



# **Licence de Mécanique - UE 201**

**Notes de cours « Mécanique des solides rigides »**

**YVES BERTHAUD**  
**PROFESSEUR UPMC**

Septembre 2006



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>3</b>
<b>1 Cinématique du solide indéformable</b>	<b>9</b>
1.1 Définitions . . . . .	9
1.1.1 Espace . . . . .	9
1.1.2 Bases, repères . . . . .	9
1.1.3 Repérage d'un point . . . . .	9
1.1.4 Vitesse d'un point . . . . .	10
1.1.5 Vecteur vitesse . . . . .	10
1.1.6 Accélération d'un point . . . . .	11
1.2 Calcul des vecteurs vitesse et accélération . . . . .	11
1.2.1 Calcul de la vitesse dans $R$ . . . . .	12
1.2.2 Calcul de la vitesse dans $R_1$ . . . . .	12
1.2.3 Relation entre les vecteurs vitesse . . . . .	13
1.3 Vitesse et accélération des points d'un solide . . . . .	14
1.3.1 Définition d'un solide indéformable . . . . .	14
1.3.2 Angles d'Euler . . . . .	14
1.3.3 Champ des vitesses dans un solide . . . . .	16
1.3.4 Equiprojectivité . . . . .	17
1.3.5 Exemple . . . . .	17
1.3.6 Champ des accélérations . . . . .	18
1.4 Composition des mouvements . . . . .	18
1.4.1 Composition des vecteurs vitesse . . . . .	18
1.4.2 Composition des vecteurs rotation . . . . .	19
1.4.3 Composition des torseurs cinématiques . . . . .	20
1.4.4 Vitesse de glissement . . . . .	20
1.4.5 Composition des accélérations . . . . .	20
1.5 Mouvement plan sur plan . . . . .	22
1.5.1 Définition . . . . .	22
1.5.2 Détermination du point I . . . . .	23
1.5.3 Propriétés de la base et de la roulante . . . . .	23
1.6 Propriétés des torseurs . . . . .	25
1.6.1 Champ de vecteurs antisymétriques . . . . .	26
1.6.2 Vecteurs liés, libres . . . . .	27
1.6.3 Champ de moment . . . . .	27
1.6.4 Opérations sur les torseurs . . . . .	27
1.6.5 Glisseur . . . . .	27

1.6.6	Couple	28
1.6.7	Décomposition d'un torseur	28
1.7	Axe d'un torseur	28
<b>2</b>	<b>Statique des solides</b>	<b>29</b>
2.1	Définitions des actions mécaniques	29
2.2	Modélisation des actions mécaniques	30
2.3	Actions à distance : gravité	30
2.4	Calcul des centres de masse	31
2.4.1	Additivité	31
2.4.2	Symétries	31
2.4.3	Théorèmes de Guldin	32
2.5	Modélisation des actions de contact	33
2.5.1	Lois dites de Coulomb	34
2.5.2	Cas du contact ponctuel réel	35
2.6	Liaisons	36
2.6.1	Degré de liberté	36
2.6.2	Liaison unilatérale	36
2.6.3	Liaison ponctuelle	37
2.6.4	Liaison linéaire rectiligne	38
2.6.5	Liaison linéaire annulaire	38
2.6.6	Liaison rotule	39
2.6.7	Liaison appui plan	40
2.6.8	Liaison pivot glissant	40
2.6.9	Liaison pivot	40
2.6.10	Liaison glissière	41
2.6.11	Liaison glissière hélicoïdale	41
2.6.12	Liaison encastrement	42
2.6.13	Résumé des liaisons	46
2.7	Quelques remarques	47
2.7.1	Puissance des actions de liaisons	47
2.8	Statique des solides	47
2.8.1	Principe fondamental de la statique	47
2.8.2	Théorème des actions réciproques	48
2.8.3	Résumé des liaisons	48
2.9	Analyse des mécanismes	49
2.10	Exercice	49
2.11	Mobilité, hyperstatisme	53
2.12	Statique graphique	55
2.13	Chaîne ouverte	55
2.14	Chaîne fermée	56
2.15	Chaînes complexes	58
<b>3</b>	<b>Cinétique</b>	<b>59</b>
3.1	Torseur cinétique	59
3.1.1	Résultante cinétique	59
3.1.2	Moment cinétique	59
3.1.3	Autre expression de ce torseur cinétique	60

3.1.4	Exemple : calcul du torseur cinétique d'une barre	61
3.1.5	Moment cinétique par rapport à un axe	62
3.2	Énergie cinétique	62
3.3	Moment d'inertie d'un solide par rapport à un plan	63
3.4	Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe	63
3.4.1	Définition	63
3.4.2	Calcul du moment d'inertie par rapport à un axe	64
3.5	Opérateur d'inertie	65
3.5.1	Définition	65
3.5.2	Calcul de l'opérateur d'inertie	65
3.6	Moment d'inertie d'un solide par rapport à un point	66
3.7	Rayon de giration	67
3.8	Théorème d'Huyghens	67
3.9	Théorème d'Huyghens généralisé	68
3.10	Axes principaux d'inertie	69
3.11	Calcul du moment cinétique d'un solide	70
3.11.1	Mouvement plan sur plan	70
3.11.2	Cas général	71
3.12	Energie cinétique d'un solide	72
<b>4</b>	<b>Dynamique</b>	<b>73</b>
4.1	Torseur dynamique	73
4.1.1	Définition	73
4.1.2	Autre expression	73
4.2	Relation entre le torseur cinétique et le torseur dynamique	73
4.3	Principe fondamental de la dynamique	75
4.3.1	Énoncé	75
4.3.2	Théorèmes dynamiques	76
4.3.3	Théorème des actions réciproques	76
4.4	Principe fondamental de la dynamique en repère non galiléen	77
4.5	Principe de la dynamique appliqué à un système en rotation	78
4.5.1	Calculs préliminaires	79
4.5.2	Principe fondamental de la dynamique	79
4.5.3	Équilibrage statique	80
4.5.4	Équilibrage dynamique	81
<b>5</b>	<b>Théorèmes énergétiques</b>	<b>83</b>
5.1	Définitions générales	83
5.2	Puissance des actions mécaniques exercées sur un solide	83
5.3	Puissance des actions mutuelles entre deux solides	84
5.3.1	Calcul	84
5.3.2	Liaison parfaite	85
5.4	Travail	85
5.5	Énergie potentielle	85
5.5.1	Énergie potentielle et densité massique d'énergie potentielle	85
5.5.2	Exemple : énergie potentielle de la pesanteur	86
5.5.3	Énergie potentielle des forces d'inertie d'entraînement	87
5.6	Théorème de l'énergie cinétique	88

5.6.1	Application à un solide . . . . .	88
5.6.2	Application à un ensemble de solides . . . . .	89
5.7	Intégrale première de l'énergie cinétique . . . . .	90
5.7.1	Énergie mécanique d'un système . . . . .	90
5.7.2	Intégrale première . . . . .	90
<b>Bibliographie</b>		<b>91</b>







# Chapitre 1

## Cinématique du solide indéformable

### 1.1 Définitions

#### 1.1.1 Espace

On va utiliser un espace affine (formé de points) et euclidien (pour définir des distance entre points). Il est noté  $\mathcal{E}^3$  de dimension 3 sur le corps des réels.

Pour les opérations sur les vecteurs, il nous faut un espace vectoriel de dimension 3 noté  $E^3$  sur le corps des réels.

#### 1.1.2 Bases, repères

L'espace  $E^3$  est rapporté à une base formée de trois vecteurs ( $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$ ,  $\underline{z}$ ).

**Remarque :** dans ce document les vecteurs sont notés avec un trait en dessous ce qui correspond à une notation largement utilisée (elle est de plus plus pratique pour moi au tableau).

L'espace  $\mathcal{E}^3$  est rapporté à un repère formé d'un point  $O$ , origine du repère, et de trois axes ayant les directions d'une base choisie dans  $E^3$ .

On appelle référentiel d'espace l'ensemble constitué d'un point et de trois vecteurs de base et on le note  $(O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ .

#### 1.1.3 Repérage d'un point

On repère la position d'un point  $M$  dans  $\mathcal{E}^3$  par ses coordonnées. En fait c'est le choix du repère d'espace  $(O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  qui permet de définir ses coordonnées. Comme il y a une infinité de choix possibles, il y a également une infinité de coordonnées pour un même point  $M$  à une position donnée.

Si on choisit  $(O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  orthonormé direct alors les coordonnées de  $M$  s'obtiennent par projection orthogonale de  $\underline{OM}$  sur les vecteurs de la base. Dans cette équation  $\underline{x} \cdot \underline{y}$  désigne le produit scalaire des deux vecteurs (« dot product » notation due à Gibbs (autour de 1900)).

$$x_M = \underline{OM} \cdot \underline{x} \quad y_M = \underline{OM} \cdot \underline{y} \quad z_M = \underline{OM} \cdot \underline{z} \quad (1.1)$$

**Remarque :** le choix des vecteurs de base n'est pas limité au classique système dit cartésien. On verra d'autres systèmes de coordonnées (cylindriques en particulier).

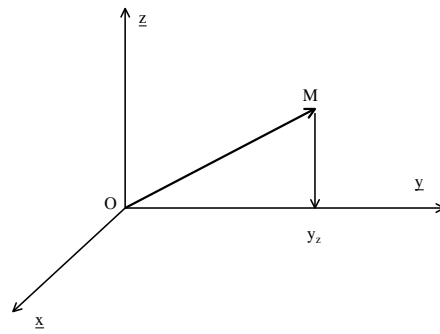


Figure 1.1 – Vecteur position pour un repérage cartésien

## 1.1.4 Vitesse d'un point

### 1.1.4.1 Notion de temps

Cette notion est pour nous associée à des mouvements particuliers qui se répètent (horloges, mouvements des astres, marées, oscillations). La mesure du temps s'effectue sur un repère à une dimension (repère de temps) qui est orienté.

### 1.1.5 Vecteur vitesse

On choisit un référentiel d'espace temps  $(O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  et  $(0, \underline{t})$  qui selon les applications peut être :

1. Copernic : Centre de masse du système solaire (assimilé à celui du soleil) et trois étoiles fixes plus une horloge,
2. Géocentrique : Centre de masse de la terre et trois étoiles fixes plus une horloge,
3. Terrestre : un point et trois axes du laboratoire ainsi qu'une horloge.

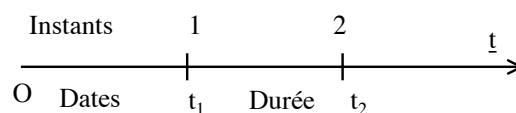


Figure 1.2 – Temps, durée

**DÉFINITION** Soit un point matériel  $M$  en mouvement et soit un référentiel d'espace temps. On note :

$$\underline{V}(M/R) = \left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_R \quad (1.2)$$

Le vecteur vitesse est la dérivée par rapport temps dans le référentiel considéré du vecteur position.

**DÉFINITION** La suite des points  $P$  de  $\mathcal{E}^3$  qui coïncident avec  $M$  au cours du temps (courbe décrite par le point) est appelée trajectoire de  $M$  dans le référentiel.

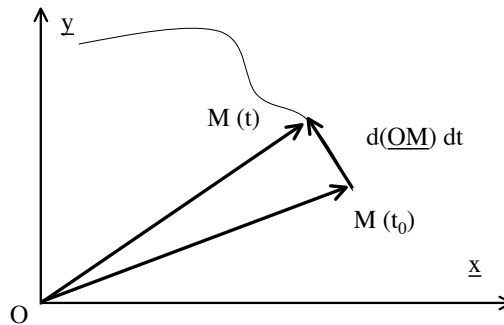


Figure 1.3 – Vecteur vitesse

*Interprétation* : le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire au point  $M$  à l'instant  $t$  considéré.

**Unité** : la vitesse s'exprime en  $ms^{-1}$ .

### 1.1.6 Accélération d'un point

Le vecteur accélération du point  $M$  par rapport au repère considéré est noté  $\underline{\Gamma}(M/R)$  et il est donné par :

$$\underline{\Gamma}(M/R) = \left[ \frac{d}{dt} \underline{V}(M/R) \right]_R = \left[ \frac{d^2}{dt^2} \underline{OM} \right]_R \quad (1.3)$$

**Unité** : l'accélération s'exprime en :  $ms^{-2}$ .

## 1.2 Calcul des vecteurs vitesse et accélération

Soit un repère  $R_1 (O, \underline{x}_1, \underline{y}_1, \underline{z})$  en rotation autour de l'axe  $(O, \underline{z})$  par rapport à un repère  $R (O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ . L'angle  $(\underline{x}, \underline{x}_1)$  est noté  $\alpha$ .

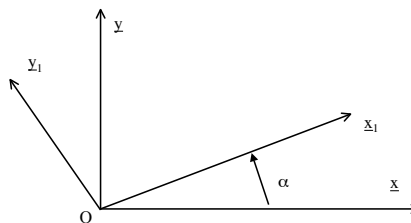


Figure 1.4 – Changement de repère

**1.2.1 Calcul de la vitesse dans  $R$** 

On a par définition :

$$\begin{aligned}\underline{V}(M/R) &= \left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_R \\ &= \left[ \frac{d}{dt} (x \underline{x} + y \underline{y}) \right]_R \\ &= \frac{dx}{dt} \underline{x} + x \left[ \frac{d}{dt} \underline{x} \right]_R + \frac{dy}{dt} \underline{y} + y \left[ \frac{d}{dt} \underline{y} \right]_R\end{aligned}\quad (1.4)$$

On sait que les vecteurs de base sont unitaires soit :  $\underline{x} \cdot \underline{x} = 1$ . On en déduit par dérivation :

$$\frac{d}{dt}(\underline{x} \cdot \underline{x}) = 2 \underline{x} \cdot \left[ \frac{d}{dt} \underline{x} \right]_R = 0 \quad (1.5)$$

Comme le vecteur  $\underline{x}$  est quelconque en en déduit que :

$$\left[ \frac{d}{dt} \underline{x} \right]_R = \underline{0} \quad (1.6)$$

Ceci signifie que la dérivée dans un repère  $R$  d'un vecteur de base appartenant à ce repère est nulle.

*Interprétation* : on s'accroche à un repère ; on ne voit pas évoluer les vecteurs de base qui nous semblent fixes (par rapport à nous).

Donc le vecteur vitesse se résume évidemment à :

$$\underline{V}(M/R) = \frac{dx}{dt} \underline{x} + \frac{dy}{dt} \underline{y} = \dot{x} \underline{x} + \dot{y} \underline{y} \quad (1.7)$$

**1.2.2 Calcul de la vitesse dans  $R_1$** 

On va cette fois utiliser le second repère pour calculer le vecteur vitesse du même point au même instant. On a par définition :

$$\begin{aligned}\underline{V}(M/R_1) &= \left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_{R_1} \\ &= \left[ \frac{d}{dt} (x_1 \underline{x}_1 + y_1 \underline{y}_1) \right]_{R_1} \\ &= \frac{dx_1}{dt} \underline{x}_1 + x_1 \left[ \frac{d}{dt} \underline{x}_1 \right]_{R_1} + \frac{dy_1}{dt} \underline{y}_1 + y_1 \left[ \frac{d}{dt} \underline{y}_1 \right]_{R_1}\end{aligned}\quad (1.8)$$

On sait que les vecteurs de base de  $R_1$  sont unitaires soit :  $\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_1 = 1$ . On en déduit par dérivation :

$$\frac{d}{dt}(\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_1) = 2 \underline{x}_1 \cdot \left[ \frac{d}{dt} \underline{x}_1 \right]_{R_1} = 0 \quad (1.9)$$

Comme le vecteur  $\underline{x}_1$  est quelconque en en déduit que :

$$\left[ \frac{d}{dt} \underline{x}_1 \right]_{R_1} = \underline{0} \quad (1.10)$$

Ceci signifie que la dérivée dans un repère  $R_1$  d'un vecteur de base appartenant à ce repère est nulle.

*Interprétation* : on s'accroche à un repère ; on ne voit pas évoluer les vecteurs de base qui nous semblent fixes (par rapport à nous) mais les coordonnées du point changeant, on retrouve leur dérivée temporelle pour exprimer le vecteur vitesse.

Donc le vecteur vitesse se résume évidemment à :

$$\underline{V}(M/R_1) = \frac{dx_1}{dt} \underline{x}_1 + \frac{dy_1}{dt} \underline{y}_1 = \dot{x}_1 \underline{x}_1 + \dot{y}_1 \underline{y}_1 \quad (1.11)$$

### 1.2.3 Relation entre les vecteurs vitesse

On va essayer de trouver une relation entre ces vecteurs vitesses  $\underline{V}(M/R)$  et  $\underline{V}(M/R_1)$ .

$$\begin{aligned} \underline{V}(M/R) &= \left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_R \\ &= \left[ \frac{d}{dt} (x_1 \underline{x}_1 + y_1 \underline{y}_1) \right]_R \\ &= \frac{dx_1}{dt} \underline{x}_1 + x_1 \left[ \frac{d}{dt} \underline{x}_1 \right]_R + \frac{dy_1}{dt} \underline{y}_1 + y_1 \left[ \frac{d}{dt} \underline{y}_1 \right]_R \end{aligned} \quad (1.12)$$

Le problème est de savoir calculer les termes  $\left[ \frac{d}{dt} \underline{x}_1 \right]_R$ . On sait que le vecteur  $\underline{x}_1$  ne dépend que de l'angle  $\alpha$  qui lui même est fonction du temps. Donc :

$$\left[ \frac{d}{dt} \underline{x}_1 \right]_R = \left[ \frac{d}{d\alpha} \underline{x}_1 \right]_R \frac{d\alpha}{dt} \quad (1.13)$$

Or on peut exprimer  $\underline{x}_1$  en fonction des vecteurs de base du repère  $R$  et de l'angle  $\alpha$  :

$$\underline{x}_1 = \cos \alpha \underline{x} + \sin \alpha \underline{y} \quad (1.14)$$

On remplace dans l'équation précédente et on obtient pour le premier terme

$$\left[ \frac{d \underline{x}_1}{d\alpha} \right]_R = -\sin \alpha \underline{x} + \cos \alpha \underline{y} \quad (1.15)$$

On reconnaît le vecteur  $\underline{y}_1$  et on peut donc écrire :

$$\left[ \frac{d \underline{x}_1}{d\alpha} \right]_R = \underline{y}_1 = \underline{z} \wedge \underline{x}_1 \quad (1.16)$$

Dans cette équation  $\wedge$  désigne le produit vectoriel.

Si je fais le même travail pour le second terme je peux alors écrire :

$$\left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_{R_1} + \dot{\alpha} \underline{z} \wedge \underline{OM} \quad (1.17)$$

**Remarque :** le vecteur  $\underline{\dot{\alpha}} \underline{z}$  est appelé vecteur vitesse de rotation ; il contient à la fois l'information vitesse de rotation angulaire et axe autour duquel elle se produit. On le note :  $\underline{\Omega}(R_1/R)$ . On peut donc ré-écrire :

$$\left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_{R_1} + \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{OM} \quad (1.18)$$

## 1.3 Vitesse et accélération des points d'un solide

### 1.3.1 Définition d'un solide indéformable

Un solide est un ensemble de points matériels qui restent à distance constante les uns des autres. Distance(M, N) = constante, pour tous les points M et N et pour tous les instants.

### 1.3.2 Angles d'Euler

Attachons un référentiel  $R_1$  au solide  $S$  en mouvement et considérons un référentiel  $R$  attaché au laboratoire.

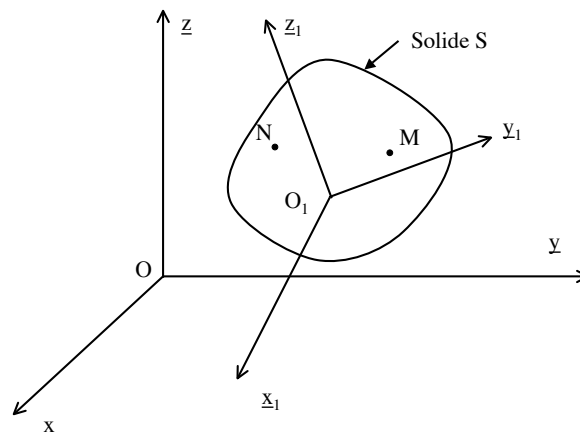


Figure 1.5 – Solide en mouvement

Nous allons généraliser l'équation 1.18 pour écrire :

$$\left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_{R_1} + \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{OM} \quad (1.19)$$

Il nous faut donc identifier le terme vitesse de rotation  $\underline{\Omega}(R_1/R)$ . On repère le solide  $S$  en mouvement par les coordonnées d'un de ses points (le point  $O_1$  par exemple) et par trois angles appelés angles d'Euler  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$ .

Soit le vecteur position  $\underline{OM} = x_1 \underline{x}_1 + y_1 \underline{y}_1 + z_1 \underline{z}_1$ . On a par définition :

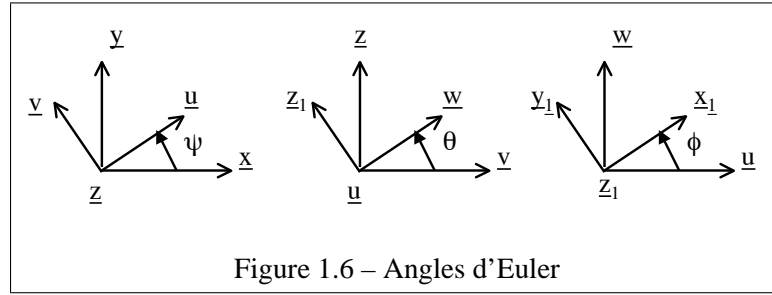


Figure 1.6 – Angles d'Euler

$$\begin{aligned}
 \underline{V}(M/R) &= \left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_R \\
 &= \left[ \frac{d}{dt} (x_1 \underline{x}_1 + y_1 \underline{y}_1 + z_1 \underline{z}_1) \right]_R \\
 &= \dot{x}_1 \underline{x}_1 + x_1 \left[ \frac{d}{dt} \underline{x}_1 \right]_R + \dot{y}_1 \underline{y}_1 + y_1 \left[ \frac{d}{dt} \underline{y}_1 \right]_R + \dot{z}_1 \underline{z}_1 + z_1 \left[ \frac{d}{dt} \underline{z}_1 \right]_R
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

On reconnaît le vecteur  $\underline{V}(M/R_1)$ . Que représentent les termes du type  $x_1 \left[ \frac{d}{dt} \underline{x}_1 \right]_R$  ?

On sait que le vecteur  $\underline{x}_1$  est une fonction des angles d'Euler qui sont eux mêmes fonction du temps car le solide est en mouvement. On peut donc écrire :

$$\left[ \frac{d}{dt} \underline{x}_1 \right]_R = \left[ \frac{\partial}{\partial \psi} \underline{x}_1 \right]_R \dot{\psi} + \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \underline{x}_1 \right]_R \dot{\theta} + \left[ \frac{\partial}{\partial \phi} \underline{x}_1 \right]_R \dot{\phi} \tag{1.21}$$

Il faut donc calculer les termes du type  $\left[ \frac{\partial}{\partial \psi} \underline{x}_1 \right]_R$ .

On peut écrire grâce aux angles d'Euler :

$$\begin{aligned}
 \underline{x}_1 &= \cos \phi \underline{u} + \sin \phi \underline{w} \\
 &= \cos \phi \underline{u} + \sin \phi \cos \theta \underline{v} + \sin \phi \sin \theta \underline{z}
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Donc en dérivant cette expression par rapport à  $\psi$  on obtient :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \psi} \underline{x}_1 \right]_R = \cos \phi \underline{v} - \sin \phi \cos \theta \underline{u} + \underline{0} \tag{1.23}$$

Le dernier terme est nul car le vecteur  $\underline{z}$  ne dépend pas de l'angle  $\psi$ .

On essaie de retrouver une expression de type  $\underline{z} \wedge \underline{x}_1$ . Comme la rotation d'angle  $\psi$  s'effectue autour de  $\underline{z}$  on écrit :

$$\begin{aligned}
 \underline{z} \wedge \underline{x}_1 &= \underline{z} \wedge (\cos \phi \underline{u} + \sin \phi \underline{w}) \\
 &= \cos \phi \underline{v} - \sin \phi \cos \theta \underline{u} \\
 &= \left[ \frac{\partial}{\partial \psi} \underline{x}_1 \right]_R
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

On vient donc de montrer que l'expression valable pour le cas simple de la rotation autour d'un axe (équation 1.18) s'applique dans un cas plus général pour un vecteur quelconque ( $\underline{x}_1$  ici). En procédant de même pour les deux autres termes de l'équation 1.21 on montre que :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \underline{x}_1 \right]_R &= \underline{z} \wedge \underline{x}_1 \dot{\psi} + \underline{u} \wedge \underline{x}_1 \dot{\theta} + \underline{z}_1 \wedge \underline{x}_1 \dot{\phi} \\ &= (\dot{\psi} \underline{z} + \dot{\theta} \underline{u} + \dot{\phi} \underline{z}_1) \wedge \underline{x}_1 \end{aligned} \quad (1.25)$$

On appelle  $\underline{\Omega}(S/R)$  vecteur vitesse de rotation (instantané) du solide  $S$  dans son mouvement par rapport au repère  $R$  le vecteur :  $\underline{\Omega}(S/R) = \dot{\psi} \underline{z} + \dot{\theta} \underline{u} + \dot{\phi} \underline{z}_1$ . On remarque qu'il généralise bien l'expression établie pour une seule rotation.

On peut écrire les mêmes relations pour les autres dérivées des vecteurs  $\underline{y}_1$  et  $\underline{z}_1$  ce qui permet d'écrire au final :

$$\left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_{R_1} + \underline{\Omega}(S/R) \wedge \underline{OM} \quad (1.26)$$

ou

$$\underline{V}(M/R) = \underline{V}(M/R_1) + \underline{\Omega}(S/R) \wedge \underline{OM} \quad (1.27)$$

### 1.3.3 Champ des vitesses dans un solide

Nous allons utiliser l'expression 1.26 en remplaçant le vecteur  $\underline{OM}$  par le vecteur  $\underline{AB}$ . On écrit donc :

$$\left[ \frac{d}{dt} \underline{AB} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \underline{AB} \right]_{R_1} + \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{AB} \quad (1.28)$$

avec  $\underline{\Omega}(R_1/R) = \underline{\Omega}(S/R)$  car le solide  $S$  est attaché au repère  $R_1$ .

