Chapter 2

Cinématique du solide

Sommaire

2.1 Approche historique

En mécanique, la cinématique (tiré du nom grec : *kinêma*) est l'étude des mouvements des corps sans tenir compte des causes qui les produisent. Au côté de la notion d'espace qui fut l'objet de la géométrie, la cinématique introduit en outre la notion du temps. On peut dater la naissance de la cinématique moderne à l'allocation de **Pierre Varignon** en 1700 qui a démontré qu'il est possible de déduire l'accélération de la vitesse instantanée à l'aide d'une simple procédure de calcul différentiel.

2.2 Espace repère - Solide rigide

2.2.1 Espace repère

On considère que l'espace dans lequel évoluent les systèmes est homogène (indépendant du lieu), isotrope (indépendant de la direction) et euclidien (muni d'un produit scalaire). Il est défini par l'association de l'horloge **H** et d'un repère $R_0(O, b_0)$.
L'existence du temps absolu $\implies$ **H** est unique.

O : origine du repère

$b_0 = \left(\overrightarrow{i}_0, \overrightarrow{j}_0, \overrightarrow{k}_0\right)$ est une base orthonormée directe.

Un point $M \in \xi$ est en mouvement par rapport à R_0 si ses coordonnées varient en fonction du temps, ie. :

$$\overrightarrow{OM} = \left| \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array} \right.$$

On défini aussi :

La vitesse de M par rapport à R_0 : $\overrightarrow{v}(M/R_0) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R_0}$

L'accélération de M par rapport à R_0 : $\overrightarrow{\gamma}(M/R_0) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{v}(M/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = \left.\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{R_0}$

2.2.2 Définition d'un solide rigide

Un solide rigide ou indéformable est un ensemble de points matériels dont les distances mutuelles restent constantes au cours du temps.

Soient A et B deux points d'un solide (S).
$\overrightarrow{AB}^2 = cte$ (c'est le carré de la distance entre les points A et B), alors que $\overrightarrow{AB}$ peut dépendre du temps par sa direction.
En effet: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}(t) - \overrightarrow{OA}(t)$ (vecteur variable)
Or $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = cte \iff \overrightarrow{AB}.\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0$

2.3 Notion des Champs des Vitesses et des Accélérations

2.3.1 Introduction

En mécanique du point matériel (sans dimension), il est impossible de lui concevoir un mouvement de rotation propre. Par contre, pour la mécanique du solide, ce dernier peut effectuer une rotation sur lui-même, elle est définissable et mesurable. D'où l'intérêt de l'introduction de la notion des champs des vitesses et des accélérations afin de décrire et de modéliser les rotations de l'objet sur lui-même.

2.3.2 Champ des vitesses d'un solide

Pour un solide, on a : $\overrightarrow{AB}.\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0 \qquad \forall\ A, B \in (S)$

Donc $\overrightarrow{AB}.\left[\overrightarrow{v}(B/R_0) - \overrightarrow{v}(A/R_0)\right] = 0$ ou bien $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{v}(B/R_0) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{v}(A/R_0)$
On déduit que le champ des vitesses d'un solide est **équiprojectif** et par conséquent c'est un champ antisymétrique. Ainsi, $\exists!\ \overrightarrow{\Omega}$ tel que $\overrightarrow{v}(B/R_0) = \overrightarrow{v}(A/R_0) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$

Soit R un repère lié au solide. En utilisant la relation $\left.\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R} + \overrightarrow{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$
$\left(\left.\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R} = \overrightarrow{0}\ car\ \overrightarrow{AB}\ est\ fixe\ dans\ R\right)$, on voit que $\overrightarrow{\Omega}$ n'est autre que le vecteur rotation instantanée de R par rapport à R_0.

