1^{er} E.M.D Electricité

Janvier 2005

xercice N°1 : (5pts) X

Soit un dipôle electrique de moment dipolaire $\vec{p} = q.\vec{AB}$ avec $AB = 2a$

- Déterminer le champ $\vec{E}_M$ (sens, direction et module) et le potentiel V_M créés par le dipôle en un point M de l'espace situé à une distance r du milieu O de AB avec $r \gg a$.
- Tracer les projections des surfaces équipotentielles et des lignes de champ sur votre feuille d'examen.

xercice N° 2 : (6pts)

A . Une charge q positive est distribuée uniformément sur la circonference d'un cercle de centre O et de rayon R ; si λ est la densité linéaire de charge, déterminer le champ électrique $\vec{E}$ crée par cette répartition en un point M appartenant à l'axe $x'Ox$ de la spire tel que $OM = a$ Fig.2.

B . Dans le schéma de la Figure 3 ; déterminer le champ $\vec{E}_N$ au point N milieu de OO' sachant que les deux spires ont le même rayon R et tel que $\lambda_1 = +\lambda$ et que $\lambda_2 = 2\lambda$

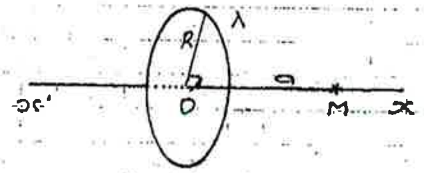


Fig 2.

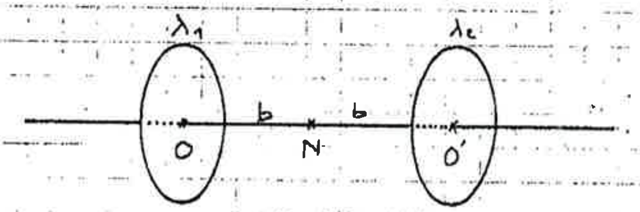


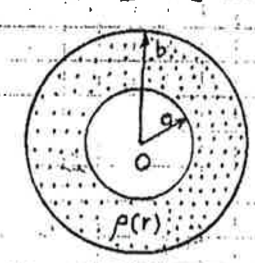
Fig 3.

xercice N° 3 (5pts) T

Une charge q positive est distribuée à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon b possédant une cavité de rayon $a = b/2$ (Fig 1)

La distribution n'est pas uniforme et on donne :

$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad \text{avec } \rho_0 = C^{te} \text{ et } r \in [a, b]$$



1/ Déterminer le sens et la direction du champ électrique $\vec{E}$ crée par cette repartition à travers tout l'espace.

2/ Déterminer, en utilisant le theoreme de Gauss, le module de ce champ $\vec{E}$

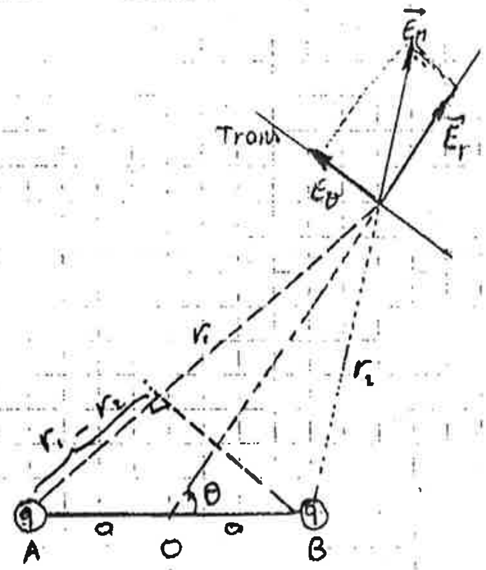
3/ En déduire l'expression du potentiel V à travers tout l'espace.

KSTAR

JAK

SOLUTION de l'E.M.D N°1 :

Dipôle electrique



$$V_M = V(+q) + V(-q)$$

$$V_M = \frac{Kq}{r_2} - \frac{Kq}{r_1} = \frac{Kq(r_1 - r_2)}{r_1 r_2}$$

Comme $r >> a$, on peut approximer

$r_1 r_2 = 2r^2$
$r_1 - r_2 = 2a\cos\theta$

$$D'où \quad V_M = \frac{2Kqa\cos\theta}{r^2} = \frac{Kp\cos\theta}{r^2}$$

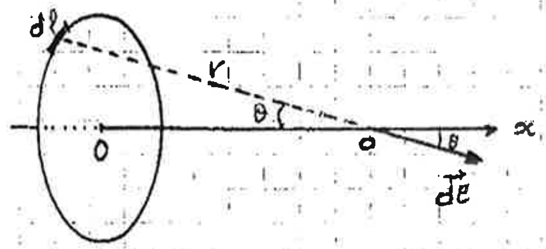
Calcul du champ $\vec{E}_M$

$$\vec{E}_M = -\overrightarrow{grad}\, V_M$$

$$\vec{E}_M = \begin{cases} E_r . \vec{u}_r = -\dfrac{\partial V_M}{\partial r}\, \vec{u}_r \\ E_\theta . \vec{u}_\theta = -\dfrac{1}{r} . \dfrac{\partial V_M}{\partial \theta}\, \vec{u}_\theta \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\vec{E}_M \begin{cases} E_r = \dfrac{2Kp\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = \dfrac{Kp\sin\theta}{r^3} \end{cases}}$$

Lignes de champ et equipotentielles : Voir TP

Exercice N° 2



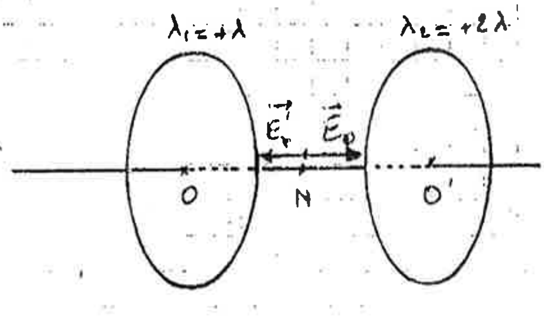
2 elements dl et dl' symetriques /$x'Ox$ produisent 2 champs élémentaires $d\vec{E}$ et $d\vec{E}'$ dont la résultante est portée par l'axe $\vec{Ox}$. Donc $\vec{E}_M$ sera porté totalement par l'axe des x vers les $x>0$.

Module de $\vec{E}_M$

$$dl \xrightarrow[\text{porte}]{} dq = \lambda dl > 0 \xrightarrow[\text{crée en M}]{} d\vec{E} \text{ sortant tel que } dE = \frac{K\lambda dl}{r^2}$$

$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{K\lambda dl}{r^2}\cos\theta \Longrightarrow E_M = \int dE_x = \int \frac{K\lambda dl \cos\theta}{r^2}$$

$$E_M = \frac{K.\lambda.\cos\theta}{r^2}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{K\lambda\cos\theta . 2\pi R}{r^2} = \frac{\lambda a R}{2\varepsilon_0(a^2+R^2)^{3/2}}$$



$$\vec{E}_N = \vec{E}_o + \vec{E}_{o'} \quad \text{par projection}$$

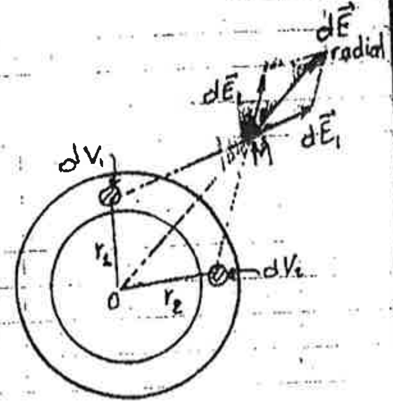
$$E_N = -E_o + E_{o'}$$

$$\text{avec} \begin{cases} E_o = \dfrac{\lambda . b . R}{2\varepsilon_0(b^2+R^2)^{3/2}} \\ E_{o'} = \dfrac{2\lambda b R}{2\varepsilon_0(b^2+R^2)^{3/2}} \end{cases}$$

$$D'où \quad \boxed{E_N = -\frac{\lambda b R}{2\varepsilon_0(b^2+R^2)^{3/2}}}$$

: $\vec{E}_N$ est porté par l'axe des x vers les $x<0$

Exercice N° 3 (9 pts)



Sens et direction de $\vec{E}$

$\forall M / OM = r$ et $r > b$

$dV \to dq = \rho\, dV > 0 \to d\vec{E}$ sortant

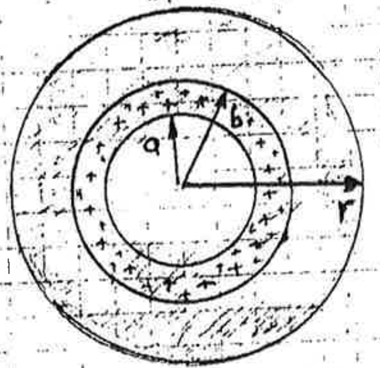
Soit dV_2 symetrique de dV_1 / l'axe radial (OM)

$dV_2 \Rightarrow dq_2 = dq_1 \to d\vec{E}_2$; $d\vec{E}_1$ sym $d\vec{E}_2$

$\rho_2 = \rho_1$ si $r_2 = r_1$

dV_1 et dV_2 étant symetriques par rapport à OM sont équidistants de O.
La résultante $d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$ est portée totalement par l'axe radial et sortante.
Si on prend 2 à 2 tous les élements symétriques de la distribution, on remarque que $\vec{E}_M$ sera radial et sortant.
Même raisonnement si $M / OM = r$ pour $a < r < b$ et $r < a$.

Module de $\vec{E}_M$



2.a : $\forall M / OM = r$ et $r > b$: (l'exterieur)

$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}_M \cdot \vec{dS} = \oiint_{S_G} E_M\, dS = E_M \oiint_{S_G} dS = E_M \cdot S_G = E_M \cdot 4\pi r^2$$

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int dq = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho(r)\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_a^b \rho_0\left(1 - \frac{r}{b}\right)\cdot 4\pi r^2\, dr$$

$$\Phi = \rho_0 \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\int_a^b \left(r^2 - \frac{r^3}{b}\right) dr = \frac{11\pi a^3 \rho_0}{6\varepsilon_0} \quad \text{avec } b = 2a$$

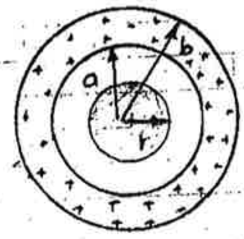
En égalisant les 2 parties : $E_M(r) = \dfrac{11 a^3 \rho_0}{24 \varepsilon_0 r^2}$

2.b : $\forall M / OM = r$ et $a < r < b$

$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}_M \cdot \vec{dS} = E_M \cdot 4\pi r^2$$

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int dq = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_a^r \rho_0\left(1 - \frac{r}{b}\right)\cdot 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{8a} - \frac{5a^3}{24}\right)$$

En égalisant : $E_M(r) = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{3} - \dfrac{r^2}{8a} - \dfrac{5a^3}{24 r^2}\right)$



2.c : $\forall M / OM = r$ et $r < a$

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int dq = 0$$

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot 4\pi r^2$$

d'où $E_M(r) = 0$: $E_M(r) = 0$

Calcul du potentiel $V(M)$

$\vec{E}_M = -\vec{grad}\, V \to \vec{E}_{M(r)} = -\dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_\theta = -\dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r$: $\vec{E}_M$ radial seulement

$V_M(r) = -\int E(r)\cdot dr$

- pour $r > b$: $V_1(r) = \dfrac{11 a^3 \rho_0}{24 \varepsilon_0 r} + C_1$; $V_1(r = \infty) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$: $V_{M_1}(r) = \dfrac{11 a^3 \rho_0}{24 \varepsilon_0 r}$
- pour $a < r < b$: $V_2(r) = -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r^2}{6} - \dfrac{r^3}{24a} + \dfrac{5a^3}{24 r}\right) + C_2$; $V_1(r = b) = V_2(r = b) \Rightarrow C_2 = \dfrac{2a^2\rho_0}{3\varepsilon_0}$
- pour $r < a$: $V_3(r) = C_3$; $V_2(r = a) = V_3 \Rightarrow V_3 = \dfrac{\rho a^2}{3\varepsilon_0}$

E.M.D. N°1 Electricité

5 Févr[illegible]

Exercice N°1 :

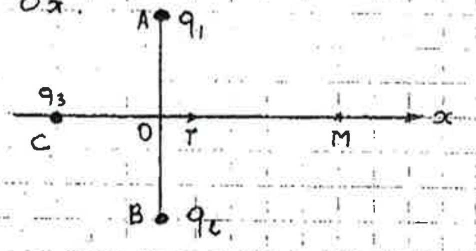
Les charges ponctuelles q_1 ; q_2 et q_3 sont disposées comme indiqué sur la [illegible]
Sachant que $q_1 = q_2 = -q$ et $q_3 = 2q$; $OA = OB = OC = a$.

a/ Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrique V créés par les charges au point M, situé sur l'axe Ox et repéré par $OM = x$.

b/ Déterminer l'énergie potentielle qu'aurait une charge ponctuelle q_0 ficti[ve] placée au point M.

c/ Au point O, une charge ponctuelle $q' = q$ est abandonnée sans vitesse initi[ale]. La charge q' se met-elle en mouvement ? Justifier votre réponse.

d/ En supposant que q' n'est soumise qu'à la seule force électrique (con[...] $\Rightarrow \Delta E_c(x) = -\Delta E_p(x)$, déterminer l'expression de l'énergie cinétique [...] qu'aurait q' le long de l'axe Ox.



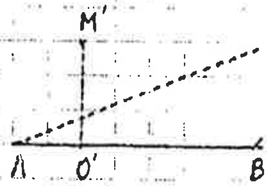
Exercice N°2 :

Une charge $q > 0$ est distribuée uniformément le long d'un fil AB, de longueur finie ; soit λ la densité linéique de charge. (a, b, θ_1 et θ_2 sont données)

a/ Déterminer le champ $\vec{E}$ créé par cette distribution au point M de la figure.

b/ En déduire le champ et le potentiel au point M créés par un fil rectiligne AB indéfini chargé par λ.

c/ Dans le cas du fil indéfini, exprimer la différence de potentiel ΔV entre les points M et M' de la figure.



$O'M' = b$ $\widehat{OMB}$ [...]
$OM = a$ $\widehat{OMA}$ [...]

Exercice N° 3 :

Soit une distribution de charge, sphérique, de densité volumique $\rho(r)$, [...] par les sphères concentriques de centre O et de rayons respectifs $a = R$ et b [...]
La densité $\rho(r) = 0$ pour $r > 2R$; $\rho(r) = \frac{c}{r}$ pour $2R > r > R$ et $\rho(r) = 0$ pou[r] [...]
c = constante

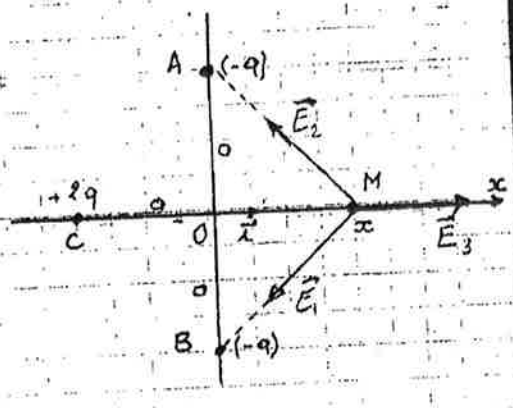
a/ Déterminer le champ électrique $\vec{E}(r)$ à travers tout l'espace. Tracer $E(r)$ [...]

b/ En déduire $V(r)$ à travers tout l'espace. Tracer $V(r)$.

c/ Déterminer l'unité de c.

