UNIVERSITÉ DE LOMÉ

MTH 100: Bases mathématiques

Travaux Dirigés
Devoirs et Examens corrigés
de 2014 à 2021

$$C_n^p = \sum_{k=0}^{m} C_m^k C_{n-m}^{p-k}$$

Cette formule généralise la formule de Pascal. Elle peut être obtenue par un raisonnement combinatoire simple.

UL/FDS/Dep. de Maths 2013-2014

MTH 100, TD1

Exercice 1

1. E est un ensemble, $A, B \subset E$. Montrer que $A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A$.
2. Les E_i sont des ensembles. Prouver que $\prod_{i=1}^{n} E_i = \emptyset \Rightarrow \exists i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $E_i = \emptyset$.
3. E est l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\{1, 2, 3\}$.
   On pose $A_i = \{f \in E, f(0) = i\}$. Montrer que les A_i forment une partition de E.

Exercice 2

1. Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1,2\}))$.
2. Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$? $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

Exercice 3

Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

1) f est-elle une application ?
2) En discutant suivant la valeur de y, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = y$.
3) f est -elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 4

L'application $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z + 1/z$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
Donner l'image par f du cercle trigonométrique.
Donner l'image réciproque par f de $i\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On pose $h = g \circ f$.
Démontrer que :
1) Si f et g sont injectives (*resp.* surjectives) alors h l'est aussi.
2) Si h est injective alors f l'est aussi.
3) Si h est surjective alors g l'est aussi.
4) Si h est injective et f surjective alors g est injective.

Exercice 6

Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. $\forall A, B \subset X,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. $\forall A, B \subset X,\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Exercice 7

Soit X un ensemble. Si $A \subset X$, on note χ_A la fonction caractéristique de A. Montrer que l'application
$\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{F}(X, \{0,1\}),\ A \mapsto \chi_A$ est bijective.

UL/FDS/Dep. de Maths 2013-2014

TD2 de MTH 100

1. On définit la relation binaire $\preceq$ sur $\mathbb{N}^2$ par
$$(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 < y_1) \text{ ou } (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2).$$
   (a) Vérifier que c'est une relation d'ordre.
   (b) La partie $B = \{(2, 10^p) : p \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}^2$ est-elle majorée ?
2. En utilisant la formule du binôme, déterminer $\sum\limits_{0 \leq k \leq n} C_n^k$, $\sum\limits_{0 \leq k \leq n} (-1)^k C_n^k$, $\sum\limits_{0 \leq k \leq n} k C_n^k$.
3. Soit E un ensemble à n éléments. Combien de relations binaires (resp. relations binaires symétriques) peut-on définir sur E ?
4. Soit A une partie à p éléments d'un ensemble E à n éléments. Déterminer le nombre de parties de E contenant exactement k éléments de A.
5. On considère l'ensemble $E = \{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Cet ensemble est-il majoré ? minoré ? A-t-il un plus petit élément ? un plus grand élément ? une borne supérieure ? une borne inférieure ?
6. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels et soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer que $||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$.
   (b) Montrer par récurrence sur n que $|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$.
   (c) Montrer que si pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, |x_k - x_{k+1}| < \varepsilon$, alors $|x_1 - x_n| < (n-1)\varepsilon$.
7. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Montrer que si $a = \sup A$ alors il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a. La réciproque est-elle vraie ?
8. Etudier la convergence des suites (U_n), (V_n) et (W_n) définies par
$$U_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \; V_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}, \; W_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n}.$$
9. Soient a_0 et b_0 deux réels fixés tels que $a_0 < b_0$. On définit les suites (a_n) et (b_n) par
$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}.$$
   Montrer qu'elles sont adjacentes. Que peut-on conclure ?
   En calculant $a_{n+1} + b_{n+1}$, montrer que chacune d'elles converge vers $\frac{a_0 + b_0}{2}$.

Année académiquc 2019-2020

TD de MTH 100 (Bases mathématiques)

Partie 1

Choisir la/les bonne(s) réponse(s).

1. Quelle est la formule vraie parmi les quatre suivantes? (a) $\exists\ x \in \mathbb{R}, \forall\ y \in \mathbb{R}, x+y>0$, (b) $\forall\ x \in \mathbb{R}, \exists\ y \in \mathbb{R}, y^2<x$, (c) $\forall\ x \in \mathbb{R}, \exists\ y \in \mathbb{R}, x+y>0$, (d) $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, |x|<\alpha \Rightarrow |x^2|<\varepsilon$.
2. La négation de la proposition P :"$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 1$" est (a) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x)>1$, (b) $\exists x \notin \mathbb{R}, f(x)>1$, (c) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x)<1$, (d) $\exists x \notin \mathbb{R}, f(x)>1$
3. Soient A, B deux parties de E telles que $B \subset A$. Soit X une partie de E telle que $A \cap X = B$. Alors (a) $X=A$, (b) $X=B$, (c) $X = B \cup Y$ avec $Y \subset \mathscr{C}_E^A$, (d) $X = A \cup Y$ avec $Y \subset \mathscr{C}_E^A$.
4. Soit $f : X \to Y$ une application et soit $A \subset X$. Alors (a) $A = f^{-1}(f(A))$, (b) $A \subset f^{-1}(f(A))$, (c) $A = f(f^{-1}(A))$, (d) $A \subset f(f^{-1}(A))$.
5. Soit $f : X \to Y$ une application injective. Soit A et B deux parties de X telles $B \subset A$. Alors (a) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$; (b) $f(A \setminus B) = f(B) \setminus f(A)$, (c) $f(A \setminus B) = f(B)$, (d) $f(A \setminus B) = f(A)$.
6. Sur $\mathbb{C}$ on considère la relation d'équivalence $z\mathscr{R}z'$ si $|z|=|z'|$. La notation $\mathscr{C}(O,r)$ désigne le cercle de centre O (origine du repère) et de rayon r. Géométriquement, la classe d'équivalence de $2+2i$ est (a) $\mathscr{C}(O,2)$, (b) $\mathscr{C}(O,2\sqrt{2})$, (c) $\mathscr{C}(O,4)$, (d) $\mathscr{C}(O,4\sqrt{2})$.

