Symétries et invariances

Séance 4 en Distanciel – PHY104 : Electrostatique et Electrocinétique

Ing. Agbassou Guenoukpati, Département du Génie Electrique, ENSI, Université de Lome, Togo

Objectif du cours

Au cours de cette presentation, vous apprendrez ce qui suit :

- Definir les distributions de charges (linéique, surfacique et volumique)
- Enoncer et appliquer le principe de Curie ;
- Utiliser les propriétés de symétrie et invariance du champ électrostatique.

4.1. Expression générale d'un champ électrostatique

Comme nous avons pu le voir plus haut, il ne semble pas évident de calculer des champs électriques. En effet, selon la distribution continue de charges qui est à la source du champ, apparaît dans le calcul du champ électrique des intégrales doubles ou triples. De plus le champ électrique en un point de l'espace possède plusieurs composantes et dépend de plusieurs paramètres :

Système de coordonnées	Expression du champ electrique
cartésiennes :	$\vec{E}(M) = E_x(x,y,z)\vec{e_x} + E_y(x,y,z)\vec{e_y} + E_z(x,y,z)\vec{e_z}$
cylindriques :	$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\vec{e_r} + E_\theta(r,\theta,z)\vec{e_\theta} + E_z(r,\theta,z)\vec{e_z}$
sphériques :	$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,\phi)\vec{e_r} + E_\theta(r,\theta,\phi)\vec{e_\theta} + E_\phi(r,\theta,\phi)\vec{e_\phi}$

La considération des symétries et invariances d'une distribution va permettre de simplifier cette expression de $\vec{E}(M)$ et donc de simplifier le calcul d'intégrales

4.2. Invariances

Les invariances vont nous permettre **d'éliminer des coordonnées dont dépend le champ électrique** en un point M. Il y a invariance lorsque la vue de la distribution est identique en un point M et un point M' (M' obtenu par translation ou rotation depuis M), ou bien si le champ électrique calculé en M et en M' est identique.

4.2.1. Invariance par translation selon un axe

Si une distribution admet un axe suivant lequel une translation ne change rien physiquement à celle-ci (on voit depuis un point M et depuis un point M', image par translation de M, la même distribution) alors le champ électrique ne doit pas non plus subir de changement. Si cet axe est Oz (systèmes de coordonnées cartésiennes ou polaires), alors les composantes du champ électrique ne dépendront pas de la coordonnée z :

$$\vec{E}(M) = E_x(x,y)\vec{e_x} + E_y(x,y)\vec{e_y} + E_z(x,y)\vec{e_z}$$

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta)\vec{e_r} + E_\theta(r,\theta)\vec{e_\theta} + E_z(r,\theta)\vec{e_z}$$

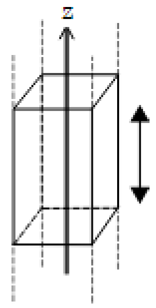


Figure 1 : Invariance par translation

4.2.2. Invariance par rotation autour d'un axe

Si la distribution admet un axe suivant lequel une rotation ne change rien physiquement à celle-ci, alors le champ électrique ne doit pas non plus subir de changement. Il ne dépendra pas de l'angle de rotation autour de cet axe, les composantes du champ électrique ne dépendront pas de la coordonnée θ (systèmes de coordonnées cylindriques ou sphériques)

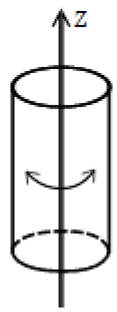


Figure 2 : Invariance par rotation

$$\vec{E}(M) = E_r(r,z)\vec{e_r} + E_\theta(r,z)\vec{e_\theta} + E_z(r,z)\vec{e_z}$$

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\phi)\vec{e_r} + E_\theta(r,\phi)\vec{e_\theta} + E_\phi(r,\phi)\vec{e_\phi}$$

4.2.3. Cas de la sphère

Dans une distribution sphérique, il y a invariance par rotations autour du point O, centre de la sphère, on s'affranchit des coordonnées θ et ϕ. Mais cette distribution n'est pas invariante par translation suivant r, car on ne voit pas la même distribution en se déplaçant suivant un rayon : si on prend un point M à l'intérieur de la sphère, il est entouré de charges alors qu'un point M' situé sur le même rayon mais en périphérie de la sphère ne voit que des charges en dessous de lui. En dehors de la sphère, le champ électrique dépendant de la distance aux charges, celui-ci ne serait pas le même à proximité de la sphère et très loin d'elle.

