Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Faculté des Sciences Dhar Mhraz

Département Physique - Filière SMP – S3

Examen du Module Mécanique du Solide - Session Rattrapage

Durée 1h30 min – 2019/2020

Exercice 1 : (9 points = 2+ 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1)

On considère une pale (S) formée d'1/4 de disque (**S1**) et d'une plaque rectangulaire (**S2**) (**voir figure 1**). La pale **(S)** est supposée homogène infiniment mince (épaisseur négligeable). Le 1/4 de disque (**S1**) est de masse **m** et de rayon **R**. La plaque rectangulaire (S2) de masse **M**, de largeur **a** et de longueur **b**.

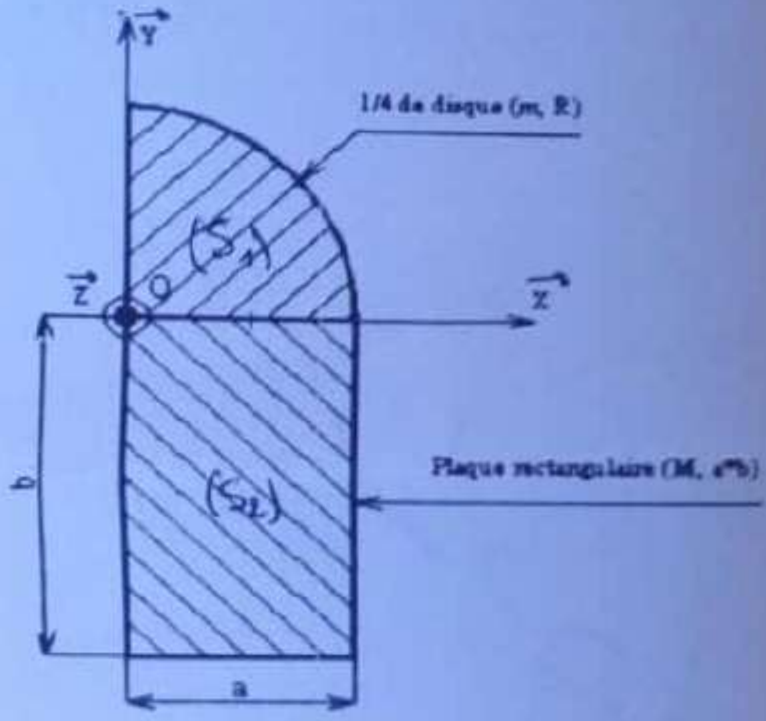

Figure 1

1) **Déterminer** le centre de masse de l'1/4 du disque (**S1**).

2) **Déterminer** le centre de masse de la plaque (**S2**).

3) **Déterminer** le centre de masse de la pale (**S**) formée par la plaque rectangulaire (**S2**) et l'1/4 du disque (**S1**).

4) **Déterminer** la matrice d'inertie de l'1/4 du disque (**S1**) au point **O** dans la base $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$.

5) **Déterminer** la matrice d'inertie de la plaque rectangulaire (**S2**) au point **O** dans la base $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$.

6) **Déterminer** la matrice d'inertie de la pale (S), formée par la plaque rectangulaire (**S2**) et l'1/4 du disque (**S1**), au point **O** dans la base $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$.

7) **Déterminer** la matrice d'inertie de la pale (**S**), formée par la plaque rectangulaire (**S2**) et l'1/4 du disque (**S1**), au point **G** dans la base $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$.

Exercice 2 : (11 points = 5 + 2 + 3 + 1)

On considère le système **mécanique plan** de la figure 2 où :

- Le corps (S1) est en **rotation** par rapport au corps fixe (S0) grâce à la liaison pivot en O d'axe $(O, \vec{x}_0)$
- Le corps (S2) est en **translation** par rapport au corps (S1) grâce à la liaison glissière de direction $\vec{y}_1$
- Le corp (S3) est en **rotation** par rapport au corps (S2) grâce à la liaison pivot en A d'axe $(A, \vec{x}_0)$
- Toutes les liaisons sont **parfaites**

Pour étudier le mouvement du système, on considère les repères suivants :

- Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au corps fixe (S0)
- Le repère $R_1(O, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié au corps (S1) tel que $\alpha = (\widehat{\vec{z}_0, \vec{z}_1}) = (\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}_1})$
- Le repère $R_2(A, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié au corps (S2) tel que $\overline{OA} = Y\vec{y}_1$
- Le repère $R_3(A, \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ lié au corps (S3) tel que $\beta = (\widehat{\vec{z}_1, \vec{z}_3}) = (\widehat{\vec{y}_1, \vec{y}_3})$

