FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE - AGADIR

Examen de mécanique du solide indéformable
Session normale - Juin 2013
SMP3 – SMC3
Durée : 1h 30'

Problème : étude mécanique d'une meule à l'huile (*)

On considère un repère orthonormé direct $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ supposé être galiléen par rapport auquel on étudie le mouvement d'une meule à l'huile (S) constitué :

- *d'une tige (T), homogène de masse M, de longueur 2R, de centre d'inertie E et dont l'une des extrémités est liée à l'axe $(O,\vec{z}_0)$ au point A défini par $\overrightarrow{OA}=R\vec{z}_0$. La liaison en A est une liaison telle que (T) peut tourner autour de ce point, par rapport à (R_0).*
- *d'un disque (D) homogène de centre d'inertie B, de rayon R et de masse $m \neq M$ restant en contact ponctuel sans frottement avec le plan $(\pi)=(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$. Le centre de (D) est lié à l'extrémité libre de (T), et la liaison est telle que (T) reste perpendiculaire à (D), ce dernier pouvant tourner autour de AB. On note I le point de contact de (S) avec le plan (π) à l'instant t. On suppose que (D) **roule sans glisser** sur $(\pi)=(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$.*

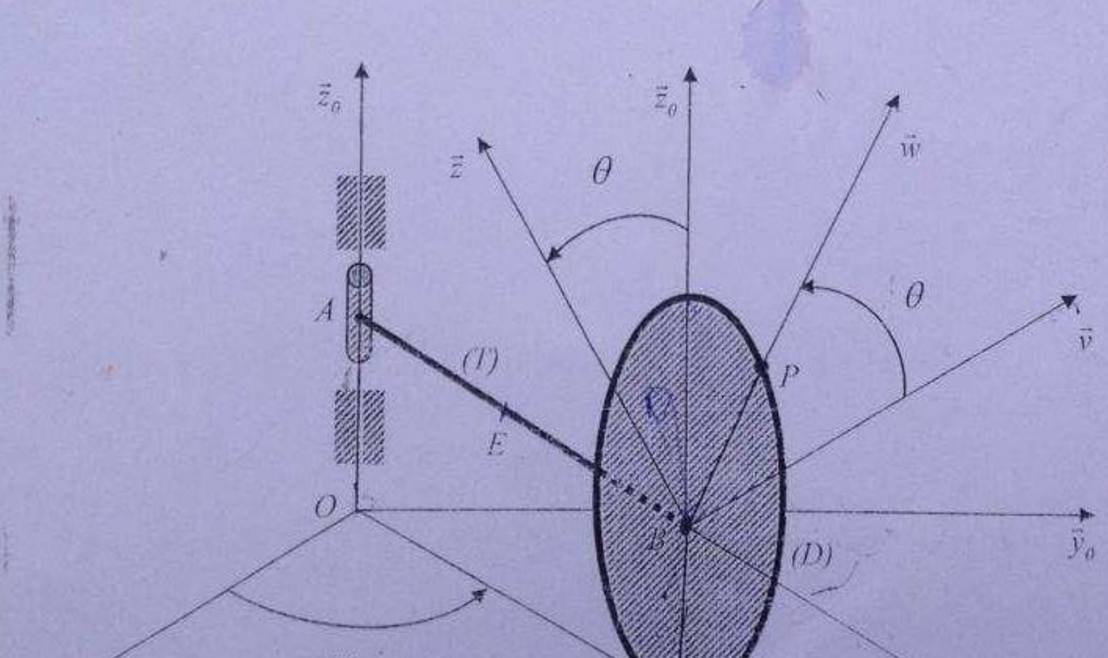


Figure - description générale du système

2/2013

Pour repérer la position de (S) par rapport à (R_0), on introduit la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$, telle que :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2R} \quad ; \quad \vec{v} = \vec{z}_0 \wedge \vec{u} \quad ; \quad \psi(t) = (\vec{x}_0, \vec{u}) = (\vec{y}_0, \vec{v})$$

De même, en considérant un point P lié à la périphérie de (D), on introduit la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ telle que :

$$\vec{w} = \frac{\overrightarrow{BP}}{R} \quad ; \quad \vec{z} = \vec{u} \wedge \vec{w} \quad ; \quad \theta(t) = (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{z}_0, \vec{z})$$

☞ **Dans tout le problème, les grandeurs vectorielles et matricielles seront exprimées dans la base** $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$.

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

Q1- *Déterminer les éléments de réduction au point E du torseur cinématique* $[\mathscr{V}(T/R_0)]$ *associé au mouvement de (T) par rapport à (R_0).*

Q2- *Déterminer les éléments de réduction au point B du torseur cinématique* $[\mathscr{V}(D/R_0)]$ *associé au mouvement de (D) par rapport à (R_0).*

Q3- *Calculer la vitesse de glissement de (D) au point de contact I. En déduire la condition de roulement sans glissement de (D) sur le plan* $(\pi) = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

Q4- *Déterminer la matrice d'inertie en E de (T).*

Q5- *Déterminer la matrice d'inertie en B de (D).*

Q6- *Par application du théorème de Koenig, déduire la matrice d'inertie en E de (D).*

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

Q7- *Déterminer les éléments de réduction en E du torseur cinétique* $[\mathscr{C}(T/R_0)]$ *associé au mouvement de (T) par rapport à (R_0).*

Q8- *Déterminer les éléments de réduction en E du torseur dynamique* $[\mathscr{D}(T/R_0)]$ *associé au mouvement de (T) par rapport à (R_0).*

Q9- *Déterminer les éléments de réduction en B du torseur cinétique* $[\mathscr{C}(D/R_0)]$ *associé au mouvement de (D) par rapport à (R_0).*

Q10- *Déterminer les éléments de réduction en B du torseur dynamique* $[\mathscr{D}(D/R_0)]$ *associé au mouvement de (D) par rapport à (R_0).*

Q11- *Calculer l'énergie cinétique de la tige (T) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

Q12- *Calculer l'énergie cinétique du disque (D) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

$\vec{V}_g(I,D/R_0)=\vec{V}(I\in(D)/R_0)=\vec{V}(B\in(D)/R_0)+\vec{\Omega}(D/R_0)\wedge\overrightarrow{BI}=R(2\dot{\psi}+\dot{\theta})\vec{v}$

La condition de roulement sans glissement est : $\vec{V}_g(I,D/R_0)=\vec{0}\Leftrightarrow 2\dot{\psi}+\dot{\theta}=0$

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R4-

La matrice d'inertie en E de (T) relativement à la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ *est :*

$$\boxed{M_E^{(T)}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{MR^2}{3}&0\\0&0&\frac{MR^2}{3}\end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)}}$$

En effet :

Si P est un point de (T) alors on a P (u, 0, 0) $\Rightarrow I_{Eu}=0$ *et tous les produits d'inertie sont nuls.*

Par ailleurs on a :

$$I_{Ev}=I_{Ez_0}=\int_{P\in(T)}u^2dm=\lambda\int_{-R}^{R}u^2du=\frac{M}{2R}\left(\frac{R^3}{3}+\frac{R^3}{3}\right)=\frac{MR^2}{3}$$

R5-

La matrice d'inertie en B de (D) relativement à la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ *est :*

$$\boxed{M_B^{(D)}=\begin{pmatrix}\frac{mR^2}{2}&0&0\\0&\frac{mR^2}{4}&0\\0&0&\frac{mR^2}{4}\end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)}}$$

En effet :

L'axe $(B,\vec{u})$ *est un axe de symétrie de révolution pour le disque et donc la matrice d'inertie de (D) en B relativement à la base* $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ *est de la forme :*

$$M_B^{(D)}=\begin{pmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&B\end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)}$$

Par ailleurs si P est un point de (D) alors on a P(0, v, z)

$$\Rightarrow A=I_{Bu}=\int_{P\in(D)}(v^2+z^2)dm=\sigma\int_{P\in(D)}r^2\underbrace{dS}_{rdrd\theta}=\frac{m}{\pi R^2}\int_0^R r^3dr\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{mR^2}{2}$$

Et $B = \frac{A}{2} = \frac{mR^2}{4}$

R6-

$$\boxed{M_E^{(D)} = M_B^{(D)} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4}mR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)}}$$

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

R7-

Les éléments de réduction en E du torseur cinétique $[\mathscr{C}(T/R_0)]$ associé au mouvement de (T) par rapport à (R_0) est :

$$[\mathscr{C}(T/R_0)] = {}_E\begin{cases} M\vec{V}(E/R_0) \\ \vec{\sigma}_E(T/R_0) \end{cases}$$

Avec

$$M\vec{V}(E/R_0) = MR\dot{\psi}\vec{v}$$

Et

$$\vec{\sigma}_E(T/R_0) = M_E^{(T)}.\vec{\Omega}(T/R_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{MR^2}{3}\dot{\psi}\vec{z}_0$$

D'où :

$$\boxed{[\mathscr{C}(T/R_0)] = {}_E\begin{cases} M\vec{V}(E/R_0) = MR\dot{\psi}\vec{v} \\ \vec{\sigma}_E(T/R_0) = \frac{MR^2}{3}\dot{\psi}\vec{z}_0 \end{cases}}$$

R8-

Les éléments de réduction en E du torseur dynamique $[\mathscr{D}(T/R_0)]$ associé au mouvement de (T) par rapport à (R_0) est :

$$[\mathscr{D}(T/R_0)] = {}_E\begin{cases} M\vec{\Gamma}(E/R_0) \\ \vec{\delta}_E(T/R_0) \end{cases}$$

Avec

$$\vec{\Gamma}(E/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(E/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(R\dot{\psi}\vec{v})}{dt}\right]_{R_0} = R\ddot{\psi}\vec{v} + R\dot{\psi}\left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_0} = R\ddot{\psi}\vec{v} + R\dot{\psi}(\dot{\psi}\vec{z}_0 \wedge \vec{v}) = R\ddot{\psi}\vec{v} - R\dot{\psi}^2\vec{u} \text{ Et}$$

$$\vec{\delta}_E(T/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_E(T/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \frac{MR^2}{3}\ddot{\psi}\vec{z}_0$$

D'où :

$$\boxed{[\mathscr{D}(T/R_0)] = {}_E\begin{cases} M\vec{\Gamma}(E/R_0) = R\ddot{\psi}\vec{v} - R\dot{\psi}^2\vec{u} \\ \vec{\delta}_E(T/R_0) = \dfrac{MR^2}{3}\ddot{\psi}\vec{z}_0 \end{cases}}$$

R9-

Les éléments de réduction en B du torseur cinétique $[\mathscr{C}(D/R_0)]$ associé au mouvement de (D) par rapport à (R_0) est :

$$[\mathscr{C}(D/R_0)] = {}_B\begin{cases} m\vec{V}(B/R_0) \\ \vec{\sigma}_B(D/R_0) \end{cases}$$

Avec :

$$\vec{V}(B/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB})}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_0} = 2R\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_0} = 2R(\dot{\psi}\vec{z}_0 \wedge \vec{u}) = 2R\dot{\psi}\vec{v}$$

