Chapitre 1

Cinématique du point

Sommaire

1.1 Introduction

La cinématique permet de décrire l'évolution d'un mobile (un point ou un ensemble de points) au cours du temps, sans s'intéresser aux causes du mouvement. On se posera les questions suivantes :

- où se trouve l'objet ? $\longrightarrow$ (Notion de repérage).
- Est-il immobile ? Ou est-ce qu'il bouge, comment ? rapidement ou lentement ? $\longrightarrow$ (Notion de vitesse)
- Va-t-il de plus en plus vite ? ou, au contraire freine-t-il ? $\longrightarrow$ (Notion d'accélération)
- Quelle est la nature de sa trajectoire ? etc.

Avant d'aller plus loin nous allons nous entendre sur certains termes que nous allons utiliser.

1.2 Quelques définitions

Espace utilisé

En mécanique du point matériel (et en mécanique du solide) dans allons travailler dans deux espaces :

– L'espace qui nous entoure. Il est représenté par un espace affine [1] euclidien [2] de dimension 3 noté $\mathscr{E}$;
– L'espace vectoriel de dimension 3, noté $\overrightarrow{E}$, associé à $\mathscr{E}$.
– Nous aurons à manipuler les points et les vecteurs : les points sont définis dans l'espace affine $\mathscr{E}$, et les vecteur dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$.

Point matériel

Du point de vue mathématique, nous entendons par point matériel, un point géométrique associé à un système de corps dont la position est parfaitement déterminée par la donnée de trois coordonnées (dans l'espace affine à 3 dimension $\mathscr{E}$) et d'un paramètre temporel t : $M\left(t\right)\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)$.

Du point de vue physique, on appelle point matériel, tout solide dont les dimensions négligeables rapport à l'échelle à laquelle on se place. Dans la pratique on représente un corps quelconque par son centre de gravité (un point) auquel est associée toute sa masse.

Notion de référentiel

Définition : *On appelle référentiel ($\mathcal{R}$) l'association d'un ensemble de points rigidement liés les uns aux autres forment un solide au sens mécanique du terme, permettant de définir un repérage des espaces et d'une échelle de temps permettant de définir un repérage des instants et des durées.*

Référentiels particuliers : les référentiels « Galiléens »

Définition : *les référentiels Galiléens sont des référentiels en mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel de Copernic.*

Le référentiel de Copernic est le référentiel dont l'origine est au barycentre du système solaire et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles fixes. Dans la pratique on définit un référentiel par un solide. Par exemple la terre, on parlera de référentiel terrestre. Nous reviendrons sur la notion de référentiel dans les chapitre suivants.

Référentiel absolu, référentiel relatif

Par hypothèse, on choisira un référentiel donnée ($\mathcal{R}$) considéré comme fixe pour les mouvements que l'on étudie. Ce référentiel sera dit référentiel absolu.

Tout autre référentiel ($\mathcal{R}'$) en mouvement par rapport au référentiel ($\mathcal{R}$) sera dit relatif.

Un point matériel en mouvement pourra être caractérisé par :
– Son mouvement par rapport à ($\mathcal{R}$) dit mouvement absolu
– Son mouvement par rapport à ($\mathcal{R}'$) dit mouvement relatif

Exemple : mouvement d'un étudiant dans un bus Sotral en mouvement sur la route nationale N°1. On peut définir un mouvement relatif associé au référentiel ($\mathcal{R}'$) liée au Bus et en mouvement absolu par rapport à un référentiel absolu lié à la route.

1. C'est-a-dire formé de points
2. On peut définir la distance entre deux points

Repère

Un repère d'espace permet d'introduire la notion de coordonnées. On appelle repère, tout système d'axe rigidement liés ($\mathcal{R}$). Pour un même référentiel ($\mathcal{R}$), on peut définir une infinité de repère différents.

Postulat Newtonien

En mécanique classique, on fait l'hypothèse importante suivante :

Loi : *le temps est considéré comme absolu. Autrement dit, le temps est le même dans tous les référentiels Galiléens.*

Considérons deux référentiels Galiléens ($\mathcal{R}$) et ($\mathcal{R}'$), en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre. Deux événements qui paraissent simultanés à un observateur lié à ($\mathcal{R}$), sont également simultanés pour tout autre observateur lié à ($\mathcal{R}'$).