Partie 2

1. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés suivants.
   (a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y>0$.
   (b) Tout triangle équilatéral a ses angles égaux à 60 degrés.
2. Soit E un ensemble à n éléments et A une partie de E à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A?
3. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application définie par $f(n) = n + (-1)^n$.
   (a) Les entiers n et $f(n)$ sont-ils de même parité?
   (b) L'application f est-elle bijective?
   (c) Calculer $f(f(n))$. En déduire une expression de f^{-1} et résoudre l'équation
   $$347 = n + (-1)^n$$
   où n est un entier inconnu.
4. Soient $x, y, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$. Montrer que
   $$2xy \leq \frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2.$$
5. On pose $u_2 = 1 - \dfrac{1}{2^2}$ et pour $n \geq 3$, $u_n = \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$. Calculer u_n puis $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Année académique 2020-2021

Examen de MTH 100 (Bases mathématiques)
Durée : 01h30

pondre sur votre rabat après avoir noté le numéro de la question. N'oubliez pas de bien renseigner l'entête rabat.

1. Déterminer la valeur de vérité (Vrai ou Faux) des propositions suivantes :
   (a) « $(2 \leq 2) \wedge (3 > 4)$ »
   (b) « $(8 < 2) \vee$ (Porto-Novo est au Brésil.) »
   (c) $0 \leq x \leq 25 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5$

2. Fixons un réel $x \geq 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

3. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
   (a) En discutant suivant la valeur de y, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation f(x) = y.
   (b) f est-elle injective, surjective, bijective ?
   (c) Déterminer $f([-3,-1] \cup [2,4])$.

4. Soit E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, $\{A, B, C, D\} \subset \mathcal{P}(E)$ et $\triangle$ signifiant la différence symétrique. Répondre par Vrai ou Faux :
   (a) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$
   (b) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
   (c) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

5. Etant donné le réel x, la valeur absolue $|x|$ de x est le plus grand des nombres $-x$ et x. Montrer que, si x et y sont deux réels, alors :
   (a) $\max\{x, y\} = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$
   (b) $|x + y| \leq |x| + |y|$
   (c) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

6. Etant donnés $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$, déterminer la valeur de vérité (Vrai ou Faux) des propositions suivantes :
   (a) $A \subset B \Longrightarrow \inf A \geq \inf B$
   (b) $A \subset B \Longrightarrow \sup A < \sup B$
   (c) $\bigcap_{n \geq 1} \left]-\frac{1}{n}, 1\right] =]0, 1]$

7. Montrer que si $U_n \to \ell \in \mathbb{R}$ et $W_n \to \ell' \in \mathbb{R}$ alors $U_n \times W_n \to \ell \times \ell'$.

<u>Examen MTH 100 FDS 2019-2020</u>

1. Répondre par Vrai ou par Faux
   (a) "$(2+4=6) \vee$ (La 13947^{eme} décimale de π est 3)"
   (b) "X est une partie bornée de $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall\, x \in X, \exists\, \alpha > 0$ tel que $|x| \leq \alpha$"
   (c) "P et Q étant des assertions mathématiques, la négation de l'assertion $P \Rightarrow (P \vee Q)$ est non Q.

2. Considérons l'énoncé suivant : "on ne peut voter sans être majeur".
   (a) L'énoncer avec le signe $\Rightarrow$
   (b) Écrire sa contraposée.
   (c) Les raisonnements suivants sont-ils corrects (Oui ou Non)?
      i. Kodjo a voté, donc Kodjo est majeur.
      ii. Meheza est majeure, donc Meheza a voté.

3. Soit $A \subset B \subset E$.
   (a) Quelle est la plus petite partie X de E telle que $A \cup X = B$?
   (b) Donner la définition (en langage courant) de la borne supérieure b d'une partie X de $\mathbb{R}$.
   (c) Donner une caractérisation (avec des $\epsilon \ldots$) de la borne supérieure b d'une partie X de $\mathbb{R}$.

4. Pour chacun des ensembles suivants,dire s'il admet (Oui ou Non) une borne inférieure et la calculer le cas échéant.3
   (a) $A = [-3,-1] \cap]-2,+1]$
   (b) $B = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \quad : n \in \mathbb{N}^*\right\}$
   (c) $C = \mathbb{Q} \cap]-\infty, 0[$

5. On considère la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto x^2$.
   (a) Préciser l'ensemble de définition de f.
   (b) Déterminer tous les éléments de $\mathbb{Z}$ qui ont leur image dans $\{0,1,2,3,4\}$
   (c) f est-elle injective? surjective?

6. Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$$

   (a) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$

7. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence:

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + U_n^2).$$

   (a) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite?
   (b) Montrer que si $-1 \leq U_0 \leq 1$, alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Examen MTH 100 2018-2019 FDS

Complétez chaque question par la bonne réponse

1. $A \subset \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. Soit la formule $P : \forall \epsilon > 0, \exists x \in A, m - \epsilon < x \leq m$. La négation de P est $\neg P$:

2. Soit E un ensemble à 50 éléments. Le nombre N de parties de $E \times E$ ayant deux éléments est :
   $N =$

3. $Card(\mathcal{X})$ désigne le cardinal de l'ensemble $\mathcal{X}$. Soient E et F des ensembles avec $Card(F) = q$ et $f : E \to F$ une surjection vérifiant : $\forall y \in E, Card(f^{-1}(y)) = p$. Alors
   $Card(E) =$

4. Soit $A \subset B \subset E$. Soit $\mathcal{X}$ la plus petite partie de E telle que $A \cup \mathcal{X} = B$. Alors
   $\mathcal{X} =$

5. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On a
   $f([-3, -1] \cup [-2, +1]) =$

6. Le symbole $\mathcal{C}$ désigne le complémentaire. Soit $f : X \to Y$ une bijection. Soit $A \subset X$. Alors $f(\mathcal{C}_X^A) = \mathcal{C}_Y^{f(A)}$. Vrai ou Faux?
   Réponse:

7. Donner en fonction de n les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \qquad \sum_{k=1}^{n} kC_n^k =$$

8. Après le point virgule (;), écrire (V) si l'affirmation est vraie ou (F) si elle est fausse.
   (a) Si une suite est majorée, alors elle tend vers $+\infty$;
   (b) Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée ;
   (c) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang ;
   (d) Si $(U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(U_n)_n$;

<u>Examen MTH 100 2017-2018 FDS</u>

Choisir la bonne réponse. Par exemple si l'affirmation 1.(a) est vraie, il suffit de mettre une croix (X) dans la case du tableau cci-dessous. Il est conseillé d'éviter les ratures et l'usage du correcteur. Il est aussi interdit de changer d'épreuve.

