МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний авіаційний університет

Навчально-науковий інститут інформаційно-діагностичних систем

Кафедра прикладної математики

Звіт по лабораторній роботі №2.1

«Побудова плоских та просторових кривих»

Виконав:

Студент 351 групи ІІДС

Тітенко Д.С.

Викладач: Юрчук І. А.

Київ 2016

Мета: Вивчити побудову інтерполяційних та згладжуючих кривих на площині і в просторі, та закріпити властивість інваріантності кривих Безьє відносно афінних перетворень на площині.

Завдання:

1.Вивчити побудову кубічного сплайна та кривої Безьє.

2. Реалізувати програмно алгоритм побудови геометричних об'єктів G1 та G2, що задані на площині і в просторі, та забезпечити виконання афінних перетворень над ними (G1 та G2 визначені для кожного студента окремо згідно його варіанту).

- об'єкт G1 побудувати за допомогою кривої Безьє;
- об'єкт G2 побудувати двома способами за допомогою підстановки значень параметра у рівняння та кубічного сплайну з можливістю задання як рівномірних та і не рівномірних вузлів;
-забезпечити реалістичне зображення кривих у просторі за допомогою композиції аксонометричної (диметрія чи ізометрія) та ортогональної проекцій;
- у висновках надати аналіз отриманих побудов;
- значення параметрів афінних перетворень задаються користувачем;
- при неправильному введені параметрів виводиться повідомлення про повторне введення (правильними є значення, при яких рух геометричного об'єкту повністю видно на екрані)
-побудовані об'єкти вивести на екран.

Варіант 14.

Папуга

Теоретичні відомості

Крива Безьє — параметрично задана крива, яка використовується в комп'ютерній графіці та суміжних областях.

У векторній графіці, криві Безьє використовуються для моделювання гладких кривих, які можна масштабувати до нескінченності. «Шляхи», як їх зазвичай називають у програмах для роботи з зображеннями, є комбінаціями з'єднаних кривих Безьє. Шляхи не обмежуються розмірами растрових зображень і їх редагування є інтуїтивно зрозумілим. Криві Безьє також використовуються в анімації, як інструмент для управління рухом, та в системах автоматизованого проектування.

Криві Безьє були запроваджені в 1962 році П'єром Безьє з автомобілебудівної компанії «Рено», хоча ще в 1959 році використовувались Полем де Кастельє з компанії «Сітроен», але його дослідження не публікувались і приховувались компанією як комерційна таємниця до кінця 1960-х.

Крива Безьє — параметрична крива, вигляду

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_{i,n}(t)\mathbf{P}_i, \qquad t \in [0,1]$$

де

Pi – опорні вершини

$\mathbf{b}_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ - поліноми Бернштейна, вони є базисними функціями кривої Без'є.

Кубічні криві Безьє

Чотири опорні точки P0, P1, P2 та P3, задані в 2-х чи 3-мірному просторі визначають форму кривої:

Лінія починається в точці P0 направляється до P1 і закінчується в точці P3 підходячи до неї з боку точки P2. Тобто крива не проходить через точки P1 та P2, вони використовуються для напрямку руху.

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3, \quad t \in [0,1]$$

В матричній формі кубічна крива Безьє записується як:

$$\mathbf{B}(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]\mathbf{M}_B \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}$$

Де

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M}_B$ називається базисною матрицею Безьє

Властивості кривої Безьє

- безперервність заповнення сегмента між початковою та кінцевою точками;
- крива завжди розташовується всередині фігури, утвореної лініями, що з'єднують контрольні точки;
- при наявності лише двох контрольних точок сегмент являє собою пряму лінію;
- пряма лінія утворюється лише тоді, коли контрольні точки розташовані на одній прямій;
- крива Безьє симетрична, тобто обмін місцями між початковою та кінцевою точками (зміна напрямку траєкторії) не впливає на форму кривої;
- масштабування та зміна пропорцій кривої Безьє не порушує її стабільності, оскільки вона з математичної точки зору «аффінно інваріантна»;
- зміна координат хоча б однієї з точок веде до зміни форми всієї кривої Безьє;
- будь який частковий відрізок кривої Безьє також є кривою Безьє;
- степінь кривої завжди на одиницю менший від кількості контрольних

точок. Наприклад, при трьох контрольних точках форма кривої — парабола;

- коло не може бути описане параметричним рівнянням кривої Безьє;
- неможливо створити паралельні криві Безьє, за винятком тривіальних випадків (прямі лінії та однакові криві), хоча існують алгоритми, що будують наближену паралельну криву Безьє з прийнятною для практики точністю.

Сплайн — функція, область визначення якої розбита на шматки, на кожному зі шматків функція є деяким поліномом.

В задачах інтерполяції, інтерполяція сплайном краща, ніж інтерполяція многочленом, оскільки дає схожі результати навіть при менших степенях поліномів, а також при її використанні не виникає феномена Рунге.

