

2. Champ électrostatique

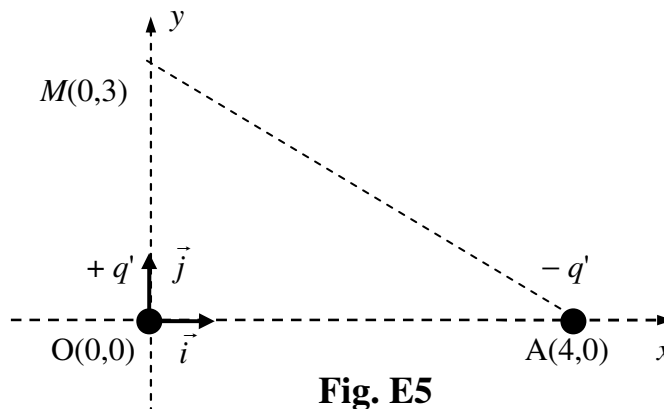
Exercice 5 * — Champ électrique créé par deux charges ponctuelles

On considère deux charges ponctuelles q' et $-q'$ placées sur l'axe des x , respectivement à l'origine $O(0,0)$ et au point A de coordonnées $(4,0)$ m (voir la figure E5).

1. Déterminer le champ électrique au point M de coordonnées $(0,3)$ m.
2. Déterminer la force électrostatique exercée sur une charge q placée en M .

On suppose $q > 0$, $q' > 0$ et $q \gg q'$ de façon à négliger l'interaction entre les charges q' .

Applications numériques : $q' = 10^{-8}$ C; $q = 10^{-6}$ C.



Réponses :

1. $\vec{E}_M = (2,88 \vec{i} + 7,84 \vec{j}) \text{ [V} \cdot \text{m}^{-1}]$; on en déduit que le champ électrique \vec{E}_M a :

a. une grandeur $\|\vec{E}_M\| = \sqrt{(2,88)^2 + (7,84)^2} = 8,35 \text{ [V} \cdot \text{m}^{-1}]$

b. et fait un angle $\phi = \arctg\left(\frac{7,84}{2,88}\right) = 69,83^\circ$ avec la partie positive de l'axe des x .

2. $F_M = q \vec{E}_M = (2,88 \vec{i} + 7,84 \vec{j}) \text{ [\mu N]}$ dans la même direction que \vec{E} .

Exercice 6* — Champ électrique créé par un système de charges quadratiques

On dispose des charges ponctuelles $Q_1 = Q_2 = Q$, et $Q_3 = Q_4 = -2Q$, aux sommets d'un carré de côté a .

Déterminer le champ électrique au centre O du carré.

Application numérique : $Q = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ C}$; $a = 4\sqrt{2} \text{ m}$.

Solution :

La figure E6 montre les vecteurs champs électrostatiques créés par chacune des quatre charges.

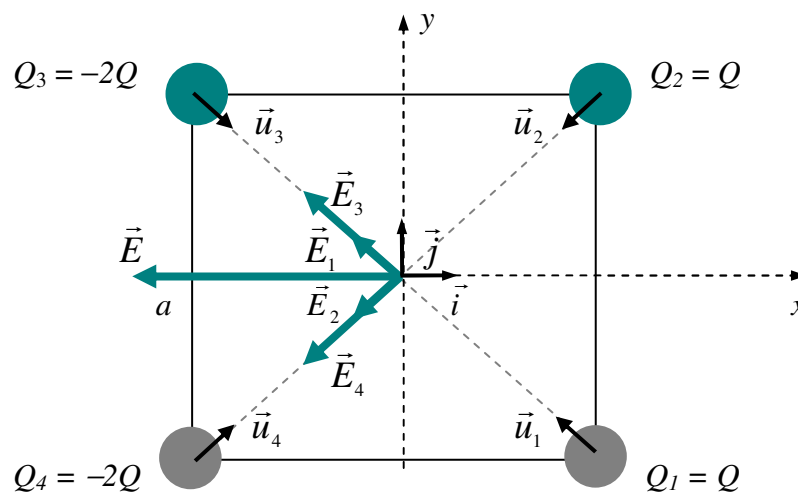


Fig. E6

On applique le principe de superposition pour le champ électrostatique:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^4 \vec{E}_i$$

