Chapter 1

Calcul vectoriel - Torseur

Sommaire

1.1 Approche historique

Pour les problèmes de physique, l'Allemand Hermann Grassman (1809-1877) fut l'un des premiers à utiliser la notation vectorielle. L'Américain Gibbs (1839-1903) et l'Anglais Heaviside (1850-1925), disciples de Hamilton (l'un des premiers à utiliser la notion de vecteur), donnent au calcul vectoriel sa forme quasi définitive. L'intérêt de la maitrise du calcul vectoriel est fondamental pour la bonne application des lois de la mécanique.

1.2 Définitions

1.2.1 Espace vectoriel

On appelle espace vectoriel E sur un corps commutatif K un ensemble d'éléments (vecteurs) qui vérifient les propriétés suivantes:

- E est muni d'une structure de groupe commutatif pour une loi de composition interne, l'addition vectorielle, notée (+).
- $\forall\ \lambda, \mu \in K$ et $\forall\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, on a: $\lambda\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)=\lambda\overrightarrow{u}+\lambda\overrightarrow{v}$ et $\lambda\left(\mu\overrightarrow{u}\right)=(\lambda\mu)\overrightarrow{u}$

1.2.2 Espace vectoriel Euclidien

Un espace vectoriel E est dit euclidien s'il est muni d'un produit scalaire f qui à $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, fait correspondre le nombre réel $f\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ tel que :

$f\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)=f\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right)$

$f\left(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}\right)=\lambda f\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$

$f\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)=f\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)+f\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$

$f\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right)\geq 0$ (égalité si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$)

Notation : $f\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$

1.3 Espace Affine - Espace Métrique

1.3.1 Espace affine

On appelle espace affine ξ un ensemble d'éléments appelés points tels qu'à tout couple ordonné de deux points A et B (bipoints), on fait correspondre un vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'un espace vectoriel E et si A, B et $C \in \xi$, on a:

$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$\forall\ O \in \xi$ et $\overrightarrow{u} \in E$, $\exists!\ A \in \xi$ défini par $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{u}$

1.3.2 Espace métrique

Un espace métrique est un espace affine auquel on a associe un espace vectoriel euclidien.

Pour la suite du cours, on désigne par ξ l'espace métrique associé à un espace vectoriel euclidien E de dimension 3.

1.4 Vecteurs - Moments d'un vecteur

1.4.1 Introduction

En physique, la modélisation des grandeurs, qui ne peuvent être entièrement définies par un scalaire ou une fonction numérique seuls, se fait par l'introduction de la notion de vecteur. Par exemple, pour préciser un déplacement, une vitesse, ou une force, la direction et le sens sont indispensables.

1.4.2 Vecteur lié - Vecteur glissant

• On appelle vecteur lié, tout couple $(A, \overrightarrow{u})$ formé de $A \in \xi$ appelé origine ou point d'application et d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de E appelé grandeur vectorielle.
Notation : $(A, \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}(A)$: on lit vecteur $\overrightarrow{u}$ lié au point A.

Exemples: - Force résultante appliquée à un point.
- Champ électrique créé par une charge électrique en un point.

• On appelle vecteur glissant, un vecteur défini à un glissement près sur un axe (Δ) appelé support.
Notation : $(\Delta, \overrightarrow{u})$: vecteur glissant.
Exemples: - Résultante dans le cas d'un torseur

Soit $b = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormée directe de E.
$\forall \overrightarrow{u} \in E$, $\overrightarrow{u}$ sera défini par ses composantes u_x, u_y et u_z dans cette base :

$$\overrightarrow{u} = u_x \overrightarrow{i} + u_y \overrightarrow{j} + u_z \overrightarrow{k} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{u} = \begin{cases} u_x \\ u_y \quad \textit{dans } (b) \\ u_z \end{cases}$$

1.4.3 Opérations sur les vecteurs

1.4.3.1 Produit scalaire

Le produit scalaire est une opération algébrique s'ajoutant aux lois s'appliquant aux vecteurs. À deux vecteurs, elle associe leur produit, qui est un nombre (ou scalaire, d'où son nom). Elle permet d'exploiter les notions de la géométrie euclidienne traditionnelle : longueurs, angles, orthogonalité.
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs libres non nuls de E.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \iff \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$$

1.4.3.2 Produit vectoriel

Le produit vectoriel est une opération vectorielle effectuée dans les espaces euclidiens orientés de dimension 3. Le formalisme utilisé actuellement est apparu en 1881 dans un manuel d'analyse vectorielle écrit par Josiah Willard Gibbs pour ses étudiants en physique.
Aux deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de E, on peut associer un vecteur $\overrightarrow{w}$ (unique) tel que :

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \left| \begin{array}{l} u_x \\ u_y \\ u_z \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} v_x \\ v_y \\ v_z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} w_x = u_y v_z - u_z v_y \\ w_y = u_z v_x - u_x v_z \\ w_z = u_x v_y - u_y v_x \end{array} \right.$$

On a $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{v}$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forme un trièdre direct.