Comme les points  $A$  et  $B$  appartiennent au solide supposé indéformable, le premier terme de droite est nul. Il reste :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \underline{AB} \right]_R &= \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{AB} \\ \left[ \frac{d}{dt} (\underline{AO} + \underline{OB}) \right]_R &= \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{AB} \\ \left[ \frac{d}{dt} \underline{OB} \right]_R &= \left[ \frac{d}{dt} \underline{OA} \right]_R + \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{AB} \end{aligned} \quad (1.29)$$

On en déduit la relation importante :

$$\underline{V}(B \in S/R) = \underline{V}(A \in S/R) + \underline{\Omega}(S/R) \wedge \underline{AB} \quad \forall A, \forall B \in S \quad (1.30)$$



**Remarques :** on constate que le champ des vitesses d'un solide indéformable est structuré :

- $\underline{\Omega}(S/R)$  représente un invariant (qui ne dépend pas des points A ou B).
- $\underline{V}(B \in S, R)$  se déduit de la vitesse en A par une relation dite de torseur.

**DÉFINITION :** on dit que le champ des vitesses d'un solide indéformable  $S$  dans son mouvement par rapport à un repère  $R$  est représenté par un torseur appelé torseur cinématique et noté ( $\mathcal{V}$  comme vitesse) :

$$\{\mathcal{T}_{cinématique}(S/R)\} = \{\mathcal{V}(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\Omega}(S/R) \\ \underline{V}(A \in S, R) \end{array} \right\}_A \quad (1.31)$$

Je précise que ce torseur est exprimé en A en l'indiquant à la fois dans le vecteur vitesse et sur le torseur. C'est redondant mais pratique pour la suite.

### 1.3.4 Equiprojectivité

On considère un solide indéformable  $S$  pour lequel la relation précédente de champ des vitesses est vérifiée. On projette cette relation sur le vecteur  $\underline{AB}$ . On obtient :

$$\underline{AB} \cdot \underline{V}(B \in S/R) = \underline{AB} \cdot \underline{V}(A \in S/R) + \underline{AB} \cdot \underline{\Omega}(S/R) \wedge \underline{AB} \quad \forall A, \forall B \in S \quad (1.32)$$

Le dernier terme est nul (le produit vectoriel définit un vecteur orthogonal aux deux termes du produit vectoriel). On a au final :

$$\boxed{\underline{AB} \cdot \underline{V}(B \in S/R) = \underline{AB} \cdot \underline{V}(A \in S/R) \quad \forall A, \forall B \in S} \quad (1.33)$$

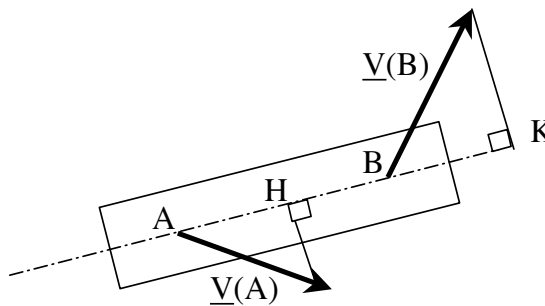


Figure 1.7 – Equiprojectivité

*Interprétation :* la projection des vecteurs vitesses sur le segment  $AB$  définit la vitesse suivant cette direction. Que la différence des vitesses de A et de B suivant  $AB$  soit nulle exprime que la distance  $AB$  reste constante au cours du temps. Si il en était autrement, le solide se déformerait.

### 1.3.5 Exemple

Exercice sur bielle manivelle (Agati, mécanique des solides rigides, page 56 édition 86). On le fait par calcul direct, composition de mouvement et deux types de repérage absolu et relatif et par cinématique graphique. Attention ne pas faire comme lui avec des angles négatifs. Toujours en direct.

### 1.3.6 Champ des accélérations

On considère toujours le même solide  $S$  en mouvement par rapport à  $R$ . On a la relation de champ des vitesses 1.30 qui par dérivation donne :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \underline{V}(B \in S/R) \right]_R &= \left[ \frac{d}{dt} \underline{V}(A \in S/R) \right]_R + \left[ \frac{d}{dt} \underline{BA} \right]_R \wedge \underline{\Omega}(S/R) \\ &+ \underline{BA} \wedge \left[ \frac{d}{dt} \underline{\Omega}(S/R) \right]_R \quad \forall A, \forall B \in S \end{aligned} \quad (1.34)$$

On note  $\underline{\Gamma}(B \in S/R)$  le vecteur accélération de  $B$  appartenant à  $S$  par rapport au repère  $R$ .

$$\underline{\Gamma}(B \in S/R) = \underline{\Gamma}(A \in S/R) + \left[ \frac{d}{dt} \underline{BA} \right]_R \wedge \underline{\Omega}(S/R) + \underline{BA} \wedge \left[ \frac{d}{dt} \underline{\Omega}(S/R) \right]_R \quad \forall A, \forall B \in S \quad (1.35)$$

Or on peut écrire que :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \underline{BA} \right]_R &= \left[ \frac{d}{dt} \underline{BA} \right]_{R_1} + \underline{\Omega}(S/R) \wedge \underline{BA} \\ &= \underline{0} + \underline{\Omega}(S/R) \wedge \underline{BA} \\ &= \underline{\Omega}(S/R) \wedge \underline{BA} \end{aligned} \quad (1.36)$$

car les points  $A$  et  $B$  appartiennent au solide  $S$  attaché au référentiel  $R_1$  par rapport auquel on dérive. On a donc au final :

$$\boxed{\underline{\Gamma}(B \in S/R) = \underline{\Gamma}(A \in S/R) + (\underline{\Omega}(S/R) \wedge \underline{BA}) \wedge \underline{\Omega}(S/R) + \underline{BA} \wedge \left[ \frac{d\underline{\Omega}(S/R)}{dt} \right]_R \quad \forall A, B \in S} \quad (1.37)$$

**Remarque :** On ne trouve pas de relation de type torseur pour le champ des accélérations.

## 1.4 Composition des mouvements

### 1.4.1 Composition des vecteurs vitesse

Nous allons étudier dans ce passage la méthode qui permet de passer d'un repère à un autre, ce qui est souvent nécessaire lorsque l'on s'intéresse à des mécanismes qui comportent plusieurs solides en mouvement.

On reprend un solide  $S$  en mouvement par rapport à  $R$  et par rapport à  $R_1$ .

$$\begin{aligned} \underline{V}(M/R) &= \left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_R \\ &= \left[ \frac{d}{dt} (\underline{OO_1} + \underline{O_1M}) \right]_R \\ &= \underline{V}(O_1/R) + \left[ \frac{d}{dt} \underline{O_1M} \right]_R \end{aligned} \quad (1.38)$$

Or on sait en utilisant la règle de dérivation dans deux repères différents (éq. 1.19) que :

$$\left[ \frac{d}{dt} \underline{O_1 M} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \underline{O_1 M} \right]_{R_1} + \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{O_1 M} \quad (1.39)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \underline{V}(M/R) &= \underline{V}(O_1/R) + \left[ \frac{d}{dt} \underline{O_1 M} \right]_{R_1} + \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{O_1 M} \\ &= \underline{V}(O_1/R) + \underline{V}(M/R_1) + \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{OM} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Si on suppose le point  $M$  appartenant non pas au solide  $S$  mais au repère  $R_1$  (ce qui revient à supposer que le solide  $S$  est fixe dans  $R_1$ ) alors sa vitesse  $\underline{V}(M \in R_1/R)$  est nulle donc :

$$\underline{V}(M \in R_1/R) = \underline{V}(O_1/R) + \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{O_1 M} \quad (1.41)$$

On peut donc utiliser cette écriture pour obtenir :

$$\underline{V}(M \in S/R) = \underline{V}(M \in S/R_1) + \underline{V}(M \in R_1/R) \quad (1.42)$$

Le premier terme est appelé vitesse absolue, le deuxième vitesse relative et le troisième vitesse d'entraînement.

**Remarque** : on peut omettre dans les deux premiers termes  $\in S$  mais je conseille de l'indiquer systématiquement.

### 1.4.2 Composition des vecteurs rotation

Nous reprenons notre solide en mouvement par rapport aux deux repères  $R$  et  $R_1$  et notons  $\underline{\Omega}(S/R)$ ,  $\underline{\Omega}(S/R_1)$  et  $\underline{\Omega}(R_1/R)$  les vecteurs vitesse de rotation instantanée respectivement du solide  $S$  par rapport à  $R$  et  $R_1$  ainsi que du repère  $R_1$  par rapport à  $R$ .

La règle de dérivation vectorielle nous donne (éq. 1.19) :

$$\left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_{R_1} + \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{OM} \quad (1.43)$$

Nous pouvons aussi écrire :

$$\left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_{R_1} = \left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_S + \underline{\Omega}(S/R_1) \wedge \underline{OM} \quad (1.44)$$

On ajoute terme à terme ces deux équations pour obtenir :

$$\left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_S + (\underline{\Omega}(R_1/R) + \underline{\Omega}(S/R_1)) \wedge \underline{OM} \quad (1.45)$$

Mais on peut aussi écrire en considérant le solide  $S$  et le repère  $R$  :

$$\left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} \right]_S + \underline{\Omega}(S/R) \wedge \underline{OM} \quad (1.46)$$

En comparant ces deux dernières égalités, on en déduit la règle de composition des vecteurs vitesse de rotation :

$$\underline{\Omega}(S/R) = \underline{\Omega}(S/R_1) + \underline{\Omega}(R_1/R) \quad (1.47)$$

### 1.4.3 Composition des torseurs cinématiques

On peut résumer les compositions du vecteur vitesse et du vecteur vitesse de rotation en écrivant :

$$\underline{\Omega}(S/R) = \underline{\Omega}(S/R_1) + \underline{\Omega}(R_1/R) \quad (1.48)$$

$$\underline{V}(M \in S/R) = \underline{V}(M \in S/R_1) + \underline{V}(M \in R_1/R) \quad (1.49)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} \{\mathcal{V}(S/R)\}_M &= \{\mathcal{V}(S/R_1)\}_M + \{\mathcal{V}(R_1/R)\}_M \\ \left\{ \begin{array}{c} \underline{\Omega}(S/R) \\ \underline{V}(M \in S/R) \end{array} \right\}_M &= \left\{ \begin{array}{c} \underline{\Omega}(S/R_1) \\ \underline{V}(M \in S/R_1) \end{array} \right\}_M + \left\{ \begin{array}{c} \underline{\Omega}(R_1/R) \\ \underline{V}(M \in R_1/R) \end{array} \right\}_M \end{aligned}} \quad (1.50)$$

**Attention** : Il faut lorsque l'on veut composer les torseurs utiliser le même point  $M$  d'où l'importance de le noter dans l'écriture du torseur.

### 1.4.4 Vitesse de glissement

On a vu apparaître dans la composition des vitesses un terme  $\underline{V}(M \in R_1/R)$  appelé vitesse d'entraînement. Considérons maintenant que le solide  $S$  est fixe dans  $R_1$  et qu'il est en mouvement par rapport à  $R$  (sphère qui roule sur un plan par exemple). Supposons qu'il existe un plan tangent au point de contact noté  $P$  (si le contact est ponctuel). Le terme  $\underline{V}(P \in P_1/R) = \underline{V}(P \in S/R)$ .

**DÉFINITION** : La vitesse d'entraînement  $\underline{V}(P \in S/R)$  au point de contact  $P$  entre le solide  $S$  et un solide lié à  $R$  représente la vitesse de glissement en  $P$  à l'instant  $t$  du solide  $S$  par rapport à  $R$ .

*Propriété* : La vitesse de glissement appartient au plan tangent en  $P$  aux deux solides.

**DÉFINITION** : Si la vitesse de glissement est nulle on dit que le solide  $S$  roule sans glisser par rapport à  $R$ .

Exercice à faire.

### 1.4.5 Composition des accélérations

On reprend le solide  $S$  et les deux repères  $R$  et  $R_1$ . Nous avons établi que (équation 1.40) :

$$\underline{V}(M/R) = \underline{V}(O_1/R) + \underline{V}(M/R_1) + \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{OM} \quad (1.51)$$

On va dériver cette expression par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \underline{V}(M/R) \right]_R &= \left[ \frac{d}{dt} \underline{V}(O_1/R) \right]_R + \left[ \frac{d}{dt} \underline{V}(M/R_1) \right]_R \\ &+ \left[ \frac{d}{dt} \underline{\Omega}(R_1/R) \right]_R \wedge \underline{O_1 M} + \underline{\Omega} \wedge \left[ \frac{d}{dt} \underline{O_1 M} \right]_R \end{aligned} \quad (1.52)$$

Nous allons considérer tous les termes dans l'ordre :

1. Terme  $\left[ \frac{d}{dt} \underline{V}(M/R) \right]_R$ . C'est par définition le vecteur accélération  $\underline{\Gamma}(M/R)$ .
2. Terme  $\left[ \frac{d}{dt} \underline{V}(O_1/R) \right]_R$ . Le point  $O_1$  est un point  $M$  particulier ; on a donc l'accélération de  $O_1$  par rapport au repère  $R$  :  $\underline{\Gamma}(O_1/R)$ .
3. Terme  $\left[ \frac{d}{dt} \underline{V}(M/R_1) \right]_R$ . On va le modifier ainsi :

$$\left[ \frac{d}{dt} \underline{V}(M/R_1) \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \underline{V}(M/R_1) \right]_{R_1} + \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{V}(M/R_1) \quad (1.53)$$

$$= \underline{\Gamma}(M/R_1) + \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{V}(M/R_1) \quad (1.54)$$

4. Terme  $\left[ \frac{d}{dt} \underline{\Omega}(R_1/R) \right]_R \wedge \underline{O_1 M}$ . On le laisse tel que.
5. Terme  $\underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \left[ \frac{d}{dt} \underline{O_1 M} \right]_R$ . On écrit :

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \left[ \frac{d}{dt} \underline{O_1 M} \right]_R &= \underline{\Omega}(R_1/R) \left[ \left[ \frac{d}{dt} \underline{O_1 M} \right]_{R_1} + \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{O_1 M} \right] \\ &= \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \left[ \underline{V}(M/R_1) + \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{O_1 M} \right] \\ &= \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{V}(M/R_1) + \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge (\underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{O_1 M}) \end{aligned} \quad (1.55)$$

On peut donc dorénavant écrire l'équation 1.52 sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}(M/R) &= \underline{\Gamma}(O_1/R) + \underline{\Gamma}(M/R_1) + \left[ \frac{d}{dt} \underline{\Omega}(R_1/R) \right]_R \wedge \underline{O_1 M} \\ &+ \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \left[ \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{O_1 M} \right] + 2 \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{V}(M/R_1) \end{aligned} \quad (1.56)$$

Si on suppose (comme pour la composition des accélérations que le point  $M$  est lié au repère  $R_1$  ( $S$  fixe dans  $R_1$ )) alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}(M \in R_1/R) &= \underline{\Gamma}(O_1/R) + \left[ \frac{d}{dt} \underline{\Omega}(R_1/R) \right]_R \wedge \underline{O_1 M} \\ &+ \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \left[ \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{O_1 M} \right] \end{aligned} \quad (1.57)$$

On peut donc écrire finalement :

$$\boxed{\underline{\Gamma}(M \in S/R) = \underline{\Gamma}(M \in S/R_1) + \underline{\Gamma}(M \in R_1/R) + 2 \underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{V}(M \in S/R_1)} \quad (1.58)$$

On peut remarquer que le dernier terme ne peut pas être inclus dans l'accélération d'entraînement car, par définition de celle-ci, elle suppose fixe le solide  $S$  dans  $R_1$  donc la vitesse relative ne peut pas intervenir. Ce terme a donc un statut différent.

#### DÉFINITION

- $\underline{\Gamma}(M \in S/R)$  représente l'accélération dite absolue,
- $\underline{\Gamma}(M \in S/R_1)$  représente l'accélération relative,
- $\underline{\Gamma}(M \in R_1/R)$  correspond à l'accélération d'entraînement,
- $2\underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{V}(M \in S/R_1)$  est appelé accélération de Coriolis (Gustave Gaspard Coriolis, mathématicien français, 1792-1843).

## 1.5 Mouvement plan sur plan

### 1.5.1 Définition

On appelle mouvement plan sur plan le mouvement d'un solide  $S$  attaché au repère  $R_1$  tel qu'un plan de  $S$ ,  $(O_1, \underline{x}_1, \underline{y}_1)$  par exemple, reste confondu avec un plan  $(O, \underline{x}, \underline{y})$  du repère de référence  $R$ .

Le torseur cinématique se réduit dans ces conditions à :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\Omega}(S/R) \\ \underline{V}(O_1 \in S, R) \end{array} \right\}_{O_1} \quad (1.59)$$

avec :  $\underline{\Omega}(S/R) = \dot{\theta} \underline{z}$  et la condition  $\underline{V}(O/R) \cdot \underline{z} = 0$  pour que point  $O_1$  reste dans le plan de base.

**Propriété :** Il existe un point  $I$  unique appelé centre instantané de rotation du mouvement de  $S$  par rapport à  $R$  tel que :

$$\underline{V}(I \in S/R) = \underline{0} \quad (1.60)$$

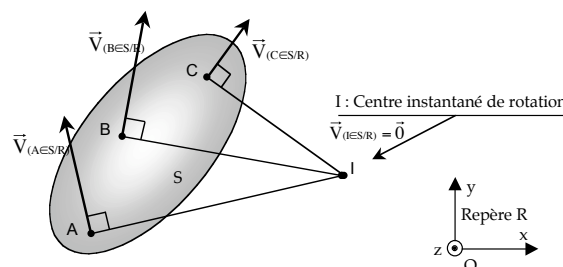


Figure 1.8 – Centre Instantané de Rotation (CIR)

#### Remarques

1. Le point  $I$  existe si il y a un vecteur  $\underline{\Omega}(S/R)$  vitesse de rotation non nul.

2. La position du point  $I$  varie au cours du temps.

**DÉFINITION**

1. On appelle base  $b$  du mouvement de  $S$  par rapport à  $R$  la trajectoire de  $I$  dans le repère  $R$ .
2. On appelle roulante  $r$  du mouvement de  $S$  par rapport à  $R$  la trajectoire de  $I$  dans le repère  $R_1$ .

**1.5.2 Détermination du point I**

Il est aisé à partir de la définition de  $I$  de connaître sa position à un instant  $t$  si on connaît au moins la vitesse de deux points. En effet on écrit :

$$\underline{V}(A \in S/R) = \underline{V}(I \in S/R) + \underline{\Omega}(S/R) \wedge \underline{IA} \quad (1.61)$$

$$= \underline{0} + \dot{\theta} \underline{z} \wedge \underline{IA} \quad (1.62)$$

Cette équation montre que le vecteur  $\underline{IA}$  est perpendiculaire au vecteur vitesse connu  $\underline{V}(A \in S/R)$ . Le point  $I$  se situe sur cette perpendiculaire. Si on connaît une autre vitesse pour un second point l'intersection des droites donne la position à l'instant  $t$  du point  $I$ .

On reprend l'exercice.

**1.5.3 Propriétés de la base et de la roulante**

Nous savons que la trajectoire de  $I$  dans le repère  $R$  (resp.  $R_1$ ) est la base  $b$  (resp. la roulante  $r$ ). Ces deux courbes peuvent servir à définir la vitesse de  $I$  par rapport à elles-mêmes. Elles sont telles que la relation de composition des vitesses s'applique :

$$\underline{V}(I/b) = \underline{V}(I/r) + \underline{\Omega}(r/b) \wedge \underline{V}(I \in r/b) \quad (1.63)$$

Mais le vecteur  $\underline{V}(I \in r/b)$  est égal à  $\underline{V}(I \in R_1/R)$  car la roulante est attachée au repère  $R_1$  alors que la base est fixe dans  $R$ . Or  $\underline{V}(I \in R_1/R)$ , par définition du centre instantané de rotation  $I$ , est nul. donc :

$$\underline{V}(I/b) = \underline{V}(I/r) \quad (1.64)$$

Comme  $I$  appartient à la fois à  $b$  et à  $r$  et que  $\underline{V}(I)$  est tangent à la base et à la roulante, on en déduit que la base et la roulante sont deux courbes tangentes au point  $I$ .

**Propriétés**

1. La base et la roulante sont deux courbes tangentes en  $I$  à chaque instant.
2. Comme la vitesse relative  $\underline{V}(I \in r/b)$  est nulle par définition du CIR, que cette vitesse relative représente la vitesse de glissement de  $r$  par rapport à  $b$  on peut dire que les deux courbes roulent sans glisser l'une sur l'autre.

**Exercice** Soit le système décrit sur la figure suivante :

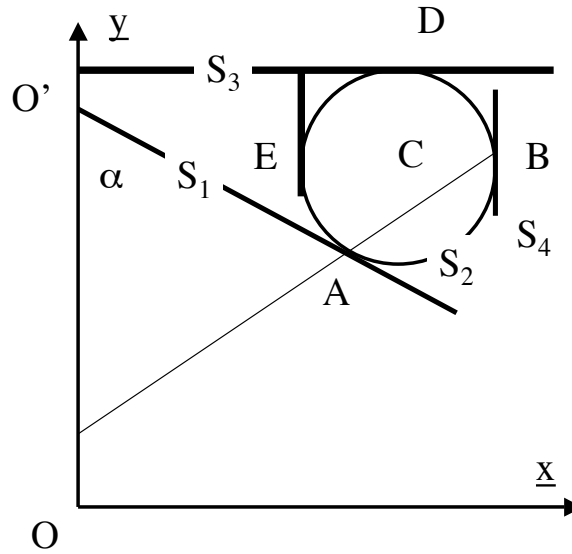


Figure 1.9 – Exemple de variateur à billes

1. Un cône  $S_1$  de révolution autour de l'axe  $\underline{y}$  de demi-angle au sommet  $\alpha$  fixe dans le repère de base  $(O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ ,
2. un cylindre  $S_4$  de rayon intérieur  $R$  de révolution autour de  $\underline{z}$ ,
3. des billes  $S_2$  de rayon  $r$  inférieur à  $R$  tangentes à  $S_4$  en  $B$  et à  $S_1$  en  $A$ ,
4. un solide  $S_3$  constitué d'un plateau tangent aux billes en  $D$  et d'un cylindre de révolution autour de  $\underline{y}$  touchant les billes en  $E$ .

Il y a roulement sans glissement aux points de contact  $A$ ,  $B$  et  $D$  mais pas en  $E$ .

Questions : On décide de fixer le solide  $S_4$  à  $S_1$  et on note  $\underline{\Omega}(3/1) = \omega_{3/1} \underline{y}$ .

1. Déterminer l'axe de rotation  $\Delta_{2/1}$ ,  $\underline{\Omega}_{2/1}$  et les vecteurs roulement et pivotement en  $A$  et  $B$ .
  2. Calculez  $\underline{V}(C \in 2/1)$ ,  $\underline{V}(T \in 2/1)$  et  $\underline{\Gamma}(T \in 2/1)$  avec  $T$  point d'intersection de  $AB$  et de l'axe  $O, \underline{y}$  à l'instant  $t$ .
  3. Déterminez les surfaces engendrées par  $\Delta_{2/1}$  dans le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ . Quelle est la valeur de la vitesse de glissement en  $E$ . Donnez  $\underline{\Omega}_{2/3}$ .
- Distribution des vitesses dans le solide 2 entre  $A$  et  $B$ .

$$\underline{V}(B \in 2/1) = \underline{V}(A \in 2/1) + \underline{\Omega}(2/1) \wedge \underline{AB} \quad (1.65)$$

Comme il y a roulement sans glissement en  $A$  et en  $B$  alors :

$$\underline{\Omega}(2/1) \wedge \underline{AB} = \underline{0} \quad (1.66)$$

Donc l'axe de rotation de 2 par rapport à 1 est la droite  $AB$  et le vecteur rotation  $\underline{\Omega}(2/1)$  est colinéaire à  $\underline{AB}$ . On pose  $\underline{\Omega}(2/1) = \lambda \underline{AB}$ .



Calcul de  $\underline{\Omega}(2/1)$  : On a roulement sans glissement en  $D$  donc :

$$\underline{V}(D \in 2/3) = \underline{0} \quad (1.67)$$

Donc

$$\underline{V}(D \in 3/1) = \underline{V}(D \in 3/2) + \underline{V}(D \in 2/1) = \underline{V}(D \in 2/1) \quad (1.68)$$

On a aussi :

$$\underline{V}(D \in 2/1) = \underline{V}(B \in 2/1) + \underline{\Omega}(2/1) \wedge \underline{BD} = \underline{\Omega}(2/1) \wedge \underline{BD} \quad (1.69)$$

$$\underline{V}(D \in 3/1) = \underline{V}(O' \in 2/1) + \underline{\Omega}(3/1) \wedge \underline{O'D} = \underline{\Omega}(3/1) \wedge \underline{O'D} \quad (1.70)$$

On peut donc conclure de ces deux dernières égalités que :

$$\underline{\Omega}(3/1) \wedge \underline{O'D} = \underline{\Omega}(2/1) \wedge \underline{BD} \quad (1.71)$$

On écrit  $\underline{\Omega}(2/1) \wedge (-r \underline{x}_1 + r \underline{z}_1) = \omega_{3/1} \underline{z}_1 \wedge (R - r) \underline{x}_1$  ce qui permet de calculer le vecteur :

$$\underline{\Omega}(2/1) = \lambda \underline{AB} = \lambda(r + r \cos \alpha) \underline{x}_1 + r \sin \alpha \underline{z}_1 \quad (1.72)$$

$$\lambda = -\omega_{3/1} \frac{R - r}{r^2(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)} \quad (1.73)$$

– vitesse de  $C$ . On a roulement sans glissement de 2 par rapport à 4 qui est lié à 1 soit :

$$\underline{V}(C \in 2/1) = \underline{0} = \underline{V}(B \in 2/1) + \underline{\Omega}(2/1) \wedge \underline{BC} \quad (1.74)$$

Mais la vitesse de  $B$  est connue donc :

$$\underline{V}(C \in 2/1) = -\omega_{3/1} \frac{(R - r) \sin \alpha}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha} \underline{x}_1 \quad (1.75)$$

– vitesse de  $T$ . Ce point sur l'axe de rotation de 2 par rapport à 1 cette vitesse (et l'accélération) est nulle.

Comme on vient de calculer les vitesses de points appartenant aux différents solides ainsi les vecteurs rotation, on connaît tout le mouvement. On peut alors calculer la vitesse de glissement au point  $E$ .

Ajouter démonstration avec cercle roulant sans glisser sur plan pour  $\underline{V}(I) = 0$

## 1.6 Propriétés des torseurs

L'objectif est ici de mettre en place la structure des torseurs avec leurs propriétés. Cette partie est inspirée d'un cours de DEUG de M. Devel (Université de Franche Comté).

