UNIVERSITE MOULAY ISMAIL
FACULTE DES SCIENCES
Département de physique

EXAMEN DE LA MECANIQUE DU SOLIDE

Filière SMP (Semestre III) ‖ Année Universitaire 2020-2021

(Durée : 1H)

Exercice n° 1 :

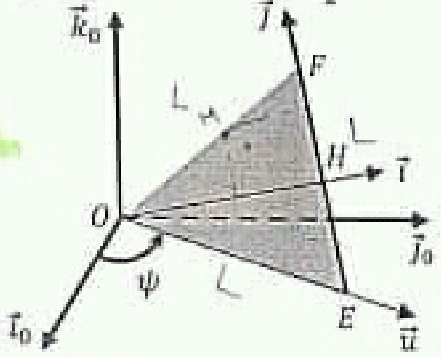
On considère un cylindre homogène de rayon R et de hauteur h.

Déterminer, en utilisant **les théorèmes de Guldin**, la surface latérale et le volume de ce cylindre.

Exercice n° 2 :

Soit $\mathcal{R}_0(O, \vec{\imath}_0, \vec{\jmath}_0, \vec{k}_0)$ un repère orthonormé direct dans lequel on étudie le mouvement d'un solide S de centre d'inertie G et de masse m. S est une plaque plane homogène ayant la forme d'un triangle équilatéral OEF contenu constamment dans le plan $(O, \vec{u}, \vec{k}_0)$. Le sommet O de S reste confondu avec l'origine du repère $\mathcal{R}_0$ et le côté OE reste dans le plan $(O, \vec{\imath}_0, \vec{\jmath}_0)$. On note L la longueur des côtés du triangle et H le milieu du côté EF. On désigne par $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs unitaires portés respectivement par OH et EF. Le repère $\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est lié à S ($\vec{k} = \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}$).

Le solide S est repéré par les angles d'Euler habituels ψ, θ et φ. L'angle de nutation θ vaut $\frac{\pi}{2}$ et l'angle de rotation propre φ vaut $\frac{\pi}{6}$.



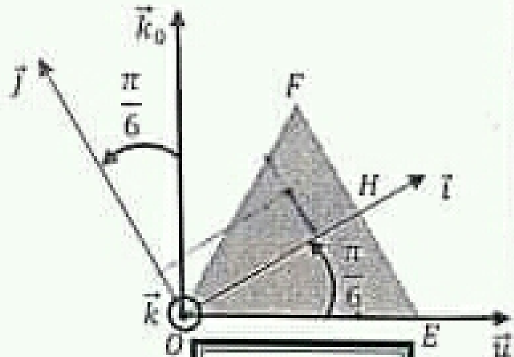
Les résultats seront exprimés dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

La matrice d'inertie du solide S en O est donnée par :

$$I(O,S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}$$

1°- Montrer que la position du centre de masse G est donnée par:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sqrt{3}}{3} L \, \vec{\imath}$$



Plan $(O, \vec{u}, \vec{k}_0)$

2°- Déterminer le vecteur de rotation instantané: $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}_0}$.

3°- Déterminer : $\vec{v}(G/\mathcal{R}_0)$.

4°- Justifier la forme de la matrice d'inertie $I(O,S)$.

5°- Déterminer les moments d'inertie A et B du solide S.

6°- En déduire le moment d'inertie C du solide S par rapport à l'axe $(O, \vec{k})$.

7°- Déterminer l'énergie cinétique $E_c(S/\mathcal{R}_0)$ en fonction de A, B et ψ.

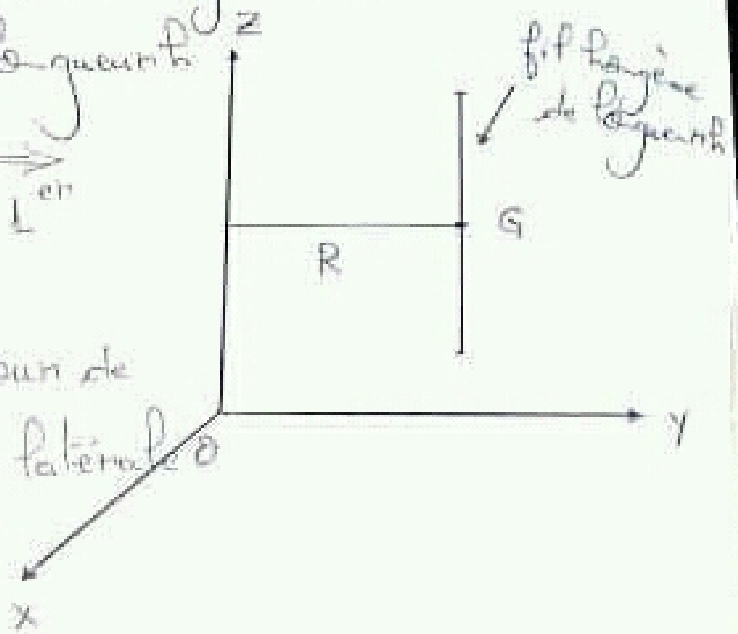
Examen de la mécanique du Solide. 2020/2021

