Chapter 3

Géométrie des masses

Sommaire

3.1 Approche historique

La notion de barycentre est utilisée en physique, et en particulier en mécanique et en astronomie, pour simplifier l'étude du mouvement d'un système. Le premier à avoir étudié le barycentre en tant que centre des poids (ce qu'on appelle de nos jours le centre de gravité) est le mathématicien et physicien **Archimède**. Il est un des premiers à comprendre et expliciter le principe des moments, le principe des leviers et le principe du barycentre. Il écrit dans son traité sur le centre de gravité de surface plane : << Tout corps pesant a un centre de gravité bien défini en lequel tout le poids du corps peut être considéré comme concentré >>. Il est le premier à avoir cherché des centres de gravité de surface comme des demi-disques, des paraboles. Il procède par approximations successives et a pu prouver que la recherche d'un centre de gravité utilise des méthodes analogues à celle du calcul d'aire. Par suite, sur la base de ses travaux, **Guldin** a développé les deux théorèmes portant son nom.

3.2 Masse - Centre de masse

3.2.1 Définition

La mécanique classique associé à tout corps matériel une grandeur qui représente sa masse notée m. La masse vérifie les trois axiomes suivants :
Positivité: $\forall$ le système matériel (S), $m(S) \geq 0$;
Additivité: $\forall$ la fragmentation de (S) en sous-systèmes $(S_i), m(S) = \sum_i m(S_i)$;
Invariabilité: La masse de tout système est invariante dans tout mouvement de ce système (vitesses très faibles devant la célérité de la lumière).
• Si (S) est un corps continu, sa masse est l'une des intégrales suivantes :

$m = \int_S dm = \int_V \rho(P)dv$: intégrale de volume (distribution volumique de la masse)
$m = \int_S dm = \int_\sigma \sigma(P)ds$: intégrale de surface (une dimension négligeable devant les deux autres)
$m = \int_S dm = \int_l \lambda(P)d\lambda$: intégrale de ligne (deux dimensions négligeables devant la troisième)

Pour toutes ces intégrales, l'élément de masse dm contient le point P. Les quantités $\rho(P)$, $\sigma(P)$ et $\lambda(P)$ sont appelées respectivement *masse volumique locale*, *masse surfacique locale* et *masse linéique locale*.

S'il s'agit de corps homogènes alors $\rho(P) = cte$, $\sigma(P) = cte$ et $\lambda(P) = cte$.

• Point matériel : c'est un point géométrique affecté d'une masse m. La masse spécifique ne peut être définie dans ce cas.

3.2.2 Centre de masse

On l'appelle également centre d'inertie ou centre de gravité et on le note G en général.

Définitions
• Système discret : Dans le cas de n points matériels P_i de masse m_i, on a :

$$m(S)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OP_i} : O \text{ est un point quelconque de l'espace}$$
$$m(S) = \sum_i m_i = \sum_i m(S_i)$$

Si $O \equiv G$ on aura : $\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}$

• Système continu :

$$m\overrightarrow{OG} = \int_{(S)} \overrightarrow{OP}dm, \text{ avec } dm \text{ désignant un élément de masse autour du point } P \text{ et}$$

$$m = \int_{(S)} dm.$$

Si $O \equiv G$ on aura : $\int_{(S)} \overrightarrow{GP}dm = \overrightarrow{0}$

Remarque

Si $(S) = (S_1) + (S_2) + (S_3) + ... + (S_n)$ alors $m\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OG_i}$

avec $m_i = m_i(S_i),\ i = 1, 2, 3, ..., n$ et $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$

3.2.3 Théorème de Guldin

Les méthodes pratiques de recherche de G dans le cas de corps homogènes :

a- Quand c'est possible, on décompose le système en éléments plus simples dont on connaît les centres de masse, puis on détermine le barycentre de ceux-ci (exemple : centre de masse du système sphère - cylindre).

b- Utiliser le symétries du système lorsqu'elles existent : le centre de masse appartient aux éléments de symétrie.

c- Lorsqu'il s'agit de déterminer les centres de masse d'arcs, de courbes planes ou de surfaces planes, on regarde s'il y a une possibilité d'utiliser un des deux théorèmes de Guldin.

