CHAPITRE 1

LIMITES ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Sommaire

1.1 LIMITES D'UNE FONCTION

1.1.1 Définitions

1.1.1.1 Notion de voisinage

Soit $a \in \mathbb{R}$. Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est appelée **un voisinage** de a s'il existe un réel $h > 0$ tel que $]a-h\,;\,a+h[\subset V$.

Exemple 1.1 $[-1,1]$ est un voisinage de 0.5 mais n'est pas un voisinage de 1.

1.1.1.2 Limite finie en $a \in \mathbb{R}$

Définition 1.2 Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. **Supposons que f soit définie dans un voisinage de a mais pas forcément en a lui-même**. On dit que f admet ℓ pour limite en a (ou que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a) si pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver $\eta > 0$ arbitrairement petit tel que :

$$|x-a| < \eta \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

On écrit : $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Exemple 1.3 Soit $f(x) = 3x$. On montre que $\lim_{x\to 2} f(x) = 6$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Cherchons $\eta > 0$ tel que

$$|x-2| < \eta \implies |3x-6| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

La condition $|3x-6| < \varepsilon$ est équivalente à $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, il suffit de choisir $\eta < \frac{\varepsilon}{3}$ pour obtenir l'implication (1.1). On peut choisir par exemple, $\eta = \frac{\varepsilon}{6}$.

1.1.1.3 Limite infinie en $a \in \mathbb{R}$

Définition 1.4 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **Supposons que f soit définie dans un voisinage de a mais pas forcément en a lui-même.**

- On dit que f tend vers $+\infty$ au point a si pour tout $A > 0$ arbitrairement grand, on peut trouver $\eta > 0$ arbitrairement petit tel que :
$$|x-a| < \eta \implies f(x) > A.$$
On note : $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.
- On dit que f tend vers $-\infty$ au point a si pour tout $A > 0$ arbitrairement grand, on peut trouver $\eta > 0$ arbitrairement petit tel que :
$$|x-a| < \eta \implies f(x) < -A.$$
On note : $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exemple 1.5 Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. On montre que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. En effet, soit $A > 0$. Cherchons $\eta > 0$ tel que

$$|x| < \eta \implies \frac{1}{x^2} > A. \tag{1.2}$$

On a :
$$\frac{1}{x^2} > A \iff x^2 < \frac{1}{A} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{A}}.$$
Ainsi, il suffit de choisir $\eta < \frac{1}{\sqrt{A}}$ pour obtenir l'implication (1.2). On peut choisir par exemple, $\eta = \frac{1}{2\sqrt{A}}$.

1.1.1.4 Limites à droite et à gauche en $a \in \mathbb{R}$

Définition 1.6 Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f admet ℓ pour *limite à droite* en a si pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver $\eta > 0$ arbitrairement petit η tel que :
$$a < x < a + \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- On dit que f admet ℓ pour *limite à gauche* en a si pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver $\eta > 0$ arbitrairement petit η tel que :

$$a - \eta < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note respectivement $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ les limites à droite et à gauche en a.

Proposition 1.7 *La limite d'une fonction f en a existe si et seulement si les limites à droite et à gauche en a existent et sont identiques. Dans ce cas :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Exemple 1.8 Considérons la fonction f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \ \ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$. La fonction f n'admet pas de limite en 0.

1.1.1.5 Limite finie/infinie en $+\infty$ ou $-\infty$

Définition 1.9 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver $M > 0$ arbitrairement grand tel que

$$x > M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \Big(\text{resp.} \quad x < -M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon\Big).$$

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$).

Exemple 1.10 Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Cherchons $M > 0$ tel que

$$x > M \implies \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

On a :

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \iff |x| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ainsi, il suffit de choisir $M > \frac{1}{\varepsilon}$ pour obtenir l'implication (1.3). On peut choisir par exemple, $M = \frac{1}{\varepsilon} + 1$.

Remarque 1.11 Au lieu de la limite finie ℓ, on peut définir le fait que f admette comme limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en l'infini en remplaçant dans la définition 1.9 la condition $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ par $f(x) > A$ (resp. $f(x) < -A$) où $A > 0$ est un réel arbitrairement grand.

