Cours de Mathématiques - ASINSA
Réduction des endomorphismes

Frédéric STURM

Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon

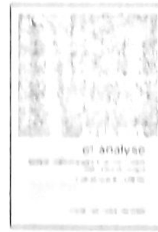
Année académique 2011-2012

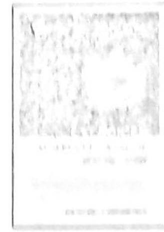
Document téléchargé à l'URL suivante :
`http://maths.insa-lyon.fr/~sturm/`

Pour plus de compléments, voir les deux ouvrages suivants parus aux Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR) dans la collection METIS LyonTech :

www.ppur.org

- **Algèbre et analyse, 2e édition revue et augmentée,** Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, S. Balac, F. Sturm, 1110 pages, paru en 2009.
- **Exercices d'algèbre et d'analyse,** 154 exercices corrigés de première année, S. Balac, F. Sturm, 448 pages, paru en 2011.





Plan du cours

1. Valeurs propres et vecteurs propres
2. Cas d'un espace de dimension finie
3. Diagonalisation

Éléments propres d'un endomorphisme

Définition 1.1 (Éléments propres d'un endomorphisme)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

- *On appelle valeur propre de f tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe un vecteur non nul $\vec{u} \in E$ tel que*

$$f(\vec{u}) = \lambda\,\vec{u}.$$

- *Le vecteur non nul $\vec{u}$ se nomme vecteur propre associé à la valeur propre λ.*
- *Le couple $(\lambda, \vec{u})$ est appelé élément propre de f.*

Le vecteur propre $\vec{u}$ associé à une valeur propre λ est-il unique ? La réponse est « non » car tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur propre associé à λ.

Caractérisation des valeurs propres

Soit f un endomorphisme de E. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathbb{K} &\text{ valeur propre de } f \\
\iff & \exists \vec{u} \neq \vec{0}_E \quad f(\vec{u}) = \lambda\,\vec{u} \\
\iff & \exists \vec{u} \neq \vec{0}_E \quad (f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(\vec{u}) = \vec{0}_E \\
\iff & \exists \vec{u} \neq \vec{0}_E \quad \vec{u} \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \\
\iff & \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \neq \{\vec{0}_E\} \\
\iff & f - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ n'est pas injectif.}
\end{aligned}$$

Proposition 1.1

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda \in \mathbb{K}$ soit valeur propre de f est que $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$ ne soit pas injectif.

Une valeur propre λ peut-elle être nulle ?
La réponse est « oui ». $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. On a l'équivalence

$$\lambda = 0 \text{ valeur propre de } f \iff f \text{ non injectif}$$

En revanche, un vecteur propre $\vec{u}$ associé à une valeur propre λ (nulle ou non nulle) n'est, par définition, **jamais** égal à $\vec{0}_E$.

Remarque

Soient $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \implies \lambda^k \text{ valeur propre de } f^k$$

En particulier, supposons f inversible. Alors,

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \implies \frac{1}{\lambda} \text{ valeur propre de } f^{-1}.$$

Sous-espace propre

Proposition 1.2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et λ une valeur propre de f. L'ensemble constitué des vecteurs propres associés à λ et du vecteur $\vec{0}_E$ est un sous-espace de E. On le note E_λ et on l'appelle sous-espace propre associé à λ. On a :

$$E_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x}\} = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}_E).$$

Remarque

- Si $\vec{u}$ est un vecteur propre associé à λ alors $\mathbb{K}\vec{u} \subset E_\lambda$.
- Si 0 est valeur propre de f alors

$$E_{\lambda=0} = \mathrm{Ker}\,f.$$

C'est le noyau de f.

Propriétés

Proposition 1.3

Soient E un $\mathbb{K}$-espace et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres de f. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors les deux sous-espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2} n'ont en commun que le vecteur nul.

Autrement dit, λ_1 et λ_2 désignant deux valeurs propres d'un endomorphisme f de E,

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\vec{0}_E\}.$$

Par conséquent, un vecteur propre ne peut pas être associé à deux valeurs propres distinctes.

Propriétés

Proposition 1.4

Soient E un $\mathbb{K}$-espace et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres de f distinctes ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Si

- *$\vec{u}_1$ est un vecteur propre associé à λ_1*
- *$\vec{u}_2$ est un vecteur propre associé à λ_2*

alors les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ forment une famille libre dans E.

Par conséquent, des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ne sont jamais liés. Plus généralement :

Corollaire 1.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sont des valeurs propres de f distinctes deux-à-deux alors les vecteurs propres $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$ associés à ces valeurs propres forment une famille libre dans E.

Plan du cours

2 Cas d'un espace de dimension finie

Cas d'un espace de dimension finie

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = n.$$

On considère :

- une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ de E,
- un endomorphisme f de E.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice associée à f relativement à $\mathcal{B}$:

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

On étend alors à la matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ les notions que nous venons de définir pour l'endomorphisme f.

Éléments propres d'une matrice

Définition 2.1 (Éléments propres d'une matrice)

Soit A une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$.

- *On appelle valeur propre de A tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe une matrice-colonne non nulle X telle que*

$$AX = \lambda X.$$

Le vecteur propre de A associé à λ est X. C'est une matrice-colonne.