3.2.3.1 Théorème I

AB est une courbe homogène située dans le plan xOy.
Une rotation de AB autour de $Oy/(Ox)$ engendre une surface $S_y/(S_x)$. La rotation autour de Oy du petit élément dl, construit autour de P, engendre une surface $dS_y = 2\pi x dl \implies S_y = \int_{AB} 2\pi x dl$
La rotation du même élément autour de Ox engendre la surface $dS_x = 2\pi y dl \implies S_x = \int_{AB} 2\pi y dl$
Le centre de masse G de (AB) est tel que $m\overrightarrow{OG} = \int_{AB} \overrightarrow{OP}dm \implies \lambda L\ \overrightarrow{OG} = \int_{AB} \lambda\ \overrightarrow{OP}dl.$
Par projection dans le plan xOy :

$$\boxed{x_G = \frac{1}{L}\int_{AB} x dl = \frac{S_y}{2\pi L}} \quad \text{et} \quad \boxed{y_G = \frac{1}{L}\int_{AB} y dl = \frac{S_x}{2\pi L}}$$

Exemple d'application :
Détermination du centre de masse G d'un quart de cercle de rayon R.
$S_y = 2\pi R^2, \quad S_x = 2\pi R^2$ (surface d'une demi-sphère) $(AB) = L = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}$
D'où $x_G = \frac{S_y}{2\pi L} = \frac{2R}{\pi}$ et $y_G = \frac{S_x}{2\pi L} = \frac{2R}{\pi}$

3.2.3.2 Théorème II

Soit (S) une surface plane située dans le plan xOy.
Une rotation de l'élément dS autour de Oy engendre le volume élémentaire $dV_y = 2\pi x dS \implies$

$$V_y = \int_S dV_y = 2\pi \int_S x dS$$

De même, une rotation de dS autour de Ox engendre le volume élémentaire $dV_x = 2\pi y dS \implies$

$$V_x = \int_S dV_x = 2\pi \int_S y dS$$

Comme $m\overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} dm \implies \overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \int_{(S)} \overrightarrow{OP} dS$

Par projection, on aura :

$$\boxed{x_G = \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS = \frac{V_y}{2\pi S}} \quad \text{et} \quad \boxed{y_G = \frac{1}{S} \int_{(S)} y dS = \frac{V_x}{2\pi S}}$$

Exemple : Détermination du centre de masse d'un quart de disque homogène de rayon R.

$$x_G = \frac{V_y}{2\pi S} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{2\pi \frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{V_x}{2\pi S} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{2\pi \frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi}$$

3.2.4 Centre de masse de volume ou de surface homogènes présentant un axe de révolution

Exemple : Cas d'un demi-disque homogène de rayon R.

Ce demi-disque est l'union de deux quarts de disque. Le centre de masse G est tel que :

$$m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} \implies x_G = 0 \quad et \quad y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

Calcul direct de G

Par raison de symétrie, l'élément de surface de côte y et d'épaisseur dy, admet P comme centre de masse tel que :

$$m\overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} dm$$

avec $dm = 2\sigma r dy$ et $m = \sigma S$

$$\begin{cases} r = R\cos\theta \\ \\ y = R\sin\theta \end{cases} \implies dy = R\cos\theta d\theta$$

$$m y_G = \int_S y dm \implies y_G = \frac{2}{S}\int_S r y dy = \frac{2}{S}\int_0^{\pi/2} R^3 \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{4R}{3\pi}$$

3.3 Moment d'inertie - Opérateur d'inertie

3.3.1 Définitions

La notion de moment d'inertie présente un grand intérêt sur le plan de la véritable histoire de la mécanique et sur celui de la philosophie et de ses principes. C'est en 1673 que **Huygens**, dans la solution du problème du centre d'oscillation du pendule composé (livre : Traité du Pendule), fit apparaître pour la première fois une quantité de la forme $\sum mr^2$. C'est en 1810 − 1811 que cette quantité intervint pour la première fois sous le nom de moment d'inertie, et d'une manière officielle et systématique, dans l'enseignement de la Mécanique des solides indéformables.