**1.6.1 Champ de vecteurs antisymétriques**

Soit un espace vectoriel euclidien  $E^n$ . Une application  $\underline{f}$  de  $E^n$  dans  $E^n$  est symétrique si :

$$\forall \underline{u} \in E^n, \quad \forall \underline{v} \in E^n, \quad \underline{u} \cdot \underline{f}(\underline{v}) = \underline{v} \cdot \underline{f}(\underline{u}) \quad (1.76)$$

Elle est antisymétrique si :

$$\forall \underline{u} \in E^n, \quad \forall \underline{v} \in E^n, \quad \underline{u} \cdot \underline{f}(\underline{v}) = -\underline{v} \cdot \underline{f}(\underline{u}) \quad (1.77)$$

**Propriété :**

1. Toute application  $\underline{f}$  (anti)symétrique de  $E^n$  dans  $E^n$  est linéaire.

$$\forall \underline{u} \in E^n, \quad \forall \underline{v} \in E^n, \quad \underline{f}(\alpha \underline{u} + \beta \underline{v}) = (\alpha \underline{f}(\underline{u}) + \beta \underline{f}(\underline{v})) \quad (1.78)$$

2. La matrice dans une base orthonormée d'une application (anti)symétrique est (anti)symétrique.

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, n \quad a_{ij} = (-)a_{ji} \quad (1.79)$$

**THÉORÈME** Si  $\underline{f}$  est une application antisymétrique de  $E^3$ , il existe un vecteur  $\underline{R}$  unique de  $E^3$  appelé vecteur caractéristique de  $\underline{f}$  tel que :

$$\forall \underline{u} \in E^3 \quad \underline{f}(\underline{u}) = \underline{R} \wedge \underline{u} \quad (1.80)$$

Si les coordonnées de  $\underline{R}$  dans une base orthonormée de  $E^3$  sont  $r_x, r_y, r_z$  alors la matrice de  $\underline{f}$  dans cette base est donnée ci-dessous. Réciproquement toute application dont la matrice est de cette forme a un vecteur caractéristique  $\underline{R}$  de coordonnées  $r_x, r_y, r_z$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

**DÉMONSTRATION** L'application est évidemment antisymétrique si la matrice est de la forme indiquée ci-dessus.

Montrons que  $\underline{R}$  est unique. Pour cela soit  $\underline{R}_1$  et  $\underline{R}_2$  vecteurs caractéristiques. On a alors  $(\underline{R}_1 - \underline{R}_2) \wedge \underline{u} = \underline{0} \quad \forall \underline{u} \in E^3$ . On en déduit donc que  $\underline{R}$  est unique.

Comment trouver  $\underline{R}$  ? Soit une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.82)$$

Soit un vecteur de composantes  $(a, b, c)$ . L'image de ce vecteur par  $\underline{f}$  est donc un vecteur  $(-a_x a - a_y c, a_x a - a_z c, a_y a + a_z b)$  qui est à comparer à  $\underline{R} \wedge \underline{u}$  égal à  $(-r_x a - r_y c, r_x a - r_z c, r_y a + r_z b)$ . Les composantes de  $\underline{R}$  sont donc :  $(-a_x, a_y, a_z)$ .

**THÉORÈME** Si  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$  et  $\underline{e}_3$  sont les vecteurs unitaires d'une base orthonormée de  $E^3$  alors le vecteur  $\underline{R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \underline{e}_i \wedge \underline{f}(\underline{e}_i)$  est le vecteur caractéristique de l'application  $\underline{f}$ .

**DÉMONSTRATION**  $\sum_{i=1}^3 \underline{e}_i \wedge \underline{f}(\underline{e}_i) = \sum_{i=1}^3 \underline{e}_i \wedge (\underline{R} \wedge \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^3 (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_i) \underline{R} - (\underline{e}_i \cdot \underline{R}) \underline{e}_i = 2 \underline{R}$ .

### 1.6.2 Vecteurs liés, libres

**DÉFINITION** On appelle vecteur lié ou pointeur un vecteur tracé à partir d'un point (vecteur vitesse par exemple). On note  $(A, \underline{u})$  le vecteur lié d'origine  $A$  et de vecteur libre  $\underline{u}$ . On appelle vecteur glissant un ensemble de vecteurs liés dont l'origine  $A$  appartient à une droite parallèle au vecteur lié.

### 1.6.3 Champ de moment

On définit le champ de moment d'un vecteur glissant  $(A, \underline{u})$  par :

$$\forall M \quad \underline{M}(A, \underline{u}) = \underline{MA} \wedge \underline{u} = \underline{AM} \wedge \underline{u} \quad (1.83)$$

**THÉORÈME** Tous les vecteurs liés d'un même vecteur glissant ont le même champ de moment.

**DÉFINITION** Un champ de vecteur  $\underline{M}(A)$  (application de l'espace affine sur l'espace vectoriel) qui associe un vecteur à un point est antisymétrique si il existe un point  $O$  et une application antisymétrique  $\underline{f}$  tels que :

$$\forall P \quad \underline{M}(P) = \underline{M}(O) + \underline{f}(\underline{OP}) \quad (1.84)$$

$$= \underline{M}(O) + \underline{R} \wedge \underline{OP} \quad (1.85)$$

**THÉORÈME** Pour qu'un champ  $M$  soit antisymétrique, il faut et il suffit qu'il soit équiprojectif.

**DÉMONSTRATION** *A rédiger.*

### 1.6.4 Opérations sur les torseurs

Egalité : deux torseurs sont égaux si les éléments de réduction en un même point sont égaux.

Somme : la somme (en un même point) de deux torseurs est un torseur.

Produit : on appelle produit (comoment) de deux torseurs la grandeur scalaire :

$$\{\mathcal{T}_1\} * \{\mathcal{T}_2\} = \underline{R}_1 \cdot \underline{M}_2(A) + \underline{R}_2 \cdot \underline{M}_1(A) \quad \forall A \quad (1.86)$$

Cette grandeur scalaire ne dépend pas du point  $A$  utilisé pour le calcul.

La quantité  $\underline{R} \cdot \underline{T}$  qui est l'auto moment du torseur est un invariant (qui ne dépend pas du point).

### 1.6.5 Glisseur

**DÉFINITION** On appelle glisseur un torseur  $\{\mathcal{T}\} = \{\underline{R} \quad \underline{M}\}$  si il existe au moins un point  $A$  tel que  $\underline{M}(A) = \underline{0}$ .

Ceci correspond en cinématique à un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. En effet on a bien pour tout point  $A$  situé sur l'axe :  $\underline{V}(A) = \underline{0}$ .

### 1.6.6 Couple

**DÉFINITION** On appelle couple un torseur  $\{\mathcal{T}\} = \{\underline{R} \quad \underline{M}\}$  si la résultante  $\underline{R}$  est nulle.

Ceci correspond en cinématique à un mouvement de translation pour lequel on ne peut pas trouver de point à vitesse nulle.

### 1.6.7 Décomposition d'un torseur

**THÉORÈME** Tout torseur  $\{\mathcal{T}\} = \{\underline{R} \quad \underline{M}\}$  se décompose de façon unique en la somme d'un glisseur et d'un couple. On peut toujours écrire :

$$\underline{M}(M) = \frac{\underline{M}(M) \cdot \underline{R}}{R^2} \underline{R} + \left[ \underline{M}(M) - \frac{\underline{M}(M) \cdot \underline{R}}{R^2} \underline{R} \right] \quad (1.87)$$

Le premier terme définit le champ d'un couple, le second celui d'un glisseur.

**DÉMONSTRATION** *Démonstration pour plus tard.*

## 1.7 Axe d'un torseur

On appelle axe d'un torseur l'ensemble des points  $A$  tels que  $\underline{R}$  est colinéaire à  $\underline{M}(A)$  c'est à dire tels que  $\underline{R} \wedge \underline{M}(A) = \underline{0}$ .

L'axe d'un torseur de résultante  $\underline{R}$  est un axe parallèle à  $\underline{R}$

## Chapitre 2

# Statique des solides

### 2.1 Définitions des actions mécaniques

Une action mécanique peut être exercée sur un solide  $S_1$  pour le maintenir au repos, le déplacer ou le déformer. On peut par exemple recenser : le pied d'un footballeur qui frappe un ballon, les champs électriques et magnétiques qui dévient l'électron, le rotor qui entraîne l'axe d'une turbine. Ces actions sont exercées par  $S_2$  sur  $S_1$ .

**DÉFINITION** Deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en interaction si on peut trouver dans l'un une modification de position d'orientation qui entraîne une modification dans l'autre.

**DÉFINITION** On appelle force la grandeur vectorielle décrivant une interaction capable de produire un mouvement ou de créer une déformation. On dit alors que  $S_2$  exerce une action mécanique sur  $S_1$  si relativement à un référentiel les mouvements (ou déformations) de  $S_1$  par rapport à ce référentiel sont différents selon que  $S_2$  est présent ou absent.

Ces actions se classent en deux grandes catégories :

**Actions à distance** : elles sont liées à des champs d'accélération (pesanteur), électromagnétiques par exemple.

**Actions de contact** : de pression (le pied qui frappe un ballon, le gaz qui maintient le ballon sous pression).

Ces actions s'exercent soit sur :

**Une surface** : contact solide solide, action d'un gaz sur un solide,

**Un volume** : c'est le cas de la gravité.

Elles peuvent être pour le système considéré :

**Externes** : la gravité agit sur un véhicule (avec tous les éléments internes),

**Internes** : si on veut comprendre le fonctionnement de certains organes internes (roues par exemple) on pourra alors faire apparaître non seulement les efforts extérieurs appliqués par le sol sur cette roue mais aussi des efforts exercés par le système de fixation de la roue sur le véhicule.

**Cette dernière classification dépend du système que nous allons isoler.**

## 2.2 Modélisation des actions mécaniques

Si on considère un solide matériel comme un ensemble de points matériels (c'est à dire de points  $M$  auxquels on attache une petite quantité de matière  $dm$ ) on peut alors écrire que toute action (à distance ou de contact) se résume à un effort représenté par un vecteur. On notera  $\underline{df}(Ext \rightarrow M(dm))$  cet effort appliqué au point  $M$  dont la masse élémentaire est  $dm$ .

**DÉFINITION** Une force se représente par un vecteur lié (attaché au point  $M$ ).

**PRINCIPE** On sait que la puissance  $P$ , dans le repère  $R$  d'un effort  $\underline{df}$  appliqué en un point  $M$  dans une vitesse de déplacement de  $M$  notée  $\underline{V}(M/R)$  se définit comme le produit scalaire :

$$P(\underline{df}, \underline{V}(M/R)) = \underline{df} \cdot \underline{V}(M/R) \quad (2.1)$$

Comme le champ des vitesses d'un solide est celui donné par le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}\}$  on définit le torseur statique (noté  $\mathcal{F}$  comme force) ( $\mathcal{F}(Ext \rightarrow S)$ ) des efforts exercés sur un solide  $S$  tel que la puissance (par rapport au repère  $R$ ) de ces efforts dans le champ de vitesse est donné par le comoment des deux torseurs :

$$P = \{\mathcal{V}\} \cdot \{\mathcal{F}\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\Omega}(S/R) \\ \underline{V}(M/R) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \underline{F} \\ \underline{M}(M, \underline{F}) \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

**Résultante** : Elle se détermine comme la somme de tous les actions élémentaires  $\underline{df}$ .

$$\underline{F}(Ext \rightarrow S) = \int_S \underline{df}(Ext \rightarrow M) \quad \forall M \in S \quad (2.3)$$

**Moment** : De la même manière on obtient :

$$\underline{M}(A) = \int_S \underline{AM} \wedge \underline{df}(Ext \rightarrow M) \quad \forall M \in S \quad (2.4)$$

**DÉMONSTRATION** Si on admet que  $\underline{F}$  représente bien la résultante des actions élémentaires exercées sur des points  $M_i$  du solide  $S$ , alors  $\underline{M}(B) = \sum_i \underline{BM}_i \wedge \underline{df}_i = \sum_i (\underline{BA} + \underline{AM}_i) \wedge \underline{df}_i = \sum_i (\underline{BA} \wedge \underline{df}_i + \underline{AM}_i \wedge \underline{df}_i) = \underline{BA} \wedge \underline{F} + \underline{M}(A)$ .

On trouve donc la relation caractéristique d'un torseur ce qui était annoncé.

## 2.3 Actions à distance : gravité

Si on considère les actions à distance de gravité exercées sur un solide  $S$  de centre de gravité  $G$  on peut écrire le torseur des actions mécaniques par :

$$\underline{F}(g \rightarrow S) = \int_S \underline{df} = \int_S \underline{g} dm = -g \underline{z} M_S \quad (2.5)$$

On a supposé que le vecteur  $\underline{z}$  est vertical ascendant et que  $\underline{g}$  est vertical descendant avec  $g$  constant sur le domaine d'intégration.

$$\begin{aligned}
\underline{M}(A, g \rightarrow S) &= \int_{M \in S} \underline{AM} \wedge d\underline{f} \\
&= \int_{M \in S} \underline{AM} \wedge \underline{g} dm \\
&= -g \int_{M \in S} \underline{AM} dm \wedge \underline{z}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

**DÉFINITION** On définit le **centre de masse (ou d'inertie)**  $G$  comme le point tel que :

$$M_S \underline{AG} = \int_{M \in S} \underline{AM} dm \quad \forall A \tag{2.7}$$

On peut donc reprendre l'expression du moment  $\underline{M}$  et écrire :

$$\underline{M}(A, g \rightarrow S) = -g M_S \underline{AG} \wedge \underline{z} \tag{2.8}$$

**Propriété** Le moment des actions de gravité au point  $G$  centre de masse du système est nul et le torseur des actions de la gravité se réduit donc en ce point à un glisseur.

Il nous faut donc savoir calculer les centres de masse de différents solides trouvés couramment en mécanique.

#### Remarques.

1. On admettra l'équivalence entre centre de masse et d'inertie.
2. Le centre de gravité d'un objet est par définition le point d'application de son poids. Si les dimensions de l'objet sont telles l'hypothèse  $g$  constant est fausse alors on constate que le centre d'inertie  $G$  n'est pas forcément confondu avec le centre de gravité. Si par contre le champ d'accélération de la pesanteur est constant sur le domaine d'intégration alors il y a aussi équivalence entre le centre de masse  $G$  et de gravité.

## 2.4 Calcul des centres de masse

### 2.4.1 Additivité

On peut remarquer que la définition du centre masse permet d'écrire que si le système  $S$  considéré peut-être décomposé en plusieurs parties  $S_1$  et  $S_2$  simples (i.e. dont les centres de masse  $G_1$  et  $G_2$  sont simples à déterminer) alors le centre de masse  $G$  de  $S$  est tel que :

$$\begin{aligned}
\int_{A \in S} \underline{OA} dm &= \int_{A \in S_1} \underline{OA} dm + \int_{A \in S_2} \underline{OA} dm \\
&= M_1 \underline{OG_1} + M_2 \underline{OG_2} \\
&= M \underline{OG}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

### 2.4.2 Symétries

On dira qu'un système  $S$  possède une symétrie matérielle par rapport à un point, une droite ou un plan si pour tout point  $A$  du système, il existe un point  $B$  symétrique de  $A$  (par rapport au point, à la droite ou au plan) tel que :

- $B$  appartient à  $S$ ,
- $\rho(A) = \rho(B)$  avec  $\rho$  la masse volumique locale.

**THÉORÈME** Si un système possède un élément de symétrie, alors son centre de masse appartient nécessairement à cet élément de symétrie.

**DÉMONSTRATION** *Démonstration évidente par utilisation de deux petits éléments de matière symétrique dont le centre de masse est situé sur l'élément de symétrie et par le fait que la somme de deux vecteurs parallèles à une même droite (ou plan) est un vecteur parallèle à cette droite (plan).*

### 2.4.3 Théorèmes de Guldin

Guldin (1577, 1643) est un scientifique (père jésuite) suisse à qui on attribue ces théorèmes également attribués à Pappus d'Alexandrie (300, ?) lequel a surtout commenté les découvertes de ces prédécesseurs.

**THÉORÈME** Soit une plaque plane, homogène d'épaisseur négligeable. Soit  $G$  son centre de masse et  $\Delta$  une droite située dans le plan de la plaque mais n'appartenant pas au solide.

On a :

$$2\pi S HG = V \quad (2.10)$$

Le point  $H$  est la projection orthogonale de  $G$  sur  $\Delta$ ,  $S$  est la surface de la plaque et  $V$  le volume engendré par  $S$  en rotation autour de l'axe  $\Delta$ .

**DÉMONSTRATION** Soit  $G$  le centre de masse de  $P$  la plaque.

$$S \underline{OG} = \int_{\text{Plaque}} \underline{OM} ds \quad (2.11)$$

Par projection sur un axe perpendiculaire à  $\Delta$  on obtient :

$$S r_G = \int_{\text{Plaque}} r ds \quad (2.12)$$

Ce qui donne par multiplication par  $2\pi$

$$2\pi S r_G = \int_{\text{Plaque}} 2\pi r ds \quad (2.13)$$

Le second membre représente le volume  $V$  engendré par la rotation de la plaque autour de l'axe  $\Delta$ .

Application : soit un demi disque dont on cherche le centre de masse. On utilise le fait que le centre de masse appartient à un axe de symétrie. On utilise le théorème de Guldin et on obtient :  $1/2\pi R^2 * (2\pi r_G) = 4/3\pi R^3$  soit  $r_G = 4R/3\pi$ .



**THÉORÈME** Soit une courbe contenue dans un plan. Soit  $G$  son centre de masse et  $\Delta$  une droite située dans le plan de la courbe mais ne coupant pas la courbe.

On a :

$$2\pi LHG = S \quad (2.14)$$

Le point  $H$  est la projection orthogonale de  $G$  sur  $\Delta$ ,  $L$  est la longueur de la courbe et  $S$  la surface engendrée par la courbe en rotation autour de l'axe  $\Delta$ .

Application : soit un cercle de rayon  $r$  (courbe) qui par rotation autour d'un axe ( $HG = R$ ) engendre un tore dont on cherche la surface. On utilise le théorème de Guldin et on obtient :  $2\pi(2\pi)RS$  soit  $S = 4\pi^2 Rr$ .

## 2.5 Modélisation des actions de contact

Le contact entre deux solides s'effectue selon une surface aussi petite soit-elle notée  $dS$ . On sait que les efforts élémentaires appliqués en un point  $M$  par  $S_2$  sur  $S_1$  sont représentés par un vecteur  $\underline{df}(M, S_2 \rightarrow S_1)$  attaché au point  $M$ . Le rapport entre l'effort élémentaire et l'élément de surface est une densité surfacique d'effort (homogène à une pression  $Nm^{-2} = Pa$ ). Le problème est que dans la plupart des cas il est impossible de connaître la valeur de ces actions en tout point  $M$ . On doit alors faire des hypothèses.

**Cas de contact dit parfait (sans frottement).** On assimile dans ce cas le contact entre deux solides à celui exercé par un fluide parfait sur un solide : dans ce cas les actions sont normales à l'élément de surface local.

Exemple : soit un solide  $S_2$  qui exerce sur  $S_1$  une pression constante le long d'une ligne (surface). Calculer en un point le torseur des actions mécaniques de  $S_2$  sur  $S_1$ .

Refaire le même calcul en supposant que dans la réalité ces pressions varient (linéairement) le long de la ligne (surface) de contact.

**Remarque** On constate donc que dès que les actions locales de contact sont connues avec précision, on peut déterminer le torseur des actions de contact.

**Cas de contact avec frottement.** Dans ce cas nous allons supposer que l'effort  $\underline{df}(M, S_2 \rightarrow S_1)$  est constitué de deux composantes : l'une dirigée suivant la normale  $\underline{n}$  en  $M$  à la surface de contact et une composante appartenant au plan tangent.

### DÉFINITION

On note  $\underline{df}_{\underline{n}}(M, S_2 \rightarrow S_1)$  la force normale et  $p = f_n/dS$  la pression correspondante.

On note  $\underline{df}_{\underline{t}}(M, S_2 \rightarrow S_1)$  la force tangentielle et  $t = f_t/dS$  la pression (dite de cisaillement) correspondante.

Le problème est d'avoir une relation entre ces deux grandeurs dans le cas général de solides en mouvement relatif.

Soit  $\underline{V}(P \in S_2/S_1) = \underline{V}_g$  la vitesse de glissement au point  $P$  du solide  $S_2$  par rapport au solide  $S_1$ . Ce vecteur appartient au plan tangent en  $P$  au deux solides.

### 2.5.1 Lois dites de Coulomb

Ces lois expriment une relation entre les actions normales et tangentielles. Bien qu'attribuées à Charles de Coulomb (1726, 1805) elles sont en fait dues à L. de Vinci (1452, 1519) qui ne les publia pas, et à Amontons (1663, 1705), physicien français qui ajouta un fait expérimental d'indépendance du coefficient de frottement par rapport à la vitesse de glissement. C. de Coulomb qui cite les travaux d'Amontons a formalisé l'ensemble de ces travaux et observé qu'un objet mis au repos après un glissement relatif possède un coefficient de frottement plus important (coefficient d'adhérence).

**1<sup>er</sup> Cas** On va considérer le premier cas d'un glissement relatif ( $\underline{V}_g \neq \underline{0}$ ).

Dans ce cas la force  $d\underline{f}_t$  est opposée au vecteur glissement relatif et est proportionnelle au vecteur  $d\underline{f}_n$ . Ceci s'écrit :

$$\begin{aligned} d\underline{f}_t(P, S_2 \rightarrow S_1) \cdot \underline{V}(P \in S_2/S_1) &\leq 0 \\ d\underline{f}_t(P, S_2 \rightarrow S_1) \wedge \underline{V}(P \in S_2/S_1) &= \underline{0} \\ d\underline{f}_t(P, S_2 \rightarrow S_1) &= f d\underline{f}_n(P, S_2 \rightarrow S_1) \end{aligned} \quad (2.14)$$

La première inégalité exprime le fait que les actions de contact tangentielles s'opposent au glissement relatif, la seconde qu'elles sont colinéaires et la troisième que ces actions tangentielles sont proportionnelles - en cas de glissement - aux actions normales. Le terme  $f$  est appelé coefficient de frottement. Il est caractéristique du contact entre les deux solides (matériaux respectifs, type de surface).

**2<sup>e</sup> Cas** On va considérer le cas d'un glissement relatif nul ( $\underline{V}_g = \underline{0}$ ).

Dans ce cas la force  $d\underline{f}_t$  est telle que :

$$d\underline{f}_t(P, S_2 \rightarrow S_1) \leq f d\underline{f}_n(P, S_2 \rightarrow S_1) \quad (2.15)$$

On ne peut plus utiliser de vitesse de glissement. On exprime simplement qu'en statique (plus de mouvement relatif) les actions de contact tangentielles sont inférieures (en intensité) au cas limite donné par l'existence d'un glissement.

**Remarque** Si on suppose que la vitesse de glissement peut être quelconque dans le plan tangent alors on définit le cône de frottement par  $f = \tan \phi$  tel que dans le cas de glissement relatif les actions tangentielles se situent sur le cône.

Le cas d'un contact parfait correspond à un coefficient de frottement nul.

Tableau 2.1 – Valeurs indicatives des coefficients d'adhérence  $f_s$  et de frottement  $f$  avec et sans lubrification. Le coefficient  $f_s$  correspond en fait à la valeur de  $f$  au démarrage du mouvement

Nature des matériaux	$f_s$ sans	$f_s$ avec	$f$ sans	$f$ avec
Acier sur acier	0,18	0,12	0,15	0,09
Acier sur fonte	0,19	0,1	0,16	0,08 à 0,04
Acier sur bronze	0,11	0,1	0,1	0,09
Téflon sur acier	0,04		0,04	
Fonte sur bronze		0,1	0,2	0,08 à 0,04
Nylon sur acier			0,35	0,12
Bois sur bois	0,65	0,2	0,4 à 0,2	0,16 à 0,04
Métaux sur bois	0,6 à 0,5	1	0,5 à 0,2	0,08 à 0,02
Métal sur glace			0,02	
Pneu voiture sur route	0,8		0,6	0,3 à 0,1

## 2.5.2 Cas du contact ponctuel réel

Dans de nombreux cas on a des contacts entre surfaces de type sphère plan, cylindre cylindre... et les contacts peuvent être assimilés à des contacts ponctuels (ils se limitent à de petites surfaces). Le torseur des actions de contact exercées par  $S_2$  sur  $S_1$  peut se décomposer en :

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{F}(S_2 \rightarrow S_1) \\ \underline{M}(P, S_2 \rightarrow S_1) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{F}_n(P, S_2 \rightarrow S_1) + \underline{F}_t(P, S_2 \rightarrow S_1) \\ \underline{M}_n(P, S_2 \rightarrow S_1) + \underline{M}_t(P, S_2 \rightarrow S_1) \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

Les quantités  $\underline{F}_n$  et  $\underline{F}_t$  représentent les efforts normaux et tangentiels, alors que  $\underline{M}_n$  et  $\underline{M}_t$  représentent les moments dits de pivotement et de roulement. Les indices  $n$  et  $t$  se réfèrent au vecteur normal  $\underline{n}$  au plan tangent (de contact) et à un vecteur appartenant à ce plan  $\underline{t}$

Le torseur cinématique du mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  s'écrit lui aussi au point  $P$  de contact :

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\Omega}(2/1) \\ \underline{M}(P, S_2/S_1) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\Omega}_n(2/1) + \underline{\Omega}_t(2/1) \\ \underline{V}_g(P \in 2/1) \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

On appelle la composante normale du vecteur rotation le vecteur rotation de pivotement et la composante tangentielle vecteur rotation de roulement.

On généralise les lois de Coulomb en introduisant des coefficients de frottement de roulement et de pivotement en écrivant de la même manière si les vecteurs rotation sont non nuls :

$$\underline{M}_n(P, S_2 \rightarrow S_1) \cdot \underline{\Omega}_n(S_2/S_1) \leq 0 \quad (2.18)$$

$$\underline{M}_n(P, S_2 \rightarrow S_1) = \delta F_n(S_2 \rightarrow S_1) \quad (2.19)$$

$$\underline{M}_t(P, S_2 \rightarrow S_1) \cdot \underline{\Omega}_t(S_2/S_1) \leq 0 \quad (2.20)$$

$$\underline{M}_t(P, S_2 \rightarrow S_1) \wedge \underline{\Omega}_t(S_2/S_1) = 0 \quad (2.21)$$

$$\underline{M}_t(P, S_2 \rightarrow S_1) = \eta F_t(S_2 \rightarrow S_1) \quad (2.22)$$

Les paramètres  $\eta$  et  $\delta$  sont homogènes à des longueurs et valent (contact pneu chaussée)  $0,01m$ . Pour un contact de type roue métallique rail on a  $0,000005m$ . On peut se représenter ce paramètre  $\eta$  comme une dimension caractéristique de la surface de contact.