- *On appelle spectre de A le sous-ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ de $\mathbb{K}$ constitué de toutes les valeurs propres de A.*
- *Le sous-espace propre de A associé à λ est défini par*

$$E_\lambda \overset{\text{déf}}{=} \left\{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; AX = \lambda X\right\}.$$

Exemple 2.1

Considérons la matice carrée $A \in M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et les trois vecteurs-colonnes U_1, U_2 et U_3 suivants :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Alors, on vérifie facilement que

- U_1 est un vecteur propre de A associé à $\lambda_1 = -1$;
- U_2, U_3 sont deux vecteurs propres de A associés à $\lambda_2 = 2$.

Écriture sous forme matricielle

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Soient λ une valeur propre de f et $\vec{x}$ un vect. propre associé à λ. Puisque E est de dimension finie et que $\mathcal{B}$ est une base de E,

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n. \quad (\dim_{\mathbb{K}}(E) = n)$$

Si $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et X est la matrice-colonne constituée des coordonnées de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$ alors l'égalité vectorielle

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

s'écrit sous la forme matricielle

$$AX = \lambda X.$$

Détaillons cette égalité matricielle. Elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

On doit donc résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & \lambda x_2 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = & \lambda x_n \end{array}\right.$$

dont les inconnues sont $x_1, x_2, \dots, x_n$ et λ. Il y en a $n+1$.
Mais comment faire ?

Caractérisation

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ de matrice associée $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On a :

$$\begin{array}{lcl} \lambda \in \mathbb{K} \text{ valeur propre de } f & \iff & f - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non injectif} \\ & \iff & f - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non bijectif} \\ & \iff & A - \lambda I_n \text{ non inversible} \\ & \iff & \det(A - \lambda I_n) = 0. \end{array}$$

Proposition 2.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda \in \mathbb{K}$ soit valeur propre de f est que

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Remarque

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Puisque E est de dimension finie, on a :

$$\lambda = 0 \text{ valeur propre de } f \iff A \text{ non inversible.}$$

Définition 2.2 (Polynôme caractéristique)

Soit A une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$.

- *On appelle polynôme caractéristique de A l'application polynomiale P_A définie par*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Le polynôme P_A a ses coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\deg(P_A) = n$.

- *L'équation algébrique $P_A(\lambda) = 0$ s'appelle équation caractéristique de A.*

Exemple 2.2

Soient E un $\mathbb{R}$-e.v. de dim. 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $f : x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \longrightarrow y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$ avec

$$y_1 = x_1 - x_2 - x_3, \quad y_2 = -x_1 + x_2 - x_3, \quad y_3 = -x_1 - x_2 + x_3.$$

Relativement à $\mathcal{B}$, la matrice associée à f est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique s'écrit :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$.

Que se passe-t-il quand on considère une autre base $\mathcal{C}$ de E ?
Soient $\mathcal{C}$ une deuxième base de E et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
\det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\
&= \det[P^{-1}(AP - \lambda P)] = \det[P^{-1}(A - \lambda I_n)P] \\
&= \det(P^{-1}) \times \det(A - \lambda I_n) \times \det(P) \\
&= \det(A - \lambda I_n).
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique P_A est donc **invariant** lorsque l'on remplace A par une matrice semblable. On le note ainsi P_f et on dit que P_f est le polynôme caractéristique de f. On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_f(\lambda) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda I_n)$$

pour toute base $\mathcal{B}$ de E.

Calcul pratique des valeurs propres

En pratique, la détermination des valeurs propres de f dans $\mathbb{K}$ équivaut à la résolution de l'équation caractéristique

$$P_A(\lambda) = 0$$

d'inconnue $\lambda \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire à la résolution de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

D'où l'importance de savoir calculer les racines d'un polynôme !

Multiplicité d'une valeur propre

Définition 2.3

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

- *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité h du polynôme caractéristique de f alors on dit que λ est une valeur propre de multiplicité h (ou d'ordre h) de f.*
- *si $h = 1$ alors la valeur propre est dite simple.*
- *Si $h > 1$ alors la valeur propre est dite multiple.*
- *Elle est dite double lorsque $h = 2$ et triple lorsque $h = 3$.*

Existe-t-il toujours des valeurs propres ? La réponse est « oui » à la condition que $\mathbb{K}$ soit algébriquement clos.

- C'est le cas du corps $\mathbb{C}$. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ alors $\mathrm{Sp}(A) \neq \emptyset$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Sp}(A)) \leqslant n$.
- En revanche, un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace peut ne pas avoir de valeur propre. C'est par exemple le cas de

$$A_\theta \stackrel{\text{not}}{=} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad \text{où } 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

Son polynôme caractéristique s'écrit :

$$P_{A_\theta}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1.$$

Sur $\mathbb{C}$ les valeurs propres sont $\lambda_1 = e^{i\theta}$ et $\lambda_2 = e^{-i\theta}$. Si $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$ alors $\mathrm{Sp}(A_\theta) = \emptyset$.

Si une matrice A n'est pas inversible, que peut-on dire de ses valeurs propres ? Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice ne soit pas inversible est qu'elle admette pour valeur propre le nombre 0. En d'autres termes,

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad \big(\mathrm{rg}\, A < n \iff 0 \in \mathrm{Sp}(A)\big).$$

Exemple 2.3

Considérons la matrice réelle suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a : $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda + 4)(\lambda - 4)$. D'où $\mathrm{Sp}(A) = \{-4, 0, 4\}$. La matrice A n'est pas inversible car $0 \in \mathrm{Sp}(A)$.

