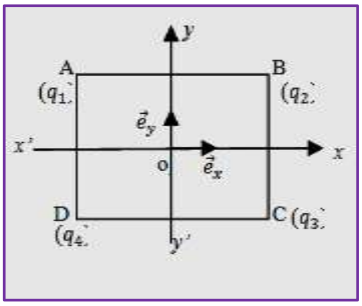
TRAVAUX DIRIGES
Correction de la série N° 2 - ELECTRICITE 1

Exercice N°1

On place quatre charges ponctuelles aux sommets ABCD d'un carré de côté a =1 m, et de centre O, origine d'un repère orthonormé Oxy de vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$. On donne : $q_1 = q = 10^{-8}$ C, $q_2 = -2q$, $q_3 = 2q$, $q_4 = -q$.

1- Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(O)$ créé par la distribution au centre O du carré. Préciser la direction, le sens et la norme de $\vec{E}(O)$.

2- Exprimer le potentiel électrostatique V(O) créé en O par les quatre charges.



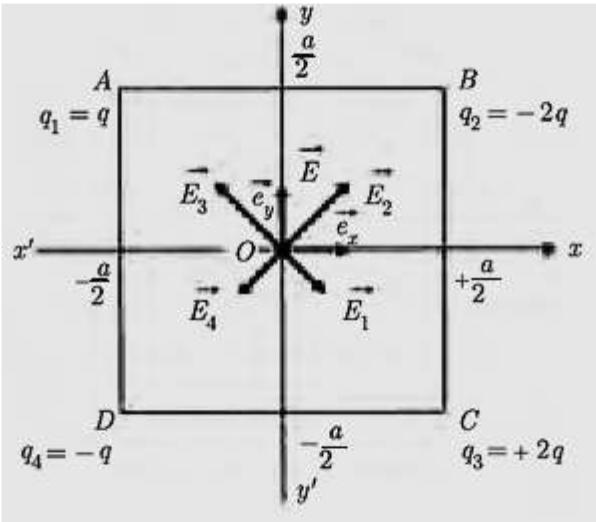
Correction de l'exercice N°1

1- Détermination du champ E en O.

Soit E_1, E_2, E_3 et E_4 les champs créés en O respectivement par les charges q_1 q_2, q_3 q_4.

D'après le principe de superposition, on écrit :

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3} + \vec{E_4}$$



Par raison de symétrie :

$$\vec{E_1} + \vec{E_4} = -2\,E_1 \cos\frac{\pi}{4}\ \vec{e_y} = -2\,k\,\frac{2q}{a^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\ \vec{e_y}$$
$$= -\frac{2kq}{a^2}\sqrt{2}\ \vec{e_y}$$

On a de même :

$$\vec{E_2} + \vec{E_3} = 2\,E_2 \cos\frac{\pi}{4}\ \vec{e_y} = 2\,k\,\frac{4q}{a^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\ \vec{e_y}$$
$$= 4k\,\frac{q}{a^2}\sqrt{2}\ \vec{e_y}$$

Soit : $\vec{E} = \frac{2k\,q}{a^2}\sqrt{2}\ \vec{e_y}$

Le champ résultant $\vec{E}$ est donc :

– dirigé suivant l'axe y'Oy;
– dans le sens positif de l'axe y'Oy ;
– de norme $E = \frac{2k\,q}{a^2}\sqrt{2}$ A N : $E = 9 \times 10^9 \times 10^{-8}\, 2\sqrt{2} = 254{,}6\ V/m$

2- Détermination du potentiel V en O :

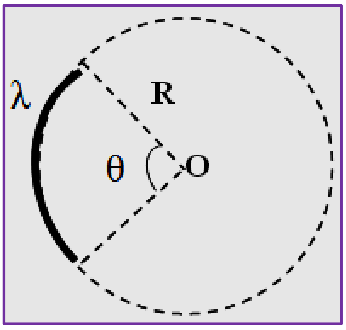
Soient V_1 ; V_2 ; V_3 et V_4 les potentiels créés par les charges q_1 ; q_2 ; q_3 et q_4 en O.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = k\,(\frac{q}{OA} - \frac{2q}{OB} + \frac{2q}{OC} - \frac{q}{OD})$$
$$OA = OB = OC = OD = \frac{a}{\sqrt{2}}$$
$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{\sqrt{2}k\,q}{a}\,(1 - 2 + 2 - 1)$$

Soit : V = 0

Exercice N°2

Soit une quantité de charge Q répartie sur une portion d'une circonférence de centre O et de rayon R = 5cm, de densité linéique $\lambda = 10^{-13}$ C/cm (λ<0). La portion à une longueur Rθ (θ = π/3).



