Cours de Mathématiques - ASINSA-1
Les matrices

Frédéric STURM

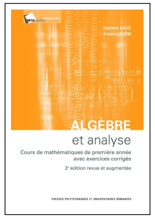
Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon

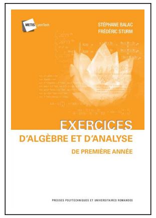
Année académique 2011-2012

Pour plus de compléments, voir les deux ouvrages suivants parus aux Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR) dans la collection METIS LyonTech :

www.ppur.org

- **Algèbre et analyse, 2e édition revue et augmentée,** **Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés**, S. Balac, F. Sturm, 1110 pages, paru en 2009.
- **Exercices d'algèbre et d'analyse,** **154 exercices corrigés de première année**, S. Balac, F. Sturm, 448 pages, paru en 2011.





Plan du cours

Définition d'une matrice

Soient $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ deux entiers.

Définition 1.1

Une matrice A de type (n, p) sur $\mathbb{K}$ est un tableau à n ligne(s) et p colonne(s) constitué d'éléments appartenant au corps $\mathbb{K}$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

On la note aussi : $\mathrm{A} \overset{\text{not.}}{=} (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant p}$ *et on écrit :*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Remarque

- Au lieu de « A est une matrice de type (n, p) », on dit parfois « A est une matrice $n \times p$ ».
- On appelle rangée de A toute ligne ou toute colonne de la matrice A.
- L'élément $a_{ij} \in \mathbb{K}$ s'appelle un terme (ou un coefficient) de la matrice A.

$$\textit{ligne } i \rightarrow \underbrace{\overset{\begin{array}{c}\textit{colonne } j\\ \downarrow\end{array}}{\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots\cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}}}_{p \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}\right\} n \text{ lignes}$$

- On dit que deux matrices A et B du même type (n, p) sont égales, et on note $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, si leurs coefficients sont égaux.

Cas particuliers

Soit A une matrice de type (n, p) sur $\mathbb{K}$.

- Si $n = p$ alors A est dite carrée d'ordre n et on note : $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Par exemple,
$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\mathrm{i} \\ 3 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}).$$
- Si $p = 1$ alors on dit que A est une matrice-colonne et on note : $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Par exemple,
$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}).$$
- Si $n = 1$ alors on dit que A est une matrice-ligne et on note : $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K})$. Par exemple,
$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{1,3}(\mathbb{R}).$$

- Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est diagonale si
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
On note alors : $\mathrm{A} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.
- On appelle matrice identité d'ordre n la matrice carrée d'ordre n définie par
$$\mathrm{I}_n \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- On désigne par $0_{n,p}$ la matrice de type (n, p) dont les coefficients sont tous nuls. Autrement dit,

$$0_{n,p} \overset{\text{déf.}}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}}\right\} n \text{ lignes}$$

Le mot « matrice » a été introduit par **James Sylvester** (1814, Londres - 1897, Londres).

Addition sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1.2

Soient A, B deux matrices de type (n, p) sur $\mathbb{K}$:

$$\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant p}, \quad \mathrm{B} = (b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant p}.$$

On appelle somme de A et B la matrice de type (n, p) sur $\mathbb{K}$ définie par

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \overset{\text{déf.}}{=} \left(a_{ij} +_{\mathbb{K}} b_{ij}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant p}.$$

Les opérations algébriques que nous allons définir sur l'ensemble des matrices sont dues à **Arthur Cayley** (1821, Richmond - 1895, Cambridge).

Structure de groupe commutatif sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

On vérifie les points suivants :

- Pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = (\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C}$.
- Pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{A}+0_{n,p} = 0_{n,p}+\mathrm{A} = \mathrm{A}$.
- Toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet un opposé qui est la matrice $-\mathrm{A} \overset{\text{déf.}}{=} (-a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$. En effet, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
$$\mathrm{A}+(-\mathrm{A}) = (-\mathrm{A})+\mathrm{A} = 0_{n,p}.$$
- Pour tous A, B dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{B}+\mathrm{A}$.

On dit alors que l'ensemble structuré $(\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ possède une structure de groupe commutatif.

Multiplication par un scalaire

Définition 1.3

Soient $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ une matrice de type (n,p) sur $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle produit de A par α la matrice de type (n,p) sur $\mathbb{K}$ définie par
$$\alpha \cdot \mathrm{A} \overset{\text{déf.}}{=} \left(\alpha \times_{\mathbb{K}} a_{ij}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}.$$

Exemple 1.1

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad 3\cdot\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -9 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Rappelons que $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition $(+)$ est un groupe commutatif. De plus, la multiplication par un scalaire possède les propriétés suivantes :

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tous A, B dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
$$\alpha\cdot(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \alpha\cdot\mathrm{A}+\alpha\cdot\mathrm{B}.$$
- Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ et pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
$$\begin{cases} (\alpha +_{\mathbb{K}} \beta)\cdot\mathrm{A} = \alpha\cdot\mathrm{A}+\beta\cdot\mathrm{A}, \\ \alpha\cdot(\beta\cdot\mathrm{A}) = (\alpha \times_{\mathbb{K}} \beta)\cdot\mathrm{A}. \end{cases}$$
- Pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $1_{\mathbb{K}}\cdot\mathrm{A} = \mathrm{A}$.