Le champ des vitesses d'un solide est donc un torseur, on l'appelle **torseur cinématique**. Ses éléments de réduction (ou **coordonnées**) au point A sont :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) : \ \textit{sa résultante} \\ \overrightarrow{v}(A/R_0) : \textit{son vecteur moment} \end{cases}$$

On le note $[\vartheta(A)] = \left[\overrightarrow{v}(A/R_0), \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)\right]$

2.3.3 Champ des accélérations d'un solide

Pour $A, B \in (S)$, on a: $\overrightarrow{v}(B/R_0) = \overrightarrow{v}(A/R_0) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$
En dérivant cette relation par rapport au temps, on obtient :

$$\overrightarrow{\gamma}(B/R_0) = \overrightarrow{\gamma}(A/R_0) + \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \left[\overrightarrow{v}(B/R_0) - \overrightarrow{v}(A/R_0)\right]$$

$$\overrightarrow{\gamma}(B/R_0) = \overrightarrow{\gamma}(A/R_0) + \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

Finalement

$$\overrightarrow{\gamma}(B/R_0) = \overrightarrow{\gamma}(A/R_0) + \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{\Omega}.\overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{\Omega} - \Omega^2.\overrightarrow{AB}$$

En général, le terme $\left(\overrightarrow{\Omega}.\overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{\Omega} - \Omega^2.\overrightarrow{AB}$ n'est pas nul. Par conséquent, le champ des accélérations d'un solide n'est pas un torseur.

2.4 Mouvements de translation - rotation - tangent

2.4.1 Mouvement de translation

Le solide (S) est animé d'un mouvement de translation par rapport à R_0 si $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0) = \overrightarrow{0}$, $\forall t$. Il en résulte que $\forall A, B \in (S)$, $\overrightarrow{v}(B/R_0) = \overrightarrow{v}(A/R_0)$

De plus, dans un mouvement de translation on a :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ $\forall\ t$ (le vecteur $\overrightarrow{AB}$ reste équipollent à lui même)

Dans ce cas $[\vartheta(A)] = \left[\overrightarrow{v}(A/R_0), \overrightarrow{0}\right]$: dans un mouvement de translation, le torseur cinématique est un **couple**.

2.4.2 Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Supposons que (S) est en mouvement de rotation autour d'un axe (Δ), fixe dans R_0 (de manière instantanée ou permanente).

Soit A un point appartenant à $(\Delta) \implies \overrightarrow{v}(A/R_0) = \overrightarrow{0}$ (on retiendra comme remarque le fait que tous les points fictifs ou géométriques appartenant à l'axe de rotation sont considérés comme des points du solide et peuvent être utilisés dans les relations de transfert).

Soit M un point appartenant à (S). Alors :
$\overrightarrow{v}(M/R_0) = \underbrace{\overrightarrow{v}(A/R_0)}_{=\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}$, avec $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \neq \overrightarrow{0}$ (sinon le solide serait au repos).
L'invariant scalaire $I = \overrightarrow{v}(M/R_0).\overrightarrow{\Omega}(S/R_0) = 0$
Dans un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ), le torseur cinématique est un **glisseur** $[\mathcal{G}]$.

Appelons (Δ') l'axe central du torseur cinématique et (Δ) l'axe de rotation du solide.

Proposition: Les axes (Δ) et (Δ') sont confondus.

Démonstration: $\forall\ A \in (\Delta)$, on a $\overrightarrow{v}(A/R_0) = \overrightarrow{0}$

$$\begin{aligned} &\implies \overrightarrow{v}(A/R_0) \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) = \overrightarrow{0} \\ &\implies A \in (\Delta') \\ &\implies (\Delta) \equiv (\Delta') \end{aligned}$$

Remarques:
Lorsqu'il s'agit d'une rotation de (S) autour d'un axe (Δ), on retient que :
- le torseur cinématique est un **glisseur**,
- l'axe de rotation du solide est **l'axe central du glisseur**,

- $[\mathcal{G}(A)] = \left[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)\right]$ si $A \in (\Delta)$,
– $[\mathcal{G}(B)] = \left[\overrightarrow{v}(B/R_0), \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)\right]$ si $B \notin (\Delta)$.

