement de rotation autour de ce même axe $\vec{z}_i = \vec{z}_k$.

Soit P un point du solide, nous avons à chaque instant : $\overrightarrow{O_i P} = \overrightarrow{O_i O_k} + \overrightarrow{O_k P}$

Le vecteur $\overrightarrow{O_i O_k}$ s'écrit dans le repère R_i : $\overrightarrow{O_i O_k} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \lambda \psi(t) \end{cases}_{R_i}$

Le vecteur $\overrightarrow{O_k P}$ s'écrit dans le repère R_k : $\overrightarrow{O_k P} = \begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases}_{R_k}$ et dans R_i $\overrightarrow{O_k P} = \begin{cases} a \cos \psi(t) \\ b \sin \psi(t) \\ c \end{cases}_{R_i}$

La somme des deux vecteurs nous donne le vecteur $\overrightarrow{O_i P}$ dans le repère R_i :

$$\overrightarrow{O_i P} = \begin{cases} a \cos \psi(t) \\ b \sin \psi(t) \\ c + \lambda \psi(t) \end{cases}_{R_i}$$

La vitesse et l'accélération du point P dans le repère R_i se déduisent facilement par dérivation dans le même repère :

$$\vec{V}(P) = \frac{d^i}{dt} \overrightarrow{O_i P} = \begin{cases} -a\dot{\psi} \sin \psi(t) \\ b\dot{\psi} \cos \psi(t) \\ \ddot{\lambda}\psi(t) \end{cases}_{R_i} \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}(P) = \frac{d^i}{dt} \vec{V}(P) = \frac{d^i}{dt} \begin{cases} -a\ddot{\psi} \sin \psi(t) - a\dot{\psi}^2 \cos \psi(t) \\ b\ddot{\psi} \cos \psi(t) - b\dot{\psi}^2 \sin \psi(t) \\ \ddot{\lambda}\psi(t) \end{cases}_{R_i}$$

Exercice 06: Simulateur de vol

Pour simuler les conditions de vol des avions, les ingénieurs ont conçu un appareil spécial pour l'entraînement des pilotes qui consiste en **un bras (1)** en rotation dans le plan horizontal

tel que : $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: repère fixe ;

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: repère mobile lié au bras, avec $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi$ sens positif ;

Un cockpit (2) en rotation autour de l'axe \vec{x}_1 tel que $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta$ sens positif ; $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: repère lié au cockpit avec **OB = R**.

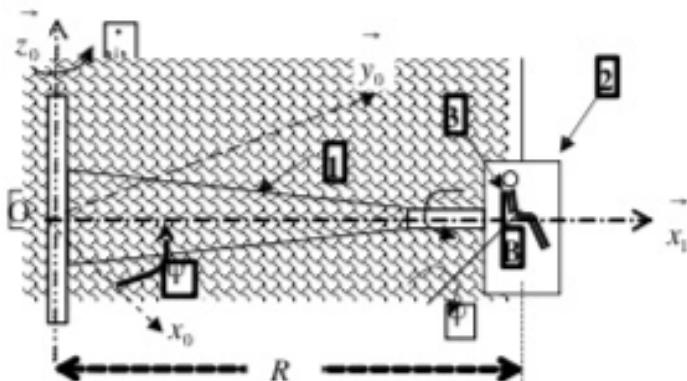
Un siège-pilote (3) en rotation autour de l'axe \vec{y}_2 tel que : $\vec{y}_2 = \vec{y}_3$ et $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3) = \varphi$ sens positif. $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$: repère lié au siège-pilote. Le pilote est lié au siège, sa tête est repéré par le vecteur position $BT = LZ_3$.

Tous ces éléments sont en rotation contrôlée par l'ordinateur pour simuler les différentes manœuvres. Il a fallu faire des calculs pour déterminer les paramètres cinématiques afin de les varier de façon sensée pour savoir à quelles accélérations seront soumis les pilotes.

Vous êtes l'ingénieur responsable de ces calculs, il vous est demandé de :

- 1) Etablir les figures planes représentatives des trois rotations et les matrices de passages correspondantes ;
- 2) Trouver le vecteur position du point T, ainsi que le vecteur rotation du siège pilote par rapport à R_0 ;
- 3) Déterminer le vecteur vitesse absolue du point T par composition de mouvement et par la cinématique du solide .
- 4) Déterminer l'accélération absolue du point T par composition de mouvement.

On prendra R_2 comme repère de projection



Solution :

1. Figures planes des trois rotations et les matrices de passages correspondantes ;

a) Rotation du bras

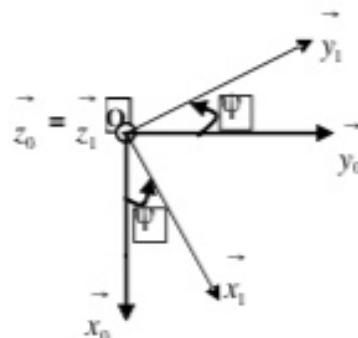
Nous avons : $OB = R$ et $R_0(x_0, y_0, z_0)$ un repère fixe. R_1 : étant le repère de projection on exprimera toute les données dans ce repère.

$R_1(x_1, y_1, z_1)$: en rotation / à R_0 tel que : $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et $(x_0, x_1) = (y_0, y_1) = \psi$ sens positif

Matrice de passage de R_0 vers R_1

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$$P_{R_0 \rightarrow R_1}$$



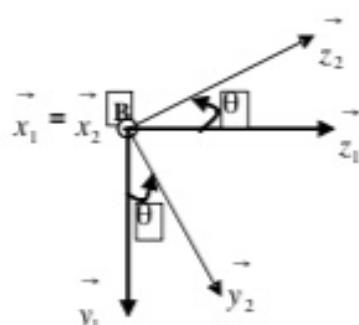
a) Rotation du cockpit

$R_2(B, x_2, y_2, z_2)$: en rotation / R_1 tel que $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ et $(y_1, y_2) = (z_1, z_2) = \theta$ sens positif ;

Matrice de passage de R_1 vers R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

$$P_{R_1 \rightarrow R_2}$$



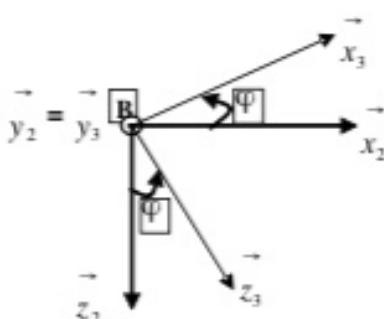
a) Rotation du siège pilote

$R_3(B, x_3, y_3, z_3)$ en rotation / tel que : $\vec{y}_2 = \vec{y}_3$ et $(x_2, x_3) = (z_2, z_3) = \varphi$ sens positif.

Matrice de passage de R_2 vers R_3

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

$$P_{R_2 \rightarrow R_3}$$



2. Vecteur position du point T par rapport à R_0 exprimé dans R_2

Nous avons : $\vec{OT} = \vec{OB} + \vec{BT}$, sachant que $\vec{BT} = L\vec{z}_3$

$$\vec{OB} = \begin{cases} R \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1, R_2} ; \quad \vec{BT} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ L \end{cases}_{R_3} = \begin{cases} L \sin \varphi \\ 0 \\ L \cos \varphi \end{cases}_{R_2} \text{ d'où : } \vec{OT} = \begin{cases} R + L \sin \varphi \\ 0 \\ L \cos \varphi \end{cases}_{R_2}$$

Vecteur rotation du siège pilote :

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\varphi} \vec{y}_2 + \dot{\theta} \vec{x}_2 + \dot{\psi} \vec{z}_1 ;$$

Par la matrice de passage de R_1 vers R_2 le vecteur \vec{z}_1 s'écrit : $\vec{z}_1 = \sin \theta \vec{y}_2 + \cos \theta \vec{z}_2$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \dot{\varphi} \vec{y}_2 + \dot{\theta} \vec{x}_2 + \dot{\psi} \left(\sin \theta \vec{y}_2 + \cos \theta \vec{z}_2 \right) = \dot{\theta} \vec{x}_2 + \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta \right) \vec{y}_2 + \dot{\psi} \cos \theta \vec{z}_2$$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{cases}_{R_2}$$

3. Vecteur vitesse du point T

3.1. Par composition de mouvement

$$\vec{V}_{abs} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{ent} \Leftrightarrow \vec{V}^0(T) = \vec{V}^2(T) + \vec{V}_2^0(T)$$

$$\text{La vitesse relative est donnée par : } \vec{V}^2(T) = \frac{d^2 \vec{BT}}{dt} = \begin{cases} \dot{L} \varphi \cos \varphi \\ 0 \\ -L \varphi \sin \varphi \end{cases}_{R_2}$$

$$\text{La vitesse relative s'écrit : } \vec{V}_2^0(T) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OT}$$

$$\vec{V}_2^0(T) = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} R + L \sin \varphi \\ 0 \\ L \cos \varphi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} L \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ -L \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\varphi} \cos \theta \\ -\dot{\psi} \sin \theta \end{cases}_{R_2}$$

En faisant la somme on obtient :

$$\vec{V}^0(T) = \begin{cases} \dot{L}\Psi \cos\varphi + \dot{L}\Psi \sin\theta \cos\varphi \\ -\dot{L}\theta \cos\varphi + \dot{\Psi} \cos^n\theta \frac{R}{n} + L \sin\theta \varphi \\ -L\Psi \sin\theta - \dot{\Psi} \sin\theta \frac{R}{n} + L \sin\theta \frac{n}{n} \varphi \end{cases}$$

3.2. Par la cinématique du solide

La vitesse relative s'écrit : $\vec{V}^0(T) = \vec{V}^0(B) + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \vec{BT}$

$$\text{Nous avons : } \vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \vec{OB} = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \sin\theta \\ \dot{\Psi} \cos\theta \end{cases} \wedge \begin{cases} R \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ R\Psi \cos\theta \\ -R\Psi \sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_3^0 \wedge \vec{BT} = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \sin\theta \\ \dot{\Psi} \cos\theta \end{cases} \wedge \begin{cases} L \sin\theta \varphi \\ \frac{n_0}{n} \\ L \cos\theta \varphi \end{cases} = \begin{cases} \dot{L}\Psi \cos\varphi + \dot{L}\Psi \sin\theta \cos\varphi \\ -\dot{L}\theta \cos\varphi + \dot{\Psi} \cos\theta \sin\theta \varphi \\ -L\Psi \sin\theta - \dot{\Psi} \sin\theta \frac{R}{n} \varphi \end{cases}$$

La somme des deux expressions donne :

$$\vec{V}^0(T) = \begin{cases} \dot{L}\Psi \cos\varphi + \dot{L}\Psi \sin\theta \cos\varphi \\ -\dot{L}\theta \cos\varphi + \dot{\Psi} \cos^n\theta \frac{R}{n} + L \sin\theta \varphi \\ -L\Psi \sin\theta - \dot{\Psi} \sin\theta \frac{R}{n} + L \sin\theta \frac{n}{n} \varphi \end{cases}$$

4. Accélération absolue du point T par composition de mouvement

Son expression est donnée par la relation suivante : $\vec{\gamma}_{ab}(T) = \vec{\gamma}_r(T) + \vec{\gamma}_{int}(T) + \vec{\gamma}_{coriolis}(T)$
 $\vec{\gamma}^0(T) = \vec{\gamma}^z(T) + \vec{\gamma}_2^0(T) + \vec{\gamma}_c(T)$

Explicitons chacun des termes de cette relation :

$$(1) : \vec{\gamma}^2(T) = \frac{d^2 \vec{V}^2(T)}{dt} = \begin{cases} \ddot{L}\varphi \cos\varphi - L\dot{\varphi}^2 \sin\varphi \\ 0 \\ -L\dot{\varphi} \sin\varphi - L\dot{\varphi}^2 \cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}_2^0(T) = \vec{\gamma}^0(O) + \frac{d^0 \vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \vec{OT} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge (\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OT})$$

$$\vec{\gamma}^0(O) = \vec{0}$$

$$\frac{d^0 \vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \vec{OT} = \frac{d^2 \vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \vec{OT} = \begin{cases} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \sin\theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos\theta \\ \ddot{\psi} \cos\theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin\theta \end{cases} \wedge \begin{cases} R^+ L \sin\varphi \\ 0^n \\ L \cos\varphi \end{cases}$$

$$(2) : \frac{d^0 \vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \vec{O} = \begin{cases} L \cos\varphi (\ddot{\psi} \sin\theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos\theta) \\ L \ddot{\theta} \cos\varphi + (R^+ L \sin\varphi (\ddot{\psi} \cos\theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin\theta)) \\ -(R^+ L \sin\varphi (\ddot{\psi} \sin\theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos\theta)) \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OT} \right) = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin\theta \\ \dot{\psi} \cos\theta \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin\theta \\ \dot{\psi} \cos\theta \end{cases} \wedge \begin{cases} R^+ L \sin\varphi \\ 0^n \\ L \cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{O} \right) = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin\theta \\ \dot{\psi} \cos\theta \end{cases} \wedge \begin{cases} L \dot{\psi} \cos\varphi \sin\theta \\ -L \dot{\theta} \cos\varphi + \dot{\psi} \dot{\psi} \cos\theta \\ -\dot{\psi} \sin\theta \end{cases} \wedge \begin{cases} R^+ L \sin\varphi \\ 0^n \\ L \cos\varphi \end{cases}$$

$$(3) : \vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{O} \right) = \begin{cases} -\dot{\psi}^2 \left(\ddot{R} + L \sin \varphi + L \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta \right) \\ \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \left(\ddot{R} + L \sin \varphi + L \dot{\psi}^2 \cos \varphi \cos \theta \sin \theta \right) \\ -L \dot{\theta}^2 \cos \varphi + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \left(\ddot{R} + L \sin \varphi - L \dot{\psi}^2 \cos \varphi \sin^2 \theta \right) \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}_c(T) = 2 \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}(T) \right)$$

$$(4) : \vec{\gamma}_c(T) = 2 \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{cases} \wedge \begin{cases} L \dot{\psi} \cos \varphi \\ \ddot{\theta} \\ -L \dot{\psi} \sin \varphi \end{cases} = \begin{cases} -2L \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \\ 2\dot{\psi} \dot{\theta} \sin \varphi + \frac{L}{2} \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi \\ \frac{L}{2} 2L \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \end{cases}$$

La somme de ces expressions donne l'accélération absolue du point T

$$\vec{\gamma}^0(T) = (1) + (2) + (3) + (4)$$

Exercice 10 :

Soit un système constitué de deux solides (S_1) lié au repère $R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et (S_2) lié au repère $R_2(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ par rapport à un repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

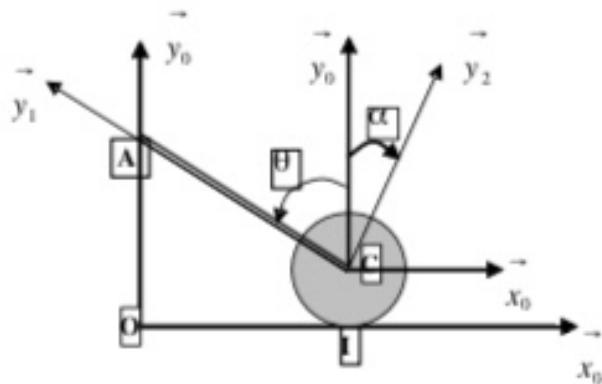
(S_1) : est une barre de longueur L , de masse m dont l'extrémité A glisse sur un mur et l'autre extrémité B est articulée au disque ;

(S_2) : est un disque de masse M et de rayon R qui roule sans glisser sur un plan horizontal tel que représenté sur la figure ci-dessous.

1. Déterminer la relation exprimant le non glissement du disque sur le plan au point I ;

2. Déterminer le centre instantané de rotation (C.I.R.) de la barre :

- a) Géométriquement
- b) Analytiquement.

**Solution :**

$$R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) : \text{repère fixe} ; \quad \begin{matrix} \vec{\theta} \\ \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{\Omega}_2^0 \end{matrix} = \begin{cases} L \sin \theta \\ \vec{n}_R \\ 0 \end{cases} ; \quad \begin{matrix} \vec{\theta} \\ \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{\Omega}_2^0 \end{matrix} = \begin{cases} L \sin \theta \\ \vec{n}_0 \\ 0 \end{cases}$$

$R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: lié à la barre; tel que : $\vec{\theta} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\theta} \vec{z}_1 = \dot{\theta} \vec{z}_0$

$R_2(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: lié au disque ; tel que : $\vec{\alpha} = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ et $\vec{\Omega}_2^0 = -\dot{\alpha} \vec{z}_1 = -\dot{\alpha} \vec{z}_0$

1. Condition de roulement sans glissement

La condition de non glissement du disque sur le plan est vérifiée si, la vitesse du point I

appartenant au disque est nulle : $\vec{V}(I) = \vec{0}$ par la cinématique du solide écrire :

$$\vec{V}(I) = \vec{V}(C) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{CI} = \vec{0} \quad \text{avec: } \vec{V}(C) = \frac{d^0 \vec{O}}{dt} = \begin{cases} L \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

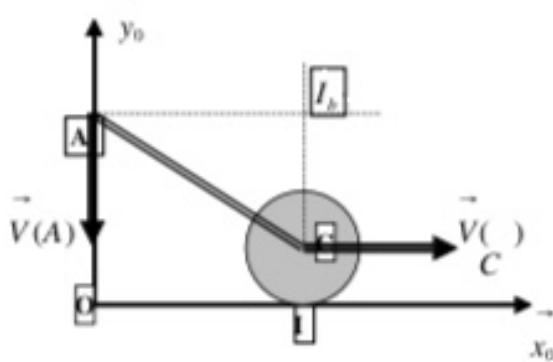
$$\begin{matrix} \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha \end{matrix} \wedge \begin{matrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \dot{\theta} \cos \theta - R \dot{\alpha} = 0$$

2. Centre instantané de rotation de la barre

a) Gométriquement

Soit I_b le centre de rotation instantanée (C.R.I.) de la barre.

Sa position est repérée en traçant deux droites, l'une perpendiculaire à la vitesse $\vec{V}(A)$ au point A et l'autre perpendiculaire à $\vec{V}(C)$ au point C . Le point d'intersection de ces deux droites est le (C.R.I.) de la barre.



En effet nous avons :

$$\vec{V}(I_b) = \vec{V}(A) + \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{AI}_b = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}(A) = \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{I}_b A \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}(A) \perp \vec{\Omega}_1 \\ \vec{V}(A) \perp \vec{I}_b A \end{cases}$$

$$\vec{V}(I_b) = \vec{V}(C) + \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{CI}_b = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}(C) = \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{I}_b C \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}(C) \perp \vec{\Omega}_1 \\ \vec{V}(C) \perp \vec{I}_b C \end{cases}$$

a) Analytiquement

$$\text{Soit } \vec{OI}_b = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \Rightarrow \vec{CI}_b = \begin{cases} x - L \sin \theta \\ y - R \cos \theta \\ z \end{cases}$$

$$\text{On sait que : } \vec{V}(I_b) = \vec{V}(C) + \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{CI}_b = \vec{0}$$

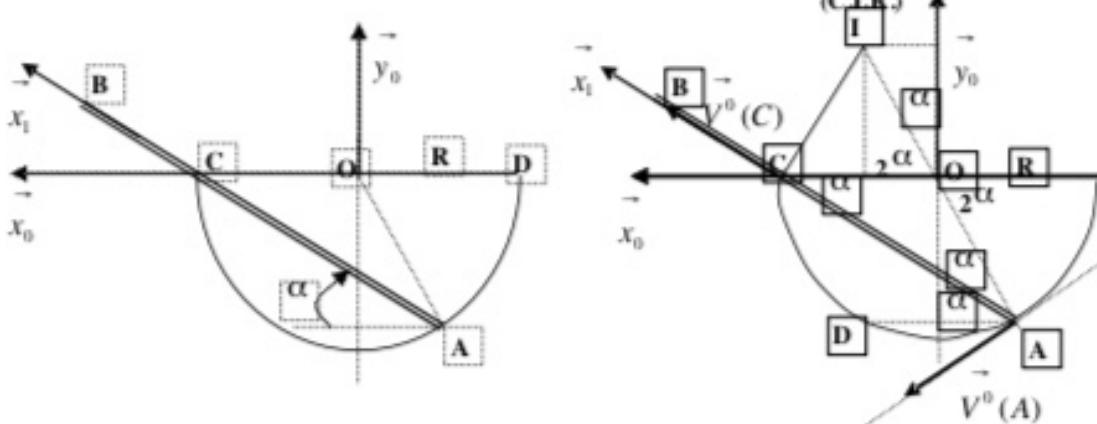
$$\vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_2 \wedge \vec{CI_b} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} L\dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ R_0 \dot{\theta} \end{cases} \begin{cases} x - L \sin \theta \\ y - R \\ z \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ R_0 \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L\dot{\theta} \cos \theta - (y - R)\dot{\theta} = 0 \\ (x - L \sin \theta)\dot{\theta} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = R + L \cos \theta \\ x = L \sin \theta \\ z = 0 \end{cases}$$

Exercice 11 :

Soit $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ un repère fixe lié à un demi cylindre creux de rayon R , sur lequel se déplace une barre de longueur $2L$. Le mouvement se fait dans le plan vertical (x_0y_0). La barre est en contact permanent avec le demi cylindre en deux points, l'extrémité A en contact avec la surface du cylindre et le point C avec son bord.

1. Déterminer les coordonnées du centre instantané de rotation (C.I.R.) géométriquement ;
2. Retrouver les coordonnées du centre instantané de rotation (C.I.R.) analytiquement ;
3. En déduire la vitesse du point C de la barre.

**Solution :****1. Coordonnées du C.I.R. géométriquement :**

La vitesse du point A est tangente au cercle de rayon R . On trace la perpendiculaire à $\vec{V}^0(A)$, elle passe par le point O et elle rencontre la perpendiculaire à $\vec{V}^0(C)$ au point I . La vitesse du point C est portée par la barre.

Le triangle CAI est rectangle en C car il est inscrit à l'intérieur d'un cercle de diamètre CI .

Le triangle COA est isocèle : $OC = OA = R$, les angles $(CO, CA) = (AO, AC) = \alpha$

Le triangle COI est isocèle : $OC = OI = R$, les angles $(CO, CI) = (IO, IC) = 2\alpha$

On déduit facilement les coordonnées du point I tel que : $\vec{OI} = R_0 \begin{cases} x_I = R \cos 2\alpha \\ y_I = R \sin 2\alpha \end{cases}$

2. Coordonnées du C.I.R. analytiquement :

On sait que la vitesse du centre instantané de rotation (C.I.R.) de la barre est nul :

$\vec{V^0}(I) = \vec{V^0}(A) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{AI} = \vec{0}$; Déterminons d'abord la vitesse du point A :

$$\text{Nous avons : } \vec{OA} = R_0 \begin{cases} -R \cos 2\alpha \\ -R \sin 2\alpha \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{V^0}(A) = R_0 \begin{cases} 2R \dot{\alpha} \sin 2\alpha \\ -2R \dot{\alpha} \cos 2\alpha \\ 0 \end{cases} \text{ et } \vec{AI} = R_0 \begin{cases} x_I + R \cos 2\alpha \\ y_I + R \sin 2\alpha \\ 0 \end{cases}$$

$$R_0 \begin{cases} 2R \dot{\alpha} \sin 2\alpha \\ -2R \dot{\alpha} \cos 2\alpha \\ 0 \end{cases} + R_0 \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{cases} \wedge R_0 \begin{cases} x_I + R \cos 2\alpha \\ y_I + R \sin 2\alpha \\ 0 \end{cases} = R_0 \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$2R \dot{\alpha} \sin 2\alpha - \dot{\alpha} (y_I + R \sin 2\alpha) = 0 \Rightarrow y_I = R \sin 2\alpha$$

$$-2R \dot{\alpha} \cos 2\alpha + \dot{\alpha} (x_I + R \cos 2\alpha) = 0 \Rightarrow x_I = R \cos 2\alpha$$

3. Vitesse du point C de la barre

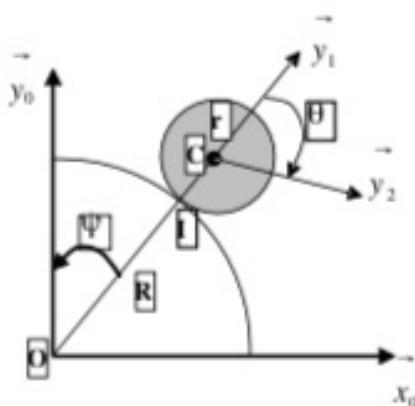
Nous avons : $\vec{V^0}(C) = \vec{V^0}(I) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{IC}$; or : $\vec{V^0}(I) = \vec{0}$

$$\vec{V^0}(C) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{IC} = R_0 \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{cases} \wedge R_0 \begin{cases} R - R \cos 2\alpha \\ -R \sin 2\alpha \\ 0 \end{cases} = R_0 \begin{cases} R \dot{\alpha} \sin 2\alpha \\ R \dot{\alpha} (-\cos 2\alpha) \\ 0 \end{cases}$$

Exercice 12 :

Soit un système constitué d'un cylindre fixe de rayon R lié au repère $\vec{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et d'un disque de masse m de rayon r lié au repère $\vec{R}_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en mouvement de rotation autour du cylindre comme représenté sur la figure ci-dessous. Déterminer :

1. La matrice d'inertie du disque au point O , dans le repère $\vec{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
2. La relation entre $\dot{\Psi}$ et $\dot{\varphi}$ exprimant la condition de non glissement du disque au point I ;
3. La vitesse et l'accélération du point M par composition de mouvement.