Et

$$\vec{\sigma}_B(D/R_0) = M_B^{(D)}.\vec{\Omega}(D/R_0) = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}\vec{u} + \frac{mR^2}{4}\dot{\psi}\vec{z}_0$$

D'où

$$\boxed{[\mathscr{C}(D/R_0)] = {}_B\begin{cases} m\vec{V}(B/R_0) = 2R\dot{\psi}\vec{v} \\ \vec{\sigma}_B(D/R_0) = \dfrac{mR^2}{2}\dot{\theta}\vec{u} + \dfrac{mR^2}{4}\dot{\psi}\vec{z}_0 \end{cases}}$$

R10-

Les éléments de réduction en B du torseur dynamique $[\mathscr{D}(D/R_0)]$ associé au mouvement de (D) par rapport à (R_0) est :

$$[\mathscr{D}(D/R_0)] = \begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(B/R_0) \\ \vec{\delta}_B(D/R_0) \end{Bmatrix}_B$$

Avec :

$$\vec{\Gamma}(B/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(B/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = 2R\ddot{\psi}\vec{v} + 2R\dot{\psi}\left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_0} = 2R\ddot{\psi}\vec{v} + 2R\dot{\psi}(\dot{\psi}\vec{z}_0 \wedge \vec{v}) = 2R\ddot{\psi}\vec{v} - 2R\dot{\psi}^2\vec{u} \text{ Et}$$

$$\boxed{\vec{\delta}_B(D/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_B(D/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta}\vec{u} + \frac{mR^2}{2}\dot{\psi}\dot{\theta}\vec{v} + \frac{mR^2}{4}\ddot{\psi}\vec{z}_0}$$

R11-

L'énergie cinétique de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\boxed{\begin{aligned} T(T/R_0) &= \frac{1}{2}M\vec{V}^2(E/R_0) + \frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(T/R_0)M_E^{(T)}\vec{\Omega}(T/R_0) \\ &= \frac{1}{2}MR^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}(0,0,\dot{\psi})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}MR^2\dot{\psi}^2 \end{aligned}}$$

R12-

$$\boxed{\begin{aligned} T(D/R_0) &= \frac{1}{2}m\vec{V}^2(B/R_0) + \frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(D/R_0)M_B^{(D)}\vec{\Omega}(D/R_0) \\ &= \frac{1}{2}m(2R\dot{\psi})^2 + \frac{1}{2}(\dot{\theta},0,\dot{\psi})\begin{pmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{17}{8}mR^2\dot{\psi}^2 + \frac{mR^2}{4}\dot{\theta}^2 \end{aligned}}$$

CULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE - AGADIR 2012/2013

Examen de mécanique du solide indéformable
Session de rattrapage – Juillet 2013
SMP3 – SMC3
Durée : 1h 30'

Problème : étude mécanique d'une plaque carrée solidaire d'une tige

Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct considéré comme repère de référence et (S) le solide constitué par :

- *une tige (T) de longueur 2L, de masse négligeable, articulée en O, en mouvement par rapport à (R_0) dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$. On désigne par $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ un repère orthonormé direct lié à (T) tel que $\vec{x}_1$ soit confondu avec (T) et $\vec{z}_1=\vec{z}_0$ (voir figure 1).*

La position de la tige par rapport à (R_0) est repérée, à chaque instant, par l'angle : $\psi(t)=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)$

- *une plaque carrée (P) de masse m, de côté 2a et dont l'un des côtés noté AB est liée à (T). On note O_2 le milieu de [AB] qui coïncide avec celui de (T) et G le centre d'inertie de la plaque.*

Un repère orthonormé direct $R_2(O_2,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ est lié à (P) tel que $\vec{x}_2=\vec{x}_1$ et que $\vec{y}_2$ soit parallèle et de même sens que $\overrightarrow{O_2G_2}$ (voir figure 1).

La position du solide (S) par rapport à (R_0) est repérée, à chaque instant, par les angles ψ et θ ; au cours du mouvement de (S), OO_2 reste dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$.

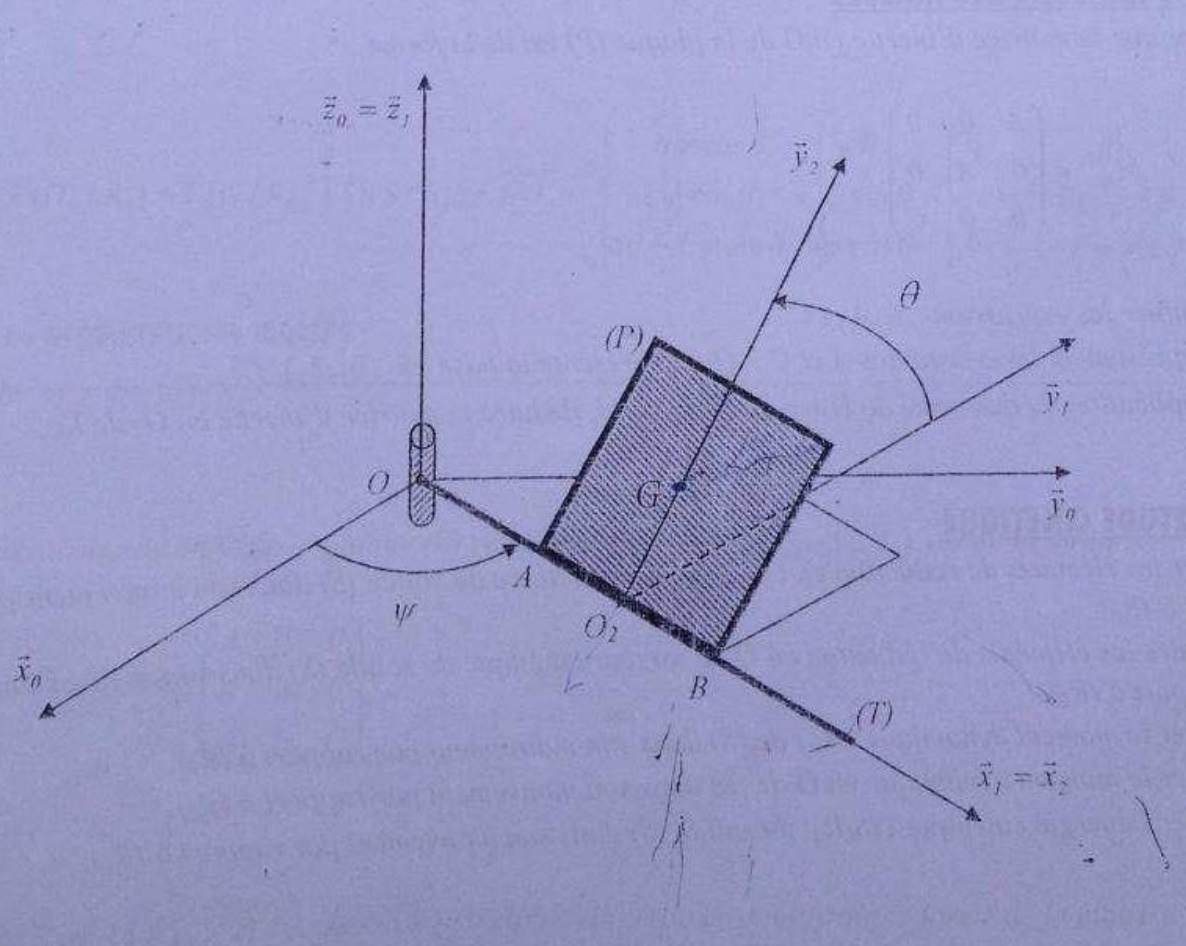


Figure 1- description générale du système

Figure 2- figures planes de calcul

> **Dans tout le problème, les grandeurs vectorielles et matricielles seront exprimées dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.**

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

Q1- *Déterminer le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}(S/R_0)$ du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).*
Indication *: utiliser les figures planes de calcul de la figure 2.*

Q2- *Calculer de deux manières différentes la vitesse du point G :*

- *Par dérivation.*
- *En utilisant la relation fondamentale de la cinématique du solide.*

Q3- *En utilisant la relation fondamentale de la cinématique, déduire la vitesse du point O_2.*

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

Q4- *Montrer que la matrice d'inertie en G de la plaque (P) est de la forme :*

$$M_G^{(P)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

Q5- *Déterminer les expressions de A et C.*

Q6- *Que représentent les constantes A et C ? Que représente la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$?*

Q7- *Par application du théorème de Huygens généralisé, déduire la matrice d'inertie en O_2 de la Plaque.*

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

Q8- *Calculer les éléments de réduction en G du torseur cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

Q9- *En déduire les éléments de réduction en O du torseur cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

Q10- *Calculer le moment dynamique en G de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

Q11- *Calculer le moment dynamique en O de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

Q12- *Calculer l'énergie cinétique $T(S/R_0)$ du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

Examen de mécanique du solide – corrigé
Session de rattrapage 2013

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

R1-

Le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}(S/R_0)$ du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\boxed{\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{x}_1 = \dot{\psi}(\cos\theta\vec{z}_2 + \sin\theta\vec{y}_2) + \dot{\theta}\vec{x}_2 = \dot{\theta}\vec{x}_2 + \dot{\psi}\sin\theta\vec{y}_2 + \dot{\psi}\cos\theta\vec{z}_2}$$

R2-

-Par dérivation

$$\vec{V}(G/R_0) = L\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{R_0} + a\left[\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_{R_0} = {}_{R_2}\begin{vmatrix} -a\dot{\psi}\cos\theta \\ L\dot{\psi}\cos\theta \\ a\dot{\theta} - L\dot{\psi}\sin\theta \end{vmatrix}$$

-En utilisant la formule de cinématique

$$\vec{V}(G/R_0) = \underbrace{\vec{V}(O/R_0)}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} L \\ a \\ 0 \end{vmatrix}_{R_2} = \begin{vmatrix} -a\dot{\psi}\cos\theta \\ L\dot{\psi}\cos\theta \\ a\dot{\theta} - L\dot{\psi}\sin\theta \end{vmatrix} \quad 1$$

R3-

$$\vec{V}(O_2/R_0) = \vec{V}(G/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{GO_2} = {}_{R_2}\begin{vmatrix} -a\dot{\psi}\cos\theta \\ L\dot{\psi}\cos\theta \\ a\dot{\theta} - L\dot{\psi}\sin\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{vmatrix}_{R_2} = \begin{vmatrix} 0 \\ L\dot{\psi}\cos\theta \\ -L\dot{\psi}\sin\theta \end{vmatrix}$$

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R4-

La matrice d'inertie en G de la plaque (P) relativement à la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est de la forme :

$$M_G^{(P)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

En effet la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est une base principale d'inertie ce qui justifie la forme de la matrice d'inertie, avec toutefois $A = B$ (car $(G, \vec{x}_2)$ et $(G, \vec{y}_2)$ jouent le même rôle) et $C = 2A$.

