Cours de Mathématiques - ASINSA-1

Les fractions rationnelles

Frédéric STURM

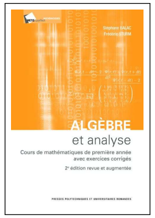
Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon

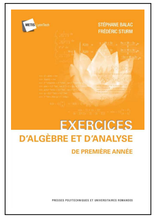
Année académique 2011-2012

Pour plus de compléments, voir les deux ouvrages suivants parus aux Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR) dans la collection METIS LyonTech :

www.ppur.org

- **Algèbre et analyse, 2e édition revue et augmentée,** **Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés**, S. Balac, F. Sturm, 1110 pages, paru en 2009.
- **Exercices d'algèbre et d'analyse,** **154 exercices corrigés de première année**, S. Balac, F. Sturm, 448 pages, paru en 2011.





Plan du cours

Définition

Définition 1.1

Une fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$ est un couple de polynômes $(A,B)\in\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X]$ avec $B\neq 0$, noté sous forme de fraction :

$$\frac{A}{B}.$$

Le polynôme A se nomme le numérateur et B le dénominateur.

Exemple 1.1

$\dfrac{X^5-3X^4-X^3+3X^2}{X^3-6X^2+11X-6}$ et $\dfrac{X^2(X+1)}{X-2}$ sont des fractions sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.2

Deux fractions A/B et C/D sont dites équivalentes s'il existe un polynôme non nul $P\in\mathbb{K}[X]$ tel que

$$\frac{C}{D}=\frac{PA}{PB}.$$

On dit que A/B et C/D représentent la même fraction.

Exemple 1.2

Les deux fractions suivantes

$$\frac{X^5-3X^4-X^3+3X^2}{X^3-6X^2+11X-6}\quad\text{et}\quad\frac{X^4-X^2}{X^2-3X+2}$$

sont équivalentes car :

$$\frac{X^5-3X^4-X^3+3X^2}{X^3-6X^2+11X-6}=\frac{(X-3)(X^4-X^2)}{(X-3)(X^2-3X+2)}.$$

Forme irréductible

Définition 1.3

On appelle forme irréductible d'une fraction rationnelle F non nulle, tout couple $(A,B)\in\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X]$ avec $A\neq 0$, $B\neq 0$, tel que A et B ne possèdent pas de diviseurs communs.

Exemple 1.3

La fraction rationnelle $\dfrac{X^4-X^2}{X^2-3X+2}$ n'est pas irréductible car

$$\frac{X^4-X^2}{X^2-3X+2}=\frac{X^2(X-1)(X+1)}{(X-1)(X-2)}.$$

Sa forme irréductible est : $\dfrac{X^2(X+1)}{X-2}$.

- Convention et notation

  On convient de représenter une fraction rationnelle par sa forme irréductible et on désigne par

  $$\mathbb{K}(X)$$

  l'ensemble des fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$.
- Immersion de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$

  On identifie tout polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$ à la fraction $P/1_{\mathbb{K}[X]}\in\mathbb{K}(X)$ et on note :

  $$\frac{P}{1_{\mathbb{K}[X]}}\overset{not.}{=}P.$$

  On dit que l'on immerge l'ensemble des polynômes dans celui des fractions.

Structure de corps commutatif sur $\mathbb{K}(X)$

On munit $\mathbb{K}(X)$ des opérations notées $+$ et $\times$ définies par :

$$\forall\left(\frac{A_1}{B_1},\frac{A_2}{B_2}\right)\in\mathbb{K}(X)\times\mathbb{K}(X)\quad\begin{cases}\dfrac{A_1}{B_1}+\dfrac{A_2}{B_2}\overset{déf.}{=}\dfrac{A_1\times B_2+B_1\times A_2}{B_1\times B_2},\\[2mm] \dfrac{A_1}{B_1}\times\dfrac{A_2}{B_2}\overset{déf.}{=}\dfrac{A_1\times A_2}{B_1\times B_2}.\end{cases}$$

Que pouvons-nous dire de l'ensemble structuré $(\mathbb{K}(X),+,\times)$?

- $(\mathbb{K}(X),+,\times)$ est un anneau commutatif.
- Mieux encore ! Pour tout $A/B\in\mathbb{K}(X)^*$,

$$\frac{A}{B}\times\frac{B}{A}=\frac{1_{\mathbb{K}[X]}}{1_{\mathbb{K}[X]}}\overset{not.}{=}1_{\mathbb{K}[X]}.$$

Ainsi, $(\mathbb{K}(X),+,\times)$ est un corps (commutatif).