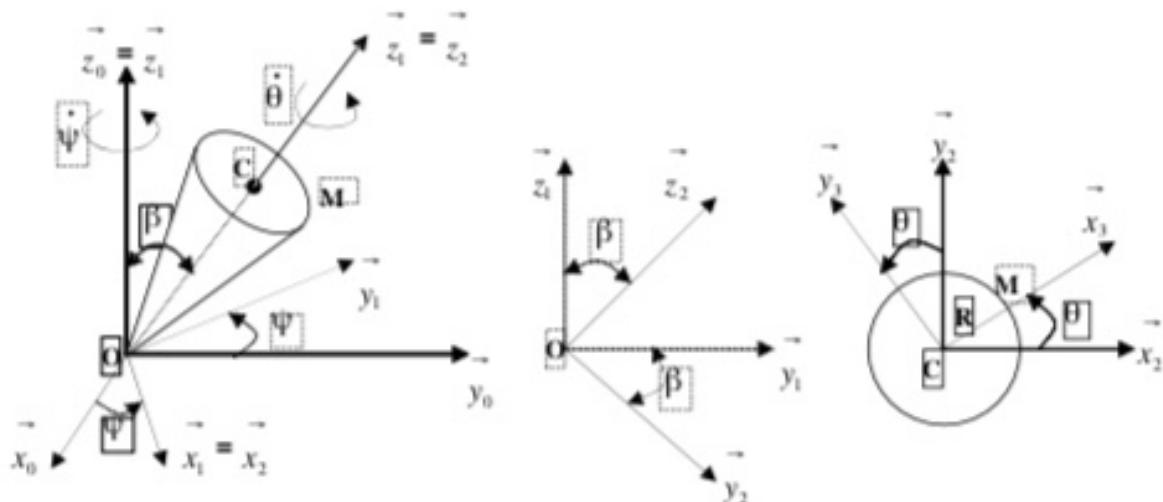
Exercice 13 :

Un cône homogène de hauteur h , de rayon de base R est en mouvement de rotation autour de l'axe vertical \vec{z}_0 d'un repère orthonormé fixe, avec une vitesse angulaire $\dot{\Psi} = Cte$. L'axe principal du cône est incliné d'un angle β constant par rapport à cet axe. Le cône tourne aussi autour de son axe principal avec une vitesse angulaire $\dot{\theta} = Cte$ comme représenté sur la figure ci-dessous. Le repère \vec{R}_1 est le repère relatif.

On prendra aussi le repère \vec{R}_2 comme repère de projection.

Déterminer :

1. Les matrices de passage de \vec{R}_1 vers \vec{R}_2 et de \vec{R}_2 vers \vec{R}_1 ;
2. La vitesse et l'accélération du point C par dérivation ;
3. La vitesse et l'accélération du point M par composition de mouvement ;



Solution :

1. Les matrices de passage de R_1 vers R_2 et de R_3 vers R_2 ;

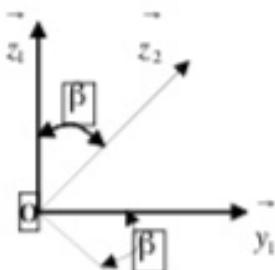
Nous savons : $OC = h$ d $\vec{R}_0(x_0, y_0, z_0)$ un repère fixe et R_2 : le repère de projection.

$R_1(x_1, y_1, z_1)$: tel que : $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et $(x_0, x_1) = (y_0, y_1) = \Psi$ avec $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\Psi} \vec{z}_0 = \dot{\Psi} \vec{z}_1$, $\dot{\Psi} = Ct$
 $R_2(x_2, y_2, z_2)$: tel que : $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ et $(y_1, y_2) = (z_1, z_2) = \beta = Ct$ avec $\vec{\Omega}_2^1 = \dot{\beta} \vec{x}_1$, $\dot{\beta} = 0$
 $R_3(x_3, y_3, z_3)$: tel que : $\vec{z}_2 = \vec{z}_3$ et $(x_2, x_3) = (y_2, y_3) = \theta$ avec $\vec{\Omega}_3^2 = \dot{\theta} \vec{z}_2 = \dot{\theta} \vec{z}_3$, $\dot{\theta} = Cte$

Matrice de passage de R_1 vers R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

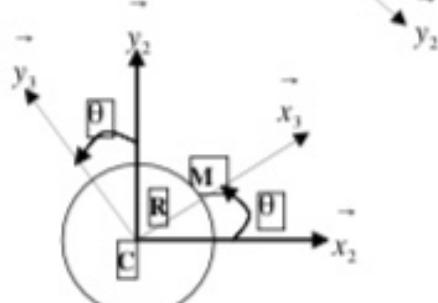
$$P_{R_1 \rightarrow R_2}$$



Matrice de passage de R_3 vers R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

$$P_{R_3 \rightarrow R_2}$$



2. Vitesse et accélération du point C par dérivation ;

2.1. Vitesse

$$\text{Nous avons: } \vec{O} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ h \end{cases}, \vec{O} = \vec{O} + \vec{C} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ h \end{cases} + \begin{cases} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ 0^n \end{cases} = \begin{cases} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ 0^n \end{cases}$$

$$\vec{V}^0(C) = \frac{d^0 \vec{OC}}{dt} = \frac{d^2 \vec{OC}}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OC}, \text{ avec: } \vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi} \vec{z}_1$$

$$\text{or: } \vec{z}_1 = -\dot{\psi} \vec{y}_2 + \cos \beta \vec{z}_2 \text{ d'où: } \vec{\Omega}_2^0 = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi} \sin \beta \\ \dot{\psi} \cos \beta \end{cases}$$

$$\vec{V}^0(C) = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi} \sin \beta \\ \dot{\psi} \cos \beta \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ h \end{cases} = \begin{cases} -\dot{\psi} h \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

2.2. Accélération :

$$\vec{\gamma}^0(C) = \frac{d^0 \vec{V}^0(C)}{dt} = \frac{d^2 \vec{V}^0(C)}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^0(C)$$

$$\vec{\gamma}^0(C) = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi} \sin \beta \\ \dot{\psi} \cos \beta \end{cases} \wedge \begin{cases} -\dot{\psi} h \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}^2 h \sin \beta \cos \beta \\ -\dot{\psi}^2 h \sin \beta \sin \beta \end{cases}$$

3. Vitesse et accélération du point M par composition de mouvement ;

3.1. Vitesse :

$$\text{Nous avons: } \vec{V}^0(M) = \vec{V}^2(M) + \vec{V}_2^0(M),$$

$$\text{avec: } \vec{O} = \begin{cases} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ h^n \end{cases} \Rightarrow \vec{V}^2(M) = \frac{d^2 \vec{O}}{dt^2} = \begin{cases} -R \dot{\theta} \sin \theta \\ R \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{V}_2^0(M) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OM} = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}_{si} \beta \\ \dot{\psi}_{co}^n \beta \end{cases} \wedge \begin{cases} R_{co} \theta \\ R_{si}^n \theta \\ h^n \end{cases} = \begin{cases} -\dot{\psi}_{hsi} \beta - R\dot{\psi}_{co} \beta_{si} \theta \\ R\dot{\psi}_{co}^n \beta_{co} \theta \\ R\dot{\psi}_{si}^n \beta_{co}^n \theta \end{cases}$$

ce qui donne : $\vec{V}^0(M) = \begin{cases} -\dot{\psi}_{hsi} \beta - R\dot{\psi}_{co} \beta_{si} \theta - R\dot{\theta}_{si} \theta \\ R\dot{\psi}_{co}^n \beta_{co} \theta + R\dot{\theta}_{co}^n \theta \\ R\dot{\psi}_{si}^n \beta_{co}^n \theta \end{cases}$

3.2 Accélération :

Nous savons : $\vec{\gamma}^0(M) = \vec{\gamma}^2(M) + \vec{\gamma}_2^0(M) + \vec{\gamma}_c(M)$,

$$\vec{\gamma}^2(M) = \frac{d^2 \vec{V}^2(M)}{dt} = \begin{cases} -R\dot{\theta}_2^2 \cos \theta \\ -R\dot{\theta}_2^2 \sin \theta \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}_2^0(M) = \vec{\gamma}^0(O) + \frac{d^0 \vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge (\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OM}) ; \quad \text{avec : } \vec{\gamma}^0(O) = \vec{0}$$

$$\frac{d^0 \vec{\Omega}_2^0}{dt} = \frac{d^2 \vec{\Omega}_2^0}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\Omega}_2^0 = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OM} \right) = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}_{si} \beta \\ \dot{\psi}_{co}^n \beta \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}_{si} \beta \\ \dot{\psi}_{co}^n \beta \end{cases} = \begin{cases} R_{co} \theta \\ R_{si}^n \theta \\ h^n \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OM} \right) = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}_{si} \beta \\ \dot{\psi}_{co}^n \beta \end{cases} \wedge \begin{cases} -\dot{\psi}_{hsi} \beta - R\dot{\psi}_{co} \beta_{si} \theta \\ R\dot{\psi}_{co}^n \beta_{co} \theta \\ R\dot{\psi}_{si}^n \beta_{co}^n \theta \end{cases} = \begin{cases} -\dot{\psi}_{hsi} \beta - R\dot{\psi}_{co} \beta_{si} \theta \\ R\dot{\psi}_{co}^n \beta_{co} \theta \\ R\dot{\psi}_{si}^n \beta_{co}^n \theta \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{O} \\ M \end{pmatrix} = \begin{cases} -R\dot{\psi}^2 \cos \theta \\ -\dot{\psi}^2 \cos \beta Q_{si} \beta + R \cos \beta \sin \theta \\ -\dot{\psi}^2 \frac{s}{n} \cos \beta Q_{si}^n \beta + R \cos \beta \frac{n}{s} \sin \theta \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2 \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^2(M) \right) = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi} \sin \beta \\ \dot{\psi} \frac{n}{s} \cos \beta \end{cases} = \begin{cases} -R \dot{\theta} \sin \theta \\ R \dot{\theta} \frac{n}{s} \cos \theta \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} -2R \dot{\theta} \psi \cos \theta \cos \beta \\ -2R \dot{\theta} \psi \frac{s}{n} \cos \theta \cos \beta \\ -2R \dot{\theta} \psi \frac{n}{s} \cos \theta \sin \beta \end{cases}$$

La somme de toutes ces expressions donne :

$$\vec{\gamma}^0(M) = \begin{cases} -R \cos \theta \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2R \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \beta \right) \\ -\dot{\psi}^2 \cos \beta Q_{si} \beta + R \cos \beta \sin \theta - R \sin \theta \left(\dot{\theta}^2 + 2R \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \beta \right) \\ -\dot{\psi}^2 \sin \beta Q_{si} \beta + R \cos \beta \sin \theta - 2R \dot{\theta} \psi \sin \theta \sin \beta \end{cases}$$

CHAPITRE VII

CINÉMATIQUE DES SOLIDES EN CONTACTS

CINÉMATIQUE DES SOLIDES EN CONTACT

1. Mouvement de deux solides en contact

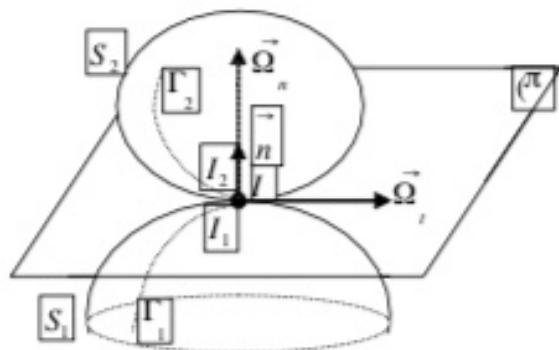
Soient deux solides (S_1) et (S_2) liés aux repères R_1 et R_2 mobiles par rapport à un repère fixe R_0 . Les deux solides en mouvement sont assujettis à un contact ponctuel à tout instant en un point fixe I appartenant au plan (π) tangent en ce point aux deux solides.

\vec{n} : la normale au plan (π)

$\vec{\Omega}_n \in (\pi)$

$\vec{\Omega}_n \perp (\pi)$

Au point de contact des deux solides
nous pouvons distinguer :



- $I_1 \in S_1$: point du solide S_1 en contact avec le solide S_2 à l'instant t;
- $I_2 \in S_2$: point du solide S_2 en contact avec le solide S_1 au même instant t;
- $I \in R_0$: la position commune de $I_1 \in S_1$ et $I_2 \in S_2$ au même instant t;

Le point géométrique I n'appartient ni à S_1 ni à S_2 . Les points I, I_1, I_2 occupent géométriquement la même position mais ils ont des rôles cinématiques différents.

L'ensemble des points $I \in R_0$ constitue une courbe Γ d'écrite sur le plan (π)

L'ensemble des points $I_1 \in S_1$ constitue une courbe Γ_1 d'écrite sur le solide S_1

L'ensemble des points $I_2 \in S_2$ constitue une courbe Γ_2 d'écrite sur le solide S_2

La vitesse de glissement du solide S_2 par rapport au solide S_1 appartient au plan (π) tangent au point de contact. Soit M_1 un point du solide S_1 et M_2 un point du solide

S_2 ; d'après ce que l'on a vu précédemment sur le champ des vitesses des points d'un solide, nous pouvons écrire dans le repère fixe :

$$\begin{aligned}\vec{V}^0(I_1) &= \vec{V}^0(M_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{M_1 I_1} \\ \vec{V}^0(I_2) &= \vec{V}^0(M_2) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{M_2 I_2}\end{aligned}$$

La vitesse de glissement du solide S_2 par rapport au solide S_1 est donnée par la relation :

$$\vec{V}_g(I) = \vec{V}^0(I_2) - \vec{V}^0(I_1)$$

Comme les trois points occupent la même position géométrique nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\vec{V}_g(I) &= \vec{V}^0(M_2) - \vec{V}^0(M_1) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{M_2 I_2} - \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{M_1 I_1} \\ \vec{V}_g(I) &= \vec{V}^0(M_2) - \vec{V}^0(M_1) + \vec{\Omega}_2^1 \wedge \overrightarrow{M_1 M_2}\end{aligned}$$

Le vecteur rotation du solide S_2 par rapport au solide S_1 a pour expression : $\vec{\Omega}_2^1 = \vec{\Omega}_2^0 - \vec{\Omega}_1^0$

D'où : $\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0$ on retrouve ici la loi de Chasles.

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_2^1$ du solide S_2 par rapport au solide S_1 a deux composantes, l'une

tangent et dans le plan $\vec{\Omega}_t \in (\pi)$, l'autre normale au plan : $\vec{\Omega}_n \perp (\pi)$: $\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_t + \vec{\Omega}_n$

$\vec{\Omega}_t = \vec{n} \wedge (\vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{n})$: Vecteur rotation de roulement du solide S_2 par rapport au solide S_1 ;

$\vec{\Omega}_n = (\vec{\Omega}_2^1 \cdot \vec{n}) \vec{n}$: Vecteur rotation de pivotement du solide S_2 par rapport au solide S_1

En général, lorsque deux solides sont en contact ponctuel, il peut y avoir :

Glissement , roulement et pivotement de l'un sur l'autre.

La condition de roulement sans glissement est vérifiée lorsque la vitesse de glissement est

nulle : $\vec{V}_g(I) = \vec{V}^0(I_2) - \vec{V}^0(I_1) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}^0(I_2) = \vec{V}^0(I_1)$

Si le solide S_1 est fixe alors : $\vec{V}^0(I_1) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}^0(I_2) = \vec{V}^0(I_1) = \vec{0}$

Dans ce cas, quel que soit $M \in S_2$, avec S_2 en roulement sans glissement par rapport au

solide S_1 , nous pouvons écrire : $\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(I_1) + \vec{\Omega}_2^1 \wedge \overrightarrow{I_1 M}$;

comme $\vec{V}^0(I_1) = \vec{0}$ alors : $\vec{V}^0(M) = \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{I}_1 M$

- Si $\vec{V}_s(I) = \vec{0}$: on dit que le solide S_2 roule sans glisser sur le solide S_1 ;
- Si $\vec{\Omega}_s = \vec{0}$: on dit que le solide S_2 ne pivote pas sur le solide S_1 ;
- Si $\vec{\Omega}_s = \vec{0}$: on dit que le solide S_2 ne roule pas, il glisse sur le solide S_1 ;

1.1. Mouvement de deux solides en contact en plusieurs points

Dans le cas où deux solides sont en contact en plusieurs points, les considérations précédentes peuvent être reprise en chaque point de contact.

Cas particuliers :

- Si deux solides S_2 et S_1 sont en contact en deux points A et B et si la vitesse de glissement en ces deux points est nulle $\vec{V}^0(A) = \vec{V}^0(B) = \vec{0}$ alors le vecteur rotation $\vec{\Omega}_2^1$ est un vecteur directeur de la droite AB passant par les deux points :

$$\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{AB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\Omega}_2^1 / \parallel \vec{AB}$$

- Si deux solides S_1 et S_2 sont en contact en plus de deux points et si la vitesse de glissement est nulle en tous ces points, ils sont nécessairement portés par le même axe donc ils sont alignés.

1.2 Transmission par friction d'un mouvement de rotation entre deux cylindres

Soient deux cylindres S_1 et S_2 de rayons respectifs R_1 et R_2 liés à un bâti fixe et ayant des mouvement de rotation d'axes respectifs (O, \vec{z}_1) et (O, \vec{z}_2)

Leur vitesse de rotation respective est donnée par : $\vec{\Omega}_1^0 = \vec{\Omega}_1^0 \vec{z}_1$ et $\vec{\Omega}_2^0 = -\vec{\Omega}_2^0 \vec{z}_1$

Soit P un point de contact entre les deux solides. Les axes de rotation sont parallèles à : \vec{z}_1 .

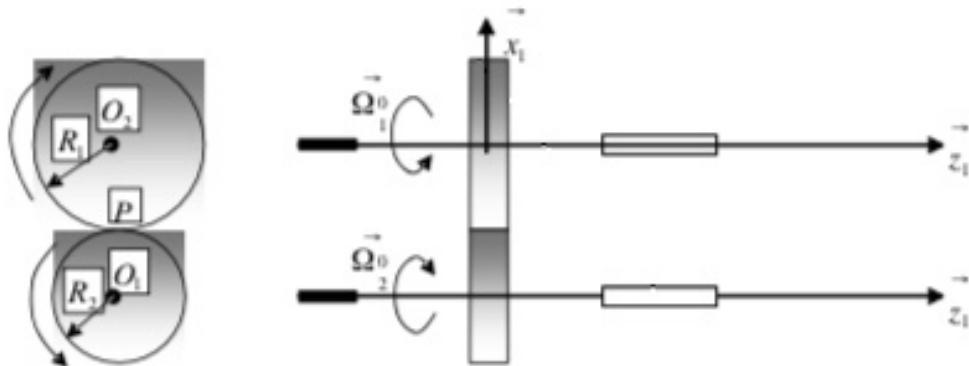
La condition de roulement sans glissement au point P s'écrira : $\vec{V}^0(P) = \vec{0}$

Le point de contact P peut être associé au solide S_1 et S_2 , par la cinématique du solide nous

$$P \in S_1 \Rightarrow \vec{v}^0(P) = \vec{v}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{O_1 P}$$

$$P \in S_2 \Rightarrow \vec{v}^0(P) = \vec{v}^0(O_2) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{O_2 P}$$

or nous avons $\vec{v}^0(P) = \vec{0}$ et les points O_1 et O_2 alors : $\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{O_1 P} = \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{O_2 P}$



Dans la transmission de mouvement par friction, les deux cylindres ont des mouvements de rotation de sens contraire si le contact se fait à l'extérieur et de même sens si le contact se fait à l'intérieur des cylindres.

Les points O_1, O_2, P sont alignés. Si $\vec{O_1 P} = -R_1 \vec{x}_1$ alors $\vec{O_2 P} = R_2 \vec{x}_1$

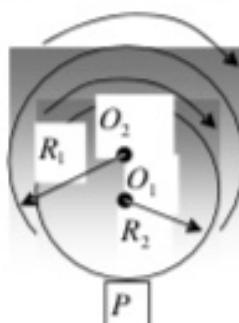
$$\text{D'où : } \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{O_1 P} = \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{O_2 P} \Leftrightarrow \vec{\Omega}_1^0 \vec{z}_1 \wedge -R_1 \vec{x}_1 = \vec{\Omega}_2^0 \vec{z}_1 \wedge R_2 \vec{x}_1$$

$$-\vec{\Omega}_1^0 R_1 = \vec{\Omega}_2^0 R_2 \Rightarrow \frac{\vec{\Omega}_1^0}{\vec{\Omega}_2^0} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Si le contact se fait à l'intérieur (cylindre S_2 à l'intérieur du cylindre S_1) les deux cylindres tourneront dans le même sens :

$$\text{D'où : } \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{O_1 P} = \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{O_2 P} \Leftrightarrow \vec{\Omega}_1^0 \vec{z}_1 \wedge R_1 \vec{x}_1 = \vec{\Omega}_2^0 \vec{z}_1 \wedge R_2 \vec{x}_1$$

$$\vec{\Omega}_1^0 R_1 = \vec{\Omega}_2^0 R_2 \Rightarrow \frac{\vec{\Omega}_1^0}{\vec{\Omega}_2^0} = \frac{R_2}{R_1}$$

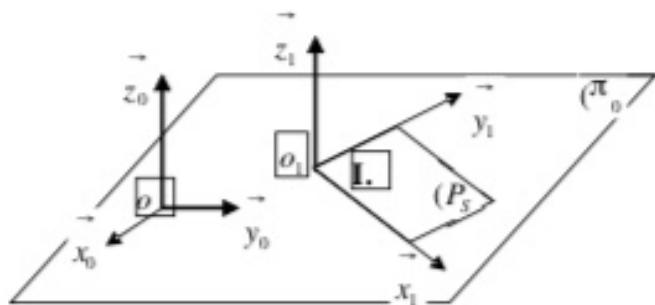


2. Mouvement plan sur plan

2.1. Définition

Le mouvement d'un solide (S) lié à un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par rapport à un repère fixe $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un mouvement plan sur plan si et seulement si, un plan (P_S) du solide reste en coïncidence avec un plan (π_0) lié au repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

On étudie ainsi le mouvement relatif de deux plans, l'un constituant le référentiel fixe. Les vecteurs $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ sont orthogonaux aux plans (P_S) et (π_0) respectivement en O_0 et O_1 .



Le vecteur rotation instantané du solide (S) lié à $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par rapport au repère fixe $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est donné par : $\vec{\Omega}_1 = \dot{\psi} \vec{z}_0$

Tous les points du solide se déplacent parallèlement au plan (π_0), leurs vecteurs vitesses sont aussi parallèles à ce plan, alors $\forall P \in (S)$ nous aurons :

$$\vec{V}^0(P) = f(t) \vec{x}_0 + g(t) \vec{y}_0 \Rightarrow \vec{V}^0(P) \cdot \vec{z}_0 = 0$$

On remarque dans ce cas que l'automoment $\vec{V}^0(P) \cdot \vec{\Omega}_1 = 0$ du torseur cinématique

$\boxed{E_P} = \begin{cases} \vec{\Omega}_1 \\ \vec{V}^0(P) \end{cases}$, décrivant le mouvement est nul. En effet nous avons :

$$\vec{V}^0(P) \cdot \vec{\Omega}_1 = \left(f(t) \vec{x}_0 + g(t) \vec{y}_0 \right) \cdot \dot{\psi} \vec{z}_0 = 0 , \text{ nous pouvons conclure que :}$$

- Si $\Psi = Cte \Rightarrow \vec{\Omega}_1 = \dot{\Psi} = 0$, la résultante du torseur étant nul, alors le torseur est un couple et le mouvement est une translation rectiligne sur le plan (π_0), l'axe central du torseur reste indéfini ;
- Si Ψ varie au cours du temps, alors $\vec{\Omega}_1 = \dot{\Psi}$, dans ce cas le torseur est un glisseur dont l'axe central est l'axe instantané de rotation orthogonal au plan (π_0) donc parallèle à \vec{z}_0 .

2.2. Paramétrage du solide

la position du solide est déterminée par :

- a) La position du point $O_1 \in (S)$ dans le repère R_1 est donnée par :

$$\overrightarrow{O_1} = \vec{x}x_0 + \vec{y}y_0 = \begin{cases} x \\ y \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

- b) L'orientation du repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par rapport au repère fixe $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ définie par la vitesse de rotation : $\vec{\Omega}_1 = \dot{\Psi} \vec{z}_0$ tel que $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \Psi$

Le passage du repère R_0 vers le repère R_1 s'exprime par les relations suivantes :

$$\vec{x}_1 = \cos \Psi \vec{x}_0 + \sin \Psi \vec{y}_0$$

$$\vec{y}_1 = -\sin \Psi \vec{x}_0 + \cos \Psi \vec{y}_0$$

$$\vec{z}_1 = \vec{z}_0$$

La matrice de passage de R_1 vers R_0 est donnée par :

$$P_{R_1 \rightarrow R_0} = \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le mouvement plan sur plan est un mouvement à trois degrés de liberté : (x, y, Ψ) ; deux degrés de translation et un degré de rotation.

