Cours de Mathématiques - ASINSA-1

Les polynômes

Frédéric STURM

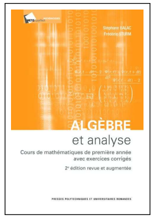
Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon

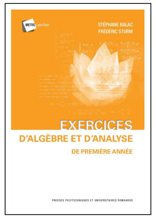
Année académique 2012-2013

Pour plus de compléments, voir les deux ouvrages suivants parus aux Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR) dans la collection METIS LyonTech :

www.ppur.org

- **Algèbre et analyse, 2e édition revue et augmentée,** **Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés**, S. Balac, F. Sturm, 1110 pages, paru en 2009.
- **Exercices d'algèbre et d'analyse,** **154 exercices corrigés de première année**, S. Balac, F. Sturm, 448 pages, paru en 2011.





Plan du cours

Polynôme formel

Définition 1.1

Un polynôme formel à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{K}$ dont les termes à partir d'un certain rang sont égaux à 0, c'est-à-dire : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N \implies a_n = 0).$$

On note $P \overset{\text{not.}}{=} (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots)$ où a_0, a_1, a_2,..., a_N se nomment les coefficients du polynôme et $P \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle polynôme nul le polynôme dont tous les coefficients sont nuls et on le note

$$0_{\mathbb{K}[X]} \overset{\text{not.}}{=} (0, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Deux polynômes sont égaux s'ils ont mêmes coefficients.

Fonction polynomiale

Définition 1.2

À tout polynôme $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots)$ de $\mathbb{K}[X]$ on associe l'application $x \in \mathbb{K} \longmapsto \widetilde{P}(x) \in \mathbb{K}$ appelée fonction polynomiale associée définie par

$$\widetilde{P}(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + \ldots + a_N x^N}_{\text{puissances croissantes}} = \underbrace{a_N x^N + \ldots + a_1 x + a_0}_{\text{puissances décroissantes}}$$

Exemple 1.1

- Si $P = (1, 0, 0, 5 + \mathrm{i}, 0, \ldots) \in \mathbb{C}[X]$ alors
$$\forall x \in \mathbb{C} \quad \tilde{P}(x) = 1 + (5 + \mathrm{i})x^3.$$
- Si $P = (0, 0, 12\mathrm{i}, 20, 1, 0, \ldots) \in \mathbb{C}[X]$ alors
$$\forall x \in \mathbb{C} \quad \tilde{P}(x) = 12\mathrm{i}x^2 + 20x^3 + x^4.$$

Valuation et degré d'un polynôme

Définition 1.3

Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$.

- *Le plus grand entier naturel n tel $a_n \neq 0$ est appelé le degré de P. Il se note $\deg(P)$. Autrement dit,*
$$\deg(P) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}.$$
- *Le plus petit entier naturel n tel $a_n \neq 0$ est appelé la valuation de P. Elle se note $\mathrm{val}(P)$. Autrement dit,*
$$\mathrm{val}(P) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}.$$

Exemple 1.2

Soit $P = (1, 0, 0, 5 + \mathrm{i}, 0, \ldots) \in \mathbb{C}[X]$. $\mathrm{val}(P) = 0$ et $\deg(P) = 3$.

Définition 1.4

Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$.

- *Le coefficient $a_{\deg(P)}$ se nomme coefficient de plus haut degré de P.*
- *Le polynôme P est dit normalisé si $a_{\deg(P)} = 1$.*

Exemple 1.3

Soit $P = (0, 0, 12\mathrm{i}, 20, 1, 0, \ldots)$. $\mathrm{val}(P) = 2$ et $\deg(P) = 4$. Ce polynôme est normalisé.

Remarque

- Par convention, $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$ et $\mathrm{val}(0_{\mathbb{K}[X]}) = +\infty$.
- On a : $\mathrm{val}(P) \leqslant \deg(P)$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul.

Monôme

Définition 1.5

- *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul est appelé un monôme si*
$$\mathrm{val}(P) = \deg(P).$$
- *La fonction polynomiale $\widetilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ associée à un monôme P s'appelle fonction monôme.*

Exemple 1.4

$P = (0, 0, 5, 0, \ldots)$ est un monôme car $\mathrm{val}(P) = \deg(P) = 2$. Sa fonction monôme est $x \longmapsto \tilde{P}(x) = 5x^2$.

