ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

SAVOIR-FAIRE

EN

MATHÉMATIQUES

Mai 2007

SMA-FSB-EPFL, Station 8, CH-1015 Lausanne

SAVOIR-FAIRE

EN

MATHÉMATIQUES

Mai 2007

Préface

Les mathématiques jouent un rôle essentiel dans le monde contemporain, dans des domaines aussi variés que la technologie, l'ingénierie, les communications, la finance, la recherche scientifique, etc. Il n'est donc pas surprenant que les mathématiques soient l'un des piliers des études scientifiques et d'ingénieur à l'EPFL.

Ce manuel a été conçu pour aider les étudiants à bien réussir leur première année d'études à l'EPFL. Il peut être utile à la fois comme préparation avant d'entamer les études et comme support durant la première année. Il présente des concepts de base des mathématiques, sous la forme de problèmes à résoudre aussi bien que de notions théoriques. Souvent, ces sujets ont déjà été étudiés, mais on a constaté de grandes différences entre les étudiants, les uns présentant des lacunes, alors que d'autres semblent plus à l'aise. Cet ouvrage fournit ainsi un support utile à tous.

On notera que ce manuel n'est pas un exposé détaillé et qu'il n'est pas prévu pour remplacer d'autres ouvrages. Il est plutôt un outil qui devrait permettre de tester les capacités à *résoudre* un problème donné, en faisant appel au raisonnement autant qu'aux connaissances. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'il commence par des problèmes de révision.

Si, après quelque temps de réflexion, certaines méthodes de résolution font défaut à l'étudiant, la partie théorique de cet ouvrage devrait lui fournir le fil conducteur de la solution ou contribuer à lui rafraîchir la mémoire. Pour cette raison, les chapitres sont tous structurés de la même manière, en trois parties :

(1) énoncés des exercices ;
(2) notions théoriques liées aux exercices ;
(3) solutions des exercices, plus ou moins détaillées.

Ce qui est essentiel pour l'étudiant qui résout tel ou tel problème proposé est de se rendre compte des éventuelles lacunes qui pourraient se révéler. Par conséquent, l'important n'est pas de mémoriser le plus grand nombre de résolutions apparaissant dans ce volume, mais d'acquérir un savoir-faire dans chacun des sujets traités.

L'EPFL remercie les trois auteurs, Yves Biollay, Amel Chaabouni et Joachim Stubbe, pour leur patient et remarquable travail d'élaboration de ce manuel.

Section de mathématiques de l'EPFL, mai 2007

Connaissances préalables requises

Il est important que l'étudiant sache quels sont les sujets qui ne seront pas enseignés durant la première année à l'EPFL et ce qui est attendu de lui. Voici l'essentiel :

• Les notions de base de géométrie du plan et de l'espace sont supposées connues. Elles apparaissent dans les paragraphes 4.1 et 4.2.

• Les principes fondamentaux de la trigonométrie et du calcul des fonctions trigonométriques sont aussi considérés comme acquis. Ils sont présentés dans le chapitre 5.

• Pour le reste, les notions développées dans les autres chapitres de ce manuel ne font pas formellement partie des connaissances préalables requises. En effet, elles sont reprises, approfondies et généralisées durant les cours de première année de l'EPFL (cours d'analyse du premier semestre et cours d'algèbre linéaire). Cependant, elles sont traitées à un rythme rapide et soutenu et elles ne sont exposées qu'une seule fois, ce qui correspond aux exigences habituelles du travail universitaire. Par conséquent, il est très utile que les futurs étudiants aient déjà rencontré certains de ces sujets. Lorsque des notions ont été vues, même succinctement ou rapidement, il est d'autant plus facile de les revoir et de les assimiler en profondeur.

• Il est impossible de fixer de manière rigide une liste de connaissances préalables requises, d'une part en raison des bagages très variés des étudiants qui commencent l'EPFL et qui proviennent d'horizons divers, mais aussi et surtout parce que la possibilité de suivre avec succès des études universitaires dépend beaucoup plus d'autres facteurs que d'une liste de connaissances préalables. Parmi ces facteurs, mentionnons la capacité de travailler de manière autonome, l'aptitude au raisonnement, la rapidité d'apprentissage, la ténacité dans la résolution de problèmes, la curiosité intellectuelle, l'indépendance, qui sont toutes des qualités intrinsèques de l'étudiant qui ne peuvent se réduire à un inventaire de connaissances.

• Notons enfin qu'une très bonne accointance avec les notions étudiées dans l'enseignement secondaire supérieur et un solide bagage en mathématiques sont autant d'atouts pour bien réussir les études. Cependant, l'expérience montre aussi qu'un déficit initial peut être comblé par un étudiant motivé lorsqu'il s'investit fortement dès le début de l'année.

Mesures d'accompagnement pour les étudiants

La distribution de ce manuel à tous les étudiants de première année fait partie d'un ensemble de mesures mises en place par l'EPFL pour leur permettre de bien commencer leurs études. En plus de ce manuel, les étudiants disposent des possibilités suivantes :

• **Test en ligne**
Ce test permet à chaque étudiant d'évaluer ses connaissances en mathématiques et de recevoir un résultat personnel et privé. Les professeurs n'y ont pas accès et il ne sera jamais utilisé dans aucun examen ou test à l'EPFL. Avec le présent manuel, chaque étudiant reçoit un nom d'utilisateur et un mot de passe qui lui permettent de se connecter sur le site :

http ://matheval.epfl.ch/diagnostic/

• **Bilan de compétences**
Au tout début des cours de première année à l'EPFL, chaque étudiant passe un test de connaissances, analogue au test en ligne précédent. Ce bilan de compétences est à nouveau personnel et sans influence sur la suite des études. Il permet à chaque étudiant de situer où se trouvent ses forces et ses faiblesses.

• **Exercices supplémentaires**
De nombreux exercices apparaissent sur les sites des cours de l'EPFL, en particulier sur le site du Cours de Mathématiques Spéciales :

http ://cms.epfl.ch/

• **Semestre PolyMaths**
Pour les étudiants qui le désirent, un semestre de préparation aux études à l'EPFL est organisé au semestre de printemps (février–juin) et permet d'approfondir des connaissances ou de les rafraîchir. Cette offre peut intéresser des étudiants pour des raisons diverses (service militaire en automne, semestre de pause en automne avant de commencer les études, doutes ou lacunes, désir de parfaire des connaissances de français tout en se préparant aux études, etc.).

Organisé par le Cours de Mathématiques Spéciales (CMS), le semestre CMS–PolyMaths comprend des mathématiques, de la physique, un module de technique de travail et un module d'orientation académique. Plus de détails sont disponibles sur le site :

http ://cms.epfl.ch/polymaths/

• **Nouvelle passerelle**
Pour les étudiants qui rencontrent des difficultés durant les premières semaines de leur première année à l'EPFL, la possibilité est offerte de quitter leur année d'études sans qu'elle soit comptabilisée, de demander l'admission au semestre CMS–PolyMaths afin de le suivre pendant le deuxième semestre et de reprendre la première année d'études l'automne suivant.

Table des matières

Problèmes de révision

SUJET PRINCIPAL DE CHAQUE PROBLÈME

PR 1 Démonstration par récurrence.

PR 2 Résolution d'inéquations.

PR 3 Application de l'intégration au calcul d'aire sous une courbe.

PR 4 Extremum et dérivation.

PR 5 Fractions rationnelles : intégration.

PR 6 Trigonométrie : théorèmes et formules.

PR 7 Géométrie analytique : droites et cercles.

PR 8 Extremums d'une fonction rationnelle.

PR 9 Asymptotes.

PR 10 Extremums d'une fonction.

PR 11 Limites à l'infini.

PR 12 Limites.

PR 13 Nombres rationnels.

PR 14 Nombres naturels.

PR 15 Valeur absolue.

PR 16 Logarithme.

PR 17 Analyse combinatoire.

PR 18 Equation irrationnelle.

PR 19 Représentation paramétrique du cercle.

PR 20 Formule de Heron.

PR 21 Fonctions trigonométriques réciproques.

PR 22 Suite convergente.

PR 23 Tangentes communes.

PR 24 Etudes de fonctions.

PR 25 Problème 1 (obligatoire) du sujet de mathématiques niveau normal de l'examen fédéral de maturité, automne 2004.

PR 26 Problème 1 : analyse (obligatoire) du sujet de mathématiques niveau avancé de l'examen fédéral de maturité, printemps 2004.

PR 27 Problème 1 : géométrie (obligatoire) du sujet de mathématiques niveau supérieur de l'examen fédéral de maturité, automne 2005.

ÉNONCÉS

EPR 1 Montrer que le nombre $N_n = n^5 - n$ est divisible par 5 pour tout n nombre naturel > 1.

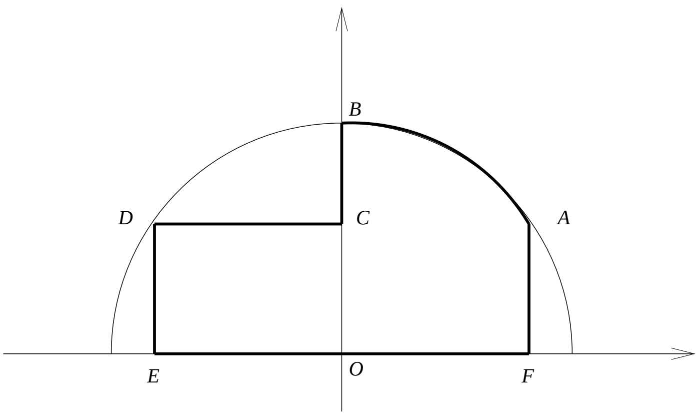
EPR 2 On considère un rectangle $ABCD$ ayant le côté AB plus petit que le côté BC, d'aire égale à 48 cm^2 et inscrit dans un cercle de rayon 5 cm. On place un point E sur le côté CD à x cm de C ($x > 0$) et un point F sur le côté CB à px cm de C ($p > 0$). Déterminer les valeurs de p pour lesquelles on peut construire un triangle isocèle AEF de base EF.

EPR 3 Calculer l'aire A du domaine limité par le graphe de la fonction

$$g(x) = \frac{7 - 2e^x - 3e^{-x}}{e^{-x} - 2},$$

l'axe Ox et les droites $x = \ln 2$ et $x = 3\ln 2$.

EPR 4 Soient Γ le demi-cercle de rayon 1 centré à l'origine, A un point de Γ d'abscisse $a > 0$, D son symétrique par rapport à l'axe Oy, E et F respectivement les projections de D et A sur l'axe Ox, C la projection de A sur l'axe Oy et B l'intersection de l'axe Oy avec l'arc AD de Γ. Déterminer pour quelle valeur de a l'aire $ABCDEFA$ est maximale.



EPR 5

(a) Montrer que $\dfrac{(x+1)^3}{7x^2 - 5x + 1} \geq 1$ pour $x \geq 0$ et en déduire que $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8x + 10}{x^2 + 1}$ est positif pour $x \geq 0$.

(b) Calculer l'aire A du domaine compris entre le graphe de f, son asymptote oblique et les droites $x + y + 2 = 0$, $x = 0$ et $x = 6$.

EPR 6 On considère un triangle ABC tel que $AB = 4$, $\widehat{CAB} = \alpha$ et $\widehat{ACB} = 2\alpha$. Déterminer pour quelle valeur de $\alpha > 0$ l'aire $S(\alpha)$ du triangle ABC est maximale.

EPR 7 Pour quelle valeur de m la droite δ d'équation $y = 2mx$ est-elle tangente au cercle γ de rayon 2 centré au point Ω de coordonnées $(m, 0)$?

EPR 8 On considère les segments $d_1 = P_1(0,1)Q(2,1)$ et $d_2 = P_2(2,0)Q(2,1)$ et soient γ_i les cercles de centres $\Omega_i \in d_i$, de rayon r_i, passant par P_i, $i = 1, 2$. Déterminer l'équation que doit satisfaire r_1 pour que la somme des aires des disques de frontières γ_i soit minimale lorsque les cercles sont tangents extérieurement l'un à l'autre.

EPR 9 Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la fonction

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 - 2x + 3}{x^2 + cx + 2}$$

admette comme asymptotes les droites $x = 2$ et $y = 2x + 3$.

EPR 10 Quelles sont les dimensions du vase de volume maximum dont la forme est un cylindre de révolution d'aire totale égale à 1 m^2.

EPR 11 En utilisant l'égalité $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, déterminer α pour que

$$L = \lim_{x\to 0^+} (1 + 2x)^{3/x} + \alpha \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x} = 0$$

EPR 12 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\sqrt{2} - 2\sin\alpha)^2}{1 - \sin^2 2\alpha} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pi} \frac{(x^2 - (\pi+1)x + \pi)\sin(\frac{\pi - x}{3})}{x^3 - (2\pi+1)x^2 + (\pi^2 + 2\pi)x - \pi^2}$$

EPR 13

(a) Démontrer que la racine carrée d'un nombre entier positif N est dans $\mathbb{Q}$ si et seulement si N est un carré, c'est-à-dire si $N = K^2$, $K \in \mathbb{N}$.

(b) Soient $p' \neq p''$ deux nombres premiers > 1.
Le nombre $\sqrt{p'} + \sqrt{p''} + \sqrt{p'p''}$ est-il rationnel ?

EPR 14 On considère les nombres naturels formés des chiffres $a_0 = 4, a_1, a_2, \ldots, a_{24}$, $a_i \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq 24$. Montrer que si l'on retrouve 13 fois le chiffre 0, ces nombres ne peuvent être les carrés d'un nombre naturel.

EPR 15 Montrer que si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ et que $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$.

EPR 16 Trouver la condition nécessaire et suffisante portant sur $a \neq 1, b$ et c pour que

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

EPR 17 On considère les voyelles a, e, i, o, u et les consonnes m, n, p, r, s, t.

(a) Combien peut-on former de mots de 5 lettres distinctes contenant 2 consonnes et 3 voyelles ?

(b) Combien peut-on former de mots de 7 lettres distinctes contenant 3 consonnes et 4 voyelles, dont o et u apparaissant dans cet ordre (on souhaite avoir le son "ou") ?

EPR 18 Peut-on trouver $x \in \mathbb{Q}$ de telle sorte que $\sqrt{2p(p - \sqrt{p} + 1) + x} = 3\sqrt{p} - 1$ si p est un nombre premier > 1 ? Si x existe, déterminer alors p.

EPR 19 Deux points P_i $(i = 1, 2)$ décrivent des cercles Γ_i de centre Ω_i et de rayon r_i dans le même temps. Les cercles Γ_i sont donnés par :
Γ_1 : $\Omega_1 = (8, 4)$, $r_1 = 2$; Γ_2 passe par l'origine et $\Omega_2 = (2, 2)$. Sachant qu'à chaque instant l'angle entre $\overrightarrow{\Omega_1 P_1}$ et $\overrightarrow{\Omega_2 P_2}$ est égal à $\frac{\pi}{4}$, déterminer l'équation cartésienne du lieu Γ des points M, milieux des segments P_1P_2.

EPR 20 Démontrer la formule de Heron : l'aire d'un triangle de côtés a, b, c et de périmètre $2p$ est égale à $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (cf. § 5.9).

EPR 21 Rendre la plus simple possible l'expression

$$\alpha = \arcsin(2t-1) + 2\arctan\sqrt{\frac{1-t}{t}},\ 0 < t \leq 1.$$

EPR 22 Déterminer α et β pour que la suite de terme général

$$x_n = \frac{1}{n^2+1}\left[\alpha(n^2-n)(1+\sin^2\frac{n\pi}{2}) + \beta(n^2+n)\cos n\pi\right]$$

converge vers 3.

EPR 23 Déterminer le point I d'où l'on peut mener les tangentes communes aux cercles Γ_1 d'équation $x^2+y^2=25$ et Γ_2 d'équation
$x^2+y^2=50-14x-2y$.

EPR 24

a) Etudier la fonction $g(x) = \ln(1+|\sin x|)$.

b) Etudier la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x+2}$ et en tracer le graphe γ ; déterminer, s'il existe, le point T de γ ayant une tangente parallèle à son asymptote δ.

EPR 25

a) Etudier la fonction $f(x) = x+1-e^x$
Donner domaine de définition et éventuelle parité, asymptotes, dérivée de f, tableau de variation de f et les éventuels extrema, représentation graphique de f, (la dérivée seconde n'est pas demandée).

b) La courbe de la fonction $g(x) = 1-x-e^x$ admet-elle une asymptote oblique ? Si oui, déterminer cette asymptote.

c) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ les fonctions données par une expression du type $h(x) = \alpha(x+1)-e^x$ admettent-elles un maximum ?
Donner, en fonction de α, les coordonnées du maximum de h.

d) Calculer l'aire du domaine limité par les courbes de f, de g et les droites d'équation $x=0$ et $x=10$.

EPR 26

On considère la suite de fonctions réelles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n e^x & : \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^n \ln(x) & : \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Soit (C_n) la courbe représentant la fonction f_n.

1. Vérifier que les fonctions f_n sont continues en $x=0$. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ les fonctions f_n sont-elles dérivables en $x=0$?
2. – Etudier les intervalles de croissance et de décroissance de f_1 ($n=1$).
   – Calculer les coordonnées du point d'inflexion de f_1.
   – Représenter la courbe (C_1). (On ne demande pas l'étude complète de la fonction.)
3. Calculer l'aire $A_n(k)$ de la région déterminée par le graphe de f_n et l'axe des abscisses dans l'intervalle $[k;1]$ où $0 < k < 1$.
   Montrer que $\lim\limits_{\substack{k \to 0 \\ k>0}} A_n(k) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EPR 27

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé on donne les points

$$A(0\,;1\,;3),\ B(4\,;3\,;1),\ C(6\,;1\,;-3) \text{ et } D(4\,;-3\,;1).$$

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan ABC.
2. Trouver des équations paramétriques de la hauteur issue de C dans le tétraèdre $ABCD$ (droite normale au plan ABD et passant par C).
3. Calculer l'angle aigu que forment les plans ABC et ABD.
4. Calculer la distance des deux droites gauches AB et CD.
5. Déterminer le centre P de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$, ainsi que son rayon r. Ecrire l'équation de cette sphère.

SOLUTIONS

SPR 1 Démonstration par récurrence : pour $n = 2$, $N_2 = 30$ qui est divisible par 5. Supposons que N_n soit divisible par 5 pour un certain n ; alors

$$N_{n+1} = (n+1)^5 - (n+1) = n^5 - n + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) = N_n + 5M_n \ ;$$

ainsi N_{n+1} est divisible par 5 puisque N_n l'est, cqfd.

SPR 2 Posons $AB = 2a$ et $BC = 2b$. Il découle des relations $b < a$, $ab = 12$ et $a^2 + b^2 = 25$ que $a = 3$ et $b = 4$.
L'égalité $AE = AF$ implique $AB^2 + BF^2 = AD^2 + DE^2$, d'où l'équation $x^2(1-p^2) + 2x(8p-6) = 0$ qui donne $x = 4\dfrac{3-4p}{1-p^2}$.
Les conditions $0 < CE \leq CD$ et $0 < CF \leq CB$ déterminent le système

$$(S)\ :\quad \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & < & \dfrac{6-8p}{1-p^2} & \leq & 3 \\ 0 & < & \dfrac{3p-4p^2}{1-p^2} & \leq & 2 \end{array}\right.$$

Sachant que p est positif, en étudiant le tableau des signes suivant,

p	0	3/4	1	∞
signe de $(6-8p)$	$+$	$\vdots$	$-$	$-$
signe de $(3p-4p^2)$	$+$	$\vdots$	$-$	$-$
signe de $(1-p^2)$	$+$		$+ \ \vdots$	$-$
signe de $(6-8p)/(1-p^2)$	$+$	$\vdots$	$- \ \Vert$	$+$
signe de $(3p-4p^2)/(1-p^2)$	$+$	$\vdots$	$- \ \Vert$	$+$

on constate que les $p > \frac{3}{4}$ ne vérifient pas le système (S). En effet, si $\frac{3}{4} < p < 1$ alors $\frac{6-8p}{1-p^2}$ et $\frac{3p-4p^2}{1-p^2}$ sont < 0 et si $p > 1$ alors l'inéquation $\frac{3p-4p^2}{1-p^2} \leq 2$ n'est pas satisfaite. Le système (S) est donc équivalent à

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 < p < \frac{3}{4} & & \\ 3p^2 - 8p + 3 & \leq & 0 \\ 2p^2 - 3p + 2 & \geq & 0 \end{array}\right. \text{, ce qui implique que } \frac{4-\sqrt{7}}{3} \approx 0,45 \leq p < \frac{3}{4}.$$

SPR 3 On remarque que l'aire algébrique $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} g(x)dx$ ne répond pas à la question.
Pour $\ln 2 \leq x \leq \ln 8$, on peut simplifier $g(x) = \dfrac{(1-2e^x)(1-3e^{-x})}{e^{-x}(1-2e^x)}$ par le facteur $1 - 2e^x$, qui ne s'annule qu'en $x = -\ln 2$, et écrire $g(x) = e^x - 3$. On remarque alors que $g(\ln 2) = -1 < 0$, $g(\ln 8) = 5 > 0$ et que $g(x)$ ne s'annule que pour $x = \ln 3$. Il s'ensuit que sur l'intervalle $[\ln 2, \ln 8]$, $g(x)$ change de signe une seule fois : elle est négative sur $[\ln 2, \ln 3]$ et positive sur $[\ln 3, \ln 8]$. L'aire cherchée A est donc

$$A = -\int_{\ln 2}^{\ln 3} (e^x - 3)dx + \int_{\ln 3}^{\ln 8} (e^x - 3)dx = 4 + 3\ln\frac{9}{16} \approx 2,27.$$

SPR 4 Les coordonnées du point A sont $(a, \sqrt{1-a^2})$.
Posons $S(a) =$ aire $ABCDEFA$; on a alors :

$$\begin{aligned} S(a) &= \text{ aire } CDEOC + \text{ aire } BOFAB = a\sqrt{1-a^2} + \int_0^a \sqrt{1-x^2}dx \\ &= a\sqrt{1-a^2} + F(a) - F(0), \end{aligned}$$

où $F(x)$ est une primitive de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Ainsi,

$$S'(a) = (a\sqrt{1-a^2})' + F'(a) = \sqrt{1-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}} + f(a) = \frac{2-3a^2}{\sqrt{1-a^2}}$$

et S' s'annule et change de signe pour $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$, valeur qui détermine le maximum de $S(a)$.

SPR 5

(a) On remarque que, pour tout x, $7x^2-5x+1 > 0$ et on en déduit que l'inégalité donnée peut être écrite sous la forme $x(x^2-4x+8) \geq 0$, d'où le résultat. Il en découle que, pour $x \geq 0$, le numérateur de $f(x)$ est positif et donc $f(x) > 0$.

(b) On peut écrire $f(x) = x-4+\dfrac{7x+14}{x^2+1}$, d'où l'équation de l'asymptote oblique est $y = x-4$, elle coupe la droite d'équation $y = -x-2$ au point $(1, -3)$ et $f(x) - (x-4) > 0$, pour $x \geq 0$. Compte tenu de (a), l'aire demandée est donc donnée par

$$\begin{aligned} A &= \int_0^6 f(x)dx + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = \int_0^6 (x - 4 + 7\frac{x+2}{x^2+1})dx + 5 \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2}\ln(x^2+1) + 14\arctan x\right]_0^6 + 5 \\ &= \frac{7}{2}\ln 37 + 14\arctan 6 - 1 \approx 31,3. \end{aligned}$$

SPR 6 Soit h la hauteur issue de B. Les propriétés des triangles impliquent que $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ et $S(\alpha) = \frac{1}{2}AC \cdot h$. En utilisant le théorème du sinus on obtient : $S(\alpha) = 4\dfrac{\sin 3\alpha}{\cos\alpha}$ et $S'(\alpha) = 0$ implique

$$\begin{aligned} 0 &= 3\cos 3\alpha \cdot \cos\alpha + \sin 3\alpha \cdot \sin\alpha \\ &= \cos 3\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 3\alpha \cdot \sin\alpha + 2\cos 3\alpha \cdot \cos\alpha + 2\sin 3\alpha \cdot \sin\alpha \\ &= \cos 4\alpha + 2\cos 2\alpha = 2(\cos 2\alpha)^2 + 2\cos 2\alpha - 1 = p(\alpha) \end{aligned}$$

En posant $x = \cos 2\alpha$, il reste à résoudre l'équation $2x^2 + 2x - 1 = 0$ dont la solution admissible est $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Finalement,

$$\alpha = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

définit un maximum de $S(\alpha)$, comme le montre l'étude du signe de $p(\alpha)$.