2.3. Vecteurs vitesse et accélération d'un point quelconque du solide

Si P est un point quelconque du solide (S), il aura pour coordonnées :

Dans R_1 : $\vec{O_1P} = a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1$, le point P est fixe dans le solide.

Dans R_0 : $\vec{O_1P} = a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 = a(\cos\psi \vec{x}_0 + \sin\psi \vec{y}_0) + b(-\sin\psi \vec{x}_0 + \cos\psi \vec{y}_0)$

$$\vec{O_1P} = (a\cos\psi - b\sin\psi)\vec{x}_0 + (a\sin\psi + b\cos\psi)\vec{y}_0$$

$$\vec{O_1P} = \begin{cases} a\cos\psi - b\sin\psi \\ a\sin\psi + b\cos\psi \\ 0 \end{cases}$$

Dans R_0 : $\vec{OP} = \vec{OO_1} + \vec{O_1P} = \vec{x}\vec{x}_0 + \vec{y}\vec{y}_0 + (a\cos\psi - b\sin\psi)\vec{x}_0 + (a\sin\psi + b\cos\psi)\vec{y}_0$

$$\vec{OP} = \begin{cases} x + a\cos\psi - b\sin\psi \\ y + a\sin\psi + b\cos\psi \\ 0 \end{cases}$$

La vitesse du point P par rapport à R_0 se déduit de deux façons :

a) Par la cinématique du solide :

$$\vec{V^0}(P) = \vec{V^0}(O_1) + \vec{\Omega_1^0} \wedge \vec{O_1P} = \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases} \wedge \begin{cases} a\cos\psi - b\sin\psi \\ a\sin\psi + b\cos\psi \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{V^0}(P) = \begin{cases} \dot{x} - (a\sin\psi + b\cos\psi)\dot{\psi} \\ \dot{y} + (a\cos\psi - b\sin\psi)\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}$$

b) Par dérivation :

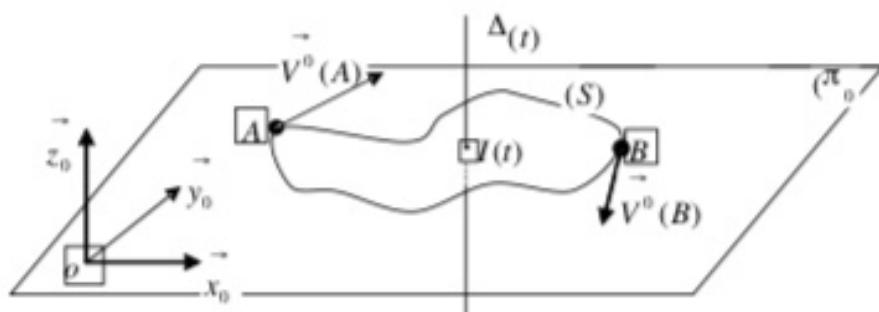
$$\vec{V^0}(P) = \frac{d^0 \vec{OP}}{dt} = \begin{cases} \dot{x} - a\dot{\psi}\sin\psi - b\dot{\psi}\cos\psi \\ \dot{y} + a\dot{\psi}\cos\psi - b\dot{\psi}\sin\psi \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} \dot{x} - (a\sin\psi + b\cos\psi)\dot{\psi} \\ \dot{y} + (a\cos\psi - b\sin\psi)\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}$$

L'accélération du point P par rapport à R_0 se déduit facilement par dérivation du vecteur vitesse $\vec{V}^0(P)$, dans le même repère.

$$\vec{V}^0(P) = \frac{d^0 \vec{V}^0(P)}{dt} = \begin{cases} \ddot{x} - (a \sin \psi + b \cos \psi) \dot{\psi}^2 - (a \cos \psi - b \sin \psi) \dot{\psi}^2 \\ \ddot{y} + (a \cos \psi - b \sin \psi) \dot{\psi}^2 - (a \sin \psi + b \cos \psi) \dot{\psi}^2 \\ 0 \end{cases}$$

2.4. Centre instantané de rotation

Soient deux points A et B du solide (S) lié à un repère $R_i(O_i, x_i, y_i, z_i)$ en mouvement par rapport au repère fixe $R_0(O_0, x_0, y_0, z_0)$ lié au plan (π_0)



Comme les vitesses $\vec{V}^0(A)$ et $\vec{V}^0(B)$ appartiennent au solide et au plan (π_0) , nous pouvons écrire d'après la loi de distribution des vitesses :

$$\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_i^0 \wedge \vec{AB}$$

où $\vec{\Omega}_i^0$ est la vitesse de rotation du repère R_i par rapport au repère R_0 . Le vecteur vitesse de rotation instantané est normal au plan (π_0) , ce qui entraîne que l'axe instantané de rotation $\Delta(t)$ est perpendiculaire à (π_0) .

L'étude sur les torseurs a montré que quel que soit le point pris sur l'axe central d'un torseur, le moment en ce point est parallèle à l'axe central.

Dans le cas d'un torseur cinématique, tous les points de l'axe instantané de rotation (axe central) ont une vitesse parallèle à cet axe. De plus dans le cas d'un mouvement plan sur plan tous les points du solide ont leurs vitesses parallèles au plan (π_0). Par conséquent, le point d'intersection I entre le plan (π_0) et l'axe instantané de rotation $\Delta(t)$, a une vitesse nulle.

Ce point est appelé centre instantané de rotation : (C.I.R.)

2.4.1. Détermination analytique du centre instantané de rotation (C.I.R.)

Soit P un point quelconque du solide. La loi distribution des vitesses nous permet d'écrire :

$$\vec{V}^0(P) = \vec{V}^0(I) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{IP} = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{IP}$$

La position du C.I.R s'obtient en multipliant vectoriellement cette expression par $\vec{\Omega}_1^0$:

$$\vec{V}^0(P) \wedge \vec{\Omega}_1^0 = \left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{IP} \right) \wedge \vec{\Omega}_1^0 = \left(\vec{\Omega}_1^0 \right)^2 \vec{IP}$$

$$\text{d'où : } \vec{IP} = \frac{\vec{V}^0(P) \wedge \vec{\Omega}_1^0}{\left(\vec{\Omega}_1^0 \right)^2}$$

- le vecteur \vec{IP} est perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{V}^0(P)$ au point P ;
- il a pour module : $\|IP\| = \frac{\|\vec{V}^0(P)\|}{\|\vec{\Omega}_1^0\|}$

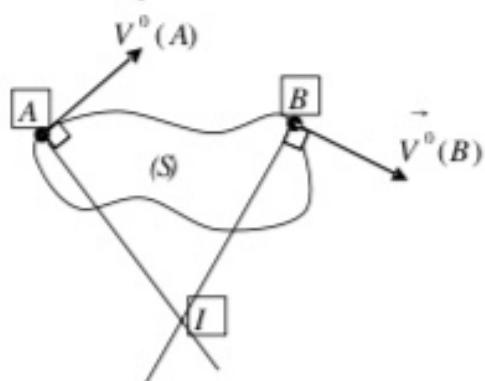
2.4.2. Détermination géométrique du centre instantané de rotation (C.I.R)

Si le point I est un centre instantané de rotation du solide (S), nous pouvons le déterminer géométriquement en connaissant la vitesse de deux points A et B du solide.

En effet nous avons :

$$\vec{V}^0(A) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{IA} \Rightarrow \vec{V}^0(A) \perp \vec{IA}$$

$$\vec{V}^0(B) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{IB} \Rightarrow \vec{V}^0(B) \perp \vec{IB}$$



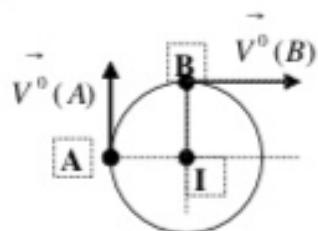
Le centre instantané de rotation (**C.I.R.**) se trouve à l'intersection des normales aux vecteurs vitesses $\vec{V}^0(A)$ à partir du point A et $\vec{V}^0(B)$ à partir du point B . Cette méthode est souvent utilisée pour vérifier les coordonnées du (**C.I.R.**) déterminé déjà analytiquement.

Dans le cas particulier d'un disque, il est très facile de le vérifier :

Les vitesses aux points A et B sont tangentes aux disques.

En traçant les deux perpendiculaires aux vitesses

Respectivement en A et B , leur point d'intersection est le point I centre du disque ayant une vitesse nulle.



3. Base et roulante

Le centre instantané de rotation (**C.I.R.**) est un point mobile par rapport à R_0 et par rapport au repère R_1 lié au solide. Il décrit deux courbes différentes dans les deux repères, on appelle alors :

- **Base du mouvement** : du plan (P_S) du solide sur le plan (π_0), la trajectoire du point I dans le repère R_0 ;
- **Roulante du mouvement** : du plan (P_S) du solide sur le plan (π_0), la trajectoire du point I dans le repère R_1 ;

Nous pouvons exprimer le vecteur vitesse du point I dans le repère R_0 , nous avons en effet :

$$\vec{V}^0(I) = \frac{d^0 \vec{O}}{dt} = \frac{d^0(\vec{O}_1 + \vec{O}_1 I)}{dt} = \vec{V}^0(O_1) + \frac{d^0 \vec{O}_1 I}{dt}$$

En introduisant les coordonnées du point I dans le repère R_1 tel que :

$$\vec{O}_1 I = \vec{x}_I \vec{x}_1 + \vec{y}_I \vec{y}_1 = \begin{cases} x_I \\ y_I \\ 0 \end{cases};$$

Par la formule de la cinématique du solide nous pouvons écrire :

$$\frac{d^0 \vec{O}_1 I}{dt} = \frac{d^1 \vec{O}_1 I}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{O}_1 I = \vec{V}^1(I) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{O}_1 I$$

on obtient finalement $\vec{V}^0(I) = \vec{V}^1(I) + \vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{O}_1 I$

Comme le point I est le centre instantané de rotation, son expression analytique est donnée

$$\text{par : } \vec{O}_1 I = \frac{\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(O_1)}{\left(\vec{\Omega}_1^0\right)^2} \Rightarrow \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{O}_1 I = -\vec{V}^0(O_1)$$

$$\text{On obtient alors : } \underline{\vec{V}^0(I) = \vec{V}^1(I)}$$

Cette égalité indique que la vitesse du centre instantané de rotation est la même dans les deux repères à R_0 et R_1 .

Il en résulte que la base et la roulante sont deux courbes tangentes en I à chaque instant.

L'égalité des vitesses au point I dans les deux repères montre que la roulante roule sans glisser sur la base.

3.1. Équation de la base

La position du point O_1 centre du repère R_1 lié au solide par rapport au repère fixe R_0 est

$$\text{définie par ses coordonnées dans le repère } R_0 : \vec{O}_1 = \vec{x}x_0 + \vec{y}y_0 = \begin{cases} x \\ y \\ 0 \end{cases} ;$$

$$\text{La position du point } I \text{ dans le repère } R_1 \text{ est donnée par : } \vec{O}_1 I = \frac{\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(O_1)}{\left(\vec{\Omega}_1^0\right)^2} \text{ qui s'écrit}$$

$$\text{aussi sous la forme : } \vec{O}_1 I = \frac{\dot{\psi} \vec{z}_0 \wedge \vec{V}^0(O_1)}{\dot{\psi}^2}, \text{ or nous avons :}$$

$$\vec{V}^0(O_1) = \frac{d^0 \vec{O}_1}{dt} = \frac{d^0 \vec{O}_1}{d\psi} \frac{d^0 \psi}{dt} = \dot{\psi} \frac{d^0 \vec{O}_1}{d\psi} = \dot{\psi} \frac{d}{d\psi} \vec{x}_0 + \dot{\psi} \frac{d}{d\psi} \vec{y}_0$$

En remplaçant l'expression de $\vec{V}^0(O_1)$ dans celle de $\vec{O}_1 I$ nous obtenons :

$$\vec{O}_1 I = \frac{\dot{\psi} \vec{z}_0 \wedge \vec{V}^0(O_1)}{\dot{\psi}^2} = \vec{z}_0 \wedge \left(\frac{d}{d\psi} \vec{x}_0 + \frac{d}{d\psi} \vec{y}_0 \right) = \frac{d}{d\psi} \vec{y}_0 - \frac{d}{d\psi} \vec{x}_0$$

Ainsi le vecteur position du point I dans le repère R_0 est exprimé par la relation :

$$\vec{O_I} = \vec{O_{i_1}} + \vec{O_{i_1}I} = (x - \frac{d}{d\Psi} \vec{x}_0) + (y + \frac{d}{d\Psi} \vec{y}_0)$$

Cette équation définit la trajectoire (appelée base) du centre instantané de rotation dans le

$$\text{repère } R_0. \quad \vec{O_I} = \begin{cases} X_I(t) = x - \frac{d}{d\Psi} \vec{x}_0 \\ Y_I(t) = y + \frac{d}{d\Psi} \vec{y}_0 \\ Z_I(t) = 0 \end{cases}$$

3.2. Equation de la roulante

Pour obtenir la trajectoire (*appelée roulante*) dans le repère R_1 lié au solide, il suffit d'exprimer les vecteurs unitaires du repère R_0 en fonction de ceux de R_1 . En effet, nous avons d'après la matrice de passage déterminée précédemment :

$$\vec{x}_0 = \cos\Psi \vec{x}_1 - \sin\Psi \vec{x}_1^\perp$$

$$\vec{y}_0 = \sin\Psi \vec{x}_1 + \cos\Psi \vec{x}_1^\perp$$

$$\vec{O_I I} = \frac{\dot{\Psi} \vec{z}_0 \wedge \vec{V^0(O_1)}}{\dot{\Psi} z} = \vec{z}_0 \wedge \left(\frac{d}{d\Psi} \vec{x}_0 + \frac{d}{d\Psi} \vec{y}_0 \right) = \frac{d}{d\Psi} \vec{y}_0 - \frac{d}{d\Psi} \vec{x}_0$$

Alors la trajectoire dans le repère R_1 aura pour équations paramétriques :

$$\vec{O_I I} = \begin{cases} X_{II}(t) = \frac{d}{d\Psi} \sin\Psi - \frac{d}{d\Psi} \cos\Psi \\ Y_{II}(t) = \frac{d}{d\Psi} \cos\Psi y + \frac{d}{d\Psi} \sin\Psi \\ Z_{II}(t) = 0 \end{cases}$$

En connaissant la matrice de passage de R_0 vers R_1 , il est très facile de déduire la trajectoire de la roulante à partir de la base où inversement.

EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 01:

Une barre homogène de longueur $\mathbf{OM} = \mathbf{L}$, de centre \mathbf{G} est en mouvement dans un repère orthonormé fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On définit deux repères R_1 et R_2 tel que :

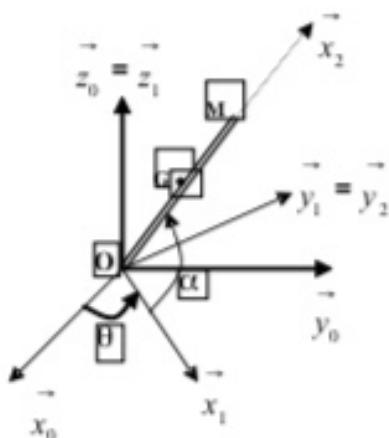
$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ repère mobile tel que : $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$;

$R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié à la barre tel que : $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$ et $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$;

On prendra R_1 comme repère de projection et comme repère relatif.

Déterminer :

1. La vitesse de rotation instantanée $\vec{\Omega}_2^0$ du repère R_2 par rapport à R_0 ;
2. La vitesse $\vec{V}^0(M)$ et l'accélération $\vec{\gamma}^0(M)$ par dérivation ;
3. La vitesse $\vec{V}^0(G)$ et l'accélération $\vec{\gamma}^0(G)$ par composition de mouvement ;
4. Le moment cinétique $\vec{\sigma}^0(O)$ au point \mathbf{O} exprimé dans R_1 ;
5. Le moment dynamique $\vec{\delta}^0(O)$ au point \mathbf{O} exprimé dans R_1 ;
6. L'énergie cinétique de la barre.



Solution :

1. Vitesse de rotation instantanée $\vec{\Omega}_2^0$ du repère R_2 par rapport à R_0 ;

$$\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = -\dot{\alpha} \vec{y}_1 + \dot{\theta} \vec{z}_1 = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1}, \quad \vec{\Omega}_1^0 = -\dot{\alpha} \vec{y}_1 \text{ car: } \vec{x}_1 \wedge \vec{z}_1 = -\vec{y}_1$$

2. Vitesse $\vec{V}^0(M)$ et l'accélération $\vec{\gamma}^0(M)$ par dérivation ;

2.1. Vitesse

$$\vec{V}^0(M) = \frac{d^0 \vec{OM}}{dt} = \frac{d^1 \vec{OM}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OM}$$

$$\text{Nous avons: } \vec{OM} = \begin{cases} 2L \cos \alpha \\ 0 \\ 2L \sin \alpha \end{cases}_{R_1} \Rightarrow \frac{d^1 \vec{OM}}{dt} = \begin{cases} -2L \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \\ 2L \dot{\alpha} \cos \alpha \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{V}^0(M) = \begin{cases} -2L \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \\ 2L \dot{\alpha} \cos \alpha \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} 2L \cos \alpha \\ 0 \\ 2L \sin \alpha \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} -2L \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 2L \dot{\theta} \cos \alpha \\ 2L \dot{\alpha} \cos \alpha \end{cases}_{R_1}$$

2.2. Accélération

$$\vec{\gamma}^0(M) = \frac{d^0 \vec{V}^0(M)}{dt} = \frac{d^1 \vec{V}^0(M)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(M)$$

$$\vec{\gamma}^0(M) = \begin{cases} -2L(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \\ 2L(\dot{\theta} \cos \alpha - \dot{\theta} \dot{\alpha} \sin \alpha) \\ 2L(\dot{\alpha} \cos \alpha - \alpha^2 \sin \alpha) \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} -2L \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 2L \dot{\theta} \cos \alpha \\ 2L \dot{\alpha} \cos \alpha \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\gamma}^0(M) = \begin{cases} -2L(\ddot{\alpha} \sin \alpha + (\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2) \cos \alpha) \\ 2L(\ddot{\theta} \cos \alpha - 2\dot{\theta} \dot{\alpha} \sin \alpha) \\ 2L(\dot{\alpha} \cos \alpha - \alpha^2 \sin \alpha) \end{cases}_{R_1}$$

3. Vitesse $\vec{V}^0(G)$ et accélération $\vec{\gamma}^0(G)$ par composition de mouvement ;

3.1. Vitesse

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^1(G) + \vec{V}_1^0(G), \text{ avec : } \vec{OG} = \begin{cases} L \cos \alpha \\ 0 \\ L \sin \alpha \end{cases}_{R_1} \Rightarrow \vec{V}^1(G) = \frac{d^1 \vec{OG}}{dt} = \begin{cases} -L \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \\ L \dot{\alpha} \cos \alpha \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{V}_1^0(G) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OG} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} L \cos \alpha \\ 0 \\ L \sin \alpha \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} 0 \\ L \dot{\theta} \cos \alpha \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{V}^0(G) = \begin{cases} -L \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \\ L \dot{\alpha} \cos \alpha \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ L \dot{\theta} \cos \alpha \\ 0 \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} -L \dot{\alpha} \sin \alpha \\ L \dot{\theta} \cos \alpha \\ L \dot{\alpha} \cos \alpha \end{cases}_{R_1}$$

3.2. Accélération

$$\vec{\gamma}^0(G) = \vec{\gamma}^1(G) + \vec{\gamma}_1^0(G) + \vec{\gamma}_c(G)$$

$$\vec{\gamma}^1(G) = \frac{d^1 \vec{V}^1(G)}{dt} = \begin{cases} -L(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \\ 0 \\ L(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\gamma}_1^0(G) = \vec{\gamma}^0(O) + \frac{d^0 \vec{\Omega}_1^0}{dt} \wedge \vec{OG} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge (\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OG}) \quad \text{avec : } \vec{\gamma}^0(O) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{d^0 \vec{\Omega}_1^0}{dt} = \frac{d^1 \vec{\Omega}_1^0}{dt}$$

$$\vec{\gamma}_1^0(G) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} L \cos \alpha \\ 0 \\ L \sin \alpha \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} 0 \\ L \dot{\theta}^2 \cos \alpha \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\gamma}_c(G) = 2 \left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(G) \right) = 2 \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} -L \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \\ L \dot{\alpha} \cos \alpha \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} 0 \\ -2L\dot{\alpha}\dot{\theta} \sin \alpha \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

La somme de tous les termes donne :

$$\vec{\gamma}^0(G) = \begin{cases} -L(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \\ 0 \\ L(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \end{cases} \quad R_i \quad \begin{cases} -L\dot{\theta}^2 \cos \alpha \\ L\dot{\theta} \cos \alpha \\ 0 \end{cases} \quad R_i \quad \begin{cases} 0 \\ -2L\dot{\alpha}\dot{\theta} \sin \alpha \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}^0(M) = \begin{cases} -L(\ddot{\alpha} \sin \alpha + (\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2) \cos \alpha) \\ L\dot{\theta} \cos \alpha - 2\dot{\theta}\dot{\alpha} \sin \alpha \\ L(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \end{cases} \quad R_i$$

4. Moment cinétique $\vec{\sigma}^0(O)$ au point O exprimé dans R_i ;

Le moment cinétique au point O dans le repère R_0 est donné par :

$$\vec{\sigma}^0(O) = I_G \vec{\Omega}_2^0 + \vec{OG} \wedge \vec{m} V^0(G) \quad \text{avec : } I_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_2^0 = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{cases} \quad R_i$$

$$\vec{\sigma}^0(O) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} R_i \begin{cases} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{cases} + R_i \begin{cases} L \cos \alpha \\ 0 \\ L \sin \alpha \end{cases} \wedge m \begin{cases} -L\dot{\alpha} \sin \alpha \\ L\dot{\theta} \cos \alpha \\ L\dot{\alpha} \cos \alpha \end{cases} R_i$$

$$\vec{\sigma}^0(O) = \begin{cases} 0 \\ -\frac{mL^2}{3}\dot{\alpha} \\ \frac{mL^2}{3}\dot{\theta} \end{cases} + R_i \begin{cases} -mL^2\dot{\theta} \cos \alpha \sin \alpha \\ -mL^2\dot{\alpha} \\ mL^2\dot{\theta} \cos^2 \alpha \end{cases} = R_i \begin{cases} -mL^2\dot{\theta} \cos \alpha \sin \alpha \\ -\frac{4mL^2}{3}\dot{\alpha} \\ mL^2\dot{\theta} \left(\frac{1}{3} + \cos^2 \alpha \right) \end{cases}$$

5. Moment dynamique $\vec{\delta}^0(O)$ au point O exprimé dans R_i ;

Il est déterminé à partir du moment cinétique par la relation :

$$\vec{\delta}^0(O) = \frac{d^0 \vec{\sigma}^0(O)}{dt} = \frac{d^1 \vec{\sigma}^0(O)}{dt} \wedge \vec{\Omega}_i^0 \wedge \vec{\sigma}^0(O)$$

$$\frac{d^1 \vec{\sigma}^0(O)}{dt} = \begin{cases} -mL^2 \left(\ddot{\theta} \cos \alpha \sin \alpha - \dot{\theta} \dot{\alpha} \sin^2 \alpha + \dot{\theta} \dot{\alpha} \cos^2 \alpha \right) \\ \quad - \frac{4mL^2}{3} \ddot{\alpha} \\ R_i \left(mL^2 \left(\ddot{\theta} \left(\frac{1}{3} + \cos^2 \alpha \right) - 2\dot{\theta} \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \alpha \right) \right) \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_i^0 \wedge \vec{\sigma}^0(O) = \begin{cases} 0 & \begin{cases} -mL^2 \dot{\theta} \cos \alpha \sin \alpha \\ - \frac{4mL^2}{3} \dot{\alpha} \end{cases} \\ \dot{\theta} \wedge \theta & \begin{cases} - \frac{4mL^2}{3} \dot{\alpha} \dot{\theta} \\ -mL^2 \dot{\theta}^2 \cos \alpha \sin \alpha \end{cases} \\ 0 & 0 \end{cases}$$

on déduit :

$$\vec{\delta}^0(O) = \begin{cases} -mL^2 \left(\ddot{\theta} \cos \alpha \sin \alpha - \dot{\theta} \dot{\alpha} \sin^2 \alpha + \dot{\theta} \dot{\alpha} \cos^2 \alpha - \frac{4}{3} \dot{\alpha} \dot{\theta} \right) \\ -mL^2 \left(\frac{4}{3} \ddot{\alpha} + \dot{\theta}^2 \cos \alpha \sin \alpha \right) \\ R_i \left(mL^2 \left(\ddot{\theta} \left(\frac{1}{3} + \cos^2 \alpha \right) - 2\dot{\theta} \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \alpha \right) \right) \end{cases}$$

6. Energie cinétique de la barre.

L'énergie cinétique totale a pour expression :

$$E_C = \frac{1}{2} m \left(\vec{V}^0(G) \right)^2 + \vec{\Omega}_i^0 \cdot \vec{J}_G \cdot \vec{\Omega}_i^0$$

$$E_C = \frac{1}{2} mL^2 \left(\dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha + \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha \right) + \frac{1}{2} \left(0, -\dot{\alpha}, \dot{\theta} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & mL^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & mL^2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Solution :

