Chapitre 2

Étude de mouvements particuliers

Sommaire

2.1 Mouvements rectilignes

Un mouvement est dit rectiligne si sa trajectoire et une droite :

$$\forall t, M(t) \in (D)$$

Le système de coordonnées le mieux adapté est le système cartésien.
Il est ici réduit à un seul axe (Ox) confondu avec la trajectoire (D).
Le vecteur position est alors : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x$.

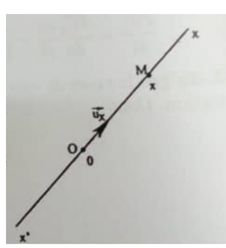

FIGURE 2.1 – Mouvement rectiligne

- Le mouvement rectiligne est *uniforme* si la vitesse est constante :

$$v = \frac{dx}{dt} = Constante = v_0$$
$$x = v_0 t + x_0$$
$$a = \frac{dv}{dt} = 0$$

• Le mouvement rectiligne est *uniformément* varié si l'accélération est constante :

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = Constante = a_0$$
$$v = a_0 t + v_0$$
$$x = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

- Le mouvement est dit *accéléré* si la norme de la vitesse croît. Les vecteurs accélération et vitesse sont de même sens : $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{v} > 0$.

- Le mouvement est dit *retardé* ou *décéléré* si la norme de la vitesse décroît. Les vecteurs accélération et vitesse sont de sens opposé : $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{v} < 0$.

• Le mouvement rectiligne est dit *sinusoïdal* si l'équation du mouvement est de la forme

$$x = Acos(wt - \varphi)$$

x est appelé élongation, A est l'amplitude, $wt - \varphi$ est la phase à l'instant t et φ est la phase initiale. On a :

$$\frac{dx}{dt} = Awsin(wt - \varphi)$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Aw^2cos(wt - \varphi) = -w^2x$$

La relation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2x \tag{2.1}$$

est caractéristique d'un mouvement oscillatoire.

Réciproquement, si le mouvement d'un mobile obéit à l'équation (1), alors le mouvement du mobile est sinusoïdal.

Les trois grandeurs : élongation, vitesse et accélération prennent les mêmes valeurs lorsque la phase augmente de 2π :

$$w(t + T) - \varphi = wt - \varphi + 2\pi$$

soit

$$T = \frac{2\pi}{w} \tag{2.2}$$

T est la période du mouvement.

2.2 Mouvement circulaire d'un point

Un mouvement est dit circulaire si le mobile M se déplace sur un cercle ou une partie du cercle $C(O, R)$.

Le mouvement s'effectue dans un plan et les coordonnées polaires sont les mieux indiquées pour l'étude. Les vecteurs position, vitesse et accélération sont donnés par :

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u}_r\ , \quad \overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\frac{d\overrightarrow{u}_r}{dt} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$$

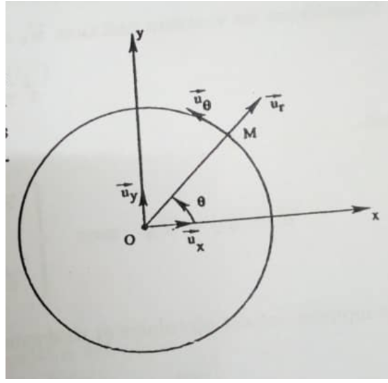

FIGURE 2.2 – Mouvement circulaire (base polaire)

$$a = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$$

On peut noter l'accélération sous la forme

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_N + \overrightarrow{a}_T \quad avec \quad \begin{cases} \overrightarrow{a}_N & = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r \;\; est\ l'acclration\ normale\ ou\ radiale \\ \overrightarrow{a}_T & = R\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta \;\; est\ l'acclration\ tangentielle\ ou\ orthoradiale \end{cases}$$

Au lieu de travailler dans la base polaire $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$, on peut faire l'étude dans la base de Frénet.

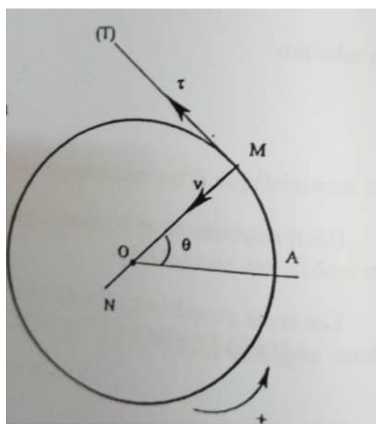

FIGURE 2.3 – Mouvement circulaire (base de Frenet)

Soit A un point pris comme origine des abscisses curvilignes. Considérons un sens positif de rotation (voir figure ci-contre). Le mobile M est repéré par son abscisse curviligne $S = \widehat{AM}$.
Le mouvement de M est défini si on connaît la loi horaire $S = S(t)$. Posons $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, alors $S = R\theta$, $\theta = \theta(t)$.

