Université de Lomé
2016 - 2017

Département de mathématiques
Faculté des sciences

Devoir N 2 : MTH 103

Durée : 2h
Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.
Toutes les questions ont une unique bonne réponse.
*Les réponses aux questions **sont à donner exclusivement sur la feuille de réponses** : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte*

1 Limites-continuité-dérivabilité-Développements limités -fonctions convexes

Question 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}\right)$

Parmi les propositions suivantes, trouver le prolongement continu g de f

A $g(x)\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour } x \neq 0 \\ g(0) = \ln(\frac{1}{2}) \text{ pour } x = 0 \end{cases}$

B $g(x)\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour } x \neq 0 \\ g(0) = -\frac{1}{2} \text{ pour } x = 0 \end{cases}$

C $g(x)\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$

D $g(x)\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$

E Aucune réponse n'est correcte

Question 2 Parmi les propositions suivantes, trouvez le réel a pour que la fonction f suivante soit continue en 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\ln(1 + x + \dfrac{x^2}{2}) - \dfrac{x+1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = a$ pour $x = 0$

A $a = -2$ B $a = 0$ C $a = -1$ D $a = 2$ E $a = 1$

Question 3 Trouver le réel a pour que la fonction $h(x) = \dfrac{1}{x^2}\ln(1 + x + x^2) - \dfrac{ax+1}{x}$ admet $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \dfrac{3}{2}$

A $a = 0$ B $a = -1$ C Aucune réponse n'est correcte D $a = 2$ E $a = 1$

Question 4 Soit $f(x) = -\ln(x)$

Parmi les propositions suivantes, choisir la bonne réponse

A $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ B f est une fonction croissante C Aucune réponse n'est correcte
D f est une fonction convexe E f n'admet pas de fonction réciproque

Question 5 Soit f une fonction continue au point x_0.

Parmi les propositions suivantes, choisir la bonne réponse :

A $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f'(x_0)$ B Aucune réponse n'est correcte C $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
D $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ E $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(0)$

Question 6 $h(x) = \dfrac{1 - \frac{x}{2} - \sqrt{1-x}}{x^2}$

Trouver la limite de la fonction h en 0.

- [A] Aucune réponse n'est correcte
- [B] $\lim_{x \to 0} h(x) = \frac{1}{8}$
- [C] $\lim_{x \to 0} h(x) = \frac{3}{2}$
- [D] $\lim_{x \to 0} h(x) = 1$
- [E] $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$

Question 7 Soit f une fonction dérivable au point x_0.

Parmi les propositions suivantes, choisir la bonne réponse :

- [A] $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- [B] $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe
- [C] $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$
- [D] Aucune réponse n'est correcte
- [E] $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie

Question 8 Parmi les propositions suivantes, choisissez le développement limité de la fonction $f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin(x))$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 :

- [A] $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$
- [B] $f(x) = x + 2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$
- [C] Aucune réponse n'est correcte
- [D] $f(x) = x + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$
- [E] $f(x) = x + x^3 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$

Question 9 $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2 - 1}$.

Parmi les propositions suivantes, trouver le développement limité à l'ordre 3 de la fonction f.

- [A] $f(x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$
- [B] $f(x) = -\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$
- [C] Aucune réponse n'est correcte
- [D] $f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{3} - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$
- [E] $f(x) = -x - \frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$

Question 10 Soit $f(x) = e^x$, a et b deux réels positifs. En utilisant la convexité de la fonction f, choisir une bonne réponse parmi les propositions suivante :

- [A] $e^{\frac{a+b}{2}} \leq e^{\frac{a-b}{2}}$
- [B] Aucune réponse n'est correcte
- [C] $e^{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{1}{2}(e^a + e^b)$
- [D] $\ln(a+b) \leq \ln(a) + \ln(b)$
- [E] $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}(e^a + e^b)$

Feuille de réponses :

0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9

← Codez votre numéro d'étudiant.

Écrivez votre nom et prénom.