$R_0(x_0, y_0, z_0)$ repère fixe ; et aussi repère de projection

$$R_1(x_1, y_1, z_1) : \vec{z}_1 = \vec{z}_0 \text{ et } \vec{\Omega}_1^0 = \vec{0}$$

$$R_2(x_2, y_2, z_2) : \vec{x}_2 = \vec{x}_0 \text{ et } \vec{\Omega}_2^0 = \dot{\alpha} \vec{x}_0$$

$$R_3(x_3, y_3, z_3) : \vec{x}_3 = -\vec{x}_0 \text{ et } \vec{\Omega}_3^0 = -\dot{\beta} \vec{x}_0$$

$$\vec{OI} = \begin{cases} 0 \\ b\cos\alpha \\ 0 \end{cases}; \quad \vec{OG}_1 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ R + 2b\cos\alpha \end{cases}; \quad \vec{OG}_2 = \begin{cases} 0 \\ b\sin\alpha \\ R + b\cos\alpha \end{cases}; \quad \vec{OG}_3 = \begin{cases} 0 \\ 2b\sin\alpha \\ R \end{cases}$$

1. Vitesses et accélérations absolues des points G_i avec $i=1,2,3$

1.1. Vitesses par dérivation:

$$\vec{V}^0(G_1) = \frac{d^0 \vec{OG}_1}{dt} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -2b\dot{\alpha}\sin\alpha \end{cases}; \quad \vec{V}^0(G_2) = \frac{d^0 \vec{OG}_2}{dt} = \begin{cases} 0 \\ b\ddot{\alpha}\cos\alpha \\ -b\dot{\alpha}\sin\alpha \end{cases}$$

$$\vec{V}^0(G_3) = \frac{d^0 \vec{OG}_3}{dt} = \begin{cases} 0 \\ 2b\ddot{\alpha}\cos\alpha \\ 0 \end{cases}$$

1.1. Accélération par dérivation:

$$\vec{\gamma}^0(G_1) = \frac{d^0 \vec{V}^0(G_1)}{dt} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -2b\ddot{\alpha}\sin\alpha - 2b\dot{\alpha}^2\cos\alpha \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}^0(G_2) = \frac{d^0 \vec{V}^0(G_2)}{dt} = \begin{cases} 0 \\ b\ddot{\alpha}\cos\alpha - b\dot{\alpha}^2\sin\alpha \\ -b\dot{\alpha}\sin\alpha - b\dot{\alpha}^2\cos\alpha \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}^0(G_3) = \frac{d^0 \vec{V}^0(G_3)}{dt} = \begin{cases} 0 \\ 2b\ddot{\alpha}\cos\alpha - 2b\dot{\alpha}^2\sin\alpha \end{cases}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mL^2\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha\right) + \frac{mL^2}{6}\dot{\alpha}^2 + \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{2}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 + \frac{mL^2}{2}\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{3} + \cos^2 \alpha\right)$$

Exercice 02:

On considère le système matériel suivant (Σ) composé des solides suivants:

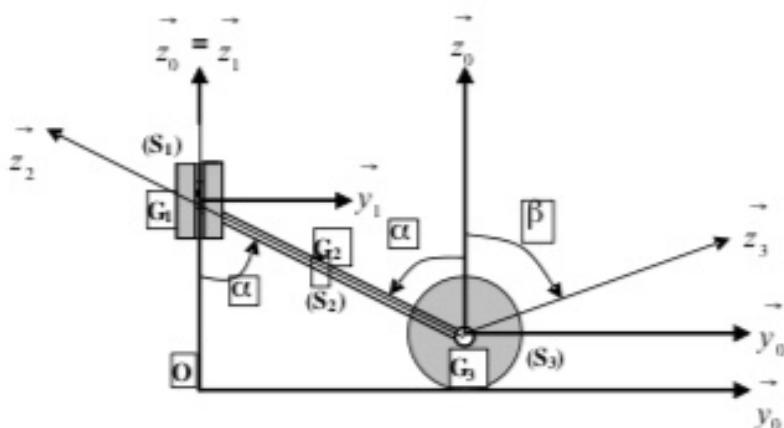
(S₁) : est un coulisseau de masse m_1 , de centre de masse G_1 lié au repère R_1 en mouvement de translation rectiligne par rapport à un repère fixe $R_0(x_0, y_0, z_0)$ suivant l'axe \vec{z}_0 .

(S₂) : est une barre uniforme de longueur $2b$, de masse m_2 , de centre de masse G_2 lié à R_2

(S₃) : est un disque homogène de rayon R , de masse m_3 , de centre de masse G_3 lié à R_3

$$\text{On donne les tenseurs d'inertie : } I_{G_2}(S_2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{R_2} ; \quad I_{G_3}(S_3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{R_3}$$

1. Déterminer les vitesses et les accélérations des points G_i avec $i = 1, 2, 3$
2. Calculer les moments cinétiques $\vec{\sigma}_{G_i}(S_i/R_0)$ des (S_i) en G_i avec $i = 1, 2, 3$;
3. Calculer les moments dynamiques $\vec{\delta}_{G_i}(S_i/R_0)$ des (S_i) en G_i avec $i = 1, 2, 3$;
4. En déduire le moment dynamique du système au point G_1 : $\vec{\delta}_{G_1}(\Sigma/R_0)$ exprimé dans R_0 ;
5. Calculer l'énergie cinétique du système $E_c(\Sigma/R_0)$ par rapport à R_0 .



2. Moments cinétiques $\vec{\sigma}_{G_i}(S_i / R_0)$ **des** (S_i) **en** G_i **avec** $i = 1,2,3$;

Les moments cinétiques des trois solides en leurs centres d'inertie sont donnés par :

$$\vec{\sigma}_{G_1}(S_1 / R_0) = \overrightarrow{G_1 G_1} \wedge m_1 \vec{V^0}(G_1) + I_1 \vec{\Omega}_1^0 = \vec{0}$$

$$\vec{\sigma}_{G_2}(S_2 / R_0) = \overrightarrow{G_2 G_2} \wedge m_2 \vec{V^0}(G_2) + I_2 \vec{\Omega}_2^0 = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A_2 \dot{\alpha} \vec{x}_0$$

$$\vec{\sigma}_{G_3}(S_3 / R_0) = \overrightarrow{G_3 G_3} \wedge m_3 \vec{V^0}(G_3) + I_3 \vec{\Omega}_3^0 = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_3 \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -A_3 \dot{\beta} \vec{x}_0$$

3. Moments dynamiques $\vec{\delta}_{G_i}(S_i / R_0)$ **des** (S_i) **en** G_i **avec** $i = 1,2,3$;

Les moments dynamiques se déduisent par la dérivée des moments cinétiques :

$$\vec{\delta}_{G_1}(S_1 / R_0) = \frac{d^1 \vec{\sigma}_{G_1}(S_1 / R_0)}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{\delta}_{G_2}(S_2 / R_0) = \frac{d^2 \vec{\sigma}_{G_2}(S_2 / R_0)}{dt} = A_2 \ddot{\alpha} \vec{x}_0$$

$$\vec{\delta}_{G_3}(S_3 / R_0) = \frac{d^2 \vec{\sigma}_{G_3}(S_3 / R_0)}{dt} = -A_3 \ddot{\beta} \vec{x}_0$$

4. Moment dynamique du système au point G_1 : $\vec{\delta}_{G_1}(\sum / R_0)$ exprimé dans R_0 ;

Le moment dynamique du système au point G_1 est égal à la somme des moments dynamiques des trois solides au même point.

$$\vec{\delta}_{G_1}(\sum / R_0) = \vec{\delta}_{G_1}(S_1 / R_0) + \vec{\delta}_{G_1}(S_2 / R_0) + \vec{\delta}_{G_1}(S_3 / R_0)$$

$$\vec{\delta}_{G_1}(\sum / R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_{G_1}(S_1 / R_0)}{dt} + \frac{d^0 \vec{\sigma}_{G_1}(S_2 / R_0)}{dt} + \frac{d^0 \vec{\sigma}_{G_1}(S_3 / R_0)}{dt}$$

$$\frac{d^0 \vec{\sigma}_{G_1}(S_1 / R_0)}{dt} = \vec{0}$$

Calculons d'abord les moments cinétiques des solides (S_2) et (S_3) en G_i en utilisant la formule de transport :

$$\vec{\sigma}_{G_1}(S_2/R_0) = \vec{\sigma}_{G_2}(S_2/R_0) + \overrightarrow{G_1 G_2} \wedge m_2 \vec{V^0}(G_2)$$

$$\vec{\sigma}_{G_1}(S_2/R_0) = A_2 \dot{\alpha} \vec{x}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ b \sin \alpha \\ -b \cos \alpha \end{pmatrix} \wedge m_2 \begin{pmatrix} 0 \\ b \dot{\alpha} \cos \alpha \\ -b \dot{\alpha} \sin \alpha \end{pmatrix} = \left(A_2 \dot{\alpha} + m_2 b^2 \dot{\alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right) \vec{x}_0$$

$$\vec{\sigma}_{G_1}(S_2/R_0) = \left(A_2 \dot{\alpha} + m_2 b^2 \dot{\alpha} \cos 2\alpha \right) \vec{x}_0$$

$$\vec{\sigma}_{G_1}(S_3/R_0) = \vec{\sigma}_{G_3}(S_3/R_0) + \overrightarrow{G_1 G_3} \wedge m_3 \vec{V^0}(G_3)$$

$$\vec{\sigma}_{G_1}(S_3/R_0) = -A_3 \dot{\beta} \vec{x}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2b \sin \alpha \\ -2b \cos \alpha \end{pmatrix} \wedge m_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2b \dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-A_3 \dot{\beta} + 4m_3 b^2 \dot{\alpha} \cos^2 \alpha \right) \vec{x}_0$$

$$\vec{\sigma}_{G_1}(S_3/R_0) = \left(-A_3 \dot{\beta} + 4m_3 b^2 \dot{\alpha} \cos^2 \alpha \right) \vec{x}_0$$

Les moments dynamiques se déduisent facilement par dérivation des deux expressions:

$$\frac{d^0 \vec{\sigma}_{G_1}(S_2/R_0)}{dt} = \left(A_2 \ddot{\alpha} + m_2 b^2 (\ddot{\alpha} \cos 2\alpha - 2\dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha) \right) \vec{x}_0$$

$$\frac{d^0 \vec{\sigma}_{G_1}(S_3/R_0)}{dt} = \left(-A_3 \ddot{\beta} + 4m_3 b^2 \ddot{\alpha} \cos^2 \alpha - 8m_3 b^2 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \vec{x}_0$$

$$= \left(-A_3 \ddot{\beta} + 4m_3 b^2 \ddot{\alpha} \cos^2 \alpha - 4m_3 b^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha \right) \vec{x}_0$$

Le moment dynamique du système est la somme des deux expressions :

$$\vec{\delta}_{G_1}(\sum / R_0) = \left(A_2 \ddot{\alpha} + m_2 b^2 (\ddot{\alpha} \cos 2\alpha - 2\dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha) \right) \vec{x}_0$$

$$+ \left(-A_3 \ddot{\beta} + 4m_3 b^2 \ddot{\alpha} \cos^2 \alpha - 4m_3 b^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha \right) \vec{x}_0$$

$$\vec{\delta}_{G_1}(\sum / R_0) = \left(A_2 \ddot{\alpha} - A_3 \ddot{\beta} + m_2 b^2 (\ddot{\alpha} \cos 2\alpha - 2\dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha) + 4m_3 b^2 (\ddot{\alpha} \cos^2 \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha) \right) \vec{x}_0$$

5. Energie cinétique du système $E_c(\Sigma/R_0)$ par rapport à R_0 .

$$E_c(\sum / R_0) = E_c(S_1 / R_0) + E_c(S_2 / R_0) + E_c(S_3 / R_0)$$

$$E_c(S_1 / R_0) = \frac{1}{2} m_1 \left(\vec{V^0}(G_1) \right)^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega_0}^T J_{G1} \vec{\Omega_0} = \frac{1}{2} m_1 4b^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha$$

$$E_c(S_2 / R_0) = \frac{1}{2} m_2 \left(\vec{V^0}(G_2) \right)^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega_0}^T J_{G2} \vec{\Omega_0} = \frac{1}{2} m_2 b^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} A_2 \dot{\alpha}^2$$

$$E_c(S_3 / R_0) = \frac{1}{2} m_3 \left(\vec{V^0}(G_3) \right)^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega_0}^T J_{G3} \vec{\Omega_0} = \frac{1}{2} m_3 4b^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} A_3 \dot{\beta}^2$$

$$E_c(\sum / R_0) = \frac{1}{2} \left(b^2 (4m_1 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha + m_2 \dot{\alpha}^2 + 4m_3 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha) + A_2 \dot{\alpha}^2 + A_3 \dot{\beta}^2 \right)$$

THEOREMES FONDAMENTAUX DE LA DYNAMIQUE

1. Objectif de la dynamique

La dynamique permet d'analyser les liens existant entre les mouvements déjà décrits par la cinématique et les forces où actions qui leurs ont donné naissance.

Elle permet d'examiner le concept de force et d'une manière globale le concept d'efforts exercés sur un système matériel quelconque. Pour toutes ces raisons, nous sommes amenés à introduire la notion de torseur des efforts extérieurs, nécessaire à l'écriture du principe fondamental de la dynamique.

2. Notions de référentiels

A partir du principe de l'action et de la réaction et du principe fondamental de la dynamique, nous pouvons établir les théorèmes généraux de la dynamique dans un référentiel Galiléen ou non Galiléen.

En effet, un référentiel est dit Galiléen ou (absolu) si les lois de Newton exprimées dans celui-ci sont valables. Tout repère en mouvement de translation uniforme par rapport à un repère Galiléen est lui aussi Galiléen, car les accélérations constatées à partir d'un même point seront les mêmes dans les deux repères.

3. Expression de la loi fondamentale de la dynamique

Soit un système matériel (S) non isolé et soumis à des interactions dans un repère Galiléen

$\vec{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Pour ce système matériel on distingue deux types d'actions :

- Les actions mécaniques intérieures, résultant des actions d'une partie de (S) sur une autre partie de (S) ; *ces actions sont appelées forces intérieures et notées : $d\vec{F}_i$;*
- Les actions mécaniques extérieures résultant des actions du reste de l'univers (le milieu extérieur) sur (S) , *ces actions sont appelées forces extérieures et notées : $d\vec{F}_e$.*

Il faut choisir convenablement les conditions aux limites du système pour pouvoir classer les actions (forces) intérieures et extérieures.

En un point quelconque M du système (S) , la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

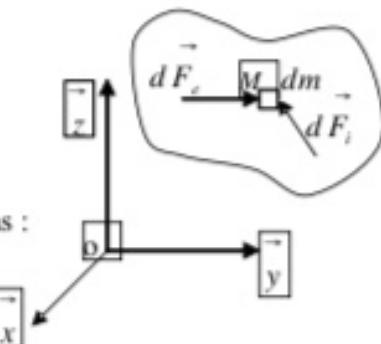
$$d\vec{F}_i + d\vec{F}_e = \vec{\gamma}(M)dm$$

dm : élément de masse au voisinage du point M ;

$\vec{\gamma}(M)$: accélération du point M .

En sommant sur l'ensemble du système matériel, nous avons :

$$\int_S d\vec{F}_i + \int_S d\vec{F}_e = \int_S \vec{\gamma}(M)dm$$



En un point A quelconque de l'espace les moments, de ces forces, sont donnés par :

$$\int_S AP^\wedge d\vec{F}_i + \int_S AP^\wedge d\vec{F}_e = \int_S AP^\wedge \vec{\gamma}(M)dm$$

Nous supposons que le système matériel (S) n'échange pas de matière avec d'autres systèmes et que sa masse totale est constante.

Les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur (S) sont représentées par un torseur $\boxed{\tau}_{F_{ext} \cdot A}$: appelé torseur des forces extérieures dont les éléments de réduction au point A

sont : $\boxed{\tau}_{F_{ext} \cdot A} = \begin{cases} \vec{F}_{ext} \\ \vec{M}_{Aext} \end{cases}$

\vec{F}_{ext} : est la résultante des forces extérieures s'exerçant sur le système (S)

\vec{M}_{Aext} : est le moment au point A des forces extérieures s'exerçant sur le système (S) .

Le principe fondamental de la dynamique montre que dans tout référentiel Galiléen, le torseur dynamique \boxed{D}_A du système (S) est égal au torseur des forces extérieures $\boxed{\tau}_{F_{ext} \cdot A}$ calculé au même point A .

Les éléments de réduction du torseur dynamique \boxed{D}_A du système (S) dans le repère Galiléen

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ sont : $\boxed{D}_A = \begin{cases} \vec{D} \\ \vec{\delta}_A \end{cases}$

\vec{D} : la résultante dynamique ; $\vec{\delta}_A$: le moment dynamique au point A .

L'égalité des deux torseurs induit l'égalité de leurs éléments de réduction. Ce principe équivaut à la généralisation des lois de Newton. Les éléments des deux torseurs peuvent être calculés séparément et ensuite faire l'égalité des expressions obtenues.

Le point A par rapport auquel on calcule les moments est un point quelconque, il faut faire un choix judicieux pour faciliter l'écriture des équations. Souvent dans les problèmes de mécanique, on choisit le centre de masse du système car le moment d'inertie intervenant dans les calculs est plus facile à déterminer.

3.1. Théorème de la résultante dynamique

Soit un système matériel (S) en mouvement dans un repère Galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et soumis à des actions extérieures. *La résultante dynamique du système matériel (S) est égale à la résultante des actions (forces) mécaniques extérieures.*

$$\vec{D}(S/R_0) = m\vec{\gamma}^0(G/R_0) = \sum \vec{F}_{ext}$$

G : est le centre de masse du système.

La résultante des forces extérieures est égale à la masse du système par l'accélération de son centre d'inertie.

3.2. Théorème du moment dynamique

Soit un système matériel (S) en mouvement dans un repère Galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et soumis à des actions extérieures. *Le moment dynamique du système matériel (S) en un point A quelconque est égale au moment des actions (forces) mécaniques extérieures au même point A .*

$$\vec{\delta}_A(S/R_0) = \vec{M}_A(S/R_0)$$

Au centre d'inertie du système cette égalité s'écrirait :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \vec{M}_G(S/R_0) = \frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt}$$

Comme nous l'avons déjà montré précédemment, le moment cinétique au point G centre d'inertie du système est indépendant du repère dans lequel il est mesuré, alors il est souvent plus simple d'effectuer le calcul des moments dynamiques au centre d'inertie des systèmes.

Remarque :

Le moment dynamique d'un système composé est égal à la somme des moments dynamiques des éléments qui le compose par rapport au même point.

3.3. Equations scalaires déduites du principe fondamental

Les équations vectorielles de la résultante et du moment dynamique conduisent chacune à trois équations scalaires, soit pour les deux à six équations scalaires pour un système matériel donné.

Le choix du repère pour expliciter l'équation de la résultante dynamique est le choix du point où sera calculé le moment dynamique doivent être judicieux de manière à simplifier l'écriture mathématique des équations scalaires.

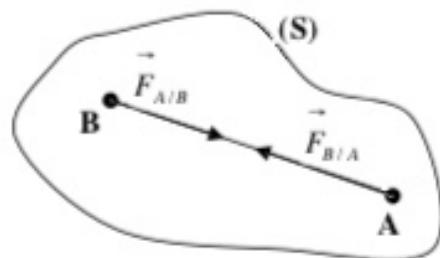
Ces équations scalaires sont des équations différentielles de second ordre et en générale non linéaires. Elles contiennent les caractéristiques d'inertie et les données géométriques du système ainsi que les composantes d'actions mécaniques appliquées au système.

4. Principe de l'action et de la réaction

Deux points A et B quelconque d'un système matériel (S) sont en interaction, ils s'influencent mutuellement par les actions et les réactions de l'un sur l'autre.

$\vec{F}_{A/B}$: action de A sur B

$\vec{F}_{B/A}$: action de B sur A



Ces deux actions s'équilibrivent, le principe de l'action et de la réaction se traduit par

$$\text{l'équation : } \vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = \vec{0}$$

Cette expression signifie que les actions sont portées par la droite qui joint les deux points A et B , on peut écrire alors : $\vec{F}_{A/B} = \lambda \vec{AB}$ et $\vec{F}_{B/A} = \lambda \vec{BA}$

$$\vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = \lambda \vec{AB} + \lambda \vec{BA} = \lambda (\vec{AB} - \vec{AB}) = \vec{0}$$

4.1. Théorème de l'action et de la réaction

Soient deux systèmes matériels (S_1) et (S_2) en mouvement dans un référentiel Galiléen R_0 .

Appelons (S) le système constitué de la réunion des deux systèmes : $(S) = (S_1) \cup (S_2)$

Le torseur des forces extérieures s'exerçant sur (S_1) se décompose en :

- $\boxed{\tau}_{F_{ext}1}$: résultant des actions du milieu extérieur (S) sur (S_1) ;
- $\boxed{\tau}_{12}$: résultant des actions de (S_2) sur (S_1) ;

Le torseur des forces extérieures s'exerçant sur (S_2) se décompose, en :

- $\boxed{\tau}_{F_{ext}2}$: résultant des actions du milieu extérieur (S) sur (S_2) ;
- $\boxed{\tau}_{21}$: résultant des actions de (S_1) sur (S_2) ;

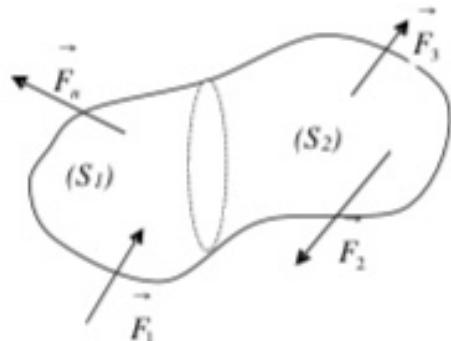
Appliquons le principe fondamental de la dynamique dans le repère Galiléen R_0 aux différents systèmes :

- à (S_1) : $\boxed{D}_1 = \tau_{F_{ext}1} + \boxed{\tau}_{12}$
- à (S_2) : $\boxed{D}_2 = \tau_{F_{ext}2} + \boxed{\tau}_{21}$
- à (S) : $\boxed{D} = \tau_{F_{ext}1} + \tau_{F_{ext}2}$

Sachant que : $\boxed{D} = \boxed{D}_1 + \boxed{D}_2$

en les remplaçant par leurs expressions on obtient :

$$\boxed{\tau}_{F_{ext}1} + \boxed{\tau}_{F_{ext}2} = \boxed{\tau}_{F_{ext}1} + \boxed{\tau}_{21} + \boxed{\tau}_{F_{ext}2} + \boxed{\tau}_{12} \Leftrightarrow \boxed{\tau}_{12} + \boxed{\tau}_{21} = 0 \Rightarrow \tau_{21} = -\boxed{\tau}_{12}$$



Cette expression traduit le théorème de l'action et de la réaction. Pour le système matériel (S) la relation : $\boxed{\tau}_{12} + \boxed{\tau}_{21} = 0$ caractérise les actions intérieures.

D'une manière générale, lorsqu'il est possible de caractériser toutes les actions mécaniques intérieures à un système matériel (S) par un torseur $\boxed{\tau}_{int}$, celui-ci est toujours nul.

$$\boxed{\tau}_{int} = 0$$

4.2. Propriétés des forces intérieures

Le torseur des forces intérieures a comme éléments de réduction : $\boxed{\tau}_{int} = \begin{cases} \vec{R}_{int} = \vec{0} \\ \vec{M}_{A_{int}} = \vec{0} \end{cases}$

$$\vec{R}_{int} = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0} \quad \text{action réaction} \quad \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Le moment des forces intérieures en un point A quelconque de l'espace est donné par :

$$\begin{aligned}\vec{M}_{\text{int}} &= \sum_i \left(\vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{ij} + \vec{AM}_j \wedge \vec{F}_{ji} \right) = \sum_i \left(\vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{ij} + (\vec{AM}_i + \vec{MM}_j) \wedge \vec{F}_{ji} \right) \\ &= \sum_i \left(\vec{AM}_i \wedge (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) + \vec{MM}_j \wedge \vec{F}_{ji} \right) = \vec{0}\end{aligned}$$

$$\text{car } (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{MM}_j \wedge \vec{F}_{ji} = \vec{0}$$

Le torseur des forces intérieures est toujours un torseur nul : $[\tau]_{F_{\text{int}}} = 0$

5. Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non Galiléen

Soit un repère Galiléen $\vec{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et un système matériel (S) lié à un repère

$\vec{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en mouvement quelconque mais déterminé et connu par rapport à R_0 .

