Université de Lomé

ANNEE ACADEMIQUE: 2022-2023

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
B.P 1515 LOME

UE MATH 102: Examen
SEMESTRE MOUSSON
DURÉE: 2 heures

EXERCICE 1 (8 pts) **(FDS seulement)**

Soit E un ensemble non vide fini muni d'une loi de composition interne , associative notée multiplicativement dont tout élément est régulier.

1. En utilisant les translations à gauche γ_x et à droite δ_x , $x \in E$, montrer que $(E, .)$ admet un élément neutre e.
2. Montrer que tout élément de E est symétrisable.
3. Conclure.

<u>EXERCICE 2</u> (8 pts) **(EPL seulement)**

On considère l'équation (E) : $17x + 26y = 1$ où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.

1. Déterminer une solution particulière de (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
3. Déterminer un entier u tel que $17u \equiv 1[26]$.
4. Soit $\mathcal{N}$ un nom. $\mathcal{N}$ subit une permutation $\pi = (12453)$, ce qui donne $\pi(\mathcal{N})$.
   On code ensuite $\pi(\mathcal{N})$ par la fonction $f(x) = 17x + 22\ [26]$, $x \in \{0, 1, 2, \cdots, 25\}$. On obtient alors à la fin du processus $f(\pi(\mathcal{N})) = WZDMY$.
   (a) Déterminer la fonction de déchiffrage g de f.
   (b) Déterminer le nom $\mathcal{N}$.
5. Le nom $\mathcal{N}$ subit la permutation $\sigma = (51432)$, ce qui donne un nom célèbre $\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{H}$. Déterminer $\mathcal{H}$.

EXERCICE 3 (8 pts)

Soit σ une permutation de $\mathcal{S}_{10}$ définie par: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer σ en produit de cycles disjoints puis en produit de transpositions.
2. Calculer $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ puis sa signature $\varepsilon(\sigma)$.
3. Déterminer σ^{-1} puis σ^{2023} .
4. Déterminer la permutation μ telle que $\sigma\mu = (210579)$.

EXERCICE 4 (8 pts)

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes:

$$f(x) = \frac{X^3+1}{X^3-1}, \qquad g(x) = \frac{X+1}{(X-1)(X+1)^2}, \qquad h(x) = \frac{x^2-x+1}{(x^2+4x+5)^2}\ .$$