L'essentiel du Cours du Mécanique du Solide

1 Rappels de cinématique

1.1 Référentiel, repère et système

Qu'est-ce qu'un *référentiel* ? Équivaut à se poser la question : par rapport à quoi *observe*-t-on le mouvement ? Lorsque le référentiel change, la vitesse apparente change. Un référentiel peut être inertiel ou non inertiel. Cela dépend en général de l'échelle de temps sur laquelle on observe le mouvement.

Qu'est-ce qu'un *repère* ? (ou une base). Équivaut à se poser la question : dans quel système de coordonnées *décrit*-on le mouvement ? Lorsque le repère change, la vitesse ne change pas, seule son expression mathématique est différente.

Qu'est-ce qu'un *système* ? Équivaut à se poser la question : qu'est-ce qui est en mouvement ?

1.2 Position, vitesse et accélération

Soit O un point fixe dans le repère $\mathcal{R}$.

Position : $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. *Vitesse* : $\vec{v}(M)_\mathcal{R} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathcal{R}$. *Accélération* : $\vec{a}(M)_\mathcal{R} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(M)_\mathcal{R}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathcal{R} = \left(\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_\mathcal{R}$.

1.3 Composition de mouvements

Soit $\mathcal{R}$ un repère fixe (ou absolu, indice "a"), et $\mathcal{R}'$ un repère mobile (ou relatif, indice "r"), en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$. Soient O et O' les origines des repères associés à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, respectivement. On suppose connus le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ (qui se décompose en une translation et une rotation), et le mouvement de M par rapport à $\mathcal{R}'$. Le mouvement de M par rapport à $\mathcal{R}$ est donné par :

$$\vec{v}(M)_\mathcal{R} = \vec{v}_a(M) = \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{v}(O')_\mathcal{R} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{v}_r(M) + \underbrace{\vec{v}_a(O') + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\vec{v}_e(M)\,=\,\text{vitesse d'entraînement}}$$

Attention : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ et $\overrightarrow{O'M}$ doivent être exprimés dans la même base.

1.4 Dérivation dans un repère mobile

Dans l'expression ci-dessus, en remarquant que : $\vec{v}(M)_\mathcal{R} - \vec{v}_a(O') = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathcal{R}$ et que : $\vec{v}_r(M) = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'}$, et en identifiant $\overrightarrow{O'M} \equiv \vec{A}$, on obtient : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathcal{R} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{A}$.

On en déduit l'expression de l'accélération absolue (i.e. dans $\mathcal{R}$) de M mobile dans le repère mobile $\mathcal{R}'$:

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \underbrace{\vec{a}_a(O') + \frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})}_{\vec{a}_e(M)\,=\,\text{accélération d'entraînement}} + \underbrace{2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r(M)}_{\vec{a}_c(M)\,=\,\text{accélération de Coriolis}}$$

2 Forces et mouvement

2.1 Lois de Newton

— *1ère loi de Newton* : en l'absence de forces, une particule se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ constante.

— *2ème loi de Newton*, ou *Principe Fondamental de la Dynamique* (PFD) : dans un référentiel $\mathcal{R}$ *inertiel* (ou "galiléen") : si des forces agissent sur une particule de masse m, la résultante $\Sigma\overrightarrow{F^{ext}}$ de ces forces est toujours égale à : $\Sigma\overrightarrow{F^{ext}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}(M)_\mathcal{R}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathcal{R}$, où $\vec{p}(M)_\mathcal{R} = m\vec{v}(M)_\mathcal{R}$ est la quantité de mouvement de la particule. Si sa masse est constante, $\Sigma\overrightarrow{F^{ext}} = m\vec{a}(M)_\mathcal{R}$.

— *3ème loi de Newton*, ou *principe de l'action-réaction* : si un corps 1 exerce une force $\vec{F}_{1\to2}$ sur le corps 2, alors le corps 2 exerce une force de réaction $\vec{F}_{2\to1}$ sur le corps 1, donnée par : $\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$.

2.2 Quelques exemples de forces

- *Forces à distance* : gravité $\vec{P} = m\vec{g}$; attraction gravitationnelle $\vec{F}_g = -\mathcal{G}\frac{mm'}{r^2}\vec{u}_r$; interaction coulombienne $\vec{F}_e = q\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{qq'}{r^2}\vec{u}_r$; force magnétique $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$; force de Lorentz : $\vec{F}_{em} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$.
- *Forces de contact* : tension d'un fil ; réaction d'un support ; loi de Coulomb pour le frottement solide.
- *Forces de frottement fluide* : traînée $\vec{F}_x$ + portance $\vec{F}_z$; $\vec{F}_x = -k(v).\vec{v}_x$ pour les corps symétriques par rapport à (Ox). Aux faibles vitesses : $F_x = -hv_x$. Aux vitesses plus élevées : $F_x = -1/2C\rho S v_x^2$.
- *Force exercée par un fluide* : pression (force de surface) : $\mathrm{d}\vec{f} = p\ \mathrm{d}S\ \vec{n}$; poussée d'Archimède (force de volume) : $\vec{P}_A = -\rho_{fluide}\ V\ \vec{g}$; viscosité (force cisaillante, fluide newtonien) : $\tau = F/S = \eta\,(\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)$.
- *Élasticité* : ressort : $\vec{F} = -k\ (l - l_o)\ \vec{i}$; loi de Hooke : $\sigma = F/S = E\epsilon$.
- *Force centrale* : toujours dirigée vers un même point, le "centre de force" (ou dans la direction opposée).