On donne $AB = L$

x_0

z_3 y_3

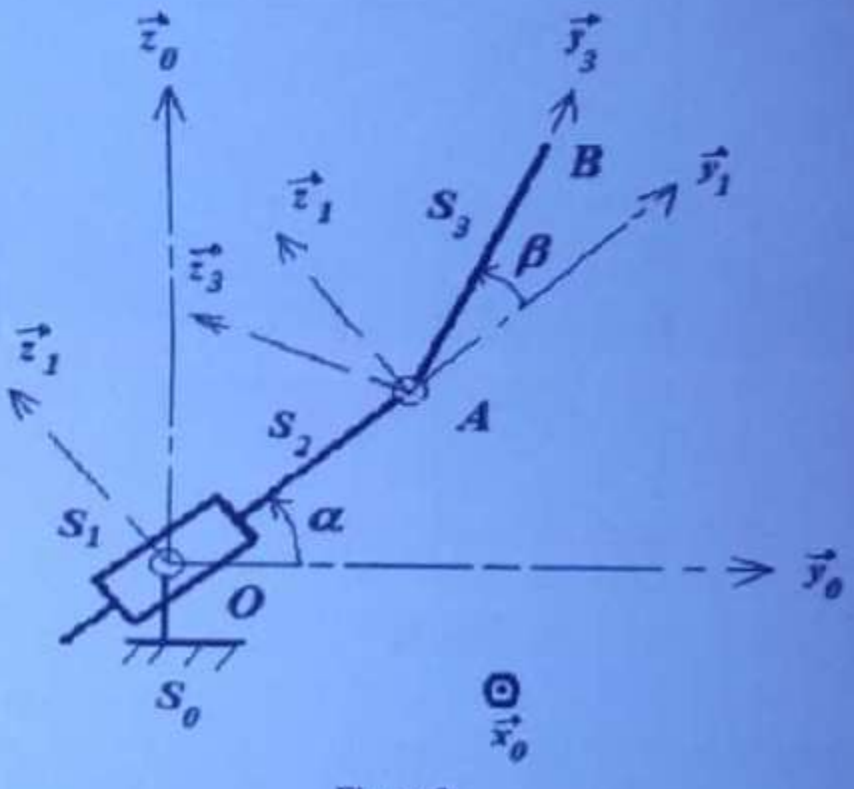

Figure 2

1) Torseurs Cinématiques : (5 points = 1 + 2 + 2)
   a. **Déterminer** le torseur cinématique $\tau_v(^{S1}/_{S0})$ au point **O**
   b. **Déterminer** le torseur cinématique $\tau_v(^{S2}/_{S1})$ au point **A** et **en déduire** $\tau_v(^{S2}/_{S0})$ au point **A**
   c. **Déterminer** le torseur cinématique $\tau_v(^{S3}/_{S0})$ au point **A** et **en déduire** $\tau_v(^{S3}/_{S0})$ au point **B**
2) **Déterminer** l'axe instantané de rotation du mouvement de (S3) par rapport à (S0)
3) Accélérations : (3 points = 1 + 2)
   a. **Déterminer** l'accélération $\vec{\gamma}(^{A \in S2}/_{S0})$
   b. **Déterminer** l'accélération $\vec{\gamma}(^{B \in S3}/_{S0})$
4) **Donner** d'une façon générale la relation le moment dynamique et le moment cinétique.

Fin

FSDM

Examen du module mécanique du solide - session rattrapage 2019 - 2020

(1)

JALAL

Exercice 1

1) le centre de masse de $\frac{1}{4}$ du disque (S_1)

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

* $G_1 \in (oxy)$ donc $\overrightarrow{OG_1} = x_1\vec{x} + y_1\vec{y}$; $ds = r\,dr\,d\theta$

on calcule x_G et y_G

* $x_1 = \frac{1}{m}\int x\,dm = \frac{1}{m}\iint x\,\sigma\,ds = \frac{\sigma}{m}\int_0^R\int_0^{\pi/2} r\cos\theta\, r\,dr\,d\theta = \frac{\sigma}{m}\int_0^R r^2 dr\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta$

$x_1 = \frac{\sigma}{m}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R\left[+\sin\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sigma}{m}\frac{R^3}{3}\cdot(1-0) = \frac{\sigma R^3}{3m}$ (1)