Ainsi, $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Multiplication de matrices

Définition 1.4

Considérons

- $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant \boldsymbol{p}}$ *une matrice de type $(n,\boldsymbol{p})$ sur $\mathbb{K}$,*
- $\mathrm{B} = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant \boldsymbol{p},\ 1\leqslant j\leqslant q}$ *une matrice de type $(\boldsymbol{p},q)$ sur $\mathbb{K}$.*

On appelle produit de A et B la matrice de type (n,q) sur $\mathbb{K}$ définie par $\mathrm{A}\times\mathrm{B} = \left(c_{ij}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant q}$ avec
$$c_{ij} \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{\boldsymbol{p}} a_{ik}b_{kj}$$
pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ et tout $j \in \{1,2,\ldots,q\}$. On note aussi AB au lieu de $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$.

Règle des « dominos » : *matrice* $(n,\boldsymbol{p})$ $\times$ *matrice* $(\boldsymbol{p},q) =$ *matrice* (n,q)

En pratique, on disposera les matrices A et B comme suit :

$$\begin{array}{ccc} & & j\text{-ième colonne de B} \\ & \boldsymbol{p}\ \textbf{lignes} \left\{ \right. & \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ & \vdots & \\ & b_{pj} & \end{pmatrix} \\ i\text{-ième ligne de A} \rightarrow & \overbrace{\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & & \end{pmatrix}}^{\boldsymbol{p}\ \textbf{colonnes}} & \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 1.2

$$\begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ 1 & 2 \\ -\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} & \mathrm{i}+4 \\ \mathrm{i} & 7 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (13).$$

Proposition 1.1

1. *Si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors*
$$\mathrm{A}\times(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \mathrm{A}\times\mathrm{B}+\mathrm{A}\times\mathrm{C}.$$
2. *Si $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors*
$$(\mathrm{B}+\mathrm{C})\times\mathrm{A} = \mathrm{B}\times\mathrm{A}+\mathrm{C}\times\mathrm{A}.$$
3. *Si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{C} \in \mathrm{M}_{q,m}(\mathbb{K})$ alors*
$$\mathrm{A}\times(\mathrm{B}\times\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\times\mathrm{B})\times\mathrm{C}.$$

Cas des matrices carrées

Définition 1.5 (Puissance d'une matrice)

Soient A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle puissance k-ième de A la matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$ définie par
$$\mathrm{A}^k \overset{\text{déf.}}{=} \overbrace{\mathrm{A}\times\mathrm{A}\times\ldots\times\mathrm{A}}^{k\text{ fois}}.$$
Par convention : $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n$.

Proposition 1.2

Soit A une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. $\forall k \in \mathbb{N}\quad \forall k' \in \mathbb{N}\quad \mathrm{A}^k\times\mathrm{A}^{k'} = \mathrm{A}^{k+k'}$;
2. $\forall k \in \mathbb{N}\quad \forall k' \in \mathbb{N}\quad \left(\mathrm{A}^k\right)^{k'} = \mathrm{A}^{k\times k'}$;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}\quad \forall k \in \mathbb{N}\quad (\alpha\cdot\mathrm{A})^k = \alpha^k\cdot\mathrm{A}^k$.

Exemple 1.4

Considérons la matrice carrée réelle suivante :
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que l'on a :
$$\mathrm{A}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\mathrm{A}^k = 0$ pour tout entier $k \geqslant 3$.

ATTENTION Le calcul de la puissance k-ième d'une matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ d'ordre n ne se résume pas à élever à la puissance k chacun des termes de la matrice puisque, en général,
$$\mathrm{A}^k \neq \begin{pmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k & \cdots & a_{1n}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k & \cdots & a_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^k & a_{n2}^k & \cdots & a_{nn}^k \end{pmatrix}.$$

En revanche, le cas des matrices diagonales est fortement intéressant. En effet, on vérifie par récurrence sur k que si
$$\mathrm{A} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$
alors
$$\forall k \in \mathbb{N}\quad \mathrm{A}^k = \operatorname{diag}\left(a_{11}^k, a_{22}^k, \ldots, a_{nn}^k\right).$$

Attention Si $n \geqslant 2$ alors le produit de matrices n'est pas une opération commutative. Par exemple,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \neq \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Par conséquent, si A et B désignent deux matrices carrées du même ordre, alors, *a priori*, les matrices $(\mathrm{A}\times\mathrm{B})^2$ et $\mathrm{A}^2\times\mathrm{B}^2$ ne sont pas égales :

$$(\mathrm{A}\times\mathrm{B})^2 = (\mathrm{A}\times\mathrm{B})\times(\mathrm{A}\times\mathrm{B}) \neq \mathrm{A}^2\times\mathrm{B}^2 \quad \text{si} \quad \mathrm{A}\times\mathrm{B} \neq \mathrm{B}\times\mathrm{A}$$

et plus généralement, pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$(\mathrm{A}\times\mathrm{B})^k \neq \mathrm{A}^k\times\mathrm{B}^k \quad \text{si} \quad \mathrm{A}\times\mathrm{B} \neq \mathrm{B}\times\mathrm{A}.$$

Définition 1.6 (Matrice nilpotente)

Soit A une matrice d'ordre n sur $\mathbb{K}$.