Conséquences
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dans le plan de la feuille, $\overrightarrow{w}$ est $\perp$ à ce plan.
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$: le produit vectoriel est anti-commutatif.

1.4.3.3 Double produit vectoriel

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w} \in E$.
$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{w}$

1.4.3.4 Produit mixte

Considérons $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w} \in E$.

$$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = det\begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

Propriétés
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$: le produit mixte est invariant par permutation circulaire.
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$: le produit mixte change de signe dans le cas d'une permutation non circulaire.

1.4.4 Moment d'un vecteur en un point

En physique, les moments des vecteurs sont grandement utilisés, ils permettent de modéliser des grandeurs comme, moment d'une force, moment d'inertie et moment cinétique...etc.
• Soit $(A, \overrightarrow{u})$ un vecteur lié et $O \in \xi$.

Le moment en O du vecteur lié $\overrightarrow{u}(A)$ est le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}}\,(O, \overrightarrow{u}\,(A)) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{u}$

• Soit $(\Delta, \overrightarrow{u})$ un glisseur et $O \in \xi$.
$\overrightarrow{\mathcal{M}}(O, \overrightarrow{u})$ est indépendant du point $M \in \Delta$

Preuve: $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM'} \wedge \overrightarrow{u} + \underbrace{\overrightarrow{M'M} \wedge \overrightarrow{u}}$

1.5 Torseurs

1.5.1 Introduction

Un torseur est un outil mathématique utilisé principalement en mécanique du solide indéformable, pour décrire les mouvements des solides et les actions mécaniques qu'ils subissent de la part d'un environnement extérieur. Un certain nombre de vecteurs utilisés en mécanique sont des moments : moment d'une force, moment cinétique, moment dynamique. Les champs vectoriels utilisés en mécanique (moment d'une force, moment cinétique, moment dynamique...) possèdent des propriétés communes, d'où l'intérêt d'être modélisés par un même objet mathématique appelé << torseur >>.

1.5.2 Application antisymétrique

Définition: $\mathcal{L}\colon E \longrightarrow E$
$\quad \overrightarrow{u} \longmapsto \mathcal{L}(\overrightarrow{u})$

$\mathcal{L}$ est antisymétrique $\Longleftrightarrow \forall\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E;\ \mathcal{L}(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = -\mathcal{L}(\overrightarrow{v}).\overrightarrow{u}$

Exemple: $\mathcal{L}_a\colon E \longrightarrow E$
$\quad \overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$ (où $\overrightarrow{a}$ est un vecteur donné non nul)

Proposition: Si $\mathcal{L}$ est antisymétrique, $\exists!\ \overrightarrow{R} \in E$ tel que $\mathcal{L}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{u}$ $(\forall\ \overrightarrow{u} \in E)$

Démonstration

Si $[L]$ est la matrice associée à $\mathcal{L}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, alors $\mathcal{L}(\overrightarrow{u}) = [L]\,\overrightarrow{u}$
avec $[L] = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix}$

Considérons les produits scalaires suivants :

$$\mathcal{L}(\overrightarrow{i}).\overrightarrow{i} = -\mathcal{L}(\overrightarrow{i}).\overrightarrow{i} \iff [L]\,\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies l_{11} = 0$$

$$\mathcal{L}(\overrightarrow{j}).\overrightarrow{j} = 0 \implies l_{22} = 0$$

$$\mathcal{L}(\overrightarrow{k}).\overrightarrow{k} = 0 \implies l_{33} = 0$$

$$\mathcal{L}(\overrightarrow{i}).\overrightarrow{j} = -\mathcal{L}(\overrightarrow{j}).\overrightarrow{i} \iff \begin{vmatrix} 0 & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & 0 & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & 0 & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}(\overrightarrow{i}).\overrightarrow{j} = -\mathcal{L}(\overrightarrow{j}).\overrightarrow{i} \implies l_{21} = -l_{12}$$

$$\mathcal{L}(\overrightarrow{i}).\overrightarrow{k} = -\mathcal{L}(\overrightarrow{k}).\overrightarrow{i} \implies l_{31} = -l_{13}$$

$$\mathcal{L}(\overrightarrow{j}).\overrightarrow{k} = -\mathcal{L}(\overrightarrow{k}).\overrightarrow{j} \implies l_{23} = -l_{32}$$