2.4.3 Mouvement hélicoïdal

Dans un mouvement hélicoïdal, tout point $M \in (S)$ tourne autour d'un axe (Δ) et, en même temps, se déplace suivant cet axe.
Soit A un point de (S) appartement à (Δ). On a :

$$\overrightarrow{v}(M/R_0) = \underbrace{\overrightarrow{v}(A/R_0)}_{translation} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}}_{rotation}$$

Schématisation - Interprétation
D'après la figure, le point P représente la projection de M sur le plan (π). Ainsi, on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OP}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v}(M/R_0) &= \overrightarrow{v}(H/R_0) + \overrightarrow{v}(P/R_0) \\
&= \overrightarrow{v}(H/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{OP} \\
&= \underbrace{\overrightarrow{v}(H/R_0)}_{translation\ le\ long\ de\ l'axe} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{HM}}_{rotation\ autour\ de\ l'axe}
\end{aligned}$$

L'invariant scalaire n'est pas nul dans un mouvement hélicoïdal.

2.4.4 Mouvement général d'un solide : Mouvement tangent

$\forall\ A, B \in (S)$, on a la relation de transfert suivante :

$$\overrightarrow{v}(B/R_0) = \overrightarrow{v}(A/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$$

• Si, à un instant t donné, $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0) = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v}(B/R_0) = \overrightarrow{v}(A/R_0)$ et on dira alors, qu'à cet instant, le mouvement du solide est tangent à une translation.
• Si, à un instant t donné $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \neq \overrightarrow{0}$, on dira alors, qu'à cet instant, le torseur cinématique admet un axe central (Δ).

Soit $H \in (\Delta)$, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v}(A/R_0) &= \overrightarrow{v}(H/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{HA} \\
&= \lambda\overrightarrow{\Omega}(S/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{HA}
\end{aligned}$$

•• Si $\overrightarrow{v}(H/R_0) = \overrightarrow{0}$, on dira que le mouvement du solide est tangent à une rotation d'axe (Δ).

•• Si $\overrightarrow{v}(H/R_0) \neq \overrightarrow{0}$, le mouvement du solide est dit tangent à un mouvement hélicoïdal ayant (Δ) comme axe instantané de rotation.

2.5 Composition des mouvements

Il s'agit de déterminer le mouvement du solide par rapport à un repère R_0, sachant que son mouvement est connu par rapport à un repère R_1.

Considérons : $R_0\left(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\right)$ un repère absolu (repère fixe);
$R_1\left(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\right)$ un repère mobile (repère relatif);
$R\left(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère lié au solide.

2.5.1 Dérivation vectorielle

Soient A et B deux points appartenant à ξ, fixes dans $R_1 \implies \overrightarrow{AB}$ est un vecteur constant dans R_1.

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{v}(B/R_0) - \vec{v}(A/R_0) = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Puisque, par définition, un repère d'espace est un ensemble de points dont les distances mutuelles sont invariables dans le temps, on appelle également ce repère un solide de référence.

Conséquences:

$$\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{i}_1\ , \quad \left.\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{j}_1 \quad \text{et} \quad \left.\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{k}_1$$

Considérons maintenant A, $B \in \xi$, mobiles dans $R_1 \implies \overrightarrow{AB} = \alpha(t)\vec{i}_1 + \beta(t)\vec{j}_1 + \gamma(t)\vec{k}_1$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_1} = \dot{\alpha}(t)\vec{i}_1 + \dot{\beta}(t)\vec{j}_1 + \dot{\gamma}(t)\vec{k}_1$$

On peut obtenir le vecteur dérivé de $\overrightarrow{AB} = \alpha(t)\vec{i}_1 + \beta(t)\vec{j}_1 + \gamma(t)\vec{k}_1$ dans R_0 en prenant en considération le fait que les vecteurs $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ varient dans ce repère.

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_1} + \alpha(t)\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{R_0} + \beta(t)\left.\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right|_{R_0} + \gamma(t)\left.\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right|_{R_0}$$

$$\boxed{\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}} : \textit{Ce résultat est général}$$

2.5.2 Composition des vitesses

Soit $M \in (S)$, on peut écrire $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$

$$\begin{aligned}
\vec{v}(M/R_0) &= \vec{v}(O_1/R_0) + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{v}(O_1/R_0) + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\
\vec{v}(M/R_0) &= \vec{v}(M/R_1) + \vec{v}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)
\end{aligned}$$

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}(M/R_0) : \text{ vitesse absolue du point } M$$

$$\vec{v}_r(M) = \vec{v}(M/R_1) : \text{ vitesse relative du point } M$$

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} : \text{ vitesse d'entraînement du point } M$$

Remarque:
La vitesse d'entraînement s'interprète comme étant la vitesse absolue d'un point M_e fixe dans R_1 et coïncidant avec M à l'instant t.