Calcul pratique des vecteurs propres

Soit $\vec{x}$ un vecteur propre de f associé à λ. On a :

$$\vec{x} \in E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E) \setminus \{\vec{0}_E\}$$

Il convient donc de déterminer E_λ. Quelle est sa dimension ?

Proposition 2.2 (Dimension d'un sous-espace propre)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

- *Si λ est une valeur propre de multiplicité h de f alors*

$$1 \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda) \leqslant h.$$

- *Si λ est une valeur propre simple de f alors $\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda) = 1$.*

Attention La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre multiple d'ordre $h > 1$ n'est pas nécessairement égale à h.

Comment calcule-t-on $\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda)$?
On applique le théorème du rang à $f - \lambda\, \mathrm{id}_E$. On obtient :

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E).}$$

Comment déterminer une base de E_λ ?
On résout l'équation matricielle $(A - \lambda I_n)X = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées (dans $\mathcal{B}$) d'un vecteur appartenant à l'espace propre E_λ.

Illustration sur un exemple

Reprenons l'endomorphisme f de E, avec E un $\mathbb{R}$-espace de dim. 3, dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a : $P_A(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$. D'où : $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$.

- $\lambda_1 = -1$: valeur propre simple. Ainsi, $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) = 1$. Soit $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ un vecteur propre associé à λ_1. On a :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A - \lambda_1 I_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour calculer x_1, x_2 et x_3, on doit donc résoudre :

$$(S_1) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce système est équivalent au système échelonné

$$(S_1') \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

En fixant x_3, on obtient : $x_2 = x_3$ puis $x_1 = x_3$. Un vecteur propre X de A associé à λ_1 s'écrit :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Un vecteur propre $\vec{x}$ de f associé à λ_1 s'écrit ainsi :

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = x_3(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3).$$

On a ainsi obtenu que

$$\boxed{E_{\lambda_1} = \mathbb{R}\vec{u}_1 \quad \text{avec} \quad \vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.}$$

- $\lambda_2 = 2$: valeur propre double. Ainsi, $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 1$ ou 2 ?

Soit $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ un vecteur propre associé à λ_2 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A} - \lambda_2 \mathrm{I}_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A} - \lambda_2 \mathrm{I}_3) = 1$, d'où :

$$\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 3 - 1 = 2.$$

Résolvons à présent le système :

$$(S_2) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ainsi, en fixant x_2 et x_3, on obtient : $x_1 = -(x_2 + x_3)$. Un vecteur propre $\vec{x}$ de f associé à λ_2 s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \\ &= -(x_2 + x_3)\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \\ &= x_2(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + x_3(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3) \end{aligned}$$

ce qui montre que les deux vecteurs $-\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $-\vec{e}_1 + \vec{e}_3$ engendrent E_{λ_2}.

Ces deux vecteurs forment une base de E_{λ_2} car $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 2$.

Remarque

- Puisque $-\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $-\vec{e}_1 + \vec{e}_3$ engendrent E_{λ_2}, les deux nouveaux vecteurs $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ définis par

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_2 = -(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \\ \vec{u}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - (-\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \end{array} \right.$$

engendrent aussi E_{λ_2}. On en déduit alors que :

$$\boxed{E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}(\vec{u}_2, \vec{u}_3) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \\ \vec{u}_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \end{array} \right.}$$

- Les trois vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ sont libres dans E. La famille $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre dans E. C'est nécessairement une base de E puisque $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 3$.

Plan du cours

Diagonalisation d'un endomorphisme

Définition 3.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension quelconque et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

- *On dit que f est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.*
- *Diagonaliser f, c'est trouver cette base.*

Quel intérêt avons-nous à diagonaliser un endomorphisme ? Supposons E de dimension finie et notons

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = n.$$

Supposons f diagonalisable. Cela signifie qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \quad)$ de vecteurs propres de f. Comment s'écrit alors la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)\ ?$$

Puisque la base $\mathcal{C}$ est constituée de vecteurs propres de f,

$$\begin{array}{l} \exists \lambda_1 \in \mathbb{K} \quad f(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1 \\ \exists \lambda_2 \in \mathbb{K} \quad f(\vec{u}_2) = \lambda_2 \vec{u}_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \exists \quad \in \mathbb{K} \quad f(\quad) = \end{array}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ désignent les valeurs propres (distinctes ou confondues) de f. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2) & \cdots & f(\quad) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \end{array}$$

Bingo, tralala ! C'est une matrice diagonale ! On la note aussi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \quad).$$

Exemple 3.1

Reprenons l'endomorphisme f de E tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{S}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array}.$$

On a vu que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{-1, 2\}$ et $E_{\lambda_1=-1} = \mathbb{R}\vec{u}_1$ avec $\vec{u}_1 \neq \vec{0}_E$,

$$E_{\lambda_2=2} = \mathrm{Vect}(\vec{u}_2, \vec{u}_3) \text{ avec } \vec{u}_2 \text{ et } \vec{u}_3 \text{ libres entre eux.}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2) & f(\vec{u}_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{array}.$$

Diagonalisation d'une matrice

Définition 3.2

Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

- *On dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit, A est diagonalisable si*
  - *il existe une matrice inversible $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$*
  - *il existe une matrice diagonale $\mathrm{D} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$*

  telles que

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

- *Diagonaliser A, c'est trouver D.*

Exemple 3.2

Considérons les deux matrices de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{U}_1 & \mathrm{U}_2 & \mathrm{U}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{U}_2 & \mathrm{U}_1 & \mathrm{U}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