Concernant la signification physique, le moment d'inertie est une grandeur qui caractérise la géométrie des masses d'un solide, c'est-à-dire la répartition de la matière en son sein. Il quantifie également la résistance à une mise en rotation de ce solide (ou plus généralement à une accélération angulaire).

3.3.2 Moment d'inertie

On peut définir la distance de M par rapport à un point O, une droite (Δ) ou un plan (π). Il leur correspond respectivement des moments d'inertie par rapport à un point, un axe ou un plan. Ils sont définis par r^2dm, avec r désignant la distance du point M, de la masse dm, par rapport au point O, à l'axe (Δ) ou au plan (π).
Pour le solide c'est $\int_{(S)} r^2dm$
Notations: $I(O,S)$, $I(\Delta,S)$ et $I(\pi,S)$ ou simplement I_O, I_Δ et I_π.
Considérons le cas de la figure ci-contre :
Soit un élément de masse dm autour de $M \in (S)$.

• La distance entre M et le plan xOy est z.
Le moment d'inertie de M par rapport à ce plan est z^2dm
Le moment d'inertie de S par rapport à xOy est $I(xOy,S) = \int_s z^2dm$

Par simple permutation, on aura
$I(xOz,S) = \int_S y^2dm$ et $I(yOz,S) = \int_S x^2dm$

•• Le carré de la distance de M par rapport à Oz est $(Om)^2 = x^2+y^2 \implies I(Oz,S) = \int_S \left(x^2+y^2\right) dm$

De même : $I(Ox,S) = \int_S \left(y^2+z^2\right) dm$ et $I(Oy,S) = \int_S \left(x^2+z^2\right) dm$

••• Le carré de la distance entre les points M et O est $(OM)^2 = x^2+y^2+z^2 \implies I(O,S) = \int_S \left(x^2+y^2+z^2\right) dm$: c'est le moment d'inertie de S par rapport au point O.

Les relations entre ces grandeurs : on peut écrire
$x^2+y^2+z^2 = (x^2)+(y^2)+(z^2) \implies I(O,S) = I(yOz,S)+I(xOz,S)+I(xOy,S)$

$x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{2}\left[(x^2+y^2)+(x^2+z^2)+(y^2+z^2)\right] \implies I(O,S) = \frac{1}{2}\left[I(Oz,S)+I(Oy,S)+I(Ox,S)\right]$

$x^2+y^2+z^2 = (x^2+y^2)+z^2 = (x^2+z^2)+y^2 = x^2+(y^2+z^2) \implies I(O,S) = I(Oz,S)+I(xOy,S) = I(Oy,S)+I(xOz,S) = I(yOz,S)+I(Ox,S)$

3.3.3 Opérateur d'inertie en un point O

Considérons l'axe (Δ) passant par O et de vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$: $I(\Delta, M) = r^2 dm$ et $I(\Delta, S) = \int_S r^2 dm$

D'après la figure, on a : $r = OM \sin\alpha = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \|\overrightarrow{u}\| \sin\alpha = \left\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right\|$

Donc : $r^2 = \left\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right\|^2 = \left(\underbrace{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}}_{1}\right) . \left(\underbrace{\overrightarrow{u}}_{2} \wedge \underbrace{\overrightarrow{OM}}_{3}\right)$

Par permutation circulaire, on obtient :

$r^2 = \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right] . \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} . \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right]$

$I(\Delta, S) = \int_S r^2 dm = \overrightarrow{u} . \int_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right] dm$

$I(\Delta, S) = \overrightarrow{u}$ multiplié scalairement par une certaine opération faite sur le vecteur $\overrightarrow{u}$.