- *A est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{A}^k = 0_n$.*
- *Si A est nilpotente alors son indice de nilpotence est l'entier p (non nul) défini par*

$$p \overset{\text{déf.}}{=} \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{A}^k = 0_n\}.$$

Exemple 1.5

La matrice carrée

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est nilpotente. Son indice de nilpotence est 3.

Structure d'anneau sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

En plus d'être un groupe commutatif pour $+$, $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ possède les propriétés suivantes :

- Pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{A}\times(\mathrm{B}\times\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\times\mathrm{B})\times\mathrm{C}$.
- Pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

$$\begin{cases} \mathrm{A}\times(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \mathrm{A}\times\mathrm{B}+\mathrm{A}\times\mathrm{C}, \\ (\mathrm{B}+\mathrm{C})\times\mathrm{A} = \mathrm{B}\times\mathrm{A}+\mathrm{C}\times\mathrm{A}. \end{cases}$$

- Pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{I}_n\times\mathrm{A} = \mathrm{A}\times\mathrm{I}_n = \mathrm{A}$.

En résumé, on dit que $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ possède une structure d'anneau.

Remarque

- Rappelons que si $n \geqslant 2$, la multiplication n'est pas commutative sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Ainsi, $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ n'est pas un anneau commutatif lorsque $n \geqslant 2$.
- Si $n \geqslant 2$, le produit de deux matrices non nulles peut être nul. Par exemple,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=0}.$$

On dit que $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ n'est pas un anneau intègre lorsque $n \geqslant 2$.

Formule du binôme de Newton

On vérifie facilement :

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 = \mathrm{A}\times\mathrm{A}+\mathrm{A}\times\mathrm{B}+\mathrm{B}\times\mathrm{A}+\mathrm{B}\times\mathrm{B} = \mathrm{A}^2+\mathrm{AB}+\mathrm{BA}+\mathrm{B}^2.$$

Si $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ alors $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 = \mathrm{A}^2+2\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2$.

Plus généralement :

Proposition 1.3 (Formule du binôme de Newton)

Soient A, B deux matrices carrées d'ordre n. Si $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{m-k}$$

où, pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$, $\displaystyle\binom{m}{k} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{m!}{(m-k)!\,k!}$.

Transposition de matrices

Définition 1.7

Soit A une matrice de type (n, p) sur $\mathbb{K}$. On appelle matrice transposée de A et on note A^T (ou parfois ${}^t\mathrm{A}$) la matrice de type (p, n) sur $\mathbb{K}$ obtenue à partir de A en échangeant les lignes et les colonnes.

Exemple 1.6

Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & 3\mathrm{i} \\ 4 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 4 \\ \sqrt{2} & 3\mathrm{i} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

- Si A est carrée d'ordre n alors A^T est carrée d'ordre n.
- Si A est une matrice-ligne alors A^T est une matrice-colonne.

Propriétés

Proposition 1.4

1. *Soit A une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors*

$$(\mathrm{A}^T)^T = \mathrm{A}.$$

2. *Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors*

$$\begin{cases} (\mathrm{A}+\mathrm{B})^T = \mathrm{A}^T+\mathrm{B}^T, \\ (\alpha\cdot\mathrm{A})^T = \alpha\cdot\mathrm{A}^T. \end{cases}$$

3. *Soient $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors*

$$(\mathrm{A}\times\mathrm{B})^T = \mathrm{B}^T\times\mathrm{A}^T.$$

Matrices symétriques, antisymétriques

Définition 1.8

Soit A une matrice carrée sur $\mathbb{K}$.

- *On dit que A est symétrique si $\mathrm{A}^T = \mathrm{A}$.*
- *On dit que A est antisymétrique si $\mathrm{A}^T = -\mathrm{A}$.*

Exemple 1.7

- $\begin{pmatrix} 2+3\mathrm{i} & 3 & -\mathrm{i} \\ 3 & \sqrt{2} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique.
- $\begin{pmatrix} 0 & 1-\mathrm{i} & 0 \\ -1+\mathrm{i} & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Plan du cours

On considère :

- un $\mathbb{K}$-e.v. E de dim. p muni de la base $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$;
- un $\mathbb{K}$-e.v. F de dim. n muni de la base $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$;
- une application linéaire φ de E dans F.

Rappel : l'application φ est entièrement déterminée dès que l'on connaît les vecteurs $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \dots, \varphi(\vec{e}_p)$.

Conséquence : si on sait comment décomposer ces vecteurs :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi(\vec{e}_1) & = & a_{11}\vec{f}_1 + a_{21}\vec{f}_2 + \dots + a_{n1}\vec{f}_n \\ \vdots & & \\ \varphi(\vec{e}_j) & = & a_{1j}\vec{f}_1 + a_{2j}\vec{f}_2 + \dots + a_{nj}\vec{f}_n \\ \vdots & & \\ \varphi(\vec{e}_p) & = & a_{1p}\vec{f}_1 + a_{2p}\vec{f}_2 + \dots + a_{np}\vec{f}_n \end{array}\right.$$

alors on peut regrouper les coefficients dans un même tableau.