Dans le cas d'un contact ponctuel idéalisé (pas de surface de contact), le torseur des actions mécaniques se réduit - au point de contact - à sa résultante.

## 2.6 Liaisons

Nous allons dans ce paragraphe nous intéresser aux différentes liaisons qui existent entre les solides. Elles peuvent être ponctuelles (bille sur plan), linéique rectiligne (cylindre sur plan), linéique (bille dans cylindrique de même rayon), rotule (bille dans sphère de même rayon), plans (plan sur plan), pivot glissant (cylindre à base circulaire dans cylindre à base circulaire), glissière (cylindre à base non circulaire dans cylindre à base non circulaire), pivot (surfaces de révolution non cylindriques) et encastrement (aucun mouvement relatif).

Contact plan/sphère

♦ ponctuelle,

Contact plan/cylindre

♦ linéaire rectiligne,

Contact plan/plan

♦ appui plan,

Contact cylindre/sphère

♦ linéaire annulaire,

Contact cylindre/cylindre

♦ pivot glissant,

Contact sphère/sphère

♦ rotule ou sphérique.

	Plan	Cylindre	Sphère
Sphère			
Cylindre			
Plan			

Figure 2.1 – Différentes associations de surfaces. D'après Philippe Fichou.

### 2.6.1 Degré de liberté

Cela désigne le nombre de mouvements indépendants possibles, i.e. le nombre de paramètres scalaires utiles pour paramétrer la position du solide par rapport au repère de référence et que l'on peut faire varier **indépendamment** les uns des autres.

### 2.6.2 Liaison unilatérale

Certaines liaisons peuvent varier au cours du temps (un livre posé sur une table). Il peut être posé (contact avec la table) ou enlevé (il n'y a plus de contact). On parle alors de **contact unilatéral**. Si techniquement il y a impossibilité d'enlever le livre de la table alors il y a **contact bilatéral**.

### 2.6.3 Liaison ponctuelle

**Remarque** Nous allons classer les liaisons en partant de celles qui définissent un contact ponctuel, puis nous aurons les liaisons qui ont un contact selon une ligne et enfin selon une surface.

Cette liaison suppose dans la pratique des solides indéformables du type sphère en appui sur un plan, cylindres croisés ou toute surface de forme quelconque en appui sur une autre en un point. On suppose le contact permanent en  $O$  donc la vitesse ne peut pas avoir de composante selon l'axe  $(O, \underline{z})$ .

Soit une liaison ponctuelle d'axe  $\underline{z}$ . Le moment en  $O$  des actions transmissibles entre  $S_2$  et  $S_1$  est nul. De plus si le contact s'effectue sans frottement alors les efforts transmissibles sont d'axe  $\underline{z}$ . Donc le torseur des actions mécaniques de  $S_2$  sur  $S_1$  s'écrit dans la base  $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & Z \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (2.23)$$

Dans cette écriture les termes du haut représentent les composantes (dans la base de travail) de la résultante ( $X, Y$  et  $Z$ ) ou  $(R_x, R_y, R_z)$  et les termes du bas celles du moment ( $L, M$  et  $N$ ) ou  $(M_x, M_y, M_z)$  selon les cas.

Le torseur cinématique de cette liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ V_x(O \in S_2/S_1) & V_y(O \in S_2/S_1) & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (2.24)$$

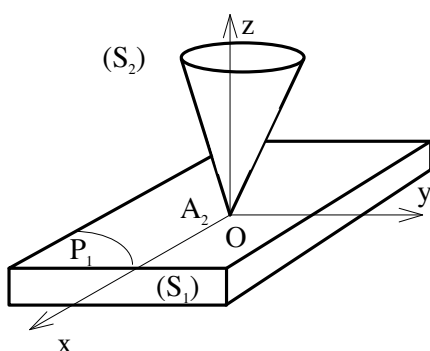
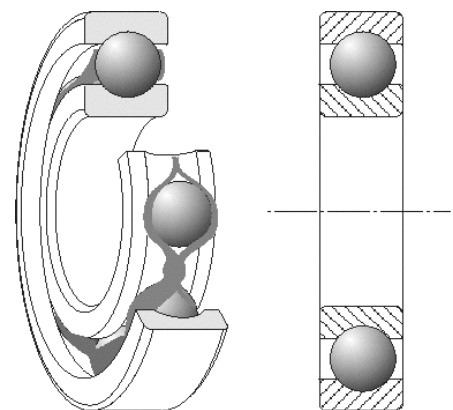


Figure 2.2 – Liaison ponctuelle.  
D'après L. Grignon



Roulement à une rangée de billes

Figure 2.3 – Le contact entre chaque bille du roulement et une des cages est de type ponctuelle. D'après S. Bertorello

### 2.6.4 Liaison linéaire rectiligne

Cette liaison est du type cylindre en appui sur un plan. La ligne de contact entre les deux solides est une droite.

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & Z \\ 0 & M_y & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (2.25)$$

Le torseur cinématique de cette liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 & \Omega_z \\ V_x & V_y & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (2.26)$$

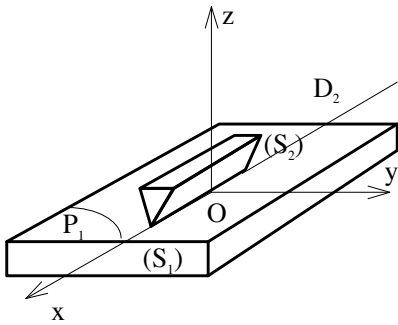


Figure 2.4 – Liaison linéaire rectiligne.  
D'après L. Grangon



Figure 2.5 – Pour fabriquer des roulements de petite dimension on utilise non pas des billes mais des aiguilles (cylindres). Le contact aiguille avec la cage de roulement est de type linéaire rectiligne

### 2.6.5 Liaison linéaire annulaire

Cette liaison est du type sphère dans un cylindrique creux de même diamètre. La ligne de contact entre les deux solides est un cercle.

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & Y & Z \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (2.27)$$

Le torseur cinématique de cette liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ V_x & 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (2.28)$$

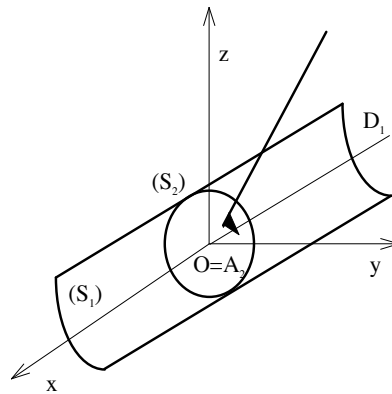


Figure 2.6 – Liaison linéaire annulaire. D’après L. Grangon

### 2.6.6 Liaison rotule

Cette liaison est du type sphère dans une sphère creuse de même diamètre. La surface de contact entre les deux solides est la sphère.

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} Z & Y & Z \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (2.29)$$

Le torseur cinématique de cette liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (2.30)$$

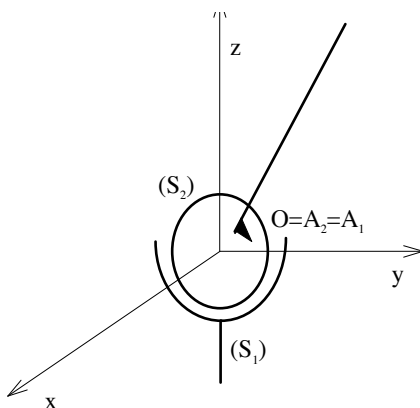


Figure 2.7 – Liaison rotule. D’après L. Grangon.



Figure 2.8 – Exemple de liaison rotule. D’après F. Fichou.

### 2.6.7 Liaison appui plan

Cette liaison est du type plan sur plan. La surface de contact entre les deux solides est un plan.

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & Z \\ M_x & M_y & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (2.31)$$

Le torseur cinématique de cette liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \Omega_z \\ V_x & V_y & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (2.32)$$

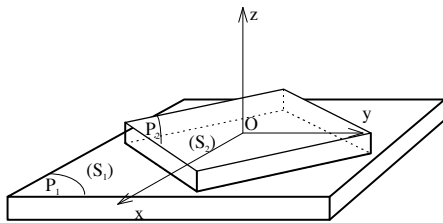


Figure 2.9 – Liaison appui plan.  
D'après L. Grangon

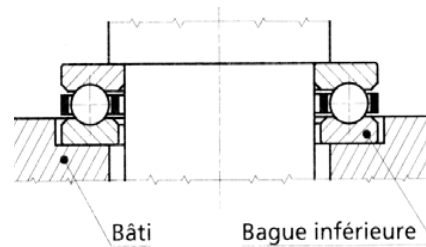


Figure 2.10 – Appui plan défini par une butée avec roulements

### 2.6.8 Liaison pivot glissant

Cette liaison est du type cylindre à base circulaire dans un cylindre creux à base circulaire de même rayon. La surface de contact entre les deux solides est un cylindre.

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & Y & Z \\ 0 & M_y & M_z \end{Bmatrix}_O \quad (2.33)$$

Le torseur cinématique de cette liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 & 0 \\ V_x & 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (2.34)$$

### 2.6.9 Liaison pivot

Cette liaison est du type forme de révolution non cylindrique dans une forme identique. La surface de contact entre les deux solides est la surface de cette forme.

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} X & Y & Z \\ M_x & M_y & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (2.35)$$

Le torseur cinématique de cette liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (2.36)$$



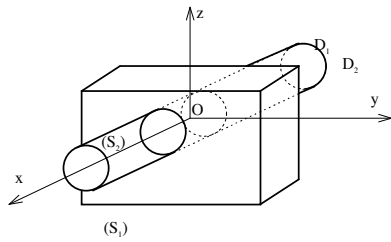


Figure 2.11 – Liaison pivot-glissant.  
D'après L. Grangon

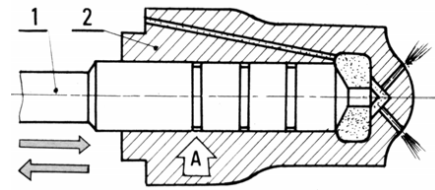


Figure 2.12 – Exemple de liaison pivot-glissant : injecteur. D'après P. Fichou

### 2.6.10 Liaison glissière

Cette liaison est du type cylindre à base non circulaire dans un cylindre identique. La surface de contact entre les deux solides est la surface du cylindre.

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & Y & Z \\ M_x & M_y & M_z \end{Bmatrix}_O \quad (2.37)$$

Le torseur cinématique de cette liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ V_x & 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (2.38)$$

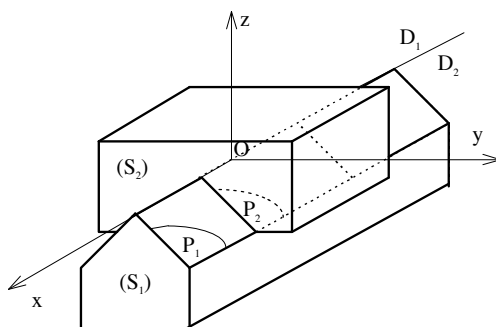


Figure 2.13 – Liaison glissière. D'après P. Fichou.

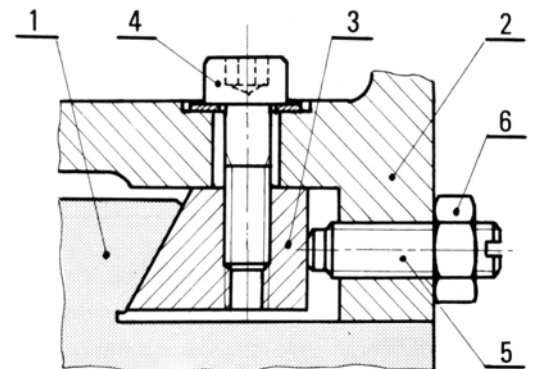


Figure 2.14 – Exemple de liaison glissière. D'après L. Grangon.

### 2.6.11 Liaison glissière hélicoïdale

La surface de contact entre les deux solides est une surface hélicoïdale.

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ M_x & M_y & M_z \end{array} \right\}_O \quad (2.39)$$

Mais on a une relation entre  $M_x$  et  $X$  de la forme  $M_x = p X$ .

Le torseur cinématique de cette liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega_x & 0 & 0 \\ V_x & 0 & 0 \end{array} \right\}_O \quad (2.40)$$

On a aussi une relation  $V_x = p \Omega_x$ .

### 2.6.12 Liaison encastrement

Dans ce cas il y a de multiples contacts qui interdisent tout mouvement relatif entre les solides.

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ M_x & M_y & M_z \end{array} \right\}_O \quad (2.41)$$

Le torseur cinématique de cette liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_z \end{array} \right\}_O \quad (2.42)$$

#### 2.6.12.1 Liaison encastrement par obstacle

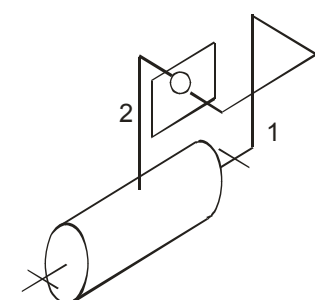
On peut souhaiter réaliser des liaisons complètes qui soient démontables. Dans ce cas on peut associer les liaisons précédentes :

#### 2.6.12.2 Liaison encastrement par obstacle et adhérence

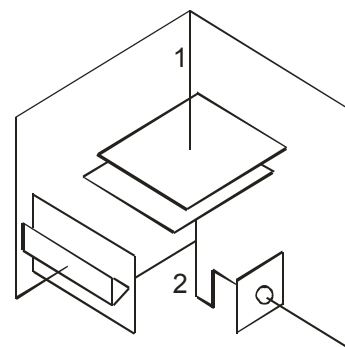
Il est courant de combiner des liaisons et le frottement qui existe toujours pour assurer une immobilité relative. On peut par exemple utiliser des liaisons pivot assurées par des surfaces coniques et ajouter soit des obstacles (goupilles ou clavettes) soit des systèmes de serrage.

Le même type de liaison encastrement est obtenue avec des surfaces cylindriques à base circulaire (liaison pivot glissant) et un obstacle.

On peut aussi assurer cette liaison encastrement est obtenue avec des surfaces cylindriques à base circulaire et un système de serrage.



Liaisons pivot et  
ponctuelle en parallèle



Liaisons appui plan, linéaire rectiligne  
et ponctuelle en parallèle

Figure 2.15 – Liaison encastrement  
par association de pivot et ponctuelle.  
D'après P. Fichou.

Figure 2.16 – Liaison encastrement par  
association d'appui plan, de linéaire  
rectiligne et de ponctuelle. D'après P.  
Fichou.

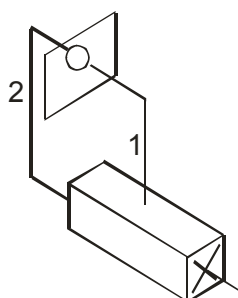


Figure 2.17 – Liaison encastrement par association de glissière et ponctuelle. D'après P. Fichou.

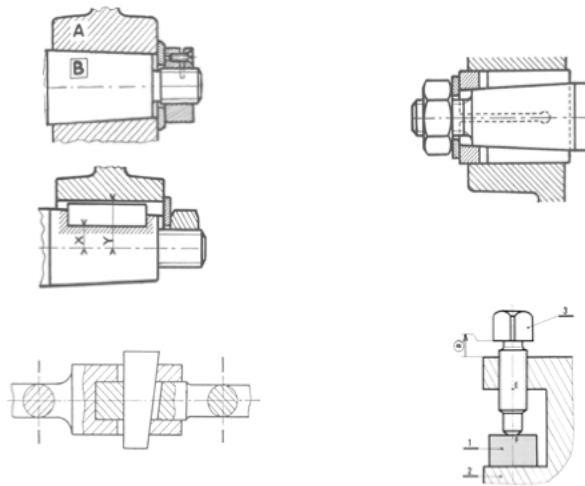


Figure 2.18 – Liaison encastrement par pivot et obstacles. D’après P. Fichou.

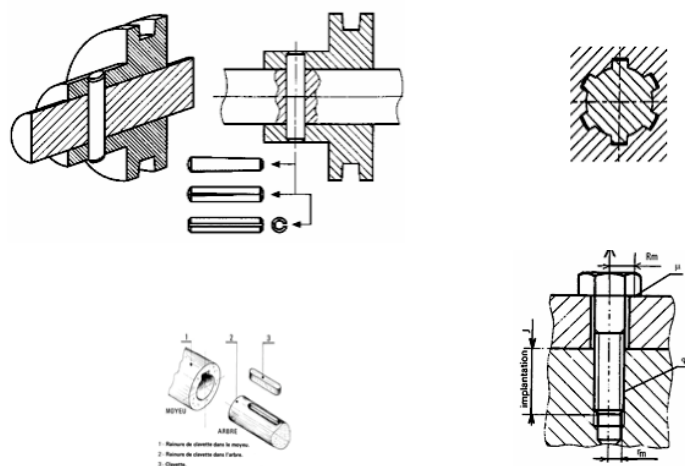


Figure 2.19 – Liaison encastrement pivot glissant et obstacles. D’après P. Fichou.

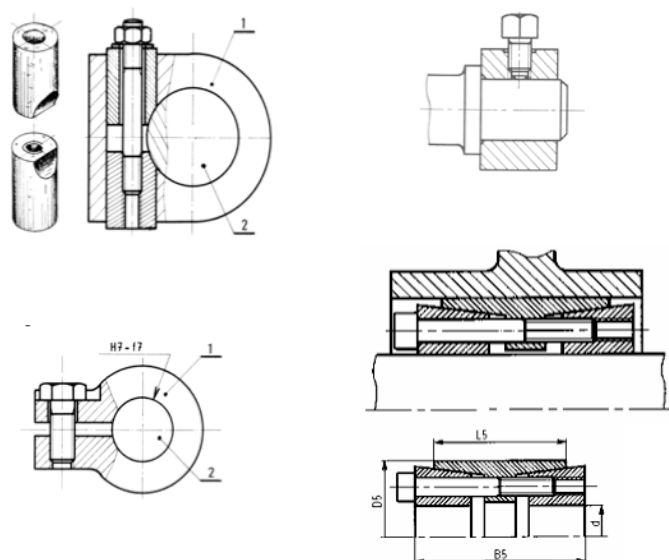


Figure 2.20 – Liaison encastrement par pivot glissant et obstacles. D'après P. Fichou.

## 2.6.13 Résumé des liaisons

Désignation de la liaison	Schématisme spatial	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible	Torseur d'action mécanique Simplifié	Schématisme plane
Pivot d'axe $(A, \vec{x})$		$\begin{array}{c c} 0 & Rx \\ \hline \overline{Tr} & \overline{Rot} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{y}, \vec{z})$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	
Glissière d'axe $(A, \vec{x})$		$\begin{array}{c c} Tx & 0 \\ \hline \overline{Tr} & \overline{Rot} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{x}, \vec{z})$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	
Pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$		$\begin{array}{c c} Tx & Rx \\ \hline \overline{Tr} & \overline{Rot} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{y}, \vec{z})$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	
Appui plan de normale $(A, \vec{x})$		$\begin{array}{c c} 0 & Rx \\ \hline \overline{Tr} & Ty \\ Ty & \overline{Rot} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & M_{12} \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{x}, \vec{y})$ $\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	
Rotule de centre A		$\begin{array}{c c} 0 & Rx \\ \hline \overline{Tr} & 0 \\ 0 & \overline{Rot} \\ 0 & Ry \\ 0 & Rz \end{array}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{x}, \vec{y})$ $\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$	
Linéaire annulaire d'axe $(A, \vec{x})$		$\begin{array}{c c} Tx & Rx \\ \hline \overline{Tr} & 0 \\ 0 & \overline{Rot} \\ 0 & Ry \\ 0 & Rz \end{array}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{x}, \vec{z})$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	
Linéaire rectiligne de normale $(A, \vec{x})$ et de contact $(A, \vec{y})$		$\begin{array}{c c} 0 & Rx \\ \hline \overline{Tr} & Ty \\ Ty & \overline{Rot} \\ 0 & Ry \\ 0 & 0 \end{array}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{x}, \vec{z})$ $\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$	

Ce tableau n'est pas exhaustif

**NB** : Le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison glissière hélicoïdale n'est pas modélisable aussi simplement.

Figure 2.21 – Liaison tableau. Ne me souviens plus de l'emprunté. Désolé.

## 2.7 Quelques remarques

### 2.7.1 Puissance des actions de liaisons

On a constaté que les torseurs cinématique des liaisons et des actions transmissibles sont de la forme :

$$\{\mathcal{V}(I \in S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \Omega_y & 0 \\ V_x & V_y & 0 \end{array} \right\}_I \quad (2.43)$$

avec comme torseur statique :

$$\{\mathcal{T}(IS_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & R_z \\ M_x & 0 & M_z \end{array} \right\}_I \quad (2.44)$$

Les termes nuls et non nuls se correspondent dans les deux torseurs. Si l'on calcule le comoment de ces deux torseurs nous allons retrouver par définition du torseur mécanique la puissance des actions mécaniques de  $S_2$  sur  $S_1$  dans son mouvement par rapport à  $S_1$ . Ce comoment est nul.

Cette puissance nulle correspond donc à la puissance des actions de liaison. Il est facile de constater que l'hypothèse qui permet d'obtenir ce résultat est celle de contact parfait (sans frottement).

**THÉORÈME** Dans une liaison parfaite, la puissance des actions de liaisons est nulle.

**DÉMONSTRATION** *A faire par l'étudiant. Sans difficulté.*

## 2.8 Statique des solides

**DÉFINITION** On dira qu'un solide  $S$  ou un ensemble de solides  $S_i$  est en équilibre par rapport à un repère  $R$  si le vecteur position de chaque point (du ou des solides) est indépendant du temps.

### 2.8.1 Principe fondamental de la statique

**Énoncé.** Il existe un repère galiléen tel que pour tout sous système  $s$  de l'ensemble de solides  $S_i$  étudié le torseur des actions extérieures appliqué à ce sous système est nul.

$$\boxed{\{\mathcal{T}(Ext \rightarrow s)\} = \{O\} \quad \forall s} \quad (2.45)$$

avec  $\{O\}$  le torseur nul.

La notion de repère galiléen dépend de l'objectif visé. Une étude d'un mécanisme sur terre se fait avec un repère local attaché à la terre, repère supposé galiléen. Par contre envoyer une fusée sur la lune exige de considérer comme galiléen un autre repère.

De l'équation précédente on en déduit évidemment les deux équations :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \underline{R}(Ext \rightarrow s) & = & \underline{0} \\ \underline{M}(A, Ext \rightarrow s) & = & \underline{0} \quad \forall A \end{array}} \quad (2.46)$$

**Remarque importante :** Il faut faire très attention à la formulation de ce principe car un système de solides soumis à un torseur d'actions extérieures nul n'est pas nécessairement en équilibre par rapport au repère de travail. Il n'y a pas équivalence sauf pour le cas d'un solide. C'est la raison pour laquelle il est nécessaire d'ajouter la condition de vecteur position de tout point indépendant du temps (exemple de la paire de ciseaux traité en cours).

### 2.8.2 Théorème des actions réciproques

On considère un système matériel  $E$  en équilibre par rapport à  $R$ . On divise ce système en deux parties  $E_1$  et  $E_2$  (fig. 2.22). On applique le PFS à chaque partie.

### 2.8.3 Résumé des liaisons

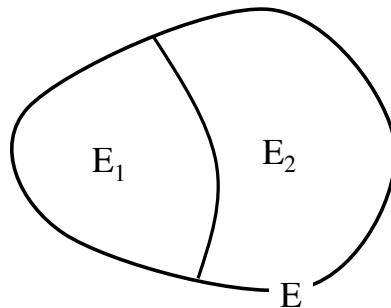


Figure 2.22 – Actions réciproques

Pour  $E_1$  :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E}_1 \rightarrow E_1)\} = \{O\} \quad (2.47)$$

Or ce qui constitue l'extérieur à  $E_1$  est l'extérieur à  $E$  plus  $E_2$ . donc :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_1)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\} = \{O\} \quad (2.48)$$

Si on considère maintenant le système  $E_2$  :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_2)\} + \{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = \{O\} \quad (2.49)$$

Si j'ajoute les équations 2.48 et 2.49 j'obtiens :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_1)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\} + \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_2)\} + \{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = \{O\} \quad (2.50)$$

Je peux rassembler les termes  $\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_1)\}$  et  $\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_2)\}$  pour écrire  $\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\}$  car  $E_1 \cup E_2 = E$ . On a donc au final :



$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_2)\} + \{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = \{O\} \quad (2.51)$$

Or je peux aussi appliquer le PFS au système  $E$  ce qui me permet d'en conclure que :

$$\boxed{\{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = -\{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\}} \quad (2.52)$$

On en déduit que le torseur des actions mécaniques exercées par  $E_1$  sur  $E_2$  est opposé à celui des actions exercées par  $E_2$  sur  $E_1$ .

## 2.9 Analyse des mécanismes

Nous allons nous intéresser à des systèmes de solides en liaison les uns avec les autres par des liaisons sans frottement (liaisons parfaites), les solides sont indéformables et nous négligerons assez souvent les actions de la pesanteur devant les autres actions mécaniques. Le PFS s'applique donc à chaque solide du mécanisme étudié.

L'objectif est à la fois d'étudier la cinématique d'un mécanisme (relation entrée sortie) et les actions mécaniques entre les solides du système étudié.

Chaque solide étant en contact avec un ou plusieurs autres, on retrouvera une des liaisons élémentaires pour chaque liaison entre deux solides. On pourra donc tracer le graphe des liaisons.

Selon les cas nous avons différentes situations :

**Liaison fermée.** Le schéma 2.23 représente un réducteur simple. Le solide 1 est en liaison pivot avec le solide 0 de même que le solide 2 avec 0. On peut faire l'hypothèse d'un contact ponctuel entre 1 et 2 ce qui permet de tracer le graphe suivant (figure 2.24).

**Liaison ouverte.** Dans certains cas - robots par exemple - il y a des bras de manipulation qui se promènent dans l'espace. Le graphe devient (figure 2.26).

**Liaison complexe** Dans la majorité des cas on trouve une combinaison de ces assemblages qui nous donnent des graphes plus complexes comme indiqué sur la figure 2.27.

