Sèrie 3
Travaux dirigés de cinématique du point

Exercice 1

Un mobile animé d'une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{i}$ constante, pénètre dans un milieu résistant dans lequel il est soumis à une accélération $\overrightarrow{a} = -kv^2\overrightarrow{i}$; k est une constante et v la vitesse instantanée.

1. En prenant pour origine des temps et des espaces le moment où le mobile pénètre dans le milieu, établir la loi donnant v(t).
2. En déduire l'équation du mouvement.
3. Montrer qu'après un parcours x , la vitesse est $v = v_0 e^{-kx}$

Exercice 2

Dans le plan xOy d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, un point P se déplace sur un cercle de rayon R et de centre $I(R, 0, 0)$. A l'instant $t = 0$, P se trouve en $A(2R, 0, 0)$ et possède la vitesse positive $\overrightarrow{v_0}(0, v_0, 0)$.
On désigne par r et θ les coordonnées polaires de P.

1. Former l'équation polaire du cercle, en déduire son équation cartésienne.
2. Représenter sur la figure la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ de P. Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes polaires des vecteurs vitesse $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ de P dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{k}\right)$.
3. Soit s l'abscisse curviligne de P (l'origine est en A). ⊙ Donner l'expression de s en fonction de θ. ⊙ Représenter sur la figure la base intrinsèque $(\overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{u_n})$ de P. ⊙ Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes de $\overrightarrow{v}$ et de $\overrightarrow{a}$ dans cette base. ⊙ Calculer les composantes polaires de $\overrightarrow{u_t}$ et de $\overrightarrow{u_n}$. Retrouver dans ces conditions les composantes polaires de $\overrightarrow{v}$ et de $\overrightarrow{a}$.
4. On désigne par ω la vitesse angulaire de P, dont on suppose dans tout ce qui suit qu'elle est constante. ⊙ Donner en fonction de t, les expressions de θ puis de r. ⊙ En déduire les expressions en fonction de t de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ dans les bases polaire et de Frenet.

Exercice 3

Un point M décrit une hélice circulaire d'axe Oz.
Ses équations horaires sont : $x = Rcos\theta$; $y = Rsin\theta$; $z = h\theta$. R est le rayon du cylindre de révolution sur lequel est tracé l'hélice, h est une constante et θ est l'angle que fait avec Ox la projection $\overrightarrow{Om}$ de $\overrightarrow{OM}$ sur Oxy.

1. Donner en coordonnées cylindriques les exp ressions de la vitesse et de l'accélération.
2. Montrer que le vecteur vitesse fait avec le plan Oxy un angle constant.
3. Montrer que si le mouvement de rotation est uniforme, le vecteur accélération passe par l'axe du cylindre et est parallèle au plan Oxy . Calculer le rayon de courbure.