Matrice associée à une application linéaire

Définition 2.1

On appelle matrice associée à φ relativement à $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$ ou $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ la matrice de type (n,p) :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{array}{cc} \begin{matrix} \varphi(\vec{e}_1) & \cdots & \varphi(\vec{e}_j) & \cdots & \varphi(\vec{e}_p) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vdots \\ \vec{f}_n \end{matrix} \end{array}$$

On dit que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$ représente φ dans les bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$. On a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Schématiquement,

$$(E, \mathcal{B}_E) \xrightarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)} (F, \mathcal{B}_F).$$

Exemple 2.1

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. muni de la base $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, F un $\mathbb{K}$-e.v. muni de la base $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ et $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi(\vec{e}_1) & = & 2\vec{f}_1 + 3\vec{f}_2 - \vec{f}_3, \\ \varphi(\vec{e}_2) & = & \vec{f}_1 - \vec{f}_2 + 4\vec{f}_3. \end{array}\right.$$

La matrice associée à φ relativement à $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ s'écrit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \varphi(\vec{e}_1) & \varphi(\vec{e}_2) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vec{f}_3 \end{matrix} \end{array}.$$

C'est une matrice de type $(3,2)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{K}).$$

Exemple 2.2

Reprenons l'exemple précédent et permutons les deux vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$. On obtient la nouvelle base

$$\mathcal{C}_E = (\vec{e}_2, \vec{e}_1).$$

La matrice associée à φ relativement à $\mathcal{C}_E$ et $\mathcal{B}_F$ s'écrit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \varphi(\vec{e}_2) & \varphi(\vec{e}_1) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vec{f}_3 \end{matrix} \end{array}.$$

C'est encore une matrice de type $(3,2)$ sur $\mathbb{K}$. On note :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{K}).$$

Cas particulier des endomorphismes

Si $E = F$ alors on peut choisir $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F \overset{\text{not.}}{=} \mathcal{B}$.

- La matrice associée à un endomorphisme $\varphi : E \longrightarrow F$ dans la base $\mathcal{B}$ est alors carrée.
- On la note alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ ou $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B})$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)$. Schématiquement,

$$(E, \mathcal{B}) \xrightarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)} (E, \mathcal{B}).$$

- Si p désigne la dimension de l'espace E alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}).$$

Exemple 2.3

Soient $\mathbb{K}_n[X]$ muni de $\mathcal{B}_{\mathbb{K}_n[X]} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ et

$$\mathcal{D} : P \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto P' \in \mathbb{K}_n[X].$$

La matrice associée à $\mathcal{D}$ relativement à la base $\mathcal{B}_{\mathbb{K}_n[X]}$ s'écrit :

$$\mathrm{Mat}(\mathcal{D}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}_n[X]}) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \mathcal{D}(1) & \mathcal{D}(X) & \mathcal{D}(X^2) & \cdots & \mathcal{D}(X^n) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ X \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{matrix} \end{array}.$$

C'est une matrice d'ordre $n+1$: $\mathrm{Mat}(\mathcal{D}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}_n[X]}) \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{K})$.

Exemple 2.4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Écrivons la matrice associée à l'identité (de E) relativement à $\mathcal{B}$. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \mathrm{id}_E(\vec{e}_1) & \mathrm{id}_E(\vec{e}_2) & \cdots & \mathrm{id}_E(\vec{e}_n) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{matrix} \end{array}.$$

On obtient la matrice identité d'ordre n. Ainsi,

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E).$$

Écriture matricielle d'une égalité vectorielle

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}_E$, F un $\mathbb{K}$-espace de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}_F$ et φ une application linéaire de E dans F. Nous nous intéressons ici à l'égalité vectorielle : $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$.

- Décomposons $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j \vec{e}_j.$$

- Décomposons son image par φ dans $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$:

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{f}_i.$$

On cherche à exprimer chacune des coordonnées $y_1, y_2, \dots, y_n$ de $\vec{y}$ en fonction des coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_p$ de $\vec{x}$.

Désignons par $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant p}$ la matrice associée à φ relativement à $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

- Utilisant la définition de la matrice A, on peut écrire :

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi\Big(\sum_{j=1}^{p} x_j \vec{e}_j\Big) = \sum_{j=1}^{p} x_j\, \varphi(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{p} \Big[x_j \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{f}_i\Big)\Big].$$

- Manipulons cette double-sommation :

$$\sum_{j=1}^{p} \Big[x_j \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{f}_i\Big)\Big] = \sum_{j=1}^{p} \Big[\sum_{i=1}^{n} x_j a_{ij}\vec{f}_i\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{j=1}^{p} x_j a_{ij}\vec{f}_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} \Big[\Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j\Big)\vec{f}_i\Big].$$

- Or, $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$. On a ainsi obtenu :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \vec{f}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \right) \vec{f}_i \right].$$

- D'où, en identifiant les coordonnées, on obtient :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j$$

c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \\ & \vdots & \\ y_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p \end{array} \right. .$$

Proposition 2.1 (Écriture matricielle d'une égalité vectorielle)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension p de base $\mathcal{B}_E$, F un $\mathbb{K}$-espace de dimension n de base $\mathcal{B}_F$ et φ une application linéaire de E dans F. Si $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$ alors l'égalité

$$\vec{y} = \varphi(\vec{x})$$

s'écrit, relativement à $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, sous la forme matricielle :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$$

où les matrices-colonnes X et Y sont définies comme suit :