2.5.3 Composition des vecteurs rotations

On a :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} \tag{2.1}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R} + \vec{\Omega}(R/R_1) \wedge \overrightarrow{AB} \tag{2.2}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R} + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} \tag{2.3}$$

En éliminant $\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_1}$ entre les équations (1) et (2), on obtient:

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{R} + \left[\vec{\Omega}(R/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0)\right] \wedge \overrightarrow{AB} \tag{2.4}$$

En comparant (2) et (4), on déduit que :

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0)$$

On peut généraliser cette dernière relation à plusieurs repères :

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_3) + ... + \vec{\Omega}(R_{n-1}/R_n) + \vec{\Omega}(R_n/R_0)$$

2.5.4 Composition des accélérations

Considérons $M \in (S)$ et utilisons la loi de composition des vitesses :

$$\underbrace{\vec{v}(M/R_0)}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\vec{v}(M/R_1)}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\vec{v}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}}_{\vec{v}_e}$$

En dérivant cette expression par rapport à t dans R_0, on obtient :

$$\vec{\gamma}(M/R_0) = \left.\frac{d\vec{v}(M/R_1)}{dt}\right|_{R_0} + \vec{\gamma}(O_1/R_0) + \left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R_0)}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_0}$$

- $\left.\dfrac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{v}(M/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}$

- $\left.\dfrac{d\vec{v}(M/R_1)}{dt}\right|_{R_0} = \left.\dfrac{d\vec{v}(M/R_1)}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{v}(M/R_1) = \vec{\gamma}(M/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{v}(M/R_1)$

En définitive, on obtient :

$$\vec{\gamma}(M/R_0) = \vec{\gamma}(M/R_1) + 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{v}(M/R_1) + \vec{\gamma}(O_1/R_0) + \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$$

$$\vec{\gamma}(M/R_0) = \vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_c(M) + \vec{\gamma}_e(M)$$

$$\begin{cases} \vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M/R_1) & : \textit{accélération relative} \\ \vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{v}(M/R_1) & : \textit{accélération de Coriolis} \\ \vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1/R_0) + \left.\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) & : \textit{accélération d'entraînement} \end{cases}$$

2.6 Cinématique des solides en contact

Considérons deux solides (S_1) et (S_2) en mouvement par rapport à un référentiel $R_0\left(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\right)$ de manière à ce que leurs surfaces restent en contact ponctuel.

A chaque instant, on doit distinguer 3 points confondus dont les vitesses et les accélérations sont différentes en général :

- le point matériel I_1 $(I_1 \in S_1)$;
- le point matériel I_2 $(I_2 \in S_2)$;
- le point géométrique I (non lié).

Au cours du temps, le point I est confondu avec les différents points matériels de contact.

2.6.1 Vitesse de glissement

Le glissement décrit un mouvement relatif entre deux solides en contact.

Définition

On appelle vitesse de glissement de (S_1) sur (S_2), la vitesse de I_1 par rapport à (S_2)

Notation: $\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{v}(I_1/S_2) = \vec{v}(I_1/R_2)$ $\qquad$ $(I_1 \in S_1$ et R_2 lié à $S_2)$

Autres expressions de cette vitesse ?

Considérons R_0 absolu et R_2 relatif et cherchons $\vec{v}(I_1/R_0) = \vec{v}_r(I_1) + \vec{v}_e(I_1)$
Or : $\vec{v}_r(I_1) = \vec{v}(I_1/R_2) = \vec{v}_g(S_1/S_2)$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{v}_e(I_1) = \vec{v}(O_2/R_0) + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \overrightarrow{O_2I_1} = \vec{v}(I_2/R_0) \\ &\vec{v}(O_2/R_0) = \vec{v}(I_2/R_0) + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \overrightarrow{I_1O_2} \end{aligned}\right\} \implies \vec{v}_e(I_1) = \vec{v}(I_2/R_0)$$

