DYNAMIQUE DU SOLIDE

I- Approche historique

La cinématique ne peut constituer à elle seule la science du mouvement, dans la mesure précisément où elle ne tient compte ni des causes qui le produisent ni de ce à quoi il s'applique. La science galiléenne laisse sans réponse la question des rapports entre la matière et le mouvement, qui, par contre, était au cœur de la théorie d'Aristote. On verra comment Newton, par l'introduction d'une dynamique fondée sur les concepts renouvelés de masse et de force, pensera avoir réglé cette question. On constatera que, comme l'ont souligné les auteurs du XIX^e siècle, et notamment Match, Newton n'est pas parvenu à remplir entièrement son programme, dans la mesure où il n'a pas su donner du mouvement de translation uniforme, dit «inertiel», une explication «matérialiste», c'est-à-dire uniquement en termes d'espace, de temps et de matière. On verra comment Einstein, avec la théorie de la relativité générale et l'idée que la structure géométrique de l'espace est déterminée par la distribution des masses qui s'y trouvent, a finalement résolu le problème du lien entre la cinématique et la dynamique.

II- Principe Fondamental de la Dynamique - Théorèmes Généraux

1- Introduction

L'action mécanique est un concept utilisé en mécanique appliquée pour décrire tous les phénomènes provoquant un mouvement ou une déformation. Ce concept regroupe les notions de force et de couple utilisées en mécanique générale. Pour représenter les actions mécaniques, on utilise souvent un torseur d'action.

2- Torseur des forces appliquées à (S)

2.1- Somme ou résultante $\overrightarrow{R}$

Pour un solide soumis à des forces ponctuelles, volumiques et surfaciques, la résultante générale de ces forces s'écrit :

$$\overrightarrow{R} = \sum_i \overrightarrow{f}(M_i) + \int_S \overrightarrow{f}_\tau(M)d\tau(M) + \int_S \overrightarrow{f}_\sigma(M')d\sigma(M')$$

avec $\overrightarrow{f}(M_i)$ désignant une force ponctuelle et $\overrightarrow{f}_\tau(M)$ et $\overrightarrow{f}_\sigma(M')$ des densités de forces volumique et surfacique, respectivement.

2.2- Moment résultant en O, $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O, F \to S)$

On écrira de manière générale, pour un système soumis à des forces volumiques, surfaciques et ponctuelles :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(O, F \to S) = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{f}(M_i) + \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f}_\tau(M)d\tau(M) + \int_S \overrightarrow{OM'} \wedge \overrightarrow{f}_\sigma(M')d\sigma(M') + \int_S \overrightarrow{C}_\tau(M)d\tau(M)$$

Ici, $\overrightarrow{C}_\tau(M)$ représente une éventuelle densité volumique du couple en M.
Le terme $\int_S \overrightarrow{C}_\tau(M)d\tau$ est rajouté car, lorsque $\overrightarrow{f}(M_i) = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{f}_\tau(M) = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{f}_\sigma(M') = \overrightarrow{0}$, la résultante générale du torseur est nulle et le torseur est un couple de moment $\int_S \overrightarrow{C}_\tau(M)d\tau$. Ce qui justifie l'appellation de densité volumique de couple (ce couple peut être nul).
Si on prend une autre origine pour calculer le moment résultant, on obtient facilement :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(O', F \to S) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(O, F \to S) + \overrightarrow{R}(F \to S) \wedge \overrightarrow{OO'}$$

On a ainsi défini un champ de force auquel on a associé un torseur $[\mathcal{F} \to S]$ dont les éléments de réduction en A sont :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R}(F \to S) = \sum_i \overrightarrow{f}(M_i) + \int_S \overrightarrow{f}_\tau(M)d\tau(M) + \int_S \overrightarrow{f}_\sigma(M')d\sigma(M') : \textit{résultante} \\ \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(A, F \to S) = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{f}(M_i) + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{f}_\tau(M)d\tau + \int_S \overrightarrow{AM'} \wedge \overrightarrow{f}_\sigma(M')d\sigma + \int_S \overrightarrow{C}_\tau(M)d\tau : \textit{momen} \end{cases}$$

3- Classification des forces

Dans cette classification, on distingue les interactions de chaque point du système (S) avec les autres points du système (forces intérieures) et les forces s'exerçant sur les points du système et dues à des éléments extérieurs à (S) (forces extérieures)
Ainsi, le torseur $[\mathcal{F} \to S]$ peut être décomposé comme suit :

$$[\mathcal{F} \to S] = [\mathcal{F}_{int} \to S] + [\mathcal{F}_{ext} \to S]$$

$[\mathcal{F}_{int} \to S]$ torseur des forces intérieures.