- *X est constituée des coordonnées $x_1, \dots, x_p$ de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}_E$, ce que l'on note $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\vec{x})$*
- *Y est constituée des coordonnées $y_1, \dots, y_n$ de $\vec{y}$ dans $\mathcal{B}_F$, ce que l'on note $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\vec{y})$.*

Exemple 2.5

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. muni de la base $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, F un $\mathbb{K}$-e.v. muni de la base $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ et $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{rl} \varphi(\vec{e}_1) = & 2\vec{f}_1 + 3\vec{f}_2 - \vec{f}_3, \\ \varphi(\vec{e}_2) = & \vec{f}_1 - \vec{f}_2 + 4\vec{f}_3. \end{array} \right.$$

Alors l'égalité vectorielle $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$ s'écrit relativement à $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

où

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \vec{y} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3.$$

Application canoniquement associée à une matrice

Proposition 2.2

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe une unique application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ admettant A pour matrice associée relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^p}$ et $\mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^n}$. C'est l'application suivante :

$$\varphi_c : (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \longrightarrow (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \\ & \vdots & \\ y_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p \end{array} \right. .$$

L'application φ_c est dite canoniquement associée à A.

En effet, si $\mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^p} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et $\mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^n} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varphi_c(\vec{e}_1) & = & (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) = a_{11}\vec{f}_1 + a_{21}\vec{f}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{f}_n, \\ \varphi_c(\vec{e}_2) & = & (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}) = a_{12}\vec{f}_1 + a_{22}\vec{f}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{f}_n, \\ & \vdots & \\ \varphi_c(\vec{e}_p) & = & (a_{1p}, a_{2p}, \dots, a_{np}) = a_{1p}\vec{f}_1 + a_{2p}\vec{f}_2 + \ldots + a_{np}\vec{f}_n. \end{array} \right.$$

La matrice associée à φ_c relativement à $\mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^p}$ et $\mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^n}$ s'écrit :

$$\mathrm{Mat}(\varphi_c, \mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^p}, \mathcal{B}^c_{\mathbb{K}^n}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi_c(\vec{e}_1) & \varphi_c(\vec{e}_2) & \cdots & \varphi_c(\vec{e}_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vdots \\ \vec{f}_n \end{array} .$$

On reconnaît la matrice A.

Propriétés

Proposition 2.3

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces de dimensions finies avec $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Si φ_1 et φ_2 sont des applications linéaires de E vers F et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi_1) + \beta \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi_2).$$

En particulier, si $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F \stackrel{not.}{=} \mathcal{B}$ alors :

Corollaire 2.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$. Si φ_1 et φ_2 sont deux endomorphismes de E et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1) + \beta \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_2).$$

Correspondance entre $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}_E$ et F un $\mathbb{K}$-espace de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}_F$. Il existe une bijection entre $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. C'est l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) & \longrightarrow & \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \varphi & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) \end{array} .$$

De plus, cette application est linéaire puisque

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi_1) + \beta \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi_2)$$

pour tous α, β dans $\mathbb{K}$ et pour tous φ_1, φ_2 dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

C'est donc un isomorphisme de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Propriétés

Proposition 2.4

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G. Si φ est une application linéaire de E vers F et ψ une application linéaire de F vers G alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(\psi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi).$$

Schématiquement, si

$$(E, \mathcal{B}_E) \xrightarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)} (F, \mathcal{B}_F) \xrightarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(\psi)} (G, \mathcal{B}_G)$$

alors

$$(E, \mathcal{B}_E) \xrightarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(\psi \circ \varphi)} (G, \mathcal{B}_G).$$

En particulier, si $E = F = G$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F = \mathcal{B}_G \stackrel{not.}{=} \mathcal{B}$ alors :

Corollaire 2.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$. Si φ et ψ sont deux endomorphismes de E alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi).$$

Conséquence : Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et φ un endomorphisme de E. Si

$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{\mathrm{A} \times \mathrm{A} \ldots \times \mathrm{A}}_{k \text{ fois}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k \text{ fois}}).$$

Plan du cours

Définition

Définition 3.1 (Rang d'une matrice rectangulaire)

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A le rang de la famille des p vecteurs correspondant aux colonnes de A, dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. En d'autres termes,

$$\mathrm{rg}\,\mathrm{A} \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{rg}(\vec{\boldsymbol{c}}_1, \vec{\boldsymbol{c}}_2, \dots, \vec{\boldsymbol{c}}_p)$$

où $\vec{\boldsymbol{c}}_j \in \mathbb{K}^n$ est le vecteur dont les coordonnées dans la base canonique sont rangées dans la j-ième colonne de A.

De manière équivalente, si

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathrm{C}_1 & \mathrm{C}_2 & \cdots & \mathrm{C}_p \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$$

alors $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = \mathrm{rg}\,(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_p)$.

Exemple 3.1

Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = 2$.

Proposition 3.1

Soit A une matrice de type (n,p). Alors

1. $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} \leqslant \min\{n,p\}$.
2. $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = \mathrm{rg}\,\mathrm{A}^T$.