SPR 7 Supposons que la droite δ soit tangente au cercle γ. Soient T le point de tangence entre eux et O l'origine. Alors $O\Omega = m$ et

$$2m = \text{pente de } \delta = \frac{\Omega T}{OT} = \frac{2}{\sqrt{m^2-4}}.$$

On en déduit que $m^4 - 4m^2 - 1 = 0$, d'où $m = \pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

SPR 8 Il faut rendre minimale la fonction $S = \pi(r_1^2 + r_2^2)$ lorsque $r_1 + r_2 = |\Omega_1\Omega_2| = \sqrt{(2-r_1)^2 + (r_2-1)^2}$, donc lorsque $r_2 = \dfrac{5-4r_1}{2(1+r_1)}$. On peut alors exprimer S en fonction de r_1 seulement : $S(r_1) = \pi(r_1^2 + \frac{(5-4r_1)^2}{4(1+r_1)^2})$ et chercher une condition pour que r_1 vérifie :

$$\begin{aligned} S'(r_1) &= \pi\left(2r_1 - \frac{9(5-4r_1)}{2(1+r_1)^3}\right) \\ &= \pi\left(\frac{4r_1(1+r_1)^3 - 9(5-4r_1)}{2(1+r_1)^3}\right) \\ &= 0\ ; \end{aligned}$$

il en découle que r_1 doit satisfaire l'équation :

$$4r_1^4 + 12r_1^3 + 12r_1^2 + 40r_1 - 45 = 0.$$

SPR 9 Pour que la droite $x = 2$ soit une asymptote verticale, il faut que le dénominateur de $f(x)$ s'annule pour $x = 2$, c'est-à-dire que $4 + 2c + 2 = 0$ donc $c = -3$. Pour que la droite $y = 2x + 3$ soit une asymptote oblique, il faut que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^3 + bx^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} - 2x - 3\right) = 0$$

donc que $a = 2$ et $b = -3 = c$. On vérifie que dans ce cas, le numérateur de $f(x)$ ne s'annule pas pour $x = 2$.

SPR 10 Soit h la hauteur du cylindre et r le rayon de sa base. On cherche à maximaliser $V = \pi r^2 h$ sous la condition : aire totale du cylindre égale $1 = \pi r^2 + 2\pi r h$. On obtient $V(r) = \dfrac{r - \pi r^3}{2}$. L'étude de sa variation donne $V'(r) = \dfrac{1-3\pi r^2}{2} = 0$ pour $r = \dfrac{1}{\sqrt{3\pi}}$, $V'(r) > 0$ pour $r \in]0, \frac{1}{\sqrt{3\pi}}[$ et $V'(r) < 0$ pour $r \in]\frac{1}{\sqrt{3\pi}}, \infty[$. Le volume V est donc maximal lorsque

$$r = h = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \approx 32,6\text{cm}.$$

SPR 11 En posant $x = \dfrac{1}{2t}$, on a :

$$L = \lim_{t\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{6t} + \alpha \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^{2x}} = e^6 + \frac{\alpha}{e^2} = 0.$$

D'où $\alpha = -e^8$.

SPR 12 Pour la première limite, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sqrt{2} - 2\sin\alpha)^2}{1 - \sin^2 2\alpha} &= \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2} - 2\sin\alpha}{\cos 2\alpha}\right)^2 \\ &= \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2}{\sqrt{2} + 2\sin\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pour la deuxième limite, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pi}\frac{(x^2 - (\pi+1)x + \pi)\sin(\frac{\pi-x}{3})}{x^3 - (2\pi+1)x^2 + (\pi^2+2\pi)x - \pi^2} &= \lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)(x-1)\sin(\frac{\pi-x}{3})}{(x-\pi)(x-\pi)(x-1)} \\ &\underset{(x\neq\pi)}{=} \lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\frac{\pi-x}{3})}{x-\pi} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

SPR 13

(a) Décomposons le nombre naturel N en facteurs premiers :
$N = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_\ell^{k_\ell}$ où $p_i \neq p_j$, si $i \neq j$, sont des nombres premiers > 1 et $k_i \in \mathbb{N}^*$.

1. Tous les k_i sont pairs :
   $k_i = 2m_i$ et $\sqrt{N} = p_1^{m_1} \cdots p_\ell^{m_\ell} = K \in \mathbb{N}^*$, d'où $N = K^2$;
2. Un ou plusieurs k_i sont impairs :
   on admettra $k_i = 2m_i + 1$, $m_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, j$. Alors, $\sqrt{N} = N' \sqrt{p_1 \cdots p_j}$ où $N' \in \mathbb{N}^*$; il s'ensuit que $\sqrt{N} \notin \mathbb{Q}$ car $\sqrt{p_1 \cdots p_j} \notin \mathbb{Q}$. En effet, en supposant le contraire, si $\sqrt{p_1 \cdots p_j} = m/n$ où m, n sont des nombres naturels premiers entre eux, alors $m^2 = p_1 p_2 \cdots p_j n^2$ et p_1 est diviseur de m^2, donc diviseur de m : $m = p_1 m'$, ce qui implique $p_1 m'^2 = p_2 \cdots p_j n^2$; ainsi, p_1 est diviseur de n^2, donc diviseur de n : $n = p_1 n'$. C'est une contradiction.

(b) Supposons que le nombre considéré soit rationnel, c'est-à-dire que $\sqrt{p'} + \sqrt{p''} + \sqrt{p'p''} = q \in \mathbb{Q}^+$; on peut donc écrire

$$\sqrt{p'} + \sqrt{p''} = q - \sqrt{p'p''} \quad \text{d'où} \quad p' + 2\sqrt{p'}\sqrt{p''} + p'' = q^2 - 2q\sqrt{p'p''} + p'p''$$

et l'on a $2(1+q)\sqrt{p'p''} = q^2 + p'p'' - p' - p''$, ou aussi

$$\sqrt{p'p''} = \frac{q^2 + p'p'' - p' - p''}{2(1+q)} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est une contradiction puisque $\sqrt{p'p''} \notin \mathbb{Q}$.

SPR 14 Soit N un tel nombre : N contient le chiffre 4 et 11 fois le chiffre 1. La somme de ces chiffres vaut $4 + 11 = 15$; N est donc divisible par 3 sans être divisible par $9 = 3^2$. Donc, il ne peut pas être un carré parfait.

SPR 15 Si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x\frac{1}{y}\right| = |x| \cdot \left|\frac{1}{y}\right|$.
Or, $1 = |1| = \left|y\frac{1}{y}\right| = |y| \cdot \left|\frac{1}{y}\right|$ ce qui implique que $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$. On a donc

$$\left|\frac{x}{y}\right| = |x| \cdot \left|\frac{1}{y}\right| = |x|\frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}.$$

Montrer que $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$ revient à monter que $-|x-y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x-y|$.
Or, $|x| = |(x-y) + y| \leqslant |x-y| + |y|$ d'où $|x| - |y| \leqslant |x-y|$.
De même, $|y| = |(y-x) + x| \leqslant |x-y| + |x|$ d'où $-|x-y| \leqslant |x| - |y|$ et le résultat est démontré.

SPR 16 On note d'abord les conditions d'existence : $a > 0, c > 0$, $-c < b < c$, $c + b \neq 1$ et $c - b \neq 1$. L'égalité considérée s'écrit

$$\frac{\ln a}{\ln(c+b)} + \frac{\ln a}{\ln(c-b)} = 2\frac{\ln a}{\ln(c+b)} \cdot \frac{\ln a}{\ln(c-b)}$$

et est équivalente à $\ln a \cdot \ln(c^2 - b^2) = \ln a \cdot \ln a^2$ c'est-à-dire $\ln(c^2 - b^2) = \ln a^2$. La dernière égalité est vérifiée si et seulement si $c^2 - b^2 = a^2$.

SPR 17

a) La réponse est $\binom{6}{2}\binom{5}{3} \cdot 5! \;=\; 18'000.$

b) La réponse est $\binom{6}{3}\binom{3}{2} \cdot 5! \cdot 6 \;=\; 43'200.$

SPR 18 En élevant les deux membres au carré, on obtient

$$2p^2 - 7p + x - 1 = 2(p-3)\sqrt{p}.$$

Si $p \neq 3$, l'équation $\sqrt{p} = \dfrac{2p^2 - 7p + x - 1}{2(p-3)}$ est impossible car $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$;
si $p = 3$, alors $x = 4$.

SPR 19 On exprime les coordonnées d'un point courant $P_i \in \Gamma_i$ sous forme paramétrique, en tenant compte du déphasage $\frac{\pi}{4}$.

$$P_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x_{P_1} & = & 8 + 2\cos t \\ y_{P_1} & = & 4 + 2\sin t \end{array} \right. , \quad P_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x_{P_2} & = & 2 + 2\sqrt{2}\cos(t + \frac{\pi}{4}) \\ y_{P_2} & = & 2 + 2\sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4}) \end{array} \right. .$$

De $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2})$, on déduit les coordonnées de M :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_M & = & 5 + 2\cos t - \sin t \\ y_M & = & 3 + \cos t + 2\sin t \end{array} \right. ,$$

d'où l'équation cartésienne du lieu Γ : $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 5$.

SPR 20

$$\begin{aligned} \text{Aire du triangle} &= \frac{1}{2}(\text{base}) \cdot (\text{hauteur}) = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \text{ (voir } 1^{\text{ère}} \text{ figure du § 5.9)} \\ &= \frac{1}{2}ab\sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \frac{1}{2}ab\sqrt{(1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma)} \end{aligned}$$

Or, par le théorème du cosinus, on a : $\cos\gamma = \dfrac{1}{2ab}[c^2 - (a^2 + b^2)]$. D'où,

$$\begin{aligned} \text{Aire du triangle} &= \frac{1}{2}ab \cdot \frac{1}{2ab}\sqrt{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b-c)(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)} \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

puisque, par exemple, $a + b - c = 2p - 2c$.

SPR 21 On remarque, par exemple, que pour $t = \frac{1}{2}$ et $t = 1$, on a $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
En utilisant la relation $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ et les formules

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} , \quad \sin 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} , \quad \text{on obtient}$$

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \sqrt{1 - (2t-1)^2} \cdot \frac{1 - \frac{1-t}{t}}{1 + \frac{1-t}{t}} - (2t-1)\frac{2\sqrt{\frac{1-t}{t}}}{1 + \frac{1-t}{t}} \\ &= 2\sqrt{t(1-t)}(2t-1) - (2t-1)2\sqrt{1-t}\sqrt{t} = 0 \end{aligned}$$

et donc $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $t \in]0, 1]$.

SPR 22 Si n est pair, $x_n = \dfrac{(\alpha + \beta)(n^2 - n)}{n^2 + 1}$ tend vers $\alpha + \beta$ lorsque n tend vers ∞ ;
si n est impair, $x_n = \dfrac{(2\alpha - \beta)(n^2 - n)}{n^2 + 1}$ tend vers $2\alpha - \beta$ lorsque n tend vers ∞.
La suite (x_n) converge donc vers 3 si $\alpha + \beta = 2\alpha - \beta = 3$ d'où $\alpha = 2$ et $\beta = 1$.

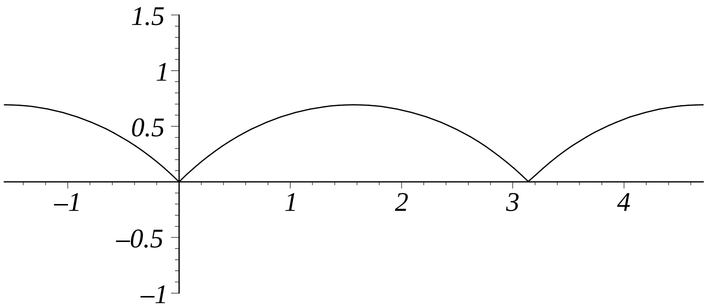
SPR 23 Les centres et les rayons des cercles donnés sont respectivement $\Omega_1(0,0)$, $\Omega_2(-7,-1)$ et $R_1 = 5$, $R_2 = 10$. Il y a, au plus, deux tangentes communes puisque $\delta(\Omega_1,\Omega_2) = 5\sqrt{2} < 15 = R_1 + R_2$. On considère le cercle Γ_2' de centre Ω_2 et de rayon $R_2 - R_1 = 5$ et l'on détermine les tangentes à Γ_2' issues du point $\Omega_1 = O$; on obtient les deux droites t_i' d'équations $4x - 3y = 0$ et $3x + 4y = 0$. Les tangentes t_i communes aux Γ_i, parallèles aux t_i', sont, après calculs, donnés par $4x - 3y = 25$ et $3x + 4y = 25$, d'où $I(7,1)$. On remarque que dans ce problème, on a t_1 perpendiculaire à t_2.

SPR 24

a) Le domaine de définition de g est $D_g = \mathbb{R}$, elle est périodique de période fondamentale π, puisque la fonction sinus a pour période fondamentale 2π et vérifie $|\sin(x+\pi)| = |\sin x|$; il suffit donc de l'étudier sur l'intervalle $[0,\pi]$ et sur cet intervalle $g(x) = \ln(1+\sin x)$. On a alors $g'(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ et $g''(x) = \dfrac{-1}{1+\sin x}$, d'où le tableau de variation :

x	0		$\pi/2$		π
g'	1	$+$	0	$-$	-1
g''		$-$		$-$	
g	0	$\nearrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0

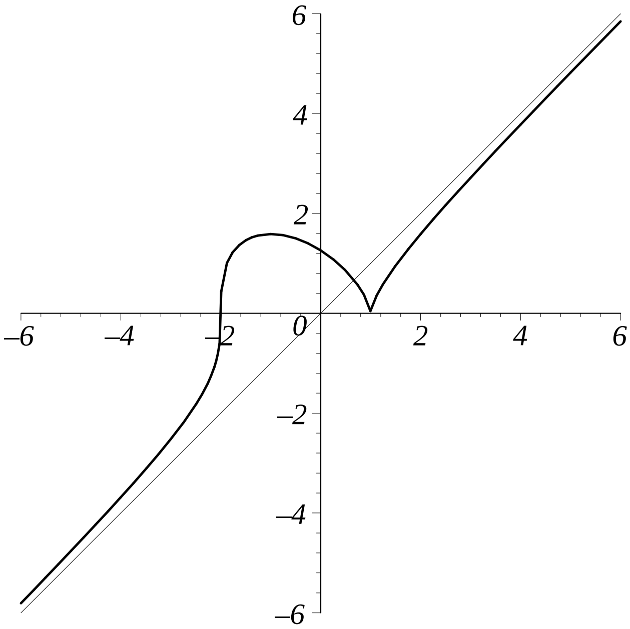
Il en découle que la fonction g a, en $(\frac{\pi}{2}, \ln 2)$, un maximum local et une tangente horizontale, et en $(0,0)$ et $(\pi,0)$ qui sont des points de rebroussement, un minimum local avec une tangente à droite de pente 1 et une tangente à gauche de pente -1 ; g est concave. D'où le graphe de g :



b) La fonction f s'écrit $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)} = (x+2)^{1/3}(x-1)^{2/3}$, son domaine de définition est donc $D_f = \mathbb{R}$; elle s'annule en $x = -2$ et $x = 1$ et change de signe en $x = -2$. On a $f'(x) = (x+1)(x+2)^{-2/3}(x-1)^{-1/3}$ et $f''(x) = -2(x-1)^{-4/3}(x+2)^{-5/3}$ d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f''		$+$	$\Vert$		$-$		$\Vert$	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, f possède un maximum local en $(-1, \sqrt[3]{4})$ et un minimum local en $(1, 0)$ qui est un point de rebroussement à tangentes verticales. En $(-2, 0)$, la tangente à γ est verticale et pour $x \to \pm\infty$, γ est asymptotique à la droite δ d'équation $y = x$ (en effet, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - x = 0$). Le graphe γ est convexe sur l'intervalle $]-\infty, -2[$ et concave sur l'intervalle $]-2, +\infty[$ comme l'indique le signe de f''.



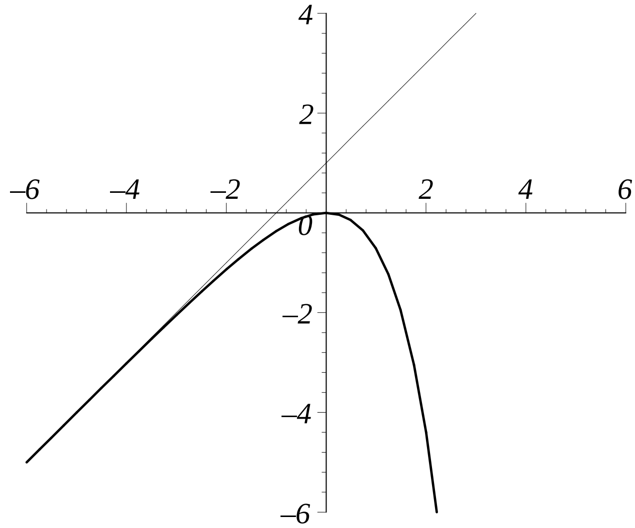
En égalant $f'(x)$ à la pente de l'asymptote δ, on obtient le point $T(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$ où la tangente à γ est parallèle à δ.

SPR 25

a) La fonction f est définie sur tout $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$; elle n'est ni paire ni impaire car $f(-x) = -x + 1 - e^{-x}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$; donc f n'a pas d'asymptote en $+\infty$. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{e^x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1 - e^x) = 1$, la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique en $-\infty$. La dérivée de f, $f'(x) = 1 - e^x$ qui s'annule en $x = 0$, est positive si $x < 0$ et négative si $x > 0$; donc f a un maximum en $(0, 0)$ et son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

d'où son graphe :



b) En $-\infty$, g s'écrit $g(x) = 1 - x + \delta(x)$ avec $\lim_{x\to-\infty} \delta(x) = \lim_{x\to-\infty} -e^x = 0$; donc la courbe de la fonction g admet une asymptote oblique en $-\infty$ qui est la droite d'équation $y = -x + 1$. En $+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = -\infty$ donc g n'y a pas d'asymptote oblique.

c) Pour que les fonctions h admettent un extremum en $(x_0, h(x_0))$, il faut que $h'(x_0) = \alpha - e^{x_0} = 0$ c'est-à-dire $\alpha = e^{x_0} > 0$. Alors, $h'(x) > 0$ pour $x < \ln\alpha$ et $h'(x) < 0$ pour $x > \ln\alpha$; donc les fonctions h admettent un maximun et les valeurs cherchées sont $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Dans ce cas, les coordonnées du maximun de h sont $(\ln\alpha, \alpha\ln\alpha)$.

d) On remarque que $f(x) - g(x) = 2x > 0$ pour $x > 0$ et on en déduit que l'aire demandée est

$$A = \int_0^{10} (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^{10} 2x\, dx = x^2\Big|_0^{10} = 100$$

SPR 26

1. Comme $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(0) = 0$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^n e^x = 0 = f_n(0)$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n \ln(x) = 0 = f_n(0)$, d'où les f_n sont continues en $x = 0$. Les fonctions f_n sont dérivables en $x = 0$ pour $n > 1$; en effet, elles le sont si $\lim_{h\to 0} \dfrac{f_n(h) - f_n(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f_n(h)}{h}$ existe ; or

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f_n(h)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} h^{n-1} e^h = \begin{cases} 1 & \text{, si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{, si} \quad n > 1 \end{cases}$$

et

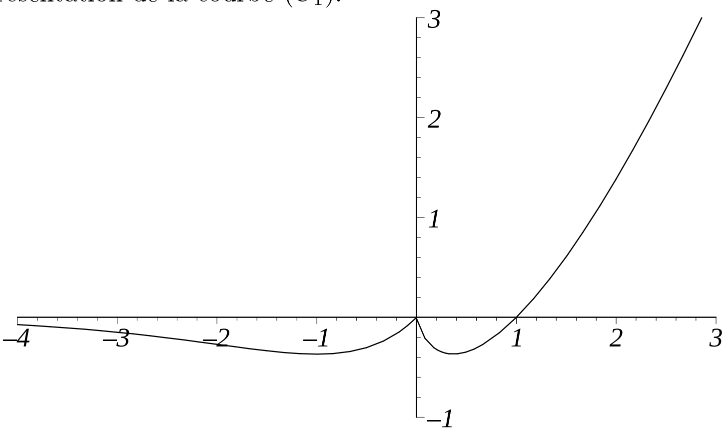
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f_n(h)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} h^{n-1} \ln(h) = \begin{cases} -\infty & \text{, si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{, si} \quad n > 1 \end{cases}$$

2. – On a

$$f_1'(x) = \begin{cases} e^x(1+x) & \text{, si} \quad x \le 0 \\ \ln(x) + 1 & \text{, si} \quad x > 0 \end{cases} ;$$

il en découle que, sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]0, e^{-1}[$, $f_1' < 0$ et donc f_1 est décroissante, et sur les intervalles $]-1, 0[$ et $]e^{-1}, +\infty[$, $f_1' > 0$ et donc f_1 est croissante.

- Pour $x < 0$, $f_1''(x) = e^x(x+2)$ s'annule et change de signe en $x = -2$, d'où f_1 a un point d'inflexion de coordonnées $(-2, -2e^{-2})$. Pour $x > 0$, $f_1''(x) > 0$ donc il n'y a pas d'autres points d'inflexion.
- Représentation de la courbe (C_1).



3. Sur l'intervalle $]0,1]$, $f_n(x) \leq 0$, d'où $A_n(k) = -\int_k^1 x^n \ln(x)\, dx$ qu'on calcule par parties et l'on obtient :

$$A_n(k) = 0 + \frac{k^{n+1}}{n+1}\ln(k) + \int_k^1 \frac{x^n}{n+1}\, dx = \frac{k^{n+1}}{n+1}\ln(k) + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{k^{n+1}}{(n+1)^2}$$

En remarquant que $\lim\limits_{\substack{k \to 0 \\ k>0}} k^{n+1}\ln(k) = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{k \to 0 \\ k>0}} A_n(k) &= \lim_{\substack{k \to 0 \\ k>0}} \left(\frac{k^{n+1}}{n+1}\ln(k)\right) + \frac{1}{(n+1)^2} - \lim_{\substack{k \to 0 \\ k>0}} \left(\frac{k^{n+1}}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

SPR 27

1. Le plan ABC a pour vecteurs directeurs les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix},$$

qui ne sont pas colinéaires. Le vecteur

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} = -12 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est donc un vecteur normal au plan. Il en découle que l'équation cartésienne du plan ABC est de la forme $x - y + z + \alpha = 0$ où α est une constante que l'on détermine en écrivant que les coordonnées de A vérifient l'équation du plan. La réponse est donc $x - y + z - 2 = 0$.

2. On a

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \overrightarrow{d} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{d}$ est un vecteur directeur de la hauteur issue de C dans le tétraèdre $ABCD$; en écrivant que $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \lambda\,\overrightarrow{d}$ où $Q(\,x\,;\,y\,;\,z\,)$ est un point de la hauteur et λ un nombre réel, on obtient les équations paramétriques suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6+\lambda \\ y & = & 1 \\ z & = & -3+2\lambda \end{array}\right. \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Notons φ l'angle aigu que forment les plans ABC et ABD. Comme $\overrightarrow{n}$ est normal à ABC et $\overrightarrow{d}$ normal à ABD, on a

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{d}\,|}{\|\overrightarrow{n}\|\cdot\|\overrightarrow{d}\,\|} = \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \approx 0.7746,$$

d'où $\varphi \approx 0,6847$ radians ($\approx 39°$).

4. On a

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \ , \ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \ \text{ d'où } \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

La distance $\delta(AB, CD)$ des deux droites AB et CD est donc donnée par :

$$\delta(AB, CD) = \frac{|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{AC}|}{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}\|} = \frac{72}{12\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

5. Les coordonnées $(\,x\,;\,y\,;\,z\,)$ du centre P de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$ vérifient les équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ x-3 & = & z \\ 2x-4 & = & z-y \end{array}\right.$$

qui découlent, après simplifications, des relations : $\|\overrightarrow{BP}\|^2 = \|\overrightarrow{DP}\|^2 = r^2$, $\|\overrightarrow{AP}\|^2 = \|\overrightarrow{CP}\|^2 = r^2$ et $\|\overrightarrow{AP}\|^2 = \|\overrightarrow{BP}\|^2 = r^2$. En résolvant le système, on obtient $x = 1$, $y = 0$ et $z = -2$ donc $P(\,1\,;\,0\,;\,-2\,)$.
Pour déterminer le rayon, il suffit de calculer $\|\overrightarrow{AP}\|$; on trouve $r = 3\sqrt{3}$.
L'équation de la sphère de centre P et de rayon r est donc :

$$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2 = 27 \quad \text{autrement dit} \quad x^2+y^2+z^2-2x+4z-22 = 0.$$

CHAPITRE 1

Opérations, structure des nombres

Exercices

E1.1 Démontrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs N' et N'' est toujours divisible par 4.

E1.2 A l'aide de la formule de la somme d'une progression arithmétique, déterminer la somme des n premiers nombres impairs. Vérifier par récurrence l'exactitude du résultat.

E1.3 On considère le trinôme $P(x) = x^2 - 2(m+2)x + (m^2 + 4m + 3)$ où m est un paramètre dans $\mathbb{Z}$.

a) Calculer $P(m+1)$.

b) Déduire que $P(x)$ est divisible par $x - m - 1$.

c) Factoriser $P(x)$.

d) Pour quels nombres entiers $m \in \mathbb{Z}$ les racines du trinôme $P(x)$ sont-elles des nombres naturels inférieurs à 6 ?

E1.4 Montrer qu'un nombre naturel est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9. En déduire aussi la condition de divisibilité par 3.