On symbolise cette opération par un opérateur appelé **opérateur d'inertie en O** et noté $J(O, S)$.

Cet opérateur a les dimensions d'un moment d'inertie $(kg.m^2)$.
On pose $J(O, S) = \int_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right] dm$
Finalement, on a : $I(\Delta, S) = \overrightarrow{u} . J(O, S)(\overrightarrow{u})$
L'opérateur $J(O, S)$ dépend du point O puisque les distances sont mesurées par $\overrightarrow{OM}$.
Considérons l'application de $E \longrightarrow E$

$$\overrightarrow{u} \longmapsto J(O, S)(\overrightarrow{u})$$

- $J(O, S)$ est une application linéaire
- •• $J(O, S)$ est une application symétrique i.e. $\overrightarrow{v} . J(O, S)(\overrightarrow{u}) =^? \overrightarrow{u} . J(O, S)(\overrightarrow{v})$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} . J(O, S)(\overrightarrow{u}) &= \overrightarrow{v} . \int_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right] dm \\
&= \int_S \overrightarrow{v} . \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right] dm \\
&= \int_S \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right) . \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{OM}\right) dm \\
&= \int_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right] . \overrightarrow{u} \, dm \\
&= \overrightarrow{u} . \int_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right] dm \\
\overrightarrow{v} . J(O, S)(\overrightarrow{u}) &= \overrightarrow{u} . J(O, S)(\overrightarrow{v})
\end{aligned}$$

3.4 Matrice d'inertie - Matrice principale d'inertie

3.4.1 Matrice d'inertie

Soit $b = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormée directe de E. A l'opérateur $J(O, S)$, on peut associer une matrice dans cette base.

$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, avec $M \in (S)$.

$$J(O,S)(\overrightarrow{i}) = \int_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right] dm = \int_S \left[\left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\right) \wedge \left(y\overrightarrow{k} - z\overrightarrow{j}\right)\right] dm$$

$$J(O,S)(\overrightarrow{i}) = \int_S \left(-xy\overrightarrow{j} - xz\overrightarrow{k} + y^2\overrightarrow{i} + z^2\overrightarrow{i}\right) dm = \int_S \left(y^2 + z^2\right)\overrightarrow{i}\, dm - \int_S xy\overrightarrow{j}\, dm - \int_S xz\overrightarrow{k}\, dm$$

Finalement :

$$\begin{cases} J(O,S)(\overrightarrow{i}) = I_{Ox}\overrightarrow{i} - I_{xy}\overrightarrow{j} - I_{xz}\overrightarrow{k} \\ J(O,S)(\overrightarrow{j}) = -I_{xy}\overrightarrow{i} + I_{Oy}\overrightarrow{j} - I_{yz}\overrightarrow{k} \\ J(O,S)(\overrightarrow{k}) = -I_{xz}\overrightarrow{i} - I_{yz}\overrightarrow{j} + I_{Oz}\overrightarrow{k} \end{cases}$$

Habituellement, les moments d'inertie du solide par rapport aux 3 axes sont notés A, B et C, les autres termes, notés D, E et F, sont appelés les produits d'inertie.

$$A = I_{Ox} = \int_S \left(y^2 + z^2\right) dm \qquad B = I_{Oy} = \int_S \left(x^2 + z^2\right) dm \qquad C = I_{Oz} = \int_S \left(x^2 + y^2\right) dm$$

$$D = \int_S yzdm \qquad E = \int_S xzdm \qquad F = \int_S xydm$$

Les termes $A, B, C \geq 0$ alors que $D, E, F \geq 0$ ou ≤ 0.