On appelle vitesse angulaire de M, la quantité

$$w = \frac{d\theta}{dt}$$

On a

$$v = \frac{dS}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = Rw$$

$$\vec{v} = Rw\vec{u}_t$$

Considérons les vecteurs unitaires $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ de la base de Frénet en M. On a :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$$

soit

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \quad avec \quad \begin{cases} \vec{a}_T & = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t \ est\ l'acclration\ tangentielle \\ \vec{a}_N & = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n \ est\ l'acclration\ normale \end{cases}$$

• Le mouvement est circulaire et uniforme si $\vec{a}.\vec{v} = 0$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & (R\dot{\theta}\vec{u}_\theta).(-R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta) = 0 = R^2\dot{\theta}\ddot{\theta} \\ \Longrightarrow \quad & \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = w = Constante \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = Rw\vec{u}_\theta \quad \Longrightarrow \quad \| \vec{v} \| = Rw = Constante$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -Rw^2\vec{u}_r$$

L'analyse dans la base de Frénet du mouvement circulaire uniforme donne

$$\vec{v}.\vec{a} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}_T = 0$$

d'où

$$\vec{v} = Rw\vec{u}_t\ , \quad \vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n = Rw^2\vec{u}_n$$

2.3 Mouvement hélicoïdal

Un mouvement est dit hélicoïdal si la trajectoire est une hélice dont le support est un cylindre de révolution de rayon R. En choisissant Oz comme axe de révolution du cylindre, le point matériel peut être repéré en coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{cases} x & = Rcos\theta(t) \\ y & = Rsin\theta(t) \quad o \quad \theta(t) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om}) \\ z & = z(t) \end{cases}$$

Le mouvement hélicoïdal est la composition d'un mouvement circulaire dans un plan parallèle à Oxy et d'un mouvement rectiligne suivant l'axe Oz. Pour simplifier, on peut exprimer la côte z sous la forme

$$z = h\theta(t)$$

Dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = R\vec{u}_\rho + h\theta(t)\vec{u}_z$$

Pas de l'hélice

• Le pas p de l'hélice est la distance séparant deux passages successifs du mobile sur une même génératrice, c'est-à-dire :

$$p = z_{M_2} - z_{M_1} = h(\theta(t_2) - \theta(t_1))$$

où $\theta(t_2) - \theta(t_1)$ correspond à un tour complet, donc à 2π :

$$p = 2\pi h,$$

• $h = \dfrac{p}{2\pi}$ s'appelle *pas réduit* de l'hélice.

2.3.1 Vecteur vitesse

Faisons l'étude en coordonnées cylindriques. Le vecteur position est alors

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u}_\rho + h\theta\overrightarrow{u}_z$$

La vitesse s'écrit

$$\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + h\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z = \dot{\theta}(R\overrightarrow{u}_\theta + h\overrightarrow{u}_z)$$

Son module est

$$v = \dot{\theta}\sqrt{R^2 + h^2}$$

Comme $v = \dfrac{dS}{dt}$, on en déduit que

$$dS = \sqrt{R^2 + h^2}d\theta \quad\Longrightarrow\quad S(t) = \theta(t)\sqrt{R^2 + h^2} + S(0).$$

Montrons maintenant que le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ fait un angle constant avec l'axe de l'hélice Oz.
La vitesse $\overrightarrow{v}$ est contenue dans le plan $(\overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$.
Soit $\alpha = (\overrightarrow{u}_z, \overrightarrow{v})$. On a :

$$cos\ \alpha = \frac{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}_z}{v} = \frac{h\dot{\theta}}{v}\ \ ,\ \ sin\ \alpha = \frac{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}_\theta}{v} = \frac{R\dot{\theta}}{v}$$

D'où

$$tan\ \alpha = \frac{R}{h} = Constante \quad\Longrightarrow\quad \alpha = Constante$$

2.3.2 Vecteur accélération

On a

$$\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + h\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z$$
$$\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_\rho + \ddot{\theta}(R\overrightarrow{u}_\theta + h\overrightarrow{u}_z)$$

Comme le vecteur unitaire tangent $\overrightarrow{u}_t$ peut s'écrire

$$\overrightarrow{u}_t = \frac{\overrightarrow{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}(R\overrightarrow{u}_\theta + h\overrightarrow{u}_z)$$

Alors l'accélération s'écrit

$$\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_\rho + \ddot{\theta}\sqrt{R^2 + h^2}\overrightarrow{u}_t$$

Or dans la base de Frénet, on écrit

$$\overrightarrow{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u}_t + \frac{v^2}{\Gamma}\overrightarrow{u}_n$$

où Γ est le rayon de courbure.

Par identification on a :

$$\overrightarrow{u}_n = -\overrightarrow{u}_\rho \quad et \quad R\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{\Gamma}$$

Soit

$$\Gamma = \frac{v^2}{a\dot{\theta}^2} = R + \frac{h^2}{R}$$

On remarque que le rayon de courbure est constant au cours du mouvement.

• Dans le cas d'un mouvement hélicoïdal uniforme, $(v = Constante, \dot{\theta} = w = Constante)$, on a :

$$\theta = wt + \theta(0)$$

L'accélération $\overrightarrow{a}$ se réduit à sa composante normale

$$\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_\rho = Rw^2\overrightarrow{u}_n$$

C'est un vecteur dirigé vers le centre du cylindre.

Exemples de mouvements hélicoïdaux

- Mouvement d'un point d'un objet que l'on vise,
- Mouvement d'une particule chargée soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme.