Chapitre 4

Dynamique du point matériel

Sommaire

Dans les chapitres précédents, nous ne nous sommes intéressés qu'aux aspects cinématiques des mouvements. Nous avons alors étudié les propriétés des différents vecteurs (position, vitesse, accélération) qui interviennent dans la description des mouvements sans nous préoccuper de leurs causes.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser justement aux causes qui produisent les mouvements. *La dynamique est l'étude de la relation entre le mouvement d'un corps et les causes qui le produisent*. Le chapitre est composé comme suit : la section 4.1 est consacrée au concept de forces. Nous y étudierons les deux types de forces : les forces de contact et les forces à distance. Dans la section 4.2, nous énonçons les lois qui régissent la dynamique du point matériel, à savoir les lois de newton. La section 4.3 est consacrée à l'étude du principe fondamental de la dynamique dans les référentiels non galiléens. nous illustrerons, enfin dans la section 4.5, ces principes par quelques applications.

4.1 Notion de force

4.1.1 Définition

Un corps peut être mis en mouvement ou, s'il est déjà animé d'un mouvement, ce dernier peut être modifié. Il devient important de rechercher les causes de la modification de l'état ou de la trajectoire d'un corps.

Définition 4.1.1 *On appelle* **force** *la grandeur vectorielle décrivant l'interaction capable de modifier le mouvement d'un corps ou de mettre en mouvement un corps initialement au repos.*

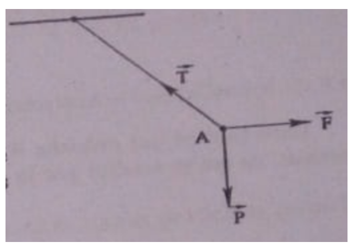
La force est une grandeur vectorielle caractérisée par une direction, un sens et une intensité. L'unité **SI** de la force est le Newton (N). On distingue deux grandes catégories de forces de contact et les forces à distance.

4.1.2 Les forces de contact

Elles n'interviennent du'en présence d'un contact du corps avec un solide ou un fluide. Dans ce qui suit, décrivons quelques exemples.

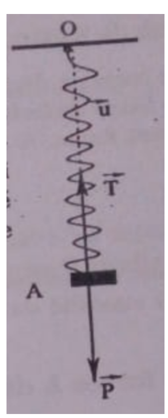
Tension d'un fil

Un fil de masse négligeable prend une forme rectiligne dès qu'il est tendu. On observe que la tension est la même en tout point du fil. La force exercée par un fil tendu sur un objet auquel il est attaché est équivalente à une tension $\overrightarrow{T}$ appliquée au point d'attache, dirigée le long du fil, orienté de l'objet vers le fil. Son intensité dépend des autres forces appliquées.



Tension d'un ressort

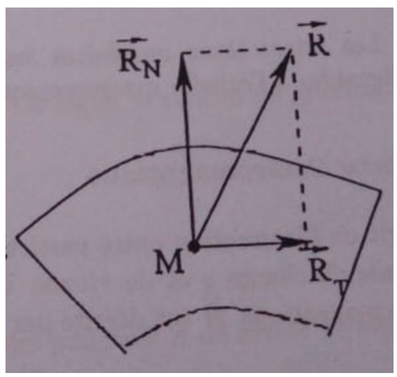
Considérons un ressort parfaitement élastique, c'est-à-dire que sa masse est négligeable et qu'après élongation ou compression, il reprend sa forme et sa longueur initiale. La tension que le ressort exerce sur un objet qui lui est accroché s'applique au point d'attache, le long du ressort, dans le sens opposé à son allongement (qui pourra être un réel allongement ou une compression), son intensité est proportionnelle à l'allongement. Cette tension encore appelée *force de rappel* du ressort est donnée par :



$$\overrightarrow{F} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u}$$

où :
• k en $(N.m^{-1})$ est la constante de raideur du ressort ;
• l_0 est la longueur à vide du ressort ;
• l est la longueur du ressort à un instant t ;
• $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire dirigé dans l'axe du ressort et orienté depuis son point d'attache jusqu'à son extrémité.

Réaction d'un support solide
Un point matériel peut être astreint à se déplacer le long d'une surface ou d'une courbe. Son nombre de degré de liberté est alors réduit, on parle alors de *point lié*. Le support exerce alors une force de contact dite une réaction $\overrightarrow{R}$ que l'on peut décomposer en la somme :



• d'une force $\overrightarrow{R}_N$ normale au support ;
• et d'une force tangentielle $\overrightarrow{R}_T$ dite force de frottement appartenant au plan tangent au support.