Considérons $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$ ($\overrightarrow{u}$ vecteur unitaire : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$), alors on a :

$$I(\Delta, S) = \overrightarrow{u}.J(O,S)(\overrightarrow{u}) = \left(\alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}\right).\left[J(O,S)(\alpha\overrightarrow{i}) + J(O,S)(\beta\overrightarrow{j}) + J(O,S)(\gamma\overrightarrow{k})\right]$$

$$= \left(\alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}\right).\left[\alpha\left(A\overrightarrow{i} - F\overrightarrow{j} - E\overrightarrow{k}\right) + \beta\left(-F\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} - D\overrightarrow{k}\right) + \gamma\left(-E\overrightarrow{i} - D\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}\right)\right]$$

Soit : $I(\Delta, S) = \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C - 2\beta\gamma D - 2\alpha\gamma E - 2\alpha\beta F$

De la relation de $J(O,S)(\overrightarrow{u})$, on peut déduire que l'on passe de $\overrightarrow{u}$ à $J(O,S)(\overrightarrow{u})$ par une application linéaire représentée, dans la base b, par la matrice symétrique (3×3) suivante :

$$II(O,S) = \begin{pmatrix} +A & -F & -E \\ -F & +B & -D \\ -E & -D & +C \end{pmatrix}$$: matrice d'inertie ou tenseur d'inertie en O dans la base b.

C'est la représentation de l'opérateur d'inertie dans la base de projection.
La connaissance de la matrice d'inertie en O permet de déduire facilement les composantes du vecteur $J(O,S)(\overrightarrow{u})$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} +A & -F & -E \\ -F & +B & -D \\ -E & -D & +C \end{pmatrix}}_{\text{matrice d'inertie } (3\times3)} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{\text{composante de } \overrightarrow{u}\ (3\times1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} +\alpha A - \beta F - \gamma E \\ -\alpha F + \beta B - \gamma D \\ -\alpha E - \beta D + \gamma C \end{pmatrix}}_{\text{composante de } J(O,S)\overrightarrow{u}\ (3\times1)}$$

$$\begin{aligned} I(\Delta,S) = I_\Delta = \overrightarrow{u}.J(O,S)(\overrightarrow{u}) &= \underbrace{(\alpha \quad \beta \quad \gamma)}_{(1\times 3)} \underbrace{\begin{pmatrix} +\alpha A - \beta F - \gamma E \\ -\alpha F + \beta B - \gamma D \\ -\alpha E - \beta D + \gamma C \end{pmatrix}}_{(3\times 1)} \\ &= \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C - 2\beta\gamma D - 2\alpha\gamma E - 2\alpha\beta F \end{aligned}$$

Remarque
Dans la représentation matricielle, l'écriture de I_Δ est une écriture symbolique qui présente l'avantage de la simplicité et de la commodité.

3.4.2 Matrice principale d'inertie

Lorsque les produits d'inertie de la matrice $II(O,S)$ sont nuls dans la base b, le repère $R(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ sera appelé *repère principal d'inertie*, ses axes sont les axes principaux d'inertie et la matrice $II(O,S)$ est *la matrice principale d'inertie*

$$II(O,S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} : \text{ dans une base principale d'inertie } b(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$$

Examinons les trois cas suivants :

• Lorsque les trois éléments de la diagonale sont distincts ($A \neq B \neq C$), il existe un seul repère principal d'inertie.

• Lorsque deux parmi les trois éléments de la diagonale sont identiques et différents du troisième (exemple $A = B \neq C$), il existe une infinité de repères principaux d'inertie ayant l'axe Oz en commun (symétrie cylindrique).

• Lorsque les éléments de la diagonale sont identiques ($A = B = C$), toute direction passant par O est une direction principale d'inertie et tout repère ayant O comme origine est un repère principal d'inertie. On dira alors que l'opérateur est sphérique (symétrie sphérique).