Posons $l_{12} = -r_3$, $l_{13} = r_2$ et $l_{23} = -r_1$. Il en résulte :

$$\mathcal{L}(\overrightarrow{u}) = [L]\,\overrightarrow{u} \iff [L]\,\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_3u_y + r_2u_z \\ r_3u_x - r_1u_z \\ -r_2u_x + r_1u_y \end{pmatrix} = \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{u}$$

avec $\overrightarrow{R} = r_1\,\overrightarrow{i} + r_2\,\overrightarrow{j} + r_3\,\overrightarrow{k}$

1.5.3 Champ antisymétrique

1.5.3.1 Définitions

• Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de ξ ($\mathcal{D} \subset \xi$). On appelle champ de vecteurs sur $\mathcal{D}$, une application de $\mathcal{D}$ dans E qui à $M \in \mathcal{D} \longrightarrow \overrightarrow{u}(M) \in E$

Notation: $\begin{array}{l} \mathcal{D} \longrightarrow E \\ M \longmapsto \overrightarrow{u}(M) \end{array}$

• Un champ de vecteurs $\overrightarrow{u}(M)$ est dit *antisymétrique* s'il existe une application antisymétrique $\mathcal{L}$ telle que $\forall\ M, N \in \xi$, on a la relation $\overrightarrow{u}(N) = \overrightarrow{u}(M) + \mathcal{L}(\overrightarrow{MN})$.

Si $\overrightarrow{R}$ est le vecteur associé à $\mathcal{L}$, on aura $\overrightarrow{u}(N) = \overrightarrow{u}(M) + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{MN}, \quad \forall\ M, N \in \xi$.

• Un champ de vecteurs $\overrightarrow{u}(M)$ est dit *équiprojectif* si $\forall\ M, N \in \xi$:

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u}(N) = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u}(M)$$

1.5.3.2 Propriété

Un champ de vecteurs $\overrightarrow{u}(M)$ est *antisymétrique* $\iff$ $\overrightarrow{u}(M)$ est *équiprojectif.*

Preuve

$$\overrightarrow{u}(N) = \overrightarrow{u}(M) + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{MN} \implies \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u}(N) = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u}(M) + \overrightarrow{MN}.\left(\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{MN}\right)$$

Achever la démonstration dans l'autre sens.

1.5.4 Torseurs

1.5.4.1 Définition

• On appelle torseur $[\tau]$ un ensemble formé d'un champ de vecteurs antisymétrique $\overrightarrow{u}(M)$ et de son vecteur $\overrightarrow{R}$.

Conséquence

Soit $O \in \xi$ et M quelconque, on a $\overrightarrow{u}(M) = \overrightarrow{u}(O) + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{OM}$

Un torseur est donc caractérisé par la donnée de $\overrightarrow{R}$ et de son champ en un point.

Notation: $[\tau(O)] = \left[\overrightarrow{u}(O), \overrightarrow{R}\right]$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}(O)$ et $\overrightarrow{R}$ sont appelés les éléments de réduction du torseur $[\tau]$ en O ou ses coordonnées en O.

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}(O) : & moment\ du\ torseur\ au\ point\ O \\ \overrightarrow{R} : & résultante\ du\ torseur \end{cases}$$

Exemple: Le champ des moments d'un vecteur est un torseur.

Considérons $\overrightarrow{F}$ un vecteur lié à un point A et M un point quelconque de ξ. Le moment en M de $\overrightarrow{F}$ vérifie la relation :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathcal{M}}\left(M,\overrightarrow{F}\right) &= \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{M'A}\right)\wedge\overrightarrow{F} \\
&= \overrightarrow{M'A}\wedge\overrightarrow{F}+\overrightarrow{MM'}\wedge\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\mathcal{M}}\left(M',\overrightarrow{F}\right)+\overrightarrow{MM'}\wedge\overrightarrow{F}
\end{aligned}$$

Ainsi, le champ $\overrightarrow{\mathcal{M}}(M)$ est antisymétrique. On peut donc lui associer un torseur avec $\overrightarrow{F}$ comme résultante.