1. Soient $A, B, C \subset E$ tels que $A \cap B = C$. Alors (a) $B \subset C$, (b) $C \subset B$, (c) $B = C$, (d) $B \cap C = \emptyset$

2. Soient les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto xy$. Alors $g \circ f(x, y)$ égale (a) $x^2 + y^2$, (b) $x^2 - y^2$, (c) $(x + y)^2$, (d) $(x - y)^2$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. On a (a) $2xy = \frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2$, (b) $2xy \leq \frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2$, (c) $2xy \geq \frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2$, (d) On ne peut rien prouver.

4. Soit E un ensemble à 25 éléments et A une partie de E à 5 éléments. Alors le nombre de parties de E contenant exactement 2 éléments de E est (a) $C_{25}^2 \times 5^{20}$, (b) $A_{25}^5 \times 2^5$, (c) $C_5^2 \times \times 2^{20}$, (d) $A_5^2 \times 2^{20}$

5. Soit $A = \{x \in \mathbb{R} : \ -2 \leq x^2 - 1 \leq 2\}$. On a (a) $infA = -2$, (b) $supA = 2$, (c) $infA = 1$; (d) $supA = \sqrt{3}$

6. On pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} k$ et $V_n = \frac{U_n}{n^2}$. On a (a) $\lim V_n = 0$, (b) $\lim V_n = \frac{1}{2}$, (c) $\lim V_n = 1$, (d) (V_n) diverge.

7. La série $\sum_{n>0} \frac{1}{\sqrt{n}} \log(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$ est (a) convergente, (b) divergente, (c) On ne peut rien dire

	1	2	3	4	5	6	7
a							
b							
c							
d							

Année académique 2016-2017

Département de Maths
Université de Lomé

Examen de MTH 100 (Bases mathématiques)

Durée : 1h30

Choisir la bonne réponse. Par exemple si vous pensez que l'affirmation 1.(a) est vraie, il suffit d'écrire 1.(a) dans le **cahier**.

1. Soient les ensembles $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq |x|\}$. On a
   (a) $A = B$; (b) $A \subsetneq B$; (c) $A \cap B = \emptyset$; (d) $A \cup B = \mathbb{R}$.

2. Le nombre d'éléments d'un ensemble qui possède 512 parties est
   (a) 5 ; (b) 8 ; (c) 9 ; (d) 512.

3. La somme $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k$ vaut (a) 2^n ; (b) 2^{n-1} ; (c) $n2^{n-1}$; (d) $(n-1)2^n$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Dire que f est majorée se traduit par
   (a) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$; (b) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$;
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$; (d) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.

5. L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto |z|$ est
   (a) injective ; (b) surjective ; (c) non bijective.

6. Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation binaire $\mathscr{R}$ par $z\mathscr{R}z'$ si $|z| = |z'|$. Alors $\mathscr{R}$ est une
   (a) relation d'ordre partiel ; (b) relation d'ordre total ; (c) relation d'équivalence.

7. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - x$. Alors $f([0, +\infty[)$ égale
   (a) $[0, +\infty[$; (b) $[-1, +\infty[$; (c) $[\frac{-3}{2\sqrt{2}}, +\infty[$; (d) $[\frac{-2}{3\sqrt{3}}, +\infty[$.

8. La suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{1 + U_n}$ est
   (a) croissante et majorée ; (b) décroissante et minorée ; (c) divergente.

9. La série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$ est
   (a) convergente de somme 1 ; (b) convergente de somme $\frac{5}{4}$; (c) divergente.

10. Soit $a > 0$. La série de terme général $U_n = \frac{n!}{n^n}a^n$
    (a) converge si $a < e$; (b) converge si $a > e$; (c) diverge si $a > 1$.

TD N°1

Exercice 1

1. Montrons que $A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A$

$A \subset B \Longrightarrow$ Tout élément de A est dans B

$\Longrightarrow \forall x \in E, \ x \in A \Rightarrow x \in B$

Or $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ (Une implication est équivalente à sa contraposée)

Donc $A \subset B \Longrightarrow \forall x \in E, \text{ non}(x \in B) \Longrightarrow \text{non}(x \in A)$

$\Longrightarrow \forall x \in E, \ x \notin B \Longrightarrow x \notin A$

$\Longrightarrow \forall x \in E, \ x \in E \setminus B \Rightarrow x \in E \setminus A$

$\Longrightarrow \forall x \in E, \ x \in C_E^B \Longrightarrow x \in C_E^A$

$\Longrightarrow$ Tout élément de C_E^B est dans C_E^A

$A \subset B \Longrightarrow C_E^B \subset C_E^A$

2. Prouvons que $\prod_{i=1}^{n} E_i = \emptyset \quad \exists i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $E_i = \emptyset$

On pourrait penser à faire un raisonnement direct en réfléchissant sur la proposition $\left(\prod_{i=1}^{n} E_i = \emptyset\right)$

Mais travailler sur un ensemble vide est Difficile.

Raisonnons alors par contraposition en démontrant les contraposée :

$$\text{non}\left(\exists i \in \{1,\dots,n\} \text{ tel que } E_i = \phi\right) \Rightarrow \text{non}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i = \phi\right)$$

c'est-à-dire, $\forall i \in \{1,\dots,n\}, E_i \neq \phi \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} E_i \neq \phi$

Maintenant nous raisonnerons sur des ensembles non vide. Ce qui est plus rassurant.

$$\begin{aligned}
\forall i \in \{1,\dots,n\}, E_i \neq \phi &\Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\}, \exists x_i \text{ tel que } x_i \in E \\
&\Rightarrow \exists x_1 \in E_1, \exists x_2 \in E_2, \dots, \exists x_n \in E_n \\
&\Rightarrow \text{Il existe } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E \\
&\Rightarrow E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \neq \phi
\end{aligned}$$

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, E_i = \phi \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} E_i = \phi$$

La contraposée de l'implication étant vraie, l'implication elle même est vraie.

