Domaine : Sciences et Technologies
Parcours : Physique
Code et intitulé : PHY206 - Mécanique du Solide (Cinématique du Solide Rigide)
Crédits : 4
Public cible : Licence de Physique
Semestre : 4
Pré-requis : Mécanique du point matériel
Enseignant responsable de l'UE : ATCHONOUGLO Kossi

Document de base

Table des matières

Introduction

Par référence à "WIKIPÉDIA" :

La mécanique du solide est la partie de la mécanique qui s'intéresse aux objets que l'on ne peut réduire en un point matériel. Cela permet notamment de décrire et modéliser les rotations de l'objet sur lui-même.

L'objet est lui-même composé de points matériels, que ce soit des points discrets par exemple un assemblage de boules reliées par des baguettes de masse négligeable, chaque boule pouvant être modélisée par un point matériel ou un ensemble continu de points. En général, on suppose le solide indéformable ; la déformation du solide relève de la mécanique des milieux continus.

La mécanique du solide est donc une branche de la mécanique traitant du comportement des mécanismes constitués de pièces rigides en général, et parfois déformables.

L'objectif principal étant la détermination des performances d'un système en vue d'établir un dimensionnement adapté à l'usage envisagé, ou la validation de ces grandeurs.

Ce cours constitue la deuxième partie de la mécanique après la mécanique du point matériel. Il contient des exercices classiques permettant de comprendre mieux le contenu du cours.

Les deux premiers chapitres traitent les outils mathématiques notamment les torseurs utilisés pour simplifier l'écriture des équations de la mécanique.

Le chapitre trois porte sur la cinématique du solide indéformable ainsi que les contacts entre les solides. Le maniement des angles d'Euler et leur assimilation sont nécessaire pour la compréhension de mécanique des solides.

Le quatrième chapitre porte sur la géométrie des masses et la cinétique. La géométrie des masse portera les centres d'inertie et les tenseurs d'inertie des solides. Savoir utiliser les théorèmes de Huygens petrmet de résoudre un bon nombre de problèmes en mécanique des solides. Nous aborderons dans ce chapitre aussi la cinétique des solides.

Chapitre I

Rappels sur le calcul vectoriel

Objectifs

- Comprendre le caicul vectoriel et le produit scalaire ;
- Comprendre le produit mixte et ses conséquences ;
- Maîtriser la division vectorielle ;

I.1 Espace vectoriel

I.1.1 Définition

On appelle espace vectoriel E sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ un ensemble d'éléments, appelés vecteurs, qui satisfait aux propriétés suivantes :

— E est muni d'une structure de groupe commutatif pour une loi de composition interne, l'addition vectorielle notée simplement $+$.

— Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux éléments de E et si λ et ν sont de $\mathbb{K}$, alors :

$$\begin{aligned}
\lambda(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) &= \lambda\overrightarrow{u}+\lambda\overrightarrow{v}\\
(\lambda+\mu)\overrightarrow{u} &= \lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{u}\\
\lambda(\mu\overrightarrow{u}) &= (\lambda\mu)\overrightarrow{u}\\
1\overrightarrow{u} &= \overrightarrow{u}
\end{aligned}$$

I.1.2 Espace vectoriel euclidien

Un espace vectoriel E est euclidien s'il est muni d'un produit scalaire f qui, à deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de E, fait correspondre le nombre réel $f(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ de $\mathbb{K}$ tel que :

$$\begin{aligned}
f(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) &= f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})\\
f(\overrightarrow{u},\lambda\overrightarrow{v}) &= \lambda f(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\\
f(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) &= f(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+f\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})\\
f(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}) &> 0 \quad \text{si} \quad \overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad f(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})=0 \quad \text{si} \quad \overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

Remarque I.1.1 *$f(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})$ est le carré de la norme de $\overrightarrow{u}$ notée $\|\overrightarrow{u}\|$.*

Remarque I.1.2 *La norme euclidienne de $\overrightarrow{u}$ est donc $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{f(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})}$.*

Définition I.1.1 *Une forme linéaire h sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ qui à un vecteur $\overrightarrow{v}$ de E fait correspondre un réel $h(\overrightarrow{v})$ tel que :*

$$h(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=h(\overrightarrow{u})+h(\overrightarrow{v})$$
$$h(\lambda\overrightarrow{v})=\lambda h(\overrightarrow{v})$$

Définition I.1.2 *Une forme bilinéaire f sur E est une application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$, qui à deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ associe le réel $f(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, une application linéaire par rapport à chacun des arguments $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

Conséquence : Le produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique telle que la forme quadratique associée soit définie positive.

Notation : $f(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

Symétrie : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ (c'est la commutativité).

La forme quadratique q associée est l'application qui à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E, associe son produit scalaire par lui même, i.e $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$

$$q(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$$

— $q(\overrightarrow{u})=0\Longleftrightarrow\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}\longrightarrow q$ est définie positive.
— pour $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$, $q(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}>0\longrightarrow q$ est positive
— $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}\longrightarrow\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}=\|\overrightarrow{u}\|^2$
— Orthogonalité : deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est nul.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0\Longleftrightarrow\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$$

I.1.3 Base d'un espace vectoriel

On appelle base d'un espace vectoriel de n vecteurs $\overrightarrow{e}_1,...,\overrightarrow{e}_n$ de E, s'ils sont indépendants et permettent d'exprimer linéairement tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de E, i.e :

$$\overrightarrow{v}=\sum_{i=1}^{n}x_i\overrightarrow{e}_i=x_1\overrightarrow{e}_1+x_2\overrightarrow{e}_2+...+x_n\overrightarrow{e}_n=x_i\overrightarrow{e}_i.$$

Les réels $x_1,...,x_n$ sont appelés les composantes de $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1,...,\overrightarrow{e}_n)$.

La base est dite orthonormée si et seulement si $\overrightarrow{e}_i.\overrightarrow{e}_i=1$ et $\overrightarrow{e}_i.\overrightarrow{e}_j=0$ pour tout i différent de j ou encore $e_ie_j=\delta^i_j$.

I.2 Espace affine

Un espace affine $\mathcal{E}$ est un ensemble d'éléments appelés points tel qu'à tout couple ordonné (A,B) de deux points A et B (bipoint), on puisse faire correspondre un vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'un espace vectoriel E.

On dira que $\mathcal{E}$ est l'espace ponctuel affine habituel de la géométrie euclidienne et E est l'espace vectoriel associé ; ici, E est l'espace $\mathbb{R}^3$.

Soient trois points A, B et C de $\mathcal{E}$, on a :

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

Soit O un point de $\mathcal{E}$ et $\overrightarrow{v}$ un élément de E ; il existe un point P et un seul de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{v}$.

I.3 Orientation de l'espace $\mathbb{R}^3$

Soient $\mathcal{B}_1(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ et $\mathcal{B}_2(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3})$ deux bases quelconques de l'espace vectoriel associé à l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$. Soit H la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ et soit $\Delta_{12} = \text{dét}H \neq 0$ (car $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ étant deux bases, elles sont linéairement indépendantes)

La relation $\mathcal{B}_1 \mathcal{R} \mathcal{B}_2 \iff \Delta_{12} \neq 0$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

I.3.1 Définition

On dira que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ont même orientation si $\Delta_{12} > 0$.

Remarque I.3.1 *Soient trois bases $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Supposons $\Delta_{01} < 0$ et $\Delta_{12} < 0$; on aura $\Delta_{02} > 0$*
Par deux changements d'orientation, on revient à l'orientation initiale ; donc la relation $\mathcal{R}$ définit une partition de l'ensemble des bases de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ en deux classes.

Par définition, orienter l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, c'est choisir une base dans l'une de ces deux classes d'équivalence :
la première appelée la classe des bases directes ;
la seconde appelée la classe des bases rétrogrades

Par convention, les bases directes seront celles qui ont l'orientation de la base canonique, i.e qui sont telles que $\Delta > 0$.

I.3.2 Bases orthonormées

Ce sont des bases dont les vecteurs sont unitaires et deux à deux orthogonaux ; l'espace $\mathbb{R}^3$ étant muni de son produit scalaire :

— base canonique : $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est orthonormée. On définit : $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$; $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$; $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.
— on démontre que si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont orthonormées,

$$\begin{cases} \Delta_{12} = +1 & \text{si } \mathcal{B}_1 \text{ et } \mathcal{B}_2 \text{ ont la même orientation} \\ \Delta_{12} = -1 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

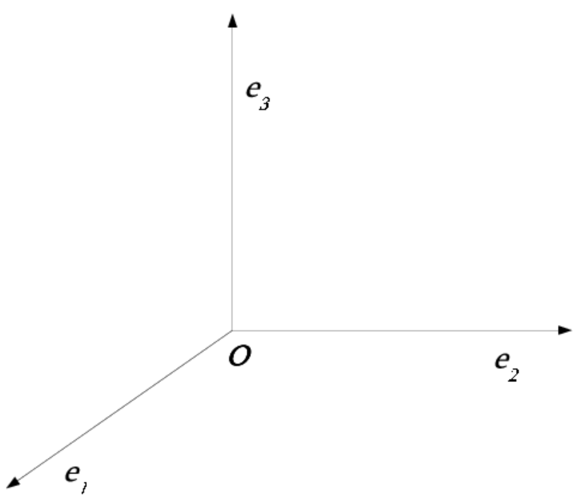


FIGURE I.1 – Repère orthonormé

I.3.3 Interprétation physique de l'orientation

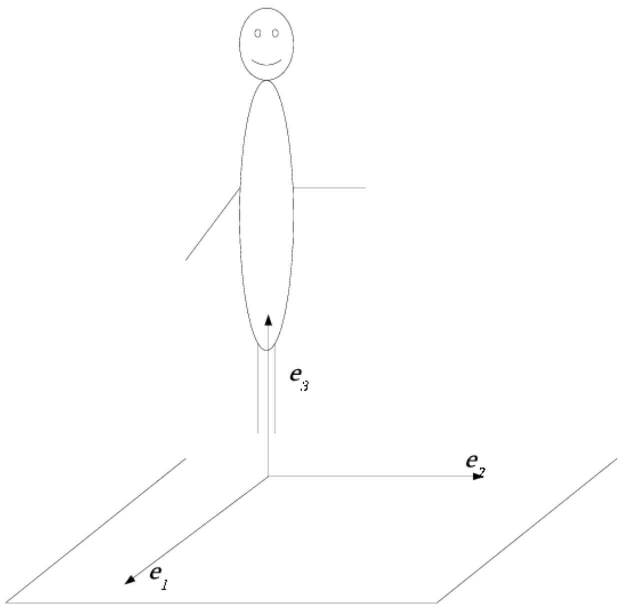


FIGURE I.2 – Bonhomme d'Ampère

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ associé à l'espace vectoriel euclidien E, un repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ sera directe si la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est directe et rétrograde sinon.
Physiquement, la "règle du bon homme d'Ampère" ou "règle du tire-bouchon" permet de reconnaître que le repère est direct ou rétrograde.

L'orientation prise pour la base orthonormée directe est telle que pour un observateur disposé suivant le vecteur $\overrightarrow{e_3}$, le passage de $\overrightarrow{e_1}$ à $\overrightarrow{e_2}$ se fait de droite à gauche.

Règle : Repère direct si un observateur debout sur le plan (P), les pieds en O, la tête en $\overrightarrow{e_3}$, regardant $\overrightarrow{e_1}$ voit $\overrightarrow{e_2}$ à sa gauche. Si $\overrightarrow{e_2}$ est à sa droite, la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est inverse ou rétrograde.

I.4 Opérateur sur les vecteurs

I.4.1 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ défini sur le corps commutatif $\mathbb{R}$ est la forme bilinéaire symétrique positive $f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ définie au I.1.1 et notée $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

Expression analytique :
Soient $\overrightarrow{u} = \sum_i u_i \overrightarrow{e}_i$ et $\overrightarrow{v} = \sum_i v_i \overrightarrow{e}_i$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire de ces deux vecteurs est le réel :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \sum_i u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Exemple I.4.1 *$\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

Géométriquement, on a :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|u\|\|v\|cos\theta \text{ avec } \theta = (\vec{u}, \vec{v})$$

Propriétés

— $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$: commutativité ou symétrie

— $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$: distributivité par rapport à l'addition

Exemple physique : le travail W effectué par une force $\vec{F}$ au cours d'un déplacement $\vec{l}$ est un exemple physique simple du produit scalaire ; $W = \vec{F}.\vec{l} = F.lcos\theta$, $\theta = (\vec{F}, \vec{l})$.

I.4.2 Produit vectoriel - Produit mixte - Double produit vectoriel

On définit dans l'espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ euclidien une loi de composition interne notée $\wedge$ qui, à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E fait correspondre le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ de E. C'est une forme bilinéaire antisymétrique : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

1. Soient $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base orthonormée directe quelconque, $\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$ et $\vec{v} = x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2} + z'\vec{e_3}$ deux vecteurs, alors :

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & x & x' \\ \vec{e_2} & y & y' \\ \vec{e_3} & z & z' \end{vmatrix} = (yz' - zy')\vec{e_1} + (zx' - xz')\vec{e_2} + (xy' - yx')\vec{e_3}$$

2. Soient (x, y, z), (x', y', z') et (x'', y'', z'') les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sur la base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. On calcule le déterminant des composantes formé par les trois vecteurs :

$$\begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{array} \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \Delta$$

   On développe Δ par rapport à la troisième colonne par exemple :

$$\Delta = x''(yz' - zy') + y''(zx' - xz') + z''(xy' - yx') = \vec{w}.(\vec{u} \wedge \vec{v}).$$

   Δ est appelé produit mixte.

Par définition, le produit mixte de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le réel $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$ notée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ pris dans cet ordre. C'est le déterminant Δ (forme trilinéaire alternée antisymétrique) relatif à une base orthonormée choisie positive.

— Si $\vec{u} = \vec{v}$ ou $\vec{u} = \vec{w}$ ou $\vec{v} = \vec{w}$ alors $\Delta = 0$ (deux colonnes identiques). Ainsi $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{u} = 0$ traduit que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{u}$ ou $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{v}$.

— On démontre que ces trois vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ constitue une base directe de l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Cette base n'est pas forcément orthonormée.

— Antisymétrie : le produit mixte de trois vecteurs change de signe si on permute deux vecteurs

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}).\vec{w} = -(\vec{w} \wedge \vec{v}).\vec{u}.$$

— Le produit mixte ne change pas de signe si on effectue une permutation circulaire de ces vecteurs

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w})\vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}).\vec{v} \equiv (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

Conséquence Soit $\vec{w} = \vec{a} \wedge \vec{b}$; alors $\|\vec{w}\| = absin(\vec{a}, \vec{b})$ qui est l'aire du parallélogramme construit avec $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Remarque I.4.1 *Si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = dét(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.*

Formule du double produit vectoriel
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$, alors :

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$$
$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$$

I.4.3 Division vectorielle

Exercice : étant donnés les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de E, trouver un vecteur

$$\overrightarrow{x} \text{ tel que } \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}. \tag{I.1}$$

Solution :

1. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ on a : $\begin{cases} \text{si} \quad \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} & \text{alors tout vecteur de E est solution} \\ \text{si} \quad \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0} & \text{alors pas de solution dans E} \end{cases}$

2. $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$; l'équation (I.1) impose deux conditions géométriques préliminaires :
$\begin{cases} \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{b}.\overrightarrow{x} = 0 \\ \overrightarrow{b}.\overrightarrow{a} = 0 \end{cases}.$
Multipliant vectoriellement l'équation (I.1) par le vecteur $\overrightarrow{a}$: $(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{a}) \wedge \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$.
Il vient : $(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{a}).\overrightarrow{x} - (\overrightarrow{x}.\overrightarrow{a})\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$. Soit

$$\|\overrightarrow{a}\|^2\overrightarrow{x} - (\overrightarrow{x}.\overrightarrow{a})\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}. \tag{I.2}$$

Remarquons que si le vecteur $\overrightarrow{x}$ s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire d'un vecteur $\overrightarrow{x_0}$ et du vecteur $\overrightarrow{a}$ ($\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + \lambda\overrightarrow{a}$) alors le vecteur $\overrightarrow{x_0}$ est une solution de l'équation (I.2) :

$$\|\overrightarrow{a}\|^2 (\overrightarrow{x_0} + \lambda\overrightarrow{a}) - ((\overrightarrow{x_0} + \lambda\overrightarrow{a}).\overrightarrow{a})\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$$
$$\|\overrightarrow{a}\|^2\overrightarrow{x_0} + \lambda\|\overrightarrow{a}\|^2\overrightarrow{a} - (\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{a})\overrightarrow{a} - \lambda\|\overrightarrow{a}\|^2\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}.$$

Soit après simplification :

$$\|\overrightarrow{a}\|^2\overrightarrow{x_0} - (\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{a})\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}. \tag{I.3}$$

Donc, il suffit de trouver un seul vecteur non nul $\overrightarrow{x_0}$ pour connaitre l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{x}$.
Une solution particulière est donnée par $\overrightarrow{x_0}$ telle que $\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{a} = 0$.
D'où et d'après l'équation (I.3) :

$$\overrightarrow{x_0} = -\frac{\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|^2}.$$

Et l'ensemble des solutions des vecteurs $\overrightarrow{x}$ est tel que

$$\overrightarrow{x} = -\frac{\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|^2} + \lambda\overrightarrow{a}.$$

Il y a donc une infinité de solution à ce problème de l'équation (I.1).

Remarque I.4.2 *Le produit mixte et le produit vectoriel dépendent de l'orientation de l'espace $\mathbb{R}^3$. Ces deux notions sont invariantes par changement de bases orthonormées directes.*

I.5 Exercices

Exercice I.5.1 *Étant donnés les deux vecteurs* $\overrightarrow{R}$ *et* $\overrightarrow{m}$, *trouver un vecteur* $\overrightarrow{OP}$ *tel que*

$$\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{m} = \overrightarrow{R}$$

.

Exercice I.5.2 *Résoudre l'équation vectorielle*

$$\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x},$$

avec $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} \neq 0$.

Exercice I.5.3 *Soit un repère orthonormé* $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$.
On considère les vecteurs $\overrightarrow{V}_1(2,3,-1)$; $\overrightarrow{V}_2(3,-2,2)$; $\overrightarrow{V}_3(4,-3,3)$.

1. *Calculer les composantes et les normes des vecteurs suivants :*
   $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2 + \overrightarrow{V}_3$ *et* $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2 - \overrightarrow{V}_3$
2. *Déterminer le vecteur unitaire* $\overrightarrow{u}$ *porté par le vecteur* $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_1 - 2\overrightarrow{V}_2$.
3. *Calculer :*
   — *le produit scalaire* $\overrightarrow{V}_1.\overrightarrow{V}_2$.
   — *le produit vectoriel* $\overrightarrow{V}_1 \wedge \overrightarrow{V}_2$
   — *le produit mixte* $(\overrightarrow{V}_1,\overrightarrow{V}_2,\overrightarrow{V}_3)$

Exercice I.5.4 *Soient* $\overrightarrow{A}$ *et* $\overrightarrow{B}$ *deux vecteurs donnés et* $\overrightarrow{X}$ *un vecteur inconnu.*

1. *Montrer que l'équation*
   $$\overrightarrow{X} + \overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{X} = \overrightarrow{A}$$
   admet une solution et une seule.
2. *Expliciter cette solution.*

Exercice I.5.5 *Soit un espace affine E et un repère orthonormé* $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2})$.
On considère les vecteurs
$\overrightarrow{u}_1(0,1,1)$ *et* $\overrightarrow{u}_2(-1,-1,0)$ *et* $\overrightarrow{u}_3(5,5,0)$.

1. *Calculer les normes et les produits scalaires de ces vecteurs.*
2. *On considère les vecteurs :*
   $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{u}_1 + m\overrightarrow{u}_2 + \overrightarrow{u}_3$ *et* $\overrightarrow{B} = m\overrightarrow{u}_1 - \overrightarrow{u}_2 - \overrightarrow{u}_3$.
   (a) *Calculer les composantes de* $\overrightarrow{A}$ *et* $\overrightarrow{B}$ *dans la base* $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$.
   (b) *Déterminer m pour que* $\overrightarrow{A}$ *et* $\overrightarrow{B}$ *forment un système de vecteurs orthogonaux.*

Chapitre II

Torseurs

Objectifs

- ☞ Définir un torseur (torsur symétrique et antisymétrique, invariants scalaires) ;
- ☞ Décomposer un torseur (couple et glisseur) ;
- ☞ Comprendre la notion de torseur équiprojectif ;
- ☞ Décrire les éléments de réduction d'un torseur ;
- ☞ Déterminer l'axe central.

II.1 Différents types de vecteurs - Aspects physiques

Suivant la nature des grandeurs physiques, qui peuvent être représentées par des vecteurs, ceux-ci peuvent être divisés en trois catégories :

- ☞ vecteurs libres ;
- ☞ vecteurs glissants ;
- ☞ vecteurs liés.
- ☞ Un vecteur libre est un vecteur que l'on peut représenter en n'importe quel point de l'espace. Il suffit de repérer uniquement son module, son sens et sa direction. Deux vecteurs libres sont équipollents lorsqu'ils ont une même module, une même direction et sont de même sens.

  Exemple II.1.1 *En mécanique, nous verrons qu'un système de forces de somme nulle, encore appelée couple, est un vecteur libre.*

  Remarque II.1.1 *On dit que les vecteurs ne sont pas liés.*

- ☞ En plus de ce qui précède, la définition d'un vecteur glissant nécessite que l'on précise son support. Deux vecteurs glissants sont donc équipollents lorsqu'ils ont un même module, même support et sont de même sens.

  Exemple II.1.2 *En mécanique du solide indéformable, les forces sont mathématiquement des vecteurs glissants.*

- ☞ Il est parfois important d'indiquer le point où s'applique un vecteur. Un tel vecteur est dit lié. Deux vecteurs liés sont équipollents si et seulement si ils sont identiques.

  Exemple II.1.3 *Pour des forces agissant sur un solide déformable, selon que le point d'application se trouve en deux points différents, la déformation est différente.*

Conséquences

- A et B étant deux points de l'espace affine $\mathbb{R}^3$, au couple ordonné de bipoint (A,B) est associé un vecteur unique appelé vecteur lié $\overrightarrow{AB}$.
- Le support de $\overrightarrow{AB} = \left\{M \in \mathbb{R}^3 / \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
- Dans l'ensemble des vecteurs liés, l'équipollence $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ définit une relation d'équivalence.
- Une classe d'équivalence définit un vecteur libre.

En mécanique classique, on représente un vecteur par un segment de droite orienté. Un vecteur libre sera donc défini quand on connait un vecteur directeur du support de l'un de ses représentants et la mesure algébrique de ce représentant par rapport au vecteur directeur.

Ceci amène à noter le vecteur lié $\overrightarrow{AB}$ par le couple ordonné $(A, \overrightarrow{R})$ ou $(\overrightarrow{R}, A)$ formé d'un point A de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ et d'un vecteur $\overrightarrow{R}$ de l'espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$; $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur libre.

On appelle vecteur glissant le couple non ordonné noté $(\overrightarrow{AB})$ ou $(\overrightarrow{R}, \mathcal{D})$ ou encore $(\mathcal{D}, \overrightarrow{R})$ formé d'un vecteur $\overrightarrow{R}$ de l'espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ et d'une droite $\mathcal{D}$ de l'espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur glissant $(\overrightarrow{AB})$ est donc défini par le vecteur lié $(A, \overrightarrow{R})$. C'est l'ensemble des vecteurs liés $(P, \overrightarrow{R})$ tels que $\left\{\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{R},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \mathcal{D}$.

II.2 Moment d'un vecteur

II.2.1 Moment vectoriel en un point O d'un vecteur lié

Soient O un point de l'espace vectoriel euclidien associé à l'espace affine $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur lié.

Par définition, on appelle moment en O de $\overrightarrow{AB}$ noté $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{AB})$, le vecteur défini par :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathcal{M}}.$$

O est le centre du moment.
$\overrightarrow{\mathcal{M}} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0} \iff O$ appartient au support du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Remarque II.2.1 *En général deux vecteurs libres équipollents n'ont pas le même moment en O.*

II.2.2 Changement de centre

Soit O' un point de l'espace affine $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{O'A} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}\right) \wedge \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Il vient que

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{AB}.$$

C'est la formule de VARIGNON.

II.2.3 Moment en O d'un vecteur glissant

Propriété Tous les représentants d'un vecteur glissant ont même moment en O.
Soit $(A, \overrightarrow{R})$ un vecteur lié donné. Le moment en O de $(A, \overrightarrow{R})$ est donné, soit $\overrightarrow{\mathcal{M}}$.
Quel est l'ensemble des $(P, \overrightarrow{R})$ tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(P, \overrightarrow{R}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}$?
On traduit ceci comme suit :

$$\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{R} = \overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{R} \Longrightarrow \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) \wedge \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}.$$

On en déduit que
$$\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{R},\ \lambda \in \mathbb{R};$$
P appartient donc au support de $(A, \overrightarrow{R})$.

On peut caractériser un vecteur glissant $(\overrightarrow{AB})$ par un vecteur libre équipollent $\overrightarrow{R}$ et le moment en O de $\overrightarrow{AB}$, soit $\mathcal{M}$.
On se donne à priori $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}$.
existe-t-il un vecteur glissant $(\overrightarrow{AB})$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{R}$ et tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}$?