On vérifie alors que l'on a :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Caractérisation (en dimension finie)

Théorème 3.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres de f, distinctes deux à deux. On a alors nécessairement :

$$m \leqslant n.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable sur $\mathbb{K}$ est que l'on ait :

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_1}) + \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_2}) + \ldots + \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_m}) = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

De manière équivalente, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable sur $\mathbb{K}$ est que l'on ait :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_m}.$$

Exemple 3.3

Reprenons l'endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace E de dim. 3, dont la matrice associée dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de E est :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A (et donc aussi f) possède une valeur propre simple ($\lambda_1 = -1$) et une valeur propre double ($\lambda_2 = 2$). De plus,

$$\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1=-1}) = 1 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2=2}) = 2.$$

L'endomorphisme f est diagonalisable car

$$\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) + \dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3).$$

Cas particulier

Supposons que f possède n valeurs propres toutes distinctes. Ainsi, $\dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_i}) = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. D'où

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_1}) + \ldots + \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_n}) = n = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

L'endomorphisme f est donc diagonalisable !

Exemple 3.4

C'est le cas de l'endomorphisme f de E tel que

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a : $P_{\mathrm{A}}(\lambda) = -\lambda(\lambda+4)(\lambda-4)$. D'où f est diagonalisable puisqu'il possède trois valeurs propres simples. En effet,

$$\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1=-4}) = \dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2=0}) = \dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_3=4}) = 1.$$

Autre caractérisation (en dimension finie)

En pratique, on utilise souvent la caractérisation suivante :

Corollaire 3.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de f, de multiplicités respectives $h_1, h_2, \ldots, h_m$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable est que

$$\begin{cases} h_1 + h_2 + \ldots + h_m = n \\ \forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_i}) = h_i. \end{cases}$$

Exemple 3.5

Soient E un $\mathbb{C}$-espace de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B}$ et f un endomorphisme de E de matrice associée relativement à $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).$$

On vérifie que $P_{\mathrm{A}}(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. L'endomorphisme f possède une valeur propre simple ($\lambda_1 = 3$) et une valeur propre double ($\lambda_2 = 2$). On a :

$$\dim_{\mathbb{C}}(E_{\lambda_1=3}) = 1 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{C}}(E_{\lambda_2=2}) = 1.$$

L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable car

$$\dim_{\mathbb{C}}(E_{\lambda_1}) + \dim_{\mathbb{C}}(E_{\lambda_2}) \neq 3 = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3).$$

Tout endomorphisme est-il diagonalisable ? La réponse à cette question est « non ».

- D'ailleurs, certaines catégories d'endomorphismes ne sont jamais diagonalisables.
- C'est le cas des endomorphismes nilpotents, à l'exception de l'application nulle.

On a en effet le résultat suivant :

Proposition 3.1 (Cas des matrices nilpotentes)

Toute matrice $\mathrm{N} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente et non nulle n'est pas diagonalisable.

Cours de Mathématiques (ASINSA-1) Systèmes d'équations linéaires et déterminant

Frédéric STURM

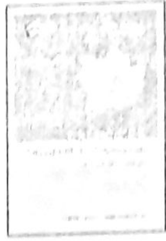
Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon

Année académique 2011-2012

Pour plus de compléments, voir les deux ouvrages suivants parus aux Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR) dans la collection METIS LyonTech :

www.ppur.org

- **Algèbre et analyse, 2e édition revue et augmentée,** Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, S. Balac, F. Sturm, 1110 pages, paru en 2009.
- **Exercices d'algèbre et d'analyse,** 154 exercices corrigés de première année, S. Balac, F. Sturm, 448 pages, paru en 2011.

Plan du cours

Définition

Définition 1.1

On appelle système rectangulaire de type (n,p) ou $n \times p$:

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où les inconnues sont les scalaires $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$ et où les données sont :

- *les coefficients $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$,*
- *les seconds membres $b_i \in \mathbb{K}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

On appelle rang du système le rang de $A = (a_{ij})_{1\leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$.

Définition (compléments)

- Une solution du système est un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ qui vérifie les n équations du système.
- Un système est dit homogène si

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0.$$

- Deux systèmes linéaires sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarque

Un système homogène de type (n,p) admet toujours au moins une solution. C'est le vecteur

$$(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^p$$

qualifié de solution banale ou triviale.

- Un système peut avoir plus d'équations que d'inconnues : $n > p$ (système surabondant). C'est le cas du système 4×3 suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 11 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 11 \end{array}\right.$$

- Un système peut aussi avoir moins d'équations que d'inconnues : $n < p$ (système sousabondant). C'est le cas du système 3×5 suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & - & 6x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & - & 6x_5 & = & 4 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & 8x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

- Enfin, un système peut avoir autant d'équations que d'inconnues : $n = p$ (système carré). C'est le cas du système 3×3 suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & = & m \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

Nous verrons que ce système n'admet aucune solution si $m \neq 1$. Il en admet une infinité si $m = 1$:

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1 + x_3, 2 - x_3, x_3) \quad \text{avec} \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Attention Ce n'est pas parce qu'un système possède autant d'équations que d'inconnues qu'il possède nécessairement une solution. Le « bon » critère porte non pas sur la taille du système mais sur son rang.