Exercice 1 Cylindre homogène de rayon R et de hauteur h.

→ Surface latérale du Cylindre :

* Soit un fil homogène de longueur h plane (sur le plan (OYZ)) ⟹ Donc, on peut appliquer le 1er théorème du Guldin.

* la rotation du fil autour de l'axe (OZ) engendre la surface latérale d'un Cylindre de rayon R de hauteur h.



D'après le 1er théorème du Guldin On a :

$$d = \frac{S_{cylindre}}{2\pi L}$$ Avec $\begin{cases} S_{cylindre} \text{ la surface latérale du Cylindre} \\ d = R \text{ et } L = h. \end{cases}$

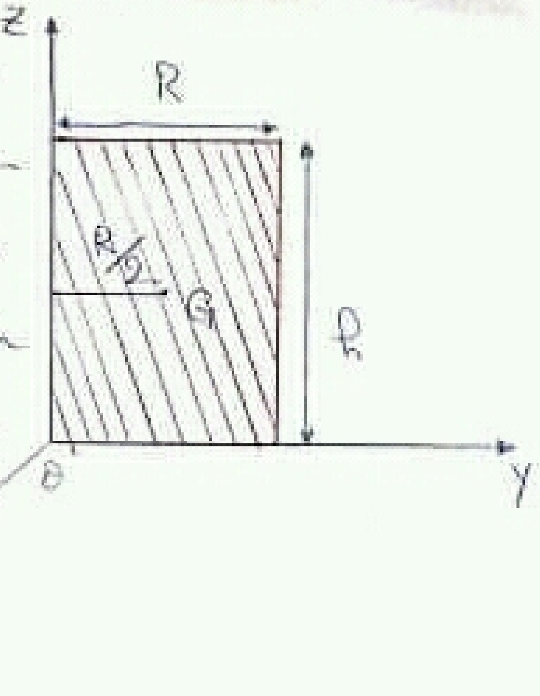
$$\Rightarrow S_{cylindre} = 2\pi L . d$$

$$\boxed{S_{cylindre} = 2\pi R . h}$$

→ Volume du Cylindre :

(rectangulaire)

* Soit une plaque homogène de longueur h et de largeur R, plane (sur le plan (OYZ)) $\Longrightarrow$ Donc, on peut appliquer le deuxième théorème de Guldin



* La rotation de la plaque suivant l'axe (OZ) engendre le volume d'un cylindre de rayon R, et de hauteur h.

D'après $2^{ème}$ théorème de Guldin on a :

$$d = \frac{V_{cylindre}}{2\pi S'}$$

Avec $\begin{cases} d = \frac{R}{2} \\ S' = h \times R \\ V_{cylindre} : \text{le volume du cylindre} \end{cases}$

$$\Longrightarrow V_{cylindre} = 2\pi S' \times d$$

$$= \cancel{2}\pi \times h \times R \times \frac{R}{\cancel{2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{V_{cylindre} = \pi R^2 \times h}$$

Exercice 2 :

$R_0(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$: fixe

$R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{k}_0)$ mobile

$R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ lié à (S)

1/ $\overrightarrow{OG} = x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + z_G\vec{k}$