* $dm = \sigma\,ds \Rightarrow m = \sigma\int_0^R\int_0^{\pi/2} r\,dr\,d\theta = \sigma\int_0^R r\,dr\int_0^{\pi/2}d\theta = \sigma\frac{R^2}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\sigma R^2\pi}{4}$

donc $\frac{\sigma}{m} = \frac{4}{\pi R^2}$

on remplace $\frac{\sigma}{m}$ dans la relation (1) donc $\boxed{x_G = \frac{4R^3}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}}$

on calcule y_G :

$y_1 = \frac{1}{m}\int y\,dm = \frac{\sigma}{m}\int_0^R\int_0^{\pi/2} r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta = \frac{\sigma}{m}\int_0^R r^2dr\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta$

$= \frac{\sigma}{m}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sigma R^3}{3m}(0+1) = \frac{\sigma R^3}{3m}$

donc $\boxed{y_1 = \frac{4R^3}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}}$

finalement $\overrightarrow{OG_1} = \frac{4R}{3\pi}(\vec{x}+\vec{y})$

2) le centre de masse de la plaque (S_2)

on a $G_2 \in (oxy)$ donc $\overrightarrow{OG_2} = x_2\vec{x} + y_2\vec{y}$

détreminer x_2 et y_2

$$x_2 = \frac{1}{M}\int x\, dM = \frac{\sigma}{M}\iint x\, dS = \frac{\sigma}{M}\int_0^a x\, dx \int_{-b}^{0} dy = \frac{\sigma}{M}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a [y]_{-b}^{0}$$

$$= \frac{\sigma}{M}\,\frac{a^2}{2}\,[0-(-b)] = \frac{\sigma a^2 b}{2M}$$

(2)

donc $x_2 = \frac{\sigma a^2 b}{2M}$

$\boxed{\text{JALAL}}$

$\star$ $dM = \sigma\, dS \Rightarrow M = \sigma \int_0^a\int_{-b}^{0} dx\, dy = \sigma \int_0^a dx \int_{-b}^{0} dy = \sigma\, ab \Rightarrow \boxed{M = \sigma ab}$

donc $x_2 = \frac{\sigma a^2 b}{2\sigma ab} = \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{a}{2}}$

pour déterminer y_2 :

$$y_2 = \frac{1}{M}\int y\, dM = \frac{\sigma}{M}\int_0^a\int_{-b}^{0} y\, dx\, dy = \frac{\sigma}{M}\int_0^a dx \int_{-b}^{0} y\, dy = \frac{\sigma}{M}[x]_0^a\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-b}^{0}$$

$$= -\frac{\sigma}{M}\frac{a\, b^2}{2} = -\frac{\sigma a b^2}{2M}$$

on a $M = \sigma ab$ donc $y_2 = -\frac{\sigma a b^2}{2\sigma ab} = \frac{-b}{2}$

finalement $\boxed{\vec{OG_2} = \frac{a}{2}\vec{x} - \frac{b}{2}\vec{y}}$

3/ le centre de masse de la plaque (S) :

$m_T \vec{OG} = m\vec{OG_1} + M\vec{OG_2}$; m_T : la masse totale

$m_T = m + M$

d'où $\vec{OG} = \frac{m}{m+M}\vec{OG_1} + \frac{M}{m+M}\vec{OG_2}$

et on a $m = \frac{\sigma\pi R^2}{4}$ et $M = \sigma ab$ et $\vec{OG_1} = \frac{4R}{3\pi}(\vec{x}+\vec{y})$

et $\vec{OG_2} = \frac{a}{2}\vec{x} - \frac{b}{2}\vec{y}$

$$\text{donc } \vec{OG} = \frac{\sigma\pi R^2/4}{\frac{\sigma\pi R^2}{4}+\sigma ab}\left[\frac{4R}{3\pi}\vec{x} + \frac{4R}{3\pi}\vec{y}\right] + \frac{\sigma ab}{\frac{\sigma\pi R^2}{4}+\sigma ab}\left[\frac{a}{2}\vec{x} - \frac{b}{2}\vec{y}\right]$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{ab + \frac{\pi R^2}{4}}\left[\frac{\pi R^2}{4}\left(\frac{4R}{3\pi}\vec{x} + \frac{4R}{3\pi}\vec{y}\right) + ab\left(\frac{a}{2}\vec{x} - \frac{b}{2}\vec{y}\right)\right]$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{ab + \frac{\pi R^2}{4}} \left[\frac{R^3}{3}\vec{x} + \frac{R^3}{3}\vec{y} + \frac{a^2 b}{2}\vec{x} - \frac{ab^2}{2}\vec{y} \right]$$