1- Donner l'expression du champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}$ créé par la densité de charge élémentaire dQ au centre O. Donner d'abord dQ en fonction de λ, R et dθ.

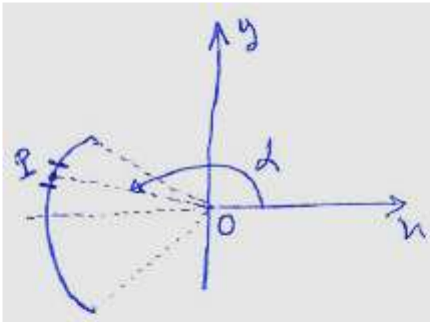
2- En déduire le champ $\vec{E}$ créé par la charge Q au point O.

3- Calculer le module de $\vec{E}$.

Correction de l'exercice N°2

1- L'expression du champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}$ créé par la densité de charge élémentaire dQ au centre O.

On donner d'abord dQ en fonction de λ, R et dθ.



$$dQ = \lambda\, dl = \lambda\ R\, d\theta$$

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{\overrightarrow{PO}}{\left\|\overrightarrow{PO}\right\|^3} = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{(-R\,\overrightarrow{e_r})}{R^3}$$

Or $dl = R\, d\theta$

Donc : $d\vec{E} = \frac{-\lambda\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}\ \overrightarrow{e_r}$

2- le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ est variable, il faut le projeter sur la base $(\vec{\imath}\,, \vec{\jmath})$

$\overrightarrow{e_r} = cos\alpha\,\vec{\imath} + sin\alpha\vec{\jmath}$ et $d\theta = d\alpha$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{\pi-\frac{\theta}{2}}^{\pi+\frac{\theta}{2}}\left(cos\alpha\,\vec{\imath} + sin\alpha\vec{\jmath}\right)d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\ \left[sin\alpha\,\vec{\imath} - cos\alpha\vec{\jmath}\right]_{\pi-\frac{\theta}{2}}^{\pi+\frac{\theta}{2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[-2sin\frac{\theta}{2}\ \vec{\imath} + 0\vec{\jmath}\right]$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}2sin\frac{\theta}{2}\ \vec{\imath}$$

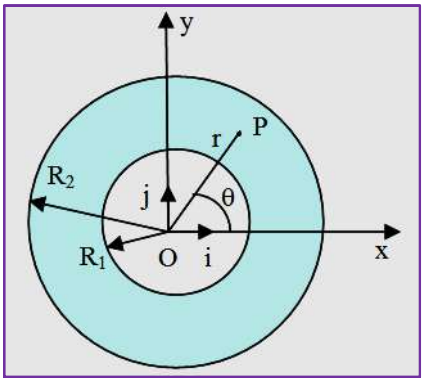
3- Calcul du module de $\vec{E}$

$E = \frac{2|\lambda|sin\frac{\theta}{2}}{4\pi\varepsilon_0 R}$ avec $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\ 10^9\ (SI)$ $|\lambda| = 10^{-11}\ C/m$

$$E = \frac{2 10^{-11}.\frac{1}{2}.9\ 10^9}{5.10^{-2}} = 1.8\ V/m$$

Exercice N°3

Une surface plane, limitée par deux cercles de centre O (disque creux) et de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) porte une charge électrique Q uniformément répartie sur sa surface. Soit ds un élément de surface de la couronne, dont le centre P est repéré par ces coordonnées polaires r et θ (voir figure ci-contre)



1- Exprimer la densité de charges (du disque creux) σ en fonction de Q, R_1 et R_2.

2- Donner l'expression du champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}(M)$ crée par l'élément ds en un point M (d'ordonnée z) de l'axe Z'OZ perpendiculaire au plan de la couronne.

3- Donner l'expression de ds dans le système de coordonnées polaires et exprimer le vecteur $\overrightarrow{PM}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

4- Déduire l'expression du champ $\vec{E}(M)$ créé par le disque creux au point M. En déduire le champ $\vec{E}\,(O)$ au point O.

5- Déduire l'expression du champ $\vec{E}(M)$ créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité de charges σ. Ce champ est-il défini sur le plan ?

