

Модуль 1 «Математические модели геометрических объектов»

Лекция 4 «В-сплайны и В-сплайновые поверхности»

к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,
ауд.: 930а(УЛК)
моб.: 8-910-461-70-04,
email: azaharov@bmstu.ru



МГТУ им. Н.Э. Баумана

31 марта 2016 г.

Данная категория сплайнов является наиболее используемой, и функции *В-сплайнов* широко применяются в системах автоматизированного проектирования и многих пакетах графического программирования. Подобно сплайнам Безье, В-сплайны генерируются путём аппроксимации набора контрольных точек. В то же время, В-сплайны обладают двумя преимуществами по сравнению со сплайнами Безье: во-первых, степень полинома В-сплайна можно задать независимо от числа контрольных точек (с определенными ограничениями); во-вторых, В-сплайны допускают локальный контроль над формой кривой. Платой за это является большая сложность В-сплайнов по сравнению со сплайнами Безье.

В кривой Безье глобальное влияние каждой опорной точки p_i на всю кривую происходит из-за того, что каждая из функций B_i^n не равна нулю на всем интервале $(0;1)$. Если бы вместо функций Бернштейна выступали функции с локальными носителями, существенно меньшими, чем область определения параметра кривой t , то удалось бы как локализовать влияние отдельной точки на всю кривую, так и добиться (за счет выбора таких функций) прохождения кривой через некоторую заданную точку.

Поэтому поставим задачу следующим образом. Пусть даны контрольные точки $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$. Определим кривую $\mathbf{r}(t)$ по формуле

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t) \mathbf{p}_i, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, \quad (1)$$

где $N_i(t)$ — набор кусочно-полиномиальных функций, таких, что

1. $N_i(t) = 0$ при $t \notin [a_i, b_i] \subset [t_{\min}, t_{\max}]$;
2. для любой гладкой функции $f(t)$ существует линейная комбинация $\sum_{k=0}^n c_k N_k(t)$, интерполирующая функцию $f(t)$ в заданных узлах $\{t_i\}_{i=1}^n$:

$$f(t_i) = \sum_{k=0}^n c_k N_k(t_i), \quad i = 1, \dots, n;$$

3. $\sum_{k=0}^n N_k(t) = 1$ для каждого $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$.

Последнее условие вводится для того, чтобы в случае совпадения всех опорных точек кривая превращалась бы в ту же точку.

Решение поставленной задачи даётся В-кривыми (сокр. от базовые — base). В-кривые обобщают кривые Безье.

Общее выражение для расчёта координат точек В-сплайна:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^n N_k^q(t) \mathbf{p}_k, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, \quad 1 \leq q \leq n+1,$$

где \mathbf{p}_k —

входной набор из $n+1$ контрольных точек. Стыковочные функции В-сплайна N_k^q — это полиномы степени $q-1$. Стыковочные функции для В-сплайнов определяются рекурсивными формулами Кокса-де Бура (Cox-deBoor):

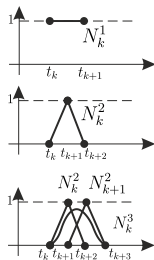
$$N_k^1(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_k \leq t \leq t_{k+1} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (2)$$

$$N_k^q(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+q-1} - t_k} N_k^{q-1}(t) + \frac{t_{k+q} - t}{t_{k+q} - t_{k+1}} N_{k+1}^{q-1}(t),$$

где каждая стыковочная функция определена на своем подынтервале. Каждая точка t_k называется *узлом* (knot), а полный набор точек называется *вектором узлов* (knot vector).

Значения узлов можно выбирать любыми при условии, что $t_k \leq t_{k+1}$. В частности, расстояния между соседними узлами могут быть равны нулю, тогда говорят о кратности узлов. В случае равенства нулю знаменателя, предполагается, что соответствующая дробь равна нулю.