3

$$= \frac{4}{4ab + \pi R^2} \left[\left(\frac{R^3}{3} + \frac{a^2 b}{2}\right)\vec{x} + \left(\frac{R^3}{3} - \frac{ab^2}{2}\right)\vec{y} \right]$$

JALAL

$$= \frac{4}{4ab + \pi R^2} \left[\left(\frac{2R^3 + 3a^2 b}{6}\right)\vec{x} + \left(\frac{2R^3 - 3ab^2}{6}\right)\vec{y} \right]$$

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{1}{4ab + \pi R^2} \left[\frac{4R^3 + 6a^2 b}{3}\vec{x} + \frac{4R^3 - 6ab^2}{3}\vec{y} \right]}$$

4) La matrice d'inertie de l'1/4 du disque (S_1) au pt O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

* le plan (oxy) est un plan de symétrie matérielle $(z=0)$ donc $E = 0$ et $D = 0$

et les axes (ox) et (oy) jouent le même rôle donc $A = B$.

$$M^{(S_1)}_{oxyz} = \begin{pmatrix} A & F & 0 \\ -F & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(xyz)}$$

$A = \int (y^2 + z^2)\,dm = \int y^2 dm$; $B = \int (x^2 + z^2)\,dm = \int x^2 dm = A$

$C = \int (x^2 + y^2)\,dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = A + B = A + A = B + B = 2A = 2B$

déterminer C :

$$C = \int (x^2 + y^2)\,dm = \int (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\,dm = \int r^2 dm = \sigma \int_0^R r^2 r\,dr \int_0^{\pi/2} d\theta = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} d\theta$$

$$C = \sigma \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \left[\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sigma R^4}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\sigma \pi R^4}{8}$$

et on a $\sigma = \frac{4m}{\pi R^2}$

donc $\boxed{C = \frac{4m}{\pi R^2} \times \frac{\pi R^4}{8} = \frac{mR^2}{2}}$ et $A = B = \frac{C}{2} = \frac{mR^2}{4}$

$* F = \int xy \, dm = \sigma \int_0^{R}\int_0^{\pi/2} r\cos\theta \, r\sin\theta \, r\,dr\,d\theta$

$= \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\theta)}{2} d\theta$

$= \frac{\sigma}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sigma}{2} \times \frac{R^4}{4} \times \left(\frac{1+1}{2}\right)$

$= \frac{\sigma R^4}{8} = \frac{4 m R^4}{8\pi R^2} = \frac{m R^2}{2\pi}$

donc $\boxed{F = \frac{m R^2}{2\pi}}$

La matrice d'inertie de l' $\frac{1}{4}$ du disque (S_1) au pt O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$M^{(S_1)}_{(Oxyz)} = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & -\frac{mR^2}{2\pi} & 0 \\ -\frac{mR^2}{2\pi} & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x}\vec{y}\vec{z})}$$

5) déterminer la matrice d'inertie de la plaque rectangulaire (S_2) au pt O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

le plan (Oxy) est un plan de symétrie matérielle et $(z = 0)$ donc

$E = 0$ et $D = 0$

donc $$M^{(S_2)}_{(Oxyz)} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$* A = \int (y^2 + z^2) \, dM = \int y^2 dM = \sigma \iint y^2 dS = \sigma \iint y^2 dx\,dy = \sigma \int_0^a dx \int_{-b}^0 y^2 dy$

$= \sigma [x]_0^a \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-b}^0 = \frac{\sigma a b^3}{3} = \frac{M a b^3}{ab\,3} = \frac{M b^2}{3}$

$\boxed{A = \frac{M b^2}{3}}$

$$* \; B=\int(x^2+z^2)\,dM=\int x^2\,dM=\sigma\iint_{0\;-b}^{a\;0} x^2\,dx\,dy=\sigma\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a\left[y\right]_{-b}^0$$

$$=\frac{\sigma\, a^3}{3}\times b=\frac{\sigma\, a^3 b}{3}=\frac{M}{3ab}\,a^3b=\frac{Ma^2}{3}$$ (5)