$[\mathcal{F}_{ext} \to S]$ torseur des forces extérieures.

4- Principe fondamental de la dynamique (PFD) ou axiome de la dynamique

On admet l'existence de repères privilégiés dits «repères absolus», R_u, et une chronologie de temps «temps absolu» tels que, dans tout mouvement d'un système matériel rapporté à ces repères et temps, le torseur dynamique soit équivalent au torseur des forces extérieures :

$$[\mathcal{D}(S/R_u)] = [\mathcal{F}_{ext} \to S]$$

A chaque instant, le torseur dynamique est égal au torseur des forces extérieures.

Remarques

• Compte tenu des approximations tolérées, on peut considérer comme absolus des repères terrestres (galiléens).
• En écrivant l'égalité entre les éléments de réduction des torseurs dynamiques et celui des forces

extérieures, on recouvre deux théorèmes généraux :

$$\begin{cases} m\overrightarrow{\gamma}(G/R_u) = \overrightarrow{R}(F_{ext} \to S) : \textit{Théorème du centre de masse} \\ \\ \overrightarrow{\delta}(A, S/R_u) = \overrightarrow{M}(A, F_{ext} \to S) : \textit{Théorème du moment cinétique} \end{cases}$$

On remarquera que les forces intérieures à un système matériel n'apparaissent pas dans la loi fondamentale de la dynamique; ce qui sous-entend que le torseur des forces intérieures à un système matériel (S) est nul : $[\mathcal{F}_{int} \to S] = [0]$.

5- Théorème des interactions ou théorème de l'action et de la réaction

Considérons le système matériel (S) formé de deux solides disjoints (S_1) et (S_2) :

$$(S) = (S_1) \cup (S_2) \text{ et } (S_1) \cap (S_2) = \varnothing$$

On a :

$$[\mathcal{F}_{ext} \to S] = [\mathcal{F}_{ext \text{ à } S} \to S_1] + [\mathcal{F}_{ext \text{ à } S} \to S_2]$$

Appelons :
$[\mathcal{F}_{S_1} \to S_2]$: torseur des efforts exercés par (S_1) sur (S_2)
$[\mathcal{F}_{S_2} \to S_1]$: torseur des efforts exercés par (S_2) sur (S_1)

Appliquons le P.F.D à (S_1) et (S_2) séparément, on aura :

$$[\mathcal{D}(S_1/R_u)] = [\mathcal{F}_{ext \text{ à } S} \to S_1] + [\mathcal{F}_{S_2} \to S_1]$$

$$[\mathcal{D}(S_2/R_u)] = [\mathcal{F}_{ext \text{ à } S} \to S_2] + [\mathcal{F}_{S_1} \to S_2]$$

Faisons la somme :

$$[D(S/R_u)] = [\mathcal{F}_{ext} \to S] + \underbrace{[\mathcal{F}_{S_2} \to S_1] + [\mathcal{F}_{S_1} \to S_2]}_{=[0] \textit{ torseur nul}}$$

Ainsi:
Le torseur des efforts exercés par (S_1) sur (S_2) et le torseur des efforts exercés par (S_2) sur (S_1) sont opposés dans le cas où les systèmes matériels (S_1) et (S_2) sont disjoints.

Conséquences

Éléments de réductions $\begin{cases} \overrightarrow{R}(F_{S_1} \to S_2) = -\overrightarrow{R}(F_{S_2} \to S_1) \\ \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(A, F_{S_1} \to S_2) = -\overrightarrow{\mathcal{M}}(A, F_{S_2} \to S_1) \end{cases}$

5.1- Torseur des forces intérieures à un solide (S)

C'est l'ensemble des actions mutuelles entre les divers points $M \in (S)$. Ces actions assurent la propriété de rigidité du solide : $[\mathcal{F}_{int} \to S] = [0]$.