РОДЖЕРС, АДАМС, pdf - 316



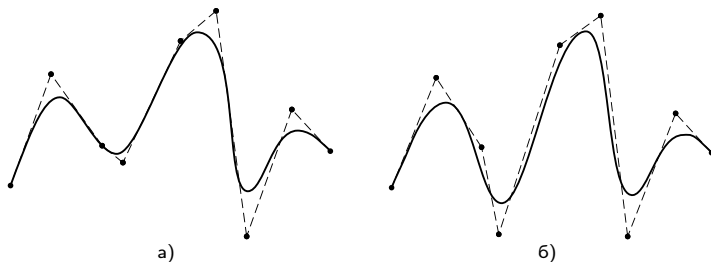


Рис.: Локальная модификация В-сплайна. Изменение одной контрольной точки (рисунок а) даёт кривую (рисунок б), которая отличается от предыдущей только в окрестности изменённой контрольной точки

Помимо локального контроля В-сплайны позволяют варьировать число контрольных точек, используемых в разработке кривой, без изменения степени полинома.

- ▶ Полиномиальная кривая имеет степень $q - 1$ и непрерывность C^{q-2} .
- ▶ Чем меньше степень кривой, тем ближе она подходит к контрольным точкам. Кривые высоких порядков более гладкие.
- ▶ Каждая стыковочная функция N_k^q определена на q подынтервалах общего диапазона t , начиная со значения узла t_k .
- ▶ Диапазон параметра t делится на $n + q$ подынтервалов $n + q + 1$ значениями, заданными в векторе узлов.
- ▶ Если значения узлов обозначить $\{t_0, t_1, \dots, t_{n+q}\}$, получающийся В-сплайн определяется только в интервале от значения узла t_{q-1} до значения t_{n+1} , т.к. только в этом интервале $\sum_{k=0}^n N_k^q(t) = 1$.
- ▶ Каждый участок сплайна определяется q контрольными точками.
- ▶ Любая контрольная точка может влиять на форму максимум q участков кривой.

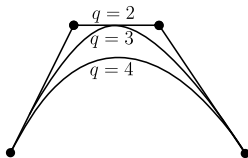


Рис.: В-сплайны различных степеней

Равномерные периодические В-сплайны

Если расстояние между значениями в узлах постоянно, получающаяся в результате кривая называется *равномерным* В-сплайном. Например, можно задать следующий равномерный вектор узлов:

$$\{-1.5; -1.0; -0.5; 0.0; 0.5; 1.0; 1.5; 2.0\}.$$

Часто значения узлов нормируются в диапазон от 0 до 1:

$$\{0.0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0\}.$$

Во многих приложениях удобно задать равномерные значения узлов с шагом 1 и начальным значением 0:

$$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}.$$

Равномерные В-сплайны имеют *периодические* стыковочные функции. Следовательно, для данных значений n и q все стыковочные функции имеют одинаковую форму. Каждая последующая стыковочная функция является просто смещённой версией предыдущей:

$$N_k^q(t) = N_{k+1}^q(t + \Delta t) = N_{k+2}^q(t + 2\Delta t), \quad (3)$$

где Δt — интервал между соседними значениями узлов.

Пример. Равномерные квадратичные В-сплайны

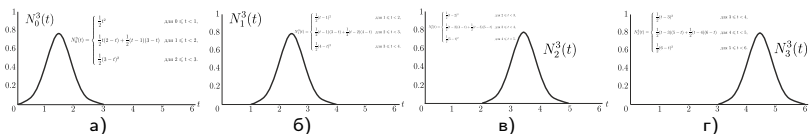


Рис.: Периодические стыковочные функции равномерного В-сплайна

Проиллюстрируем стыковочные функции В-сплайнов для равномерного целого вектора узлов при $q = n = 3$. Вектор узлов должен содержать $n + q + 1 = 7$ значений узлов: $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Каждая из четырёх стыковочных функций захватывает $q = 3$ подынтервалов. Используя рекуррентные формулы (2), получаем первую стыковочную функцию $N_0^3(t)$. Следующая функция N_1^3 получается с использованием соотношения (3) при подстановке $t - 1$ вместо t в N_0^3 и смещения начального положения t на 1 в сторону увеличения. Подобным образом, оставшиеся две периодические функции получают последовательным смещением N_1^3 вправо. Первая контрольная точка умножается на стыковочную функцию N_0^3 . Следовательно, изменение положения первой контрольной точки влияет только на форму кривой до $t = 3$. Аналогично последняя контрольная точка влияет на форму сплайновой кривой в интервале, где определена N_3^3 .