## 2.10 Exercice

Nous allons étudier le système suivant, un portique (figure 2.28), constitué d'un mur noté 0, d'une barre métallique notée 2 en liaison rotule avec le mur en  $A$  et une autre tige métallique en  $B$ , d'une barre de forte section 1 en articulation pivot avec le mur en  $O$ . Les vecteurs  $\underline{OA}$ ,  $\underline{OB}$  et  $\underline{OC}$  valent respectivement  $h\mathbf{z}$ ,  $L\mathbf{y}$  et  $d\mathbf{y}$ . Toutes les liaisons sont supposées parfaites. Le tirant 2 étant une barre de section faible, nous négligerons l'action de la gravité sur cette barre devant les efforts mis en jeu. L'objectif est de calculer les actions mécaniques en  $O$ ,  $A$  et  $B$  en fonction des différents paramètres  $d$ ,  $h$ ,  $F$  qui représente l'effort extérieur appliqué au système.

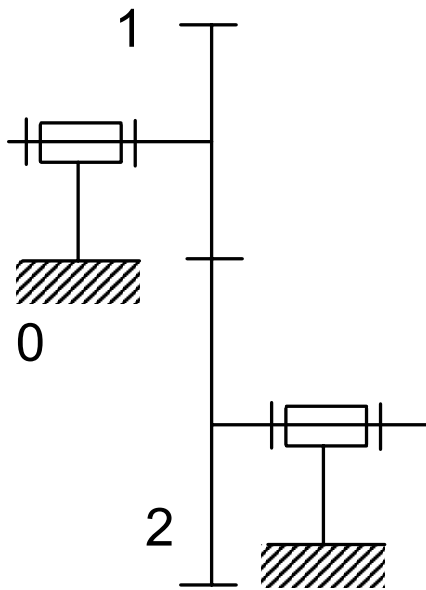


Figure 2.23 – Liaison fermée

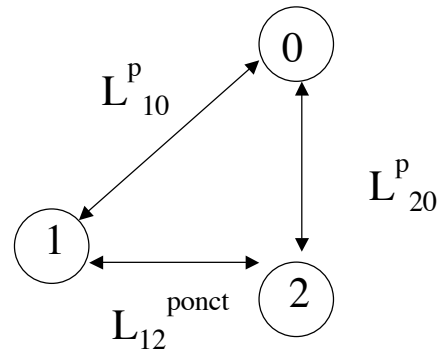


Figure 2.24 – Graphe de la liaison fermée

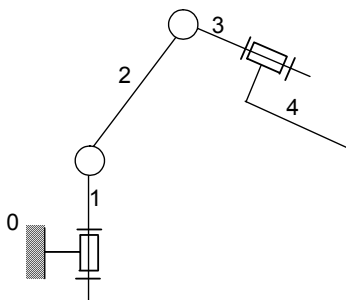


Figure 2.25 – Liaison ouverte

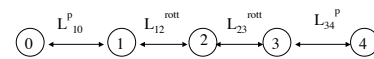


Figure 2.26 – Graphe de la liaison ouverte

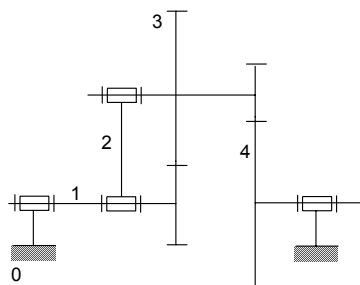


Figure 2.27 – Liaison complexe train épicyloïdal

Remarque : le portique est bien dans un plan mais l'effort appliqué étant hors du plan  $\underline{y}, \underline{z}$  nous avons un problème tri dimensionnel à traiter.

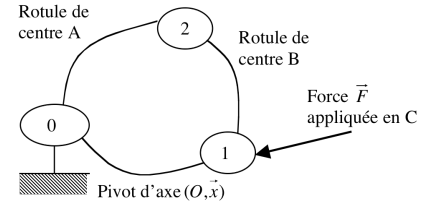
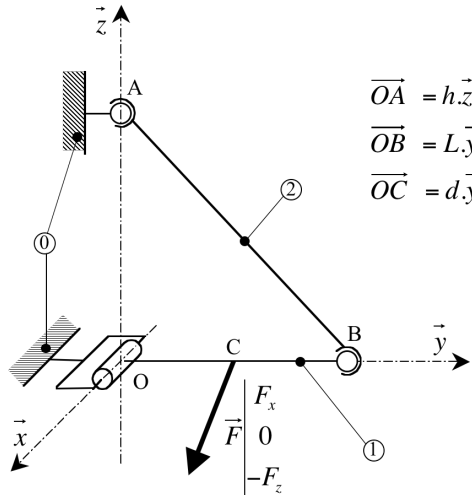


Figure 2.29 – Graphe des liaisons. D'après ?? idem

Figure 2.28 – Portique et chargement. D'après ?? pas dramatique

Nous allons tracer afin de bien comprendre le système le graphe des liaisons (figure 2.29).

**Analyse statique.** Nous allons isoler successivement les différents solides. Soit le PFS appliqué à 2. Nous avons décidé de négliger les actions de la gravité sur ce solide de masse faible. Donc on a :

$$\{\mathcal{T}(\bar{2} \rightarrow 2)\} = \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2) + \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} \quad (2.53)$$

$$= \{O\} \quad (2.54)$$

Le torseur des actions mécaniques transmissibles de 0 sur 2 est donné par :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} X_{02} & Y_{02} & Z_{02} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}_A \quad (2.55)$$

Le torseur des actions mécaniques transmissibles de 1 sur 2 est donné par :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} X_{12} & Y_{12} & Z_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}_B \quad (2.56)$$

Nous pouvons écrire l'équation d'équilibre au même point  $B$  par exemple. Le seul torseur à ré-exprimer est celui des actions exercées par 0 sur 2. On utilise la relation de torseur :  $\underline{M}(B, 0 \rightarrow 2) = \underline{M}(A, 0 \rightarrow 2) + \underline{BA} \wedge \underline{R}(0 \rightarrow 2)$ . Compte tenu des données on obtient :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} X_{02} & Y_{02} & Z_{02} \\ -LZ_{02} & hX_{02} & LX_{02} \end{array} \right\}_B \quad (2.57)$$

Le PFS s'écrit donc en projection sur les axes du repère :

$$X_{02} + X_{12} = 0 \quad (2.58)$$

$$Y_{02} + Y_{12} = 0 \quad (2.59)$$

$$Z_{02} + Z_{12} = 0 \quad (2.60)$$

$$-LZ_{02} - hY_{02} = 0 \quad (2.61)$$

$$hX_{02} = 0 \quad (2.62)$$

$$LX_{02} = 0 \quad (2.63)$$

Nous avons au bilan 5 équations indépendantes pour 6 inconnues. On peut choisir des inconnues principales (une dans ce cas) et écrire que les torseurs mécaniques valent :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & -\frac{L}{h}Z_{02} & Z_{02} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}_A \quad (2.64)$$

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{L}{h}Z_{02} & -Z_{02} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}_B \quad (2.65)$$

Pour poursuivre, il faut isoler un autre solide, par exemple le solide 1. Si on fait le bilan des efforts extérieurs appliqués on a :

- La pesanteur qui se réduit à un glisseur en  $G$ ,
- La force  $F$  qui correspond à un glisseur au point d'application de cette force,
- Les actions mécaniques des solides 2 en  $B$  et 0 en  $O$ .

Action de la force  $\underline{F}$  :

$$\{\mathcal{T}(\underline{F} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} F_x & 0 & -F_z \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}_C \quad (2.66)$$

Action de la gravité  $M \underline{g}$  :

$$\{\mathcal{T}(M \underline{g} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -Mg \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}_G \quad (2.67)$$

Action de 0 sur 1 en  $O$  :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} X_{01} & Y_{01} & -Z_{01} \\ 0 & M_{01} & N_{01} \end{array} \right\}_O \quad (2.68)$$

Action de 2 sur 1 en  $B$  : elles se déduisent par utilisation du théorème des actions mutuelles de celles des actions de 1 sur 2 (équation 2.69) par :

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & -\frac{L}{h}Z_{02} & Z_{02} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}_B \quad (2.69)$$

Au final on écrit le PFS appliqué à 1. Le problème est de choisir le point où l'on écrit cette égalité des torseurs. On choisit par simplicité le point  $O$  car c'est en ce point que le torseur des actions de 0 sur 1 est le plus complet.

Action de la force  $\underline{F}$  ramené au point  $O$  :

$$\{\mathcal{T}(\underline{F} \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} F_x & 0 & -F_z \\ -dF_z & 0 & -dF_x \end{Bmatrix}_O \quad (2.70)$$

Action de la gravité  $M \underline{g}$  en  $O$  :

$$\{\mathcal{T}(M \underline{g} \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & -Mg \\ -\frac{LMg}{2} & 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (2.71)$$

On trouve alors le système d'équations :

$$F_x + X_{01} = 0 \quad (2.72)$$

$$Y_{01} - \frac{L}{h} Z_{02} = 0 \quad (2.73)$$

$$-F_z - Mg + Z_{01} + Z_{02} = 0 \quad (2.74)$$

$$-dF_z - \frac{LMg}{2} + LZ_{02} = 0 \quad (2.75)$$

$$M_{01} = 0 \quad (2.76)$$

$$-dF_x + N_{01} = 0 \quad (2.77)$$

On peut alors résoudre complètement le système de 6 équations à 6 inconnues. On en déduit :

$$X_{01} = -F_x \quad (2.78)$$

$$Y_{01} = Mg \frac{L}{2h} + F_z \frac{d}{h} \quad (2.79)$$

$$Z_{01} = F_z \left(1 - \frac{d}{L}\right) + \frac{Mg}{2} \quad (2.80)$$

$$Z_{02} = F_z \frac{d}{L} + \frac{Mg}{2} \quad (2.81)$$

$$M_{01} = 0 \quad (2.82)$$

$$N_{01} = dF_x \quad (2.83)$$

Faire une application numérique en supposant que  $10F_x = F_z = 1000N$  et que la masse de la barre 1 vaut  $30kg$ . On prend  $L = h = 5m$  et  $d = 4m$ .

**Analyse cinématique.** Nous savons que les liaisons sont de type rotule en  $A$  et  $B$  donc :

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \quad (2.84)$$

De la même façon nous avons :

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_B \quad (2.85)$$

## 2.11 Mobilité, hyperstatisme

Nous allons étudier un exemple simple : celui d'un arbre 1 en liaison pivot glissant en deux sections différentes décalées d'une quantité  $e$  (figure 2.30).

**Analyse cinématique.** On écrit les torseurs cinématiques des liaisons en  $A$  et  $A'$  :

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 & 0 \\ V_x & 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \quad (2.86)$$

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \begin{Bmatrix} \Omega'_x & 0 & 0 \\ V'_x & 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A'} \quad (2.87)$$

On peut utiliser la composition de mouvement pour écrire que :

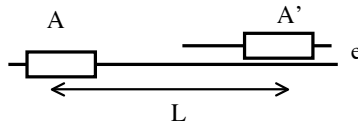


Figure 2.30 – Arbre en liaison pivot sur deux paliers excentrés

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} + \{\mathcal{V}(S_0/S_1)\} = \{\mathcal{O}\} \quad (2.88)$$

Ecrivons le premier torseur en  $A$  comme celui de cette liaison et le second (ramené en  $A$ ) comme celui de la seconde liaison en  $A'$ . Dans ce cas on trouve :

$$\begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 & 0 \\ V_x & 0 & 0 \end{Bmatrix}_A - \begin{Bmatrix} \Omega'_x & 0 & 0 \\ V'_x & 0 & e\Omega_x \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$

On en déduit que pour retrouver une liaison de type pivot glissant il faut que le terme  $e\Omega_x$  soit nul ce qui impose donc  $e = 0$  ce qui correspond à des paliers parfaitement alignés. Dans ce cas on a bien le fait que les vitesses de rotation et de translation sont égales.

Dans le cas  $e \neq 0$  alors la liaison est de type glissière puisque la condition  $e\Omega_x = 0$  nous impose dans ce cas  $\Omega_x = 0$ .

**DÉFINITION** Le degré de mobilité d'une liaison correspond au nombre de paramètres indépendants du torseur cinématique tout comme celui d'un mécanisme.

**Analyse statique.** On écrit les torseurs statiques des liaisons en  $A$  et  $A'$  :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_0)\} = \begin{Bmatrix} 0 & Y & Y \\ 0 & M & N \end{Bmatrix}_A \quad (2.90) \quad \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_0)\} = \begin{Bmatrix} 0 & Y' & Z' \\ 0 & M' & N' \end{Bmatrix}_{A'} \quad (2.91)$$

On écrit le PFS appliqué au solide 1.

$$\{\mathcal{T}(S_0(A) \rightarrow S_1)\} + \{\mathcal{T}(S_0(A') \rightarrow S_1)\} = \{\mathcal{O}\} \quad (2.92)$$

On écrit cette égalité au même point  $A$  ce qui donne :

$$\begin{Bmatrix} 0 & Y & Z \\ 0 & M & N \end{Bmatrix}_A - \begin{Bmatrix} 0 & Y' & Z' \\ eZ' & M' + LZ' & N' + LY' \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (2.93)$$

On constate que (avec la condition  $e = 0$  qui permet d'avoir la liaison globale pivot glissant) on aboutit à un système de quatre équations indépendantes avec 8 inconnues statiques. On dit que le système est hypertatique d'ordre  $8 - 4 = 4$ . Cela signifie que quelque soit le chargement extérieur imposé à l'arbre 1 il sera toujours impossible sans hypothèse supplémentaire de calculer les actions de liaisons en  $A$  et  $A'$ .

**DÉFINITION** On dit qu'un système est **hyperstatique** si le nombre des inconnues statiques est supérieur au nombre d'équations indépendantes obtenues en isolant les différents solides du système.

Dans le cas d'un nombre d'inconnues statiques égal au nombre d'équations indépendantes le système est **isostatique**.

**Question.** Comment rendre ce système isostatique ? Si l'on adopte le point de vue statique il nous faut supprimer quatre inconnues. On peut le faire en supprimant une des liaisons (mais alors il y a peut être des problèmes de porte à faux), ou en transformant le système. A compléter.

## 2.12 Statique graphique

Dans le cas particulier d'un système plan (le portique précédent par exemple) chargé dans son plan ( $F_x = 0$ ) on peut parfois utiliser une construction graphique. En effet pour que le PFS soit vérifié il faut et il suffit qu'un solide soumis à deux forces soit tel qu'elles correspondent à des vecteurs opposés, de même support.

Si le solide est soumis à trois forces alors pour satisfaire l'équation de moment et de la résultante elles doivent être concourantes (se couper en un même point) et de somme vectorielle nulle. Démonstration facile faite en cours.

## 2.13 Chaîne ouverte

Dans le cas d'une chaîne dite ouverte (typiquement un robot manipulateur) on a  $n + 1$  solides en liaisons les uns par rapport aux autres, chaque solide  $i$  étant en contact avec  $i - 1$  et  $i + 1$ . On considère que le bâti est noté 0. Il y a donc  $n$  liaisons entre des solides. On suppose que les efforts extérieurs sont appliqués au dernier solide de la chaîne (logique pour un bras manipulateur).

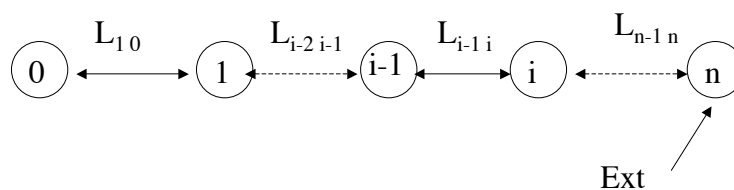


Figure 2.31 – Chaîne ouverte (robot)

**Analyse cinématique.** On peut par composition des mouvements écrire que :

$$\{\mathcal{V}(n/0)\} = \sum_1^n \{\mathcal{V}(i/n - i)\} \quad (2.94)$$

Nous aurons donc 6 équations scalaires pour un nombre  $N_c$  d'inconnues cinématiques indépendantes (la somme des inconnues de chaque torseur cinématique).

Le degré de mobilité est donc de  $N_c$ .

**Remarque.** Il est possible que, pour une position donnée du solide  $n$  des mouvements internes soient permis. Il y a alors un degré de mobilité interne qu'il faut souvent éliminer (usure, vibrations).

**Analyse statique.** On va isoler successivement les solides ou ensemble de solides suivants :  $n$ ,  $n$  et  $n - 1$ ,  $n$ ,  $n - 1$  et  $n - 2$  jusqu'à isoler l'ensemble de  $n$  à 1. On peut pour le solide  $n$  écrire par application du PFS :

$$\{\mathcal{T}(Ext \rightarrow n)\} + \{\mathcal{T}(n - 1 \rightarrow n)\} = \{O\} \quad (2.95)$$

On peut faire de même pour l'ensemble de solides  $n$  et  $n - 1$  :

$$\{\mathcal{T}(Ext \rightarrow (n, n - 1))\} + \{\mathcal{T}(n - 2 \rightarrow (n, n - 1))\} = \{O\} \quad (2.96)$$

Or  $\{\mathcal{T}(Ext \rightarrow (n, n - 1))\}$  est égal à  $\{\mathcal{T}(Ext \rightarrow n)\}$  car il n'y a pas d'autres efforts extérieurs que celui en bout de chaîne. Donc on en déduit :

$$\{\mathcal{T}(Ext \rightarrow 1)\} + \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 0)\} = \{O\} \quad (2.97)$$

De façon générale on peut écrire pour tous les solides  $i$  :

$$\{\mathcal{T}(i \rightarrow i - 1)\} = \{\mathcal{T}(Ext \rightarrow n)\} \quad \forall i \rightarrow n \quad (2.98)$$

Ce système d'équations fournit  $6n$  équations dont le second membre est invariablement le torseur des efforts extérieurs. La position d'équilibre peut toujours être trouvée et les inconnues de chaque torseur de liaison également. **Le système est toujours isostatique.**

## 2.14 Chaîne fermée

Il s'agit d'un cas très courant de mécanismes dont les solides sont en liaisons les uns par rapport aux autres avec une seule liaison sauf pour le bâti qui est en liaison avec le solide 1 et le solide  $n$ . Il est raisonnable d'introduire des actions extérieures agissant sur 1 (moteur) et sur  $n$  (récepteur) dans le cas d'une transformation de mouvement.

**Analyse cinématique.** On peut par composition des mouvements écrire que :

$$\{O\} = \{\mathcal{V}(0/1)\} + \{\mathcal{V}(1/2)\} + \dots + \{\mathcal{V}(n - 1/n)\} + \{\mathcal{V}(n/0)\} \quad (2.99)$$

On a donc un système de 6 équations au plus indépendantes pour  $N_c$  inconnues cinématiques caractérisant les  $n + 1$  liaisons entre solides. La **mobilité cinématique**  $m_c$  vaut donc  $N_c - r_c$  avec  $r_c$  qui est le rang du système linéaire. La quantité  $r_c$  est inférieure à  $N_c$  car il existe au moins une



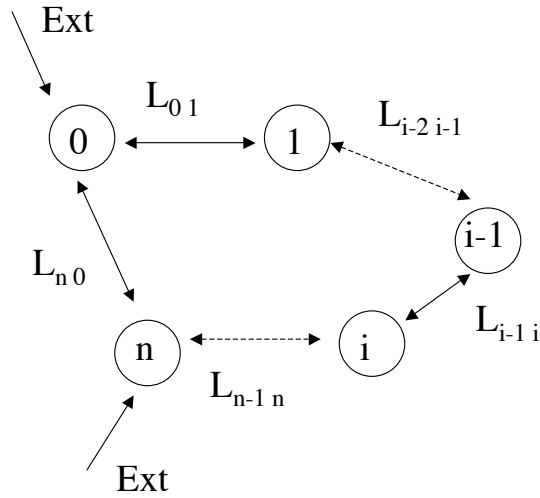


Figure 2.32 – Chaîne fermée

relation entrée sortie pour le système.

$$m_c = N_c - r_c \quad (2.100)$$

**Remarque.** On peut aussi avoir une mobilité interne  $m_{c_i}$  telle que  $m_c = m_{c_u} + m_{c_i}$  avec  $m_{c_u}$  mobilité utile.

**Analyse statique.** On va isoler successivement tous les solides du système et appliquer le PFS à chaque solide par rapport au solide de référence 0. On obtient :

Pour le solide 1 qui est en contact avec le bâti 0 et l'extérieur (moteur par exemple) :

$$\{\mathcal{T}(Ext \rightarrow 1)\} + \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \{O\} \quad (2.101)$$

Pour les solides intermédiaires en contact les uns par rapport aux autres :

$$\{\mathcal{T}(i-1 \rightarrow i)\} + \{\mathcal{T}(i+1 \rightarrow i)\} = \{O\} \quad i \in 2, n-1 \quad (2.102)$$

Pour le solide  $n$  qui est en contact avec le bâti 0 et l'extérieur (récepteur) :

$$\{\mathcal{T}(Ext \rightarrow n)\} + \{\mathcal{T}(n-1 \rightarrow n)\} + \{\mathcal{T}(0 \rightarrow n)\} = \{O\} \quad (2.103)$$

Au bilan nous avons  $6n$  équations scalaires pour un nombre d'inconnues statiques noté  $N_s = \sum_i N_{si}$  avec  $N_{si}$  les inconnues associées à chaque torseur de liaison. Le rang de ce système est noté  $r_s$ .

On a nécessairement pour des liaisons parfaites la relation suivante (avec  $n$  solides et le bâti 0 ce qui fait  $n + 1$  solides et donc  $n + 1$  liaisons) :

$$N_c + N_s = 6(n + 1) \quad (2.104)$$

On appelle **degré d'hyperstatisme le scalaire**  $h$  tel que :

$$h = N_s - r_s \quad (2.105)$$

Les  $6n - r_s$  équations dites non principales du système d'équations correspondent en fait au nombre de relations cinématiques imposées. C'est donc la mobilité cinématique que l'on retrouve.

$$m_c = 6n - r_s \quad (2.106)$$

Comme il est souvent fastidieux d'écrire toutes les équations de la statique, on peut analyser l'hyperstaticité du système par une simple approche cinématique. En effet en combinant les équations 2.104, 2.100, 2.106 et 2.105 on obtient la formule suivante plus simple d'utilisation :

$$h = 6 + m_c - N_c \quad (2.107)$$

### 2.15 Chaînes complexes

Nous n'étudierons pas ce cas dans le cadre de ce cours bien que ce soit un cas très courant. Prière de se reporter aux ouvrages de référence.

## Chapitre 3

# Cinétique

L'objectif est d'aller vers l'écriture du Principe fondamental de la dynamique pour des systèmes de solides. Dans un premier temps il nous faut passer par les quantités de mouvement.

### 3.1 Torseur cinétique

#### 3.1.1 Résultante cinétique

Pour un point matériel  $M$  de masse élémentaire  $dm$  la quantité de mouvement associée au mouvement de ce point par rapport à un repère  $R$  est :  $\underline{p}(M/R) = \underline{V}(M/R) dm$ . Pour un système matériel continu on a à un instant  $t$  quelconque :

$$\underline{p}(S/R) = \int_{\forall M \in S} \underline{V}(M/R) dm \quad (3.1)$$

Si le solide est homogène de masse volumique  $\rho$  (resp. surfacique ou linéique) on a :

$$\underline{p}(S/R) = \int_{\forall M \in S} \underline{V}(M/R) \rho dv \quad (3.2)$$

**Remarque.** La quantité de mouvement étant calculée à partir du vecteur vitesse, elle dépend du repère par rapport auquel on travaille.

#### 3.1.2 Moment cinétique

##### 3.1.2.1 Définition

On appelle moment cinétique au point  $A$  la quantité :

$$\underline{\sigma}(A, S/R) = \int_{\forall M \in S} \underline{AM} \wedge \underline{V}(M/R) dm \quad (3.3)$$

**Remarques.** Le moment cinétique dépend lui aussi du repère par rapport auquel on travaille. Le point  $A$  de calcul de ce moment est un point quelconque, pas nécessairement appartenant au solide  $S$ .

**Propriété.** On montre aisément la relation caractéristique d'un torseur :

$$\begin{aligned}
\underline{\sigma}(B, S/R) &= \int_{\forall M \in S} \underline{BM} \wedge \underline{V}(M/R) dm \\
&= \int_{\forall M \in S} (\underline{BA} + \underline{AM}) \wedge \underline{V}(M/R) dm \\
&= \int_{\forall M \in S} \underline{BA} \wedge \underline{V}(M/R) dm + \int_{\forall M \in S} \underline{AM} \wedge \underline{V}(M/R) dm \\
&= \underline{\sigma}(B, S/R) + \underline{BA} \wedge \underline{p}(S/R)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

On peut donc en conclure qu'il existe un torseur appelé torseur cinétique de  $S$  par rapport à  $R$  qui est noté :

$$\{C(A, S/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{p}(S/R) = \int_{\forall M \in S} \underline{V}(M/R) dm \\ \underline{\sigma}_A(S/R) = \int_{\forall M \in S} \underline{AM} \wedge \underline{V}(M/R) dm \end{array} \right\}_A \tag{3.5}$$

Comme pour tous les torseurs son expression varie selon le point où il est calculé. En particulier on peut décider de le calculer au point  $G$  centre de masse du solide  $S$ .

### 3.1.3 Autre expression de ce torseur cinétique

Nous allons utiliser le centre de masse  $G$  défini par l'équation 2.7 reprise ci dessous :

$$M_S \underline{AG} = \int_{M \in S} \underline{AM} dm \quad \forall A \tag{3.6}$$

Nous allons choisir un point  $A$  particulier : l'origine  $O$  du repère  $R$ . Dérivons les deux membres de l'égalité :

$$\left[ \frac{d}{dt} M_S \underline{OG} \right]_R = \frac{d}{dt} \left[ \int_{M \in S} \underline{OM} dm \right]_R \tag{3.7}$$

**Principe de conservation de la masse :** Lorsque l'on s'intéresse à un système de masse constante on peut montrer qu'il est possible de permuter les opérateurs d'intégration et de dérivation.

En conséquence :

$$\begin{aligned}
M_S \underline{V}(G/R) &= \int_{M \in S} \left[ \frac{d}{dt} \underline{OM} dm \right]_R \\
&= \int_{M \in S} \underline{V}(M/R) dm
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Donc on retient que :

$$M_S \underline{V}(G/R) = \int_{M \in S} \underline{V}(M/R) dm \tag{3.9}$$

On peut alors au centre de masse du système étudié écrire que le torseur cinétique s'écrit simplement :

$$\{C(G, S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} M_S \underline{V}(G/R) \\ \int_{M \in S} \underline{GM} \wedge \underline{V}(M/R) dm \end{array} \right\}_G \quad (3.10)$$

Remarque : pour un point matériel, il est évident que le moment cinétique vaut  $\underline{0}$ .