Correction de l'exercice N°3

1°/ distribution uniforme $\Rightarrow \sigma = cte = \frac{Q}{S}$

avec $S = S_{R_2} - S_{R_1} = \pi(R_2^2 - R_1^2) \Rightarrow \sigma = \frac{Q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$

2°/ $$d\vec{E} = \frac{dQ \cdot \vec{PM}}{4\pi\varepsilon_0 \, PM^3} = \frac{\sigma \, ds \, \vec{PM}}{4\pi\varepsilon_0 \, PM^3}$$

3°/ En coordonnées polaires $ds = (dr).(r d\theta) = r\,dr\,d\theta$

et $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -r\vec{e_r} + z\vec{k} = -r(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + z\vec{k}$

et $PM = \sqrt{r^2 + z^2}$.

4°/ $$d\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r\,dr\,d\theta}{(r^2+z^2)^{3/2}} \left(-r\cos\theta\,\vec{i} - r\sin\theta\,\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

Sachant que θ varie de 0 à 2π et que $\int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta = 0$

alors $$\vec{E} = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{r\,dr.\,d\theta}{(r^2+z^2)^{3/2}} \vec{k}.$$ en posant : $u = r^2 + z^2$, $du = 2r\,dr$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\sigma z . 2\pi}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right]\vec{k}$$
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right]\vec{k}$$

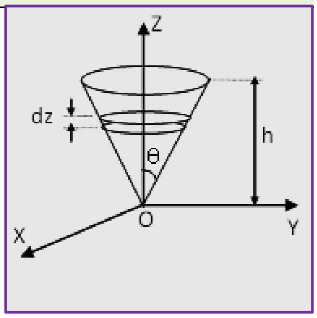
au centre O on a $z \to 0 \Rightarrow \vec{E}(0) = \vec{0}$

5°/ Plan infini $\Leftrightarrow R_1 \to 0$ et $R_2 \to \infty$

$$\Rightarrow \vec{E}_{Plan}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2}} \vec{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{k}$$
$$= \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{k} \quad \begin{cases} + \text{ si } z > 0 \\ - \text{ si } z < 0 \end{cases}$$

Sur le plan $z \to 0$ le champ n'est pas défini.

Exercice N°4



A- Soit un disque de centre O, d'axe OZ, de rayon R, placé dans le plan XOY. Ce disque est chargé uniformément avec une densité surfacique de charge $\sigma>0$.

1- Déterminer le potentiel V(M) créé par cette distribution de charges en un point M de l'axe du disque tel que $OM = z$.

2- Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ au point M de l'axe OZ.

B- Soit un cône d'axe OZ, de hauteur h, de demi-angle au sommet θ et dont le sommet coïncide avec l'origine du repère OXYZ (figure ci-contre). Ce cône est chargé uniformément en volume avec la densité ρ.

1- Déterminer le champ électrostatique $d\vec{E}$ créé au point O par une tranche du cône d'épaisseur dz.

2- En déduire le champ $\vec{E}$ créé par l'ensemble de la distribution volumique au point O.

Correction de l'exercice N°4

A-

1°/ Détermination du potentiel V(M) :

Le potentiel élémentaire créé en M par une charge dq en P (voir figure 1) :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{PM} \quad \text{où} \quad dq = \sigma\, r\, d\varphi\, dr$$

Le potentiel créé en M par une couronne circulaire élémentaire de rayon r, d'épaisseur dr est : $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma\, 2\pi r\, dr\,(z^2+r^2)^{-\frac{1}{2}}$

Le potentiel créé en M par le disque chargé de rayon R :

$$V(M) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\int_0^R r\,dr\,(z^2+r^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}} - |z|\right]$$

Dans l'expression de V(M), $|z|$ est nécessaire pour une relation cohérente avec les valeurs négatives de z.

2°/ Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$:

La charge élémentaire localisée en P contenue dans un élément de surface $dS = r\,d\varphi\,dr$ crée au point M situé sur l'axe OZ le champ élémentaire :

$$d\vec{E}_{ds} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\frac{\vec{PM}}{PM} = \frac{\sigma r\,dr\,d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\frac{\vec{PM}}{PM}$$

Une couronne circulaire élémentaire de rayon r et d'épaisseur dr, crée en M le champ :

$$d\vec{E}_{cour} = \frac{\sigma\, 2\pi\, r\,dr}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\frac{\vec{PM}}{PM}$$

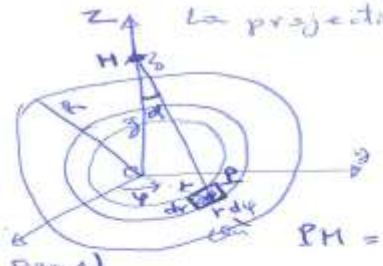


Fig. 1)