2.3 Référentiels non inertiels

Si le référentiel n'est pas inertiel, $\Sigma\overrightarrow{F^{ext}}$ dans le PFD contient les forces d'inertie (ou "pseudo-forces"). Puisque dans un référentiel non inertiel $\mathcal{R}'$ l'accélération s'écrit : $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(M) - \vec{a}_e(M) - \vec{a}_c(M)$ (Section 1.4), le PFD dans $\mathcal{R}'$ s'écrit : $m\ \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) = \sum \overrightarrow{F^{ext}} - m\ \vec{a}_e(M) - m\ \vec{a}_c(M) = \sum \overrightarrow{F^{ext}} + \underbrace{\vec{f}_{ie}(M)}_{\text{force d'inertie d'entraînement}} + \underbrace{\vec{f}_{ic}(M)}_{\text{force d'inertie de Coriolis}}$.

3 Moment cinétique

3.1 Moment cinétique

Moment cinétique d'une particule M par rapport à un point A dans le référentiel $\mathcal{R}$: $\vec{\sigma}_A(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}(M)_{\mathcal{R}}$.
Si le mouvement est plan, $\vec{\sigma}_A(M)_{\mathcal{R}}$ reste colinéaire au vecteur normal au plan dans lequel s'effectue le mouvement.
Moment cinétique par rapport à un axe (Δ) (point O sur l'axe, $\vec{u}_\Delta$ vecteur directeur) : $\sigma_\Delta(M) = \vec{\sigma}_O(M)_{\mathcal{R}}.\vec{u}_\Delta$.

3.2 Moment d'une force

Moment d'une force appliquée en M par rapport à un point A : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F}(M)) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}(M)$.
Avec $\theta = (\overrightarrow{AM}, \vec{F}(M))$: $||\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F})|| = ||\overrightarrow{AM}||.||\vec{F}||.\sin\theta = \underbrace{||\overrightarrow{AH}||}_{\text{bras de levier}}\ .\ ||\vec{F}|| = ||\overrightarrow{AM}||\ .\ \underbrace{||\vec{F}_\theta||}_{\text{composante utile}}$.
Moment d'une force par rapport à un axe (Δ) (point O sur l'axe, $\vec{u}_\Delta$ vecteur directeur) : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}).\vec{u}_\Delta$.

3.3 Théorème du moment cinétique

En dérivant $\vec{\sigma}_A(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}(M)_{\mathcal{R}}$, on a : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_A(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} - \vec{v}(A)_{\mathcal{R}}} \wedge\ \vec{p}(M)_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{AM} \wedge \underbrace{\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}}_{\Sigma\overrightarrow{F^{ext}}\ \text{(PFD)}}$.

Théorème du moment cinétique (TMC) : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\Sigma\overrightarrow{F^{ext}}) = \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_A(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{v}(A)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{p}(M)_{\mathcal{R}}$.

En général, on s'arrange pour choisir A fixe (par exemple A = origine O) : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\Sigma\overrightarrow{F^{ext}}) = \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$.

TMC par rapport à un axe : $\mathcal{M}_\Delta(\Sigma\overrightarrow{F^{ext}}) = \left(\dfrac{\mathrm{d}\sigma_\Delta(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$ (équation scalaire).

Si M n'est soumis qu'à des forces centrales, $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\Sigma\overrightarrow{F^{ext}}) = \vec{0}\ \Rightarrow\ \vec{\sigma}_O(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\text{cste}} \Rightarrow$ mouvement plan.
Si M n'est soumis à aucune force (système isolé), $\Sigma\overrightarrow{F^{ext}} = \vec{0}\ \Rightarrow\ \vec{\sigma}_O(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\text{cste}} \Rightarrow$ mouvement plan (et rectiligne).
Dans un référentiel non inertiel $\mathcal{R}'$, les forces d'inertie doivent être prises en compte dans la résultante des forces.
Le TMC s'écrit alors : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\Sigma\overrightarrow{F^{ext}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{ie}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{ic}) = \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O(M)_{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'}$.

3.4 Inertie

On peut définir l'*inertie* comme *la résistance au changement*, ou encore *la résistance à l'accélération*.
D'après le PFD, pour un système en translation rectiligne verticale (exemple : chute libre), $\Sigma\overrightarrow{F^{ext}} = m\,\ddot{z}\,\vec{u}_z$. Dans ce cas, l'inertie est représentée par la masse $\{m\}$ du système, et l'accélération par un terme "longitudinal" $\{\ddot{z}\}$.
Pour la rotation, l'équivalent du PFD est le TMC. Dans le cas d'une rotation pure (i.e. autour d'un axe *fixe*) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, si l'on se place par rapport à un point O appartenant à l'axe de rotation ($\Rightarrow r$ = cste), le moment cinétique est donné par $\vec{\sigma}_O = mr^2\ \dot{\theta}\ \vec{k}$, donc le moment de la résultante des forces par rapport à O est : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\Sigma\overrightarrow{F^{ext}}) = mr^2\ \ddot{\theta}\ \vec{k}$.
C'est le terme $\{mr^2\}$ qui joue ici le rôle d'inertie, tandis que l'accélération est "angulaire" $\{\ddot{\theta}\}$.