On doit avoir
$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{R} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \tag{II.1}$$
$\overrightarrow{AB} = (A, \overrightarrow{R})$.
D'après la section (I.4.3), Il existe un point fixe A_0 défini par :
$$\left[\frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}}{R^2}\right] \wedge \overrightarrow{R} = \overrightarrow{OA_0} \wedge \overrightarrow{R} = \overrightarrow{\mathcal{M}}.$$

Et il vient que pour $\overrightarrow{R} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}} \perp \overrightarrow{R}$ donnés, il existe un vecteur glissant unique $\overrightarrow{AB}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}$; le support est la droite $\left(A_0; \overrightarrow{R}\right)$ où A_0 est défini par la relation
$$\overrightarrow{OA_0} \wedge \overrightarrow{R} = \overrightarrow{\mathcal{M}}.$$

II.2.4 Moment scalaire d'un vecteur par rapport à un axe Δ

Soit Δ une droite de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ associé à l'espace vectoriel E.

$$\begin{aligned}
\Delta = (O; \overrightarrow{u}) &= (O'; \overrightarrow{u}) \\
\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{AB} \\
\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{u} &= \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{u} + \left(\overrightarrow{O'O}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}\right).
\end{aligned}$$

Or $\left(\overrightarrow{O'O}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}\right) = 0$ car $\overrightarrow{O'O} = \lambda \overrightarrow{u}$, donc
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{u}.$$

La projection sur la droite Δ du moment en O du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est indépendant du point O choisi sur Δ.

Par définition, $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O\in\Delta}(\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{u}$ est le moment scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à l'axe Δ.
$\mathcal{M}_{\text{axe}\Delta}$ est le moment scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à l'axe Δ.
$\mathcal{M}_{\text{axe}\Delta} = 0$ équivaut au fait que l'axe Δ et le support de $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires.

II.3 Systèmes de vecteurs glissants

On appelle **torseur** une famille de vecteurs glissants considérée dans son ensemble.
Il est souvent inutile en mécanique de connaître individuellement chaque vecteur glissant d'une famille. Il suffira de connaître **les éléments de réduction**. Ce n'est pas le cas en résistance des matériaux où tous les vecteurs appliqués indiquent une déformation.

II.3.1 Éléments de réduction

II.3.1.1 Définition

On appelle élément de réduction au point O d'un torseur $\mathcal{T} = \left\{\overrightarrow{A_iB_i}\right\}_{i\in I}$, les vecteurs $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\mathcal{T})$ définis comme suit :

$$\overrightarrow{R} = \sum_{i\in I} \overrightarrow{R_i} = \sum_{i\in I} \overrightarrow{A_iB_i}$$
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\mathcal{T}) = \sum_{i\in I} \overrightarrow{\mathcal{M}}_{i/O} = \sum_{i\in I} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i}$$

$\overrightarrow{R}$ est la somme ou la résultante générale du torseur $\mathcal{T}$;
$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\mathcal{T})$ est le moment résultant en O de $\mathcal{T}$;
$\overrightarrow{R_i}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{i/O}$ sont les deux vecteurs qui caractérisent chaque vecteur $\overrightarrow{A_iB_i}$ au point O.

II.3.1.2 Changement de centre

$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R'}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\mathcal{T})$ sont les éléments de réduction en ce nouveau point O'.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\mathcal{T}) = \sum_{i\in I} \left(\overrightarrow{O'A_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i}\right)$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\mathcal{T}) = \sum_{i\in I} \left(\overrightarrow{O'A_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i}\right) &= \sum_{i\in I} \left[\left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}\right) \wedge \overrightarrow{A_iB_i}\right] \\
&= \sum_{i\in I} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i} + \sum_{i\in I} \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{A_iB_i} \\
&= \sum_{i\in I} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i} + \overrightarrow{O'O} \wedge \sum_{i\in I} \overrightarrow{A_iB_i}
\end{aligned}$$

En reconnaissant l'expression de la résultante générale $\overrightarrow{R} = \sum_{i\in I} \overrightarrow{A_iB_i}$, on a la formule de VARIGNON

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\mathcal{T}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\mathcal{T}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{R}$$

II.3.1.3 Projection

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{axe}\Delta}(\mathcal{T}) = \text{proj}\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O\in\Delta}(\mathcal{T})$$

II.3.1.4 Invariants d'un torseur $\mathcal{T}$

Quantités indépendantes du point où l'on définit les éléments de réduction de $\mathcal{T}$.

- invariant vectoriel : $\overrightarrow{R}$ est l'invariant vectoriel de $\mathcal{T}$.
- automoment : on multiplie scalairement par $\overrightarrow{R}$ par les deux membres de la formule de Varignon ; on a :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\mathcal{T}).\overrightarrow{R} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\mathcal{T}).\overrightarrow{R} + \left(\overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{R}\right).\overrightarrow{R},$$

  et puisque $\left(\overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{R}\right).\overrightarrow{R}$ est nul pour tout autre point O'.
  Par définition , $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\mathcal{T}).\overrightarrow{R}$ est l'invariant scalaire appelé automoment de $\mathcal{T}$.
  N.B Si $\mathcal{T}$ est réduit à un seul vecteur glissant, le moment en O étant perpendiculaire à ce vecteur, l'invariant scalaire est nul.

— comoment ou produit : on appelle produit ou comoment de deux torseurs $\mathcal{T}_1 = \{\overrightarrow{R_1}\ ;\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathcal{T}_1)\}$ et $\mathcal{T}_2 = \{\overrightarrow{R_2}\ ;\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathcal{T}_2)\}$, noté $\mathcal{T}_1.\mathcal{T}_2$ le scalaire défini par :

$$\mathcal{T}_1.\mathcal{T}_2 = \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathcal{T}_2) + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathcal{T}_1).$$

Cette grandeur scalaire est indépendante de la position du point P.

Remarque II.3.1 *sur l'automoment : calculons le comoment de $\mathcal{T}$ par lui-même. On a :*

$$\mathcal{T}.\mathcal{T} = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) + \overrightarrow{R}.\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) = 2\overrightarrow{R}.\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) = 2automoment.$$

Donc, l'automoment du torseur $\mathcal{T}$ est égale à la moitié du comoment de $\mathcal{T}$ par lui-même.

II.3.2 Notion de torseurs équivalents ou égaux

Par définition, on dit que deux torseurs $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont équivalents ou égaux s'ils ont mêmes éléments de réduction en tout point de l'espace.
Il suffit pour cela, qu'ils aient les mêmes éléments de réduction en un seul point (cf VARIGNON) :
$\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$: $\begin{cases} \overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}_1) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}_2) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) \end{cases}$.
$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\mathcal{T}_1) = \overrightarrow{\mathcal{M}} + \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{R_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\mathcal{T}_2) = \overrightarrow{\mathcal{M}} + \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{R_2}$; donc :

$$\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{R} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}_1) & = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}_2) \\ & \Downarrow \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\mathcal{T}_1) & = \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\mathcal{T}_2) \end{cases}$$

Un torseur est dit égal au torseur nul si $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \overrightarrow{0}$.

Remarque II.3.2

1. *On appelle parfois torseur, l'ensemble $\{\overrightarrow{R}\ ;\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T})\}$ avec :*
   $\overrightarrow{R}$, la résultante générale d'une famille de vecteurs glissants ;
   $\overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathcal{T})$, le champ des moments résultants de $\mathcal{T}$ en O.
2. *On note $\mathcal{T} = \lambda_1\mathcal{T}_1 + \lambda_2\mathcal{T}_2$, le torseur $\mathcal{T}$ qui est combinaison linéaire des deux torseurs $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ à coefficients λ_1 et λ_2 dont les éléments de réduction au point O sont :*

$$\begin{cases} \overrightarrow{R} = \lambda_1\overrightarrow{R_1} + \lambda_2\overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\mathcal{T}) = \lambda_1\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\mathcal{T}_1) + \lambda_2\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\mathcal{T}_2) \end{cases}.$$

   — *si $\lambda_1 = \lambda_2 = +1$, alors $\mathcal{T}$ est le torseur somme des torseurs $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$;*
   — *si $\lambda_1 = -\lambda_2 = -1$, alors $\mathcal{T}$ est le torseur différence des torseurs $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$;*
   — *si $\lambda_2 = 0$ et λ_1 est quelconque, alors le torseur $\mathcal{T}$ est le torseur produit du torseur $\mathcal{T}_1$ par le scalaire λ.*

L'ensemble des torseurs a ainsi une structure d'espace vectoriel dont la dimension est six : $\{R_x,\ R_y,\ R_z,\ \mathcal{M}_x,\ \mathcal{M}_y,\ \mathcal{M}_z\}$.
Cette notion de combinaison linéaire s'étend à un nombre fini de torseurs.
Exemple pour le torseur dynamique $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{R}$ non galiléen : $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{ext}} + \mathcal{T}_{\text{entr}} + \mathcal{T}_{\text{Coriolis}}$.

II.3.3 Torseurs particuliers

II.3.3.1 Vecteurs concourants

Soit le torseur $\mathcal{T} = \{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, ..., \overrightarrow{V_n}\} = \{\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}, ..., \overrightarrow{AB_n}\}$.

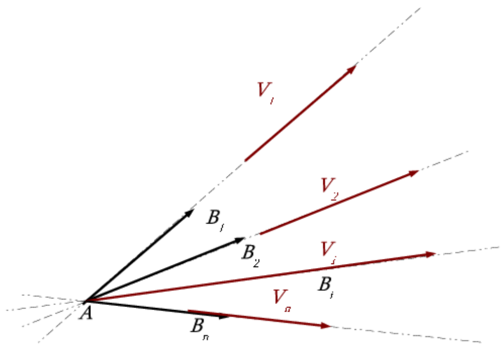


FIGURE II.1 – Vecteurs concourants

On construit

$$\overrightarrow{AB} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AB_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{V_i}.$$

On considère le torseur universel $\mathcal{T}' = \{\overrightarrow{V}\}$ où $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AB}$. Éléments de réduction :

$$\mathcal{T} \ : \overrightarrow{R_{\mathcal{T}}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{V_i} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V} = \overrightarrow{R_{\mathcal{T}'}}$$
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\mathcal{T}) = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}\left(\mathcal{T}'\right)$$

Conclusion $\mathcal{T} \propto \mathcal{T}'$ car ils ont les mêmes éléments de réduction en A, donc en tout point de l'espace

$$\mathcal{T} \propto \mathcal{T}'.$$

II.3.3.2 Torseur à résultante générale nulle et moment résultant non nul

Par hypothèse, le torseur $\mathcal{T}$ est tel que $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}(\overrightarrow{AB}) \neq \overrightarrow{0}$. Or, il existe un vecteur $\overrightarrow{AB}$ tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T})$ donné à l'avance non nul.

$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T})$, c'est une équation vectorielle à deux inconnues avec une infinité de solutions. Soit alors

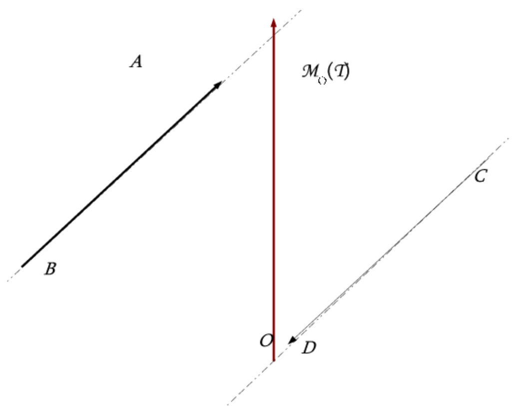


FIGURE II.2 – torseur à résultante générale nulle et moment non nul

$$\mathcal{T}' = \left[\left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}\right\} / \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \text{ et } O \in \text{ support de la droite } CD\right]$$

On a :

$$\mathcal{T}' \ : \begin{cases} \overrightarrow{R'} & = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}') & = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) \quad (\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{0}) \end{cases}.$$

Ceci implique $\mathcal{T} \propto \mathcal{T}'$.

$\mathcal{T}'$ constitué de deux vecteurs opposés est un couple.

Définition II.3.1 *On dit qu'un torseur $\mathcal{T}$ est un couple si et seulement si la résultante générale $\overrightarrow{R}$ est nulle et le moment résultant $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\mathcal{T})$ est non nul.*

II.3.3.3 Torseur univectoriel

Soit $\mathcal{T} = \{\overrightarrow{V}\}$, $\overrightarrow{V} \neq \overrightarrow{0}$, alors

$$\overrightarrow{R'} = \overrightarrow{V} \neq \overrightarrow{0} \text{ et } \begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) \perp \overrightarrow{R'} \\ \text{ou bien } \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) = \overrightarrow{0}. \end{cases}$$

Dans les deux cas : $\overrightarrow{R'}.\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) = 0$.

Réciproquement, soit $\mathcal{T}$ tel que $\overrightarrow{R} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{R'}.\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) = 0$

- ou bien $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) = \overrightarrow{0}$: alors $\mathcal{T}' = \left\{\overrightarrow{V}\right\}$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{R}$ et O appartient au support de $\overrightarrow{V}$: $\mathcal{T}' \propto \mathcal{T}$
- ou bien $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) \neq \overrightarrow{0}$: alors $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) \perp \overrightarrow{R}$; à $\overrightarrow{R} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_0}(\mathcal{T}) \perp \overrightarrow{R}$, on sait associer un vecteur unique $\overrightarrow{V}$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_0(\mathcal{T})}$ donné à l'avance : $\mathcal{T}' = \{\overrightarrow{V}\} \propto \mathcal{T}$..

  $\mathcal{T}'$ est appelé un glisseur.

Définition II.3.2 *Un torseur est dit glisseur si et seulement si $\overrightarrow{R} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{R}.\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) = 0$.*

II.3.3.4 Réduction générale d'un torseur à un déviateur

Un torseur $\mathcal{T}$ qui n'est ni le torseur nul, ni un glisseur, ni un couple est réductible à un déviateur : un déviateur est la somme d'un glisseur et d'un couple.

Remarque II.3.3 *sur le couple*
$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T})$ il y a une infinité de solutions. La solution n'est pas unique ; il suffit, $\overrightarrow{AB}$ étant trouvé, de fixer $OA = a$. Tous les vecteurs $(P, \overrightarrow{R})$ tels que $\|\overrightarrow{R}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ tangents au cercle de rayon a, P décrivant ce cercle, répondent à la question.

II.3.4 Torseurs associés à un champ continu Φ

Il n'est pas toujours possible de schématiser des efforts mécaniques par des ensembles discrets de vecteurs glissants. Jusqu'ici, on a utilisé :

$$\mathcal{T} = \left\{\overrightarrow{\Phi_1}, \overrightarrow{\Phi_2}, ..., \overrightarrow{\Phi_n}\right\}.$$

M_i appartient à l'espace affine $\mathbb{R}^3 \longmapsto \overrightarrow{\Phi} = \overrightarrow{\Phi}(M_i)$; où

$$\overrightarrow{R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\Phi}(M_i) \ ; \ \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OM_i} \wedge \Phi(M_i).$$

Les définitions qui précèdent se généralisent au cas où l'on considère un nombre infini de vecteurs.
Soit $\mathbb{D}$ un domaine (à une, deux, ou trois dimension) de l'espace où en tout point M, sont définis :

- une mesure $\mu : M \longmapsto \mu(M)$; $\mu(M) \in \mathbb{R}^+$ (une mesure positive) ;
- un champ $\overrightarrow{\Phi} : M \longmapsto \overrightarrow{\Phi}(M)$

Si l'on considère $\overrightarrow{\Phi}(M)$ comme la densité vectorielle d'un champ $\overrightarrow{\Phi}$ tel que la mesure μ de M, cela veut dire qu'en tout voisinage de M, on associe le vecteur $\overrightarrow{\Phi}(M)d\mu$ par un procédé que justifie une loi physique.
Les éléments de réduction au point O de $\mathcal{T}$ sont alors :

$$R = \int_{M\in\mathbb{D}} \overrightarrow{\Phi}(M)d\mu(M) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) = \int_{M\in\mathbb{D}} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\Phi}(M)d\mu(M).$$

Ici, $\mathcal{T}$ est le tenseur des $\overrightarrow{\Phi}(M)d\mu(M)$ ou le tenseur associé au champ continu $\overrightarrow{\Phi}$.

En mécanique, $d\mu(M)$ sera l'une des mesures élémentaires suivantes :

— mesure $dl(M)$ de la longueur élémentaire d'un arc de courbe au voisinage de M. $\mathbb{D}$ schématisé par un ensemble de points de l'espace à une dimension (droite ou sur une courbe);

— mesure $dS(M) = dxdy$ de l'arc élémentaire d'une surface au voisinage de M. $\mathbb{D}$ schématisé par un ensemble de points occupant une surface (à deux dimension);

— mesure $dV(M) = dxdydz$ d'un volume élémentaire au voisinage de M. $\mathbb{D}$ schématisé par un ensemble ou un système continu de points occupant une région de l'espace;

— mesure $dm(M)$ de la mesure élémentaire au voisinage de M.

Suivant que $d\mu = dl, dS, dV$, $\int_{M\in\mathbb{D}}$ sera une intégrale simple, double ou triple.

Le théorème de VARIGNON se vérifie aisément pour un champ continu :

$$\begin{aligned}
\forall P \in \mathbb{D} : \overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) &= \int_{M\in\mathbb{D}} \overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{\Phi}(M)d\mu(M) \\
&= \int_{M\in\mathbb{D}} \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}\right) \wedge \overrightarrow{\Phi}(M)d\mu(M) \\
&= \int_{M\in\mathbb{D}} \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{\Phi}(M)d\mu(M) + \int_{M\in\mathbb{D}} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\Phi}(M)d\mu(M) \\
&= \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) + \int_{M\in\mathbb{D}} \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{\Phi}(M)d\mu(M) \\
&= \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) + \overrightarrow{PO} \wedge \int_{M\in\mathbb{D}} \overrightarrow{\Phi}(M)d\mu(M) \\
&= \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) + \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{R}
\end{aligned}$$

II.3.5 Axe central d'un torseur

Définition II.3.3 *On appelle axe central (noté Δ) d'un torseur, l'ensemble des points P ou les éléments de réduction sont colinéaires :*

$$\Delta = \left\{P \in \Omega, \exists \lambda \in \mathbb{R}/\overrightarrow{\mathcal{M}_P} = \lambda\overrightarrow{R}\right\}.$$

$\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\mathcal{T})$ sont les éléments de réduction en A de $\mathcal{T}$.

existe-t-il des points P de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ tels que : $\overrightarrow{\mathcal{M}_P}(\mathcal{T}) \| \overrightarrow{R}$?

On considere le torseur défini en un point A (A est un point quelconque de Ω) par :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\mathcal{T}) \text{ et } \overrightarrow{R}.$$

Soit P un point de l'axe central Δ.
Nous avons alors les deux relations suivantes :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_P} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A} + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{AP} \tag{II.2}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_P} \wedge \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}. \tag{II.3}$$

En remplaçant, dans la deuxième relation, $\overrightarrow{\mathcal{M}_P}$ par sa valeur de la première relation, nous pouvons alors écrire

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A} \wedge \overrightarrow{R} + (\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{AP}) \wedge \overrightarrow{R}.$$

Ce qui conduit à : $\overrightarrow{\mathcal{M}_A} \wedge \overrightarrow{R} + R^2\overrightarrow{AP} - (\overrightarrow{R}.\overrightarrow{AP})\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$ ou encore $R^2\overrightarrow{AP} - (\overrightarrow{R}.\overrightarrow{AP})\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}_A}$.

Nous avons donc a resoudre cette derniere equation avec $\overrightarrow{AP}$ comme vecteur inconnu. Nous avons vu, dans le paragraphe division vectorielle du chapitre calcul vectoriel, que cette équation admet une infinité de solutions données par l'équation vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}_A}}{R^2} + \lambda\overrightarrow{R} \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{II.4}$$

C'est l'équation d'une droite parallèle à la direction de la résultante $\overrightarrow{R}$ du torseur. Cette droite est appelée axe central du torseur. Par suite, l'axe central Δ du torseur est une droite passant par un point P_0 et de vecteur directeur le vecteur axial $\overrightarrow{R}$. Le point P_0 peut être retrouvé par la projection orthogonale du point A sur Δ (prendre $\alpha = 0$). Ce point est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{AP_0} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}_A}}{R^2}. \tag{II.5}$$

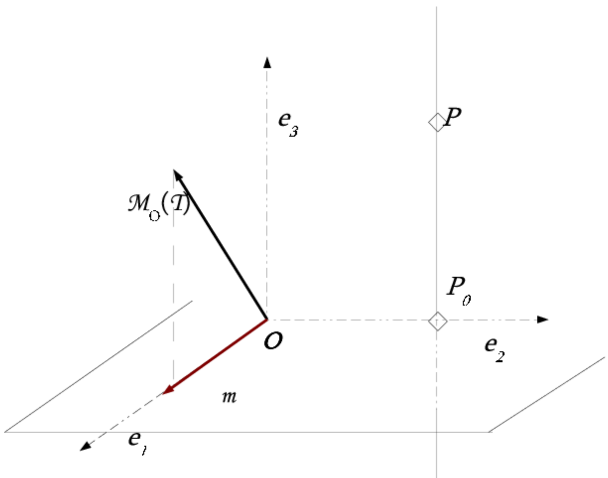


FIGURE II.3 – Axe central d'un torseur

Détermination analytique de l'axe Δ $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un trièdre orthonormé direct.

$$\begin{cases} \overrightarrow{R} & = (X, Y, Z) \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) & = (L, M, N) \\ \overrightarrow{OP} & = (x, y, z) \end{cases}$$

Puisque $\overrightarrow{\mathcal{M}_P}(\mathcal{T})$ et $\overrightarrow{R}$ sont colinéaires, alors il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}_P}(\mathcal{T}) = \lambda\overrightarrow{R}$, i.e $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{R} = \lambda\overrightarrow{R}$. Analytiquement, on trouve :

$$\begin{cases} L + zY - Zy & = \lambda X \\ M + Zx - Xz & = \lambda Y \\ N + Xy - Yx & = \lambda Z \end{cases}$$

Les deux premières équations de ce système fournit une équation de la forme $ux + vy + wz + h = 0$ qui est l'équation cartésienne d'un plan (Q_1).

De même, les deux dernières équation du systéme fournit une équation du type $u'x + v'y + w'z + h' = 0$ qui est l'équation cartésienne d'un plan (Q_2). Il vient alors que Δ est l'intersection des plans (Q_1) et (Q_2).

II.3.6 Champ de moments

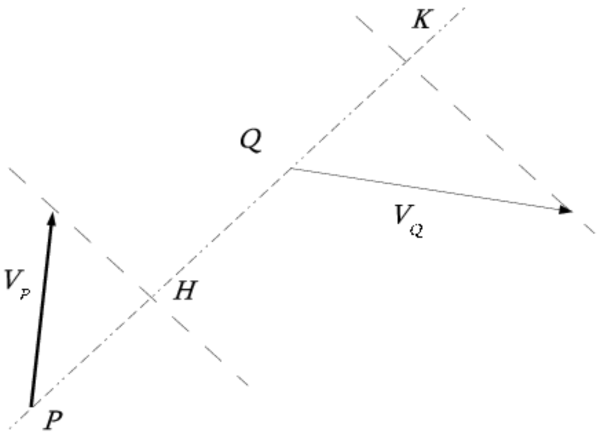


FIGURE II.4 – Champ de moments

Considérons le tenseur $\mathcal{T}$. A tout point P de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ euclidien, on sait associer $\overrightarrow{\mathcal{M}_P}(\mathcal{T})$. On définit l'application *champ des moments résultants de* $\mathcal{T}$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) : P \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \overrightarrow{\mathcal{M}_P}(\mathcal{T}).$$

Effectuons le changement de notation suivante : $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) = \overrightarrow{V}$.

— si $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ alors le champ $\overrightarrow{V}$ est uniforme et le tenseur $\mathcal{T}$ est un couple.

— si $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ alors de la formule de Varignon, pour tout point P et Q de l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\overrightarrow{V_P} = \overrightarrow{V_Q} + \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{w}$$

On multiplie scalairement les deux membres par $\overrightarrow{PQ}$; il vient :

$$\overrightarrow{V_p}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{V_Q}.\overrightarrow{PQ} + \left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{PQ}\right) = \overrightarrow{V_Q}.\overrightarrow{PQ}.$$

Cette formule traduit que les projections sur la droite (PQ) des vecteurs $\overrightarrow{V_P}$ et $\overrightarrow{V_Q}$ sont égales. $\overrightarrow{V}$ est donc un champ équiprojectif.

Généralement, $\overrightarrow{V_P}$ et $\overrightarrow{V_Q}$ ne sont pas colinéaires.

Réciproquement, tout champ de vecteur équiprojectif est un champ de moment. Il est dit champ de vecteurs antisymétriques.

II.4 Exercices

Exercice II.4.1

1. *Dans le plan Oxy, soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur glissant de norme 6, faisant un angle de 30 degré avec l'axe Ox et dont le support passe par le point* $(5, 0)$.
   Déterminer le moment du vecteur $\overrightarrow{v}$ par rapport au point O.
2. *Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, calculer les moments algébriques par rapports aux axes de coordonnées du vecteur glissant*

$$\overrightarrow{F} = 5\overrightarrow{i} - 18.5\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$$

dont le support passe par le point de coordonnées $(3, 4, 5)$.

Exercice II.4.2 *Dans un repère orthonormé* $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *deux points* A *et* B *ont pour coordonnées* $(2, 2, -1)$ *et* $(5, 3, 2)$.
Déterminer :

1. *Le moment du vecteur glissant* $\overrightarrow{AB}$ *par rapport au centre* O *du repère ;*
2. *Le moment du vecteur glissant* $\overrightarrow{AB}$ *par rapport à la droite passant par* O *et le point* $C(2, 2, 1)$.

Exercice II.4.3 *Dans un repère orthonormé* $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *on considère un système de plan de trois vecteurs glissants*
$\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ *de support passant par* $A(1, 1)$,
$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ *de support passant par* $B(1, 0)$,
$\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j}$ *de support passant par* $C(0, 1)$,
représentant un torseur $\mathcal{T}$.

1. *Construire graphiquement la résultante du système.*
2. *Calculer les éléments de réduction de* $\mathcal{T}$ *au point* $P(1, 2, 0)$.
3. *Calculer les éléments de réduction de* $\mathcal{T}$ *au point* $Q(0, 1, 0)$.
4. *Calculer les équations vectorielle et cartésienne de l'axe central.*
   Peut-on trouver l'axe central graphiquement.