L'axe $(O,\vec{i})$ est un axe de symétrie matérielle

$$\Rightarrow \begin{cases} G \in (O,\vec{i}) \\ y_G = z_G = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OG} = x_G\,\vec{i}}$$

$$x_G = \frac{1}{m}\int_S x\,dm \qquad \boxed{dS = dx\,dy}$$

$$= \frac{\sigma}{m}\iint_S x\,dx\,dy \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{OH}{L}$$

$$= \frac{\sigma}{m}\int_0^{OH}\left[x\cdot\int_{-y}^{y}dy\right]dx \qquad \Rightarrow OH = L\cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{OH = \frac{\sqrt{3}L}{2}}$$

$$= \frac{\sigma}{m}\cdot\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} 2xy\,dx \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{3}x}$$

$$= \frac{2\sigma\sqrt{3}}{3m}\int_0^{\frac{\sqrt{3}L}{2}} x^2\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{\sigma}{m}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L}$$

$$m = \sigma\cdot S_{plaque} = \sigma\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot L$$

$$m = \sigma\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{\sigma}{m}\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}L^3$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{m} = \frac{4}{\sqrt{3}L^2}$$

$$= \frac{2}{3}\cancel{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{\cancel{\sqrt{3}}L^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}L^3$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{\sqrt{3}}{3} L \Rightarrow \boxed{\vec{OG} = \frac{\sqrt{3}}{3} L \vec{i}}$$

2/ $$\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\varphi}\,\vec{k_0}$$

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \dot{\theta} = 0$

$\varphi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \dot{\varphi} = 0$

$$\vec{k_0} = \sin\frac{\pi}{6}\,\vec{i} + \cos\frac{\pi}{6}\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{k_0} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}} \Rightarrow \boxed{\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\varphi}\left(\frac{\vec{i}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)}$$

3/ $$\vec{V}(G/R_0) = \left.\frac{d\vec{OG}}{dt}\right|_{R_0}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} L \left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{R_0}$$

$$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{R_0} = \underbrace{\cancel{\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{R}}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{i}$$

$$= \left(\frac{\dot{\varphi}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) \wedge \vec{i}$$

$$\boxed{\vec{V}(G/R_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}}$$

4/ * L'axe $(O, \vec{i})$ est un axe de symétrie matérielle

$\Rightarrow \begin{cases} M(O,S) \text{ est diagonale} \\ R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ repère principale d'inertie} \end{cases}$

5/ $A = \int_{S'} (y^2 + z^2) \cdot dm = \int_{S'} y^2 \cdot dm$

$= \sigma \iint_{S'} y^2 \cdot dx \cdot dy$

$= \sigma \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} \left[\int_{-y}^{y} y^2 \cdot dy \right] \cdot dx$

$= \sigma \times \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} \frac{1}{3} \left[y^3 \right]_{-y}^{y} \cdot dx$

$= \frac{2}{3} \sigma \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} y^3 \cdot dx$

$= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{9} \sigma \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} x^3 \cdot dx$

$= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{9} \times \sigma \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} L^4$

$= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{9} \times \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{m}{L^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} L^4$

$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow y = x \, tg\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{3} x$

$y^3 = \frac{\sqrt{3}}{9} x^3$

$m = \sigma \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} L \cdot \frac{L}{2}$

$m = \frac{\sqrt{3}}{4} \sigma L^2$

$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{4 m}{\sqrt{3} L^2}}$

$\boxed{A = \frac{1}{6} m L^2}$

$B = \int_{S'} (x^2 + z^2) \cdot dm$

$\boxed{z = 0}$

$= \int_{S'} x^2 \cdot dm$

$= \sigma \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} \left[x^2 \cdot \int_{-y}^{y} dy \right] \cdot dx$

$$\Rightarrow B = 2\sigma \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} x^2 \cdot y \cdot dx$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} x^3 \cdot dx$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sigma \cdot \frac{9}{16} L^4$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{32} \sigma L^4$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{32} \cdot \frac{4m}{\sqrt{3}L^2} \cdot L^4$$

$$\boxed{B = \frac{3}{8} m L^2}$$

6/

$$C = \int_{S'} (x^2 + y^2) \cdot da$$

$$= \int_{S'} x^2 \cdot da + \int_{S'} y^2 \cdot da$$

$$= B + A \Rightarrow \boxed{C = \frac{13}{24} m L^2}$$

7/ $$E_c(S'/R_0) = \frac{1}{2} {}^T\Omega(S'/R_0) \cdot M_G \cdot \vec{\Omega}(S'/R_0)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\psi} \end{pmatrix}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\psi} \end{pmatrix}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}} = \frac{1}{2} C \dot{\psi}^2$$