En définitive:

$$\vec{v}(I_1/R_0) = \vec{v}(I_1/R_2) + \vec{v}(I_2/R_0) \implies \vec{v}(I_1/R_2) = \vec{v}(I_1/R_0) - \vec{v}(I_2/R_0) = \vec{v}_g(S_1/S_2)$$

De manière plus générale :

$$\boxed{\vec{v}_g(S_1/S_2) = \left.\frac{d\overrightarrow{I_2I_1}}{dt}\right|_R = \vec{v}(I_1/R) - \vec{v}(I_2/R)} \qquad (\forall \textit{ le repère } R)$$

C'est une vitesse indépendante du repère par rapport auquel (S_1) et (S_2) sont en mouvement, et elle est contenue dans le plan tangent (π) commun à (S_1) et (S_2)

Démonstration
La loi de composition des vitesses nous permet d'écrire :

$$\vec{v}(I/R_0) = \vec{v}(I/R_1) + \underbrace{\vec{v}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1I}}_{\vec{v}_e(I)=\vec{v}(I_1/R_0)}$$

$$\vec{v}(I/R_0) = \vec{v}(I/R_1) + \vec{v}(I_1/R_0) \qquad (R_1 \text{ relatif})$$

$$\vec{v}(I/R_0) = \vec{v}(I/R_2) + \vec{v}(I_2/R_0) \qquad (R_2 \text{ relatif})$$

Or :

$$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{v}(I_1/R_0) \qquad \vec{v}(I_2/R_0) = \underbrace{\vec{v}(I/R_2)}_{\in\pi} + \underbrace{\vec{v}(I/R_1)}_{\in\pi}$$

Cas particulier
Lorsque la vitesse de glissement est nulle, on dit qu'il y a absence de glissement.

$$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{v}(I_1/R_0) - \vec{v}(I_2/R_0) = \vec{0} \implies \vec{v}(I_1/R_0) = \vec{v}(I_2/R_0) \quad (\forall\ R_0)$$

Si l'on choisit R_1 ou R_2 comme repères de travail, on aura :

$$\vec{v}(I_1/R_1) = \vec{v}(I_2/R_1) = \vec{v}(I_1/R_2) = \vec{v}(I_2/R_2) = \vec{0}$$

2.6.2 Roulement et pivotement

Soit $M \in S_1$, la relation de transfert du torseur cinématique $\Longrightarrow$

$\overrightarrow{v}(M/S_2) = \overrightarrow{v}(I_1/S_2) + \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_2) \wedge \overrightarrow{I_1M}$

$\overrightarrow{v}(M/S_2) = \overrightarrow{v}_g(S_1/S_2) + \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_2) \wedge \overrightarrow{I_1M}$

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_2)$ peut être décomposé comme suit :

$\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_2) = \overrightarrow{\Omega}_t + \overrightarrow{\Omega}_n$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega}_t : \ \textit{composante de } \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_2) \textit{ contenu dans le plan } (\pi) \\ \\ \overrightarrow{\Omega}_n : \ \textit{composante de } \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_2) \textit{ normale au plan } (\pi) \end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega}_t$ exprime une rotation instantanée autour d'un axe du plan tangent; il caractérise **le roulement** de $(S_1)/(S_2)$

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega}_n$ exprime une rotation instantanée autour d'un axe $\perp$ au plan tangent; il caractérise **le pivotement** de $(S_1)/(S_2)$.

Ainsi, $\overrightarrow{\Omega}_t/(\overrightarrow{\Omega}_n)$ est la vitesse angulaire de roulement/(pivotement).
Finalement :

$$\overrightarrow{v}(M/S_2) = \underbrace{\overrightarrow{v}_g(S_1/S_2)}_{\textit{vitesse de glissement}} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega}_t \wedge \overrightarrow{I_1M}}_{\textit{vitesse de roulement}} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega}_n \wedge \overrightarrow{I_1M}}_{\textit{vitesse de pivotement}}$$

Remarque
Lorsque la vitesse de glissement est nulle, on dit qu'il y a roulement et pivotement.

2.7 Mouvement plan d'un solide

2.7.1 Définition

On appelle mouvement plan d'un solide (S), un mouvement tel que chaque point de (S) se déplace dans un plan parallèle à un plan fixe (π_0) dans le référentiel considéré R_0.
Exemple:
- Cas d'un disque vertical évoluant sur un axe.

