Année académique 2019-2020

TD de MTH 100 (Bases mathématiques)

Partie 1

Choisir la/les bonne(s) réponse(s).

1. Quelle est la formule vraie parmi les quatre suivantes ? (a) $\exists\ x \in \mathbb{R}, \forall\ y \in \mathbb{R}, x + y > 0$, (b) $\forall\ x \in \mathbb{R}, \exists\ y \in \mathbb{R}, y^2 < x$, (c) $\forall\ x \in \mathbb{R}, \exists\ y \in \mathbb{R}, x + y > 0$, (d) $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$.
2. La négation de la proposition P :"$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 1$" est (a) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 1$, (b) $\exists x \notin \mathbb{R}, f(x) > 1$, (c) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 1$, (d) $\exists x \notin \mathbb{R}, f(x) > 1$
3. Soient A, B deux parties de E telles que $B \subset A$. Soit X une partie de E telle que $A \cap X = B$. Alors (a) $X = A$, (b) $X = B$, (c) $X = B \cup Y$ avec $Y \subset \mathscr{C}_E^A$, (d) $X = A \cup Y$ avec $Y \subset \mathscr{C}_E^A$.
4. Soit $f : X \to Y$ une application et soit $A \subset X$. Alors (a) $A = f^{-1}(f(A))$, (b) $A \subset f^{-1}(f(A))$, (c) $A = f(f^{-1}(A))$, (d) $A \subset f(f^{-1}(A))$.
5. Soit $f : X \to Y$ une application injective. Soit A et B deux parties de X telles $B \subset A$. Alors (a) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$, (b) $f(A \setminus B) = f(B) \setminus f(A)$, (c) $f(A \setminus B) = f(B)$, (d) $f(A \setminus B) = f(A)$.
6. Sur $\mathbb{C}$ on considère la relation d'équivalence $z\mathscr{R}z'$ si $|z| = |z'|$. La notation $\mathscr{C}(O, r)$ désigne le cercle de centre O (origine du repère) et de rayon r. Géométriquement, la classe d'équivalence de $2 + 2i$ est (a) $\mathscr{C}(O, 2)$, (b) $\mathscr{C}(O, 2\sqrt{2})$, (c) $\mathscr{C}(O, 4)$, (d) $\mathscr{C}(O, 4\sqrt{2})$.

Partie 2

1. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés suivants.
   (a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
   (b) Tout triangle équilatéral a ses angles égaux à 60 degrés.
2. Soit E un ensemble à n éléments et A une partie de E à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?
3. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application définie par $f(n) = n + (-1)^n$.
   (a) Les entiers n et $f(n)$ sont-ils de même parité ?
   (b) L'application f est-elle bijective ?
   (c) Calculer $f(f(n))$. En déduire une expression de f^{-1} et résoudre l'équation
   $$347 = n + (-1)^n$$
   où n est un entier inconnu.
4. Soient $x, y, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$. Montrer que
   $$2xy \leq \frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2.$$
5. On pose $u_2 = 1 - \dfrac{1}{2^2}$ et pour $n \geq 3$, $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$. Calculer u_n puis $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.