Ceci n'est plus valable quand les vitesses des objets sont non négligeables devant la célérité de la lumière $c = 300000$ km/s. Dans ce cas la mécanique classique cède la place à la théorie de la relativité restreinte.

1.3 Système de coordonnées

Pour résoudre tout problème de physique et notamment de la mécanique, il est nécessaire de repérer un point M dans l'espace. Il faut connaître les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et des vecteurs qui pourront s'en déduire (vitesse $\overrightarrow{v}$, accélération $\overrightarrow{a}$, ...).

On choisira donc un repère [3], c'est-a-dire un système d'axe lié au référentiel. Il est constitué d'un point origine O, et d'une base constitué de trois vecteurs non colinéaires. On détermine les composantes des vecteurs dans ce repère. Les composantes du vecteur sont appelées les coordonnées. En général on distingue trois repères usuels : les repères cartésien, cylindrique et sphérique. Le choix du repère dépend de la géométrie du problème.

1.3.1 Les coordonnées cartésiennes

Ce sont les composantes d'un point dans un repère cartésien. Ce dernier est formé d'une origine O et de trois axes Ox, Oy, Oz formant un trirectangle direct de vecteurs unitaire $\overrightarrow{u}_x$, $\overrightarrow{u}_y$, $\overrightarrow{u}_z$. un point M est repéré par ses coordonnées x, y, z telle que :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x + y\overrightarrow{u}_y + z\overrightarrow{u}_z \tag{1.1}$$

avec $x = \overline{OP}$, $y = \overline{OQ}$, $z = \overline{OR}$ (Fig 2.3). P, Q, R sont les projections orthogonaux de M sur les axes Ox, Oy, Oz respectivement. Le triplet de vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}_x$, $\overrightarrow{u}_y$, $\overrightarrow{u}_z$ est la base associé au repère cartésien.

3. Notons qu'a un référentiel, on peut associer plusieurs repères différents

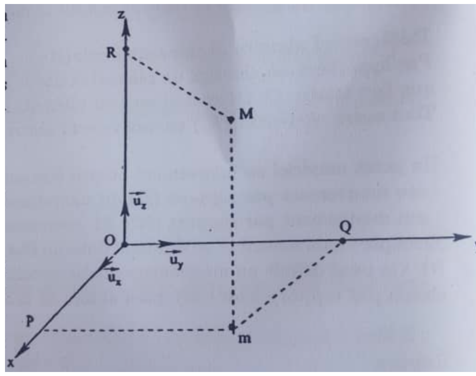

FIGURE 1.1 – Coordonnées cartésiennes

1.3.2 Les coordonnées cylindriques

Considérons un point M dans un repère cartésien (O, x, y, z). Soit m le projeté orthogonal de M sur le plan xOy. Soit $\overrightarrow{u}_\rho$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{Om}$, $\overrightarrow{u}_\theta$ le vecteur unitaire situé dans le plan xOy et directement perpendiculaire à $\overrightarrow{u}_\rho$. Soit $\rho = Om$, $z = \overline{mM}$ et $\theta = (\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_\rho)$. On a

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{om} + \overrightarrow{mM} = \rho\overrightarrow{u}_\rho + z\overrightarrow{u}_z \tag{1.2}$$

$\rho \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $z \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des coordonnées (ρ, θ, z) constitue les coordonnées cylindriques de M. θ est l'angle polaire. La base formée par les vecteurs $(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$ est appelée repère cylindrique.

Si $M \in (xOy)$, alors $z = 0$. Le point M est repéré par les coordonnées (ρ, θ) dites polaires. La base $(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta)$ est appelé base polaire. Le repère défini par cette base est appelé repère polaire.