La projection de ce champ sur l'axe OZ :

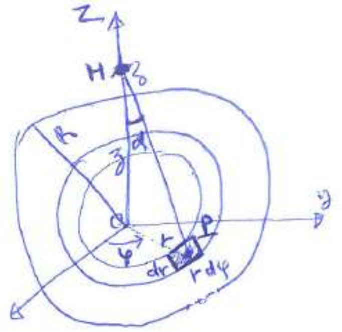
$$d\vec{E}_{cour}\cdot\vec{e}_z = \frac{\sigma\, 2\pi\, r\,dr}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\frac{\vec{PM}}{PM}\cdot\vec{e}_z$$

$$= \frac{\sigma r\,dr}{2\varepsilon_0(r^2+z^2)}\cos\alpha = \frac{\sigma r\,dr}{2\varepsilon_0(r^2+z^2)}\frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$PM = (z^2+r^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\alpha = (\widehat{MO, MP})$

Le champ créé par tout le disque au point M s'obtient par intégration :

$$E(M) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$



B] -

1°/ Détermination du champ $d\vec{E}$ créé au point O :

La tranche d'épaisseur dz peut être assimilée à un disque chargé avec une densité surfacique σ qui s'exprime en fonction de ρ en utilisant la conservation de la charge électrique de la tranche :

$$\sigma S = \sigma\pi r^2 = \rho\,dV = \rho\,\pi r^2\,dz$$

$$\Rightarrow \sigma = \rho\,dz.$$

D'autre part ; si z est l'abscisse du centre de la tranche, l'abscisse de O par rapport à ce centre est $-z$.

Donc ; l'expression du champ électrostatique $d\vec{E}$ créé par la tranche considérée, s'obtient à partir de celle du champ créé par un disque (question A-2) en remplaçant σ par ρdz et z par $-z$:

$$d\vec{E} = \frac{\rho dz}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-z}{|z|} - \frac{-z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{k}$$

$$= \frac{\rho dz}{2\varepsilon_0}\left(-1+\cos\theta\right)\vec{k} \quad \text{car } z \text{ est positif.}$$

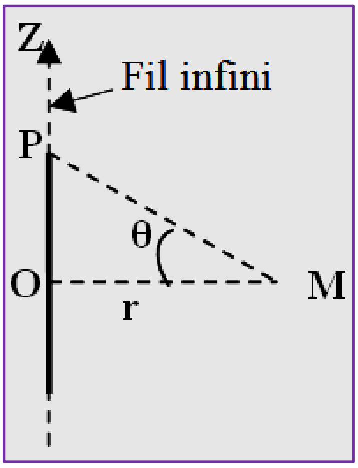
2°/ Le champ total $\vec{E}$ créé par l'ensemble de la distribution de charges du cône s'obtient en intégrant l'expression de $d\vec{E}$ sur la variable z variant entre 0 et h :

$$\vec{E} = \int_0^h \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\cos\theta - 1\right) dz\,\vec{k} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\cos\theta-1\right)\int_0^h dz\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\rho h}{2\varepsilon_0}\left(\cos\theta - 1\right)\vec{k}.$$

Exercice N°5

On considère un fil infini, confondu avec l'axe OZ, chargé uniformément avec une densité de charges linéique λ ($\lambda > 0$).



1- Par des considérations de symétrie et d'invariance (qui seront clairement explicitées), déterminer la direction du champ électrostatique $\vec{E}$ et la variable dont il dépend.

2- Soit un point **P** sur le fil, à l'altitude z, et un point M de l'espace, tel que OM = r (voir figure ci-contre). Un petit élément $d\ell$ centré au point P contenant la charge élémentaire **dq**, créé au point M un champ électrostatique élémentaire $\vec{E}$. Déterminer le champ élémentaire $d\vec{E}$.

3- En déduire le champ électrostatique $\vec{E}$ total crée par le fil au point M.

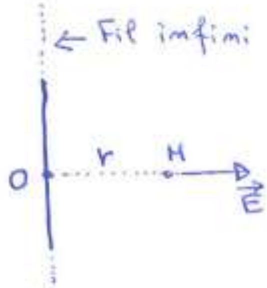
4- Retrouver ce résultat par application du théorème de Gauss en justifiant le choix de la surface de Gauss.

5- En déduire le potentiel V(M). On donne V(r=1)=0.