Les champs électrostatiques s'écrivent respectivement:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{a^2} \vec{u}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{a^2} (-\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{a^2} \vec{u}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{a^2} (-\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j})$$

$$\vec{E}_3 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{a^2} \vec{u}_3 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{a^2} (\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j})$$

$$\vec{E}_4 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{a^2} \vec{u}_4 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{a^2} (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$$

Le champ électrostatique total au centre O est donc:

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{12Q}{a^2} \cos\theta \vec{i}$$

Où $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Finalement, on obtient:
$$\vec{E}(O) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{3\sqrt{2}Q}{a^2} \vec{i}$$

Application numérique : $Q = +1,6 \cdot 10^{-9} \text{ C}$; $a = 4\sqrt{2} \text{ m}$.

$$\vec{E}(O) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{3\sqrt{2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-9}}{32} \vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(O) = -3,82 \vec{i} \text{ [V} \cdot \text{m}^{-1}\text{]}}$$

■ L'analyse des symétries permet de trouver l'orientation du champ électrique. En effet, l'axe Oy étant un axe d'antisymétrie, le champ électrique total est perpendiculaire à l'axe Oy.

Exercice 7 *** — Champ électrique créé par une tige chargée uniformément

Une tige métallique de longueur l porte une charge Q répartie uniformément avec la densité de charges λ .

1. Déterminer le champ électrostatique en un point O situé sur l'axe de la tige à une distance r d'une des extrémités (Fig. E7).

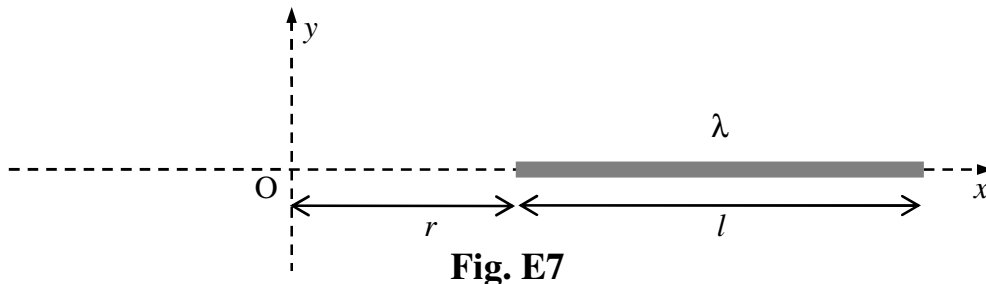


Fig. E7

2. Un électron se déplaçant d'une distance d le long d'une ligne de champ d'un point A à un point B verra sa vitesse changer de v_A à v_B . On considèrera que le point O se trouve loin du fil.

Déterminer la densité linéique de charges du fil.

Application numérique : $l = 10 \text{ cm}$; $r_A = 100 \text{ cm}$; $r_B = 104 \text{ cm}$; $v_A = 2 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_B = 3 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m_p = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Solution :

1. On divise la tige de longueur l et de charge Q , en éléments de longueur dl et de charge dQ (Fig. E7.1). Chaque élément dl de la tige porte une charge $dQ = \lambda dl = \lambda dx$.

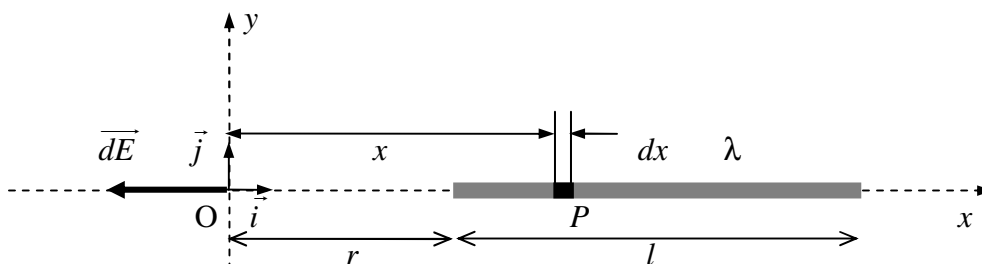


Fig. E7.1

Le champ électrostatique \vec{dE} créé par la charge élémentaire $dQ = \lambda dx$ s'exprime:

$$\vec{dE} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(PO)^2} \vec{i} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{(x)^2} dx \vec{i}$$