5.2- Torseur des actions intérieures à un système matériel (S)

On peut décomposer ce torseur en la somme de deux torseurs :
• Le torseur des forces intérieures à chaque solide (S_i) de (S).
• Le torseur des actions mutuelles entre tous les solides de (S).
Si $(S) = (S_1) \cup (S_2) \cup ... \cup (S_n)$

$$[\mathcal{F}_{int} \to S] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{[F_{int\text{ à }S_i} \to S_i]}_{=[0]} + \underbrace{\sum_{i \neq j} [F_{S_i} \to S_j]}_{=[0]} \quad \Longrightarrow \quad [\mathcal{F}_{int} \to S] = [0]$$

III- Changement de repère- Repère galiléen

1-Position du Problème

Le choix du référentiel d'étude n'est pas uniquement guidé par des considérations techniques de complexité plus ou moins grande d'écriture des équations du mouvement, par exemple selon l'orientation des axes, le système de coordonnées (cartésiennes, sphériques, et.), ou l'origine des dates, mais détermine également du point de vue fondamental le cadre spatio-temporel d'étude des phénomènes considérés.

En effet, pour un référentiel quelconque, l'espace n'apparaîtra pas nécessairement homogène et / ou isotrope, ni le temps uniforme. Ainsi, par exemple, l'étude du mouvement d'un corps par rapport au référentiel lié à un wagon en mouvement accéléré par rapport aux voies fera apparaître une direction privilégiée, celle du vecteur accélérateur, soit un anisotropie de l'espace. Il en sera de même pour un référentiel lié un corps en mouvement de rotation autour d'un axe fera à la fois apparaître une direction privilégiée, celle de l'axe de rotation (anisotropie), mais aussi des effets «centrifuges» dépendant de la distance à l'axe (non-homogénéité de l'espace), voire du temps si la vitesse de rotation n'est pas constante (non-uniformité du temps).

Une telle situation conduirait à devoir écrire les équations de la Physique, et notamment celle de la mécanique, d'une façon distincte selon le référentiel d'étude, c'est-à-dire sous une forme non covariante, à moins de définir une classe de référentiels particuliers, dits galiléens, par rapport auxquels ces équations prennent justement une forme covariante.

2- Torseur dynamique d'entraînement - Torseur dynamique de Coriolis

Considérons R_u repère absolu et R_r repère relatif. De la loi de composition des accélérations, on déduit :

$$[\mathcal{D}(S/R_u)] = [\mathcal{D}(S/R_r)] + [\mathcal{D}_e(S)] + [\mathcal{D}_c(S)]$$

$$[\mathcal{D}_e(S)]_{(O)} = \left[\underbrace{\int \overrightarrow{\gamma}_e(M)dm}_{résultante}, \underbrace{\int \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\gamma}_e(M)dm}_{moment/O} \right] : \text{ Torseur dynamique d'entraînement}$$

$$[\mathcal{D}_c(S)]_{(O)} = \left[\underbrace{\int \overrightarrow{\gamma}_c(M)dm}_{résultante}, \underbrace{\int \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\gamma}_c(M)dm}_{moment/O} \right] : \text{ Torseur dynamique de Coriolis}$$

Or le P.F.D appliqué dans R_u $\Longrightarrow$ $[\mathcal{D}(S/R_u)] = [\mathcal{F}_{ext} \to S]$

Ainsi : $[\mathcal{D}(S/R_r)] = [\mathcal{F}_{ext} \to S] - [\mathcal{D}_e(S)] - [\mathcal{D}_c(S)]$

Cherchons un repère R_g tel que : $[\mathcal{D}_e(S)] + [\mathcal{D}_c(S)] = [0]$

Ceci est particulièrement vrai si $[\mathcal{D}_e(S)] = [\mathcal{D}_c(S)] = [0]$

Or $[\mathcal{D}_c(S)] = [0]$ en particulier si $\vec{\gamma}_c(M) = \vec{0}\ \forall\ M \in (S)$.