L'application du théorème fondamental au système matériel (S) dans son mouvement par rapport au repère Galiléen $\vec{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ se traduit par l'égalité du torseur dynamique du système et du torseur des forces extérieures en un point A quelconque et s'écrit :

$$[\vec{D}]_{A/R_0} = [\tau]_{F_{\text{ext}} A/R_0}$$

$$[\vec{D}]_{A/R_0} = \begin{cases} \vec{D} = \int \vec{\gamma}^0(M) dm \\ \vec{\delta}_A^0 = \int_A^S \vec{AM} \wedge \vec{\gamma}^0(M) dm \end{cases}$$

Nous avons vu précédemment en cinématique du solide que la loi de composition des vecteurs accélérations s'écrit :

$$\vec{\gamma}^0(M) = \vec{\gamma}^1(M) + \left(\vec{\gamma}^0(O_1) + \frac{d^0 \vec{\Omega}_0}{dt} \wedge \vec{O}_1 M + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{O}_1 M \right) + 2 \left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(M) \right)$$

Sous forme réduite cette expression s'écrit : $\vec{\gamma}^0(M) = \vec{\gamma}^1(M) + \vec{\gamma}_1^0(M) + \vec{\gamma}_c(M)$

$\vec{\gamma}^0(M)$: accélération absolue du point M ;

$\vec{\gamma}^1(M)$: accélération relative du point M ;

$\vec{\gamma}_1^0(M)$: accélération d'entraînement du point M ;

$\vec{\gamma}_c(M)$: accélération de Coriolis (ou complémentaire) du point M .

Ces trois accélérations donnent naissance à des résultantes dynamiques et à des moments dynamiques en un point A quelconque de l'espace, nous aurons ainsi les trois torseurs suivants:

$$[\underline{D}]_{A/R_0} = [\underline{D}]_{A/R_1} + [D_{ie}]_A + [D_{ic}]_A - [\tau_{ext}]_{A/R_0}$$

- Torseur dynamique du système (S) dans son mouvement relatif par rapport à R_1 :

$$[\underline{D}]_{A/R_1} = \begin{cases} \int \vec{\gamma}_1^0(M) dm \\ \int \overset{\rightarrow}{AM} \wedge \vec{\gamma}_1^0(M) dm \end{cases}$$

- Torseur des forces d'inertie d'entraînement du système (S)

$$[D_{ie}]_{A \in R_1 / R_0} = \begin{cases} \int \vec{\gamma}_1^0(M) dm \\ \int \overset{\rightarrow}{AM} \wedge \vec{\gamma}_1^0(M) dm \end{cases}$$

- Torseur des forces de Coriolis :

$$[D_{ic}]_A = \begin{cases} \int_S 2 \left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(M) \right) dm \\ \int_S \overset{\rightarrow}{AM} \wedge 2 \left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(M) \right) dm \end{cases}$$

En remplaçant les expressions des trois torseurs, nous déduisons facilement le torseur dynamique dans le repère non Galiléen R_1 :

$$[\underline{D}]_{A/R_1} = [\tau_{ext}]_{A/R_0} - [D_{ie}]_{A \in R_1 / R_0} - [D_{ic}]_A$$

Cette expression d'égalité des torseurs se traduit par deux équations vectorielles :

$$\int_S \vec{\gamma}^1(M) dm = \sum_i \vec{F}_{ext} - \int_S \vec{\gamma}_1^0(M) dm - \int_S 2 \left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(M) \right) dm$$

$$\int_S \overset{\rightarrow}{AM} \wedge \vec{\gamma}^1(M) dm = \overset{\rightarrow}{AM} \wedge \sum_i \vec{F}_{ext} - \int_S \overset{\rightarrow}{AM} \wedge \vec{\gamma}_1^0(M) dm - \int_S \overset{\rightarrow}{AM} \wedge 2 \left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(M) \right) dm$$

Les actions d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont des actions immatérielles, donc fictives qui traduisent l'influence du mouvement d'un repère non Galiléen par rapport à un repère Galiléen.

6. Théorème de l'énergie cinétique

Dans de nombreux cas, pour déterminer l'équation du mouvement d'un solide où d'un système de solide, il est plus judicieux d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique afin d'aboutir à la solution du problème mécanique.

De plus la dérivée de l'énergie cinétique est liée à la puissance des efforts intérieurs et extérieurs agissant sur le solide.

6.1. Travail et puissance d'une force

Soit un système discret composé de n particules M_i de masse m_i , mobiles dans un référentiel Galiléen $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Soit \vec{OM}_i le vecteur position dans le repère R de la particule M_i , son vecteur vitesse s'écrirait :

$$\vec{V}(M_i) = \frac{d\vec{OM}_i}{dt} \Rightarrow d\vec{OM}_i = \vec{V}(M_i)dt$$

$d\vec{OM}_i$: le vecteur déplacement élémentaire durant un temps dt

Si la particule M_i est soumise à une force \vec{F}_i , le travail élémentaire de cette force est égale à :

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{OM}_i$$

La puissance que reçoit la particule M_i est égal à :

$$P_i = \frac{dW_i}{dt} = \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{OM}_i}{dt} = \vec{F}_i \cdot \vec{V}(M_i)$$

Il faut noter que chaque terme \vec{F}_i contient les forces intérieures \vec{F}_{int} et extérieures \vec{F}_{ext} tel que : $\vec{F}_i = \vec{F}_{int} + \vec{F}_{ext}$; pour l'ensemble du système nous aurons :

$$W = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{OM}_i = \sum_i (\vec{F}_{int} + \vec{F}_{ext}) \cdot d\vec{OM}_i$$

$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{V}(M_i) = \sum_i (\vec{F}_{int} + \vec{F}_{ext}) \cdot \vec{V}(M_i)$$

6.2. Théorème de l'énergie cinétique

L'ensemble des n particules M_i de masse m_i et de vitesse $\vec{V}(M_i)$ en mouvement dans le référentiel Galiléen $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ a pour énergie cinétique

$$E_C = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left(\vec{V}(M_i) \right)^2$$

La dérivée de cette expression par rapport au temps donne :

$$\frac{dE_C}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{V}(M_i)}{\partial t} \cdot \vec{V}(M_i)$$

or la force à laquelle est soumise la particule M_i est égale à : $\vec{F}_i = m_i \frac{d\vec{V}(M_i)}{dt}$, on obtient

ainsi : $\frac{dE_C}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{V}(M_i) = P$

Comme la force \vec{F}_i contient des forces d'origines intérieures et extérieures, cette relation

peut s'écrire : $\frac{dE_C}{dt} = P_{int} + P_{ext}$

P_{int} : puissance fournie au système par les forces intérieures ;

P_{ext} : puissance fournie au système par les forces extérieures.

La puissance des efforts intérieurs et extérieurs est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique.

En intégrant l'expression précédente entre deux instants t_1 et t_2 , le théorème de l'énergie

cinétique devient : $E_C(t_2) - E_C(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (P_{int} + P_{ext}) dt$
 $E_C(t_2) - E_C(t_1) = W_{int} + W_{ext}$

la variation de l'énergie cinétique entre deux instants t_1 et t_2 est égale au travail de toutes les forces intérieures et extérieures qui s'appliquent sur l'ensemble des particules.

6.3. Energie cinétique d'un solide indéformable

Dans le cas d'un solide indéformable l'énergie cinétique est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_S \vec{V}^2(M) dm$$

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé fixe et $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié au solide (S) indéformable, en mouvement quelconque tel que $O_1 \in (S)$.

Soit $\vec{\Omega}_1^0$: la vitesse de rotation du repère R_1 par rapport au repère R_0 et M un point quelconque du solide, nous écrire par la cinématique du solide :

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{O}_1 M$$

L'énergie cinétique du solide (S) en mouvement par rapport à un repère fixe R_0 a pour

expression :
$$\frac{dE_c^0}{dt} = \int_S \vec{V}^0(M) \cdot \frac{d\vec{V}^0(M)}{dm} dm = \int_S \vec{V}^0(M) \cdot \vec{\gamma}^0(M) dm$$

$$\frac{dE_c^0}{dt} = \int_S \left(\vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{O}_1 M \right) \cdot \vec{\gamma}^0(M) dm$$

en utilisant la règle de permutation dans le produit mixte, l'expression devient :

$$\frac{dE_c^0}{dt} = \vec{V}^0(O_1) \cdot \int_S \vec{\gamma}^0(M) dm + \vec{\Omega}_1^0 \cdot \int_S \vec{O}_1 M \wedge \vec{\gamma}^0(M) dm$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme de produit de deux torseurs :

$$\frac{dE_c^0}{dt} = \begin{cases} \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{V}^0(O_1) \end{cases} \cdot \begin{cases} \int_S \vec{\gamma}^0(M) dm \\ \int_S \vec{O}_1 M \wedge \vec{\gamma}^0(M) dm \end{cases} = []_{O_1} \cdot D_{O_1}$$

La dérivée de l'énergie cinétique est égale au produit des torseurs cinématiques et dynamiques, elle est donc égale à la puissance des quantités d'accélérations absolues.

On a vu précédemment, d'après le théorème fondamental de la dynamique que le torseur dynamique est égal au torseur des efforts extérieurs pour un solide indéformable, d'où l'expression finale :

$$\frac{dE_c^0}{dt} = P_{ext}$$

6.4. Conservation de l'énergie totale

Le théorème de l'énergie cinétique peut alors s'écrire :

$$dE_C = P_{ext} dt = dW_{ext}$$

Si toutes les forces extérieures dérivent d'une fonction potentielle $U(r)$ indépendante du temps, elles peuvent s'écrire sous la forme : $\vec{F}_{ext} = -\vec{\text{grad}} U(r)$ et on déduit :

$$dW_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dr} = -dU(r)$$

Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$dE_C = -dU(r) \Leftrightarrow d(E_C + U) = 0 \quad \text{et finalement: } E_C + U = Cte$$

$$E_C + U = E, \quad E : \text{Energie totale}$$

Cette expression traduit le théorème de conservation de l'énergie totale.

7. Dynamique des solides en contacts

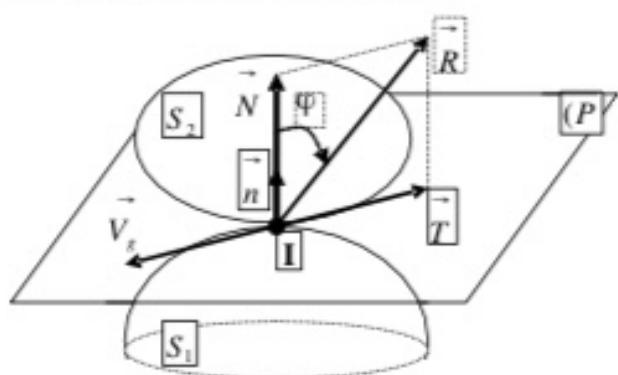
7.1. Actions de contact entre deux solides : Lois de Coulomb

Les lois de coulomb introduisent les notions de frottement de glissement entre les solides.

Soient deux solides (S_1) et (S_2) liés aux repères R_1 et R_2 mobiles par rapport à un repère R_0 fixe. Les deux solides en mouvement sont assujettis à un contact ponctuel à tout instant en un point I appartenant au plan (P) tangent en ce point aux deux solides.

\vec{n} normale en I au plan (P)

$\vec{T} \in (P)$



Au point de contact des deux solides nous pouvons distinguer :

$I_1 \in S_1$: point du solide S_1 en contact avec le solide S_2 à l'instant t ;

$I_2 \in S_2$: point du solide S_2 en contact avec le solide S_1 au même instant t ;

$I \in R_0$: la position commune de $I_1 \in S_1$ et $I_2 \in S_2$ au même instant t ;

Le point géométrique I n'appartient ni à S_1 ni à S_2 . Les points I, I_1, I_2 occupent géométriquement la même position mais ils ont des rôles cinématiques différents.

La vitesse de glissement du solide S_2 par rapport au solide S_1 appartient au plan (P) tangent au point de contact, elle est donnée par la relation :

$$\vec{V}_g(I) = \vec{V}_g(S_2 / S_1) = \vec{V}^0(I_2) - \vec{V}^0(I_1)$$

Le solide S_1 exerce une action sur le solide S_2 , tel que représenté sur la figure ci-dessus et de même pour S_2 qui exerce la même action sur S_1 mais dans le sens opposé. Ces actions peuvent être représentées par leurs torseurs respectifs en un point A quelconque de l'espace.

$$\text{Action de } S_1 \text{ sur } S_2 : \boxed{P}_{21/A} = \begin{cases} \vec{R} \\ M_{1A} \end{cases} ; \text{ Action de } S_2 \text{ sur } S_1 : \boxed{P}_{12/A} = \begin{cases} \vec{R} \\ M_{2A} \end{cases}$$

La réaction se compose d'une normale \vec{N} au plan tangent (P) au point I et d'une

composante tangentielle \vec{T} située dans le plan (P) tel que : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$

Les deux composantes satisfont aux lois de coulomb déterminées expérimentalement.

7.2. Réaction normale \vec{N}

La réaction normale \vec{N} est toujours dirigée vers les solides auquel elle est appliquée, c'est une force répulsive. Elle ne dépend ni de la nature des surfaces en contact ni de la vitesse de glissement entre les deux solides. Elle disparaît lorsqu'il n'a plus de contact entre les solides.

7.3. Réaction tangentielle \vec{T}

Deux cas peuvent se présenter : - Contact entre deux solides avec glissement
- Contact entre deux solides sans glissement

a) Contact avec glissement

Quand le solide S_2 glisse sur le solide S_1 , la vitesse de glissement n'est pas nulle, elle est donnée par : $\vec{V}_g(I) = \vec{V}_g(S_2 / S_1) = \vec{V}^0(I_2) - \vec{V}^0(I_1) \neq 0$

La réaction tangentielle \vec{T} est colinéaire à la vitesse de glissement, mais de sens opposée.

Pour une vitesse de glissement fixée, le module de la réaction tangentielle (force de

frottement) est proportionnel au module de la réaction normale : $|\vec{T}| = f |\vec{N}|$

f : est le coefficient de frottement de glissement, il dépend de la nature et de l'état des surfaces en contact. Ce coefficient, souvent indépendant de la vitesse de glissement, s'exprime aussi par la relation :

$$f = \operatorname{tg} \Psi \quad , \quad \Psi : \text{est l'angle de frottement.}$$

En réalité quand les solides glissent l'un par rapport à l'autre, on constate que le coefficient de frottement diminue légèrement. De là, on distingue deux coefficients :

f_s : coefficient de frottement statique pour $\vec{V}_s(S_2/S_1) = \vec{0}$

f_d : coefficient de frottement dynamique pour $\vec{V}_s(S_2/S_1) \neq \vec{0}$

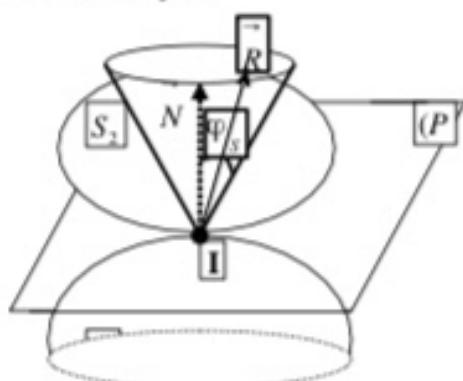
Si le mouvement se fait sans frottement : $f_d = 0$ alors $\vec{T} = \vec{0}$, alors la réaction \vec{R} est normale au plan (P).

b) Contact sans glissement

Le solide S_2 ne glisse pas sur le solide S_1 tant que : $|T| \leq f |N|$

On peut constater géométriquement qu'il n'y a pas de glissement tant que la réaction

$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ est située à l'intérieur du cône de frottement statique.



c) Roulement et Pivotement

Les lois de Coulomb peuvent se généraliser aux actions de frottements de roulement et de pivotement. Le roulement se fait le long de l'axe portant la vitesse de glissement et le pivotement se fait autour de la normale au point de contact I des deux solides. Le moment résistant au pivotement au point I est noté : \vec{M}_{Ip} et le moment résistant au roulement au point I est noté : \vec{M}_{Ir} .

Dans le cas du glissement nous avons :

$$\left| \vec{M}_p \right| = \lambda_p \left| \vec{N} \right| \quad \text{et} \quad \left| \vec{M}_r \right| = \lambda_r \left| \vec{N} \right|$$

λ_p et λ_r : sont appelés coefficient de résistance au pivotement et au roulement.

Ils ont les mêmes dimensions que les longueurs et sont de valeurs très faibles devant les coefficients de frottement statique et dynamique.

7.4. Travail des actions de contact

Nous avons montré précédemment que les points de contact ont respectivement des vitesses

$\vec{V}^0(I_2)$ et $\vec{V}^0(I_1)$, donc des déplacements élémentaires : $dI_{S2} = \frac{\vec{V}^0(I_2)}{t} dt$ et

$dI_{S1} = \frac{\vec{V}^0(I_1)}{t} dt$

Le travail de la résultante R est donné par :

$$\begin{aligned} dW_{S2} &= \vec{R} \cdot dI_{S2} = \vec{R} \cdot \vec{V}^0(I_2) dt \\ dW_{S1} &= -\vec{R} \cdot dI_{S1} = -\vec{R} \cdot \vec{V}^0(I_1) dt \end{aligned}$$

Le travail total sera :

$$dW_{S1} + dW_{S2} = \vec{R} \cdot \vec{V}^0(I_2) dt - \vec{R} \cdot \vec{V}^0(I_1) dt = \vec{R} \cdot \left(\vec{V}^0(I_2) dt - \vec{V}^0(I_1) dt \right) = \vec{R} \cdot \vec{V}_g(I)$$

Or nous savons que $\vec{N} \perp \vec{V}_g(I)$ et que $\vec{T} \parallel \vec{V}_g(I)$ alors :

$$dW = \vec{R} \cdot \vec{V}_g(I) = \left(\vec{N} + \vec{T} \right) \cdot \vec{V}_g(I) = \vec{T} \cdot \vec{V}_g(I)$$

Comme \vec{T} et $\vec{V}_g(I)$ sont de sens contraires, alors le travail des actions de contact est

toujours négatif : $\frac{d}{W} = \vec{T} \cdot \vec{V}_g(I) \leq 0$

C'est une énergie dissipée souvent sous forme de chaleur

Le travail peut être nul si :

- il n'y a pas de frottement $\vec{T} = \vec{0}$;
- il n'y a pas de glissement $\vec{V}_g(I) = \vec{0}$

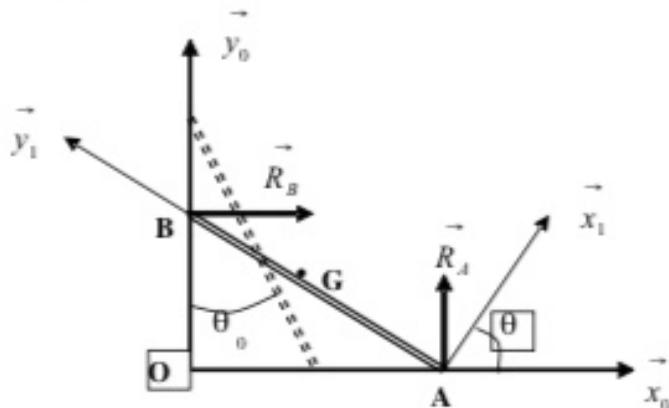
EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 01 :

Soit une barre homogène de longueur $AB=L$, de masse m , de centre G dont l'extrémité A repose sur un sol lisse et l'extrémité B s'appuie contre mur vertical parfaitement lisse.

Initialement la barre fait un angle θ_0 avec le mur. Les deux extrémités glissent, sans frottement, respectivement sur le sol et sur le mur.

1. En utilisant les théorèmes de la résultante dynamique et du moment dynamique, établir les trois équations scalaires du mouvement de la barre ;
2. En déduire, à partir de ces équations, l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ de la barre ;
3. En intégrant l'équation de l'accélération, montrer que l'on a : $\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$;
4. Retrouver l'expression de $\dot{\theta}^2$ en utilisant le théorème de conservation de l'énergie mécanique totale ;
5. Déterminer en fonction de θ les réactions R_A et R_B ;
6. En déduire l'angle pour lequel la barre quitte le mur.



Solution :

$$\text{Mur lisse} \Rightarrow \vec{R}_B = R_B \vec{x}_0 \quad ; \text{Sol lisse} \Rightarrow \vec{R}_A = R_A \vec{y}_0$$

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère fixe

$$R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \text{ lié à la barre tel que : } \vec{z}_0 = \vec{z}_1 \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\theta} \vec{z}_0 = \dot{\theta} \vec{z}_1$$

1. Équations scalaires du mouvement de la barre :

a) Théorème de la résultante dynamique :

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{\gamma}^0(G) \Leftrightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{P} = m\vec{\gamma}^0(G) \quad (1)$$

$$\vec{OG} = \begin{cases} \frac{L}{2} \sin \theta \\ \frac{L}{2} \cos \theta \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}^0(G) = \begin{cases} \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta \\ -\frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{\gamma}^0(G) = \begin{cases} \frac{L}{2} \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) \\ -\frac{L}{2} \left(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \\ 0 \end{cases}$$

Projetons l'équation (1) sur les axes Ox et Oy :

$$R_B = m \frac{L}{2} \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) \quad (2)$$

$$R_A - mg = -m \frac{L}{2} \left(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \quad (3)$$

b) Théorème du moment dynamique :

Le moment des forces extérieures est égal au moment dynamique du système.

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})_O = \vec{\delta}^0(S/R_0) \quad (4) \quad \text{avec } \vec{\delta}^0(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt}$$

Calculons le moment cinétique : $\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \vec{OG} \wedge m\vec{V}^0(G) + I_G \cdot \vec{\Omega}_1$

$$\text{Le tenseur d'inertie de la barre dans le repère } R_1 \text{ est donné par : } I_G = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}$$

Le moment cinétique s'écritra :

$$\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \begin{cases} \frac{L}{2} \sin \theta \\ \frac{L}{2} \cos \theta \\ 0 \end{cases} \wedge_m \begin{cases} \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta \\ -\frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \end{cases} + I_G \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \left(-\frac{mL^2}{4} \dot{\theta} + \frac{mL^2}{12} \dot{\theta} \right) \vec{z}_0 = -\frac{mL^2}{6} \dot{\theta} \vec{z}_0$, on déduit le moment dynamique par :

$$\vec{\delta}^0(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} = -\frac{mL^2}{6} \ddot{\theta} \vec{z}_0$$

Nous avons ainsi : $\vec{OB} \wedge \vec{R_B} + \vec{OA} \wedge \vec{R_A} + \vec{OG} \wedge \vec{P} = -\frac{mL^2}{6} \ddot{\theta} \vec{z}_0$ cette équation vectorielle se

traduit par : $\begin{pmatrix} 0 \\ L \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (L/2) \sin \theta \\ (L/2) \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{mL^2}{6} \ddot{\theta} \end{pmatrix}$

$$-R_B L \cos \theta + R_A L \sin \theta - mg \frac{L}{2} \sin \theta = -\frac{mL^2}{6} \ddot{\theta} \quad (5)$$

2. Accélération angulaire $\ddot{\theta}$ de la barre

En remplaçant R_A et R_B par leurs expressions dans l'équation (5), on aboutit à :

$$\begin{aligned} -\frac{mL^2}{2} \cos \theta (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + L \sin \theta \left(mg - m \frac{L}{2} (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \right) - mg \frac{L}{2} \sin \theta &= -\frac{mL^2}{6} \ddot{\theta} \\ -\frac{mL^2}{2} \ddot{\theta} + mg \frac{L}{2} \sin \theta &= -\frac{mL^2}{6} \ddot{\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{3g}{2L} \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

3. Monter que l'on a : $\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$;

En multipliant l'équation de l'accélération angulaire par $2\dot{\theta}$ on obtient :

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} - \frac{3g}{L}\dot{\theta}\sin\theta = 0 \quad \text{en intégrant cette équation on aboutit à :}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

4. Expression de $\dot{\theta}^2$ en utilisant le théorème de conservation de l'énergie :

L'énergie totale à l'instant initial $t=0$ est égale à l'énergie cinétique à un instant quelconque t : $E_0(S) = E_i(S) \Leftrightarrow E_{p0}(S) + E_{c0}(S) = E_p(S) + E_{ci}(S)$

$$\text{à : } t=0 \quad V^0(G) = 0 \Rightarrow E_0(S) = E_{p0}(S) = mg \frac{L}{2} \cos \theta_0$$

$$\text{à : } t \text{ : L'énergie potentielle est égale à : } E_p(S) = mg \frac{L}{2} \cos \theta$$

$$\text{L'énergie cinétique totale est donnée par : } E_{ci}(S) = \frac{1}{2} m \left(\vec{V}^0(G) \right)^2 + \frac{1}{2} I_{Gz}(S) \cdot \vec{Q}_{\theta}^2$$

Avec : $\left(\vec{V^0}(G)\right)^2 = \left(\frac{L\dot{\theta}}{2}\right)^2$ et $I_{Gxx} = \frac{mL^2}{12}$

$$E_{ct}(S) = \frac{1}{2}m\left(\frac{L\dot{\theta}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{12}\right)\dot{\theta}^2 = \frac{mL^2}{8}\dot{\theta}^2 + \frac{mL^2}{24}\dot{\theta}^2 = \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2$$

En égalisant l'énergie totale aux deux instants, nous obtenons :

$$mg\frac{L}{2}\cos\theta_0 = mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2 \Leftrightarrow g\cos\theta_0 = g\cos\theta + \frac{L}{3}\dot{\theta}^2$$

ce qui donne : $\dot{\theta}^2 = 3\frac{g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$

5. Les réactions R_A et R_B en fonction de θ :

Nous avons : $\ddot{\theta} = \frac{3g}{2L}\sin\theta$ et $\dot{\theta}^2 = 3\frac{g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$

On remplaçant les expressions de $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ dans celle de R_A et R_B on les exprime en fonction de θ :

$$R_A = mg - m\frac{L}{2}\left(\frac{3g}{2L}\sin\theta\sin\theta + 3\frac{g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\cos\theta\right)$$

$$R_A = mg - m\frac{3g}{2}\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta + \cos\theta_0\cos\theta - \cos^2\theta\right)$$

$$R_A = mg - m\frac{3g}{2}\left(\frac{1}{2}(1 - \cos^2\theta) + \cos\theta_0\cos\theta - \cos^2\theta\right)$$

$$R_A = mg\left[\frac{1}{4} + \frac{9}{4}\cos^2\theta - \frac{3}{2}\cos\theta_0\cos\theta\right]$$

et

$$R_B = m\frac{L}{2}\left(\frac{3g}{2L}\sin\theta\cos\theta - 3\frac{g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\sin\theta\right)$$

$$R_B = m\frac{L}{2}\left(\frac{3g}{2L}\sin\theta\cos\theta - \frac{3g}{L}\cos\theta_0\sin\theta + \frac{3g}{L}\cos\theta\sin\theta\right)$$

$$R_B = \frac{3}{2}mg\left(\frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta - \cos\theta_0\sin\theta\right)$$

6. Angle pour lequel la barre quitte le mur

Lorsque la barre quitte le mur, la réaction en ce point sera nulle, d'où : $R_s = 0$

$$R_s = \frac{3}{2}mg \left(\frac{3}{2}\sin\theta \cos\theta - \cos\theta_0 \sin\theta \right) = 0$$

$$\sin\theta \left(\frac{3}{2}\cos\theta - \cos\theta_0 \right) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\cos\theta = \cos\theta_0 \Rightarrow \theta = \text{Arc cos} \left(\frac{2}{3}\cos\theta_0 \right)$$

car pour $\theta = 0$ la barre est en position verticale donc la barre quitte le mur pour :

$$\theta = \text{Arc cos} \left(\frac{2}{3}\cos\theta_0 \right)$$

Exercice 02 :

Une barre homogène $\mathbf{AB} = \mathbf{L}$, de masse \mathbf{m} est attachée initialement par son extrémité \mathbf{B}_0 par un fil inextensible à un bâti fixe. L'autre extrémité \mathbf{A}_0 repose sur un sol parfaitement lisse.