Les vecteurs de base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ restent constamment dans le plan x_0Oy_0

Considérons deux points M et M' de (S) évoluant dans un même plan (π) parallèle à (π_0).

$$\underbrace{\overrightarrow{v}(M'/R_0)}_{\in\pi} = \underbrace{\overrightarrow{v}(M/R_0)}_{\in\pi} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{MM'}}_{\in\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \perp (\pi)$$

L'invariant scalaire $I = \overrightarrow{v}(M/R_0).\overrightarrow{\Omega}(S/R_0) = 0$ et le torseur cinématique est un **glisseur** dans ce cas.

$$\overrightarrow{v}(M/R_0) = \underbrace{\overrightarrow{v}(I/R_0)}_{=\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{IM} \qquad (I \text{ point commun à } (\pi) \text{ et } (\Delta))$$

$$\vec{v}(M'/R_0) = \underbrace{\vec{v}(I/R_0)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{IM'}$$

Le mouvement plan peut s'interpréter comme étant une rotation (instantanée) pure autour de l'axe $(\Delta) \perp$ à (π) en I avec I appartenant à l'axe central (Δ) du glisseur (l'axe (Δ) peut changer avec le temps).

2.7.2 Centre instantané de rotation (C.I.R.)

L'axe instantané de rotation est un terme utilisé en mécanique classique et plus particulièrement en cinématique pour désigner l'axe autour duquel tourne un solide à un instant donné par rapport à un référentiel. Si l'on peut utiliser la simplification des problèmes plans, on parle alors du centre instantané de rotation (CIR).

C'est un point lié à (S) par nature et admettant une vitesse nulle dans R_0 à l'instant considéré. Le point $I \in (\pi) \bigcap (\Delta)$ est le centre instantané de rotation.

Preuve
$\vec{v}(I/S) = \vec{0}$ car I est lié à S
$\vec{v}(I/R_0) = \vec{0}$ car $I \in (\Delta)$, axe fixe dans R_0
Exemple
Cas d'une roue en rotation autour d'un axe fixe $\perp$ au plan de la roue et passant par son centre de masse G. Le point G est de nature lié à (S) et $\vec{v}(G/R_0) = \vec{0} \implies G \equiv$ C.I.R.

Remarques:

- I est donc un point central du torseur cinématique de S par rapport à R_0. Le C.I.R correspond donc à l'intersection de l'axe central du torseur cinématique de S/R avec le plan d'évolution du solide S.

- Le CIR est ??instantané", c'est à dire que, dans le cas général, sa position est attachée à un instant donné et à une position particulière du mécanisme.

- Le CIR peut être un point défini en dehors de la limite matérielle du solide S.

2.7.3 Base et roulante - Étude analytique

Par définition, **la base** est le lieu des C.I.R. dans R_0 lorsque t varie et **la roulante** est le lieu des C.I.R. dans R (lié à S) lorsque t varie.

Soit $M \in (S)$

$$M \begin{cases} x \\ \\ y \end{cases} \text{dans } R \ (x \text{ et } y \text{ sont des constantes})$$

$$M \begin{cases} x_0 \\ \\ y_0 \end{cases} \text{dans } R_0 \qquad O_1 \in (S)$$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = x_0\,\overrightarrow{i}_0 + y_0\,\overrightarrow{j}_0 = \alpha\,\overrightarrow{i}_0 + \beta\,\overrightarrow{j}_0 + x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{i} = \cos\theta\,\overrightarrow{i}_0 + \sin\theta\,\overrightarrow{j}_0 \\ \\ \overrightarrow{j} = -\sin\theta\,\overrightarrow{i}_0 + \cos\theta\,\overrightarrow{j}_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = \alpha + x\cos\theta - y\sin\theta \\ \\ y_0 = \beta + x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_0}{dt} = \dfrac{d\alpha}{dt} - (x\sin\theta + y\cos\theta)\,\dot\theta \\ \\ \dfrac{dy_0}{dt} = \dfrac{d\beta}{dt} + (x\cos\theta - y\sin\theta)\,\dot\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) = \dot\theta\,\overrightarrow{k}_0$$

On retrouve : $\overrightarrow{v}(M/R_0) = \overrightarrow{v}(O_1/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{v}_e(M)$

Le C.I.R. est tel que $\overrightarrow{v}(I/R_0) = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v}(I/R) = \overrightarrow{0}$

Considérons I qui présente ces caractéristiques au lieu de M.