4 Énergie

4.1 Énergie cinétique et travail

On définit l'*énergie cinétique* d'une particule de masse m à la vitesse $\vec{v}$ comme : $E_C = \dfrac{1}{2}mv^2$.
Le *travail d'une force* $\vec{f}$ au cours d'un petit déplacement $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$ est donné par : $\delta W(\vec{f}, M) = \vec{f}.\overrightarrow{\mathrm{d}M}$.
Sous sa forme intégrale, le travail de $\vec{f}$ le long de la trajectoire $(\mathcal{C})$ allant de A à B : $W_{A\to B}(\vec{f})_{\mathcal{C}} = \int_{M=A}^{M=B} \vec{f}.\overrightarrow{\mathrm{d}M}$.
Théorème de l'Énergie Cinétique (TEC) : en considérant la puissance des forces extérieures : $\mathcal{P}\left(\Sigma\overrightarrow{F^{ext}}\right) = \Sigma\overrightarrow{F^{ext}}.\vec{v}$, en utilisant le PFD puis en intégrant par rapport à t, on aboutit à : $\delta W = \mathrm{d}E_C$. Forme intégrale : $W_{A\to B}(\vec{f})_{\mathcal{C}} = \int_A^B \delta W = \int_A^B \mathrm{d}E_C = E_C(B) - E_C(A) = \Delta E_C$.
Attention : on n'a pas le droit d'écrire : $\cancel{\int_A^B \delta W = W(B) - W(A)}$ car la "fonction" W *n'existe pas en général* (de même qu'en thermodynamique on écrit δQ et pas $\cancel{\mathrm{d}Q}$ car Q n'est pas une variable d'état). On écrira plutôt : $\int_A^B \delta W = W_{A\to B}$, qui dépend du chemin emprunté pour aller de A à B (et pas uniquement des positions de A et de B).

4.2 Énergie potentielle et forces conservatives

Une *force conservative* est une force $\vec{F}$ qui dérive d'un *potentiel*, c'est à dire qu'il existe un champ scalaire U tel que, en tout point M : $\vec{F}(M) = -\overrightarrow{grad}\,U(M)$.
Dans ce cas, comme U ne dépend que de la position dans l'espace, on peut écrire : $\mathrm{d}U = \overrightarrow{grad}\,U(M).\,\overrightarrow{\mathrm{d}M}$.
Le travail d'une force conservative est donc :

$$W_{A\to B}(\vec{F})_{\mathcal{C}} = \int_A^B \delta W(\vec{F}, M) = \int_A^B \vec{F}(M).\overrightarrow{\mathrm{d}M} = -\int_A^B \overrightarrow{grad}\,U(M).\overrightarrow{\mathrm{d}M} = -\int_A^B \mathrm{d}U = U(A) - U(B)$$

La fonction U est donc une énergie : c'est l'*énergie potentielle* E_P, définie à une constante près.
On aboutit donc à : $W_{A\to B}(\vec{F}_{cons}) = E_P(A) - E_P(B)$, ou, sous une forme différentielle : $\delta W_{cons} = -\mathrm{d}E_P$.
Deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour qu'une force $\vec{F}$ soit conservative :

a. $\vec{F}$ ne dépend que de la position de M, et non du temps, de la vitesse ou de toute autre grandeur variable.
b. le travail de $\vec{F}$ entre deux points ne dépend pas du chemin suivi.

Conséquence : le travail d'une force conservative le long d'un contour fermé est nul.
Exemples : pesanteur : $E_{P\,pes}(z) = mgz$; interaction coulombienne : $E_{P\,elec}(r) = K/r$; force de rappel d'un ressort : $E_{P\,elas}(x) = \frac{1}{2}kx^2$.
On peut décomposer le travail de l'ensemble des forces entre celui des forces conservatives δW_{cons} et celui des forces non conservatives δW_{nc}. On a donc : $\delta W_{cons} + \delta W_{nc} = -\mathrm{d}E_P + \delta W_{nc} = \mathrm{d}E_C$. On en déduit le *Théorème de l'Énergie Mécanique* (E_M) : $\delta W_{nc} = \mathrm{d}E_C + \mathrm{d}E_P = \mathrm{d}E_M$. Forme intégrale : $W_{nc} = \Delta E_M$.
Conséquence : pour un système soumis uniquement à des forces conservatives et à des forces ne travaillant pas, l'énergie mécanique est conservée : $E_M = E_C + E_P = \text{cste}$.

4.3 Équilibres, états liés ou non liés

D'après le PFD, la condition d'équilibre est assurée si $\Sigma\overrightarrow{F^{ext}} = \vec{0}$ et si $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$ (car alors $\vec{v} = \overrightarrow{\text{cste}} = \vec{0}$). Pour une particule soumise seulement à une force conservative, la condition d'équilibre dans la direction (Ox) est donc : $F_x = -\dfrac{\partial E_P}{\partial x} = 0$, ce qui correspond aux extrémas de l'énergie potentielle.
Parmis ces points, ceux où E_P est $\left|\begin{array}{l}\text{maximale : } \frac{\partial^2 E_P}{\partial x^2} < 0 \\ \text{minimale : } \frac{\partial^2 E_P}{\partial x^2} > 0\end{array}\right|$, correspondent à des positions d'équilibre $\left|\begin{array}{c}\text{instable} \\ \text{stable}\end{array}\right|$.
Tracer le graphe de E_P en fonction de x peut aider à visualiser ces points d'équilibre et à discuter de leur stabilité.
Toujours pour une particule au mouvement unidimensionnel soumise uniquement à une force conservative dérivant de E_P, le TEM donne : $E_M = E_C + E_P = cste = E$. Puisque $E_C \geq 0$, on obtient donc $E_P \leq E \Rightarrow$ l'énergie potentielle de la particule est majorée. Suivant la forme de la fonction $E_P(x)$ et la valeur de E, la particule pourra être piégée (ou pas) dans certaines régions de l'espace. Si la particule est piégée dans un puits de potentiel, x restera bornée et on parle alors d'un état lié. Si la particule peut évoluer jusqu'à $x = \pm\infty$, on parle d'un état non lié. L'énergie potentielle peut donc être un outil puissant pour étudier le mouvement sans passer par le PFD.

