iP Net Institute of Technology — Next Generation IT Professionals

Année académique: 2017-2018

TD sur les *Matrices*

1. Ecrire les matrices des applications linéaires dans les bases canoniques:
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x)$.
   (b) $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z, t) \mapsto (x + y + 2z - t, x - y - z + 2t)$.
   (c) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto [(m + 2)x - y + z, -x + (m + 2)y + z, x - y + (m + 2)z]$.

2. Calculer les inverses des matrices suivnates:
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'endomorphisme u dont la matrice M par rapport à $\mathcal{B}$ est: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Calculer M^2 et vérifier que $M^3 = 0$ puis calculer $(I - M)(I + M + M^2)$. En déduire que $I - M$ est inversible et préciser son inverse. Quelle est la dimension du noyau de u?

   Quel est le rang de u?

4. Soit $E = \left\{ M_{abc} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

   Trouver trois matrices I, J et K telles que $M_{abc} = aI + bJ + cK$. Calculer $\dot{J}K$ et J^{-1}. On considère les éléments $H = M_{111}$ et $L = M_{011}$. Calculer L^2 et H^3.

5. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Indiquer le rang de cette matrice
   (a) 1
   (b) 2
   (c) 4
   (d) 8

6. Soient $E = \mathbb{R}^2$ muni sa base canonique $\mathcal{B}$ et f un endomorphisme de E. Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.
   (a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.
   (b) La matrice de f par rapport à $\mathcal{B}$ donnée par $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ permet d'affirmer que f est un isomorphisme.
   (c) Le vecteur $v = (-1, 1, -1)$ est dans le noyau de f.
   (d) Le vecteur $v = (-1, 1, -1)$ est dans l'image de f.

7. Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On définit les vecteurs $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 - e_3$ et $v_3 = e_2 + e_3$ et f l'endomorphisme de E tel que: $f(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3$, $f(e_2) = -e_1 + e_2 - 3e_3$ et $f(e_3) = e_1 - e_3$. Dans les questions suivantes indiquer les propositions vraies ou fausses.

Q_1) La matrice de f par rapport à $\mathcal{B}$ est:

$A : \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B : \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 10 & \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad D : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Q_2) L'image par f de v_1 a pour coordonnées:

$A : {}^t(2, -2, -3)$ $\quad B : {}^t(2, -3, -2)$ $\quad C : {}^t(0, -3, 0)$

Q_3) La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\{v_1, v_2, v_3\}$ est :

$A : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad C : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad D : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

8. Quelles sont les définitions correctes?

   A : Une matrice est dite carrée si chacun de ses coefficients est un carré.

   B: La matrice inverse de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est définie si chacun des a_{ij} est non nul; c'est la matrice $\left(\dfrac{1}{a_{ij}}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

9. Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que vaut M^{2017}?

   $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$