6- Sans faire de calcul, donner la forme des lignes de champ et celle des surfaces équipotentielles.

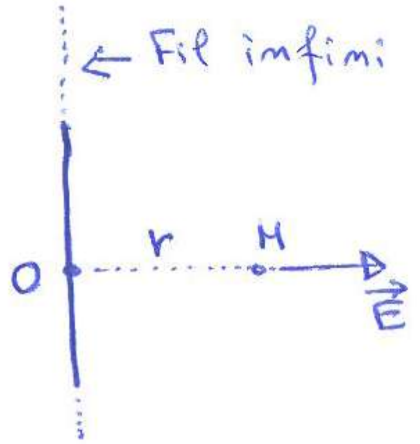
Correction de l'exercice N°5

Exercice 5 :



1°/ - Pour un point M quelconque de l'espace ; la droite perpendiculaire au fil et passant par le point M est un axe de symétrie ; le champ électrique $\vec{E}(M)$ est donc porté par cet axe. Il est orthoradial (porté par $\vec{e}_r$: vecteur unitaire en coordonnées cylindriques).

- D'autre part, une translation le long de l'axe OZ, ou une rotation autour de l'axe OZ laissent la distribution inchangée. Ceci montre donc que le champ électrique E ne dépend ni de z ni de φ et ne dépend donc que de r : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$



2°/
$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\left(\frac{\vec{PM}}{PM}\right) = \frac{\lambda\, dz}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\,\vec{u}$$

avec : $dq = \lambda\, dl = \lambda\, dz$; $\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM} = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_z$.

$$z = r.\operatorname{tg}\theta \Rightarrow dz = \frac{r}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

et $\cos\theta = \frac{r}{PM} \Rightarrow PM^2 = \frac{r^2}{\cos^2\theta}$.

d'où

$$\boxed{d\vec{E} = \frac{\lambda\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_z\right)}$$

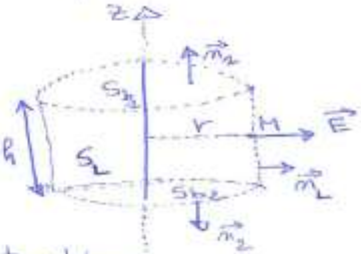
3°/ D'après la question 1°/ Seule la composante de $\vec{E}$ suivant $\vec{e_r}$ est non nulle. Le champ électrostatique total créé par tout le fil est :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\theta\, \vec{e_r} - \sin\theta\, \vec{e_t}\right) d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta\, \vec{e_r} - \underbrace{\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta\, \vec{e_t}}_{= 0}$$

d'où $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{e_r}$

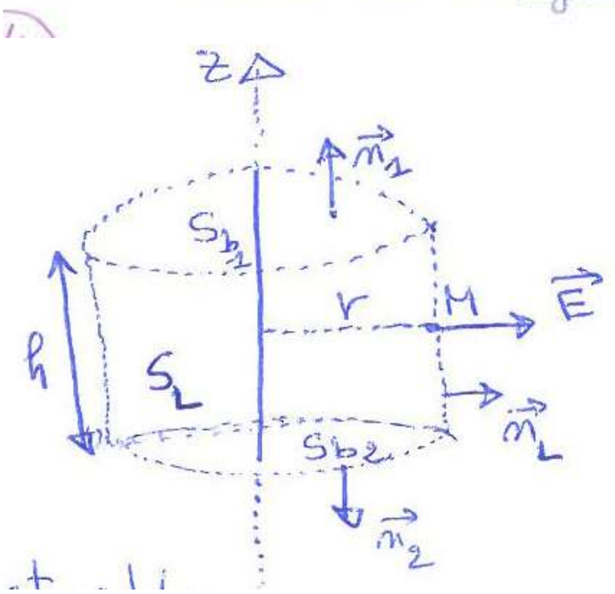
4°/ - La distribution possède une symétrie cylindrique ; la surface de Gauss Σ adéquate est donc un cylindre fermé de longueur h et de rayon r.