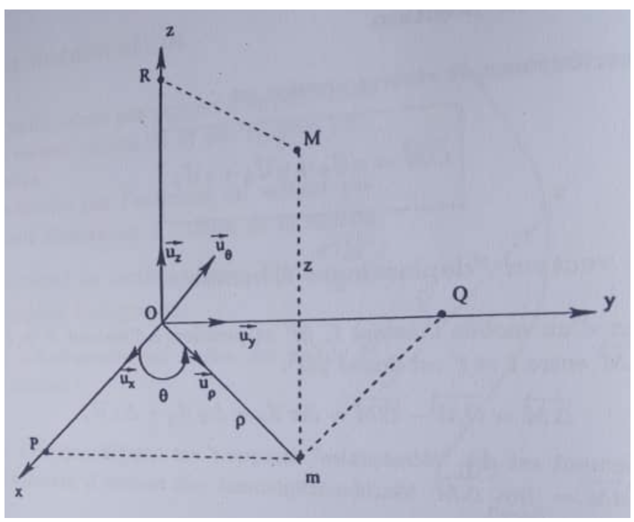

FIGURE 1.2 – Coordonnées cylindriques

Relations entre coordonnées cylindriques et cartésiennes

On a :

$$\begin{cases} x &= \overline{OP} = Omcos\theta \\ y &= \overline{OQ} = Omsin\theta \quad avec \quad Om = \rho \\ z &= \overline{OR} \end{cases}$$

D'où

$$x = \rho cos\theta, \quad y = \rho sin\theta \quad et \quad z = z$$

Expression des vecteurs unitaires de la base polaire en fonction de $\overrightarrow{u}_x$ et de $\overrightarrow{u}_y$

Les vecteurs de la base polaire peuvent s'exprimer en fonction de ceux de la base cartésienne comme suit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}_\rho = cos\theta \overrightarrow{u}_x + sin\theta \overrightarrow{u}_y \\ \overrightarrow{u}_\theta = -sin\theta \overrightarrow{u}_x + cos\theta \overrightarrow{u}_y \end{cases}$$

1.3.3 Les coordonnées sphériques

Considérons un point M dans un repère cartésien $(Oxyz)$. Soit m le projeté orthogonal de M sur le plan xOy. Soient $r = OM$, $\theta = \left(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}\right)$ et $\varphi = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om}\right)$.

Soient $\overrightarrow{u}_r$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{u}_\theta$ le vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{u}_r$ dans le sens de θ et situé dans le plan (Oz, OM) et $\overrightarrow{u}_\varphi$ le vecteur unitaire formant un trièdre direct avec $\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{u}_\theta$.

Les coordonnées (r, θ, φ) sont appelées les coordonnées sphériques avec $r \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Les vecteurs $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_\varphi)$ forme la base sphérique. Le repère défini par cette base est appelé repère sphérique. Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_r$$

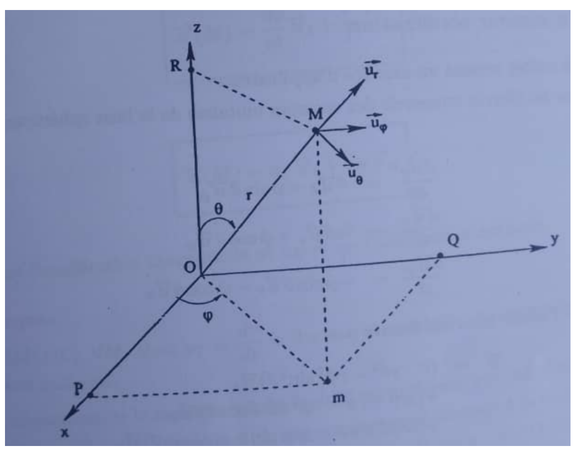

FIGURE 1.3 – Coordonnées sphériques

Relation entre coordonnées sphériques et cartusiennes

$$\begin{array}{l} x = \overline{OP} = Omcos\varphi \\ y = \overline{OQ} = Omsin\varphi \quad ,avec \qquad Om = OMsin\theta \\ z = \overline{OR} = OMcos\theta \end{array}$$

Comme $OM = r$, on a :

$$\begin{cases} x = & rsin\theta cos\varphi \\ y = & rsin\theta sin\varphi \\ z = & rcos\theta \end{cases}$$

Expression des vecteurs unitaires de la base sphérique en fonction de ceux de la base cartésienne :

$$\left\{\begin{array}{ll} \vec{u}_r = & sin\theta cos\varphi\vec{u}_x + sin\theta sin\varphi\vec{u}_y + cos\theta\vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta = & cos\theta cos\varphi\vec{u}_x + cos\theta sin\varphi\vec{u}_y - sin\theta\vec{u}_z \\ \vec{u}_\varphi = & -sin\varphi\vec{u}_x + cos\varphi\vec{u}_y \end{array}\right.$$

Dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à un angle
Considérons les vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ de la base polaire.