Examinons les deux cas de symétrie suivantes :

a- Le plan xOy est un plan de symétrie pour le système.

$$I_{xz} = \int_S xzdm = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E = 0$$

$$I_{yz} = \int_S yzdm = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad D = 0$$

Conclusion
Tous les termes d'inertie en z sont nuls $\Longrightarrow$ **tout axe $\perp$ à un plan de symétrie matérielle est un axe principal d'inertie.**

b- L'axe Oz est un axe de symétrie matérielle pour (S)
En regroupant 2 à 2 les éléments qui ont le même côte z ($xzdm$ et $(-x)zdm$; $yzdm$ et $(-y)zdm$), ces éléments ont respectivement des x et des y opposés $\Longrightarrow$ $I_{xz} = I_{yz} = 0$

Conclusion
Tout axe de symétrie matérielle est un axe principal d'inertie.

En résumé :
- Tout repère orthonormé dont deux de ses plans sont des plans de symétrie matérielle pour (S) est un repère principal d'inertie.
- Tout repère dont deux de ses axes sont des axes de symétrie matricielle pour (S) est un repère principal d'inertie.

3.5 Théorème de Huygens

3.5.1 Relation entre les opérateurs d'inertie d'un système en deux points

Soit $M \in (S)$ de masse dm.
Considérons O et A deux points de ξ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire d'un axe passant par O.
$J(A,S)(\overrightarrow{u}) = \int_S \left[\overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right)\right] dm$
$J(O,S)(\overrightarrow{u}) = \int_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right] dm = \int_S \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \left[\overrightarrow{u} \wedge \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}\right)\right] dm$

$$= \int_S \left[\overrightarrow{OA} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OA}\right)\right] dm + \int_S \left[\overrightarrow{OA} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right)\right] dm + \int_S \left[\overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OA}\right)\right] dm + \int_S \left[\overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right)\right] dm$$

$$= m\overrightarrow{OA} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OA} \wedge \left[\overrightarrow{u} \wedge \int_S \overrightarrow{AM} dm\right] + \left[\int_S \overrightarrow{AM} dm\right] \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OA}\right) + \int_S \left[\overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right)\right] dm$$
$$= m\overrightarrow{OA} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OA}\right) + m\overrightarrow{OA} \wedge \left[\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right] + m\overrightarrow{AG} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OA}\right) + J(A,S)(\overrightarrow{u})$$

En définitive :

$$J(O,S)(\overrightarrow{u}) = J(A,S)(\overrightarrow{u}) + m\overrightarrow{OA} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OA}\right) + m\overrightarrow{OA} \wedge \left[\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right] + m\overrightarrow{AG} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OA}\right)$$

Si on considère $A \equiv G$, on aura :

$$J(O,S)(\overrightarrow{u}) = J(G,S)(\overrightarrow{u}) + m\overrightarrow{OG} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right)$$

On pose $J(O,m_G)(\overrightarrow{u}) = \ m\overrightarrow{OG} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right)$: opérateur d'inertie d'un point matériel se trouvant en G et ayant pour masse la masse totale de (S).
Ainsi :

$$J(O,S)(\overrightarrow{u}) = J(G,S)(\overrightarrow{u}) + J(O,m_G)(\overrightarrow{u})$$

Pour la matrice d'inertie, on aura :

$II(O,S) = II(G,S) + II(O,m_G)$: c'est le théorème de **Huygens** généralisé.

Si $\quad \overrightarrow{OG} = x_G\overrightarrow{i} + y_G\overrightarrow{j} + z_G\overrightarrow{k}, \quad II(O,m_G) = m \begin{pmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_Gy_G & -x_Gz_G \\ -x_Gy_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_Gz_G \\ -x_Gz_G & -y_Gz_G & x_G^2 + y_G^2 \end{pmatrix}$

3.5.2 Théorème de Huygens

Considérons le cas de la figure suivante :
On a : $I(\Delta,S) = \overrightarrow{u}.J(O,S)(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}.J(G,S)(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u}.J(O,m_G)(\overrightarrow{u})$
$\qquad = I(\Delta_G,S) + m\overrightarrow{u}.\left[\overrightarrow{OG} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right)\right]$

$$= I(\Delta_G, S) + m\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right).\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right)$$
$$= I(\Delta_G, S) + m\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right)^2$$

$$\boxed{I(\Delta, S) = I(\Delta_G, S) + md^2(G, \Delta)} \quad \text{Théorème de Huygens classique}$$