$\boxed{\text{JALAL}}$

$$\boxed{B=\frac{Ma^2}{3}}$$

$$* \; C=\int(x^2+y^2)\,dM=\int x^2\,dM+\int y^2\,dM=B+A=A+B=\frac{M}{3}(a^2+b^2)$$

$$* \; F=\int xy\,dM=\sigma\iint_{0\;-b}^{a\;0} xy\,dx\,dy=\sigma\int_0^a x\,dx\int_{-b}^0 y\,dy=\sigma\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-b}^0$$

$$=-\frac{\sigma}{4}\,a^2b^2=-\frac{M}{4ab}\,a^2b^2=-\frac{Mab}{4}$$

$$\boxed{F=-\frac{Mab}{4}}$$

donc la matrice d'inertie de la plaque rectangulaire (S_2) au pt O :

$$\boxed{\mathcal{M}^{(S_2)}_{Oxyz}=\begin{pmatrix}\frac{Mb^2}{3} & \frac{Mab}{4} & 0\\ \frac{Mab}{4} & \frac{Ma^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{M}{3}(a^2+b^2)\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

6) La matrice d'inertie de la pale (S) au pt O dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

$$\mathcal{M}^{(S)}_{Oxyz}=\mathcal{M}^{(S_1)}_{(Oxyz)}+\mathcal{M}^{(S_2)}_{(Oxyz)}=\begin{pmatrix}\frac{mR^2}{4}+\frac{Mb^2}{3}\\ -\frac{mR^2}{2\pi}+\frac{Mab}{4}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{M}^{(S)}_{Oxyz}=\begin{pmatrix}\frac{mR^2}{4}+\frac{Mb^2}{3} & -\frac{mR^2}{2\pi}+\frac{Mab}{4} & 0\\ -\frac{mR^2}{2\pi}+\frac{Mab}{4} & \frac{mR^2}{4}+\frac{Ma^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2}+\frac{M}{3}(a^2+b^2)\end{pmatrix}}$$

7) La matrice d'inertie de la pale (S) au pt G dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

d'après le théorème de Huygens : $M^{(S)}_{Oxyz} = M^{(G,m_T)}_{(Oxyz)} + M^{(S)}_{(Gxyz)}$

d'où $M^{(S)}_{(Gxyz)} = M^{(S)}_{(Oxyz)} - M^{(G,m)}_{(Oxyz)}$

on calcule la matrice d'inertie $M^{(G,m)}_{Oxyz}$

on a $\vec{OG} = x_G\,\vec{x} + y_G\,\vec{y} = \dfrac{4R^3+6a^2b}{3(\pi R^2+4ab)}\,\vec{x} + \dfrac{4R^3-6ab^2}{3(\pi R^2+4ab)}\,\vec{y}$ et $(z_G=0)$

on a $z_G=0$ donc $E_{OG}=0$ et $D_{OG}=0$ on calculons A_{OG}, B_{OG}, C_{OG} et F_{OG}

* $$A_{OG} = \int (y_G^2 + \underbrace{z_G^2}_{0})\,dm_T = \int y_G^2\,dm_T = \int \left[\frac{4R^3-6ab^2}{3(\pi R^2+4ab)}\right]^2 dm_T = (m+M)\left[\frac{4R^3-6ab^2}{3(\pi R^2+4ab)}\right]^2$$

* $$B_{OG} = \int (x_G^2+z_G^2)\,dm_T = \int x_G^2\,dm_T = \left[\frac{4R^3+6a^2b}{3(\pi R^2+4ab)}\right]^2 \int dm_T$$

$$\boxed{B_{OG} = (m+M)\left[\frac{4R^3+6a^2b}{3(\pi R^2+4ab)}\right]^2}$$

$$C_{OG} = \int (x_G^2+y_G^2)\,dm_T = \int x_G^2\,dm_T + \int y_G^2\,dm_T = A+B = \frac{(4R^3-6ab^2)^2}{[3(\pi R^2+4ab)]^2} + \frac{(4R^3+6a^2b)^2}{[3(\pi R^2+4ab)]^2}$$

$$\boxed{C_{OG} = \frac{(4R^3-6ab^2)^2+(4R^3+6a^2b)^2}{[3(\pi R^2+4ab)]^2}(m+M)}$$

* $$F_{OG} = \int x_G\,y_G\,dm_T = \frac{(4R^3+6a^2b)(4R^3-6ab^2)}{[3(\pi R^2+4ab)]^2}\int dm_T$$

$$\boxed{F_{OG} = \frac{(m+M)\left[(4R^3+6a^2b)(4R^3-6ab^2)\right]}{[3(\pi R^2+4ab)]^2}}$$

