EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
31 octobre 2018

Analyse I – Série 7

Exercice 1. (Critères de convergence)

(a) Discuter la convergence de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ en utilisant

i) le critère de d'Alembert,

ii) le critère de Cauchy.

(b) Discuter la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ en utilisant

i) le critère de d'Alembert,

ii) le critère de Cauchy.

Exercice 2. (Convergence des séries)

Déterminer si la série donnée converge ou diverge :

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+5}\right)^n$ *ii*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ *iii*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$ *iv*) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+7}-n\right)$

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$ *vi*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2}$ *vii*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n}$

Exercice 3. (Suites des sommes partielles.)

Calculer les sommes des séries suivantes en utilisant les suites des sommes partielles:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *ii*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

iii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$

Astuce: Pour le *i*), utiliser l'idéntité $\frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver des idéntités similaires pour *ii*) et *iii*).

Exercice 4. (Convergence des séries avec un paramètre)

Etudier la convergence de la série en fonction de la valeur de $c \in \mathbb{R}$.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{1-c}\right)^n$ avec $c \neq 1$ *ii*) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c^n$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^n$ *iv*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n}$

Quelle est la somme de la série *iii)* lorsqu'elle converge?

Exercice 5. (Suite des sommes partielles)

Soit $0 < c < 1$, et posons pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = 1 + 2c + 3c^2 + \cdots + nc^{n-1}.$$

i) Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $cS_n - S_n$.

ii) En déduire la somme de la série $\sum_{k=1}^{\infty} kc^{k-1}$.

Exercice 6. (Critères de convergence)

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Montrer que l'application des critères de d'Alembert et de Cauchy pour cette série correspond à utiliser le critère de comparaison avec des séries géométriques adéquates.

Exercice 7. (Application des critères de convergence)

Etudier la convergence des séries suivantes:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n n^b$ avec $|q| \neq 1$, $b > 0$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{8}{7}}}$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}} + n^{\frac{3}{5}}}$

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^p}$ avec $a > 0$, $p \in \mathbb{N}^+$

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!}$ où $P(x)$ est un polynôme tel que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x > n_0$, $P(x) \neq 0$.

Exercice 8. (Critère de condensation)

Critère: Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série à termes positifs et décroissantes: $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $a_n > 0$ et $a_{n+1} \leq a_n$.
Alors les séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ ont la même nature.

Démontrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge pour tout $p > 1$ en utilisant le critère de condensation.