3.6 Exemple de corps homogènes classiques

- **Quart de cercle matériel de rayon** R

$$G \left[\begin{array}{l} x_G = \dfrac{2R}{\pi} \\ \\ y_G = \dfrac{2R}{\pi} \end{array}\right.$$

Le repère en question n'est pas un repère principal d'inertie; seuls les termes d'inertie en z sont nuls $(z = 0)$

$$C = mR^2 = \int \left(x^2 + y^2\right) dm = 2\int x^2 dm = 2\int y^2 dm$$

$$A = \int \left(y^2 + z^2\right) dm = \int y^2 dm = \frac{C}{2} = \frac{mR^2}{2}$$

$$B = \int \left(x^2 + z^2\right) dm = \int x^2 dm = \frac{C}{2} = \frac{mR^2}{2}$$

$$dI_{xy} = xydm = R^2 \cos\theta.\sin\theta.dm = \lambda R^3 \cos\theta.\sin\theta.d\theta$$

$$I_{xy} = \frac{\lambda R^3}{2}\left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{mR^2}{\pi}$$

$$II(O,S) = mR^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\pi} & 0 \\ -\frac{1}{\pi} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Opérateur d'inertie d'un quart de disque de rayon** R

La matrice d'inertie n'est pas diagonale.

$$dI_{Oz} = r^2 dm = \sigma \frac{2\pi r^3}{4} dr$$

$$C = I_{Oz} = \sigma \frac{\pi}{2}\frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

$$A = B = \frac{C}{2} = \frac{mR^2}{4}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right. \quad dm = \sigma ds = \sigma r dr d\theta \quad \text{et} \quad dI_{xy} = xydm$$

$$F = I_{xy} = \sigma \int_0^R \int_0^{\pi/2} r^3 \cos\theta \sin\theta dr d\theta = \sigma \frac{R^4}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{mR^2}{2\pi}$$

$$II(O,S) = mR^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2\pi} & 0 \\ -\frac{1}{2\pi} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- **Cas d'un disque de rayon R**

Le repère choisi est un repère principal d'inertie.

$$dI_{Ox} = r^2 dm = 2\sigma\pi r^3 dr$$

$$C = I_{Oz} = 2\sigma\pi \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

$$A = B = \frac{C}{2} = \frac{mR^2}{4}$$

$$II(O,S) = m\frac{R^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Cas d'un cylindre plein de rayon R de hauteur h**

Le solide admet une symétrie cylindrique $\Longrightarrow$ $A = B \neq C$

$$dI_{Oz} = \frac{R^2}{2} dm$$

$$C = I_{Oz} = \int \frac{R^2}{2} dm = \frac{mR^2}{2}$$

$$A = I_{Ox} = \int y^2 dm + \int z^2 dm = \frac{C}{2} + I_{xOy}$$

$$dI_{xOy} = z^2 dm = \rho\pi R^2 z^2 dz$$

$$I_{xOy} = \frac{\rho\pi R^2}{3} \frac{h^3}{4} = C$$

$$A = B = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}$$

- **Cas d'une sphère pleine de rayon R**

Le solide admet une symétrie sphérique $\Longrightarrow$ $A = B = C$

$$I_O = \frac{A+B+C}{2} = \frac{3}{2}A \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{2}{3}I_O$$

$$d\tau = r\sin\theta d\varphi r d\theta dr = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad \text{(élément de volume sphérique)}$$

$$dI_O = r^2 dm = \rho r^4 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$I_O = \rho\frac{R^5}{5} 2\pi.2 = \frac{3}{5}mR^2 \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{2}{3}I_O = \frac{2}{5}mR^2$$

$$II(O,S) = \frac{2}{5} m R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$