### 3.1.4 Exemple : calcul du torseur cinétique d'une barre

Nous allons considérer une barre d'épaisseur négligeable, de longueur  $l$ , homogène de masse  $m$  en liaison pivot d'axe  $z$  avec le bâti.

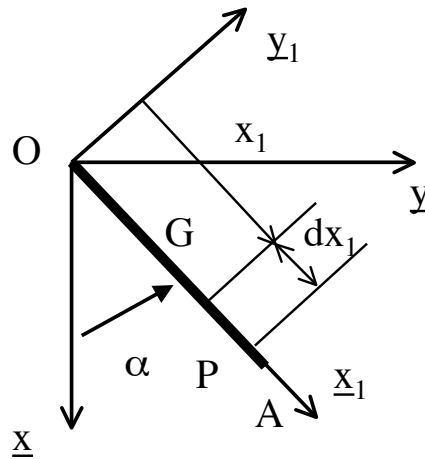


Figure 3.1 – tige

**Question.** Calculer le torseur cinétique au centre de gravité et au point  $O$  origine du repère.

$$\{C(G, S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} m \underline{V}(G/R) \\ \int_{P \in S} \underline{GP} \wedge \underline{V}(G/R) dm \end{array} \right\}_G \quad (3.11)$$

Or le vecteur position  $\underline{OG}$  vaut  $\frac{l}{2} \underline{x}_1$  ce qui donne :

$$\underline{V}(G/R) = l/2 \dot{\alpha} \underline{y}_1 \quad (3.12)$$

Pour calculer le moment cinétique, il faut prendre un petit élément de longueur  $dx_1$  situé à une distance  $x_1$  de  $G$ . L'élément de masse  $dm$  vaut  $\frac{m}{l} dx_1$  ;  $\frac{m}{l}$  représente la masse linéique de la tige. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\forall P \in S} \underline{GP} \wedge \underline{V}(M/R) dm &= \int_0^l (x_1 - l/2) \underline{x}_1 \wedge l x_1 \dot{\alpha} \underline{y}_1 dm \\
&= \dot{\alpha} \frac{lm}{2} \underline{z} \int_0^l (x_1 - l/2) x_1 dx_1 \\
&= \frac{ml^2}{12} \dot{\alpha} \underline{z}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Donc le torseur cinétique au point  $G$  se résume à :

$$\{C(G, S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{ml}{2} \dot{\alpha} \underline{y}_1 \\ \frac{ml^2}{12} \dot{\alpha} \underline{z} \end{array} \right\}_G \tag{3.14}$$

On peut effectuer ce calcul en  $O$  et on obtient :  $\frac{ml^2}{3} \dot{\alpha} \underline{z}$  soit par intégration soit par utilisation de la relation de moment de torseur.

### 3.1.5 Moment cinétique par rapport à un axe

On appelle **moment cinétique par rapport à un axe  $\Delta$  dans un référentiel  $R$**  la **quantité scalaire**  $\sigma_\Delta = \underline{\sigma}_A(S/R) \cdot \underline{u}$  avec  $\underline{u}$  un vecteur unitaire de  $\Delta$  et  $A$  un point quelconque appartenant à  $\Delta$ .

**Justification.** La relation caractéristique (de torseur) du torseur cinétique implique que :  $\forall A, A' \in \Delta$ ,  $\underline{\sigma}_A \cdot \underline{u} = (\underline{\sigma}_{A'} + \underline{AA'} \wedge p) \cdot \underline{u} = \underline{\sigma}_{A'} \cdot \underline{u} + (\underline{AA'} \wedge p) \cdot \underline{u}$ . Or on sait que  $A$  et  $A'$  appartiennent à  $\Delta$  donc le produit mixte est nul. Donc  $\forall A, A' \in \Delta$ ,  $\underline{\sigma}_A \cdot \underline{u} = \underline{\sigma}_{A'} \cdot \underline{u}$  ce qu'il fallait démontrer.

## 3.2 Énergie cinétique

Par définition l'énergie cinétique  $T$  d'un système matériel  $S$  en mouvement par rapport à  $R$  est donnée par :

$$T(S/R) = \frac{1}{2} \int_{\forall P \in S} \underline{V}^2(P/R) dm \tag{3.15}$$

**Exercice :** calculez l'énergie cinétique de la barre de la figure 3.1 en rotation par rapport à  $O$ .

On écrit :

$$\begin{aligned}
T(\text{tige}/R) &= \frac{1}{2} \int_{\forall P \in \text{Tige}} \underline{V}^2(P/R) dm \\
&= \frac{1}{2} \int_0^l (u \dot{\alpha} \underline{x}_1)^2 \left(\frac{m}{l}\right) du \\
&= \frac{ml^2}{6} \dot{\alpha}^2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Remarque : le terme  $\frac{ml^2}{3}$  dans cette énergie cinétique correspond au moment d'inertie de la tige par rapport à un axe  $(O, \underline{z})$ . Cela généralise en fait la notion de masse utilisée pour calculer l'énergie cinétique d'un système en translation à un système en rotation.

### 3.3 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un plan

**DÉFINITION** Soit un système matériel  $S$ . Son moment d'inertie par rapport à un plan  $P$  est donné par :

$$I_P = \int_{M \in S} HM^2 dm \quad (3.17)$$

Dans cette expression le point  $H$  correspond à la projection orthogonale de  $M$  sur le plan  $P$ . Donc  $HM$  représente la distance entre le point  $M$  et le plan  $P$ . Lorsque l'on effectue l'intégration, pour  $M$  donné le point  $H$  l'est aussi mais comme  $M$  varie lors de l'intégration,  $H$  varie aussi.

Soit un repère  $(O, \underline{u}, \underline{v})$  dans le plan  $P$  et  $\underline{w}$  un vecteur unitaire normal au plan. On a grâce à Pythagore :  $HM^2 = OM^2 - OH^2$  car  $H$  est la projection orthogonale de  $M$  sur  $P$ . Soit  $\underline{OM} = u\underline{u} + v\underline{v} + w\underline{w}$ . On a donc  $OM^2 = u^2 + v^2 + w^2$  et  $OH^2 = u^2 + v^2$ . Donc  $HM^2 = w^2 = (\underline{OA}, \underline{w})^2$ . Donc le moment d'inertie vaut en coordonnées cartésiennes :

$$I_{xOy} = \int z^2 dm \quad I_{xOz} = \int y^2 dm \quad I_{yOz} = \int x^2 dm \quad (3.18)$$

### 3.4 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

#### 3.4.1 Définition

**DÉFINITION** Soit un système matériel  $S$ . Son moment d'inertie par rapport à une droite  $\Delta$  est donné par :

$$I_\Delta = \int_{M \in S} HM^2 dm \quad (3.19)$$

Dans cette expression le point  $H$  correspond à la projection orthogonale de  $M$  sur la droite  $\Delta$ . Donc  $HM$  représente la distance entre le point  $M$  et la droite.

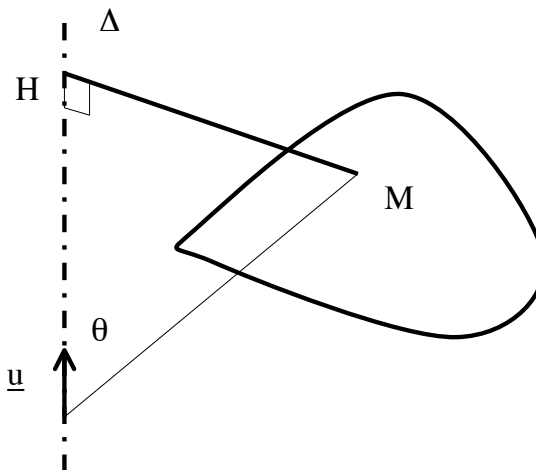


Figure 3.2 – Moment d'inertie par rapport à une droite

Soit un repère  $(O, \underline{u}, \underline{v})$  dans un plan  $P$  perpendiculaire à la droite  $\Delta$  par rapport à laquelle on veut trouver le moment d'inertie. Le vecteur  $\underline{w}$  est un vecteur normal au plan dont suivant  $\Delta$ . On a toujours grâce à Pythagore :  $HM^2 = OM^2 - OH^2$ . Soit  $\underline{OM} = u\underline{u} + v\underline{v} + w\underline{w}$ . On a donc  $OM^2 = u^2 + v^2 + w^2$  et  $OH^2 = w^2$ . Donc  $HM^2 = u^2 + v^2 = (\underline{OM} \wedge \underline{w})^2$ . Donc le moment d'inertie vaut en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{I_{Ox} = \int (y^2 + z^2) dm \quad I_{Oy} = \int (x^2 + z^2) dm \quad I_{Oz} = \int (x^2 + y^2) dm} \quad (3.20)$$

**Remarque.** On constate que :  $I_{Ox} = I_{xOz} + I_{xOy}$ . On peut voir l'axe  $Ox$  comme intersection des deux plans  $xOy$  et  $xOz$ .

**THÉORÈME** Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires se coupant suivant cet axe.

**DÉMONSTRATION** Soit  $\underline{u}$  un vecteur directeur de l'axe  $\Delta = Ox$ . On choisit un vecteur unitaire  $\underline{v}$  sur l'un des plans ( $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ ) et de même  $\underline{w}$  sur l'autre plan tel que  $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$  forme un trièdre direct. Soit  $O$  sur la droite  $\Delta$ . On en déduit que  $I_{Ox} = I_{xOz} + I_{xOy}$ .

### 3.4.2 Calcul du moment d'inertie par rapport à un axe

Nous pouvons remarquer sur la figure 3.3 que  $\|\underline{u} \wedge \underline{OM}\| = \|\underline{u}\| \|\underline{OM}\| \sin \theta$ . Dans le triangle  $OHM$  on a  $\|MH\| = \|\underline{OM}\| \sin \theta$ ; donc  $\|MH\| = \|\underline{u} \wedge \underline{OM}\|$ .

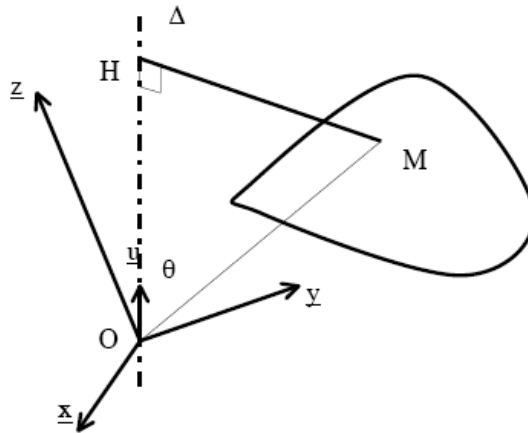


Figure 3.3 – Moment d'inertie par rapport à un axe

Or dans la base de  $R$  les composantes de  $\underline{u} \wedge \underline{OM}$  sont égales à :

$$\underline{u} \wedge \underline{OM} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta z - \gamma y \\ \gamma x - \alpha z \\ \alpha y - \beta x \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Donc  $\underline{MH}^2 = (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$  ce qui peut s'écrire :

$$\underline{MH}^2 = \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(z^2 + x^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\gamma\alpha xz \quad (3.22)$$



On peut en déduire avec  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  indépendants de l'intégration sur le solide  $S$  :

$$I_{\Delta} = \alpha^2 I_{O, \underline{x}} + \beta^2 I_{O, \underline{y}} + \gamma^2 I_{O, \underline{z}} - 2\beta\gamma I_{O, \underline{y}; O \underline{z}} - 2\gamma\alpha I_{O, \underline{z}; O \underline{x}} - 2\gamma\alpha I_{O, \underline{x}; O \underline{y}} \quad (3.23)$$

On note souvent :

$$\begin{array}{ll} A = I_{O, \underline{x}} = \int_{M \in S} (y^2 + z^2) dm & D = I_{O, \underline{y}; \underline{z}} = \int_{M \in S} yz dm \\ B = I_{O, \underline{y}} = \int_{M \in S} (z^2 + x^2) dm & E = I_{O, \underline{z}; \underline{x}} = \int_{M \in S} zx dm \\ C = I_{O, \underline{z}} = \int_{M \in S} (x^2 + y^2) dm & F = I_{O, \underline{x}; \underline{y}} = \int_{M \in S} xy dm \end{array} \quad (3.24)$$

D'où :

$$I_{\Delta} = \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C - 2\beta\gamma D - 2\gamma\alpha E - 2\gamma\alpha F \quad (3.25)$$

### 3.5 Opérateur d'inertie

#### 3.5.1 Définition

Nous venons de calculer le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque passant par un point  $O$  quelconque. On a :

$$I_{\Delta(O, \underline{u})} = \int_{M \in S} (\underline{OM} \wedge \underline{u})^2 dm = \int_{M \in S} (\underline{OM} \wedge \underline{u}) \cdot (\underline{OM} \wedge \underline{u}) dm \quad (3.26)$$

Soit  $\underline{OM} \wedge \underline{u} = \underline{w}$ . On peut alors faire une permutation circulaire du produit mixte  $(\underline{w}, \underline{OM}, \underline{u})$ .

$$I_{\Delta(O, \underline{u})} = \int_{M \in S} \underline{u} \cdot (\underline{OM} \wedge \underline{w}) \wedge \underline{OM} dm \quad (3.27)$$

Comme le vecteur  $\underline{u}$  ne dépend pas de l'intégration, on le sort de l'intégrale et on obtient alors :

$$I_{\Delta(O, \underline{u})} = \underline{u} \cdot \int_{M \in S} ((\underline{OM} \wedge \underline{u}) \wedge \underline{OM}) dm = \underline{u} \cdot \underline{v} \quad (3.28)$$

Avec :  $\underline{v} = \int_{M \in S} ((\underline{OM} \wedge \underline{u}) \wedge \underline{OM}) dm$ . On peut aisément se convaincre que l'application qui à  $\underline{u}$  associe le vecteur  $\underline{v}$  est linéaire. Elle peut dans une base donnée se représenter par une matrice :  $\underline{u} \rightarrow \underline{v} = (J_0)_B(\underline{u})$ . Cette matrice  $J$  est la matrice d'inertie de  $S$  par rapport au point  $O$  dans la base  $B$ .

**DÉFINITION** Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe  $\Delta$  de vecteur unitaire  $\underline{u}$  est donc donné par :

$$I_{\Delta(O, \underline{u})} = \underline{u} \cdot J_O(\underline{u}) \quad (3.29)$$

#### 3.5.2 Calcul de l'opérateur d'inertie

Nous savons formuler le problème. Quels sont les éléments de cette matrice pour une base donnée ? Soit  $(O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  un repère tel que  $O \in \Delta_{(\underline{u}, O)}$ . On suppose que les composantes de  $\underline{u}$  sont  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Soit un point  $M(x, y, z)$  du système.

Nous savons que :

$$\underline{OM} \wedge \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Donc on peut écrire :

$$\underline{OM} \wedge (\underline{OM} \wedge \underline{u}) = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z^2 - y^2 & xy & xz \\ -xy & -x^2 - z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2 - y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Donc en intégrant sur le système on trouve :

$$(J_O)_{(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})}(\underline{u}) = \int_{M \in S} -\underline{OM} \wedge (\underline{OM} \wedge \underline{u}) dm = \begin{pmatrix} \int (z^2 + y^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz dm \\ -\int xz dm & -\int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Comme l'intégration sur le système est indépendante du vecteur  $\underline{u}$  on en déduit que la matrice se résume à

$$(J_O)_{(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})} = \begin{pmatrix} I_{Ox} & I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{Oy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{Oz} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

### 3.6 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un point

Soit un système matériel  $S$ . Son moment d'inertie par rapport à un point  $N$  est donné par :

$$I_N = \int_{M \in S} NM^2 dm \quad (3.34)$$

Dans cette expression le point  $N$  correspond à la projection de  $M$  sur le point  $N$  ce qui montre qu'en fait on a le même type de définition que pour le moment d'inertie par rapport à un axe ou à un plan.

Soit  $N$  le point  $O$  origine d'un repère cartésien.

$$I_O = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm \quad (3.35)$$

**Remarque.** On constate que :  $I_O = I_{xOz} + I_{xOy} + I_{yOz} = \frac{1}{2}(I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz})$ . On peut voir l'axe  $Ox$  comme intersection des deux plans  $xOy$  et  $xOz$ .

**THÉORÈME** Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires se coupant suivant cet axe.

**DÉMONSTRATION** Soit  $\underline{u}$  un vecteur directeur de l'axe  $\Delta = Ox$ . On choisit un vecteur unitaire  $\underline{v}$  sur l'un des plans ( $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ ) et de même  $\underline{w}$  sur l'autre plan tel que  $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$  forme un trièdre direct. Soit  $O$  sur la droite  $\Delta$ . On en déduit que  $I_{Ox} = I_{xOz} + I_{xOy}$ .

**Exemple.** Calcul du moment d'inertie d'une sphère creuse homogène de masse  $m$ , de rayon  $R$  par rapport à un axe passant par son centre de masse.

Le centre de masse  $G$  appartient aux éléments de symétrie de la sphère. C'est donc le centre de celle-ci. La sphère étant creuse on va supposer que  $dm = m/Ad\sigma$  avec  $A$  l'aire de la surface de la sphère. On a donc une intégrale de surface à calculer. Compte tenu des symétries du problème, on utilise des coordonnées sphériques  $r, \theta, \phi$  pour repérer la position d'un point sur la sphère. L'angle  $\theta$  correspond à la longitude et  $\phi$  à la latitude en repérage terrestre. L'élément de surface est donc  $rd\theta r \sin \theta d\phi$ .

A terminer.

### 3.7 Rayon de giration

Comme le moment d'inertie d'un solide est homogène à une masse multipliée par le carré d'une longueur, on peut pour les différents moments d'inertie concentrer la masse à une distance  $\rho$  de l'élément par rapport auquel on calcule ce moment (point, axe plan) et écrire qu'il est égal à  $m\rho^2$  avec  $m$  la masse du système étudié. La quantité  $\rho$  est appelée **rayon de giration du solide**.

### 3.8 Théorème d'Huyghens

Christian Huyghens était un scientifique hollandais (1629, 1695) né à La Haye et qui s'est intéressé aux chocs entre solides durs ou mous (à la suite de Descartes), à l'attraction entre corps et au mouvement des planètes (à la suite de Newton) et qui a rédigé des notes sur l'harmonie. Il a dû s'intéresser au problème d'inertie car il a montré que Saturne devait tourner sur elle-même (à vérifier).

**THÉORÈME** Soit un système  $S$  de masse  $m$  de centre d'inertie  $G$ . Soit  $I_\Delta$ . Considérons un axe  $\Delta_G$  parallèle à  $\Delta$  et passant par  $G$ . Soit  $d$  la distance entre ces deux axes.

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + md^2 \quad (3.36)$$

**DÉMONSTRATION** Soit  $H$  la projection orthogonale d'un point  $A$  du système sur  $\Delta$  et  $H'$  sa projection orthogonale sur  $\Delta_G$ . On peut remarquer que  $A, H$  et  $H'$  forment un triangle dans un plan perpendiculaire aux deux droites  $\Delta$  et  $\Delta_G$ . Donc  $HH'$  vaut la distance  $d$  et ceci pour tous les points  $M$  du système  $S$ .

On a  $HM^2 = (\underline{HH'} + \underline{H'M})^2$ . Donc  $I_\Delta = \int HM^2 dm = \int (\underline{HH'}^2 + \underline{H'M}^2 + 2\underline{HH'} \cdot \underline{H'M}) dm$ . Donc  $I_\Delta = \int \underline{HH'}^2 dm + \int \underline{H'M}^2 dm + \int 2\underline{HH'} \cdot \underline{H'M} dm$ . Or on sait que  $HH' = d$ . Donc  $I_\Delta = d^2 m + 2\underline{HH'} \int \underline{H'M} dm + I_{\Delta_G}$ . Il nous faut donc montrer que le deuxième terme de droite est nul. Soit  $\underline{HM} = \underline{HG} + \underline{GM}$ . Donc  $\underline{HH'} \int \underline{H'M} dm = \int \underline{HH'} \cdot \underline{H'G} dm + \int \underline{HH'} \cdot \underline{GM} dm$ . Or nous savons que  $\forall M$ , les points  $H$  et  $H'$  sont dans un plan perpendiculaire aux deux droites  $\Delta$  et  $\Delta_G$ . Donc le premier terme est nul car  $\underline{HH'} \cdot \underline{H'G} = 0$ . Le terme  $\int \underline{HH'} \cdot \underline{GM} dm$  est nul par définition du centre d'inertie  $G$ . Donc on obtient bien la relation cherchée.

**Remarques.** Sachant calculer le moment d'inertie par un axe passant par  $G$ , on saura le faire pour un axe quelconque parallèle.

On constate que le moment d'inertie par rapport à un axe est minimal si cet axe passe par le centre d'inertie.

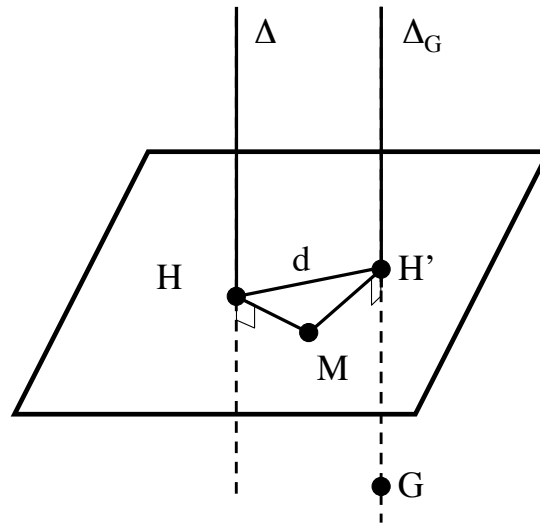


Figure 3.4 – Théorème d'Huyghens

### 3.9 Théorème d'Huyghens généralisé

Soit un système de masse  $M$ . Nous savons que la matrice d'inertie dépend de l'origine choisie pour le repère de calcul. Changeons cette origine en conservons les directions des axes du repère. Soit  $O'$  une nouvelle origine du repère  $R'$  de coordonnées  $(a, b, c)$  dans le repère initial  $R$ . Le point  $M$  a comme nouvelles coordonnées  $(x', y', z')$  dans le repère  $R'$ . On a donc des relations du type  $x' = x - a$ .

Les termes tels que  $I_{Oz}$  se transforment en  $\int ((x' + a)^2 + (y' + b)^2) dm = \int (x'^2 + y'^2) dm + 2a \int x' dm + 2b \int y' dm + a^2 \int dm + b^2 \int dm$ . Supposons que le point  $O'$  coïncide avec le centre de masse  $G$ . Dans ce cas on a la relation  $\int \underline{GM} = \underline{0}$ . Donc  $\int x' dm = \int y' dm = \int z' dm = 0$ . Donc on aboutit à :

**THÉORÈME**

$$\begin{aligned} I_{Ox} &= I_{Gx} + M(b^2 + c^2) \\ I_{Oy} &= I_{Gy} + M(c^2 + a^2) \\ I_{Oz} &= I_{Gz} + M(a^2 + b^2) \end{aligned} \quad (3.37)$$

**Remarque.** Dans ces expressions on retrouve le théorème d'Huyghens déjà démontré car les termes  $a^2 + b^2$  correspondent à la distance  $d$ .

Les termes tels que  $I_{xy}$  se transforment en  $\int (x' + a)(y' + b) dm = \int x'y' dm + b \int x' dm + a \int y' dm + ab \int dm$ . Supposons toujours que le point  $O'$  coïncide avec le centre de masse  $G(x_G, y_G, z_G)$ . Donc on aboutit à :

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{x'y'} + Mx_Gy_G \\ I_{yz} &= I_{y'z'} + My_Gz_G \\ I_{zx} &= I_{z'x'} + Mx_Gz_G \end{aligned} \quad (3.38)$$

La matrice d'inertie devient :

$$(J_O)_{(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})} = (J_G)_{(\underline{x}', \underline{y}', \underline{z}')} + \begin{pmatrix} M(y_G^2 + z_G^2) & -Mx_Gy_G & -Mx_Gz_G \\ -Mx_Gy_G & M(z_G^2 + x_G^2) & -My_Gz_G \\ -Mx_Gz_G & -My_Gz_G & M(x_G^2 + y_G^2) \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

### 3.10 Axes principaux d'inertie

La matrice d'inertie caractéristique du système est symétrique, réelle. On a donc dans ce cas 3 valeurs propres réelles et trois directions associées appelées **axes principaux d'inertie**. Ces directions correspondent à des directions de symétrie du système (symétrie au sens des moments d'inertie). Dans la pratique, les solides étudiés ont souvent des symétries qu'il faut utiliser.

**THÉORÈME** Si le système possède un plan de symétrie matérielle alors tout axe perpendiculaire à ce plan est axe principal d'inertie.

**DÉMONSTRATION** Soit un repère  $(O, x, y)$  du plan  $P$  et l'axe  $O, z$  perpendiculaire. On peut toujours calculer  $\int xz dm$  et  $\int yz dm$  en choisissant un élément  $dm$  symétrique par rapport au plan  $P$ ,  $z_M = -z'_M$  avec  $x_m = x'_m$  et  $y_M = y'_M$ ,  $M$  et  $M'$  étant les points symétriques de  $S$  par rapport à  $P$  de masse respectives  $dm$  et  $dm' = dm$ . Donc  $xz$  devient une fonction impaire dont l'intégrale sur  $S$  est nulle (tout comme  $yz$ ). En conséquence  $I_{xy} = I_{yz} = 0$ . On en déduit que l'axe  $O, z$  est axe principal d'inertie (valeur propre).

**THÉORÈME** Si le système possède un axe de symétrie matérielle alors cet axe est un axe principal d'inertie.

**DÉMONSTRATION** Soit l'axe  $O, z$  axe de symétrie. On peut toujours calculer  $\int xz dm$  et  $\int yz dm$  en choisissant un élément  $dm$  symétrique par rapport à l'axe  $O, z$ . On a  $x_m = -x'_m$  et  $y_M = -y'_M$ ,  $M$  et  $M'$  étant les points symétriques de  $S$  par rapport à  $O, z$  de masse respectives  $dm$  et  $dm' = dm$ . On a  $z_M = z'_M$ . Donc  $xz$  devient une fonction impaire dont l'intégrale sur  $S$  est nulle (tout comme  $yz$ ). En conséquence  $I_{xy} = I_{yz} = 0$ . On en déduit que l'axe  $O, z$  est axe principal d'inertie (valeur propre).

