Soyez tous les bienvenus !

Exo 7

X = ensemble ; $\mathcal{F}(X, [0,1])$ = ens des applic. de $X \longrightarrow \{0,1\}$.

Mtq $\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{F}(X, [0,1])$

$A \longmapsto \chi_A$ = f$^{\text{n}}$ caractéristiq de A

est bijective

solut°

Montrons que ϕ est injective

Soit $A, B \in \mathcal{P}(X)$ tq $\phi(A) = \phi(B)$

$$\phi(A) = \phi(B) \Rightarrow \chi_A = \chi_B$$

$$\Rightarrow A = B$$

D'où ϕ est injective.

ϕ surjective ?

Soit $f \in \mathcal{F}(X, [0,1])$. Trouvons $A \in \mathcal{P}(X)$ tq $\phi(A) = f$.

(A serait donc un antécédent de f.)

on a : $f \in \mathcal{F}(X, [0,1]) \Leftrightarrow f : X \longrightarrow \{0,1\}$ est une appl.
$x \longmapsto f(x)$

Donc $\forall x \in X$, $f(x) \in \{0,1\}$

Trouvons $A \in \mathcal{P}(X)$ tq $\phi(A) = \chi_A = f$ ie $\begin{cases} f(x) = \chi_A(x) = 1 & \text{si } x \in A \\ f(x) = \chi_A(x) = 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \in A \\ f(x) = 0 & \text{si } x \notin A . \end{cases} \qquad A = ?$$

Posons $A = f^{-1}(1) = \{x \in X \,/\, f(x) = 1\}$

On a bien $\phi(A) = \chi_A = f$.

$\chi_A = f$ car $\forall x \in X$, on a $x \in A \Leftrightarrow f(x) = 1$.

$$x \in A \Leftrightarrow \chi_A(x) = 1$$

Donc $f(x) = \chi_A(x) \quad \forall x \in A$.

$x \notin A \Leftrightarrow f(x) \neq 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$ car $f(x) \in \{0,1\}$

$$x \notin A \Leftrightarrow \chi_A(x) = 0$$

Donc $f(x) = \chi_A(x) \quad \forall x \notin A$

Ainsi $\forall x \in X$, $f = \chi_A = \phi(A)$.

Par suite f est surjective.

<u>Ccl</u> f est dc bijective.

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{F}(X, [0,1]) \ni f \\ A &\longmapsto \phi(A) = \chi_A \end{aligned}$$

Pour montrer que ϕ est surj on prend f un élt qcq de l'ens d'arrivée.

Et on montre qu'il admet au moins 1 antécédent

- $\underbrace{f \in \mathcal{F}(X, [0,1])}_{\text{Ens d'arrivée de } \phi}$ signifie que $f : X \to [0,1]$ est une application.

Il faut trouver $A \in \mathcal{P}(X)$ (ens de départ)

tq $\underbrace{\phi(A) = f}_{\text{éq à résoudre d'inconnue } A}$.

or $\phi(A) = \chi_A$. Donc $\phi(A) = f \Leftrightarrow \chi_A = f$.

ie $\forall x \in X,\ \chi_A(x) = f(x) \in \{0,1\}$

$\forall x \in X,\quad \chi_A(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } \underline{x \in A} \\ f(x) = 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

Que vaut donc A ?

$A =$ l'image réciproque de 1 par f.

ie $A = f^{-1}(\{1\})$

On définit la relation binaire ≼ sur N2 par
(x1 , x2) ≼ (y1 , y2) ⇔ (x1 < y1) ou (x1 = y1 et x2 ≤ y2).
(a) Vérifier que c'est une relation d'ordre.
(b) La partie B = {(2, 10p) : p ∈ N} de N2 est-elle majorée ?

$E = \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Sur E, on défini la relat° binaire $\preccurlyeq$ par

$\forall\ (x_1, x_2), (y_1, y_1) \in \mathbb{N}^2$

$\boxed{(x_1, x_2) \mathcal{R} (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 < y_1) \text{ ou } (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2)}$

Exple $(1,2)\,\mathcal{R}\,(3,4)$ car $1<3$.

$(1,2)\,\mathcal{R}\,(1,2)$ car $1=1$ et $2\leq 2$

$(2,6)\,\mathcal{R}\,(2,8)$ car $2=2$ et $6\leq 8$.

$(2,3)\,\not\mathcal{R}\,(1,2)$ mais

$(1,2)\,\mathcal{R}\,(2,3)$ ✓

$(4,3)\,\not\mathcal{R}\,(2,3)$ mais $(2,3)\,\mathcal{R}\,(4,3)$ car $2<4$.

$(3,1)\,\mathcal{R}\,(5,9)$

Cette relation définie est TOTALE. ie

$\forall\,(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{N}^2$ on a $\begin{cases}(x_1,x_2)\,\mathcal{R}\,(y_1,y_2)\\ \text{ou}\\ (y_1,y_2)\,\mathcal{R}\,(x_1,x_2)\end{cases}$

Car étant donné $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{N}$,

On a $\begin{cases}x_1=y_1 & (1)\\ \text{ou}\\ x_1<y_1 & (2)\\ \text{ou}\\ y_1<x_1 & (3)\end{cases}$

Ds le cas (2) on a $(x_1,x_2)\,\mathcal{R}\,(y_1,y_2)$

" " (3) on a $(y_1,y_2)\,\mathcal{R}\,(x_1,x_2)$

" " (1), il faut comparer les ordonnées x_2 et y_2

on a 2 cas : $\begin{cases}x_2\leq y_2 & (1.1)\\ \text{ou}\\ x_2>y_2 & (1.2)\end{cases}$

Ds le cas (1.1), $(x_1,x_2)\,\mathcal{R}\,(y_1,y_2)$

Ds le cas (1,2) on a $(y_1, y_2) \mathcal{R} (x_1, x_2)$.

Concl $\mathcal{R}$ est TOTALE.

Mq $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre (RAT)

• Réflexivité

$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$, on a $x_1 = x_1$ et $x_2 \leq x_2$. Donc $(x_1, x_2) \mathcal{R} (x_1, x_2)$.

Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

• Antisymétrie.

Soit $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{N}^2$ tq $\begin{cases} (x_1, x_2) \mathcal{R} (y_1, y_2) \\ (y_1, y_2) \mathcal{R} (x_1, x_2) \end{cases}$

Alors on a : $\begin{cases} \overbrace{(x_1 < y_1)}^{P} \text{ ou } (\underbrace{x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2}_{Q}) \\ (\underbrace{y_1 < x_1}_{R}) \text{ ou } (\underbrace{y_1 = x_1 \text{ et } y_2 \leq x_2}_{S}) \end{cases}$

$\Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x_1 < y_1 \\ y_1 < x_1 \end{cases}}_{\text{imp.}}$ ou $\begin{cases} x_1 < y_1 \\ \underbrace{y_1 = x_1}_{\text{imposs}} \text{ et } y_2 \leq x_2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2 \\ \underbrace{y_1 < x_1}_{\text{imposs}} \end{cases}$

ou $\begin{cases} x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2 \\ \underbrace{y_1 = x_1 \text{ et } y_2 \leq x_2}_{\text{vrai}} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 \leq y_2 \text{ et } y_2 \leq x_2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$

$(P \vee Q) \wedge (R \vee S) \equiv (P \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (Q \wedge R) \vee (Q \wedge S)$

$\Rightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

Donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique