LIMITES_DERIVEES

June 4, 2024

1 LIMITES ET DERIVEES

1.1 Limites

1.1.1 Limites avec `numpy` et `matplotlib`

Exemple Calcul de : $\lim_{x \to 2} 2x^3 + 2x^2 + 1$

Pour se faire, on va calculer les limite à gauche (c'est-à-dire 2^-) et à droite (2^+) de $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 1$

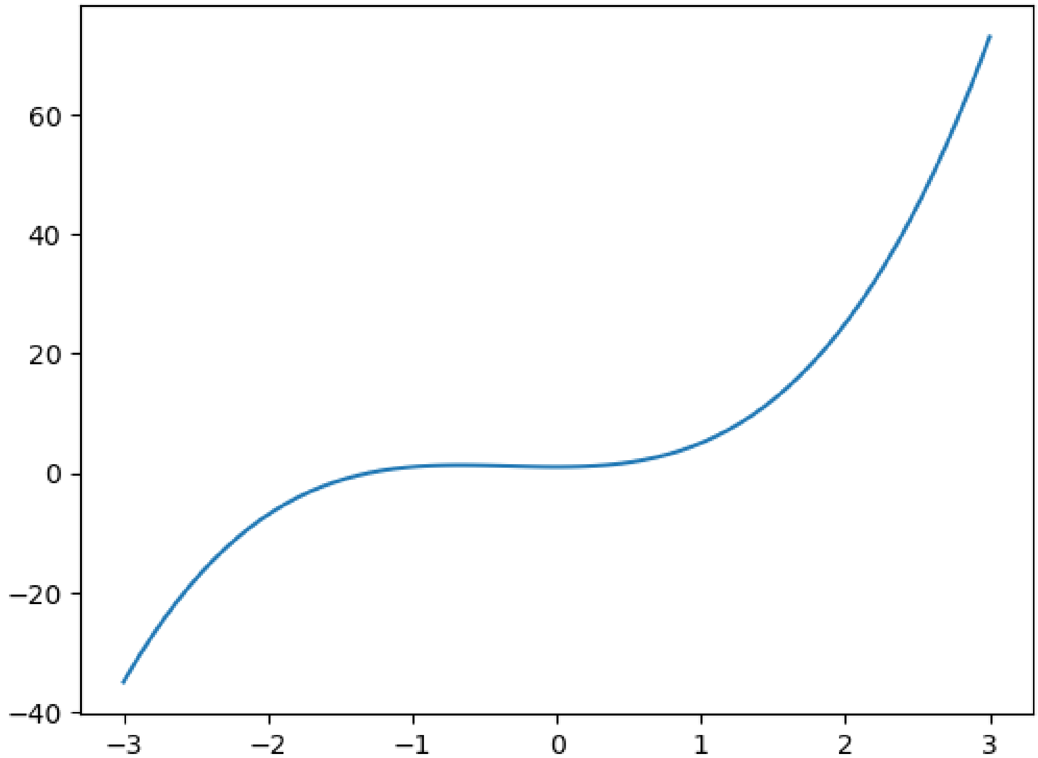
[1]:
```python
import numpy as np # importation de numpy comme np
import matplotlib.pyplot as plt # importation de matplotlib pour les courbes

def f(x):
    return 2*x**3+2*x**2+1
# définition de la fonction
x=np.linspace(-3, 3, 100)
display(f)
# affichage de la fonction
print(r'la courbe de f pour x=[-3,3]')
plt.plot(x,f(x))
# traçage de la courbe de f pour x=[-3,3]
plt.show()
print(r'la courbe de f pour x=[1.9999,2.0001]')
x=np.linspace(1.9999,2.0001,100)
plt.plot(x,f(x))
# traçage de la courbe de f pour x=[-3,3]
plt.show() # traçage de la courbe de f pour x=[1.99,2.01]
Vgauche=np.array([1.9999, 1.99999,1.999999])
Vdroite=np.array([2.000001,2.00001,2.0001])
print('Limite à gauche')
Ugauche=f(Vgauche)
print(Vgauche)
print(Ugauche)
print("la limite de f pour x à gauche de 2 est 25")
print('Limite à droite')
Udroite=f(Vdroite)
print(Vdroite)
```