C'est-à-dire

$2\vec{\Omega}(R_g/R_u) \wedge \vec{v}(M/R_g) = \vec{0} \implies \vec{\Omega}(R_g/R_u) = \vec{0}$

$\implies$ R_g est en translation par rapport à R_u.

De même, $[\mathcal{D}_e(S)] = [0]$ en particulier si $\vec{\gamma}_e(M) = \vec{0}\ \forall\ M \in (S)$

$\implies \vec{\gamma}(O_g/R_u) = \vec{0} \implies \vec{v}(O_g/R_u) = \overrightarrow{cte}$

$\implies$ R_g est en translation rectiligne uniforme par rapport à R_u.

Conclusion

Les torseurs dynamiques d'entraînement et de Coriolis sont nuls dans les repères R_g animés d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à R_u : ces repères sont appelés ***galiléens***. Dans la pratique, un référentiel lié à des corps réels ne peut être qu'approximativement, localement et momentanément galiléen.

IV- Travail et puissance

1- Puissance d'un couple appliqué à un solide

Un couple est un torseur de forces dont la résultante est nulle. Son moment résultant est le même en tout point du solide.On le notera $\vec{\Gamma}$ avec $\vec{\Gamma} = \int_{(S)} \vec{C}_\tau(M)d\tau$.
La puissance du couple est $P(\vec{\Gamma}/R_0) = \vec{\Gamma}.\vec{\Omega}(S/R_0)$
Le travail élémentaire du couple est $\delta W(\vec{\Gamma}/R_0) = P(\vec{\Gamma}/R_0)dt = \vec{\Gamma}.\vec{\Omega}(S/R_0)dt$

2- Puissance d'un torseur de forces appliquées à un solide

Dans le cas d'un solide soumis à des forces ponctuelles et volumiques, on a :

$$P(F \to S/R_0) = \sum_i \vec{f}(M_i).\vec{v}(M_i/R_0) + \int_S \vec{f}_\tau(M).\vec{v}(M/R_0)d\tau(M)$$

Soit A un point quelconque de (S)

$$P(F \to S/R_0) = \sum_i \vec{f}(M_i).\left[\vec{v}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM_i}\right] + \int_S \vec{f}_\tau(M).\left[\vec{v}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}\right] d\tau(M)$$

$$P(F \to S/R_0) = \left[\sum_i \overrightarrow{f}(M_i) + \int_S \overrightarrow{f}_\tau(M)d\tau(M)\right].\overrightarrow{v}(A/R_0) + \left[\sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{f}(M_i) + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{f}_\tau(M)d\tau(M)\right].\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$$

$$P(F \to S/R_0) = \overrightarrow{R}(F \to S).\overrightarrow{v}(A/R_0) + \overrightarrow{\mathcal{M}}(A, F \to S).\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$$

Le résultat est indépendant de $A \in (S)$.

Donc le résultat est le ***comoment*** du torseur des forces appliquées et du torseur cinématique.

Conséquences

• Si deux torseurs de forces appliquées à un solide sont égaux, les puissances qu'ils développent sont égales.
• Si un torseur de forces appliquées à un solide est nul, la puissance qu(il développe est nulle dans tout mouvement de ce repère. donc $P(F_{int} \to S/R_0) = 0$ dans tout repère (puissance des forces intérieures à un solide).

3- Puissance du torseur des forces appliquées à un système matériel (S)

Considérons deux repères : R_0 absolu et R_r relatif.