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a l'implication :

$$P = Q \implies \Big\{ \mathrm{val}(P) = \mathrm{val}(Q) \text{ et } \deg(P) = \deg(Q) \Big\}.$$

Plan du cours

Addition de polynômes

Définition 2.1

Soient $P=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $Q=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme $P+Q$ de $\mathbb{K}[X]$ comme suit :

$$P+Q \overset{\text{déf.}}{=} (a_n +_{\mathbb{K}} b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exemple 2.1

Soient $P=(1,1,1,0,0,\ldots)$ et $Q=(0,2,3,-1,0,0,\ldots)$. Alors, $P+Q=(1,3,4,-1,0,0,\ldots)$. Remarquons que l'on a :

$$(\widetilde{P+Q})(x)=1+3x+4x^2-x^3=\underbrace{1+x+x^2}_{=\widetilde{P}(x)}+\underbrace{2x+3x^2-x^3}_{=\widetilde{Q}(x)}.$$

Addition, degré et valuation

Proposition 2.1

Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. On a :

- *$\deg(P+Q)\leqslant \max\{\deg(P),\deg(Q)\}$.*
- *$\mathrm{val}(P+Q)\geqslant \min\{\mathrm{val}(P),\mathrm{val}(Q)\}$.*

Remarques

- Si $\deg(P)\neq\deg(Q)$ alors

$$\deg(P+Q)=\max\{\deg(P),\deg(Q)\}.$$

- Si $\mathrm{val}(P)\neq\mathrm{val}(Q)$ alors

$$\mathrm{val}(P+Q)=\min\{\mathrm{val}(P),\mathrm{val}(Q)\}$$

Structure de groupe commutatif sur $\mathbb{K}[X]$

On vérifie les points suivants :

- Pour tous $P,Q,R\in\mathbb{K}[X]$, $(P+Q)+R=P+(Q+R)$.
- Pour tout $P\in\mathbb{K}[X]$, $P+0_{\mathbb{K}[X]}=0_{\mathbb{K}[X]}+P=P$.
- Tout polynôme $P=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}[X]$ admet un opposé qui est le polynôme noté $-P$ défini par :

$$-P=(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

En effet, $P+(-P)=(-P)+P=0_{\mathbb{K}[X]}$ pour tout $P\in\mathbb{K}[X]$.

- Pour tous $P,Q\in\mathbb{K}[X]$, $P+Q=Q+P$.

En résumé, on dit alors que l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ muni de l'addition possède une structure de groupe commutatif.

Multiplication par un scalaire

Définition 2.2

Soient $P=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{K}$. On définit le polynôme $\alpha\cdot P$ de $\mathbb{K}[X]$ comme suit :

$$\alpha\cdot P\overset{\text{déf.}}{=}(\alpha\times_{\mathbb{K}}a_0,\alpha\times_{\mathbb{K}}a_1,\ldots,\alpha\times_{\mathbb{K}}a_n,\ldots).$$

Remarque

Pour tous $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{K}^*$,

$$\deg(\alpha\cdot P)=\deg(P)\quad\text{et}\quad\mathrm{val}(\alpha\cdot P)=\mathrm{val}(P).$$

Cette loi possède les propriétés suivantes :

- Pour tous $\alpha\in\mathbb{K}$, $P,Q\in\mathbb{K}[X]$, $\alpha\cdot(P+Q)=\alpha\cdot P+\alpha\cdot Q$.
- Pour tous $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $P\in\mathbb{K}[X]$,

$$(\alpha+_{\mathbb{K}}\beta)\cdot P=\alpha\cdot P+\beta\cdot P\quad\text{et}\quad\alpha\cdot(\beta\cdot P)=(\alpha\times_{\mathbb{K}}\beta)\cdot P.$$

- Pour tout $P\in\mathbb{K}[X]$, $1\cdot P=P$.