3- <u>Montrons que les A_i forment une partition de E</u>

Lire la page 17 du cours où est definit la notion de partition d'un ensemble.

—

* Montrons que $\forall i \in \{1,2,3\}$, $A_i \neq \emptyset$ c'est-à-dire que $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$ et $A_3 \neq \emptyset$

- $A_1 = \{f \in E / f(0) = 1\}$

Soit $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \{1,2,3\}$
$n \longmapsto 1$

On a $f_1 \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_1(n) = 1$
en particulier $f_1(0) = 1$

Donc $f_1 \in A_1$. On conclue que $f_1 \in A_1$. Donc $A_1 \neq \emptyset$

- De même en introduisant les applications $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \{1,2,3\}$
$n \longmapsto 2$

et $f_3 : \mathbb{N} \longrightarrow \{1,2,3\}$
$n \longmapsto 3$

On montre que $A_2 \neq \emptyset$ et $A_3 \neq \emptyset$

Et donc $\forall i \in \{1,2,3\}$, $A_i \neq \emptyset$

* Montrons que $\forall i,j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

Travailler sur le vide est impossible. Raisonnons par contraposition en montrant que

$$\forall i,j \in \{1,2,3\}, \quad \text{non}(A_i \cap A_j = \emptyset) \Rightarrow \text{non}(i \neq j)$$

C'est-à-dire

$$\forall i,j \in \{1,2,3\}, \quad A_i \cap A_j \neq \emptyset \Rightarrow i = j$$

Soient $i,j \in \{1,2,3\}$ On a :

$A_i \cap A_j \neq \emptyset \Rightarrow$ il existe une application $f : \mathbb{N} \to \{1,2,3\}$
telle que $f \in A_i$ et $f \in A_j$

2

$$\Rightarrow f(0)=i \text{ et } f(0)=j$$

$$A_i \cap A_j \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad i=j$$

La contraposée étant vraie, l'implication elle même est vraie.

* <u>Montrons que</u> $\bigcup_{i=1}^{3} A_i = E$

•

• $\forall i \in \{1,2,3\}$, $A_i \subset E$. Donc $\underline{\bigcup_{i=1}^{3} A_i \subset E}$

• De plus, $f \in E \Rightarrow f : \mathbb{N} \longrightarrow \{1,2,3\}$

$$\Rightarrow f(0)=1 \text{ ou } f(0)=2 \text{ ou } f(0)=3$$

$$\Rightarrow f \in A_1 \text{ ou } f \in A_2 \text{ ou } f \in A_3$$

$$\forall f \in E \quad \Rightarrow f \in \bigcup_{i=1}^{3} A_i$$

Donc $\underline{E \subset \bigcup_{i=1}^{3} A_i}$

* <u>Conclusion</u> : par double inclusion, $\bigcup_{i=1}^{3} A_i = E$

$$\left(A = B = \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases} \right)$$

Exercice 2

1) Liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1,2\}))$

$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$= \{A, B, C, D\}$ où $A = \phi$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$, $D = \{1,2\}$

donc $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1,2\})) = \{\phi, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{A,B\}, \{A,C\}, \{A,D\}, \{B,C\}, \{C,D\},$
$\{B,D\}, \{A,B,C\}, \{A,B,D\}, \{A,C,D\}, \{B,C,D\}, \{A,B,C,D\}$

La liste est : $\phi, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\cancel{\phi}\}, \{\{1,2\}\}, \{\{1\},\{2\}\}, \{\{1\},\{1,2\}\},$
$\{\phi,\{1\}\}, \{\phi,\{2\}\}, \{\phi,\{1,2\}\}, \{\{2\},\{1,2\}\}, \{\phi,\{1\},\{2\}\}, \{\phi,\{1\},\{1,2$
$\{\phi,\{2\},\{1,2\}\}, \{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}, \{\phi,\{1\},\{2\}, \{1,2\}\}$.

2) * $\mathcal{P}(A\cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ est Vraie

Preuve :

$X \in \mathcal{P}(A\cap B) \iff X \subset A\cap B$

$\iff X \subset A$ et $X \subset B$

$\iff X \in \mathcal{P}(A)$ et $X \in \mathcal{P}(B)$

$X \in \mathcal{P}(A\cap B) \iff X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

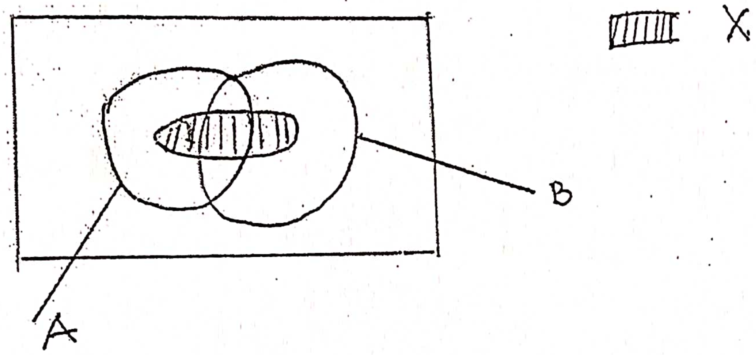
D'où $\mathcal{P}(A\cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

* $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ est faux

<u>Preuve</u>

Donnons un contre exemple

* <u>Raisonnement graphique</u>



X est une partie de $A \cup B$ mais X n'est ni une partie de A ni une partie de B

Donc $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ et $X \notin \mathcal{P}(A)$ et $X \notin \mathcal{P}(B)$

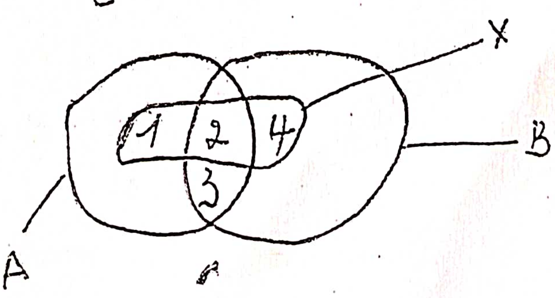
et $X \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Alors $\underline{\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)}$

* <u>Autres methode</u>

Prenons $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$

On a : $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$



Soit $X = \{1, 2, 4\}$. On voit que $X \subset A \cup B$. Donc $X \in \mathcal{P}(A$

Mais $X \notin A$ et $X \notin B$. Donc X n'est ni une partie

de A ni une partie de B. Formellement $X \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}$

lusion : $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ n'est pas toujours égal à

$\mathcal{P}(A \cup B)$

xercice 3

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$ qui est encore l'ensemble de départ de f.