Soit θ_0 l'angle d'inclinaison initial de la barre avec l'axe vertical (O_1, \vec{y}_0) . A un instant t

quelconque on coupe le fil et la barre tombe sans vitesse initiale. On considère que le

mouvement se fait dans le plan (\vec{x}_0, \vec{y}_0) . Soit $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à la barre tel que

$(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta$. On donne $\vec{OO}_1 = \vec{xx}_0$ et le tenseur d'inertie de la barre en son centre

$$\text{d'inertie } \mathbf{G} \text{ dans le repère } R_1 \text{ s'écrit : } I_{G/R_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{R_1} \quad \text{avec } A = \frac{mL^2}{12}$$

On prendra le repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ comme repère de projection.

1. Déterminer les vecteurs, position, vitesse, accélération absolue du point \mathbf{G} ;
2. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au point \mathbf{G} ; En déduire que le centre \mathbf{G} de la barre reste en mouvement vertical lors de sa chute ;
3. Appliquer le théorème du moment dynamique au point \mathbf{G} ;
4. En déduire l'expression de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ en fonction de $L, \dot{\theta}, \theta$ et g .

L'équation (3) s'écrit : $R_{Ay} = mg - m \frac{L}{2} \left(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right)$

3. Théorème du moment dynamique au point G ;

Le moment des forces extérieures est égal au moment dynamique de la barre.

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})/G = \vec{\delta}_G(S/R_0) \quad (4)$$

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})/G = \vec{GA} \wedge \vec{R_A} = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \sin \theta \\ -\frac{L}{2} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_{Ay} \\ R_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L}{2} R_{Ay} \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{L}{2} R_{Ay} \sin \theta \vec{z}_0$$

Le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique au point G :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} \quad \text{or nous avons : } \vec{\sigma}_G(S/R_0) = I_G \cdot \vec{\Omega}_1$$

$$\vec{\sigma}_G(S/R_0) = R_1 \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{mL^2}{12} \dot{\theta} \vec{z}_1 = \frac{mL^2}{12} \dot{\theta} \vec{z}_0$$

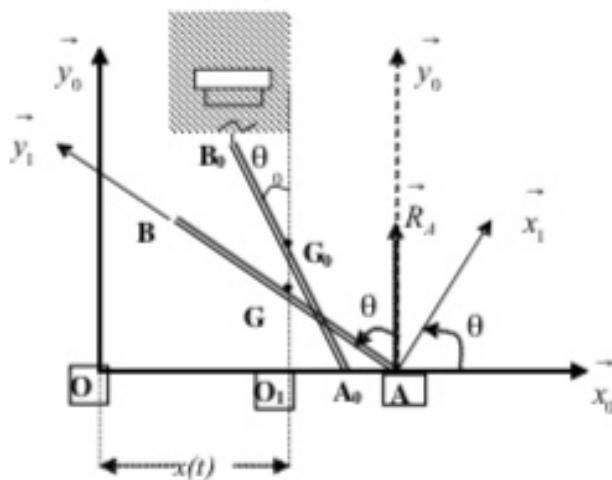
$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} = \frac{mL^2}{12} \ddot{\theta} \vec{z}_0$$

En égalisant les deux expressions on obtient : $\frac{L}{2} R_{Ay} \sin \theta = \frac{mL^2}{12} \ddot{\theta}$

$$R_{Ay} = \frac{mL}{6} \frac{\ddot{\theta}}{\sin \theta} \quad (5)$$

4. Expression de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ en fonction de $L, \dot{\theta}, \theta$ et g .

En remplaçant l'expression de R_{Ay} dans l'équation (3) on déduit l'équation différentielle décrivant la chute de la barre :



Solution :

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère fixe et $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est tel que : $\vec{\Omega}_1 = \dot{\theta} \vec{z}_0 = \dot{\theta} \vec{z}_1$

1. Vecteurs : position, vitesse et accélération absolue du point G ;

$$\vec{OG} = \vec{OO_1} + \vec{O_1G} = \vec{x} \vec{x}_0 + \frac{L}{2} \cos \theta \vec{y}_0$$

$$\vec{OG} = \begin{cases} \vec{x} \\ \frac{L}{2} \cos \theta \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v^0}(G) = \begin{cases} \dot{\vec{x}} \\ -\frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \end{cases}, \quad \vec{\gamma^0}(G) = \begin{cases} \ddot{\vec{x}} \\ -\frac{L}{2} (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ 0 \end{cases}$$

2. Théorème de la résultante dynamique au point G ;

La résultante des forces extérieures appliquées à la barre est égale à la masse de la barre par l'accélération de son centre d'inertie. Le sol est lisse, alors la réaction au point A est suivant l'axe (O, y) donc normale au plan horizontal.

$$\vec{R}_A + \vec{P} = m \vec{\gamma^0}(G) \quad (1)$$

La projection de cette équation vectorielle sur les axes donne :

$$m \ddot{x} = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} = 0 \quad (2)$$

$$R_{Ay} - P = -m \frac{L}{2} \left(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \quad (3)$$

La barre tombe sans vitesse initiale alors : $\dot{x} = 0 \Rightarrow x = Cte$

Comme $x = Cte$ alors le centre d'inertie G de la barre tombe verticalement.

$$\frac{mL}{6} \frac{\ddot{\theta}}{\sin \theta} = mg - m \frac{L}{2} \left(\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \Rightarrow \ddot{\theta} \left(\frac{mL}{6} \frac{1}{\sin \theta} + m \frac{L}{2} \sin \theta \right) = mg - m \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

d'où $\ddot{\theta} = 3 \frac{(2g - L\dot{\theta}^2 \cos \theta)}{L(1 + 3\sin^2 \theta)} \sin \theta$

Exercice 03 :

Un pendule pesant constitué d'un solide homogène de forme quelconque, de masse **m** tourne autour d'un point fixe **O** lui appartenant. La liaison entre le solide et le bâti est de type

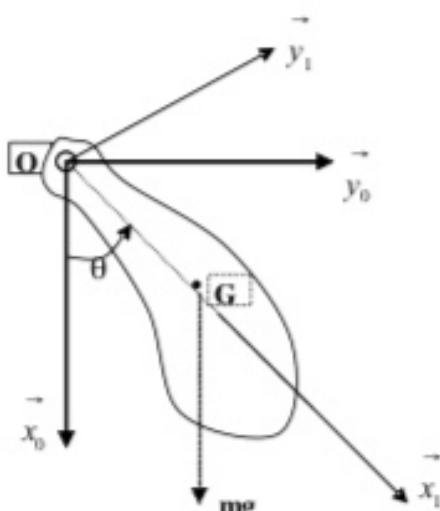
cylindrique. Le pendule est lié au repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en mouvement de rotation par

rapport à un repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti tel que : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta$

Le tenseur d'inertie du pendule en son centre d'inertie **G** dans le repère R_1 est égale à : I_G

On donne $\vec{OG} = L \vec{x}_1$ avec **L**= Cte; R_1 est le repère de projection.

1. En utilisant les théorèmes de la résultante dynamique et du moment dynamique, établir l'équation différentielle du mouvement ;
2. Retrouver l'expression de cette équation en utilisant le théorème de conservation de l'énergie mécanique totale ;
3. En déduire l'équation différentielle du pendule simple ainsi que sa période.



Solution :

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère fixe

$R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est tel que : $\vec{\Omega}_1 = \dot{\theta} \vec{z}_0 = \dot{\theta} \vec{z}_1$

Vitesse et accélération du point G :

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OG} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \theta \end{cases} \begin{cases} L \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0 \vec{V}^0(G)}{dt} = \frac{d^1 \vec{V}^0(G)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(G) = \begin{cases} 0 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \theta \end{cases} \begin{cases} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} -L\dot{\theta}^2 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{cases}$$

1. Théorème de la résultante dynamique et du moment dynamique au point G ;

1.a. Théorème de la résultante dynamique au point G ;

La résultante des forces extérieures appliquées au solide est égale à la masse du solide par l'accélération de son centre d'inertie. L'articulation au point O est cylindrique, la réaction a deux composantes dans le plan (x_1, y_1)

$$\vec{R}_O + \vec{P} = m\vec{\gamma}^0(G) \quad (1)$$

La projection de cette équation vectorielle sur les axes donne :

$$R_{Ox} + mg \cos \theta = -m\dot{\theta}^2 \quad (2)$$

$$R_{Oy} - mg \sin \theta = mL\ddot{\theta} \quad (3)$$

1.b. Théorème du moment dynamique au point G ;

Le moment des forces extérieures est égal au moment dynamique de la barre.

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})/G = \vec{\delta}_G(S/R_0) \quad (4)$$

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})/G = \vec{GO} \wedge \vec{R}_O = \begin{cases} -L \\ 0 \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} R_{Ox} \\ R_{Oy} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -LR_{Oy} \end{cases} = -LR_{Oy} \vec{z}_1$$

Le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique au point G :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} \quad \text{or nous avons : } \vec{\sigma}_G(S/R_0) = I_G \cdot \vec{\Omega}_1 \Rightarrow \vec{\sigma}_G(S/R_0) = I_G \dot{\theta} \vec{z}_1$$

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} = I_G \ddot{\theta} \vec{z}_0$$

$$\text{nous avons ainsi : } -LR_{Oy} = I_G \ddot{\theta} \Leftrightarrow R_{Oy} = -\frac{I_G \ddot{\theta}}{L} \quad (4)$$

1.c. Equation différentielle du mouvement

On remplace l'équation (4) dans l'équation (3), on obtient : $-\frac{I_G \ddot{\theta}}{L} - mg \sin \theta = mL \ddot{\theta}$

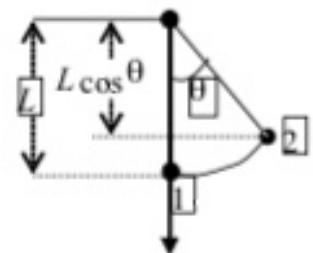
$$\ddot{\theta} \left(\frac{mL^2 + I_G}{L} + mgL \sin \theta \right) = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgL}{mL^2 + I_G} \sin \theta = 0$$

2. Equation différentielle en utilisant le théorème de conservation de l'énergie totale ;

L'énergie totale dans la position 1 est égale à l'énergie totale dans la position 2. : $E_1 = E_2$

$$E_1 = \frac{1}{2} m \left(V^0(G) \right)^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_1^T I_G \cdot \vec{\Omega}_1 = \frac{1}{2} m \left(L \dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} I_G \cdot \dot{\theta}^2$$

$$E_2 = mg(L - L \cos \theta) = mgL(1 - \cos \theta)$$



$$\frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_G \cdot \dot{\theta}^2 = mgL(1 - \cos \theta) \Leftrightarrow \dot{\theta}^2 \left(\frac{mL^2 + I_G}{2} \right) = 2mgL(1 - \cos \theta)$$

En dérivant les deux termes on obtient : $2\ddot{\theta} \dot{\theta} \left(\frac{mL^2 + I_G}{2} \right) = 2mgL \dot{\theta} \sin \theta$

$$\ddot{\theta} \left(\frac{mL^2 + I_G}{2} - mgL \sin \theta \right) = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgL}{mL^2 + I_G} \sin \theta = 0$$

3. Equation différentielle du pendule simple ainsi que sa période.

Dans le cas d'un pendule simple $I_G = 0$, et s'il a de faibles oscillations alors : $\sin \theta \approx 0$

$$\text{L'équation devient : } \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad \omega^2 = \frac{g}{L} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Exercice 06 :

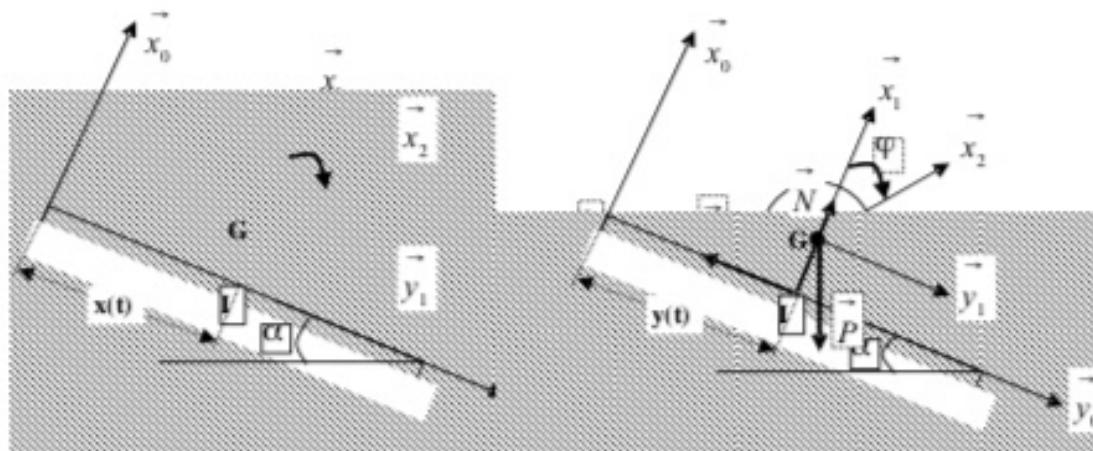
Un disque plein de rayon a , de masse m roule sans glisser sous l'effet de la gravitation sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe lié au plan incliné, $R_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié au centre d'inertie G du disque et $R_2(G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère en rotation par rapport à l'axe $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ tel que $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \varphi$.

À l'instant initial, le disque est immobile. La réaction au point de contact entre le disque et le plan incliné a deux composantes, l'une N normale au plan incliné, l'autre T tangentielle à ce dernier.

Le tenseur d'inertie du disque en son centre d'inertie G dans le repère R_2 est donné par :

$$I_{G/R_2} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 2A \end{bmatrix} \quad \text{avec } A = \frac{Ma^2}{4}; \quad \text{On prendra } R_1 \text{ comme repère de projection.}$$

1. Déterminer la vitesse $\vec{V}(G)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(G)$ du point G ;
2. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au disque ;
3. Appliquer le théorème du moment dynamique au disque ;
4. Trouver une équation scalaire liant les paramètres cinématiques $y, \dot{\theta}$ et \ddot{a} et qui traduisent la condition de roulement sans glissement du disque sur le plan incliné ;
5. En déduire les expressions de N , T , y et φ en fonction de m , g , α et a ;
6. Déterminer l'énergie cinétique du disque en fonction de m , a , y et φ ;
7. Exprimer l'énergie cinétique du disque en fonction de m et y en tenant compte de la condition de roulement sans glissement ;
8. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au disque, retrouver l'expression de l'accélération linéaire y .



Solution :

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère fixe.

$R_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en translation par rapport à $R_0 \Rightarrow \vec{\Omega}_1 = \vec{0}$

$R_2(G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est tel que : $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \varphi$ et $\vec{\Omega}_2 = \dot{\varphi} \vec{z}_1 = \dot{\varphi} \vec{z}_0$

$$\vec{OG} = \vec{OI} + \vec{IG} = \begin{cases} 0 \\ y \\ 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \vec{a} \\ 0 = \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{cases} a \\ y \\ 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \vec{a} \\ 0 = \\ 0 \end{matrix}$$

$$R_1 \quad \quad \quad R_1 \quad \quad \quad R_1$$

1. Vitesse $\vec{V}^0(G)$ et accélération $\vec{\gamma}^0(G)$ du point G ;

Par dérivation :

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0 \vec{OG}}{dt} = \frac{d^1 \vec{OG}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OG} = \begin{cases} 0 \\ y \\ 0 \end{cases} \quad ; \text{ car } \vec{\Omega}_1^0 = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0 \vec{V}^0(G)}{dt} = \frac{d^1 \vec{V}^0(G)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(G) = \begin{cases} 0 \\ y \\ 0 \end{cases} \quad ; \text{ car } \vec{\Omega}_1^0 = \vec{0}$$

2. Théorème de la résultante dynamique appliqué au disque

La résultante des forces extérieures appliquées au disque est égale à la masse du disque par l'accélération de son centre d'inertie.

$$\sum_i \vec{F}_{ext} = m \vec{V}^0(G) \Leftrightarrow \vec{T} + \vec{N} + \vec{P} = m \vec{V}^0(G) \quad (1)$$

La projection de cette équation sur les axes du repère R_1 donne deux équations scalaires :

$$N - mg \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

$$-T + mg \sin \alpha = my \quad (4)$$

3. Théorème du moment dynamique appliqué au disque

Le moment résultant des forces extérieures appliquées au disque est égale au moment dynamique du disque au même point G.

$\sum_i \vec{M}(\vec{F}_{ext})_G = \vec{\delta^0}(G) \Leftrightarrow \vec{GI} \wedge \vec{T} + \vec{GI} \wedge \vec{N} = \vec{\delta^0}(G)$ comme $\vec{GI} \parallel \vec{N}$ elle devient :

$$\vec{GI} \wedge \vec{T} = \vec{\delta^0}(G) \quad (4)$$

Exprimons chacun des termes de cette équation : $\vec{GI} \wedge \vec{T} = \begin{cases} -a \\ 0 \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ -T \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ aT \end{cases} = aT \vec{z}_1$

Le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique, d'où : $\vec{\delta^0}(G) = \frac{d^0 \vec{\sigma^0}(G)}{dt}$

Le moment cinétique du disque est donné par : $\vec{\sigma^0}(G) = I_{C/R_1} \cdot \vec{\Omega}_2^0$

$$\vec{\sigma^0}(G) = \begin{cases} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\Phi \end{pmatrix} = A\vec{\Psi} z_1 = A\vec{\Psi} z_0$$

$$\vec{\delta^0}(G) = \frac{d^0 \vec{\sigma^0}(G)}{dt} = \frac{d^1 \vec{\sigma^0}(G)}{dt} = A\vec{\Psi} z_1 = \frac{ma^2}{2}\vec{\Psi} z_1 \quad \text{car } \vec{\Omega}_1^0 = \vec{0}$$

En égalisant les deux expressions des moments nous obtenons :

$$aT = \frac{ma^2}{2}\vec{\Psi} \Rightarrow T = \frac{ma}{2}\vec{\Psi} \quad (5)$$

4. Equation scalaire liant les paramètres cinématiques x, θ et a et qui traduisent la condition de roulement sans glissement du disque sur le plan incliné :

La condition de roulement sans glissement est vérifiée si la vitesse du point de contact du

disque et du plan incliné est nulle : $\vec{V}_r(I) = \vec{V}_s(I) - \vec{V}_p(I) = \vec{0}$

Or : $\vec{V}_p(I) = \vec{0}$ alors : $\vec{V}_s(I) = \vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{GI} = \vec{0}$

$$\begin{cases} 0 \\ y^+ \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \wedge \begin{cases} -a \\ 0 = 0 \\ 0 \end{cases} \\ \Phi \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Leftrightarrow y^- a \vec{\Psi} = 0 \quad (6)$$

5. Expressions de N , T , \ddot{y} et $\ddot{\varphi}$ en fonction de m , g , α et a ;

L'équation (3) donne : $\underline{N = mg \cos \alpha}$

L'équation (6) $\ddot{y} = a\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\ddot{y}}{a}$ l'équation (4) devient : $-\frac{ma}{2} \frac{\ddot{y}}{a} + mg \sin \alpha = m\ddot{y}$

On déduit : $\underline{\ddot{y} = \frac{2}{3}g \sin \alpha}$ d'où : $\dot{\varphi} = \frac{2}{3a}g \sin \alpha$

L'équation (5) donne : $\underline{T = \frac{mg}{3} \sin \alpha}$

6. Energie cinétique du disque en fonction de m , a , y et $\dot{\varphi}$;

L'énergie cinétique totale est égale à l'énergie cinétique de translation + l'énergie cinétique de rotation : $E_c = \frac{1}{2}m\left(\vec{V^0}(G)\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega^0}^T J_0(S/R_2) \cdot \vec{\Omega^0}$

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2$$

7. Energie cinétique du disque en fonction de m et \dot{y} en tenant compte de la condition de roulement sans glissement ;

Nous avons dans l'équation (6) qui exprime le roulement sans glissement : $\dot{y} = a\dot{\varphi}$ on

déduit que : $\dot{\varphi} = \frac{\dot{y}}{a}$ alors l'expression de l'énergie cinétique devient :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} \frac{ma^2}{2} \frac{\dot{y}^2}{a^2} = \frac{3}{4}m\dot{y}^2 \quad \underline{E_c = \frac{3}{4}m\dot{y}^2}$$

8. Expression de l'accélération linéaire \ddot{y} En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au disque

La variation de l'énergie cinétique est égale au travail des forces extérieures : $\frac{dE_c}{dt} = \frac{dW}{dt}$

$$E_c = \frac{3}{4}m\dot{y}^2 \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \frac{3}{2}m\dot{y}\ddot{y}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW(\vec{T})}{dt} + \frac{dW(\vec{N})}{dt} + \frac{dW(\vec{P})}{dt} = \vec{T} \cdot \frac{d\vec{OI}}{dt} + \vec{N} \cdot \frac{d\vec{OI}}{dt} + \vec{m g} \cdot \frac{d\vec{OG}}{dt} = \vec{m g} \cdot \vec{V^0}(G)$$

$$\frac{dW}{dt} = \vec{T} \cdot \vec{V^0}(I) + \vec{N} \cdot \vec{V^0}(I) + \vec{m g} \cdot \vec{V^0}(G) = \vec{m g} \cdot \vec{V^0}(G) \text{ car } \vec{V^0}(I) = \vec{0}$$

$$\frac{dW}{dt} = \vec{m g} \cdot \vec{V^0}(G) = \begin{pmatrix} -mg \cos \alpha \\ mg \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = mg y \sin \alpha$$

L'égalité des deux expressions donne :

$$\frac{3}{2} m \ddot{y} = mg \dot{y} \sin \alpha \Leftrightarrow \ddot{y} = \underline{\frac{2}{3} g \sin \alpha}$$

Exercice 07 :

Le concasseur d'un moulin à huile est constitué d'une roue homogène (S) de masse **m**, de rayon **R**, de centre de masse **G**. La roue a une liaison pivot au point **G** avec une tige horizontale de masse négligeable **O₁G**, soudée à un arbre vertical **OA** en rotation à une vitesse angulaire constante : $\dot{\Psi} = Cte$. L'arbre **OA** est maintenu vertical par deux liaisons, l'une sphérique en **O** et l'autre cylindrique en **A**. On suppose que toutes les liaisons sont sans frottement.