E1.5 On considère les triangles rectangles d'hypoténuse a et de cathètes b et c. Déterminer $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ lorsque $c = 34$. Même question pour $c = 35$.

E1.6 Démontrer que $\sqrt[3]{333}$ n'est pas rationnel.

E1.7 Déterminer si le nombre réel $r = 3^{1/2} - 2^{1/3}$ est rationnel.

E1.8

a) Ecrire le nombre $r = \dfrac{\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}$ sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

b) Déterminer $q \in \mathbb{Q}$ pour que le produit de $r_1 = \sqrt{\dfrac{7}{2}} + q\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ par $r_2 = \dfrac{5\sqrt{2} - \sqrt{42}}{2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}$ soit rationnel.

E1.9 Montrer que $r = (\sqrt{1+\alpha^2} - \alpha)^{1/3} - (\sqrt{1+\alpha^2} + \alpha)^{1/3}$ est racine de l'équation $x^3 + 3x + 2\alpha = 0$. Déterminer alors si $\delta = (\sqrt{5} - 2)^{1/3} - (\sqrt{5} + 2)^{1/3}$ est rationnel ou non.

E1.10 Effectuer les divisions suivantes :

a) $\dfrac{x^6 + 5x^4 + 40x^3 + 15x + 1}{x + 3}$.

b) $\dfrac{-3x^6 + x^5 + 3x^4 - 5}{x^2 + 1}$.
REMARQUE : il est également possible d'effectuer la division "en sens inverse" c'est-à-dire en commençant par les puissances les plus petites.

c) $\dfrac{-5 + 3x^4 + x^5 - 3x^6}{1 + x^2}$ [b) "en sens inverse"].

E1.11 Décomposer en une somme d'éléments simples les fractions suivantes :

$$\text{a) } \frac{7x^3 - 3x^2 - 6x + 1}{x^4 + x^3 + x + 1}; \quad \text{b) } \frac{2x^3 - 3}{x^3 - x^2 + 2x - 2}$$

E1.12 Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions simples :

$$\text{a) } \frac{7 - 3x}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}; \qquad \text{b) } \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^8}$$

E1.13 Pour quelle valeur de p la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $R(x) = \dfrac{-4x^3 + px^2 + 6x + 3}{x^4 - 1}$ possède-t-elle un numérateur d'élément simple qui s'annule en $x = 0$?

E1.14 Soit $p > 0$ et $m \in \mathbb{Z}$.

a) Simplifier l'expression $A = [-p(-p^{-2})^m]^{-2m}$.
Déterminer m pour que A soit égal à 16^5 lorsque $p = 2$.

b) Simplifier : $B = (p^{4/3} - p^{2/3} + 1)(p^{2/3} + 1)$.

c) Expliciter, en fonction de n, $r_n = \sqrt{pr_{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $r_0 = 1$.

d) Rendre rationnel le dénominateur de $D = \dfrac{6 + 12^{1/2} + 18^{1/2} + 54^{1/2}}{3^{1/2} + 2^{1/2}}$.

Effectuer les produits puis montrer que $D = \dfrac{24^{1/2}}{3^{1/2} - 1}$.

E1.15 Simplifier l'expression $E = \dfrac{a^{4x} - 1}{a^x + a^{-x}}$.

E1.16 Evaluer, sans calculatrice, $N = 3\log_2(\frac{1}{16}) + 2\log_{\sqrt{3}}(27)$.

E1.17 Montrer que si $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ sont des ensembles distincts, il y en a au moins un qui ne contient aucun des autres.

E1.18 Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des ensembles. Montrer que

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \times \mathcal{C} = (\mathcal{A} \times \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \times \mathcal{C})$$

E1.19 En substituant à x des valeurs numériques dans la formule du binôme, calculer

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots + C_n^{2p} + \cdots \quad \text{et} \quad C_n^0 + 2C_n^2 + 4C_n^4 + \cdots + 2^p C_n^{2p} + \cdots$$

E1.20

a) Combien de nombre à 6 chiffres différents peut-on former avec les chiffres de 1 à 8 ?

b) Même question, si chaque chiffre ne peut apparaître qu'une seule fois.

c) Combien de nombres différents à 7 chiffres et à 6 chiffres peut-on former avec les chiffres suivants : 1 - 1 - 1 - 3 - 4 - 4 - 5 ?

E1.21 Une urne contient 10 boules blanches, 5 boules noires et 5 boules rouges. Si l'on tire 5 boules,

a) Quel est le pourcentage des cas où l'on ne tire que des boules blanches ?

b) Quel est le pourcentage des cas où l'on tire les 3 couleurs avec autant de boules noires que de rouges ?

c) Quel est le pourcentage des cas où l'on tire plus de boules noires que de blanches ?

E1.22

a) Pour $z = 1 + i\sqrt{3}$, calculer $\bar{z}$, $|z|$, $\arg z$, z^{-1} et z^3.

b) Donner les racines de léquation $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$ sous formes polaire et cartésienne.

c) Exprimer sous forme polaire les racines cubiques de $w = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{i}$.

E1.23

a) Trouver tous les z satisfaisant la relation $|z| - 9i = 3z - 7$.

b) Trouver tous les z satisfaisant l'égalité $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

E1.24 Montrer, en utilisant la formule de Moivre, que $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$.

E1.25 Pour quelles valeurs de l'entier n le nombre complexe $(\sqrt{3}+i)^n$ est-il un nombre réel positif, réel négatif ou imaginaire pur ?

Notions théoriques

1.1 Classification des nombres

La notion de nombre regroupe les cas suivants :

$\mathbb{N}$: l'ensemble infini dénombrable des nombres *naturels*. Parmi ceux-ci, on distingue les *nombres premiers*, caractérisés par le fait qu'ils sont divisibles uniquement par 1 et eux-mêmes, et les nombres naturels *décomposables*, caractérisés par le fait qu'ils ne sont pas premiers. A noter qu'il existe une infinité de nombres premiers.

$\mathbb{Z}$: l'ensemble des nombres *entiers* qui sont les nombres naturels affectés du signe $+$ ou $-$, excepté 0 qui n'a pas de signe.

$\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres *rationnels* qui sont les quotients de 2 nombres entiers, 0 n'étant jamais au dénominateur. On peut exprimer ces nombres sous forme de nombres décimaux où les décimales forment un paquet fini ou se répétant indéfiniment après un certain rang tels que, par exemple, $\frac{54}{125} = 0,432$ ou $\frac{4271}{3700} = 1,15432432432\ldots$

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres *réels* formé par tous les nombres décimaux.

On notera, comme dans [9], $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, etc.

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{N}$, tout nombre se décompose de manière unique en produit de nombres premiers.

Dans $\mathbb{N}$, on dit que b est un *diviseur* de a (ou que b *divise* a) s'il existe un entier k tel que $a = kb$. On dit aussi que a est *divisible* par b.

Le $PGCD$ de a et b est le plus grand élément de l'ensemble des diviseurs communs à a et à b. Cet élément existe car l'ensemble dénombrable des diviseurs communs à a et b est non vide puisque 1 en fait partie et est majoré par a puisque si d divise a et b il est plus petit ou égal à a. On le désigne par la notation $PGCD(a, b)$.

Le $PPCM$ de a et b est le plus petit éléments de l'ensemble des multiples communs à a et b qui sont strictement posititfs. Cet élément existe car cet ensemble dénombrable est non vide puisque ab en fait partie, et est une partie de $\mathbb{N}$ par définition. On le désigne par la notation $PPCM(a, b)$.

Les nombres a et b sont dits *premiers entre eux* si leur $PGCD$ vaut 1 ; ceci signifie qu'ils n'ont d'autres diviseurs communs que 1 et -1.

Pour illustrer la propriété $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
Démonstration : Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous forme de fraction irréductible, c'est-à-dire

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

avec $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et a et b premiers entre eux. En élevant les deux membres de l'équation au carré, on obtient

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \qquad \Rightarrow a^2 = 2b^2,$$

ce qui signifie que a^2 est pair et donc que a l'est aussi. On peut donc écrire a sous la forme $a = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. D'où $b^2 = \frac{a^2}{2} = 2n^2$ est donc pair, ce qui implique

que b l'est aussi. Mais dans ce cas la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible puisque a et b sont divisibles par 2. Il y a donc contradiction et il est impossible que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, d'où $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ cqfd.

1.2 Opérations sur les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont munis de deux lois internes : l'addition (notée $+$) et la multiplication (noté $\cdot$). Ces lois vérifient les propriétés suivantes.

Propriétés : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$,

$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	commutativité
$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	associativité
$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$	éléments neutres
$\forall a,\ \exists b$ tel que $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$	$\forall a \neq 0,\ \exists b$ tel que $a \cdot b = 1 \Rightarrow b = 1/a$	existence d'inverses
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$		distributivité

Un ensemble possédant de telles propriétés est appelé un *corps* (les corps des rationnels et des réels dans notre cas).

Identités remarquables :

$$\begin{array}{rcl}
(a+b)^2 &=& a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &=& a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b+c)^2 &=& a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\
(a+b)(a-b) &=& a^2 - b^2 \\
(a+b)^3 &=& a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a-b)^3 &=& a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
(a-b)(a^2+ab+b^2) &=& a^3 - b^3 \\
(a+b)(a^2-ab+b^2) &=& a^3 + b^3
\end{array}$$

Binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} a^{n-p}\, b^p$$

où $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = C_n^p$ sont les coefficients binomiaux (cf.1.12).

1.3 Relation d'ordre et ensemble ordonné

Soit E un ensemble et R une relation sur E. R est une *relation d'ordre* si $\forall x, y, z \in E$:

xRx	réflexivité,
xRy et $yRx \Rightarrow x = y$	symétrie,
xRy et $yRz \Rightarrow xRz$	transitivité.

L'ensemble (E, R) s'appelle alors *ensemble ordonné*.
Exemples : les ensembles $(\mathbb{N}, \leqslant), (\mathbb{Z}, \leqslant), (\mathbb{Q}, \leqslant)$ et $(\mathbb{R}, \leqslant)$ sont des ensembles ordonnés. Par analogie, on note souvent R par $\leqslant$.
On dit que $x < y$ si $x \leqslant y$ et $x \neq y$ et $x > y$ si $y < x$. Dans les ensembles ci-dessus, on a trois cas, $x < y$, $x = y$ ou $x > y$.

Propriétés de monotonie :

$$\begin{array}{rcl} x \leqslant y & \Rightarrow & x + z \leqslant y + z\,, \qquad \forall z \\ 0 \leqslant x \text{ et } 0 \leqslant y & \Rightarrow & 0 \leqslant xy \end{array}$$

1.4 Division polynomiale

Méthode standard :

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l} 3x^4 & - & 7x^3 & + & 4x^2 & & & + & 4 & x-2 \\ \cline{10-10} 3x^4 & - & 6x^3 & & & & & & & 3x^3 - x^2 + 2x + 4 \\ \cline{1-3} & - & x^3 & & & & & & & \\ & - & x^3 & + & 2x^2 & & & & & \\ \cline{2-5} & & & & 2x^2 & & & & & \\ & & & & 2x^2 & - & 4x & & & \\ \cline{5-7} & & & & & & 4x & & & \\ & & & & & & 4x & - & 8 & \\ \cline{7-9} & & & & & & & & 12 & \end{array}$$

Cas particulier :
Division d'un polynôme $P(x)$ par un monôme $(x - x_0)$: la méthode appelée **schéma de Horner** permet d'obtenir rapidement la valeur des coefficients du quotient. On écrit

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - x_0)\left(b_n x^{n-1} + \cdots + b_2 x + b_1\right) + b_0,$$

ce qui implique $a_n = b_n$ puis $a_k = b_k - x_0 b_{k+1}$ c'est-à-dire la relation récurrente $b_k = a_k + x_0 b_{k+1}$, $k = n-1, n-2, \ldots, 0$.
Pour effectuer l'algorithme, on forme un tableau de 3 lignes et $n+1$ colonnes où n est le degré de $P(x)$. On porte sur la première ligne, en commençant par la première colonne, les coefficients $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$. La deuxième ligne est formée de $0, x_0 b_n, \ldots, x_0 b_1$ et la dernière de $b_n = a_n, b_{n-1}, \ldots, b_0 = P(x_0)$.
Exemple : $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 4$ et $x_0 = 2$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & -7 & 4 & 0 & 4 \\ & & 6 & -2 & 4 & 8 \\ & & \cdot 2 & \cdot 2 & & \\ \hline + & 3 & -1 & 2 & 4 & 12 \end{array}$$

$$3x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 4 = (x-2)\cdot(3x^3 - x^2 + 2x + 4) + 12.$$

Le dernier terme de la troisième ligne est $P(x_0)$, ici $P(2) = 12$.

Divisibilité
Un polynôme $P(x)$ est divisible par un polynôme $D(x)$ s'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = D(x) \cdot Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

> **Règle** :
> Si un polynôme $P(x)$ s'annule en $a \in \mathbb{R}$, alors il est divisible par $x - a$.

1.5 Décomposition en éléments simples

Soit la fraction $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Si le degré de $P(x)$ est supérieur ou égal au degré de $Q(x)$, on effectue la division. Soit $R(x)$ le reste de la divison. La fraction $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ peut se décomposer en éléments simples de première et de deuxième espèce. Tout polynôme $(x-a)^n$ figurant dans la factorisation de $Q(x)$ fait apparaître une somme d'éléments appelés *éléments simples de première espèce*, de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(x-a)^i}\ , \quad A_i \in \mathbb{R}.$
Tout polynôme irréductible $(x^2+bx+c)^m$ tel que $\Delta = b^2 - 4c < 0$, présent dans la factorisation de $Q(x)$, fait apparaître une somme d'éléments appelés *éléments simples de deuxième espèce*, de la forme

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{B_j x + C_j}{(x^2+bx+c)^j}\ , \quad B_j, C_j \in \mathbb{R}.$$

Remarque : on peut montrer que tout polynôme $Q(x)$ peut être factorisé de façon unique dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdots (x-a_m)^{k_m} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{l_1} \cdots (x^2+b_nx+c_n)^{l_n},$$

où $k_1, \dots k_m, l_1, \dots l_n \in \mathbb{N}^*$ et l'on a : $k_1 + \cdots + k_m + 2(l_1 + \cdot + l_n) =$ degré de Q.

Exemple : soit la fraction $\frac{6x^6+x^5-2x^4+x+5}{x^4-x^3-x+1}$. On peut effectuer la division selon la méthode standard et l'on obtient :

$$\frac{6x^6+x^5-2x^4+x+5}{x^4-x^3-x+1} = 6x^2+7x+5+\frac{11x^3+x^2-x}{x^4-x^3-x+1}.$$

La fraction $\frac{11x^3+x^2-x}{x^4-x^3-x+1}$ peut être décomposée en une somme d'éléments simples. Remarquons d'abord que $x^4-x^3-x+1 = (x-1)^2(x^2+x+1)$. On aura donc

$$\frac{11x^3+x^2-x}{x^4-x^3-x+1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1}.$$

On peut trouver la valeur des coefficients A_1, A_2, B_1 et C_1 en sommant les fractions et en égalant les numérateurs de part et d'autre de l'égalité :

$$A_1(x-1)(x^2+x+1) + A_2(x^2+x+1) + (B_1x+C_1)(x-1)^2 = 11x^3+x^2-x \quad (*)$$

On obtient ainsi un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues à résoudre :

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 11 \\ A_2 - 2B_1 + C_1 = 1 \\ A_2 + B_1 - 2C_1 = -1 \\ -A_1 + A_2 + C_1 = 0 \end{cases}$$

dont les solutions sont $A_1 = \frac{23}{3}$, $A_2 = \frac{11}{3}$, $B_1 = \frac{10}{3}$ et $C_1 = 4$.
REMARQUE : on peut simplifier le calcul, en posant $x = 1$ dans $(*)$: on obtient ainsi $3A_2 = 11$, d'où A_2.

1.6 Puissances et racines

Propriétés : $\forall x$ réel > 0 et r, s rationnels,

$$\begin{array}{rcl} x^0 & = & 1 \\ x^{p/q} & = & \sqrt[q]{x^p} \quad (p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}^*) \\ x^r \cdot x^s & = & x^{(r+s)} \\ (x^r)^s & = & x^{(r \cdot s)} \end{array}$$

EXEMPLE : $3^{0,75} = 3^{3/4} = (3^3)^{1/4} = \sqrt[4]{27}$.

1.7 L'exponentiel et le logarithme

Nombre d'Euler

$$\boxed{e \quad := \quad \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \quad \approx 2,71828}$$

Exponentiel
On appelle *exponentiel de base* $a > 0$ le nombre a^x, ou aussi la fonction $x \mapsto a^x$, ayant les propriétés suivantes :

Propriétés :

$$\begin{array}{rcl} a^x \cdot a^y & = & a^{(x+y)} \\ \frac{a^x}{a^y} & = & a^{(x-y)} \\ (a^x)^y & = & a^{(x \cdot y)} \end{array}$$

On appelle e^x *exponentiel* de x.

Logarithme naturel
On appelle *logarithme naturel de* $x > 0$, le nombre noté $\ln x$ et donné par :

$$\boxed{e^{\ln x} \quad = \quad x, \quad \forall x > 0}$$

Propriétés : $\forall x, y > 0$,

$$\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1, \quad (e \approx 2,71828)} \\ \ln(x \cdot y) & = & \ln x + \ln y \\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) & = & \ln x - \ln y \end{array}$$

$\forall x > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} \ln(x^y) & = & y \ln(x) \\ \ln(e^y) & = & y \end{array}$$

Logarithme de base $a > 0$, $a \neq 1$
On appelle *logarithme de base* a de $x > 0$, noté $\log_a(x)$, le nombre

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \text{ qui vérifie } a^{\log_a(x)} = x.$$

On note $\log(x)$ le logarithme de base 10 de x.
Pour la définition des fonctions exponentielles et logarithmes, voir le chapitre 3.

1.8 Intervalles

Soit $A \neq \emptyset$ un sous-ensemble de l'ensemble ordonné $\mathbb{R}$.

Minorant
A est dit *minoré* s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a $x \geq a$. Le nombre a est appelé *minorant* de A.

Majorant
A est dit *majoré* s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que pout tout $x \in A$ on a $x \leq b$. Le nombre b est appelé *majorant* de A.

Sous-ensemble borné
A est dit *borné*, s'il est à la fois minoré et majoré.

Infimum
Un minorant $a \in \mathbb{R}$ est dit *infimum* ou *borne inférieure* de A, noté $a = \inf A$, si a est le plus grand minorant. Si A n'est pas minoré, on pose $\inf A = -\infty$.

Supremum
Un majorant $b \in \mathbb{R}$ est dit *supremum* ou *borne supérieure* de A, noté $b = \sup A$, si b est le plus petit majorant. Si A n'est pas majoré, on pose $\sup A = +\infty$.

Minimum
Un minorant $a \in \mathbb{R}$ est dit *minimum* de A, noté $a = \min A$, si $a = \inf A$ et $a \in A$.

Maximum
Un majorant $b \in \mathbb{R}$ est dit *maximum* de A, noté $b = \max A$, si $b = \sup A$ et $b \in A$.

Intervalles bornés
Un intervalle est un sous-ensemble $A \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}$ qui contient tous les nombres entre $\inf A$ et $\sup A$. Pour les intervalles bornés, on a quatre possibilités suivant

que $\inf A$ et $\sup A$ appartiennent ou n'appartiennent pas à l'intervalle. Soient $-\infty < a < b < +\infty$.

Intervalle ouvert :	$]a,b[$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
Intervalle fermé :	$[a,b]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$.
Intervalle semi-ouvert à gauche :	$]a,b]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$.
Intervalle semi-ouvert à droite :	$[a,b[$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$.

Intervalles non bornés

Intervalle ouvert :	$]-\infty,b[$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.
Intervalle fermé (à gauche) :	$[a,+\infty[$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$.

Remarque : selon les situations, $\mathbb{R}$ peut être considéré comme un ensemble ouvert ou fermé.

1.9 Valeur absolue

A tout nombre réel x, on peut associer le nombre réel positif ou nul défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

et $|x|$ est appelé la *valeur absolue* de x.
Il en découle que

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \qquad \text{et} \qquad |x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \ \text{ ou } \ x > a \qquad \text{et} \qquad |x| \geqslant a \Leftrightarrow x \leqslant -a \ \text{ ou } \ x \geqslant a.$$

Propriétés : Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

Homogénéité :	$\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert\lvert y\rvert$.
Inégalité triangulaire :	$\lvert x+y\rvert \leqslant \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$.
Positivité :	$\lvert x\rvert \geqslant 0$ et
	$\lvert x\rvert = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Conséquences :

- Si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
- $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$.

1.10 Les différents types de démonstrations

1.10.1 Démonstration directe

Elle consiste à démontrer la proposition énoncée (par exemple un théorème) en partant directement des hypothèses données et en arrivant à la conclusion par une suite d'implications logiques.

Exemple :
Soit n un nombre entier positif ou nul ($n \in \mathbb{N}$) et considérons $P(n) = n^2+7n+12$. Alors il n'existe pas n tel que $\sqrt{P(n)} \in \mathbb{N}$.
Démonstration :

$$\text{Pour tout } n\,, \quad n^2 + 6n + 9 < n^2 + 7n + 12 < n^2 + 8n + 16,$$

$$\text{d'où } (n+3)^2 < P(n) < (n+4)^2,$$
$$\text{donc } |n+3| < \sqrt{P(n)} < |n+4|.$$

Puisque $n+3>0$, on déduit que

$$n+3 < \sqrt{P} < (n+3)+1, \quad \text{d'où } \sqrt{P} \notin \mathbb{N} \qquad \text{cqfd.}$$

1.10.2 Démonstration par l'absurde

Elle consiste à supposer le contraire de la proposition énoncée et de montrer qu'on aboutit alors à une contradiction (impossibilité).

Exemple :
Soit $P(n) = n^2 + 2n - 21$; alors $\sqrt{P(n)} \notin \mathbb{N}$.
Démonstration : supposons que pour un certain n, $P(n)$ soit un carré parfait.
On peut poser : $n^2 + 2n - 21 = (p+1)^2 = p^2 + 2p + 1$, $\quad p \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow n^2 - p^2 + 2(n-p) = 22 \Rightarrow \underbrace{(n-p)}_{\in\mathbb{N}} \cdot \underbrace{(n+p+2)}_{\in\mathbb{N}} = 22 = 1 \cdot 22 = 2 \cdot 11.$$

$$\left.\begin{array}{lcccc} n+p+2 & = & 22 & & 11 \\ & & & \text{ou} & \\ n-p & = & 1 & & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2p+2 = 21 \quad \text{ou} \quad 9$$

$$\Rightarrow p = \frac{19}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{7}{2} \notin \mathbb{N}, \text{ contradiction.}$$

1.10.3 Démonstration par récurrence ou induction

On l'utilise dans le cas où la proposition fait intervenir (directement ou indirectement) les nombres naturels; en particulier, le résultat est fonction de l'indice $n \in \mathbb{N}^*$.
Méthode : on montre d'abord que le résultat est vrai pour n=1 (ou plus généralement pour un indice $N_0 \in \mathbb{N}$) ; puis on démontre, en admettant qu'il est vrai pour n, $n \geq 1$(plus généralement $n \geq N_0$), qu'il reste vrai pour $n+1$.

Exemple : Vérifier $S(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \qquad (**)$
Démonstration : on a, pour n=1, $\quad 1^2 = \dfrac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \qquad \Rightarrow 1 = 1 \qquad$ vrai.
Admettons l'égalité vraie pour n ; alors

$$S(n+1) = 1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = S(n)+(n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1];$$

c'est $(**)$, où l'on a remplacé n par $n+1$ $\qquad$ cqfd.

Attention : il faut montrer que le résultat est vrai pour $n=1$. Admettre qu'un résultat est vrai pour n et montrer qu'il reste vrai pour $n+1$ ne suffit pas !
Contre-exemple : soit $S(n) = -1+3\cdot 2-3+3\cdot 4-5+3\cdot 6-\ldots-(2n-1)+3\cdot 2n$.
Admettons que $S(n) = (n+1)(2n+1)$. Alors,

$$S(n+1) = S(n)-(2n+1)+3\cdot 2(n+1) = (n+1)(2n+1)-(2n+1)+6n+6 = 2n^2+7n+6$$
$$= (n+2)(2n+3) = [(n+1)+1][2(n+1)+1].$$

Mais $S(1) = -1+6 \neq 2 \cdot 3 \quad !$

1.10.4 Le rôle des hypothèses, conditions nécessaires et suffisantes

Si les hypothèses ne sont pas vérifiées, la conclusion proposée n'est pas forcément fausse !
EXEMPLE :
Hypothèse : soit $x = 10n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Conclusion : x est divisible par 5.
Le nombre 15 ne vérifie pas l'hypothèse. Il est pourtant divisible par 5 !

Soient A, B, et C des propriétés, on note $\bar{A}$, $\bar{B}$, et $\bar{C}$ les propriétés non A, respectivement non B et non C. d'une manière générale, si $A \Rightarrow B$, alors $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ (non B implique non A), mais $\bar{A} \not\Rightarrow \bar{B}$.

