Sèrie0
Travaux dirigés d'outils mathématiques
pour la mécanique du point

Exercice 1

Dans un repère orthonormé $R\ (o, x, y, z)$, on donne les trois points suivants : A$(-1, -2, 1)$, B$(-3, 1, 4)$ et C$(-1, 2, -3)$.

1. donner l'expression des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.
2. Déterminer les expressions de $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$, $\left\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right\|$ et $\overrightarrow{OC}.\left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right)$.

Exercice 2

On donne les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{r}_1 = 2\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{r}_2 = 3\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{r}_3 = 4\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j} - 3\,\overrightarrow{k}$$

1. Calculer leurs modules.
2. Calculer les composantes et les modules des vecteurs : $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{r}_1 + \overrightarrow{r}_2 + \overrightarrow{r}_3$, $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{r}_1 + \overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_3$
3. Déterminer le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ porté par le vecteur $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{r}_1 + 2\overrightarrow{r}_2$
4. Calculer les produit scalaire et vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{r}_1$ et $\overrightarrow{r}_2$
5. Calculer les produits $\overrightarrow{C}.\left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right)$ et $\overrightarrow{C} \wedge \left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right)$.

Exercice 3

On donne trois vecteurs $\overrightarrow{A}\,(3, 2\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{B}\,(2, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ et $\overrightarrow{C}\,(1, 2, 2)$.

1. Calculer les normes $\left\|\overrightarrow{A}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{B}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{C}\right\|$. En déduire les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}_A$, $\overrightarrow{u}_B$ et $\overrightarrow{u}_C$ des directions, respectivement, de $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{C}$.
2. Calculer $cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}_A, \overrightarrow{u}_B}\right)$, $cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}_B, \overrightarrow{u}_C}\right)$, $cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}_C, \overrightarrow{u}_A}\right)$ sachant que les angles sont compris entre 0 et π.
3. Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{u}_B \wedge \overrightarrow{u}_C$, $\overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{u}_C \wedge \overrightarrow{u}_A$ et $\overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{u}_A \wedge \overrightarrow{u}_B$.
4. En déduire $sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}_A, \overrightarrow{u}_B}\right)$, $sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}_B, \overrightarrow{u}_C}\right)$, $sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}_C, \overrightarrow{u}_A}\right)$. Vérifier ces résultats en utilisant la question 2.
5. Montrer que $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$ peuvent constituer une base Cette base est-elle orthogonale, normée ?

Exercice 4

Un point matériel M se déplace sur une ellipse d'équation en coordonnées cartésiennes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, voir figure ci-dessous. La direction de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à l'axe ox est repéré par l'angle φ. L'équation horaire du mouvement de M peut se mettre sous la forme $x(t) = x_0 cos(\omega t + \phi)$ et $y(t) = y_0 sin(\omega t + \psi)$, où l'on suppose que ω est une constante. A l'instant $t = 0$, M se trouvait en M_0.

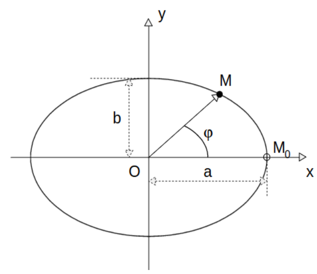

Figure 1: Mouvement elliptique

1. Déterminer x_0, ϕ et ψ. En déduire y_0.
2. Déterminer les composantes, et ce dans la base cartésienne, de la vitesse $\left(\dot{x}, \dot{y}\right)$ et de l'accélération $\left(\ddot{x}, \ddot{y}\right)$.
3. Montrer que l'accélération peut se mettre sous la forme $\overrightarrow{\gamma} = -k\overrightarrow{OM}$ où k est à déterminer.