Donc f est bien une application.

Résolvons l'équation $f(x) = y$ suivant les valeurs de y

Soit $y \in \mathbb{R}$

$$x \in \mathbb{R}, \; f(x) = y \iff \frac{2x}{1+x^2} = y$$

$$\iff yx^2 - 2x + y = 0$$

L'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $yx^2 - 2x + y$ est du secon degré seulement si $y \neq 0$

1ère cas : $y = 0$

$$x \in \mathbb{R}, \; f(x) = y \iff -2x = 0$$

$$\iff x = 0$$

L'ensemble solution est $S = \{0\}$

$2^{ème}$ cas : $y \neq 0$

L'équation du second degré a pour discriminant

$\Delta = 4(1-y^2) = 4(1-y)(1+y)$

y	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

* Si $y \in]-\infty ; -1[\cup]1, +\infty[$; $\Delta < 0$. Donc $S = \emptyset$

* Si $y \in]-1,1[$, $\Delta > 0$. Donc

$$S = \left\{ \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} ; \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \right\}$$

* Si $y = 1$, $S = \{1\}$

* si $y = -1$, $S = \{-1\}$

3) De ce qui précède :

* Il y'a des éléments y de l'ensemble d'arrivée de f qui possèdent plusieurs antécédents x.

C'est le cas des $y \in]-1,1[$ qui ont deux antécédents

Donc f n'est pas injective

* Il y'a des éléments y de l'ensemble d'arrivée de f qui ne possèdent aucun antécédent x par f

C'est le cas des $y \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

Donc f n'est pas surjective

<u>Conclusion</u> : f n'est ni injective, ni surjective
Donc f n'est pas bijective non plus.

Exercice 4

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto z + \frac{1}{z}$$

* <u>Injectivité</u> :

On a : $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

$f(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Donc $\frac{5}{2}$ a au moins deux antécédents par f qui sont 2 et $\frac{1}{2}$

Alors f n'est pas injective.

<u>Remarque</u> : En général $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = f(\frac{1}{z})$

* <u>Surjectivité</u>

Soit $y \in \mathbb{C}$. L'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$f(z) = y$ équivaut à $z + \frac{1}{z} = y$

équivaut à $z^2 - yz + 1 = 0$

Il s'agit d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Or dans $\mathbb{C}$, tout polynôme admet au moins une racine (D'Alembert)

Donc chaque y pris dans $\mathbb{C}$ admet au moins un antécédant z dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, Donc f est surjective.

* f n'est pas injective donc f n'est pas bijective.

- Image par f du cercle trigonometrique

Le cercle trigonometrique Γ est l'ensemble des nombres complexes de modules 1

$$\Gamma = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} = \{ e^{i\theta} / \theta \in [0, 2\pi[\}$$

Nous cherchons à determiner l'ensemble $f(\Gamma)$

$$\forall y \in \mathbb{C}, y \in f(\Gamma) \iff \exists z \in \mathbb{C} / z \in \Gamma \text{ et } y = f(z)$$

$$\iff \exists \theta \in [0, 2\pi[\ , \ y = f(e^{i\theta})$$

$$\iff \exists \theta \in [0, 2\pi[\ , \ y = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$\iff \exists \theta \in [0, 2\pi[\ , \ y = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$$

$$\forall y \in \mathbb{C}, y \in f(\Gamma) \iff \exists \theta \in [0, 2\pi[\ , \ y = 2\cos\theta$$

(Formule d'Euler)

$$\iff y \in [-2, 2]$$

Car quand θ decrit $[0, 2\pi[$, $\cos\theta$ decrit $[-1, 1]$ et $2\cos\theta$ decrit $[-2, 2]$.

D'où $f(\Gamma) = [-2, 2]$

- Image réciproque par f de $i\mathbb{R}$

Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Posons $z = x + iy$ $(x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R})$

$$z \in f^{-1}(i\mathbb{R}) \iff f(z) \in i\mathbb{R}$$

$$\iff z + \frac{1}{z} \in i\mathbb{R}$$

Or $z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{1}{x+iy} = \frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2+y^2} + i\,\frac{x^2y + y^3 - y}{x^2+y^2}$

Donc $z \in f^{-1}(i\mathbb{R}) \iff \frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2} = 0$

$$\iff x(x^2+y^2+1) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x^2+y^2 = -1$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x^2+y^2 > 0$$

$$\iff z = iy \text{ et } z \neq 0$$

$$z \in f^{-1}(i\mathbb{R}) \iff z \in i\mathbb{R}^*$$

Donc $\underline{f^{-1}(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}^*}$

Exercice 5

$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

Demontrons que :

1) * Si f et g sont injectives alors h est injective.

Supposons que f et g sont injectives et montrons que h est injective

$\forall x, y \in E, \quad h(x) = h(y) \Longrightarrow g \circ f(x) = g \circ f(y)$

$\Longrightarrow g(f(x)) = g(f(y))$

$\Longrightarrow f(x) = f(y)$ car g est injective

$\forall x, y \in E, \quad h(x) = h(y) \Longrightarrow x = y$ car f est inject

Donc h est injective.

