Sèrie 2
Travaux dirigés de cinématique du point

Exercice 1

La position du point matériel M est repérée dans un repère orthonormé direct R (O,i ,j), par : x et y en cm et t en seconde :

$$\begin{cases} x(t) = 2t - 2 \\ y(t) = t^2 - 2t + 3 \end{cases} \tag{1}$$

1. Ecrire l'équation de la trajectoire du mouvement y=f(x) et déterminer sa nature.
2. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
3. Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ et en déduire sa norme $\|\overrightarrow{v}\|$.
4. Déterminer les composantes du vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ ainsi que sa norme $\|\overrightarrow{a}\|$.
5. Calculer le rayon de courbure $\rho = \frac{v^3}{\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{a}\|}$ à l'instant t = 0.

Exercice 2

Dans un repère orthonormé direct R, les coordonnées d'un mobile M sont, à chaque instant t :

$$\begin{cases} x(t) = a\left(2e^{\omega t} - e^{-2\omega t}\right) \\ y(t) = 2a\left(e^{\omega t} - e^{-2\omega t}\right) \\ z(t) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

a et ω sont des constantes positives. La constante a possède la dimension d'une longueur et ω celle de l'inverse du temps t).

1. Ecrire l'équation cartésienne de la trajectoire du point M.
2. Trouver le vecteur vitesse du point M.
3. Tracer la trajectoire pour t>0.
4. Déterminer le vecteur accélération a et l'accélération tangentielle $\overrightarrow{a_t}$

Exercice 3

Par rapport à un repère orthonormé, un point M est animé d'un mouvement défini en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} \rho(t) = 1 + cos\theta(t) \\ \theta(t) = \omega t \\ z(t) = sin\theta \end{cases}$$

1. Trouver les composantes en coordonnées cylindriques des vecteurs ; vitesse et accélération.
2. Soit m la projection orthogonale de M dans le plan xOy. Ecrire l'équation polaire de m.

Exercice 4

Dans le système des coordonnées sphériques $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$. Un point M se déplace sur la surface d'une sphère de rayon R. Ses deux coordonnées sphériques sont :

$$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi(t) = \omega t^2, \quad \omega = constante \quad positive$$

1. Trouver la vitesse et l'accélération de M dans la base sphérique.
2. Calculer les modules de la vitesse et de l'accélération,
3. en déduire l'accélération normale.

Exercice 5

Soit $R\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé direct. Considérons un point matériel M qui décrit dans le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un mouvement suivant la trajectoire de la figure ci-dessous. L'équation de cette trajectoire 1 est donnée en coordonnées polaires par : $\rho = \frac{1}{2}\rho_0\,(1 + cos\theta)$, Ou ρ_0 est une longueur donnée.

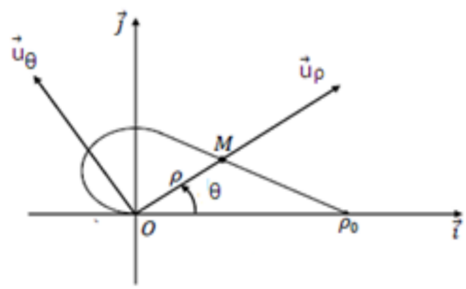

Figure 1: Figure d'etude

1. Déterminer le vecteur vitesse dans la base polaire ? Déduire son module ?
2. Déterminer le vecteur unitaire tangentiel dans la base de Frenet. Déduire que ce vecteur forme avec le vecteur unitaire polaire, un angle $\frac{\theta}{2}$?
3. Déterminer l'accélération dans la base de Frenet (intrinsèque) ?
4. Déterminer le rayon de courbure ainsi que le vecteur unitaire normal ?
5. Déterminer la coordonnée curviligne s de M comptée à partir du point correspondant à ϑ=0 ?
6. En déduire la longueur totale de la trajectoire ?