La roue roule sans glissement sur le plan horizontal fixe lié au repère $\vec{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

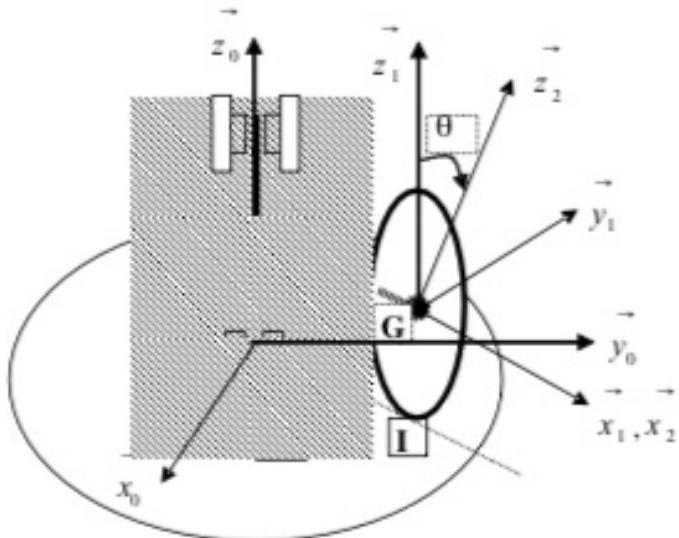
Le repère $\vec{R}_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à la tige **O₁G**; le repère $\vec{R}_2(G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est lié à la roue.

Le tenseur d'inertie de la roue en son centre d'inertie **G** dans le repère \vec{R}_2 est donné par :

$$I_{G/R_2} = \begin{bmatrix} 2A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{R_1, R_2} \quad \text{avec : } A = \frac{mR^2}{4}$$

1. En appliquant la condition de roulement sans glissement au point **I**, exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de $\dot{\Psi}$;
2. Déterminer le moment dynamique au point **O₁** de la roue ;
3. Appliquer le théorème du moment dynamique au point **O₁** à la roue ;

4. Exprimer l'action du plan sur la roue en fonction de \mathbf{m} , \mathbf{R} et $\dot{\psi}$;
 5. Exprimer le couple gyroscopique agissant sur la roue dans le repère R_1 .



Solution :

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère fixe.

$$R_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \text{ est tel que } (\vec{x}_1, \vec{x}_0) = (\vec{y}_1, \vec{y}_0) = \dot{\psi} \Rightarrow \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi} \vec{z}_1 = \dot{\psi} \vec{z}_1$$

$$R_2(G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \text{ est tel que } (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \theta \Rightarrow \vec{\Omega}_2^1 = -\dot{\theta} \vec{x}_1 = -\dot{\theta} \vec{x}_2$$

$$\vec{\Omega}_2^0 = \dot{\psi} \vec{z}_1 - \dot{\theta} \vec{x}_2 = \begin{cases} -\dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}; \quad \vec{GI} = -R \vec{z}_1 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -R \end{cases}; \quad \vec{OG} = L \vec{x}_1 + R \vec{z}_1 = \begin{cases} L \\ 0 \\ R \end{cases}$$

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OG} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases} \wedge \begin{cases} L \\ 0 \\ R \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ L\dot{\psi} \\ 0 \end{cases} \quad \text{avec : } \vec{V}^0(O) = \vec{0}$$

1. Expression de $\dot{\theta}$ en fonction de $\dot{\psi}$;

La condition de roulement sans glissement au point de contact entre la roue et le sol signifie que la vitesse de glissement de ce point de contact est nulle :

$$\vec{V}_g(I) = \vec{V}^0(I \in S) - \vec{V}^0(I \in R_0) = \vec{0} \quad \text{or nous avons : } \vec{V}^0(I \in R_0) = \vec{0}$$

$$\text{alors : } \vec{V}^0(I \in S) \Leftrightarrow \vec{V}^0(I \in S) = \vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{GI} = \vec{0}$$

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ L\dot{\psi} + \\ 0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} -\dot{\theta} \\ 0 \wedge \\ \psi \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 = \\ -R \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \end{matrix} \Leftrightarrow L\dot{\psi} - R\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L\dot{\psi}}{R} \quad (1)$$

2. Moment dynamique au point O_1 de la roue :

L'arbre étant de masse négligeable, le moment dynamique du système se réduit au moment dynamique de la roue. Le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique,

$$\text{d'où : } \vec{\delta}_{O_1}(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_{O_1}(S/R_0)}{dt}$$

Le moment cinétique de la roue est donné par : $\vec{\sigma}_{O_1}(S/R_0) = I_{O_1/R_1} \vec{\Omega}_1^0 + \vec{O_1 G} \wedge m \vec{V}_1^0(G)$

$$\vec{\sigma}_{O_1}(S/R_0) = \frac{2A}{R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} 0 \\ L\dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -2A\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 + mL^2\dot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\delta}_{O_1}(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_{O_1}(S/R_0)}{dt} = \frac{d^1 \vec{\sigma}_{O_1}(S/R_0)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\sigma}_1^0(G) ;$$

$$\frac{d^1 \vec{\sigma}_{O_1}(S/R_0)}{dt} = \vec{0} \quad , \quad \text{car } \dot{\psi} \text{ et } \dot{\theta} \text{ sont constantes, on obtient alors :}$$

$$\vec{\delta}_{O_1}(S/R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2A\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 + mL^2\dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2A\dot{\theta}\psi \\ 0 \end{pmatrix} = -2A\dot{\theta}\psi \vec{y}_1 \quad (2)$$

3. Théorème du moment dynamique au point O_1 à la roue :

Le moment résultant des forces extérieures appliquées à la roue est égal au moment dynamique de la roue au même point O_1 .

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})/_{O_1} = \vec{\delta}_{O_1}(S/R_0) \Leftrightarrow \vec{O_1 G} \wedge m \vec{g} + \vec{O_1 I} \wedge \vec{R}_1 = -2A\dot{\theta}\psi \vec{y}_1$$

UMBB Boumerdès, Faculté des sciences, Département de physique
Cours exercices, Mécanique Rationnelle : TCT et LMD-ST sem :3

A.KADI

CHAPITRE X

DYNAMIQUE D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE

DYNAMIQUE D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE

1. Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

C'est le mouvement le plus important dans la mécanique. Le fonctionnement de toutes les machines est basé sur un mouvement de rotation autour d'un axe : rotors, machines tournantes, vilebrequins, roues etc...

Ce mouvement de rotation génère des vibrations mécaniques au niveau des paliers de fixation, si l'axe de rotation n'est pas équilibré. Les paliers sont des liaisons rotoïdes (articulations cylindriques) entre le solide et le bâti fixe. Ces vibrations sont à l'origine de l'usure des paliers, provoquée par les contraintes mécaniques dues à la liaison entre l'axe de rotation et le palier.

Pour éviter ces inconvénients, il est nécessaire d'étudier et de trouver les conditions d'équilibrage du système afin que les contraintes soient minimales et allonger la durée de vie des paliers.

2. Équations du mouvement

2.1 Paramétrage du mouvement

On choisit un repère fixe orthonormé direct $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti tel que l'axe vertical \vec{Oz}_0 , soit confondu avec l'axe de rotation $(\vec{\Delta})$. Soit $R_i(O, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un repère lié au solide (S) , tel que $\vec{z}_0 = \vec{z}_i$. Le solide est en mouvement de rotation autour de l'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_i$ avec une vitesse : $\vec{\Omega}_i = \dot{\psi} \vec{z}_0 = \dot{\psi} \vec{z}_i$ tel que le centre d'inertie du solide soit dans le plan $(Ox_i z_i)$, avec : $\vec{OG} = a \vec{x}_i + b \vec{z}_i = a \vec{x}_i + b \vec{z}_0$

L'orientation du solide (S) lié au repère $R_i(O, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ est définie par l'angle :

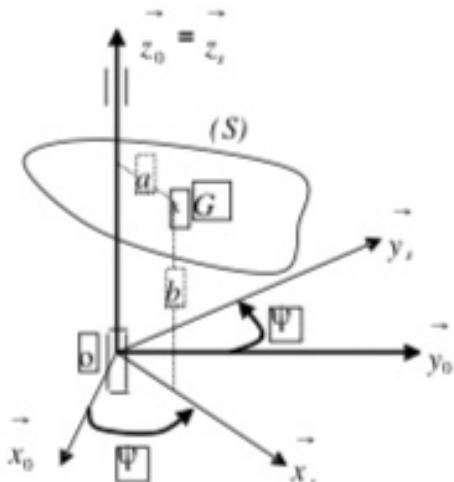
$$\Psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_i) = (\vec{y}_0, \vec{y}_i)$$

La matrice de passage du repère R_i vers le repère R_0 est donnée par :

$$\begin{aligned}\vec{x}_i &= \cos\psi \vec{x}_0 + \sin\psi \vec{y}_0 \\ \vec{y}_i &= -\sin\psi \vec{x}_0 + \cos\psi \vec{y}_0 \\ \vec{z}_i &= \vec{z}_0\end{aligned}$$

a : distance du centre d'inertie G à l'axe (Δ)

b : distance de G au plan (Ox_0y_0)



2.2 Torseur cinématique

Le torseur cinématique du solide $[C]$ relatif au mouvement de rotation du solide par rapport au repère R_0 est défini par ces éléments de réduction :

$$\text{La résultante cinématique : } \vec{R} = \vec{\Omega}_0 = \dot{\psi} \vec{z}_0$$

$$\text{Le moment au point } O : \vec{M}_0 = \vec{V}^0(O) = 0$$

2.3 Vecteurs vitesse et accélération du point G, centre de masse du solide

$$\text{Sa position est définie précédemment par : } \vec{OG} = a \vec{x}_i + b \vec{z}_i$$

Sa vitesse peut être déterminée dans le repère R_i de deux manières :

- par dérivation :

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0 \vec{OG}}{dt} = \frac{d^i \vec{OG}}{dt} + \vec{\Omega}_0 \wedge \vec{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\psi \\ 0 \end{pmatrix} = a\dot{\psi} \vec{y}_i$$

- par composition des vitesses :

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_0 \wedge \vec{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\psi \\ 0 \end{pmatrix} = a\dot{\psi} \vec{y}_i$$

Dans le repère R_0 , la vitesse aura pour expression : $\vec{V}^0(G) = -a\dot{\psi} \sin\psi \vec{x}_0 + a\dot{\psi} \cos\psi \vec{y}_0$

Le vecteur accélération de G s'obtient aisément en dérivant l'expression de la vitesse.

$$\text{Dans le repère } R_i : \vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0 V^0(G)}{dt} = -a\dot{\Psi}^2 \vec{x}_i + a\ddot{\Psi} \vec{y}_i$$

$$\begin{aligned}\text{Dans le repère } R_0 : \vec{\gamma}^0(G) &= -a\dot{\Psi}^2 (\cos\Psi \vec{x}_0 + \sin\Psi \vec{y}_0) + a\ddot{\Psi} (-\sin\Psi \vec{x}_0 + \cos\Psi \vec{y}_0) \\ \vec{\gamma}^0(G) &= -a(\dot{\Psi} \sin\Psi + \dot{\Psi}^2 \cos\Psi) \vec{x}_0 + a(\dot{\Psi} \cos\Psi - \dot{\Psi}^2 \sin\Psi) \vec{y}_0\end{aligned}$$

Elle peut aussi être obtenue en dérivant l'expression du vecteur vitesse, dans le repère R_0 .

3. Etude cinématique

Ces éléments cinématiques nous permettent de déterminer les torseurs cinématiques et dynamiques. Afin de simplifier le problème nous choisirons de déterminer les moments cinématiques et dynamiques au point O appartenant à l'axe de rotation.

3.1 Torseur cinématique

Le solide (S) étant quelconque, sa matrice d'inertie en O dans le repère lié au solide s'écrira :

$$I_o(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_i}$$

Les éléments de réduction du torseur cinématique au point O s'écriront dans R_i :

$$\text{La résultante cinématique : } \vec{P} = m\vec{V}^0(G) = ma\dot{\Psi} \vec{y}_i$$

$$\text{Le moment cinématique au point } O : \vec{\sigma}_o(S) = m\vec{OG} \wedge \vec{V}^0(O) + I_o(S) \vec{\Omega}_i^0$$

Comme la vitesse du point O , est nulle alors le moment cinématique aura pour expression :

$$\vec{\sigma}_o(S) = I_o(S) \vec{\Omega}_i^0 = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}_{R_i} = -E\dot{\Psi} \vec{i}_i - D\dot{\Psi} \vec{j}_i + C\dot{\Psi} \vec{z}_i$$

3.2 Torseur dynamique

Les éléments de réduction du torseur dynamique au point O s'écriront dans R_i :

$$\text{La résultante dynamique : } \vec{D} = m\vec{\gamma}^0(G) = -ma\dot{\Psi}^2 \vec{x}_i + ma\ddot{\Psi} \vec{y}_i$$

$$\text{Le moment cinématique au point } O : \vec{\delta}_o(S) = \frac{d^o \vec{\sigma}_o(S)}{dt}$$

$$\vec{\delta}_s(S) = \frac{d^i(I_0(S)\vec{\Omega}_s^0)}{dt} + \vec{\Omega}_s^0 \wedge I_0(S)\vec{\Omega}_s^0 = I_0(S)\vec{\dot{\Omega}}_s^0 + \vec{\Omega}_s^0 \wedge I_0(S)\vec{\Omega}_s^0$$

$$\vec{\delta}_s(\mathcal{E}) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_s} \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ \Psi \end{bmatrix}_{R_s} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi \end{bmatrix}_{R_s} \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_s} \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ \Psi \end{bmatrix}_{R_s}$$

$$\vec{\delta}_s(S) = (-E\ddot{\Psi} + D\dot{\Psi}^2)\vec{i}_s - (D\ddot{\Psi} + E\dot{\Psi}^2)\vec{j}_s + C\ddot{\Psi}\vec{z}_s$$

le moment dynamique peut être exprimé dans la base R_0 en utilisant la matrice de passage.

$$\vec{\delta}_s(S) = \left[(-E\ddot{\Psi} + D\dot{\Psi}^2)\cos\Psi + (D\ddot{\Psi} + E\dot{\Psi}^2)\sin\Psi \right] \vec{i}_0$$

$$+ \left[(-E\ddot{\Psi} + D\dot{\Psi}^2)\sin\Psi - (D\ddot{\Psi} + E\dot{\Psi}^2)\cos\Psi \right] \vec{j}_0 + C\ddot{\Psi}\vec{z}_0$$

3.3 Energie cinétique

Comme le solide a un mouvement de rotation pur autour d'un axe (Δ) confondu avec l'axe $\vec{z}_s = \vec{z}_0$, son énergie cinétique est donnée par :

$$E_c^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_s^0 \\ \vec{V}^0(O) \\ \vec{\sigma}_0(S) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{V}^0(G) \\ \vec{\Omega}_s^0 \\ \vec{\sigma}_0(S) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_s^0 \vec{\sigma}_0(S) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_s^{0T} I_0(S) \vec{\Omega}_s^0$$

$$E_c^0 = \frac{1}{2} \dot{\Psi} \vec{z}_s^T I_0(S) \dot{\Psi} \vec{z}_s = \frac{1}{2} \dot{\Psi}^2 \vec{z}_s^T I_0(S) \vec{z}_s = \frac{1}{2} \dot{\Psi}^2 I_{zz}(S)$$

$$E_c^0 = \frac{1}{2} C \dot{\Psi}^2$$

4. Les différentes actions mécaniques exercées sur le solide

Le solide est soumis à l'action de pesanteur due à son propre poids, aux actions de liaisons au niveau des articulations qui sont intermédiaire entre le bâti fixe et le solide, mais aussi à une action motrice où de freinage qui permet de mettre le solide en mouvement ou de le freiner s'il est déjà en mouvement.

4.1 Action de pesanteur

Au point G centre d'inertie du solide, l'action de pesanteur est représentée par le torseur

ayant pour éléments de réduction : $\begin{cases} \vec{R}_G = -mg \vec{z}_s \\ M_G = 0 \end{cases}$

Par la formule de transport nous pouvons exprimer le moment au point O , il est donné par :

$$\vec{M}_o = \vec{M}_G + \vec{OG} \wedge \vec{R}_p = \vec{OG} \wedge \vec{R}_p = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = mga \vec{y}_z$$

Dans le repère R_0 , il s'écritra : $\vec{M}_o = -mga \sin \Psi \vec{x}_0 + mga \cos \Psi \vec{y}_0$

4.2 Action due à la liaison rotatoire entre le bâti fixe et le solide

L'action de liaison entre le solide et le bâti est représentée par un torseur dont les éléments de

réduction sont :
$$\begin{cases} \vec{R}_L = R_{Lx} \vec{x}_0 + R_{Ly} \vec{y}_0 + R_{Lz} \vec{z}_0 \\ \vec{M}_{LO} = M_{Lx} \vec{x}_0 + M_{Ly} \vec{y}_0 + M_{Lz} \vec{z}_0 \end{cases}$$

Les composantes de l'action de liaison sont déterminées à partir des équations finales qui égalisent le moment dynamique au moment des actions extérieures. La nature de l'articulation et le point de calcul du moment peuvent réduire le nombre d'inconnues dans les équations du mouvement.

4.3 Action due au couple moteur ou au couple de freinage

Le solide peut être mis ou maintenu en mouvement de rotation à l'aide d'un couple moteur. Si le solide est déjà en mouvement, pour l'arrêter, il faut aussi appliquer un couple de freinage. Le moment appliqué pour mettre le solide en rotation ou pour l'arrêter est toujours porté par l'axe de rotation.

Dans ce cas, le couple moteur ou le couple de freinage sera représenté par un torseur dont les

éléments de réduction sont :
$$\begin{cases} \vec{R}_m = \vec{0} \\ \vec{M}_o = \Gamma_m \vec{z}_z = \Gamma_m \vec{z}_0 \end{cases}$$

La valeur du couple moteur ou de freinage Γ_m est connue.

5. Principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique dans un repère Galiléen traduit l'égalité entre le torseur des actions extérieures appliquées au solide et le torseur dynamique du solide.

Nous avons ainsi dans le repère R_0 :

$$\begin{cases} \vec{D} \\ \vec{\delta}_o(S) \end{cases} = \begin{cases} \vec{R}_p \\ M_0 \end{cases} + \begin{cases} \vec{R}_L \\ M_{LO} \end{cases} + \begin{cases} \vec{R}_m \\ \Gamma_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{D} = \vec{R}_p + \vec{R}_L + \vec{R}_m \\ \vec{\delta}_o(S) = M_0 + M_{LO} + \Gamma_m \end{cases}$$

$$-ma(\ddot{\Psi} \sin \Psi + \dot{\Psi}^2 \cos \Psi) = R_{Lx} \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$ma(\ddot{\Psi} \cos \Psi - \dot{\Psi}^2 \sin \Psi) = R_{Ly} \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$0 = -mg + R_{Lz} \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$(-E\ddot{\Psi} + D\dot{\Psi}^2) \cos \Psi + (D\ddot{\Psi} + E\dot{\Psi}^2) \sin \Psi = M_{Lx} \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$(-E\ddot{\Psi} + D\dot{\Psi}^2) \sin \Psi - (D\ddot{\Psi} + E\dot{\Psi}^2) \cos \Psi = mga + M_{Ly} \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$\ddot{C\Psi} = M_{Lz} + \Gamma_m \quad \dots \dots \dots (6)$$

Nous avons 06 équations avec 07 inconnues : $\Psi, R_{Lx}, R_{Ly}, R_{Lz}, M_{Lx}, M_{Ly}, M_{Lz}$

Une septième équation sera donnée par la nature physique de la liaison et elle permettra de résoudre le système d'équation complètement.

L'équation (6) permet de déterminer la valeur de Ψ et en la remplaçant dans les autres équations on déduit les valeurs de toutes les inconnues.

6. Equilibrage statique et dynamique des rotors et des roues

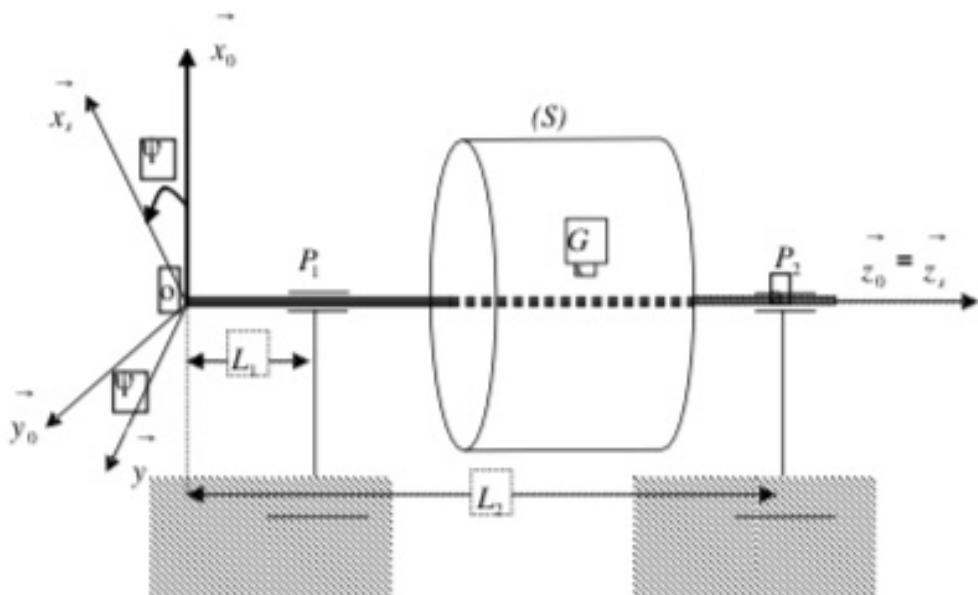
6.1 Mouvements de rotation autour d'un axe fixe d'un solide non équilibré

Soit un rotor ou une roue (S) assimilé à un disque de rayon R et d'épaisseur e . On choisit un repère fixe $\vec{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti fixe. Le rotor (S) est lié au bâti par l'intermédiaire de deux paliers (P_1) et (P_2) de centres respectifs \vec{P}_1 et \vec{P}_2 tel que l'axe $\vec{P}_1\vec{P}_2$ soit confondu avec l'axe de rotation \vec{Oz}_0 . Pour construire un trièdre direct on considère que l'axe \vec{Ox}_0 est vertical ascendant.

On suppose que le rotor est non équilibré, le centre de masse du rotor n'est pas situé sur l'axe de rotation et ses coordonnées ne sont pas connues au départ.

On choisit un second repère $\vec{R}_i(O, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ de même centre O et lié au rotor. Son mouvement de rotation est repéré à chaque instant par un angle $\Psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_i) = (\vec{y}_0, \vec{y}_i)$ avec $\vec{\Omega}_i = \dot{\Psi} \vec{z}_i = \dot{\Psi} \vec{z}_0$ car $\vec{z}_i = \vec{z}_0$.

Le vecteur position du centre de masse du rotor est donné dans le repère $\vec{R}_i(O, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ par : $\vec{OG} = a \vec{x}_i + b \vec{y}_i + c \vec{z}_i$



6.2 Etude cinétique du mouvement

La matrice de passage du repère R_i vers le repère R_0 est donnée par :

$$\vec{x}_i = \cos \psi \vec{x}_0 + \sin \psi \vec{y}_0$$

$$\vec{y}_i = -\sin \psi \vec{x}_0 + \cos \psi \vec{y}_0$$

$$\vec{z}_i = \vec{z}_0$$

La matrice d'inertie du solide au point O dans la base $R_i(O, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ est une matrice

$$\text{quelconque de la forme : } I_O \mathcal{G} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_i}$$

Le vecteur position du centre de masse du solide dans cette même base s'écrit :

$$\vec{OG} = a \vec{x}_i + b \vec{y}_i + c \vec{z}_i$$

La vitesse du centre de masse G se déduit par dérivation de cette expression :

$$\vec{V^0}(G) = \frac{d^0 \vec{OG}}{dt} = \frac{d^i \vec{OG}}{dt} + \vec{\Omega}_i^0 \wedge \vec{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \dot{\psi} \\ a \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} = -b \dot{\psi} \vec{x}_i + a \dot{\psi} \vec{y}_i$$

Dans la base R_0 le vecteur vitesse s'écrirait :

$$\vec{V}^0(G) = -b\dot{\psi}(\cos\psi \vec{x}_0 + \sin\psi \vec{y}_0) + a\dot{\psi}(-\sin\psi \vec{x}_0 + \cos\psi \vec{y}_0)$$

$$\vec{V}^0(G) = -(b\dot{\psi} \cos\psi + a\dot{\psi} \sin\psi) \vec{x}_0 + (a\dot{\psi} \cos\psi - b\dot{\psi} \sin\psi) \vec{y}_0$$

Le vecteur accélération s'obtient dans R_i en dérivant encore une fois le vecteur vitesse :

$$\vec{\gamma}^0(G) = -b\ddot{\psi} \vec{x}_i - b\dot{\psi}^2 \vec{y}_i + a\ddot{\psi} \vec{y}_i - a\dot{\psi}^2 \vec{x}_i = -(b\ddot{\psi} + a\dot{\psi}^2) \vec{x}_i + (a\ddot{\psi} - b\dot{\psi}^2) \vec{y}_i$$

Dans la base R_0 le vecteur accélération aura pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}^0(G) = & - \left[(b\ddot{\psi} + a\dot{\psi}^2) \cos\psi + (a\ddot{\psi} - b\dot{\psi}^2) \sin\psi \right] \vec{x}_0 \\ & + \left[-(b\ddot{\psi} + a\dot{\psi}^2) \sin\psi + (a\ddot{\psi} - b\dot{\psi}^2) \cos\psi \right] \vec{y}_0 \end{aligned}$$

Le torseur cinétique a pour éléments de réduction dans la base R_i :

La résultante cinétique : $\vec{P} = m\vec{V}^0(G)$

Le moment cinétique : $\vec{\sigma}_0 = \vec{\sigma}_G + m\vec{OG} \wedge \vec{V}^0(O) = \vec{\sigma}_G = I_o(S) \vec{\Omega}_i$

Le torseur dynamique a pour éléments de réduction dans la base R_i :

La résultante dynamique : $\vec{D} = m\vec{\gamma}^0(G)$

$$\begin{aligned} \vec{D} = & -m \left[(b\ddot{\psi} + a\dot{\psi}^2) \cos\psi + (a\ddot{\psi} - b\dot{\psi}^2) \sin\psi \right] \vec{x}_i \\ & + m \left[-(b\ddot{\psi} + a\dot{\psi}^2) \sin\psi + (a\ddot{\psi} - b\dot{\psi}^2) \cos\psi \right] \vec{y}_i \end{aligned}$$

Le moment dynamique : $\vec{\delta}_0 = \frac{d^0 \vec{\sigma}_0}{dt} = \frac{d^i \vec{\sigma}_0}{dt} + \vec{\Omega}_i \wedge \vec{\sigma}_0 = I_o(S) \vec{\Omega}_i + \vec{\Omega}_i \wedge I_o(S) \vec{\Omega}_i$

$$\vec{\delta}_0 = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_0 &= -E\ddot{\Psi} \vec{x}_i + D\ddot{\Psi} \vec{y}_i + C\ddot{\Psi} \vec{z}_i - D\Psi^2 \vec{x}_i - E\Psi^2 \vec{y}_i \\ \vec{\delta}_0 &= (-E\ddot{\Psi} + D\Psi^2) \vec{x}_i - (D\ddot{\Psi} + E\Psi^2) \vec{y}_i + C\ddot{\Psi} \vec{z}_i\end{aligned}$$

Dans la base R_0 , le moment dynamique a pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_0 &= (-E\ddot{\Psi} + D\Psi^2)(\cos\Psi \vec{x}_0 + \sin\Psi \vec{y}_0) - (D\ddot{\Psi} + E\Psi^2)(-\sin\Psi \vec{x}_0 + \cos\Psi \vec{y}_0) + C\ddot{\Psi} \vec{z}_0 \\ \vec{\delta}_0 &= \left[(-E\ddot{\Psi} + D\Psi^2)\cos\Psi + (D\ddot{\Psi} + E\Psi^2)\sin\Psi \right] \vec{x}_0 \\ &\quad + \left[(-E\ddot{\Psi} + D\Psi^2)\sin\Psi - (D\ddot{\Psi} + E\Psi^2)\cos\Psi \right] \vec{y}_0 \\ &\quad + C\ddot{\Psi} \vec{z}_0\end{aligned}$$

6.3 Actions mécaniques extérieures exercées sur le rotor

Les actions mécaniques extérieures exercées sur le rotor sont de trois natures différentes :

- l'action de pesanteur due au poids du rotor ;
- l'action de liaison entre le rotor et le bâti au niveau des paliers ;
- l'action due au couple moteur si le rotor doit être maintenu en mouvement ou au couple de freinage si on doit arrêter le mouvement de rotation.