* Si f et g sont surjectives alors h est surjective

Rappel : Si $f : X \longrightarrow Y$ est surjective alors $f(X) = Y$.

f et g sont surjectives $\Rightarrow f(E) = F$ et $g(F) = G$

$\Rightarrow g(f(E)) = G$

$\Rightarrow g \circ f(E) = G$

$\Rightarrow h(E) = G$

f et g sont surjectives $\Rightarrow$ h est surjective

2°) <u>Si h est injective alors f l'est aussi</u>

<u>Supposons que h est injective et montrons que f est injec</u>

$\forall a, b, \in E, \quad f(a) = f(b) \Rightarrow g(f(a)) = g(f(b))$

$\Rightarrow g \circ f(a) = g \circ f(b)$

$\Rightarrow h(a) = h(b)$

$\forall a, b \in E, \quad f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ car h est inject

Donc f est <u>injective</u>.

3°) <u>Si h est surjective alors g l'est aussi.</u>

<u>Supposons que h est surjective et montrons que g est surjective</u>

Pour cela nous ~~montrons~~ montrerons tout élément y de G admet un antécédent α dans F par l'application g.

Soit $y \in G$. Comme h est surjective, il existe $x \in E$ tel que $h(x) = h(y)$

Donc $y = g \circ f(x) = g(f(x))$. Par conséquent

$\alpha = f(x)$ est un antécédent de y par g

D'où g est <u>surjective</u>.

4) Si h est injective et f surjective alors g est injective.

Supposons que h est injective et que f est surjective.

Montrons que g est injective

Soient $a \in F$ et $b \in F$

Comme $f : E \longrightarrow F$ est surjective alors il existe $x \in E$ et $y \in E$ telque $f(x) = a$ et $f(y) = b$

$$
\begin{aligned}
g(a) = g(b) &\Longrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \\
&\Longrightarrow g \circ f(x) = g \circ f(y) \\
&\Longrightarrow h(x) = h(y) \\
&\Longrightarrow x = y \quad \text{car } h \text{ est injective} \\
&\Longrightarrow f(x) = f(y) \\
g(a) = g(b) &\Longrightarrow a = b
\end{aligned}
$$

Donc g est injective

Exercice 6

Montrons que les propositions 1, 2, 3 sont équivalentes.

Pour celà, nous montrerons que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

* $1 \Rightarrow 2$

Supposons que f est injective et demontrons que $\forall A, B \subset X,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

- On a: $y \in f(A \cap B) \Rightarrow \exists x / x \in A \cap B$ et $y = f(x)$

$\Rightarrow \exists x / x \in A$ et $x \in B$ et $y \in f($

$\Rightarrow y \in f(A)$ et $y \in f(B)$ //i

$y \in f(A\cap B) \Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$.

Donc $f(A\cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

- On a : $y \in f(A)\cap f(B) \Rightarrow y \in f(A)$ et $y \in f(B)$

$\Rightarrow \exists a \in A \mid y = f(a)$ et $\exists b \in B \mid y = f($

$\Rightarrow \exists a \in A, \exists b \in B \mid y = f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists a \in A, \exists b \in B \mid y = f(a)$ et $a = b$

car f est injectiv

$\Rightarrow \exists a \in A\cap B \mid y = f(a)$

$\Rightarrow y \in f(A\cap B)$

Donc $f(A)\cap f(B) \subset f(A\cap B)$

- Au total, $\begin{cases} f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B) \\ f(A)\cap f(B) \subset f(A\cap B) \end{cases}$

Donc $\underline{f(A\cap B) = f(A) \cap f(B)}$

* $2 \Rightarrow 3$

Supposons que $\forall A, B \subset X$, $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$ et

montrons que $\forall A, B \subset X$, $A\cap B = \emptyset \Rightarrow f(A)\cap f(B) = \emptyset$

Soient $A, B \subset X$ on a :

$$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$\Longrightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset \text{ car } f(A \cap B) = f(A) \cap f(\!($$

Donc $\underline{A \cap B = \emptyset \Longrightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset}$.

* $3 \Rightarrow 1$

Supposons que $\forall A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$ et montrons que f est injective.

Soient $a \in X$ et $b \in X$. Posons $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$

On a : $f(A) = \{f(a)\}$ et $f(B) = \{f(b)\}$

Alors $f(a) = f(b) \Rightarrow f(a) \in f(A)$ et $f(a) \in f(B)$

$$\Rightarrow f(a) \in f(A) \cap f(B)$$

$$\Rightarrow f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$$

Or $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$. Donc par contraposit[i]

$$f(A) \cap f(B) \neq \emptyset \Longrightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

Donc $f(a) = f(b) \Longrightarrow f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$

$$\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \{a\} \cap \{b\} \neq \emptyset$$

16 D'où $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$ On conclue que f est injective.

Conclusion : Les 3 propositions sont bien équivalentes.

Exercice 7

$A \subset X$. La fonction caracteristique $\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$ est définie par $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in C_X^A \end{cases}$

Montrons que l'application $\phi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X, \{0,1\})$ est
$A \longmapsto \chi_A$ bijectiv

* Injectivité

Soient $A \in \mathcal{P}(X)$ et $B \in \mathcal{P}(X)$

on a $\phi(A) = \phi(B) \Rightarrow \chi_A = \chi_B$

$\Rightarrow \chi_A^{-1}(\{1\}) = \chi_B^{-1}(\{1\})$

$\phi(A) = \phi(B) \Rightarrow A = B$ car $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$ et

$\chi_B^{-1}(\{1\}) = B$

Donc ϕ est injective

* Surjectivité

Soit $f \in \mathcal{F}(X, \{0,1\})$. Montrons qu'il existe $A \in \mathcal{P}(X)$ tel que $f = \phi(A)$

Posons $A = f^{-1}(\{1\})$. Alors

- si $x \in A$, $x \in f^{-1}(\{1\})$ Donc $f(x) = 1$
- si $x \in C_X^A$, $x \notin f^{-1}(\{1\})$. Donc $f(x) \neq 1$

Comme $f : X \to \{0,1\}$, alors $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$

Donc $f(x) = 0$ car $f(x) \neq 1$

On conclue que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in C_X^A \end{cases}$

Donc $f = \chi_A = \phi(A)$

On conclue que ϕ est surjective.