Exercice II.4.4 *Soient les trois vecteurs* $\vec{V_1} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{V_2} = \vec{j} + 2\vec{k}$ *et* $\vec{V_3} = \vec{i} - \vec{j}$ *définis dans un repère orthonormé* $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *et liés respectivement au points* $A(0, 1, 2)$, $B(1, 0, 2)$ *et* $C(1, 2, 0)$

1. *Construire le torseur* $[\mathcal{T}]_O$ *associé au système de vecteurs* $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$ *;*
2. *En déduire l'automoment ;*
3. *Déterminer l'axe central du torseur vectoriellement et analytiquement.*

Exercice II.4.5 *Dans un repère* $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *soient le point* $a(2, 1, -1)$ *; et le vecteur glissant* $\vec{V} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, *d'axe passant par* a, *définissant un glisseur* $\mathcal{G}$.

1. *Déterminer les éléments de réduction au point* O *du glisseur* $\mathcal{G}$.
2. *Trouver le réel* α *tel que le torseur* $\mathcal{T}$ *défini par*
$$\begin{bmatrix} (\alpha+2)\vec{i} + (\alpha-1)\vec{j} - 2\alpha\vec{k} \\ (\alpha-4)\vec{j} + (\alpha-4)\vec{k} \end{bmatrix}_0$$
   soit égal à $\mathcal{G}$.
3. *Montrer qu'il existe une autre valeur de* α *pour laquelle* $\mathcal{T}$ *est également un glisseur. Déterminer le support du glisseur*
4. *Effectuer la décomposition (réduction) du torseur* $\mathcal{T}$ *dans le cas où* $\alpha = 1$.

Exercice II.4.6 *Soient* $\mathcal{G}_1$ *un glisseur de vecteur* $\vec{v}_1$, *non nul, de support* D_1 *et* $\mathcal{G}_2$ *un glisseur de vecteur* $\vec{v}_2$, *non nul, de support* D_2 *non parallèle au précédent.*

Montrer que l'axe central du torseur
$$\mathcal{T} = \mathcal{G}_1 + \lambda\mathcal{G}_2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
est orthogonal à la perpendiculaire commune D *à* D_1 *et* D_2 *en un point de* D *que l'on trouvera.*

Exercice II.4.7 *Soient deux torseurs* $[\mathcal{T}_1]_A$ *et* $[\mathcal{T}_2]_A$ *définis au même point* A *par leurs éléments de réduction dans un repère orthonormé* $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *:*

$$[\mathcal{T}_1]_A = \begin{cases} \vec{\mathcal{R}} & = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \mathcal{M}_{1A} & = 4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k} \end{cases}$$

$$[\mathcal{T}_2]_A = \begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{R}} & = -3\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j} - 2\,\overrightarrow{k} \\ \mathcal{M}_{1A} & = 4\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 7\,\overrightarrow{k} \end{cases}$$

1. *Déterminer l'axe central* $[\mathcal{T}_1]_A$ *;*
2. *Déterminer l'automoment du torseur* $[\mathcal{T}_1]_A$ *, montrer qu'il est indépendant du point* A *;*
3. *Construire le torseur* $[\mathcal{T}]_A = a\,[\mathcal{T}_1]_A + b\,[\mathcal{T}_2]_A$ *avec* $a, b\ \in \mathbb{R}$ *;*
4. *Quelle relation doivent vérifier a et b pour que le torseur* $[\mathcal{T}]_A$ *soit un torseur couple ?*
5. *Montrer que le torseur couple est indépendant du point où on le mesure ;*
6. *Déterminer le système le plus simple de vecteurs glissants associés au torseur somme* $[\mathcal{T}_1]_A + [\mathcal{T}_2]_A$.

Exercice II.4.8 *Dans un repère* $(O;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *de E, soient les points A et B tels que*

$$\overrightarrow{OA} = c\,\overrightarrow{j} \qquad \overrightarrow{OB} = c\,\overrightarrow{k}$$

c étant un réel non nul.

Soit un torseur $\mathcal{T}$ *tel que*

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\mathcal{T}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\mathcal{T}) = l\left(\overrightarrow{k} - \overrightarrow{i}\right), \quad l \text{ est un réel.}$$

De plus, le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\mathcal{T})$ *a une projection nulle sur la direction de* $\overrightarrow{i}$.
Calculer $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\mathcal{T})$, $\overrightarrow{\mathcal{R}}(\mathcal{T})$ *et trouver l'axe central du torseur.*

Exercice II.4.9

1. *Calculer le moment du vecteur lié* $(A, \overrightarrow{R})$ *au point B. On donne, dans la base* $(O;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *:* $\overrightarrow{OA} = (0, 5, 2)$ *;* $\overrightarrow{R} = (-1, 2, 0)$ *et* $\overrightarrow{OB} = (3, 1, 4)$.
2. *calculer le moment de* $(A, \overrightarrow{R})$ *par rapport à l'axe* Δ *passant par B et parallèle au vecteur* $\overrightarrow{m}$ *de composantes* $(-1, 2, 2)$.

Exercice II.4.10 *On considère, dans un repère d'espace Oxyz, les trois vecteurs et les trois points suivants :* $\overrightarrow{V_1}(0, 0, 1)$ *;* $\overrightarrow{V_2}(-1, 2, 0)$ *;* $\overrightarrow{V_3}(\alpha, \beta, \gamma)$ *et* $A_1(1, 0, 0)$ *;* $A_2(0, 1, 0)$ *;* $A_3(0, 0, 1)$.
On construit les vecteurs liés $(A_i, \overrightarrow{V_i})$. *Déterminer les réels* α, β, γ *tels que le système de ces trois vecteurs liés soit tensoriellement équivalent à un couple dont on calculera le moment.*

Exercice II.4.11 *Montrer que l'ensemble des points en lesquels le moment d'un torseur* $\mathcal{T}$ *est parallèle à sa résultante générale est une droite* Δ.

Chapitre III

Cinématique

Objectifs

L'objet de la cinématique est l'étude des mouvements des corps en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui les produisent.

Plus spécifiquement :

- ☞ Décrire et analyser la nature du mouvement d'un système ;
- ☞ Différencier entre les vitesse linéaire et angulaire ;
- ☞ Recenser le nombre de paramètres indépendants intervenant dans l'étude cinématique ;
- ☞ Savoir choisir une base dans laquelle expliciter simplement le mouvement ;
- ☞ Savoir mettre en œuvre les formules de changement de référentiel pour les vitesses et les accélérations ;
- ☞ Déterminer le centre instantané de rotation ;
- ☞ Savoir mettre en œuvre la condition de roulement sans glissement ;
- ☞ Savoir analyser le mouvement instantané d'un solide et déterminer la base

III.1 Principes Généraux

L'étude du mouvement d'un corps est l'étude des positions successives de ce corps par rapport à un repère pris comme référence. Il est essentiel de préciser le repère utilisé, car le mouvement dépend de celui-ci.

Tout *mouvement* de la nature fait appel aux notions de temps, d'espace et d'instruments de mesure pour l'observateur.

Temps : on schématise les instants par les points t_1, t_2, ..., t_n d'un espace affine réel orienté à une dimension. la différence $t_i - t_j$ est une durée, élément de l'espace vectoriel attaché à l'espace affine des instants.
Une base de l'espace des durées permet d'orienter le temps du passé vers le futur et de définir l'unité de durée.
Le choix arbitraire d'un instant origine t_0 et d'une base définissent un repère de temps T.
La mesure de temps s'effectue, par exemple, à l'aide d'une horloge. Les unités de temps sont : la seconde (s), la minute (mn), l'heure (h),...

Espace : Le concept d'espace est étroitement lié au concept de points, de position, de direction et de déplacement. Tout *mouvement* de la nature s'effectue par rapport à une référence. On suppose que l'observateur peut isoler dans cette référence des parties petites (au sens visuel du terme) appelés éléments. L'observateur est assimilé à un élément.
On assimile chaque élément à un point mathématique. Le modèle mathématique de l'espace physique dans lequel sont formulées les lois de la mécanique classique est l'espace affine $\mathbb{R}^3$.

Un repère $\mathcal{R}$ est alors défini par la donnée d'un trièdre (en général orthonormé direct). Le choix de l'origine est arbitraire. L'observateur est supposé placé à l'origine.
La mesure dans l'espace sous-entend les concepts de longueurs ou de distance. Les unités de longueurs sont le mètre (m), le kilomètre (km),...
La notion d'orthogonalité est conforme aux notions intuitives de verticalité et d'horizontalité du fil à plomb et du niveau d'eau du maçon.

Mouvement : Une particule (p) est schématisé par un point P.
Un *mouvement* de (p) par rapport à la référence est une application du temps dans l'espace.
On fait l'hypothèse que les mouvements sont de classe $\mathcal{C}^2$ par morceau, i.e les mouvements sont deux fois continûment différentiables dans chaque intervalle de temps ou ils se produisent.

$$\begin{aligned} T \subset \mathbb{R} :&\longrightarrow E = \mathbb{R}^3 \\ t :&\longmapsto P(t) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Remarque III.1.1 *Cette définition du mouvement cache une approximation propre à la mécanique galiléenne. On a supposé implicitement que l'observateur (o) voyait instantanément la succession des positions $P(t_0)$, $P(t_1)$, ... occupés par (p) ; ce qui sépare le temps de l'espace.*
En toute rigueur, il n'y a pas simultanéité entre l'instant où (p) occupe la position $P(t)$ et l'instant où l'observateur reçoit l'information (p) se trouve en $P(t)$.
La mécanique classique néglige ce décalage dû au transfert non instantané de l'information.

La trajectoire de (p) est schématisée par un point P dans un trièdre de référence. Elle représente les positions $P(t)$ quand t parcourt T.

On fera *l'hypothèse*, en mécanique classique, du solide indéformable, i.e pour tous points P et Q du solide, la distance de P à Q est indépendante du temps t.

Remarque III.1.2 *En fait, rien n'est invariant au cours du temps ; tout bouge à l'intérieur du matériau (les atomes) sauf à une condition théorique de température inférieur à $-272^{C=0K}$.*

On admet que tous les observateurs de l'univers peuvent utiliser le même temps, donc la même horloge et par suite donc la même variable t.

III.1.1 Vecteur de position d'un point d'un solide

On considère un solide (S) en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ et P(t) un point de ce solide. On désigne par (C) la trajectoire du point P(t) dans le repère $\mathcal{R}$.

Le vecteur position du point P(t) du solide (S) dans le repère $\mathcal{R}$ à la date t est le vecteur $\overrightarrow{OP}(t)$. O est l'origine du repère $\mathcal{R}$.

III.1.2 Vecteur de vitesse d'un point d'un solide

Le vecteur de vitesse du point P(t) du solide (S) par rapport au repère $\mathcal{R}$, à la date t, est la dérivée par rapport au temps, pour un observateur lié au repère $\mathcal{R}$, du vecteur position $\overrightarrow{OP}(t)$.

On note : $\overrightarrow{V}(P \in S/\mathcal{R}) = \left[\frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}}$. (L'unité de la vitesse est m/s)

III.1.3 Vecteur d'accélération d'un point d'un solide

Le vecteur d'accélération du point P(t) du solide (S) par rapport au repère $\mathcal{R}$, à la date t, est la dérivée par rapport au temps, pour un observateur lié au repère $\mathcal{R}$, du vecteur de vitesse $\overrightarrow{V}(P \in S/\mathcal{R})$.

On note : $\overrightarrow{\Gamma}(P \in S/\mathcal{R}) = \left[\frac{d\overrightarrow{V}(P \in S/\mathcal{R})}{dt}\right]_{\mathcal{R}}$.(L'unité de l'accélération est m/s^2)

III.2 Composition de mouvements

Remarque III.2.1 *Un trièdre orthonormé direct, d'origine O constitue par définition, la référence de l'observateur (o) placé en O. ceci implique que, pour (o), les trois vecteurs unitaires de la base de référence sont trois fonctions vectorielles indépendantes du temps.*
En général, on note le référentiel $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

III.2.1 Vecteur vitesse - vecteur accélération

L'espace affine de $\mathbb{R}^3$ euclidien est rapporté à un repère $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ orthonormé direct.
x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées dans $\mathcal{R}_0$ d'une particule (p) schématisée par un point P.
P est dit mobile par rapport à $\mathcal{R}_0$ si l'une au moins des x_i varie avec le temps t. Les trois fonctions $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ constituent une représentation paramétrique de la trajectoire de P.
Les $x_i(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ par morceau.
A la date t, le mobile (p) occupe la position $P(t)$ définie par :

$$\overrightarrow{OP}(t) = x_i(t)\overrightarrow{e_i} = x_1(t)\overrightarrow{e_1} + x_2(t)\overrightarrow{e_2} + x_3(t)\overrightarrow{e_2}.$$

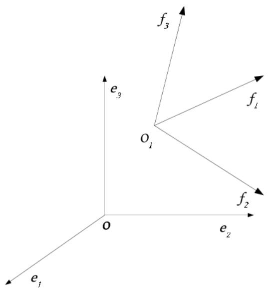
Pour l'observateur (o), les vecteurs e_i sont indépendants de t et l'on peut définir *le vecteur vitesse par rapport à $\mathcal{R}_0$ du point P à l'instant t* :

$$\overrightarrow{V^{(0)}}\,(P/t) = \frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{OP}(t) = \dot{x}_i(t)\overrightarrow{e_i}.$$

De même on peut définir *le vecteur accélération par rapport à $\mathcal{R}_0$ du point P à l'instant t* :

$$\overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(t)\,(P/t) = \frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{V^{(0)}}\,(P/t) = \frac{d^{(0)}}{dt}\left[\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{OP}(t)\right] = \ddot{x}_i(t)\overrightarrow{e_i}.$$

III.2.2 Relation entre les vecteurs vitesses d'un point par rapport à deux trièdres



$\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est un repère orthonormé direct de référence.
Soient $\overrightarrow{f_1}(t)$, $\overrightarrow{f_2}(t)$, $\overrightarrow{f_3}(t)$ trois fonctions vectorielles de la variable temps t telles que pour tout t, $\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right)$ soit un trièdre orthonormé direct.
On désigne par $\mathcal{R}_1 = \left(O_1, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right)$ un repère orthonormé direct en mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_0$.

Exemple III.2.1 *On peut avoir*

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1}(t) & = cost\overrightarrow{e_1} + sint\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{f_2}(t) & = -sint\overrightarrow{e_1} + cost\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{f_3}(t) & = \overrightarrow{e_3} \end{cases}$$

La position de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ est entièrement déterminée dès que le mouvement de O_1 par rapport à $\mathcal{R}_0$ est donné et dès que les indicatrices des trois fonctions vectorielles relatives au point O sont connues.
Soit P un point mobile par rapport à $\mathcal{R}_0$ et par rapport à $\mathcal{R}_1$.
On pose $\overrightarrow{O_1P} = y_i(t)\overrightarrow{f_i}$.

L'observateur (o) de $\mathcal{R}_0$ calcule la vitesse $\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{OP}$:

$$\begin{aligned}\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{OP} &= \frac{d^{(0)}}{dt}\left[\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1P}\right]\\ &= \frac{d^{(0)}}{dt}\left(\overrightarrow{OO_1}\right)+\frac{d^{(0)}}{dt}\left(y_i\overrightarrow{f_i}\right)\\ &= \overrightarrow{V}^{(0)}(O_1/t)+\dot{y}_i\overrightarrow{f_i}+y_i\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_i}\end{aligned}$$

— Puisque les vecteurs $\overrightarrow{f_i}$ sont indépendants du temps dans le repère $\mathcal{R}_1$, on a :

$$\dot{y}_i\overrightarrow{f_i} = \frac{d^{(1)}}{dt}\left(y_i\overrightarrow{f_i}\right) = \frac{d^{(1)}}{dt}\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{V}^{(1)}(P/t)$$

c'est la définition du vecteur vitesse du point P par rapport à $\mathcal{R}_1$.

—

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}^{(0)}(O_1/t)+y_i\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_i} &= \frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{OO_1}+y_i\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_i}\\ &= \frac{d^{(0)}}{dt}\left(\overrightarrow{OO_1}+y_i\overrightarrow{f_i}\right)_{y_i=\text{cste}}\\ &= \frac{d^{(0)}}{dt}\left(\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1P}\right)_{y_i=\text{cste}}\\ &= \frac{d^{(0)}}{dt}\left(\overrightarrow{OP}\right)_{y_i=\text{cste}}\\ &= \frac{d^{(0)}}{dt}\left(\overrightarrow{OP}\right)_{P\text{ immobilisé dans }\mathcal{R}_1}\end{aligned}$$

C'est la vitesse par rapport à $\mathcal{R}_0$ du point P immobilisé dans $\mathcal{R}_1$ et entrainé par le mouvement de l'espace $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$. Cette vitesse notée $\overrightarrow{V}^{(0)}\left(P_t^1\right)$ est la vitesse d'entrainement du point P, à l'instant t dans le mouvement de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$.

On a alors la formule :

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(P/t) = \overrightarrow{V}^{(1)}(P/t)+\overrightarrow{V}^{(0)}\left(P_t^1\right) \tag{III.1}$$

qui traduit le théorème de composition des vitesses et exprime que l'on compose ou superpose deux mouvements :

— (a) un mouvement relatif de P mobile par rapport à $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_1$ immobile par rapport à $\mathcal{R}_0$

— (b) un mouvement d'entrainement de P immobilisé dans $\mathcal{R}_1$ et entrainé par le mouvement de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$.

III.2.3 Dérivation composée d'un vecteur mobile par rapport à deux repères

Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_0$ les deux trièdres mobiles l'un par rapport à l'autre.
Considérons la fonction vectorielle $\overrightarrow{L}(t) = y_i(t)\overrightarrow{f_i}$.
L'observateur (o) de $\mathcal{R}_0$ calcule la dérivée $\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{L}(t)$

$$\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{L}(t) = \dot{y}_i\overrightarrow{f_i}+y_i\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_i}.$$

Pour l'observateur du trièdre $\mathcal{R}_1$, les $\overrightarrow{f_i}$ sont indépendants du temps t, donc

$$\frac{d^{(1)}}{dt}\overrightarrow{L} = \dot{y}_i\overrightarrow{f_i}.$$

En plus les deux observateurs (o) et (o_1) utilisent la même variable de temps t, donc

$$\frac{d^{(0)}}{dt}y_i = \frac{d^{(1)}}{dt}y_i.$$

Il vient donc que

$$\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{L} = \frac{d^{(1)}}{dt}\overrightarrow{L} + y_i\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_i}. \tag{III.2}$$

III.2.4 Détermination des dérivées des vecteurs de la base de $\mathcal{R}_1$

$\mathcal{R}_1$ étant une base orthonormée directe, on a $\overrightarrow{f_i}\overrightarrow{f_j} = \delta_{ij} = 1$, si $i = j$ et 0 sinon.
Alors $\left(\overrightarrow{f_1}\right)^2 = 1$ et donc $2\overrightarrow{f_1}.\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_1} = 0$. on en déduit que $\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_1}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{f_1}$ et donc parallèle au plan $\left(\overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right)$.
Il existe donc deux réels λ et μ tels que :

$$\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_1} = \lambda\overrightarrow{f_2} + \mu\overrightarrow{f_3}. \tag{III.3}$$

De même on a :

$$\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_2} = \lambda'\overrightarrow{f_3} + \mu'\overrightarrow{f_1}. \tag{III.4}$$

$$\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_3} = \lambda''\overrightarrow{f_1} + \mu''\overrightarrow{f_2}. \tag{III.5}$$

Faisons un changement de coefficients en posant :

$$\lambda = r \quad \mu = -q \quad \lambda' = p \quad \mu' = -r' \quad \lambda'' = q' \quad \mu'' = -p'.$$

On a alors :

$$\begin{cases} \frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_1} & = \lambda\overrightarrow{f_2} + \mu\overrightarrow{f_3} = r\overrightarrow{f_2} - q\overrightarrow{f_3} \\ \frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_2} & = \lambda'\overrightarrow{f_3} + \mu'\overrightarrow{f_1} = p\overrightarrow{f_3} - r'\overrightarrow{f_1} \\ \frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_3} & = \lambda''\overrightarrow{f_1} + \mu''\overrightarrow{f_2} = q'\overrightarrow{f_1} - p'\overrightarrow{f_2} \end{cases} \tag{III.6}$$

Par ailleurs, on sait que les vecteurs de la base $\mathcal{R}_1$ sont deux à deux orthogonaux, i.e :

$$\overrightarrow{f_2}.\overrightarrow{f_3} = 0 \Longrightarrow \left(\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_2}\right)\overrightarrow{f_3} + \overrightarrow{f_2}\left(\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_3}\right) = 0.$$

Compte tenue des relations III.6, il vient que :

$$\left(p\overrightarrow{f_3} - r'\overrightarrow{f_1}\right).\overrightarrow{f_3} + \overrightarrow{f_2}.\left(q'\overrightarrow{f_1} - p'\overrightarrow{f_2}\right) = 0 \Longrightarrow p - p' = 0.$$

De même les conditions d'orthogonalité $\overrightarrow{f_1}.\overrightarrow{f_2} = 0$ et $\overrightarrow{f_1}.\overrightarrow{f_3} = 0$ conduisent à $q = q'$ et $r = r'$.
L'équation III.6 se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_1} & = r\overrightarrow{f_2} - q\overrightarrow{f_3} \\ \frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_2} & = p\overrightarrow{f_3} - r\overrightarrow{f_1} \\ \frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_3} & = q\overrightarrow{f_1} - p\overrightarrow{f_2} \end{cases}. \tag{III.7}$$

Ces équations sont appelées *équations du trièdre mobile* ou *équation de Poisson.*
Si l'on pose $p\overrightarrow{f_1} + q\overrightarrow{f_2} + r\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{\omega}$, on a :

$$\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{f_1} = r\overrightarrow{f_2} - q\overrightarrow{f_3} = \frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_1}.$$

Les trois équations du trièdre mobile se résument en :

$$\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_i} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{f_i} \quad i = 1, 2, 3.$$

p, q, r sont trois réels fonctions de t en général.
La nature cinématique de $\overrightarrow{\omega}$ apparaîtra plus loin.

Pour traduire que ce vecteur $\overrightarrow{\omega}$ apparaît dans le calcul des dérivées $\overrightarrow{f_i}$ appartenant à $\mathcal{R}_1$ calculées par l'observateur de (0) de $\mathcal{R}_0$; on note :

$$\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega}_{1\longleftarrow \text{ indice de la base mobile}}^{(0)\longleftarrow \text{ indice de référence}}$$

En général les vecteurs $\overrightarrow{f_i}$ étant les vecteurs d'une base orthonormée directe d'un repère $\mathcal{R}_l$ par rapport au repère de référence $\mathcal{R}_k$, on a la formule générale de l'équation de POISSON :

$$\frac{d^{(k)}}{dt}\overrightarrow{f_i} = \overrightarrow{\omega}_l^{(k)} \wedge \overrightarrow{f_i} \quad i = 1, 2, 3.$$

Première conséquence : l'équation III.1 peut s'écrire compte tenu de $y_i \frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_i} = y_i \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{f_i} = \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge y_i \overrightarrow{f_i} = \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{O_1P}$:

$$\overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V}^{(0)}\left(P_t^1\right) = \overrightarrow{V}^{(0)}\left(O_1\right) + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{O_1P} \tag{III.8}$$

Deuxième conséquence : de même la formule III.2 peut s'écrire

$$\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{L} = \frac{d^{(1)}}{dt}\overrightarrow{L} + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{L}. \tag{III.9}$$

C'est la formule de dérivation de BOUR.

Troisième conséquence : particularisons $\overrightarrow{L}(t)$ en prenant $\overrightarrow{L}(t) = \overrightarrow{P_1Q_1}$ où P_1 et Q_1 sont deux points liés à un même solide (S) attaché au repère mobile $\mathcal{R}_1$.
Pour l'observateur de $\mathcal{R}_1$, $\overrightarrow{P_1Q_1}$ est un vecteur fonction indépendant du temps t, i.e :

$$\frac{d^{(1)}}{dt}\overrightarrow{L}(t) = \frac{d^{(1)}}{dt}\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{0}.$$

O désignant l'origine du repère de référence $\mathcal{R}_0$, on a :

$$\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{P_1Q_1} = \frac{d^{(0)}}{dt}\left(\overrightarrow{OQ_1} - \overrightarrow{OP_1}\right) = \overrightarrow{V}^{(0)}(Q_1) - \overrightarrow{V}^{(0}(P_1)$$

Il vient que :

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(Q_1) - \overrightarrow{V}^{(0}(P_1) = \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{P_1Q_1}$$

ou encore

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(Q_1) = \overrightarrow{V}^{(0}(P_1) + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{P_1Q_1} \tag{III.10}$$

Cette formule permet de calculer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}^{(0)}(Q_1)$ d'un point quelconque du solide (S) dès que les vecteurs $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$ et $\overrightarrow{V}^{(0)}(P_1)$ sont connus. C'est une formule type *formule de VARIGNON*. On interprète donc :
$\overrightarrow{V}^{(0)}$, champ des vitesses des points du solide (S) par rapport à $\mathcal{R}_0$ de référence, comme étant le *champ des moments résultants d'un torseur* appelé *torseur cinématique de* (S) ou encore *torseur distributeur des vitesses des points de* (S) dont la *la résultante générale* est le vecteur $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$.
$\overrightarrow{V}^{(0)}$ est un champ de moment, donc équiprojectif.