R5-

Si P est un point de la plaque (P) alors $P(x, y, 0)$. Ce qui donne :

$$A = \int_{P\in(P)} y^2 dm = \sigma \int_{P\in(P)} y^2 dxdy = \frac{m}{4a^2}\int_{-a}^{a} y^2 dy \int_{-a}^{a} dx = \frac{ma^2}{3} = B$$

D'où :

$$\boxed{M_G^{(S)} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}}$$

R6-

A et C représentent les moments principaux d'inertie de (S). La base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ représente la base principale d'inertie de (S).

R7-

$$M_{O_2}^{(P)} = M_G^{(P)} + \begin{pmatrix} ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3}ma^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}$$?

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

R8-

Les éléments de réduction en G du torseur cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[\mathscr{C}(S/R_0)] = {}_G\begin{cases} m\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_G(S/R_0) \end{cases}$$

Avec

$$\vec{V}(G/R_0) = \vec{V}(O/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{OG} = \vec{0} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} l \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\dot{\psi}\cos\theta \\ l\dot{\psi}\cos\theta \\ a\dot{\theta} - l\dot{\psi}\sin\theta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}$$

$$\vec{\sigma}_G(S/R_0) = M_G^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2ma^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ma^2}{3}\dot{\theta}\vec{x}_2 + \frac{ma^2}{3}\dot{\psi}\sin\theta\vec{y}_2 + \frac{2ma^2}{3}\dot{\psi}\cos\theta\vec{z}_2$$

D'où :

$$\boxed{\vec{\sigma}_G(S/R_0) = \frac{ma^2}{3}\left[\dot{\theta}\vec{x}_2 + \dot{\psi}\sin\theta\vec{y}_2 + 2\dot{\psi}\cos\theta\vec{z}_2\right]}$$

R9-

Les éléments de réduction en O du torseur cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont donnés par :

$$[\mathscr{C}(S/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} m\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_O(S/R_0) \end{array} \right.$$

Avec

$$\vec{\sigma}_O(S/R_0) = \vec{\sigma}_G(S/R_0) + m\vec{V}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GO}$$

$$m\vec{V}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GO} = m\begin{vmatrix} l \\ a \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -a\dot{\psi}\cos\theta \\ l\dot{\psi}\cos\theta \\ a\dot{\theta} - l\dot{\psi}\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= m(a^2\dot{\theta} - al\dot{\psi}\sin\theta)\vec{x}_2 + (l^2\dot{\psi}\sin\theta - al\dot{\theta})\vec{y}_2 + (a^2 + l^2)\dot{\psi}\cos\theta\vec{z}_2$$

D'où :

$$\boxed{\vec{\sigma}_O(S/R_0) = m(\frac{4a^2}{3}\dot{\theta} - al\dot{\psi}\sin\theta)\vec{x}_2 + m((\frac{a^2}{3} + l^2)\dot{\psi}\sin\theta - al\dot{\theta})\vec{y}_2 + m(\frac{5a^2}{3} + l^2)\dot{\psi}\cos\theta\vec{z}_2}$$

R10-

Le moment dynamique en G de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt}\right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{\sigma}_G(S/R_0)$$

Avec

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt}\right]_{R_2} = \frac{ma^2}{3}\left[\ddot{\theta}\vec{x}_2 + (\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta)\vec{y}_2 + (2\ddot{\psi}\cos\theta - 2\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta)\vec{z}_2\right]$$

Et

$$\vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\vec{\sigma}_G(S/R_0) = \frac{ma^2}{3}\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\psi}\cos\theta\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\sin\theta\\ 2\dot{\psi}\cos\theta\end{pmatrix} = \frac{ma^2}{3}\begin{pmatrix}\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\\ -\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{\delta}_G(S/R_0) = \frac{ma^2}{3}\left[(\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{x}_2 + \ddot{\psi}\sin\theta\vec{y}_2 + (2\ddot{\psi}\cos\theta - 2\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta)\vec{z}_2\right]}$$

R11-

Le moment dynamique en O de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\vec{\delta}_O(S/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(S/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(S/R_0)}{dt}\right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\vec{\sigma}_O(S/R_0)$$

Avec

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_O(S/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = m\left[\frac{4a^2}{3}\ddot{\theta} - al(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)\right]\vec{x}_2 + m\left[(l^2 + \frac{a^2}{3})(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta) - al\ddot{\theta}\right]\vec{y}_2$$
$$+ m\left(\frac{5a^2}{3} + l^2\right)(\ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)\vec{z}_2$$

Et

$$\vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{\sigma}_O(S/R_0) = m\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (\frac{4a^2}{3}\dot{\theta} - al\dot{\psi}\sin\theta) \\ (\frac{a^2}{3}+l^2)\dot{\psi}\sin\theta - al\dot{\theta}) \\ m(\frac{5a^2}{3}+l^2)\dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= m\begin{pmatrix} \frac{7a^2}{3}\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + al\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta \\ -(\frac{a^2}{3}+l^2)\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta - al\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ (\frac{a^2}{3}+l^2)\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta + al\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{\delta}_O(S/R_0) = m\begin{pmatrix} \frac{4a^2}{3}\ddot{\theta} - al\ddot{\psi}\sin\theta + \frac{7a^2}{3}\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ (l^2+\frac{a^2}{3})\ddot{\psi}\sin\theta - a^2\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta - al\ddot{\theta} - al\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ (\frac{8a^2}{3}+l^2)\left(\ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right) + (\frac{4a^2}{3}+l^2)\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta + al\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}}$$

R12-

L'énergie cinétique $T(S/R_0)$ du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(G/R_0) + \frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(S/R_0)M_G^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$\frac{1}{2}m\vec{V}^2(G/R_0) = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\psi}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\psi}^2\cos^2\theta + (a\dot{\theta} - l\dot{\psi}\sin\theta)^2$$

$$\frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(S/R_0)M_G^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0) = \frac{1}{2}\frac{ma^2}{3}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta + 2\dot{\psi}^2\cos^2\theta) = \frac{1}{2}\frac{ma^2}{3}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2(1+\cos^2\theta))$$

D'où :

$$\boxed{T(S/R_0) = \frac{1}{2}m\left[\frac{4}{3}a^2\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\left(\frac{a^2}{3} + \frac{4}{3}a^2\cos^2\theta + l^2\right) - 2al\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\right]}$$

UNIVERSITE IBN ZOHR
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
AGADIR

2011-2012

Examen de Mécanique du Solide Indéformable
Session Normale / SM3 - SMI3 - ERDD3
Durée : 1h 30 mn

Problème : étude mécanique d'un système composé d'un disque et d'une tige

Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct, avec $(O,\vec{z}_0)$ vertical ascendant, supposé galiléen. Le solide étudié (S) est constitué par un disque homogène (D) de centre C, de rayon r et de masse m, auquel est soudé suivant son axe de révolution une tige (T) infiniment mince, homogène de masse identique m et de longueur l. (S) est en articulation sphérique en O (*) avec le repère (R_0). Au cours du mouvement de (S) par rapport à (R_0), le disque **roule sans glisser** sur le plan horizontal $(\pi)=(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ et reste en contact ponctuel, avec ce plan en un point I de sa circonférence (voir figure 1).

On repère la position de (S) dans (R_0) à l'aide des angles d'Euler habituels (ψ,θ,φ). On note $R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ et $R_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ les deux repères intermédiaires et $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ le repère lié à (S). On passe de (R_0) à (R) en effectuant les trois rotations successives suivantes :

$$R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)\xrightarrow{(\psi/\vec{z}_0)}R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)\xrightarrow{(\theta/\vec{u})}R_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z})\xrightarrow{(\varphi/\vec{z})}R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$

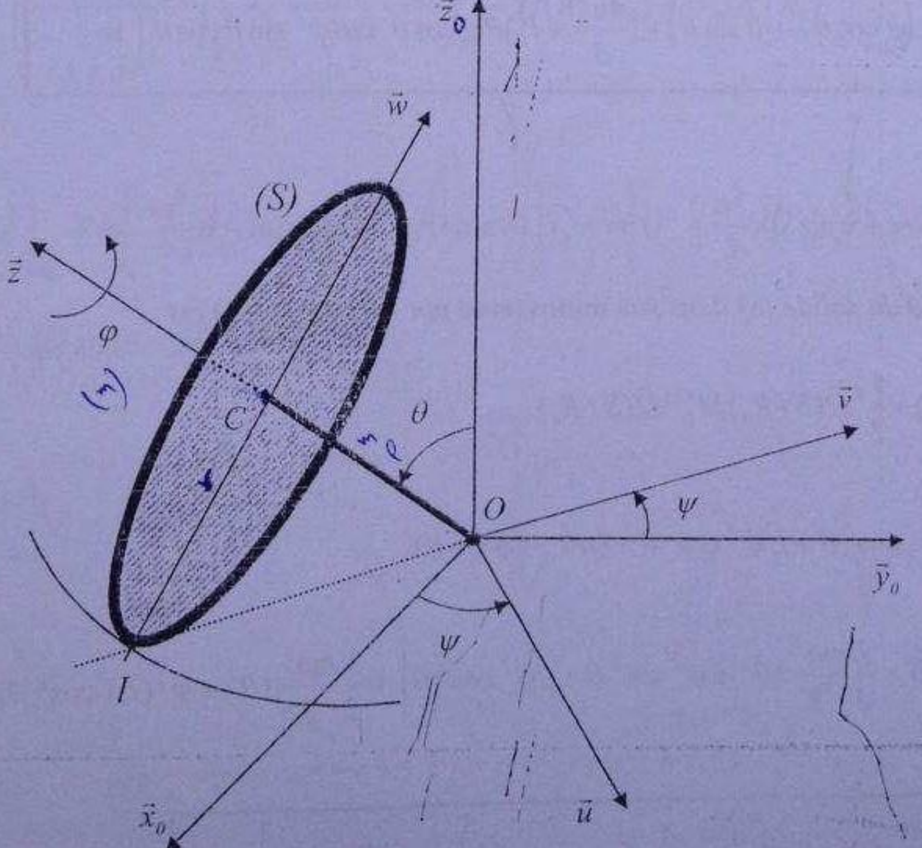


Figure 1 - Description générale du système

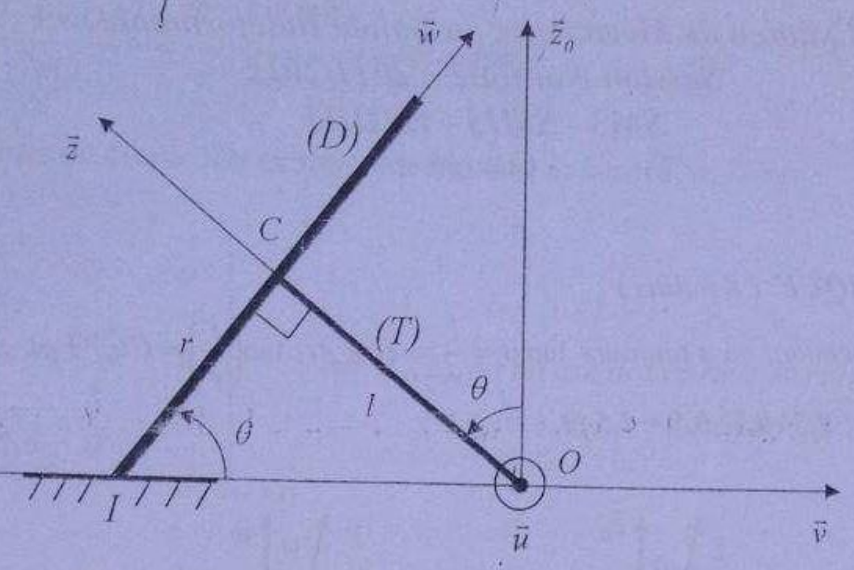


Figure 2 - Schéma cinématique dans le plan $(O, \vec{v}, \vec{z}_0)$

> ☞ ***Dans tout ce qui suit, les grandeurs vectorielles et les matrices d'inertie seront exprimées dans la deuxième base intermédiaire*** $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$.