(A ou B) $\Rightarrow C$ est démontré si l'on montre que $A \Rightarrow C$ ou $B \Rightarrow C$.
$A \Rightarrow$ (B et C) est démontré si l'on montre que $A \Rightarrow B$ et $A \Rightarrow C$.
De plus, on a
(A et B) $\Rightarrow C$ est démontré si l'on montre que (A et $\bar{C}$) $\Rightarrow \bar{B}$.
(A et B) $\Rightarrow C$ est démontré si l'on montre, qu'il existe une propriété D telle que (A et B et $\bar{C}$) $\Rightarrow$ (D et $\bar{D}$).

Conditions nécessaires et suffisantes
EXEMPLE 1 :
Les conditions suivantes sont vraies si l'on veut qu'un nombre soit divisible par 6 :
Condition nécessaire : il doit être divisible par 2.
Condition suffisante : il est divisible par 12.
Condition nécessaire et suffisante : il est divisible par 2 et par 3.

EXEMPLE 2 :
Les conditions suivantes sont vraies si l'on veut qu'un quadrilatère Q soit un losange :
Condition nécessaire : Q est un parallélogramme.
Condition suffisante : Q est un carré.
Condition nécessaire et suffisante : les diagonales de Q se coupent perpendiculairement en leur milieu.

1.11 Notions de la théorie des ensembles

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des ensembles.
Inclusion : $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{A} \Rightarrow a \in \mathcal{B}$.
Intersection : $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \Leftrightarrow x \in \mathcal{A}$ et $x \in \mathcal{B}$.
Réunion : $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Leftrightarrow x \in \mathcal{A}$ ou $x \in \mathcal{B}$.
Complémentaire : $x \in \bar{\mathcal{A}} \Leftrightarrow x \notin \mathcal{A}$ (parfois $\bar{\mathcal{A}}$ est noté $\mathcal{A}^c$).
Cardinalité d'un ensemble fini : card($\mathcal{A}$) = nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{A}$.
REMARQUE : $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ si et seulement si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Propriétés :

commutativité
$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$$
associativité
$$\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C}$$
distributivité
$$\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \quad \text{et} \quad \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C})$$
lois de Morgan
$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c \quad \text{et} \quad (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cup \mathcal{B}^c$$

Différence : $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c$.
Différence symétrique : $\mathcal{A} \vartriangle \mathcal{B} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \setminus (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c) \cup (\mathcal{A}^c \cap \mathcal{B})$.
Principe d'inclusion-exclusion : $\text{card}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \text{card}(\mathcal{A}) + \text{card}(\mathcal{B}) - \text{card}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.
Produit cartésien : $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in \mathcal{B}\}$;
$\text{card}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \text{card}(\mathcal{A}) \cdot \text{card}(\mathcal{B})$.

1.12 Introduction à l'analyse combinatoire

Permutations
Le nombre de possibilités de ranger n objets parmi n distinguables est

$$\boxed{P_n = A_n^n \quad = \quad n!}$$

Arrangements de p objets parmi n
Le nombre de possibilités de ranger p objets choisis parmi n, en tenant compte de l'ordre, est

$$\boxed{A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) \quad = \quad \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Combinaisons de p objets parmi n
Si l'on ne tient pas compte de l'ordre des objets dans le rangement, le nombre de possibilités est alors

$$\boxed{C_n^p \quad = \quad \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Propriétés :

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \qquad \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$$
$$C_n^p = C_n^{n-p} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix}$$
$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \qquad \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix}$$

Triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Remarque : il découle de la formule du binôme de Newton que $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Remarque
Si l'on dispose d'une infinité d'exemplaires de n objets, ou si l'on effectue un tirage avec remise, on augmente le nombre de possibilités.
On obtient dans ce cas :

$$\boxed{A_n^{'p} = n^p} \quad \text{et} \quad \boxed{C_n^{'p} = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}}$$

Nombre de possibilités d'avoir n_i fois le $i^{\text{ème}}$ objet, $i = 1, 2 \ldots, k$:

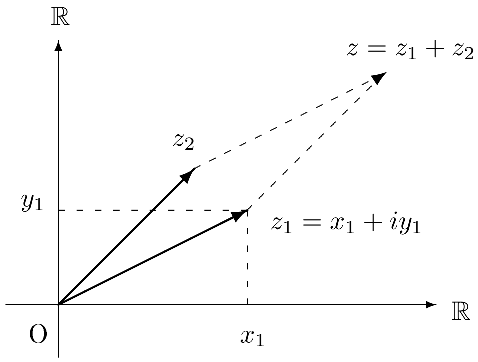
$$\boxed{P_n'(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}}$$

1.13 Introduction aux nombres complexes, éléments de $\mathbb{C}$

Un nombre complexe z est de la forme, $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $i^2 = -1$. On appelle x *partie réelle* de z et y *partie imaginaire* de z et on note $x =$ Re z, $y =$ Im z et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Deux nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ sont égaux si et seulement si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.
Remarque : si Im $z = 0$ alors $z \in \mathbb{R}$ et on a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

On représente géométriquement l'ensemble $\mathbb{C}$ par le plan $\mathbb{R}^2$, muni d'un repère orthonormé directe, qu'on appelle *plan complexe* et on dit qu'un point du plan est d'*affixe* $z = x + iy$ s'il a pour coordonnées (x, y) comme dans la figure ci-dessous.



1.13.1 Opérations sur $\mathbb{C}$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$
$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i.$$

Module

Si $z = x+iy$, le nombre réel $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est appelé le *module* de z. Si $z \in \mathbb{R}$, $|z|$ est égal à la valeur absolue ($\sqrt{x^2} = |x|$). Dans le plan complexe, $|z|$ représente la distance d'un point d'affixe z à l'origine d'affixe 0.

Propriétés du module. Pour $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a :

1. Positivité : $|z| \geq 0$ et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. Homogénéité : $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$.
3. Inégalité triangulaire : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

CONSÉQUENCES :

- Si $z_2 \neq 0$, $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$.

Conjugué complexe

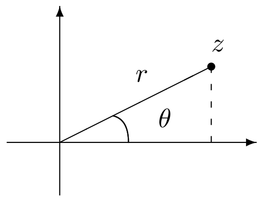
Si $z = x + iy$, le nombre $\bar{z} = x - iy$ est appelé le *conjugué complexe* de z.

Propriétés du conjugué. Pour $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a :

1. $\bar{\bar{z}} = z$.
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$.
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$.
4. Si $z_2 \neq 0, \overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$.
5. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ et $|\bar{z}| = |z|$.
6. Si $z \neq 0, z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
7. $\text{Re}z = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \text{Im}z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

1.13.2 Représentation polaire des nombres complexes

Soit $z = x+iy \neq 0$. Donc $|z| = r \neq 0$ et $\frac{z}{r}$ correspond à un point unique sur le cercle unité. Il existe ainsi une valeur θ, unique dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, telle que $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$



θ est appelé *l'argument* de z et on le note $\theta = \arg z$. Ainsi défini, le couple (r, θ) détermine un seul z.
REMARQUE : (r, θ'), où $\theta' = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ définit un nombre complexe z' égal à z.

Tout nombre complexe $z \neq 0$ peut donc s'écrire sous forme polaire :

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

où $r = |z|$ et $\theta = \arg z$.

Formule de Moivre. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

La formule de Moivre reste vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

Calcul en représentaion polaire. Soit $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), k = 1, 2$.

1. $\bar{z_k} = r_k(\cos\theta_k - i\sin\theta_k)$.
2. Si $z_k \neq 0$, $\frac{1}{z_k} = \frac{1}{r_k}(\cos\theta_k - i\sin\theta_k)$.
3. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\big)$.
4. $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Multiplier par un nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$ correspond donc à une homothétie de centre O et de rapport r suivie d'une rotation de même centre et d'angle θ.

1.13.3 Racines d'un nombre complexe

Proposition : Soient $s > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et n un entier positif. L'équation

$$z^n = s(\cos\beta + i\sin\beta)$$

admet exactement n solutions distinctes qui sont de la forme

$$z = \sqrt[n]{s} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{où} \quad \theta = \frac{\beta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Racine carrée (expression algébrique).
Les solutions de l'équation $z^2 = a + ib$, $b \neq 0$ sont

$$z = \pm\Big[\operatorname{sgn} b\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}\Big].$$

(voir § 3.3 pour la fonction sgn)

Solutions

S1.1 Soient N' et N'' deux nombres impairs consécutifs. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $N' = 2n-1$ et $N'' = 2n+1$, d'où $N' + N'' = 4n$, multiple de 4.

S1.2 Notons $S(n)$ la somme cherchée :

$$S(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2 \ ;$$

on a bien $S(1) = 1 = 1^2$ et $S(n+1) = S(n) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

S1.3

a) On a $P(m+1) = (m+1)^2 - 2(m+2)(m+1) + (m^2 + 4m + 3) = m^2 + 2m + 1 - 2(m^2 + 3m + 2) + m^2 + 4m + 3 = 0$.

b) Le trinôme $P(x)$ s'annule en $x = (m+1)$; il est donc divisible par $x - (m+1)$.

c) On divise $P(x)$ par $x - m - 1$ et on obtient : $P(x) = (x - m - 1)(x - m - 3)$.

d) Les racines du trinôme étant $m+1$ et $m+3$, la condition imposée implique $m \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

S1.4 Un nombre naturel N peut s'écrire de manière unique comme suit :

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

où $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Alors,

$N = a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \cdots + a_2(10^2 - 1) + a_1(10 - 1) + a_n + \cdots + a_1 + a_0$.

Or, pour $k \in \{1, \ldots, 9\}$, $(10^k - 1)$ est divisible par 9. Donc si $a_n + \cdots + a_0$ est divisible par 9, alors N est divisible par 9.
Il s'ensuit également que si $a_n + \cdots + a_0$ est divisible par 3, N l'est aussi.

S1.5 Le système à résoudre est $\left\{ \begin{array}{l} a + b = d' \\ a - b = d'' \end{array} \right.$ où $d' > d''$ sont des entiers tels que $d'd'' = c^2$. Pour $c = 34$, on obtient $(a, b) = (290, 288)$ et pour $c = 35$, on a :

$$(a, b) \in \{(613, 612), (125, 120), (91, 84), (37, 12)\}.$$

S1.6 Si l'on suppose que $\sqrt[3]{333} = \dfrac{a}{b}$, où $a, b \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux (1), alors $333b^3 = a^3$, d'où 3 est diviseur de a^3 ; donc 3 est aussi diviseur de a. On écrit $a = 3a'$, $a' \in \mathbb{N}^*$ et on a $333b^3 = 27a'^3$ ou aussi $37b^3 = 3a'^3$ ce qui implique que 3 divise b^3 ; donc 3 est diviseur de b. Il en découle que a et b ont un diviseur commun, ce qui contredit (1).

S1.7 On a : $\sqrt{3} - r = \sqrt[3]{2}$, d'où $r^3 + 9r + 2 = (3r^2 + 3)\sqrt{3}$ c'est-à-dire $\dfrac{r^2 + 9r + 2}{3(r^2 + 1)} = \sqrt{3}$. Si $r \in \mathbb{Q}$, alors la fraction est rationnelle, ce qui est impossible car $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$; donc $r \notin \mathbb{Q}$.

S1.8

a) On amplifie la fraction par le conjugué du dénominateur soit $2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$, d'où

$$r = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 2\sqrt{2})(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}) = 11 + \frac{7}{2}\sqrt{10}.$$

b) Après transformation, comme pour a), on peut écrire $r_2 = \sqrt{14} + \sqrt{6}$.

On doit avoir $\left(\sqrt{\dfrac{7}{2}} + q\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)(\sqrt{14} + \sqrt{6}) = q' \in \mathbb{Q}$ d'où $(\sqrt{7} + q\sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = q'$ et $(1+q)\sqrt{21} = q' - 3q - 7$, d'où nécessairement $q = -1$ et $q' = 4$.

S1.9 On vérifie que $r^3+3r+2\alpha=0$ en utilisant la formule du cube de $a+b$. Si $\alpha=2$, alors $r=\delta$ d'où $\delta^3+3\delta+4=0=(\delta+1)(\delta^2-\delta+4)$; on en conclut que la seule racine réelle est $\delta=-1$, nombre entier, d'où $(\sqrt{5}-2)^{1/3}-(\sqrt{5}+2)^{1/3}\in\mathbb{Q}$.

S1.10

a) $\dfrac{x^6+5x^4+40x^3+15x+1}{x+3}=x^5-3x^4+14x^3-2x^2+6x-3+\dfrac{10}{x+3}$.

b) $\dfrac{-3x^6+x^5+3x^4-5}{x^2+1}=-3x^4+x^3+6x^2-x-6+\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

c) $\dfrac{-5+3x^4+x^5-3x^6}{1+x^2}=-5+5x^2-2x^4+\dfrac{x^5-x^6}{1+x^2}$.

S1.11

a) On factorise d'abord le dénominateur et on obtient : $x^4+x^3+x+1=(x+1)^2(x^2-x+1)$. On aura donc

$$\frac{7x^3-3x^2-6x+1}{x^4+x^3+x+1}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

On peut trouver la valeur des coefficients A_1, A_2, B et C en identifiant les deux membres de l'égalité. On obtient ainsi un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues à résoudre :

$$\begin{cases} A_1+B=7 \\ A_2+2B+C=-3 \\ -A_2+B+2C=-6 \\ A_1+A_2+C=1 \end{cases}$$

dont la solution est $A_1=6$, $A_2=-1$, $B=1$ et $C_1=-4$. La fraction s'écrit donc :

$$\frac{7x^3-3x^2-6x+1}{x^4+x^3+x+1}=\frac{6}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{x-4}{x^2-x+1}.$$

b) Dans ce cas,

$$\frac{2x^3-3}{x^3-x^2+2x-2}=2+\frac{2x^2-4x+1}{(x-1)(x^2+2)}=2+\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2};$$

A, B et C doivent vérifier le système $\begin{cases} A+B=2 \\ B-C=4 \\ 2A-C=1 \end{cases}$ dont la solution est : $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{7}{3}$ et $C=-\frac{5}{3}$. Ainsi, $\dfrac{2x^3-3}{x^3-x^2+2x-2}=2-\dfrac{1}{3(x-1)}+\dfrac{7x-5}{3(x^2+2)}$

S1.12

a) La décomposition de cette fraction est de la forme $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$, d'où l'on tire

$$7-3x=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$$

En posant $x=1$, respectivement 2 et 3, on trouve $A=2$, $B=-1$ et $C=-1$ d'où $\dfrac{7-3x}{x^3-6x^2+11x-6}=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}$.

b) En écrivant $x = (x-1)+1$, on obtient au numérateur l'expression $(x-1)^2 + 3(x-1)+3$, par conséquent,

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^8} = \frac{3}{(x-1)^8} + \frac{3}{(x-1)^7} + \frac{1}{(x-1)^6}.$$

S1.13 On a $R(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ et la condition imposée implique $D = 0$. Il s'en suit :

$$A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + Cx(x^2-1) = -4x^3 + px^2 + 6x + 3,$$

d'où, en posant $x = 1$ puis $x = -1$ et enfin $x = 0$, on obtient $A = \frac{1}{4}(p+5)$, $B = -\frac{1}{4}(p+1)$ et $3 = \frac{1}{4}(p+5) + \frac{1}{4}(p+1)$, ce qui implique que $p = 3$.

S1.14

a) $A = p^{2m(2m-1)}$; $\quad m = -2$.

b) $B = p^2 + 1$.

c) $r_n = p^{1-2^{-n}}$.

d) $D = 3\sqrt{2} + \sqrt{6} = \sqrt{6}(\sqrt{3}+1)$.

S1.15 On a $E = a^{2x}\dfrac{a^{2x} - a^{-2x}}{a^x + a^{-x}} = a^{2x}\dfrac{(a^x + a^{-x})(a^x - a^{-x})}{a^x + a^{-x}} = a^{3x} - a^x$.

S1.16 On a $N = 3\log_2(2^{-4}) + 2\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^6 = 3\cdot(-4) + 2\cdot 6 = 0$.

S1.17 On va démontrer cette proposition par l'absurde. On suppose donc que chaque $\mathcal{A}_i$, $i = 1,2,3$ contient au moins un autre. Il existe donc j tel que $\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_1$, $j = 2$ ou $j = 3$. De même, il existe k tel que $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_j$, $k \neq j$ et $k \neq 1$, car si $k = 1$ on aura $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_1$ donc $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_j$ ce qui contredit l'hypothèse. On en déduit que si $j = 2$ alors $k = 3$ et si $j = 3$ alors $k = 2$. Soit m tel que $\mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}_k$. Par le même raisonnement, on peut voir que $m \neq k$ et $m \neq j$ donc $m \neq 2$ et $m \neq 3$ d'où $m = 1$; mais $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_1$ implique que les trois ensembles sont identiques ce qui n'est pas possible. Cette contradiction montre qu'il existe au moins un des $\mathcal{A}_i$ qui ne contient aucun autre $\mathcal{A}_j$.

S1.18 Montrons d'abord que $(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\times\mathcal{C} \subset \mathcal{A}\times\mathcal{C}\cup\mathcal{B}\times\mathcal{C}$. Soit $(x,y) \in (\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\times\mathcal{C}$; on a alors $x \in (\mathcal{A}\cup\mathcal{B})$ et $y \in \mathcal{C}$, donc $x \in \mathcal{A}$ ou $x \in \mathcal{B}$ et $y \in \mathcal{C}$ ce qui revient à dire $(x,y) \in \mathcal{A}\times\mathcal{C}$ ou $(x,y) \in \mathcal{B}\times\mathcal{C}$; d'où $(x,y) \in \mathcal{A}\times\mathcal{C}\cup\mathcal{B}\times\mathcal{C}$ ce qui implique l'inclusion ci-dessus.
Réciproquement, si $(x,y) \in \mathcal{A}\times\mathcal{C}\cup\mathcal{B}\times\mathcal{C}$, alors $(x,y) \in \mathcal{A}\times\mathcal{C}$ ou $(x,y) \in \mathcal{B}\times\mathcal{C}$. Le couple (x,y) est tel que $x \in \mathcal{A}$ et $y \in \mathcal{C}$ ou $x \in \mathcal{B}$ et $y \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire $x \in (\mathcal{A}\cup\mathcal{B})$ et $y \in \mathcal{C}$. On en déduit que $(x,y) \in (\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\times\mathcal{C}$ et donc que $\mathcal{A}\times\mathcal{C}\cup\mathcal{B}\times\mathcal{C} \subset (\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\times\mathcal{C}$. Les deux inclusions obtenues impliquent l'égalité cherchée.

S1.19 On a

$$\frac{(1+1)^n + (1-1)^n}{2} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots + C_n^{2p} + \cdots = 2^{n-1}$$

De même,

$$\frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2} = C_n^0 + 2C_n^2 + 4C_n^4 + \cdots + 2^p C_n^{2p} + \cdots$$

S1.20

a) La réponse est $8^6 = 262'144$.

b) Dans ce cas, la réponse est $\frac{8!}{2!} = 20'160$.

c) Il y a 420 nombres à 7 chiffres et $180 + 60 + 120 + 60 = 420$ à 6 chiffres.

S1.21

a) Nombre de cas favorables : 252. Nombre de cas possibles : $15'504$; d'où le pourcentage est $1,63\%$.

b) Nombre de cas favorables : $3000 + 1000 = 4000$. Nombre de cas possibles : $15'504$; d'où le pourcentage est $25,8\%$.

c) Pour le nombre de cas favorables, il faut considérer tous les cas où l'on a plus de boules noires que de boules blanches (9 cas). Par exemple pour le cas 3 noires 1 blanche (et donc 1 rouge) on aura $\binom{5}{3}\binom{10}{1}\binom{5}{1} = 500$ cas possibles. En tout, on a par conséquent : Nombre de cas favorables : $25 + 100 + 100 + 25 + 1 + 1000 + 500 + 50 + 450 = 2251$. Nombre de cas possibles : $15'504$ donc le pourcentage est $14,5\%$.

S1.22

a) $\bar{z} = 1 - i\sqrt{3}$, $|z| = 2$, $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$, $z^{-1} = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{4}$ et $z^3 = -8$.

b) Noter que $1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. La forme polaire des deux racines est donc $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$, $z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$, et la forme cartésienne est $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$, $z_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$.

c) On a aussi $w = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, d'où $|w| = 2^{-1/2}$ et $\arg w = \frac{7\pi}{4}$. Les racines cubiques sont donc données par $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\big(\cos(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})\big)$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

S1.23

a) On doit résoudre l'équation $\sqrt{x^2 + y^2} - 9i = 3x + 3yi - 7$, c'est-à-dire $\sqrt{x^2 + y^2} = 3x - 7 \geq 0$ et $3y = -9$. On obtient une unique solution $z = 4 - 3i$.

b) On a l'identité $(1-z)\cdot(1+z\cdots+z^6) = 1-z^7$, donc $1+z\cdots+z^6 = 0$ équivaut à $1-z^7 = 0$ et $z \neq 1$. Les solutions de $z^7 = 1$, $z \neq 1$ sont alors $\cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

S1.24 On a $(\cos t + i\sin t)^3 = \cos 3t + i\sin 3t$, d'où

$$\begin{aligned}\sin 3t &= \operatorname{Im}(\cos^3 t + 3i\cos^2 t\sin t - 3\cos t\sin^2 t - i\sin^3 t)\\ &= 3(1 - \sin^2 t)\sin t - \sin^3 t = 3\sin t - 4\sin^3 t.\end{aligned}$$

S1.25 Posons $z = \sqrt{3} + i$. On a alors $|z| = 2$, $\arg z = \frac{\pi}{6}$. Donc

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) \text{ et } z^n = 2^n\big(\cos(\frac{n\pi}{6}) + i\sin(\frac{n\pi}{6})\big).$$

On en déduit que z est réel positif pour $n = 12k$, $k \in \mathbb{Z}$, z est réel négatif pour $n = 6(1 + 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$ et z est imaginaire pur pour $n = 3(1 + 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

CHAPITRE 2

Résolution des équations

Exercices

E2.1 Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation

$$x^2 - x + 3 = \frac{2x^3 + x^2 - 8x + 6}{x + 2}.$$

E2.2 Expliciter les valeurs positives de x satisfaisant la relation $\dfrac{x}{1 - \frac{1}{x}} = \dfrac{x - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$.

E2.3 Résoudre l'équation $x|x| - 6x + 7 = 0$.

E2.4 Résoudre le système $\begin{cases} x < 1 - 2|x| \\ 4x^2 + 7x - 2 \leq 0 \end{cases}$

E2.5 Un promeneur se trouve sur un barrage dont la hauteur du mur est 284 m. Il aimerait connaître la hauteur de la *colonne d'eau* contre le barrage, en son milieu. Pour ce faire, il lance une pierre en direction du lac, avec un angle de 30° au-dessus de l'horizontale et une vitesse initiale de 10 m/s. La pierre atteint la surface de l'eau après 4 secondes. Quelle est la hauteur de la colonne d'eau ? (On admettra pour simplifier les calculs et permettre une résolution sans calculatrice que l'accélération due à la pesanteur est de 10 m/s^2).

E2.6 Une voiture est arrêtée à 98 m d'un individu. A un instant donné, elle démarre et roule avec une accélération constante. Si l'accélération est de 4 m/s^2, après combien de temps la voiture passe-t-elle devant l'individu ?
Si une seconde voiture, partie du même endroit, met le double de temps pour atteindre l'individu, quelle est son accélération (qu'on suppose constante) ?

E2.7 Résoudre

$$2\left(e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x}\right) = e^{\frac{1}{2}x} + 5e^{-\frac{1}{2}x}.$$

E2.8

a) Expliciter y en fonction de x sachant que

$$\ln(e^y - e^x) = y + \ln 2 - \ln(e^y + e^x).$$

b) Résoudre $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 13 - \dfrac{15}{x}) < 1 + \log_{\frac{1}{2}} 2(x - 15)$.

E2.9 Déterminer le paramètre p pour que le système (S) : $\begin{cases} (p+6)x + py = 3 \\ px + y = p - 2 \end{cases}$
possède une infinité de solutions.

E2.10 On appelle *forme quadratique* une expression du type $Q(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$, où x et y sont des variables et a, b, c, d, e et f des nombres réels. L'équation $Q(x, y) = 0$ définit, en général, une conique. Résoudre le système suivant (intersection d'une conique et d'une droite) :

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3xy - 5x + y - 2 = 0 \\ x + 3y + 7 = -1 \end{cases}$$

E2.11 Trouver les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ des points situés à la fois :
- sur un cercle contenu dans un plan parallèle au plan Oxy, de centre $(2, 3, 4)$ et de diamètre égal à la distance entre ces deux plans ;
- dans le plan passant par les points $A = (1, 4, 8)$, $B = (2, 3, 4)$ et $C = (4, 1, 1)$.

(voir chapitre 4).

E2.12 Résoudre $|x| + |2 - x| \leqslant x + 1$.

E2.13 Résoudre $x - 4 > \sqrt{2x(x - 7)}$.