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{R}_T$$

Les propriétés des deux composantes sont :
• en l'absence de frottement, la réaction est normale au support :

$$\overrightarrow{R}_T = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_N$$

• en présence d'un frottement, quand il y a un mouvement, la force de frottement $\overrightarrow{R}_T$ a la même direction et est de sens opposé à la vitesse du point matériel. Son intensité est proportionnelle à celle de la réaction normale $\overrightarrow{R}_N$:

$$R_T = kR_N$$

où :
k est le coefficient de frottement dynamique.

Dans tout ce qui précède, il faut que le contact reste établi donc qu'il existe une réaction normale, ce qui se traduit par la condition suivante :

$$R_N > 0$$

Dès que la composante normale de la réaction s'annule ($R_N > 0$), le contact cesse.

Forces de frottement fluide

Lorsqu'un corps se déplace dans un fluide (liquide ou gaz), il est souvent nécessaire de tenir compte de forces de frottement entre le corps et le milieu dans lequel il évolue. On parle de force de *frottement fluide*. A de faible vitesse, cette force est proportionnelle à la vitesse et de sens opposé :

$$\overrightarrow{F} = -\kappa\eta\overrightarrow{v}$$

où :
κ (en m) est un coefficient lié à la forme du corps et η (en $Kg.m^{-1}.s^{-1}$ ou en $Pa.s^{-1}$) est le coefficient de viscosité du fluide considéré.

4.1.3 Les forces à distance

Elles ne nécessitent pas un contact. On distingue actuellement quatre types d'interactions distance :
- Les interactions électromagnétiques ;
- Les interactions gravitationnelles ;
- Les interactions fortes ;
- Les interactions faibles.

Les interactions nucléaires forte et faible n'existent qu'à l'échelle subatomique et sont négligeables à l'échelle macroscopique. Dans la suite, nous n'en tiendrons pas compte.

1. Force électromagnétique

Il s'agit de l'interaction entre particules chargées. Dans un référentiel $\mathcal{R}$, la force subie par une particule de charge q et de vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un milieu où règne un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est décrite par la force de Lorentz :

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

Cette force traduit les interactions entre particules-charges dans la mesure où les champs électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$ sont crées par des particules chargées, immobiles ou en mouvement, ces champs dépendant à priori du point et du référentiel.
Dans le cas particulier de l'électrostatique où on ne s'intéresse qu'à des particules chargées au repos, la force de Lorentz prend la forme la plus simple de la loi de coulomb. La force subie par une charge q_2 placée en M_2 du fait de la présence en M_1 d'une charge q_1 est :

$$\overrightarrow{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2 \overrightarrow{M_1M_2}}{(M_1M_2)^3}$$

2. Force gravitationnelle

Il s'agit d'une autre force à distance qui intervient cette fois entre toutes particules possédant une masse dite *gravitationnelle*.

Soient deux objets ponctuels,
M_1 de masse m_1 et M_2 de masse m_2 situés à la distance $r = M_1M_2$ l'un de l'autre. Selon la loi d'attraction gravitationnelle de Newton, ces deux objets s'attirent :

- M_1 exerce la force d'attraction $\overrightarrow{F}_{1\to 2}$ sur M_2 ;
- M_2 exerce la force d'attraction $\overrightarrow{F}_{2\to 1}$ sur M_1.

$\overrightarrow{F}_{1\to 2}$ et $\overrightarrow{F}_{2\to 1}$ sont les forces dites d'attraction gravitationnelles entre les objets M_1 et M_2. Elles sont proportionnelles aux produits des masses et inversement proportionnelle au carré de leur distance. Leurs expressions vectorielles s'écrivent :

$$\overrightarrow{F}_{1\to 2} = -\overrightarrow{F}_{2\to 1} = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\,\overrightarrow{u}_{1\to 2} \tag{4.1}$$

○ $\overrightarrow{u}_{1\to 2} = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{r}$ est le vecteur unitaire dirigé de M_1 vers M_2 et $G = 6,67.10^{-11}N.m^2.Kg^{-2}$ est la constante de gravitation universelle.