Pour déterminer le champ électrique total créé par la tige chargée, on applique le principe de superposition qui consiste à faire la sommation (intégration de $x = r$ à $x = r+l$) de tous les champs électriques élémentaires créés par les charges élémentaires dQ réparties sur la longueur l de la tige.

Le champ électrique résultant créé par tous les éléments de la tige qui sont à des distances différentes de O, s'obtient par intégration de $x = r$ à $x = r+l$ de l'expression:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int_r^{l+r} \frac{dx}{(x)^2} \vec{i} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left[-\frac{1}{x} \right]_r^{l+r} \vec{i} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{l+r} \right] \vec{i}$$

Donc:

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l}{r(l+r)} \vec{i}}$$

2. Lorsque la tige est loin du point O ($r \gg l$), le champ électrique qu'elle crée au point O est donné par:

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l}{r^2} \vec{i} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{i}}$$

■ Quand r est très grand devant l , la tige électrisée est équivalente à une charge ponctuelle $Q = \lambda l$.

Si l'électron se trouve en A où règne le champ électrique \vec{E} , il va être soumis à la force électrostatique :

$$\vec{F} = -e\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e\lambda l}{r^2} \vec{i}$$

Au cours d'un déplacement élémentaire \vec{dr} du proton, la force électrostatique effectue un travail élémentaire dW donné par:

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} = -e\vec{E} \cdot \vec{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e\lambda l}{r^2} \vec{i} \cdot (dr \vec{i}) = + \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

Au cours du déplacement du proton de A vers B, le travail effectué est donné par:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B dW = + \int_{r_A}^{r_B} \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

On trouve :
$$W_{A \rightarrow B} = \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_B - r_A}{r_A r_B} \right)$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a:

Travail de la force électrostatique = variation de l'énergie cinétique

Donc:
$$W_{A \rightarrow B} = \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_B - r_A}{r_A r_B} \right) = \frac{1}{2} m_e (v_B^2 - v_A^2)$$

On en déduit la densité linéique de charges λ :

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 m_e (v_B^2 - v_A^2)}{el} \left(\frac{r_A r_B}{r_B - r_A} \right)$$

Application numérique: $l = 10 \text{ cm}$; $r_A = 100 \text{ cm}$; $r_B = 104 \text{ cm}$; $v_A = 2 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$; $v_B = 3 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

$$\lambda = \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \left((3 \cdot 10^6)^2 - (2 \cdot 10^5)^2 \right)}{9 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1} \left(\frac{1 \cdot 1,04}{1,04 - 1} \right)$$

Finalement, on trouve : $\lambda = 2,44 \cdot 10^{-6} \text{ [C.m}^{-1}] \cong 3 \text{ [\mu C.m}^{-1}]$

Exercice 8 ** — Champ électrique créé par un fil uniformément chargé infiniment long

Un fil métallique infiniment long est chargé uniformément avec la densité de charges λ .

1. Déterminer le champ électrostatique en un point A situé sur la médiatrice du fil à une distance r de son milieu O (Fig. E8).
2. Une charge électrique positive q se trouve au point A. Sous l'action du champ électrique créé par le fil métallique chargé, elle se déplace d'une distance $d = AB$ (Fig. E8); un travail W s'effectue au cours de ce déplacement.

Déterminer la densité linéique de charges du fil.

Application numérique : $q = 3 \cdot 10^{-9} \text{ C}$; $OA = r_A = 2 \text{ cm}$; $OB = r_B = 6 \text{ cm}$; $W = 10^{-5} \text{ J}$.