1.1.2 Propriétés de la limite d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soient a et $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1.1.2.1 Unicité de la limite d'une fonction

Proposition 1.12 *Si f admet une limite en a, alors cette limite est unique.*

1.1.2.2 Limites d'une fonction et suites numériques

Proposition 1.13 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite (x_n) convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers ℓ.

2) Si deux suites (x_n) et (y_n) convergent vers a et si $f(x_n)$ et $f(y_n)$ ont des limites différentes, alors f n'admet pas de limite en a.

Remarque 1.14 Ce résultat est souvent utilisé pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a. Pour ce faire, il suffit de construire deux suites convergeant vers a dont les images par f ont des limites différentes.

Exemple 1.15 La fonction définie par $f(x) = 1/x$ n'admet pas de limite en 0. En effet, les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 1/n$ et $v_n = -1/n$ convergent vers 0 mais $f(u_n) = n$ diverge vers $+\infty$ et $f(v_n) = -n$ diverge vers $-\infty$.

Application 1.16 Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

1.1.3 Limites remarquables

- Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors on a :

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0; \tag{1.4}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^\alpha e^{\beta x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty. \tag{1.5}$$

-

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0. \tag{1.6}$$

-

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e. \tag{1.7}$$

1.1.4 Règles pratiques de calcul de limites

Sous réserve d'existence des limites de f et g en $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\,;\, +\infty\}$, on a :

- $\lim\limits_{x\to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim\limits_{x\to a} f(x) + \beta \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

- $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\, g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\, \lim\limits_{x\to a} g(x)$

- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

avec les conventions suivantes :

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
(+\infty)+(+\infty) & = & +\infty & k\cdot(+\infty) & = & +\infty \text{ pour } k>0 \\
(+\infty)+k\ (k\in\mathbb{R}) & = & +\infty & k\cdot(+\infty) & = & -\infty \text{ pour } k<0 \\
(-\infty)+(-\infty) & = & -\infty & (+\infty)\cdot(+\infty) & = & +\infty \\
(-\infty)+k\ (k\in\mathbb{R}) & = & -\infty & (+\infty)\cdot(-\infty) & = & -\infty
\end{array}$$

Remarque 1.17 (Formes indéterminées (FI)) Une limite ayant l'une des formes suivantes

$$(+\infty)-\infty; \quad 0\cdot(\infty); \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 1^{\infty}; \quad \infty^{0}; \quad 0^{0}$$

est appelée une forme indéterminée (FI). Dans ce cas, on ne peut pas conclure immédiatement. Une transformation (factorisation, expression conjuguée, utilisation du logarithme et de l'exponentielle, etc...) est nécessaire pour se ramener aux cas classiques de limites mentionnés plus haut.

1.1.5 Limites et relations d'ordre

Proposition 1.18 *Soient f et g deux applications définies sur une partie de $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $f \leqslant g$ au voisinage de a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$.*

Théorème 1.19 (Théorème d'encadrement) *Soit f, g, h trois applications définies sur une partie de $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$. Si $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.*

Application 1.20 Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} (x + \sin x)$.

Corollaire 1.21 *Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et V un voisinage de a. Pour tout $x \in V$, on a $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$. D'après le théorème 1.19,*

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = 0 \implies \lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Application 1.22 Calculer $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1.1.6 Limite de fonctions composées

Théorème 1.23 *Soit deux fonctions $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. Si f admet une limite $b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et g admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en b, alors $g \circ f$ admet ℓ pour limite en a. En d'autres termes,*

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = b \quad et \quad \lim_{x \to b} g(x) = \ell \right) \Longrightarrow \lim_{x \to a} g \circ f(x) = \ell.$$

Application 1.24 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1.2 Continuité d'une fonction

1.2.1 Généralités

Définition 1.25 Soit f une fonction d'une variable réelle et $a \in D_f$.

- On dit que f est *continue* au point $x = a$ si on a :
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
ou si
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$
- Si f n'est pas continue en $x = a$, on dit que f est *discontinue* au point a.
- On dit que f est continue sur un intervalle I si et seulement si elle est continue en tout point de I.

Exemple 1.26 Les fonctions rationnelles, polynômes, trigonométriques, exponentielles et logarithmes sont toujours continues leurs domaines de définition.

