Université de Lomé

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
B.P 1515 LOME

ANNEE ACADEMIQUE: 2023-2024

UE MATH 101: Examen
SEMESTRE HARMATTAN
DURÉE: 2 heures

EXERCICE 1 (8 pts)

Résoudre le système d'équations suivant après avoir calculé son déterminant: $(S)\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=b \\ x+y+az=b \end{cases}$

avec a et b des réels.

<u>EXERCICE 2</u> (8 pts)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Montrer que pour tout endomorphisme f de E, on a: $(Im\, f = Im\, f^2) \Leftrightarrow (E = Ker\, f \oplus Im\, f)$.

EXERCICE 3 **(8 pts)**

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit T un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{B}$.

1. Calculer les vecteurs propres et les espaces propres associés à chaque valeur propre de A.
2. A est-elle diagonalisable? Justifier votre réponse.
3. On note $\mathcal{B}_p$ une base de vecteurs propres de T. Donner une matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_p$ (On précisera la base $\mathcal{B}_p$).
4. Ecrire la matrice de T dans la base $\mathcal{B}_p$ choisie.