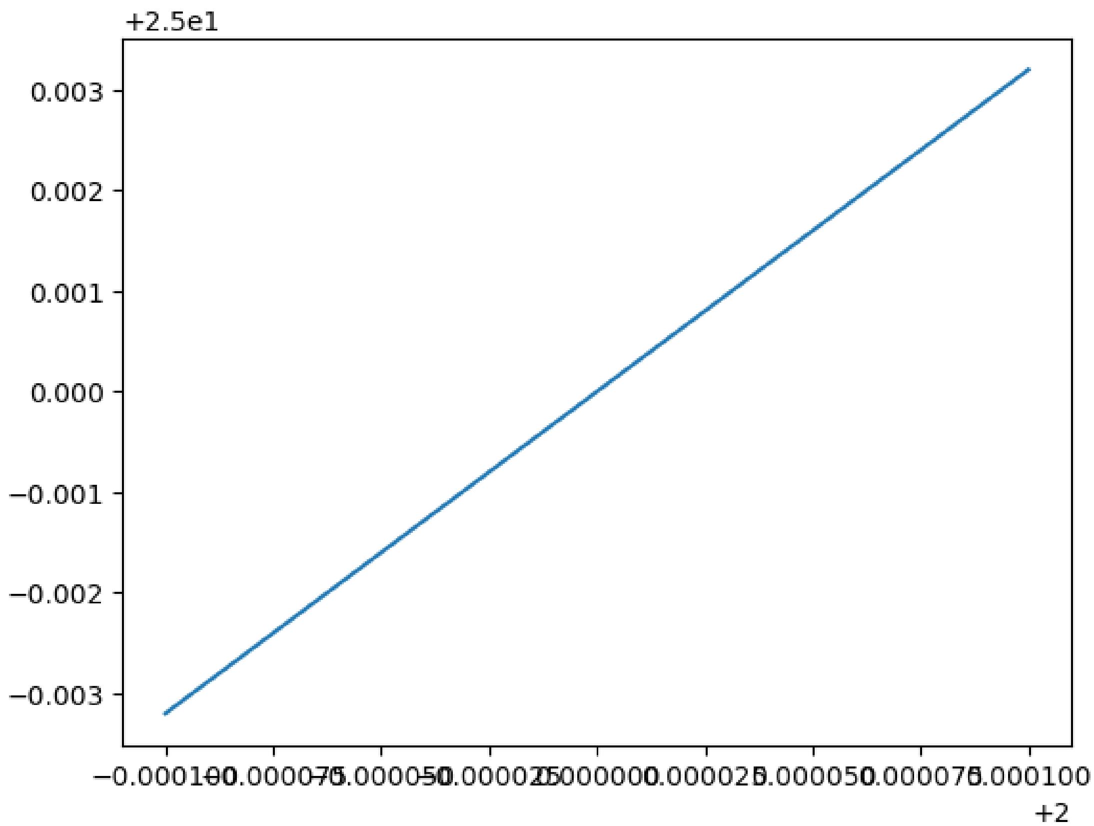
```python
print(Udroite)
print("la limite de f pour x à droite de 2 est 25")
```

```
<function __main__.f(x)>
```

```
la courbe de f pour x=[-3,3]
```




```
la courbe de f pour x=[1.9999,2.0001]
```




```
Limite à gauche
[1.9999   1.99999  1.999999]
[24.99680014 24.99968    24.999968  ]
la limite de f pour x à gauche de 2 est 25
Limite à droite
[2.000001 2.00001  2.0001  ]
[25.000032   25.00032    25.00320014]
la limite de f pour x à droite de 2 est 25
```

On peut faire ce travail précédent en utilisant `sympy`

1.1.2 Limites sous sympy

On explique ici comment effectuer des tâches de calcul de base telles que les limites et les dérivées dans `SymPy`. Importation des modules nécessaires:

[2]:
```
from sympy import *
x, y, z = symbols('x y z')
init_printing(use_unicode=True)
```

Pour le calcul de limite avec `sympy`, la syntaxe est `limit(fonction, variable, point)`.

`limit` doit être utilisées à la place des `sub` chaque fois que le point d'évaluation est une singularité (un point où la fonction n'est pas définie). Même si SymPy a des objets à représenter ∞ , leur utilisation à des fins d'évaluation n'est pas fiable, car ils ne suivent pas des éléments tels que le taux de croissance. Aussi, des choses comme $\infty - \infty$ et $\frac{\infty}{\infty}$ renvoie `nan` (*not a number*). Par exemple

[3]:
```
expr = x**2/exp(x)
expr.subs(x, oo)
```

[3]: NaN

[4]:
```
limit(expr, x, oo)
```

[4]: 0

[5]:
```
#Exemple
limit(sin(x)/x, x, 0)
limit(x**x, x, 0)
```

[5]: 1

[6]:
```
#pour la limite en l'in ni :
limit(x, x, oo)
limit(1/x, x, oo)
```

[6]: 0

`limit` a une contrepartie non évaluée, `Limit`. Pour l'évaluer, utilisez `doit()`.