OLUTION :

xercice N°1 :



1) $V_M = \sum_{i=1}^{3} K \frac{q_i}{r_i} + C^{te}$; après calculs

$V_M = 2Kq\left(\frac{1}{(x+a)} - \frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}\right)$

$\vec{E}_M = -\vec{grad}\, V_M \Rightarrow \vec{E}_M = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$

$\vec{E}_M = 2Kq\left(\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\right)\vec{i}$

l'energie potentielle d'une charge fictive q_0 placée en M :

$E_{pM} = q_0 V_M \Rightarrow E_{pM} = 2Kqq_0\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$

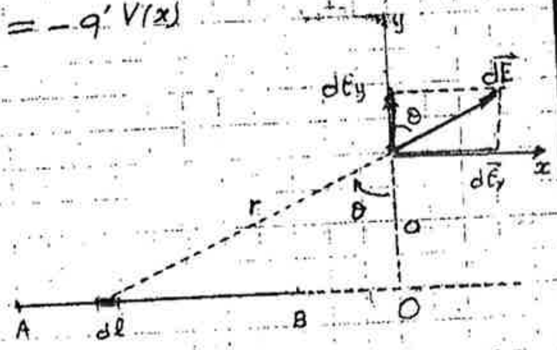
en O ; $x = 0 \Rightarrow \vec{E}_0 = \vec{E}(x=0) = 2K\frac{q}{a^2}\vec{i} \neq \vec{0}$, donc q' sera soumise à une force electrique : $\vec{F'} = q'\vec{E}_0 = 2K\frac{q^2}{a^2}\vec{i}$: donc q' se mettra en mouvement en suivant la direction x'Ox et dans le sens de $\vec{F'}$.

q' est soumise à la seule force électrique - cette force est conservatrice donc :

$$\Delta E_c(x) = -\Delta E_p(x)$$
$$E_c(x) - E_c(x=0) = -[E_p(x) - E_p(x=0)]$$

d'où $E_c(x) = -q'(V(x) - V(0)) \Rightarrow E_c(x) = -q'V(x)$

xercice N°2 :



. dl → dq = λ dl ; λ>0 donc $\vec{dE}$ sortant

$dE = \frac{K\lambda . dl}{r^2}$

$tg\theta = \frac{l}{a}$; $l = a\, tg\theta \Rightarrow dl = \frac{a\, d\theta}{\cos^2\theta}$

$\cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{\cos\theta}$

d'où finalement, en remplaçant $dE = \frac{K\lambda}{a}\cos\theta \Rightarrow d\vec{E}\begin{cases} dE_x = \frac{K\lambda}{a}\sin\theta\, d\theta \\ dE_y = \frac{K\lambda}{a}\cos\theta\, d\theta \end{cases}$

d'où $\vec{E}_M \begin{cases} E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{K\lambda}{a}\sin\theta\, d\theta \\ E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{K\lambda}{a}\cos\, d\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{E}\begin{cases} E_x = \frac{K\lambda}{a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \\ E_y = \frac{K\lambda}{a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \end{cases}}$

si le fil rectiligne est de longueur infinie, $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_M = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{j}}$ vertical

$\vec{E}_M = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\vec{j}$ avec $y = a$, d'où le potentiel en M

$\vec{E}_M = -\vec{grad}\, V_M \Rightarrow \vec{E}_M \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V_M}{\partial x} = 0 \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow V_M = -\int E_n\, dy = -\int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\, dy$

d'où $\boxed{V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{a} + C^{te}}$ et $V_{M'} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{b} + C^{te}$

$\Delta V = V_M - V_{M'} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a}$

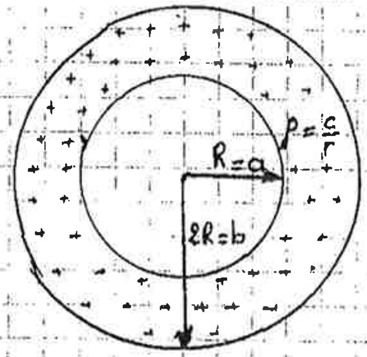
Exercice N° 3

a/ Détermination de l'unité de c.

$\rho = \frac{c}{r}$; $[\rho] = \frac{\text{Coulomb}}{m^3}$; $[r] = m \Rightarrow [c] = [\rho]\,[r] = \frac{C}{m^3}\, m = C/m^2$

b/ Détermination du champ électrique $\vec{E}(M)$ dans tout l'espace.

En utilisant le théorème de Gauss pour les 3 régions $r > 2R$; $R < r < 2R$ et $r < R$



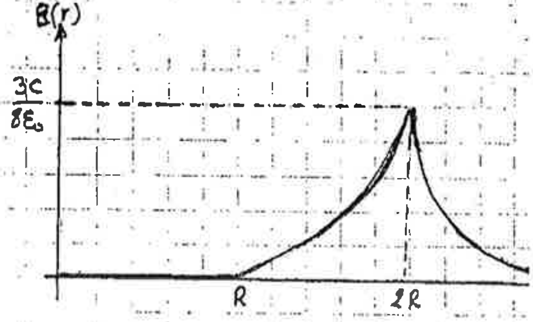
$\Phi = \oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$

$\vec{E}$ sortant, $\vec{E}$ radial, $|\vec{E}|$ constant si r fixe

$$\sum \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ \int_a^r \frac{\rho}{r}\, 4\pi r^2\, dr & \text{si } R < r < 2R \\ \int_a^b \frac{\rho}{r}\, 4\pi r^2\, dr & \text{si } R < r < 2R \end{cases}$$

On obtient

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ \frac{c}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) & \text{si } R < r < 2R \\ \frac{3cR^2}{2\varepsilon_0 r^2} & \text{si } r > 2R \end{cases}$$



c/ Détermination du potentiel $V_M(r)$

$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r$

d'où $V = -\int E\, dr$

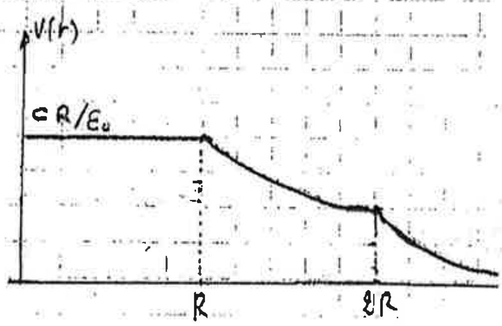
En utilisant les conditions aux limites : $V_3(r) \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$

et les conditions de continuité $V_2(r = b) = V_3(r = b)$ et $V_1(r = a) = V_2(r = a)$, l'on

$V_1(r) = \frac{cR}{\varepsilon_0}$ si $r \leq R$

$V_2(r) = \frac{2cR}{\varepsilon_0} - \frac{c}{\varepsilon_0}\left(r + \frac{R^2}{r}\right)$ si $R < r < 2R$

$V_3(r) = \frac{3cR^2}{2\varepsilon_0 r}$ si $r > 2R$



E.M.D. N°1 Electricité — 23 Janv 2001

Exercice N°1 : Les parties A et B sont independantes

PARTIE A:

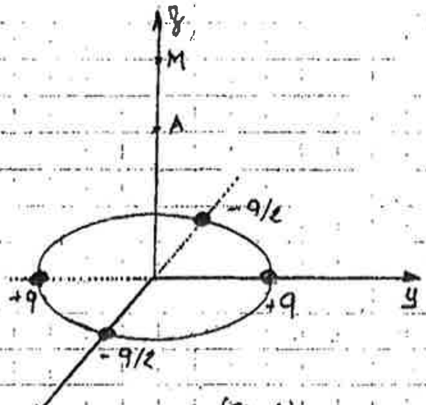
Soient 4 charges ponctuelles positionnées sur le perimètre d'un cercle de centre O et de rayon a, (voir fig.1), appartenant au plan xOy

1/ Calculer le champ et le potentiel electrique au point M de l'axe Oz. $(z>0)$

2/ En déduire le champ et le potentiel electrique au point A de l'axe Oz tel que $OA = a\sqrt{3}$

3/ Une charge q_1 démarre d'une distance infinie vers le systeme de charges précédentes parallèlement à l'axe Oz, déterminer l'énergie cinétique initiale pour que la charge q_1 arrive au point O. (On donne $\Delta E_c = -\Delta E_p$)

On donne $q = 8.10^{-8}$ Cb, $q_1 = 4.10^{-9}$ Cb et $a = 6$ cm.



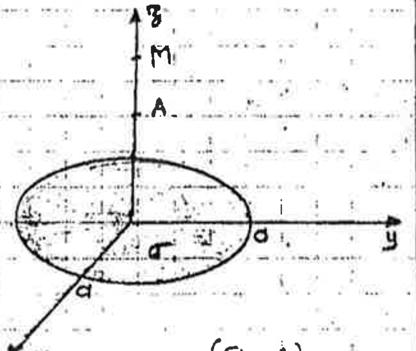
(Fig.1)

PARTIE B:

On remplace le systeme des charges ponctuelles par une charge $Q>0$ distribuée uniformément en surface sur un disque de centre O et de rayon a de densité σ. Voir le schéma ci-contre sur la Figure 2.

1/ Calculer le champ et le potentiel électrique au point M de l'axe Oz. $(z>0)$

2/ En déduire le champ et le potentiel electrique au point A de l'axe Oz tel que $OA = a\sqrt{3}$

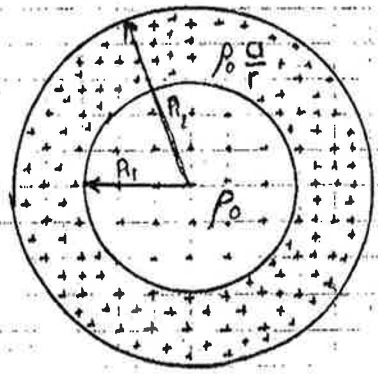


(Fig.2)

Exercice N°2

Soit une sphère chargée en volume dont la densité volumique de la charge varie comme suit : (Fig 3)

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } 0 < r < R_1 \\ \rho_0 \cdot \dfrac{a}{r} & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{si } r > R_2 \end{cases}$$



avec ρ_0 et a des constantes positives.

En utilisant le theoreme de Gauss, déterminer le champ electrique dans tout l'espace.

En déduire le potentiel électrique correspondant.

Application : $R_1 = R$ et $R_2 = 2R$.

SOLUTION

Exercice N°1

PARTIE A

1) $V = \sum_{i=1}^{4} K \frac{q_i}{r_i}$

$V = K\frac{q}{r} + K\frac{q}{r} - \frac{K\,q/2}{r} - \frac{K\,q/2}{r}$ avec $r = \sqrt{a^2+z^2}$

d'où $V = K\frac{q}{\sqrt{a^2+z^2}}$

$\vec{E} = -\vec{grad}\,V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$

d'où $\vec{E}_M = K\frac{qz}{(a^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$

2/ Si $z = a\sqrt{3}$:

$V = \frac{Kq}{2a}$ et $\vec{E} = K\frac{q\sqrt{3}}{8a^2}\vec{k}$

3/ $\Delta E_c = -\Delta E_p \Rightarrow E_c = K\frac{q_1 q}{a}$

PARTIE B

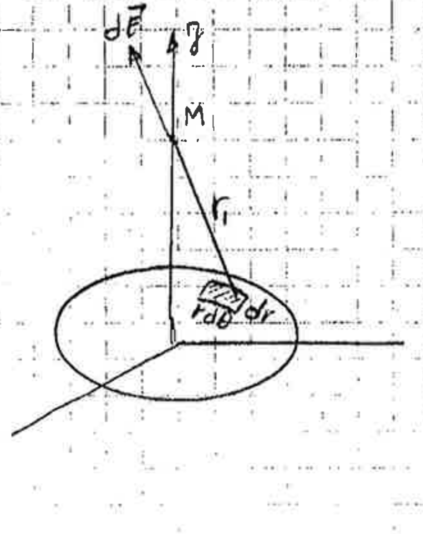
$dV = K\frac{dq}{r_1}$ avec $dq = \sigma ds$ et $ds = r\,dr\,d\theta$; $r_1 = \sqrt{r^2+z^2}$

$dV = K\sigma\frac{r\,.\,dr\,.\,d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}}$

$V = K\sigma\int_0^a \frac{r\,.\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}}\int_0^{2\pi} d\theta \Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{a^2+z^2} - z\right]$

$\vec{E} = -\vec{grad}\,V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$

d'où $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$



Exercice N° 2

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } r < R_1 \\ \rho_0 \frac{a}{r} & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{si } r > R_2 \end{cases}$$

zone : $r < R_1$

Théorème de Gauss $\Phi = \oint\!\!\oint_{S_0} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho\, dV = 4\pi\rho_0 \int_0^r r^2 dr$

d'où $E = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}$

zone $R_1 < r < R_2$

$$\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_1'}{\varepsilon_0} + \frac{q_2'}{\varepsilon_0} = 4\pi\rho_0 \int_0^{R_1} r^2 dr + 4\pi\rho_0 \int_{R_1}^{r} \frac{a r^2}{r} dr$$

$$\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0} + \frac{4\pi\rho_0\, a\, r^2}{2\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{R_1^3}{3r^2} + \frac{a}{2}\right)$$

zone : $r > R_2$

$\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_1'}{\varepsilon_0} + \frac{q_2''}{\varepsilon_0}$: charge totale 1 + charge totale 2

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} 4\pi\rho_0 \int_0^{R_1} r^2 dr + \frac{1}{\varepsilon_0} 4\pi\rho_0 \int_{R_1}^{R_2} a\, r\, dr = \frac{4\pi\rho_0}{3\varepsilon_0} R_1^3 + \frac{4\pi\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

d'où Finalement $E(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{R_1^3}{3r^2} + \frac{a}{2}\,\frac{R_2^2 - R_1^2}{r^2}\right)$

En appliquant $R_1 = R$ et $R_2 = 2R$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 \cdot r}{3\,\varepsilon_0} & \text{pour } r < R_1 \\ \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{R^3}{3r^2} + \frac{a}{2}\right) & \text{pour } R_1 < r < 2R \\ \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{R^3}{3} + 3\frac{a}{2}R^2\right) & \text{pour } r > 2R \end{cases}$$

Calcul des potentiels correspondants : $dV = -E\,dr$; $V = -\int E\,dr$

- pour $r < R$: $V_1 = -\frac{\rho_0 r^2}{6\,\varepsilon_0} + C_1$
- pour $R < r < 2R$: $V_2 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{R^3}{3r} - \frac{a}{2}r\right) + C_2$
- pour $r > 2R$: $V_3 = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0 r}\left(\frac{R}{3} + \frac{3a}{2}\right) + C_3$
- conditions aux limites : $V_3(r=\infty) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

condition de continuité : $V_3(r=2R) = V_2(r=2R) \Rightarrow C_2 = \frac{\rho_0 R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{5R}{6} + 2a\right)$

. condition de continuité : $V_2(r=R) = V_1(r=R) \Rightarrow C_1 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{7}{9}R^2 + \frac{aR}{2}\right)$

$$\text{Finalement } V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{7}{9}R^2 + \frac{aR}{2} - \frac{r^2}{5}\right) & \text{pour } r < R \\ \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{R^2}{3}\left(\frac{R}{r} + \frac{5}{6}\right) + a\left(R - \frac{r}{2}\right)\right. & \text{pour } R < r < 2R \\ \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0 r}\left[\frac{R}{3} + \frac{3a}{2}\right] & \text{pour } r > 2R \end{cases}$$

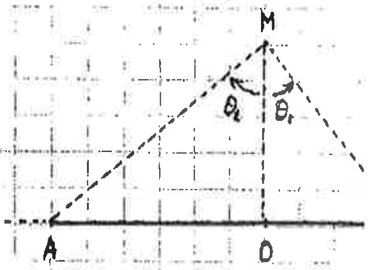
Septembre 20.

Examen de SYNTHESE (1h30mn)

Exercice N°1 (6pts)

On considère une portion de fil AB uniformément électrisée ; sa densité linéique de charge est $\lambda > 0$.

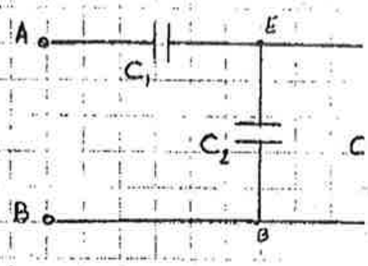
1. Déterminer l'expression du champ $\vec{E}$ au point M de la figure en fonction de θ_1 et θ_2.
2. Déduire l'expression du champ $\vec{E}$ créé par un fil indéfini passant par A et B, ayant une densité de charge λ.



Exercice N°2 (7pts)

Le circuit de la figure 1 est constitué de 3 condensateurs $C_1 = 3\mu F$; $C_2 = C_1$ et C_3

1. Donner une valeur à C_3 pour que la capacité équivalente entre A et B soit égale à C_3.
2. On applique entre A et B une tension $U = 400V$, déterminer la charge et la tension relatives à chaque condensateur.



Exercice N°3 (7pts)

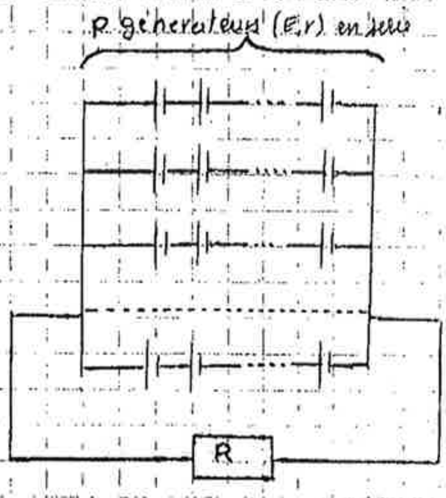
On dispose de n générateurs identiques ayant chacun une f.e.m. E et une résistance interne r. On désire grouper ces générateurs de la manière suivante :

1/ Déterminer p et q correspondants à une puissance calorifique maximale dissipée dans R.

2. Déterminer la puissance maximale dissipée dans R.
3. Déterminer le rendement ρ du dispositif utilisé. Quelle conclusion en déduisez vous ?

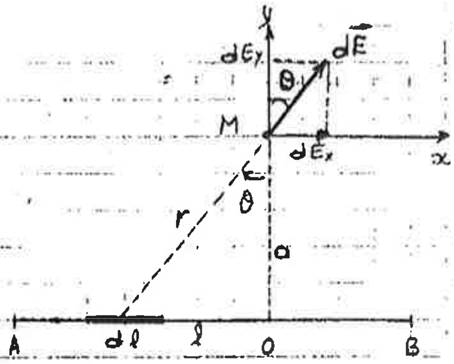
Application numérique

$n = 36$; $E = 2V$; $r = 2\,\Omega$; $R = 4,5V$



CORRECTION Synt. Sept. 2006

Exercice N°1



1°/ l'élément dl contient $dq = \lambda\, dl > 0$, d'où en M $d\vec{E}$ sortant tel que $dE = K.\lambda.dl/r^2$

projection $d\vec{E}\begin{cases} dE_x = K\lambda dl/r^2 \, . \sin\theta \\ dE_y = K\lambda dl/r^2 \, . \cos\theta \end{cases}$

comme $dl = a.\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ $\left(tg\theta = \dfrac{l}{a}\right)$ et $r = \dfrac{a}{\cos\theta}$

$$d\vec{E}\begin{cases} dE_x = \dfrac{K\lambda}{a}\sin\theta\, d\theta \\ dE_y = \dfrac{K\lambda}{a}\cos\theta\, d\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{E}\begin{cases} E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dE_x = \dfrac{K\lambda}{a}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \\ E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dE_y = \dfrac{K\lambda}{a}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) \end{cases}$$

2°/ si le fil est de longueur infinie $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = \pi/2 \Rightarrow \vec{E} = E_y\,\vec{j} = \dfrac{2K\lambda}{a}\vec{j} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{j}$

Exercice N°2

1°/ $C_{AB} = C_3 \Rightarrow \dfrac{1}{C_{AB}} = \dfrac{1}{C_3} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_1 + C_3}$

d'où après développement $C_3^2 + C_1C_3 - C_1^2 = 0 \Rightarrow C_3 = \dfrac{-C_1 + C_1\sqrt{5}}{2} = 0{,}618\, C_1$

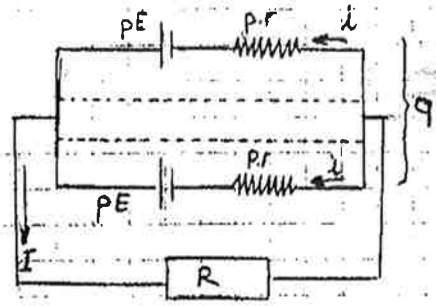
Appl. num. $C_3 = 1{,}85\ \mu F$.