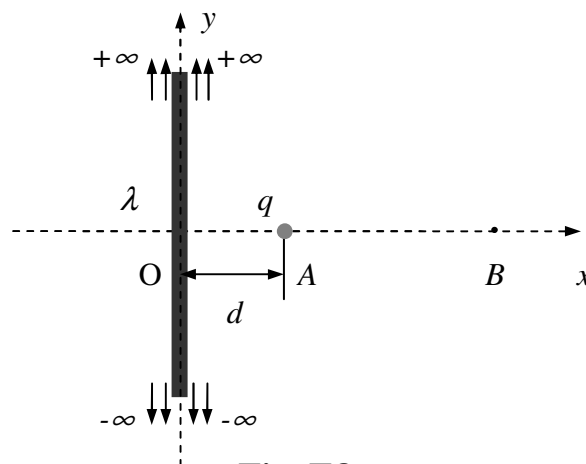


Fig. E8

Solution :

1. On se propose de trouver le champ électrostatique créé en un point M par un filament rectiligne infiniment long, portant une charge λ par unité de longueur (Fig. E8.1).

Pour cela, on divise le filament en petits segments de longueur dz portant chacun une charge $dq = \lambda dz$.

On exprime le champ électrostatique \vec{dE}_1 créé par la charge élémentaire $dq_1 = \lambda dz$, située en P_1 , en un point M tel que $\vec{OM} = \vec{r}$,

$$\vec{dE}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{r^2 + z^2} \vec{u}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{r^2 + z^2} (\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{k})$$

Le champ électrostatique \vec{dE}_2 créé en M par la charge élémentaire $dq_2 = \lambda dz$, située en P_2 (symétrique de P_1 par rapport à O), s'obtient de la même façon:

$$\vec{dE}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{r^2 + z^2} \vec{u}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{r^2 + z^2} (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{k})$$

Le champ électrostatique \vec{dE} créé en M par la paire de charges élémentaires (dq_1, dq_2) a pour expression:

$$\vec{dE} = \vec{dE}_1 + \vec{dE}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda dz}{r^2 + z^2} (\cos \theta \vec{u}_r) = dE_r \vec{u}_r$$

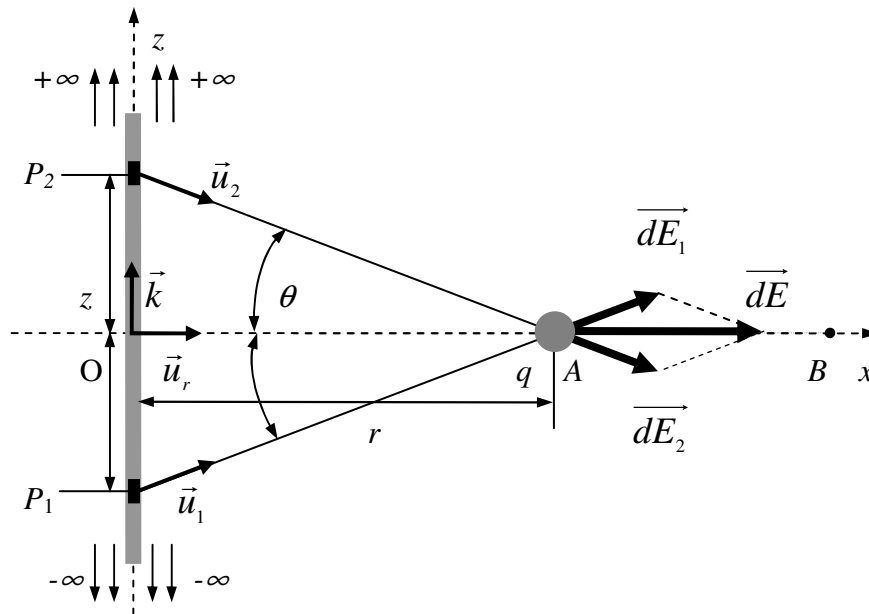


Fig. E8.1

avec:
$$dE_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dz}{r^2 + z^2} \cos \theta$$

En appliquant le principe de superposition, le champ électrostatique résultant au point M , s'obtient en intégrant cette expression de $\theta = 0$ à $\theta = \pi/2$.