Multiplication de polynômes

Définition 2.3

Soient $P=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme $P\times Q=(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad c_n\overset{\text{déf.}}{=}a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0.$$

On a le résultat suivant :

Proposition 2.2

Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. On a :

- *$\deg(P\times Q)=\deg(P)+\deg(Q)$.*
- *$\mathrm{val}(P\times Q)=\mathrm{val}(P)+\mathrm{val}(Q)$.*

Exemple 2.2

Soient $P=(1,2\mathrm{i},2,0,0,\ldots)$ et $Q=(1,2,0,0,\ldots)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

$$\left\{\begin{array}{lcl}
c_0 &=& a_0b_0=1,\\
c_1 &=& a_0b_1+a_1b_0=2+2\mathrm{i},\\
c_2 &=& \underbrace{a_0b_2}_{=0}+a_1b_1+a_2b_0=2+4\mathrm{i},\\
c_3 &=& \underbrace{a_0b_3}_{=0}+\underbrace{a_1b_2}_{=0}+a_2b_1+\underbrace{a_3b_0}_{=0}=4,\\
c_4 &=& \underbrace{a_0b_4}_{=0}+\underbrace{a_1b_3}_{=0}+\underbrace{a_2b_2}_{=0}+\underbrace{a_3b_1}_{=0}+\underbrace{a_4b_0}_{=0}=0,\\
c_n &=& 0\quad\text{pour tout } n\geqslant 4.
\end{array}\right.$$

On a donc : $P\times Q=(1,2+2\mathrm{i},2+4\mathrm{i},4,0,0,\ldots)$.

Considérons les fonctions polynomiales associées :

$$P=(1,2\mathrm{i},2,0,0,\ldots)\in\mathbb{C}[X]\quad\rightsquigarrow\quad\forall x\in\mathbb{C}\quad\widetilde{P}(x)=1+2\mathrm{i}x+2x^2$$

$$Q=(1,2,0,0,0,\ldots)\in\mathbb{C}[X]\quad\rightsquigarrow\quad\forall x\in\mathbb{C}\quad\widetilde{Q}(x)=1+2x.$$

Soit $x\in\mathbb{C}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(x)\times\widetilde{Q}(x)&=(1+2\mathrm{i}x+2x^2)\times(1+2x)\\&=1+(2+2\mathrm{i})x+(2+4\mathrm{i})x^2+4x^3.\end{aligned}$$

Or, $P\times Q=(1,2+2\mathrm{i},2+4\mathrm{i},4,0,0,\ldots)$. Par conséquent,

$$\forall x\in\mathbb{C}\quad(\widetilde{P\times Q})(x)=\widetilde{P}(x)\times\widetilde{Q}(x).$$

Ainsi, la fonction polynomiale associée au produit de polynômes est égale au produit des fonctions polynomiales associées à chacun des polynômes.

Structure d'anneau commutatif sur $\mathbb{K}[X]$

En plus d'être un groupe commutatif pour $+$, l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ possède les propriétés suivantes :

- Pour tous $P,Q,R\in\mathbb{K}[X]$, $(P\times Q)\times R=P\times(Q\times R)$.
- Pour tous $P,Q,R\in\mathbb{K}[X]$,

$$\left\{\begin{array}{l}P\times(Q+R)=(P\times Q)+(P\times R),\\(Q+R)\times P=(Q\times P)+(R\times P).\end{array}\right.$$

- Pour tout $P\in\mathbb{K}[X]$, $P\times 1_{\mathbb{K}[X]}=1_{\mathbb{K}[X]}\times P=P$ où

$$1_{\mathbb{K}[X]}\overset{\text{not.}}{=}(1,0,0,\ldots,0,\ldots).$$

- Pour tous $P,Q\in\mathbb{K}[X]$, $P\times Q=Q\times P$.

En résumé, on dit que $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau commutatif.

Intégrité de $\mathbb{K}[X]$

Remarque

De plus, pour tous P,Q de $\mathbb{K}[X]$,

$$\left\{P\neq 0_{\mathbb{K}[X]}\ \text{et}\ Q\neq 0_{\mathbb{K}[X]}\right\}\implies P\times Q\neq 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

ou, par contraposition,

$$P\times Q=0_{\mathbb{K}[X]}\implies\left\{P=0_{\mathbb{K}[X]}\ \text{ou}\ Q=0_{\mathbb{K}[X]}\right\}.$$

On dit que l'anneau $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est intègre.