Remarque III.2.2 *L'hypothèse (S) indéformable implique que le vecteur $\overrightarrow{V}^{(0)}$ est équiprojectif.*
En effet,

$$\begin{aligned}
&\forall P_1, Q_1 \in (S), \left(\overrightarrow{P_1Q_1}\right)^2 = Cste \\
&\Longrightarrow 2\overrightarrow{P_1Q_1}.\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{P_1Q_1} = 0 \\
&\Longrightarrow 2\overrightarrow{P_1Q_1}.\left[\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{OQ_1} - \frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{OP_1}\right] = 0 \\
&\Longrightarrow \overrightarrow{V}^{(0)}(Q_1).\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{V}^{(0)}(P_1).\overrightarrow{P_1Q_1}
\end{aligned}$$

ce qui équivaut à l'équiprojectivité du vecteur $\overrightarrow{V}^{(0)}$.

En résumé, pour tous points P et Q du solide (S), on a :

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(P) = \overrightarrow{V}^{(0}(Q) + \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{\omega}_1^{(0)}.$$

III.2.5 Forme générale du théorème de composition des vitesses

Considérons $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_1$, ..., $\mathcal{R}_n$, $n+1$ trièdres mobiles les uns par rapport aux autres.
P est un point mobile par rapport à tous ces trièdres.
On applique le théorème des vitesse du paragraphe III.2.2 à tous les couples de repères $\mathcal{R}_i$, $\mathcal{R}_{i+1}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}^{(0)}(P) &= \overrightarrow{V}^{(1)}(P) + \overrightarrow{V}^{(0)}(P_t^1)\\ \overrightarrow{V}^{(1)}(P) &= \overrightarrow{V}^{(2)}(P) + \overrightarrow{V}^{(1)}(P_t^2)\\ &\vdots\\ \overrightarrow{V}^{(n-1)}(P) &= \overrightarrow{V}^{(n)}(P) + \overrightarrow{V}^{(n-1)}(P_t^n)\end{aligned}$$

En faisant une sommation membre à membre, on trouve :

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(P) = \overrightarrow{V}^{(n)}(P) + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{V}^{(i-1)}(P_t^i). \tag{III.11}$$

III.2.6 Détermination de la résultante générale du torseur cinématique

III.2.6.1 Cas d'un solide (S) mobile autour d'un axe

Considérons le trièdre $\mathcal{R}_0(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de référence ; (S) est le solide lié à $\mathcal{R}_1(O, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ tel qu'à tout instant t on ait : $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_3}$. La position de (S) dans $\mathcal{R}_0$ est déterminée par $\alpha(t) = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{f_1}\right) = \left(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{f_2}\right)$.

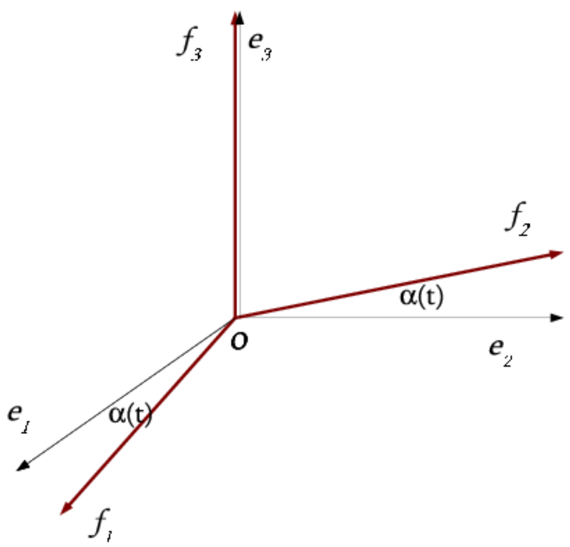


FIGURE III.1 – Solide mobile autour d'un axe

Soit P, un point quelconque lié à (S) donc à $\mathcal{R}_1$:

$$\overrightarrow{OP}(t) = y_1\overrightarrow{f_1} + y_2\overrightarrow{f_2} + y_3\overrightarrow{f_3}.$$

Dans $\mathcal{R}_1$, y_i est constant et $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_3}$ est indépendant du temps pour (o).

Par définition :

$$\begin{aligned}\vec{V}^{(0)}(P) = \frac{d^{(0)}}{dt}\left(\overrightarrow{OP}\right) &= y_1 \frac{d^{(0)}}{dt}\vec{f_1} + y_2 \frac{d^{(0)}}{dt}\vec{f_2} \\ &= y_1 \frac{d^{(0)}}{d\alpha}\vec{f_1}\frac{d\alpha}{dt} + y_2 \frac{d^{(0)}}{d\alpha}\vec{f_2}\frac{d\alpha}{dt} \\ &= \dot{\alpha}\left(y_1\vec{f_2} - y_2\vec{f_1}\right) \\ &= \dot{\alpha}\vec{f_3} \wedge \left(y_1\vec{f_1} + y_2\vec{f_2} + y_3\vec{f_3}\right).\end{aligned}$$

Donc pour tout vecteur $\overrightarrow{OP}$ non nul, on a : $\vec{V}^{(0)}(P) = \dot{\alpha}\vec{f_3} \wedge \overrightarrow{OP}$. D'après le théorème de composition des vitesses, on a

$$\vec{V}^{(0)}(P) = \vec{V}^{(1)}(P) + \vec{V}^{(0)}(P_t^1).$$

Or $\vec{V}^{(1)}(P)$ est nul (P étant lié à $\mathcal{R}_1$) et $\vec{V}^{(0)}(P_t^1) = \vec{V}^{(0)}(O) + \vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{OP}$, d'où la conclusion

$$\forall \overrightarrow{OP} \neq \vec{0},\ \vec{V}^{(0)}(P) = \dot{\alpha}\vec{f_3} \wedge \overrightarrow{OP} = \vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{OP} \Longrightarrow \vec{\omega}_1^{(0)} = \dot{\alpha}\vec{f_3}.$$

Exemple III.2.2 **Cas d'aubergine**

$\mathcal{R}_0(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) = (O_i, \vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i})$ et $\mathcal{R}_1(O, \vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}) = (O_k, \vec{x_k}, \vec{y_k}, \vec{z_k})$ tels que $\vec{f_3} = \vec{e_3}$:

$$\overrightarrow{OP}(t) = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} \text{ dans } \mathcal{R}_0 \text{ et } \overrightarrow{OP}(t) = X\vec{f_1} + Y\vec{f_2} + Z\vec{f_3} \text{ dans } \mathcal{R}_1.$$

On a :

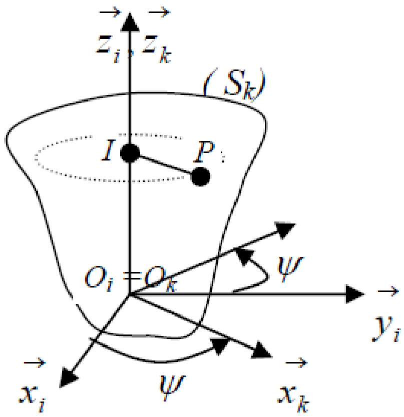


Figure III.2 – Solide mobile autour d'un axe O

$$\begin{aligned}\frac{d^{(0)}}{dt}\left(\overrightarrow{OP}\right) = \frac{d^{(0)}}{dt}\left(X\vec{f_1} + Y\vec{f_2} + Z\vec{f_3}\right) &= \frac{d^{(0)}}{dt}\left(x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}\right) \\ &= \frac{dx}{dt}\vec{e_1} + \frac{dy}{dt}\vec{e_2} + \frac{dz}{dt}\vec{e_3}\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{dX}{dt}\vec{f_1} + \frac{dY}{dt}\vec{f_2} + \frac{dZ}{dt}\vec{f_3} + X\frac{d\vec{f_1}}{dt} + Y\frac{d\vec{f_2}}{dt} + Z\frac{d\vec{f_3}}{dt} = \dot{x}\vec{e_1} + \dot{y}\vec{e_2} + \dot{z}\vec{e_3} = \vec{V}^{(0)}(P).$$

Pour l'observateur de $\mathcal{R}_1$, les coordonnées X, Y et Z sont des constantes i.e

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dY}{dt} = \frac{dZ}{dt} = 0 \quad \textit{et puisque c'est le même observateur} \quad \frac{d^{(0)}}{dt} = \frac{d^{(1)}}{dt}.$$

Puisque $\mathcal{R}_1$ est direct et $\overrightarrow{f_3}$ est constant, alors il reste :

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{f_1}}{dt} & = \frac{d\overrightarrow{f_1}}{d\alpha}\frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}\overrightarrow{f_1} \\ \frac{d\overrightarrow{f_2}}{dt} & = \frac{d\overrightarrow{f_2}}{d\psi}\frac{d\psi}{dt} = -\dot{\psi}\overrightarrow{f_2}. \end{cases}$$

D'où on en déduit :

$$\dot{\alpha}\left(X\overrightarrow{f_2} - Y\overrightarrow{f_1}\right) = \dot{\alpha}\overrightarrow{f_3} \wedge \left(X\overrightarrow{f_1} + Y\overrightarrow{f_2} + Z\overrightarrow{f_3}\right) = \dot{\alpha}\overrightarrow{f_3} \wedge \overrightarrow{OP}$$

ou encore

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(P) = \dot{\alpha}\overrightarrow{f_3} \wedge \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{OP} \quad \textit{avec} \quad \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = \dot{\alpha}\overrightarrow{f_3}.$$

III.2.6.2 Cas d'un solide (S) mobile autour d'un point O.

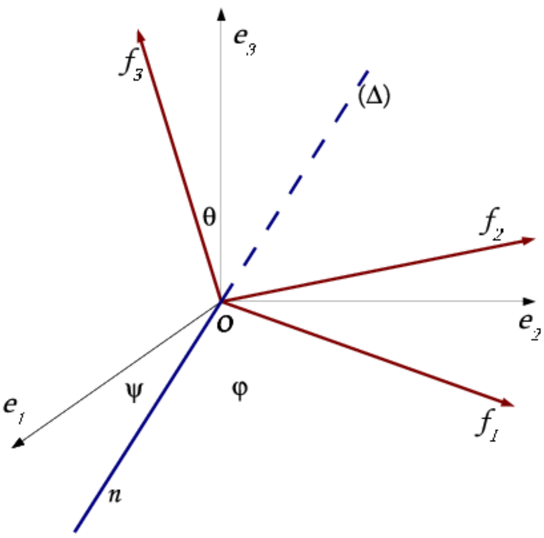


FIGURE III.3 – Solide mobile autour du point O

(S) est lié à $\mathcal{R}_1(O, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ et pour tout instant t, $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ ont même origine O. Soit $[\alpha]$ la matrice de passage de la base $\mathcal{R}_0$ à la base $\mathcal{R}_1$:

$$\alpha_{ij} = \cos\left(\overrightarrow{f_i}, \overrightarrow{e_i}\right), \qquad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

On obtient 9 cosinus directeurs liés par les six relations qui traduisent l'orthogonalité des bases de $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$, ie

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha_k^i\right)^2 = 1, \quad k \in \{1,2,3\} \quad \text{et ensuite} \quad \sum_{i=1}^{3}\alpha_p^i\alpha_q^i \text{ pour } p \neq q;\ i,j \in \{1,2,3\}.$$

Ceci explique que l'on détermine la position de l'espace $\mathcal{R}_1$ (donc de (S) lié à $\mathcal{R}_1$) dans $\mathcal{R}_0$ au moyen de 9-6=3 paramètres indépendants qui sont les trois angles caractéristiques ou angles d'Euler ψ, θ et φ.

Remarque III.2.3 *Si O_1 est différent de O, alors il nous faut 12 - 6 = 6 paramètres : 3 angles d'Euler ψ, θ et φ plus 3 coordonnées de O_1 dans $\mathcal{R}_0$ déterminant la position du solide (S) donc de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$.*

Soit Δ l'intersection des plans $(O, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ et $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ (Δ est la ligne des nuds ou l'axe nodal). On choisit un vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ orientant Δ.
$\psi = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{n})$ = angle de précision mesuré par l'observateur de $(O, \overrightarrow{e_3})$;
$\varphi = (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{f_1})$ = angle de rotation propre mesuré par l'observateur de $(O, \overrightarrow{f_3})$;
$\theta = (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{f_3})$ = angle de nutation mesuré par l'observateur de $(O, \overrightarrow{n})$;
le triplet d'angles (ψ, θ, φ) détermine une position et une seule de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Introduisons à présent deux trièdres intermédiaires $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$ définis de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{R}_0(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) & \\
\mathcal{R}_2(O, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_3}) & \overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{n} \\
\mathcal{R}_3(O, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{f_3}) & \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{f_3} \wedge \overrightarrow{n} \\
\mathcal{R}_1(O, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}) &
\end{array}$$

Les trois figures planes suivantes rendent compte des trois rotations en ψ, φ et θ :

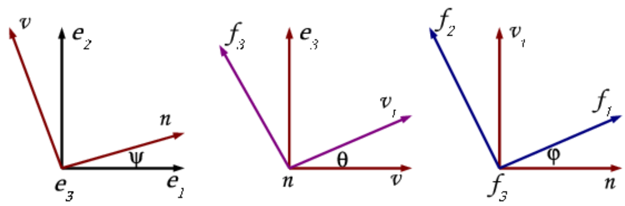


FIGURE III.4 – Angles d'Euler

P est un point quelconque du solide (S) donc lié à $\mathcal{R}_1$, ceci implique que $\overrightarrow{V}^{(1)}(P) = \overrightarrow{0}$.
Théorème de composition des vitesses avec $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$.

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(P) = \overrightarrow{V}^{(1)}(P) + \overrightarrow{V}^{(0)}(P_t^1) = \overrightarrow{V}^{(0)}(P_t^1) = \overrightarrow{V}^{(0)}(O) + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{OP} \tag{III.12}$$

Théorème de composition des vitesses avec $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_1$.

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(P) = \overrightarrow{V}^{(0)}(P_t^2) + \overrightarrow{V}^{(2)}(P_t^3) + \overrightarrow{V}^{(3)}(P_t^1) + \overrightarrow{V}^{(1)}(P) \tag{III.13}$$

or

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}^{(0)}(P_t^2) &= \overrightarrow{V}^{(0)}(O) + \overrightarrow{\omega}_2^{(0)} \wedge \overrightarrow{OP} \\
\overrightarrow{V}^{(2)}(P_t^3) &= \overrightarrow{V}^{(2)}(O) + \overrightarrow{\omega}_3^{(2)} \wedge \overrightarrow{OP} \\
\overrightarrow{V}^{(3)}(P_t^1) &= \overrightarrow{V}^{(3)}(O) + \overrightarrow{\omega}_1^{(3)} \wedge \overrightarrow{OP}
\end{aligned}$$

Au total, on a à tout instant t

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(P) = \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{OP} = \left(\overrightarrow{\omega}_2^{(0)} + \overrightarrow{\omega}_3^{(2)} + \overrightarrow{\omega}_1^{(3)}\right) \wedge \overrightarrow{OP}$$

On en déduit que

$$\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = \overrightarrow{\omega}_2^{(0)} + \overrightarrow{\omega}_3^{(2)} + \overrightarrow{\omega}_1^{(3)}$$

D'après le paragraphe précédent, on déduit que :

$$\begin{array}{llllll}
\overrightarrow{\omega}_2^{(0)} = \dot{\psi}\overrightarrow{e_3} & \text{rotation des} & \overrightarrow{f_i} & \text{de} & \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0 & \text{autour des} \quad (O, \overrightarrow{e_3}) \\
\overrightarrow{\omega}_3^{(2)} = \dot{\theta}\overrightarrow{n} & \text{rotation des} & \overrightarrow{f_i} & \text{de} & \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3 & \text{autour des} \quad (O, \overrightarrow{n}) \\
\overrightarrow{\omega}_1^{(3)} = \dot{\varphi}\overrightarrow{f_3} & \text{rotation des} & \overrightarrow{f_i} & \text{de} & \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_3 & \text{autour de l'axe commun} \quad \overrightarrow{f_3}
\end{array}$$

d'ou

$$\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = \dot{\psi}\overrightarrow{e_3} + \dot{\theta}\overrightarrow{n} + \dot{\varphi}\overrightarrow{f_3}.$$

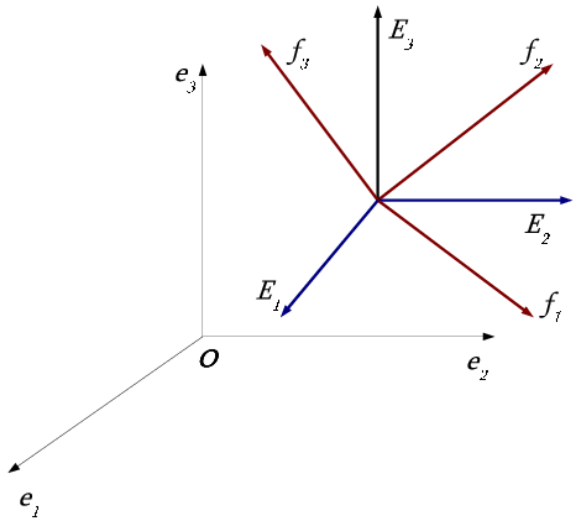


FIGURE III.5 – Composition des vitesses

Considérons un solide (S) lié à $\mathcal{R}_1$, d'origine O_1 en mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}_0$. Soit $\mathcal{R}_4(O_1, \overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{E_3})$ tel qu'en tout instant t, $\overrightarrow{E_i} = \overrightarrow{e_i}, i = 1, 2, 3$, $\mathcal{R}_4$ est en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ équivaut à la nullité de $\overrightarrow{\omega}_4^{(0)}$ en tout instant (c'est la propriété caractéristique de la translation.)
Soit P un point quelconque lié à (S) donc à $\mathcal{R}_1$: $\overrightarrow{V}^{(1)}(P) = \overrightarrow{0}$.
Théorème de composition des vitesses avec $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$:

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(P) = \overrightarrow{V}^{(1)}(P) + \overrightarrow{V}^{(0)}(P_t^1) = \overrightarrow{V}^{(0)}(P_t^1) = \overrightarrow{V}^{(0)}(O_1) + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{O_1P} \tag{III.14}$$

Théorème de composition des vitesses avec $\mathcal{R}_0$,$\mathcal{R}_4$ et $\mathcal{R}_1$: $\overrightarrow{V}^{(0)}(P) = \overrightarrow{V}^{(0)}(P_t^4) + \overrightarrow{V}^{(4)}(P_t^1) + \overrightarrow{V}^{(1)}(P)$ or

$$\begin{cases} \overrightarrow{V}^{(0)}(P_t^4) & = \overrightarrow{V}^{(0)}(O_1) + \overrightarrow{\omega}_4^{(0)} \wedge \overrightarrow{O_1P} \\ \overrightarrow{V}^{(4)}(P_t^1) & = \overrightarrow{V}^{(4)}(O_1) + \overrightarrow{\omega}_1^{(4)} \wedge \overrightarrow{O_1P}. \end{cases}$$

Il vient alors que

$$\forall t, \overrightarrow{V}^{(0)}(P) = \overrightarrow{V}^{(0)}(O_1) + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{V}^{(0)}(O_1) + \left(\overrightarrow{\omega}_4^{(0)} + \overrightarrow{\omega}_1^{(4)}\right) \wedge \overrightarrow{O_1P}$$

i.e

$$\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = \overrightarrow{\omega}_4^{(0)} + \overrightarrow{\omega}_1^{(4)}.$$

Remarque III.2.4 *Il résulte immédiatement des paragraphes précédents que*

$$\overrightarrow{\omega}_n^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\omega}_i^{(i-1)}.$$

C'est la formule de composition des vitesses angulaires dans le cas général de (1 + n) repères ou n solides en mouvement les uns par rapport aux autres.

Définition III.2.1 $\overrightarrow{\omega}_q^{(p)}$ *est le vecteur rotation instantané du mouvement du référentiel $\mathcal{R}_q$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}_p$.*

III.2.7 Composition des accélérations

Les hypothèses sont données identiques à celle de : P mobile par rapport à $\mathcal{R}_1$ et par rapport à $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ mobile par rapport à $\mathcal{R}_0$.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{OO_1} + y_i\overrightarrow{f_i}$$

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(P) = \overrightarrow{V}^{(0)}(O_1) + \dot{y}_i\overrightarrow{f_i} + y_i\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_i}$$

$$\overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(P) = \overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(O_1) + 2\dot{y}_i\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_i} + \ddot{y}_i\overrightarrow{f_i} + y_i\frac{d^{2(0)}}{dt^2}\overrightarrow{f_i}$$

—
$$\ddot{y}_i\overrightarrow{f_i} = \left[\frac{d^2}{dt^2}\left(y_i\overrightarrow{f_i}\right)\right]_{(\mathcal{R}_1)} = \left[\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{O_1P}\right]_{(\mathcal{R}_1)} = \overrightarrow{\Gamma}^{(1)}(P)$$

c'est l'accélération relative de P.

—
$$\overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(O_1) + y_i\frac{d^{2(0)}}{dt^2}\overrightarrow{f_i} = \left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\overrightarrow{OO_1} + y_i\overrightarrow{f_i}\right)\right]^{(0)}_{y_i=\text{Cste}} = \left[\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OP}\right]^{(0)}_{P\in\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{\Gamma}^{(0)}\left(P_t^1\right)$$

c'est l'accélération d'entrainement de P

—
$$2\dot{y}_i\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{f_i} = 2\dot{y}_i\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{f_i} = 2\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \dot{y}_i\overrightarrow{f_i} = 2\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{V}^{(1)}(P) = \overrightarrow{\Gamma}_c(P)$$

c'est l'accélération de Coriolis

d'où
$$\overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(P) = \overrightarrow{\Gamma}^{(1)}(P) + \overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(P_t^1) + \overrightarrow{\Gamma}_c(P)$$

Remarque III.2.5 *En posant $\overrightarrow{L}(t) = \overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$, alors la formule III.9 conduit à :*

$$\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = \frac{d^{(1)}}{dt}\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = \frac{d^{(1)}}{dt}\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}.$$

Expression de $\Gamma^{(0)}(P_t^1)$ à l'aide de $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$

De l'expression $\frac{d}{dt}\overrightarrow{f_i} = \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{f_i}$, il vient que :

$$\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{f_i} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{f_i} + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \left(\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{f_i}\right)$$

ou encore
$$y_i\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{f_i} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge y_i\overrightarrow{f_i} + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \left(\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge y_i\overrightarrow{f_i}\right).$$

On obtient la formule de Rivalis liant les accélérations de deux points appartenant à un même solide.

$$\overrightarrow{\Gamma}^{(0)}\left(P_t^1\right) = \overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(O_1) + \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\right) \wedge \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \left(\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{O_1P}\right) \tag{III.15}$$

Remarque III.2.6 *L'accélération de Coriolis $\overrightarrow{\Gamma_C}$ est nulle dans deux cas importants :*

1. *si à tout instant t, la vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$ est nulle qui est équivalent à la translation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ (ceci à vitesse et accélérations quelconques donc pour tout mouvement du point O_1 .)*
2. *si à tout instant t, la vitesse $\overrightarrow{V}^{(1)}(P)$ est nulle ou à tout instant t le point P est lié à $\mathcal{R}_1$ i.e l'accélération $\overrightarrow{\Gamma}^{(1)}(P)$ est nulle ($\overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(P) = \overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(P_t^1)$.)*

III.2.8 Ensemble des points d'un solide (S) dont le vecteur vitesse est parallèle à la vecteur vitesse angulaire - Mouvement plan sur plan

Soit (S) un solide lié à $\mathcal{R}_1$ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$. O_1 est l'origine de $\mathcal{R}_1$.
Existe-t-il un point P de (S) tel qu'à l'instant t on ait la vitesse $\overrightarrow{V}^{(0)}(P)$ parallèle à la vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$?
On sait que $\overrightarrow{V}^{(0)}$ est le champ des mouvements résultants du torseur cinématique de (S) dont la résultante générale est $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$. De ce qui précède, l'ensemble des points P répondant à la question posée ci-dessus est l'axe central Δ du torseur cinématique de (S).
Cet axe est appelé *axe instantané de rotation et de glissement.*

Calcul de la vitesse $\overrightarrow{V}^{(0)}(P)$ en fonction des invariants du torseur cinématique $\mathcal{T}(S)$

Soit P lié à (S) ; P appartient à l'axe Δ à l'instant t (en général pour un instant $t+dt$, le point P n'appartient pas à l'axe Δ). Alors on a

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(P) = k\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}, \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{et en générale k est une fonction du temps} \quad t.$$

On multiplie scalairement les deux membres par $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$, i.e :

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(P).\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = k\left(\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\right)^2$$

mais $\overrightarrow{V}^{(0)}(P) = \overrightarrow{V}^{(0)}(O_1) + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{O_1P}$ car P est un point de (S) donc appartenant à $\mathcal{R}_1$ et alors $\overrightarrow{V}^{(1)}(P) = \overrightarrow{0}$.
On obtient alors l'invariant scalaire du torseur cinématique $\mathcal{T}$:

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(P).\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = \overrightarrow{V}^{(0)}(O_1).\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$$

qui est similaire à la formule de Varignon ($\overrightarrow{\mathcal{M}_0}.\overrightarrow{R} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{0'}}.\overrightarrow{R}$.)

Le réel k est donné par la formule

$$k = \frac{\overrightarrow{V}^{(0)}(O_1).\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}}{\left(\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\right)^2}.$$

Finalement la vitesse $\overrightarrow{V}^{(0)}(P)$ est indépendant du point P de l'axe Δ :

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(P) = \frac{\overrightarrow{V}^{(0)}(O_1).\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}}{\left(\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\right)^2}\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$$

Remarque III.2.7 *Δ est en fonction du temps t. L'axe $\Delta(t)$ est donc une droite variable dans $\mathcal{R}_0$, mais aussi dans $\mathcal{R}_1$.*
En effet, à l'instant $t \neq t'$, ce ne sont pas les mêmes point Q liés à (S) qui ont un vecteur vitesse $\overrightarrow{V}^{(0)}(P)$ colinéaire à $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$.