- L'application du Théorème de Gauss à cette surface nous donne le flux du champ électrostatique à travers cette surface fermée comme :

$$\phi = \phi_{SL} + \phi_{B_1} + \phi_{B_2}$$

- Pour les surfaces de base, le champ et les vecteurs surfaces normales sortantes sont orthogonaux, donc le flux est nul, d'où :



$$\phi = \phi_{SL} = \iint_{SL} \vec{E}\cdot\vec{dS} = E(r)\, S = E(r)\, 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

d'où $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\vec{e_r}$

5°/ Le potentiel V(M) au point M est déterminé en utilisant la relation : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M)$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\vec{e}_r = -\overrightarrow{grad}\, V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

Par identification on a donc $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$

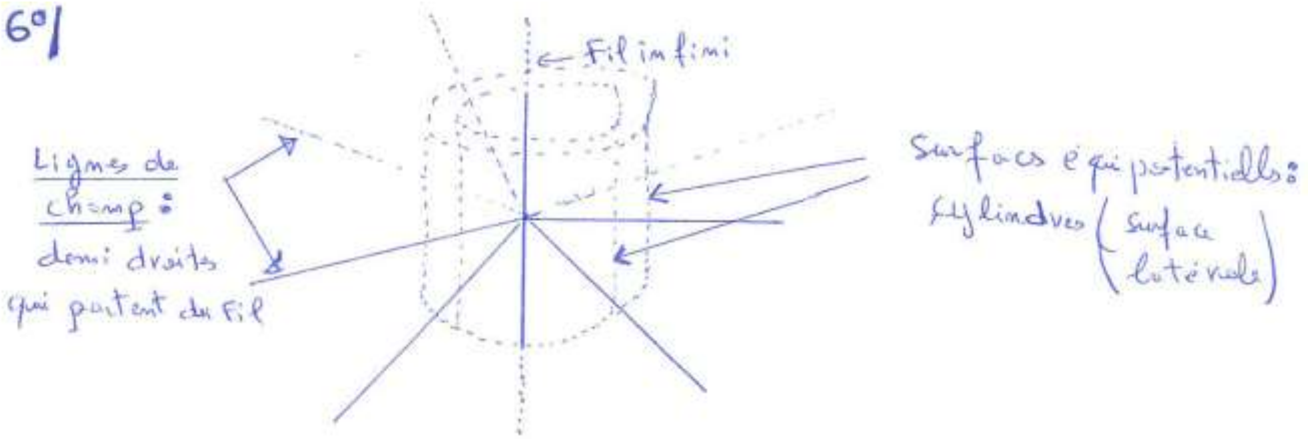
d'où $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{dV}{dr} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$

Donc $V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln r + Cst$

or pour $r = 1$ on a $V = 0 \Rightarrow Cst = 0$

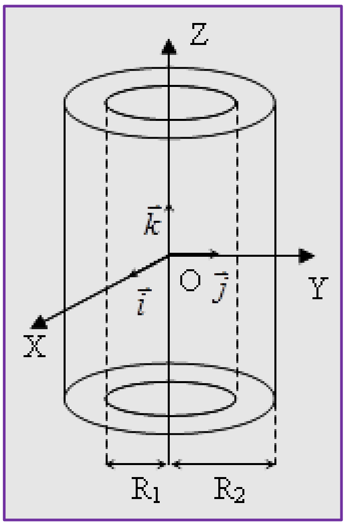
$$\Rightarrow \boxed{V(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r}$$

6°/



Exercice N°6

Considérons deux cylindres C_1 et C_2 de même axe OZ, de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) et de hauteur infinie. Les deux cylindres sont chargés uniformément en surface avec les densités surfaciques de charges respectifs σ_1 et σ_2.



1- En utilisant la notion de symétrie de charges, déterminer la direction du champ $\vec{E}(M)$ crée par les deux cylindres en un point M de l'espace.

2- En utilisant la notion des invariances, montrer que le champ $\vec{E}(M)$ ne dépend que de la distance $r = \|\overrightarrow{OM}\|$?

3- Quelle est la surface de Gauss convenable à cette distribution de charges? Justifiez votre réponse.

4- En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le champ $\vec{E}(M)$ crée par les deux cylindres en tout point M de l'espace.

5- En déduire le potentiel V(M) en tout point M de l'espace. (On prendra comme origine des potentiels ($V(O) = 0$)).