Le champ de gravitation

Le champs de gravitation $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ en un point de l'espace est égale au quotient de la force de gravitation $\overrightarrow{F}$ subie par un objet ponctuel en ce point, par la masse m de l'objet.

$$\overrightarrow{\mathcal{G}} = \frac{\overrightarrow{F}}{m}$$

Un objet ponctuel de masse m placé en un point de l'espace où règne le champ de gravitation $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ subit la force de gravitation :

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\mathcal{G}}$$

Le champ de gravitation s'exprime en $N.Kg^{-1}$

Le champ de gravitation $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ crée en un point P par un objet ponctuel A de masse M s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathcal{G}} = -G\,\frac{M}{r^2}\,\overrightarrow{u}_{AP}$$

avec $r = AP$ et $\overrightarrow{u}_{AP} = \dfrac{\overrightarrow{AP}}{AP}$

On montre que le champ de gravitation d'un objet à répartition de masse sphérique est la même que celui d'un objet ponctuel de même masse qui serait placé au centre de l'objet.

Le champ de pesanteur

Le poids $\overrightarrow{P}$ d'un corps est l'attraction que la terre exerce sur ce corps. Le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ en un point est défini par $\overrightarrow{g} = \dfrac{\overrightarrow{P}}{m}$ avec $\overrightarrow{P}$ le poids de l'objet de masse m placé en ce point.

Si on néglige la rotation de la Terre autour de son axe, on peut considérer que le champ de pesanteur terrestre $\overrightarrow{g}$ et le champ de gravitation $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ de la Terre sont confondus :

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{\mathcal{G}} = -G\,\frac{M_T}{r^2}\,\overrightarrow{u}_r$$

∘ M_T est la masse de la Terre, $\overrightarrow{u}_r$ le vecteur unitaire de la direction $\overrightarrow{OM}$, toute la masse de la Terre étant supposée concentrée en son centre O.

Si l'on introduit l'altitude h du point M, $r = R_T + h$, R_T étant le rayon de la Terre $(R_T \approx 6400Km)$:

$$\overrightarrow{g} = -G\,\frac{M_T}{(R_T+h)^2}\,\overrightarrow{u}_r$$

Au niveau du sol, on a :

$$\overrightarrow{g_0} = -G\,\frac{M_T}{R_T^2}\,\overrightarrow{u}_r$$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{g} = -G\,\frac{M_T}{R_T^2}\,\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}\,\overrightarrow{u}_r = \overrightarrow{g}_0\,\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$$

On a aussi

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{g}_0\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-2}$$

Si h est négligeable devant R_T, on peut écrire

$$\boxed{\overrightarrow{g} = \overrightarrow{g}_0\left(1-\frac{2h}{R_T}\right)}$$

4.2 Les principes fondamentaux de la dynamique du point matériel

Il s'agit des lois de Newton qui constituent la base de la dynamique classique[1]. Ce sont des principes au sens où ces lois ne sont pas démontrées. Elles sont valables tant que l'expérience ne contredit pas les conséquences qu'on peut déduire théoriquement de ces postulats.

4.2.1 Principe de l'inertie : 1^{re} loi de Newton

Le principe de l'inertie encore désigné sous le nom de 1^{re} loi de Newton s'énonce comme suit :

Il existe des référentiels privilégiés appelés **référentiels Galiléens** dans lesquels un point matériel isolé, c'est-à-dire un point sur lequel n'agit aucune force, est soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme (si sa vitesse initiale n'est pas nulle), soit au repos (si sa vitesse initiale est nulle).

Ce principe se traduit formellement par :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \quad\Longrightarrow\quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{cste}} \tag{4.2}$$

Le principe d'inertie formule l'existence de référentiels particuliers : les référentiels Galiléens dont il fournit une définition à partir d'un point matériel isolé.

Soit un point matériel M isolé de masse constante m, c'est-à-dire libre de toutes interactions. La vitesse du mobile isolé dans un référentiel Galiléen $(\mathcal{R})$ est, selon la définition, indépendante du temps. Considérons deux référentiels Galiléens $(\mathcal{R}_1)$ et $(\mathcal{R}_2)$. Soient $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}(M/\mathcal{R}_1)$ et $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{v}(M/\mathcal{R}_2)$ les vitesses de M par rapport $(\mathcal{R}_1)$ et $(\mathcal{R}_2)$, respectivement. Soit $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{v}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$ la vitesse de $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_1$. Selon la loi de composition des vitesses, on a :

$$\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{V}$$

Le point M étant isolé, $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ étant galiléens, on a :

$$\frac{d\overrightarrow{v}_1}{dt}|_{\mathcal{R}_1} - \frac{d\overrightarrow{v}_2}{dt}|_{\mathcal{R}_2} = \overrightarrow{0}$$

c'est-à-dire que $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ sont indépendantes du temps. Il s'en suit que la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{V}$ est uniforme, donc $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont en translation uniforme l'un par rapport à l'autre.