⑦

donc la matrice d'inertie

$$\mathcal{M}_{(Oxyz)}^{(G_i m_r)} = \begin{pmatrix} (m+M)\dfrac{(4R^3-6ab^2)^2}{[3(\pi R^2+4ab)]^2} & (m+M)\dfrac{(4R^3-6ab^2)(4R^3+6a^2b)}{[3(\pi R^2+4ab)]^2} & 0 \\ (m+M)\dfrac{(4R^3-6ab^2)(4R^3+6a^2b)}{[3(\pi R^2+4ab)]^2} & (m+M)\dfrac{4R^3+6a^2b}{[3(\pi R^2+4ab)]^2} & 0 \\ 0 & 0 & (m+M)\dfrac{(4R^3-6ab^2)+(4R^3+6a^2b)}{[3(\pi R^2+4ab)]^2} \end{pmatrix}_{(xyz)}$$

$\boxed{\text{JALAL}}$

cette matrice s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{M}_{oxyz}^{(G_i m_r)} = \begin{pmatrix} A_{G} & -F_{oG} & 0 \\ -F_{oG} & B_{oG} & 0 \\ 0 & 0 & C_{oG} \end{pmatrix}_{(xyz)}$$

donc la matrice d'inertie de la pole (S) au pt G dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

$$\mathcal{M}_{(Gxyz)}^{(S)} = \begin{pmatrix} \dfrac{mR^2}{4}+\dfrac{Mb^2}{3}-A_{oG} & -\dfrac{mR^2}{2\pi}+\dfrac{Mab}{4}+F_{oG} & 0 \\ -\dfrac{mR^2}{2\pi}+\dfrac{Mab}{4}+F_{oG} & \dfrac{mR^2}{2}+\dfrac{Ma^2}{3}-B_{oG} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{mR^2}{2}+\dfrac{M}{3}(a^2+b^2)-C_{oG} \end{pmatrix}_{(xyz)}$$

Exercice 2

(1) torseurs cinématiques :

a) le torseur cinématique $\mathcal{T}_v(S_1/S_0)$ au pt O

$$[\mathcal{T}_v]_O = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} \\ \vec{V}(O\in S_1/S_0) \end{pmatrix}_O$$

* le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{(S_1/S_0)}$:

* $\vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} = \dot{\alpha}\,\vec{x}_0$ car [le corps (S_1) est en rotation par rapport au corps fixe (S_0)].

* $\vec{V}(O\in S_1/S_0) = \vec{V}(O/S_0) = \frac{d\vec{OO}}{dt}\Big]_{S_0=R_0} = \vec{0}$

donc $\boxed{[\mathcal{T}_v]_O = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}\,\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix}_O}$

b) le torseur cinématique $\mathcal{T}_v(S_2/S_1)$ au pt A

$$[\mathcal{T}_v]_A = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{(S_2/S_1)} \\ \vec{V}(A\in S_2/S_1) \end{pmatrix}_A$$

* $\vec{\Omega}_{(S_2/S_1)} = \vec{0}$ car [le corps (S_2) est en translation par rapport au corps (S_1)]

* $\vec{V}(A\in S_2/S_1) = \vec{V}(A/S_1) = \frac{d\vec{OA}}{dt}\Big]_{S_1=R_1} = \frac{d\vec{OA}}{dt}\Big]_{R_1} = \frac{d(y\,\vec{y}_1)}{dt}\Big]_{R_1} = \dot{y}\,\vec{y}_1$

$$\text{donc } [\mathcal{T}_v]_A = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \dot{y}\,\vec{y}_1 \end{pmatrix}_A$$

en déduire $\mathcal{T}_v(S_2/S_0)$ au pt A

$$(\mathcal{T}_v)_A = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{(S_2/S_0)} \\ \vec{V}(A\in S_2/S_0) \end{pmatrix}_A$$

$$* \ \vec{\Omega}_{(S_2/S_0)} = \vec{\Omega}_{(S_2/S_1)} + \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} = \vec{0} + \dot{\alpha}\vec{x}_0 = \dot{\alpha}\vec{x}_0$$

9

JALAL

$$* \ \vec{V}_{(A \in S_2/S_0)} = \vec{V}_{(A \in S_2/S_1)} + \vec{V}_{(A \in S_1/S_0)}$$

ou $\vec{V}_{(A \in S_2/S_1)}$ déjà calculer $\Rightarrow \vec{V}_{(A \in S_2/S_1)} = \dot{y}\vec{y}_1$

et calculons $\vec{V}_{(A \in S_1/S_0)} = \underbrace{\vec{V}_{(O \in S_1/S_0)}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} \wedge \vec{OA}$

$$= \dot{\alpha}\vec{x}_0 \wedge y\vec{y}_1 = \dot{\alpha}y\vec{z}_1$$

donc $\boxed{\vec{V}_{A \in S_2/S_0} = \dot{y}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}y\vec{z}_1}$