E2.14 En utilisant les relations $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y)$ pour $xy \neq 0$ et $x \cdot \operatorname{sgn}(x) = |x|$ pour $x \neq 0$, résoudre

$$|x| \cdot \left(24x^{-2} + \operatorname{sgn}(x^3 + x^2 + x)\right) < 10.$$

E2.15 Déterminer le domaine D du plan complexe défini par : $c|z - i| \leq |z + 4 + 7i|$ lorsque (a) $c = 1$, (b) $c = \sqrt{2}$.

E2.16 Montrer que pour $a, b, c > 0$, on a :
1) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$;
2) $(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$.

Notions théoriques

On peut transformer une équation en une équation équivalente en :
- additionnant un même terme aux deux membres,
- multipliant ou divisant les deux membres par un réel non nul,
- élevant les deux membres au carré (par exemple) ; dans ce cas, il est nécessaire d'imposer éventuellement certaines conditions auxiliaires.

2.1 Equations algébriques

On dit qu'une équation est algébrique sur $\mathbb{R}$, respectivement sur $\mathbb{C}$, si elle est de la forme

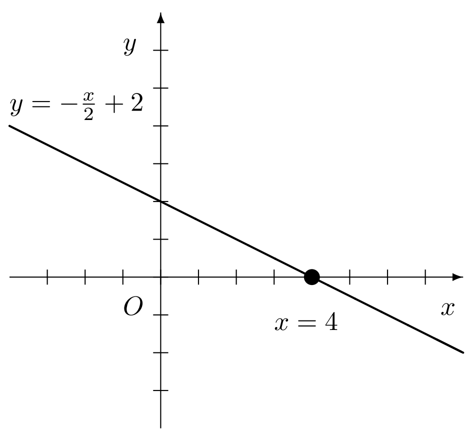
$$P(x) = 0,$$

où P est un polynôme à coefficients réels, respectivement complexes. Cependant, une équation algébrique sur $\mathbb{R}$ peut avoir comme solution un nombre complexe, par exemple $x^2 + e = 0$. A noter qu'une équation ayant pour solution un nombre réel n'est pas forcément algébrique sur $\mathbb{R}$; par exemple, l'équation non algébrique $e \cdot x - e^x = 0$ possède la solution unique $x = 1$.
Propriétés :
Si un nombre complexe z est racine d'un polynôme P à coefficients réels, alors $\overline{z}$ et aussi racine de P.
Toute équation algébrique sur $\mathbb{C}$ se linéarise, c'est-à-dire si $P(x)$ est un polynôme de degré n à coefficients complexes, alors il existe $z_1, \ldots, z_n$ tels que $P(x) = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \cdots \cdot (x - z_n)$.

2.1.1 Equations linéaires

L'équation $ax + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$ peut aussi s'écrire $ax = -b$. Si $a \neq 0$, alors la solution de l'équation est $x = -\frac{b}{a}$.
Si $a = 0$ on obtient $0 \cdot x = b$; dans ce cas, si $b \neq 0$ l'équation n'a pas de solution et si $b = 0$, tout nombre réel est solution de l'équation.

Pour résoudre graphiquement $ax + b = 0$, il est nécessaire d'ajouter une dimension pour pouvoir "représenter" l'équation dans le plan. On dessinera donc la droite $y = ax + b$ dans $\mathbb{R}^2$ et la solution sera donnée par l'abscisse de l'intersection de la droite avec l'axe des x.



Si l'on doit résoudre graphiquement

$$ax + b = cx + d,$$

on peut procéder de deux manières : soit dessiner les deux droites $y = ax + b$ et $y = cx + d$, soit tracer la droite $\tilde{y} = (a - c)x + (b - d)$. Dans le premier cas la solution sera donnée par l'abscisse de l'intersection des deux droites, voir 2.3.1, dans le second cas on se ramène à la résolution de $\tilde{a}x + \tilde{b} = 0$.

2.1.2 Equations de degré deux

Considérons l'équation de degré deux suivante :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a, b, c \text{ réels et } a \neq 0).$$

En divisant tous les coefficients de l'équation par a et en posant $p = \frac{b}{a}$ et $q = \frac{c}{a}$, on peut l'écrire sous forme *normale* :

$$x^2 + px + q = 0.$$

On trouve la solution de cette équation en complétant le carré :

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$

ce qui donne,

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si l'on se restreint aux solutions réelles, il est nécessaire que le discriminant soit supérieur ou égal à zéro ; si celui-ci est négatif, on obtient comme solutions des nombres complexes. La situation est la suivante :

$b^2 - 4ac > 0$	deux racines réelles
$b^2 - 4ac = 0$	une racine double réelle
$b^2 - 4ac < 0$	deux racines complexes conjuguées

Si l'équation est sous forme normale, on a les relations suivantes entre les racines et les coefficients (*formules de Viète*) :

Formules de Viète

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{et} \quad x_1x_2 = q$$

Ces relations se généralisent pour des polynômes de degré supérieur, notamment pour le polynôme $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Si l'on note les racines x_1, x_2 et x_3 les relations sont alors

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = -p \quad ; \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q \quad ; \quad x_1x_2x_3 = -r}$$

2.2 Equations transcendantes

Toutes les équations non algébriques sont appelées *transcendantes*. Parmi elles se trouvent les équations exponentielles, logarithmiques et trigonométriques.

2.2.1 Equations exponentielles

Exemples

1) Résoudre $4^{2x} = 8$.
On ramène les deux membres de l'équation à une forme exponentielle de même base : $(2^2)^{2x} = 2^3$ ou $2^{4x} = 2^3$; il en découle que $4x = 3$ et $x = \frac{3}{4}$.

2) Résoudre $9 \cdot 3^x \cdot 27^x = 81$.
On écrit l'équation sous la forme : $3^2 \cdot 3^x \cdot 3^{3x} = 3^4$ ou $3^{2+4x} = 3^4$ et on en déduit que $2 + 4x = 4$ donc $x = \frac{1}{2}$.

3) Résoudre $7 \cdot 2^x + 2^{x+3} + 2^{x+2} = 76$.
L'équation s'écrit $2^x(7 + 8 + 4) = 76$ ou $2^x = 2^2$, ce qui implique que $x = 2$.

2.2.2 Equations logarithmiques

Exemples

1) Résoudre $\log_a(x + 1) + \log_a(3) = \log_a(6)$.
Pour que $\log_a(x + 1)$ existe, on doit avoir $x > -1$; dans ce cas, l'équation s'écrit : $\log_a(3x + 3) = \log_a(6)$. D'où $3x + 3 = 6$ et $x = 1$.

2) Résoudre $\log(x - 2) + \log(x - 5) = 1$.
On doit chercher $x > 5$ pour que les deux logarithmes soient définis. On écrit l'équation sous la forme : $\log(x^2 - 7x + 10) = 1$ et on en déduit que x vérifie $x^2 - 7x + 10 = 10$ dont les solutions sont $x = 0$ et $x = 7$. Seule $x = 7$ satisfait la condition $x > 5$ et est donc la solution cherchée.

3) Résoudre $3^{x+2} = 2^{3x-5}$.
On égalise le logarithme des deux membres de l'équation et on obtient :
$\log(3^{x+2}) = \log(2^{3x-5})$ qui s'écrit $(x + 2)\log(3) = (2x - 5)\log(2)$ et implique
$x = \dfrac{2\log(3) + 5\log(2)}{2\log(2) - \log(3)}$.

2.3 Systèmes d'équations linéaires

Un système d'équations est dit *sous-déterminé* s'il a plus d'inconnues que d'équations et *sur-déterminé* s'il a plus d'équations que d'inconnues. En règle générale, un système d'équations sous-déterminé possède une infinité de solutions et un système sur-déterminé ne possède pas de solution. On se limitera aux cas de deux équations à deux inconnues respectivement trois équations à trois inconnues et on présentera deux méthodes de résolution qui peuvent être appliquées aussi bien à l'un ou l'autre cas.

2.3.1 Deux équations à deux inconnues

Soit le système suivant :

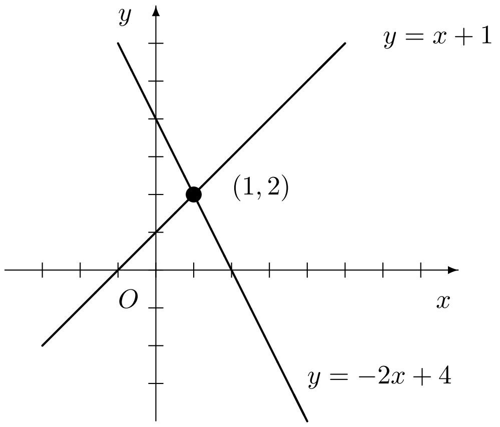
$$\begin{cases} x + 3y = 15 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

La première méthode de résolution est la *substitution* :
La deuxième équation, par exemple, peut s'écrire $y = 2x - 2$; en substituant y dans la première, on obtient une équation à une inconnue et l'on trouve $x = 3$, d'où $y = 4$, voir 2.1.1.

On peut également résoudre graphiquement un tel système. Prenons par exemple les deux équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} y+2 & = & x+3 \\ 2y+3 & = & -4x+11 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & x+1 \\ y & = & -2x+4 \end{array}\right.$$

Si l'on représente les deux droites $y = x + 1$ et $y = -2x + 4$ dans le plan, leur intersection $I(1; 2)$ fournit la solution cherchée.



2.3.2 Trois équations à trois inconnues

La seconde méthode de résolution consiste à éliminer une inconnue à chaque étape, par *combinaisons linéaires*. Soit le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=5 \\ 3x-y+2z=2 \\ 2x+y-z=4 \end{array}\right.$$

Dans cet exemple, on peut faire disparaître l'inconnue y si l'on additionne la première et la deuxième équation et la deuxième et la troisième équation. On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+3z=7 \\ 5x+z=6 \end{array}\right.$$

On peut dès lors poursuivre le même principe ou procéder à une substitution, et l'on obtient comme solution $x = 1$, $y = 3$ et $z = 1$.

Il est également possible de résoudre un tel système graphiquement (par exemple en géométrie descriptive). Dans ce cas, chaque équation représente un plan dans $\mathbb{R}^3$. La solution, si elle existe, sera donnée par l'intersection des plans.

2.4 Systèmes d'équations non linéaires

Ces systèmes résultent souvent de problèmes géométriques.

2.4.1 Une équation linéaire et une équation quadratique

Un tel système est facile à résoudre par la méthode de substitution.
Exemple
Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-4x-1=0 \\ x-y=1 \end{array}\right.$$

On écrit $x = y + 1$, d'après la deuxième équation, et en substituant x dans la première, on obtient l'équation quadratique $y^2 - y - 2 = 0$ qui a pour solutions $y_1 = -1$ et $y_2 = 2$; l'ensemble des solutions du système est alors
$\mathcal{S} = \{(x_1 = 0, y_1 = -1); (x_2 = 3, y_2 = 2)\}$.

2.4.2 Deux équations quadratiques

Selon la forme des équations du système, on cherchera à les combiner afin d'obtenir la méthode de résolution la mieux adaptée.
Exemple
Résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - x - y - 1 = 0 \end{array} \right.$$

Ici, on multiplie la deuxième équation par 2 puis on la soustrait de la première et on obtient $-2x - 2y + 8 = 0$, on se ramène alors à un système du type précédent. On peut donc écrire $x = 4 - y$ et le substituer dans la première équation qui devient $y^2 - 4y + 3 = 0$ dont les solutions sont $y_1 = 1$ et $y_2 = 3$. L'ensemble des solutions du système est donc
$\mathcal{S} = \{(x_1 = 3, y_1 = 1); (x_2 = 1, y_2 = 3)\}$.

Dans le cas suivant, on résout une des équations en considérant y comme paramètre ; puis en substituant le résultat dans l'autre, on obtient une équation quadratique en x dont les solutions permettent de trouver celles du système.
Exemple
Résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 + 3xy - y^2 = 9 \\ x^2 - 6xy + 5y^2 = 0 \end{array} \right.$$

La deuxième équation s'écrit $(x - y)(x - 5y)$ d'où, $x = y$ ou $x = 5y$. En substituant, dans la première équation, $x = y$, on obtient $y = \pm\frac{3}{2}$; puis, avec $x = 5y$, on obtient $y = \pm\frac{3}{8}$. L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}); (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}); (\frac{15}{8}, \frac{3}{8}); (-\frac{15}{8}, -\frac{3}{8}) \right\}.$$

2.5 Inégalités

2.5.1 Inéquations linéaires

Soit l'inéquation

$$ax + b > 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

La résolution dépend essentiellement de la valeur de a.

Si $a = 0$, on obtient l'inéquation $b > 0$. Si b est réellement supérieur à 0, l'inéquation est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$. Sinon, il n'y a pas de solution.

Si $a \neq 0$, $ax > -b$ implique :

$$x > \frac{-b}{a} \quad \text{si } a > 0, \qquad \text{c'est-à-dire } x \in]-b/a; +\infty[;$$

$$x < \frac{-b}{a} \quad \text{si } a < 0, \qquad \text{c'est-à-dire } x \in]-\infty; -b/a[.$$

2.5.2 Inéquations quadratiques

Soit le polynôme de degré deux suivant : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont réels et $a \neq 0$. Ce polynôme s'écrit :

$$P(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Il est facile d'en déduire que le signe de $P(x)$ dépend de celui de $b^2 - 4ac$ comme suit :

1) Si $b^2 - 4ac > 0$ alors l'équation $P(x) = 0$ a deux racines distinctes $x_1 < x_2$. Le signe de $P(x)$ est celui de a pour $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ et est celui de $-a$ pour $x \in]x_1, x_2[$.

2) Si $b^2 - 4ac = 0$ alors le signe de $P(x)$ est celui de a pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ où x_0 est la racine double de $P(x) = 0$.

3) Si $b^2 - 4ac < 0$ alors le signe de $P(x)$ est celui de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On en conclut que le signe de $P(x)$ est celui du coefficient de x^2, sauf entre les racines de P, s'il y en a.
Exemple
Résoudre l'inégalité $3x^2 - 8x + 7 > 2x^2 - 3x + 1$.
On l'écrit sous la forme : $x^2 - 5x + 6 > 0$ et on cherche les racines de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ qui sont $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$. L'inégalité donnée est satisfaite quand $x < 2$ ou $x > 3$.

2.5.3 Inéquations à deux variables

Soit $P(x, y)$ un polynôme. Sur chaque région du plan délimitée par la courbe $P(x, y) = 0$, la fonction $P(x, y)$ garde un signe constant. Pour le déterminer, il suffit d'évaluer P en un point particulier de la région.
Remarque : Cette propriété est valable pour $P(x)$ un polynôme d'une variable, elle se généralise aussi à $\mathbb{R}^n$.
Exemple
Déterminer le domaine du plan où $P(x, y) = 2y + x - 4 > 0$.
La courbe $P(x, y) = 0$ est une droite passant par les points $(4, 0)$ et $(0, 2)$. Sur chaque demi-plan délimité par cette droite, le signe de P ne change pas. Comme $P(0, 0) = -4 < 0$ et $P(5, 0) = 1 > 0$, la réponse est le demi-plan délimité par la droite $P(x, y) = 0$ et contenant le point $(5, 0)$

2.5.4 Inégalités remarquables

Inégalité triangulaire

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Inégalité des moyennes
Soient x_1 et x_2 deux réels > 0. Alors,

$$\underbrace{\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}}_{\text{moyenne harmonique}} \leqslant \underbrace{\sqrt[2]{x_1 x_2}}_{\text{moyenne géométrique}} \leqslant \underbrace{\frac{x_1 + x_2}{2}}_{\text{moyenne arithmétique}}$$

Il n'y a égalité que si $x_1 = x_2$.
Cette double inégalité peut être généralisée à n variables $x_1, \ldots, x_n$.

Démonstration (cas $n = 2$) :

on a $\dfrac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} \leqslant \sqrt{x_1x_2} \quad (1) \quad , \quad \sqrt{x_1x_2} \leqslant \frac{x_1+x_2}{2} \quad (2).$

L'inégalité (2) est équivalente à $4x_1x_2 \leqslant (x_1+x_2)^2$ qui est équivalente à $0 \leqslant (x_1-x_2)^2$ qui est vraie $\forall x_1, x_2$.

L'inégalité (1) est équivalente à $\dfrac{2x_1x_2}{x_1+x_2} \leqslant \sqrt{x_1x_2}$ qui est équivalente à (2) donc vraie.

Inégalité de Bernoulli
Pour tout entier naturel $n > 1$ et tout nombre réel $x > -1$, on a :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

L'égalité n'a lieu que si $x = 0$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ des réels. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_iy_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

Démonstration
Considérons le polynôme en λ de degré deux suivant ($\lambda \in \mathbb{R}$) :

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \big(|x_i| + \lambda |y_i|\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} |x_iy_i| + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2.$$

Ce polynôme étant positif (ou nul) $\forall \lambda$, son discriminant sera négatif (ou égal à zéro) ; c'est-à-dire, on aura :

$$\left(2\sum_{i=1}^{n} |x_iy_i|\right)^2 - 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \leqslant 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2} \geqslant \left|\sum_{i=1}^{n} |x_iy_i|\right| = \sum_{i=1}^{n} |x_iy_i|$$

cqfd.

L'égalité n'a lieu que si les $|x_i|$ sont proportionnels aux $|y_i|$.

SOLUTIONS

S2.1 On doit avoir $x^3 - 9x = 0$, d'où $\mathcal{S} = \{-3, 0, 3\}$.

S2.2 Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, l'équation se ramène, après transformations, à $x^2 + x - 1 = 0$; on obtient $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

S2.3 En distinguant les cas $x < 0$ et $x \geq 0$, on obtient deux équations du second degré : $x^2 + 6x - 7 = 0$ pour $x < 0$ et $x^2 - 6x + 7 = 0$ pour $x \geq 0$. Les racines admissibles de ces équations sont $x_1 = -7$, $x_2 = 3 - \sqrt{2}$, $x_3 = 3 + \sqrt{2}$.

S2.4 De l'inéquation $x + 2|x| < 1$ on déduit $\begin{cases} -x < 1 & \text{pour} \quad x < 0 \\ 3x < 1 & \text{pour} \quad x \geq 0 \end{cases}$
c'est-à-dire $-1 < x < \frac{1}{3}$.
La deuxième inéquation implique $-2 \leq x \leq \frac{1}{4}$, d'où la solution $-1 < x \leq \frac{1}{4}$.

S2.5 La hauteur de la colonne d'eau est 224 m.

S2.6 La voiture passe devant l'individu après 7 secondes.
L'accélération cherchée est de 1 m/s^2. On remarque que lorsque l'accélération est divisée par quatre, le temps **double** et ne quadruple pas !

S2.7 En multipliant l'équation par $e^{\frac{3}{2}x}$, on obtient $2e^{3x} - e^{2x} - 5e^x - 2 = 0$, c'est-à-dire avec $u = e^x$: $2u^3 - u^2 - 5u - 2 = 0$, d'où $u = -1$ ou $-\frac{1}{2}$ ou 2. La seule solution admissible est $x = \ln 2$.

S2.8

a) L'équation donnée implique $e^{2y} - e^{2x} = 2e^y$; ainsi, e^y vérifie l'équation $t^2 - 2t - e^{2x} = 0$. En ne gardant que la solution positive, on obtient alors
$y = \ln(1 + \sqrt{1 + e^{2x}})$.

b) La condition d'existence est $x > 15$ et l'inéquation peut s'écrire sous la forme $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 13 - \frac{15}{x}) < \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}2(x - 15))$, ce qui équivaut à

$$\ln(2x - 13 - \frac{15}{x}) > \ln(x - 15)$$

puisque $\log_{\frac{1}{2}} a = \frac{\ln a}{\ln \frac{1}{2}}$ et $\ln \frac{1}{2} < 0$. On en déduit que $2x - 13 - \frac{15}{x} > x - 15$ ce qui implique $x^2 + 2x - 15 > 0$, d'où $x \in (]-\infty, -5[\cup]3, +\infty[) \cap]15, +\infty[$ c'est-à-dire $x \in]15, +\infty[$.

S2.9 On peut interpréter le problème comme intersection de 2 droites : il y a une infinité de solutions si elles sont confondues. En particulier, les coefficients de x et de y des équations données doivent être nécessairement proportionnels, c'est-à-dire,

$$\frac{p+6}{p} = \frac{p}{1} \qquad \text{ou} \qquad p^2 - p - 6 = 0 \qquad \text{donc} \qquad p = -2 \quad \text{ou} \quad p = 3.$$

Pour $p = -2$, (S) devient $\begin{cases} 4x - 2y = 3 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$: ce système n'a pas de solutions.

Pour $p = 3$, (S) devient $\begin{cases} 9x + 3y = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$, de solution (x, y) tels que $y = 1 - 3x$, x arbitraire.

S2.10 Par substitution, on obtient deux solutions ; donc deux intersections : $(x, y) = (1, -3)$ ou $(43, -17)$

S2.11 Selon la donnée, il est clair que les points cherchés sont dans le plan d'équation $z = 4$. Leur troisième coordonnée est donc 4.
Pour trouver l'équation du plan passant par A, B et C, on peut chercher son

vecteur normal en effectuant par exemple $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.
Avec l'équation du cercle et l'équation du plan, on obtient un système de deux équations à deux inconnues

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-5=0 \\ (x-2)^2+(y-3)^2=4 \end{array}\right.$$

de solutions : $(2-\sqrt{2}\,,\,3+\sqrt{2}\,,\,4)$ et $(2+\sqrt{2}\,,\,3-\sqrt{2}\,,\,4)$.

S2.12 On étudie l'inéquation suivant les signes de x et de $2-x$ et on en déduit la solution : $x \in [1,3]$.

S2.13 On fixe d'abord les conditions existentielles, puis on se ramène à une inéquation quadratique et on obtient la solution : $x \in [7,8[$.

S2.14 On a :

$$10 > 24\frac{|x|}{x^2}+|x|\mathrm{sgn}\left(x(x^2+x+1)\right) = 24\frac{|x|}{|x|^2}+|x|\mathrm{sgn}(x)\cdot\mathrm{sgn}(x^2+x+1) = \frac{24}{|x|}+x\cdot 1,$$

d'où $x|x|-10|x|+24<0$, c'est-à-dire aussi

$$\begin{array}{lcl} x^2-10x-24>0 & , & x<0 \\ x^2-10x+24<0 & , & x>0 \end{array}$$

d'où $x \in]-\infty,-2[\cup]4,6[$.

S2.15

a) On doit avoir $\sqrt{x^2+(y-1)^2} \leq \sqrt{(x+4)^2+(y+7)^2}$, c'est-à-dire, après élévation au carré : $y \geq -\frac{1}{2}(x+8)$. Le domaine D est donc le demi-plan supérieur limité par la droite d'équation $x+2y+8=0$.

b) L'inégalité se ramène à : $(x-4)^2+(y-9)^2 \leq 160$. Dans ce cas, D est l'intérieur du disque centré en $(4,9)$ et de rayon $4\sqrt{10}$, frontière incluse.

S2.16 En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire

1) $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a \leq (a^2+b^2+c^2)^{1/2}(b^2+c^2+a^2)^{1/2}$;

2) $3 = \sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}} \leq (a+b+c)^{1/2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^{1/2}$.

CHAPITRE 3

Fonctions

Exercices

E3.1 Soit $f(x) = 3ax^2 + a^2bx + a^3$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $f(a)$, $f(2b)$ et $f(ab)$.

E3.2 On considère les fonctions réelles $f > 0$ telles que $f(u+v) = f(u)f(v)$ pour tout u, v réels. Montrer que $f(u-v) = \dfrac{f(u)}{f(v)}$.

E3.3 Soient $f_1(x) = x^2 + 1$ et $f_2(x) = x + 1$. Calculer $(f_1 \circ f_2 - f_2 \circ f_1)(x)$.

E3.4 On pose $f(x) = x+1$, $f_1 = f$ et soit $f_{n+1} = f \circ f_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Expliciter $f_k(x)$.

E3.5 Déterminer $\psi(x) = f \circ g(x)$ si $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ et $g(x) = \sqrt{x^2-1}$, $x^2 \geq 1$.

E3.6 Soit $f(x) = \ln x^2 + \sin x$ et $g(x) = e^{2x}$. Expliciter $f(g(x))$ et $g(f(x))$.

E3.7 Donner le domaine de définition de la fonction $f(x) = \ln(\frac{x-2}{x-1})$.

E3.8 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est injective.

E3.9 Déterminer la fonction réciproque de $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ lorsque
a) $f(x) = x^2 + x$, b) $f(x) = 3e^{2x} - 4e^x + 1$.

E3.10 Déterminer, si elle existe, la période T de la fonction $f(x) = x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$.

E3.11 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}$ est bornée.

E3.12 Soient γ_1 et γ_2 les courbes d'équation $y_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ et $y_2(x) = x^2 + px + q$. Pour quels p et q les courbes γ_i se coupent-elles sur la droite verticale $x = -2$ ainsi que sur l'axe des x positifs ?

E3.13 Tracer le graphe de la fonction $y(x) = x^{\frac{1}{5}}|x|^{\frac{1}{20}} + 2|x|^{\frac{1}{4}}$.