6.3.1. Action de pesanteur

L'action de pesanteur est représentée par un torseur dont les éléments de réduction sont :

La résultante des actions de pesanteurs : $\vec{R}_p = -mg \vec{x}_0$

Le moment résultant de ces actions au point G est nul : $\vec{M}_{G_p} = 0$, en appliquant la formule

de transport dans la base R_0 , on déduit le moment au point O : $\vec{M}_{O_p} = \vec{M}_{G_p} + \vec{OG} \wedge \vec{R}_p$

$$\vec{M}_{O_p} = \begin{pmatrix} a \cos\Psi - b \sin\Psi \\ a \sin\Psi + b \cos\Psi \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -mgc \vec{y}_0 + mg(a \sin\Psi + b \cos\Psi) \vec{z}_0$$

6.3.2. Action de liaison entre solide et Bâti au niveau du palier (P_1)

L'action de liaison est une force dont la ligne d'action passe par le point P_1 centre du palier.

Cette action est représentée par un torseur dont les éléments de réduction au point O sont :

$$\text{La résultante de l'action de liaison : } \vec{R}_1 = \vec{R}_{1x} \vec{x}_0 + \vec{R}_{1y} \vec{y}_0 + \vec{R}_{1z} \vec{z}_0 ,$$

Le moment de l'action de liaison en P_1 est nul : $\vec{M}_{P_1} = \vec{0}$; en appliquant la formule de transport, on déduit le moment au point O dans la base R_0 : $\vec{M}_{O1} = \vec{M}_{P_1} + \vec{OP}_1 \wedge \vec{R}_1$

$$\vec{M}_{O1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \vec{R}_{1x} \\ \vec{R}_{1y} \\ \vec{R}_{1z} \end{pmatrix} = -L_1 \vec{R}_{1y} \vec{x}_0 + L_1 \vec{R}_{1x} \vec{y}_0$$

6.3.3. Action de liaison entre solide et Bâti au niveau du palier (P_2)

De la même manière que précédemment, l'action de liaison est une force dont la ligne d'action passe par le point P_2 centre du palier.

Cette action est représentée par un torseur dont les éléments de réduction au point O sont :

$$\text{La résultante de l'action de liaison : } \vec{R}_2 = \vec{R}_{2x} \vec{x}_0 + \vec{R}_{2y} \vec{y}_0 + \vec{R}_{2z} \vec{z}_0 ,$$

Le moment de l'action de liaison en P_2 est nul : $\vec{M}_{P_2} = \vec{0}$; en appliquant la formule de transport, on déduit le moment au point O dans la base R_0 : $\vec{M}_{O2} = \vec{M}_{P_2} + \vec{OP}_2 \wedge \vec{R}_2$

$$\vec{M}_{O2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \vec{R}_{2x} \\ \vec{R}_{2y} \\ \vec{R}_{2z} \end{pmatrix} = -L_2 \vec{R}_{2y} \vec{x}_0 + L_2 \vec{R}_{2x} \vec{y}_0$$

6.3.4. Action du couple moteur

Le couple moteur permet de mettre en mouvement de rotation le rotor ou le maintenir s'il est déjà en mouvement, il est représenté par un torseur dont les éléments de réduction sont :

$$\text{La résultante des forces motrices : } \vec{R}_m = \vec{0}$$

$$\text{Le moment résultant au point } O : \vec{M}_{Om} = \Gamma_m \vec{z}_0 , \text{ le moment est porté par l'axe de rotation.}$$

6.3.5. Application des théorèmes généraux de la dynamique au rotor

Le torseur dynamique du rotor est égal à la somme des torseurs des actions extérieures. Cette égalité nous donne les deux équations vectorielles qui donneront les 6 équations scalaires de la dynamique qui décrivent le mouvement du rotor.

$$\begin{cases} \vec{D} = \vec{R}_f + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_m \\ \vec{\delta}_0 = M_{o\rho} + M_{oi} + M_{o2} + M_{om} \end{cases}$$

Cette égalité se traduit par :

$$-m\left[\ddot{(b\Psi+a\Psi^2)}\cos\Psi + \dot{(a\Psi-b\Psi^2)}\sin\Psi\right] = R_{1x} + R_{2x} - mg \quad \dots \quad (1)$$

$$m\left[-\ddot{(b\Psi+a\Psi^2)}\sin\Psi + \dot{(a\Psi-b\Psi^2)}\cos\Psi\right] = R_{1y} + R_{2y} \quad \dots \quad (2)$$

$$0 = R_{1z} + R_{2z} \quad \dots \quad (3)$$

$$\left[-\ddot{(E\Psi+D\Psi^2)}\cos\Psi + \dot{(D\Psi+E\Psi^2)}\sin\Psi\right] = -L_1R_{1y} - L_2R_{2y} \quad \dots \quad (4)$$

$$\left[-\ddot{(E\Psi+D\Psi^2)}\sin\Psi - \dot{(D\Psi+E\Psi^2)}\cos\Psi\right] = -mgc + L_1R_{1x} + L_2R_{2x} \quad \dots \quad (5)$$

$$\ddot{C\Psi} = mg(a\sin\Psi + b\cos\Psi) + \Gamma_m \quad \dots \quad (6)$$

Comme le couple moteur est connu, la dernière relation qui est l'équation du mouvement permet de déterminer la valeur de Ψ en fonction du temps.

Connaissant Ψ , les autres variables sont déterminées, notamment les composantes des actions de liaison au niveau des paliers.

Les équations (1), (2), (4), (5) permettent de déduire facilement par multiplication par L_1 ou L_2 et puis soustraction de déterminer les valeurs de :

$$R_{1x} = \frac{1}{L_2 - L_1} \left[-mg(c - L_2) + \left(E_2 \ddot{\Psi} - D_2 \dot{\Psi}^2 \right) \sin\Psi + \left(D_2 \ddot{\Psi} + E_2 \dot{\Psi}^2 \right) \cos\Psi \right]$$

$$R_{1y} = \frac{1}{L_2 - L_1} \left[\left(D_2 \ddot{\Psi} + E_2 \dot{\Psi}^2 \right) \sin\Psi + \left(-E_2 \ddot{\Psi} + D_2 \dot{\Psi}^2 \right) \cos\Psi \right]$$

$$R_{2x} = \frac{1}{L_2 - L_1} \left[mg(c - L_1) + (-E_1 \ddot{\Psi} + D_1 \dot{\Psi}^2) \sin \Psi + (D_1 \ddot{\Psi} - E_1 \dot{\Psi}^2) \cos \Psi \right]$$

$$R_{2y} = \frac{1}{L_2 - L_1} \left[-(D_1 \ddot{\Psi} + E_1 \dot{\Psi}^2) \sin \Psi + (E_1 \ddot{\Psi} - D_1 \dot{\Psi}^2) \cos \Psi \right]$$

avec : $E_1 = E - maL_1$; $E_2 = E - maL_2$; $D_1 = D - mbL_1$; $D_2 = D - mbL_2$

Ces composantes agissant sur l'axe du rotor, dépendent de $\ddot{\Psi}$, $\dot{\Psi}$ mais surtout de $\dot{\Psi}^2$ qui peut atteindre des valeurs assez élevées rapidement. Ses actions génèrent des vibrations aux niveaux des paliers, ce qui réduit leur durée de vie et conduisent à une usure prématuée des pièces mécaniques en rotation.

6.3.6. Principe de l'équilibrage statique et dynamique

Pour éviter ces problèmes d'usure et allonger la durée de vie des paliers et des axes, il faut que les actions aux niveaux des liaisons soient réduites au minimum ou nulles.

Les expressions précédentes montrent que les actions de liaison ont des valeurs minimales

lorsque nous avons les conditions suivantes : $\begin{pmatrix} a = b = 0 \\ D = E = 0 \end{pmatrix}$

- * $a = b = 0$: implique que le centre de masse du rotor est situé sur l'axe de rotation du rotor. On dit alors que l'on a réalisé l'équilibrage statique. Le rotor a un équilibre statique indifférent.
- * $D = E = 0$: les produits d'inertie sont nuls, et l'axe de rotation est un axe principal d'inertie.

Lorsque les deux conditions sont réunies, on dit que l'on a réalisé un équilibrage dynamique.

Dans ce cas les actions de liaisons sont réduites à :

$$R_{1x} = -mg \frac{(c - L_2)}{L_2 - L_1} ; \quad R_{1y} = 0$$

$$R_{2x} = mg \frac{(c - L_1)}{L_2 - L_1} ; \quad R_{2y} = 0$$

En réalité, les machines tournantes, les rotors, les axes, ...etc , sont équilibrés lors de la construction, et l'équilibrage est affiné par la suite par ajout de petites masses ponctuelles dans des plans orthogonaux à l'axe de rotation afin de ramener le centre d'inertie de l'ensemble sur l'axe de rotation et d'éliminer les produits d'inertie qui sont la source des vibrations.

$$R_{2x} = \frac{1}{L_2 - L_1} \left[mg(c - L_1) + (-E_1 \ddot{\Psi} + D_1 \dot{\Psi}^2) \sin \Psi + (D_1 \ddot{\Psi} - E_1 \dot{\Psi}^2) \cos \Psi \right]$$

$$R_{2y} = \frac{1}{L_2 - L_1} \left[-(D_1 \ddot{\Psi} + E_1 \dot{\Psi}^2) \sin \Psi + (E_1 \ddot{\Psi} - D_1 \dot{\Psi}^2) \cos \Psi \right]$$

avec : $E_1 = E - maL_1$; $E_2 = E - maL_2$; $D_1 = D - mbL_1$; $D_2 = D - mbL_2$

Ces composantes agissant sur l'axe du rotor, dépendent de $\dot{\Psi}$, $\ddot{\Psi}$ mais surtout de $\dot{\Psi}^2$ qui peut atteindre des valeurs assez élevées rapidement. Ses actions génèrent des vibrations aux niveaux des paliers, ce qui réduit leur durée de vie et conduisent à une usure prématuée des pièces mécaniques en rotation.

6.3.6. Principe de l'équilibrage statique et dynamique

Pour éviter ces problèmes d'usure et allonger la durée de vie des paliers et des axes, il faut que les actions aux niveaux des liaisons soient réduites au minimum ou nulles.

Les expressions précédentes montrent que les actions de liaison ont des valeurs minimales

lorsque nous avons les conditions suivantes : $\begin{cases} a = b = 0 \\ D = E = 0 \end{cases}$

- * $a = b = 0$: implique que le centre de masse du rotor est situé sur l'axe de rotation du rotor. On dit alors que l'on a réalisé l'équilibrage statique. Le rotor a un équilibre statique indifférent.
- * $D = E = 0$: les produits d'inertie sont nuls, et l'axe de rotation est un axe principal d'inertie.

Lorsque les deux conditions sont réunies, on dit que l'on a réalisé un équilibrage dynamique.

Dans ce cas les actions de liaisons sont réduites à :

$$R_{1x} = -mg \frac{(c - L_2)}{L_2 - L_1} ; \quad R_{1y} = 0$$

$$R_{2x} = mg \frac{(c - L_1)}{L_2 - L_1} ; \quad R_{2y} = 0$$

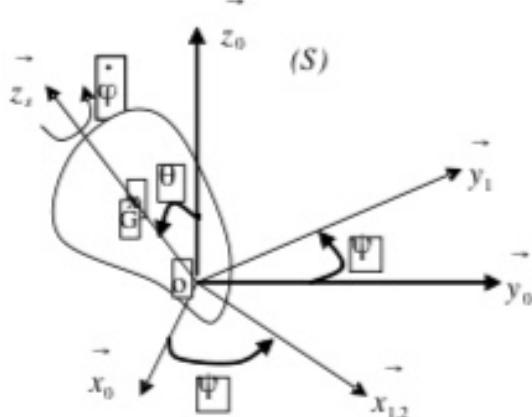
En réalité, les machines tournantes, les rotors, les axes, ...etc , sont équilibrés lors de la construction, et l'équilibrage est affiné par la suite par ajout de petites masses ponctuelles dans des plans orthogonaux à l'axe de rotation afin de ramener le centre d'inertie de l'ensemble sur l'axe de rotation et d'éliminer les produits d'inertie qui sont la source des vibrations.

Dans la pratique, lorsqu'une machine tournante fonctionne pendant un certain nombre d'années, elle perd les caractéristiques mécaniques initiales et des vibrations apparaissent. Pour les éliminer, on procède alors à un équilibrage. Celui-ci est réalisé à l'aide d'un système électronique (accéléromètres) permettant de mesurer les accélérations absolues ou relatives de paliers. Le signal électrique enregistré permet par une analyse de relever le spectre vibratoire et déterminer la nature du défaut qui a conduit à la vibration. Des calculs permettent de déterminer les valeurs des paramètres de l'équilibrage.

7. Rotation d'un solide autour d'un point fixe : Angles d'Euler

On considère un repère fixe orthonormé direct $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et un solide (S) fixé au centre O de ce repère. On choisit un repère orthonormé direct $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié au solide tel que les axes $\vec{Ox}_1, \vec{Oy}_1, \vec{Oz}_1$ soient des axes principaux d'inertie.

Les axes du repère R_1 sont repérés par les angles d'Euler par rapport au repère fixe R_0 . Le mouvement instantané du solide est composé de trois rotations exprimées par les angles d'Euler ψ, θ, φ .



- la première rotation de vitesse angulaire $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi} \vec{z}_0 = \dot{\psi} \vec{z}_1$ autour de l'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$
s'appelle : **la précession du solide** ;
- la seconde rotation de vitesse angulaire $\vec{\Omega}_2^1 = \dot{\theta} \vec{x}_1 = \dot{\theta} \vec{x}_2$ autour de l'axe $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$
s'appelle : **la nutation du solide** ;
- la troisième rotation de vitesse angulaire $\vec{\Omega}_3^2 = \dot{\varphi} \vec{z}_2 = \dot{\varphi} \vec{z}_1$ autour de l'axe $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$
s'appelle : **la rotation propre du solide** ;

La vitesse de rotation instantanée du solide par rapport au repère R_0 est donnée par :

$$\vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}_2 + \vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_0^0 = \dot{\varphi} \vec{z}_2 + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\psi} \vec{z}_0$$

Son expression dans le repère R_s lié au solide est déjà déterminée en cinématique du solide :

$$\vec{\Omega}_s^0 = \begin{cases} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{cases}; \text{ on pose } \vec{\Omega}_s^0 = \begin{pmatrix} \Omega_{ss} \\ \Omega_{sy} \\ \Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_s}$$

La matrice d'inertie du solide est connue au point O dans le repère $R_s(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$, elle est

$$\text{de la forme : } I_O(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_s}$$

Nous traduirons les éléments cinétiques dans la même base.

Le moment cinétique du solide au point O est donné dans le repère R_s par la relation :

$$\vec{\sigma}^0(O) = I_O(S) \vec{\Omega}_s^0 + \vec{OG} \wedge m \vec{V}^0(O) = I_O(S) \vec{\Omega}_s^0$$

$$\vec{\sigma}^0(O) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_s} \begin{pmatrix} \Omega_{ss} \\ \Omega_{sy} \\ \Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_s} = \begin{pmatrix} A\Omega_{ss} \\ B\Omega_{sy} \\ C\Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_s}$$

Le moment dynamique se déduit par dérivation :

$$\vec{\delta}^0(O) = \frac{d^0 \vec{\sigma}^0(O)}{dt} = \frac{d^0 \vec{\Omega}_s^0}{dt} + \vec{\Omega}_s^0 \wedge \vec{\sigma}^0(O)$$

$$\vec{\delta}^0(O) = I_O(S) \vec{\dot{\Omega}}_s^0 + \vec{\Omega}_s^0 \wedge \vec{\sigma}^0(O)$$

$$R_i \begin{cases} A\dot{\Omega}_{xx} + (C - B)\Omega_{xy}\Omega_{xz} = 0 \\ B\dot{\Omega}_{xy} + (A - C)\Omega_{xx}\Omega_{xz} = 0 \\ C\dot{\Omega}_{xz} + (B - A)\Omega_{xy}\Omega_{xx} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\sigma^0}(G) = I_G(S)\vec{\Omega}_i^0 = Cte \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_i} \begin{pmatrix} \Omega_{xx} \\ \Omega_{xy} \\ \Omega_{xz} \end{pmatrix}_{R_i} = \begin{pmatrix} A\Omega_{xx} \\ B\Omega_{xy} \\ C\Omega_{xz} \end{pmatrix}_{R_i} = Cte$$

Le moment cinétique est constant donc son module est aussi constant, on a alors:

$$A^2\Omega_{xx}^2 + B^2\Omega_{xy}^2 + C^2\Omega_{xz}^2 = Cte$$

Le centre d'inertie du solide est un point fixe donc son énergie potentielle $E_p = E_{p0}$ reste constante. Comme le champ des forces est conservatif nous pouvons écrire $E_c + E_p = E_c + E_{p0}$

L'énergie cinétique du solide est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_i^{0T} I_G(S)\vec{\Omega}_i^0 = \frac{1}{2}(\Omega_{xx}, \Omega_{xy}, \Omega_{xz}) \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_i} \begin{pmatrix} \Omega_{xx} \\ \Omega_{xy} \\ \Omega_{xz} \end{pmatrix}_{R_i} = Cte$$

$$\text{d'où } A\Omega_{xx}^2 + B\Omega_{xy}^2 + C\Omega_{xz}^2 = Cte$$

Les composantes de la vitesse de rotation $(\Omega_{xx}, \Omega_{xy}, \Omega_{xz})$ en fonction du temps, sont connues car elles sont solutions du système d'équations précédentes.

Pour trouver la valeur des angles d'Euler en fonction du temps, on choisit l'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ comme étant l'axe du moment cinétique $\vec{\sigma^0}(G)$, alors il sera parallèle à $\vec{\Omega}_i^0 = \dot{\psi} \vec{z}_0$; on peut alors écrire : $\vec{\sigma^0}(G) = \lambda \vec{z}_0$ or nous pouvons exprimer le vecteur \vec{z}_0 dans le repère R_i par les matrices de passage :

$$\vec{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{R_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{R_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}_{R_i} = \begin{bmatrix} \sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}_{R_i}$$

La dérivée $\frac{d^0 \vec{\sigma}_0(S)}{dt}$ correspond en fait à la vitesse de l'extrémité du vecteur moment

cinétique dans son mouvement de rotation autour de l'axe fixe \vec{z}_0 à une vitesse angulaire de précession : $\vec{\Omega}_{prec} = \dot{\psi} \vec{z}_0$, qui se traduit par la relation :

$$\frac{d^0 \vec{\sigma}_0(S)}{dt} = \vec{\Omega}_{prec} \wedge \vec{\sigma}_0(S) = \vec{\Omega}_{prec} \wedge I_\Delta \vec{\Omega}_\Delta$$

I_Δ : est le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ .

On déduit : $\vec{\Omega}_{prec} \wedge I_\Delta \vec{\Omega}_\Delta = \vec{OG}^\Delta m g$ qui peut s'écrire aussi sous la forme

$$I_\Delta \vec{\Omega}_\Delta \wedge \vec{\Omega}_{prec} + \vec{OG}^\Delta m g = \vec{0}$$

On définit ainsi le couple gyroscopique qui a pour expression :

$$\vec{M}_{Gyro} = I_\Delta \vec{\Omega}_\Delta \wedge \vec{\Omega}_{prec} = \vec{\sigma}_0(S) \wedge \vec{\Omega}_{prec}$$

Nous avons alors à chaque instant l'égalité : $\vec{M}_{Gyro} + \vec{M}_{Ext} = \vec{0}$

On déduit alors une relation entre la vitesse de rotation propre et la vitesse de rotation de

$$\text{précession en développant la relation : } I_\Delta \vec{\Omega}_\Delta \wedge \vec{\Omega}_{prec} + \vec{OG}^\Delta m g = \vec{0}$$

$$I_\Delta \dot{\psi} e_\Delta \wedge \dot{\psi} z_0 + a e_\Delta \wedge -mg z_0 = \vec{0}$$

$$I_\Delta \ddot{\psi} (e_\Delta \wedge z_0) - mga (e_\Delta \wedge z_0) = \vec{0}$$

$$(I_\Delta \ddot{\psi} - mga)(e_\Delta \wedge z_0) = \vec{0} \Rightarrow I_\Delta \ddot{\psi} - mga = 0 \Leftrightarrow \dot{\psi} = \frac{mga}{I_\Delta \ddot{\psi}}$$

Le résultat ci dessus montre que si la rotation propre est assez grande, la nutation est négligeable et la précession pratiquement uniforme, elle s'effectue avec une vitesse angulaire inversement proportionnelle à la vitesse de rotation propre.

Lorsqu'un gyroscope est soumis à une rotation imposée, il réagit en créant un couple gyroscopique et adoptant une rotation qui envoie l'axe du gyroscope s'aligner sur l'axe de la rotation imposé.

Plus simplement, on peut dire que l'axe du gyroscope tend, en empruntant le plus court chemin, à s'aligner sur l'axe du vecteur du moment extérieur du aux actions extérieures.

Dans le cas de l'approximation gyroscopique, deux cas peuvent se présenter :

- a) Si le moment des actions extérieures est nul, l'axe du gyroscope garde une direction

$$\text{constante} : \vec{M}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d^0 \vec{\sigma}_0(S)}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_0(S) = Cte ;$$

- b) Si $\vec{M}_{ext} = M \vec{y}_0$ alors : $I_A \vec{\Omega}_A \wedge \vec{\Omega}_{prec} + \vec{M}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow I_A \vec{\Omega}_A \wedge \vec{\Psi}_{z_0} + M \vec{x}_0 = \vec{0}$

$\vec{\Omega}_A$: doit être porté par l'axe \vec{x}_0 pour que l'équation puisse avoir une solution.

$$I_A \dot{\vec{\Psi}}_{x_0} \wedge \vec{\Psi}_{z_0} + M \vec{y}_0 = \vec{0} \Leftrightarrow -I_A \ddot{\vec{\Psi}} + M = 0 \quad \ddot{\vec{\Psi}} = \frac{M}{I_A}$$

Ce phénomène s'appelle effet gyroscopique.

En d'autre terme pour un gyroscope ayant une rotation propre élevée, si vous appliquer une action sur l'armature pour obtenir une précession, vous faites apparaître la nutation. Pour un gyroscope à cardan cela signifie que si vous lui donner du $\vec{\Psi}$, il vous donnera du $\vec{\theta}$.