Correction de l'exercice N°6

1°/ La symétrie est cylindrique (r, φ, z) → les plans $\Pi(M, \vec{k}, \vec{e_r})$ et $\Pi'(M, \vec{e_r}, \vec{e_\varphi})$ sont deux plans de symétrie de la distribution chargée (des 2 cylindres) contenant M

$$\Rightarrow \vec{E} \subset \Pi \cap \Pi' \rightarrow \vec{E} \text{ est porté par } \vec{e_r}.$$

2°/ • Si on fait une translation de la distribution (2 cylindres) suivant l'axe Oz (c-à-d z varie); la distribution reste invariante par rapport à M

• Même chose pour la rotation autour de Oz (c-à-d φ varie)
→ la distribution reste invariante par rapport à M

• Par contre si on fait une translation des 2 cylindres suivant $\vec{e_r}$ (càd r varie); alors la distribution de charges change par rapport à M (s'approche ou s'éloigne de M).

$$\Rightarrow E \text{ dépend de } r.$$

Donc $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e_r}$ ← Notion de symétrie

Notion d'Invariance

3°/ la symétrie est cylindrique donc la surface de Gauss le plus adaptée à cette distribution de charges est un cylindre de même axe que les deux cylindres chargés et de rayon r et de hauteur h.

4°/ Théorème de Gauss : $\oiint_{\text{Surf Gauss}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

* $r < R_1$: $d\phi = d\phi_{b.sup} + d\phi_{b\,inf} + d\phi_{surf\ Latérale}$

base sup : $d\vec{S} \to \vec{k}$; $\vec{E} \to \vec{e}_r \Rightarrow d\phi_{b\,sup} = 0$

base inf : $d\vec{S} \to -\vec{k}$; $\vec{E} \to \vec{e}_r \Rightarrow d\phi_{b\,inf} = 0$.

donc $d\phi = d\phi_{surf\ Lat} \Rightarrow \phi = E.\,2\pi r\,h$

$(d\vec{S} \to \vec{e}_r\ ;\ \vec{E} \to \vec{e}_r)$; sur la surface latérale $E = cte$ $(r = cte)$

$Q_{int} = 0 \Rightarrow \boxed{E_1 = 0}$

* $R_1 < r < R_2$: $Q_{int} = \sigma_1\, 2\pi R_1 h$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = \dfrac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\,\dfrac{1}{r}\,\vec{e}_r}$

* $r > R_2$: $Q_{int} = \sigma_1\, 2\pi R_1 h + \sigma_2\, 2\pi R_2 h$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_3 = \left(\dfrac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} + \dfrac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}\right)\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\vec{e}_r}$

5°/ Détermination du Potentiel $V(M)$:

* $r < R_1$: $\vec{E}_1 = -\overrightarrow{grad}\,V_1 = \vec{0}$

$\Rightarrow V_1 = cte = C_1$

* $R_1 < r < R_2$:

$dV_2 = -\dfrac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{r}\,dr$

$V_2 = -\dfrac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\ln r + C_2$

* $r > R_2$:

$dV_3 = -\left(\dfrac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} + \dfrac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}\right)\dfrac{1}{r}\,dr$

$V_3 = -\left(\dfrac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} + \dfrac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}\right)\ln r + C_3$

Détermination des constantes C_1 ; C_2 et C_3 :

* $V(0) = 0 \Longrightarrow V_1(0) = C_1 = 0 \Longrightarrow \boxed{V_1 = 0}$

* Continuité de V en R_1 :

$$\lim_{\substack{r \to R_1 \\ r < R_1}} V_1(r) = \lim_{\substack{r \to R_1 \\ r > R_1}} V_2(r) \Longrightarrow 0 = -\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln R_1 + C_2$$

$$\Longrightarrow C_2 = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln R_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{V_2(r) = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{r}\right)}$$

* Continuité de V en R_2 :

$$\lim_{\substack{r \to R_2 \\ r < R_2}} V_2(r) = \lim_{\substack{r \to R_2 \\ r > R_2}} V_3(r) \Longrightarrow \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = -\left(\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}\right) \ln R_2 + C_3$$

$$\Longrightarrow C_3 = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) + \left(\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}\right) \ln R_2$$

$$\Longrightarrow \boxed{V_3(r) = \left(\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}\right) \ln\left(\frac{R_2}{r}\right) + \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$$

Exercice N°7

Considérons deux sphères S_1 et S_2 de même centre O et de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$). La sphère interne S_1 est chargée uniformément en volume avec une densité volumique de charges ρ et la sphère externe S_2 est chargée uniformément en surface avec une densité surfacique de charge σ.

1- En utilisant la symétrie de charges, déterminer la direction du champ $\vec{E}(M)$ créé par les deux sphères en un point M de l'espace ?

2- En utilisant la notion d'invariance, déterminer les variables dont dépend le champ $\vec{E}(M)$.

3- Quelle est la surface de Gauss adaptée à cette distribution de charges ?

4- En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le champ $\vec{E}(M)$ crée par les deux sphères en tout point M(r) de l'espace.