5 Rotation d'un solide indéformable autour d'un axe fixe

5.1 De la particule au solide indéformable

Un système de plusieurs particules possède un *centre de masse* (CM) G tel que :

$$\sum_i m_i\overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \iff \forall A,\ M.\overrightarrow{AG} = \sum_i m_i\overrightarrow{AM_i} \iff \overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\overrightarrow{OM_i} \quad (\text{avec } M = \sum_i m_i)$$

Pour un solide, on remplace simplement les sommes par des intégrales, et les masses m_i par $\mathrm{d}m_i = \rho_i \mathrm{d}\tau_i$.
Pour un corps *homogène*, on a $\rho_i = \text{cste} = \rho$.
Pour un corps *indéformable* (ou rigide), de masse M constante, le mouvement peut être décomposé en deux parties :

— (a) mouvement (rotation et translation) du CM, comme si toute la masse y était concentrée ($\equiv$ point matériel),

— (b) mouvement de rotation propre du corps autour de son CM.

$$\text{Soit : } \begin{cases} (1) \quad \vec{P} &= \overbrace{\vec{P}\text{ (de M au CM)}}^{\text{(a) mvt du CM}} \\ (2) \quad \vec{\sigma}_O &= \underbrace{\vec{\sigma}_O\text{ (de M au CM)}}_{\text{(a) mvt du CM / à O}} + \underbrace{\vec{\sigma}_G\text{ (du corps)}}_{\text{(b) mvt propre / au CM}} = \underbrace{\overrightarrow{OG}\wedge M\vec{v}(G) + \vec{\sigma}_G}_{\textit{Théorème de Koenig}} \end{cases}$$

En dérivant (1) et (2) par rapport à t, le PFD et le TMC se traduisent donc respectivement par :

$$\begin{cases} (1) \quad \dot{\vec{P}} &= \Sigma\overrightarrow{F^{ext}} \\ (2) \quad \dot{\vec{\sigma}}_O &= \overrightarrow{OG}\wedge\Sigma\overrightarrow{F^{ext}} + \Sigma\overrightarrow{\mathcal{M}_G^{ext}} \end{cases} \quad \text{avec : } \begin{cases} \Sigma\overrightarrow{F^{ext}} &= \sum_i\left[\sum_{ext}\overrightarrow{F^{ext\to i}}\right] \\ \Sigma\overrightarrow{\mathcal{M}_G^{ext}} &= \sum_i\left[\overrightarrow{\mathcal{M}_G}\left(\sum_{ext}\overrightarrow{F^{ext\to i}}\right)\right] \end{cases} \quad \text{“}i\text{” = partie du système}$$

Avec $O = G$, le TMC se simplifie en : $\dot{\vec{\sigma}}_G = \Sigma\overrightarrow{\mathcal{M}_G^{ext}}$.
De même, l'énergie cinétique se décompose en une énergie cinétique de translation du CM et une énergie cinétique de rotation propre autour du CM.

Attention :

— $\Sigma\overrightarrow{F^{ext}}$ est la *résultante des forces*, c'est à dire la somme vectorielle de toutes les forces, quel que soit leur point d'application sur (ou dans) le solide.

— $\Sigma\overrightarrow{\mathcal{M}^{ext}}$ est la *résultante des moments*, c'est à dire la somme vectorielle de tous les moments des forces (et pas le moment de la somme des forces, qui correspondrait au *moment de la résultante des forces* $\overrightarrow{OG}\wedge\Sigma\overrightarrow{F^{ext}}$, premier terme de droite dans l'expression de $\dot{\vec{\sigma}}$ ci-dessus). Autrement dit : chaque partie “i” du système est soumise à un ensemble de forces ($\overrightarrow{F^{ext\to i}}$). Pour chaque i, on calcule la résultante de ces forces ($\sum_{ext}\overrightarrow{F^{ext\to i}}$), puis le moment associé ($\overrightarrow{\mathcal{M}_G}\left(\sum_{ext}\overrightarrow{F^{ext\to i}}\right)$). La résultante des moments est la somme vectorielle de ces moments “individuels”. Le point d'application de chaque force doit donc absolument être pris en compte.

5.2 Rotation autour d'un axe fixe

Le moment cinétique par rapport à l'axe de rotation instantané (Δ) est : $\sigma_\Delta = \int_V d\sigma_{i\Delta} = (\int_V r_i^2\,\mathrm{d}m_i).\omega$,
où r_i est la distance à l'axe (Δ) et ω est la vitesse de rotation du solide autour de (Δ).
On reconnaît le *moment d'inertie par rapport à* (Δ) : $J_\Delta = \int_V r_i^2\,\mathrm{d}m_i$.
On en déduit le *moment cinétique par rapport à* (Δ) : $\sigma_\Delta = J_\Delta\omega$.
D'où on dérive le *Théorème du Moment Cinétique* : $\left(\frac{\mathrm{d}\sigma_\Delta}{\mathrm{d}t}\right) = J_\Delta\dot{\omega} = J_\Delta\ddot{\theta} = \Sigma\mathcal{M}_\Delta^{ext}$.
Puis l'*Énergie Cinétique de rotation autour de* (Δ) : $E_C = 1/2\ J_\Delta\omega^2$.
Et enfin le *Théorème de la Puissance Cinétique* : $\frac{\mathrm{d}E_C}{\mathrm{d}t} = \omega.\Sigma\mathcal{M}_\Delta^{ext}$.