Максимальний степінь поліномів в сплайні називається степенем сплайна. Різниця між степенем сплайна і його гладкістю називається дефектом сплайна.

Найбільш відомий й поширений інтерполяційний сплайн – це сплайн порядку 3 дефекту 1. Такі функції звуться кубічними сплайнами. Ці сплайни порівняно недавно почали широко вживатися в обчислювальній математиці.

В загальному випадку математичний сплайн це кусковий поліном ступеня K з безперервною похідною ступеня K-1 в точках з'єднання сегментів. Так, наприклад, кубічний сплайн має в точках з'єднання безперервність другого порядку. Кускові сплайни з многочленів невисокого порядку дуже зручні для інтерполяції кривих, так як вони не вимагають великих обчислювальних витрат і не викликають численних відхилень, властивих многчленам високого порядку. За аналогією з фізичними сплайнами зазвичай використовується серія кубічних сегментів, причому кожен сегмент проходить через дві точки. Кубічний сплайн зручний ще й тим, що це крива найменшого порядку, що допускає точки перегину і вигин в просторі.

Рівняння одного параметричного сегмента сплайна таке:

$$P(t)=\sum_{i=1}^{4} B_i t^{i-1}$$

де t1 та t2 – значення параметрів в початку та кінці сегмента.

$P(t)=\left[x(t)\,y(t)\,z(t)\right]$ - це векторно-знакова функція, де три складові - декартові координати вектора.

Постійні коефіцієнти Bi обчислюються виходячи з чотирьох граничних умов для сегмента сплайна.

$$P(t)=B_1+B_2t+B_3t^2+B_4t^3$$

Нехай P1 і P2 – вектори кінців сегмента . Нехай також P1' і P2' похідні по t, будуть дотичними векторами в кінцях сегмента. Диференціюючи рівняння, отримаємо:

$$P'(t)=\left[x'(t)\quad y'(t)\quad z'(t)\right]=\sum_{i=1}^{4} B_i\,(i-1)t^{i-2}$$

або

$$P'(t)=B_2+2B_3t+3B_4t^2$$

Припустимо, що t1=0

$$P(0)=P_1\quad P(t_2)=P_2\quad P'(0)=P_1'\quad P'(t_2)=P_2'$$

Отримаємо 4 рівняння для невідомих Bi:

$$P(0)=B_1=P_1$$

$$P'(0)=\sum_{i=1}^{4}(i-1)t^{i-2}B_i\Big|_{t=0}=B_2=P_1'$$

$$B_3=\frac{3(P_2-P_1)}{t_2^2}-\frac{2P_1'}{t_2}-\frac{P_2'}{t_2}$$

$$B_4=\frac{2(P_1-P_2)}{t_2^3}+\frac{P_1'}{t_2^2}+\frac{P_2'}{t_2^2}$$

Величини B1, B2, B3 і B4 задають сегмент кубічного сплайна. Очевидно, що форма сегмента залежить від положення і дотичних векторів в кінцях сегмента. Далі, зауважимо, що в результатах присутні значення параметра t=t2 в кінці сегмента. Так як кожна кінцева точка і вектор дотику мають три компоненти, параметричне рівняння кубічної просторової кривої залежить від дванадцяти векторних компонент і значення параметра в кінці сегмента.

$$P(t) = P_1 + P_1' t + \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \right] t^2 +$$

$$+ \left[\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2} \right] t^3$$

Це рівняння для одного сегмента. Щоб отримати криву цілком, потрібно з'єднати безліч сегментів.Якщо відомі вектори P1, P2, P3, дотичні вектори P1', P2', P3' і значення параметрів t2, t3, то форма кожного сегмента визначається з рівняння вище. Однак малоймовірно, що відомо дотичний вектор P2' в точці з'єднання. На щастя, його можна вивести з умови безперервності.

Знаходження n дотичних векторів в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ t_3 & 2(t_2+t_3) & t_2 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & t_4 & 2(t_3+t_4) & t_3 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & t_5 & 2(t_4+t_5) & t_4 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & t_n & 2(t_n+t_{n-1}) & t_{n-1} \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ . \\ . \\ . \\ . \\ P_n' \end{bmatrix} =$$

$$
= \begin{bmatrix}
P_1' \\
\frac{3}{t_2 t_3}\left\{t_2^2\left(P_3 - P_2\right) + t_3^2\left(P_2 - P_1\right)\right\} \\
\frac{3}{t_3 t_4}\left\{t_3^2\left(P_4 - P_3\right) + t_4^2\left(P_3 - P_2\right)\right\} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\frac{3}{t_{n-1} t_n}\left\{t_{n-1}^2\left(P_n - P_{n-1}\right) + t_n^2\left(P_{n-1} - P_{n-2}\right)\right\} \\
P_n'
\end{bmatrix}
$$

Якщо нам відомі Pk', то легко визначити коефіцієнти Bi для кожного сегмента сплайна. Після певних перетворень та перегрупувань членів отримаємо.