Пример. Равномерные квадратичные В-сплайны

Поскольку диапазон получающейся полиномиальной кривой принадлежит промежутку от $t_{q-1} = 2$ до $t_{n+1} = 4$, начальную и конечную позицию кривой можно определить, вычислив стыковочные функции в этих точках:

$$\mathbf{r}(2) = 0.5(\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1), \quad \mathbf{r}(4) = 0.5(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3).$$

Т.о., кривая начинается посередине между первыми двумя контрольными точками и заканчивается посередине между двумя последними.

Вычисляя производные стыковочных функций и подставляя значения конечных точек получаем:

$$\mathbf{r}'(2) = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{r}'(4) = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2.$$

Параметрическая касательная кривой в начале параллельна линии, соединяющий первые две контрольные точки, а параметрическая касательная в конце кривой параллельна линии, соединяющей последние две контрольные точки.



Рис.: Квадратный периодический В-сплайн, подобранный по четырём контрольным точкам на плоскости xy

Равномерные периодические В-сплайны

В предыдущем примере было отмечено, что квадратичная кривая начинается между первыми двумя и заканчивается между двумя последними контрольными точками. Полученный результат справедлив для квадратичных периодических В-сплайнов, подобранных по любому числу различных контрольных точек. Вообще, для полиномов высокого порядка начальная и конечная точки являются взвешенным средним $q - 1$ контрольных точек. Кроме того, как это было для кривых Безье, сплайновую кривую можно поместить ближе к любой контрольной точке, введя эту точку несколько раз.

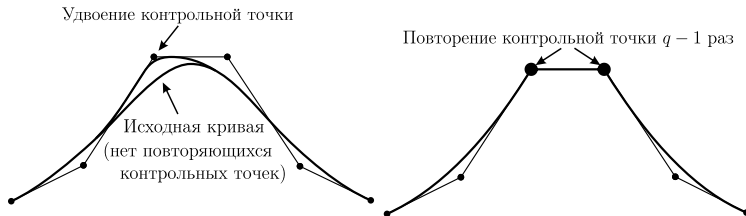


Рис.: Эффект от дублирования контрольных точек

Кубические периодические В-сплайны

Поскольку кубические периодические В-сплайны широко используются в графических пакетах, рассмотрим формулировку этого класса сплайнов. Периодические сплайны особенно полезны при генерации определённых замкнутых кривых. Кроме того, если координаты трёх последовательных контрольных точек равны, кривая проходит через эту точку.

Для кубических В-сплайнов $q = 4$. Если нужно подобрать кубическую кривую по четырём контрольным точкам, можно использовать целочисленный вектор узлов

$$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

и рекуррентные соотношения (2), из которых находятся периодические стыковочные функции, как было сделано в предыдущем примере для квадратных периодических В-сплайнов.

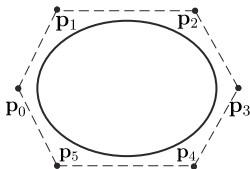


Рис.: Замкнутый периодический кусочно-гладкий В-сплайн, построенный с использованием циклической спецификации четырёх контрольных точек для каждого участка кривой

Получив уравнение кривой для периодического кубического В-сплайна, рассмотрим альтернативную формулировку, начав с граничных условий и получив стыковочные функции, нормированные в интервал $0 \leq t \leq 1$. Граничные условия на периодические кубические В-сплайны для четырех контрольных точек, обозначенных \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 , имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= \frac{1}{6}(\mathbf{p}_0 + 4\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \\ \mathbf{r}(1) &= \frac{1}{6}(\mathbf{p}_1 + 4\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3), \\ \mathbf{r}'(0) &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0), \\ \mathbf{r}'(1) &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Данные граничные условия подобны условиям для фундаментальных сплайнов: участки кривой определены четырьмя контрольными точками, и параметрические касательные в начале и в конце каждого участка кривой параллельны хордам, соединяющим соседние контрольные точки. Участок В-сплайна начинается в точке возле \mathbf{p}_1 и заканчивается в точке вблизи \mathbf{p}_2 .

Кубические периодические В-сплайны

Матричную формулировку кубического периодического В-сплайна с четырьмя контрольными точками можно записать следующим образом:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M}_N \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_N = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица \mathbf{M}_N получается нахождением коэффициентов в общем выражении для кубического полинома, используя условия (4).