**Remarque.** Ayant deux axes principaux d'inertie, le troisième est celui qui permet d'avoir un trièdre orthogonal.

**THÉORÈME** Si un système admet un axe de symétrie  $(O, z)$  de révolution pour sa distribution de masse, alors tout trièdre orthogonal incluant cet axe de révolution est principal d'inertie. Le système est dit cylindrique et sa matrice d'inertie est de la forme :

$$(J_O)_{(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I' \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

**DÉMONSTRATION** Si  $O, z$  est axe de symétrie, tout plan contenant  $O, z$  est plan de symétrie. Toute droite perpendiculaire à  $O, z$  est axe principal d'inertie.

**DÉFINITION** Si un système est dit sphérique si sa matrice d'inertie est de la forme :

$$(J_O) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

### 3.11 Calcul du moment cinétique d'un solide

Nous savons que le moment cinétique est par définition :

$$\underline{\sigma}(A, S/R) = \int_{\forall M \in S} \underline{AM} \wedge \underline{V}(M/R) dm \quad (3.42)$$

Si nous supposons le point  $A$  comme étant lié au solide  $S$  alors le champ des vitesses dans le solide permet d'écrire :

$$\underline{\sigma}(A, S/R) = \int_{\forall M \in S} \underline{AM} \wedge (\underline{V}(A \in S/R) + \underline{MA} \wedge \underline{\Omega}(S/R)) dm \quad (3.43)$$

On peut alors ré écrire :

$$\underline{\sigma}(A, S/R) = \left( \int_{\forall M \in S} \underline{AM} dm \right) \wedge \underline{V}(A \in S/R) + \int_{\forall M \in S} \underline{AM} \wedge (\underline{MA} \wedge \underline{\Omega}(S/R)) dm \quad (3.44)$$

Le premier terme peut se transformer car  $\underline{V}(A)$  ne dépend pas de l'intégration et avec la définition du centre d'inertie on obtient :  $M_S \underline{AG} \wedge \underline{V}(A \in S/R)$ . On trouve finalement :

$$\underline{\sigma}(A, S/R) = M_S \underline{AG} \wedge \underline{V}(A \in S/R) + \int_{\forall M \in S} \underline{AM} \wedge (\underline{\Omega}(S/R) \wedge \underline{AM}) dm \quad (3.45)$$

#### 3.11.1 Mouvement plan sur plan

Dans ce cas on sait que le vecteur rotation est très simple :  $\dot{\theta} \underline{z}$  par exemple pour un mouvement plan dans le plan  $(O, x, y)$ . Soit  $R$  le repère de référence et  $R' = (O', x_1, y_1, z)$  attaché au solide  $S$ . On a donc pour un tel mouvement de rotation au point  $O'$  :

$$\underline{\sigma}(O', S/R) = M_S \underline{O'G} \wedge \underline{V}(O' \in S/R) + \int_{\forall M \in S} (x_1 \underline{x}_1 + y_1 \underline{y}_1 + z \underline{z}) \wedge (\dot{\theta} \underline{z} \wedge (x_1 \underline{x}_1 + y_1 \underline{y}_1 + z \underline{z})) dm \quad (3.46)$$

Ce qui donne après calculs :

$$\underline{\sigma}(O', S/R) = M_S \underline{O'G} \wedge \underline{V}(O' \in S/R) - \dot{\theta} \underline{x}_1 \int_{\forall M \in S} x_1 z dm - \dot{\theta} \underline{y}_1 \int_{\forall M \in S} y_1 z dm + \dot{\theta} \underline{z} \int_{\forall M \in S} (x_1^2 + y_1^2) dm \quad (3.47)$$

On reconnaît les termes  $E_1$ ,  $D_1$  et  $C$  de la matrice d'inertie avec :

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{\forall M \in S} x_1 z dm \\ D_1 &= \int_{\forall M \in S} y_1 z dm \\ C &= \int_{\forall M \in S} (x_1^2 + y_1^2) dm \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\underline{\sigma}(O', S/R) = M_S \underline{OG} \wedge \underline{V}(O' \in S/R) - \dot{\theta} E_1 \underline{x}_1 - \dot{\theta} D_1 \underline{y}_1 + \dot{\theta} C \underline{z} \quad (3.49)$$

**Cas particuliers.** On a deux cas importants et courants :

1. Le point  $O'$  est fixe dans  $R$ .

$$\underline{\sigma}(O', S/R) = -\dot{\theta} E_1 \underline{x}_1 - \dot{\theta} D_1 \underline{y}_1 + \dot{\theta} C \underline{z} \quad (3.50)$$

Si de plus le plan  $(O, \underline{x}, \underline{y})$  est plan de symétrie alors l'expression se simplifie encore :

$$\underline{\sigma}(O', S/R) = \dot{\theta} I_{(A, \underline{z})} \underline{z} \quad (3.51)$$

2. On choisit de calculer le moment cinétique au point  $G$  centre d'inertie.

$$\underline{\sigma}(O', S/R) = -\dot{\theta} E_1 \underline{x}_1 - \dot{\theta} D_1 \underline{y}_1 + \dot{\theta} C \underline{z} \quad (3.52)$$

Il faut bien faire attention que l'expression est la même que précédemment mais pour des raisons différentes. Si de plus le plan est plan de symétrie on retrouve aussi la simplification.

### 3.11.2 Cas général

Dans ce cas, on reprend l'expression :

$$\underline{\sigma}(A, S/R) = M_S \underline{AG} \wedge \underline{V}(A \in S/R) + \int_{\forall M \in S} \underline{AM} \wedge (\underline{\Omega}(S/R) \wedge \underline{AM}) dm \quad (3.53)$$

On constate que le second terme correspond à la définition de l'opérateur d'inertie. Donc on a :

$$\underline{\sigma}(A, S/R) = M_S \underline{AG} \wedge \underline{V}(A \in S/R) + \underline{J_{A,S}(\underline{\Omega}(S/R))} \quad (3.54)$$

Remarque : la notation  $\underline{J_{A,S}(\underline{\Omega}(S/R))}$  un peu lourde doit faire comprendre que le résultat de l'opération  $J$  (représenté par sa matrice) appliqué au vecteur  $\underline{\Omega}$  est un vecteur.

Dans les deux cas particuliers d'un point  $A$  fixe dans  $R$  ou de  $A$  pris en  $G$  on a :

1. Le point  $A$  est fixe dans  $R$ .

$$\underline{\sigma}(A, S/R) = \underline{J_{A,S}(\underline{\Omega}(S/R))} \quad (3.55)$$

2. Le point  $A$  est pris comme  $G$ .

$$\underline{\sigma}(G, S/R) = \underline{J_{G,S}(\underline{\Omega}(S/R))} \quad (3.56)$$

### 3.12 Energie cinétique d'un solide

On a vu que l'énergie cinétique  $T$  d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport à un repère  $R$  est donnée par :

$$T(S/R) = \frac{1}{2} \int_{\forall M \in S} \underline{V}^2(M/R) dm \quad (3.57)$$

Or nous pouvons écrire en supposant que le point  $A$  appartient au solide  $S$  :  $\underline{V}(M \in S/R) = \underline{V}(A \in S/R) + \underline{MA} \wedge \underline{\Omega}(S/R)$ . Donc on a finalement comme expression de  $2T$  :

$$\begin{aligned} 2T(S/R) &= \int_{\forall M \in S} (\underline{V}(A \in S/R) + \underline{MA} \wedge \underline{\Omega}(S/R)) \cdot \underline{V}(M/R) dm \quad (3.58) \\ 2T(S/R) &= \int_{\forall M \in S} \underline{V}(A \in S/R) \cdot \underline{V}(M/R) dm + \int_{\forall M \in S} (\underline{MA} \wedge \underline{\Omega}(S/R)) \cdot \underline{V}(M/R) dm \\ 2T(S/R) &= \underline{V}(A \in S/R) \int_{\forall M \in S} \underline{V}(M/R) dm + \underline{MA} \wedge \underline{\Omega}(S/R) \cdot \int_{\forall M \in S} \underline{V}(M/R) dm \\ 2T(S/R) &= \underline{V}(A \in S/R) \int_{\forall M \in S} \underline{V}(M/R) dm + \underline{\Omega}(S/R) \int \underline{AM} \wedge \underline{V}(M/R) dm \end{aligned}$$

On reconnaît dans cette dernière expression les éléments de réduction du torseur cinématique et du torseur cinétique.

$$T(S/R) = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\Omega}(S/R) \\ \underline{V}(A \in S/R) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \underline{p}(S/R) \\ \underline{\sigma}(A \in S/R) \end{array} \right\} = \{\mathcal{V}(S/R)\}_A \cdot \{\mathcal{C}(S/R)\}_A \quad (3.59)$$

**THÉORÈME** L'énergie cinétique d'un solide est le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique (pris au même point).

Nous allons évidemment retrouver des cas particuliers de point fixe ou de calcul au centre de masse.

1. Cas d'un point  $A$  fixe dans le repère  $R$ .

$$2T(S/R) = \underline{\Omega}(S/R) \cdot \underline{J}_A(S/R)(\underline{\Omega}(S/R)) \quad (3.60)$$

2. Cas du point  $A$  confondu avec  $G$ .

$$2T(S/R) = M_S(\underline{V}(G, S/R))^2 + \underline{\Omega}(S/R) \cdot \underline{J}_G(S/R)(\underline{\Omega}(S/R)) \quad (3.61)$$



## Chapitre 4

# Dynamique

### 4.1 Torseur dynamique

#### 4.1.1 Définition

On définit le torseur dynamique d'un système matériel en mouvement par rapport à un repère  $R$  par :

$$\{\mathcal{D}(A, S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{M \in S} \underline{\Gamma}(M/R) dm \\ \underline{\delta}_A(S/R) = \int_{M \in S} \underline{AM} \wedge \underline{\Gamma}(M/R) dm \end{array} \right\}_A \quad (4.1)$$

#### 4.1.2 Autre expression

Nous savons que :

$$m \underline{V}(G/R) = \int_{M \in S} \underline{V}(M/R) dm \quad (4.2)$$

Si on dérive chaque membre de cette égalité par rapport au temps dans le repère  $R$  alors en utilisant la propriété issue de la conservation de la masse (équation 3.8) on obtient :

$$m \underline{\Gamma}(G/R) = \int_{M \in S} \underline{\Gamma}(M/R) dm \quad (4.3)$$

On peut donc écrire que le torseur dynamique :

$$\{\mathcal{D}(A, S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} m \underline{\Gamma}(G/R) \\ \underline{\delta}_A(S/R) = \int_{M \in S} \underline{AM} \wedge \underline{\Gamma}(M/R) dm \end{array} \right\}_A \quad (4.4)$$

### 4.2 Relation entre le torseur cinétique et le torseur dynamique

On constate que ces deux torseurs sont construits de la même manière avec dans l'un les vitesses et dans le second les accélérations. Il est logique de voir si il n'existe pas des relations de dérivation entre les deux. nous allons le faire pour les moments car pour les résultantes le travail est déjà effectué.

Le moment cinétique s'écrit :

$$\underline{\sigma}_A(S/R) = \int_{\forall M \in S} \underline{AM} \wedge \underline{V}(M/R) dm \quad (4.5)$$

Dérivons chaque membre de l'égalité par rapport au temps dans le repère  $R$  en utilisant la conservation de la masse.

$$\frac{d}{dt} [\underline{\sigma}_A(S/R)]_R = \int_{\forall M \in S} \frac{d}{dt} [\underline{AM} \wedge \underline{V}(M/R)]_R dm \quad (4.6)$$

Mais la dérivée du produit vectoriel s'écrit :

$$\frac{d}{dt} [\underline{AM} \wedge \underline{V}(M/R)]_R = \frac{d}{dt} [\underline{AM}]_R \wedge \underline{V}(M/R) + \underline{AM} \wedge \frac{d}{dt} [\underline{V}(M/R)]_R \quad (4.7)$$

Mais on peut écrire que :

$$\frac{d}{dt} [\underline{AM}]_R = \frac{d}{dt} [\underline{AO} + \underline{OM}]_R = \underline{V}(M/R) - \underline{V}(A/R) \quad (4.8)$$

Donc

$$\frac{d}{dt} [\underline{AM} \wedge \underline{V}(M/R)]_R = -\underline{V}(A/R) \wedge \underline{V}(M/R) + \underline{AM} \wedge \underline{\Gamma}(M/R) \quad (4.9)$$

Au final la dérivée du moment cinétique vaut :

$$\frac{d}{dt} [\underline{\sigma}_A(S/R)]_R = - \int_{\forall M \in S} \underline{V}(A/R) \wedge \underline{V}(M/R) dm + \int_{\forall M \in S} \underline{AM} \wedge \underline{\Gamma}(M/R) dm \quad (4.10)$$

Comme le point  $A$  est un point quelconque on peut sortir le terme  $\underline{V}(A/R)$  de l'intégrale et en utilisant la relation 3.8 on a :

$$\frac{d}{dt} [\underline{\sigma}_A(S/R)]_R = -m \underline{V}(A/R) \wedge \underline{V}(G/R) + \int_{\forall M \in S} \underline{AM} \wedge \underline{\Gamma}(M/R) dm \quad (4.11)$$

On reconnaît dans le second membre le moment dynamique. Donc la relation cherchée est :

$$\boxed{\int_{\forall M \in S} \underline{AM} \wedge \underline{\Gamma}(M/R) dm = \underline{\delta}_A(S/R) = \frac{d}{dt} [\underline{\sigma}_A(S/R)]_R + m \underline{V}(A/R) \wedge \underline{V}(G/R)} \quad (4.12)$$

**Remarques.** On peut choisir comme point  $A$  un point fixe dans le repère  $r$  ou le centre de masse  $G$  du solide.

1. Le point  $A$  est fixe dans  $R$ .

$$\underline{\delta}_A(S/R) = \frac{d}{dt} [\underline{\sigma}_A(S/R)]_R \quad (4.13)$$

2. Le point  $A$  est choisie comme étant  $G$ .

$$\underline{\delta}_G(S/R) = \frac{d}{dt} [\underline{\sigma}_G(S/R)]_R \quad (4.14)$$

Or dans ces deux cas nous avons une expression du moment cinétique en fonction de l'opérateur d'inertie (relations 3.55 et 3.56). Donc on peut écrire :

$$\underline{\delta}_G(S/R) = \frac{d}{dt} \left[ \underline{J}_{G,S}(\underline{\Omega}(S/R)) \right]_R \quad (4.15)$$

Si A est un point fixe dans le repère R :

$$\underline{\delta}_A(S/R) = \frac{d}{dt} \left[ \underline{J}_{A,S}(\underline{\Omega}(S/R)) \right]_R \quad (4.16)$$

### 4.3 Principe fondamental de la dynamique

Ce principe est dû à Newton. Il énonce une relation entre les causes (les actions mécaniques) et les effets (le mouvement caractérisé par l'accélération et non la vitesse).

il existe des référentiels privilégiés dits galiléens dans lesquels le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme ; ceci constitue le principe d'inertie.

Galilée : Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.

Pour le monde grec au contraire le mouvement devait s'arrêter dès que cessaient la cause qui lui avait donné naissance.

Un système est dit isolé si ses interactions avec l'extérieur sont nulles. Comme les interactions décroissent avec la distance, il suffit de considérer ce système comme situé à une suffisamment grande distance de tout autre système (pour pouvoir négliger ces interactions).

#### 4.3.1 Énoncé

Nous rappelons que nous nous intéressons à des systèmes n'échangeant pas de matière avec l'extérieur ; ce sont des systèmes dits fermés.

Il existe au moins un repère  $R_g$  appelé repère galiléen et au moins une chronologie galiléenne tels que pour tout sous ensemble matériel  $e$  d'un ensemble  $E$  le torseur dynamique des actions extérieures à  $e$  est égal au torseur dynamique de  $e$  par rapport au repère  $R$  et ceci à tout instant  $t$ .

$$\{\mathcal{D}(A, e/R)\} = \{\mathcal{T}(\bar{e} \rightarrow e)\} \quad \forall e \in E \quad (4.17)$$

**Remarques.** La notion de repère et de chronologie galiléens sont des notions locales en temps et en espace : le repère terrestre est galiléen pour des expériences limitées dans le temps (par rapport à la rotation de la terre) et se déroulant sur de faibles dimensions (par rapport au diamètre de la terre). Il est hors de question de vouloir prédire des mouvements de marée ou lancer une fusée avec ce repère.

**Autre énoncé.** On peut aussi trouver un énoncé équivalent qui précise qu'il existe au moins un référentiel galiléen  $R_g$  tel qu'en tout point fixe  $O$  de ce référentiel le mouvement de ce système matériel  $E$  satisfait à :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left[ \{C(O, S/R_g)\} \right]_{R_g} = \{\mathcal{T}(\bar{e} \rightarrow e)\}} \quad (4.18)$$

### 4.3.2 Théorèmes dynamiques

**THÉORÈME** On peut déduire du principe fondamental de la dynamique les deux théorèmes de la résultante dynamique et du moment dynamique.

$$m \underline{\Gamma}(G/R_g) = \underline{F}(\bar{e} \rightarrow e) \quad (4.19)$$

$$\underline{\delta}(A, e/R_g) = \underline{M}_A(\bar{e} \rightarrow e) \quad \forall A \quad (4.20)$$

### 4.3.3 Théorème des actions réciproques

Nous avons, dans le cas de la statique montré que le torseur des actions exercées par  $E_2$  sur  $E_1$  est opposé à celui des actions exercées par  $E_1$  sur  $E_2$ . Montrons le dans le cas de la dynamique.

**THÉORÈME** Le torseur des actions extérieures exercées par un système fermé  $E_1$  sur un autre système fermé  $E_2$  est l'opposé de celui exercé par  $E_2$  sur  $E_1$ .

$$\boxed{\{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = -\{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\}} \quad (4.21)$$

**DÉMONSTRATION** On procède de la même manière que pour la statique. On note  $R$  le repère galiléen.

Pour  $E_1$  :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E}_1 \rightarrow E_1)\} = \{\mathcal{D}(E_1/R)\} \quad (4.22)$$

Or ce qui constitue l'extérieur à  $E_1$  est l'extérieur à  $E$  plus  $E_2$ . donc :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_1)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\} = \{\mathcal{D}(E_1/R)\} \quad (4.23)$$

Si on considère maintenant le système  $E_2$  :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_2)\} + \{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = \{\mathcal{D}(E_2/R)\} \quad (4.24)$$

On ajoute les équations 4.23 et 4.24. Comme  $E_1$  et  $E_2$  forment le système fermé  $E$  on obtient :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_1)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\} + \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_2)\} + \{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = \{\mathcal{D}(E/R)\} \quad (4.25)$$

Je peux rassembler les termes  $\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_1)\}$  et  $\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E_2)\}$  pour écrire  $\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\}$  car  $E_1 \cup E_2 = E$ .

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_2)\} + \{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = \{\mathcal{D}(E/R)\} \quad (4.26)$$

Or je peux aussi appliquer le PFD au système  $E$  ce qui me permet d'en conclure que :

$$\boxed{\{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = -\{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\}} \quad (4.27)$$

## 4.4 Principe fondamental de la dynamique en repère non galiléen

Dans la pratique lorsque nous devons nous intéresser au mouvement de mécanismes (mouvement de solides par rapport à d'autres solides), il est parfois plus avantageux de se placer dans un repère non galiléen.

Soit  $R$  un repère quelconque et  $R_g$  un repère galiléen. Le système PFD appliqué à un système fermé (solides ou ensemble de solides)  $S$  par rapport à  $R_g$  est :

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S)\} \quad (4.28)$$

Par définition du torseur dynamique on a :

$$\boxed{\{\mathcal{D}(A, S/R_g)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{M \in S} \underline{\Gamma}(M/R_g) dm \\ \int_{M \in S} \underline{AM} \wedge \underline{\Gamma}(M/R_g) dm \end{array} \right\}_A} \quad (4.29)$$

Or nous savons (équation 1.58) que l'accélération peut s'écrire :

$$\underline{\Gamma}(M, S/R_g) = \underline{\Gamma}(M, S/R) + \underline{\Gamma}(M, R/R_g) + 2 \underline{\Omega}(R/R_g) \wedge \underline{V}(M, S/R_1) \quad (4.30)$$

On peut donc fabriquer les torseurs dynamiques d'entraînement  $ie$  et de Coriolis  $ic$  à partir des accélérations d'entraînement et de Coriolis pour écrire :

$$\{\mathcal{D}(S/R)\} = \{\mathcal{T}(\overline{S} \rightarrow S)\} + \{\mathcal{D}_{\gamma}(R/R_g)\} + \{\mathcal{D}_{\gamma}(S/R)\} \quad (4.31)$$

avec :

$$\{\mathcal{D}_{\gamma}(A, S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} - \int_{M \in S} \underline{\Gamma}(M/R) dm \\ - \int_{M \in S} \underline{AM} \wedge \underline{\Gamma}(M/R) dm \end{array} \right\}_A \quad (4.32)$$

$$\{\mathcal{D}_{\gamma}(A, S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} - \int_{M \in S} 2 \underline{\Omega}(R/R_g) \wedge \underline{V}(M/R) dm \\ - \int_{M \in S} \underline{AM} \wedge (2 \underline{\Omega}(R/R_g) \wedge \underline{V}(M/R)) dm \end{array} \right\}_A \quad (4.33)$$

On peut donc appliquer le PFD en repère non galiléen mais il ne faut oublier d'ajouter au torseur des efforts extérieurs ceux qui proviennent de l'accélération d'entraînement et de Coriolis. Attention, il faut bien comprendre que les « efforts » d'entraînement de Coriolis n'existent pas. Ce n'est qu'un point de vue cinématique. si on se place dans le référentiel galiléen on a une vision globale et si on se place dans un référentiel non galiléen alors il faut nécessairement pour compenser ce changement de référentiel et conserver les bonnes équations ajouter les deux torseurs mentionnés.

**Parmi les « idioties » souvent lues dans les ouvrages de mécanique** on y trouve Coriolis comme responsable de la vidange dans un sens ou dans l'autre des lavabos selon l'hémisphère. Faites un calcul d'ordre de grandeur et vous constaterez que cet effet est de l'ordre de  $10^{-5}$  de la gravité terrestre. En conséquence pour le mettre en évidence il faut des expériences de laboratoire très soignées et non de lavabo.

**Remarque.** Dans un mouvement circulaire d'un point  $M$  de masse  $m$  à vitesse angulaire constante autour d'un point fixe dans un repère galiléen on sait que l'accélération est centripète (dirigée vers le point fixe). Le signe  $-$  dans l'expression du PFD en repère non galiléen exprime le fait que dans ce repère (celui qui tourne) on peut considérer l'effet de cette rotation comme un effort centrifuge.

## 4.5 Principe de la dynamique appliqué à un système en rotation

Dans de nombreux cas de machines tournantes, il est important pour réduire les vibrations d'équilibrer les solides, c'est à dire de rendre indépendantes du mouvement les actions de contact. Nous voir ce que cela impose comme répartition des masses.

Nous nous intéressons à des solides en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  confondu avec  $O, z$  dans un repère  $R$  d'origine  $O$ . Cette rotation est obtenue grâce à une liaison pivot parfaite d'axe  $O, z$ . Le solide  $S$  possède un centre de masse  $G$  de coordonnées  $a, b$  dans le repère  $R$ . L'angle  $\theta$  permet de repérer la position angulaire du solide  $S$ .

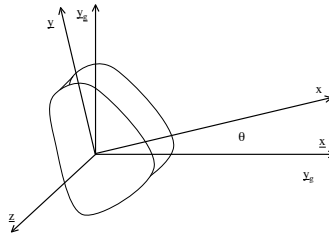


Figure 4.1 – Équilibrage d'un solide en rotation

### 4.5.1 Calculs préliminaires

Nous allons pour ce solide  $S$  écrire les équations de mouvement. Il faut donc calculer le torseur cinétique puis le torseur dynamique.

**Résultante cinétique** On a  $\underline{p}(S/R_g) = m\dot{\theta}\underline{y}$ .

**Moment cinétique** Comme le point  $O$  est un point fixe on peut écrire (équation 3.55) :

$$\underline{\sigma}(O, S/R_g) = J_{O,S}(\underline{\Omega}(S/R_g)) \quad (4.34)$$

Il nous faudra ensuite calculer le moment dynamique donc dériver ce moment cinétique. Le plus simple est donc d'exprimer l'opérateur d'inertie dans le repère  $R$  car ainsi on caractérise le solide (et non pas le solide et son mouvement) et on obtient des constantes géométriques.

On a  $\underline{\Omega}(S/R_g) = \dot{\theta}\underline{z}$ .

$$\underline{\sigma}(O, S/R_g) = J_{O,S}(\underline{\Omega}(S/R_g)) = -I_{xz}\dot{\theta}\underline{x} - I_{yz}\dot{\theta}\underline{y} - I_{Oz}\dot{\theta}\underline{z} \quad (4.35)$$

### 4.5.2 Principe fondamental de la dynamique

Nous allons supposer la liaison pivot parfaite située en un point  $A$  sur l'axe  $O, \underline{z}$ ; donc le torseur des actions de liaison exercées par le bâti  $B$  sur le solide est de la forme (on note  $\underline{R}$  la résultante et  $\underline{M}$  en  $O$  (le terme  $N$  - qui n'est pas une inconnue indépendante - est nul si on se trouve au point  $A$  mais le transport du torseur en  $O$  conduit à un torseur complet :

$$\{\mathcal{T}(B \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ L & M & N \end{array} \right\}_O \quad (4.36)$$

On suppose que les autres actions extérieures exercées sur le solide  $S$  sont celle de la gravité noté  $Mg$  et celle exercée par un moteur entraînant ce solide. On réduit cette action à un couple moteur noté  $C\underline{z}$ .