Zéros et pôles d'une fraction

Définition 1.4

Soit $A/B\in\mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible non nulle.

- *On appelle zéro de la fraction A/B toute racine du polynôme A dans $\mathbb{K}[X]$. On appelle alors ordre de multiplicité du zéro α de A/B l'ordre de multiplicité de α en tant que racine de A dans $\mathbb{K}[X]$.*
- *L'élément β de $\mathbb{K}$ est appelé pôle de A/B s'il est une racine du polynôme B dans $\mathbb{K}[X]$. On appelle alors ordre de multiplicité du pôle β de A/B l'ordre de multiplicité de β en tant que racine de B dans $\mathbb{K}[X]$.*

Remarque

Les notions de « zéro » et de « pôle » d'une fraction rationnelle dépendent du corps $\mathbb{K}$ considéré.

Exemple 1.4

- Considérons dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{X^2(X+1)}{X-2}.$$

  - Elle admet pour zéro -1 (zéro simple) et 0 (zéro double),
  - Elle admet pour pôle 2 (pôle simple).
- Considérons dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{(X-4)^3}{X^2+X+1}.$$

  - Elle admet pour zéro l'élément 4 (zéro triple).
  - En revanche, elle n'admet aucun pôle.
  - Bien sûr, si on travaille sur $\mathbb{C}$, alors elle admet pour pôle les deux nombres complexes j et $\bar{j}$ (pôles simples).

Plan du cours

Partie entière d'une fraction

Soit $A/B \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible.
Avons-nous $\deg(A) < \deg(B)$? Pas nécessairement.

- Division eucli. de A par B : $\exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

- On obtient alors dans $\mathbb{K}(X)$ l'égalité suivante :

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

  Le polynôme Q se nomme partie entière de A/B.

On se concentre à présent sur la fraction R/B. Remarquer que $\deg(R) < \deg(B)$.

Remarque

Le polynôme Q correspond à la partie entière de A/B.

- Rappelons qu'il est nul si $\deg(A) < \deg(B)$.
- Dans le cas contraire, il s'obtient en effectuant la division euclidienne de A par B.

Exemple 2.1

La partie entière de la fraction rationnelle $X^4/(X^4-1)$ n'est pas nulle. La division euclidienne de X^4 par X^4-1 donne :

$$Q = 1 \quad \text{et} \quad R = 1.$$

Plus directement, on a :

$$\frac{X^4}{X^4-1} = \frac{X^4-1+1}{X^4-1} = 1 + \frac{1}{X^4-1}.$$

Décomposition en éléments simples (DES)

Théorème 2.1 (Décomposition en éléments simples)

Soit $A/B \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible telle que B admet une factorisation irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ de la forme :

$$B = P_1^{n_1} \times \ldots \times P_m^{n_m}.$$

Alors A/B se décompose de manière unique comme suit :

$$\frac{A}{B} = Q + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{S_{k,1}}{P_k} + \frac{S_{k,2}}{P_k^2} + \ldots + \frac{S_{k,n_k}}{P_k^{n_k}} \right) \qquad \text{(DES sur } \mathbb{K})$$

où $Q \in \mathbb{K}[X]$ est la partie entière et, pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, $S_{k,1}, S_{k,2}, \ldots, S_{k,n_k}$ appartiennent à $\mathbb{K}[X]$ et vérifient :

$$\deg(S_{k,1}) < \deg(P_k), \quad \ldots, \quad \deg(S_{k,n_k}) < \deg(P_k).$$

Décomposition sur $\mathbb{C}$

- Rappelons que les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
- Soit $A/B \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle irréductible avec

$$B = b_n X^n + \ldots + b_1 X + b_0 \quad (b_n \neq 0).$$

  Le polynôme B est nécessairement scindé sur le corps $\mathbb{C}$:

$$B = b_n \prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{h_k}$$

  avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ dans $\mathbb{C}$, tous distincts, et

$$m \leqslant n \quad \text{et} \quad h_1 + h_2 + \ldots + h_m = n.$$

- Sur $\mathbb{C}$, la décomposition en éléments simples de A/B est :

$$\frac{A}{B} = Q + \overbrace{\frac{\lambda_{1,1}}{X-\alpha_1} + \ldots + \frac{\lambda_{1,h_1}}{(X-\alpha_1)^{h_1}}}^{\text{partie relative au pôle } \alpha_1}$$

$$\ldots + \underbrace{\frac{\lambda_{m,1}}{X-\alpha_m} + \ldots + \frac{\lambda_{m,h_m}}{(X-\alpha_m)^{h_m}}}_{\text{partie relative au pôle } \alpha_m}$$

  où $\lambda_{1,h_1} \neq 0, \ldots, \lambda_{m,h_m} \neq 0$.
- Tout élément simple de $\mathbb{C}(X)$ est nécessairement du type :

$$\frac{\lambda}{(X-\alpha)^k}$$

  avec $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{C}^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 2.2

On considère sur $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle : $\dfrac{4}{(X^2+1)^2}$.