On conclut que les **référentiels Galiléens sont en translation uniforme l'un par rapport à l'autre.**

Dans la pratique, on définit les référentiels Galiléens comme des référentiels en translation uniforme par rapport au référentiel de Copernic.

4.2.2 Principe fondamental de la dynamique : 2^{me} loi de Newton

Ayant admis l'existence d'un référentiel galiléen, nous nous plaçons maintenant dans ce référentiel.

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement est égale à la résultante des forces s'exerçant sur la point matériel.

Formellement cela se traduit par :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{p}(M)}{dt} = \overrightarrow{F}} \tag{4.3}$$

où $\overrightarrow{F}$ est la résultante des forces s'exerçant sur le point matériel. Le principe fondamental de la dynamique $(P\ F\ D)$ est également appelé *relation fondamentale dynamique ou théorème de la quantité de mouvement*.

Dans le cas particulier d'un système à masse constante, on a :

$$\overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{p}(M)}{dt} = \frac{d\, m\overrightarrow{v}(M)}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{v}(M)}{dt}$$

Le $P\ F\ D$ s'écrit alors :

$$\boxed{m\overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{F}} \tag{4.4}$$

4.2.3 Principe de l'action et de la réaction : 3^{me} loi de Newton

Le principe de l'action et de la réaction connu encore sous le nom de 3^{me} loi de Newton s'énonce de la manière suivante :

> Si deux points A et B sont en interaction, la force $\overrightarrow{f}_{A\to B}$, qu'exerce A sur B est opposée à là force $\overrightarrow{f}_{B\to A}$, qu'exerce B sur A :
> $$\overrightarrow{f}_{A\to B} = -\overrightarrow{f}_{B\to A}$$

Forces Newtoniennes

Les forces qui obéissent la 3^{me} loi de Newton sont appelées des forces Newtoniennes. C'est le cas des forces *gravitationnelles* et *coulombiennes* dont l'expression du module est de la forme :

$$F = -\frac{k}{r^2} \qquad k = Cste\ positive$$

4.3 Principes fondamentaux de la dynamique dans un référentiel non galiléen

Soit un point matériel M de masse constante m sur lequel s'exercent des forces de résultante $\overrightarrow{F}$. Par rapport à un référentiel **Galiléen** $\mathcal{R}$ considéré comme absolu, le PFD s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}_a$$

∘ $\overrightarrow{a}_a$ est l'accélération absolue.

Soit un référentiel **non Galiléen** $\mathcal{R}'$ par rapport auquel le mouvement du point a l'accélération relative $\overrightarrow{a}_r$. Soient $\overrightarrow{a}_e$ et $\overrightarrow{a}_c$ les accélérations d'entraînement et de Coriolis du mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

La loi de composition des accélérations donne :

$$\overrightarrow{a}_a(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{a}_r(M/\mathcal{R}') + \overrightarrow{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) + \overrightarrow{a}_c$$

Il vient

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}_r + m\overrightarrow{a}_e + m\overrightarrow{a}_c$$

Soit

$$\boxed{m\overrightarrow{a}_r = \overrightarrow{F} - m\overrightarrow{a}_e - m\overrightarrow{a}_c} \tag{4.5}$$

Cette relation constitue le PFD dans un référentiel non galiléen.

Les forces $\overrightarrow{F}_e = -m\overrightarrow{a}_e$ et $\overrightarrow{F}_c = -m\overrightarrow{a}_c$ sont appelées respectivement, forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis. Le PFD dans $\mathcal{R}'$ s'écrit alors :

$$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_e + \overrightarrow{F}_c = m\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}')$$

Le PFD dans un référentiel non galiléen conserve la forme primitive quand on l'applique dans un référentiel galiléen à condition de rajouter aux forces réellement appliquées les forces d'inertie.