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE (8 points)

1- *Montrer que l'angle de nutation* θ *garde une valeur constante au cours du mouvement.*

2- *Représenter les figures de calcul : montrer sur des figures claires les trois rotations planes représentant les angles d'Euler et qui font passer de* (R_0) *à* (R).

3- *En déduire le vecteur rotation instantané* $\vec{\Omega}(S/R_0)$.

4- *Exprimer alors les éléments de réduction en O puis en I du torseur cinématique du solide (S) dans son mouvement par rapport à* (R_0). *Que vaut son invariant scalaire* I_s *?*

5- *En déduire la nature de ce torseur et son axe instantané de rotation* $\Delta(t)$.

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES (6,5 points)

6- *Trouver la position du centre d'inertie G du système.*

7- *Déterminer la matrice d'inertie du disque (D) en son centre C. En déduire sa matrice d'inertie en O.*

8- *Déterminer la matrice d'inertie de la tige (T) en O.*

9- *En déduire la matrice d'inertie de (S) en O.*

> ☞ ***Dans la suite des calculs, on posera*** $A = \dfrac{mr^2}{4} + \dfrac{4}{3}ml^2$ ***et*** $C = \dfrac{mr^2}{2}$.

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE (5,5 points)

10- *Déterminer les éléments de réduction en O du torseur cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport à* (R_0).

11- *Déterminer les éléments de réduction en O du torseur dynamique du solide (S) dans son mouvement par rapport à* (R_0).

12- *Calculer l'énergie cinétique* $T(S/R_0)$ *du solide (S) dans son mouvement par rapport à* (R_0).

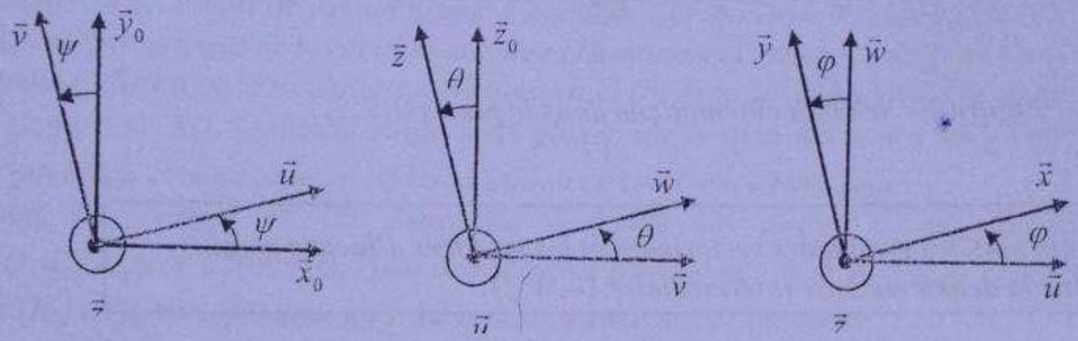
(*) *Il peut tourner librement autour de O.*

Examen de Mécanique du Solide Indéformable
Session Normale - 2011/2012
SM3 - SMI3 - ERDD3
- Corrigé -

PARTIE A - CINEMATIQUE (8 points)

1- Au cours du mouvement, on a toujours $\tan\theta = \frac{l}{r} \Rightarrow \theta = Arc\tan\left(\frac{l}{r}\right) = Cte$ / 1 pt.

2- Figures de calcul : **0,5+0,5+0,5 = 1,5 pt.**



3- $\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z} = \dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}$ car $\dot{\theta} = 0$. **/1,5 pt.**

4- Les éléments de réduction en O du torseur cinématique du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont données par :

$$[\mathscr{V}(S/R_0)] = {}_O\begin{cases} \vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z} = \dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z} \\ \vec{V}(O \in S/R_0) = \vec{0} \end{cases} \quad /1\ pt.$$

-Les éléments de réduction en I du torseur cinématique du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont données par :

$$[\mathscr{V}(S/R_0)] = {}_I\begin{cases} \vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z} \\ \vec{V}(I \in S/R_0) = \vec{0} \end{cases} \quad /1\ pt.$$

L'invariant scalaire I_S vaut : $I_S = \vec{\Omega}(S/R_0).\vec{V}(O/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0).\vec{V}(I/R_0) = 0$ **/ 0,5 pt.**

5- Nature du torseur cinématique

L'invariant scalaire de ce torseur est nul et $\vec{\Omega}(S/R_0) \neq \vec{0}$ donc le torseur cinématique est un glisseur / **0,5 pt.**

Axe instantané de rotation

Par ailleurs : $\vec{V}(O \in S/R_0) = \vec{0}$ et $\vec{V}(I \in S/R_0) = \vec{0} \Rightarrow$ L'axe instantané de rotation $\Delta(t)$ passe à chaque instant par les 2 points où la vitesse est nulle c'est-à-dire les points O et I : c'est donc la droite variable (OI(t)). **/ 1pt.**

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES (6,5 points)

6- La position du centre d'inertie G de (S) est donnée par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OG_1} + m\overrightarrow{OG_2}}{2m} = \frac{m\frac{l}{2}\vec{z} + ml\vec{z}}{2m} = \frac{3}{4}l\vec{z} \quad /1pt.$$

7- la matrice d'inertie du disque (D) en son centre C dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ est :

$$M_C^{(D)} = \begin{pmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})}$$

car $(C, \vec{z})$ est un axe de symétrie de révolution pour (D) /1,5 pt.

Pour déterminer la matrice d'inertie de (D) en O, il suffit d'utiliser le théorème de Huygens généralisé entre les points O et C :
D'où :

$$M_O^{(D)} = \begin{pmatrix} \frac{mr^2}{4} + ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} + ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})} \quad /1,5pt$$

8- La matrice d'inertie de (T) en O relativement à la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ est :

$$M_O^{(T)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})} = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})} \quad /1,5 pt$$

9- La matrice d'inertie de (S) en O est alors :

$$M_O^{(S)} = M_O^{(T)} + M_O^{(D)} \quad /1pt$$

$$= \begin{pmatrix} (\frac{mr^2}{4} + \frac{4}{3}ml^2) & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{mr^2}{4} + \frac{4}{3}ml^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})}$$

PARTIE C - CINETIQUE (5,5 points)

10- Les éléments de réduction en O du torseur cinétique $[\mathscr{C}(S/R_0)]$ du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont donnés par :

$$[\mathscr{C}(S/R_0)] = {}_O\begin{cases} \vec{R}_C = 2m\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_O(S/R_0) \end{cases}$$

Avec

$$\vec{V}(G/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0} = \frac{3}{4}l\left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_{R_0} = \frac{3}{4}l(\dot{\psi}\vec{z}_0 \wedge \vec{z}) = \frac{3}{4}l\dot{\psi}\sin\theta\vec{u} \quad / 1pt.$$

Et

$$\vec{\sigma}_O(S/R_0) = M_O^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0)$$

/ 1pt.

$$= A\dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}$$

D'où :

$$\boxed{[\mathscr{C}(S/R_0)] = {}_O\begin{cases} \vec{R}_C = 2m\vec{V}(G/R_0) = \dfrac{3}{2}ml\dot{\psi}\sin\theta\vec{u}\ . \\ \vec{\sigma}_O(S/R_0) = A\dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z} \end{cases}}$$

11- Les éléments de réduction en O du torseur dynamique $[\mathscr{D}(S/R_0)]$ du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont donnés par :

$$[\mathscr{D}(S/R_0)] = {}_O\begin{cases} \vec{R}_D = 2m\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_O(S/R_0) \end{cases}$$

Avec

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \frac{3}{4}l\ddot{\psi}\sin\theta\vec{u} + \frac{3}{4}l\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\vec{w} - \frac{3}{4}l\dot{\psi}^2\sin^2\theta\vec{z}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{R}_D = \frac{3}{2}ml\ddot{\psi}\sin\theta\vec{u} + \frac{3}{2}ml\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\vec{w} - \frac{3}{2}ml\dot{\psi}^2\sin^2\theta\vec{z}}$$

/ 1 pt

Par ailleurs :

$$\vec{\delta}_O(S/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(S/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(S/R_0)}{dt}\right]_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{\sigma}_O(S/R_0)$$

où :

$$\vec{\delta}_O(S/R_0) = \begin{vmatrix} C\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta) - A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ A\ddot{\psi}\sin\theta \\ C(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta) \end{vmatrix}_{(\vec{n},\vec{w},\vec{z})}$$

/ 1,5 pt.

12- *L'énergie cinétique $T\ (S/R_0)$ du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :*

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}{}^{T}\vec{\Omega}(S/R_0)M_O^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$= \frac{A}{2}\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \frac{C}{2}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2$$

/ 1 pt.

UNIVERSITE IBN ZOHR
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
AGADIR

2011-2012

Examen de Mécanique du Solide Indéformable
Session de Rattrapage / SM3 - SMI3 - ERDD3
Durée : 1h 30 mn

Problème : étude mécanique d'un disque en mouvement dans un cerceau

Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct, avec $(O,\vec{x}_0)$ vertical descendant, supposé galiléen. Un disque homogène (D), de masse m, de rayon R et de centre d'inertie G, ***roule sans glisser*** *à l'intérieur d'un cerceau fixe (C) de rayon 3R, dans le plan vertical (voir figure). La position de (D) par rapport à (R_0) est définie par :*

$$\begin{cases} \theta(t) = (\vec{x}_0,\vec{u}) = (\vec{y}_0,\vec{v}) \\ \varphi(t) = (\vec{u},\vec{x}) = (\vec{v},\vec{y}) \end{cases}$$

Le repère $R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ est un repère intermédiaire permettant de repérer la position du point G et n'est affecté à aucun solide. Le repère $R(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ avec $\vec{z}=\vec{z}_0$ est lié à (D) en G.