- La partie entière de la décomposition en éléments simples est nulle puisque $\deg(4) < \deg((X^2+1)^2)$.
- Le dénominateur se factorise comme suit :

$$(X^2+1)^2 = (X-i)^2(X+i)^2. \qquad (\alpha_1 = i, \alpha_2 = -i)$$

La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ s'écrit ainsi

$$\frac{4}{(X^2+1)^2} = \underbrace{\frac{-i}{X-i} + \frac{-1}{(X-i)^2}}_{\text{partie relative à } i} + \underbrace{\frac{i}{X+i} + \frac{-1}{(X+i)^2}}_{\text{partie relative à } -i}.$$

Décomposition sur $\mathbb{R}$

- Le corps $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos.
- Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
  - les polynômes de degré 1,
  - les polynômes de degré 2 n'ayant aucune racine réelle.
- Soit $A/B \in \mathbb{R}(X)$, irréductible. Supposons que B se factorise sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$B = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k = b_n \underbrace{\prod_{k=1}^{m} (X-\alpha_k)^{h_k}}_{\text{racines dans } \mathbb{R}} \times \underbrace{\prod_{k=1}^{m'} (a_k X^2 + b_k X + c_k)^{s_k}}_{\text{racines dans } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}$$

  avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ dans $\mathbb{R}$, tous distincts, et

$$\begin{cases} h_1 + \ldots + h_m + 2(s_1 + \ldots + s_{m'}) = n \\ \forall k \in \{1, \ldots, m'\} \quad b_k^2 - 4a_k c_k < 0 \end{cases}.$$

Ainsi, on trouvera deux sortes de sommes partielles.

- Dans le cas où $A/B \in \mathbb{R}(X)$ admet un pôle $\alpha \in \mathbb{R}$ de multiplicité h :

$$\boxed{\frac{\lambda_1}{X-\alpha}+\ldots+\frac{\lambda_h}{(X-\alpha)^h}}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ dans $\mathbb{R}$. (ES de 1ère espèce)

- Dans le cas où la factorisation irréductible de B fait apparaître le polynôme $(aX^2+bX+c)^s$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$, et $b^2-4ac<0$:

$$\boxed{\frac{\lambda_1 X+\mu_1}{aX^2+bX+c}+\ldots+\frac{\lambda_s X+\mu_s}{(aX^2+bX+c)^s}}$$

avec $\lambda_1, \mu_1, \ldots, \lambda_s, \mu_s$ dans $\mathbb{R}$. (ES de 2ème espèce)

Exemple 2.3

Soit sur $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle : $\dfrac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$.

- La partie entière de la DES sur $\mathbb{R}$ est nulle.
- La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit ainsi :

$$\frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2} = \underbrace{\frac{\lambda}{X-1}+\frac{\mu}{(X-1)^2}}_{\text{partie relative au pôle 1}} + \underbrace{\frac{\alpha X+\beta}{X^2+1}+\frac{\gamma X+\delta}{(X^2+1)^2}}_{\text{partie relative à } X^2+1}.$$

Il convient bien sûr de déterminer les réels $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Plan du cours

Cas d'un pôle simple

Soit $A/B \in \mathbb{K}(X)$, irréductible, possédant un pôle simple $\alpha \in \mathbb{K}$.

- Le polynôme B s'écrit ainsi sous la forme :

$$B=(X-\alpha)C \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{K}[X] \ \text{ et } \ C(\alpha) \neq 0.$$

On en déduit :

$$\frac{A}{(X-\alpha)C}=\frac{\lambda}{X-\alpha}+\frac{T}{C} \quad \text{où} \quad T \in \mathbb{K}[X].$$

- En multipliant par $X-\alpha$, on a :

$$\frac{A}{C}=\lambda+\frac{(X-\alpha)T}{C}.$$

- En évaluant en α, on obtient :

$$\lambda=\frac{A(\alpha)}{C(\alpha)}.$$

Exemple 3.1

Considérons sur $\mathbb{R}$ la DES formelle suivante :

$$\frac{X}{(X-1)(X-2)}=\frac{\lambda_1}{X-1}+\frac{\lambda_2}{X-2}.$$

Déterminons les deux réels λ_1 et λ_2.