Attention :

— le moment d'inertie est une quantité positive.

— si on change la configuration de l'axe de rotation (Δ), alors les r_i changeront et J_Δ changera.

— la relation $\sigma_\Delta = J_\Delta\omega$ est vraie uniquement en *scalaire* car on s'intéresse ici uniquement à la composante du moment cinétique qui est parallèle à l'axe de rotation. Elle n'est pas vraie a priori pour le *vecteur* moment cinétique $\vec{\sigma}$, car celui-ci a en général d'autres composantes qui le rendent non colinéaire à l'axe de rotation. Pour connaître ces composantes, il faut d'abord calculer la *matrice d'inertie* du solide $\mathbf{J}$ (ou *tenseur d'inertie*), qui est une matrice 3×3, puis appliquer la relation matricielle $\vec{\sigma} = \mathbf{J}.\vec{\omega}$. Si le solide présente des symétries matérielles, la matrice $\mathbf{J}$ peut être diagonale lorsqu'elle est exprimée dans une base adaptée aux axes principaux d'inertie Δ_i. Dans ce cas, la rotation autour d'un de ces axes induit bien un vecteur moment cinétique parallèle à l'axe de rotation, et la relation scalaire $\sigma_{\Delta_i} = J_{\Delta_i}\omega_i$ s'applique indépendamment selon chacun de ces axes Δ_i.

5.3 Calcul du moment d'inertie par rapport à un axe

Théorème de Huygens : $J_\Delta = J_G + Ma^2$, où J_G est le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à (Δ) et passant par le centre de masse G, et a est la distance entre ces deux axes.
Conséquence : le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par G est minimal.

Pour des solides homogènes de forme simple et de masse M :

Solide	Axe	Moment d'inertie
Parallèlépipède rectangle de côtés a, b et c	Perpendiculaire à une face de côtés a et b, passant par G	$J_{\Delta z} = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$
Cylindre de révolution de hauteur H et de rayon a à la base	Confondu avec l'axe, passant par G	$J_{\Delta z} = \frac{1}{2}Ma^2$
Cône de révolution de hauteur H et de rayon a à la base	Confondu avec l'axe, passant par G	$J_{\Delta z} = \frac{3}{10}Ma^2$
Sphère de rayon a	Passant par G	$J_{\Delta z} = \frac{2}{5}Ma^2$

Pour un corps homogène à symétrie de révolution d'axe (Oz) dont l'enveloppe est définie par la fonction $r = s(z)$:

$$J_{\Delta z} = \frac{\rho\pi}{2}\int_{z=-\infty}^{z=+\infty} s(z)^4 \mathrm{d}z$$

Théorèmes de Guldin (utiles pour calculer certaines intégrales) :
- surface engendrée par la révolution d'une courbe autour d'un axe : $S = 2\pi L r_{\mathrm{G}}$.
- volume engendré par la révolution d'une surface autour d'un axe : $V = 2\pi S r_{\mathrm{G}}$.

5.4 Analogies entre translation et rotation

Type de mouvement	Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
Variables	$x\,;\ v = \dot{x}\,;\ a = \ddot{x}$	$\theta\,;\ \omega = \dot{\theta}\,;\ \dot{\omega} = \ddot{\theta}$
Quantité de mouvement	$p = mv$	$\sigma_\Delta = J_\Delta \omega$
Actions mécaniques	ΣF^{ext}	$\Sigma \mathcal{M}^{ext}$
Principe fondamental	$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \Sigma F^{ext} = ma$	$\frac{\mathrm{d}\sigma_\Delta}{\mathrm{d}t} = \Sigma \mathcal{M}^{ext} = J_\Delta \dot{\omega} = J_\Delta \ddot{\theta}$
Énergie cinétique	$E_C = 1/2\ mv^2$	$E_C = 1/2\ J_\Delta \omega^2$
Travail des forces extérieures	$\delta W = \Sigma F^{ext}.\,\mathrm{d}x$	$\delta W = \Sigma \mathcal{M}^{ext}.\,\mathrm{d}\theta$
Théorème de la puissance cinétique	$\frac{\mathrm{d}E_C}{\mathrm{d}t} = \Sigma F^{ext}.\,v$	$\frac{\mathrm{d}E_C}{\mathrm{d}t} = \Sigma \mathcal{M}^{ext}.\,\omega = \Sigma \mathcal{M}^{ext}.\,\dot{\theta}$
Force / Moment de rappel élastique	$F_{elas} = -k(l - l_0)$	$\mathcal{M}_{elas} = -C(\theta - \theta_0)$
Énergie potentielle élastique	$E_P = 1/2\ k(l - l_0)^2$	$E_P = 1/2\ C(\theta - \theta_0)^2$

6 Gravitation

6.1 Force centrale

Une *force centrale* est une force qui "pointe" toujours vers un même point, le *centre de force* : $\vec{F}(M) = f(M)\,\vec{u}_r$.
Exemples : interaction coulombienne ; attraction gravitationnelle ; force de rappel d'un ressort fixé à une extrémité.
Le centre de force est souvent pris comme origine O du repère.
Propriétés :

$$\vec{F}(M) = f(M)\,\vec{u}_r \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}(M)) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(M) = r.\vec{u}_r \wedge f(M)\vec{u}_r = \vec{0} \overset{TMC}{=} \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O(M)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \vec{\sigma}_O(M) = \overrightarrow{\text{cste}}$$

Conséquences :

— Mouvement plan : $\vec{\sigma}_O(M) = \overrightarrow{\text{cste}} \Rightarrow$ le mouvement reste contenu dans un plan dont le vecteur normal est colinéaire à $\vec{\sigma}_O$. On note parfois $||\vec{\sigma}_O|| = L = L_z = \text{cste}$.