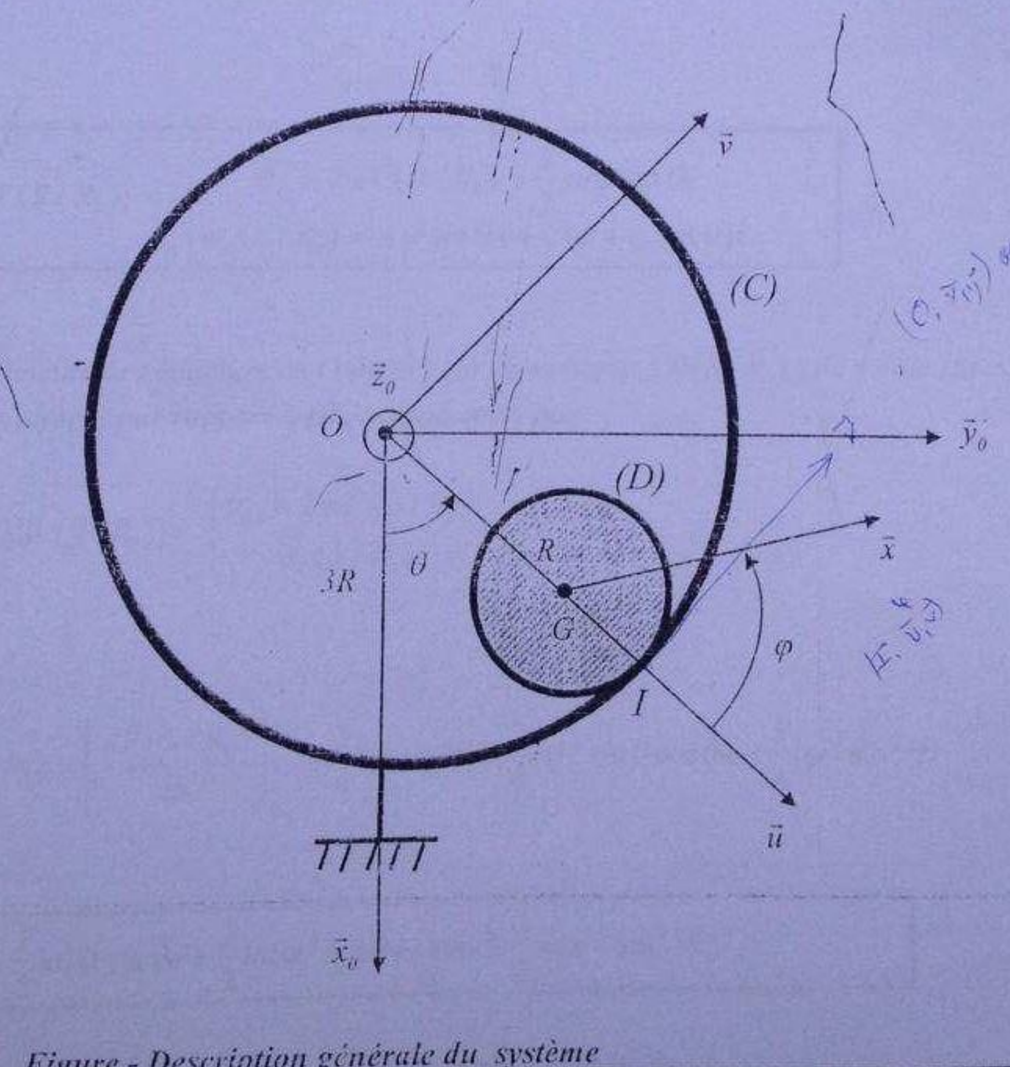


Figure - Description générale du système

☞ *Dans tout ce qui suit, les grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base Intermédiaire $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$.*

ARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE (8 points)

1- Déterminer $\vec{\Omega}(R_1 / R_0)$, $\vec{\Omega}(R / R_1)$ et $\vec{\Omega}(D / R_0)$.

2- Exprimer en G les éléments de réduction du torseur cinématique du disque (D) dans son mouvement par rapport à (R_0).

3- Quel est le plan tangent au point I ?

4- Calculer la vitesse de glissement de (D) par rapport à (C) au point de contact I.

5- Exprimer la condition de roulement sans glissement en I. En déduire une relation de la forme $\dot{\varphi} = f(\dot{\theta})$ où f est une fonction linéaire à préciser.

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES (6 points)

6- Expliquer pourquoi la matrice d'inertie de (D) en G relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est de la forme :

$$M_G^{(D)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

où A et C sont les moments d'inertie du disque (D) par rapport aux axes $(G, \vec{x})$ et $(G, \vec{z})$ respectivement.

7- Comment appelle-t-on la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et les moments d'inertie A et C ?

8- Exprimer A en fonction C.

9- Calculer C. En déduire A.

> ☞ **Dans la partie C qui suit, il sera tenu-compte de la relation $\dot{\varphi} = f(\dot{\theta})$ et $\dot{\varphi}$ sera exprimée en fonction de $\dot{\theta}$.**

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE (6 points)

10- Déterminer les éléments de réduction en G du torseur cinétique du disque dans son mouvement par rapport à (R_0).

11- Déterminer les éléments de réduction en G du torseur dynamique de (D) dans son mouvement par rapport à (R_0).

12- Calculer l'énergie cinétique du disque (D) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Examen de Mécanique du Solide Indéformable

Session de Rattrapage – 2011/2012

SM3 - SMI3 - ERDD3

- Corrigé -

PARTIE A - CINEMATIQUE (8 points)

1- $\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\theta}\vec{z}_0$ **/0,5 pt.**

$\vec{\Omega}(R/R_1) = \dot{\varphi}\vec{z}_0$ **/0,5 pt.**

$\vec{\Omega}(D/R_0) = \vec{\Omega}(R/R_0) = \vec{\Omega}(R/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\varphi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{z}_0 = (\dot{\varphi} + \dot{\theta})\vec{z}_{0,1}$ **/1,5 pt.**

2- $$[\vartheta(D/R_0)] = _G\begin{cases} \vec{\Omega}(D/R_0) = (\dot{\varphi} + \dot{\theta})\vec{z}_0 \\ \vec{V}(G \in S/R_0) \end{cases}$$

$$\vec{V}(G \in D/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0} = 2R\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_0} = 2R(\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{u}) = 2R(\dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge \vec{u}) = 2R\dot{\theta}\vec{v}$$ **/1 pt.**

D'où :

$$[\vartheta(D/R_0)] = _G\begin{cases} \vec{\Omega}(D/R_0) = (\dot{\varphi} + \dot{\theta})\vec{z}_0 \\ \vec{V}(G \in S/R_0) = 2R\dot{\theta}\vec{v} \end{cases}$$ **/0,5pt.**

3- Le plan tangent au point I est le plan $(I, \vec{v}, \vec{z}_0)$ **/0,5pt.**

4-

$$\vec{V}_g(I, D/R_0) = \vec{V}(I \in D/R_0) = \vec{V}(G \in D/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \overrightarrow{GI} = 2R\dot{\theta}\vec{v} + [(\dot{\varphi} + \dot{\theta})\vec{z}_0 \wedge R\vec{u}]$$
$$= 2R\dot{\theta}\vec{v} + R(\dot{\varphi} + \dot{\theta})\vec{v} = R(3\dot{\theta} + \dot{\varphi})\vec{v}$$

/2 pts.

5- La C.R.S.G. est $\vec{V}_g(I, D/R_0) = \vec{0}$ **/ 0,5 pt.**

$\Leftrightarrow 3\dot{\theta} + \dot{\varphi} = 0 \Leftrightarrow \dot{\varphi} = -3\dot{\theta}$ (fonction linéaire) **/1 pt.**

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES (6 points)

6- La forme de la matrice d'inertie s'explique par le fait que l'axe $(G, \vec{z})$ est un axe de symétrie de révolution. **/1pt.**

7- La base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est une base principale d'inertie et A et C sont de moments principaux d'inertie. **/ 1 pt. (0,5 +0,5)**

8- $A = \dfrac{C}{2}$ car $\displaystyle\int_{P\in(D)} z^2 dm = 0$ **/1pt.** ; **Rappel :** $A = B = \dfrac{C}{2} + \displaystyle\int_{P\in(D)} z^2 dm$

9- $$C = I_{Oz} = \int_{P\in(D)} (x^2 + y^2)dm = \sigma \int_{P\in(D)} r^2 \underbrace{rdrd\theta}_{dS} = \sigma\int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{m}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{mR^2}{2}$$ **/ 2 pts.**

$A = \dfrac{C}{2} = \dfrac{mR^2}{4}$ **/1pt.**

ARTIE C - CINETIQUE (6 points)

10- $[\mathscr{C}(D/R_0)] = {}_G\begin{cases} \vec{R}_C = m\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_G(D/R_0) = M_G^{(D)}\vec{\Omega}(D/R_0) \end{cases}$

$\vec{R}_C = m\vec{V}(G/R_0) = 2mR\dot{\theta}\vec{v}$ / 0,5 pt.

$$\vec{\sigma}_G = M_G^{(D)}\vec{\Omega}(D/R_0) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\dot{\theta} \end{pmatrix} = -2C\dot{\theta}\vec{z}_0 = -mR^2\dot{\theta}\vec{z}_{0,1} \quad / 1\ pt.$$

car $\vec{\Omega}(D/R_0) = (\dot{\varphi}+\dot{\theta})\vec{z}_0 = (-3\dot{\theta}+\dot{\theta})\vec{z}_0 = -2\dot{\theta}\vec{z}_0$

D'où :

$$[\mathscr{C}(D/R_0)] = {}_G\begin{cases} \vec{R}_C = m\vec{V}(G/R_0) = 2mR\dot{\theta}\vec{v} \\ \vec{\sigma}_G(D/R_0) = M_G^{(D)}\vec{\Omega}(D/R_0) = -mR^2\dot{\theta}\vec{z}_{0,1} \end{cases}$$

11- $[\mathfrak{D}(D/R_0)] = {}_G\begin{cases} \vec{R}_D = m\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_G(D/R_0) \end{cases}$

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = 2R\ddot{\theta}\vec{v} + 2R\dot{\theta}\left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_0} = 2R\ddot{\theta}\vec{v} + 2R\dot{\theta}\left[\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{v}\right] \quad /1,5\ pt.$$

$$= 2R\ddot{\theta}\vec{v} + 2R\dot{\theta}\left[\dot{\theta}\vec{z}_0\wedge\vec{v}\right] = 2R\ddot{\theta}\vec{v} + 2R\dot{\theta}\left[-\dot{\theta}\vec{u}\right] = 2R(\ddot{\theta}\vec{v} - \dot{\theta}^2\vec{u})$$

Donc

$\vec{R}_D = m\vec{\Gamma}(G/R_0) = 2mR(\ddot{\theta}\vec{v} - \dot{\theta}^2\vec{u})$

$$\vec{\delta}_G(D/R_0) = \left[\frac{d\sigma_G}{dt}\right]_{R_0} = -mR^2\ddot{\theta}\vec{z}_{0,1} \quad / 1,5\ pt.$$

12-

$$T(D/R_0) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(G/R_0) + \frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(D/R_0)M_G^{(D)}\vec{\Omega}(D/R_0)$$

$$= \frac{1}{2}m(2R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}(0,0,-2\dot{\theta})\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\dot{\theta} \end{pmatrix} \quad / 1,5\ pt.$$

$$= 2mR^2\dot{\theta}^2 + 2C\dot{\theta}^2 = 2mR^2\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\theta}^2$$

$$= 3mR^2\dot{\theta}^2$$

Examen de mécanique du solide indéformable
Session normale - Janvier 2013
SM3 - SMI3 - ERDD3
Durée : 1h 30'