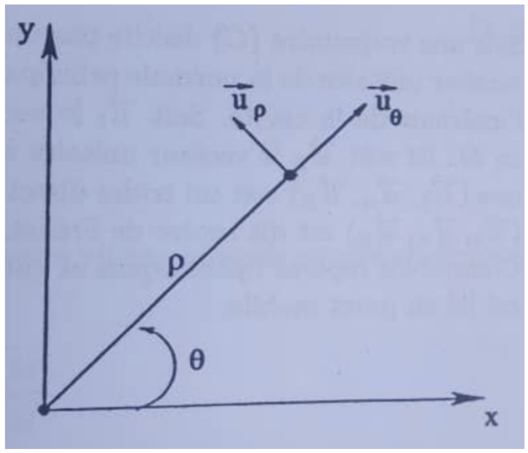

FIGURE 1.4 – Coordonnées polaires

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{u}_\rho = cos\theta\vec{u}_x + sin\theta\vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -sin\theta\vec{u}_x + cos\theta\vec{u}_y \end{array}\right.$$

Ces vecteurs unitaires varient avec l'angle θ.
On peut écrire, $\vec{u}_\rho = \vec{u}_\rho(\theta)$ et $\vec{u}_\theta = \vec{u}_\theta(\theta)$
Calculons $\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}$:

$$\begin{array}{rcl} \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} & = & \frac{d(cos\theta)}{d\theta}\vec{u}_x + \frac{d(sin\theta)}{d\theta}\vec{u}_y \\ & = & -sin\theta\vec{u}_x + cos\theta\vec{u}_y \\ & = & \vec{u}_\theta \end{array}$$

De même

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -cos\theta\vec{u}_x - sin\theta\vec{u}_y = -\vec{u}_\rho$$

La derivee d'un vecteur unitaire par rapport à un angle est le vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire.

Par exemple dans la base du repère sphérique, on a :

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta; \qquad \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r$$

1.4 Trajectoire et repère de Frenet

Trajectoire, abscisse curviligne :

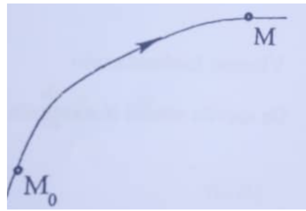

FIGURE 1.5 – Trajectoire curviligne

On appelle trajectoire la courbe décrite par un point matériel en fonction du temps dans un référentiel donné. La trajectoire peut être décrite dans un repère par 3 équations paramétriques.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

Soit M_0 un point pris comme origine (ou point initial). La position du point M à l'instant t est donné par $S(t) = \widehat{M_0M}$, S est l'abscisse curviligne. $S(t)$ est une fonction du temps appelé aussi équations horaires du mouvement.

Trièdre de Frenet

Soit une trajectoire (C) décrite par un point matériel M. Soit $\overrightarrow{u}_n$ le vecteur unitaire de la normale de la normale principale en M toujours orienté vers l'intérieur de la cavité. Soit $\overrightarrow{u}_t$ le vecteur unitaire de la tangente en M. Et soit $\overrightarrow{u}_\beta$ le vecteur unitaire normal à la fois à $\overrightarrow{u}_t$ et $\overrightarrow{u}_n$ tel que $(\overrightarrow{u}_t, \overrightarrow{u}_n, \overrightarrow{u}_\beta)$ soit un trièdre direct. Le repère défini par la base $(\overrightarrow{u}_t, \overrightarrow{u}_n, \overrightarrow{u}_\beta)$ est dit repère de Frenet.

Comme les repères cylindriques et sphériques, le repère de Frenet est lié au point mobile.