Interprétation matricielle

Le système (S) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\boxed{(\text{EM}) \quad AX = B.}$$

Les données sont A et B. L'inconnue est X :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

L'équation (EM) s'écrit aussi sous la forme matricielle

$$\boxed{(\text{EM}') \quad x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots + x_pC_p = B}$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_p$ désignent les colonnes de A.

Plan du cours

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 10
Le déterminant du système 2 × 2

On considère le système 2×2 suivant :

$$(S_{2\times 2}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

d'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Manipulons ce système. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases}$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 11

Le déterminant du système 2×2 est l'élément de $\mathbb{K}$ défini par

$$\det(A) \overset{\text{not}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{\text{déf}}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in \mathbb{K}.$$

Conséquence
Si $\det(A) \neq 0$ alors il existe un unique couple $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{K}^2$ solution du système 2×2. En effet,

$$\bar{x}_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{et} \quad \bar{x}_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

En notant $\det(A) \overset{\text{not}}{=} \det(C_1, C_2)$, on a :

$$\bar{x}_1 = \frac{\det(B, C_2)}{\det(C_1, C_2)} \quad \text{et} \quad \bar{x}_2 = \frac{\det(C_1, B)}{\det(C_1, C_2)}.$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 12
Propriétés (forme bilinéaire alternée)

- Soit $C_2 \in M_{2,1}(\mathbb{K})$. Pour tous C_1, C_1' dans $M_{2,1}(\mathbb{K})$ et pour tous α, β dans $\mathbb{K}$,

$$\det(\alpha C_1 + \beta C_1', C_2) = \alpha \det(C_1, C_2) + \beta \det(C_1', C_2).$$

  On dit que le déterminant est linéaire par rapport à sa première colonne.
- Le déterminant est aussi linéaire par rapport à sa deuxième colonne. On dit alors que le déterminant est une forme bilinéaire.
- Soient C_1, C_2 appartenant à $M_{2,1}(\mathbb{K})$.

$$C_1 = C_2 \implies \det(C_1, C_2) = 0$$

  On dit que le déterminant est une forme alternée.

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 13
Conséquences

- Soient C_1, C_2 appartenant à $M_{2,1}(\mathbb{K})$.

$$\left(\exists \gamma \in \mathbb{K}\ C_2 = \gamma C_1\right) \implies \det(C_1, C_2) = 0.$$

- Pour tous C_1, C_2 appartenant à $M_{2,1}(\mathbb{K})$,

$$\det(C_2, C_1) = -\det(C_1, C_2).$$

  On dit que le déterminant est antisymétrique.
- Pour tous C_1, C_2 appartenant à $M_{2,1}(\mathbb{K})$ et pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$,

$$\det(C_1 + \gamma C_2, C_2) = \det(C_1, C_2),$$
$$\det(C_1, C_2 + \gamma C_1) = \det(C_1, C_2).$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 14
Le déterminant d'un système 3 × 3

On considère le système 3×3 suivant :

$$(S_{3\times 3}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

d'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Commençons par récrire le système sous la forme

$$x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3 = B$$

avec C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de A.

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 15

Manipulons cette égalité vectorielle.

- On obtient :

$$x_1\left[(C_1 \wedge C_2)\cdot C_3\right] = (B \wedge C_2)\cdot C_3.$$

- On obtient aussi :

$$x_2\Big[\underbrace{(C_2 \wedge C_1)\cdot C_3}_{= -(C_1 \wedge C_2)\cdot C_3}\Big] = \underbrace{(B \wedge C_1)\cdot C_3}_{= -(C_1 \wedge B)\cdot C_3}$$

- On obtient enfin :

$$x_3\Big[\underbrace{(C_3 \wedge C_1)\cdot C_2}_{= (C_1 \wedge C_2)\cdot C_3}\Big] = \underbrace{(B \wedge C_1)\cdot C_2}_{= (C_1 \wedge C_2)\cdot B}$$

Rappelons que

$$(C_1 \wedge C_2)\cdot C_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 16

Le déterminant du système 3×3 est l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$\det(A) \overset{\text{not}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{déf}}{=} (C_1 \wedge C_2)\cdot C_3.$$

Conséquence
Si $\det(A) \neq 0$ alors il existe un unique triplet $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ solution du système 3×3. En effet,

$$\bar{x}_1 = \frac{(B \wedge C_2)\cdot C_3}{(C_1 \wedge C_2)\cdot C_3},\quad \bar{x}_2 = \frac{(C_1 \wedge B)\cdot C_3}{(C_1 \wedge C_2)\cdot C_3},\quad \bar{x}_3 = \frac{(C_1 \wedge C_2)\cdot B}{(C_1 \wedge C_2)\cdot C_3}.$$

En notant $\det(A) \overset{\text{not}}{=} \det(C_1, C_2, C_3)$, on a :

$$\bar{x}_1 = \frac{\det(B, C_2, C_3)}{\det(A)},\quad \bar{x}_2 = \frac{\det(C_1, B, C_3)}{\det(A)},\quad \bar{x}_3 = \frac{\det(C_1, C_2, B)}{\det(A)}.$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 17
Règle de Sarrus

Pour se souvenir de la formule :

$$\det(A) \overset{\text{déf}}{=} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23},$$

on peut utiliser la disposition pratique suivante :

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right|$$

et on convient que :

- les flèches descendantes ($\searrow$) correspondent aux termes précédés du signe positif ;
- les flèches montantes ($\nearrow$) correspondent aux termes précédés du signe négatif.