- *Le déplacement continu de $\Delta(t)$ engendre dans $\mathcal{R}_0$ une surface réglée (Σ_0) appelée axoïde fixe du mouvement*
- *Par rapport à $\mathcal{R}_1$, le déplacement continu de $\Delta(t)$ engendre une surface réglée (Σ_1), dite axoïde mobile du mouvement*
- *A tout instant t du mouvement, (Σ_0) et (Σ_1) sont toujours tangentes et admettent $\Delta(t)$ comme génératrice commune.*

Propriétés de $\Delta(t)$

L'axe $\Delta(t)$ est constamment colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$.
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire de l'axe Δ alors il vient que :

$$\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{u} = \frac{d^{(1)}}{dt}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{u} = \frac{d^{(1)}}{dt}\overrightarrow{u}$$

car $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$ sont colinéaires.
Si $\Delta(t)$ est de direction fixe dans $\mathcal{R}_1$, i.e $\frac{d^{(1)}}{dt}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Il vient donc que l'axe $\Delta(t)$ est aussi de direction fixe dans $\mathcal{R}_0$.
Si l'axe $\Delta(t)$ est de direction fixe dans l'un des deux trièdres, alors il est de direction fixe dans l'autre trièdre.

Mouvement plan sur plan

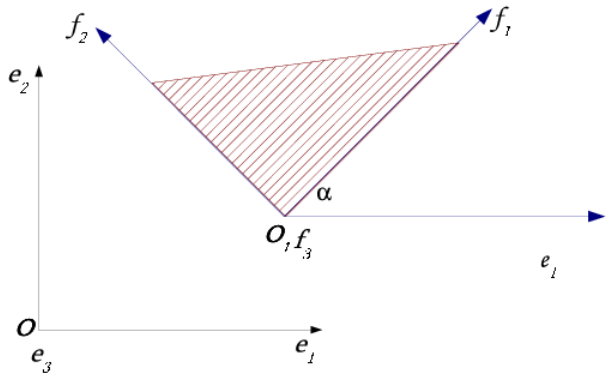


FIGURE III.6 – Mouvement d'une équerre dans un plan

Le solide (s) est une *équerre* lié au trièdre $\mathcal{R}_1(O_1, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ et le trièdre fixe est $\mathcal{R}_0(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.
$\mathcal{R}_1$ est en mouvement plan sur plan par rapport à $\mathcal{R}_0$ si en tout instant t le plan $(O_1, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ est contenu dans le plan $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
Remarquons que si en tout instant t les vecteurs $\overrightarrow{f_3}$ et $\overrightarrow{e_3}$ sont identiques, alors $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = \dot{\alpha}\overrightarrow{e_3} = \dot{\alpha}\overrightarrow{f_3}$.

Existe-t-il une particule M liée au plan $(O_1, \overrightarrow{f_1})$ qui à tout instant t possède un vecteur vitesse par rapport à $\mathcal{R}_0$ qui soit nulle (i.e $\overrightarrow{V}^{(0)}\left(M_t^1\right) = \overrightarrow{0}$?) On a :

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(O_1) + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{0}$$

On multiplie vectoriellement cette expression à gauche et à droite par $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$:

$$\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{V}^{(0)}(O_1) + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \left(\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.$$

En remarquant que pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{z}$ on a : $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{z})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{z}$, on peut réécrire :

$$\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \left(\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) = \left(\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}.\overrightarrow{O_1M}\right)\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} - \left(\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\right)^2 \overrightarrow{O_1M}.$$

Puisque le vecteur $\overrightarrow{O_1M}$ est contenu dans le plan $(O_1, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$, alors le vecteur $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{O_1M}$ est nul. ET on a l'expression de $\overrightarrow{O_1M}$

$$\overrightarrow{O_1M} = \frac{\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{V}^{(0)}(O_1)}{\left(\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\right)^2}. \tag{III.16}$$

La formule (III.16) définit, dans le cas où $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \neq \overrightarrow{0}$, une particule unique, liée à l'équerre, répondant à la question. On a l'habitude de désigner par I la position occupée par cette particule M.

I est appelé *le centre instantané de rotation* du mouvement plan sur plan. Le centre instantané I est mobile dans $\mathcal{R}_0$, mais aussi dans $\mathcal{R}_1$. En effet, $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$ et $\overrightarrow{V}^{(0)}(O_1)$ sont fonctions de t dans (III.16).

La trajectoire de I dans $\mathcal{R}_0$ est appelée la base du mouvement;
la trajectoire de I dans $\mathcal{R}_1$ est appelée la roulante du mouvement;
I étant mobile dans $\mathcal{R}_0$ et dans $\mathcal{R}_1$, on a :

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(I) = \overrightarrow{V}^{(1)}(I) + \overrightarrow{V}^{(0)}(I_t^1) = \overrightarrow{W}.$$

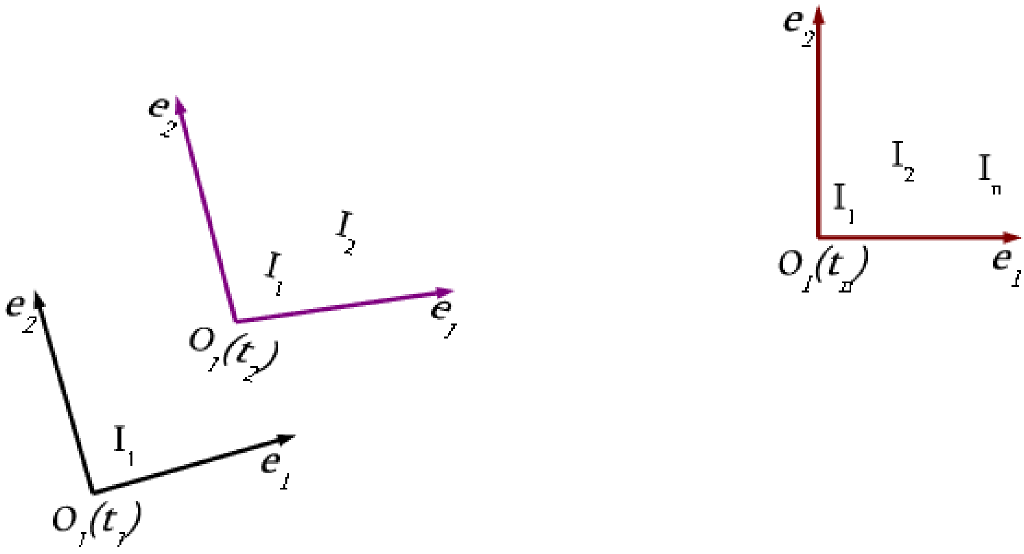


FIGURE III.7 – Trajectoire du centre instantané de rotation

Or par définition du centre instantané I, le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}^{(0)}(I_t^1)$ est nul.
Le vecteur vitesse $\overrightarrow{W}$ de circulation du centre instantané de rotation (C.I.R) I est :

$$\overrightarrow{V}(0)(I) = \overrightarrow{V}^{(1)}(I) = \overrightarrow{W}.$$

Quel est l'axe instantané de rotation et de glissement du mouvement plan sur plan ?

On sait que l'axe Δ et le vecteur $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = \dot{\alpha}\overrightarrow{e_3}$ sont de même direction implique que $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{f_3}$ qui est le vecteur directeur de Δ.

Pour tout point P de l'axe Δ, P lié à $\mathcal{R}_1$:

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(P) = \frac{\overrightarrow{V}^{(0)}(O_1).\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}}{\left(\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\right)^2}\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$$

O_1 mobile dans le plan $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, alors le vecteur vitesse de O_1, $\overrightarrow{V}^{(0)}(O_1) = \dot{x}\overrightarrow{e_1} + \dot{y}\overrightarrow{e_2}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{e_3}$. Il vient par suite que les vecteurs $\overrightarrow{V}^{(0)}(O_1)$ et $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = \dot{\alpha}\overrightarrow{e_3}$ sont perpendiculaires i.e $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}.\overrightarrow{V}^{(0)}(O_1) = 0$.
Donc pout tout point P de l'axe Δ, P lié à $\mathcal{R}_1$: $\overrightarrow{V}^{(0)}(P) = \overrightarrow{0}$.
Or le point I possède cette propriété, donc dans le cas du mouvement plan sur plan

$$\Delta = (I;\overrightarrow{e_3}) = \left(I;\overrightarrow{f_3}\right).$$

L'axoïde fixe (Σ_0) est une surface cylindrique ; de même que l'axoïde mobile (Σ_1).
L'intersection de (Σ_0) et du plan $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ qui est la base du mouvement est une courbe que nous désignerons par $\mathcal{C}_0$;
L'intersection de (Σ_1) et du plan $(O;\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2})$ qui est la roulante est une courbe que nous désignerons par $\mathcal{C}_1$;

Exercice III.2.1 *Étude du glissement d'une échelle*

On considère une échelle AB, noté par (S_1) de longueur L.

— *$\mathcal{R}_O(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ est un repère lié au mur et le sol modélisés par le même solide (S_0).*
— *$\mathcal{R}(A,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0})$ est un repère lié à (S_1) tel que $\overrightarrow{AB} = L\overrightarrow{y}$. On pose $\theta = (\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1})$.*

Questions

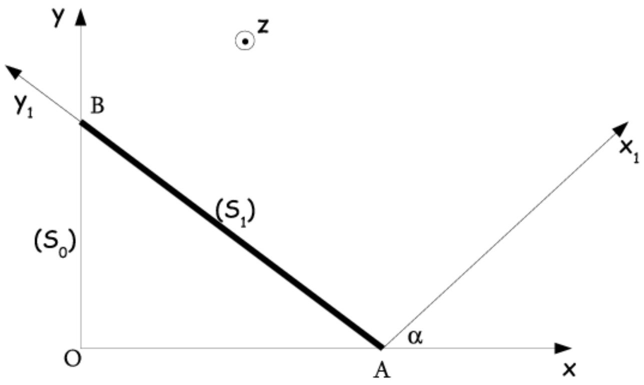


FIGURE III.8 – Mouvement de l'échelle contre le mur

1. *Déterminer le torseur cinématique du mouvement de* (S_1) *par rapport à* (S_0) *au point A* $\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}_A$.
2. *Trouver le C.I.R. par la méthode analytique puis par la méthode graphique.*
3. *Déterminer la base et la roulante du mouvement plan sur plan de* (S_1) *par rapport à* (S_0).

III.2.9 Notions de contact entre deux solides : condition de roulement sans glissement

(S_1) et (S_2) sont deux solides limités par deux surfaces (Σ_1) et (Σ_2) admettant un plan tangent commun (Π) : (S_1) et (S_2) se déplacent l'un par rapport à l'autre en restant, en chaque instant t, en contact ponctuel en $I = M$. On désigne par L_1 et L_2, courbes tracées sur (Σ_1) et (Σ_2), les ensembles des positions occupées dans $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, par le point de contact M.
(L_1 et L_2 seraient les traces laissées sur (Σ_1) et (Σ_2) par une bille "encrée " coincée entre (S_1) et (S_2) au point M).
Le point de contact est mobile par rapport à (S_1) et (S_2). On peut écrire d'après le théorème de composition des

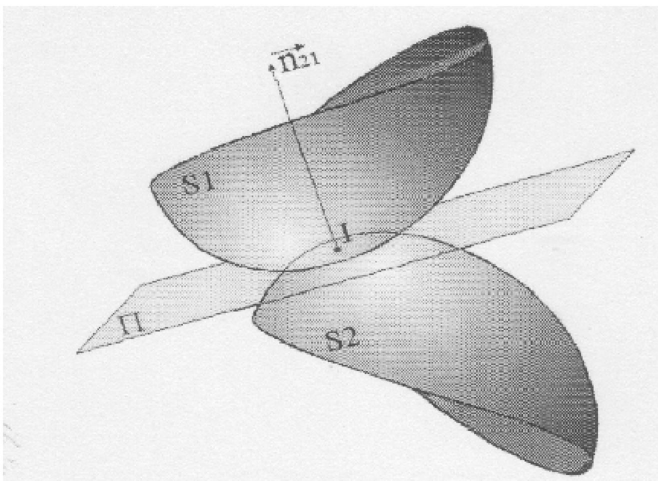


FIGURE III.9 – Mouvement plan sur plan

vitesses avec $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$:

$$\vec{V}^{(1)}(M) = \vec{V}^{(2)}(M) + \vec{V}^{(1)}(M_t^2)$$

$\overrightarrow{V}^{(1)}(M)$ est tangente à L_1 tracée sur (Σ_1) donc tangente à (Σ_1) ;
$\overrightarrow{V}^{(2)}(M)$ est tangente à L_2 tracée sur (Σ_2) donc tangente à (Σ_2) ;

Dans la réalité le contact s'effectue entre une particule M_1 liée à (S_1) et une particule M_2 liée à (S_2) ; ces deux particules se touchent. alors $\overrightarrow{V}^{(1)}(M_t^2)$ s'interprète comme étant la vitesse avec laquelle la particule M_2 glisse au contact de M_1.

Par définition, le vecteur vitesse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1) est $\overrightarrow{V}_{(1)}(M_t^2)$.

La condition de roulement sans glissement sera donc traduite par

$$\overrightarrow{V}^{(1)}\left(M_t^2\right) = \overrightarrow{V}_{\mathbf{glisst} S_2/S_1} = \overrightarrow{0}.$$

Remarque III.2.8

1. $\overrightarrow{V}_{glisstS_2/S_1} = \overrightarrow{V}^{(1)}(M) - \overrightarrow{V}^{(2)}(M) = \overrightarrow{V}^{(1)}\left(M_t^2\right)$ *contenu dans le plan* (Π). *En projetant sur deux axes contenus dans* (Π), *la condition de non glissement se traduit par deux équations scalaires faisant intervenir les paramètres et leurs dérivées. De telles conditions sont dites non-holonomes.*

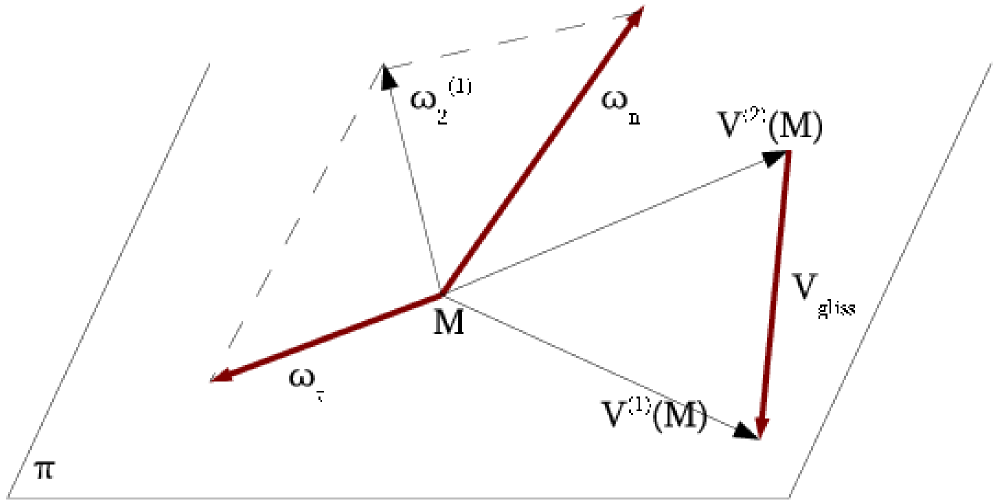


Figure III.10 – Vecteur de glissement

2. *remarque porte sur* $\overrightarrow{\omega}_2^{(1)}$.
   $\overrightarrow{\omega}_2^{(1)} = \overrightarrow{\omega}_n + \overrightarrow{\omega}_\tau$
   $\overrightarrow{\omega}_n$ *est la projection normale de* $\overrightarrow{\omega}_2^{(1)}$ *sur* (Π). *C'est la composante de pivotement qui est la rotation autour de la perpendiculaire à* (Π).
   $\overrightarrow{\omega}_\tau$ *est la projection tangentielle de* $\overrightarrow{\omega}_2^{(1)}$ *sur* (Π). *C'est la composante de roulement qui est la rotation autour* (Π).

Exemple III.2.3 *Une roue S de centre C et de rayon a et M un point de S. Le trièdre $\mathcal{R}_1(C;\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_3})$ est lié à la roue $(C;a)$; le trièdre $\mathcal{R}_0(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ est fixe. On pose $x(C)=x$ et $\theta = \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{f_1}\right) = \left(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{f_2}\right)$. On a :*

$$\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_3} = \dot{\theta}\overrightarrow{f_3}.$$

La vitesse de glissement est alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}_{glisstS_2/S_1} &= \overrightarrow{V}^{(0)}(C) + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0} \\ &= \dot{x}\overrightarrow{e_1} + \dot{\theta}\overrightarrow{e_3} \wedge (-a\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

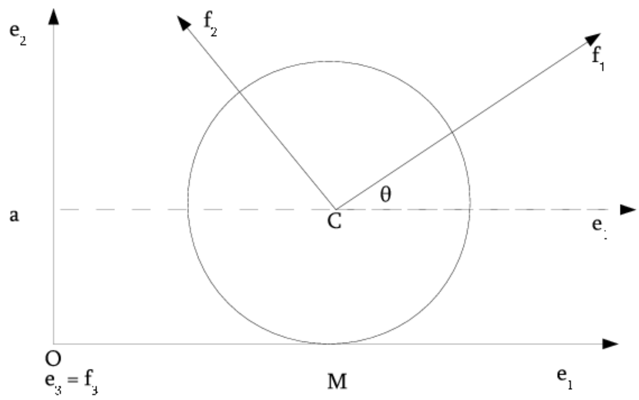


FIGURE III.11 – Roulement sans glissement

Le vitesse de glissement est nulle implique que $(\dot{x}+a\dot{\theta})\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0}$ *ou encore que* $x+a\theta = 0$, *i.e :* $x(0) = 0$ *et* $\theta(0) = 0$.

III.3 Exercices

Exercice III.3.1 *Soit un système constitué de deux solides* (S_1) *lié au repère* $\mathcal{R}_1(C, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ *et* (S_2) *lié au repère* $\mathcal{R}_2(C, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$*en mouvement par rapport à un repère fixe* $\mathcal{R}_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$

(S_1) *: est une barre de longueur* L*, de masse* m *dont l'extrémité* A *glisse sur un mur et l'autre extrémité* B *est articulée au disque ;*

(S_2) *: est un disque de masse* M *et de rayon* R *qui roule sans glisser sur un plan horizontal tel que représenté sur la figure ci-dessous.*

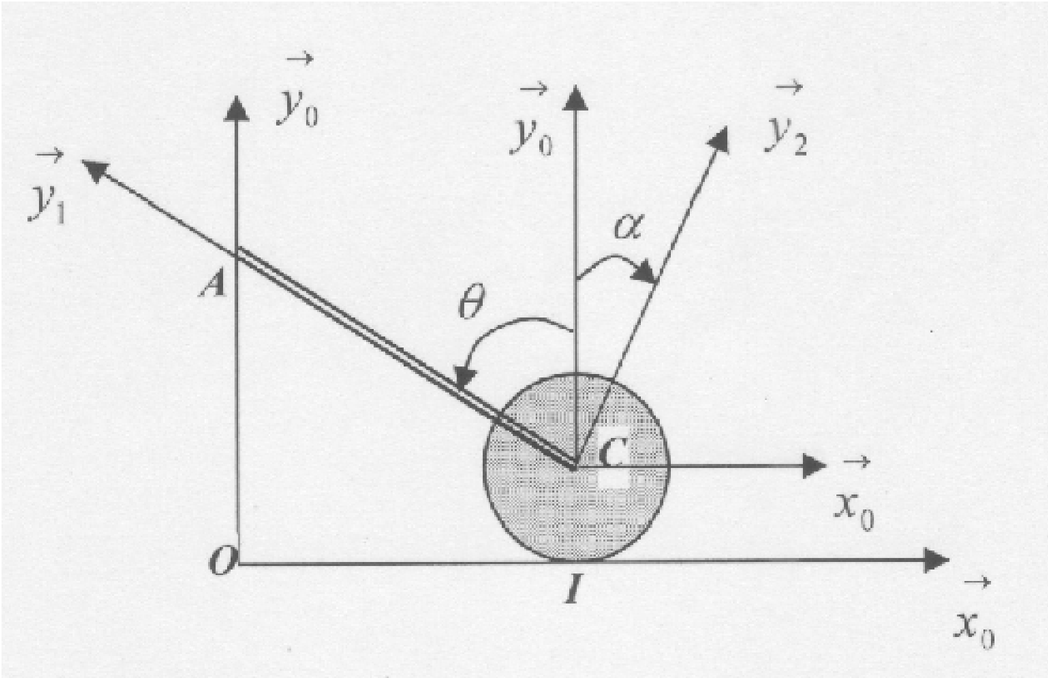
1. *Déterminer la relation exprimant le non glissement du disque sur le plan au point* I *;*
2. *Déterminer le centre instantané de rotation (C.I.R.) de la barre :*
   (a) *Géométriquement*
   (b) *Analytiquement.*

Exercice III.3.2 *Soit* $\mathcal{R}(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$*, un repère lié à un bâti* (S_0)*. Considérons un solide* (S) *ayant avec* (S_0) *une liaison pivot d'axe* $(0, \overrightarrow{z})$*. Soit* $\mathcal{R}_1(O; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z})$ *un repère lié à* (S)*, posons* $\alpha(t) = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_1})$.
Supposons $\alpha(t)$ *de la forme :* $\alpha(t) = \omega t$ *(*ω *est une constante positive exprimée en radians par seconde).*
Soit $P(t)$ *un point du solide* (S) *tel que :* $\overrightarrow{OP}(t) = a\overrightarrow{x_1}$ *(*a *est une constante positive exprimée en mètre).*

1. *Déterminer le vecteur vitesse du point* P *par rapport au repère* $\mathcal{R}$ *:* $\overrightarrow{V}(P/\mathcal{R})$.
2. *Déterminer l'hodographe du vecteur vitesse* $\overrightarrow{V}(P/\mathcal{R})$ *relatif à un point* A *quelconque du repère* $\mathcal{R}$.
3. *Déterminer le vecteur accélération du point* P *par rapport au repère* $\mathcal{R}$ *:* $\overrightarrow{\Gamma}(P/\mathcal{R})$.

Exercice III.3.3 *Considérons une centrifugeuse de laboratoire composée d'un bâti* (S_0)*, d'un bras* (S_1) *et d'une éprouvette* (S_2) *contenant deux liquide de masses volumiques différentes.*

Sous l'effet centrifuge dû à la rotation du bras (S_1)*, l'éprouvette* (S_2) *s'incline pour se mettre pratiquement dans l'axe du bras et le liquide dont la masse volumique est la plus grande est rejeté vers le fond de l'éprouvette, ce qui réalise la séparation des deux liquides.*



Soit $\mathcal{R}(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S_0).

Les solides (S_0) et (S_1) ont une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$. $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ est un repère lié à (S_1). Posons $\alpha = (\vec{y}, \vec{y_1})$ avec $\alpha = \omega t$ (ω constante positive exprimée en radians par seconde).

Les solides (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z_1})$ telle que :
$\overrightarrow{OA} = a\vec{y_1}$ (a constante positive exprimée en mètres).
$\mathcal{R}_2(A; \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_1})$ est un repère lié à (S_2). Posons $\beta = (\vec{x}, \vec{x_2})$.

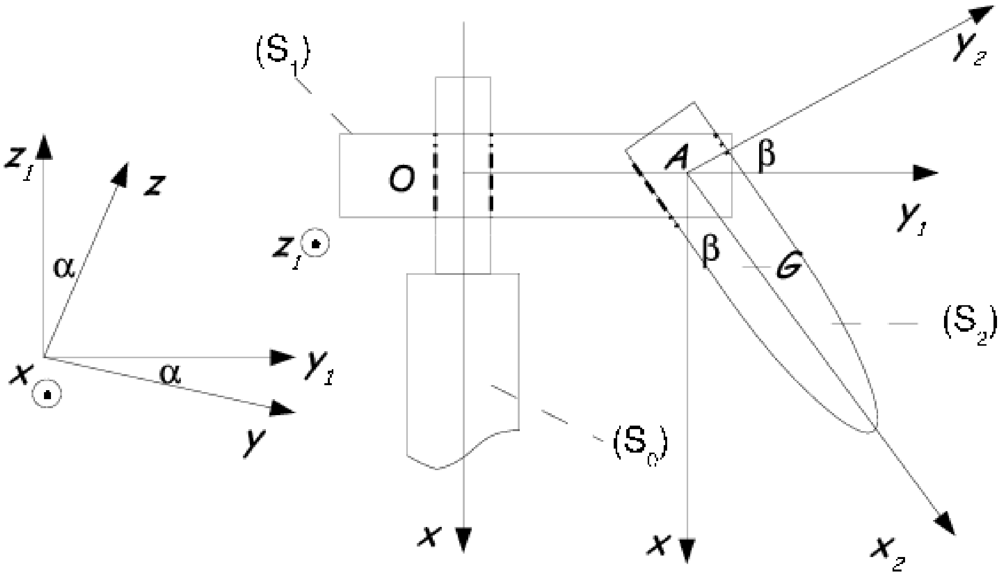
β étant une fonction du temps inconnue. Soit G le centre d'inertie de (S_2) tel que : $\overrightarrow{AG} = b\vec{x_2}$ (b constante positive exprimée en mètres).