- En multipliant par $X-1$ et évaluant en 1, on a : $\lambda_1=-1$.
- En multipliant par $X-2$ et évaluant en 2, on a : $\lambda_2=2$.

Finalement, on obtient :

$$\frac{X}{(X-1)(X-2)}=\frac{-1}{X-1}+\frac{2}{X-2}.$$

Remarque

On a aussi la formule de dérivation : $\lambda=\dfrac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$.

Cas d'un pôle multiple

Soit $A_1/B_1 \in \mathbb{K}(X)$, irréductible, possédant un pôle $\alpha \in \mathbb{K}$ d'ordre $h \geqslant 2$.

- On a ainsi : $B_1=(X-\alpha)^h C_1$ avec $C_1(\alpha) \neq 0$.
- Dans la DES sur $\mathbb{K}$, la partie relative au pôle α s'écrit :

$$\frac{\lambda_1}{X-\alpha}+\frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2}+\ldots+\frac{\lambda_h}{(X-\alpha)^h}.$$

- Le calcul de λ_h s'effectue indépendamment des autres coefficients. En effet, on a :

$$\frac{A_1}{(X-\alpha)^h C_1}=\frac{\lambda_1}{X-\alpha}+\ldots+\frac{\lambda_h}{(X-\alpha)^h}+\frac{T}{C_1} \quad \text{où} \quad T \in \mathbb{K}[X].$$

En multipliant par $(X-\alpha)^h$ et en évaluant en α, on a :

$$\lambda_h=\frac{A_1(\alpha)}{C_1(\alpha)}.$$

Procédons à présent au calcul des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$.

- **Étape 1** - on effectue un changement d'indéterminée :

$$Y=X-\alpha.$$

On obtient ainsi ($A_2 \in \mathbb{K}[Y]$ et $C_2 \in \mathbb{K}[Y]$) :

$$\frac{A_1}{(X-\alpha)^h C_1}=\frac{A_2}{Y^h C_2}.$$

- **Étape 2** - On effectue ensuite une division selon les puissances croissantes à l'ordre $h-1$ de A_2 par C_2 :

$$A_2=C_2\left(q_0+q_1Y+\ldots+q_{h-1}Y^{h-1}\right)+Y^h R_2$$

où $q_0, q_1, \ldots, q_{h-1}$ appartiennent à $\mathbb{K}$ et $R_2 \in \mathbb{K}[Y]$.

- **Étape 3** - Retour à la fraction. On obtient :

$$\frac{A_2}{Y^h C_2}=\frac{q_0}{Y^h}+\frac{q_1}{Y^{h-1}}+\ldots+\frac{q_{h-1}}{Y}+\frac{R_2}{C_2}.$$

- **Étape 4** - Il reste enfin à revenir à l'indéterminée X (rappel : $Y=X-\alpha$) :

$$\frac{A_1}{(X-\alpha)^h C_1}=\underbrace{\frac{q_0}{(X-\alpha)^h}+\frac{q_1}{(X-\alpha)^{h-1}}+\ldots+\frac{q_{h-1}}{X-\alpha}}_{\text{partie relative au pôle } \alpha}+\frac{R_1}{C_1}.$$

On a ainsi obtenu :

$$\lambda_h=q_0, \quad \lambda_{h-1}=q_1, \quad \ldots, \quad \lambda_1=q_{h-1}.$$

Illustration sur un exemple

Déterminons la somme partielle relative au pôle $\alpha=1$ de

$$\frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}=\frac{A_1}{(X-1)^2 C_1}.$$

- **Étape 1** - Changement d'indéterminée : $Y=X-1$:

$$\frac{A_1}{(X-1)^h C_1}=\frac{A_2}{Y^h C_2}$$

où les deux polynômes A_2 et C_2 s'écrivent :

$$A_2=4Y+4 \quad \text{et} \quad C_2=4+8Y+8Y^2+4Y^3+Y^4.$$

- **Étape 2** - La division selon les puissances croissantes à l'ordre 1 de A_2 par C_2 donne :

$$A_2=C_2(1-Y)+Y^2\underbrace{(4Y+3Y^2+Y^3)}_{=R_2}.$$

- **Étape 3** - On a ainsi :

$$\frac{A_2}{Y^2C_2} = \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Y} + \frac{4Y+3Y^2+Y^3}{C_2}.$$

- **Étape 4** - Changement inverse ($Y = X - 1$) :

$$\frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2} = \underbrace{\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1}}_{\text{partie relative au pôle 1}} + \underbrace{\frac{X^3+X-2}{(X^2+1)^2}}_{=R_1/C_1}.$$

Remarque

La partie relative au polynôme X^2+1 peut être obtenue à partir de la fraction rationnelle R_1/C_1. En effet,

$$\frac{X^3+X-2}{(X^2+1)^2} = \frac{X(X^2+1)-2}{(X^2+1)^2} = \frac{-2}{(X^2+1)^2} + \frac{X}{X^2+1}.$$

Réduction du nombre des coefficients

Soit $A/B \in \mathbb{K}(X)$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) un fraction rationnelle irréductible.