$$\begin{aligned}
P(F \to S/R_0) &= \sum_i \overrightarrow{f}(M_i).\overrightarrow{v}(M_i/R_0) + \int_S \overrightarrow{f}_\tau(M).\overrightarrow{v}(M/R_0)d\tau(M) \\
P(F \to S/R_0) &= \sum_i \overrightarrow{f}(M_i).\left[\overrightarrow{v}(M_i/R_r) + \overrightarrow{v}_e(M_i)\right] + \int_S \overrightarrow{f}_\tau(M).\left[\overrightarrow{v}(M/R_r) + \overrightarrow{v}_e(M)\right]d\tau(M) \\
P(F \to S/R_0) &= P(F \to S/R_r) + \underbrace{\sum_i \overrightarrow{f}(M_i).\overrightarrow{v}_e(M_i)}_{1} + \underbrace{\int_S \overrightarrow{f}_\tau(M).\overrightarrow{v}_e(M)d\tau(M)}_{2}
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\sum_i \overrightarrow{f}(M_i).\overrightarrow{v}_e(M_i)}_{1} = \sum_i \overrightarrow{f}(M_i).\left[\overrightarrow{v}(O_1/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(R_r/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M_i}\right]$$

$$\underbrace{\int_S \overrightarrow{f}_\tau(M).\overrightarrow{v}_e(M)d\tau}_{2} = \int_S \overrightarrow{f}_\tau(M).\left[\overrightarrow{v}(O_1/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(R_r/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right]d\tau$$

$$(1)+(2) = \left[\sum_i \overrightarrow{f}(M_i) + \int_S \overrightarrow{f}_\tau(M)d\tau\right].\overrightarrow{v}(O_1/R_0) + \left[\sum_i \overrightarrow{O_1M_i} \wedge \overrightarrow{f}(M_i) + \int_S \overrightarrow{O_1M} \wedge \overrightarrow{f}_\tau(M)d\tau\right].\overrightarrow{\Omega}(R_r/R_0)$$

$$(1)+(2) = \overrightarrow{R}(F \to S).\overrightarrow{v}(O_1/R_0) + \overrightarrow{\mathcal{M}}(O_1, F \to S).\overrightarrow{\Omega}(R_r/R_0) = [\mathcal{F} \to S].[\mathcal{V}_e(S)]$$

avec $[\mathcal{V}_e(S)]$ désignant le torseur cinématique des vitesses d'entraînement de (S).

Finalement : $P(F \to S/R_0) = P(F \to S/R_r) + [\mathcal{F} \to S].[\mathcal{V}_e(S)]$

avec $[\mathcal{V}_e(S)]_{(O_1)} = \left[\overrightarrow{v}(O_1/R_0), \overrightarrow{\Omega}(R_r/R_0)\right]$

Exercice d'application
Montrer que la puissance des forces intérieures à un système matériel est indépendante du repère et que celle relative à un solide est nulle.

4- Théorème de l'énergie cinétique

L'utilisation de ce théorème conduit à l'obtention d'une équation scalaire.

4.1- Mouvement dans un repère galiléen

- ***Système matériel*** (S)

Soit $M \in (S)$ un point matériel de masse dm et $\overrightarrow{f}(M)$ la résultante des forces agissant sur M.
Ces forces appartiennent au torseur des forces extérieures et intérieures à (S).

On a : $\overrightarrow{\gamma}(M/R_g)dm = \overrightarrow{f}(M) \implies \overrightarrow{\gamma}(M/R_g).\overrightarrow{v}(M/R_g)dm = \overrightarrow{f}(M).\overrightarrow{v}(M/R_g)$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dm}{2}\left(\overrightarrow{v}(M/R_g)\right)^2\right]_{R_g} = P\left[\overrightarrow{f}(M/R_g)\right]$$

En étendant la somme à tous les points de (S), on aura :

$$\left.\frac{dE_c(S/R_g)}{dt}\right|_{R_g} = P\left[F \to S/R_g\right]$$: Puissance des torseurs des forces intérieures et extérieures.

Ici $[\mathcal{F} \to S] = [\mathcal{F}_{ext} \to S] + [\mathcal{F}_{int} \to S]$ (la contribution des forces intérieures doit être prise en considération dans le cas d'un système matériel).

- ***Cas d'un solide*** (S)

Pour un solide (S) on a : $P(F_{int} \to S/R_g) = 0$.

