Université de Lomé
Département de Mathématiques Année académique: 2020-2021

TD de MTH101 N° 2: *Matrices*

1. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A, notée $tr(A)$, la somme des éléments diagonaux de A.

   (a) Montrer que tr est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   (b) Montrer que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $tr(AB) = tr(BA)$.

   (c) Soient X et Y deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ représentant le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ par rapport à des bases différentes. Montrer que $tr(X) = tr(Y)$.

2. Ecrire les matrices des applications linéaires dans les bases canoniques:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x)$.

   (b) $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z, t) \mapsto (x + y + 2z - t, x - y - z + 2t)$.

   (c) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto [(m+2)x - y + z, -x + (m+2)y + z, x - y + (m+2)z]$.

3. Calculer les inverses des matrices suivnates:
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

   Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$, en déduire que M est inversible et calculer M^{-1}. En déduire qu'il existe deux suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uniques telles que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = u_k I_3 + v_k M$. On exprimera u_k et v_k, puis M^k explicitements en fonction de k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

5. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'endomorphisme u dont la matrice M par rapport à $\mathcal{B}$ est: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Calculer M^2 et vérifier que $M^3 = 0$ puis calculer $(I - M)(I + M + M^2)$. En déduire que $I - M$ est inversible et préciser son inverse. Quelle est la dimension du noyau de u?

   Quel est le rang de u? On pose $e'_1 = u^2(e_3)$, $e'_2 = u(e_3)$, $e'_3 = e_3$. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   Donner la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, Calculer P^2 et en déduire P^{-1}. Donner la matrice M' de u dans la base $\mathcal{B}'$.

6. Soit $E = \left\{ M_{abc} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix},\quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

   Trouver trois matrices I, J et K telles que $M_{abc} = aI + bJ + cK$. Calculer JK et J^{-1}. On considère les éléments $H = M_{111}$ et $L = M_{011}$. Calculer H^n, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $L^n = x_n I + y_n L$. Calculer L^{n+1} et écrire x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n. En déduire L^2 et L^3.

7. A et B sont deux matrices. I désigne la matrice identité. Parmi les affirmations suivantes, dire lesquelles sont vraies:

   (a) Si le produit AB existe, alors le produit BA existe

   (b) Si la somme $A + B$ existe, alors le prdoduit AB existe

   (c) Si le produit AB existe alors le produit $B^T A^T$ existe

   (d) Si la somme $A + B$ existe alors le produit AB^T existe

   (e) Si $rg(A) = 2$ alors $rg(A^2) = 2$

   (f) Si $rg(A^2) = 2$ alors $rg(A) = 2$

8. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Indiquer le rang de cette matrice

(a) 1

(b) 2

(c) 4

(d) 8

9. Soient $E = \mathbb{R}^2$ muni sa base canonique $\mathcal{B}$ et f un endomorphisme de E. Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

(a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

(b) La matrice de f par rapport à $\mathcal{B}$ donnée par $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ permet d'affirmer que f est un isomorphisme.

(c) Le vecteur $v = (-1, 1, -1)$ est dans le noyau de f.

(d) Le vecteur $v = (-1, 1, -1)$ est dans l'image de f.

10. Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On définit les vecteurs $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 - e_3$ et $v_3 = e_2 + e_3$ et f l'endomorphisme de E tel que: $f(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3$, $f(e_2) = -e_1 + e_2 - 3e_3$ et $f(e_3) = e_1 - e_3$. Dans les questions suivantes indiquer les propositions vraies ou fausses.

Q_1) La matrice de f par rapport à $\mathcal{B}$ est:

$A : \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B : \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad D : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q_2) L'image par f de v_1 a pour coordonnées:

$A : {}^t(2, -2, -3)$ $\quad B : {}^t(2, -3, -2)$ $\quad C : {}^t(0, -3, 0)$

Q_3) La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\{v_1, v_2, v_3\}$ est :

$A : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad C : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad D : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

11. Quelles sont les définitions correctes?

A : Une matrice est dite carrée si chacun de ses coefficients est un carré.

B: La matrice inverse de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est définie si chacun des a_{ij} est non nul; c'est la matrice $\left(\dfrac{1}{a_{ij}}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

12. Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que vaut M^{2018}?

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.