Ainsi, pour calculer le rang de A de type (n,p), on peut :

- soit calculer le rang des p vecteurs-colonnes $\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_p$,
- soit calculer le rang des n vecteurs-lignes $\mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n$.

Ce qu'on écrit :

$$\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = \mathrm{rg}\,(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_p) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n)\,.$$

Lien avec le rang d'une application linéaire associée

Proposition 3.2

Considérons :

- *un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie muni de la base $\mathcal{B}_E$,*
- *un $\mathbb{K}$-espace F de dimension finie muni de la base $\mathcal{B}_F$,*
- *une application linéaire φ de E dans F.*

Soit A une matrice rectangulaire. Si $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$ alors

$$\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = \mathrm{rg}\,\varphi.$$

Remarque

Ainsi, le rang de φ ne dépend pas du choix des deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ définissant A.

Plan du cours

Définition 4.1 (Matrice inversible)

Une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$, notée A^{-1}, appelée matrice inverse de A, telle que

$$\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}_n \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^{-1} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n.$$

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n.

Dire que $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est inversible signifie qu'il existe $n \times n$ scalaires a'_{ij}, $1 \leqslant i,j \leqslant n$ tels que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.1

- La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

car on a l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Exemple 4.2

Clairement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n$.

ATTENTION Cela n'a pas de sens de parler de matrice inversible pour des matrices non carrées.

Le calcul de l'inverse d'une matrice carrée (inversible bien sûr !) ne se résume pas à inverser chacun des termes de la matrice.

En revanche, le cas des matrices diagonales est intéressant. En effet, une matrice diagonale est inversible si, et seulement si, tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. De plus, si

$$\mathrm{A} = \mathrm{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

avec $a_{ii} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ alors

$$\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{diag}\left(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1}\right).$$

Propriétés

Proposition 4.1

Soit n un entier naturel non nul.

1. *Si $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{A}^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et*
$$(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A}.$$
2. *Si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et*
$$(\mathrm{A} \times \mathrm{B})^{-1} = \mathrm{B}^{-1} \times \mathrm{A}^{-1}.$$
3. *Si $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{A}^T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et*
$$(\mathrm{A}^T)^{-1} = (\mathrm{A}^{-1})^T.$$

Structure de groupe pour $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$

On vérifie les points suivants :

- Pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{A} \times (\mathrm{B} \times \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \times \mathrm{C}$.
- Pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{A} \times \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n \times \mathrm{A} = \mathrm{A}$.
- Toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ admet un inverse qui est la matrice A^{-1}. En effet, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n.$$

On dit alors que $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ possède une structure de groupe (non commutatif).

On l'appelle Groupe Linéaire d'ordre n sur $\mathbb{K}$. D'où les initiales !

La matrice associée à une application linéaire bijective est-elle inversible ? La réponse est « oui ».

Proposition 4.2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace muni d'une base $\mathcal{B}_E$, F un $\mathbb{K}$-espace muni d'une base $\mathcal{B}_F$ et φ une application linéaire de E dans F. Supposons $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$. On a alors la caractérisation :

$$\varphi \text{ est bijective} \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) \text{ est inversible.}$$

Si φ est bijective alors on a le résultat suivant :

$$\Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)\Big)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\varphi^{-1}).$$

Schématiquement, on retiendra :

$$(E, \mathcal{B}_E) \underset{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\varphi^{-1})}{\overset{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)}{\rightleftarrows}} (F, \mathcal{B}_F).$$

Rappel : si φ est un endomorphisme de E alors

$$\varphi \text{ est bijective} \iff \mathrm{rg}\,\varphi = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

On a un résultat semblable pour les matrices :

Proposition 4.3

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On a la caractérisation :

$$\mathrm{A} \text{ est inversible} \iff \mathrm{rg}\,\mathrm{A} = n.$$

Exemple 4.3

- $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = 3$.
- $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car $\mathrm{rg}\,\mathrm{B} = 1$.

Plan du cours

Motivation

Considérons l'endomorphisme $\varphi : \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \vec{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^3$ avec $\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{\boldsymbol{y}} = (y_1, y_2, y_3)$ et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 & = & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_3 & = & x_1 + x_2 + 2x_3 \end{array} \right. .$$

On peut choisir de représenter l'endomorphisme φ relativement à chacune des bases suivantes :

- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3)$ avec

$$\vec{\boldsymbol{e}}_1 = (1,0,0), \quad \vec{\boldsymbol{e}}_2 = (0,1,0), \quad \vec{\boldsymbol{e}}_3 = (0,0,1).$$

- $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} = (\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \vec{\boldsymbol{u}}_3)$ avec

$$\vec{\boldsymbol{u}}_1 = (1,0,-1), \quad \vec{\boldsymbol{u}}_2 = (1,-1,0), \quad \vec{\boldsymbol{u}}_3 = (1,1,1).$$

On a alors les deux représentations matricielles suivantes :

- relativement à la base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(\vec{\boldsymbol{e}}_1) & \varphi(\vec{\boldsymbol{e}}_2) & \varphi(\vec{\boldsymbol{e}}_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{\boldsymbol{e}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_3 \end{array}$$

- relativement à la base $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(\vec{\boldsymbol{u}}_1) & \varphi(\vec{\boldsymbol{u}}_2) & \varphi(\vec{\boldsymbol{u}}_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{\boldsymbol{u}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{u}}_2 \\ \vec{\boldsymbol{u}}_3 \end{array}$$

Nous allons montrer qu'il existe en fait une relation matricielle entre les deux matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(\varphi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}}(\varphi)$ associées à φ.