1.5.4.2 Opérations sur les torseurs

• Addition des torseurs

Considérons les torseurs $[\tau_1(O)] = \left[\overrightarrow{u}_1(O),\overrightarrow{R}_1\right]$ et $[\tau_2(O)] = \left[\overrightarrow{u}_2(O),\overrightarrow{R}_2\right]$
Le champ $\overrightarrow{u}(M) = \overrightarrow{u}_1(M)+\overrightarrow{u}_2(M)$ possède la propriété suivante :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}(M') &= \overrightarrow{u}_1(M')+\overrightarrow{u}_2(M') = \overrightarrow{u}_1(M)+\overrightarrow{R}_1\wedge\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{u}_2(M)+\overrightarrow{R}_2\wedge\overrightarrow{MM'} \\
&= \overrightarrow{u}(M)+\overrightarrow{R}\wedge\overrightarrow{MM'} : \text{ \textit{ce champ est antisymétrique}}
\end{aligned}$$

Il vérifie donc la propriété d'un torseur et caractérise la somme $[\tau(O)] = [\tau_1(O)]+[\tau_2(O)]$.
Ses éléments de réduction en O sont : $\begin{cases}\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_1+\overrightarrow{R}_2 \\ \overrightarrow{u}(O) = \overrightarrow{u}_1(O)+\overrightarrow{u}_2(O)\end{cases}$

Remarque:
- Cette loi d'addition est commutative et associative,
- Elle a un élément neutre: le torseur nul (résultante et moment nuls),
- Tout torseur $[\tau(O)]$ a un torseur opposé $\left[-\overrightarrow{u}(O),-\overrightarrow{R}\right]$.

• Multiplication d'un torseur par un scalaire

$$[\tau(O)] = \lambda\,[\tau_1(O)] \iff \begin{cases}\overrightarrow{R} = \lambda\overrightarrow{R}_1 \\ \overrightarrow{u}(O) = \lambda\overrightarrow{u}_1(O)\end{cases} \qquad \text{où} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Exercice: Vérifier que $\lambda\,[\tau_1(O)]$ est un torseur.

• Comoment ou produit scalaire de deux torseurs
Considérons les deux torseurs: $[\tau_1(O)] = \left[\overrightarrow{u}_1(O),\overrightarrow{R}_1\right]$ et $[\tau_2(O)] = \left[\overrightarrow{u}_2(O),\overrightarrow{R}_2\right]$.
Considérons $O' \neq O$ et examinons $\overrightarrow{R}_1.\overrightarrow{u}_2(O')+\overrightarrow{R}_2.\overrightarrow{u}_1(O')$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}_1.\overrightarrow{u}_2(O')+\overrightarrow{R}_2.\overrightarrow{u}_1(O') &= \overrightarrow{R}_1.\left(\overrightarrow{u}_2(O)+\overrightarrow{R}_2\wedge\overrightarrow{OO'}\right)+\overrightarrow{R}_2.\left(\overrightarrow{u}_1(O)+\overrightarrow{R}_1\wedge\overrightarrow{OO'}\right) \\
&= \overrightarrow{R}_1.\overrightarrow{u}_2(O)+\overrightarrow{R}_2.\overrightarrow{u}_1(O)+\overrightarrow{R}_1.\left(\overrightarrow{R}_2\wedge\overrightarrow{OO'}\right)+\overrightarrow{R}_2.\left(\overrightarrow{R}_1\wedge\overrightarrow{OO'}\right)
\end{aligned}$$

Cette quantité, indépendante de O et par conséquent invariante, représente par définition le produit scalaire (on utilise également la terminologie de *comoment*) des deux torseurs $[\tau_1]$ et $[\tau_2]$.
Définition du comoment: $[\tau_1(O)]\,.\,[\tau_2(O)] = \overrightarrow{R}_1.\overrightarrow{u}_2(O)+\overrightarrow{R}_2.\overrightarrow{u}_1(O)$

• **Égalité de deux torseurs**: $[\tau_1] = [\tau_2] \iff \forall\ M \in \xi, \begin{cases} \overrightarrow{R}_1 = \overrightarrow{R}_2 \\ \overrightarrow{u}_1(M) = \overrightarrow{u}_2(M) \end{cases}$

Conséquence: $[\tau_1(O)] = [\tau_2(O)] \iff \begin{cases} \overrightarrow{R}_1 = \overrightarrow{R}_2 \\ \overrightarrow{u}_1(O) = \overrightarrow{u}_2(O) \end{cases}$

1.5.4.3 Invariant scalaire d'un torseur

Soit $[\tau(O)] = \left[\overrightarrow{u}(O), \overrightarrow{R}\right]$ un torseur défini par ses coordonnées en O. La quantité $I = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{u}(O)$, indépendante du point O, est appelée invariant scalaire ou *automoment* du torseur.