Notion d'indéterminée et notation

Définition 2.4

On appelle *indéterminée* *le polynôme de* $\mathbb{K}[X]$ *noté* X *défini par* $X = (0, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$.

On vérifie alors que

$$\begin{aligned} X^2 &= X \times X &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots), \\ X^3 &= X^2 \times X &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots). \end{aligned}$$

Par récurrence, on montre :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X^n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

où le coefficient 1 est placé au $(n+1)$-ième rang.

On convient que $X^0 = 1_{\mathbb{K}[X]}$.

Ainsi le polynôme $P = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_N, 0, 0, \dots)$ s'écrit aussi

$$P = a_0 1_{\mathbb{K}[X]} + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_N X^N$$

ou encore

$$P = \underbrace{a_0 + a_1 X + \dots + a_N X^N}_{\text{puissances croissantes}} = \underbrace{a_N X^N + \dots + a_1 X + a_0}_{\text{puissances décroissantes}} .$$

Remarque

On a convenu de la notation suivante (abus d'écriture !) :

$$X - \alpha \overset{not.}{=} X - \alpha 1_{\mathbb{K}[X]}.$$

Ainsi, $P = (a_0, 0, 0, \dots)$ s'écrit : $P = a_0 1_{\mathbb{K}[X]} \overset{not.}{=} a_0$.

Plan du cours

Division euclidienne

Théorème 3.1

Soient deux polynômes A *et* B *de* $\mathbb{K}[X]$ *avec* $B \neq 0$. *Il existe un unique couple* (Q, R) *de polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *tels que*

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Déterminer ce couple (Q, R) *de polynômes, c'est effectuer la* *division euclidienne de* A *par* B.

- *Les polynômes* A *et* B *se nomment respectivement* *dividende* *et* *diviseur*.
- *Les polynômes* Q *et* R *se nomment respectivement* *Quotient* *et* *Reste*.

Illustration

Soient $A = X^4 + 2X^3 - X + 6$ et $B = X^3 - 6X^2 + X + 4$ dans $\mathbb{R}[X]$. Effectuons la division euclidienne de A par B. On a :

$$\begin{array}{r|l} A = \overbrace{X^4 + 2X^3 - X + 6}^{\text{Dividende}} & \overbrace{X^3 - 6X^2 + X + 4}^{\text{Diviseur}} = B \\ -Q_1 \times B = -(X^4 - 6X^3 + X^2 + 4X) & \\ \hline R_1 = 8X^3 - X^2 - 5X + 6 & \underbrace{X + 8}_{\text{Quotient}} = \underbrace{Q_1 + Q_2}_{= Q} \\ -Q_2 \times B = -(8X^3 - 48X^2 + 8X + 32) & \\ \hline R = R_2 = \underbrace{47X^2 - 13X - 26}_{\text{Reste}} & \end{array}$$

On a ainsi obtenu que $\deg(R) = 2 < \deg(B) = 3$ et

$$A = B \times \underbrace{(X + 8)}_{= Q} + \underbrace{47X^2 - 13X - 26}_{= R}.$$

Attention aux écritures !

ATTENTION Lorsque l'on pose la division euclidienne, il est impératif d'écrire ces deux polynômes A et B dans le sens des puissances décroissantes. La division euclidienne est d'ailleurs appelée aussi division suivant les puissances décroissantes.

Remarque

Si $\deg(A) < \deg(B)$ alors $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $R = A$ puisque

$$A = B\,\underbrace{0_{\mathbb{K}[X]}}_{= Q} + \underbrace{A}_{= R} \quad \text{et} \quad \underbrace{\deg(A)}_{= \deg(R)} < \deg(B).$$

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 3.1

Soient A *et* B *deux polynômes de* $\mathbb{K}[X]$. *On dit que* B *divise* A *(ou que* A *est divisible par* B*) s'il existe* $Q \in \mathbb{K}[X]$ *tel que*

$$A = B \times Q.$$

Autrement dit, B divise A si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Remarque

- Si B divise $A \neq 0$ alors $\deg(B) \leqslant \deg(A)$.
- Le polynôme nul est divisible par n'importe quel polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, αA divise A puisque $A = (\alpha A)\,\dfrac{1}{\alpha}$.

