Université de Lomé — Année académique: 2019-2020

TD de MTH101 N° 3: *Déterminatnts - systèmes linéaires*

1. Calculer les déterminants suivants:

   (a) $\begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

   (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{vmatrix}$ où $w = e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $w^3 = 1$ et $1 + w + w^2 = 0$,

   (c) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$ avec a, b, c et d des réels.

2. Etudier le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -t \\ t & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. (a) Calculer $detA$. (b) Trouver $cofA$ la matrice des cofacteurs de A. (c) Vérifier que $A(cofA)^t = (detA) \cdot I_3$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3. (d) Trouver A^{-1}.

4. On considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que cette matrice est inversible et calculer A^{-1}.

   (b) En déduire l'expression de A^n en fonction de A, pour tout entier naturel n.

5. Résoudre les systèmes d'équations suivants: $(s_1) \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases}$ et $(S_2) \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b \\ x + y + z + at = b \end{cases}$

   avec a et b des réels.

6. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, et discuter suivant les valeurs des paramètres réels a, b, c et d le système suivant

$$(S) \begin{cases} x + \quad y + \quad z = 1 \\ ax + \quad by + \quad cz = d \\ a^2x + \quad b^2y + \quad c^2z = d^2 \end{cases}$$

7. Résoudre le système suivant (inconnue $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, paramètres $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} \\ x_n + x_1 = 2a_n \end{cases}$$

8. Soit a un réel différent de 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

Calculer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2}. Montrer que $D_n = \dfrac{1 - a^{2n+2}}{1 - a^2}$. Combien vaut D_n si $a = 1$?