— Loi des Aires : $\vec{\sigma}_O = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mr^2\dot{\theta}\,\vec{k} = \overrightarrow{\text{cste}} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r^2\dot{\theta}}{2} = \dfrac{C}{2}$. $\quad (C = r^2\dot{\theta} = L_z/m$: constante des aires)

Si, de surcroît, la force centrale ne dépend que de la distance r du point M au centre de force O, on a : $\vec{F}(M) = f(r)\,\vec{u}_r$. Cette propriété implique de la force est alors conservative et dérive d'un potentiel à symétrie radiale de la forme : $U(r) = -\int_{r'=r}^{r'=+\infty} f(r')dr'$, avec $\vec{f}(r) = -\overrightarrow{grad}\,U(r)$. On prend souvent $U(r = \infty) = 0$.

6.2 Potentiel Newtonien

Un cas particulier de force centrale à symétrie radiale est celui des " forces en $1/r^2$ ", c'est à dire telles que :

$$\vec{F}(M) = f(r)\,\vec{u}_r = -K/r^2\,\vec{u}_r$$

Exemples : interaction coulombienne : $K = -(1/4\pi\epsilon_o)qq'$; attraction gravitationnelle : $K = \mathcal{G}mm'$.
Propriétés :

— $\vec{F}$ dérive d'un " potentiel en $1/r$ " : $f(r) = -K/r^2 = -\partial U/\partial r \Rightarrow U(r) = -K/r$.

— le champ gravitationnel créé à l'extérieur par tout corps à distribution de masse *à symétrie sphérique*, et donc l'attraction gravitationnelle qui en découle, est équivalent à celui d'une masse ponctuelle égale à la masse totale du corps, et située en son centre (démonstration : Théorème de Gauss).

6.3 Effets gravitationnels à la surface de la Terre

La force d'attraction gravitationnelle est donnée par : $\vec{F} = -\mathcal{G}\dfrac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$.

On en déduit l'expression de l'*Énergie Potentielle Gravitationnelle* : $U(r) = -\mathcal{G}\dfrac{Mm}{r}$.

Le *poids* est simplement l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre à sa surface ($r = r_T$) :

$$\vec{P} = -mg_o\vec{u}_r = -\mathcal{G}\frac{M_Tm}{r_T^2}\vec{u}_r \;\Rightarrow\; g_o = \mathcal{G}\frac{M_T}{{r_T}^2} \begin{array}{l} \leftarrow \text{masse de la Terre} \\ \leftarrow \text{rayon de la Terre} \end{array}$$

De même, on déduit l'*Énergie Potentielle de Pesanteur* ($E_{P\,pes}$) en repartant de l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle (en se plaçant en $r = r_T + z$ avec $z \ll r_T$) :

$$U(r) = -\mathcal{G}\frac{M_Tm}{r} \Rightarrow U(r_T + z) = -\mathcal{G}m\frac{M_T}{r_T}\left(\frac{1}{1 + z/r_T}\right) \overset{DL}{=} -\mathcal{G}m\frac{M_T}{r_T}(1 - z/r_T) = mg_oz + U(r_T) = E_{P\,pes}(z)$$

La force réellement ressentie à la surface de la Terre inclut, en plus, les forces d'inertie produites par le fait que nous nous trouvons sur un objet en rotation :

— *force d'inertie d'entraînement* ("force axifuge") : $\vec{f}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{HM}$. Dérive d'une énergie potentielle centrifuge en HM^2. Effet maximal à l'équateur égal à $\approx 0.35\%$ de la force de pesanteur.

— *force d'inertie de Coriolis* : $\vec{f}_{ic} = -2m\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \Rightarrow$ dépend du vecteur vitesse propre de l'objet considéré $\vec{v}$. Les effets principaux sont la déviation vers l'Est de la trajectoire de chute libre, et la déflection des trajectoires des masses d'air à l'origine des mouvements giratoires au sein des dépressions et des anticyclones (la direction de la déflection dépend de l'hémisphère).

En l'absence d'effets autres que la gravité, la surface de la mer doit correspondre à une *équipotentielle* du champ de gravité, c'est à dire à l'ensemble des distances r par rapport au centre de la Terre telles que $E_P(r) = cste$. C'est la définition du *géoïde*. En première approximation (attraction gravitationnelle + effet de rotation), il s'agit d'un *ellipsoïde de révolution*, applati de 20 km aux pôles. Les hétérogénéités de masse à l'intérieur de la Terre, ainsi que la topographie de sa surface, produisent des creux et des bosses du géoïde par rapport à l'ellipsoïde. Cependant, leur amplitude ne dépasse pas ± 100 mètres. Quant au "vrai" niveau de la mer, celui-ci diffère du géoïde en fonction des marées (marnage maximum ~ 20 mètres), mais aussi du vent, de la pression atmosphérique, des courants océaniques, de la température (dilatation thermique), etc.

6.4 Mécanique orbitale

Le mouvement orbital est, dans le cas général, un *problème à plusieurs corps* dans lequel deux ou plusieurs objets (une planète et son/ses satellite(s)) sont en rotation autour du centre de masse du système. Pour traiter simplement le problème, on se restreint à un système de deux corps, dans lequel un des deux corps est beaucoup plus massif que l'autre, ce qui fait que son CM peut être considéré comme toujours confondu avec le CM du système.