D'où : $$\boxed{\left.\frac{dE_c(S/R_g)}{dt}\right|_{R_g} = P\left(F_{ext} \to S/R_g\right)}$$

Soit $\overrightarrow{R}(F_{ext} \to S)$ la résultante des forces extérieures agissant sur (S).
On peut faire la décomposition suivante :

$$\overrightarrow{R}\left(F_{ext} \to S\right) = \overrightarrow{R}\left(F_{ext\ co} \to S\right) + \overrightarrow{R}\left(F_{ext\ nc} \to S\right)$$

Ainsi : $$[\mathcal{F}_{ext} \to S/R_g] = \underbrace{[\mathcal{F}_{ext\ co} \to S/R_g]}_{torseur\ des\ forces\ conservatives} + \underbrace{[\mathcal{F}_{int\ nc} \to S/R_g]}_{torseur\ des\ forces\ non\ conservatives}$$

$$P\left(F_{ext} \to S/R_g\right) = P\left(F_{ext\ co} \to S/R_g\right) + P\left(F_{ext\ nc} \to S/R_g\right) = -\frac{dE_p}{dt} + P\left(F_{ext\ nc} \to S/R_g\right)$$

Finalement : $$\left.\frac{dE_c(S/R_g)}{dt}\right|_{R_g} = P\left(F_{ext} \to S/R_g\right) = -\frac{dE_p}{dt} + P\left(F_{ext\ nc} \to S/R_g\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[E_c(S/R_g)+Ep\right]_{R_g}=\frac{d}{dt}\left[E_m(S/R_g)\right]_{R_g}=P\left(F_{ext\ nc}\rightarrow S/R_g\right)$$

avec $E_m(S/R_g)=E_c(S/R_g)+E_p(S)$: énergie mécanique du solide.

Lorsque la puissance du torseur des forces extérieures non-conservatives est nulle, on aura :

$$E_m(S/R_g)=\text{constante (conservation de l'énergie mécanique)}$$

Dans ce cas, on dira que le torseur des forces extérieures agissant sur (S) est conservatif.

4.2- Mouvement dans un repère non galiléen

- ***Système matériel*** (S)

Soit $\overrightarrow{f}(M)$ la résultante de toutes les forces agissant sur M.
En considérant R_g absolu et R_r relatif on aura :

$$\overrightarrow{\gamma}(M/R_g)dm=\overrightarrow{f}(M)=\overrightarrow{\gamma}(M/R_r)dm+\overrightarrow{\gamma}_e(M)dm+\overrightarrow{\gamma}_c(M)dm$$

d'où : $$\overrightarrow{\gamma}(M/R_r)dm=\overrightarrow{f}(M)-\overrightarrow{\gamma}_e(M)dm-\overrightarrow{\gamma}_c(M)dm$$

$$\overrightarrow{\gamma}(M/R_r).\overrightarrow{v}(M/R_r)dm=\overrightarrow{f}(M).\overrightarrow{v}(M/R_r)-\underbrace{\overrightarrow{\gamma}_e(M)dm}_{=\overrightarrow{f}_{ie}(M)}.\overrightarrow{v}(M/R_r)-\underbrace{\overrightarrow{\gamma}_c(M).\overrightarrow{v}(M/R_r)}_{=0}dm$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dm}{2}\left(\overrightarrow{v}(M/R_r)\right)^2\right]_{R_r}=\frac{d}{dt}\left[E_c(M/R_r)\right]_{R_r}=P\left[\overrightarrow{f}(M)/R_r\right]+P\left[\overrightarrow{f}_{ie}(M)\right]$$

En étendant la sommation à tous les points du système, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left[E_c(M/R_r)\right]_{R_r}=P\left[F\rightarrow S/R_r\right]+P\left[F_{ie}\rightarrow S\right]$$

avec : $$\left[\mathcal{F}_{ie}(S)\right]=-\left[\mathcal{D}_e(S)\right]$$

- ***Cas d'un solide*** (S)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[E_c(M/R_r)\right]_{R_r}&=P\left[F_{ext}\rightarrow S/R_r\right]+P\left[F_{ie}\rightarrow S\right]\\&=\left[F_{ext}\rightarrow S\right].\left[\mathcal{V}_r(S)\right]+\left[F_{ie}(S)\rightarrow S\right].\left[\mathcal{V}_r(S)\right]\end{aligned}$$