↓

Nom et prénom :

....

Sur la « Feuille de réponses » qui vous est donnée, écrivez vos nom et prénoms dans le rectangle prévu. Noircissez au Bic bleu ou noir, dans la grille d'immatriculation, votre numéro de carte d'étudiant en notant que le 1er chiffre de votre numéro de carte d'étudiant est à noircir dans la 1ère colonne du tableau des chiffres, le 2ème chiffre de votre numéro de carte d'étudiant doit être dans la 2ème colonne, ainsi de suite. Si vous vous trompez en noircissant une mauvaise case, mettez du BLANCO dessus, puis noircissez la bonne case.

Question 1 : A B C D E

Question 2 : A B C D E

Question 3 : A B C D E

Question 4 : A B C D E

Question 5 : A B C D E

Question 6 : A B C D E

Question 7 : A B C D E

Question 8 : A B C D E

Question 9 : A B C D E

Question 10 : A B C D E

UNIVERSITE DE LOME Année 2014/2015

Parcours Math - Physique - Chimie

EXAMEN DU SEMESTRE HARMATTAN

MTH 103 : Calcul différentiel dans $\mathbb{R}$

Durée : 2h

Exercice : 1

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2} \right)$

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^x - e^{\sin(x)}}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1-2x^2)}{x^2}$

Exercice : 2

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :
   a) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^2-1}$
   b) $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$
2. En déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 :
   a) $f(x) \times g(x)$
   b) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Exercice : 3

1. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\ln(1+x+x^2) - \dfrac{ax^2+bx+c}{x}$ où a, b et c sont des réels.
   a) Déterminer a, b et c pour que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = \dfrac{3}{2}$.
   b) Pour les valeurs de a, b et c trouvées en a) montrer que f est prolongeable par continuité en une fonction g en 0.
   c) Montrer que g est dérivable en 0.

Exercice : 4

Etudier les variations de la fonction f et construire sa courbe représentative en étudiant particulièrement l'existence d'asymptotes et la position de la courbe par rapport à ces asymptotes :

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x+1} e^{-\frac{1}{x}}$$

Exercice : 5

a) Montrer que la fonction $(x \longmapsto -\ln(x))$ est convexe.

b) En déduire l'inégalité :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{*n} \qquad \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

c) *Application* : Démontrer les inégalités :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}_+^3 \quad a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc \quad \text{et} \quad (a+b+c)^3 \geq 27abc$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$$

UNIVERSITE DE LOME

Parcours Math - Physique - Chimie

Année 2013/2014

EXAMEN DU SEMESTRE HARMATTAN

MTH 103 : Calcul différentiel dans $\mathbb{R}$

Durée : 2h

Exercice : 1

1. Soient a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$
   En utilisant le théorème de Rolle sur la fonction f, montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que
   $$4a\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 2c\alpha = a + b + c$$
2. Dans chacun des cas suivants, calculer les limites suivantes :
   a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 e^{\frac{1}{x}} - \sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + x^4} \right)$

   b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[\ln(\cos(x))]^2}{x(\sin(x) - \tan(x))}$

Exercice : 2

Après avoir donner le domaine de définition, calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = Argth\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$

b) $f_2(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x - \sqrt{x^2-1}}}$

c) $f_3(x) = \sin\left(\dfrac{x^3}{\cos(x^3)}\right)$

Exercice : 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{xch(x) - sh(x)}{ch(x) - 1}$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Ecrire le développement limité à l'ordre 4 de $f(x)$ en zéro.
3. Calculer la limite de f en zéro.
4. En déduire le prolongement par continuité de f en zéro.
5. Montrer que f ainsi prolongée, est dérivable en zéro.
6. Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse zéro, au voisinage de ce point.