Preuve: $\overrightarrow{u}(O') = \overrightarrow{u}(O) + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{OO'} \implies \overrightarrow{R}.\overrightarrow{u}(O') = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{u}(O) + \overrightarrow{R}.\left(\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{OO'}\right) = I \quad (\forall\ O')$

1.5.4.4 Axe central d'un torseur

Définition: On appelle axe central (Δ) d'un torseur $[\tau(O)] = \left[\overrightarrow{u}(O), \overrightarrow{R}\right]$ avec $\overrightarrow{R} \neq \overrightarrow{0}$, le lieu des points P tel que $\overrightarrow{u}(P) \wedge \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$.

Équation de (Δ)

$$\begin{aligned} \text{Soit } P \in (\Delta) &\implies \overrightarrow{u}(P) \wedge \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0} \\ &\implies \left[\overrightarrow{u}(O) + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{OP}\right] \wedge \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0} \\ &\implies \overrightarrow{u}(O) \wedge \overrightarrow{R} + R^2.\overrightarrow{OP} - \left(\overrightarrow{R}.\overrightarrow{OP}\right)\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Multiplions vectoriellement $(\wedge)$ par $\overrightarrow{R} \implies \overrightarrow{R} \wedge \left(\overrightarrow{u}(O) \wedge \overrightarrow{R}\right) + R^2.\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{OP} - \left(\overrightarrow{R}.\overrightarrow{OP}\right)\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$

$$\implies \overrightarrow{R} \wedge \left(\overrightarrow{u}(O) \wedge \overrightarrow{R} + R^2.\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{0}$$

Donc $\exists\ \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u}(O) \wedge \overrightarrow{R} + R^2.\overrightarrow{OP} = \mu\overrightarrow{R} \implies \overrightarrow{OP} = \dfrac{\mu\overrightarrow{R}}{R^2} - \dfrac{\overrightarrow{u}(O) \wedge \overrightarrow{R}}{R^2}$

Ainsi, si $P \in$ à l'axe central $\implies \overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{R} + \dfrac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{u}(O)}{R^2}$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$)

Remarque:
L'axe central d'un torseur $\left[\overrightarrow{u}(O), \overrightarrow{R}\right]$ est la droite (Δ) de vecteur directeur $\overrightarrow{R}$ et passant par le point P_0 tel que : $\overrightarrow{OP_0} = \dfrac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{u}(O)}{R^2}$

1.5.4.5 Classification des torseurs

• **Glisseur**
Le torseur $[\tau(O)] = \left[\overrightarrow{u}(O), \overrightarrow{R}\right]$ est un **glisseur**, si son invariant scalaire est nul.

$$I = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{u}(O) = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{R} \neq \overrightarrow{0}$$

Remarque:
Sur l'axe central d'un **glisseur**, $\overrightarrow{u}(P) = \overrightarrow{0}\ \forall\ P \in (\Delta)$ car $\overrightarrow{R} \parallel \overrightarrow{u}(P)$ et $\overrightarrow{R}.\overrightarrow{u}(P) = 0$ avec $\overrightarrow{R} \neq \overrightarrow{0}$.

• **Couple**
Le torseur $[\tau(O)] = \left[\overrightarrow{u}(O), \overrightarrow{R}\right]$ est un **couple**, si $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$. Le champ $\overrightarrow{u}(M)$ devient alors indépendant de M.
Remarque:
Il n'existe pas d'axe central pour un **couple**.

Proposition:
Le torseur $[\tau(O)] = \left[\overrightarrow{u}(O), \overrightarrow{R}\right]$ peut se décomposer en la somme d'un **glisseur** et d'un **couple**.
Démonstration:

$$[\tau(O)] = \left[\overrightarrow{u}(O), \overrightarrow{R}\right] = \left[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{R}\right] + \left[\overrightarrow{u}(O), \overrightarrow{0}\right] = [G(O)] + [C(O)]$$

NB: Cette décomposition n'est pas unique; il y a une infinité de décompositions possibles qui dépendent du choix de O.