2°/ La charge du condensateur équivalent est
$$Q = C_{AB}.U = C_3.U = 7{,}4.10^{-4}\,C$$
c'est aussi la charge de C_1 entre A et E $\Rightarrow Q_1 = 7{,}4.10^{-4}\,C$

Entre E et B :

* la charge de $C_2 = C_1$ est $Q_2 = C_1(V_E - V_B)$ avec $V_E - V_B = (V_A - V_B) - (V_A - V_E)$
donc $V_E - V_B = U - \dfrac{Q}{C_1} = 400 - 247 = 153$ volt donc $Q_2 = 4{,}6.10^{-4}\,Cb$
* La charge de C_3 est $Q_3 = C_3(V_E - V_B) = 2{,}8.10^{-4}\,Cb$

Exercice N°3



La puissance $P = RI^2$ dissipée dans R est maximale si I est max.

$$\begin{cases} pE = p.r.i = RI \\ I = q\,i \end{cases}$$

d'où $I = \dfrac{n.E.p}{(qR + pr)p} = \dfrac{n.E.p}{nR + p^2 r}$

$\dfrac{dI}{dp} = 0 \Rightarrow p = \sqrt{\dfrac{nR}{r}}$ Appl. num $p = 9$

comme $q = \dfrac{n}{p} \Rightarrow q = \sqrt{\dfrac{nr}{R}}$ Appli. num $q = 4$

Le courant max est donc $I_{max} = 2\,A$ et la puissance maximale : $P_{max} = R I_{max}^2 = 9W$

3°/ Le rendement du dispositif $\rho = \dfrac{P_{\text{utilisé par } R}}{P_{\text{fournie par les généra.}}} = \dfrac{R I_{max}^2}{E_{eq}.I_{max}} = \dfrac{R}{Ep}\sqrt{\dfrac{n}{R.r}} = \dfrac{1}{2} = 50\%$

Conclusion :

50% de la puissance fournie par les générateurs est perdue par effet Joule dans ces mêmes générateurs.

E.M.D N°2 Sept 2006 : Sujet A

Exercice N°1

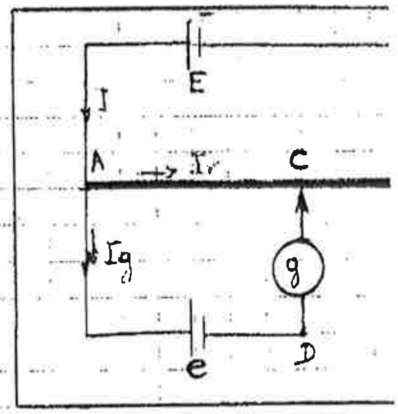
Un condensateur plan est constitué de deux plaques métalliques de surface $S = 100\ cm^2$ séparées par une épaisseur $e = 1mm$ d'air

1) Quelle est en μF sa capacité

2) On place entre ses armatures et parallèlement, une lame d'ébonite de constante diélectrique $\varepsilon_r = 3$ d'épaisseur $e_1 = 0,4mm$ ayant même surface que les armatures. Quelle est la nouvelle capacité

3) On substitue à la lame d'ébonite, une lame métallique isolée de même épaisseur. Quelle est la nouvelle capacité.

Exercice N°2



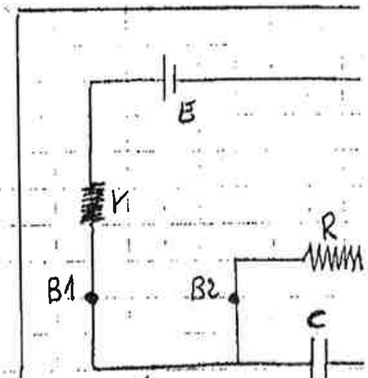
Le montage de la figure en face sert à mesurer une F.E.M (e) inconnue par la méthode d'opposition où G est un galvanomètre de résistance g ; E est un générateur, AB un fil homogène de section constante S, de longueur L et de résistance r ; e est la f.e.m à déterminer.

1/ Ecrire la loi des nœuds au point A et la loi des mailles ACDA et ACBA

2/ En déduire le courant I_g traversant le galvanomètre

3/ En déplaçant le curseur C, on peut trouver une position C_0 (AC_0) qui permet d'annuler I_g. En déduire e en fonction de E, L et de l_0

Exercice N°3



Détermination de la vitesse d'un projectile.

On considère le circuit ci-contre dans lequel E est un générateur continu de f.e.m. 300V ; $r = 5K\Omega$, $R = 10K\Omega$ et C un condensateur de capacité $0,3\ \mu F$. B1 et B2 sont 2 points séparés par une distance de 4 cm.

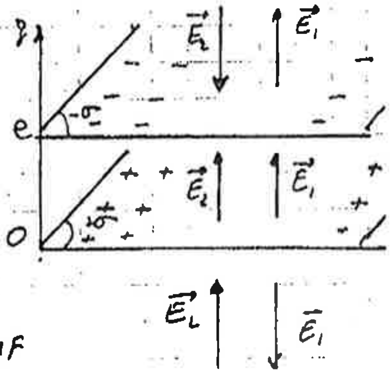
Initialement la capacité est supposée entièrement chargée.

1) Calculer la d.d.p et la charge aux bornes du condensateur.

2) Un projectile coupe successivement les deux fils aux points B1 et B2, la d.d.p aux bornes de C diminue de 12V. Calculer la vitesse du projectile

SOLUTION : Sept. 2006 sujet A

Exercice N°1



1) Calcul du champ : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

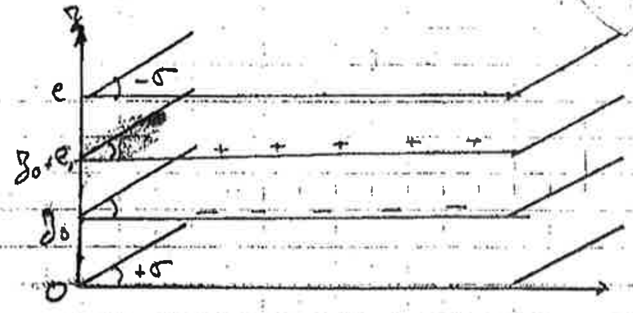
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & si\ z < 0 \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0} & si\ 0 < z < e \\ 0 & si\ z > e \end{cases}$$

d'où $\Delta V = \int E\,dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e$

et $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma S}{\Delta V} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot e} \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 S}{e} = 8,84 \cdot 10^{-5} \mu F$

2) Nouveau Champ :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} & \text{si } 0 < z < z_0 \\ \sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r = \frac{\sigma}{3\varepsilon_0} & \text{si } z_0 < z < z_0 + e_1 \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0} & z_0 + e_1 < z < e \end{cases}$$



$$\Delta V = \int E\,dz = \int_0^{z_0} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dz + \int_{z_0}^{z_0+e_1} \frac{\sigma}{3\varepsilon_0}\,dz + \int_{z_0+e_1}^{e} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dz.$$

$\Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(e - e_1) + \frac{\sigma}{3\varepsilon_0} e_1$ ou bien $\Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e_1 - \frac{2}{3}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} e_1 \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma S}{\Delta V} = 12.10^{-5}\mu F$

) Lame métallique

$$E = \begin{cases} \sigma/\varepsilon_0 & 0 < z < z_0 \\ 0 & z_0 < z < z_0 + e_1 \\ \sigma/\varepsilon_0 & z_0 + e_1 < z < e \end{cases} \Rightarrow \Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(e - e_1) \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = 14,73.10^{-5}\mu F$$

XERCICE N°2

Loi des noeuds : $I = I_r + I_g$

Loi des mailles : maille ACDA : $e = I_r r - I_g g$

maille ACBFA : $E = I_r r + (R - r) I$

$E = R I_r + (R - r) I_g \Rightarrow I_g = \frac{rE - Re}{r(R-r) + Rg}$

) $I_g = 0 \Rightarrow e = \frac{rE}{R}$

On a $r = \frac{\rho l_0}{S}$ et $R = \rho \frac{L}{S}$ d'où $e = \frac{l_0 E}{L}$

ERCICE N°3

) La capacité supposée entièrement chargée :

donc $I_2 = 0$ et $I = I_1$

$E(r + R) I \Rightarrow I = \frac{E}{R + r} = \frac{300}{15\,000} = 2.10^{-2}$ A.

a d.d.p $U_c = U_R = RI = \frac{RE}{R + r} = \frac{10^4 \cdot 300}{15\,000} = 200V$

a charge : comme $U_c = \frac{Q_c}{C} \Rightarrow Q_c = U_c C = 200.3.10^{-7} = 60\mu Cb$.

Équation de la décharge : $U_c = RI$ d'où

$\frac{q}{c} = -R\frac{dq}{dt} \Rightarrow q(t) = q_0 e^{-t/RC}$ et alors $U_c(t) = U_c(0) e^{-t/RC} \Rightarrow U_c(t) = 200 e^{-t/RC}$

$U_c(t_1) = U_c(0) - 12 \Rightarrow 200 e^{-t_1/RC} = 188$ d'où $t_1 = RC\,Ln\frac{200}{188}$

on trouve par application numérique : $t_1 = 1,85.10^{-4}s$.

d'où la vitesse $V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4.10^{-2}}{1,85.10^{-4}} \Rightarrow V = 216$ m/s

SYNTHESE JUIN 2005 (1h30mn)

Exercice N°1 (7pts)

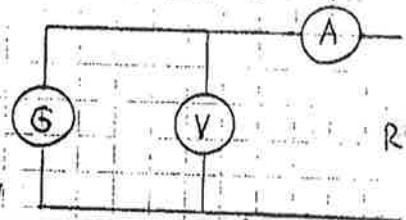


Fig.1

On désire mesurer 2 résistances inconnues ; on dispose pour cela d'un générateur de tension continue G, d'un ampèremètre A et d'un voltmètre V.
L'ampèremètre sera utilisé soit sur le calibre 10mA et sa résistance interne $r_a = 50\,\Omega$, soit sur le calibre 100mA et $r_a = 8\,\Omega$. Le voltmètre sera toujours utilisé sur le calibre 10 volts. On appellera I_a l'intensité du courant lue sur l'ampèremètre, V_v la d.d.p. lue sur le voltmètre, R la valeur réelle de la résistance inconn et $R' = V_v/I_a$, la valeur apparente de cette résistance (les valeurs des résista seront calculées avec 3 chiffres significatifs).

1/ Déterminer la résistance interne R_v du voltmètre sachant que la valeur caract -ristique indiquée sur le cadran est de $1000\,\Omega/V$?

2/ On réalise le montage de la fig.1 dit « Amont ».
- Donner le schéma équivalent faisant apparaître R_v et r_a.
- Donner l'expression de R en fonction de I_a, V_v et la résistance int. de l'appar.
- Déterminer l'erreur absolue systématique $\Delta R = R' - R$ qu'on commet qui on assimile R à R'.
- On effectue successivement les mesures pour 2 résistances inconnues

Résistance inconnue R_1	$I_a = 1{,}98\,mA$ (calibre 10mA)	$V_v = 10V$
Résistance inconnue R_2	$I_a = 92{,}5\,mA$ (calibre 100mA)	$V_v = 10V$

Les erreurs autres que systématiques étant négligeables, déterminer les valeurs réelles des deux résistances inconnues R_1 et R_2 ainsi que les erreurs relatives commises si on assimilait R_i à R'_i.

3/ On peut réaliser un autre type de montage pour mesurer la résistance inconnue R

3-a/ Quelle relation existe-t-il entre V_v et I_a ? Déduire l'expression liant R, R' ainsi que la résistance interne de l'appareil de mesure concerné.

3-b/ Dire, sans le démontrer, pour laquelle des 2 résistances R_1 ou R_2 ce montage convient.

3-c/ Déterminer pour ces cas la valeur numérique de R'. Déduire l'erreur relative systé--matique que l'on commettrait si on assimilait R à R'.

Exercice N° 2 (13pts)

Une sphère conductrice de centre O et de rayon a est placée dans un champ électriqu uniforme E_0 comme l'indique la figure 2. Comme la sphère doit être à un potentie constant, nous donnerons à celui-ci la valeur 0 volt. E_0 agit sur les charges libre de la sphère qui se déplacent sur la (surface) surface jusqu'à avoir un champ élec -rique nul à l'intérieur de la sphère.
La sphère devient alors polarisée créant autour d'elle une distorsion du champ externe qui reste néanmoins essentiellement uniforme à grande distance. Le pote est donné en tout point extérieur à la sphère par

$$V = -E_0 \cdot r \cdot \cos\left[\theta\left(1 - a^3/r^3\right)\right]$$

a/ Vérifier que le potentiel de la sphère est nul.

b/ Montrer qu'à grande distance, le potentiel est celui correspondant à un champ uniforme dont on exprimera les composantes E_x et E_y.

c/ Montrer que V est la somme d'un potentiel correspondant à un champ uniforme et du potentiel d'un dipole électrique. Calculer le moment dipolaire élect. de la sph

…lculer les composantes radiale et tangentielle du champ électrique.
…rifier que le champ électrique à la surface de la sphère est bien normal à …lle-ci.

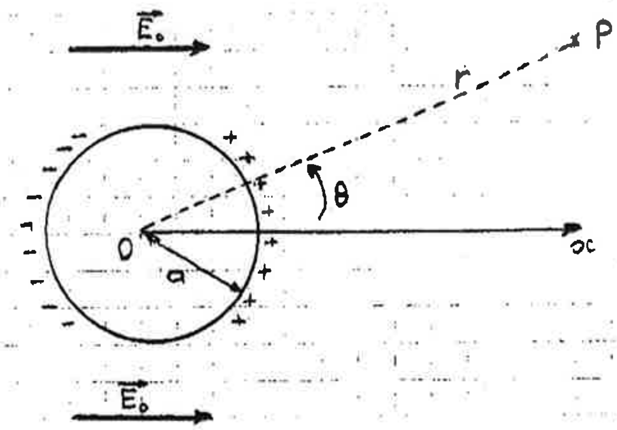


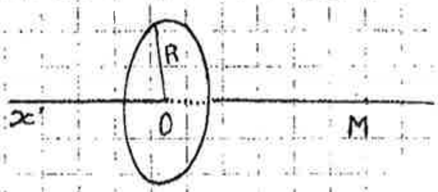
Fig. 2

SOLUTION

SYNTHESE Oct. 2006 (1h30mn)

Exercice N°1

Une spire circulaire de centre O et de rayon R, porte une charge Q positive, répartie uniformément sur sa circonférence. Soit M un point de l'axe x'Ox tq OM = x.



a) Déterminer les expressions du potentiel $V(x)$ et du champ $E(x)$ en M.

b) Tracer les courbes $V(x)$ et $E(x)$

c) Une charge $q>0$ se déplace sur l'axe x'Ox, Déterminer l'énergie cinétique E_c avec laquelle doit être lancée q à partir d'une grande distance pour arriver en O avec une vitesse nulle.

Rappel : le travail $W = \Delta E_c = -\Delta E_p$

Exercice N°2

Le condensateur de la figure ci-contre est composé de 2 armatures planes de même surface S séparées par une distance e. Un diélectrique de constante relative ε_1 remplit la moitié de l'espace entre les 2 armatures tandis que 2 diélectriques de constantes ε_2 et ε_3 remplissent chacun le quart de ce même espace.

Montrer que ce dispositif est équivalent à un assemblage de 3 condensateurs C_1, C_2 et C_3 que l'on définira.

Déterminer alors la capacité équivalente du dispositif.

E.M.D. N°2 ELECTRICITE (B) Septembre 2006

Exercice N°1 (7pts)

Un condensateur formé par deux conducteurs sphériques concentriques (C_1 et C_2) séparées par un diélectrique ε de rayons a, b, c. Le conducteur C_1 est chargé avec une charge $Q>0$ et on relie le conducteur C_2 à la terre (Fig 1)

a) Décrire le phénomène d'influence entre les deux conducteurs (cinq lignes maximum).

b) Déterminer les potentiels V_1 et V_2 relatifs à chaque conducteur.

c) Déduire la capacité du condensateur

d) Montrer que si $b \approx a$, on a $C = \frac{\varepsilon_0 S}{b-a}$

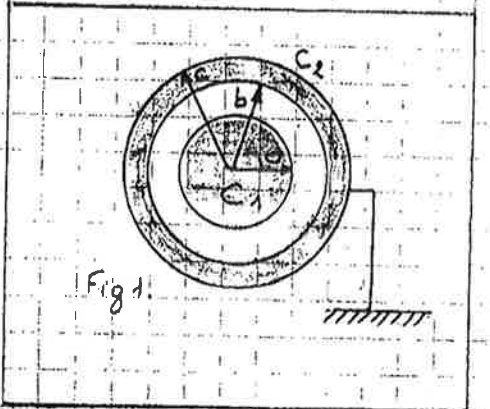


Fig 1.