4.4 Équilibre d'une particule dans un référentiel

Considérons une particule M de coordonnées x, y, z dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

Théorème 4.4.1 : *Une condition nécessaire et suffisante d'équilibre de la particule dans $\mathcal{R}$ est que la force $\overrightarrow{f}$ qui lui est appliquée soit nulle tout instant et que sa vitesse initiale soit nulle.*

Preuve

• La condition est nécessaire :

Si la particule est en équilibre, alors :

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} & \forall t \\ \overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{0} & \forall t \\ \overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{0} & \forall t \end{array}$$

d'où $\overrightarrow{f} = m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$

• La condition est suffisante :

Si $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$, on a : $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ qui entraîne $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{C}$. Le vecteur constant $\overrightarrow{C}$ est déterminé par les conditions initiales :

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{0} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} = constante$$

4.4.1 Conditions d'équilibres

Cas d'un point matériel libre

Les seules forces que peut subir une particule libre[2] sont des forces à distance et non des forces de réaction. Il résulte du théorème 4.4.1, que le point matériel est en équilibre si la résultante des forces qui s'exercent sur lui est nulle et qu'en plus la vitesse initiale soit nulle.

Cas d'un point matériel lié

Ce point est astreint à se déplacer sur une courbe ou sur une surface.

La liaison peut être **unilatérale** et, dans ce cas, le point peut éventuellement quitter son support, ou **bilatérale** et, dans ce cas, le point ne peut pas quitter son support.

La liaison peut être **sans frottement** et, dans ce cas la réaction exercée par le support est perpendiculaire à celui-ci, ou **avec frottement** et, dans ce cas, la réaction exerce par le support possède une composante suivant le support opposée au mouvement.

Soit $\overrightarrow{f}$ la résultante des forces autres que les forces de réaction et soit $\overrightarrow{R}$ la résultante des forces de réaction. Le PFD s'écrit :

$$\overrightarrow{f} + \overrightarrow{R} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = m\overrightarrow{a}$$

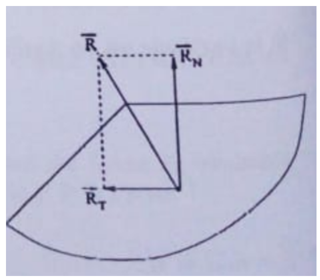
Pour que le point soit en équilibre, il faut donc :

$$\overrightarrow{f} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{R} = -\overrightarrow{f}$$

Cette condition est nécessaire mais non suffisante. En effet, il faut de plus que la vitesse du point, à l'instant où $\overrightarrow{f} + \overrightarrow{R}$ est nulle, soit nulle.

Supposons que la liaison soit avec un frottement (voir figure ci-contre).
La réaction peut être alors décomposée en deux composantes :
- $\overrightarrow{R}_N$ suivant la normale à la courbe ou à la surface ;
- $\overrightarrow{R}_N$ suivant la tangente à la courbe ou à la surface.

Le coefficient k définit par $R_T = kR_N$ est appelé **coefficient de frottement**.



En décomposant de même $\overrightarrow{f}$ en $\overrightarrow{f}_N$ et $\overrightarrow{f}_T$, la condition d'équilibre s'écrit en normes :

$$\begin{cases} R_T = f_T \\ R_N = f_N \end{cases}$$

4.4.2 Stabilité d'un équilibre

Un équilibre est dit **stable** lorsque, si le point est légèrement écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir. Il est dit **instable** dans le cas contraire. L'équilibre est dit **indifférent** si le point reste en équilibre dans sa nouvelle position.

Supposons que la résultante des forces $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{R}$ dépende des paramètres θ et φ par exemple. A l'équilibre, on :

$$F(\theta_0, \varphi_0) = 0$$

Supposons que θ varie de $d\theta$ et φ de $d\varphi$; F varie alors de dF telle que :

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_{\theta_0,\varphi_0} d\theta + \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)_{\theta_0,\varphi_0} d\varphi$$

à $\varphi = cte$, $d\varphi = 0$, une variation positive de θ $(d\theta > 0)$ engendre une force de rappel si $dF < 0$, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_{\theta_0,\varphi_0} < 0$$

De même $\theta = cte$, il faudra :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)_{\theta_0,\varphi_0} < 0$$

Pour que l'équilibre soit stable, il faut donc avoir des relations du type :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_{\theta_0,\varphi_0} < 0$$

Si pour l'un des paramètres, une telle relation n'est vérifiée, alors l'équilibre n'est pas stable, mais instable.

4.5 Applications

Méthode de résolution

Pour résoudre un problème de mécanique, il convient de suivre dans l'ordre les étapes suivantes :

1. définition du système ;
2. définition du référentiel ;
3. bilan des forces appliquées ;
4. choix de la méthode de résolution.