Граничные условия можно модифицировать так, чтобы они включали параметр натяжения u (как для фундаментальных сплайнов). Тогда

$$\mathbf{M}_{N_u} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -u & 12 - 9u & 9 - 12u & u \\ 3u & 12u - 18 & 18 - 15u & 0 \\ -3u & 0 & 3u & 0 \\ u & 6 - 2u & u & 0 \end{bmatrix}.$$

Стыковочные функции периодического кубического В-сплайна с параметром, меняющимся в диапазоне $[0;1]$ имеют вид ($u = 1$):

$$N_0^3(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$N_1^3(t) = \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4), \quad N_2^3(t) = \frac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1), \quad N_3^3(t) = \frac{1}{6}t^3.$$

Открытые равномерные В-сплайны

Данный класс В-сплайнов является промежуточным между равномерными и неравномерными В-сплайнами. Иногда он считается частным случаем равномерного В-сплайна, а иногда он относится к неравномерным В-сплайнам. Для *открытых равномерных* В-сплайнов, или просто *открытых* В-сплайнов, расстояние между узлами равномерно, за исключением концов, где значения узлов повторяются q раз.

Примеры открытых равномерных целочисленных вектора узлов:

$$\{0, 0, 1, 2, 3, 3\} \quad \text{для } q = 2 \text{ и } n = 3,$$

$$\{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2\} \quad \text{для } q = 4 \text{ и } n = 4.$$

Данные векторы можно нормировать в единичный интервал от 0 до 1:

$$\{0, 0, 0.33, 0.67, 1, 1\} \quad \text{для } q = 2 \text{ и } n = 3,$$

$$\{0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\} \quad \text{для } q = 4 \text{ и } n = 4.$$

Для любых значений параметров q и n открытый равномерный вектор узлов с целыми значениями можно сгенерировать, используя формулы

$$t_k = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq k < q, \\ k - q + 1 & \text{для } q \leq k \leq n, \\ n - q + 2 & \text{для } n < k \leq n + q. \end{cases}$$

При этом первым q узлам присваивается значение 0, а последние q узлов имеют значение $n - q + 2$.

Открытые равномерные В-сплайны обладают характеристиками, весьма подобными характеристикам сплайнов Безье. Фактически при $q = n + 1$ (степень полинома равна n) открытые В-сплайны сводятся к сплайнам Безье, и все значения узлов равны 0 или 1. Например, при кубическом открытом В-сплайне ($q = 4$) и четырех контрольных точках вектор узлов равен:

$$\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}.$$

Полиномиальная кривая для открытого В-сплайна соединяет первую и последнюю контрольную точку. Кроме того, параметрическая касательная кривой в первой контрольной точке параллельна прямой линии, сформированной первыми двумя контрольными точками, а параметрическая касательная в последней контрольной точке параллельна линии, определённой двумя последними контрольными точками. Таким образом, геометрические условия для согласования участков кривой не отличаются от условий для кривых Безье.

Неравномерные В-сплайны

Для данного класса сплайнов вектор узлов может принимать любые значения из любых интервалов. При *неравномерных* В-сплайнах можно выбирать несколько одинаковых внутренних значений узлов и неравномерное размещение значений узлов. Приведем несколько примеров:

$$\{0; 1; 2; 3; 3; 4\},$$

$$\{0; 2; 2; 3; 3; 6\},$$

$$\{0; 0; 0; 1; 1; 3; 3; 3\},$$

$$\{0; 0.2; 0.6; 0.9; 1.0\}.$$

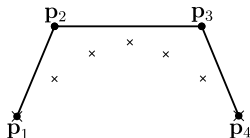
Неравномерные В-сплайны предлагают повышенную гибкость в управлении формой кривой. Неравномерные интервалы в векторе позволяют получать различные формы стыковочных функций в различных интервалах, что может использоваться для воспроизведения определённых особенностей аппроксимации. В любой момент работы с неравномерным В-сплайном в состав кривой можно ввести дополнительный узел и изменить ее форму при помощи дополнительных контрольных точек. Увеличивая кратность узлов, можно настраивать траекторию кривой и вводить разрывы. Отметим также, что кратные значения узлов уменьшают непрерывность на 1 при каждом повторе значения.