Exercice N°2 (7pts)

On considère le circuit de la Figure 2, où K_1 et K_2 sont des interrupteurs. Donner un schéma équivalent et calculer la différence de potentiel V_{AB} pour les cas suivants

a) K_1 ouvert et K_2 fermé

b) K_1 fermé et K_2 ouvert

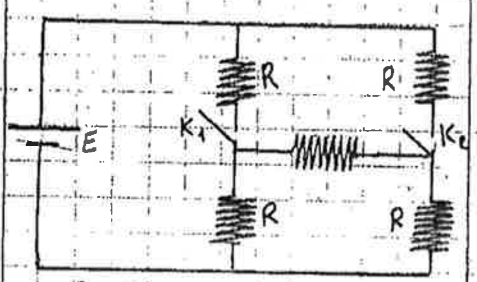


Fig 2.

Exercice N°3 (6pts)

On considère le circuit de la Fig 3, où C est un condensateur et K_1, K_2 des interrupteurs.

1) Initialement, on suppose que le condensateur est complètement déchargé (vide) et si K_1 est fermé et K_2 ouvert;

a. donner un schéma électrique équivalent.

b. montrer que la différence de potentiel aux bornes de C est:

$$V_c = E\left(1 - e^{-t/2RC}\right)$$

c. En déduire l'expression du courant de C.

2) On suppose maintenant que le condensateur est complètement chargé (c.à.d $V_c = E$ à $t=0$), on ouvre K_1 et on ferme K_2

a. Donner un schéma électrique équivalent

b. Montrer que la différence de potentiel aux bornes de C est:

$$V_c = E \cdot e^{-t/2RC}$$

c. En déduire l'expression du courant de C.

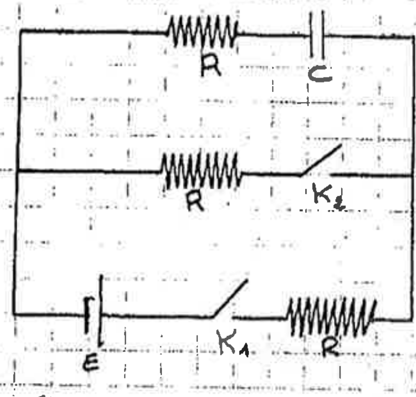
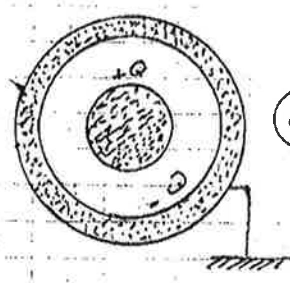


Fig 3.

Exercice N°1

a/ C_1 est chargé avec $Q>0$
Toutes les lignes de champs de C_1 arrivent à C_2 ; donc on est dans le cas d'une influence totale, d'où la distribution de charge dans la figure ci-contre.



(2p

$$q(a) = +Q$$
$$q(b) = -Q$$
$$q(c) = 0 \quad \text{car lié à la terre}$$
$$V(b) = V(c) = 0 \quad \text{volume équipotentiel}$$

b/ D'après le théorème de Gauss :

$$E = \begin{cases} 0 & \text{si } r<a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{si } a<r<b \\ 0 & \text{si } b<r<c \\ 0 & \text{si } r>c \end{cases}$$

Nous avons $V_1 = V(a)$; $V_2 = V(b) = V(c) = 0$

* si $a<r<b$.

$$dV = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} \Longrightarrow V(b) - V(a) = \int_{V_a}^{V_b} dV = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$V(b) - V(a) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_a^b = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

comme $V_2 = 0$; $V_1 = V(a) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{b-a}{ab}$

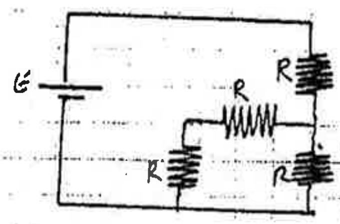
c/ la capacité $C = \dfrac{Q}{\Delta V} = \dfrac{Q}{V_1 - V_2} = \dfrac{Q}{V_1}$

d'où $$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

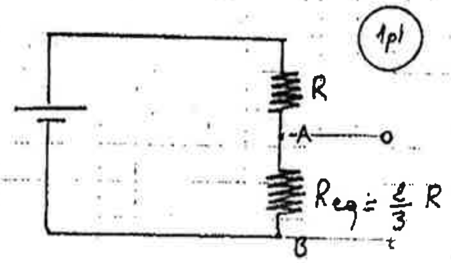
d/ si $b \sim a \Longrightarrow ab \simeq a^2$ donc $S = 4\pi a^2 \Longrightarrow C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{b-a}$

Exercice N°2

* K_1 ouvert et K_2 fermé



$\sim$

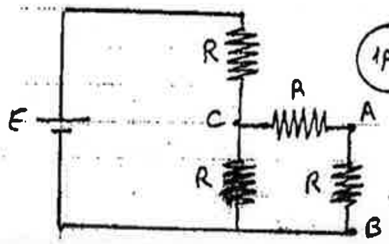


(1pt)

Loi du diviseur de t

$$V_{AB} = \frac{R}{R+R_{eq}} E = \frac{\mathcal{E}}{5}$$

* K_1 fermé et K_2 ouvert



(1pt)

$$V_{CD} = \frac{R_{eq}}{R + R_{eq}} E = \frac{2}{5} E$$

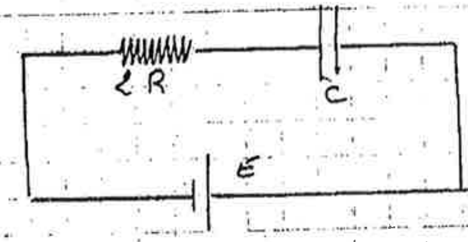
$$V_{AB} = \frac{R}{R+R} V_{CD} \Rightarrow V_{AB} = \frac{E}{5}$$

(3pts)

ice N°3 (EMD2 Sept. 2006)

K₁ fermé et K₂ ouvert.

le circuit équivalent est indiqué sur la figure ci-contre.
La loi de Kirchoff donne :



$$\frac{q}{C} + 2R\frac{dq}{dt} = E$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{2RC} = \frac{E}{2R}$$

La solution generale est égale à la solution homogene + solution particuliere

* solution homogene :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{2RC} = 0 \longrightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \Longrightarrow q_H = A\,e^{-t/RC}$$

* solution particuliere :

$$\frac{q}{2RC} = \frac{E}{2R} \Longrightarrow q_p = CE$$

* solution generale $q_G = q$

$$q = q_H + q_p \Longrightarrow q = CE + A\,e^{-t/RC}$$

* Condition Initiale $q(t=0) = 0$

$q(t=0) = 0 \Rightarrow CE + A = 0 \Rightarrow A = -CE$ d'où finalement :

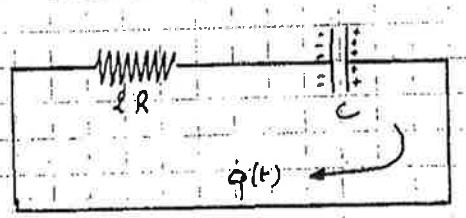
$$q(t) = CE\left(1 - e^{-t/RC}\right) \quad \text{ou} \quad V_c = \frac{q}{C} = E\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Courant de charge :

$$I = \frac{dq}{dt} \Longrightarrow I(t) = \frac{E}{R}\,e^{-t/RC}$$

K₁ ouvert et K₂ fermé :

le circuit équivalent est indiqué sur la figure ci-contre.
La loi de Kirchoff donne :



$$V_c + V_R = 0$$

$$\frac{q}{C} + 2R\frac{dq}{dt} = 0$$

i : $q(t) = CE\,e^{-t/2RC}$ ou $V_c = \frac{q}{C} = E\,e^{-t/2RC}$

urant de décharge

$$I(t) = \frac{dq}{dt} \Longrightarrow I(t) = -\frac{E}{R}\,e^{-t/2RC}$$

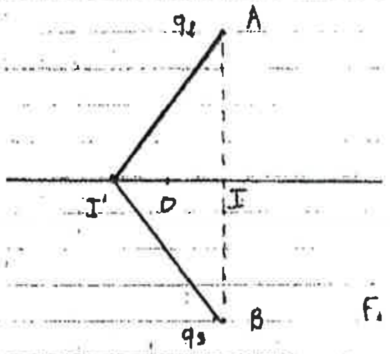
E. M. D. N° 1 — 20 Fev 2006 A

Exercice N° 1

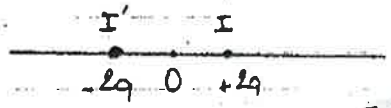
X

On assimile une molecule d'eau H_2O à un système de 3 charges ponctuelles q_1, q_2 et q_3 situées aux centres respectifs des atomes d'oxygène et d'hydrogène de la molécule H_2O. Comme l'indique la figure 1, q_2 et q_3 sont symétriques par rapport au point I de l'axe $x'Ox$ ($IA = IB = b$), on posera $OI = OI' = a$. Soit M un point de l'axe d'abscisse $OM = x > a$. Si $q_1 = -2q$ et $q_2 = q_3 = q$.

1. Déterminer le potentiel $V(x)$ en M en f° de x, a et b.
2. Dans le cas où $b^2 << (x-a)^2$, donner l'expression approchée du potentiel. Soit $V_1(x,a)$ ce potentiel.
3. Montrer que $V_1(x,a)$ correspond au potentiel créé par un dipôle $(+2q, -2q)$ en un point de la droite des 2 charges (voir fig 3). Déduire le moment dipolaire de la molécule si $q = 0{,}52.10^{-19}$ Cb et $a = 0{,}3.10^{-10}$ m.



F.1

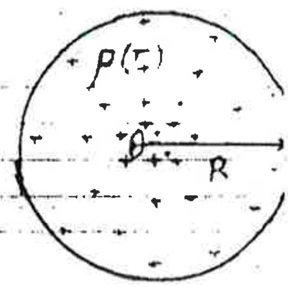


F.3

Exercice N° 2

Une sphère de centre O et de rayon R porte une charge positive q dont la densité volumique ρ ne dépend que de la distance à son centre tel que $\rho = \rho_0 (1 - r/R)$ où ρ_0 est constante.

1. Justifier très brièvement le fait que le vecteur $\vec{E}$ soit radial en tout point M de l'espace.
2. Déterminer le module $\|\vec{E}\|$ dans tout l'espace.
3. Pour quelle distance $r = r_m$ du centre de la sphère, ce champ $\|\vec{E}\|$ devient-il maximal ?

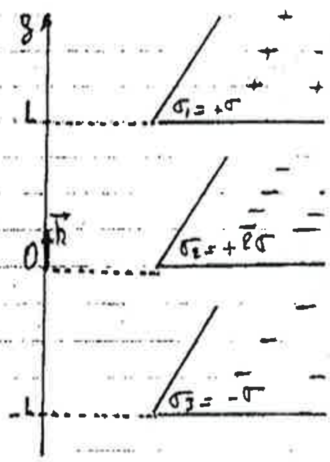


Exercice N° 3

PV

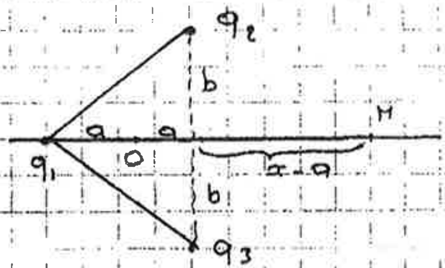
Déterminer le module du champ electrique crée par un plan infini chargé uniformement avec une densité surfacique $\sigma > 0$, à travers tout l'espace.

2. Trois plans infinis chargés uniformement avec les densités respectives $\sigma_1 = +\sigma$; $\sigma_2 = 2\sigma$; $\sigma_3 = -\sigma$ sont disposés parallèlement comme le montre la fig. ci contre. Déterminer les expressions du module du champ électrique $\vec{E}$ et du potentiel V dans toutes les régions de l'espace en prenant comme référentiel de potentiel, le plan du milieu $V(z = 0) = 0$ volt.



CORRECTION EMD 1 du 20 Fev 2006

Exercice N°1

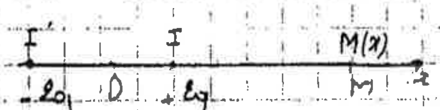


1/ $V_M = \frac{K q_1}{x+a} + \frac{K(q_2+q_3)}{\sqrt{b^2+(x-a)^2}}$

$$V_M(x, a, b) = \frac{2Kq}{\sqrt{b^2+(x-a)^2}} - \frac{2Kq}{x+a}$$

2/ si $b^2 << (x-a)^2$

$$V_1(x, a) = \frac{2Kq}{x-a} - \frac{2Kq}{x+a} = \frac{4Kq\,a}{x^2-a^2}$$



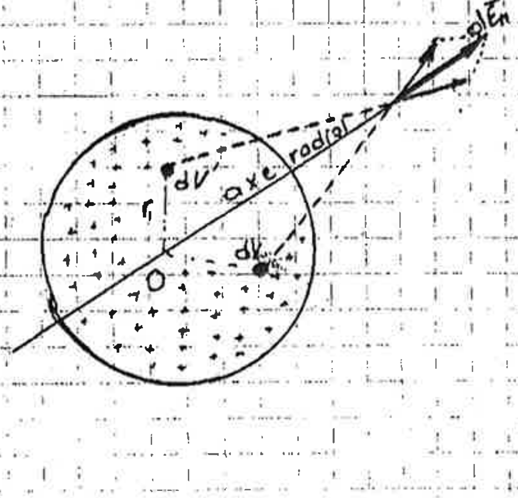
On détermine le potentiel crée par le dipole $(-2q, +2q)$ en un point M de l'axe $x'Ox$

$$V_M = 2Kq\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) = \frac{4Kqa}{x^2-a^2}$$

→ $V_1(x, a)$ correspond au potentiel V_M crée par le dipôle en M. La molécule H_2O est équivalente au dipôle $(-2q, +2q)$, son moment dipolaire est celui du dipôle $\vec{p}$ tel que

$$\vec{p} = 2q\,\vec{I'I} \Rightarrow p = 4qa \Rightarrow \boxed{p = 6,24 \cdot 10^{-30}\ Cb.m}$$

Exercice N°2



1/ Sens et direction de $\vec{E}_n$ en un point M quelconque.