Polynôme irréductible

Définition 3.2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $\deg(P) \geqslant 1$. *Le polynôme* P *est dit* *irréductible* *(ou* *premier*) *dans* $\mathbb{K}[X]$ *s'il admet pour diviseur uniquement les polynômes de la forme* $\alpha 1_{\mathbb{K}[X]}$ *et* αP *où* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Dans le cas contraire, on dit qu'il est* *réductible*.

Exemple 3.1

Le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais il est réductible dans $\mathbb{C}[X]$ car $X^2 + 1 = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})$.

Remarque

- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible alors $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.
- Tout polynôme $P = a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ avec $a_1 \neq 0$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

Division selon les puissances croissantes

Théorème 3.2

Soit $k \in \mathbb{N}$.*Soient* A *et* B *deux polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *avec* $val(B) = 0$. *Il existe un unique couple* (Q_k, R_k) *de polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *tels que :*

$$A = BQ_k + X^{k+1} R_k \quad \text{et} \quad \deg(Q_k) \leqslant k.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ *donné, trouver* Q_k *et* R_k*, c'est effectuer la* *division de* A *par* B *selon les puissances croissantes à l'ordre* k.

- *Les polynômes* A *et* B *se nomment respectivement* *dividende* *et* *diviseur*.
- *Les polynômes* Q_k *et* $X^{k+1} R_k$ *se nomment respectivement* *Quotient à l'ordre* k *et* *Reste*.

Illustration

Soient $A = 4 + X^2$ et $B = 1 + X + X^2$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Effectuons la division selon les puissances croissantes à l'ordre $k = 2$ de A par B . On obtient : $\deg(Q_2) = 2 \leqslant k = 2$ et

$$A = B\,\underbrace{(4 - 4X + X^2)}_{= Q_2} + X^3\,\underbrace{(3 - X)}_{= R_2}.$$

Mais, fichtre, comment avons-nous procédé ?

Attention Lorsque l'on pose une division selon les puissances croissantes (à n'importe quel ordre) de A par B, il est cette fois-ci impératif d'écrire les polynômes A et B dans le sens des puissances croissantes.

On pose la division comme suit :

$\overbrace{A = 4 + X^2}^{\text{Dividende}}$	$\overbrace{1 + X + X^2 = B}^{\text{Diviseur}}$
$-(4 + 4X + 4X^2)$	$\underbrace{4 - 4X + X^2}_{\text{Quotient à l'ordre 2}} = Q_2$
$-4X - 3X^2$	
$-(-4X - 4X^2 - 4X^3)$	
$X^2 + 4X^3$	
$-(X^2 + X^3 + X^4)$	
$X^3 R_2 = \underbrace{3X^3 - X^4}_{\text{Reste}}$	

Plan du cours

Définition d'un polynôme dérivé

Définition 4.1

Soient $n \geqslant 1$ et $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On appelle polynôme dérivé de P le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ noté P' défini par

$$P' \overset{\text{déf.}}{=} a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \ldots + na_nX^{n-1}$$

et on convient que si $P = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ alors $P' \overset{\text{déf.}}{=} 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Exemple 4.1

Si $P = 3 + 2X^3 + 4X^5$ alors $P' = 6X^2 + 20X^4$.

Soit $n \geqslant 1$. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ alors $P' \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1}$.

Remarques

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\deg(P) = n$ alors $\deg(P') = n - 1$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors $\widetilde{P}'(x)$ correspond à la dérivée de la fonction polynomiale $\widetilde{P}(x)$, autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \widetilde{P}'(x) = \frac{\mathrm{d}\widetilde{P}}{\mathrm{d}x}(x).$$

Proposition 4.1

Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a alors :

- $(P + Q)' = P' + Q'$.
- $(\lambda P)' = \lambda P'$.
- $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

Dérivées successives

Définition 4.2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence le polynôme dérivé d'ordre n du polynôme P comme suit :

$$\begin{cases} P^{(0)} \overset{\text{déf.}}{=} P \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P^{(n+1)} \overset{\text{déf.}}{=} \left(P^{(n)}\right)'. \end{cases}$$