5- Déterminer le potentiel V(M) en tout point de l'espace. (V (∞)=0).

Correction de l'exercice N°7

1°/ On a une symétrie sphérique ; donc on va travailler dans le système de coordonnées sphériques

* Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de charges considérée, donc $\vec{E}(M) \in$ plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.
* de même pour le plan $(M ; \vec{e}_r ; \vec{e}_\varphi)$; donc :

$\vec{E} \in \cap$ des deux plans

$\Longrightarrow \vec{E}$ est porté par $\vec{e}_r$.

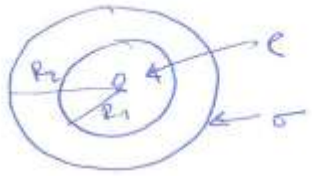
2°/ – Si on fait une rotation des deux sphères suivant θ ou φ : la distribution de charges reste inchangé par rapport au point $M(r)$.

– Par contre si on fait une translation suivant r, la distribution change $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r}$.

3°/ la symetrie est sphérique donc la surface de Gauss adaptée est une sphère de même centre que les deux sphères chargés et de rayon r.

4°/ $\underline{1^{ère} \text{ cas} : r < R_1}$

la surface de Gauss est la sphère de centre O et de rayon r.



Puisque E ne dépend que de r, donc :

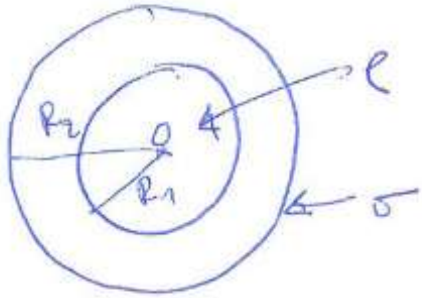
$\forall$ $M \in$ sphère de Gauss $E(r) = cte$.

$\oint\!\!\oint_{\text{surf Gauss}} \vec{E}_1 \cdot \vec{ds} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$; Q_{int} = charge totale qui se trouve à l'interieur de la surface fermée de Gauss

$\vec{E}_1 = E_1(r)\,\vec{e}_r$; $\vec{ds} = ds\,\vec{e}_r$

$\Rightarrow \phi = E\, 4\pi r^2 = \dfrac{4}{3}\dfrac{\pi r^3}{\varepsilon_0}\rho$; $\left(Q_{int} = \rho\, \frac{4}{3}\pi r^3\right)$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\, r\, \vec{e}_r}$



* $\underline{2^{ème} \text{ cas} : R_1 < r < R_2}$:

$\phi = E\, 4\pi r^2 = \dfrac{4}{3}\dfrac{\pi R_1^3}{\varepsilon_0}\cdot\rho$; $\left(Q_{int} = \rho\,\frac{4}{3}\pi R_1^3\right)$

$\boxed{\vec{E}_2 = \dfrac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{r^2}\cdot\vec{e}_r}$

* $3^{ème}$ cas : $r > R_2$:

$$\phi = E_3\, 4\pi r^2 = \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi R_1^3 \rho + \frac{4\pi}{\varepsilon_0} R_2^2 \sigma \quad ; \quad Q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \sigma 4\pi R_2^2$$

$$\vec{E}_3(r) = \left(\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \right) \vec{e}_r$$

$$\boxed{\vec{E}_3(r) = \left(\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0} \right) \cdot \frac{1}{r^2}\, \vec{e}_r}.$$

5°) Détermination du potentiel $V(r)$:

$$\vec{E} = -\vec{grad}\, V \Rightarrow V = -\int E(r)\, dr$$

* Pour $r > R_2$: $V_3(r) = \left(\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0} \right) \frac{1}{r} + cte$

or $V(\infty) = 0 \Rightarrow cte = 0$

$$\Rightarrow \boxed{V_3(r) = \left(\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0} \right) \cdot \frac{1}{r}}$$

* Pour $R_1 < r < R_2$:

$$V_2(r) = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + C$$

continuité en $r = R_2$ de V

$$\Rightarrow V_3(R_2) = V_2(R_2) \Rightarrow \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{R_2} + C = \left(\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0} \right) \frac{1}{R_2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{V_2(r) = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}}$$

* Pour $r < R_1$:

$$V_1(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + cte$$

continuité de V en $r = R_1 \Rightarrow V_1(R_1) = V_2(R_1)$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2} \frac{\rho R_1^2}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$$

d'où $\boxed{V_1(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho R_1^2}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}}$