- un élément dV de la sphère porte une charge dq tel que $dq = \rho(r).dV > 0$: (r est la distance / O), ce qui nous donne en M un champ $d\vec{E}_n$ sortant.
- l'élément symétrique de dV par rapport à l'axe radial est dV', il porte la même charge $dq' = dq$, que dV car il est situé à égale distance de O que dV, il nous donne en M un champ $d\vec{E}'_n$ sortant / $dE_n = dE'_n$ en module
- La résultante $d\vec{E}_n + d\vec{E}'_n$ est radiale et sortante donc le champ total $d\vec{E}_n$ est radial et sortant

2/ Module de $\vec{E}_n$

a) $\forall$ M / OM = r > R (M à l'extérieur)

$$\Phi = \oint\!\!\oint_{S_G} \vec{E}_M \cdot d\vec{S}_G = \oint\!\!\oint_{S_G} E_M \cdot dS_G = E_M \oint\!\!\oint_{S_G} dS_G = E_M\, S_G \Rightarrow \Phi = E_M\, 4\pi r^2 \quad ①$$

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V_G} dq = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V_G} \rho(r)\, dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr \Rightarrow \Phi = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0} \quad ②$$

$$① = ② : E_M\, 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_M(r) = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}}$$

b) $\forall$ M / OM = r < R (M à l'intérieur).

$$\Phi = \oint\!\!\oint \vec{E}_M \cdot d\vec{S}_G = \oint\!\!\oint_{S_G} E_M \cdot dS_G = E_M \oint\!\!\oint_{S_G} dS_G = E_M S_G \Rightarrow \Phi = E_M\, 4\pi r^2 \quad ①$$

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int dq = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho(r)\, dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr \Rightarrow \Phi = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right) \quad ②$$

$$① = ② : E_M\, 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right) \Rightarrow \boxed{E_M(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right)}$$

3) On détermine $r = r_m$ pour que E_M soit maximal

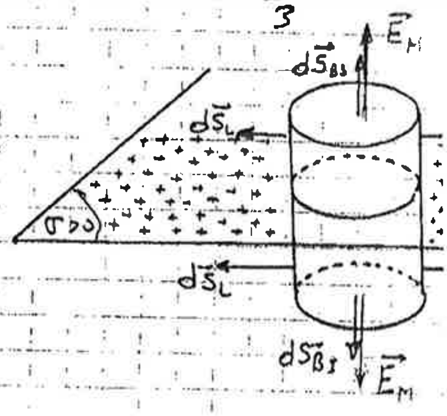
* A l'extérieur E_M est maximum lorsque $r \to R \Rightarrow E_{max_1} = \frac{\rho_0 R}{12\varepsilon_0}$

* A l'intérieur E_M est maximum lorsque $\frac{dE_M}{dr} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{2r}{4R}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{2r}{4R} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = r_m = \frac{2R}{3}$ d'où $E_{max_2} = E_M(r = r_m) = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$

$E_{max} = \sup(E_{max_1}, E_{max_2}) = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$ et $r_m = \frac{2R}{3}$

Exercice N°3

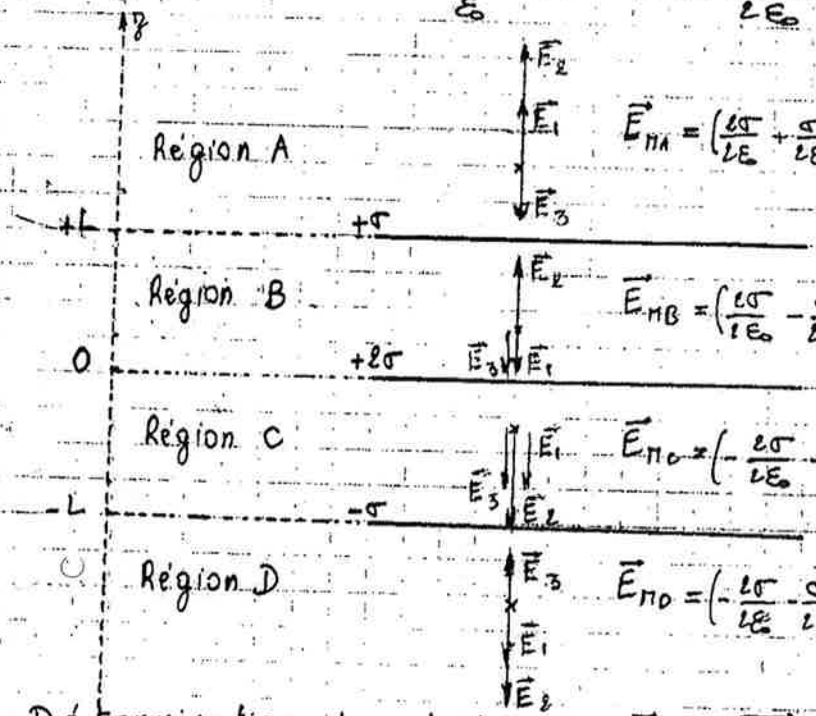


1) * $d\Phi = \vec{E}_M \cdot d\vec{S}_G = \vec{E}_M(d\vec{S}_{B_1} + d\vec{S}_L + d\vec{S}_{B_2})$

$= E_M\, dS_{B_1} + E_M\, dS_{B_2} = 2E_M\, dS$

* $d\Phi = \frac{\sigma \cdot dS}{\varepsilon_0}$

en égalisant : $2E_M\, dS = \frac{\sigma\, dS}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_M = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$



$\vec{E}_{MA} = \left(\frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{k} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k} \Rightarrow E_{MA} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$\vec{E}_{MB} = \left(\frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{k} = \vec{0}\,\vec{k} \Rightarrow E_{MB} = 0$

$\vec{E}_{MC} = \left(-\frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{k} = -\frac{2\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k} \Rightarrow E_{MC} = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0}$

$\vec{E}_{MD} = \left(-\frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{k} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k} \Rightarrow E_{MD} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Détermination des potentiels : $\vec{E}_M = -\vec{grad}\, V_M \Rightarrow \vec{E}_M = -\frac{dV_M}{dz}\vec{k}$

Région A : $-\frac{dV_M}{dz} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int dV_M = \int -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\, dz \Rightarrow V_{MA} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z + C_A$

Région B : $-\frac{dV_M}{dz} = 0 \Rightarrow \int dV_M = 0 \Rightarrow V_{MB} = C_B$

Région C : $-\frac{dV_M}{dz} = -\frac{2\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int dV_M = \int -\frac{2\sigma}{\varepsilon_0}\, dz \Rightarrow V_{MC} = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0} z + C_C$

Région D : $-\frac{dV_M}{dz} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int dV_M = \int -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\, dz \Rightarrow V_{MD} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} z + C_D$

Détermination des constantes C_i

$$\begin{aligned} &V_{MA}(z = L) = V_{MB}(z = L) \\ &V_{MB}(z = 0) = V_{MC}(z = 0) = 0 \\ &V_{MC}(z = -L) = V_{MD}(z = -L) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} C_A = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} L \\ C_B = C_C = 0 \\ C_D = -\frac{\sigma L}{\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{MA} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} L \\ V_{MB} = 0 \\ V_{MC} = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0} z \\ V_{MD} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} z - \frac{\sigma L}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

Exercice 1

Soit un anneau de rayon a chargé linéiquement d'une densité $+\lambda$ (Fig 1.a)

1) Calculer le potentiel et le champ électrique au pt M de l'axe Ox.
2) En utilisant les résultats de la première question déduire le champ et le potentiel pour la figure 1-b, au point point (0,0), origine du repère xOy.
3) A.N : $\lambda = 2.10^{-10}$ Cb/m ; $a = 10^{-6}$m et $R = 5.10^{-6}$m.
4) On place en O une charge q positive.

a) Calculer la force qu'exercent les 2 anneaux sur q

b) Appli. Num. $q = 5.10^{-10}$ Cb

c) Calculer l'énergie potentielle de la charge q. (A.N).

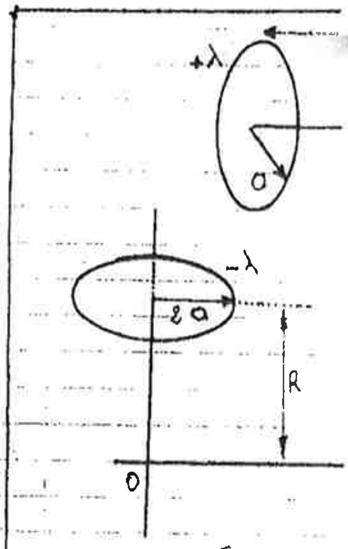


Figure 1-b

Exercice 2

On assimile l'atome d'hydrogène à un noyau chargé de $+e$ (ponctuelle) et une charge $(-e)$ répartie sur une surface sphérique S de centre O (position du noyau). L'expression du potentiel électrique de ce système est

$$V = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot e^{-r/a}$$: (e : charge du noyau)

a est une constante et r la distance OM : $V(r)$.

1) Sachant que $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$, déduire $E(r)$.
2) Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers S(O, R). En appliquant le théorème de Gauss, calculer la charge q interne.
3) Donner la valeur du flux si $R \to 0$. En déduire la charge du noyau.
4) Donner la valeur du flux si $R \to \infty$. Conclusion.

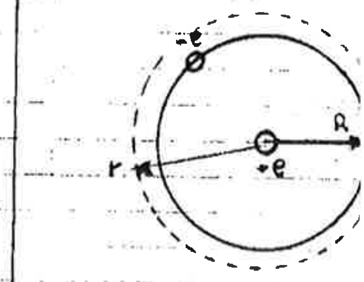


Figure 2

OLUTION:

EXERCICE 1

$dV = K\frac{dq}{r}$ avec $dq = \lambda a\, d\varphi$; $0 < \varphi < 2\pi$

$r = \sqrt{a^2+x^2} \Rightarrow V(r) = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$\vec{E} = -\vec{grad}V = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0} \frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}} \vec{i}$

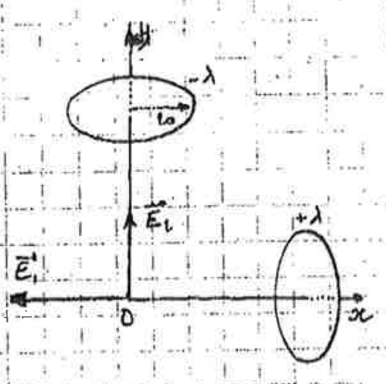


figure 2 :

potentiel : $V = V(-\lambda) + V(+\lambda) = -\frac{\lambda a}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a^2+R^2}} + \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}$

$$V = \frac{\lambda a}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2\sqrt{a^2+R^2}} - \frac{1}{\sqrt{4a^2+R^2}}\right)$$

champ : $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$; $\vec{E_1} = \left(-\frac{\lambda a}{2\varepsilon_0} \frac{R}{(4a^2+R^2)^{3/2}}, 0, 0\right)$; $\vec{E_2}\left(0, \frac{\lambda a R}{\varepsilon_0 (4a^2+R^2)^{3/2}}, 0\right)$

$$\text{d'où } \vec{E} = \left(\frac{-\lambda a}{2\varepsilon_0} \frac{R}{(a^2+R^2)^{3/2}} ; \frac{\lambda a R}{\varepsilon_0(4a^2+R^2)^{3/2}}, 0\right)$$

Applic. Num. $V = -226 \cdot 10^{-25}$ V

$\vec{F} = q\vec{E} = \left(\frac{-\lambda q a R}{2\varepsilon_0(a^2+R^2)^{3/2}} ; \frac{\lambda q a R}{2\varepsilon_0(4a^2+R^2)^{3/2}}, 0\right)$; $E_p = qV = \frac{\lambda q a}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2\sqrt{a^2+R^2}} - \frac{1}{\sqrt{4a^2+R^2}}\right)$

EXERCICE N°2

1) $\vec{E} = -\vec{grad}\, V = \left(-\frac{dV}{dr}, 0, 0\right)$ comme $V = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-r/a}$

alors $E_r = -\left[-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} e^{-r/a} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r\, a} e^{-r/a}\right] = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-r/a}$

2) $\phi = \oint\!\!\oint \vec{E}\,\vec{dS} = E\, 4\pi r^2$; si $r = R \Rightarrow \phi = E(R)\, 4\pi R^2 = \frac{e}{\varepsilon_0}\left(1+\frac{R}{a}\right)e^{-R/a}$

d'après le theoreme de Gauss $\phi = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{e}{\varepsilon_0}\left(1+\frac{R}{a}\right)e^{-R/a}$

$$\text{d'où } \boxed{q_{int} = e\left(1+\frac{R}{a}\right)e^{-R/a}}$$

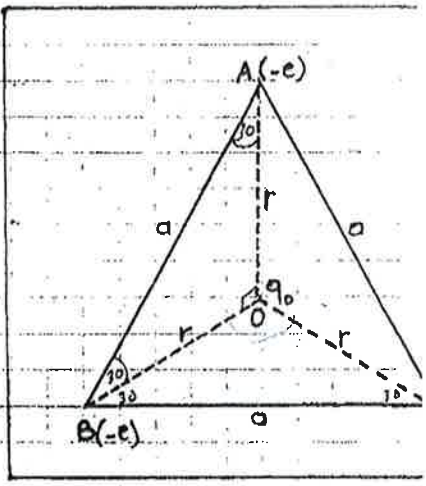
3°) si $R \to \infty$ $q_{int} \to 0$ et $\phi \to 0$

c'est à dire que l'atome d'Hydrogène est neutre.

1^{er} E.M.D d'Electricité

17 Fev 2004

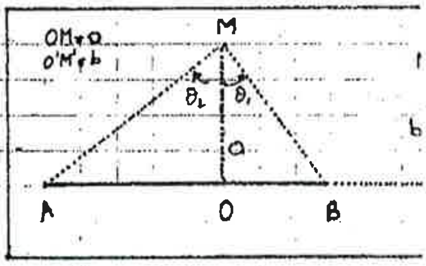
Exercice N° 1



L'atome de Lithium est formé par un noyau portant une charge $q_0 = +3e$ et de trois electrons de charges $q_1 = q_2 = q_3 = -e$. ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C). On suppose que q_1, q_2 et q_3 occupent les trois sommets d'un triangle équilatéral ABC dont q_0 occupe le centre O. (Voir fig 1). $OA = OB = OC = r$ et $AB = a = r\sqrt{3}$.

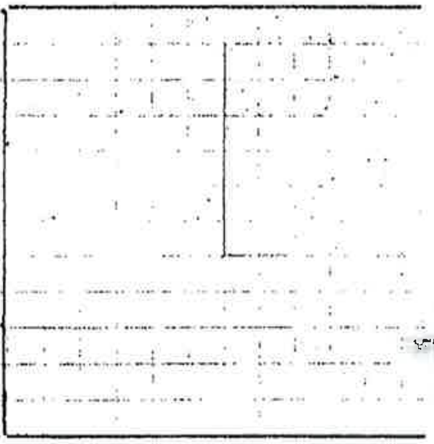
1) Déterminer la Force résultante $\vec{F}_0$ exercée sur q_0 par les 3 autres charges
2) Déterminer la force $\vec{F}_1$ agissant sur l'electron du sommet A du triangle.
3) Déduire les forces $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ agissant sur les e^- placés en B et en C.
4) Quelle est l'energie pot. d'interaction du système formé par les 4 charges.
On rappelle pour un sys. de 2 charges $E_{p(q_i, q_j)} = \frac{K q_i q_j}{r_{ij}}$

Exercice N° 2 :



On considère une portion de fil AB uniformement polarisé ; sa densité linéique de charge est $\lambda > 0$.
1) Déterminer le champ $\vec{E}$ en M, en fonction de θ_1 et θ_2
2) En déduire le champ $\vec{E}$ et le potentiel V en M créés par un fil infini.
3) Dans le cas du fil infini, exprimer ΔV entre les pts M et M'.

Exercice N° 3 :



A. Une charge $q > 0$ est distribuée uniformément sur un plan infini. soit σ la densité de charge. Déterminer, en utilisant le theoreme de Gauss, le champ electrique crée par cette distribution à travers tout l'espace.

B. La surface fermée du cube de côté a est placée dans une région où existe un champ electrique $\vec{E} = E.\vec{i}$ (voir Fig. 3). Déterminer le flux du champ $\vec{E}$ à travers la surface du cube ainsi que la charge interieure totale si :

1. Le champ électrique $\vec{E}$ est uniforme ($\vec{E} = E\vec{i}$ et $E = C^{te}$)
2. Le champ electrique $\vec{E} = K.x.\vec{i}$ où K est une C^{te}

RATTRAPAGE PHY 2 2015

AERO

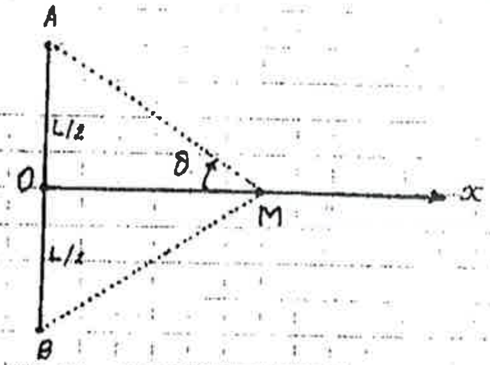
Exercice 1

On considère une portion de fil AB de longueur L uniformément chargé en longueur $\lambda > 0$

1. Montrer que le champ électrique créé au point M se trouvant sur la médiatrice du segment AB à une distance OM = a est donné par :

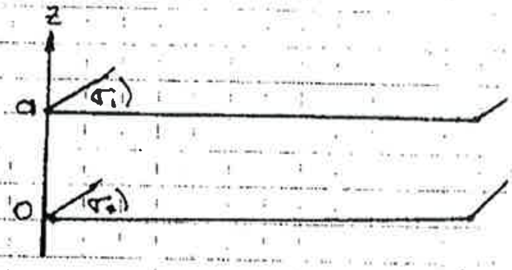
$$\vec{E} = (2K\lambda \sin\theta / a)\, \vec{\imath}$$

2. Déduire le champ électrique par un fil infini.
3. Retrouver le champ électrique crée par un fil infini en utilisant le théorème de Gauss.



Exercice 2

1. Déterminer le champ electrique crée dans tout l'espace par un plan infini de densité surfacique $\sigma_0 > 0$
2. Déduire le champ electrique crée par 2 plans infinis portant des repartitions uniformes de charges, de densités surfaciques $\sigma_1 = \sigma_0$ et $\sigma_2 = -3\sigma_0$ et placés parallèlement à une distance a.



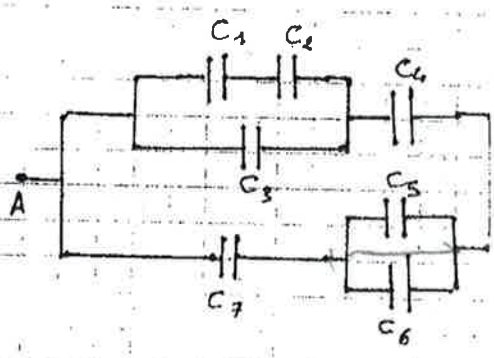
Exercice 3

Stop

On considère l'association de condensateurs représentée par la figure ci-contre. Sachant que la d.d.p entre A et B est $V_{AB} = 120V$.

