UE MATH 101: EVALUATION DE SYNTHESE
SEMESTRE HARMATTAN

EXERCICE 1 **(12 pts)**

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit T un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{B}$.

1. Calculer les vecteurs propres et les espaces propres associés à chaque valeur propre de A.
2. A est-elle diagonalisable? Justifier votre réponse.
3. On note $\mathcal{B}_p$ une base de vecteurs propres de T. Donner une matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_p$ (On précisera la base $\mathcal{B}_p$). Calculer P^{-1}.
4. Ecrire la matrice de T dans la base $\mathcal{B}_p$ choisie puis calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 2 (5 pts)

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer les racines du polynôme en x, $P(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$.

2. On pose $M_{abc} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{pmatrix}$. La matrice M_{123} est-elle diagonalisable? Justifier la réponse.
   (On pourra s'aider de la question précédente.)

EXERCICE 3 (3 pts)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1+t & -1 & 2 \\ 2 & -t & 3 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs du paramètre réel t, la matrice M est-elle inversible?