Формулировка В-сплайновой поверхности подобна формулировке поверхностных сплайнов Безье. Векторную функцию В-сплайновой поверхности можно получить, используя декартово произведение стыковочных В-сплайновых функций вида

$$\mathbf{r}(t, \tau) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{p}_{i,j} N_i^q(t) N_j^p(\tau),$$

где векторные значения $\mathbf{p}_{i,j}$ задают положения $(n + 1)$ на $(m + 1)$ контрольных точках.

В-сплайновые поверхности демонстрируют те же свойства, что и составляющие их В-сплайны. Поверхность можно построить по выбранным значениям параметров q и p , которые задают степени полиномов равными $q - 1$ и $p - 1$. Для каждого параметра t и τ также выбираются значения вектора узлов, которые определяют диапазон параметров стыковочных функций.



Мы рассмотрели построение В-сплайна по заданным координатам контрольных точек \mathbf{p}_k . Рассмотрим теперь задачу нахождения координат контрольных точек \mathbf{p}_k , порождающих В-сплайн, для заданного множества точек.

Точка, принадлежащая В-сплайну, должна удовлетворять уравнению (1). Запишем уравнение (1) для всех $m + 1$ заданных точек

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(t_0) &= N_0^q(t_0)\mathbf{p}_0 + N_1^q(t_0)\mathbf{p}_1 + \dots + N_n^q(t_0)\mathbf{p}_n, \\ \mathbf{r}_1(t_1) &= N_0^q(t_1)\mathbf{p}_0 + N_1^q(t_1)\mathbf{p}_1 + \dots + N_n^q(t_1)\mathbf{p}_n, \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_m(t_m) &= N_0^q(t_m)\mathbf{p}_0 + N_1^q(t_m)\mathbf{p}_1 + \dots + N_n^q(t_m)\mathbf{p}_n, \end{aligned} \tag{5}$$

где $2 \leq q \leq n + 1 \leq m + 1$.

В матричной форме (5) имеет вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{NP},$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^T &= [\mathbf{r}_0(t_0) \quad \mathbf{r}_1(t_1) \quad \cdots \quad \mathbf{r}_m(t_m)] \\ \mathbf{P}^T &= [\mathbf{p}_0 \quad \mathbf{p}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] \\ \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} N_0^q(t_0) & \cdots & \cdots & N_n^q(t_0) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ N_0^q(t_m) & \cdots & \cdots & N_n^q(t_m) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

При $n = m$ матрица \mathbf{N} квадратная, и координаты контрольных точек вычисляются непосредственно обращением матрицы, т.е.

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{R}.$$

В этом случае В-сплайн проходит через все заданные точки, т.е. происходит точная интерполяция. Кривая на всем протяжении C^{q-2} непрерывна, но при этом она может быть недостаточно гладкой на вид и иметь нежелательные изгибы.

Если указать меньшее число контрольных точек, чем количество заданных точек кривой, т.е. $n < m$, кривая будет более гладкой. При этом матрица \mathbf{N} становится неквадратной. Воспользуемся тем, что произведение матрицы на транспонированную всегда даёт квадратную матрицу. Уравнение В-сплайна можно записать в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{N}\mathbf{P}.$$

Тогда

$$\mathbf{N}^T \mathbf{R} = \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{P},$$

и

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{N}^T \mathbf{N} \right)^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{R}.$$

Базисные функции $N_k^q(t_i)$, $i = 0, \dots, m$ и, следовательно, матрицу \mathbf{N} можно получить, если задан порядок В-сплайна q , количество контрольных точек $n + 1$, а также величина параметра вдоль кривой.

Величина параметра t_i для каждой заданной точки — это мера расстояния до точки вдоль В-сплайна. Удобна аппроксимация параметра с помощью длин хорд между заданными точками:

$$t_1 = 0,$$
$$\frac{t_i}{t_{\max}} = \frac{\sum_{j=2}^i |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}|}{\sum_{j=2}^m |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}|}, \quad i \geq 2.$$

Максимальное значение параметра t_{\max} обычно выбирается в качестве максимальной величины узлового вектора.