E3.14 On considère la courbe γ définie par $y(x) = \dfrac{x^5 - x^4 + ax^3 - 13x + 6}{x^4 + ax^2 - 8}$ et soient M et N les points de γ d'abscisse $x_M = -1$ et $x_N = 1$.

(a) Déterminer a pour que le segment MN coupe l'axe Oy en $y = -\frac{5}{9}$.

(b) Quelles sont, pour le a obtenu, les intersections I de γ et de la droite passant par les points $A(-1, -3)$ et $B(2, 3)$?

Notions théoriques

3.1 Notions générales

Fonctions
Soient X, Y deux ensembles non-vides. La correspondance, qui à tout élément $x \in X$ associe un élément $y \in Y$, est appelée une *fonction* ou encore une *application* de X dans Y et on la note par $f : X \to Y$. Pour indiquer que $f(x)$ est l'élément de Y associé à x par la fonction f, on utilise la notation $x \mapsto f(x)$. On dit que $f(x)$ est la *valeur* de f au point x ou *l'image* de x par f. L'ensemble X est appelé *domaine de définition* de f et Y son *ensemble d'arrivée* ou aussi *domaine des valeurs*. Si X et Y sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, la fonction f est appelée *fonction réelle*. On introduit encore les notions suivantes :
Image d'une fonction
Le sous-ensemble de Y noté $f[X]$ et donné par

$$\begin{aligned} f[X] &= \{y \in Y : \text{ il existe } x \in X \text{ tel que } f(x) = y\} \\ &= \{f(x) : x \in X\} \end{aligned}$$

est appelé *l'image* de X par f ou *l'ensemble des images* et on le note souvent $\mathrm{Im}(f)$.

Graphe d'une fonction
Le graphe d'une fonction f, noté $\mathcal{G}_f$ est le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

En général, on peut le représenter dans un système de coordonnées. Par exemple, pour une fonction réelle, le graphe est représenté par sa courbe dans le plan muni des coordonnées cartésiennes.

Fonction surjective
Une fonction $f : X \to Y$ est dite *surjective* si $f[X] = Y$ ou, autrement dit, si tout $y \in Y$ est l'image par f d'au moins un élément $x \in X$.

Fonction injective
Une fonction $f : X \to Y$ est dite *injective* si $x_1 \neq x_2$ implique $f(x_1) \neq f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in X$. Autrement dit, tout $y \in f[X]$ est l'image par f d'un seul élément $x \in X$.

Fonction bijective
Une fonction $f : X \to Y$ est dite *bijective* si elle est à la fois surjective et injective.

Fonction identité
La fonction $\mathrm{Id}_X : X \to X$ définie par $\mathrm{Id}_X(x) = x$ est appelée la *fonction identité* sur X. La fonction identité est bijective.

Fonction constante
Une fonction $f : X \to Y$ est dite *constante* si $f(x_1) = f(x_2)$ pour tout couple $(x_1, x_2) \in X \times X$.

Composition de fonctions
Soient $f : X \to Y$ et $g : Y' \to Z$ deux fonctions telles que $f[X] \subset Y'$. Alors, la fonction $g \circ f : X \to Z$, définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$, est appelée la fonction composée de g et f.

Fonction réciproque
Lorsque $f : X \to Y$ est bijective, on peut définir une fonction $f^{-1} : Y \to X$ qui, à tout $y \in Y$, associe l'élément x de X solution unique de l'équation $y = f(x)$. La fonction f^{-1} est appelée la *fonction réciproque* de f, elle est bijective et vérifie $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$.

Restriction d'une fonction
Soit S un sous-ensemble de X et $g : S \to Y$ une fonction telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in S$. On appelle g *restriction* de f et on la note f/S qu'on lit f restreinte à S.

Prolongement d'une fonction
Soit $X \subset S$. Une fonction g, définie sur S, est appelée *prolongement* de f si f est une restriction de g à X, i.e. $g/X = f$.

3.2 Fonctions réelles

Soient X et Y des sous-ensembles non-vides de $\mathbb{R}$, $f : X \to Y$ une fonction réelle et $x, x_1, x_2 \in X$.

Zéros d'une fonction
Les *zéros* d'une fonction f sont les valeurs de x pour lesquelles la fonction s'annule, c'est-à-dire que x_i est un zéro de f si et seulement si $f(x_i) = 0$.

Fonction croissante, strictement croissante
Une fonction f est dite croissante si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Une fonction f est dite strictement croissante si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) < f(x_2)$.

Fonction décroissante, strictement décroissante
Une fonction f est dite décroissante si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Une fonction f est dite strictement décroissante si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) > f(x_2)$.

Fonction bornée
Soit A un sous-ensemble non vide de X. Une fonction $f : X \to Y$ est dite *majorée* sur A si l'ensemble $f[A]$ est majoré, c'est-à-dire si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \leqslant M$, pour tout $a \in A$.
Elle est dite *minorée* sur A si l'ensemble $f(A)$ est minoré, c'est-à-dire si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \geqslant m$, pour tout $a \in A$.
Si f est à la fois majorée et minorée sur A, on dit qu'elle est *bornée* sur A. Une fonction f est bornée sur A si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(a)| \leq C$ pour tout $a \in A$.

Parité
Une fonction $f : X \to Y$ est dite *paire* si pour tout $x \in X$, $-x \in X$ et $f(-x) = f(x)$. Elle est dite *impaire* si pour tout $x \in X$, $-x \in X$ et $f(-x) = -f(x)$.

Périodicité
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *périodique de période* $p \neq 0$ si $f(x + p) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il en découle que f est de période np, $n \in \mathbb{Z}^*$.
On peut souvent déterminer le plus petit $p > 0$ possible. En particulier, si $f(x)$ est une fonction continue non constante (voir chapitre 6), alors le nombre $T = \inf p$ tel que $f(x + p) = f(x)$ est un nombre positif appelé la période *fon-*

damentale de f.

Fonction convexe
Soit I un intervalle. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur I si pour tout couple x_1, x_2 dans I et tout $t \in [0, 1]$:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \tag{3.1}$$

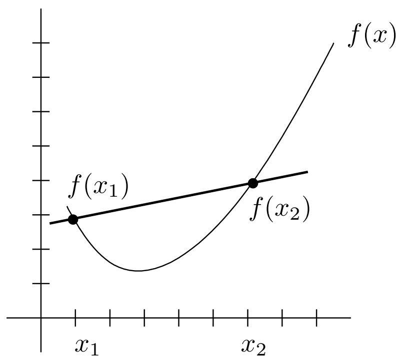
La fonction f est dite strictement convexe si pour tout couple $x_1 \neq x_2$ dans I et tout $t \in]0, 1[$:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe sur I et $x_1 < x_2$. En posant $t = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad x \in [x_1, x_2]$, l'inégalité (3.1) devient alors

$$f(x) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2) + f(x_2).$$

Géométriquement, cela signifie que le segment de droite passant par les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ se situe toujours au-dessus de la courbe $y = f(x)$ pour $x \in [x_1; x_2]$.



Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et dérivable (voir chapitre 7), alors toute tangente à la courbe $y = f(x)$ se situe au-dessous de cette courbe.

Fonction concave
Une fonction f est dite concave, respectivement strictement concave, si $-f$ est convexe, respectivement strictement convexe.

3.3 Fonctions réelles particulières

Fonction linéaire et affine
Une *fonction affine* est une fonction du type $f(x) = ax + b$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, elle représente une droite dans $\mathbb{R}^2$; si $b = 0$, on dit qu'elle est *linéaire* et sa représentation graphique dans $\mathbb{R}^2$ passe par l'origine.

Fonction quadratique
Une *fonction quadratique* est une fonction du type $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$, elle représente une parabole dans $\mathbb{R}^2$. Une fonction quadratique n'est en principe ni injective ni surjective, néanmoins certaines de ses restrictions sont bijectives. Par exemple, la fonction

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

est bijective et sa fonction réciproque est la fonction *racine carrée*, notée $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Fonction polynômiale
Une *fonction polynômiale* f est une fonction de la forme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

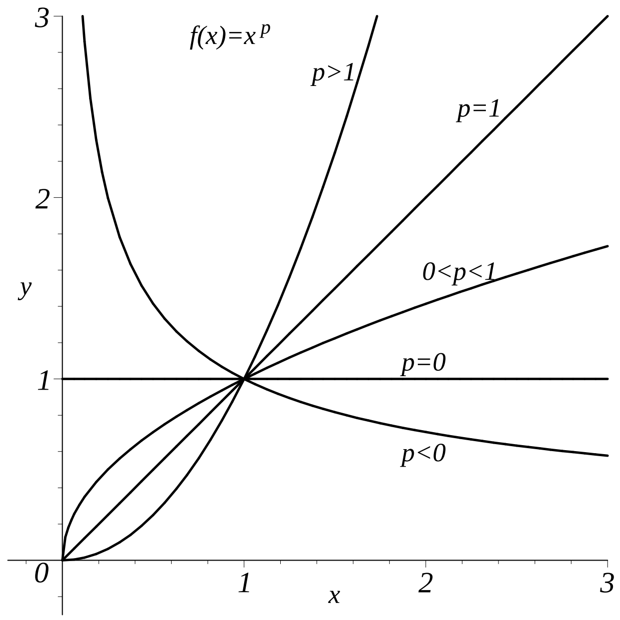
où a_n est non-nul et les a_i sont des nombres réels. L'entier naturel n est le *degré* de la fonction polynômiale.
Les *racines* de f sont les zéros de f c'est-à-dire les x_i tels que $f(x_i) = 0$. Si x_i est une racine de f, on peut factoriser $f(x)$ par $(x - x_i)$ (voir § 1.4).

Fonction rationnelle
On appelle *fonction rationnelle*, une fonction définie par

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes et où au moins un des coefficients de $q(x)$ est non-nul. Les x pour lesquels $q(x) = 0$ sont appelés des *pôles* de f. (voir § 1.5 pour la décomposition en éléments simples).

Fonction puissance
Soit $p \in \mathbb{R}$. La fonction $f(x) = x^p$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ est appelée fonction puissance.
Si $p \in \mathbb{Q}$, on peut étendre son domaine de définition D_f qui dépendra de p.



1. Si $p = 0$: $f(x) = 1$, $D_f = \mathbb{R}$;
2. Si $p \in \mathbb{N}^*$: $D_f = \mathbb{R}$ et f est impaire, respectivement paire, si p est impair, respectivement pair ;
3. Si $p \in \mathbb{Z}_-^*$: $D_f = \mathbb{R}^*$;
4. Si $p > 0$, $p \notin \mathbb{N}^*$: $D_f = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ et $p < 0$, $p \notin \mathbb{Z}_-^*$: $D_f = \mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction reciproque de $f(x) = x^p$ est donnée par $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{p}}$ si $x \geq 0$.
On peut aussi définir la fonction x^p par $e^{p \ln x}$ lorsque $p \in \mathbb{R}$.

Fonctions exponentielles et logarithmiques
Voir § 1.7

Fonctions trigonométriques
Voir chapitre 5.

Fonctions hyperboliques
Par définition :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ si } x \neq 0$$

On note parfois sh$x$, respectivement, ch$x$, th$x$ et cth$x$ pour $\sinh x$, respectivement $\cosh x$, $\tanh x$ et $\coth x$.

Fonction signe et fonction partie entière
La *fonction signe*, notée sgn est définie par

$$\begin{array}{rccl} \text{sgn :} & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \{-1;+1\} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} -1 \text{ si } x < 0 \\ +1 \text{ si } x > 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On note $[x]$ la *fonction partie entière* définie comme suit :
soit $x \in \mathbb{R}$ que l'on écrit sous la forme $x = n + \delta$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq \delta < 1$. Alors $f(x) = [x] = n$

Exemple : $[0] = 0$, $[\frac{61}{3}] = [20+\frac{1}{3}] = 20$, $[-1] = -1$ et $[-\pi] = [-4+(4-\pi)] = -4$.

Solutions des exercices

S3.1 On obtient : $f(a) = a^3(4+b)$, $f(2b) = a^3 + 12ab^2 + 2a^2b^2$, $f(ab) = a^3(1+4b^2)$.

S3.2 On a : $f(u) = f(u-v+v) = f((u-v)+v) = f(u-v)f(v)$ d'où $f(u-v) = f(u)/f(v)$.

S3.3 On obtient $(f_1 \circ f_2 - f_2 \circ f_1)(x) = f_1 \circ f_2(x) - f_2 \circ f_1(x) = f_1(f_2(x)) - f_2(f_1(x)) = (x+1)^2 + 1 - ((x^2+1)+1) = 2x$.

S3.4 Démonstration par récurrence de $f_k(x) = x + k$ pour tout k. C'est vrai pour $k = 1$ et on suppose $f_k(x) = x + k$; on a bien $f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) = f(x+k) = (x+k)+1 = x+(k+1)$.

S3.5 On a $\psi(x) = \sqrt{(\sqrt{x^2-1})^2+1} = |x|$, restreinte à $x \in]-\infty,-1] \cup [1,\infty[$.

S3.6 Les fonctions composées sont : $f(g(x)) = 4x + \sin(e^{2x})$ et $g(f(x)) = x^4e^{2\sin x}$.

S3.7 Le domaine cherché est $D_f =]-\infty, 1[\cup]2,\infty[$.

S3.8 On cherche à démontrer que $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$. Ici, $x_1^3 = x_2^3$ donne

$$0 = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)[(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2^2]$$

donc $x_1 - x_2 = 0$ ou $\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & 0 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 & = & 0 \end{array} \right.$ c'est-à-dire $x_1 = x_2 = 0$.

S3.9

a) On résout $x^2 + x = y$ et $x \geq 0$, d'où $x = \frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2} = f^{-1}(y)$ et l'on écrit $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4x+1}-1\right)$, $x \in \mathbb{R}_+$.

b) De manière analogue, on obtient $f^{-1}(x) = \ln\left(\sqrt{3x+1}+2\right) - \ln 3$, $x \in \mathbb{R}_+$.

S3.10 On a : $f(x+1) = x + 1 - ([x]+1) = f(x)$; donc $T \leq 1$. Ainsi, si on se restreint à $x \in [0,1[$, alors $f(x) = x$ qui n'est pas périodique, d'où $T = 1$.

S3.11 On peut écrire

$$f(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}$$

d'où $0 < f \leq \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ et $|f(x)| \leq \sqrt{2} - 1$.

S3.12 De l'égalité $y_1(-2) = y_2(-2)$, on déduit que $2p - q = 28$ et de $y_1(x) = y_2(x) = 0$, on déduit que $x = 2$ ou $x = 1$ et donc que $p + q = -1$ ou $2p + q = -4$. Ainsi, p et q doivent satisfaire les systèmes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2p - q & = & 28 \\ p + q & = & -1 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2p - q & = & 28 \\ 2p + q & = & -4 \end{array} \right. ,$$

dont les solutions sont $(p,q) = (6,-16)$ ou $(p,q) = (9,-10)$.

S3.13 Pour $x \neq 0$, on peut écrire $y(x)$ sous la forme $[\mathrm{sgn}(x^{\frac{1}{5}}) + 2]|x|^{\frac{1}{4}}$ c'est-à-dire $y = |x|^{\frac{1}{4}} = (-x)^{\frac{1}{4}}$ si $x < 0$ et $y = 3|x|^{\frac{1}{4}} = 3x^{\frac{1}{4}}$ si $x > 0$. Le graphe de y est formé de deux arcs de courbes qui sont des fonctions puissances.

S3.14

(a) Les coordonnées de M et N sont respectivement $(-1, \frac{17-a}{a-7})$, $a \neq 7$ et $(1,1)$, et l'équation de MN est $y - 1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{17-a}{2(a-7)}\right)(x-1)$. Puisque $(0, -\frac{5}{9})$ est un point de MN, on trouve $a = -2$.

(b) Pour $a = -2$, on peut écrire, après simplification par $x + 2$,

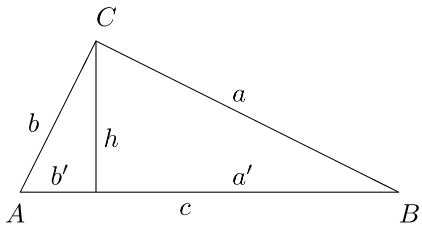
$$y = \frac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 8x + 3}{(x-2)(x^2+2)};$$

l'équation de la droite AB étant $y = 2x - 1$, il en découle que l'abscisse de I doit satisfaire $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$ c'est-à-dire $(x-1)^2(x^2+1) = 0$. La seule solution est donc $I = N$.

CHAPITRE 4
Géométrie

Exercices

E4.1 A l'aide du théorème de Pythagore, démontrer les théorèmes suivants. Soit ABC un triangle rectangle et a, b, c, a', b', h comme indiqué sur la figure ci-dessous.
Théorème d'Euclide : $a^2 = a' \cdot c$ et $b^2 = b' \cdot c$.
Théorème de la hauteur : $h^2 = a' \cdot b'$



E4.2 On donne l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Quel est le lieu géométrique du sommet qui lui est opposé ?

E4.3 Quels sont les triangles rectangles dont une cathète est la moyenne arithmétique de l'autre et de l'hypoténuse ?

E4.4 Soient $A(2, 5)$ un point donné du plan xOy et I l'intersection des droites d_1, d'équation $3x + y - 22 = 0$, et d_2 d'équation $x - 4y + 10 = 0$. Déterminer l'équation de la perpendiculaire p à AI passant par le point $P(1, -3)$.

E4.5 On considère deux cercles σ_1 et σ_2, de rayon $R_1 < R_2$. Combien de tangentes communes peut-on mener au σ_i, $i = 1, 2$?

E4.6 Déterminer le rayon R du cercle Γ de centre $\Omega(15, 36)$ tangent au cercle Γ' d'équation $x^2 + y^2 - 169 = 0$.

E4.7 Trouver l'équation du cercle γ passant par les points $A(0, 0)$, $B(-2, 4)$ et $C(4, 4)$.

E4.8 Calculer le volume V d'un tétraèdre (pyramide à base triangulaire) dont la base est déterminée par les points $A(-\frac{1}{3}, 1, 1)$, $B(-3, -1, 2)$ et $C(1, 2, -1)$ et dont la hauteur est de 12.

E4.9 On donne trois points $A(2, -2, 1)$, $B(2, -3, 3)$, $C(3, -3, 1)$ et une droite d passant par $Q(2, -3, 1)$ de direction $\overrightarrow{d} = (3, 1, -6)$. Déterminer un point D sur d tel que le volume du tétraèdre $ABCD$ soit égal à 1.

E4.10 Déterminer m pour que les droites, d_1 d'équation $6mx + (2m + 3)y + m\sqrt{m^2 + 1} = 0$ et d_2 d'équation $(\frac{5}{6}m + 1)x - (2m - 3)y + \frac{e^{-m}}{\sqrt{17}} = 0$, soient perpendiculaires.

E4.11 a) Déterminer l'équation du plan médiateur des points $A(2,1,-4)$ et $B(4,3,2)$

b) Trouver sur la droite d d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 2 \\ y-2z & = & 3 \end{array}\right.$ le point C situé à égale distance de A et B.

E4.12 Soit τ la droite de pente négative, issue du point $P(1,4)$, tangente au cercle γ passant par $A(0,2)$, $B(3,-1)$ et $C(4,0)$. Déterminer sur τ un point Q d'abscisse $x_Q > 6$ tel que la distance de Q à $K(12,13)$ soit égale à 13.

E4.13 A l'aide de la formule de la distance entre un point et un plan, trouver la formule de la distance entre deux droites gauches ayant respectivement pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$ et passant respectivement par les points P_1 et P_2.

E4.14 Expliquer pourquoi $\left\|\overrightarrow{AP} \times \dfrac{\overrightarrow{d}}{\|\overrightarrow{d}\|}\right\|$ représente la distance du point P à la droite d passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{d}$.

E4.15 Soit π un plan donné par trois points $A(1,8,1)$, $B(4,-1,10)$, $C(-2,3,6)$. Un rayon lumineux émis par une source ponctuelle $P(-13,2,4)$ atteint le point $Q(19,-11,-25)$ après réflexion sur le plan π. Déterminer le point d'impact I sur π et l'angle d'incidence α du rayon.

E4.16 La droite passant par les points $E(\frac{5}{2}, 2, \frac{1}{2})$ et $F(\frac{7}{2}, 3, \frac{3}{2})$ coupe-t-elle la sphère passant par les points $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$, $C(1,2,1)$ et $D(0,0,1)$?

Indication : on ne demande pas les coordonnées des éventuelles intersections, mais uniquement si elles existent ou non.

E4.17 Soit la sphère d'équation $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2 = 81$. Un rayon lumineux, issu d'une source S située en $(-2,14,24)$ frappe la sphère au point $T(2,2,8)$. Le rayon réfléchi passe-t-il par le point $P(169, 103, 372)$?

E4.18 Déterminer le symétrique P' du point $P(1,2,1)$ par rapport à la droite d passant par $A(1,-3,7)$ et $B(4,3,-2)$.

E4.19 On appelle transversale une droite coupant deux droites gauches. Trouver les points intersection de la transversale t de direction $\overrightarrow{t} = (3,3,5)$ coupant les droites gauches g_1 et g_2 données par $\overrightarrow{r}_{g_1} = (1,4,-1) + \lambda(1,2,1)$ et $\overrightarrow{r}_{g_2} = (2,3,1) + \mu(1,1,2)$ (on note $\overrightarrow{r}_g = \overrightarrow{OP}$, $P \in g$, un point courant de g).

E4.20 On donne deux droites gauches : $\overrightarrow{r}_{g_1} = (-7,-1,3) + \lambda(4,1,-1)$ et $\overrightarrow{r}_{g_2} = (6,2,10) + \mu(4,-3,1)$. Trouver les extrémités du plus petit segment AB tel que $A \in g_1$ et $B \in g_2$.

Notions théoriques

4.1 Géométrie plane

On suppose les notions de points et de droites connues.

4.1.1 Notions de base

Droites parallèles
On dit que deux droites sont *parallèles* si elles n'ont aucun point commun ou si elles sont confondues. Si elles ont un unique point en commun, on dit qu'elles sont *sécantes*, qu'elles sont *concourantes* ou qu'elles *se coupent*. Si elles se coupent en formant un angle de $90°$, on dit qu'elles sont *perpendiculaires* ou *orthogonales*.

Segment de droite
On note (AB) la droite passant par les points A et B. Un *segment de droite* $[AB]$ est la partie de la droite (AB) comprise entre les points A et B qui sont appelés *extrémités* du segment.

Projection orthogonale
La *projection orthogonale* d'un point A sur une droite d est le point d'intersection entre la droite d et la droite passant par A qui lui est perpendiculaire.

Distance entre deux points
La *distance* entre deux points A et B est égale à la longueur du segment $[AB]$. On note $\delta(A, B)$ ou $|AB|$.

Distance entre un point et une droite
La *distance* entre un point A et une droite d, notée $\delta(A, d)$, est l'infimum de la distance entre A et un point B quand B décrit la droite d ; c'est donc la distance entre A et le point P de la droite d tel que le segment $[AP]$ forme un angle droit avec la droite d. Le point P est donc la projection orthogonale de A sur d.

Distance entre deux droites parallèles
La *distance* entre deux droites parallèles d_1 et d_2, notée $\delta(d_1, d_2)$, est la distance entre un point de d_1 et la droite d_2.

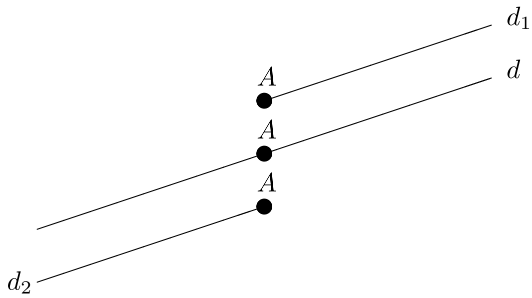
Lieu géométrique
On appelle *lieu géométrique* l'ensemble des points satisfaisant une ou plusieurs conditions données.

Médiatrice
La *médiatrice* de $[AB]$ est le lieu géométrique des points à égale distance des deux extrémités A et B. C'est une droite qui coupe le segment $[AB]$ perpendiculairement en son milieu.

Bissectrice
La *bissectrice* de deux droites sécantes est le lieu géométrique des points à égale distance entre les deux droites. C'est une droite qui partage l'angle entre les deux droites en deux angles égaux. Lorsque deux droites se coupent, deux paires d'angles sont formés. Il y a donc, dans ce cas, deux bissectrices perpendiculaires entre elles.

Demi-droite
On appelle *demi-droite* l'ensemble des points d'une droite situés du même côté

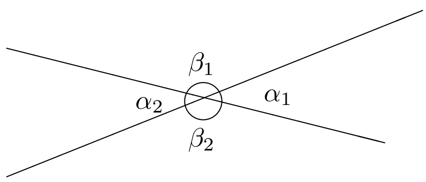
d'un point A de cette droite, appelé l'origine de la demi-droite. On dit aussi, dans ce cas, que la demi-droite est *issue* du point A. Ainsi, comme le montre la figure ci-dessous, en plaçant un point A sur une droite d, on définit deux demi-droites d_1 et d_2.