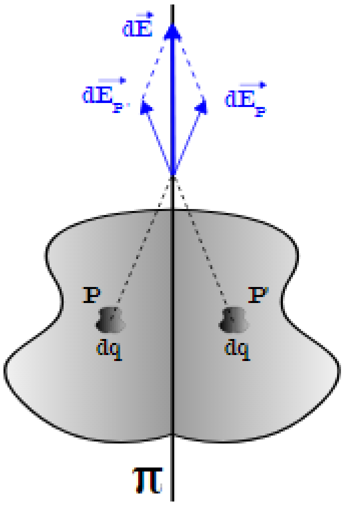
4.3. Symétries et antisymétries

Les symétries et antisymétries vont nous permettre d'éliminer des composantes du champ électrique. En effet, un principe appelé principe de Curie dit que les symétries des causes doivent se retrouver dans les effets : la symétrie de la distribution de charge se retrouvera dans l'expression du champ électrique.

4.3.1. Plan de symétrie

Cas général

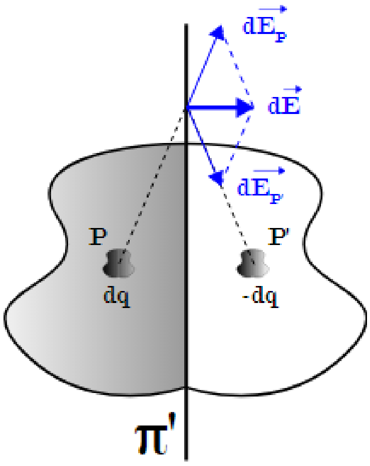
Si la distribution admet un plan de symétrie Π alors le champ appartient nécessairement à ce plan. En effet, l'élément infinitésimal de la distribution situé en P qui porte la charge dq créé en M le champ $d\overrightarrow{E_p}$ et son symétrique par rapport à Π, situé en P' qui porte aussi la charge dq créé en M le champ $d\overrightarrow{E_{p'}}$. La somme de $d\overrightarrow{E_p}$ et de $d\overrightarrow{E_{p'}}$ donne un vecteur $d\vec{E}$ contenu dans Π.



4.3.2. Plan d'antisymétrie

Cas général

Si la distribution admet un plan de d'antisymétrie Π' alors le champ est nécessairement orthogonal à ce plan. En effet, l'élément infinitésimal de la distribution situé en P qui porte la charge dq créé en M le champ $d\overrightarrow{E_p}$ et son symétrique par rapport à Π', situé en P' qui porte aussi la charge $-dq$ créé en M le champ $d\overrightarrow{E_{p'}}$. La somme de $d\overrightarrow{E_p}$ et de $d\overrightarrow{E_{p'}}$ donne un vecteur $d\vec{E}$ orthogonal dans Π'.



4.4. Propriétés de symétrie du champ électrostatique

Principe de Curie : lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

Du fait que le champ soit un effet créé par une distribution de charges, il contient des informations sur les causes qui lui ont donné origine. Ainsi, si l'on connaît les propriétés de symétrie d'une distribution de charges, on pourra connaître celles du champ électrostatique associé. Ces propriétés sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul du champ électrostatique. Dans une espace homogène et isotrope, si l'on fait subir une transformation géométrique à un système physique (ex : ensemble de particules, distribution de charges) susceptible de créer certains effets (forces, champs), alors ces effets subissent les mêmes transformations. Si un système physique S possède un certain degré de symétrie, on pourra alors déduire les effets créés par ce système en un point à partir des effets en un autre point.

Références

[1] Electromagnétisme PCSIP. Krempf - Editions Bréal 2003
[2] Physique Cours compagnon PCSI T. Cousin / H.Perodeau - Editions Dunod 2009
[3] Electromagnétisme 1ère année MPSI-PCSI-PTSI - JM.Brébec - Editions Hachette
[4] Cours de physique, électromagnétisme, 1.Electrostatique et magnétostatique - D.Cordier – Editions Dunod
[5] La physique en fac cours et exercices corrigés - Emile Amzallag - Joseph Cipriani - Jocelyne Ben Aïm - Norbert Piccioli
[6] http://wiki.sillages.info/index.php/Coordonnées_polaires_et_cylindriques
[7] http://epiphys.emn.fr
[8] http://turrier.fr/maths-physique/coordonees/systemes-de-coordonnees.html
[9] https://nptel.ac.in/courses/115/106/115106122/
[10] https://www.youtube.com/watch?v=FC0roB0OvtE