$$\boxed{\left[\mathcal{V}_{(S_2/S_0)}\right]_A = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}\vec{x}_0 \\ \dot{y}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}y\vec{z}_1 \end{pmatrix}_A}$$

c) le torseur cinématique $\mathcal{V}_{(S_3/S_0)}$ au pt A :

$$\left[\mathcal{V}_{(S_3/S_0)}\right]_A = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{(S_3/S_0)} \\ \vec{V}_{(A \in S_3/S_0)} \end{pmatrix}_A$$

$$* \ \vec{\Omega}_{(S_3/S_0)} = \vec{\Omega}_{(S_3/S_2)} + \vec{\Omega}_{(S_2/S_1)} + \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} = \dot{\beta}\vec{x}_0 + \vec{0} + \dot{\alpha}\vec{x}_0$$

$$\boxed{\vec{\Omega}_{(S_3/S_0)} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\vec{x}_0}$$

$$* \ \vec{V}_{A \in S_3/S_0} = \vec{V}_{(A \in S_3/S_2)} + \vec{V}_{(A \in S_2/S_0)}$$

ona $\vec{V}_{(A \in S_2/S_0)} = \dot{y}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}y\vec{z}_1$

en calculons $\vec{V}_{(A \in S_3/S_2)} = \vec{V}(A/S_2) = \left.\dfrac{d\vec{AA}}{dt}\right]_{S_2 = R_2} = \vec{0}$

finalement $\boxed{\left[\mathcal{V}_{(S_3/S_0)}\right]_A = \begin{pmatrix} (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\vec{x}_0 \\ \dot{y}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}y\vec{z}_1 \end{pmatrix}_A}$

en déduire $\mathcal{V}_{(S_3/S_0)}$ au p^t B

JALAL

$$\left[\mathcal{V}_{(S_3/S_0)}\right]_B = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{(S_3/S_0)} \\ \vec{V}(B \in S_3/S_0) \end{pmatrix}_B$$

on a $\vec{\Omega}_{(S_3/S_0)}$ déja calculer : $\vec{\Omega}_{(S_3/S_0)} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\,\vec{x}_0$

$*$ $\vec{V}(B \in S_3/S_0) = \vec{V}(A \in S_3/S_0) + \vec{\Omega}_{(S_3/S_0)} \wedge \vec{AB}$

$$= \dot{y}\,\vec{y}_1 + \dot{\alpha} y\,\vec{z}_1 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\,\vec{x}_0 \wedge L\,\vec{y}_3$$

$$\boxed{\vec{V}(B \in S_3/S_0) = \dot{y}\,\vec{y}_1 + \dot{\alpha} y\,\vec{z}_1 + L(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\,\vec{z}_3}$$

$$\boxed{\left[\mathcal{V}_{(S_3/S_0)}\right]_B = \begin{pmatrix} (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\,\vec{x}_0 \\ \dot{y}\,\vec{y}_1 + \dot{\alpha} y\,\vec{z}_1 + L(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\,\vec{z}_3 \end{pmatrix}_B}$$

2/ l'axe instantané de rotation du mouvement de (S_3) par rapport à (S_0)

(D) est l'axe central du torseur $\left[\mathcal{V}_{(S_3/S_0)}\right]$

donc (D) est en // à $\vec{\Omega}_{(S_3/S_0)}$ d'où (D) est en // $(\vec{x}_0)$

soit le point $k = \text{projection}_{(D)}(A)$ alors :

$$\vec{Ak} = \frac{\vec{\Omega}_{(S_3/S_0)} \wedge \vec{V}(A \in S_3/S_0)}{\|\vec{\Omega}_{(S_3/S_0)}\|^2} = \frac{(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\,\vec{x}_0 \wedge \left[\dot{y}\,\vec{y}_1 + \dot{\alpha} y\,\vec{z}_1\right]}{(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2}$$

$$\vec{Ak} = \frac{\dot{y}\,\vec{z}_1 - \dot{\alpha} y\,\vec{y}_1}{\dot{\alpha} + \dot{\beta}} = \frac{-\dot{\alpha} y\,\vec{y}_1 + \dot{y}\,\vec{z}_1}{\dot{\alpha} + \dot{\beta}}$$

l'axe ~~de~~ instantané de rotation du mouvement de (S_3) par rapport à (S_0)

(D) est alors la droite passant par k et // $\vec{x}_0$.