Problème : étude mécanique d'un culbuto (*)

Un solide de révolution (S) appelé **culbuto** *est constitué par une demi-sphère (S_1) et un cylindre (S_2) de même base. On désigne par a le rayon de cette base et par H son centre ; la hauteur du cylindre circulaire (S_2) est notée h. (S_1) et (S_2) sont des* **solides pleins homogènes** *de masses respectives m_1 et m_2 et* **de même densité volumique** ρ. *On note $(H,\vec{z})$ l'axe de révolution du solide (S) orienté de (S_1) vers (S_2), et $R(H,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère orthonormé direct lié à (S).*

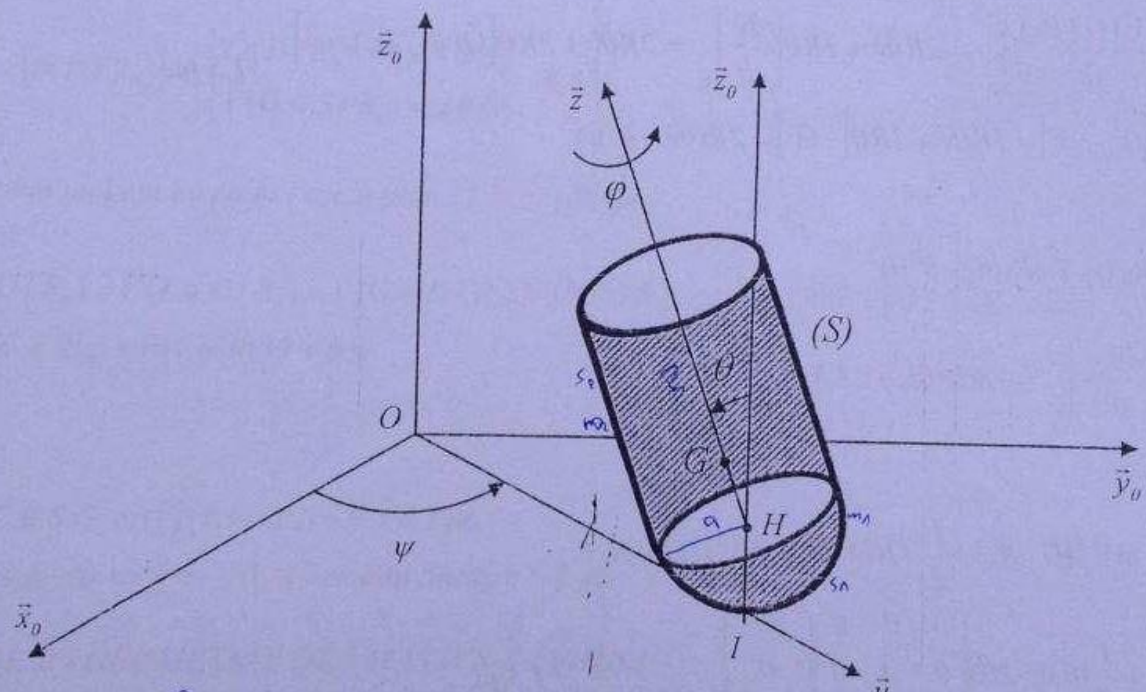


Figure - description générale du système

On note M la masse totale du système et G son centre d'inertie tel que $\overrightarrow{HG} = L\vec{z}$.
Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct supposé être galiléen, avec $(O,\vec{z}_0)$ vertical ascendant. On repère la position de (S) dans ce référentiel par les coordonnées (x, y, z) de G et par les angles d'Euler habituels (ψ,θ,φ). On note $R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ et $R_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ les deux repères intermédiaires. Le solide (S) est situé dans le demi-espace $z_0 > 0$ et est assujetti à se déplacer de telle façon que sa partie hémisphérique soit en contact ponctuel en un point I avec le **plan fixe** $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ *(voir figure).*

(*) *Jouet pour enfant qui se redresse toujours même quand on le renverse car sa base est lestée.*

PARTIE A – ETUDE CINEMATIQUE (7,5 points)

Q1- Représenter les figures de calcul et donner l'expression du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}(S/R_0)$.

Q2- Quelles sont les composantes de $\vec{\Omega}(S/R_0)$ dans la base de Résal $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$?

Q3- Déterminer la condition géométrique de contact entre (S) et le plan fixe $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$.

> ☞ ***Dans la suite du problème, cette condition de maintien de contact sera prise en compte.***

Q4- Quel est alors le nombre de degrés de liberté du système ?

Q5- Calculer la vitesse $\vec{V}(G/R_0)$.

Q6- Calculer l'accélération $\vec{\Gamma}(G/R_0)$.

Q7- Déterminer la vitesse de glissement en I de (S) par rapport au plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ par ses composantes dans la première base intermédiaire $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$. Commenter le résultat obtenu.

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES (7.5 points)

> ☞ ***Dans cette partie, toutes les grandeurs vectorielles et matricielles seront exprimées dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.***

Q8- Déterminer la position du centre d'inertie G_1 de la demi-sphère (S_1).

Q9- En déduire la position $\overrightarrow{HG}$ du centre d'inertie G du système, en exprimant L en fonction de a et h.

Q10- Déterminer la matrice d'inertie en H de la demi-sphère (S_1).

Q11- Déterminer la matrice d'inertie en H du cylindre (S_2).

Q12- En déduire la matrice d'inertie en H du système (S).

Q13- Par application du théorème de Huygens généralisé, déterminer la matrice centrale d'inertie du culbuto.

PARTIE C – ETUDE CINETIQUE (5 points)

> ☞ ***Afin de simplifier l'écriture dans cette partie, on adoptera pour la matrice centrale d'inertie de (S), la forme de Binet suivante:***

$$M_G^{(S)} = \begin{pmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & A_G & 0 \\ 0 & 0 & C_G \end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$$

Q14- Déterminer le torseur cinétique en G de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q15- Déterminer le torseur dynamique en G de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q16- En utilisant le théorème de Koenig, calculer l'énergie cinétique du système.

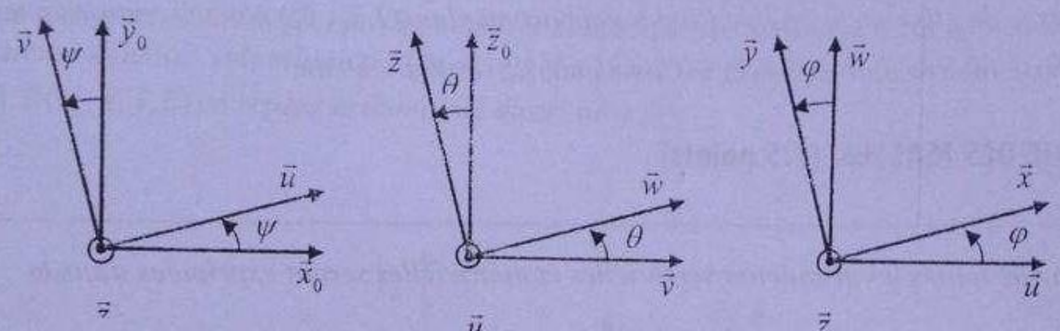
Examen de Mécanique du Solide Indéformable
Session Normale – 2012/2013
SM3 - SMI3 - ERDD3
- Corrigé -

Solution détaillée

PARTIE A – ETUDE CINEMATIQUE

R1-

Figures de calcul : 0.5 +0.5 +0.5 /1.5 pts



On en déduit que $\vec\Omega(S/R_0) = \dot\psi\vec z_0 + \dot\theta\vec u + \dot\varphi\vec z$ **/0.5 pt.**

R2-

$$\vec\Omega(S/R_0) = \left|\begin{array}{l} \dot\theta \\ \dot\psi\sin\theta \\ \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta \end{array}\right._{(\vec u,\vec w,\vec z)} \quad /0.5\ pt.$$

R3-

La condition géométrique de contact entre (S) et le plan $(O,\vec x_0,\vec y_0)$ *est donnée par :*

$$\overrightarrow{OI}.\vec z_0 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GI}).\vec z_0 = (x\vec x_0 + y\vec y_0 + z\vec z_0 - L\vec z - a\vec z_0).\vec z_0 = 0$$
$$\Rightarrow z - L\cos\theta - a = 0$$

D'où :

$$\boxed{z = a + L\cos\theta}$$

/1 pt.

R4-

Le nombre de degrés de liberté = nombre de paramètres de position – nombre d'équations de liaison = 6-1=5 ddl. **/0.5 pt.**

R5-

$$\vec V(G/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(x\vec x_0 + y\vec y_0 + (a+L\cos\theta)\vec z_0)}{dt}\right]_{R_0} = \dot x\vec x_0 + \dot y\vec y_0 - L\dot\theta\sin\theta\vec z_0 \quad /1\ pt.$$

R6-

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(\dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 - L\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0)}{dt}\right]_{R_0} \quad /\ 1\ pt.$$

$$= \ddot{x}\vec{x}_0 + \ddot{y}\vec{y}_0 - L(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{z}_0$$

R7-

La vitesse de glissement en I de (S) est :

$$\vec{V}_g(I,S/R_0) = \vec{V}(I \in S/R_0) = \vec{V}(G \in S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{GI}$$

$$= \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 - L\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0 + (\dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z}) \wedge (-L\vec{z} - a\vec{z}_0)$$

D'où

$$= \dot{x}(\cos\psi\vec{u} - \sin\psi\vec{v}) + \dot{y}(\sin\psi\vec{u} + \cos\psi\vec{v}) - L\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0 - L\dot{\psi}\sin\theta\vec{u} + L\dot{\theta}\underbrace{\vec{w}}_{\cos\theta\vec{v} + \sin\theta\vec{z}_0} + a\dot{\theta}\vec{v} + a\dot{\varphi}\sin\theta\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{V}_g(I,S/R_0) = (\dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi - L\dot{\psi}\sin\theta + a\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{u} + (-\dot{x}\sin\psi + \cos\dot{y}\psi + L\dot{\theta}\cos\theta + a\dot{\theta})\vec{v}}$$

/ 1.5 pt.

Commentaire : la vitesse de glissement appartient au plan tangent $(I,\vec{u},\vec{v})$.

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R8-

Déterminons la position du centre d'inertie G_1 de la demi-sphère.

$$z_{G_1} = \frac{1}{m_1}\int_{(S_1)} z\,dm = \frac{1}{V_1}\int_{(S_1)} z\,dV$$ *Où V_1 est le volume de (S_1).*

En coordonnées sphériques (θ longitude et φ colatitude), on a :

$$\begin{cases} z = r\cos\varphi \\ dV = r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi \end{cases}$$

Donc :

$$z_{G_1} = \frac{1}{V_1}\int_{(S_1)} r\cos\varphi . r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = \frac{1}{V_1}\int_0^a r^3\,dr\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta = -\frac{3}{8}a$$

D'où :

/ 1 pt. $$\boxed{\overrightarrow{HG_1} = -\frac{3}{8}a\vec{z}}$$

R9-

Le centre d'inertie G de (S) est donné par la relation d'associativité :

$$\overrightarrow{HG} = \frac{m_1 \overrightarrow{HG_1} + m_2 \overrightarrow{HG_2}}{m_1 + m_2}$$

Avec : $\begin{cases} m_1 = \dfrac{2}{3}\pi a^3 \rho \\ m_2 = \pi a^2 h \rho \\ \overrightarrow{HG}_2 = \dfrac{h}{2}\vec{z} \end{cases}$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\overrightarrow{HG} = \frac{6h^2 - 3a^2}{4(2a+3h)}\vec{z} = L\vec{z}}$$

/ 1.5 pt.