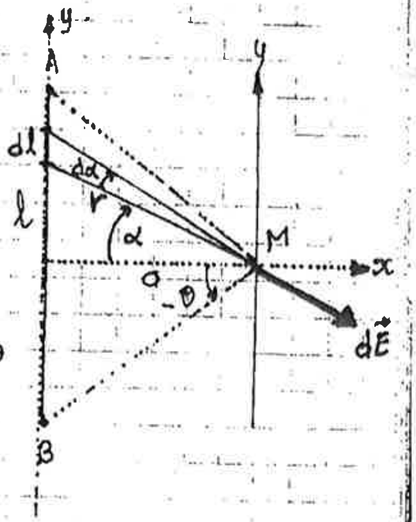
1. Déterminer la capacité équivalente entre A et B
2. Déterminer la charge de C_6
3. Déterminer la d.d.p. aux bornes de C_7

On donne $C_1 = 4\mu F$; $C_2 = 2\mu F$; $C_3 = 2\mu F$; $C_4 = 1\mu F$
$C_6 = 2\mu F$ et $C_7 = 3\mu F$



Exercice 1

1) $d\vec{E}\begin{cases} dE_x = dE.\cos\alpha = K\dfrac{\lambda\, dl}{r^2}\cos\alpha \\ dE_y = -dE.\sin\alpha = -K\dfrac{\lambda\, dl}{r^2}\sin\alpha \end{cases}$



d'autre part $tg\alpha = \dfrac{l}{a} \Rightarrow l = a\,tg\alpha \Rightarrow dl = \dfrac{a.d\alpha}{\cos^2\alpha}$

et $\cos\alpha = \dfrac{a}{r} \Rightarrow r = \dfrac{a}{\cos\alpha}$

d'où $\vec{E} = \int d\vec{E} \Rightarrow \vec{E}\begin{cases} E_x = \int dE_x = \dfrac{K\lambda}{a}\displaystyle\int_{-\theta}^{\theta}\cos\alpha.\,d\alpha = 2.\dfrac{K\lambda}{a}\sin\theta \\ E_y = \int dE_y = \dfrac{K\lambda}{a}\displaystyle\int_{-\theta}^{\theta}\sin\alpha\, d\alpha = 0 \end{cases}$

2) Fil infini $\theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{E}\begin{cases} E_x = \dfrac{2K\lambda}{a} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{a} \\ E_y = 0 \end{cases}$

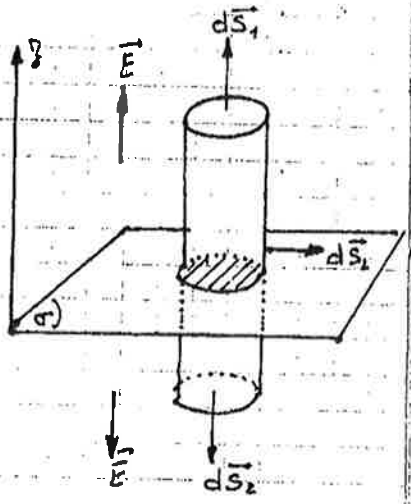
3) Par raison de symétrie, le champ $\vec{E}$ crée par un fil perpendiculaire au fil (radial) sortant puisque $\lambda > 0$. S_G choisie est un cylindre (r, L)

$\phi = \iint \vec{E}.\vec{dS} = \iint \vec{E}.d\vec{S_1} + \iint \vec{E}.d\vec{S_2} + \iint \vec{E}.d\vec{S_L} = \iint \vec{E}.dS_L = E.2\pi r L$

d'autre part $\phi = \dfrac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{r}$

Exercice 2

$\phi = \oiint_{S_G} \vec{E}.\vec{dS} = \iint \vec{E}.d\vec{S_1} + \iint \vec{E}.d\vec{S_2} + \iint \vec{E}.d\vec{S_L}$; $2ES = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0}$

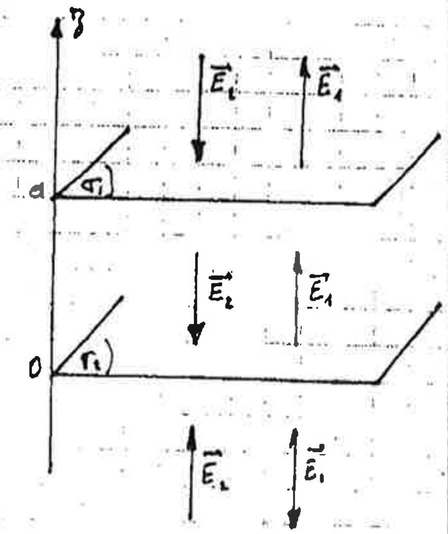


$\phi = 2.E\,S_{base}$; d'autre part $\phi = \dfrac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma_0 S}{\varepsilon_0}$;

(1) = (2) $\Rightarrow E = \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$ ou $\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{k} & si\ z > 0 \\ -\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{k} & si\ z < 0 \end{cases}$

2) $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$ on obtient

$$\vec{E} = \begin{cases} (-E_1 + E_2)\vec{k} = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\vec{k} & si\quad z < 0 \\ (-E_1 - E_2)\vec{k} = -\dfrac{2\sigma_0}{\varepsilon_0}\vec{k} & si\quad 0 < z < a \\ (E_1 - E_2)\vec{k} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k} & si\quad z > 0 \end{cases}$$



Principe de superposition.

Pour le potentiel V on aurait eu $V = -\int \vec{E}.\vec{dl}$

$V = -\int E\, dz$

sur les 3 zones respectivement.

Exercice 3

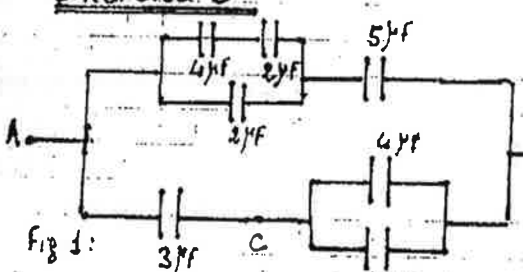


Fig 1:

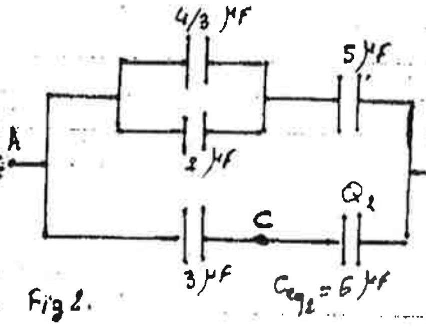
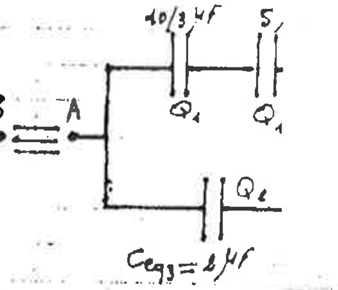


Fig 2.



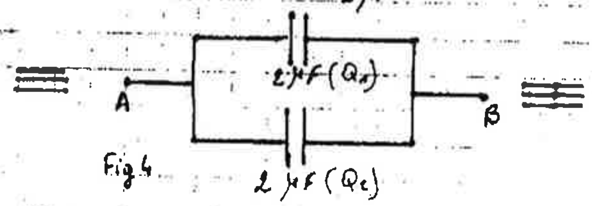
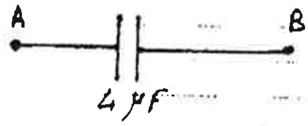


Fig 4



$C_{eq} = 4\,\mu F$

2°/ Fig 4 $\Rightarrow V_{AB} = \frac{Q_2}{C_{eq3}} \Rightarrow Q_2 = V_{AB}.2\mu F = 240\,\mu C$

Fig 2 $\Rightarrow V_{CB} = \frac{Q_2}{C_{eq2}} \Rightarrow V_{CB} = \frac{240}{6} = 40\,V$

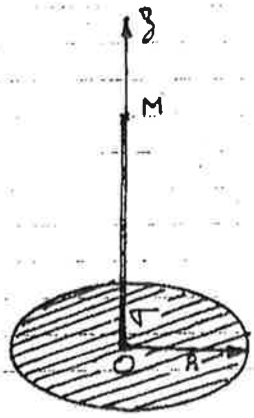
d'où $Q_{C6} = V_{CB}.Q_{C6} = 40 \times 2.10^{-6} = 80\,\mu C$

3/ Fig 1 $\Rightarrow V_{AB} = V_{C7} + V_{CB} \Rightarrow V_{C7} = V_{AB} - V_{CB} = 80V$

ou bien autre méthode $V_{C7} = \frac{Q_{C7}}{C_7} = \frac{Q_2}{C_7} = \frac{240}{3} = 80V$.

EXAMEN DE PHY 2 (Vogue 2) 2015

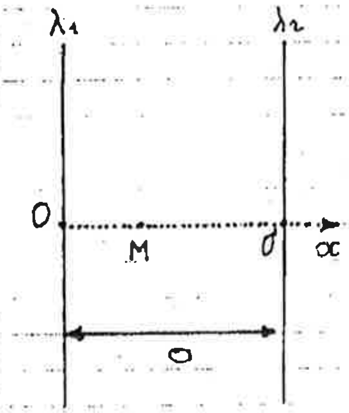
Exercice 1



On considère un disque de centre O et de rayon R uniformément chargé en surface ($\sigma > 0$).

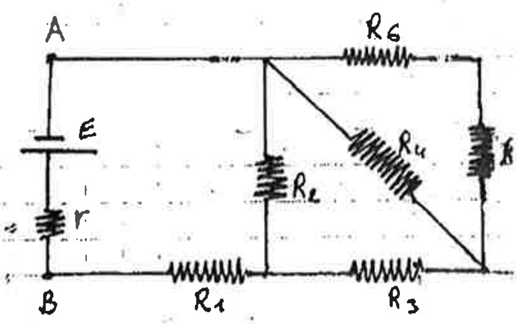
1. Montrer que le champ electrique créé par le disque en un point M de coordonnée z de l'axe de symétrie du disque est donné par :
$$\vec{E} = (\sigma / 2\varepsilon_0)\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{k}$$
2. Déduire le champ electrique créé par un plan infini en un pt quelconque de l'espace.
3. Retrouvez le champ electrique créé par un plan infini en utilisant le théorème de Gauss.

Exercice 2



1. Déterminer le champ electrique créé par un fil infini uniformément chargé de densité linéique $\lambda = \lambda_0 > 0$.
2. Déduire le champ electrique créé par 2 fils infinis séparés par une distance a, portants des répartitions uniformes de charges de densités linéiques $\lambda_1 = \lambda_0$ et $\lambda_2 = -2\lambda_0$ en un point M se trouvant dans le même plan que les deux fils à une distance $OM = x$

Exercice 3



Soit le circuit de la figure ci-contre.

On donne $R_1 = \frac{3}{8}R$; $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R$

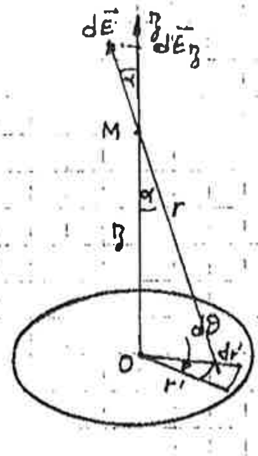
1. Déterminer la résistance equiv. R_{AB} entre A et B
2. Déterminer la puissance dissipée dans R_{AB} en fonction de R, r et E.
3. Pour quelle valeur de R cette puissance est-elle maximale. Donner P_{max}.

A.N : $E = 12\ V$ et $r = 0,3\ \Omega$.

CORRIGE du RATTRAPAGE Vague 2 2015

EXERCICE 1

1) Par raison de symétrie, le champ $\vec{E}$ est totalement porté par Oz



$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int dE_z \cdot \vec{k} = \int dE \cdot \cos\alpha \cdot \vec{k}$$

or $dE = K \dfrac{dq}{r^2} = K \dfrac{\sigma\, ds}{r^2} = K \dfrac{\sigma \cdot r' d\theta \cdot dr}{r^2}$

d'où $\vec{E} = \iint K\sigma \dfrac{r' dr' \cdot d\theta}{r^2} \cdot \cos\alpha \cdot \vec{k}$

comme $r^2 = z^2 + r'^2$ et $\cos\alpha = \dfrac{z}{\sqrt{r'^2 + z^2}}$

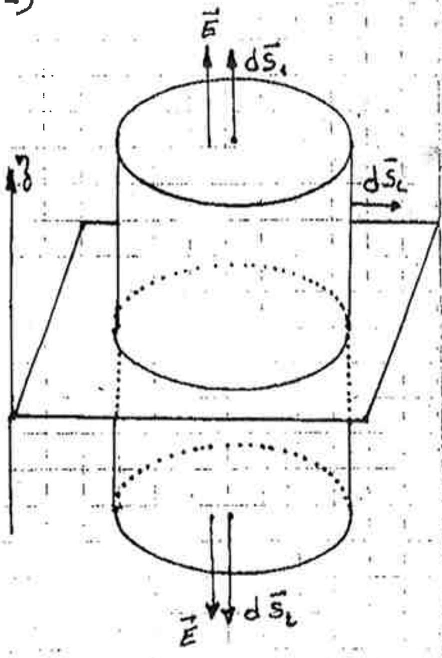
on obtient $\vec{E} = K\sigma z \displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2+z^2)^{3/2}} \cdot \vec{k}$

finalement $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{z}{|z|} - \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{k}$

2) On obtient le champ créé par un plan infini en faisant tendre R vers l'infini

$$E_{plan} = \lim \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{k} = \begin{cases} \sigma/2\varepsilon_0 \cdot \vec{k} & \text{pour } z>0 \\ -\sigma/2\varepsilon_0 \cdot \vec{k} & \text{pour } z<0 \end{cases}$$

3) Par raison de symétrie le champ $\vec{E}$ créé par un plan infini est perpendiculaire au plan (sortant puisque $\sigma > 0$). S_G choisie est un cylindre (r, L)



$$\phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \underbrace{\iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_L}_{0}$$

$$\phi = 2\iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = 2E \cdot S$$

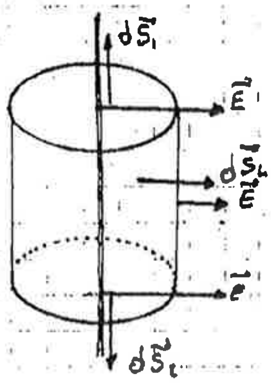
d'autre part $\phi = \dfrac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Finalement

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} & \text{si } z>0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} & \text{si } z<0 \end{cases}$$

Exercice 2

Par raison de symétrie, le champ crée par un fil infini est perpendiculaire au fil (radial) sortant puisque $\sigma > 0$



$$\phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1}_{0} + \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_L + \underbrace{\iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_2}_{0} = E \cdot 2\pi r L$$

et comme $\phi = \dfrac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda L}{\varepsilon_0}$ alors $\Longrightarrow E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r}$

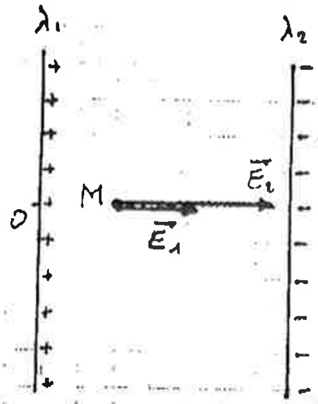
Finalement $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r}\, \vec{u}_r$

2) Cas de deux fils

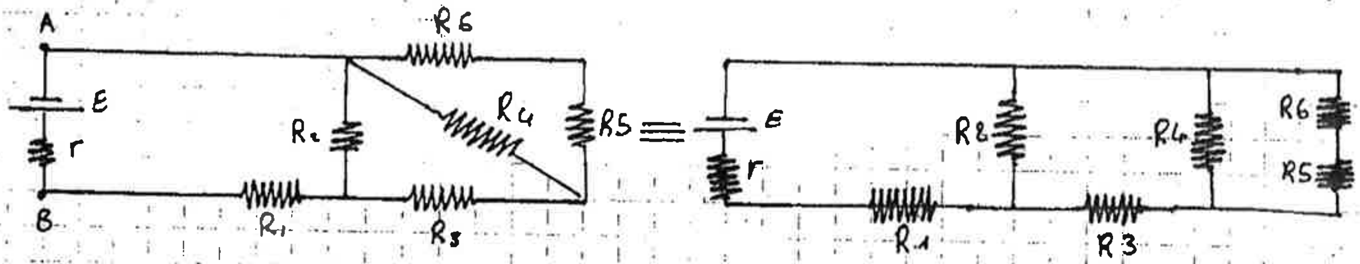
$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) = \left(|\vec{E}_1| + |\vec{E}_2|\right)\vec{i}$$

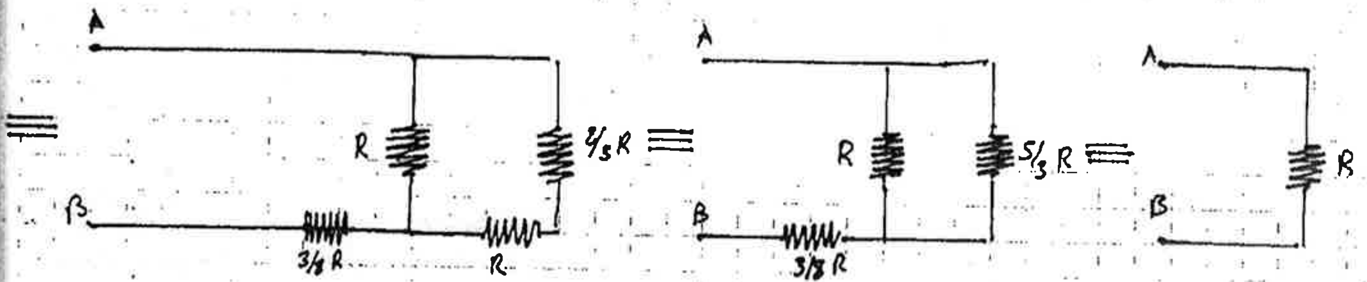
avec $|\vec{E}_1| = \dfrac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{x}$ et $|\vec{E}_2| = \dfrac{2\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{a-x}$

d'où $\vec{E} = \dfrac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{a-x}\right)\vec{i} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)$



EXERCICE 3 :





2) $P = R_{AB}\, I^2 = R I^2$

$I = \dfrac{E}{R+r}$ $\Rightarrow$ $P = \dfrac{R\,E^2}{(R+r)^2}$

3) P_{max} ? $\dfrac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow (R+r)^2 - 2R(R+r) = 0 \Rightarrow R = r$

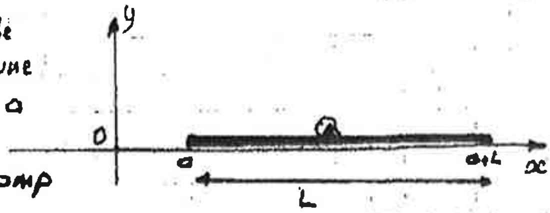
$P_{max} = P(r) = \dfrac{r\,E^2}{4r^2} = \dfrac{E^2}{r}$

A. N. $P_{max} = 120\ W$

EXAMEN de PHY2 Aéronautique Juin 2015

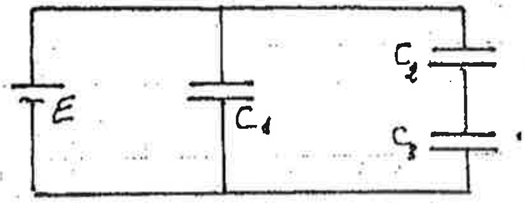
Exercice 1

Une charge totale Q positive est distribuée de manière uniforme sur une tige de longueur L. L'une des extrémités de la tige est située à une distance a du centre du repère O. (Fig ci-contre)
Déterminer l'expression littérale du vecteur champ électrique $\vec{E}$ créé par la tige au point O.