$$(D) = (k, \vec{x}_0)$$

3/a/ accélération $\gamma(A\in S_2/S_0)$

$$\vec{\gamma}_{(A\in S_2/S_0)} = \left.\frac{d\vec{V}_{(A\in S_2/S_0)}}{dt}\right]_{(S_0=R_0)} = \left.\frac{d\vec{V}_{(A\in S_2/S_0)}}{dt}\right]_{(R_1=S_1)} + \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)}\wedge\vec{V}_{(A\in S_2/S_0)}$$

(11)

JALAL.

$$* \left.\frac{d\vec{V}_{(A\in S_2/S_0)}}{dt}\right]_{R_1} = \ddot{y}\vec{y}_1 + (\ddot{\alpha}y + \dot{\alpha}\dot{y})\vec{z}_1$$

$$* \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)}\wedge\vec{V}_{(A\in S_2/S_0)} = \dot{\alpha}\vec{x}_0\wedge(\dot{y}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}y\vec{z}_1) = \dot{\alpha}\dot{y}\vec{z}_1 - \dot{\alpha}^2 y\vec{y}_1$$

donc

$$\vec{\gamma}_{(A\in S_2/S_0)} = \ddot{y}\vec{y}_1 + (\ddot{\alpha}y + \dot{\alpha}\dot{y})\vec{z}_1 + \dot{\alpha}\dot{y}\vec{z}_1 - \dot{\alpha}^2 y\vec{y}_1$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_{(A\in S_2/S_0)} = (\ddot{y} - \dot{\alpha}^2 y)\vec{y}_1 + (\ddot{\alpha}y + 2\dot{\alpha}\dot{y})\vec{z}_1}$$

b/ l'accélération $\vec{\gamma}(B\in S_3/S_0)$

$$\vec{\gamma}_{(B\in S_3/S_0)} = \left.\frac{d\vec{V}(B\in S_3/S_0)}{dt}\right]_{(S_0=R_0)} = \left.\frac{d\vec{V}(A\in S_3/S_0)}{dt}\right]_{(S_0=R_0)} + \vec{\Omega}_{(S_3/S_0)}\wedge(\vec{\Omega}_{(S_3/S_0)}\wedge\vec{AB})$$

$$+ \left.\frac{d\vec{\Omega}_{(S_3/S_0)}}{dt}\right]_{S_0}\wedge\vec{AB}$$

$$* \left.\frac{d\vec{V}(A\in S_3/S_0)}{dt}\right]_{R_0} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{V}_{(A\in S_3/S_2)}}{dt}\right]_{R_0}}_{=\vec{0}} + \left.\frac{d\vec{V}(A\in S_2/S_0)}{dt}\right]_{R_0} = \vec{\gamma}_{(A\in S_2/S_0)}.$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{\gamma}_{(A\in S_2/S_0)} = (\ddot{y} - \dot{\alpha}^2 y)\vec{y}_1 + (\ddot{\alpha}y + 2\dot{\alpha}\dot{y})\vec{z}_1}$$

$$* \frac{d\vec{\Omega}_{(S_3/S_0)}}{dt}\wedge\vec{AB} = (\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\vec{x}_0\wedge L\vec{y}_3 = L(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\vec{z}_3$$

$$* \vec{\Omega}_{(S_3/S_0)}\wedge(\vec{\Omega}_{(S_3/S_0)}\wedge\vec{AB}) = \vec{\Omega}_{(S_3/S_0)}\wedge(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{x}_0\wedge L\vec{y}_3 = L(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2\vec{x}_0\wedge\vec{z}_3$$

$$\boxed{\vec{\Omega}_{(S_3/S_0)}\wedge(\vec{\Omega}_{(S_3/S_0)}\wedge\vec{AB}) = -L(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2\vec{y}_3}$$

donc

$$\boxed{\vec{\gamma}_{(B\in S_3/S_0)} = (\ddot{y} - \dot{\alpha}^2 y)\vec{y}_1 + (\ddot{\alpha} y + 2\dot{\alpha}\dot{y})\vec{z}_1 - l(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2\vec{y}_3 + l(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\vec{z}_3}$$

4) donner d'une façon générale la rélation le moment dynamique et le moment cinétique :

JALAL

Soit Σ un système matériel de masse m de centre de masse G ; A un pt de l'espace et R_0 un repère de référence alors:

$$\boxed{\vec{\delta}_A(\Sigma/R_0) = \left.\frac{d\,\vec{\sigma}_{A}(\Sigma/R_0)}{dt}\right]_{R_0} + m\,\vec{v}_{(A/R_0)} \wedge \vec{v}_{(G/R_0)}}$$