D'où

$$\boxed{L = \frac{6h^2 - 3a^2}{4(2a+3h)}}$$

R10-

Déterminons la matrice d'inertie en H de la demi-sphère (S_1) relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Les plans $(H, \vec{x}, \vec{z})$ et $(H, \vec{y}, \vec{z})$ sont des plans de symétrie matérielle pour (S_1), les produits d'inertie sont donc tous nuls. Par ailleurs les axes $(H, \vec{x})$ et $(H, \vec{y})$ jouent le même rôle, donc :

$$A = B = \frac{C}{2} + \int_{(S)} z^2 dm$$

- Calcul de C :

$$C = \int_{(S_1)} (x^2 + y^2) dm = \rho \int_0^a r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{2}{5} m_1 a^2$$

- Calcul de $C' = \int_{(S_1)} z^2 dm$:

$$C' = \int_{(S_1)} z^2 dm = \rho \int_{(S_1)} z^2 dV = \rho \int_0^a r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{m_1 a^2}{5}$$

Ainsi : $A = B = \dfrac{C}{2} + C' = \dfrac{2}{5} m_1 a^2$

D'où :

$$M_H^{(S_1)} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{5}m_1a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}m_1a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}m_1a^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

/ 1.5 pt.

R11-

Déterminons la matrice d'inertie en H du cylindre (S_2) relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Compte tenu de la symétrie de révolution, la matrice d'inertie de (S_2) en H s'écrit :

$$M_H^{(S_2)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Avec : $A = B = \dfrac{C}{2} + \displaystyle\int_{(S_2)} z^2 dm$

- Calcul de C :

$$C = I_{Oz} = \int_{(S_2)} (x^2 + y^2) dm = \rho \int_{(S_2)} r^2.rdrd\theta dz = \rho \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{m_2 a^2}{2}$$

- Calcul de $C' = \displaystyle\int_{(S_2)} z^2 dm$ *:*

$$C' = \int_{(S_2)} z^2 dm = \rho \int_{(S_2)} z^2.rdrd\theta dz = \rho \int_0^a rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h z^2 dz = \frac{m_2 h^2}{3}$$

- Calcul de A :

$$A = \frac{C}{2} + \int_{(S_2)} z^2 dm = \frac{m_2 a^2}{4} + \frac{m_2 h^2}{3}$$

D'où :

$$M_H^{(S_2)} = \begin{pmatrix} \frac{m_2 a^2}{4} + \frac{m_2 h^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 a^2}{4} + \frac{m_2 h^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 a^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

/ 1.5 pt.

R12-

Déterminons la matrice d'inertie en H du système (S) relativement à la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

$$M_H^{(S)} = M_H^{(S_1)} + M_H^{(S_2)}$$

D'où :

$$M_H^{(S)} = \begin{pmatrix} m_2(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3}) + \frac{2}{5}m_1a^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3}) + \frac{2}{5}m_1a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 a^2}{2} + \frac{2}{5}m_1a^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

/ 0.5 pt.

R13-

Matrice d'inertie en G du système (S) relativement à la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

D'après le théorème de Huygens généralisé, on a :

$$\begin{cases} A_G = B_G = A - ML^2 \\ C_G = C \end{cases}$$

Avec : $L = \dfrac{6h^2 - 3a^2}{4(2a+3h)}$

D'où :

$$M_G^{(S)} = \begin{pmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & A_G & 0 \\ 0 & 0 & C_G \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Avec :

$$\begin{cases} A_G = m_2(\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{3}) + \frac{2}{5}m_1a^2 - M\left[\frac{6h^2-3a^2}{4(2a+3h)}\right]^2 \\ C_G = \frac{m_2a^2}{2} + \frac{2}{5}m_1a^2 \end{cases}$$

/ 1.5 pt.

PARTIE C – ETUDE CINETIQUE

R14-

Le moment cinétique en G de (S) par ses composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ est :

$$[\mathscr{C}(S/R_0)] = {}_G\begin{cases} M\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_G(S/R_0) \end{cases}$$

Avec

$$\boxed{M\vec{V}(G/R_0) = M(\dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 - L\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0)}$$

/0.5 pt

Et

$$\vec{\sigma}_G(S/R_0) = M_G^{(S)}.\vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{pmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & A_G & 0 \\ 0 & 0 & C_G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= A_G\dot{\theta}\vec{u} + A_G\dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + C_G(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}$$

/ 1 pt.

Car $\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z} = \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + (\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}$

D'où :

$$\boxed{[\mathscr{C}(S/R_0)] = {}_G\begin{cases} M\vec{V}(G/R_0) = M(\dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 - L\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0) \\ \vec{\sigma}_G(S/R_0) = A_G\dot{\theta}\vec{u} + A_G\dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + C_G(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\vec{z} \end{cases}}$$

R15-

Le torseur dynamique en G de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[\mathscr{D}(S/R_0)] = {}_G\begin{cases} M\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_G(S/R_0) \end{cases}$$

$$\boxed{M\vec{\Gamma}(G/R_0) = M[\ddot{x}\vec{x}_0 + \ddot{y}\vec{y}_0 - L(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{z}_0]}$$

/0.5 pt.

Et

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt}\right]_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})} + \vec{\Omega}((\vec{u},\vec{w},\vec{z})/R_0)\wedge\vec{\sigma}_G(S/R_0)$$

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt}\right]_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})} = A_G\ddot{\theta}\vec{u} + A_G(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{w} + C_G(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)\vec{z}$$

$$\vec{\Omega}((\vec{u},\vec{w},\vec{z})/R_0)\wedge\vec{\sigma}_G(S/R_0) = \left|\begin{array}{c}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\psi}\cos\theta\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{c}A_G\dot{\theta}\\ A_G\dot{\psi}\sin\theta\\ C_G(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\end{array}\right. = \left|\begin{array}{c}(C_G - A_G)\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + C_G\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\\ (A_G - C_G)\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta - C_G\dot{\theta}\dot{\varphi}\\ 0\end{array}\right.$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\vec{\delta}_G(S/R_0) = \left|\begin{array}{c}A_G\ddot{\theta} + (C_G - A_G)\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + C_G\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\\ A_G(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta) + (A_G - C_G)\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta - C_G\dot{\theta}\dot{\varphi}\\ C_G(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)\end{array}\right.\;_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}}$$

/ 1.5 pt.

R16-

L'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\boxed{\begin{aligned}T(S/R_0) &= \frac{1}{2}M\vec{V}^2(G/R_0) + \frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(S/R_0)M_G^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0)\\ &= \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + L^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta) + \frac{A_G}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{A_G}{2}(\dot{\psi}\sin\theta)^2 + \frac{C_G}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2\end{aligned}}$$

/ 1.5 pt.

Examen de mécanique du solide indéformable
Session de rattrapage - Mars 2013
SM3 - SMI3 - ERDD3
Durée : 1h 30'

Problème : étude mécanique d'une plaque triangulaire solidaire d'une tige

Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct supposé être galiléen, avec $(O,\vec{z}_0)$ vertical ascendant et (S) un solide homogène constitué par :

- *une tige (T) de longueur 2l, de masse négligeable, articulé en O, en mouvement par rapport à (R_0) dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$. On désigne par $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ un repère orthonormé direct lié à (T) tel que $\vec{x}_1$ soit confondu avec la tige et $\vec{z}_1=\vec{z}_0$ (figure 1).*

La position de la tige par rapport à (R_0) est repérée, à chaque instant, par l'angle : $\psi(t)=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)$

- *une plaque plane homogène (P) de masse m, de centre d'inertie G et de densité surfacique σ ayant la forme d'un triangle équilatéral $A\hat{B}C$ de côté 2a. (P) est soudée à (T) par son côté AB tel que le milieu O_2 de AB coïncide avec le milieu de la tige. Un repère orthonormé direct $R_2(O_2,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ est lié à (P) tel que $\vec{x}_2=\vec{x}_1$ et $\vec{y}_2$ soit colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{O_2C}$.*

La position de (P) par rapport à (R_1) est repérée, à chaque instant, par l'angle $\theta(t)=(\vec{y}_1,\vec{y}_2)$ (figure 1).
Au cours du mouvement de (S) par rapport à (R_0), OO_2 reste constamment dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$.