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{r^2 + z^2} \cos \theta$$

Comme:
$$\cos \theta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

alors: $r^2 + z^2 = \frac{r^2}{\cos^2 \theta}$

Par ailleurs:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{z}{r}, \text{ et } dz = \frac{r d\theta}{\cos^2 \theta}$$

En substituant $r^2 + z^2$ et dz par leurs expressions respectives dans celle de E_r , on obtient:

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

D'où:
$$\vec{E} = E_r \vec{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

2. La charge électrique q placée en A où règne le champ électrique \vec{E} , va être soumise à la force électrostatique:

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Au cours d'un déplacement élémentaire \vec{dr} de la charge électrique q , la force électrostatique effectue un travail élémentaire dW donné par:

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} = q\vec{E} \cdot \vec{dr} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r \cdot \vec{dr} u_r = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r}$$

Au cours du déplacement de la charge q de A vers B , le travail effectué est donné par:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0} [\ln r]_{r_A}^{r_B} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_B}{r_A}$$

On en déduit la densité linéique de charges λ :

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 W}{q \ln \frac{r_B}{r_A}}$$

Application numérique : $q = 3 \cdot 10^{-9}$ C; $OA = r_A = 2$ cm; $OB = r_B = 6$ cm; $W = 10^{-5}$ J.

$$\lambda = \frac{2}{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-9}} \cdot \frac{1}{\ln 3} \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda = 6,74 \cdot 10^{-7} \left[C \cdot m^{-1} \right]$$

Exercice 9 *** — Champ électrique créé par des distributions surfaciques de charges non uniformes

A. On électrise par frottement un disque circulaire en ébonite qui tourne à une vitesse constante dans un plan horizontal. De cette façon, la densité surfacique de charges devient proportionnelle à la distance r du centre du disque ($\sigma = A r$, où A est une constante négative).

1. Exprimer la charge totale Q de la couronne en fonction de A , R_1 et R_2 . Donner les dimensions de la constante A .
2. Utiliser les symétries pour déterminer l'orientation du champ électrostatique au centre O .
3. Exprimer le champ électrostatique \vec{E} en un point M situé sur l'axe de la couronne à une distance z de O .

B. Une couronne découpée dans un carreau de verre (rayons intérieur R_1 et extérieur R_2) porte une charge Q distribuée avec la densité surfacique de charges $\sigma = \sigma_0 \sin^2 \varphi$ (σ_0 est une constante positive) (Fig. E9).

1. Exprimer la charge totale Q de la couronne en fonction de σ_0 , R_1 et R_2 .
2. Utiliser les symétries pour déterminer l'orientation du champ électrostatique au centre O .
3. Exprimer le champ électrostatique \vec{E} en un point M situé sur l'axe de la couronne à une distance z de O .

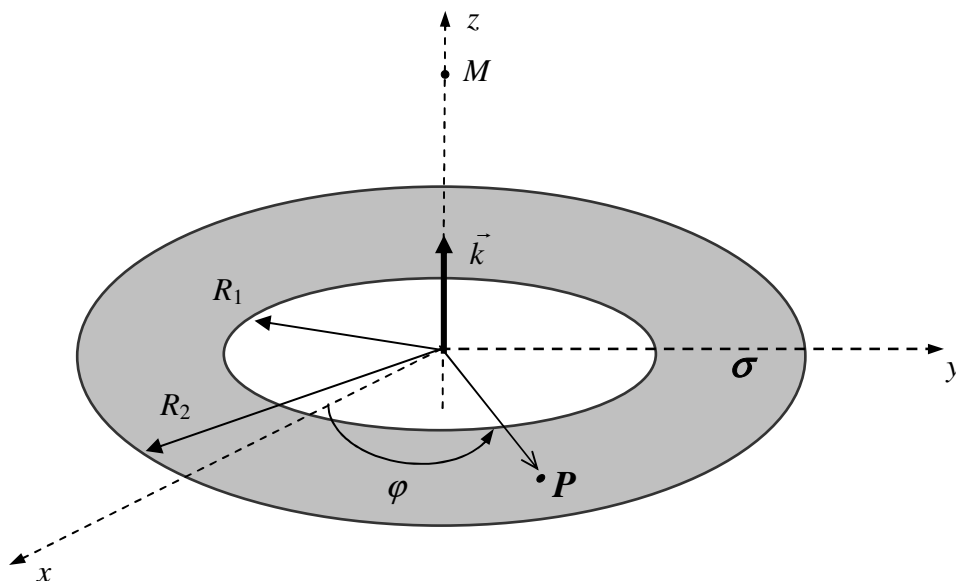


Fig. E9

Solution :