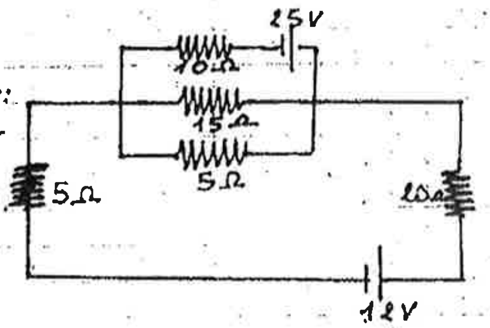
Exercice 2

Calculer, lorsqu'ils sont totalement chargés, les charges des condensateurs C_1, C_2 et C_3.
En déduire les différences de potentiel à leurs bornes. On donne $E = 10V$; $C_1 = 10\,\mu F$
$C_2 = 15\,\mu F$ et $C_3 = 5\,\mu F$.



Exercice 3

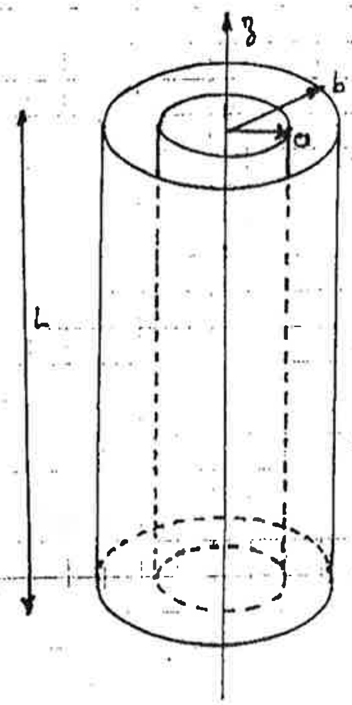
Pour le circuit électrique donné sur la Fig ci-contre:
1. Calculer les intensités des courants électriques circulant dans CHAQUE BRANCHE du circuit.
2. Quelle est la différence de potentiel entre les pts A et B.
3. Calculer la puissance électrique totale dissipée par effet Joule dans les résistances.



Exercice 4

Un condensateur est constitué de deux surfaces cylindriques concentriques d'axe Oz. La première surface cylindrique de rayon a porte une charge totale positive $+Q$ répartie uniformément sur elle.
Cette surface cylindrique se trouve à l'intérieur d'une autre surface cylindrique de rayon b et chargé $-Q$.
La hauteur des 2 cylindres est L qu'on supposera très grande par rapport à a et b.

1. Montrer en utilisant le théorème de Gauss que le champ E à une distance r de l'axe est
$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r} \quad \text{pour} \quad a < r < b$$
Préciser la direction et le sens du champ $\vec{E}$
2. Calculer la différence de potentiel entre les 2 surfaces
3. Déterminer la capacité de ce condensateur cylindrique.

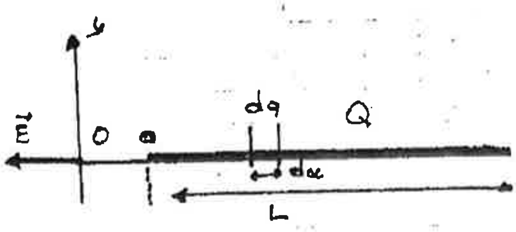


[redacted]

SOLUTION de PHY2. Mai 2015 Aéronautique

Exercice 1

$$d\vec{E}\begin{cases} dE_x = -\dfrac{K\,dq}{x^2} = -\dfrac{K\,\lambda\,dx}{x^2} & \text{avec } \lambda = \dfrac{Q}{L} \\ dE_y = 0 \end{cases}$$



$$\vec{E} = \int d\vec{E} = -K\frac{Q}{L}\int_a^{a+L}\frac{dx}{x^2}$$

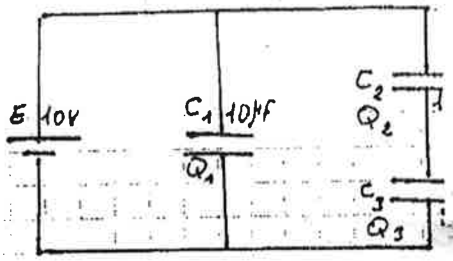
$$\vec{E} = K\frac{Q}{L}\left(\frac{1}{a+L} - \frac{1}{a}\right)\vec{i}$$

Exercice 2

2 condensateurs en série ont la m̂ charge $Q_2 = Q_3$

2 condensateurs en // ont la même d.d.p

donc $C_{eq} = \dfrac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} = \dfrac{15 \cdot 5}{15+5} = 3{,}75\ \mu F$



donc $Q_1 = C_1 E = 100\ \mu C$ $\quad V_1 = E = 10V$

$Q_2 = C_{eq} E = 37{,}5\ \mu C$ et $V_2 = Q_2/C_2 = 2{,}5V$

$Q_3 = C_{eq} E = 37{,}5\ \mu C$ $\quad V_3 = Q_3/C_3 = 7{,}5V$

Exercice 3

1) noeud $i_1 + i_2 = i_3 + i_4$

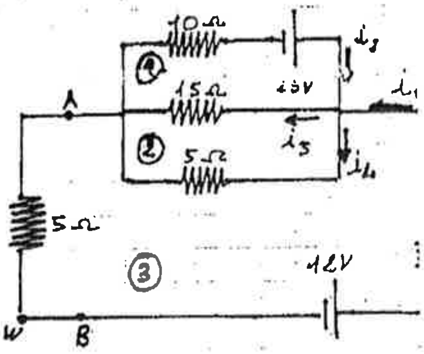
maille 1 $25 - 10 i_2 - 15 i_3 = 0$

maille 2 $15 i_3 - 5 i_4 = 0$

maille 3 $15 i_3 + 25 i_1 - 12 = 0$

Solution $i_1 = 0{,}187A$ $\quad i_3 = 0{,}488A$

$i_2 = 1{,}767A$ $\quad i_4 = 1{,}466A$



2) $U_A - U_B = 5\,i_1 = 0{,}93\ V$

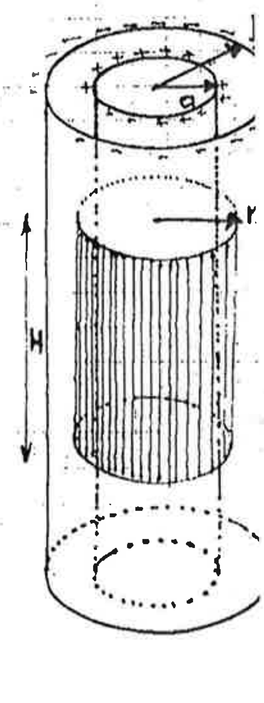
3) $P = \sum r_i I_i^2$ ou bien $P = \sum E_i i_i = E_1 i_1 + E_2 i_2 = 46{,}4W$

Exercice 4

1/ Flux de $\vec{E}$

$$\Phi = \oint_{S_G} \vec{S}\cdot\vec{E} = S_{lat}\cdot E = (2\pi r H)\,E$$

d'autre part $\Phi = \sum Q_{int}/\varepsilon_0 = \lambda H/\varepsilon_0 = \dfrac{Q H}{L\,\varepsilon_0}$



d'où finalement $E = \begin{cases} 0 & \text{pour } r < a \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r} & \text{pour } a < r < b \\ 0 & \text{pour } r > b \end{cases}$

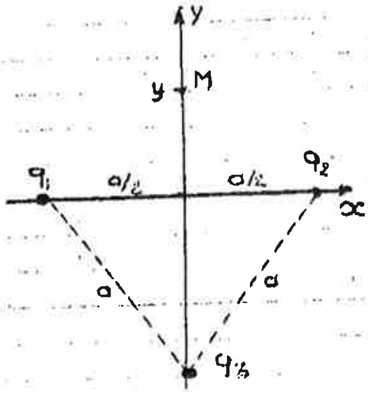
2/ $\Delta V = \displaystyle\int_a^b E\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ \ln\frac{b}{a}$

3/ Par définition la capacité du condensateur formée est :

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}}$$

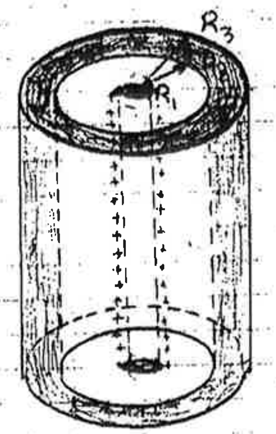
EXAMEN DE PHY 2 Vogue 1 Juin 2015

ercice 1



Soit un systeme rigide formé de trois charges ponctuelles
cupant les sommets d'un triangle équilatéral de coté a.
achant que $q_1 = q_2 = -q_3 = +q$
. Déterminer le champ electrique au point O
. Déterminer le potentiel electrique au point $M(0, y)$
. Déduire le champ electrique au point M.
. Quelle serait l'énergie potentielle d'une charge q_4 placée au point M ? A quelle force serait-elle soumise ?

ercice 2



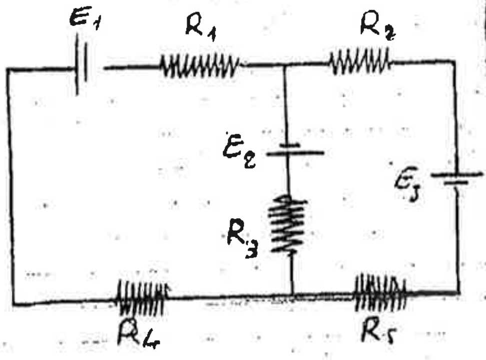
Soit un système formé de deux cylindres conducteurs cosentriques infiniment longs (c et c'). C est plein de rayon R_1 et porté une charge linéique $+\lambda$; C' est creux de rayon interne R_2 et de rayon externe R_3 et il est neutre.

1. Decrire la répartition des charges a l'équil. electrostatique.

On relie C' au sol.

2. Quelle est la nouvelle répartition des charges ?
3. Déterminer le champ electrique dans tout l'espace
4. Déterminer le potentiel électrique dans tout l'espace.
5. Déduire le potentiel de C ainsi que celui de C'.
6. Déduire la capacité du système.

xercice 3



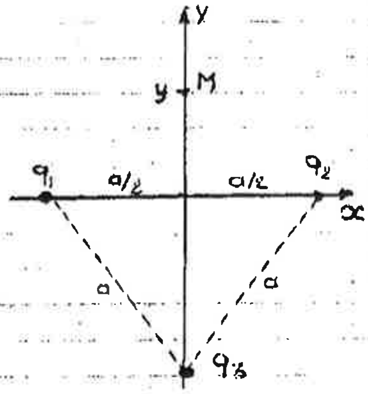
Soit le circuit de la fig ci-contre

1. Appliquer les lois des noeuds et des mailles
2. En déduire l'intensité du courant dans chaque branche.
3. En déduire la quantité de chaleur dégagée par unité de temps dans la resistance R_3.

On donne $E_1 = 6V$; $E_2 = E_3 = 12V$
$R_1 = 15\,\Omega$; $R_2 = 8\,\Omega$; $R_3 = 10\,\Omega$; $R_4 = 18\,\Omega$
et $R_5 = 12\,\Omega$

EXAMEN DE PHY2 Vague 1 Juin 2015

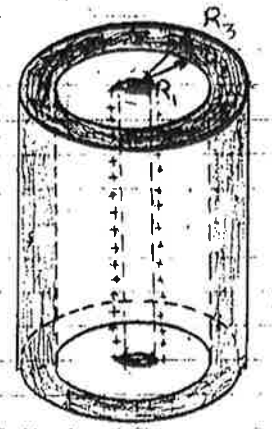
Exercice 1



Soit un système rigide formé de trois charges ponctuelles occupant les sommets d'un triangle équilatéral de côté a. Sachant que $q_1 = q_2 = -q_3 = +q$

1. Déterminer le champ électrique au point O
2. Déterminer le potentiel électrique au point $M(0,y)$
3. Déduire le champ électrique au point M.
4. Quelle serait l'énergie potentielle d'une charge q_4 placée au point M ? A quelle force serait-elle soumise ?

Exercice 2



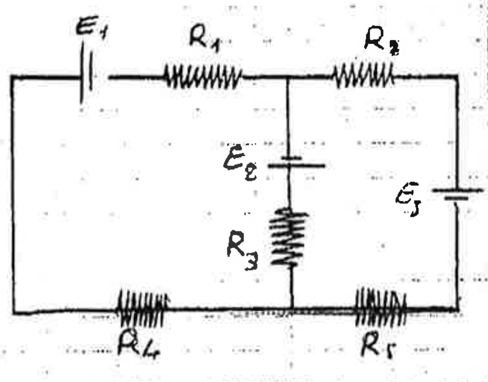
Soit un système formé de deux cylindres conducteurs concentriques infiniment longs (C et C'). C est plein de rayon R_1 et porte une charge linéique $+\lambda$; C' est creux de rayon interne R_2 et de rayon externe R_3 et il est neutre.

1. Décrire la répartition des charges à l'équil. électrostatique.

On relie C' au sol.

2. Quelle est la nouvelle répartition des charges ?
3. Déterminer le champ électrique dans tout l'espace
4. Déterminer le potentiel électrique dans tout l'espace.
5. Déduire le potentiel de C ainsi que celui de C'.
6. Déduire la capacité du système.

Exercice 3



Soit le circuit de la fig ci-contre

1. Appliquer les lois des nœuds et des mailles
2. En déduire l'intensité du courant dans chaque branche.
3. En déduire la quantité de chaleur dégagée par unité de temps dans la résistance R_3.

On donne $E_1 = 6V$; $E_2 = E_3 = 12V$
$R_1 = 15\,\Omega$; $R_2 = 8\,\Omega$; $R_3 = 10\,\Omega$; $R_4 = 18\,\Omega$ et $R_5 = 12\,\Omega$

Examen PHY2 (C.P.S.T) Mai 2016

EXERCICE 1 :

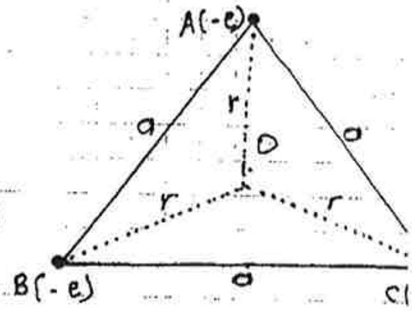
L'atome de Lithium est formé par un noyau portant une charge q_0 = et de 3 charges $q_1 = q_2 = q_3 = -e$ ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C). On suppose que q_1, et q_3 occupent les 3 sommets d'un triangle equilatéral ABC et que q_0 occupe le centre O. $OA = OB = OC = r$ et $AB = BC = AC = a = r\sqrt{3}$

a/ Déterminer la force résultante F_0 exercée sur q_0 par les 3 autres charges.

b/ Déterminer la force F_1 agissant sur l'electron placé au sommet A du triangle.

c/ Déduire les forces F_2 et F_3 agissant sur les electrons placés aux sommets B et C.

d/ Déterminez l'énergie potentielle d'interaction du système formé par les 4 charges.



Rappel : pour un système de 2 charges :

$$E_p(q_i ; q_j) = K\frac{q_i\, q_j}{r_{ij}}$$, (r_{ij} dist. entre q_i e

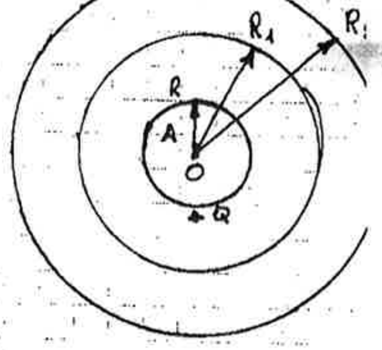
EXERCICE 2 :

Un conducteur sphérique A portant une charge Q positive, est complètement entouré par un conducteur sphérique neutre electriquement.

a/ Expliquez très brièvement le phénomène d'influence entre A et B.