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 18
Propriétés (forme trilinéaire alternée)

- Soient C_2, C_3 dans $M_{3,1}(\mathbb{K})$. Pour tous C_1, C_1' dans $M_{3,1}(\mathbb{K})$ et α, β dans $\mathbb{K}^2$,

$$\det(\alpha C_1 + \beta C_1', C_2, C_3) = \alpha \det(C_1, C_2, C_3) + \beta \det(C_1', C_2, C_3).$$

  Le déterminant est linéaire par rapport à sa 1ère colonne.
- Le déterminant est aussi linéaire par rapport à sa 2ème colonne et à sa 3ème colonne. On dit que le déterminant est une forme trilinéaire.
- Soient C_1, C_2, C_3 appartenant à $M_{3,1}(\mathbb{K})$.

$$\left(C_1 = C_2 \text{ ou } C_1 = C_3 \text{ ou } C_2 = C_3\right) \implies \det(C_1, C_2, C_3) = 0$$

  On dit alors que le déterminant est une forme alternée.

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 28

- Si une rangée est combinaison linéaire des rangées parallèles alors son déterminant est nul. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

car $C_1 + 2C_2 = C_3$.

- Le déterminant ne change pas lorsque l'on ajoute à une rangée une combinaison linéaire des autres rangées parallèles (et uniquement des autres rangées parallèles). Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

avec $C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1 + C_2$.

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 29

Exemple 2.3

$$\begin{vmatrix} \frac{1+i}{3} & \frac{1-2i}{3} & \frac{1+i}{3} \\ \frac{1-2i}{3} & \frac{1+i}{3} & \frac{1+i}{3} \\ \frac{1+i}{3} & \frac{1+i}{3} & \frac{1-2i}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 1+i & 1-2i & 1+i \\ 1-2i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 1-2i \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 1+i & -3i & 0 \\ 1-2i & 3i & 3i \\ 1+i & 0 & -3i \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 1+i & -3i & 0 \\ 2-i & 3i & 0 \\ 1+i & 0 & -3i \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{3i}{27}\begin{vmatrix} 1+i & -3i \\ 2-i & 3i \end{vmatrix} = 1.$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 30
Plan du cours

3 Étude de l'ensemble des solutions

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 31
Interprétation vectorielle

Le système (S) peut s'écrire sous la forme vectorielle :

$$\boxed{(\text{EV}) \quad f(\vec{x}) = \vec{b}}$$

Les données sont

- l'application linéaire $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ canoniquement associée au système,
- le vecteur $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

L'inconnue est le vecteur $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$.

L'ensemble des solutions de (EV) est défini par

$$\mathcal{S} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \vec{x} \in \mathbb{K}^p \mid f(\vec{x}) = \vec{b} \right\}.$$

Nota bene : si $\vec{b} = \vec{0}_{\mathbb{K}^n}$ alors $\mathcal{S} = \operatorname{Ker} f \neq \emptyset$.

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 32

Exemple 3.1

Soit $m \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre le système réel 3×3 :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases},$$

l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et l'équation vectorielle : $f(\vec{x}) = \vec{b}$ où $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{b} = (m, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ et $f : \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ avec

$$\vec{y} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3).$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 33
Discussion sur les solutions

Nous avons vu qu'une équation homogène n'est jamais impossible (elle admet toujours $\vec{0}_{\mathbb{K}^p}$ pour solution).

Et si elle n'est pas homogène ?

Proposition 3.1

Soit $\vec{b}$ un vecteur de F.

- *Si $\vec{b} \notin \operatorname{Im} f$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$.*
- *Si $\vec{b} \in \operatorname{Im} f$ (l'équation (EV) est dite compatible) alors*

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{x}_0 + \vec{x}_{\text{part}} \mid \vec{x}_0 \in \operatorname{Ker} f \right\}$$

où $\vec{x}_{\text{part}}$ est une solution particulière de (EV), c'est-à-dire

$$\vec{x}_{\text{part}} \in \mathbb{K}^p \quad \text{et} \quad f(\vec{x}_{\text{part}}) = \vec{b}$$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 34
Discutons un peu

Remarque : si on note $r \overset{\text{not}}{=} \operatorname{rg} f$ alors $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = p - r$.

Supposons qu'il existe une solution particulière $\vec{x}_{\text{part}}$.

- Supposons $r = p$ (c'est-à-dire : $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = 0$).
  Il n'y a alors qu'une seule solution : $\mathcal{S} = \left\{ \vec{x}_{\text{part}} \right\}$
- Supposons $r < p$ (c'est-à-dire : $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) \geqslant 1$). Notons $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p-r})$ une base de Ker f. Pour tout $\vec{x} \in \mathcal{S}$,

$$\exists!\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-r}) \in \mathbb{K}^{p-r} \quad \vec{x} = \vec{x}_{\text{part}} + \underbrace{\alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_{p-r} \vec{v}_{p-r}}_{\in \operatorname{Ker} f}$$

  Par conséquent, la forme générale d'une solution dépend de $p - r$ paramètre(s).
  Il y a donc une infinité de solutions puisque $p - r > 0$

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 35
Et résumons-nous !