1. *Déterminer le vecteur rotation de la base du repère $\mathcal{R}_1$, lié au solide (S_1), par rapport à la base du repère $\mathcal{R}$:*
   $\vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(R_1/\mathcal{R})$.
2. *Déterminer le vecteur rotation de la base du repère $\mathcal{R}_2$, lié au solide (S_2), par rapport àa la base du repère $\mathcal{R}$: $\vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(R_2/\mathcal{R})$.*
3. *Déterminer le vecteur vitesse du point G par rapport au repère $\mathcal{R}$: $\vec{V}(G/R)$.*
4. *Déterminer le vecteur accélération du point G par rapport au repère $\mathcal{R}$: $\vec{\Gamma}(G/R)$.*

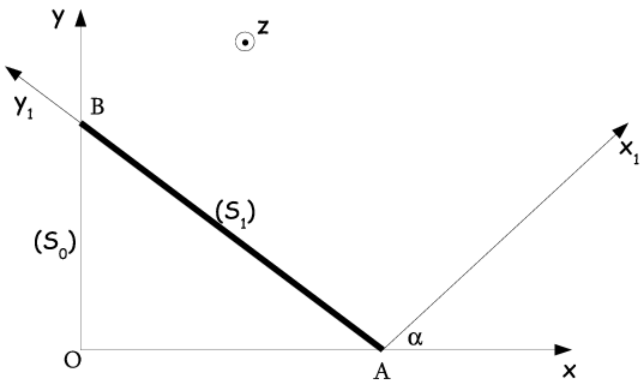
Exercice III.3.4 *Échelle contre un mur.*

Soit $\mathcal{R}(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, un repère lié à un bâti (S_0). Une tige (S_1), de longueur l, d'extrémités A et B, d'épaisseur négligeable, a une liaison linéaire annulaire de centre A, d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0) et une autre liaison linéaire annulaire de centre B, d'axe $(O, \vec{y})$ avec (S_0).
Soit $\mathcal{R}_1(A; \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ un repère lié à la tige (S_1) tel $\overrightarrow{AB} = l\vec{y}$, on pose
$\alpha = (\vec{x}, \vec{x_1})$.

1. *Déterminer le torseur cinématique $\{\vec{V}(S_1/\mathcal{R})\}$ au point A.*
2. *Déterminer le moment central et l'axe central de ce torseur.*
3. *Déterminer les axoïdes du mouvement de (S_1) par rapport à $\mathcal{R}$.*
4. *Calculer $\vec{V}(B/\mathcal{R})$ de deux façons :*



(S1)
z1
z
α
x
y1
α
y
O
z1
A
β
y1
y2
β
G
(S2)
(S0)
x
x
x2



y
z
y1
B
x1
(S1)
(S0)
α
O
A
x

(a) *en dérivant le vecteur position* $\overrightarrow{OB}$

(b) *à partir de* $\overrightarrow{V}(A/\mathcal{R})$.

5. *Calculer le vecteur vitesse du point* O*, supposé lié à* (S_1) *à l'instant considéré, par rapport au repère* $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{V}(O \in S_1/\mathcal{R})$.

6. (a) *Calculer le vecteur accélération* $\overrightarrow{\Gamma}(A/\mathcal{R})$ *en dérivant le vecteur vitesse* $\overrightarrow{V}(A/\mathcal{R})$.

   (b) *Calculer le vecteur accélération* $\overrightarrow{\Gamma}(B/\mathcal{R})$ *en dérivant le vecteur vitesse* $\overrightarrow{V}(B/\mathcal{R})$.

   (c) *Retrouver l'expression de* $\overrightarrow{\Gamma}(B/\mathcal{R})$ *à partir de* $\overrightarrow{\Gamma}(A/\mathcal{R})$ *en utilisant la relation*

$$\overrightarrow{\Gamma}(B/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\Gamma}(A/\mathcal{R}) + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega}(S_1/\mathcal{R})\right]_{(B/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega}(S_1/\mathcal{R}) \wedge \left[\overrightarrow{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}\right]$$

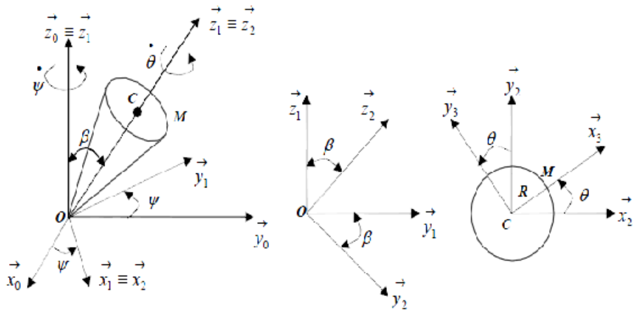
7. *Calculer le vecteur accélération du point* O*, supposé lié à* (S_1) *à l'instant considéré, par rapport au repère* $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{\Gamma}(O \in S_1/\mathcal{R})$.

Exercice III.3.5 *Un cône homogène de hauteur* h*, de rayon de base* R *est en mouvement de rotation autour de l'axe vertical* $\overrightarrow{z_0}$ *d'un repère orthonormé fixe, avec une vitesse angulaire* $\dot{\psi} = Cste$*. L'axe principal du cône est incliné d'un angle* β *constant par rapport à cet axe. Le cône tourne aussi autour de son axe principal avec une vitesse angulaire* $\dot{\theta} = Cste$ *comme représenté sur la figure ci-dessous. Le repère* $\mathcal{R}_2$ *est le repère relatif.*

On prendra aussi le repère comme repère de projection.

Déterminer :

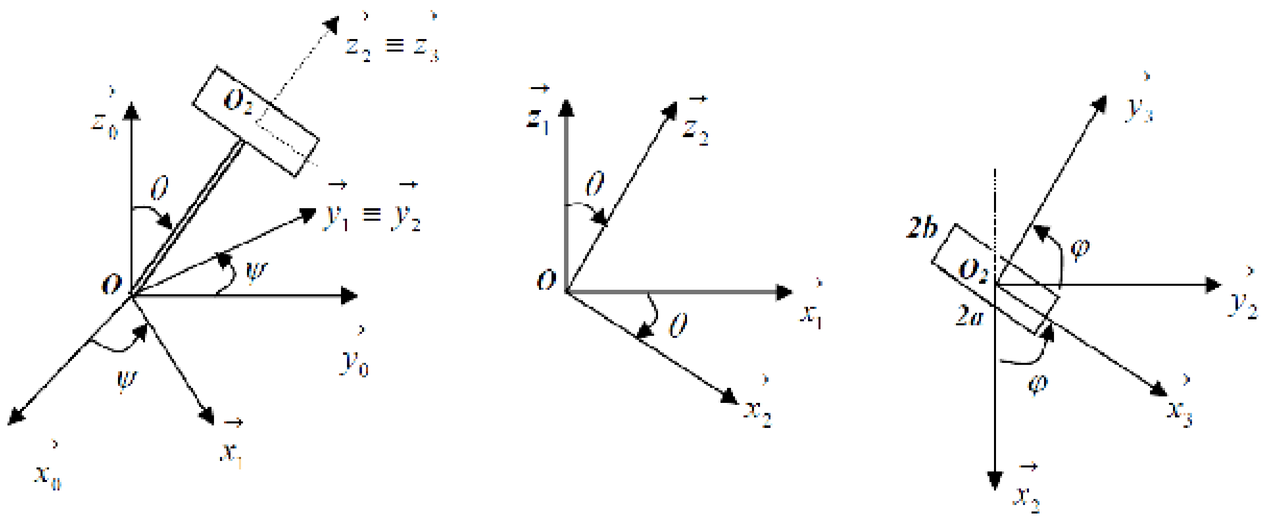
1. *Les matrices de passage de* $\mathcal{R}_1$ *vers* $\mathcal{R}_2$ *et de* $\mathcal{R}_3$ *vers* $\mathcal{R}_2$ *;*
2. *La vitesse et l'accélération du point* C *par dérivation ;*
3. *La vitesse et l'accélération du point* M *par composition de mouvement ;*



Exercice III.3.6 *Soit le système mécanique composé d'une tige* OO_2 *de longueur* L *et d'une plaque rectangulaire de dimension* $2a$ *et* $2b$ *articulée en* O_2 *avec la tige (voir figure).* $\mathcal{R}_0(O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ *étant le repère fixe ;*$\mathcal{R}_1(O; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ *en rotation de* ψ *autour de* $\overrightarrow{z_0}$*. La plaque tourne autour de la tige à une vitesse angulaire* $\dot{\varphi}$.

On donne $\dot{\psi} = Cte$ *;* $\dot{\theta} = Cte$ *;* $\dot{\varphi} = Cte$

1. *Déterminer les matrices de passage de* $\mathcal{R}_1$ *vers* $\mathcal{R}_2(O; \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ *et de* $\mathcal{R}_2$ *vers* $\mathcal{R}_3(O_1; \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$ *;*
2. *Exprimer dans* $\mathcal{R}_2$ *le vecteur rotation instantané de* $\mathcal{R}_3$ *par rapport à* $\mathcal{R}_0$ *;*
3. *Déterminer par dérivation la vitesse* $\overrightarrow{V}^{(0)}(O_2)$ *exprimée dans le repère* $\mathcal{R}_2$ *;*
4. *Déterminer par la cinématique du solide la vitesse* $\overrightarrow{V}^{(0)}(A)$ *par rapport à* $\mathcal{R}_0$ *exprimée dans* $\mathcal{R}_2$ *;* A *est un point de la plaque tel que* $\overrightarrow{O_2A} = a\overrightarrow{x_3}$
5. *Déterminer par dérivation et par la cinématique du solide* $\overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(O_2)$ *exprimée dans le repère* $\mathcal{R}_2$.


z2 ≡ z3
O2
z0
θ
y1 ≡ y2
O
ψ
y0
ψ
x0
x1
z1
z2
θ
O
x1
θ
x2
y3
2b
φ
O2
y2
2a
φ
x3
x2

Chapitre IV

Géométrie des Masses et Cinétique

Objectifs

Plus spécifiquement :

- ☞ Savoir calculer et commenter la matrice d'inertie ;
- ☞ Savoir déterminer le repère et l'axe principal d'inertie ;
- ☞ Déterminer et différencier entre centre de masse et centre d'inertie ;
- ☞ Comprendre la notion de moment d'inertie ;
- ☞ Maitriser la notion du Torseur cinétique (quantité de mouvement, moment cinétique) ;
- ☞ Maitriser la notion du Torseur dynamique (quantité d'accélération, moment dynamique) ;
- ☞ Comprendre la notion de référentiel barycentrique ;
- ☞ Comprendre et savoir appliquer le théorème de Koenig ;

Préliminaire

(S) désignant un système matériel, P une particule de ce système, m la masse de P, $\overrightarrow{V}(P)$ sa vitesse par rapport à la référence, δ la distance $[P;\ \text{axe}\ \Delta]$, O un point donné de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ euclidien ; *la géométrie des masses* a pour objet le calcul des grandeurs :

$$\sum_{P\in(S)} m\ ;\ \sum_{P\in(S)} m\overrightarrow{OP}\ ;\ \sum_{P\in(S)} m\,(OP)^2\ \ ;\ \sum_{P\in(S)} m\delta^2$$

et *la cinétique*, celui du vecteur

$$\overrightarrow{\mu_0}(S) = \sum_{P\in(S)} m\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{V}(P),$$

vecteur de moment cinétique en O de (S) et de

$$T = \frac{1}{2}\sum_{P\in(S)} m\left[\overrightarrow{V(P)}\right]^2,$$

énergie cinétique de (S).

Il faudra donc commencer par définir la "masse", puis le modèle mathématique de (S) afin de donner un sens au symbol $\sum_{P\in(S)}$.

IV.1 Définitions et propriétés générales

IV.1.1 La masse

Axiome : *A tout corps matériel (S) de l'univers on associe un nombre réel positif non nul $m(S)$ appelé masse du corps (S).*

La masse est une application (m) de l'univers $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ qui à (S) associe le nombre réel positif non nul $m(S)$.

En mécanique classique, il n'y a pas de corps sans masse, la masse est un réel positif non nul.

La masse est additive : Si le solide (S) est composé de deux solides distincts (S_1) et (S_2) de masses respectives $m(S_1)$ et $m(S_2)$, alors la masse $m(S)$ est la somme des deux masses : $m(S) = m(S_1) + m(S_2)$.

Principe de conservation de la masse

En mécanique classique, on admet que la masse d'un système matériel (S) est indépendante du temps t et de l'observateur.

Si (S) est une réunion de solides indéformables, ce principe s'applique de manière évidente.

Si l'on veut appliquer ce principe à un avion en vol :

$$(S) = \{\text{avion à l'instant } t\} \bigcup \{\text{gaz éjectés entre } t \text{ et } t_0\}$$

IV.1.2 Schématisation d'un système matériel (S)

L'observateur de l'espace affine de $\mathbb{R}^3$ euclidien remplace (S) par un ensemble de systèmes matériels élémentaires (S_e), de portions connues et de masses $m(S_e)$ indépendantes de t.

IV.1.2.1 Schématisation par un ensemble direct de points matériels

(S) est remplacé par un ensemble $\{p_1; ...; p_n\}$ de n particules matérielles schématisées par n points matériels P_i de masses m_i :

$$m(s) = \sum_{i=1}^{n} m_i = m_1 + m_2 + ... + m_n$$

IV.1.2.2 Schématisation par un ensemble continu " à densité de masse"

Définition IV.1.1

1. *un sous-ensemble $\Delta\tau$ de l'espace affine de $\mathbb{R}^3$ est dit* **volumique** *si et seulement si $\Delta\tau$ est borné et il a un volume strictement positif ;*
2. *Un sous-ensemble Δs de $\mathbb{R}^3$ est dit* **surfacique** *si et seulement si Δs est une surface continue, bornée ayant une aire strictement positive ;*
3. *Un sous-ensemble Δl de $\mathbb{R}^3$ est dit* **linéique** *si et seulement si Δl est un arc de courbe continu ayant une longueur strictement positive*

On prend à l'instant t_0 comme (S_e) soit un $\Delta\tau\,[\Delta s(t_0), \Delta l(t_0)]$.

On se donne sur $\Delta\tau(t_0)$ [resp $\Delta s(t_0), \Delta l(t_0)$] une fonction numérique $\rho_0, [resp \sigma_0, \lambda_0]$, continue, bornée, à valeurs positives sur $\Delta\tau(t_0)$ [resp $\Delta s(t_0), \Delta l(t_0)$].

On définit alors la **la masse de** *(S_e) par*

$$m(S_e) = \iiint_{\Delta\tau(t_0)} \rho_0 d\tau \text{ ou } \iint_{\Delta s(t_0)} \sigma_0 ds \text{ ou } \int_{\Delta l(t_0)} \lambda_0 dl.$$

On démontre qu'à l'instant t, (S_e) est transformé en un sous-ensemble $\Delta\tau(t)$ [resp $\Delta s(t), \Delta l(t)$] et qu'il existe sur un $\Delta\tau(t)$ [resp $\Delta s(t), \Delta l(t)$] une fonction numérique ρ_t [resp σ_t, λ_t] continue, bornée, positive telle que l'on ait :

$$m(S_e) = \iiint_{\Delta\tau(t)} \rho_t d\tau \text{ ou } \iint_{\Delta s(t)} \sigma_t ds \text{ ou } \int_{\Delta l(t)} \lambda_t dl.$$

ρ_0, ρ_t (resp. (σ_0, σ_t) ou (λ_0, λ_t)) sont des fonctions densité de masse volumique (resp. surfacique ou linéique) à t_0, à t.

Cas d'un solide matériel (S) à densité de masse

On démontre que $\rho_0(P_0) = \rho_t(P_0)$ i.e la densité de masse est indépendante de t ; il en est de même pour la densité surfacique et la densité linéique.

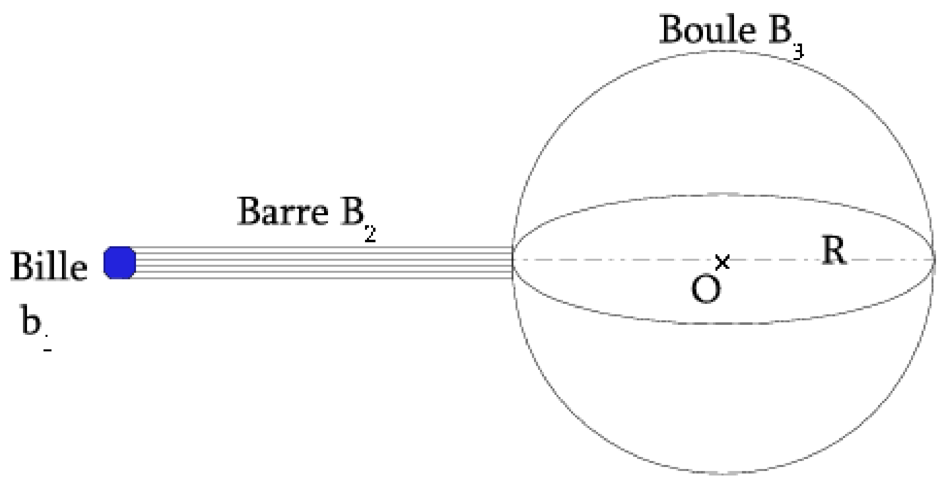
Définition IV.1.2 *Un solide (S) est homogène si et seulement si la densité de masse est uniforme, i.e $\rho_0(P_0) = \rho_0(P)$.*

Par convention tous les systèmes matériels envisagés en mécanique classique seront toujours schématisés soit par IV.1.2.1, soit par IV.1.2.2, soit par des réunions finies d'ensemble IV.1.2.1 et IV.1.2.2.
(S) sera identifié à son modèle mathématique.

Remarque IV.1.1 *La schématisation par la section IV.1.2.2) est effectivement une schématisation de la réalité physique car on sait que la matière est discontinue.*
La schématisation choisie par l'observateur dépend des problèmes à étudier.

Exemple IV.1.1 *On peut schématiser le solide (S) de la façon suivante :*
b_1 le point matériel P de masse m_1 ;
B_2 le segment rectiligne pesant à densité de masse linéique ;
B_3 l'ensemble volumique limité par la sphère $(O; R)$;
la masse $m(S)$ du solide (S) est alors :

$$m(S) = m_1 + \int_{segment\ AB} \lambda dl + \iint_{boule} \rho d\tau \text{ avec } d\tau = dxdydz.$$



En général, dans l'expression de la masse d'un système matériel (S) il figurera à la fois des intégrales simple, double et triple et des sommes que l'on remplacera sous la notation globale $\int_S dm$; dm étant l'élément de masse.

Si (S) est schématisée par IV.1.2.2) alors $dm = \rho d\tau$ ou $dm = \sigma ds$ ou $dm = \lambda dl$; le "dm" devra être exprimé à l'aide de coordonnées adaptées à la géométrie de (S).

Si (S) est surfacique, schématisé par un domaine plan,

$$\begin{cases} \text{en coordonnées cartésiennes :} & dm = \sigma dxdy \\ \text{en cooronnées polaires :} & dm = \sigma rdrd\theta. \end{cases}$$

Si (S) est volumique, schématisé par un domaine spartial ,

$$\begin{cases} \text{en coordonnées cartésiennes :} & dm = \rho dxdydz \\ \text{en cooronnées cylindriques :} & dm = \rho rdrd\theta dz \\ \text{en cooronnées sphériques :} & dm = \rho r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi. \end{cases}$$

Convention d'écriture

Dans tout ce qui suit, les sommes notées $\int_{(S)}$ désigneront des intégrales simples, doubles, triples, des sommes finies ou des unions finies d'intégrales et de sommes discrètes.

IV.1.3 Torseur associé à un système matériel (S) et un champ $\vec{H}$

Soit (S) un solide discret de points P_j de masse m_j. Soit le torseur $\mathcal{T} = \{m_j \vec{H}(P_j)\}$.
Les éléments de réduction en un point O sont :

$$\vec{R} = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{H}(P_j) \text{ et } \overrightarrow{\mathcal{M}_0}(\mathcal{T}) = \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{OP_j} \wedge m_j \vec{H}(P_j). \tag{IV.1}$$

Dans le cas général, on est amené à définir

$$(a) = \int_{P\in(S)} \vec{H}(P)\, dm \text{ et } (b) = \int_{(S)} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{H}(P)\, dm \tag{IV.2}$$

La formule (b) de Eq.IV.2 définit le moment résultant en O d'un torseur de résultante générale $\int_{(S)} \vec{H}(P)dm$.
Soit O' un autre point de l'espace affine de $\mathbb{R}^3$ euclidien :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\mathcal{T}) &= \int_{P\in(S)} \overrightarrow{O'P} \wedge \vec{H}(P)dm = \int_{P\in(S)} \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}\right) \wedge \vec{H}(P)dm \\ &= \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{H}(P)dm + \overrightarrow{O'O} \wedge \int_{S\in(S)} \vec{H}(P)dm \\ &= \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathcal{T}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R}. \end{aligned}$$

On retrouve la formule de VARIGNON.

Par définition : Les formules de Eq.IV.2 définissent les éléments de réduction en O du torseur associé au système matériel (S) et au champ $\vec{H}$.

IV.1.4 Centre d'Inertie

M est la masse totale d'un système matériel (S).

* (S) **discret**

Considérons n points matériels (P_j, m_j), $m_j > 0$ admettant un barycentre G défini d'une manière unique par :

$$M\overrightarrow{OG} = \sum_{j=1}^{n} m_j \overrightarrow{OP_j} \tag{IV.3}$$

ou par
$$\sum_{j=1}^{n} m_j \overrightarrow{GP_j} = \overrightarrow{0}. \tag{IV.4}$$

G est le centre d'inertie ou le centre de masse.

* **Cas général**

Considérons l'expression générale $\int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}dm$ du second membre de Eq.IV.3. A étant un point arbitraire donné :
$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}dm = \int_{P\in(S)} \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}\right) dm = \overrightarrow{OA} \int_{P\in(S)} dm + \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP}dm$$
ou en
$$\int_{p\in(S)} \overrightarrow{OP}dm = \overrightarrow{OA}M + \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP}dm \; \forall A,\, \forall P.$$
Il vient donc l'existence d'un point unique G tel que
$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}dm - M\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0} \quad \text{ou} \quad \int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}dm = \overrightarrow{0}.$$

Par définition, le point G définit soit par
$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}dm = M\overrightarrow{OG} \tag{IV.5}$$
soit par
$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}dm = \overrightarrow{0} \tag{IV.6}$$
est le *centre de masse* ou *centre d'inertie* du système matériel (S).

Remarque IV.1.2

1. *Si $\overrightarrow{H}$ est uniforme non nul, alors on peut calculer les éléments de réduction en G du torseur associé à (S) et à $\overrightarrow{H}$.*
   Par définition,
$$\overrightarrow{R} = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{H}dm = \overrightarrow{H} \int_{P\in(S)} dm = M\overrightarrow{H}$$
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\mathcal{T}) = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{H}dm = \overrightarrow{H} \wedge \int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}dm = \overrightarrow{0}.$$
   On a donc $\overrightarrow{R}$ non nul mais le produit scalaire $\overrightarrow{R}.\overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\mathcal{T})$ est nul.
   On en déduit que le torseur $\mathcal{T}$ est un glissuer $\{M\overrightarrow{H}\}$ appliqué en G.
2. *Soit (S) est un solide, le second membre de Eq.IV.5 est calculé à un instant t, les points P étant liés à (S) ; il résulte alors de Eq.IV.5 que le point G est lié à (S) (ou à l'espace rattaché à (S)).*

IV.2 Torseur cinétique - Torseur dynamique - Moment cinétique en O - Energie cinétique d'un solide (S) en rotation autour d'un point fixe O - Opérateur d'inertie - Matrice d'inertie - Théorème de Koenig

(S) est le système matériel en mouvement par rapport $\mathcal{R}$.
$\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$, les champs des vitesses et des accélérations des points de (S) par rapport à $\mathcal{R}$ (ils sont fonctions de t en général).
$O \equiv$ un point quelconque donné (non nécessairement lié à $\mathcal{R}$).

Définition IV.2.1

1. *On appelle* **torseur cinétique**, *le torseur lié à (S) et au champ $\overrightarrow{V}$.*

2. *On appelle* **torseur dynamique**, *le torseur lié à (S) et au champ $\overrightarrow{\Gamma}$.*

Les éléments de réduction au point O de ces deux torseurs sont alors :

— La **résultante cinétique** ou la somme des quantités de mouvement :

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \overrightarrow{V}(P_j) \text{ ou } \int_{(S)} \overrightarrow{V}(P)dm;$$

— Le **moment cinétique en** O :

$$\sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{OP} \wedge m_j \overrightarrow{V}(P_j) \text{ ou } \int_{(S)} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{V}(P)dm;$$

— La **résultante dynamique** ou somme des quantités d'accélération :

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \overrightarrow{\Gamma}(P_j) \text{ ou } \int_{(S)} \overrightarrow{\Gamma}(P)dm;$$

— Le **moment dynamique en** O

$$\sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{OP} \wedge m_j \overrightarrow{\Gamma}(P_j) \text{ ou } \int_{(S)} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P)dm;$$

IV.2.1 Calcul des résultantes cinétique et dynamique

$M \equiv$ masse totale de (S). O lié à la référence $\mathcal{R}$.

* (S) **discret**

Centre d'inertie G tel que $M\overrightarrow{OG} = \sum_{j=1}^{n} m_j \overrightarrow{OP_j}$. On dérive par rapport à t, les masses étant indépendantes du temps t, l'expression

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \overrightarrow{V}(P_j) = M\overrightarrow{V}(G) = \overrightarrow{R_c}.$$

Une seule dérivation par rapport à t donne :

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \overrightarrow{\Gamma}(P_j) = M\overrightarrow{\Gamma}(G) = \overrightarrow{R_d}.$$

* **Cas général**

$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}dm = M\overrightarrow{OG}$$

Les hypothèses générales (mouvement de classe $\mathcal{C}^2$, masses indépendantes de t) autorisent à dériver par rapport à t sous le signe $\int$:

$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{V}(P)dm = M\overrightarrow{V}(G) = \overrightarrow{R_c}$$

$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{\Gamma}(P)dm = M\overrightarrow{\Gamma}(G) = \overrightarrow{R_d}.$$

IV.2.2 Calcul des moments cinétique et dynamique

IV.2.2.1 Relation entre moment cinétique et moment dynamique

Soit (S) un système matériel en mouvement par rapport à la référence $\mathcal{R}$ d'origine O. Q est un point quelconque mobile par rapport à $\mathcal{R}$, de vitesse $\overrightarrow{V}(Q)$ connue.