Ainsi, on a successivement :

$$P^{(0)} = P, \quad P^{(1)} = P', \quad P^{(2)} = (P')', \quad P^{(3)} = (P'')', \quad \ldots$$

et on note souvent :

$$P^{(2)} \overset{\text{not.}}{=} P'' \quad \text{et} \quad P^{(3)} \overset{\text{not.}}{=} P'''.$$

Soit k un entier. Étudions dans un premier temps les dérivées successives du monôme X^k. On vérifie que :

$$\begin{cases} (X^k)^{(1)} = kX^{k-1}, \\ (X^k)^{(2)} = k(k-1)X^{k-2}, \\ (X^k)^{(3)} = k(k-1)(k-2)X^{k-3}, \\ (X^k)^{(4)} = k(k-1)(k-2)(k-3)X^{k-4}, \\ \quad\vdots \\ (X^k)^{(h)} = k(k-1)(k-2)\ldots(k-h+1)X^{k-h}, \end{cases}$$

où h désigne un entier inférieur ou égal à k. En particulier :

$$(X^k)^{(k)} = \underbrace{(k \times (k-1) \times (k-2) \times \ldots \times 2 \times 1)}_{= k!}X^0 = k!.$$

C'est un polynôme constant. Ainsi

$$\forall h \in \mathbb{N} \quad \left(h > k \implies (X^k)^{(h)} = 0\right).$$

Étudions à présent temps les dérivées successives d'un polynôme quelconque de $\mathbb{K}[X]$. Si

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$$

alors, pour tout entier $h \leqslant n$, on a :

$$P^{(h)} = \sum_{k=h}^{n} \left\{k(k-1)(k-2)\ldots(k-h+1)a_kX^{k-h}\right\}.$$

En particulier :

$$P^{(n)} = \underbrace{(n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1)}_{= n!}a_nX^0 = n! \times a_n$$

C'est un polynôme constant. Ainsi,

$$\forall h \in \mathbb{N} \quad \left(h > n \implies P^{(h)} = 0\right).$$

Formules de Mac-Laurin et Taylor pour les polynômes

Proposition 4.2 (Formule de Mac-Laurin pour les polynômes)

Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Alors, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $a_k = \widetilde{P^{(k)}}(0)/k!$. En d'autres termes, si P est un polynôme de degré n alors

$$P = \widetilde{P}(0) + \frac{\widetilde{P'}(0)}{1!}X + \frac{\widetilde{P''}(0)}{2!}X^2 + \ldots + \frac{\widetilde{P^{(n)}}(0)}{n!}X^n.$$

Corollaire 4.1 (Formule de Taylor pour les polynômes)

Soient $c \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n$. Alors

$$P = \widetilde{P}(c) + \frac{\widetilde{P'}(c)}{1!}(X - c) + \ldots + \frac{\widetilde{P^{(n)}}(c)}{n!}(X - c)^n.$$

Plan du cours

Définition d'un zéro

Définition 5.1

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est un zéro (ou une racine) de P si

$$\widetilde{P}(\alpha) = 0$$

où $\widetilde{P}$ est la fonction polynomiale associée à P.

Exemple 5.1

- $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ n'admet aucun zéro (dans $\mathbb{Q}$).
- $X^2 - 2 \in \mathbb{R}[X]$ admet un zéro (dans $\mathbb{R}$) car $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$ avec $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ n'admet aucun zéro (dans $\mathbb{R}$).
- $X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ admet un zéro (dans $\mathbb{C}$) car $\mathrm{i}^2 + 1 = 0$ avec $\mathrm{i} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

On appelle équation algébrique d'inconnue x sur $\mathbb{K}$ une équation de la forme :

$$\widetilde{P}(x) = 0$$

où $\widetilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ est la fonction polynomiale associée à un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 5.1

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. L'élément α de $\mathbb{K}$ est une racine de P si, et seulement si, $X - \alpha$ divise P.