* <u>En Conclusion</u>:

ϕ est bijective comme étant injective et surjective

TD N°2

1°) $(x_1,x_2) \leq (y_1,y_2) \iff (x_1<y_1)$ ou $(x_1=y_1$ et $x_2 \leq y_2)$

(a) Vérifions que $\leq$ est une relation d'ordre

- Réflexivité : soit $(x_1,x_2) \in \mathbb{N}^2$

on a : $(x_1,x_2) \leq (x_1,x_2)$ car $(x_1 = x_1$ et $x_2 \leq x_2)$

Donc $\leq$ est reflexive

- Antisymétrie : Soient (x_1,x_2) et (y_1,y_2) des éléments de $\mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases} (x_1,x_2) \leq (y_1,y_2) \\ (y_1,y_2) \leq (x_1,x_2) \end{cases}$$

on a : $\begin{cases} (x_1<y_1) \text{ ou } (x_1=y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2) \\ (y_1<x_1) \text{ ou } (y_1=x_1 \text{ et } y_2 \leq x_2) \end{cases}$

Remarquons que

(P ou Q) et (A ou B) $\equiv$ (P et A) ou (P et B) ou (Q et A) ou (Q et

Il y'a 4 cas à tester.

1er cas : $x_1<y_1$ et $y_1<x_1$: impossible

2e cas : $x_1<y_1$ et $(y_1=x_1$ et $y_2 \leq x_2)$: impossible

3e cas : $(x_1=y_1$ et $x_2 \leq y_2)$ et $y_1<x_1$: impossible.

4°cas $(x_1 = y_1$ et $x_2 \leq y_2)$ et $(y_1 = x_1$ et $y_2 \leq x_2)$

Donc $x_1 = y_1$ et $(x_2 \leq y_2 \leq x_2)$

soit $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$

Alors $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

Donc $\leq$ est antisymétrique

- Transitivité : Soient (x_1, x_2), (y_1, y_2) et (z_1, z_2) des éléments de $\mathbb{N}^2$ tels que $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ et $(y_1, y_2) \leq (z_1, z_2)$

On a : $\begin{cases} (x_1 < y_1) \text{ ou } (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2) \\ (y_1 < z_1) \text{ ou } (y_1 = z_1 \text{ et } y_2 \leq z_2) \end{cases}$

1°cas : $x_1 < y_1$ et $y_1 < z_1$

Alors $x_1 < z_1$. Donc $(x_1, x_2) \leq (z_1, z_2)$

2°cas $x_1 < y_1$ et $(y_1 = z_1$ et $y_2 \leq z_2)$

Alors $x_1 < z_1$. Donc $(x_1, x_2) \leq (z_1, z_2)$

3°cas : $(x_1 = y_1$ et $x_2 \leq y_2)$ et $(y_1 < z_1)$

Alors $x_1 < z_1$ Donc $(x_1, x_2) \leq (z_1, z_2)$

4°cas : $(x_1 = y_1$ et $x_2 \leq y_2)$ et $(y_1 = z_1$ et $y_2 \leq z_2)$

Donc $(x_1 = y_1 = z_1)$ et $(x_2 \leq y_2 \leq z_2)$

Alors $(x_1 = z_1)$ et $(x_2 \leq z_2)$

Donc $(x_1, x_2) \leq (z_1, z_1)$

Donc dans tous les cas, on a bien $(x_1,x_2) \leq (z_1,z_2)$

On conclue que $\leq$ est transitive.

Conclusion : la relation $\leq$ est une relation d'ordre.
(Il s'agit de l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^2$

(b) $B = \{(2,10^p) : p \in \mathbb{N}\}$ est elle majorée?

$\forall p \in \mathbb{N}$, $(2,10^p) \leq (3,0)$ car $2<3$

Donc $(3,0)$ est un majorant de B.

(Tout couple (n,m) de $\mathbb{N}^2$ avec $n>2$ est un majorant de B)

Donc B est majoré

2°) Determenons :

D'apres la formule du binôme de Newton.

$\forall a,b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

- En prenant $a=b=1$, on a :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

- En prenant $a=-1$ et $b=1$, on a :

$$(-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k 1^{n-k}$$

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

- Revoyons la formule du binôme en prenant a comme une variable réelle x et en prenant $b=1$

on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

En dérivant par rapport à x, on a :

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^{k-1}$$

pour $x=1$, on a . $n(1+1)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k C_n^k 1^{k-1}$

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1}$

3°) E est un ensemble à n éléments

- Nombre de relation binaires sur E.

Une relation binaire sur E est identifiée totalement par une partie de $E \times E$.

Donc le nombre de relations binaire sur E est le nombre de parties de $E \times E$

soit $\text{card}(\mathcal{P}(E\times E)) = 2^{\text{card}(E\times E)}$

$$= 2^{n^2}$$

Nombre de relation binaire symetrique sur E

Posons $E=\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ ~~est Considé~~ et

considerons le tableau suivant

E \ E	x_1	x_2	x_3	— — — — -	x_n	
x_1	(x_1,x_1)	(x_1,x_2)	(x_1,x_3)		(x_1,x_n)	n
x_2	(x_2,x_1)	(x_2,x_2)	(x_2,x_3)		(x_2,x_n)	$n-1$
⋮						
x_n	(x_n,x_1)	(x_n,x_2)	(x_3,x_1)		(x_n,x_n)	1

Pour avoir une relation binaire sur E il suffit de choisir une partie de $E\times E$. Donc il suffit de choisir un certain nombre d'éléments dans le tableau précédent

Mais si on exige que la relation soit symetrique, quand on choisit (x,y) dans le tableau, il faut choisir necessairement (y,x) également car si $\mathcal{R}$ est une

7:

relation binaire symétrique sur E, on a :

$\forall x, y \in E,\ x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$

Donc il suffit de choisir les couples (x, y) dans le triang supérieur du tableau.