- Supposons que cette fraction possède (au moins) un pôle $\alpha \in \mathbb{K}$ d'ordre $h \geqslant 1$.
- La partie relative au pôle α s'écrit alors

$$\frac{\lambda_1}{X-\alpha} + \frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2} + \ldots + \frac{\lambda_h}{(X-\alpha)^h}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ appartenant à $\mathbb{K}$.

Utilisation de la parité

Supposons F paire ou impaire.

- Alors $-\alpha$ est un pôle de F, de même multiplicité que α.
- La partie relative au pôle $-\alpha$ s'écrit :

$$\frac{\lambda'_1}{X+\alpha} + \frac{\lambda'_2}{(X+\alpha)^2} + \ldots + \frac{\lambda'_h}{(X+\alpha)^h}$$

avec $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_h$ appartenant à $\mathbb{K}$.

On a alors les résultats suivants :

- Si F est **paire** alors

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,h\} \quad \lambda'_k = (-1)^k \lambda_k.$$

- Si F est **impaire** alors

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,h\} \quad \lambda'_k = (-1)^{k-1} \lambda_k.$$

Exemple 3.2

Considérons la fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$:

$$F = (2X^2+5)/(X^2-1)^3.$$

La factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ du dénominateur s'écrit :

$$(X^2-1)^3 = (X-1)^3(X+1)^3.$$

Ainsi, F possède sur $\mathbb{R}$ deux pôles triples (1 et -1). D'où :

$$F = \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{(X-1)^2} + \frac{\lambda_3}{(X-1)^3} + \frac{\lambda'_1}{X+1} + \frac{\lambda'_2}{(X+1)^2} + \frac{\lambda'_3}{(X+1)^3}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ dans $\mathbb{R}$. La propriété de parité de la fraction impose :

$$\lambda'_1 = -\lambda_1, \quad \lambda'_2 = \lambda_2 \quad \text{et} \quad \lambda'_3 = -\lambda_3.$$

Utilisation de la conjugaison

Supposons A/B à coefficients réels et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

- Alors $\overline{\alpha}$ est un pôle de F, de même multiplicité que α.
- La partie relative au pôle $\overline{\alpha}$ s'écrit :

$$\frac{\beta_1}{X-\overline{\alpha}} + \frac{\beta_2}{(X-\overline{\alpha})^2} + \ldots + \frac{\beta_h}{(X-\overline{\alpha})^h}$$

avec $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$ appartenant à $\mathbb{C}$.

Puisque F est à coefficients réels, on a

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,h\} \quad \beta_k = \overline{\lambda_k}.$$

Par exemple ($\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$) :

$$\frac{X^2+1}{(X^2+X+1)^2} = \frac{\lambda_1}{X-\mathrm{j}} + \frac{\lambda_2}{(X-\mathrm{j})^2} + \frac{\overline{\lambda_1}}{X-\overline{\mathrm{j}}} + \frac{\overline{\lambda_2}}{(X-\overline{\mathrm{j}})^2}.$$

Exemple 3.3

Considérons la fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$:

$$F = (X^2+1)/(X^2+X+1)^2.$$

Ses pôles sur $\mathbb{C}$ sont les deux complexes conjugués j et $\overline{\mathrm{j}}$ car

$$(X^2+X+1)^2 = (X-\mathrm{j})^2(X-\overline{\mathrm{j}})^2.$$

Sa DES sur $\mathbb{C}$ s'écrit ainsi formellement :

$$\frac{X^2+1}{(X^2+X+1)^2} = \frac{\lambda_1}{X-\mathrm{j}} + \frac{\lambda_2}{(X-\mathrm{j})^2} + \frac{\beta_1}{X-\overline{\mathrm{j}}} + \frac{\beta_2}{(X-\overline{\mathrm{j}})^2}$$

avec λ_1, λ_2, β_1 et β_2 dans $\mathbb{C}$. Puisque la fraction est à coefficients réels, on a :

$$\beta_1 = \overline{\lambda_1} \quad \text{et} \quad \beta_2 = \overline{\lambda_2}.$$