Exemple 5.2

Le polynôme $P = 5X^2 - 25X + 30$ de $\mathbb{R}[X]$ admet pour racine les deux réels 2 et 3 puisque $\widetilde{P}(2) = \widetilde{P}(3) = 0$. Il est donc divisible à la fois par $X - 2$ et par $X - 3$. On obtient :

$$P = 5\,(X-2)\,(X-3)\,.$$

Multiplicité d'un zéro

Définition 5.2

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une racine de multiplicité h de P s'il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X-\alpha)^h Q \quad \text{et} \quad \widetilde{Q}(\alpha) \neq 0.$$

L'entier naturel h s'appelle l'ordre de multiplicité de la racine α.

En particulier :

- la racine est appelée racine simple de P lorsque $h = 1$,
- la racine est appelée racine multiple de P lorsque $h > 1$.

Si $h = 2$ alors α est une racine double, si $h = 3$ alors α est une racine triple.

Exemple 5.3

Considérons le polynôme $P = X^5 - X^3 - X^2 + 1$ de $\mathbb{R}[X]$.

- Il admet un zéro simple qui est -1 car il existe $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ avec $\widetilde{Q}_1(-1) \neq 0$ tel que

$$P = (X+1)\underbrace{(X^4 - X^3 - X + 1)}_{= Q_1}.$$

Le polynôme Q_1 s'obtient en effectuant la division euclidienne de P par $X + 1$.

- Il admet un zéro double qui est 1 car il existe $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ avec $\widetilde{Q}_2(1) \neq 0$ tel que

$$P = (X-1)^2\underbrace{(X^3 + 2X^2 + 2X + 1)}_{= Q_2}.$$

Proposition 5.2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de $\mathbb{K}$ sont des racines distinctes de P, de multiplicités respectives $h_1, h_2, \ldots, h_m$, alors il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = \left[\prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{h_k}\right] Q$$

avec $\widetilde{Q}(\alpha_k) \neq 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Exemple 5.4

Soit $P = X^5 - X^3 - X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Il admet -1 pour zéro simple et 1 pour zéro double car il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = (X+1)(X-1)^2\underbrace{(X^2 + X + 1)}_{= Q} \quad \text{et} \quad \widetilde{Q}(-1) \neq 0,\ \widetilde{Q}(1) \neq 0.$$

Remarque

Si $P = \left[\prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{h_k}\right] Q$ alors, en passant aux degrés, on a :

$$\deg(P) = h_1 + h_2 + \ldots + h_m + \deg(Q)\,.$$

Ainsi, la somme des multiplicités des racines distinctes d'un polynôme est inférieure ou égale au degré de ce dernier :

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_m \leqslant \deg(P)\,.$$

Par conséquent :

- Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ possède au plus n zéros distincts. *Il peut bien-sûr n'en posséder aucun ;*
- Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n possédant $n + 1$ zéros distincts est nécessairement nul.

Lien entre multiplicité d'un zéro et polynômes dérivés

Lemme 5.1

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Si α est une racine de multiplicité $h > 1$ de P alors α est une racine de multiplicité $h - 1$ de P'.

Proposition 5.3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Le scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité h de P si, et seulement si, on a à la fois :

$$\Big(\forall k \in \{0, \ldots, h-1\} \quad \widetilde{P^{(k)}}(\alpha) = 0\Big) \quad \text{et} \quad \widetilde{P^{(h)}}(\alpha) \neq 0.$$

Exemple 5.5

Soit $P = X^3 - 3X + 2 \in \mathbb{R}[X]$. On a : $P' = 3X^2 - 3$ et $P'' = 6X$. P admet 1 pour racine double car $\widetilde{P}(1) = \widetilde{P}'(1) = 0$ et $\widetilde{P}''(1) = 6 \neq 0$.

Plan du cours

Polynômes de $\mathbb{C}[X]$

Théorème 6.1 (de d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Jean Le Rond d'Alembert

(1717, Paris - 1783, Paris)

Ainsi, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ possède n racines dans $\mathbb{C}$, distinctes ou confondues. En ce sens, on dit que $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos.

Conséquence : les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Soit $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) = n$.
Si $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont les m racines distinctes de P, de multiplicités respectives $h_1, \dots, h_m$, alors

$$m \leqslant n \quad \text{et} \quad h_1 + \ldots + h_m = n.$$

Le polynôme P se factorise alors sous la forme suivante :

$$P = a_n \prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{h_k}.$$

Exemple 6.1

Les zéros de $P = X^5 - X^3 - X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ sont les complexes -1, j, $\bar{\text{j}}$ (zéros simples) et 1 (zéro double). La factorisation de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit :

$$P = (X+1)(X-1)^2(X - \text{j})(X - \bar{\text{j}}).$$

Polynômes de $\mathbb{R}[X]$

Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n possède n zéros (distincts ou confondus) dans $\mathbb{C}$.