[7]:
```
expr = Limit((cos(x) - 1)/x, x, 0)
expr
expr.doit()
```

[7]: 0

Pour évaluer une limite d'un seul côté, transmettez `'+'` ou `'-'` comme quatrième argument à limit. Par exemple, pour calculer $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$

[8]:
```
limit(1/x, x, 0, '+')
#par opposition
limit(1/x, x, 0, '-')
```

[8]: $-\infty$

Travaux pratiques

Exercice 1

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1000}{x^2+x}$
3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2+x+1} - x$
4. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2x^2-1}$
5. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{x-4}$
6. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x-1} - x$

Exercice 2

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x-1}$

[ ]:

```

```

1.2 Dérivées

Pour calculer la dérivée d'une fonction, on utilise la fonction `diff`. Exemple

[9]:

```
diff(cos(x), x)
diff(exp(x**2), x)
```

[9]:

$2xe^{x^2}$

`diff` peut prendre plusieurs dérivés à la fois. Pour prendre plusieurs dérivées, transmettez la variable autant de fois que vous souhaitez la différencier, ou transmettez un nombre après la variable. Par exemple, les deux différences de ce qui suit trouvent la dérivée troisième de x^4.

[10]:

```
diff(x**4, x, x, x)
```

[10]:

$24x$

[11]:

```
diff(x**4, x, 3)
```

[11]:

$24x$

Vous pouvez également prendre des dérivées par rapport à plusieurs variables à la fois. Transmettez simplement chaque dérivée dans l'ordre, en utilisant la même syntaxe que pour les dérivées à variable unique.

Exemple du calcul de $\frac{\partial^7}{\partial x \partial y^2 \partial z^4} \left(e^{xyz}\right)$

[12]:

```
expr = exp(x*y*z)
diff(expr, x, y, y, z, z, z, z)
```

[12]:

$x^3y^2\left(x^3y^3z^3 + 14x^2y^2z^2 + 52xyz + 48\right)e^{xyz}$

[13]:
```
diff(expr, x, y, 2, z, 4)
```

[13]:
$$x^3 y^2 \left(x^3 y^3 z^3 + 14x^2 y^2 z^2 + 52xyz + 48\right) e^{xyz}$$

[14]:
```
diff(expr, x, y, y, z, 4)
```

[14]:
$$x^3 y^2 \left(x^3 y^3 z^3 + 14x^2 y^2 z^2 + 52xyz + 48\right) e^{xyz}$$

`diff` peut également être appelé comme méthode. Les deux manières d'appeler `diff` sont exactement les mêmes et sont fournies uniquement pour des raisons de commodité.

[15]:
```
expr.diff(x, y, y, z, 4)
```

[15]:
$$x^3 y^2 \left(x^3 y^3 z^3 + 14x^2 y^2 z^2 + 52xyz + 48\right) e^{xyz}$$

Pour créer un dérivé non évalué, utilisez la classe `Derivative`. Il a la même syntaxe que `diff`.

[16]:
```
deriv = Derivative(expr, x, y, y, z, 4)
deriv
```

[16]:
$$\frac{\partial^7}{\partial z^4 \partial y^2 \partial x} e^{xyz}$$

Pour évaluer un dérivé non évalué, utilisez la méthode `doit()`.

[17]:
```
deriv.doit()
```

[17]:
$$x^3 y^2 \left(x^3 y^3 z^3 + 14x^2 y^2 z^2 + 52xyz + 48\right) e^{xyz}$$

Importance Ces objets non évalués sont utiles pour retarder l'évaluation de la dérivée ou à des fins d'impression. Ils sont également utilisés lorsque SymPy ne sait pas comment calculer la dérivée d'une expression (par exemple, si elle contient une fonction non définie, qui sont décrites dans la section Résolution d'équations différentielles).

Des dérivées d'ordre non spécifié peuvent être créées en utilisant un tuple (x, n) où n est l'ordre de la dérivée par rapport à x.

[18]:
```
m, n, a, b = symbols('m n a b')
expr = (a*x + b)**m
expr.diff((x, n))
```

[18]:
$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} (ax + b)^m$$