Exemple 1.27 Etudions la continuité de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$, $]0, 3[$ et $]3, +\infty[$. Il reste à étudier la continuité aux points $x = 0$ et $x = 3$.

- $f(0) = (1 + 0^2) = 1$,
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (\cos x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 + x^2) = 1.$$
donc f est continue au point $x = 0$.
-
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (1 + x^2) = 10 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (2x + 1) = 7$$
donc f n'est pas continue au point $x = 3$.

En conclusion, f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

1.2.2 Propriétés

Proposition 1.28 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*

1) *Une fonction définie comme combinaison linéaire ou produit de fonctions continues sur I est continue sur I.*
2) *Si f et g sont continues sur I et g ne s'annule pas sur I alors f/g est continue sur I.*
3) *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est une application continue de I dans J et si g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.*
4) *Si f est continue sur I alors $|f|$ est continue sur I.*
5) *Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors les fonctions*

$$\sup(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \quad \textit{et} \quad \inf(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

sont continues sur I.

1.2.3 Continuité et suites numériques

Proposition 1.29 *Une fonction f est continue en un point $a \in D_f$ si et seulement si pour toute suite (x_n) convergeant vers a, la suite $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.*

1.2.4 Prolongement par continuité

Définition 1.30 Soient $A \subset \mathbb{R}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$. Si f est définie en tout point de A sauf au point $a \in A$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors la fonction :

$$\tilde{f} : x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

est appelée **prolongement par continuité** de f au point a.

Exemple 1.31 La fonction $\tilde{f} : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ est un prolongement par continuité de la fonction $f : x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ au point 0.

1.2.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.32 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une application continue sur un intervalle $[a,b]$. Toute valeur y comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte (i.e. admet au moins un antécédent) dans $[a,b]$. En d'autres termes, si un réel y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.*

Théorème 1.33 *Soit f une application continue sur un intervalle I. Si a et b sont deux points de I tels que $f(a)f(b) \leqslant 0$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.*

1.2.6 Continuité de la réciproque d'une fonction bijective

Proposition 1.34 *Si f est une fonction bijective de $I \subset \mathbb{R}$ dans $J \subset \mathbb{R}$, alors sa réciproque f^{-1} est continue de J dans I.*

1.3 Exercices

Exercice 1.1 Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2}$

2) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln x}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{1+\sqrt{x}}}{x+2}$

6) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x+2|x|}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^5-1}{x-1}$

8) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$

12) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sin(x\ \ln x)}{x}$

13) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^x-1}{\ln(x+1)}$

14) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2+1}{\sin^2 x}$

15) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x-\sin 5x}{x+\sin 5x}$

16) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(3x+1)}{2x}$

17) $\lim\limits_{x\to0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$

Exercice 1.2 Soient m et $n\in\mathbb{N}$. Calculer en fonction de m et n, la limite suivante :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}.$$

Exercice 1.3 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique de période T. Montrer que si f n'est pas constante, alors f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 1.4 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application. Montrer que si f est croissante et majorée, alors f admet une limite en $+\infty$.

Exercice 1.5 Etudier la continuité de l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\begin{cases} e^{-x}+x+1 & \text{si } x\leqslant 0\\ 2+x^2\ln x & \text{si } x>0\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{1+\exp(1/x)} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

4) $f(x)=x+\sqrt{x-E(x)}$

5) $f(x)=E(x)+\sqrt{x-E(x)}$

6) $f(x)=E(x)+(x-E(x))^2$

7) $f(x)=E(x)+E(2-x)$

8) $f(x)=E(x)\sin x$

9) $f(x)=E(x)\sin(\pi x)$

Exercice 1.6 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'expression est :

$$f(x)=\frac{\ln(1-4x^2)}{x^2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Vérifier que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement par continuité $\tilde{f}$.

Exercice 1.7 Dans chacun des cas suivants, déterminer si la fonction f (d'ensemble de définition $\mathbb{R}^*$) est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et le cas échéant déterminer le prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{2x}$

2) $f(x) = \begin{cases} x \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ x\mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \sin(x) \ln|x|$

4) $f(x) = \sin(x) \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

5) $f(x) = \cos(x) \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$