Définition d'une matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n muni des deux bases :

- $\mathcal{B}_E = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$ (qualifiée d'« ancienne base »)
- $\mathcal{C}_E = (\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n)$ (qualifiée de « nouvelle base »).

Décomposons à présent chacun des vecteurs $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ dans la base $\mathcal{B}_E$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{\boldsymbol{u}}_1 & = & p_{11}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + p_{21}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + p_{n1}\vec{\boldsymbol{e}}_n \\ \vec{\boldsymbol{u}}_2 & = & p_{12}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + p_{22}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + p_{n2}\vec{\boldsymbol{e}}_n \\ & \vdots & \\ \vec{\boldsymbol{u}}_n & = & p_{1n}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + p_{2n}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \ldots + p_{nn}\vec{\boldsymbol{e}}_n \end{array} \right.$$

Ranger les coefficients dans un tableau revient à définir la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$.

Définition 5.1 (Matrice de passage)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{C}_E$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$ la matrice carrée P d'ordre n dont la j-ième colonne est formée des coordonnées dans $\mathcal{B}_E$ du j-ième vecteur de $\mathcal{C}_E$:

$$\mathrm{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{\boldsymbol{u}}_1 & \vec{\boldsymbol{u}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{u}}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{\boldsymbol{e}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \\ \vdots \\ \vec{\boldsymbol{e}}_n \end{array} .$$

Ainsi, dire que $\mathrm{P} = (p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_E = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$ à $\mathcal{C}_E = (\vec{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n)$ signifie que :

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \vec{\boldsymbol{u}}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\vec{\boldsymbol{e}}_i.$$

Exemple 5.1

On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ des bases

- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3)$ avec $\vec{\boldsymbol{e}}_1 = (1,0,0)$, $\vec{\boldsymbol{e}}_2 = (0,1,0)$, $\vec{\boldsymbol{e}}_3 = (0,0,1)$.
- $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} = (\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \vec{\boldsymbol{u}}_3)$ avec $\vec{\boldsymbol{u}}_1 = (1,0,-1)$, $\vec{\boldsymbol{u}}_2 = (1,-1,0)$, $\vec{\boldsymbol{u}}_3 = (1,1,1)$.

On a immédiatement :

$$\vec{\boldsymbol{u}}_1 = \vec{\boldsymbol{e}}_1 - \vec{\boldsymbol{e}}_3, \quad \vec{\boldsymbol{u}}_2 = \vec{\boldsymbol{e}}_1 - \vec{\boldsymbol{e}}_2, \quad \vec{\boldsymbol{u}}_3 = \vec{\boldsymbol{e}}_1 + \vec{\boldsymbol{e}}_2 + \vec{\boldsymbol{e}}_3.$$

Alors la matrice P de passage de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ à $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}$ est

$$\mathrm{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{\boldsymbol{u}}_1 & \vec{\boldsymbol{u}}_2 & \vec{\boldsymbol{u}}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{\boldsymbol{e}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_3 \end{array} .$$

Propriétés des matrices de passage

Remarque

Si P est une matrice de passage alors P est inversible. Réciproquement, toute matrice inversible peut s'interpréter comme une matrice de passage. Cela nous sera très utile pour déterminer l'inverse d'une matrice (voir en TD).

Connaissant la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$, pouvons-nous en déduire la matrice de passage de $\mathcal{C}_E$ à $\mathcal{B}_E$? La réponse est « oui ». En effet, on a :

Proposition 5.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n muni des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$. Soit P une matrice inversible d'ordre n. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$ alors son inverse, la matrice P^{-1}, est la matrice de passage de $\mathcal{C}_E$ à $\mathcal{B}_E$.

Exemple 5.2

Reprenons l'exemple de $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et de la base $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ avec

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \\ \vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{u}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}.$$

La matrice de passage de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}$ à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ est :

$$\mathrm{Q} = \frac{1}{3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{array} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \vec{e}_1 = \frac{1}{3}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) \\ \vec{e}_2 = \frac{1}{3}(\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3) \\ \vec{e}_3 = \frac{1}{3}(-2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) \end{cases}$$

On vérifie que Q est bien l'inverse de P (c'est-à-dire : $\mathrm{Q} = \mathrm{P}^{-1}$).

Changement de bases pour un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n et $\vec{x}$ un vecteur de E. Décomposons $\vec{x}$ par rapport aux deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$.

- Dans l'« ancienne base » $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$,

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$$

avec $x_1, \ldots, x_n$ qualifiées d'« anciennes coordonnées ».

- Dans la « nouvelle base » $\mathcal{C}_E = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$,

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \vec{u}_j$$

avec $x'_1, \ldots, x'_n$ qualifiées de « nouvelles coordonnées ».

On cherche les relations liant « anciennes » et « nouvelles » coordonnées du vecteur $\vec{x}$.

