Calcul approché de solutions d'équations

Recherche de zéro par dichotomie

Dans beaucoup des contextes il faut résoudre des équations non-linéaires et s'ils n'ont pas de solution analytique, on a encore une fois besoin de méthodes numériques. Supposons d'abord que nous avons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et nous cherchons un ou plusieurs zéros x_0 :

$$f\left(x_0\right) = 0 \tag{1}$$

En premier lieu, il faut qu'on ait connaissance de quelques propriétés de la fonction f.

- L'équation (1) peut avoir pas du solution, une solution ou plusieurs solutions. Exemple : $f\left(x\right) = \dfrac{1}{x}$
- Si l'équation a plusieurs solutions, le(s)quelle(s) cherchons-nous ? Peut-être on peut répondre qu'on prend toutes, mais l'équation $\sin x = 0$ a des solutions $x_n = \Pi n$ avec $n \in Z$ et il est impossible de les trouver tous de manière numérique.
- Même si l'équation (1) a seulement une solution, les conditions initiales peuvent jouer une rôle importante pour la recherche de zéro. Bref, si vous ne connaissez pas la fonction f très bien, il faudra mieux commencer avec une trace de f .

Supposons que nous avons $a_0 < b_0 \in \mathbb{R}$ avec $f\left(a_0\right) < 0$ et $f\left(b_0\right) > 0$. Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a_0, b_0]$ nous savons que la fonction $f\left(x\right)$ au moins un zéro dans cet intervalle

L'importance de la continuité: $f\left(x\right) = \dfrac{1}{x}$; pour $a_0 = -1$, $b_0 = 1$ on a bien $f\left(a_0\right) = -1 < 0$ et $f\left(b_0\right) = 1 > 0$ mais la fonction f n'est pas continue sur $[-1,\ 1]$ car il contient un point singulier $x = 0$.

Nous voulons trouver le zéro de la fonction avec une certaine précision requise, par exemple : $\varepsilon = 10^{-6}$

Exercice 1

Outils: *numpy, matplotlib*

Écrire un programme qui répète les règles suivantes:

1. Calculer la moyenne $m_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$
2. Quand $f(m_n) * f(a_n) < 0$, on prend $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m_n$, soit on remplace b.

3. Quand $f(m_n) * f(b_n) < 0$, on prend $a_{n+1} = m_n$, $b_{n+1} = b_n$, soit on remplace a.
4. Si $|f(m_n)| \leq \varepsilon$ on peut terminer, autrement le processus peut redémarrer à partir du point 1.

Exercice 2

Prenez la fonction

$$f\,(x) = x^2 - 3$$

TAF:

1. Créez d'abord une trace de la fonction (fx).
2. Vérifiez que f a un zéro dans l'intervalle $[a_0,\ b_0] = [0,\ 5]$.
3. Évaluez le nombre d'itérations m nécessaires pour atteindre la précision requise $\varepsilon = 10^{-K}$ avec $K = 3,\ 6,\ 9,\ 12$, enfin comparez votre résultat avec le résultat exact $\sqrt{3}$.

Les inconvénients de cette méthode:

- La méthode de dichotomie est lente
- Nécessite la connaissance des points a_0 et b_0 où les signes de $f\,(a_0)$ et $f\,(b_0)$ sont différents.

Méthode de Newton-Raphson

La méthode consiste à introduire une suite $\{x_n\}$ d'approximation successives de l'équation $f(x) = 0$.

On utilise la tangente au point x_n:

1. L'équation de la tangente en x_n est $t_f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n)$
2. x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente t_f en x_n avec l'axe des abscisses.
3. Cette tangente coupe l'axe des abscisse quand $t_f(x_{n+1}) = 0$
4. $f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) = 0 \Rightarrow (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) = -f(x_n)$
5. $(x_{n+1} - x_n) = -\dfrac{f'(xn)}{f(x)}$

On retrouve la relation de récurrence suivante:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x)} \tag{2}$$

Conditions

- La fonction f doit être **dérivable** en chacun des points considérés.
- La dérivée **ne doit pas s'annuler** sur cet intervalle.
- Il faut prendre un x_0 assez proche de la valeur α qui annule la fonction.

Avantages et inconvénients

Avantage: cette méthode nécessite un seul point x_0

Inconvénients: On a aussi besoins de l'expression analytique de la dérivée de f

Précision

Pour le critère d'arrêt d'une précision p

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{f'(x_n)}{f(x)} \right| < 10^{-p} \tag{3}$$

Exercice 3

Écrire le programme de recherche de zéro de Newton-Raphson

Outils: *numpy, matplotlib*

Exercice 4

Cherchez encore une fois la racine de la fonction $f(x) = xe^{-x}$ mais maintenant avec la méthode de Newton-Raphson.

Essayez $x_0 = 0.4,\ 0.5$ et 0.6. Faites toujours 10 itérations.