**Théorème de la résultante dynamique** On écrit :

$$m\underline{\Gamma}(G, R_g) = \underline{R} + M\underline{g} \quad (4.37)$$

On en déduit les trois équations scalaires par projection sur les axes du repère  $R$ .

$$\begin{aligned} X &= -am\dot{\theta}^2 \\ Y &= -am\ddot{\theta} \\ Z - mg &= 0 \end{aligned}$$

**Théorème du moment dynamique** On écrit :

$$\frac{d}{dt} [\underline{\sigma}(O, S/R_g)]_{R_g} = \frac{d}{dt} [\underline{J}_{O,S}(\underline{\Omega}(S/R_g))]_{R_g} = \underline{M} + C \underline{z} + \underline{M}(O, m \underline{g}) \quad (4.38)$$

Comme on a déjà calculé le moment cinétique, il suffit de le dériver par rapport au temps. On retrouve l'intérêt d'avoir fait apparaître les moments d'inertie du solide dans le repère  $R$  (termes constants).

$$\underline{\delta}(O, S/R_g) = -I_{xz}\ddot{\theta} \underline{x} - I_{xz}\dot{\theta}^2 \underline{y} - I_{yz}\ddot{\theta} \underline{y} + I_{yz}\dot{\theta}^2 \underline{x} + I_{Oz}\ddot{\theta} \underline{z} \quad (4.39)$$

Donc on trouve par projection les équations :

$$\begin{aligned} -I_{xz}\ddot{\theta} + I_{yz}\dot{\theta}^2 &= L + \underline{M}(O, m \underline{g}) \cdot \underline{x} \\ -I_{xz}\dot{\theta}^2 - I_{yz}\ddot{\theta} &= M + \underline{M}(O, m \underline{g}) \cdot \underline{y} \\ I_{Oz}\ddot{\theta} &= N + C \end{aligned} \quad (4.40)$$

Le bilan de ces six équations scalaires est que les inconnues sont les cinq inconnues du torseur d'actions mécanique de la liaison en A, l'évolution de  $\theta$  par l'intermédiaire des deux quantités indépendantes vitesse  $\dot{\theta}$  et accélération  $\ddot{\theta}$ . Les quantités  $C$  et moment de la gravité sont des données géométriques ou mécanique.

### 4.5.3 Équilibrage statique

Si nous souhaitons réaliser un équilibrage statique, c'est que nous allons considérer des mouvements avec une accélération nulle (ou très faible). Nous voulons que dans ce cas les actions de liaison ne dépendent pas du mouvement (ou de la position du solide). Nous pouvons le tester dans la pratique en faisant tourner lentement le solide et en mesurant l'intensité des actions de liaison dans différentes positions.

Les équations de la résultante 4.38 nous donnent  $\underline{R} = -M \underline{g}$  ce qui correspond bien à un vecteur constant.

Les équations de moment 4.40 nous imposent pour être satisfaites que le moment des actions de la gravité soit nul donc le point  $G$  doit être situé sur l'axe. De cette manière le vecteur  $\underline{M}$  des actions de liaison est constant : il est tel que  $\underline{M} = -C \underline{z}$ .



#### 4.5.4 Équilibrage dynamique

Nous allons considérer que le solide  $S$  est équilibré statiquement. Donc le centre de masse est situé sur l'axe de rotation. Le torseur des efforts extérieurs se résume donc à un couple. Nous allons examiner dans quelles conditions le solide est équilibré dynamiquement c'est à dire que les actions de liaisons seront indépendantes du mouvement. Les équations de la résultantes ne nous amènent aucune information puisque  $a = 0$ . Les équations de moment 4.40 nous imposent que les moments d'inertie  $I_{xz}$  et  $I_{yz}$  doivent être nuls ce qui signifie que l'axe de rotation doit être un des axes principaux d'inertie du système.

On retiendra donc que l'équilibrage dynamique est donné par la condition  $G$  sur l'axe de rotation (équilibrage statique) et axe de rotation confondu avec un axe principal d'inertie du solide (ce qui ne signifie pas forcément axe de symétrie matérielle).



## Chapitre 5

# Théorèmes énergétiques

### 5.1 Définitions générales

**DÉFINITION** La puissance instantanée  $P(t)$  du système de forces de résultante  $\underline{F}$  associée à la densité  $\underline{f}$  s'exerçant sur un système  $E$  (actions de contact d'un solide sur  $E$ , action de la gravité sur  $E$ ) est donnée par :

$$P(\overline{E} \rightarrow E/R)(t) = \int_{M \in E} \underline{f} \cdot \underline{V}(M \in E/R) dm \quad (5.1)$$

Remarque : cette quantité dépend du référentiel utilisé car il y a le vecteur vitesse qui intervient.

**Unité** : dans le système SI (Système International), l'unité est le Watt (W).  $1 W = 1 kg m^2 s^{-3}$ .

**THÉORÈME** La puissance des forces de pesanteur exercée sur un système quelconque est :

$$P(\underline{g} \rightarrow E/R)(t) = \underline{g} \cdot \underline{p}(E/R) \quad (5.2)$$

De façon générale la puissance de tout système de force de densité massique constante est simplement le produit scalaire de cette densité par la quantité de mouvement du système.

**DÉMONSTRATION** Soit  $\underline{f} = \underline{g} = \underline{cste}$ . Dans la puissance  $P(\underline{g}/R) = \int \underline{g} \cdot \underline{V}(M \in S/R) dm = \underline{g} \int \underline{V}(M/R) dm = \underline{g} \cdot \underline{p}(E/R)$ .

**THÉORÈME** La puissance des forces de Coriolis est toujours nulle.

**DÉMONSTRATION** On sait que (avec les notations utilisées dans le paragraphe consacré à l'accélération de Coriolis) :  $\underline{f}_C = -\underline{\gamma}_C = -2\underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{V}(M \in E/R)$ . Donc la puissance  $P_C = \int_E \underline{f}_C \cdot \underline{V}(M \in E/R) dm = - \int_E (2\underline{\Omega}(R_1/R) \wedge \underline{V}(M \in E/R)) \cdot \underline{V}(M \in E/R) dm$ . Le produit mixte est nul car deux vecteurs sont identiques.

### 5.2 Puissance des actions mécaniques exercées sur un solide

Dans le cas particulier d'un solide  $S$  en mouvement par rapport à  $R$  on a le torseur cinématique qui caractérise le mouvement de chaque point du solide. Reprenons l'expression de la puissance  $P$ .

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\Omega}(S/R) \\ \underline{V}(A \in S, R) \end{array} \right\}_A \quad (5.3)$$

$$P(S/R) = \int_S \underline{f}(M) \cdot \underline{V}(M \in S/R) dm = \int_S \underline{f}(M) \cdot (\underline{V}(A/R) + \underline{\Omega}(S/R) \wedge \underline{AM}) dm \quad (5.4)$$

On peut transformer cette intégrale en remarquant que les vecteurs  $\underline{V}(A/R)$  et  $\underline{\Omega}(S/R)$  ne dépendent pas de l'intégrale.

$$P(S/R) = \underline{V}(A/R) \cdot \int_S \underline{f}(M) dm + \underline{\Omega}(S/R) \cdot \int_S \underline{AM} \wedge \underline{f}(M) dm \quad (5.5)$$

On a donc en notant  $\underline{R}$  et  $\underline{M}$  les résultantes et moment des actions exercées par l'extérieur sur le solide  $S$  :

$$P(S/R) = \underline{V}(A/R) \cdot \underline{R} + \underline{\Omega}(S/R) \cdot \underline{M} \quad (5.6)$$

Nous retrouvons la définition du comment des deux torseurs cinématique et des actions mécaniques.

**THÉORÈME** Nous venons de démontrer que la puissance des actions mécaniques exercées sur un solide indéformable en mouvement par rapport à un repère  $R$  est le comoment du torseur cinématique et du torseur des actions mécaniques.

$$P(\overline{S} \rightarrow S/R) = \{\mathcal{V}(S/R)\} \cdot \{\mathcal{T}(\overline{S} \rightarrow S)\} \quad (5.7)$$

## 5.3 Puissance des actions mutuelles entre deux solides

### 5.3.1 Calcul

Dans ce cas particulier nous nous intéressons à deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en mouvement l'un par rapport à l'autre (et par rapport à un repère  $R$ ) et soumis à des actions mécaniques caractérisées par un des torseurs de liaisons déjà vu. Compte tenu de la définition de la puissance des actions mécaniques nous pouvons écrire pour le solide  $S_1$  que :

$$P(S_2 \rightarrow S_1/R) = \{C(S_1/R)\} \cdot \{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} \quad (5.8)$$

$$= (\{\mathcal{V}(S_1/S_2)\} + \{\mathcal{V}(S_2/R)\}) \cdot \{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} \quad (5.9)$$

Pour le solide  $S_2$  :

$$P(S_1 \rightarrow S_2/R) = \{\mathcal{V}(S_2/R)\} \cdot \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \quad (5.10)$$

$$= (\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} + \{\mathcal{V}(S_1/R)\}) \cdot \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \quad (5.11)$$

Si nous ajoutons terme à terme les égalités nous obtenons :

$$P(S_1 \rightarrow S_2/R) + P(S_2 \rightarrow S_1/R) = \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} \cdot \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \quad (5.12)$$

**THÉORÈME** Nous venons de montrer que la somme de la puissance des actions développées par  $S_2$  sur  $S_1$  et de  $S_1$  sur  $S_2$  qui définit la puissance des actions entre ces deux solides est indépendante du repère choisi pour la calculer et vaut :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} \cdot \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \quad (5.13)$$

### 5.3.2 Liaison parfaite

Une liaison entre deux solides est parfaite si la puissance des actions de liaison est nulle. Cela impose donc soit que la liaison soit ponctuelle est qu'il n'y n'ait pas de glissement (exactement comme le fait que tout fluide au repos est un fluide parfait ; pas très intéressant) soit que les torseurs cinématique et des actions mécaniques soient systématiquement de la forme donnée dans le paragraphe consacré aux liaisons.

## 5.4 Travail

On obtient le travail élémentaire à partir de la puissance  $P(t)$  multipliée par la durée élémentaire  $dt$ . On note  $\delta W = P(t)dt$ . Le travail s'obtient par intégration par rapport au temps. il dépend a priori du référentiel dans lequel on le calcule ainsi que de la trajectoire de tous les points du système.

Unité : dans le système SI c'est le Joule ( $J$ ).  $1J = 1kg\ m^2\ s^{-2}$ .

## 5.5 Énergie potentielle

### 5.5.1 Énergie potentielle et densité massique d'énergie potentielle

Dans de nombreux cas, la densité massique de forces peut s'exprimer comme gradient (dérivée spatiale) d'une fonction.

**DÉFINITION** La densité massique d'énergie potentielle notée  $e(M, t)$  est telle que :

$$\underline{f}(M, t) = - \underline{\text{grad}} e(M, t) \quad (5.14)$$

#### Remarques

1. L'opérateur  $\underline{\text{grad}} e$  correspond au vecteur formé en coordonnées cartésiennes par les dérivées partielles par rapport aux trois coordonnées  $x, y, z$  soit :  $\frac{\partial e}{\partial x} \frac{\partial e}{\partial y} \frac{\partial e}{\partial z}$ .
2. Le signe négatif est affaire de convention.
3. Dans le cas général aussi bien  $\underline{f}$  que  $e$  dépendent du temps. Dans le cas contraire on a affaire à un **champ de forces stationnaires**.

Dans ce dernier cas on peut calculer le travail élémentaire  $\delta W$  associé aux forces  $\underline{f}$ .

$$\delta W = \left( \int_M \underline{f}(M) \cdot \underline{V}(M) dm \right) dt = - \left( \int \underline{\text{grad}} e \cdot \underline{V}(M) dm \right) dt \quad (5.15)$$

sous réserve de pouvoir permuter les opérateurs intégrale et  $dt$  (conservation de la masse) on a alors :

$$\delta W = - \int (\underline{\text{grad}} e(M) \cdot \underline{V}(M) dt) dm = - \int (\underline{\text{grad}} e(M) \cdot d\underline{l}) dm = - \int de(M) dm \quad (5.16)$$

On en déduit donc que :

$$\delta W = - \int_M (e(A(t+dt)) - e(A(t))) dm = - \int_M e(A(t+dt)) dm + \int_M e(A(t)) dm \quad (5.17)$$

On peut l'écrire :

$$\delta W = -(E(t+dt) - E(t)) = -dE \quad (5.18)$$

On appelle  $E$  l'**énergie potentielle du système** associée aux forces de densité massique  $\underline{f}$ .

Attention : ce n'est pas parce que la position du point  $M$  dépend du temps que  $E$  dépend explicitement du temps. En fait  $E$  ne dépend pas explicitement du temps. Elle reste dépendante de la position moyenne du système c'est à dire de la position de son centre de masse.

**Propriété.** On note  $\delta W$  pour signifier que dans le cas général il n'existe pas d'énergie potentielle. Dans le cas contraire, si il existe une énergie potentielle, alors  $\delta W$  est une différentielle totale de la fonction  $-E$  et  $W$  ne dépend pas des détails du mouvement mais seulement du système entre les instants initiaux et finaux. Si cette énergie potentielle vérifie la relation  $\underline{F} = -\underline{\text{grad}}E$  alors on dit que la résultante des forces dérive d'une énergie potentielle.

### 5.5.2 Exemple : énergie potentielle de la pesanteur

On considère le champ de pesanteur  $\underline{g}$  (constant sur le domaine d'intégration) et un repère centré à la surface de la terre (normale  $\underline{z}$  ascendante). Calculez l'énergie potentielle des actions de pesanteur sur un solide  $S$  dont le centre de masse est situé à l'altitude  $z_G$ .

La puissance associée à la densité massique  $\underline{g}$  est :

$$P(\underline{g} \rightarrow /R) = \int_M \underline{g} \cdot \underline{V}(M \in S/R) dm \quad (5.19)$$

En utilisant la définition du centre de masse et le fait que la pesanteur est constante pour l'intégration :

$$P(\underline{g} \rightarrow /R) = \underline{g} \cdot m \underline{V}(G \in S/R) = -mg \underline{z} \cdot \underline{V}(G/R) \quad (5.20)$$

Comme par définition du vecteur vitesse on a :

$$P(\underline{g} \rightarrow /R) = -mg \underline{z} \cdot \frac{d}{dt}(\underline{OG})_R \quad (5.21)$$

et que le vecteur  $\underline{z}$  est constant :

$$P(\underline{g} \rightarrow /R) = -mg \frac{d}{dt}(\underline{OG} \cdot \underline{z})_R = -mg \frac{d}{dt}(z_G) \quad (5.22)$$

On appelle  $mgz_G$  l'énergie potentielle de pesanteur définie à une constante près supposée nulle dans ce cas. On a :

$$W(\underline{g} \rightarrow /R) = -mg(z_f - z_i) \quad (5.23)$$

### 5.5.3 Énergie potentielle des forces d'inertie d'entraînement

#### 5.5.3.1 Système en translation

Dans le cas d'un système en translation quelconque (ni rectiligne ni uniforme) on a un vecteur rotation  $\underline{\Omega}(S/R)$  nul. On choisit  $R$  comme référentiel absolu (d'origine  $O$ ) et  $R'$  associé à  $S$  comme référentiel relatif (d'origine  $O$ ). On sait que les efforts qui correspondent à l'accélération d'entraînement sont donnés par :  $\underline{F}_e = -m \underline{\Gamma}(O' \in R'/R)$ .

La densité massique  $\underline{f}_e$  est :

$$\underline{f}_e = -\underline{\Gamma}(O'/R) = -\underline{\text{grad}}(\underline{\Gamma}(O'/R) \cdot \underline{r}) \quad (5.24)$$

On en déduit que la densité d'énergie  $e_e$  vaut  $e_e = \underline{\Gamma}(O'/R) \cdot \underline{r}$ .

On peut l'interpréter de deux manières :

Référentiel fixe  $R$  :  $e_e(M/R') = \underline{\Gamma}(O'/R) \cdot \underline{OM}$ .

Référentiel mobile  $R'$  :  $e_e(M/R) = \underline{\Gamma}(O'/R) \cdot \underline{O'M}$ .

Dans les écritures précédentes on voit que le terme  $-\underline{\Gamma}(O')$  joue le même rôle que  $\underline{g}$  dans l'exemple de la pesanteur. On a donc :

Référentiel fixe  $R$  :  $E_e(S/R') = m \underline{\Gamma}(O'/R) \cdot \underline{OG}$ .

Référentiel mobile  $R'$  :  $E_e(M/R) = m \underline{\Gamma}(O'/R) \cdot \underline{O'G}$ .

#### 5.5.3.2 Système en rotation autour d'un axe fixe

On a un solide  $S$  en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ . On sait que dans ce cas l'accélération d'entraînement s'écrit (1.57) :

$$\underline{\Gamma}_e(M \in S/R) = \underline{\Omega}(R'/R) \wedge (\underline{\Omega}(R'/R) \wedge \underline{O'M}) \quad (5.25)$$

avec le point  $O'$  appartenant à l'axe de rotation. On a supposé une vitesse de rotation constante. Compte tenu de ces hypothèses on a :

$$\underline{f}_e = -\omega_e \underline{HM} \quad (5.26)$$

avec  $H$  projection orthogonale de  $M$  sur l'axe de rotation (car  $\omega_e \wedge \underline{O'H} = \underline{0}$ ).

Donc on a :

$$\delta W = \left( - \int_M \omega_e \underline{HM} \cdot \underline{V}(M/R) dm \right) dt = -\omega_e^2 \left( \int_M \underline{HM} \cdot \underline{V}(M/R) dt \right) dm. \quad (5.27)$$

On a le point  $H$  sur l'axe  $\Delta$  et un mouvement de rotation autour de  $\Delta$  (pas de translation telle que  $\underline{V}(H/R) \neq \underline{0}$ ). Donc :

$$\underline{V}(M/R) = \underline{V}(M/R) - \underline{V}(H/R) = \frac{d}{dt}(\underline{HM})_R \quad (5.28)$$

On reporte dans l'expression du travail élémentaire pour trouver :

$$\delta W_e(S/R) = -\omega_e^2 \int_M \underline{HM} . d \underline{HM} dm = d \left( -\frac{\omega_e^2}{2} \int_M \underline{HM}^2 dm \right) = d \left( -\frac{\omega_e^2}{2} I_\Delta \right) \quad (5.29)$$

$$E_e(S/R) = -\frac{1}{2} I_\Delta \omega_e^2 + \text{constante} \quad (5.30)$$

## 5.6 Théorème de l'énergie cinétique

Ce théorème est la vision énergétique du principe fondamental de la dynamique.

### 5.6.1 Application à un solide

Nous rappelons que le PFD appliqué à un solide  $S$  de masse  $m$  dans son mouvement par rapport à un référentiel galiléen s'écrit :

$$\{\mathcal{D}(A, S/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S)\}_A \quad \forall A \quad (5.31)$$

Nous pouvons multiplier (co moment) chaque membre de l'égalité par le torseur cinématique de  $S$  par rapport à  $R_g$ .

$$\{\mathcal{V}(A, S/R_g)\} . \{\mathcal{D}(A, S/R_g)\} = \{\mathcal{V}(A, S/R_g)\} . \{\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S)\}_A \quad (5.32)$$

Le membre de droite représente la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide  $S$ . On la note :  $P(\bar{S} \rightarrow S/R_g)$ .

Nous allons regarder ce que représente le terme de gauche. Pour cela on écrit :

$$G = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\forall M \in S} \underline{\Gamma}(M \in S/R) dm \\ \int_{\forall M \in S} \underline{AM} \wedge \underline{\Gamma}(M \in S/R) dm \end{array} \right\}_A \left\{ \begin{array}{l} \underline{\Omega}(S/R_g) \\ \underline{V}(A \in S/R_g) \end{array} \right\}_A \quad (5.33)$$

Si on applique la définition du comoment de deux torseurs on trouve :

$$G = \left( \underline{V}(A \in S/R_g) . \int_{\forall M \in S} \underline{\Gamma}(M \in S/R) dm \right) + \left( \underline{\Omega}(S/R_g) . \int_{\forall M \in S} \underline{AM} \wedge \underline{\Gamma}(M \in S/R) dm \right) \quad (5.34)$$

Comme  $\underline{V}(A)$  et  $\underline{\Omega}(S/R)$  ne dépendent pas de l'intégration, on peut les mettre dans le signe intégral :

$$G = \int_{\forall M \in S} \underline{V}(A \in S/R_g) . \underline{\Gamma}(M \in S/R_g) dm + \int_{\forall M \in S} \underline{\Omega}(S/R_g) . \underline{AM} \wedge \underline{\Gamma}(M \in S/R_g) dm \quad (5.35)$$

Mais on a l'égalité :

$$\underline{V}(A \in S/R_g) = \underline{V}(M \in S/R_g) + \underline{AM} \wedge \underline{\Omega}(S/R_g) \quad (5.36)$$



On reporte cette expression dans l'équation obtenue :

$$G = \int_{\forall M \in S} \left( \left( \underline{V}(M \in S/R_g) + \underline{AM} \wedge \underline{\Omega}(S/R_g) \right) \cdot \underline{\Gamma}(M \in S/R_g) + \underline{\Omega}(S/R_g) \cdot \underline{AM} \wedge \underline{\Gamma}(M \in S/R_g) \right) dm \quad (5.37)$$

On développe et on trouve après simplification (les deux produits mixtes s'annulent) :

$$G = \int_{\forall M \in S} \underline{V}(M \in S/R_g) \cdot \underline{\Gamma}(M \in S/R_g) dm \quad (5.38)$$

Comme par définition de l'accélération on a :

$$\underline{\Gamma}(M \in S/R_g) = \frac{d}{dt} \underline{V}(M \in S/R_g)_{R_g} \quad (5.39)$$

L'expression de  $G$  n'est rien d'autre que la dérivée temporelle de l'énergie cinétique calculée par rapport au repère galiléen ; on parle alors d'énergie cinétique galiléenne.

$$\boxed{\frac{d}{dt} T(S/R_g) = P(\bar{S} \rightarrow S/R_g)} \quad (5.40)$$

**THÉORÈME** La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport au repère galiléen  $R_g$  est égale à la puissance galiléenne des actions extérieures exercées sur lui.

### 5.6.2 Application à un ensemble de solides

On considère un ensemble  $E$  de  $n$  solides  $S_i$  en mouvement par rapport à un repère galiléen. On applique le théorème de l'énergie cinétique à chaque solide :

$$\frac{d}{dt} T(S_i/R_g) = P(\bar{S}_i \rightarrow S_i/R_g) \quad (5.41)$$

On ajoute membre à membre les expressions pour trouver :

$$\frac{d}{dt} T(E/R_g) = \sum_{i=1}^n P(\bar{S}_i \rightarrow S_i/R_g) \quad (5.42)$$

On a d'un côté l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble des solides  $S_i$  et de l'autre la somme des puissances galiléenne des efforts extérieurs appliqués à chaque solide. Si on ré-écrit de dernier terme on constate qu'il se décompose en deux termes : la puissance galiléenne des efforts extérieurs à  $E$  appliqués sur  $E$  et la puissance des interefforts entre solides.

$$\frac{d}{dt} T(E/R_g) = P(\bar{E} \rightarrow E/R_g) + P(S_i \leftrightarrow S_j) \quad (5.43)$$

**THÉORÈME** La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble  $E$  de solides  $S_i$  dans son mouvement par rapport au repère galiléen  $R_g$  est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions extérieures exercées sur lui et de la puissance des inter efforts entre solides.

Remarques :

1. À la différence du PFD, les actions intérieures interviennent ici par leur puissance.
2. Dans le cas de liaisons parfaites, la puissance des inter efforts est nulle.

3. Le théorème de l'énergie cinétique ne fournit pas d'équation indépendante de celles obtenues par le PFD. Par contre elle donne souvent plus directement une des équations (de type équation de mouvement).

## 5.7 Intégrale première de l'énergie cinétique

### 5.7.1 Énergie mécanique d'un système

Supposons dans cette partie que certains des efforts extérieurs (gravité) dérivent d'un potentiel  $E_{p/ext}$  et que les autres n'en dérivent pas. On a :

$$P_{ext} = -\frac{d}{dt}E_{p/ext} + P'_{ext} \quad (5.44)$$

Le théorème de l'énergie cinétique fait apparaître la puissance des efforts intérieurs (dans le cas de solides indéformables, elle se limite à la puissance des interefforts). Supposons de la même manière la décomposition :

$$P_{int} = -\frac{d}{dt}E_{p/int} + P'_{int} \quad (5.45)$$

Je rappelle que la notion d'énergie potentielles  $E$  est associée à une grandeur ne dépendant que des coordonnées d'espace mais pas explicitement du temps. si il en était autrement, le travail sur une trajectoire fermée ne serait pas nul puisque on ne revient pas au même point au même instant. Si le temps intervient alors le travail est non nul.

Compte tenu des deux équations précédentes on a :

$$\frac{d}{dt}T = -\frac{d}{dt}E_{p/int} + P'_{int} - \frac{d}{dt}E_{p/int} + P'_{int} \quad (5.46)$$

$$\frac{d}{dt}T + \frac{d}{dt}E_{p/int} + \frac{d}{dt}E_{p/int} = P'_{ext} + P'_{int} \quad (5.47)$$

La quantité  $T + E_{p/ext} + E_{p/int}$  s'appelle l'énergie mécanique  $E_m$  du système.

Cas particulier des forces conservatives (dérivant d'un potentiel). Dans ce cas (liaisons parfaites, actions de la pesanteur), les termes  $P'$  sont nuls et on peut donc écrire que l'énergie mécanique du système se conserve. Cette notion est à rapprocher de l'énergie interne de la thermodynamique.

### 5.7.2 Intégrale première

**DÉFINITION** On appelle **équation du mouvement** de tout système matériel dont la configuration est caractérisée par un certains nombre de paramètres, toute relation entre les paramètres et leurs dérivées par rapport au temps.

**DÉFINITION** On appelle **intégrale première du mouvement** d'un système, toute équation de mouvement dans laquelle n'interviennent par les dérivées par rapport au temps d'ordre supérieur à un des paramètres. si on note  $q_i$  les variables qui caractérisent le système ( $\theta, \phi, x, y, \dots$ ) et  $\dot{q}_i$  leur dérivée cela se traduit par une relation du type :  $f(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots) = 0$  pour tout mouvement du système étudié.

# Bibliographie

- [1] PERES, Mécanique générale, quatrième édition, MASSON, 1994.
- [2] AGATI, BREMONT et DELVILLE, Mécanique du solide (applications industrielles), DUNOD 1986.
- [3] AGATI, LEROUGE et ROSSETTO, Liaisons, mécanismes et assemblages, DUNOD 1994.
- [4] GRANJON L., [http ://laurent.granjon.free.fr/meca\\_solide/](http://laurent.granjon.free.fr/meca_solide/) \*\*Les sites web ont été consultés en 2004.
- [5] RIMBERT F., [http ://f.rimbert.free.fr/meca/meca.htm](http://f.rimbert.free.fr/meca/meca.htm).
- [6] BERTIN, FAROUX, RENAULT, Cours de physique, Mécanique 2, Classes préparatoires et premier cycle universitaire, DUNOD 1996.
- [7] [http ://serge.bertorello.free.fr/mecano/entraint.html](http://serge.bertorello.free.fr/mecano/entraint.html).
- [8] [http ://www.librecours.org](http://www.librecours.org).
- [9] DEVEL, Université de Franche-Comté, DEUG SM-SP 2 et STPI 2, Cours de Mécanique du Solide.