$$
P_k(\tau) = \left[F_1(\tau) \quad F_2(\tau) \quad F_3(\tau) \quad F_4(\tau)\right] \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ P_k' \\ P_{k+1}' \end{bmatrix}
$$

$$
\tau = \left(t / t_{k+1}\right)
$$

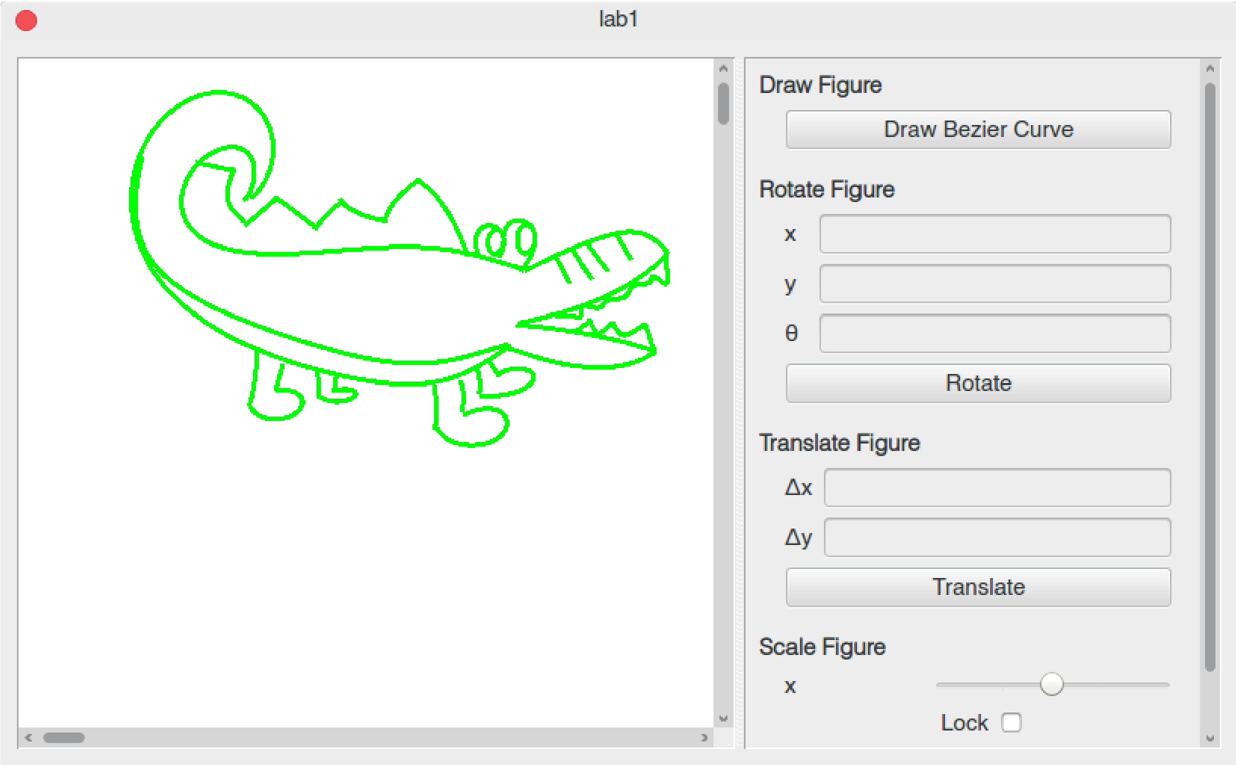
де

$$
F_{1k}(\tau) = 2\tau^3 - 3\tau^2 + 1 \qquad F_{2k}(\tau) = -2\tau^3 + 3\tau^2
$$

$$
F_{3k}(\tau) = \tau\left(\tau^2 - 2\tau + 1\right)t_{k+1} \qquad F_{4k}(\tau) = \tau\left(\tau^2 - \tau\right)t_{k+1}
$$

називаються ваговими функціями

Приклади роботи програми



Код програми

```
import math

def binomial(i, n):
    """Binomial coefficient"""
    return math.factorial(n) / float(
            math.factorial(i) * math.factorial(n - i))


def bernstein(t, i, n):
    """Bernstein polynom"""
    return binomial(i, n) * (t ** i) * ((1 - t) ** (n - i))


def bezier(t, points):
    """Calculate coordinate of a point in the bezier curve"""
    n = len(points) - 1
    x = y = 0
    for i, pos in enumerate(points):
        bern = bernstein(t, i, n)
        x += pos[0] * bern
        y += pos[1] * bern
    return x, y


def bezier_curve_range(n, points):
    """Range of points in a curve bezier"""
    for i in range(n):
        t = i / float(n - 1)
        yield bezier(t, points)
```

Висновки

Під час виконання лабораторної роботи навчився будувати інтерполяційні та згладжуючих криві на площині і в просторі, та закріпив властивість інваріантності кривих Безьє відносно афінних перетворень на площині.