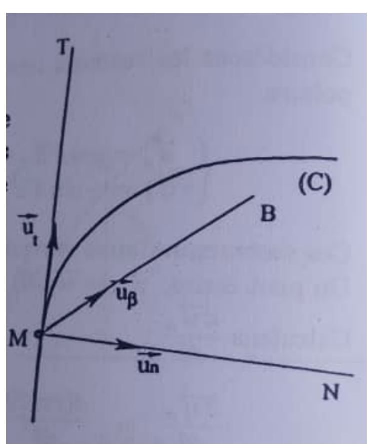

FIGURE 1.6 – Repère de Frenet

1.5 Vecteur vitesse

Vitesse moyenne

Soit M la position d'un point mobile à l'instant t, M' sa position à l'instant $t + \Delta t$.
On appelle vitesse moyenne de M dans l'intervalle $(t, t + \Delta t)$ le vecteur $\overrightarrow{V}_{moy}$
- de support (MM') ;
- de sens M vers M' ;
- et dont le module est donnée par $\left\|\overrightarrow{V}_{moy}\right\| = \frac{\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|}{\Delta t}$ avec $\Delta t > 0$.

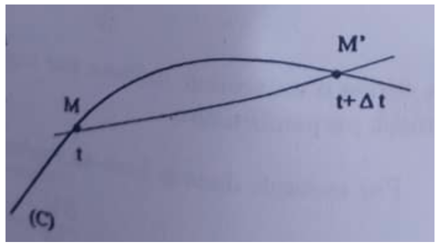

FIGURE 1.7 – Trajectoire

Vectoriellement, on a :

$$\overrightarrow{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

Vitesse instantanée

On appelle vitesse instantané de M à l'instant t, le vecteur lié d'origine M, noté $\overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{V}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

Soit O un point fixe quelconque (on peut prendre O comme origine du repère dans lequel on travaille), on a :

$$\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}\,(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}\,(t) = \Delta \overrightarrow{OM}$$

Donc

$$\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}\,(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}\,(t)}{\Delta t}$$

Soit

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Vitesse algébrique

On peut exprimer la vitesse instantanée en terme d'une autre vitesse appelé vitesse algébrique. En effet, on peut écrire :

$$\overrightarrow{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\widehat{MM'}}{\Delta t}.\frac{\overrightarrow{MM'}}{\widehat{MM'}}$$

$$\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\widehat{MM'}}{\Delta t}.\frac{\overrightarrow{MM'}}{\widehat{MM'}} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\widehat{MM'}}{\Delta t} \right) \times \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\widehat{MM'}} \right)$$

Soit M_0 un point considéré comme point initial sur la trajectoire décrite par M, on peut écrire que :

$$\widehat{MM'} = \widehat{MM_0} + \widehat{M_0M'} = \widehat{M_0M'} - \widehat{M_0M} = \widehat{M_0M}(t + \Delta t) - \widehat{M_0M}(t) = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\widehat{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

par définition $v = \frac{ds}{dt}$ est appelée vitesse algébrique.
Lorsque $\Delta t \longrightarrow 0$, $M' \longrightarrow M$ et (MM') tend vers la tangente à la trajectoire (C) en M.
D'autre part lorsque $\Delta t \longrightarrow 0$, $\widehat{MM'} \longrightarrow \left\| \overrightarrow{MM'} \right\|$ et on a :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{MM'} = \overrightarrow{u}_t$$

où $\overrightarrow{u}_t$ est le vecteur unitaire de la tangente à (C) en M. Finalement $\overrightarrow{v} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{u}_t = v\overrightarrow{u}_t$

$$\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u}_t$$

Pour étudier le mouvement d'un mobile M sur une trajectoire (C), on définit un sens arbitraire de parcours sur (C) :
$\overrightarrow{u}_t$ est toujours orienté dans le sens positif ;
$\overrightarrow{v}$ est dirigé dans le sens du mouvement ;
v indique par son signe si M parcourt (C) dans le sens positif ou dans le sens négatif.

1.6 Vecteur accélération

Soit un point mobile M se déplaçant par rapport à un référentiel ($\mathcal{R}$). Soit $\overrightarrow{v}(t)$ le vecteur vitesse de M par rapport à ($\mathcal{R}$). Soit (C) la trajectoire.

(C) est la courbe décrite par l'extrémité du vecteur position $\overrightarrow{OM}$. On peut s'intéresser à l'allure de la courbe (C') décrite par l'extrémité du vecteur vitesse $\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$. Cette courbe est appelée hodographe.

Définition : L'hodographe est le lieu des points P tel que à chaque instant t $\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{v}(t)$.