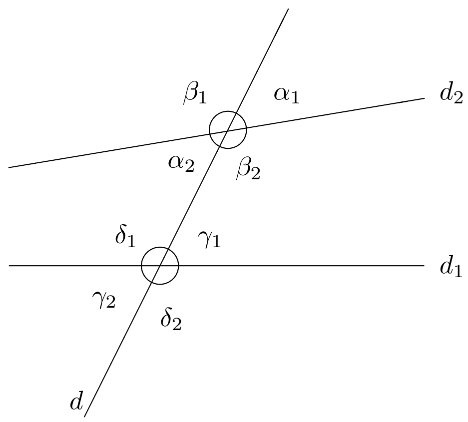
Angles
On appelle *angle* la figure formée par deux demi-droites issues du même point. Ce point est appelé le *sommet* de l'angle. Un angle définit ainsi la partie du plan que l'on peut balayer par l'une des demi-droites que l'on amène sur l'autre par rotation autour du sommet. Un angle peut être *orienté* : par convention il est orienté dans le sens positif ou trigonométrique si la rotation est effectuée dans le sens inverse du sens des aiguilles d'une montre.
On utilisera ici comme mesure d'angle le degré ou le radian (voir § 5.1).

Deux angles dont la somme vaut 90° ou $\pi/2$ sont dits *complémentaires.* Si la somme des deux angles vaut 180° ou π les angles sont dits *supplémentaires.* Un angle de 90° est appelé un *angle droit* et un angle de 180° un *angle plat.*

Lorsque deux droites se coupent, les angles formés sont égaux deux à deux.
$\alpha_1 = \alpha_2$ et $\beta_1 = \beta_2$. On dit que α_1 et α_2, respectivement β_1 et β_2, sont *opposés par leur sommet.*



Lorsqu'une droite d coupe deux autres droites d_1 et d_2, comme dans la figure ci-après, on a la situation suivante :
α_2 et γ_1 sont appelés *alternes-internes*, α_1 et γ_2 *alternes-externes* et α_1 et γ_1 *correspondants.*



Si d_1 est parallèle à d_2, les angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants sont égaux deux à deux, c'est-à-dire $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2$ et $\beta_1 = \beta_2 = \delta_1 = \delta_2$.

Triangles
Un *triangle* est un polygone à trois côtés, il possède donc trois angles. La somme de ses angles vaut $180°$ ou π.

Un triangle *rectangle* est un triangle possédant un angle droit. Un triangle ayant deux côtés égaux, donc deux angles égaux, est *isocèle*. Un triangle ayant ses trois côtés égaux, et donc trois angles de $60°$, est *équilatéral*.

Une *médiane* est une droite issue d'un des sommet du triangle et coupant le côté opposé en son milieu. Les trois médianes d'un triangle sont *concourantes* ; elles se coupent en un point appelé *centre de gravité* G du triangle. Le point G est aussi le barycentre des trois sommets et il se situe au $2/3$ de chaque médiane.

La *hauteur* d'un triangle est le segment de droite issu d'un sommet et formant un angle droit avec le côté opposé. Autrement dit, c'est le segment entre un sommet et sa projection orthogonale sur le côté opposé. Les hauteurs se coupent en un point H : c'est l'*orthocentre*.

Dans un triangle, les médiatrices sont concourantes ainsi que les bissectrices.
Dans un triangle isocèle, si les angles sont α, α et β, alors la bissectrice de l'angle β est confondue avec la médiatrice, la médiane et la hauteur correspondantes.
Dans un triangle équilatéral, les médiatrices, les bissectrices, les médianes et les hauteurs issues d'un sommet sont confondues ; on a donc $G = H = \Omega = I$, où Ω est l'intersection des médiatrices et I est l'intersection des bissectrices.

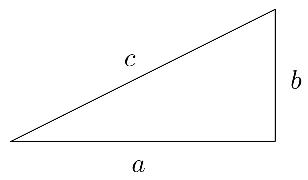
Deux triangles sont *égaux* s'ils ont, entre eux, soit
- trois côtés égaux,
- deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés égaux,
- un côté et deux angles égaux (donc forcément les trois angles égaux).

Ainsi, on peut entièrement déterminer un triangle en donnant soit
- la longueur de ses trois côtés,
- la longueur de deux côtés et la valeur de l'angle compris entre ces deux côtés,
- la longueur d'un côté et la valeur de deux angles.

Remarque : si l'on connaît deux angles α et β, le troisième vaut $\gamma = (180 - \alpha - \beta)°$.

Deux triangles sont *semblables* si
- deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, et donc forcément leurs trois angles sont égaux,
- deux côtés du premier sont proportionnels à deux côtés du second et l'angle entre ces deux côtés est égal dans les deux triangles,
- les trois côtés du premier triangle sont proportionnels aux trois côtés du second,
- leurs côtés sont deux à deux parallèles ou deux à deux perpendiculaires.

Théorème de Pythagore
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des cathètes, c'est-à-dire $c^2 = a^2 + b^2$.

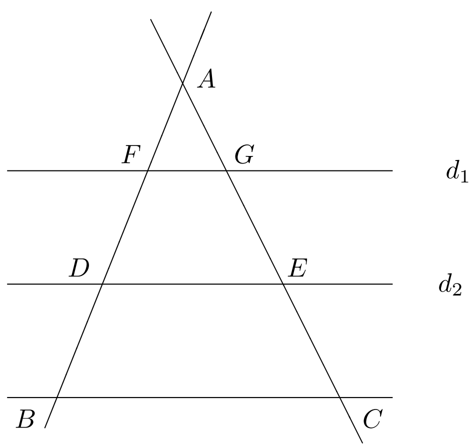


Théorème de Thalès
Soit le triangle ABC et deux droites d_1, d_2 parallèles à (BC). Alors,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

et

$$\frac{GE}{FD} = \frac{EC}{DB} = \frac{GC}{FB}$$



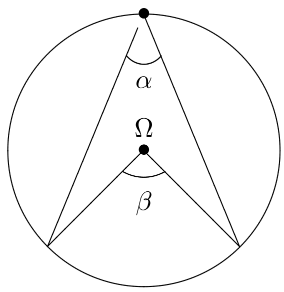
Cercles
Le cercle est le lieu géométrique des points qui sont à une distance donnée r d'un point fixe Ω appelé *centre* du cercle ; r est le *rayon* du cercle.
On appelle *corde* $[CD]$ d'un cercle le segment dont les extrémités C et D sont sur le cercle.
Une corde $[AB]$ qui passe par le centre du cercle est appelée *diamètre* du cercle ;

dans ce cas A et B sont *diamétralement opposés*.
La médiatrice d'une corde passe par le centre du cercle.

Théorème
Par trois points A, B, C non alignés, il passe un cercle et un seul.

Le *cercle circonscrit* d'un triangle ABC est le cercle passant par les sommets A, B et C. Son centre Ω est donné par l'intersection des médiatrices qui sont concourantes.

Dans un cercle de centre Ω, avec des angles comme l'indique la figure ci-dessous, l'angle α est appelé *angle inscrit* et l'angle β *angle au centre*.
On a toujours la relation $\beta = 2\alpha$.



La *tangente* à un cercle de centre Ω et de rayon r est une droite d qui ne touche le cercle qu'en un seul point. Dans ce cas, la distance entre Ω et d est égale à r.

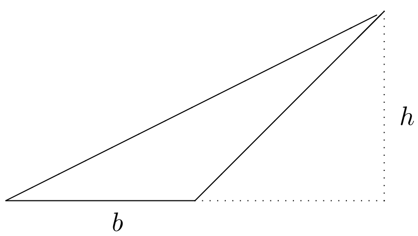
Théorème
Par un point P extérieur à un cercle de centre Ω et de rayon r, c'est-à-dire tel que $\delta(P,\Omega) > r$, il passe deux tangentes à ce cercle.

Le *cercle inscrit* d'un triangle est le cercle tangent au trois côtés du triangle. Son centre I est donné par l'intersection des bissectrices qui sont concourantes.

4.1.2 Calcul des aires

Triangle

$$\text{Aire} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\text{base} \cdot \text{hauteur}}{2}$$



Si l'on connaît les longueurs a,b et c des côtés du triangle, l'aire est donnée par la formule de Héron,

$$\text{Aire} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où p est le demi-périmètre du triangle, c'est-à-dire $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Si de plus on connaît le rayon r du cercle circonscrit et les anngles α, β et γ du triangle, on a

$$\text{Aire} = \frac{abc}{4r} = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

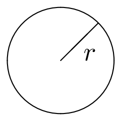
Si l'on connaît le rayon du cercle inscrit R, on a la formule suivante :

$$\text{Aire} = R \cdot p$$

Polygones
Si l'on ne connaît pas de formule exprimant l'aire, on décompose le polygone en triangles et on somme les aires des triangles formés en utilisant les théorèmes de Pythagore, du sinus et du cosinus (voir chapitre 5).

Cercle

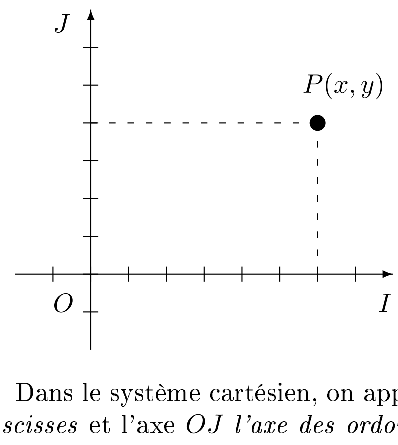
$$\text{Aire} = \pi \cdot r^2$$



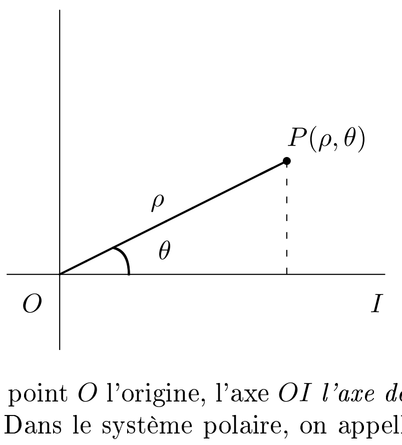
Secteur circulaire
Voir chapitre 5.

4.1.3 Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes :(x, y)



Coordonnées polaires : (ρ, θ)



Dans le système cartésien, on appelle le point O l'origine, l'axe OI *l'axe des abscisses* et l'axe OJ *l'axe des ordonnées*. Dans le système polaire, on appelle le point O le *pôle* et la droite OI *l'axe polaire*.
Pour passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes on a les relations

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

et pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires on a

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x} \quad \text{resp. } \pi + \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

4.1.4 Equations cartésienne et polaire d'une droite

Une *droite* d, dans le plan Oxy, est le lieu géométrique des points qui vérifient une équation du type

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Cette équation est appelée *équation cartésienne de la droite* d. Si $b \neq 0$, sa *pente* m vaut

$$m = -\frac{a}{b}$$

Si la droite passe par les points $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$, son équation cartésienne est donnée par

$$\begin{array}{ll} \dfrac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \dfrac{y - a_2}{b_2 - a_2} & \text{si } b_1 - a_1 \neq 0 \text{ et } b_2 - a_2 \neq 0 \\ x = a_1 & \text{si } b_1 - a_1 = 0 \text{ et } b_2 - a_2 \neq 0 \\ y = a_2 & \text{si } b_1 - a_1 \neq 0 \text{ et } b_2 - a_2 = 0 \end{array}$$

Dans le premier cas, la *pente* m de la droite vaut alors

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

et l'on peut écrire l'équation de la droite sous la forme

$$y - a_2 = m(x - a_1)$$

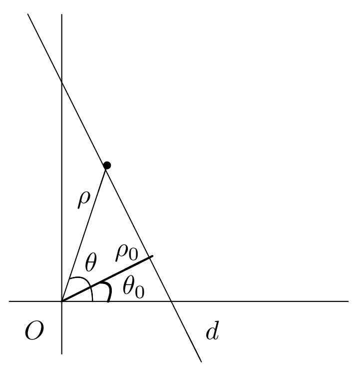
Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.

On peut également représenter une droite à l'aide des coordonnées polaires. Si la droite d passe par le *pôle* O, l'équation polaire de d est simplement

$$\theta = \text{constante}$$

Si la droite d ne passe pas par le pôle O, on peut déterminer son équation à l'aide des coordonnées (θ_0, ρ_0) du point d'intersection entre d et sa perpendiculaire passant par O. On a alors

$$\rho = \frac{\rho_0}{\cos(\theta - \theta_0)}$$



REMARQUE : on a aussi, à partir de l'équation cartésienne $ax + by = -c \neq 0$, la relation $\rho = \dfrac{-c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$.

4.1.5 Equations cartésienne et polaire d'un cercle

L'équation *canonique* d'un cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon r est

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

Cette formule découle directement du théorème de Pythagore.
L'équation *générale* d'un cercle est de la forme

$$ax^2 + ay^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad \text{où} \quad a \neq 0 \text{ et } d^2 + e^2 > af$$

L'équation de la tangente au cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon r passant par un point $T(x_t, y_t)$ du cercle est

$$(x_t - x_0)(x - x_0) + (y_t - y_0)(y - y_0) - r^2 = 0.$$

Si le cercle est donné par son équation générale, l'équation de la même tangente devient

$$ax_t x + ay_t y + d(x_t + x) + e(y_t + y) + f = 0$$

(principe du *dédoublement*).
Les deux tangentes de pente m au cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon r ont pour équations

$$y - y_0 = m(x - x_0) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

En coordonnées polaires, l'équation d'un cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon r est

$$\rho^2 - 2\rho\rho_0\cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2 = r^2$$

où ρ_0 et θ_0 sont les coordonnées polaires de Ω.
Pour obtenir cette équation à partir de l'équation cartésienne, il suffit de poser $(x_0, y_0) = (\rho_0\cos\theta_0, \rho_0\sin\theta_0)$, $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ et d'utiliser les propriétés des fonctions trigonométriques (voir chapitre 5).

4.1.6 Représentation paramétrique d'une courbe

Une courbe peut être représentée comme l'ensemble des points dont les coordonnées cartésiennes x et y satisfont

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

où f et g sont deux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$.
Cette représentation est appelée *représentation paramétrique* de la courbe et t est le *paramètre* ; le plus souvent, t peut être interprété comme variable temporelle.
La représentation paramétrique d'une droite passant par les points $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ est la suivante,

$$\begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour un cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r, la représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = a + r\cos t \\ y = b + r\sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

4.1.7 Sections coniques

Les sections coniques sont des courbes planes obtenues par l'intersection d'un cône de révolution avec un plan ne contenant pas le sommet du cône. On peut ainsi obtenir :

- un cercle,
- une ellipse,
- une parabole,
- une hyperbole.

Le cercle n'est en fait qu'un cas particulier d'une ellipse et a déjà été traité précédemment.

L'ellipse

Une *ellipse* est le lieu géométrique des points du plan dont la somme des distances à deux points donnés, appelés *foyers*, est constante et égale à $= 2a$. Elle possède deux axes de symétrie orthogonaux, appelés *grand axe* et *petit axe* de l'ellipse, dont l'intersection est le *centre* de l'ellipse. Les intersections de l'ellipse avec ses axes sont les *sommets* de l'ellipse. Les foyers se situent sur le grand axe, à égale distance de part et d'autre du centre.
L'équation *canonique*, ou réduite, d'une ellipse de centre $C(x_0, y_0)$ et dont le grand axe est parallèle à l'axe Ox est

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - 1 = 0 \ , \quad a > b}$$

$2b$ est la longueur du petit axe de l'ellipse ; on note $2c$ la distance entre les deux foyers, appelée distance *focale* et on a $a^2 = b^2 + c^2$.
Si le grand axe est vertical, on permute les variables $x - x_0$ et $y - y_0$.

L'hyperbole

L'*hyperbole* est le lieu géométrique des points du plan dont la différence des distances à deux points fixes, appelés foyers, est constante et égale à $= 2a$. Elle possède deux axes de symétries orthogonaux. Le premier passe par les foyers et est appelé l'*axe focal*. Les points d'intersections de l'hyperbole avec l'axe focal sont les *sommets* de l'hyperbole.
Si l'axe focal est parallèle à l'axe Ox, l'équation canonique de l'hyperbole de centre $C(x_0, y_0)$ est donnée par

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - 1 = 0}$$

Elle possède deux asymptotes obliques d'équation

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 0$$

Si l'axe focal est vertical, on permute les variables $x - x_0$ et $y - y_0$.

La parabole

La parabole est le lieu géométrique des points du plan équidistant d'une droite appelée *directrice* et d'un point appelé *foyer*. Elle possède un axe de symétrie passant par son foyer, appelé *axe focal*. L'intersection de la parabole avec son axe focal définit le *sommet* de la parabole.
Si l'axe focal de la parabole est parallèle à l'axe Ox et que son sommet est le point $S(x_0, y_0)$, son équation canonique est :

$$\boxed{(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)}$$

où $|p|$ est la distance entre le foyer et la directrice, ou le double de la distance entre le foyer et le sommet.

Si l'axe focal est perpendiculaire à l'abscisse, l'équation devient

$$(y - y_0) = \frac{1}{2p}(x - x_0)^2$$

CONSÉQUENCE : le graphe de $y = ax^2 + bx + c$ est une parabole.

Equation générale d'une conique
L'équation générale d'une conique est

$$\boxed{ax^2 + by^2 + cxy + dx + gy + f = 0}$$

En effectuant une rotation adéquate du système de coordonnées, on obtient l'une des trois équations présentées précédemment. On peut également effectuer une translation pour amener le centre ou un foyer de la conique en un point voulu, par exemple l'origine.

L'excentricité
Il est également possible de définir les coniques à l'aide d'une grandeur que l'on appelle *excentricité*. Si l'on se donne un point F appelé foyer et une droite d appelée directrice, une conique est alors l'ensemble des points P dont le rapport des distances au foyer et à la directrice est constant. Cette constante est *l'excentricité* de la conique, notée

$$e = \frac{\delta(P, F)}{\delta(P, d)}$$

Si $0 < e < 1$ on a une ellipse, si $e = 1$ une parabole et si $e > 1$ une hyperbole. De plus, si la distance entre le foyer et la directrice est r, c'est-à-dire si $\delta(F, d) = r$, en plaçant le foyer à l'origine et l'axe focal sur l'axe Ox, l'équation cartésienne de la conique s'écrit

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2e^2rx - e^2r^2 = 0$$

et en coordonnées polaires

$$\rho = \frac{er}{1 - e\cos\theta}$$

Tangentes aux coniques

Equation de la conique	Equation de la tangente au point $T(x_t, y_t)$ de la conique
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - 1 = 0$	$\frac{(x_t-x_0)(x-x_0)}{a^2} \pm \frac{(y_t-y_0)(y-y_0)}{b^2} - 1 = 0$
$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$	$(y_t-y_0)(y-y_0) = p(x_t-x_0) + p(x-x_0)$

Equation de la conique	Equation des tangentes de pente m
$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}-1=0$	$y-y_0=m(x-x_0)\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$
$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}-1=0$	$y-y_0=m(x-x_0)\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$
$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$	$(y-y_0)=m(x-x_0)+\frac{p}{2m}$
$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$	$(y-y_0)=m(x-x_0)-\frac{pm^2}{2}$

4.2 Géométrie dans l'espace

On considère les notions de points, droites et plans connues

4.2.1 Notions de base

Droite perpendiculaire et droite parallèle à un plan
Soit une droite coupant un plan en un point P. Si cette droite est perpendiculaire à **toutes** les droites du plan passant par P, on dit qu'elle est *perpendiculaire*, ou *orthogonale*, au plan et on l'appelle la *normale* du plan.
Si une droite n'a aucun point ou plus d'un point commun avec un plan, elle est *parallèle* au plan.

Plans sécants, plans parallèles et plans orthogonaux
On dit que deux plans sont parallèles s'ils n'ont aucun point commun ou s'ils sont confondus. Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont *sécants*. L'intersection de deux plans sécants est une droite. Deux plans sont *orthogonaux*, ou *perpendiculaires*, si les normales issues d'un point commun aux deux plans sont perpendiculaires.

Droites parallèles et droites gauches
Deux droites sont dites *parallèles* si elles sont confondues ou si elles n'ont aucun point commun et qu'il existe un plan passant par ces deux droites. Si elles n'ont aucun point commun mais qu'un tel plan n'existe pas, on dit qu'elles sont *gauches*.

Angle entre deux plan
L'angle entre deux plans est égal à l'angle entre leurs normales.

Projection orthogonale d'un point ou d'une droite sur un plan
La *projection orthogonale d'un point* P sur un plan est le point P' du plan tel que la droite PP' est orthogonale au plan. C'est aussi l'intersection entre le plan et la normale du plan passant par le point P. La *projection orthogonale d'une droite* d sur un plan est la droite du plan formée des projections orthogonales des points de la droite d.

Angle entre un plan et une droite
L'angle entre un plan et une droite est l'angle entre cette droite et sa projection orthogonale sur le plan.

Distance d'un point à un plan
La distance d'un point P à un plan π est égale à la distance entre P et sa projection orthogonale P' sur π ; c'est la longueur du segment $[PP']$ que l'on note $\delta(P, \pi)$.
REMARQUE : Pour tout point $P'' \in \pi$, $\delta(P, \pi) \leq \delta(P, P'')$.

Distance d'une droite à un plan
La distance entre un plan π et une droite d parallèle à ce plan est la distance entre n'importe quel point P de d et π ; on la note $\delta(d, \pi)$. Si d est une droite de π, alors $\delta(d, \pi) = 0$. Dans le cas où la droite d coupe π, on peut convenir que la distance entre d et π est nulle.

Distance entre deux droites gauches
La distance entre deux droites gauches d_i, $i = 1, 2$, est la distance entre la première droite et le plan qui lui est parallèle contenant la seconde droite. C'est aussi la longueur δ qui satisfait la relation $\delta = \min \delta(P_1, P_2)$ où $P_i \in d_i$.

Distance entre deux plans
Si les deux plans sont parallèles, la distance entre eux est la distance entre un point ou une droite du premier plan et le second plan.

Plan médiateur
Un *plan médiateur* de deux points, respectivement de deux droites parallèles, est le lieu géométrique des points à égale distance des deux points, respectivement des deux droites parallèles.

Plan bissecteur
Un *plan bissecteur* de deux droites sécantes, respectivement de deux plans sécants, est le lieu géométrique des points à égale distance des deux droites, respectivement des deux plans.

4.2.2 Calcul de volumes et de surfaces

Le cube
Si a est la longueur d'une arête du cube, alors

$$\boxed{\text{Volume} = a^3} \qquad \boxed{\text{Aire totale} = 6a^2}$$

Le prisme droit

$$\boxed{\begin{array}{rl} \text{Volume} & = \text{aire de la base} \cdot \text{hauteur} \\ & = \text{aire de la section droite} \cdot \text{“longueur de l'arête”} \\ & \\ \text{Aire latérale} & = \text{périmètre de la section droite} \cdot \text{“longueur de l'arête”} \end{array}}$$

La pyramide régulière

$$\boxed{\text{Volume} = \frac{1}{3} \cdot \text{aire de la base} \cdot \text{hauteur}}$$

Le cylindre de révolution

Si l'on note r le rayon du disque de base du cylindre et h la hauteur du cylindre, on a

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Volume} &= \pi r^2 h \\ \text{Aire latérale} &= 2\pi r h \\ \text{Aire totale} &= 2\pi r(r+h) \end{aligned}}$$

Le cône de révolution
Si l'on note r le rayon du disque de base du cône, h la hauteur du cône et $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ la distance d'un point du cercle limitant le disque au sommet du cône, on a

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Volume} &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ \text{Aire latérale} &= \pi r l \\ \text{Aire totale} &= \pi r(r+l) \end{aligned}}$$

La sphère
Si le rayon de la sphère est r, on a

$$\boxed{\text{Volume} = \frac{4}{3}\pi r^3} \qquad \boxed{\text{Aire} = 4\pi r^2}$$

Le principe de Cavalieri

1. Si toutes les coupes de deux surfaces planes ont même longueur, alors ces surfaces ont même aire.
2. Si toutes les sections de deux solides ont même aire, alors ces solides ont même volume.

Exemples : deux parallélogrammes, ou deux triangles, avec des bases égales et des hauteurs égales ont même aire ; deux prismes, ou deux pyramides, avec des bases égales et des hauteurs égales ont même volume. On choisit ici les coupes et les sections parallèles aux bases

4.2.3 Equation cartésienne d'un plan

Un plan est le lieu géométrique des points de l'espace $(Oxyz)$ qui vérifient une équation du type

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

4.2.4 Equations cartésiennes d'une droite

Dans l'espace, une droite peut être interprétée comme l'intersection de deux plans sécants. La droite est donc le lieu géométrique des points dont les coordonnées sont solution d'un système formé par les équations des deux plans :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{array}\right.}$$

4.2.5 Equation cartésienne d'une sphère

La sphère est le lieu géométrique des points de l'espace à égale distance, appelée *rayon*, d'un point donné, appelé *centre* de la sphère. L'équation cartésienne d'une sphère Σ de centre (x_0, y_0, z_0) et de rayon r est

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.}$$

Un *plan tangent* à une sphère Σ est un plan ne touchant Σ qu'en un point T. Si ce point a pour coordonnées (x_T, y_T, z_T) l'équation du plan tangent sera

$$(x_T - x_0)(x - x_0) + (y_T - y_0)(y - y_0) + (z_T - z_0)(z - z_0) = r^2$$

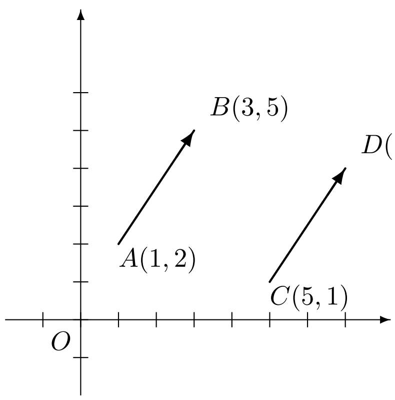
Toute droite du plan tangent passant par le point T est une *tangente* à la sphère.