Proposition 6.1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\alpha \in \mathbb{C}$ est un zéro de multiplicité h de P dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si, $\overline{\alpha}$ est un zéro de multiplicité h de P dans $\mathbb{C}$.

Les zéros d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ne sont pas toujours tous réels. Si $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$, Alors

- le polynôme P possède des zéros réels seulement dans le cas où $b^2 - 4ac \geqslant 0$.
- Dans le cas où $b^2 - 4ac < 0$ les zéros du polynôme P appartiennent à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Contrairement à $\mathbb{C}$, le corps $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos.

Proposition 6.2

Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins un zéro réel.

Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont :

- les polynômes de degré 1,
- les polynômes de degré 2 ne possédant aucune racine réelle.

Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 3$ est nécessairement réductible.

Factorisation irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Nous ne nous intéressons ici qu'aux racines distinctes.

- Certaines de ces racines sont réelles, notées $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ de multiplicités $h_1, \dots, h_m$.
- Les autres racines appartiennent à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, classées par couples de zéros conjugués $(\beta_1, \overline{\beta}_1), \dots, (\beta_{m'}, \overline{\beta}_{m'})$ de multiplicités $s_1, \dots, s_{m'}$.

On a alors : $h_1 + \ldots + h_m + 2(s_1 + \ldots + s_{m'}) = n$.

Le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ se factorise alors sur $\mathbb{C}$ comme suit :

$$P = a_n \underbrace{\left[\prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{h_k}\right]}_{\text{racines dans } \mathbb{R}} \underbrace{\left[\prod_{k=1}^{m'} (X - \beta_k)^{s_k} (X - \overline{\beta}_k)^{s_k}\right]}_{\text{racines dans } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}.$$

Le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ se factorise sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$P = a_n \underbrace{\left[\prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{h_k}\right]}_{\text{racines réelles}} \underbrace{\left[\prod_{k=1}^{m'} (X^2 + p_k X + q_k)^{s_k}\right]}_{\text{py irréductibles sur } \mathbb{R}}$$

avec $p_k^2 - 4q_k < 0$ pour $k \in \{1, \dots, m'\}$ et où $X^2 + p_k X + q_k$ admet β_k et $\overline{\beta}_k$ pour zéros dans $\mathbb{C}$.

Exemple 6.2

La factorisation de $P = X^5 - X^3 - X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit :

$$P = (X+1)(X-1)^2(X^2 + X + 1).$$

Relations entre coefficients et racines d'un polynôme

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. On suppose que P admet n racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (distinctes ou conf.) sur $\mathbb{K}$. Alors

$$P = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k).$$

On dit alors que P est scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe des relations entre ses coefficients et ses n racines.

Exemple 6.3

Si P est un polynôme scindé de degré 2 alors

$$a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = a_2 (X - \alpha_1)(X - \alpha_2).$$

D'où les deux relations (formules de Viète) :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -a_1/a_2 \quad \text{et} \quad \alpha_1\alpha_2 = a_0/a_2.$$

Plus généralement, si P est un polynôme scindé de degré n alors il y a n formules reliant les coefficients et les racines de P. Elles s'écrivent :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \qquad \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Chacune d'elles fait apparaître la somme des produits de k racines parmi les n racines de P.

- Cette somme contient donc autant de termes que de parties à k éléments parmi n éléments.
- Elle comporte ainsi $\binom{n}{k}$ termes et chacun des termes est constitué d'un produit de k racines.

En particulier, lorsque $k = 1$ et $k = n$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Exemple 6.4

- Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ un polynôme scindé de degré 3. On a :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a_2/a_3, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = a_1/a_3, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -a_0/a_3. \end{cases}$$

- Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4$ un polynôme scindé de degré 4. On a :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -a_3/a_4, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = a_2/a_4, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -a_1/a_4, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = a_0/a_4. \end{cases}$$