A.1. On divise le disque de rayon R , en anneaux élémentaires de rayon intérieur r et d'épaisseur dr . Chaque anneau porte une charge élémentaire :

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$$

Pour déterminer la charge totale Q portée par le disque, on fait la sommation (intégration de $r = 0$ à $r = R$) de toutes les charges élémentaires réparties sur la surface du disque.

La charge totale Q portée par le disque en ébonite s'obtient par intégration de $r = 0$ à $r = R$ de l'expression suivante, avec la valeur appropriée de σ .

$$Q = \iint_S \sigma dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma r dr d\varphi$$

avec: $\sigma = A r$

Donc:
$$Q = \iint_S \sigma dS = \int_0^R A r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Par conséquent :

$$Q = \iint_S \sigma dS = \int_0^R A r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \Rightarrow = A \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R [\varphi]_0^{2\pi}$$

Finalement, on obtient:
$$Q = \frac{2}{3} A \pi R^3$$

En utilisant l'équation aux dimensions, on obtient:
$$[A] = \frac{[Q]}{\left[\frac{3}{2} \pi R^3 \right]} = \frac{[Charge]}{[Longueur]^3}$$

Dans le Système International, les dimensions de la constante A sont:

$$[A] = \frac{Coulomb}{mètre^3} = \frac{C}{m^3}.$$

A.2. La distribution est invariante dans toute rotation θ autour de l'axe z (Fig. E9.1): c'est une symétrie axiale.

- En tout point de l'axe Oz , le champ électrostatique \vec{E} est porté par l'axe; il ne dépend que de z .

Les plans (xOz) et (yOz) sont des plans de symétrie; de même, tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie; le plan (xOy) est également un plan de symétrie. Le point O appartient à des plans de symétries orthogonaux: c'est un centre de symétrie.

- Le champ électrostatique \vec{E} est nul au point O .

A.3. On calcule le champ électrostatique élémentaire créé par un élément de surface uniformément chargé dS .

Cet élément de surface porte une charge élémentaire:

$$dQ = \sigma r dr d\varphi$$

La charge élémentaire dQ crée un champ électrostatique élémentaire \overline{dE} (Fig. E9.2):

$$\begin{aligned} \overline{dE} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2 + z^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A r^2 dr d\varphi}{r^2 + z^2} \vec{u} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A r^2 dr d\varphi}{r^2 + z^2} (\cos\theta \vec{k} - \sin\theta \vec{v}) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient:

$$\overline{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A r^2 dr d\varphi}{r^2 + z^2} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \vec{k} - \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \vec{v} \right)$$

avec $\vec{u} = \cos \theta \vec{k} - \sin \theta \vec{v}$; $\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$; $\sin \theta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}}$.

et $\vec{v} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$

Par conséquent:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A r^2 dr d\varphi}{r^2 + z^2} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \vec{k} - \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) \right)$$