Par définition, le **moment cinétique en** Q de (S) est :

$$\overrightarrow{\mu_Q}(S) = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{V}(P)dm$$

et le **moment dynamique en** Q de (S) est :

$$\overrightarrow{\delta_Q}(S) = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P)dm.$$

L'observateur de $\mathcal{R}$ calcule $d/dt(\overrightarrow{\mu_Q}(S))$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mu_Q}(S) = \int_{P\in(S)} \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{QP}\right) \wedge \overrightarrow{V}(P)dm + \int_{P\in(S)} \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P)dm = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\delta_Q}(S).$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\alpha} &= \int_{P\in(S)} \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{QP}\right) \wedge \overrightarrow{V}(P)dm = \int_{P\in(S)} \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP}\right)\right] \wedge \overrightarrow{V}(P)dm \\
&= \int_{P\in(S)} \left(\overrightarrow{V}(P) - \overrightarrow{V}(Q)\right) \wedge \overrightarrow{V}(P)dm = -\int_{P\in(S)} \overrightarrow{V}(Q) \wedge \overrightarrow{V}(P)dm \\
&= -\overrightarrow{V}(Q) \wedge \int_{P\in(S)} \overrightarrow{V}(P)dm \\
&= -M\overrightarrow{V}(Q) \wedge \overrightarrow{V}(G).
\end{aligned}$$

Soit finalement

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mu_Q}(S) = \overrightarrow{\delta_Q}(S) + M\overrightarrow{V}(G) \wedge \overrightarrow{V}(Q).$$

Si $Q \equiv O$ lié à $\mathcal{R}$, alors

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mu_O}(S) = \overrightarrow{\delta_O}(S).$$

Si $Q \equiv O$, alors

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mu_G}(S) = \overrightarrow{\delta_G}(S).$$

IV.2.2.2 Moment cinétique d'un solide indéformable (S) mobile autour d'un point fixe O

(S) est mobile par rapport à $\mathcal{R}_0 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ orthonormé direct. $\mathcal{R}_1 = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ est le référentiel direct lié à (S). On donne $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = p\overrightarrow{f_1} + q\overrightarrow{f_2} + r\overrightarrow{f_3}$.

On désigne par x, y et z les coordonnées cartésiennes dans $\mathcal{R}_1$ d'un point P lié à (S), donc à (S), donc à $\mathcal{R}_1$: $\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{f_1} + y\overrightarrow{f_2} + z\overrightarrow{f_3}$.

Par définition :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mu_0}(S) &= \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{V}^{(0)}(P)dm \\
&= \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP} \wedge \left(\overrightarrow{V}^{(0)}(O) + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{OP}\right) dm \\
&= \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP} \wedge \left(\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{OP}\right) dm
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} \wedge \left[\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{OP}\right] &= OP^2 \vec{\omega}_1^{(0)} - \left(\overrightarrow{OP}.\vec{\omega}_1^{(0)}\right) \overrightarrow{OP} \\
&= \left(x^2+y^2+z^2\right) \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} - (px+qy+rz) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p\left(x^2+y^2+z^2\right) \\ q\left(x^2+y^2+z^2\right) \\ r\left(x^2+y^2+z^2\right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} px^2+qyx+rzx \\ pxy+qy^2+rzy \\ pxz+qyz+rz^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(y^2+z^2\right)p - xyq - zxr \\ \left(x^2+z^2\right)q - xyp - yzr \\ \left(x^2+y^2\right)r - xzp - yzq \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(y^2+z^2\right)p - xyq - zxr \\ -xyp + \left(x^2+z^2\right)q - yzr \\ -xzp - yzq + \left(x^2+y^2\right)r \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On pose

$$A = \int_{P\in(S)} \left(y^2+z^2\right) dm;\ B = \int_{P\in(S)} \left(z^2+x^2\right) dm;\ C = \int_{P\in(S)} \left(x^2+y^2\right) dm$$

$$D = \int_{P\in(S)} yzdm;\ E = \int_{P\in(S)} zxdm;\ F = \int_{P\in(S)} xydm.$$

A, B, C, D, E et F sont six constantes réelles.

Les trois composantes de $\vec{\mu_0}(S)$ sur $\mathcal{R}_1$ sont alors :

$$\begin{bmatrix} \vec{\mu_0}(S).\vec{f_1} \\ \vec{\mu_0}(S).\vec{f_2} \\ \vec{\mu_0}(S).\vec{f_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ap & -Fq & -Er \\ -Fp & +Bq & -Dr \\ -Ep & -Dq & +Cr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

La matrice 3×3 ci-dessus est la matrice (par rapport à la base $\mathcal{R}_1$) d'un opérateur linéaire I_0, appelé **opérateur d'inertie en** O du solide S de sorte que l'on peut écrire

$$\vec{\mu_0}(S) = I_0 \vec{\omega}_1^{(0)}$$

La matrice I_0 de cet opérateur linéaire (éléments calculés par rapport aux axes de $\mathcal{R}_1$) dite matrice d'inertie en O de (S) est réelle et symétrique, donc diagonalisable.
Il en résulte l'existence d'un système d'axe liés à (S) (les directions étant définies par les vecteurs propres de l'opérateur I_0) tel que dans ces axes :

$$[I_0(S)]_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}.$$

Sur cette nouvelle base principale, on a :

$$\vec{\mu_0}(S) = \begin{bmatrix} A_1 p_1 \\ B_1 q_1 \\ C_1 r_1 \end{bmatrix}.$$

Par définition,

$$A = \int_{P\in(S)} \left(y^2+z^2\right) dm \quad \text{est le moment d'inertie de } (S) \text{ par rapport à l'axe } \left(O;\overrightarrow{f_1}\right)$$

$$B = \int_{P\in(S)} \left(z^2+x^2\right) dm \quad \text{est le moment d'inertie de } (S) \text{ par rapport à l'axe } \left(O;\overrightarrow{f_2}\right)$$

$$C = \int_{P\in(S)} \left(x^2+y^2\right) dm \quad \text{est le moment d'inertie de } (S) \text{ par rapport à l'axe } \left(O;\overrightarrow{f_3}\right)$$

$$D = \int_{P\in(S)} yzdm \quad \text{est le produit d'inertie de } (S) \text{ par rapport au couple d'axes } \left(O;\overrightarrow{f_2}\right);\left(O;\overrightarrow{f_3}\right)$$

$$E = \int_{P\in(S)} zxdm \quad \text{est le produit d'inertie de } (S) \text{ par rapport au couple d'axes } \left(O;\overrightarrow{f_1}\right);\left(O;\overrightarrow{f_3}\right)$$

$$F = \int_{P\in(S)} xydm \quad \text{est le produit d'inertie de } (S) \text{ par rapport au couple d'axes } \left(O;\overrightarrow{f_1}\right);\left(O;\overrightarrow{f_2}\right)$$

Si les axes liés à (S) sont tels que $[I_0(S)]$ diagonale, alors ces axes sont dits axes principaux d'inertie pour (S) :

$$I_0 \;:\; \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \longmapsto \overrightarrow{\mu_0}(S).$$

IV.2.2.3 Énergie cinétique d'un solide (S) mobile autour d'un point fixe O

Hypothèses et données identiques à celles de la section IV.2.2.2) précédente.

Rappelelons la formule de Lagrange : $\left(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\right)^2+\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}\right)^2=a^2b^2$.

L'énergie cinétique T de (S) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ est définie par

$$T = \frac{1}{2}\int_{P\in(S)} \left[\overrightarrow{V}^{(0)}(P)\right]^2 dm \tag{IV.7}$$

Puisque $O\equiv O_1$ il vient que

$$\overrightarrow{V}^{(0)}(P) = \overrightarrow{V}^{(0)}(O_1) + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\wedge\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\wedge\overrightarrow{O_1P},$$

il vient que

$$2T = \frac{1}{2}\int_{P\in(S)} \left[\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\wedge\overrightarrow{O_1P}\right]^2 dm$$

De plus

$$\begin{aligned}\left[\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\wedge\overrightarrow{O_1P}\right]^2 &= \left[\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\right]^2 OP^2 - \left[\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}.\overrightarrow{O_1P}\right]^2\\ &= \left(p^2+q^2+r^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) - \left(px+qy+rz\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2T &= \int_{P\in(S)} \left[\left(y^2+z^2\right)p^2+\left(z^2+x^2\right)q^2+\left(x^2+y^2\right)r^2-2xypq-2yzqr-2zxrp\right] dm\\ &= p^2\int_{P\in(S)}\left(y^2+z^2\right)dm + q^2\int_{P\in(S)}\left(z^2+x^2\right)dm + r^2\int_{P\in(S)}\left(x^2+y^2\right)dm\\ &- 2pq\int_{P\in(S)} xydm - 2qr\int_{P\in(S)} yzdm - 2rp\int_{P\in(S)} zxdm.\end{aligned}$$

On a finalement :

$$2T = Ap^2+Bq^2+Cr^2-2Fpq-2Dqr-2Erp. \tag{IV.8}$$

C'est une forme quadratique par rapport aux trois composantes p, q et r du vecteur $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$.

En différentiant l'expression Eq.IV.8 respectivement par rapport à p, q et r, on obtient :

$$\frac{\partial T}{\partial p} = Ap - Fq - Er$$
$$\frac{\partial T}{\partial q} = -Fp + Bq - Dr$$
$$\frac{\partial T}{\partial r} = -Ep - Dq + Cr$$

ou l'équation Eq.IV.8 devient :

$$2T = p\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial r}. \tag{IV.9}$$

Les trois dérivées partielles ci-dessus ne sont rien d'autres que les trois composantes sur $\mathcal{R}_1$ du vecteur $\overrightarrow{\mu_0}(S)$. Il résulte alors de Eq.IV.8 que :

$$2T = \overrightarrow{\omega}_1^{(0)}.\overrightarrow{\mu_0}(S) = \overrightarrow{\omega}_1^{(0)}.\left(I_0\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\right).$$

Si les axes liés à (S) sont ceux de $(\mathcal{R}_1)$ introduits à la section IV.2.2.2); alors $2T$ prend la forme réduite dans les axes principaux d'inertie :

$$2T = A_1p_1^2 + B_1q_1^2 + C_1r_1^2.$$

Exemple IV.2.1 *: Solide (S) mobile autour d'un axe. Soit $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = \dot{\alpha}\overrightarrow{f_3}$. On se donne*

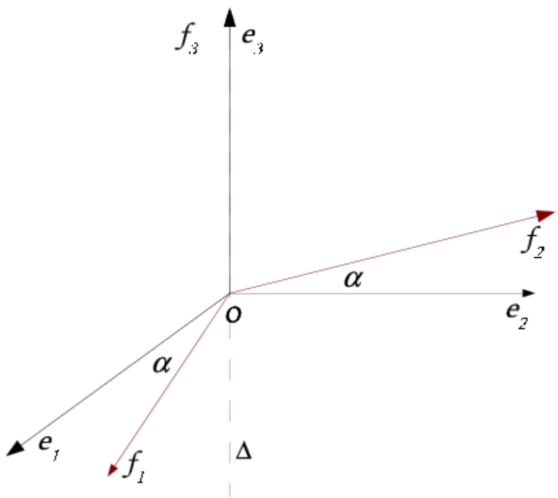
$$[I_0(S)]_{\mathcal{R}_1} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

alors, $\overrightarrow{\mu_0}(S) = I_0(S)\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}$. Ce qui équivaut à :

$$\overrightarrow{\mu_0}(S) = -E\dot{\alpha}\overrightarrow{f_1} - D\dot{\alpha}\overrightarrow{f_2} + C\dot{\alpha}\overrightarrow{f_3}.$$

Dans ce cas, on trouve

$$2T = \overrightarrow{\omega}_1^{(0)}.\overrightarrow{\mu_0}(S) = C\dot{\alpha}^2.$$



IV.2.2.4 Calcul de $\vec{\mu_0}(S)$ et de $2T$ dans le mouvement le plus général d'un solide (S) par rapport au référentiel fixe : théorème de Koënig

Considérons un solide (S) de masse M mobile par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0(O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ orthonormé direct. Le référentiel $\mathcal{R}_1(O_1;\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$ orthonormé direct est lié à (S). On se donne $\vec{\omega}_1^{(0)}$. Soient A un point de (S) de vitesse $\vec{V}^{(0)}(A)$ connue et G le centre d'inertie du solide (S).

*__Théorème de Koenig pour le moment cinétique__

Par définition :

$$\begin{aligned}\vec{\mu_0}(S) &= \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}\wedge\vec{V}^{(0)}(P)dm = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}\wedge\left[\vec{V}^{(0)}(A)+\vec{\omega}_1^{(0)}\wedge\overrightarrow{AP}\right]dm\\ &= \left(\int_{P\in(S)}\overrightarrow{OP}\right)\wedge\vec{V}^{(0)}(A)+(\alpha) = M\overrightarrow{OG}\wedge\vec{V}^{(0)}(A)+(\alpha).\end{aligned}$$

Compte tenu de $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$, on a :

$$\begin{aligned}(\alpha) &= \int_{P\in(S)}\overrightarrow{OA}\wedge\left[\vec{\omega}_1^{(0)}\wedge\overrightarrow{AP}\right]dm+\int_{P\in(S)}\overrightarrow{AP}\wedge\left[\vec{\omega}_1^{(0)}\wedge\overrightarrow{AP}\right]dm\\ &= \int_{P\in(S)}\overrightarrow{OA}\wedge\left[\vec{\omega}_1^{(0)}\wedge\overrightarrow{AP}\right]dm+(\beta)\\ &= \overrightarrow{OA}\wedge\left[\vec{\omega}_1^{(0)}\wedge\int_{P\in(S)}\overrightarrow{AP}\right]dm+(\beta)\\ &= \overrightarrow{OA}\wedge\left[\vec{\omega}_1^{(0)}\wedge M\overrightarrow{AG}\right]+(\beta)\end{aligned}$$

On introduit le référentiel $\mathcal{R}_2(A;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ en mouvement de translation par rapport à $\mathcal{R}_0$, i.e $\vec{\omega}_1^{(2)}=\vec{\omega}_1^{(0)}$. Alors $\vec{V}^{(2)}(P)=\vec{V}^{(2)}(A)+\vec{\omega}_1^{(2)}\wedge\overrightarrow{AP}=\vec{\omega}_1^{(0)}\wedge\overrightarrow{AP}$, et

$$(\beta)=\int_{P\in(S)}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}^{(2)}(P)dm=\vec{\mu_A}(S)=I_A(S)\vec{\omega}_1^{(2)}=I_A\vec{\omega}_1^{(0)},$$

d'où

$$\vec{\mu_0}(S)=M\overrightarrow{OG}\wedge\vec{V}^{(0)}(A)+\overrightarrow{OA}\wedge\left[\vec{\omega}_1^{(0)}\wedge M\overrightarrow{AG}\right]+I_A\vec{\omega}_1^{(0)}.$$

Cette formule, dans le cas où $A\equiv G$, traduit le théorème de Koenig pour le moment cinétique à savoir :

$$\vec{\mu_0}(S)=M\overrightarrow{OG}\wedge\vec{V}^{(0)}(G)+I_G\vec{\omega}_1^{(0)}.$$

Théorème IV.2.1 *Le moment cinétique du solide (S) en O est la somme du moment en O de la quantité de mouvement du point G de masse M et du moment cinétique dans le mouvement autour du point G.*

*__Théorème de Koenig pour l'energie cinétique__

Par définition :

$$\begin{aligned}2T &= \int_{P\in(S)}\left[\vec{V}^{(0)}(P)\right]^2dm=\int_{P\in(S)}\left[\vec{V}^{(0)}(A)+\vec{\omega}_1^{(0)}\wedge\overrightarrow{AP}\right]^2dm\\ &= \int_{P\in(S)}\left[\vec{V}^{(0)}(A)\right]^2dm+2\int_{P\in(S)}\left(\vec{V}^{(0)}(A);\vec{\omega}_1^{(0)};\overrightarrow{AP}\right)dm+\int_{P\in(S)}\left[\vec{\omega}_1^{(0)}\wedge\overrightarrow{AP}\right]^2dm\end{aligned}$$

Et puisque

$$\int_{P\in(S)}\left[\overrightarrow{V}^{(0)}(A)\right]^2 dm = \left[\overrightarrow{V}^{(0)}(A)\right]^2\int_{P\in(S)} dm = M\left[\overrightarrow{V}^{(0)}(A)\right]^2$$

$$\begin{aligned}
2\int_{P\in(S)}\left(\overrightarrow{V}^{(0)}(A);\overrightarrow{\omega}_1^{(0)};\overrightarrow{AP}\right)dm &= 2\left(\overrightarrow{V}^{(0)}(A);\overrightarrow{\omega}_1^{(0)};\int_{P\in(S)}\overrightarrow{AP}dm\right)\\
&= 2\left(\overrightarrow{V}^{(0)}(A);\overrightarrow{\omega}_1^{(0)};M\overrightarrow{AG}\right)\\
\int_{P\in(S)}\left[\overrightarrow{V}^{(0)}(P)\right]^2 dm &= \int_{P\in(S)}\left[\overrightarrow{V}^{(2)}(P)\right]^2 dm\\
&= \overrightarrow{\mu_A(S)}.\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = \left[I_A(S)\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\right].\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}
\end{aligned}$$

alors il vient que

$$2T = M\left[\overrightarrow{V}^{(0)}(A)\right]^2 + 2\left(\overrightarrow{V}^{(0)}(A);\overrightarrow{\omega}_1^{(0)};M\overrightarrow{AG}\right) + \left[I_A(S)\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\right].\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}.$$

Si $G\equiv A$, on obtient alors la formule traduisant le théorème de Koenig pour l'énergie cinétique :

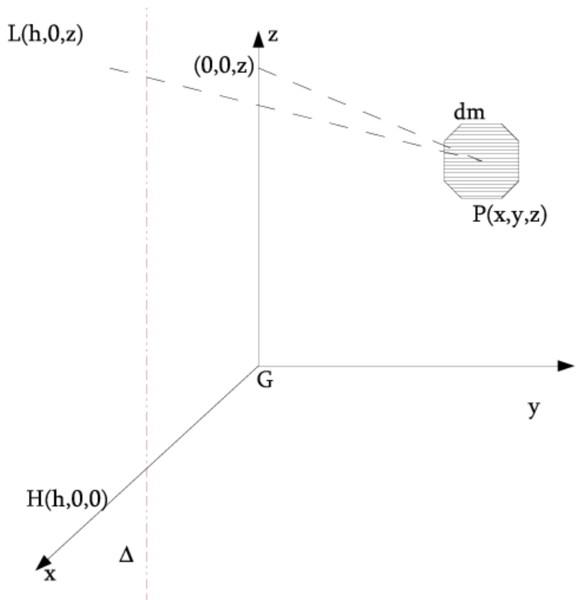
$$2T = M\left[\overrightarrow{V}^{(0)}(G)\right]^2 + \left[I_G(S)\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\right].\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}.$$

Théorème IV.2.2 *L'énergie cinétique du solide (S) est la somme de l'énergie du point G de masse M et de l'énergie cinétique dans le mouvement autour de G.*

IV.3 Remarques pratiques pour calculer la matrice d'inertie d'un solide

Dans tout ce qui suit, G désigne le centre d'inertie de (S) et M la masse totale de (S).

IV.3.1 Théorème de HUYGHENS



Trièdre $(G, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ orthonormé direct lié à (S).
Par définition, le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe Δ est

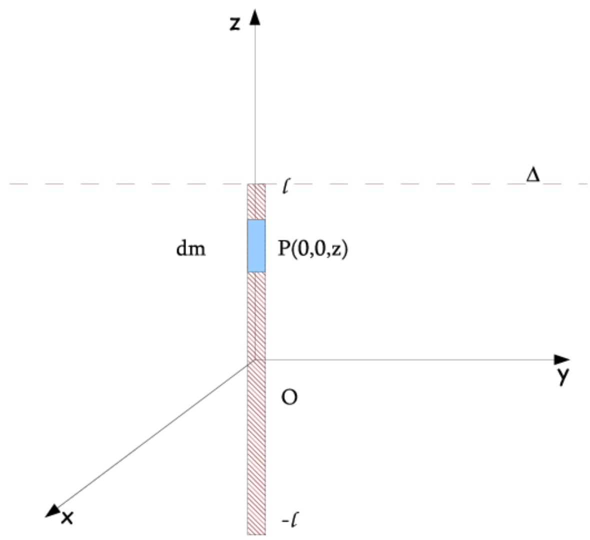
$$J_\Delta = \int_{P\in(S)} \delta^2 dm.$$

$\delta^2 = \text{distance}^2(P,\Delta) = (PL)^2$ avec $\overrightarrow{PL} = (x-h)\overrightarrow{x} + y\overrightarrow{y}$, ainsi $\delta^2 = (x-h)^2 + y^2$.

$$\begin{aligned} J_\Delta &= \int_{P\in(S)} \left(x^2 - 2hx + h^2 + y^2\right) dm \\ &= \int_{P\in(S)} \left(x^2 + y^2\right) dm - 2h \int_{P\in(S)} xdm + h^2 \int_{P\in(S)} dm \end{aligned}$$

or par définition de G, $\int_{P\in(S)} xdm$ est nul ; donc

$$J_\Delta = J_{\Delta_G} + Mh^2.$$



Le solide est une " barre homogène"
En cinétique ou en géométrie des masses, une " barre " est un solide schématisé par un segment de droite pesant. Soit une barre homogène, de longueur $2l$, de densité linéique de masse $\lambda = M/2l$ qui est constante.

Ici, le centre d'inertie G de la barre de masse $M = 2\lambda l$ est l'origine du référentiel $\mathcal{R} = (G, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$. En remarquant que $\overrightarrow{GP} = z\overrightarrow{z}$, il vient que $D = E = F = \int_{P\in(S)} yzdm = \int_{P\in(S)} xydm = \int_{P\in(S)} xz = 0$.

$$\begin{aligned} J_{Gx} &= \int_{P\in(S)} \left(y^2 + z^2\right) dm = \int_{P\in(S)} z^2 dm \\ J_{Gy} &= \int_{P\in(S)} \left(z^2 + x^2\right) dm = \int_{P\in(S)} z^2 dm \\ J_{Gz} &= \int_{P\in(S)} \left(x^2 + y^2\right) dm = 0. \end{aligned}$$

$J_{Gx} = A = \int_{P\in(S)} z^2 dm = \lambda \int_{-l}^{l} z^2 dm = \frac{Ml^2}{3}$.

Et la matrice d'inertie de la barre est

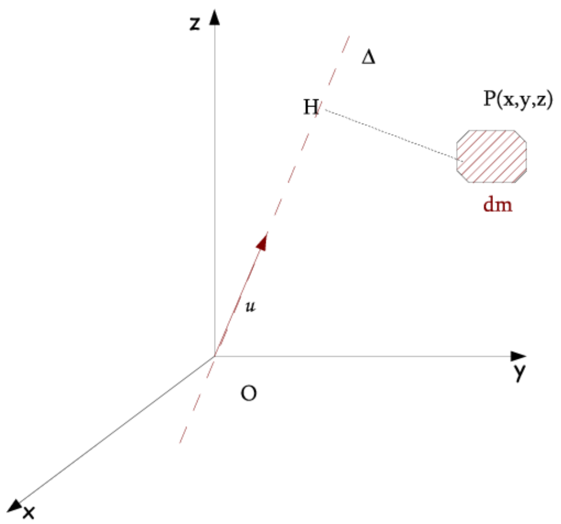
$$[I_0(S)] = \frac{Ml^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mais
$$[I_\Delta] = I_{Gy//\Delta} + Ml^2 = 4Ml^2/3.$$
Remarquons enfin que si

— l'axe de la barre est porté par l'axe (Gy), alors
$$[I_0] = \frac{Ml^2}{3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$
— l'axe de la barre est porté par l'axe (Gx), alors
$$[I_0] = \frac{Ml^2}{3}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

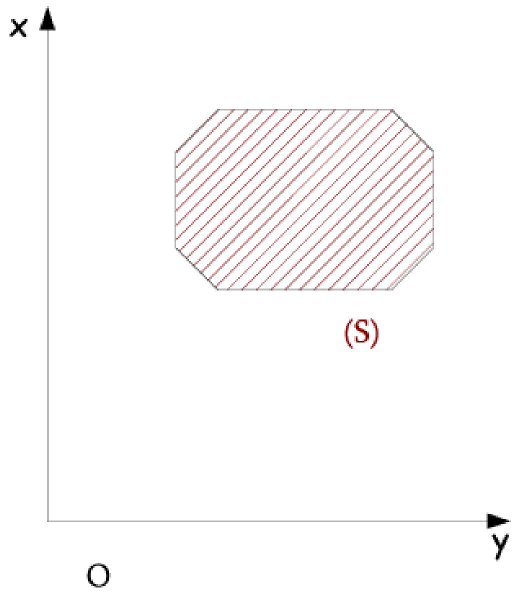
IV.3.2 Moment d'inertie d'un solide par rapport à Δ passant par O

On se propose de calculer $J_\Delta(S)$ connaissant $[I_0]$ dans $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, orthonormé direct. $\vec{u}$ est un vecteur unitaire directeur de Δ, de composantes (α, β, γ) suivant $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Δ est fixe dans $\mathcal{R}$.