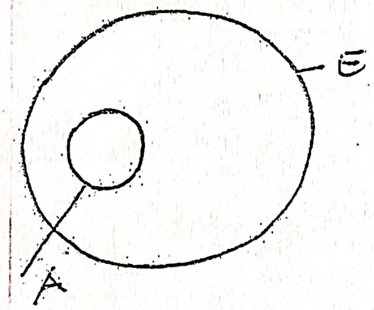
Ce triangle supérieur possède

$$1+2+3+ \text{———} +(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ éléments}$$

(somme des termes d'une suite arithmétique de raison,

Donc le nombre de relation binaire symétrique sur E est $2^{\frac{n^2+n}{2}}$.

4°)



Card E = n

Card A = p

Nombre de parties de E contenant exactement k éléments :

Pour avoir une partie de E comportant k éléments de A

Il faut :

- Choisir le k éléments de l'ensemble A qui possède p éléments : il y'a C_p^k possibilités

Nous utilison l'outil "combinaison" car les k éléments seront utilisés pour former un ensemble et dans un ensemble l'ordre des éléments ne compte pas et 2 Li ces éléments ne peuvent pas se répéter.

Ensuite, ajouter aux k éléments choisis précédemment dans A, d'autres éléments qui ne sont pas dans A c'est-à-dire qui sont dans $E \setminus A$: Ensemble à $n-p$ éléments.

Il s'agit de choisir une partie d'un ensemble à $n-p$ élém

il y'a 2^{n-p} possibilités.

Par principe multiplicatif en dénombrement, le nombre total de possibilités est $\underline{2^{n-p} \cdot C_p^k}$

5°) $E = \left\{ 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

* $\underline{E \text{ est majoré}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1$ Donc $\frac{1}{n} \leq 1$

Alors $1 + \frac{1}{n} \leq 2$

Tous les éléments de E sont inférieurs à 2.

Donc 2 est un majorant de E.

* $\underline{E \text{ admet un plus grand élément}}$

2 est un majorant de E et $2 \in E$ car $2 = 1 + \frac{1}{n}$ avec $n=$

Donc 2 est le plus grand élément de E, en même temps la borne supérieure de E

* E est minoré

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > 0$. Donc $\frac{1}{n} > 0$. Alors $1 + \frac{1}{n} > 1$

Tous les éléments de E sont strictement supérieurs à 1. Donc 1 est un minorant de E.

* E admet une borne inférieure $\inf E = 1$

Nous devons montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E \text{ tel que } 1 < x < 1 + \varepsilon.$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } 1 < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a : $1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Il suffit de prendre $n = E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$ car $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$

$(\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x < E(x) + 1)$

Donc $\inf E = 1$.

On peut faire cette démonstration autrement

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, posons $U_n = 1 + \frac{1}{n}$. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow |U_n - 1| < \varepsilon$

$\Rightarrow 1 - \varepsilon < U_n < 1 + \varepsilon$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$.

D'où $\inf E = 1$

De plus $1 \notin E$ car $\forall x \in E$, $x > 1$.

Donc la borne inférieure de E n'appartient pas à E

Alors E n'admet pas de minimum.

(a) Montrons que $\big||x_1|-|x_2|\big| \leq |x_1-x_2|$

Après l'inégalité triangulaire, on a :

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x+y| \leq |x|+|y|$

Donc :

$* \quad |(x_1-x_2)+x_2| \leq |x_1-x_2|+|x_2|$

Alors $\quad |x_1| \leq |x_1-x_2|+|x_2|$

Donc $\quad |x_1| - |x_2| \leq |x_1-x_2| \quad (1)$

$* \quad |(x_2-x_1)+x_1| \leq |x_2-x_1|+|x_1|$

Alors $|x_2| \leq |x_1-x_2|+|x_1| \quad$ car $|x_2-x_1| = |x_1-x_2|$

Donc $\quad -|x_1-x_2| \leq |x_1|-|x_2| \quad (2)$

$*$ De (1) et de (2), on a :

$$-|x_1-x_2| \leq |x_1|-|x_2| \leq |x_1-x_2|$$

or $\forall r \in \mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$-r \leq x \leq r \iff |x| \leq r$$

Donc $\quad \big||x_1|-|x_2|\big| \leq |x_1-x_2|$

Montrons par récurrence que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

nitialisation

on a : $|x_1| \leq |x_1|$ Donc $\left|\sum_{k=1}^{1} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{1} |x_k|$

La propriété est vraie pour $n = 1$

érédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que

$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ et montrons que $\left|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|$

a : $\left|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right|$

$\leq \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + |x_{n+1}|$ (Inégalité triangulaire)

r, par supposition, $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

nc,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + |x_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| + |x_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|$$

onc $\left|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|$

lusion

$\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

Montrons que si pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$,

$|x_k - x_{k+1}| < \varepsilon$, alors $|x_1 - x_n| < (n-1)\varepsilon$

On a : $x_1 - x_n = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + (x_3 - x_4) + \dots + (x_{n-1} - x_n)$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad \text{avec } a_k = x_k - x_{k+1}$$

Donc $|x_1 - x_n| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right|$

or d'apres (b), $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|$

Donc $|x_1 - x_n| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| = \sum_{k=1}^{n-1} |x_k - x_{k+1}|$

Donc si $|x_k - x_{k+1}| < \varepsilon \quad \forall k \in \{1 \dots n-1\}$

Alors $\sum_{k=1}^{n-1} |x_k - x_{k+1}| < \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon = (n-1)\varepsilon$

Donc si $|x_k - x_{k+1}| < \varepsilon \quad \forall k \in \{1, \dots n-1\}$, on a

$$|x_1 - x_n| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |x_k - x_{k+1}| < (n-1)\varepsilon$$

D'où, $\underline{|x_1 - x_n| \leq (n-1)\varepsilon}$.

c) Montrons que si $a = \sup A$, alors il existe une suite d'élements de A qui converge vers A.

$a = \sup A$. Alors par définition,

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ tel que $a - \varepsilon < x \leq a$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En prenant $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, on a :

$$\exists x_n \in A \text{ tel que } a - \varepsilon_n < x_n \leq a$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in A$ tel que $a - \frac{1}{n} < x_n \leq a$

De plus, $\lim_{x \to +\infty} (a - \frac{1}{n}) = a$ et $\lim_{x \to +\infty} a = a$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, la suite (x_n) est une suite d'élément de A qui converge avec a.

ZM