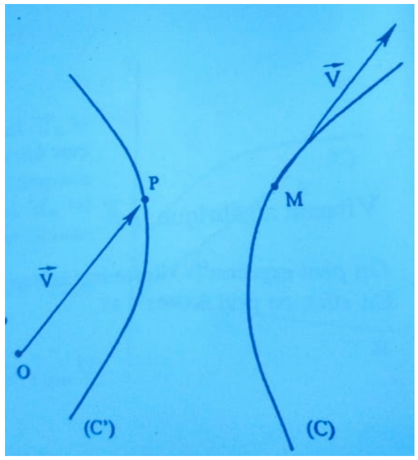

FIGURE 1.8 – Hodographe

Définition : On appelle vecteur accélération du mobile M à l'instant t, le vecteur lié d'origine M, noté $\overrightarrow{a}$, équipollent au vecteur vitesse du point P sur l'hodographe au même instant.

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

1.7 Cinématique dans le repère cartésien

Expression du vecteur position

En coordonnées cartésiennes le vecteur position est :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x + y\overrightarrow{u}_y + z\overrightarrow{u}_z$$

Expression du vecteur « déplacement élémentaire »

Soit M la position d'un mobile à l'instant t, M' sa position à l'instant $t' = t + \Delta t$. Le vecteur déplacement $\overrightarrow{\Delta OM}$ entre t et t' est donné par :

$$\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \Delta x\overrightarrow{u}_x + \Delta y\overrightarrow{u}_y + \Delta z\overrightarrow{u}_z$$

Le vecteur déplacement est dit élémentaire lorsque t' est très proche de t, $\Delta t \longrightarrow 0$. Dans ce cas $\Delta\overrightarrow{OM}$ est noté $d\overrightarrow{OM} = \lim\limits_{\Delta t \longrightarrow 0} \Delta\overrightarrow{OM}$. Mathématiquement cela revient à prendre la différentielle de $\overrightarrow{OM}$

$$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u}_x + dy\overrightarrow{u}_y + dz\overrightarrow{u}_z$$

Expression du vecteur vitesse

l'expression du vecteur vitesse $\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ se déduit de celle du vecteur vitesse élémentaire $d\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{v} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{u}_x + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{u}_y + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u}_z$$

Expression du vecteur accélération

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{u}_z$$

1.8 Cinématique dans le repère cylindrique

Expression du vecteur vitesse

En coordonnées cylindriques le vecteur position est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$$

On a

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

Or

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

On a

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

Pour le point m projeté de M sur xOy, $z = 0$ et

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Expression du vecteur accélération

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{u}_z$$

Or

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta; \qquad et \qquad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho$$

Donc

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + \ddot{z}\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$$

Le point m projeté de M sur xOy a pour accélération

$$\overrightarrow{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u}_\theta$$

Remarques :

1. La composante $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$ de $\overrightarrow{a}$ suivant suivant $\overrightarrow{u}_\rho$ est appelée composante radiale.
2. La composante $a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}$ de $\overrightarrow{a}$ suivant suivant $\overrightarrow{u}_\theta$ est appelée composante orthoradiale.

1.9 Cinématique dans le repère sphérique

Expression du vecteur vitesse

En coordonnées sphériques, le mobile est repéré par

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_r$$

avec $\overrightarrow{u}_r = sin\theta cos\varphi\overrightarrow{u}_x + sin\theta sin\varphi\overrightarrow{u}_y + cos\theta\overrightarrow{u}_z$, $\overrightarrow{u}_r = \overrightarrow{u}_r(\theta, \varphi)$

$\frac{\partial\overrightarrow{u}_r}{\partial\theta} = cos\theta cos\varphi\overrightarrow{u}_x + cos\theta sin\varphi\overrightarrow{u}_y - sin\theta\overrightarrow{u}_z = \overrightarrow{u}_\theta$

$\frac{\partial\overrightarrow{u}_r}{\partial\varphi} = sin\theta\left[-sin\varphi\overrightarrow{u}_x + cos\varphi\overrightarrow{u}_y\right] = sin\theta\overrightarrow{u}_\varphi$

On a

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{OM} &= d\left(r\overrightarrow{u}_r\right) \\ &= dr\overrightarrow{u}_r + rd\overrightarrow{u}_r \\ &= dr\overrightarrow{u}_r + r\left[\frac{\partial\overrightarrow{u}_r}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\overrightarrow{u}_r}{\partial\varphi}d\varphi\right] \\ &= dr\overrightarrow{u}_r + rd\theta\overrightarrow{u}_\theta + rsin\theta d\varphi\overrightarrow{u}_\varphi \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u}_\theta + rsin\theta\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{u}_\varphi$$

$$\overrightarrow{z} = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + rsin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{u}_\varphi$$