On a $I_\Delta = \int_{P\in(S)} (PH)^2\, dm$, or $PH^2 = OP^2 - OH^2$ et $\overline{OH} = \overrightarrow{OP}.\vec{u}$. Il vient que
$$PH^2 = (x^2+y^2+z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = (x^2+y^2+z^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$$
ou encore
$$PH^2 = (y^2+z^2)\alpha^2 + (z^2+x^2)\beta^2 + (x^2+y^2)\gamma^2 - 2xy\alpha\beta - 2yz\beta\gamma - 2zx\gamma\alpha$$
Le moment d'inertie du solide (S) est alors :
$$\begin{aligned} J_\Delta(S) &= \alpha^2\int_{P\in(S)}(y^2+z^2)dm + \beta^2\int_{P\in(S)}(z^2+x^2)dm + \gamma^2\int_{P\in(S)}(x^2+y^2)dm \\ &- 2\alpha\beta\int_{P\in(S)} xydm - 2\beta\gamma\int_{P\in(S)} yzdm - 2\gamma\alpha\int_{P\in(S)} zxdm \\ &= \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C - 2\alpha\beta F - 2\beta\gamma D - \alpha\gamma E \\ &= I_0\vec{u}.\vec{u}.\end{aligned}$$

IV.3.3 Matrice d'inertie d'une plaque



Définition IV.3.1 *Une plaque homogène est un solide schématisé par un domaine plan à densité de masse surfacique σ constante.*

Le solide (S) est contenu dans le plan (Ox, Oy). Il résulte donc que pour tout point $P(x, y, z)$ du solide (S), la cote z est nulle et ensuite

$$\int_{(S)} yzdm = \int_{(S)} xzdm = 0 \quad \Rightarrow \quad D = E = 0.$$

$$A = \int_{(S)} (y^2 + z^2)dm = \int_{(S)} y^2 dm$$
$$B = \int_{(S)} (x^2 + z^2)dm = \int_{(S)} x^2 dm$$
$$C = \int_{(S)} (y^2 + x^2)dm = \int_{(S)} x^2 dm + \int_{(S)} y^2 dm = A + B$$

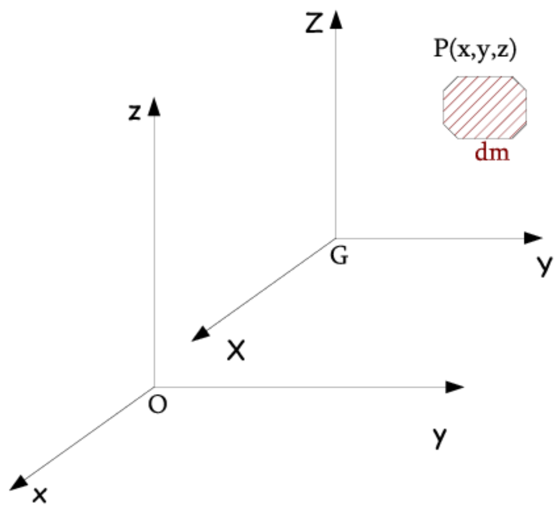
ou encore

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{bmatrix}.$$

IV.3.4 Produit d'inertie par rapport à deux systèmes d'axes parallèles, l'un des deux systèmes ayant G comme origine

Soit P un point du solide (S) ; on a $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}$ i.e :

$$\begin{cases} x = x_G + X \\ y = y_G + Y \\ z = z_G + Z. \end{cases}$$



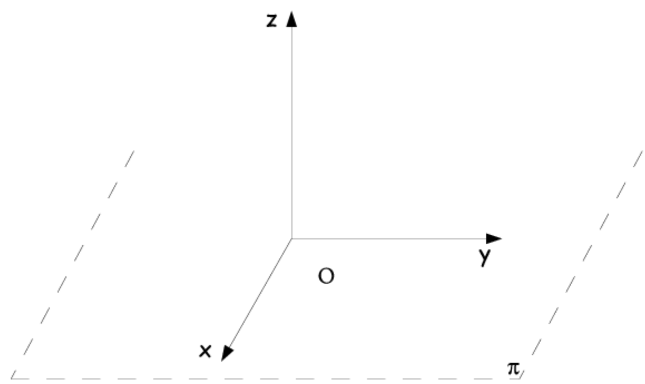
Le produit d'inertie $\mathcal{P}_{(O,x)(O,y)}$ par rapport aux axes (O,x) et (O,y) est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{(O,x)(O,y)} &= \int_{(S)} xydm = \int_{(S)} (x_G + X)(y_G + Y)\,dm \\
&= \int_{(S)} x_G y_G dm + x_G \int_{(S)} Y dm + y_G \int_{(S)} X dm + \int_{(S)} XY dm \\
&= M x_G y_G + 0 + 0 + \mathcal{P}_{(G,X)(G,Y)}
\end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{P}_{(O,x)(O,y)} = \mathcal{P}_{(G,X)(G,Y)} + M x_G y_G$$

IV.3.5 Cas où (S) possède un plan de symétrie matérielle



Définition IV.3.2 *"Le plan $\Pi = (ox, oy)$ est un plan de symétrie matérielle pour (S) est équivalent" à " pour tout point $P_1(x,y,z)$ de (S), de masse dm, il existe un point $P_2(x,y,-z)$ de (S) et de même masse dm.*

Dans ce cas, le plan $z = 0$ sépare le solide en deux demi-solides S_1 et S_2 i.e $(S) = (S_1)\bigcup(S_2)$ tel que :

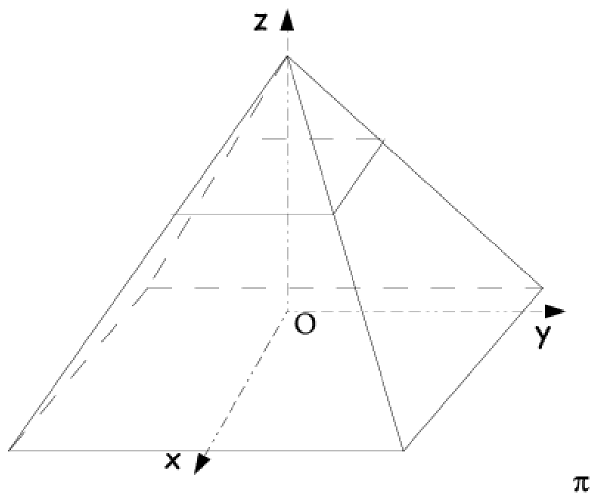
$$(S_1) = \text{demi-plan contenu dans le demi-espace} \quad z \geq 0$$
$$(S_2) = \text{demi-plan contenu dans le demi-espace} \quad z \leq 0.$$

Il vient que

$$D = \int_{(S)} yzdm = \int_{(S_1)} zydm + \int_{(S_2)} yzdm = 0.$$

En effet, à tout produit $yzdm$ on associe $y(-z)dm$ par symétrie géométrique et matérielle par rapport à Π.
De même $E = \int_{(S)} xzdm = 0$.
Conséquence immédiate : si deux des trois plans de coordonnées du trièdre $(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ sont des plans de symétrie matérielle pour (S), alors la matrice d'inertie $[I_0(S)]$ est diagonale.
(Π) est dit plan principal d'inertie.

IV.3.6 Matrice d'inertie d'un solide (S) homogène possédant un axe de révolution oz



Tout plan contenant oz est plan de symétrie matérielle, donc les plan (zox) et (zoy) sont des plans de symétrie matérielle, par suite la matrice d'inertie $[I_0(S)]$ est diagonale. Il est aussi évident que $A = B$;

$$A = \int_{(S)} (y^2 + z^2)dm = \int_{(S)} (x^2 + z^2)dm = B.$$

$$A + B = 2A = 2B = \int_{(S)} (y^2 + x^2 + z^2)dm = \int_{(S)} (y^2 + x^2)dm + 2\int_{(S)} z^2dm = C + 2\int_{(S)} z^2dm.$$

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}; \quad A = \frac{C}{2} + \int_{(S)} z^2dm.$$

et $\int_{(S)} z^2dm$ est le moment d'inertie de (S) par rapport au plan (xoy) lui-même perpendiculaire à l'axe de révolution oz.

IV.3.7 Quadrique d'inertie

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ euclidien est rapporté à un trièdre orthonormé direct $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Soit la forme quadratique :

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy$$

à coefficients non tous nuls.

Définition IV.3.3 *On appelle surface du second degré ou quadrique, l'ensemble des points $P(x, y, z)$ tels que :*

$$F(x, y, z) = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

On sait que l'on peut écrire :

$$F(x, y, z) = I\vec{L}.\vec{L}$$

où $\vec{L} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ et I est un opérateur linéaire dont la matrice $[I]$ est symétrique (les éléments matriciels étant les coefficients de la forme quadratique F).

Quadrique d'inertie en O de (S).

Si $I_0(S)$ est un opérateur d'inertie en O de (S), alors on appelle quadrique d'inertie en O de (S), l'ensemble des points $P(x, y, z)$ tels que :

$$I_0(S)\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OP} = 1$$

ce qui implique que

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1.$$

On sait qu'il existe $(O; \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ tel que

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}$$

et l'équation réduite de la quadrique d'inertie devient :

$$A_1X^2 + B_1Y^2 + C_1Z^2 = 1; \quad A_1, B_1, C_1 \in \mathbb{R}_+^*$$

c'est l'équation cartésienne de l'ellipsoïde d'inertie en O de (S).
L'intersection de l'ellipsoïde et du plan XOY ou le plan $Z = 0$ est la courbe d'équation

$$A_1X^2 + B_1Y^2 = 1, \quad i.e \quad \frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{A_1}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{B_1}}\right)^2} = 1$$

qui est l'équation caractéristique d'une ellipse.

IV.4 Exercices

Exercice IV.4.1 *Considérons une toupie (S) d'axe de symétrie matérielle $(0, \vec{z_1})$ dont la pointe O reste immobile sur le plan (Π).*

Soit $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au plan (Π), l'axe $(0, \vec{z})$ étant dirigé suivant la verticale ascendante.

Soit $\mathcal{R}_1(O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ un repère lié à (S). La matrice d'inertie de (S) au point O est :

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{z_1})}$$

La position de la base $\mathcal{R}_1$ par rapport à la base de $\mathcal{R}$ est définie par les trois angles d'Euler ψ, θ, ϕ. (Première base intermédiaire : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z})$, deuxième base intermédiaire : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z_1})$.

1. *Déterminer le moment cinétique au point O de (S) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$.*
2. *Déterminer le moment dynamique au point O de (S) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$:*
   (a) *en projection sur $\overrightarrow{z}$, soit $\overrightarrow{z}.\overrightarrow{\delta}_O(S/\mathcal{R})$;*
   (b) *en projection sur $\overrightarrow{z_1}$, soit $\overrightarrow{z_1}.\overrightarrow{\delta}_O(S/\mathcal{R})$;*
   (c) *en projection sur $\overrightarrow{u}$, soit $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\delta}_O(S/\mathcal{R})$;*

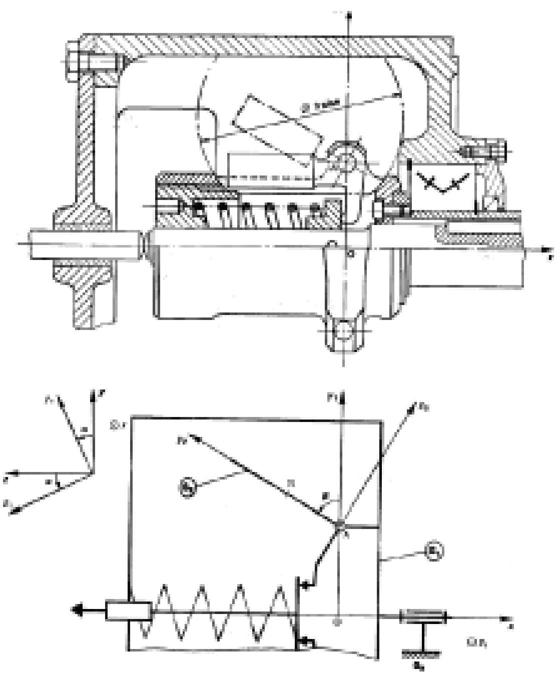
Exercice IV.4.2 *Le régulateur de la vitesse de rotation d'une machine thermique est représenté figure ci-dessous. Soit $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ un repère lié au corps (S_0) du régulateur.*

La pièce (S_1) supportant les masselottes (S_2) et (S_2') (symétrique de (S_2)) a une liaison pivot d'axe $(0, \overrightarrow{x})$ avec (S_0). Soit $\mathcal{R}_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ un repère lié à (S_1). Posons : $\alpha = (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y_1})$.

La masselotte (S_2) de masse m, de centre d'inertie G, a une liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{z_1})$ avec (S_1), telle que : $\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{y_1}$ $(a > 0)$.

Soit $\mathcal{R}_2(A, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ un repère lié à (S_2), tel que $\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{y_2}$ $(b > 0)$.

Posons : $\beta = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2})$. On admet que β est constant pendant la phase de mouvement étudié.



1. *Calcul approché : on suppose la masse de (S_2) concentrée en son centre d'inertie.*
   Déterminer la projection sur $\overrightarrow{z_1}$ du moment dynamique, au point A, de (S_2) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{z_1}.\overrightarrow{\delta}_A(S_2/\mathcal{R})$.

2. *La matrice d'inertie de* (S_2) *au point* A *dans la base de* $\mathcal{R}_2$ *est la suivante :*

$$[I_A(S_2)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_1})}$$

((S_2) *a pour plan de symétrie matérielle le plan* $(A, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2})$*)*

(a) *Déterminer le moment cinétique au point* A *de* (S_2) *dans son mouvement par rapport à* $\mathcal{R}$ *:* $\overrightarrow{\mu}_A(S_2/\mathcal{R})$.

(b) *Déterminer la projection sur* $\overrightarrow{z_1}$ *du moment dynamique au point* A *de* (S_2) *dans son mouvement par rapport à* $\mathcal{R}$ *:* $\overrightarrow{z_1}.\overrightarrow{\delta}_A(S_2/\mathcal{R})$.

Chapitre V

Dynamique du solide

V.1 Principe fondamental - Théorèmes généraux

V.1.1 Principes généraux

V.1.1.1 Forces

On convient de représenter les "forces" par des vecteurs appartenant à l'e.v. réel euclidien à 3 dimensions $\mathbb{R}^3$.

Principe d'additivité

Si une particule p schématisée par un point matériel P subit de la part de deux systèmes matériels disjoints S_1 et S_2 deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, alors il subit de la part de $S_1 \cup S_2$ la force $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$.
Par définition, on dira que la particule p subit la force dite totale $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$.

V.1.1.2 Influence d'un changement de temps sur l'accélération

Tous les observateurs de l'univers peuvent utiliser le même temps.

Deux observateurs de deux espaces $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$, utilisent deux temps T et T_1, donc deux variables t et t_1, perçoivent *simultanément* un même évènement (par transmission "instantanée" de l'information entre l'évènement et l'observateur).

- ☞ il y a simultanéité d'une date t de T de l'observateur de $\mathcal{R}_0$ et d'une date t_1 de T_1 de l'observateur de $\mathcal{R}_1$.
- ☞ il existe une correspondance f entre T et T_1 telle que $t = f(t_1)$. f *est une fonction de changement de temps*. Sur f, on fait des hypothèses conformes à la notion intuitive du temps s'écoulant continûment du passé vers l'avenir. f est supposée continue, bidifférentiable, strictement croissante. Alors f^{-1} est aussi *une fonction de changement de temps* de même nature que g.
- ☞ Les temps des divers observateurs de l'univers se déduisent les uns des autres par des fonctions de changement de temps.
- ☞ Tous les observateurs de l'univers peuvent se ramener à l'usage du même temps T, donc de la même variable t, donc de la même horloge.

L'accélération n'est pas invariante par changement de temps

Deux observateurs placés à l'origine d'un même trièdre $\mathcal{R}_0$, utilisent deux temps différents T et T_1 observent le mouvement d'un même point P par rapport à $\mathcal{R}_0$.

$$t \longmapsto \overrightarrow{OP}(t)$$
$$t_1 \longmapsto \overrightarrow{OP_1}(t),$$

avec

$$P(t) \equiv P_1(t) \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OP}(t) & = \overrightarrow{OP_1}(t) \\ t & = f(t_1). \end{cases}$$

calcul du vecteur vitesse

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_1}\left(\overrightarrow{OP_1}(t)\right) &= \frac{d}{dt_1}\left(\overrightarrow{OP}(t)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OP_1}(t)\right)\frac{dt}{dt_1} \end{aligned}$$

donc,

$$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V}\frac{d}{dt_1}f(t).$$

calcul de l'accélération

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt_1^2}\left(\overrightarrow{OP_1}(t)\right) &= \frac{d^2}{dt_1^2}\left(\overrightarrow{OP}(t)\right) \\ &= \frac{d^2}{dt^2}\left(\overrightarrow{OP_1}(t)\right)\left(\frac{dt}{dt_1}\right)^2 + \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OP}(t)\right)\frac{d^2t}{dt_1^2} \end{aligned}$$

il vient ensuite que

$$\overrightarrow{\Gamma_1} = \overrightarrow{\Gamma}\left(\frac{df(t_1)}{dt_1}\right)^2 + \frac{d^2f(t_1)}{dt_1^2}.\overrightarrow{V}.$$

$\overrightarrow{\Gamma}$ n'est pas invariante ni en grandeur, ni en direction par changement de temps.

V.1.1.3 Principe de l'existence d'un temps Galiléen

Le vecteur $m\overrightarrow{\Gamma}$ est de $\mathbb{R}^3$, e.v. réel orienté euclidien. Mais cet e.v. dépend du temps de l'observateur d'après V.1.1.2.

L'expérience courante montre que force et quantité d'accélération $m\overrightarrow{\Gamma}$ sont liées par une relation d'égalité. On est donc amené à énoncer le principe suivant justifié par ses conséquences.

Axiome : il existe un temps T, appelé temps galiléen ou temps absolu tel que l'e.v. des forces soit identique à l'e.v. des quantités d'accélérations

ou bien

Axiome : P étant un point matériel de masse m soumis à une force totale $\overrightarrow{F}$, il existe un repère d'espace et un repère de temps ; l'ensemble étant un repère galiléen tel que, P possédant une accélération $\overrightarrow{\Gamma}$ par rapport à ce repère, l'on ait : $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\Gamma}$.

Il résulte immédiatement du paragraphe V.1.1.2 que ce temps est unique.

Si un deuxième observateur utilise un temps t_1 par rapport à $t = f(t)$ alors $\overrightarrow{\Gamma_1} \neq \overrightarrow{\Gamma} \Longrightarrow \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\Gamma} \neq m\overrightarrow{\Gamma_1}$.

Dans toute la suite, on utilisera ce temps galiléen, donc la fonction f sera l'identité et $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\Gamma} = m\overrightarrow{\Gamma_1}$.

Remarque V.1.1 *Il n'existe pas de trièdre parfait (i.e tel que l'on ait rigoureusement $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\Gamma}$). La nature en fournit tout de même d'excellentes approximations.*

Définition V.1.1 *Dans un repère en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au repère absolu, la relation $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\Gamma}$ s'applique de la même façon que dans un repère absolu ; un tel repère est dit galiléen.*

Pour la mécanique newtonienne habituelle, en accord avec l'Union Astronomique Internationale UAI, on utilise habituellement un système de référence céleste, repère absolu $\mathcal{R}_0$, construit à partir d'un ensemble de radio-sources extragalactiques observés en interférométrie à très longue base, associé à la mesure d'un temps atomique international où la seconde ($1s$) est la durée de 9.192.631.770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium Cs133.

Les repères galiléens usuels (en translation par rapport au repère absolu $\mathcal{R}_0$ précédent) sont les suivants :

- ☞ Repère de Copernic : d'origine le centre d'inertie du système solaire, dont les trois axes sont dirigés vers trois étoiles fixes.
- ☞ Repère héliocentrique ou de Képler : d'origine le centre d'inertie du soleil et d'axes parallèles aux axes précédents et à ceux de $\mathcal{R}_0$.
- ☞ Repère géocentrique ou de Ptolémée : d'origine le centre d'inertie de la terre et d'axes parralèles aux précédents. C'est le repère de Galilée. Il est galiléen par approximation.

Dans la mécanique dite de "Laboratoire", suffisante pour de nombreuses applications, un repère "terrestre" (lié à la terre, système de référence réalisé par la donnée des positions de stations d'observations réparties sur la croute terrestre) pourra être considérée comme galiléen ; les forces d'inertie étant prises en compte dans la définition du vecteur pesanteur $\overrightarrow{g}$.

V.1.2 Forces correctives d'espace - classe d'espace dynamiquement équivalents

V.1.2.1 Forces correctives d'entrainement et de Coriolis

P est un point matériel de masse m mobile par rapport à deux trièdres $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$.
$\mathcal{R}_0$ est galiléen, $\mathcal{R}_1$ en mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}_0$.
La force totale $\overrightarrow{F}$ appliquée à P produit l'accélération $\overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(P)$. On sait que :

$$\overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(P) = \overrightarrow{\Gamma}^{(1)}(P) + \overrightarrow{\Gamma}_e(P) + \overrightarrow{\Gamma}_c(P).$$

Du paragraphe V.1.1.3, on peut écrire :

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(P) = m\overrightarrow{\Gamma}^{(1)}(P) + m\overrightarrow{\Gamma}_e(P) + m\overrightarrow{\Gamma}_c(P)$$

c'est-à-dire

$$m\overrightarrow{\Gamma}^{(1)}(P) = \overrightarrow{F} - m\overrightarrow{\Gamma}_e(P) - m\overrightarrow{\Gamma}_c(P).$$

Pour l'observateur de $\mathcal{R}_1$, le mouvement de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ se traduit par l'apparition de deux froces appliquées à P (qui ne sont pas des forces directement appliquées à P par un système matériel quelconque) :

$$\overrightarrow{f_e} = -m\overrightarrow{\Gamma}_e(P)$$

est la force corrective d'entrainement ou force fictive d'entrainement ou force d'inertie d'entrainement.

$$\overrightarrow{f_c} = -m\overrightarrow{\Gamma}_c(P)$$

est la force corrective de Coriolis ou force fictive de Coriolis ou force d'inertie de Coriolis.

On écrit :

$$\begin{cases} m\overrightarrow{\Gamma}^{(1)}(P) = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{f_e} + \overrightarrow{f_c} & \text{dans} \quad \mathcal{R}_1 \\ m\overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(P) = \overrightarrow{F} & \text{dans} \quad \mathcal{R}_1 \end{cases}$$

V.1.2.2 Espaces dynamiquement équivalents

On définit sur l'ensemble des espaces d'observateurs une relation binaire $\mathcal{R}$ tel que :
"$\mathcal{R}_0\ \mathcal{R}\ \mathcal{R}_1$" $\Longleftrightarrow$ "$\mathcal{R}_1$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$".
$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dynamique.

Condition nnécessaire et suffisante pour que les deux vecteurs d'accélération d'un même point P par rapport à $\mathcal{R}_0$ et par rapport à $\mathcal{R}_1$ soient égaux :

On sait que

$$\overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(P) = \overrightarrow{\Gamma}^{(1)}(P) + \overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(O_1) + \left(\frac{d^{(0)}}{dt}\overrightarrow{\omega}_1^{(0)}\right) \wedge \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \left(\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{O_1P}\right) + 2\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{V}^{(1)}(P).$$

Si $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ sont dynamiquement équivalents, alors $\mathcal{R}_1$ est en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$, donc à tout instant t, $\overrightarrow{\omega}_1^{(0)} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(O_1) = \overrightarrow{0}$.
Il vient que quel que soit le mouvement de la particule P, $\overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(P) = \overrightarrow{\Gamma}^{(1)}(P)$.

On admet que la réciproque est vraie, i.e. $\overrightarrow{\Gamma}^{(0)}(P) = \overrightarrow{\Gamma}^{(1)}(P)$ pour tout mouvement de P est équivalent au fait que $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ appartiennent à la même classe d'équivalence dynamique modulo $\mathcal{R}$.

Alors *si $\mathcal{R}_0$ est galiléen, tout trièdre en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$ est aussi galiléen.*

V.1.3 Principe fondamental de la dynamique pour un système matériel (S) quelconque : classe de Galilée

V.1.3.1 Énoncé du principe fondamental

(S) est l'ensemble des points matériels P_i.

Les forces exercées sur les P_i par tout système matériel disjoint de (S) sont dites forces extérieures appliquées à (S).

Les forces s'exerçant entre les points P_i et P_j de (S) sont dites forces extérieures à (S).
Le principe fondamental énonce qu*il existe une classe d'espaces dynamiquement équivalents telle que pour tout système matériel (S), le torseur dynamique de (S) soit égal au torseur des forces extérieures appliquées à (S) :*

$$\mathcal{T}_{\text{dyna}}(S) = \mathcal{T}_{\text{ext}}.$$

Par définition : cette classe d'espaces pour lesquels $\mathcal{T}_{\text{dyna}}(S) = \mathcal{T}_{\text{ext}}$ est appelée *classe de Galilée.*

V.1.3.2 Cas d'un espace non galiléen

On a parfois à appliquer le principe fondamental dans un espace non galiléen. On généralise ce qu'on a fait au paragraphe V.1.2.1.

$$\mathcal{T}_{\text{dyn}}(S)/\mathcal{R} = \mathcal{T}_{\text{ext}} + \mathcal{T}_{\text{ent}} + \mathcal{T}_{\text{cor}}.$$

Le torseur dynamique de (S) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ est égal au torseur des forces extérieures appliquées à (S) + le torseur des forces correctives d'entrainement + le torseur des forces correctives de Coriolis.

V.1.4 Théorèmes généraux

Deux torseurs sont égaux s'ils ont mêmes éléments de réduction en un seul point de l'espace.

Les théorèmes généraux de la dynamique traduisent l'égalité des résultantes générales et des moments résultants en un point de l'espace pour les deux torseurs : $\mathcal{T}_{\text{dyn}}$ et $\mathcal{T}_{\text{ext}}$.

V.1.4.1 Théorème de la résultante dynamique ou théorème du mouvement du centre d'inertie

Ce théorème traduit l'égalité des résultantes générales des deux torseurs. Soit $\overrightarrow{E}$ la résultante générale du torseur $\mathcal{T}_{\text{ext}}$. Le système (S) de masse M et de centre d'inertie G est mobile par rapport à $\mathcal{R}_0$ qui est galiléen ;

Bibliographie

[1] Y. Talpaert, Cours et applications de mécanique générale et analytique, Ellipses 1986.

[2] K. MEHDI(2009), Cours de Mécanique Générale, Institut Préparatoire aux Etudes dIngénieurs El Manar.