Anna Lachowska

Analyse I – Série 2

Remarque générale :
Les Exercices 1, 4 et 8 sont des questions de type Vrai ou Faux (V/F) – ce type de questions réapparaîtra tout au long du semestre. Pour chaque question, répondre par VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1. (V/F: Ensembles)

Soient $A, B, C \subset \mathbb{R}$ des ensembles non vides.
On note $A \setminus B$ pour la différence des ensembles A et B, $A \cap B$ pour leur intersection, et $A \cup B$ pour leur réunion, c.-à-d.

$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$, $\quad A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$, $\quad A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Q1 : $\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$

Q2 : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Q3 : $(A \cap B) \setminus C = A \cap (C \setminus B)$

Q4 : $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (B \cap C)$

Q5 : $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercice 2. (Nombres irrationnels)

Montrer que $\sqrt{6}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 3. (Nombres irrationnels)

Démontrer que les nombres réels r suivants sont irrationnels:

i) $r = \sqrt{7 + \sqrt{17}}$ $\qquad$ *ii)* $r = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Exercice 4. (V/F : Infimum et supremum)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

Q1 : Si $\sup A$ n'existe pas, alors A n'est pas borné.

Q2 : Si $\sup A \notin A$, alors A n'est pas borné.

Q3 : L'ensemble $A = \{x : 0 \leq x^2 < 4,\ x \in \mathbb{Q}\}$ n'admet pas de supremum dans $\mathbb{Q}$.

Q4 : Soit $B \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble non vide. Si $\inf A < \inf B$ et $\sup A > \sup B$, alors $B \subset A$.

Exercice 5. (Notation des intervalles)

Récrire les ensembles A suivants en utilisant la notation des intervalles :

i) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ *ii)* $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$

iii) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x \leq 1\}$ *iv)* $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$

v) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}$ *vi)* $A = \{x \in \mathbb{R} : -x^3 \geq 3\}$

Exercice 6*. (Coupure de Dedekind). Démontrer que la propriété suivante est équivalente à l'axiome de la borne inférieure ([DZ], Section 1.2.4):
Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides tels que $A \cup B = \mathbb{R}$ et $A \cap B = \emptyset$. Supposons aussi que $a < b$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$. Alors il existe un élément $c \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq c$ pour tout $a \in A$ et $c \leq b$ pour tout $b \in B$.

Exercice 7. (Sous-ensembles de $\mathbb{R}$)

Soit $E \subset \mathbb{R}$ donné par $E = \left\{\frac{1}{n+3} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Q1 : Montrer que E est borné.

Q2 : Trouver l'infimum et le supremum de E.

Q3 : étudier si $\sup E \in E$ et $\inf E \in E$.

Exercice 8. (Sous-ensembles de $\mathbb{R}$)

Pour chaque ensemble, étudier s'il est majoré ou minoré dans $\mathbb{R}$. Si l'ensemble est majoré, trouver son supremum et s'il est minoré, trouver son infimum. Dans chaque cas, étudier si le supremum (l'infimum) appartient à l'ensemble.

i) $A =]-1, \sqrt{2}]$ *ii)* $B =]\sqrt{2}, \infty[$

iii) $C = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| \leq 1\}$ *iv)* $D = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < 1\}$

v) $E = \left\{\dfrac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ *vi)* $F = \left\{\dfrac{n(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

vii) $G = \mathbb{Q}$ *viii)* $H = \left\{\sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

ix) $I = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$

Exercice 9. (V/F: Fonctions)

Soient $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Q1 : $f \circ g = g \circ f \quad \Leftrightarrow \quad f = g$.

Q2 : Si f et g sont injectives, alors $f \circ g$ est injective.

Q3 : Si $f \circ f$ est injective, alors f est injective.

Q4 : Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.

Q5 : Si $f \circ g$ est injective, alors f est injective.

Q6 : Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.