Licence Tronc commun
Travaux dirigés de Mécanique du solide
Feuille 1

Exercice 1

Considérons un repère orthonormé $R\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ dans l'espace vectoriel ξ^3, un axe $\Delta\left(O, \overrightarrow{u}\right)$ passant par le point O, un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}\left(u_1, u_2, u_3\right)$ et un vecteur quelconque $\overrightarrow{v}\left(v_1, v_2, v_3\right)$. Soit π un plan perpendiculaire à l'axe $\Delta\left(O, \overrightarrow{u}\right)$.

1. Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.
2. Déterminer, dans la base $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{w}$ défini par $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. En déduire dans cette base la matrice $[u]$ de l'opérateur produit vectoriel.
3. Trouver l'expression du vecteur $\overrightarrow{v}_u$, projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{v}$ sur l'axe $\Delta\left(O, \overrightarrow{u}\right)$. En déduire la matrice $[u_p]$ de l'opérateur projection orthogonale sur l'axe $\Delta\left(O, \overrightarrow{u}\right)$.
4. Trouver l'expression du vecteur $\overrightarrow{v}_\pi$, projection orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur le plan π.

Exercice 2

Dans un système d'axe formant un trièdre trirectangle direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on donne le vecteur glissant:

$$\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$$

dont la direction passe par le point $A\left(1, 0, 0\right)$. Soit un autre point O' de coordonnées $\left(1, 1, 1\right)$.

1. Calculer le moment du vecteur $\overrightarrow{v}$ au point O.
2. Calculer son moment au point O' en utilisant la définition.
3. Retrouver la moment du vecteur $\overrightarrow{v}$ en utilisant la formule de VARIGNON.
4. Calculer son moment par rapport aux trois axes de coordonnées.
5. Calculer son moment par rapport à un axe (Δ) passant par O et O' et dont les cosinus directeurs sont $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Exercice 3

Soit un repère orthonormé $R\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ et les trois vecteurs suivants:

$$\overrightarrow{v}_1=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{v}_2=\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{v}_3=\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}$$

dont les points d'application respectives sont $A_1\,(0,3,2)$, $A_2\,(3,0,2)$, $A_3\,(3,2,0)$.

1. Construire le torseur $\{T\}_O$ associé aux systèmes des vecteurs $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ et $\overrightarrow{v}_3$.
2. Calculer l'invariant scalaire.
3. Calculer le pas du torseur.
4. Déterminer l'axe central du torseur.

Exercice 4

On considère un repère orthonormé $R\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ et deux torseurs définis au même point M par:

$$\{T_1\}_M=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R}_1=-3\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_1\,(M)=4\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-7\overrightarrow{k}\end{array}\right\}_M$$

$$\{T_2\}_M=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R}_2=3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_2\,(M)=4\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+7\overrightarrow{k}\end{array}\right\}_M$$

1. Quels sont le pas et l'axe central du torseur $\{T_1\}_M$?
2. Montrer que l'automoment du torseur $\{T_1\}_M$ est indépendant du point M.
3. Donner les coordonnées du torseur $\{T\}_M=\alpha\,\{T_1\}_M+\beta\,\{T_2\}_M$ avec α et β des réels positifs.
4. Que doivent vérifier les paramètres α et β pour que le torseur $\{T\}_M$ forme un torseur couple? Montrer que le moment de ce torseur ne dépend que du bras de levier. Donner une représentation schématique de ce moment.