CHAPITRE 0

RAPPELS SUR LES FONCTIONS

0.1 GÉNÉRALITÉS

0.1.1 Définitions

Définition 0.1 Soient E et F deux ensembles.

- Une *fonction* f de E (ensemble de départ) à valeurs dans F (ensemble d'arrivée) est une relation qui à chaque élément de E associe au plus un élément de F. On note $f : E \to F$.
- Pour tout $x \in E$, l'élément associé à x, s'il existe, est noté $f(x)$. Si $y = f(x)$, alors y est l'*image* de x par f et x est ***un*** *antécédent* de y par f.
- Si $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$, alors f est dite *fonction réelle d'une variable réelle*.

Définition 0.2 Soient E et $F \subset \mathbb{R}$ et f une fonction de E vers F.

- L'*ensemble de définition* de f est l'ensemble des éléments de E qui possèdent une image par f :
$$D_f = \{x \in E \mid f(x) \text{ existe}\}.$$
- Si $D_f = E$, alors f est une *application*.
- L'ensemble $\Gamma = \left\{(x, f(x)) \in E \times F \,|\, x \in D_f\right\}$ est le *graphe* de f.

Définition 0.3 Deux fonctions f et g sont égales si elles ont le même ensemble de définition D et le même ensemble d'arrivée et si pour tout $x \in D$, $f(x) = g(x)$.

0.1.2 Fonctions remarquables

Soient $f : E \to \mathbb{R}$ une application et $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$.

Définition 0.4 L'application f est dite constante s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = a$. Lorsque $a = 0$, on dit que f est la fonction nulle.

Définition 0.5 L'application f est dite

- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant m$; dans ce cas, $f(E)$ possède une borne inférieure et on note
$$\inf_{x \in E} f(x) = \inf f(E) = \inf\{f(x) \mid x \in E\}.$$
- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant M$; dans ce cas, $f(E)$ possède une borne supérieure et on note
$$\sup_{x \in E} f(x) = \sup f(E) = \sup\{f(x) \mid x \in E\}.$$
- **bornée** si f est à la fois minorée et majorée ; cela est équivalent à dire que la fonction $|f|$ est majorée c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M$.

Définition 0.6 L'application f est dite
- **paire** si pour tout $x \in E$, $-x \in E$ et $f(-x) = f(x)$;
- **impaire** si pour tout $x \in E$, $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$.

Définition 0.7 L'application f est dite **périodique** de période T si pour tout $x \in E$, $x + T \in E$ et $f(x + T) = f(x)$.

0.2 COMPOSITION DE FONCTIONS

Définition 0.8 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. La *composée* de f et g est l'application $g \circ f$ définie de E dans G par :
$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right]. \tag{1}$$

Exemple 0.9 Soient les fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2 - 2$. Comparons les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f[g(x)] \\ &= 2g(x) + 1 = 2(x^2 - 2) + 1 \\ &= 2x^2 - 3 \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g[f(x)] \\ &= (f(x))^2 - 2 = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x + 1 - 2 \\ &= 4x^2 + 4x - 1. \end{aligned}$$
Dans ce cas, on a $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$.

Remarque 0.10 En général, pour deux fonctions f et g, l'on a : $g \circ f \neq f \circ g$.

0.3 Fonction réciproque

Définition 0.11 Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une fonction.

- On dit que la fonction f est **bijective** si f est une application (c'est-à-dire $D_f = E$) et si à chaque $y \in F$ correspond un unique antécédent $x \in E$ c'est-à-dire si pour tout $y \in F$, l'équation d'inconnue $x \in E$ suivante :
$$f(x) = y$$
a une unique solution.
- Dans ce cas, on appelle **réciproque** de f, l'application notée f^{-1} qui à chaque $y \in F$ fait correspondre l'unique x tel que $f(x) = y$.

Exemple 0.12 Les fonctions $x \mapsto \ln x$ (de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$) et $x \mapsto e^x$ (de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$) sont réciproques l'une de l'autre. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $\ln x = y$ a une unique solution $x = e^y \in \mathbb{R}_+^*$ et inversement.

Application 0.13 Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ et f la fonction de E dans F définie par $f(x) = x^2$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est bijective et, le cas échéant, déterminer f^{-1}.

1) $E = F = \mathbb{R}$.
2) $E = \mathbb{R}_+$ et $F = \mathbb{R}_+$.
3) $E = \mathbb{R}_-$ et $F = \mathbb{R}_+$.

Remarque 0.14 Les courbes représentatives respectives d'une fonction bijective et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ appelée *première bissectrice* (voir Figure 1 pour un exemple).

Proposition 0.15 *Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une application bijective.*

- *Pour tout $x \in E$, $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.*
- *Pour tout $y \in F$, $f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y$.*

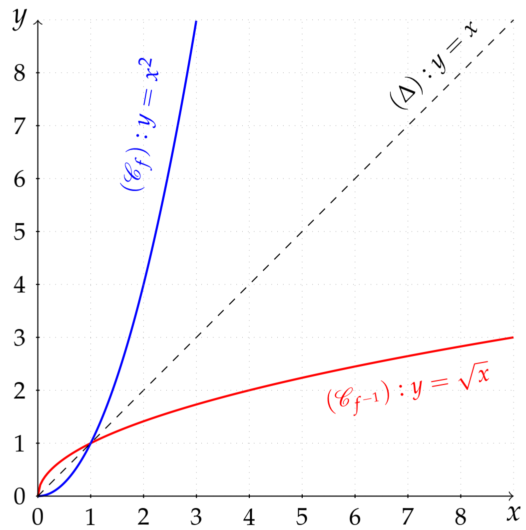

FIGURE 1 – Représentation graphique des fonctions $f : x \mapsto x^2$ (en bleu) et de son inverse $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$ (en rouge) définies de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$

0.4 EXERCICES

Exercice 0.1 Donner les ensembles de définition respectifs des fonctions suivantes ayant $\mathbb{R}$ comme ensemble de départ :

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad f_2(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} \qquad f_3(x) = \ln|x-1|$$
$$f_4(x) = \ln\left|\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)\right| \qquad f_5(x) = \ln(\ln x) \qquad f_6(x) = \ln(1-e^{-x})$$
$$f_7(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \qquad f_8(x) = \frac{1}{\sin x} \qquad f_9(x) = \frac{1}{\cos 2x}$$

Exercice 0.2 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$. Montrer que f est bornée et déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 0.3 On considère les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Donner les ensembles de définition et les expressions des fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice 0.4 On considère la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et appelée fonction sinus hyperbolique. Démontrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.