- Utilisant la définition de la matrice P, on peut écrire :

$$\sum_{j=1}^{n} x'_j \vec{u}_j = \sum_{j=1}^{n} \left[x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \vec{e}_i \right) \right].$$

- Manipulons cette double-sommation :

$$\sum_{j=1}^{n} \left[x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \vec{e}_i \right) \right] = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} x'_j p_{ij} \vec{e}_i \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \vec{e}_i \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) \vec{e}_i \right].$$

- On a ainsi obtenu :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) \vec{e}_i \right].$$

- D'où, en identifiant les coordonnées, on obtient :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_1 = p_{11} x'_1 + p_{12} x'_2 + \ldots + p_{1n} x'_n \\ x_2 = p_{21} x'_1 + p_{22} x'_2 + \ldots + p_{2n} x'_n \\ \vdots \\ x_n = p_{n1} x'_1 + p_{n2} x'_2 + \ldots + p_{nn} x'_n \end{cases}$$

Autrement dit, on a obtenu :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace muni des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$ alors

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}\mathrm{X}'$$

où les matrices-colonnes X et X' sont définies comme suit :

- *X est constituée des coordonnées de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}_E$,*
- *X' est constituée des coordonnées de $\vec{x}$ dans $\mathcal{C}_E$.*

ATTENTION Pour exprimer les « nouvelles coordonnées » du vecteur $\vec{x}$ en fonction de ses « anciennes coordonnées », il suffit de multiplier l'égalité matricielle $\mathrm{X} = \mathrm{P}\mathrm{X}'$ par la matrice P^{-1}.

En effet, on a :

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}\mathrm{X}' \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}\mathrm{X}'.$$

Puisque $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P} = \mathrm{I}_n$, on obtient :

$$\mathrm{X}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}.$$

Mais cela nécessite le calcul de P^{-1}.

Exemple 5.3

Reprenons l'exemple précédent avec $\vec{x} = (3, 6, 9)$. On a :

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3 = x'_1\vec{u}_1 + x'_2\vec{u}_2 + x'_3\vec{u}_3.$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

ou encore, de manière équivalente :

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

D'où $x'_1 = -3$, $x'_2 = 0$ et $x'_3 = 6$, c'est-à-dire : $\vec{x} = -3\vec{u}_1 + 6\vec{u}_3$.

Changement de bases pour une application linéaire

Considérons deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.

- Supposons l'espace E de dimension p. Munissons-le des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$. Soit $\vec{x} \in E$. Alors

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}\mathrm{X}' \quad \text{avec} \quad \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}),$$

avec X et X' les matrices-colonnes des coordonnées de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$, et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$.

- Supposons l'espace F de dimension n. Munissons-le des bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{C}_F$. Soit $\vec{y} \in F$. Alors

$$\mathrm{Y} = \mathrm{Q}\mathrm{Y}' \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),$$

avec Y et Y' les matrices-colonnes des coordonnées de $\vec{y}$ dans $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{C}_F$, et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{C}_F$.

Considérons à présent une application linéaire φ de E dans F.

- Désignons par A la matrice associée à φ relativement aux « anciennes bases » $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. On a : $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
L'égalité $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$ s'écrit alors sous la forme matricielle :
$$\mathrm{Y} = \mathrm{AX}.$$
- Désignons par B la matrice associée à φ relativement aux « nouvelles bases » $\mathcal{C}_E$ et $\mathcal{C}_F$. On a : $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'égalité $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$ s'écrit alors sous la forme matricielle :
$$\mathrm{Y}' = \mathrm{BX}'.$$

On cherche une relation liant les deux matrices A et B.

- On a : $\mathrm{Y} = \mathrm{AX} \iff \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{Y} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AX} \iff \mathrm{Y}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{APX}'$.
- Or, $\mathrm{Y}' = \mathrm{BX}'$. D'où, par identification, $\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}$.

Théorème 5.1

Considérons :

- *un $\mathbb{K}$-espace E muni des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{C}_E$,*
- *un $\mathbb{K}$-espace F muni des bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{C}_F$,*
- *une application linéaire φ de E dans F.*

Alors les deux matrices rectangulaires $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$ et $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_E,\mathcal{C}_F}(\varphi)$ satisfont l'égalité matricielle suivante :
$$\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}$$
où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{C}_E$ et Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{C}_F$.

Cas particulier des endomorphismes

Si $E = F$ alors on peut choisir $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F \overset{\text{not.}}{=} \mathcal{B}$ et $\mathcal{C}_E = \mathcal{C}_F \overset{\text{not.}}{=} \mathcal{C}$.

Corollaire 5.1

Considérons un $\mathbb{K}$-espace E muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et un endomorphisme φ de E. Alors les deux matrices carrées $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ vérifient l'égalité matricielle :
$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$$
où P désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

Exemple 5.4

Reprenons l'exemple précédent. On a :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 5.2 (Matrices équivalentes et matrices semblables)

- *Deux matrices rectangulaires A et B de même type (n,p) sont dites équivalentes si*
$$\exists \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \quad \exists \mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}.$$
- *Deux matrices carrées A et B de même ordre p sont dites semblables si*
$$\exists \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \quad \mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

Exemple 5.5

Les deux matrices suivantes sont semblables :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$