En résumé, une équation vectorielle peut

- ne posséder aucune solution ; c'est le cas si

$$\vec{b} \notin \operatorname{Im} f;$$

- posséder une solution unique ; c'est le cas si

$$\vec{b} \in \operatorname{Im} f \ \text{ et } \ \operatorname{Ker} f = \{\vec{0}_{\mathbb{K}^p}\};$$

- en posséder une infinité ; c'est le cas si

$$\vec{b} \in \operatorname{Im} f \ \text{ et } \ \operatorname{Ker} f \neq \{\vec{0}_{\mathbb{K}^p}\}$$

Il n'y a pas d'autres cas de figure !

Systèmes d'équations linéaires et déterminant — 36
Plan du cours

4 Résolution d'un système de Cramer

Définition d'un système de Cramer

Définition 4.1

Un système linéaire de type (n, p) est dit de Cramer s'il possède autant d'équations que d'inconnues ($n = p$) et si le rang r du système vérifie :

$$r = n = p.$$

Un système de Cramer est un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &=& b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n &=& b_n \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

- Interprétation vectorielle d'un système de Cramer
L'application linéaire $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est bijective :
$$f \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n).$$
Ainsi, pour tout vecteur $\vec{b}$ de $\mathbb{K}^n$, il existe une unique solution $\vec{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^n$. On a :
$$f(\vec{\tilde{x}}) = \vec{b} \iff \vec{\tilde{x}} = f^{-1}(\vec{b}).$$
- Interprétation matricielle d'un système de Cramer
La matrice A carrée d'ordre n est inversible :
$$A \in GL_n(\mathbb{K}).$$
Ainsi, pour tout $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une unique solution $\widetilde{X} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. On a :
$$A\widetilde{X} = B \iff \widetilde{X} = A^{-1}B.$$

Proposition 4.1

Un système de Cramer possède une solution et une seule.

Gabriel Cramer

(1704, Genève - 1752, Bagnols-sur-Cèze)

Proposition 4.2 (Formules de Cramer)

Les coordonnées $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ de l'unique solution d'un système de Cramer d'équation matricielle $A\widetilde{X} = B$ sont :

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \tilde{x}_j = \frac{\det(C_1, \ldots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \ldots, C_n)}{\det(A)}$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ désignent les colonnes de la matrice A.

Exemple 4.1

Considérons dans $\mathbb{R}$ le système 3×3 d'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est un système de Cramer car son déterminant est non nul (il vaut -1). Son unique solution est $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \in \mathbb{R}^3$ avec

$$\tilde{x}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}.$$

On obtient $\tilde{x}_1 = 5$, $\tilde{x}_2 = 3$ et $\tilde{x}_3 = 4$.

Plan du cours

5. Résolution dans le cas général

Méthode de Gauss

Qu'est-ce que la méthode de Gauss ? C'est une méthode de résolution systématique d'un système linéaire de type (n, p)

$$(S) \left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p &=& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p &=& b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p &=& b_n \end{array}\right.$$

avec, *a priori*, aucune condition ni sur l'entier n, ni sur l'entier p (il faut, bien sûr, $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$). On procède en trois étapes :

1. une étape d'élimination,
2. suivie d'une étape de discussion,
3. suivie (éventuellement) d'une étape de remontée.

Un peu d'Histoire !

La méthode est due à

Karl Friedrich Gauss

(1777, Brunswick - 1855, Göttingen)

En fait, la paternité de la méthode revient à

Liu Hui

(220, Chine - 280, Chine)

Étape d'élimination

But : écrire le système (S) sous une forme échelonnée.

Opérations utilisées : elles sont identiques à celles utilisées dans la méthode des zéros échelonnés :

- Multiplication de l'équation E_k par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}^*$:
$$E_k \longleftarrow \alpha E_k \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{K}^*.$$
- Addition à une équation d'un multiple d'une autre :
$$E_k \longleftarrow E_k + \beta E_{k'} \quad \text{avec} \quad \beta \in \mathbb{K}.$$
- Échange d'équations : $E_k \longleftrightarrow E_{k'}$.
- Échange de colonnes : $C_k \longleftrightarrow C_{k'}$.

Exemple 5.1

Soit $m \in \mathbb{R}$. Considérons dans $\mathbb{R}$ le système 3×3 suivant :

$$(S) \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 &+& x_2 & & &=& m \\ & & x_2 &+& x_3 &=& 2 \\ x_1 &+& 2x_2 &+& x_3 &=& 3 \end{array}\right..$$

Effectuons à partir du système (S) l'opération élémentaire $E_3 \longleftarrow E_3 - E_1$, puis $E_3 \longleftarrow E_3 - E_2$. On obtient le système échelonné :

$$(S') \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 &+& x_2 & & &=& m \\ & & x_2 &+& x_3 &=& 2 \\ & & & & 0 &=& 1 - m \end{array}\right..$$

Le système (S') est équivalent au système (S). Ici $r = 2$.