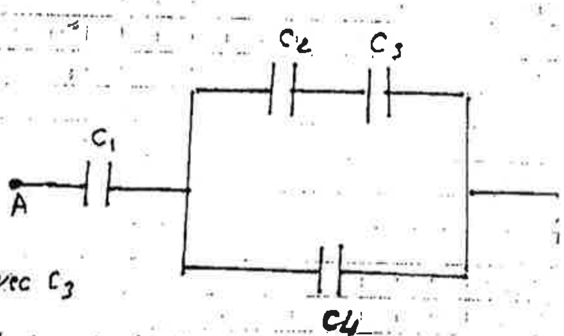
b/ Calculez le potentiel de chaque conducteur.

c/ Déduire la capacité du condensateur ainsi formé.



EXERCICE 3

Soit le groupement de 4 condensateur
$C_1 = 6\mu F$; $C_2 = 2\mu F$; $C_3 = 4\mu F$ et $C_4 = 6\mu F$.



1- Calculer la capacité équivalente entre A et B.

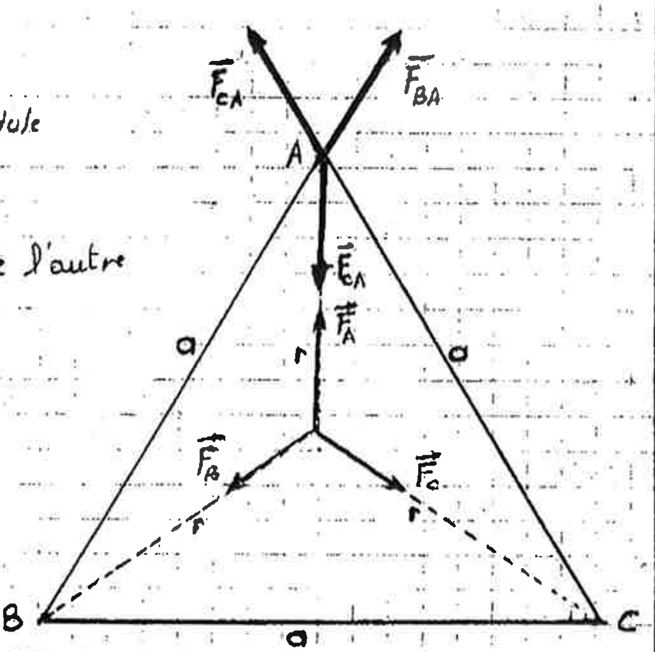
2- Si $V_A - V_B = 2000$ V. Calculer les charges Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 ainsi que les tensions V_1, V_2, V_3 et V_4 relatives à chaque condensateur.

3. On remplace la dérivation C_2 en série avec C_3 par un condensateur de capacité X.

- Déterminez x pour que la capacité équivalente entre A et B soit égale à x.
- Calculez alors les charges de C_1 et C_4.

Correction de l'examen PHY2 (C.P.S.T.) Mai 2016

Exercice 1



$\vec{F}_0 = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C$ avec en module

$F_A = F_B = F_C = F = \frac{3e^2}{r^2} K$

Les 3 forces étant à 120° l'une de l'autre

$\vec{F}_0 = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{O}$

En A : $\vec{F}_1 = \vec{F}_{OA} + \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{CA}$

Il faut déterminer d'abord les composantes des vecteurs $\vec{F}_{OA}$, $\vec{F}_{BA}$ et $\vec{F}_{CA}$:

$$\vec{F}_1 \left| \begin{array}{l} F_{1x} = (F_{OA})_x + (F_{BA})_x + (F_{CA})_x \\ F_{1y} = (F_{OA})_y + (F_{BA})_y + (F_{CA})_y \end{array} \right.$$

$$\vec{F}_1 \left| \begin{array}{l} F_{1x} = F_{BA} \sin 30 - F_{CA} \sin 30 = 0 \\ F_{1y} = -F_{CA} + F_{BA} \cos 30 + F_{CA} \cos 30 \end{array} \right.$$

et finalement :

$$\vec{F}_1 \left| \begin{array}{l} F_{1x} = 0 \\ F_{1y} = \left[-\frac{K(3e^2)}{r^2} + \frac{2Ke^2}{3r^2} \cos 30 \right] \vec{j} \end{array} \right.$$

$$\vec{F}_1 = -2{,}42 \frac{Ke^2}{r^2} \vec{j}$$

Pour des raisons de symétrie $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ agissant sur les électrons en A, B et C possèdent les mêmes modules et sont dirigées vers O.

L'énergie potentielle d'interaction du système est :

$$E_p = K\frac{q_0 q_1}{r} + K\frac{q_0 q_2}{r} + K\frac{q_0 q_3}{r} + K\frac{q_1 q_2}{a} + K\frac{q_2 q_3}{a} + K\frac{q_1 q_3}{a} \;;\; a = r\sqrt{3}$$

$$E_p = \frac{3Ke^2}{r}\left(-3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -7{,}27 \frac{Ke^2}{r}$$

Exercice 2

1/ Phénomène d'influence totale entre A et B

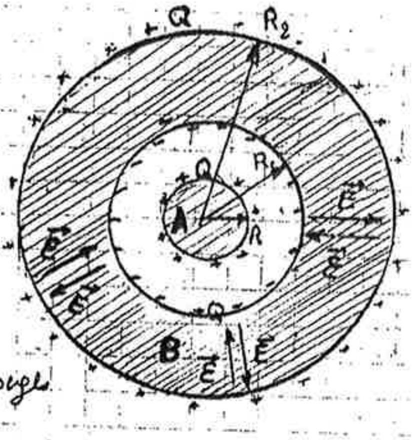
Explication :

* (A) crée un champ $\vec{E}$ radial sortant dans B

* $\vec{E}$ est à l'origine de forces électriques qui déplacent les charges + vers l'hémisphère externe de (B)

* Apparition (Naissance) d'un 2ᵉ champ $\vec{E}$ opposé à $\vec{E}$

* $\vec{E}$ augmente avec la migration (séparation) des charges jusqu'à ce que $\vec{E} + \vec{E} = \vec{0}$ dans B

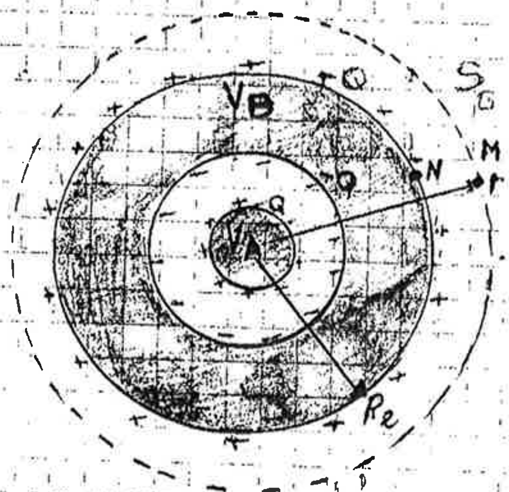


Nouvel état d'équilibre, on aura la répartition de charges ci-dessus

2/ Calcul du potentiel de A et de B (V_A et V_B)

a/ Détermination de V_B

$\forall M \in \xi$ tq $OM = r$, $r > R_2$



$$\Phi = \oiint \vec{E}_n \, d\vec{S}_G = E_n \iint dS_G = E_n \cdot 4\pi r^2$$

$$\Phi = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{+Q - Q + Q}{\varepsilon_0} = \frac{+Q}{\varepsilon_0}$$

d'où $E_M \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_n(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$

comme $\vec{E_n} = -\vec{grad}\, V_n$

où $V_n = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int E\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_1$

sachant que $V_n(r)_{r\to\infty} = 0$ alors $C_1 = 0$

et $V_M(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ pour $r \geq R_2$

En particulier pour $r = R_2$, c'est-à-dire au point N (l'écorce)

$$V_N = V(r = R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

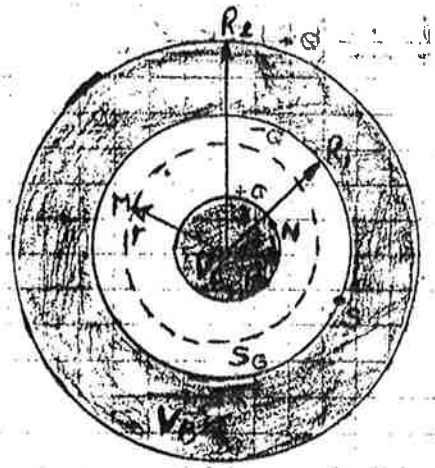
Comme $N \in$ (B) et que B représente un volume équipotentiel (B : conducteur)

alors $V_B = \boxed{V_N = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}}$

2/ Détermination de V_A

$\forall M \in \mathcal{E}$ tq $OM = r$ et $R < r < R_1$

$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}_M \cdot d\vec{S}_G = E_M \iint dS_G = E_M \cdot 4\pi r^2$$



$$\Phi = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} = + \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

d'où $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2$

en S ; $r = R_1 \Rightarrow V_S = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + C^{te}$

comme $S \in (B) \rightarrow V_S = V_B = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

on en déduit que $C^{te} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right) \Rightarrow V_M(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right)$

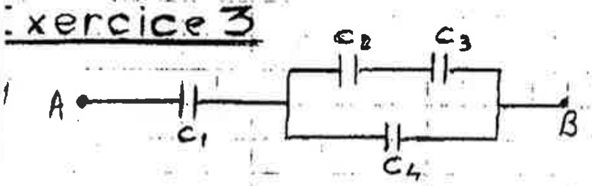
comme $N \in A$; $r = R \rightarrow V_N = \boxed{V_A = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right)}$

3°/ Détermination de la capacité du condensateur

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R \cdot R_1}{R_1 - R}$$

Exercice 3

1/



; $C_{eq} = \dfrac{C_1 \cdot \left(C_4 + \dfrac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}\right)}{C_1 + C_4 + \dfrac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3}} = 3,3\,\mu F$

2/ Si $V_A - V_B = 2000\,V = V_{AB} \Rightarrow Ceq_{AB}$ porte la charge $Q_{AB} = Ceq_{AB} \cdot V_{AB} = 6,6\,mC$

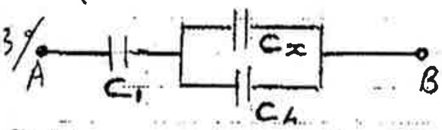
et C_1 porte la même charge $Q_1 = Q_{AB} = 6,6\,mC$, aux bornes de $C_1 \Rightarrow V_1 = \dfrac{Q_1}{C_1} = 1100\,V$.

De même si V_4 est la ddp aux bornes de $C_4 \Rightarrow V_4 = V_{AB} - V_1 = 900\,V$

et $Q_4 = C_4 V_4 = 5,4\,mC$. * D'autre part C_2 et C_3 en série $\Rightarrow Q_2 = Q_3$

$\Rightarrow \begin{cases} C_2 V_2 = C_3 V_3 \\ V_2 + V_3 = V_4 = 900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_2 = 600\,V \\ V_3 = 300\,V \end{cases}$ et $Q_2 = Q_3 = 1,2\,mC$

3/



$C_{eq} = \dfrac{C_1 (C_x + C_4)}{C_1 + C_x + C_4} = C_{01} \Rightarrow C_x = 3,7\,\mu F$

Détermination de Q_1 et Q_4 :

Q_1 = charge de $Ceq_{AB} = C_{\alpha} \cdot V_{AB} = 7,41\,mC = q_x + q_4$

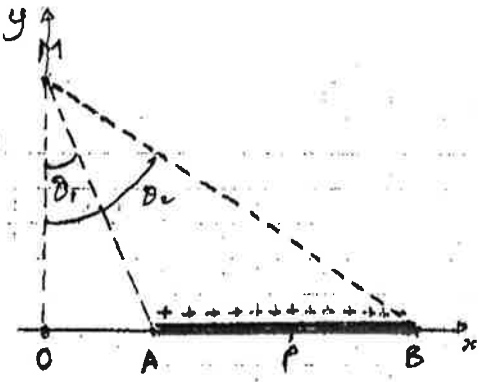
donc $q_4 = Q_1 - q_x$; comme $V_4 = V_x \Rightarrow \dfrac{Q_1 - q_x}{C_4} = \dfrac{q_x}{C_x} = \dfrac{Q_1}{C_4 + C_x}$

d'où $q_x = \dfrac{C_x \cdot Q_1}{C_x + C_4}$ et $Q_4 = Q_1 - q_x = Q_1 - \dfrac{Q_1 \cdot C_x}{C_x + C_4}$

$$\boxed{Q_4 = 4,58\,mC}$$

Exercice 4

1. Calculer en tout point M de l'espace, le champ electrique $\vec{E}$ créé par un fil rectiligne AB de longueur finie $2a$, portant une densité de charge linéique $\lambda > 0$



Soit O la projection de M sur la droite AB. On posera $OM = y$; $OA = x_A$; $OB = x_B$

2. On examinera les cas suivants
   a) le pt M est dans le plan médiateur de AB
   b) le fil a une longueur infinie

Soit $d\vec{E}$ le champ créé par un element de fil de longueur dx autour de P ; $d\vec{E} = K \frac{dq}{r^2} \vec{u}$

$$d\vec{E} = K \frac{\lambda\, dx}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$ avec

Dans le triangle PMO, on a : $tg\,\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{dx}{y}$

et $y = PM \cos\theta \Rightarrow d\vec{E} = \frac{K\lambda\, d\theta}{y} \vec{u}_{PM}$

$$d\vec{E} \begin{vmatrix} dE_x = -\frac{K\lambda}{y} \sin\theta\, d\theta \\ dE_y = \frac{K\lambda}{y} \cos\theta\, d\theta \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{E} \begin{vmatrix} E_x = -\frac{K\lambda}{y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta\, d\theta \\ E_y = -\frac{K\lambda}{y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta\, d\theta \end{vmatrix}$$

En posant $\theta_A = (\vec{MO}, \vec{MA})$ et $\theta_B = (\vec{MO}, \vec{MB})$

on aboutit à
$$\boxed{\vec{E} \begin{vmatrix} E_x = \frac{K\lambda}{y}(\cos\theta_B - \cos\theta_A) = \frac{K\lambda}{y}\left(\frac{y}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right) \\ E_y = \frac{K\lambda}{y}(\sin\theta_B - \sin\theta_A) = \frac{K\lambda}{y}\left(\frac{x_B}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right) \end{vmatrix}}$$

2°/ CAS PARTICULIERS

a/ M sur la médiatrice de AB

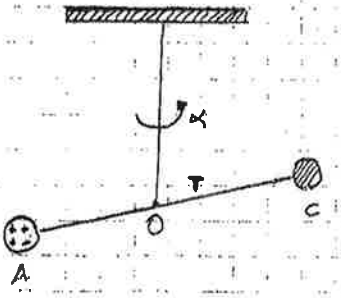
$x_A = -x_B \Rightarrow$
$$\boxed{\vec{E} \begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E_y = \frac{2K\lambda}{y} \cdot \frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y^2}} \end{vmatrix}}$$

b/ Le fil a une longueur infinie

$x_A \longrightarrow -\infty$

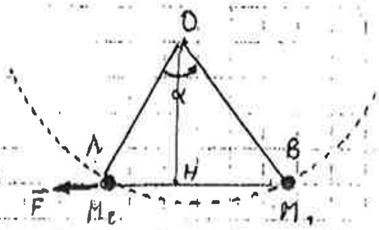
$x_B \longrightarrow +\infty$
$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} \begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E_y = \frac{2K\lambda}{y} \end{vmatrix}}$$

Exercice



Le pendule de torsion qui est représenté sur la figure, et qui constitue l'élément principal de la balance de Coulomb, comporte une tige T, isolante horizontale, très légère, munie à une extrémité, d'une petite sphère métallique A et à l'autre extrémité d'un contre-poids isolant C ; sa longueur $l = 20$ cm. Elle est suspendue en son milieu O à un support S fixe, par un fil métallique de longueur L et de constante de torsion $k_T = 12.10^{-7}$ N.m/rad. La boule A, complètement déchargée, se trouve initialement en un point correspondant à un angle de torsion nul ($\alpha = 0$). Le système est en équilibre.

On met A en contact avec une boule B identique à A et portant une charge +Q. Il en résulte une électrisation de A qui tourne d'un angle $\alpha = 60°$ par rapport à sa position initiale. Le système atteint alors une nouvelle position d'équilibre. Calculer la valeur de Q.



Appelons M_1 la position initiale de la boule A et M_2 sa nouvelle position lorsque le système atteint son équilibre après avoir tourné d'un angle α.

La figure ci-contre correspond à la 2ème position d'équilibre du pendule. Le moment $\mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta}$ de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe de rotation Δ est équilibré par le couple de torsion du fil :

$$\Gamma = K_t \cdot \alpha$$

La force de Coulomb a pour expression :

$$F = K\frac{q.q_1}{d^2} = 9.10^9 \frac{q^2}{\left(l \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} \quad \text{où } d = M_1M_2 = 2\,M_1H = 2 \cdot \frac{l}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

Calcul du moment $\mathcal{M}_{F/\Delta} = F \cdot OH = F \cdot \frac{l}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 9.10^9 \frac{q^2}{2\,l\,\sin^2\frac{\alpha}{2}} \cos\frac{\alpha}{2}$

A l'équilibre : $\mathcal{M}_{F/\Delta} = \Gamma$

d'où $$Q = 2q = 2\sqrt{\frac{k_T\,\alpha \cdot 2\,l\,\sin^2\frac{\alpha}{2}}{9.10^9 \cos\frac{\alpha}{2}}} = 8{,}03.10^{-9}\ \text{C}$$