Université de Lomé
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année académique: 2022-2023

TD de MTH101 N° 1: *Espaces vectoriels et applications linéaires*

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$, montrer que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que F_1 et F_2 sont deux sev de E supplémentaires dans E où F_1 (resp.F_2) est l'ensemble des applications paires (resp. impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\forall\, f, g \in E$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha.f)(x) = \alpha f(x)$.

3. On considère le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^n$ et pour tout $n \geqslant 2$ on pose $x = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On considère les sous-ensembles suivants: $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = 0\}$, $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = 1\}$, $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = x_2\}$, $E_4 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 x_2 = 0\}$, $E_5 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = x_2 = 0\}$, $E_6 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$ et $E_7 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 + x_2 = 1\}$. Pour tout $i = 1, \cdots, 7$, E_i est -il un sous-espace de $\mathbb{R}^n$? Dans l'affirmative, donner en une base et sa dimension.

4. Etudier chacun des systèmes, $S = (u, v, w)$, suivants et déterminer leur rang (en fonction du paramètre α s'il y a lieu):
   i. $u = {}^t(5, -3, 1)$, $v = {}^t(1, -2, 1)$ et $w = {}^t(3, 1, -3)$
   ii. $u = {}^t(\alpha, 1, 1)$, $v = {}^t(1, \alpha, 1)$ et $w = {}^t(1, 1, \alpha)$.

5. Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \;/\; x + y + z = 0 \quad et \quad x + iy - z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{C}^3$, et en déterminer une base et la dimension.

6. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}$. Soit $G = \{{}^t(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + 2y - z = t\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de G et donner sa dimension. Soient $s = {}^t(1, 0, 1, 0)$, $u = {}^t(0, 1, 0, 2)$, $v = {}^t(1, 1, 1, 2)$ et $w = {}^t(3, 1, 3, 2) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que le système (s, u, v, w) est lié. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (s, u, v, w). Donner une base de F. Comparer F et G.

7. Montrer que les applications suivantes sont linéaires :
   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, définie par $f(x, y, z) = (2x - y, x + y - z)$
   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par $f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$

8. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ une application linéaire donnée par $f(x, y, z, t) = (x+z, x+t, y+z, y+t)$
   (a) Trouver une base de l'image de f et le rang de f.
   (b) Trouver une base du noyau de f et sa dimension.
   (c) Montrer que f n'est pas un isomorphisme.

9. Soient E un espace vectoriel sur le corps commutatif $\mathbb{K}$, de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Montrer que $F + G = \{x + y / x \in F \text{ et } y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.
   (b) Soit $f : F \times G \to E$ par $f(x, y) = x + y$. Montrer que f est linéaire et trouveer $Ker f$ et $Im f$. En utilisant la relation $dim_{\mathbb{K}}(F \times G) = dim_{\mathbb{K}}(F) + dim_{\mathbb{K}}(G)$, retrouver le résultat $dim_{\mathbb{K}}(F + G) + dim_{\mathbb{K}}(F \cap G) = dim_{\mathbb{K}}(F) + dim_{\mathbb{K}}(G)$.

10. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
    Montrer que pour tout endomorphisme f de E, on a:
    $(Im\, f = Im\, f^2) \Leftrightarrow (E = Ker\, f \oplus Im\, f)$.

11. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

(a) $W_1 = \{(a, b, 0); a, b \in \mathbb{R}\}$ ☐

(b) $W_2 = \{(a, b, c); a \geqslant 0, b, c \in \mathbb{R}\}$ ☐

(c) $W_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a + b + c = 0\}$ ☐

(d) $W_4 = \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$. ☐

12. Les affirmations suivantes sont-elles correctes?

(a) Le vecteur $u = (2, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, -3, 2)$, $v_2 = (2, -4, -1)$ et $v_3 = (1, -5, 7)$. ☐

(b) Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de vecteurs $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (0, 1, 2)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. ☐

(c) Le plan $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$ est engendré par $v = (2, 3, 0)$ et $w = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, 0\right)$. ☐

13. Soit E un espace vectoriel de dimension 7 et soient V et W deux sous-espaces vectoriels de dimensions respectives 4 et 5. Est-il possible que $V \cap W$ soit de dimension

1? 2? 3? 4? 5?

14. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, indiquer la famille de vecteurs qui constituent une base.

(a) $x_1 = (1, 2, -1)$, $x_2 = (-2, 1, 1)$, $x_3 = (1, -1, 2)$ ☐

(b) $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (2, -1, 1)$, $x_3 = (1, 0, 1)$ $x_4 = (0, 1, 1)$ ☐

(c) $x_1 = (1, -1, 0)$, $x_2 = (1, 0, 1)$, $x_3 = (1, 2, 3)$ ☐

(d) Indiquer la valeur de $t \in \mathbb{R}$ pour laquelle les vecteurs $(1, 0, t)$, $(1, 1, t)$ et $(t, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
$A : t = -1$ $B : t = 1$ $C : t = 0$

(e) Parmi les application suivantes, dire laquellle est linéaire
$A : f(x, y) = (x+1, y+1)$ $B : g(x, y) = (3x - y, 0)$ $C : h(x, y, z) = (x, xyz, z)$

(f) Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit f l'endomorphisme de E, $(x, y, z) \mapsto (x + 3z, 0, y - 2z)$. Dire laquelle des propositions suivantes est vraie.
$A : f(e_1) = e_1 + 3e_3,\ f(e_2) = 0,\ f(e_3) = e_2 - 2e_3$
$B : f(e_1) = e_1,\ f(e_2) = e_3,\ f(e_3) = 3e_1 - 2e_3$
$C : Ker\ f = \{0\}$

(g) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x + y, x - y, x - y)$. Indiquer laquelle des propositions suivantes est le $Ker\ f$
$A : \{(0, 0)\}$ $B : Vect(1, 1)$ $C : Vect((2, 1, 1), (1, -1, 1))$

(h) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x + y, x - y, x - y)$. Indiquer laquelle des propositions suivantes est le $Im\ f$
$A : Vect((0, 1, 0))$ $B : Vect((2, 1, 1), (1, -1, -1))$ $C : \mathbb{R}^3$

(i) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, soit $B = (v_1, \cdots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E. Dans ce qui suit, j désigne un entier entre 1 et n. Indiquer la bonne proposition
A : Si B est libre alors $B\ \{v_j\}$ est libre
B : Si B est liée alors $B - \{v_j\}$ est liée
C : Si B est liée alors $B - \{v_j\}$ est libre