Expression du vecteur accélération

Cette partie sera traité comme un exercice d'application

Montrer que les dérivées temporels des vecteurs unitaires de la base sphérique sont données par :

$\frac{d\overrightarrow{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{u}_\varphi$

$\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u}_r + cos\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{u}_\varphi$

$\frac{d\overrightarrow{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{u}_r + cos\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{u}_\theta$

Montrer que l'accélération est donnée par

$\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)\overrightarrow{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta\right)\overrightarrow{u}_\theta + \left(2r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + r\ddot{\varphi}sin\theta\right)\overrightarrow{u}_\varphi$

Cinématique dans le repère de Frenet

Soit $(\overrightarrow{u}_t, \overrightarrow{u}_n, \overrightarrow{u}_\beta)$ la base de Frenet en un point M de la courbe (C). Soit M_0 l'origine des abscisses curvilignes sur (C). $\widehat{M_0M} = s$,nous admettons les formules suivantes dites formules de Frenet :

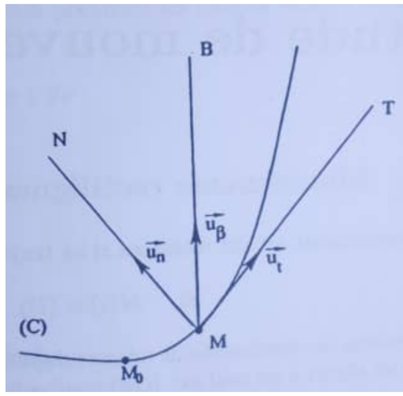

FIGURE 1.9 – Repère de Frenet

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{u}_t}{ds} = \frac{\overrightarrow{u}_n}{\Gamma} \\ \frac{d\overrightarrow{u}_s}{ds} = -\frac{\overrightarrow{u}_t}{\Gamma} + \frac{\overrightarrow{u}_\beta}{T} \\ \frac{d\overrightarrow{u}_\beta}{ds} = \frac{\overrightarrow{u}_n}{T} \end{cases}$$

$\overrightarrow{v}(M) = v.\overrightarrow{u}_t$
$\overrightarrow{a}(M) = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u}_t + v\frac{d\overrightarrow{u}_t}{dt}$
or
$\frac{d\overrightarrow{u}_t}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u}_t}{ds} \times \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\Gamma}\overrightarrow{u}_n$
où Γ désigne le rayon de courbure et T le rayon de torsion. Donc

$$\overrightarrow{a}(M) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u}_t + \frac{v^2}{\Gamma}\overrightarrow{u}_n$$

On peut écrire

$$\overrightarrow{a}(M) = a_T\overrightarrow{u}_t + a_N\overrightarrow{u}_n$$

$a_T = \frac{dv}{dt}$ est l'accélération tangentielle et $a_N = \frac{v^2}{\Gamma}$ est l'accélération normale

Remarque :

Si $\overrightarrow{a}(M) \perp (C), \forall M$, alors $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$ soit $v =$ constante. Le mouvement de M sur (C) est alors uniforme. Réciproquement, si le mouvement du mobile est uniforme, $v =$ cte, donc $\frac{dv}{dt} = a_T = 0$ et $\overrightarrow{a}(M) = a_N\overrightarrow{u}_n, \forall M$. L'accélération est constante et normale à la trajectoire (C).

Si l'accélération $\overrightarrow{a}(M)$ est constamment tangente à (C), on a : $\overrightarrow{a}(M) = a_T\overrightarrow{u}_t$ et $a_N = \frac{v^2}{\Gamma} \longrightarrow 0 \Longrightarrow \Gamma \longrightarrow \infty$. Le mouvement est rectiligne. Réciproquement si le mouvement est rectiligne, le vecteur accélération a pour support la droite, donc $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Pour que $\overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{0}$ à tout instant, il faut et il suffit que M soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme. En effet si le mouvement est rectiligne alors $a_N = 0$ et si le mouvement est uniforme alors, $v =$ constante et $a_T = 0$.