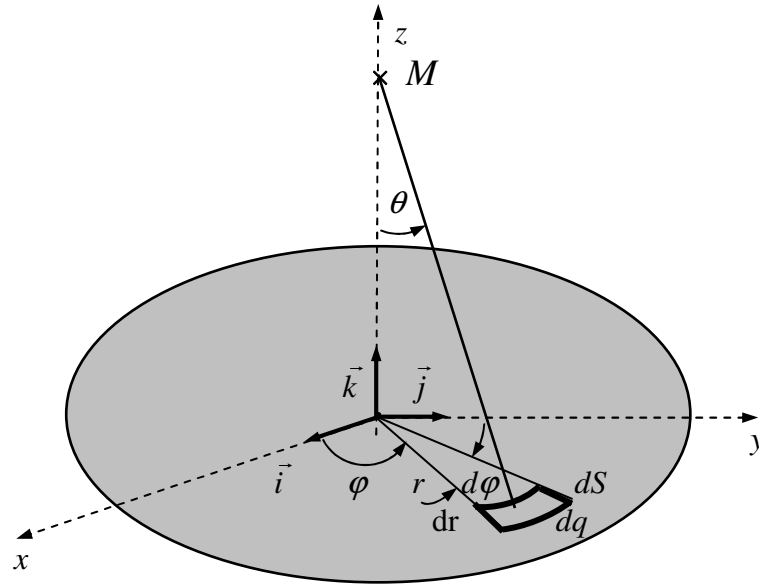


Fig. E9.1

Les composantes radiales E_x et E_y s'annulent à cause de la symétrie de révolution autour de l'axe des z . Le champ électrostatique résultant \vec{E} a pour direction Oz .

Donc, la composante utile du champ électrostatique résultant est donnée par :

$$\vec{E} = \frac{A}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \right] \vec{k}$$

Posons $u = r^2 + z^2$, alors $du = 2r dr$. L'expression du champ électrostatique peut alors s'écrire:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{A z}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2 dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi \right] \vec{k} \\ &= \frac{A z}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\ln \left(r + \sqrt{r^2 + z^2} \right) - \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_{0_1}^R [\varphi]_0^{2\pi} \right\} \vec{k} \\ \vec{E} &= \frac{A z}{2\epsilon_0} \left[\ln \frac{(R + \sqrt{R^2 + z^2})}{z} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{k} \end{aligned}$$

Sachant que : $\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{\frac{2}{3}A\pi R^3}{\pi R^2} = \frac{2}{3}A R$, la constante A s'exprime: $A = \frac{3}{2} \frac{Q}{\pi R^3}$

Le champ électrostatique créé par le disque se met sous la forme:

$$\vec{E} = -\frac{3Qz}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\ln \frac{(R + \sqrt{R^2 + z^2})}{z} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{k}$$

B. Le champ électrostatique créé par une couronne découpée dans un carreau de verre (voir Fig. E9.2) portant une charge Q distribuée avec la densité surfacique de charges $\sigma = \sigma_0 \sin^2 \varphi$ (σ_0 est une constante positive) se calcule de la même manière que pour le disque.

Les réponses sont les suivantes:

B.1. $Q = \frac{1}{2} \sigma_0 \pi (R_2^2 - R_1^2)$

B.2. voir A.2.

B.3. $\vec{E} = \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} \right] \vec{k} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 (R_2^2 - R_1^2)} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} \right] \vec{k}$

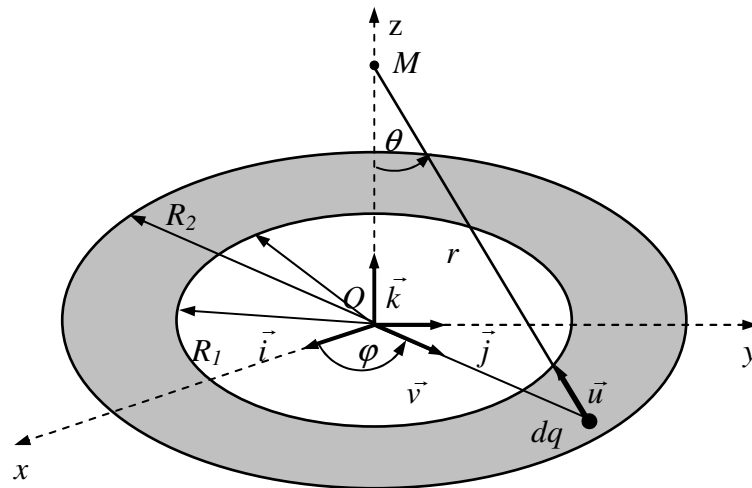


Fig. E9.2