Exercice : 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$$

Etudier et tracer la fonction f (Domaine de définition, limites aux bornes du domaine, tableau de variations, asymptotes et courbe de f)

1,5

UNIVERSITE DE LOME
Parcours Math - Physique - Chimie

Année 2012/2013

EXAMEN DU SEMESTRE HARMATTAN
MTH 103 : Calcul différentiel dans $\mathbb{R}$

Durée : 2h

Exercice : 1

1. Dans chacun des cas suivants, donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de zéro :

   a) $f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin(x))$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} + \dfrac{1}{\sinh(x)} - \dfrac{2}{x}$

   sh

Exercice : 2

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

a) Montrer la fonction $f(x) = -log(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) A partir de la question a), montrer que pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$,

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i} \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{\alpha_i}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}$$

c) En déduire que $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \geq n^2$.

$|\ln x| \quad \left(\frac{1}{2}\right.$

Exercice : 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & \text{pour } x < 0 \\ xe^{-\frac{1}{x}} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0. Définir le prolongement noté $\tilde{f}$ de f.
2. Etudier la dérivabilité de $\tilde{f}$ en zéro.
3. Donner les développements limités à l'ordre 2 en $-\infty$ et $+\infty$ de $\tilde{f}$. En déduire que la courbe de $\tilde{f}$ admet des asymptotes.
4. Etudier les variations de $\tilde{f}$ et tracer sa courbe.

Depart. de Maths
FDS/UL

Examen MTH 103 : Session Harmattan
2 heures

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{n \to +\infty} n^2 \ln(\cos(\frac{\pi}{n}))$ 2) $\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{ch(\frac{1}{n})})^{n^2}$

3) $\lim_{n \to 0} \frac{\exp(x^2) - \cos(x)}{x \sin x}$ 4) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[p]{x^p + \lambda x} \quad \sqrt[q]{x^q + \mu x}$ où $p, q \geq 2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Soient $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Comparer avec justification à l'appui :

1.1. $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)^2$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$, $(x_i \in \mathbb{R})$.

1.2. $\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}$ et $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}$, $(\alpha_i \geq 0, x_i > 0)$.

2. Soit $\alpha > 1$ et $x_1, \ldots, x_n > 0$. Montrer que

$$(x_1 + \cdots + x_n)^\alpha \leq n^{\alpha - 1}(x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha).$$

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = x \exp(\frac{1}{x})$ si $x < 0$ et $f(x) = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$ si $x > 0$.

1. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0.
2. On note $\hat{f}$ le prolongement. Etudier la dérivabilité de $\hat{f}$ en 0.
3. Montrer que la courbe de $\hat{f}$ admet une asymptote.
4. Etudier les variations de $\hat{f}$ et tracer sa courbe.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2010-2011

Examen MTH103 : Calcul différentiel dans IR

Durée : 1 heure 40

Exercice 1

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie (V) ou fausse (F) sans la recopier et sans la justifier. Par exemple si l'affirmation 1. est vraie, il suffit d'écrire dans le cahier **1. V.** *Toute mauvaise réponse enlève deux (2) points. Toute surcharge vaut zéro (0). En cas de doute il est conseillé de s'abstenir.*

1. Soit la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(-1) = -3$ et $f(1) = 3$. Alors il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $f(c) = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\sqrt{x^2+4}+x-2} = 0$.
3. Si $f \sim_0 g$ alors $\exp(f) \sim_0 \exp(g)$.
4. La fonction $x \longrightarrow \sin\dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.
5. La fonction $f : x \longrightarrow x^5 - 5x + 1$ admet trois zéros réels.
6. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. La valeur du réel c de l'intervalle $[0, 8]$ dont le théorème des accroissements finis assure l'existence est $c = \dfrac{128}{54}$.
7. La largeur du rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire dans un demi-cercle de rayon 2 cm est 1,4 cm.
8. Le d.l. d'ordre 5 au voisinage de 0 de $f(x) = \exp(\sin x)$ est

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + o(x^5).$$

Exercice 2

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$,

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}.$$

(On pourra utiliser la convexité d'une certaine fonction que l'on précisera.)

En déduire que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq n^2.$$