A l'issue de l'étape d'élimination, nous nous retrouvons avec le système (S'), échelonnée et équivalent à (S), de la forme :

$$(S')\quad\left\{\begin{array}{rcl} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \dots + a'_{1r}x'_r + \dots & = & b'_1 \\ a'_{22}x'_2 + \dots + a'_{2r}x'_r + \dots & = & b'_2 \\ \ddots & & \vdots \\ a'_{rr}x'_r + \dots & = & b'_r \\ 0 & = & b'_{r+1} \\ & & \vdots \\ 0 & = & b'_n \end{array}\right.$$

où les coefficients (pivots) $a'_{11}, a'_{22}, \dots, a'_{rr}$ sont tous non nuls et où (*en l'absence de permutation des colonnes*)

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad \dots, \quad x'_p = x_p.$$

Étape de discussion

Deux cas peuvent se produire :

1. S'il existe $i \in \{r+1, \dots, n\}$ tel que $b'_i \neq 0$ alors l'égalité « $0 = b'_i$ » est absurde. Le système n'est pas compatible :
$$S = \emptyset.$$
2. Si $b'_i = 0$ pour tout $i \in \{r+1, \dots, n\}$ alors le système est compatible ($S \neq \emptyset$) : il existe au moins une solution (c'est un vecteur de $\mathbb{K}^p$) qui dépend de $p - r$ paramètre(s).
   - Cette solution est peut-être unique. C'est le cas si
   $$r = p.$$
   - Il y en a peut-être une infinité. C'est le cas si
   $$r < p.$$

Exemple 5.2

Reprenons l'exemple précédent. Considérons donc le système échelonné :

$$(S')\quad\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & m \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 1 - m \end{array}\right.$$

Ici $r = 2$. Considérons les deux cas suivants :

- Si $m \neq 1$ alors le système est incompatible. Il n'y a donc pas de solution : $S = \emptyset$.
- Si $m = 1$ alors le système est compatible. Il y a au moins une solution qui dépend de $3 - 2 = 1$ paramètre. Il y a donc une infinité de solutions.

Étape de remontée

Comment obtenir la (ou les) solution(s) ?

On procède en deux temps.

1. On commence par écrire le système (S'') obtenu à partir du système échelonné (S')
   - en supprimant les équations de la forme « $0 = 0$ »,
   - en faisant passer aux seconds membres les $x'_{r+1}, \dots, x'_p$.

   Les inconnues sont à présent les scalaires $x'_1, x'_2, \dots, x'_r$. Ce sont les inconnues principales. Le système (S'') est de Cramer.
2. On résout ensuite (S'') en partant de la dernière équation, puis en remontant jusqu'à la première équation.

À l'issue de cette étape de remontée, les inconnues principales $x'_1, x'_2, \dots, x'_r$ s'expriment en fonction de $x'_{r+1}, \dots, x'_p$.

Exemple 5.3

Reprenons l'exemple précédent. Soit $m = 1$ ($S \neq \emptyset$). Remplaçons (S') par le système suivant :

$$(S'')\quad\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ & & x_2 & = & 2 - x_3 \end{array}\right.$$

d'inconnues x_1, x_2 et paramétré par x_3. On obtient : $x_2 = 2 - x_3$, puis $x_1 = -1 + x_3$. Une solution générale est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ d'expression :

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1 + x_3, 2 - x_3, x_3) \quad \text{avec} \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des solutions s'écrit ainsi :

$$S = \{\vec{x}_0 + \vec{x}_{\text{part}} \mid \vec{x}_0 \in \operatorname{Ker} f\}$$

avec $\vec{x}_{\text{part}} = (-1, 2, 0)$ et $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}(1, -1, 1)$.

Remarque

Si $r = n$ alors le système échelonné équivalent (S') s'écrit :

$$(S')\quad\left\{\begin{array}{rcl} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \dots + a'_{1n}x'_n + \dots & = & b'_1 \\ a'_{22}x'_2 + \dots + a'_{2n}x'_n + \dots & = & b'_2 \\ & & \vdots \\ a'_{nn}x'_n + \dots & = & b'_n \end{array}\right.$$

Remarquons qu'il n'y a pas d'égalité de la forme « $0 = b'_i$ » !

- Cela traduit le fait que le système est nécessairement compatible. Il y a donc au moins une solution, c'est-à-dire une seule ou une infinité.
- L'étape de discussion est donc ici inutile. On peut passer directement à l'étape de remontée.

C'est exactement le cas dans l'exemple qui suit !

Étude d'un système sousabondant

Considérons dans $\mathbb{R}$ le système 3×5 suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & - & 6x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & - & 6x_5 & = & 4 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & 8x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

- Étape d'élimination : elle conduit au système échelonné équivalent ($r = 3$) :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & - & 6x_5 & = & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & & & = & 1 \\ & & & & x_3 & & & - & 3x_5 & = & 2 \end{array}\right.$$
- Discussion : le système est compatible. Il y a au moins une solution qui dépend de $5 - 3 = 2$ paramètres. Il y a donc une infinité de solutions.

- Étape de remontée : on résout le système :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 - 6x_4 + 6x_5 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 + 2x_4 \\ & & & & x_3 & = & 2 + 3x_5 \end{array}\right.$$
d'inconnues x_1, x_2 et x_3 et paramétré par x_4 et x_5. On a :
$$x_3 = 2 + 3x_5, \quad x_2 = -1 + 2x_4 - 3x_5, \quad x_1 = -1 - 3x_5.$$
Une solution générale est un vecteur de $\mathbb{R}^5$ de la forme :
$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1 - 3x_5, -1 + 2x_4 - 3x_5, 2 + 3x_5, x_4, x_5)$$
où chacun des paramètres x_4 et x_5 parcourt $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions s'écrit ainsi :
$$S = \{\vec{x}_0 + \vec{x}_{\text{part}} \mid \vec{x}_0 \in \operatorname{Ker} f\} \quad \text{avec} \quad \vec{x}_{\text{part}} = (-1, -1, 2, 0, 0)$$
et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((0, 2, 0, 1, 0), (-3, -3, 3, 0, 1))$.