Université de Lomé
EPL

Année Universitaire 2024 − 2025

Devoir sur les oscillateurs–Durée: 2h 00

Documents interdits. Téléphones portables éteints et hors de la table. Présentation soignée; prise en compte dans la notation (-2 ou +2 points possibles). L'étudiant n'aura pas besoin d'une calculatrice.

Exercice 1

Une sphère de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_o. Elle est plongée dans un liquide de coefficient de viscosité η et soumise alors à une force de frottement fluide donnée par la formule de Stokes :

$$\overrightarrow{F} = 6\pi\eta r\overrightarrow{v}$$

où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse. Dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables sur la sphère, la période des oscillations est T_o. Déterminer le coefficient de viscosité h en fonction de m, r, T_o et de la pseudo-période T des oscillations dans le fluide.

Exercice 2

Une masse m, considérée comme ponctuelle, repose sur un plan horizontal. Elle est accrochée à l'extrémité d'un ressort de raideur k, de longueur à vide l_o , l'autre extrémité étant fixe par rapport au plan.

On repère la position de la masse par rapport à sa position O d'équilibre (voir figure)

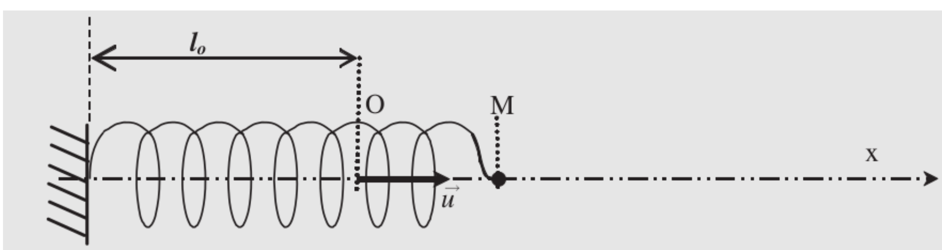

Figure 1: Figure d'étude

On repère la position M de la masse m à la date t par $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}$.
À $t = 0$, on écarte la masse de $x_o = X_m$ et on lâche sans vitesse initiale.

1. La masse peut se déplacer sur le plan horizontal sans frottement. Déterminer l'équation horaire $x(t)$ du mouvement de cette masse. Comment qualifie-t-on cet oscillateur? Déterminer les expressions et valeurs de sa pulsation propre ω_0, de sa période propre T_o et de sa fréquence propre N_o.

2. La masse subit des forces de frottement fluide dont la résultante est de la forme

   $$\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$$

   où $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse de m et a une constante positive.

   (a) Donner la nouvelle équation différentielle du mouvement de m.

(b) Indiquer brièvement quels sont les 3 types de mouvement possible en fonction de la valeur de α et représenter l'allure des graphes $x\left(t\right)$ correspondant. Que se passe-t-il au bout d'un temps suffisamment long?

3. Le point M est maintenant soumis à une force supplémentaire de type sinusoïdal :

$$\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{u}$$

avec $F = F_o cos\omega t$.

(a) Exprimer la nouvelle équation différentielle à laquelle obéit $x\left(t\right)$. La solution de cette nouvelle équation différentielle est la somme de la solution de l'équation différentielle sans second membre qui correspond à un régime transitoire (voir question précédente) et d'une solution particulière qui corres- pond au régime permanent. En régime permanent, l'amplitude est de la forme $x\left(t\right) = X_o cos(\omega t + \phi)$ et la vitesse $v = V_o cos(\omega t + \varphi)$. On utilisera la notation complexe :

$$\widetilde{F} = F_0 e^{j\omega t} \qquad \widetilde{x} = \widetilde{X_0} e^{j\omega t} = X_0 e^{j\phi} e^{j\omega t} \qquad \widetilde{v} = \widetilde{V_0} e^{j\omega t} = V_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

(b) Définir la vitesse v et en déduire la relation entre V_o et X_o et entre φ et ϕ.

(c) En remplaçant, dans l'équation différentielle $\widetilde{x}$, $\dot{\widetilde{x}}$ et $\ddot{\widetilde{x}}$ par leur expression complexe, montrer qu'on a la relation suivante : $F_0 = \widetilde{Z}\widetilde{X_0}$ où $\widetilde{Z}$ appelé impédance mécanique complexe (liée au déplacement x), ne dépend que de k, m, α et ω.

(d) Donner l'expression de X_o en fonction de F_0, m, $\lambda = \frac{\alpha}{m}$, ω_0 et ω. Montrer que si l'oscillateur est faiblement amorti (pour $\alpha < \sqrt{2km}$), l'amplitude passe par un maximum pour une pulsation excitatrice ω_m légèrement différente de ω_0. Donner l'expression de ω_m.

(e) Déterminer l'expression de $tan\phi$ où ϕ représente le déphasage de $x\left(t\right)$ par rapport à F

(f) En utilisant b) et d) déduire l'expression de V_o en fonction de F_0, m, $\lambda = \frac{\alpha}{m}$, ω_0 et ω. Que se passe-t-il pour $\omega = \omega_0$? Quel nom porte ce phénomène? Donner l'allure de la courbe $V_o = f\left(\omega\right)$.