Dans ces conditions, le mouvement orbital s'effectue sous l'effet d'une force centrale, en première approximation. Il est donc contenu dans un plan, et obéit à la Loi des Aires (*deuxième loi de Kepler*). Dans un repère cylindrique, la vitesse d'un objet en mouvement plan peut s'écrire : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \dot{r}\vec{u}_r + C/r\ \vec{u}_\theta$ où C est la constante des aires ($C = r^2\dot{\theta} = L_z/m$). On peut alors écrire l'expression de l'Énergie Cinétique : $E_C = 1/2\ mv^2 = 1/2\ m(\vec{v}.\vec{v}) = 1/2\, m(\dot{r}^2 + C^2/r^2)$. Par ailleurs, la seule force en action (l'attraction gravitationnelle) dérive d'une énergie potentielle $E_{P\,gravi}(r) = U(r) = -\mathcal{G}mM/r$. L'Énergie Mécanique est donc conservée au cours du mouvement orbital, et s'exprime :

$$E_M = \text{cste} = E_o = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G}mM/r}_{U_{eff}(r)}$$

U_{eff} est l'*Énergie Potentielle Effective*. On voit que le problème bidimensionnel se réduit à un problème unidimensionnel ne dépendant que du mouvement radial r et de sa dérivée $\dot{r}$. La forme de la fonction $U_{eff}(r)$ est celle d'une cuvette dont le fond est noté $U_{eff\,min}$, bordée à gauche par une asymptote verticale pour $r \to 0$ telle que $U(r \to 0^+) \to +\infty$ et bordée à droite par une asymptote horizontale telle que $U(r \to +\infty) \to 0^-$. Suivant les conditions initiales $\{r(t=0); \dot{r}(t=0)\}$, on peut calculer E_o. Puisque $\dot{r}^2 \geq 0$, alors $U_{eff}(r) \leq E_o$. On en déduit que si $E_o < 0$, alors $U_{eff}(r) < 0$ à tout instant. Du fait de la forme en cuvette de la fonction $U_{eff}(r)$, cela implique que la distance r restera toujours dans une certaine gamme, sans jamais pouvoir tendre vers 0 ni atteindre de grandes valeurs. La particule (ou le satellite) sera piégée dans une *orbite*.

Dans le cas général (E_o quelconque), on peut montrer que la trajectoire est décrite par une *conique*. Dans le cas $E_o < 0$, la trajectoire est une ellipse. Dans le cas $E_o = 0$, la trajectoire est une parabole. Dans le cas $E_o > 0$, la trajectoire est une hyperbole.

Lorsque la trajectoire est elliptique, le centre de force (le Soleil dans le cas des orbites autour du Soleil, le centre de la Terre pour les orbites de la Lune ou des satellites artificiels terrestres) occupe un des foyers (*première loi de Kepler*). La trajectoire circulaire est un cas particulier de trajectoire elliptique ($U_{eff} = \text{cste} = U_{eff\,min} = E_o$), plus simple à traiter :

$$r = \text{cste} \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cste} \Rightarrow v^2 \overset{PFD}{=} \mathcal{G}M/r = 4\pi^2 r^2/T^2 \Rightarrow r^3/T^2 = \mathcal{G}M/4\pi^2 = \text{cste}$$

On retrouve ici la *troisième loi de Kepler*, qui stipule que, pour des objets en orbite autour d'un corps donné, le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi-grand axe des orbites. Ce rapport est le même quel que soit la masse m de l'objet en orbite : il ne dépend que de la masse M du corps central.

On définit la *vitesse de libération* v_{lib} comme la vitesse théorique minimale devant être acquise par un objet pour quitter l'orbite d'un corps donné, c'est à dire pour atteindre le cas parabolique $E_o = 0$. A l'instant initial ($r = r_T$; $v = v_{lib}$), son énergie cinétique doit donc être égale à l'opposé de son énergie potentielle (car $E_M = E_o = E_{C\,o} + E_{P\,o} = 0$). On en déduit :

$$\frac{1}{2}mv_{lib}^2 = \mathcal{G}m\frac{M_T}{r_T} \Rightarrow v_{lib} = \sqrt{2\mathcal{G}\frac{M_T}{r_T}}$$

6.5 Les marées

Explication qualitative : le phénomène de marée se manifeste par la *déformation* des corps impliqués dans un mouvement orbital sous l'effet de la non-uniformité des forces subies en différents points de ces corps. En d'autre termes : deux points distincts à l'intérieur ou à la surface du corps 1 en orbite autour du corps 2 ne "ressentent" pas les mêmes forces. La non-uniformité des forces perçues à la surface du corps 1 résulte de la combinaison de deux effets :

a. le côté du corps 1 qui fait face au corps 2 "ressent" une force attractive plus forte que le côté opposé, plus lointain. Le côté proche est donc davantage attiré vers le corps 2 que le côté éloigné.

b. le corps 1 tourne autour du centre de masse du système 1–2. Le référentiel lié au corps 1 n'est donc pas inertiel, ce qui implique l'existence d'une force centrifuge. Son intensité est plus importante du côté du corps 1 qui est opposé au corps 2. Le côté éloigné est donc moins attiré vers le corps 2 que le côté proche.