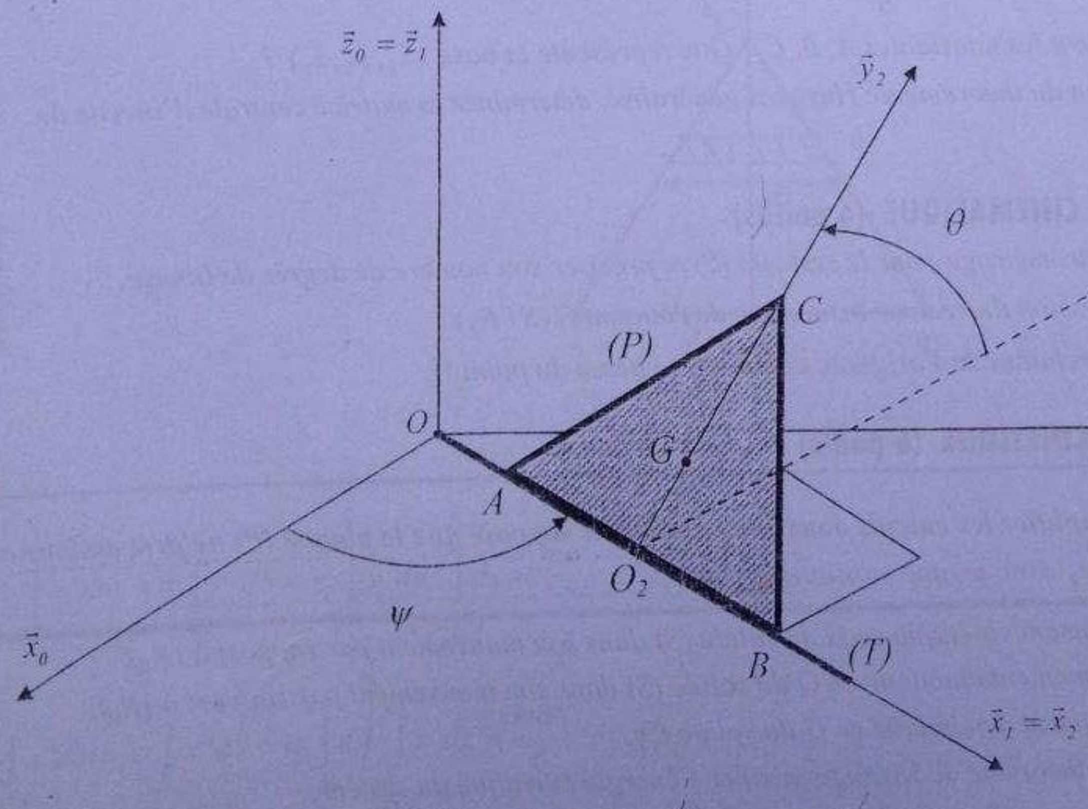


Figure 1- description générale du système

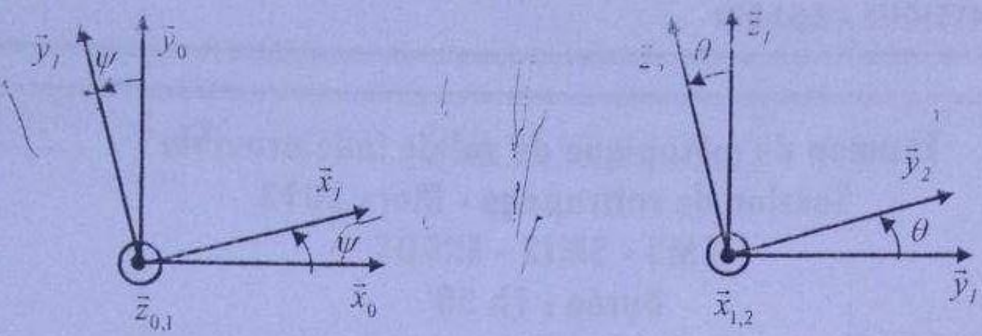


Figure 2- figures planes de calcul

> ☞ *Dans tout le problème, les grandeurs vectorielles et matricielles seront exprimées dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.*

PARTIE A - GEOMETRIE DES MASSES (10 points)

Q1- *Montrer que la masse de la plaque (P) est* $m = a^2\sqrt{3}\sigma$.

Q2- *Déterminer la position du centre d'inertie G de la plaque.*

Q3- *Expliquer pourquoi la matrice d'inertie de (P) en O_2 prend la forme diagonale suivante :*

$$M_{O_2}^{(P)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

Q4- *Montrer que* $A = \dfrac{ma^2}{2}$, $B = \dfrac{ma^2}{6}$ *et* $C = \dfrac{2ma^2}{3}$.

Q5- *Que représentent les constantes A, B, C ? Que représente la base* $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ *?*

Q6- *Par application du théorème de Huygens généralisé, déterminer la matrice centrale d'inertie de (P).*

PARTIE B – ETUDE CINEMATIQUE (4 points)

Q7- *Proposer un paramétrage pour le système (S) et préciser son nombre de degrés de liberté.*

Q8- *Donner l'expression du vecteur instantané de rotation* $\vec{\Omega}(S/R_0)$.

Q9- *En utilisant la relation de Varignon, calculer la vitesse du point G.*

PARTIE C – ETUDE CINETIQUE (6 ponts)

> ☞ ***Afin de simplifier les calculs dans cette partie, on suppose que la plaque (P) ne précessionne pas :*** $\psi = \psi_0$ *avec* ψ_0 *une constante donnée.*

Q10- *Calculer le moment cinétique en G du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

Q11- *En déduire le moment cinétique en O du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

Q12- *Calculer le moment dynamique en G du solide (S).*

Q13- *En utilisant le théorème de Koenig, calculer l'énergie cinétique du système.*

Examen de Mécanique du Solide Indéformable
Session de rattrapage – 2012/2013
SM3 - SMI3 - ERDD3
- Corrigé -

PARTIE A – GEOMETRIE DES MASSES (10 points)

R1-

$$m = \sigma S = \sigma.\frac{1}{2}(2a)(2a\cos\frac{\pi}{6}) = \sigma a^2\sqrt{3} \ / \ 1\ pt.$$

R2-

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie G de (P) est situé sur l'axe $(O,\vec{y}_2)$ *:*

$$\overrightarrow{O_2G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{O_2C} = \frac{1}{3}(2a\cos\frac{\pi}{6})\vec{y}_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}\vec{y}_2 \ / \ 1\ pt.$$

R3-

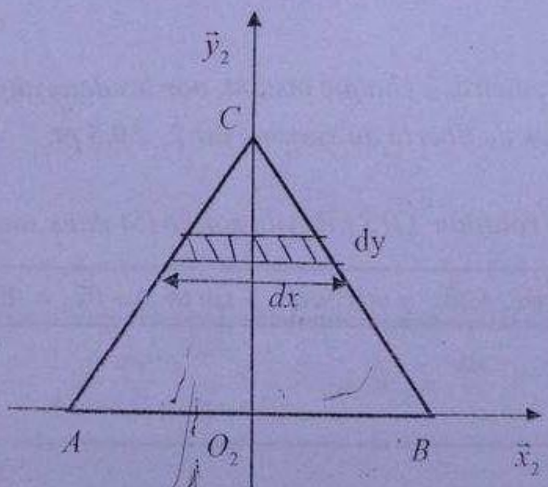
$P \in (P) \Rightarrow P(x, y, 0) \Rightarrow D = E = 0 \ / \ 0.5\ pt.$

Le plan $(O_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ *est 1 plan de symétrie* $\Rightarrow F = E = 0 \ / \ 0.5\ pt.$

Donc : D=E=F=0 D'où la forme de la matrice d'inertie.

R4-

$$A = \int_{P\in(P)} y^2 dm = \sigma \int_{P\in(P)} y^2 dS$$



$$A = \int_{(P)} y^2 dm = \sigma \int_{(P)} y^2 dS = \sigma \int_0^{a\sqrt{3}} y^2 dy \int_{\frac{y}{\sqrt{3}}-a}^{-\frac{y}{\sqrt{3}}+a} dx = \frac{ma^2}{2} \ / \ 1.5\ pt.$$

$$B = \int_{(P)} x^2 dm = \sigma \int_{(P)} x^2 dS = \sigma \int_0^{a\sqrt{3}} dy \int_{\frac{y}{\sqrt{3}}-a}^{-\frac{y}{\sqrt{3}}+a} x^2 dx = \frac{ma^2}{6} \ / \ 1.5\ pt.$$

$C = A + B = \frac{2}{3} m a^2$ */ 1.5 pt.*

R5-

A, B, C représentent les moments principaux d'inertie **/ 0.5 pt.**

et $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ *représente la base principale d'inertie.* **/ 0.5 pt.**

R6-

Théorème de Huygens généralisé :

$$\begin{cases} A = A_G + m(O_2G)^2 = A_G + m(y_G)^2 \\ B = B_G \\ C = C_G + m(O_2G)^2 = C_G + m(y_G)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_G = A - m\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{ma^2}{2} - \frac{ma^2}{3} = \frac{ma^2}{6} \\ C_G = C - m\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2ma}{3} - \frac{ma^2}{3} = \frac{ma^2}{3} \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{M_G^{(P)} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}}$$ **/ 1.5 pt.**

PARTIE B – ETUDE CINEMATIQUE (4 points)

R7-

Le système peut être paramétré, à chaque instant, par les deux angles $\psi(t)$ *et* $\theta(t)$ *.* **/ 0.5 pt.**

Donc le nombre de degrés de liberté du système est 2. **/ 0.5 pt.**

R8-

Le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}(S/R_0)$ *du solide (S) dans son mouvement par rapport à* (R_0) *est :*

/ 1 $\boxed{\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_1 + \dot{\theta}\vec{x}_2 = \dot{\psi}(\cos\theta\vec{z}_2 + \sin\theta\vec{y}_2) + \dot{\theta}\vec{x}_2 = \dot{\theta}\vec{x}_2 + \dot{\psi}\sin\theta\vec{y}_2 + \dot{\psi}\cos\theta\vec{z}_2}$ *pt.*

R9-

/ 2 pt.

$$\boxed{\vec{V}(G/R_0) = \underbrace{\vec{V}(O/R_0)}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{vmatrix}_{(R_2)} \wedge \begin{vmatrix} l \\ \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ 0 \end{vmatrix}_{(R_2)} = \begin{vmatrix} -\frac{a\sqrt{3}}{3}\dot{\psi}\cos\theta \\ l\dot{\psi}\cos\theta \\ \frac{a\sqrt{3}}{3}\dot{\theta} - l\dot{\psi}\sin\theta \end{vmatrix}_{(R_2)}}$$

PARTIE C – ETUDE CINETIQUE (6 points)

R10-

$\boxed{\vec{\sigma}_G(S/R_0) = M_G^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0) = M_G^{(P)}\vec{\Omega}(S/R_0) = A_G\dot{\theta}\vec{x}_2}$ *car* $\dot{\psi} = 0$ */ 1 pt.*

R11-

$$\vec{\sigma}_O(S/R_0)=\vec{\sigma}_G(S/R_0)+m\vec{V}(G/R_0)\wedge\overrightarrow{GO}$$

$$m\vec{V}(G/R_0)\wedge\overrightarrow{GO}=\begin{vmatrix}0\\0\\m\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\dot{\theta}\end{vmatrix}_{(R_2)}\wedge\begin{vmatrix}-l\\-\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\\0\end{vmatrix}_{(R_2)}=\begin{vmatrix}\dfrac{ma^2}{3}\dot{\theta}\\\dfrac{-mla\sqrt{3}}{3}\dot{\theta}\\0\end{vmatrix}_{(R_2)}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{\sigma}_O(S/R_0)=\begin{vmatrix}A_G\dot{\theta}+\dfrac{ma^2}{3}\dot{\theta}\\\dfrac{-mla\sqrt{3}}{3}\dot{\theta}\\0\end{vmatrix}_{(R_2)}}$$ */ 1.5 pt.*

R12-

$$\vec{\delta}_G(S/R_0)=\left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt}\right]_{R_2}+\vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\vec{\sigma}_G(S/R_0)$$

$$\begin{cases}\left[\dfrac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt}\right]_{R_2}=A_G\ddot{\theta}\vec{x}_2\\\vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\vec{\sigma}_G(S/R_0)=\dot{\theta}\vec{x}_2\wedge A_G\dot{\theta}\vec{x}_2=\vec{0}\end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{\delta}_G(S/R_0)=A_G\ddot{\theta}\vec{x}_2}$$ */ 1.5 pt.*

R13-

/ 2 pt.

$$\boxed{\begin{aligned}T(S/R_0)&=\frac{1}{2}m\vec{V}^2(G/R_0)+\frac{1}{2}\vec{\Omega}\vec{\sigma}_G(S/R_0)=\frac{1}{2}m\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\dot{\theta}\right)^2+\frac{1}{2}\dot{\theta}\vec{x}_2.A_G\dot{\theta}\vec{x}_2=\frac{ma^2}{6}\dot{\theta}^2+\frac{A_G}{2}\dot{\theta}^2\\&=\left(\frac{ma^2}{6}+\frac{A_G}{2}\right)\dot{\theta}^2\end{aligned}}$$