Dans le repère R_0 :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_0}{dt} = \dfrac{d\alpha}{dt} - (x\sin\theta + y\cos\theta)\,\dot\theta = 0 \\ \\ \dfrac{dy_0}{dt} = \dfrac{d\beta}{dt} + (x\cos\theta - y\sin\theta)\,\dot\theta = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \frac{d\theta}{dt} \neq 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} - (x\sin\theta + y\cos\theta)\,\dot\theta = 0 \\ \\ \dfrac{d\beta}{dt} + (x\cos\theta - y\sin\theta)\,\dot\theta = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = x(\theta) \\ \\ y = y(\theta) \end{cases}$$

Ce sont les équations paramétriques de la **roulante**.

Équations paramétriques de la base :

Compte tenu des équations (1) et (2), on a :

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \alpha - \frac{d\beta}{d\theta} \\ \\ y_0 &= \beta + \frac{d\alpha}{d\theta} \end{aligned}\right\} : \text{ Ce sont les équations paramétriques de } \textbf{la base}.$$

Remarque: Ces équations sont utiles quand la détermination graphique du C.I.R. n'est pas évidente.
Exemple
Cas d'une barre glissant sur les axes de R_0.
La base ?
$OI = AB = cte \implies$ la base est le cercle de centre O et de rayon AB.
La roulante ?

$GI = AB/2 = cte \implies$ la roulante est le cercle de centre G et de rayon $AB/2$.

Méthode analytique

D'après la figure, on a : $\phi + \theta = \pi/2 \implies \theta = \pi/2 - \phi$

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} \alpha = \dfrac{l}{2}\cos\phi = \dfrac{l}{2}\sin\theta \\ \\ \beta = \dfrac{l}{2}\sin\phi = \dfrac{l}{2}\cos\theta \end{cases} \qquad \text{Composantes de } G \text{ dans } R_0 \text{ de base } (\overrightarrow{i}_0, \overrightarrow{j}_0)$$

Équation paramétrique de **la roulante**

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha}{d\theta} - (x\sin\theta + y\cos\theta) = \dfrac{l}{2}\cos\theta - (x\sin\theta + y\cos\theta) = 0 \\ \\ \dfrac{d\beta}{d\theta} + (x\cos\theta - y\sin\theta) = -\dfrac{l}{2}\sin\theta + (x\cos\theta - y\sin\theta) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x\sin\theta + y\cos\theta = \dfrac{l}{2}\cos\theta \\ \\ x\cos\theta - y\sin\theta = \dfrac{l}{2}\sin\theta \end{cases}$$

$\implies \quad x^2 + y^2 = \dfrac{l^2}{4}$: équation d'un cercle de centre G et de rayon $r = l/2$.

Équation paramétrique de **la base**

$$\begin{cases} x_0 = \alpha - \dfrac{d\beta}{d\theta} = \dfrac{l}{2}\sin\theta + \dfrac{l}{2}\sin\theta = l\sin\theta \\ \\ y_0 = \beta + \dfrac{d\alpha}{d\theta} = \dfrac{l}{2}\cos\theta + \dfrac{l}{2}\cos\theta = l\cos\theta \end{cases}$$

$\implies \quad x_0^2 + y_0^2 = l^2$: équation d'un cercle de centre O et de rayon $r = l$.

Autre exemple

Détermination graphique de la position du CIR, I, dans le cas d'un disque se déplaçant dans un plan vertical.

Pour les 3 cas de figures, si on utilise li CIR, I, dans les relations de transfert, on obtient :

$\overrightarrow{v}(M/R_0) = \overrightarrow{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{IM} \implies \|\overrightarrow{v}(M/R_0)\|$ est proportionnel à IM i.e $\|\overrightarrow{v}(M/R_0)\| = IM\left\|\overrightarrow{\Omega}\right\|$.