La conséquence est l'apparition d'une *tension* relative entre un côté et l'autre du corps 1, dans la direction 1–2. Cette tension a pour effet d'étirer le corps 1 dans cette direction (si le corps est déformable). Dans le cas de marées océaniques terrestres, deux *bourrelets océaniques* apparaissent de part et d'autre de la Terre dans la direction Terre–Lune. Puisque la Terre tourne sur elle même, un point donné de la Terre sera entraîné par la rotation et passera, en une journée, au travers de chacun de ces deux bourrelets. Ceci explique l'existence de deux marées par jour (contre une seule, si on ne prenait en compte que l'effet "a").

Analyse quantitative : en appliquant le PFD à un point matériel M de masse m situé à la surface du corps 1 dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ (non inertiel) lié au corps 1, on obtient donc (Section 2.3) :

$$m\,\vec{a}(M)_{\mathcal{R}1} \;=\; \underbrace{\overbrace{m\,\vec{A}_{1\to M}}^{m\vec{g}} + m\,\vec{A}_{2\to M}}_{\Sigma\overrightarrow{F^{ext}}}\;\; \underbrace{-m\vec{a}_e(M) - m\vec{a}_c(M)}_{\text{forces d'inertie}}$$

où $\{m\,\vec{A}_{i\to M}\}$ est la force de gravitation exercée par le corps i sur la masse m située en M : $||\vec{A}_i|| = \mathcal{G}\dfrac{M_i}{r_{i-M}^2}$. Pour pouvoir calculer les forces d'inertie, il faut déterminer quelle est la nature du mouvement de $\mathcal{R}_1$ par rapport à un référentiel inertiel. Le référentiel *barycentrique* du système 1–2 (noté $\mathcal{R}_{bary}$) est inertiel, c'est lui qu'on prend comme référence. Dans $\mathcal{R}_{bary}$, le corps 1 est en rotation autour du centre de masse du système 1–2. Mais si on examine le problème sur une échelle de temps très inférieure à la période de rotation du système 1–2 sur lui-même (quelques heures ou jours pour le système Terre–Lune dont la période est de 28 jours), on peut considérer que le mouvement *instantané* est celui d'une translation. Les accélérations d'inertie se réduisent alors à l'accélération de l'origine du référentiel $\mathcal{R}_1$ (le centre de masse du corps 1, noté G) par rapport à $\mathcal{R}_{bary}$: $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_{bary}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_e(M) = \vec{a}(G)_{\mathcal{R}_{bary}}$ et $\vec{a}_c(M) = \vec{0}$ et . En appliquant le PFD au système "corps 1", réduit à G, dans le référentiel $\mathcal{R}_{bary}$, on obtient l'accélération de G dans $\mathcal{R}_{bary}$:

$$M_1\,\vec{a}(G)_{\mathcal{R}_{bary}} \left(= \mathcal{G}\,\frac{M_1M_2}{r_{1-2}^2}\,\frac{\vec{r}_{1-2}}{r_{1-2}}\right) = M_1\,\vec{A}_{2\to G} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}(G)_{\mathcal{R}_{bary}} = \vec{A}_{2\to G}$$

Cette relation est simple car (a) la seule force agissant sur le CM du corps 1 est la force d'attraction exercée par le corps 2, et (b) $\mathcal{R}_{bary}$ est inertiel, donc nul besoin d'introduire des forces d'inertie. On obtient finalement :

$$m\,\vec{a}(M)_{\mathcal{R}1} \;=\; m\vec{g} + m\,\underbrace{\left(\vec{A}_{2\to M} - \vec{A}_{2\to G}\right)}_{\vec{C}_2(M)\text{:terme des marées}}$$

Si on note x la distance MG et a la distance entre le CM du corps 1 (c'est à dire G) et celui du corps 2, et en supposant que $x \ll a$, on trouve que l'ordre de grandeur du terme des marées est de $2\dfrac{x}{a}||\vec{A}_2|| \equiv 2\dfrac{x}{a}\mathcal{G}M_2$. En calculant la valeur numérique de $||\vec{C}||$ pour la couple Terre–Lune et pour le couple Terre–Soleil, on constate que les marées lunaires sont à peine deux fois plus fortes que les marées d'origine solaire. Elles peuvent donc se cumuler (conjonction ou opposition $\Rightarrow$ marées de vives eaux, forts coefficients de marée) ou se compenser partiellement (quadrature $\Rightarrow$ marées de mortes eaux, faibles coefficients de marée). L'amplitude réelle de la marée en un point donné de la Terre dépend de la réponse du bassin océanique local, qui peut entrer en résonnance si sa fréquence propre est proche de la fréquence de forçage induite par les marées (voir le cours sur les oscillateurs).

Un autre effet des forces de marée est la dislocation possible d'un astéroïde passant à proximité d'un corps massif si la tension de marées à l'intérieur de l'astéroïde se met à approcher la valeur des forces de cohésion internes d'origine gravitationnelle.

Références

Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M., 1999. Le cours de physique de Feynman, Mécanique. Vol. 1. Dunod.

Pérez, J.-P., Thibault, R., 2001. Mécanique : fondements et applications : avec 300 exercices et problèmes résolus. Dunod.

Taylor, J. R., Becherrawy, T., Boudier-Cusset, A., 2012. Mécanique classique. De Boeck.

Quelques liens

- `http://www.femto-physique.fr/mecanique/index.php` : de nombreuses figures et animations.
- `http://www.feynmanlectures.info/` : onglet "Exercises" (en anglais).
- `http://www.real-world-physics-problems.com/` : onglets "Kinematics" et "Dynamics" (en anglais).
- `http://www.ems.psu.edu/~fraser/Bad/BadCoriolis.html` : sur la force de Coriolis (en anglais).
- `http://www.intuitor.com/moviephysics` : la physique vue par le cinéma (en anglais).