4.3 Géométrie vectorielle dans le plan et dans l'espace

4.3.1 Vecteurs

Dans ce qui suit, nous allons considérer uniquement les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Si l'on se place dans $\mathbb{R}^2$, respectivement dans $\mathbb{R}^3$, un vecteur correspond à un couple, respectivement un triplet, de nombres, appelés les *composantes* du vecteur, qui définissent une *direction*, un *sens* et une *longueur* ou une *norme*. Ainsi, si l'on représente $A(1,2)$ et $B(3,5)$ dans le plan cartésien, le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ correspond graphiquement à la "flèche "d'origine A et d'extrémité B.
Si l'on prend les points $C(5,1)$ et $D(7,4)$, le vecteur $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est le même que $\overrightarrow{AB}$. En effet, bien qu'il n'aient pas la même origine et la même extrémité, ils indiquent la même direction, le même sens et la même longueur.



Norme d'un vecteur

Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. La *norme*, notée $\|\overrightarrow{u}\|$, est égale à la longueur du vecteur $\overrightarrow{u}$. On a donc $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.
Dans $\mathbb{R}^3$, la norme du vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ est $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.
Si la norme d'un vecteur vaut 1, on dit que le vecteur est *normé*, ou *unitaire*.

Addition de vecteurs

Il est possible d'additionner des vecteurs, composante par composante. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ auquel on additionne le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

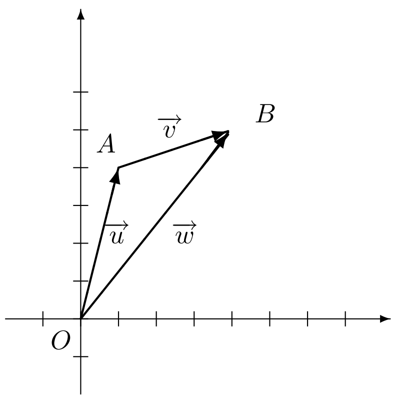
Si on pose $A(1,4)$ et $B(4,5)$, on a selon la figure ci-dessous, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$, d'où

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Ainsi, si l'on donne deux points $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$, on aura

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Il en va de même pour des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.



Il en découle la propriété suivante, appelée *relation de Chales*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Propriétés

(i)	commutativité :	$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
(ii)	associativité :	$\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$
(iii)	élément neutre :	$\overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0}$
(iv)	élément inverse :	Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ il existe un unique vecteur noté $-\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Multiplication par un scalaire

Multiplier un vecteur par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ ne change pas sa direction, mais multiplie sa longueur, ou sa norme, par $|\alpha|$. Si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, alors $\alpha \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}$. Le sens est conservé si $\alpha > 0$ et inversé si $\alpha < 0$. On a donc $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Propriétés

$$
\begin{array}{rl}
(v) & \alpha(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u}+\alpha\overrightarrow{v} \\
(vi) & (\alpha+\beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{u} \\
(vii) & \alpha(\beta\overrightarrow{u}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{u} \\
(viii) & 1\cdot\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}
\end{array}
$$

Colinéarité et orthogonalité
Deux vecteurs sont *colinéaires* si l'un est le produit de l'autre par un scalaire. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *orthogonaux* si leurs directions sont perpendiculaires. On note $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

Repère et base
Dans le plan, on appelle *repère* tout triplet de points non alignés. Si l'on prend trois points A, B et C dans $\mathbb{R}^2$ formant un repère, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. De plus, tout autre vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^2$ peut s'exprimer sous la forme $\overrightarrow{u} = \alpha_1\overrightarrow{AB}+\alpha_2\overrightarrow{AC}$, où α_1, α_2 sont des réels. On dit alors que ces deux vecteurs forment une *base*. Toute autre base de $\mathbb{R}^2$ contient également deux vecteurs.

Dans l'espace, un *repère* est un quadruplet de points dont trois forment un repère dans un plan et dont le quatrième n'est pas contenu dans ce plan. Si l'on prend quatre points A, B, C et D de $\mathbb{R}^3$ formant un repère, on pourra construire trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ tels que tout autre vecteur $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$ pourra s'écrire sous la forme $\overrightarrow{w} = \alpha_1\overrightarrow{AB}+\alpha_2\overrightarrow{AC}+\alpha_3\overrightarrow{AD}$, où $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Ils définissent une *base* de $\mathbb{R}^3$.

Un repère $(O; I; J)$ du plan est dit *orthonormé* si

$$\|\overrightarrow{OI}\| = \|\overrightarrow{OJ}\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{OJ}.$$

Dans l'espace, un repère $(O; I; J; K)$ est *orthonormé* si

$$\|\overrightarrow{OI}\| = \|\overrightarrow{OJ}\| = \|\overrightarrow{OK}\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{OJ} \;,\; \overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{OK} \;,\; \overrightarrow{OJ} \perp \overrightarrow{OK}.$$

Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
Le *produit scalaire* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\mathbb{R}^2$, où $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, est le nombre réel

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Le *produit scalaire* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\mathbb{R}^3$, où $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ est le nombre réel

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Propriétés du produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

$$
\begin{array}{l}
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u} \\
\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} \\
\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v}) = \alpha(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}) \\
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} \geqslant 0 \\
\quad \text{et} \quad \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}
\end{array}
$$

De plus, on a les relations suivantes entre la norme et le produit scalaire

$$\begin{array}{|lll|}\hline \|\overrightarrow{u}\| & = \sqrt{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}} & \\ |\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}| & \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| & \text{Inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} & = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right) & \\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} & = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\varphi & \text{où } \varphi \text{ est l'angle entre } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \\ \hline\end{array}$$

Le produit scalaire permet également de vérifier rapidement si deux vecteurs non nuls sont orthogonaux :

$$\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}}$$

En effet, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\varphi = 0$; si $\overrightarrow{u} \neq 0$, $\overrightarrow{v} \neq 0$, alors $\cos\varphi = 0$ d'où $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.

Le produit vectoriel

Le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\mathbb{R}^3$, noté $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$, ou $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$, est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas parallèles, alors $\{\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ orientée positivement ("règle de la main droite").

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ sont

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

Remarque : géométriquement, $\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\|$ représente l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Par ailleurs,

$$\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,|\sin\varphi|$$

Propriétés

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v} &= -\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) &= \overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w} \\ (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w} &= (\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w})+(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}) \\ (\alpha\overrightarrow{u})\times\overrightarrow{v} &= \alpha(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\ , \quad \alpha\in\mathbb{R} \\ \overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}) &= (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})\overrightarrow{w} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont parallèles si et seulement si } \overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}}$$

Le produit mixte

Le *produit mixte* des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ dans $\mathbb{R}^3$ est le nombre réel défini par

$$\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}) = u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3 - u_3v_2w_1.$$

On utilise parfois la notation suivante : $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}) = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

Propriétés

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$$
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$$
$$\lambda \cdot [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w}]$$
$$[\vec{u} + \vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}]$$

Remarque : géométriquement, $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$ représente le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Inégalité de Hadamard : $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| \leqslant \|\vec{u}\| \, \|\vec{v} \times \vec{w}\| \leqslant \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|$.

4.3.2 Géométrie vectorielle dans le plan

Equation vectorielle d'une droite

Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan. Un point P appartient au segment $[AB]$ si et seulement s'il existe un réel α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, tel que $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{OP} = (1-\alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB}$$

On dit que P divise le segment $[AB]$ dans le rapport α.
Si M est le milieu du segment $[AB]$, on a donc $\alpha = \frac{1}{2}$ et

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

La droite d'équation $ax + by + c = 0$ peut s'écrire comme l'ensemble des points P satisfaisant l'équation vectorielle de la droite qui est de la forme

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{d} \ , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

A est un point de la droite et $\vec{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est le *vecteur directeur* de la droite.
Si on donne deux points distincts A et B de la droite, on peut prendre $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur.

On définit le *vecteur normal* à la droite, qu'on note $\vec{n}$, comme étant le vecteur perpendiculaire à $\vec{d}$. Si la droite a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, alors

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \vec{d} = 0.$$

La **distance** de la droite $ax + by + c = 0$ au point $P_1(x_1, y_1)$ est donnée par

$$\delta = \left|\overrightarrow{AP_1} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

où A est un point de la droite.

La **projection orthogonale** de P_1 sur cette même droite est le point P' tel que

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP_1} - \left(\overrightarrow{AP_1} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right) \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$$

Le point **symétrique** de P_1 par rapport à cette droite est donc le point P'' tel que

$$\overrightarrow{OP''} = \overrightarrow{OP_1} - 2\left(\overrightarrow{AP_1} \cdot \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

Si $A = (x_A, y_A)$ et $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ on passe d'une représentation de la droite à une autre de la manière suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{d} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_A + \lambda d_1 \\ y = y_A + \lambda d_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad d_2x - d_1y - d_2x_A + d_1y_A = 0}$$

Puisque $\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2} = \|\overrightarrow{d_1}\| \; \|\overrightarrow{d_2}\| \cos\varphi$, l'**angle** φ entre deux droites d_1 et d_2 est donné par

$$\varphi = \arccos \frac{|\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2}|}{\|\overrightarrow{d_1}\| \; \|\overrightarrow{d_2}\|} = \arccos \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{\|\overrightarrow{n_1}\| \; \|\overrightarrow{n_2}\|}$$

Les deux équations des **bissectrices** des droites $a_ix + b_iy + c_i$, $i = 1, 2$ sont

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Equation vectorielle d'un cercle

Vectoriellement, le cercle est l'ensemble des points P tels que

$$\|\overrightarrow{P_0P}\| = r \quad \text{ou} \quad \|\overrightarrow{P_0P}\|^2 = r^2$$

La **tangente** au point $P_1(x_1, y_1)$ du cercle est l'ensemble des points P satisfaisant :

$$\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \overrightarrow{P_0P} = r^2 \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{P_0P_1} \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0$$

4.3.3 Géométrie vectorielle dans l'espace

Equation vectorielle d'un plan

Il est également possible de définir vectoriellement un **plan** passant par un point $P_1(x_1, y_1, z_1)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires. Ce plan est donné par l'ensemble des points P vérifiant

$$\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0P_1} + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \;, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Si l'on donne deux autres points du plan P_2 et P_3, tels que P_1, P_2 et P_3 ne sont pas colinéaires, on peut prendre comme vecteurs directeurs $\overrightarrow{P_1P_2}$ et $\overrightarrow{P_1P_3}$.
Si l'on donne l'équation cartésienne $ax+by+cz+d = 0$ d'un plan, son **vecteur normal** sera

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

et l'équation du plan pourra s'écrire

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{PP_1} = 0$$

Si l'on connaît le vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ et un point $A = (x_A, y_A, z_A)$ du plan, son équation cartésienne est donc

$$n_1x + n_2y + n_3z - n_1x_A - n_2y_A - n_3z_A = 0$$

Remarque : pour établir l'équation cartésienne d'un plan à partir de son équation vectorielle, on peut prendre comme vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont les deux vecteurs directeurs du plan.

La **distance** entre un point $P_1(x_1, y_1, z_1)$ et le plan $ax + by + cz + d = 0$ contenant le point A est donnée par

$$\delta = \left| \overrightarrow{AP_1} \cdot \frac{\overrightarrow{n}}{\| \overrightarrow{n} \|} \right| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

La **projection orthogonale** de P_1 sur ce même plan sera le point P' tel que

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP_1} - \left(\overrightarrow{AP_1} \cdot \frac{\overrightarrow{n}}{\| \overrightarrow{n} \|} \right) \cdot \frac{\overrightarrow{n}}{\| \overrightarrow{n} \|}$$

On établit la formule pour le symétrique P'' de P_1 par rapport au plan de la même manière que pour la droite.

Dans l'espace, il n'est plus possible de définir la normale d'une droite ; il y a une infinité de droites perpendiculaires à une droite donnée en un point donné de cette droite qui génèrent un plan normal à la droite.
Si $\overrightarrow{d}$ est le vecteur directeur de la droite d, A un point de d et P un point extérieur à d, la distance de P à d est

$$\delta(P, d) = \left\| \overrightarrow{AP} \times \frac{\overrightarrow{d}}{\| \overrightarrow{d} \|} \right\|$$

et la projection orthogonale de P sur d sera le point P' tel que

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{AP} \cdot \frac{\overrightarrow{d}}{\| \overrightarrow{d} \|} \right) \cdot \frac{\overrightarrow{d}}{\| \overrightarrow{d} \|}$$

L'**angle** φ entre deux plans ayant pour normales $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ est

$$\varphi = \arccos \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{\|\overrightarrow{n_1}\| \, \|\overrightarrow{n_2}\|}$$

Si les deux plans ont pour équations $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, les équations des **plans bissecteurs** sont données par

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Equation vectorielle d'une sphère

L'équation vectorielle de la sphère de centre $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et de rayon r est

$$\|\overrightarrow{P_0P}\| = r \quad \text{ou} \quad \|\overrightarrow{P_0P}\|^2 = r^2$$

Le **plan tangent** au point P_1 de la sphère est l'ensemble des points P vérifiant

$$\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \overrightarrow{P_0P} = r^2 \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{P_0P_1} \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0$$

Solutions des exercices

S4.1 Théorème d'Euclide :
En utilisant les relations $a^2 + b^2 = c^2$ et $b'^2 + h^2 = b^2$, on déduit que

$$a^2 = c^2 - b'^2 - h^2 = (a' + b')^2 - b'^2 - (a^2 - a'^2)$$

d'où $2a^2 = 2a'(a' + b')$ et $a^2 = a'c$.

Théorème de la hauteur :
On peut utiliser le théorème d'Euclide pour démontrer le théorème de la hauteur. On a $h^2 = a^2 - a'^2 = a'c - a'^2 = a'(c - a') = a'b'$.

S4.2 C'est le cercle dont le diamètre est l'hypoténuse donné. En effet, il suffit d'appliquer la propriété de l'angle inscrit et de l'angle au centre d'un cercle en choisissant ici respectivement 90° et 180°.

S4.3 Soient a, b les cathètes et c l'hypoténuse du triangle cherché ; on doit avoir $a^2 + \left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2 = c^2$, d'où en posant $\frac{a}{c} = X$, $5X^2 + 2X - 3 = 0$. On obtient $X = \frac{3}{5}$ et $(a, b, c) = (3r, 4r, 5r)$, r réel positif.

S4.4 Les coordonnées de I sont $(6, 4)$ et le coefficient angulaire de AI est égal à $-\frac{1}{4}$. On en déduit l'équation de p : $\dfrac{y+3}{x-1} = 4$ c'est-à-dire $4x - y - 7 = 0$.

S4.5 Le nombre de tangentes communes à σ_1 et σ_2 est 0 si σ_1 est intérieur à σ_2, 1 si σ_1 est tangent intérieurement à σ_2, 2 si σ_1 et σ_2 se coupent, 3 si σ_1 est tangent extérieurement à σ_2 et 4 si σ_1 est extérieur à σ_2.

S4.6 L'équation de la droite des centres d passant par $O\Omega$ est donnée par $12x - 5y = 0$. On détermine $d \cap \Gamma'$ qui sont les points $I_1(5, 12)$ et $I_2(-5, -12)$ puis l'on calcule $R = \|I\Omega\|$ d'où $R_1 = 26$ et $R_2 = 52$.

S4.7 *Méthode générale :* on peut résoudre le problème en utilisant les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ qui ont pour équations respectivement $x - 2y + 5 = 0$ et $x + y - 4 = 0$ et dont l'intersection détermine le centre Ω de γ. Le rayon est ensuite donné par $\|\overrightarrow{\Omega A}\|$, ce qui permet d'établir l'équation du cercle.

Dans le cas présent, l'équation du cercle γ est de la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y = 0$; puisque $(0, 0) \in \gamma$. En écrivant que B et C sont sur γ, on obtient

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 10 \\ \alpha + \beta = -8 \end{cases} \quad \text{d'où } (\alpha, \beta) = (-2, -6) \text{ et } \gamma : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$$

S4.8 Le volume cherché est $V = \frac{1}{3}$(aire de la base) $\cdot$ (hauteur), d'où

$$V = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\Big\|\Big) \cdot 12 = 2\Big\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\Big\| = 10$$

S4.9 Les coordonnées d'un point D de d sont $(2 + 3\lambda, -3 + \lambda, 1 - 6\lambda)$. Il faut ainsi résoudre $1 = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})|$ d'où $2\lambda - 2 = \pm 6$. On trouve donc deux points, $D_1(14, 1, -23)$ et $D_2(-4, -5, 13)$.

S4.10 En utilisant l'orthogonalité des vecteurs directeurs ou normaux, on trouve $m = -3$.

S4.11
a) Le vecteur $\overrightarrow{AB} = 2(1, 1, 3)$ est normal au plan cherché et $M(3, 2, -1)$, milieu de $[AB]$, est un point de ce plan, d'où son équation : $x + y + 3z = 2$.
b) Le point C est déterminé par l'intersection de d et du plan médiateur de A et B. En utilisant l'équation vectorielle de d, $\overrightarrow{r}_d = \overrightarrow{OP} = (3, -1, -2) + \lambda(1, 2, 1)$, on trouve $\lambda = 1$ et $C(4, 1, -1)$.

S4.12 Le centre Ω de γ est l'intersection des médiatrices $x-y=1$ et $x+y=3$, d'où $\Omega(2,1)$ et l'équation de γ est $(x-2)^2+(y-1)^2=\|\overrightarrow{\Omega A}\|^2=5$.
Soit $T(\xi,\eta)$ le point de tangence de τ ; l'équation de τ est $(\xi-2)(x-2)+(\eta-1)(y-1)=5$ et $P\in\tau$ implique $\xi-3\eta=-6$ d'où, puisque $T\in\gamma$, $(3\eta-8)^2+(\eta-1)^2=5$; on obtient $\eta=2$ ou 3, ce qui détermine $T_1(0,2)$ et $T_2(3,3)$. La pente de τ étant négative, seul T_2 est à retenir : l'équation de τ est donc $x+2y=9$.
Il reste à trouver Q, intersection de τ et d'un cercle de rayon 13 et de centre K, donc d'équation $(x-12)^2+(y-13)^2=169$, ce qui implique $(-2y-3)^2+(y-13)^2=169$ d'où $y=1$ ou $\frac{9}{5}$ et $x=7$ ou $\frac{27}{5}$. Finalement, $x_Q>6$ implique $x_Q=7$, $y_Q=1$.

S4.13 La distance entre un point $P_2(x_2,y_2,z_2)$ et le plan $ax+by+cz+d=0$ contenant le point A est donnée par

$$\delta=\left|\overrightarrow{AP_2}\cdot\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right|$$

Dans notre cas, les deux droites gauches d_1 et d_2 de vecteur directeurs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ passent respectivement par les points P_1 et P_2 ; il suffit de considérer alors que d_1 est contenue dans le plan engendré par $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ et de chercher la distance entre P_2 et ce plan.
Comme $\vec{d_1}\times\vec{d_2}$ est un vecteur normal au plan, la distance entre les deux droites est simplement

$$\frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{d_1}\times\vec{d_2})\right|}{\|\vec{d_1}\times\vec{d_2}\|}.$$

S4.14 Si P' est la projection de P sur d et α l'angle entre $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{d}$ orienté dans le sens positif, alors

$$\left\|\overrightarrow{AP}\times\frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}\right\|=\left|\frac{1}{\|\vec{d}\|}\|\overrightarrow{AP}\|\ \|\vec{d}\|\ \sin\alpha\right|=|PP'|=\delta(P;d).$$

S4.15 On détermine P'' le symétrique de P par rapport π ; I est alors l'intersection de la droite $(P''Q)$ et du plan π, puisque $|PI|+|IQ|=|P''I|+|IQ|$ est le plus court chemin de P à Q en passant par I (propriété physique de la trajectoire des rayons lumineux). On obtient $I(-11,4,5)$ et $\alpha=\pi/4$.

S4.16 Pour répondre à la question, il suffit de déterminer si la distance de la droite au centre de la sphère est plus petite ou plus grande que le rayon. Par analogie à l'exercice 4.7, on peut utiliser des plans médiateurs pour trouver les coordonnées du centre ou, ce qui revient au même, chercher le point P tel que $\|\overrightarrow{PA}\|=\|\overrightarrow{PB}\|=\|\overrightarrow{PC}\|=\|\overrightarrow{PD}\|$.
Si l'on note (p_1,p_2,p_3) les coordonnées de P, on a :
$\|\overrightarrow{PA}\|=\|\overrightarrow{PD}\|$ donne $p_1^2+p_2^2+p_3^2=p_1^2+p_2^2+p_3^2-2p_3+1$, d'où $p_3=1/2$,
$\|\overrightarrow{PA}\|=\|\overrightarrow{PB}\|$ donne $p_1^2+p_2^2+p_3^2=p_1^2-2p_1+1+p_2^2+p_3^2-2p_3+1$ d'où $p_1=1/2$,
$\|\overrightarrow{PA}\|=\|\overrightarrow{PC}\|$ donne $p_1^2+p_2^2+p_3^2=p_1^2-2p_1+1+p_2^2-4p_2+4+p_3^2-2p_3+1$ d'où $p_2=1$.
Il s'ensuit que le rayon est $\|\overrightarrow{AP}\|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
En choisissant comme vecteur directeur de la droite le vecteur $\overrightarrow{EF}=(1,1,1)=\vec{d}$, on obtient $\delta(P;d)=\left\|\overrightarrow{EP}\times\dfrac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}\right\|=\sqrt{2}>\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{1,5}$. Donc la droite ne coupe pas la sphère.

S4.17 Il faut tout d'abord chercher le plan tangent à la sphère au point T. On trouve comme équation de ce plan

$$x + 4y + 8z - 74 = 0.$$

On vérifie ensuite si la droite (ST) passe par P'', le point symétrique du point P par rapport au plan tangent (ou également si (PT) passe par S''), ce qui est le cas.
On peut également contrôler que

(1) P est dans le plan contenant les droites (ST) et (ΩT), où Ω est le centre de la sphère ;

(2) $\cos(\widehat{ST, \Omega T}) = \cos(\widehat{PT, \Omega T})$.

S4.18 L'équation du plan π, orthogonal à d et passant par P est $x+2y-3z = 2$. Soit I l'intersection de π et d ; alors $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'})$, c'est-à-dire
$\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OP} = 2(3, 1, 1) - (1, 2, 1) = (5, 0, 1)$.

S4.19 Soient $G_1 \in g_1$ et $G_2 \in g_2$ deux points choisis et I_1, I_2 les intersections respectives de la transversale avec g_1 et g_2. Les vecteurs $\overrightarrow{g_1}$, $\overrightarrow{g_2}$ et $\overrightarrow{t}$ forment une base et on a $\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{G_1I_1} + \overrightarrow{I_1I_2} + \overrightarrow{I_2G_2} = \lambda\overrightarrow{g_1} + \tau\,\overrightarrow{t} + \mu\overrightarrow{g_2}$, d'où, par exemple, $\overrightarrow{G_1G_2} \cdot (\overrightarrow{t} \times \overrightarrow{g_1}) = \lambda \cdot 0 + \tau \cdot 0 + \mu\overrightarrow{g_2} \cdot (\overrightarrow{t} \times \overrightarrow{g_1})$. Numériquement, avec $\overrightarrow{G_1G_2} = (2, 3, 1) - (1, 4, -1) = (1, -1, 2)$, on obtient $\mu = -3$ et, avec un calcul analogue, $\lambda = -2$. Alors $\overrightarrow{OI_1} = \overrightarrow{OG_1} + \lambda\overrightarrow{g_1} = (-1, 0, -3)$ et $\overrightarrow{OI_2} = \overrightarrow{OG_2} - \mu\overrightarrow{g_2} = (5, 6, 7)$.

S4.20 Il s'agit de la plus courte distance entre les deux droites gauches g_i. La droite (AB) est ici une transversale dont la direction est $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{g_1} \times \overrightarrow{g_2} \sim (1, 4, 8)$. La méthode de l'exercice 4.19 s'applique et l'on obtient $A(1, 1, 1)$, $B(2, 5, 9)$ d'où $\|\overrightarrow{AB}\| = 9$.

CHAPITRE 5

Trigonométrie

Exercices

E5.1 Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $r = 12$cm. Un angle α, de sommet O, intercepte sur $\mathcal{C}$ un arc AB de longueur $l = 3,14$cm.

a) Déterminer α en radians et en degrés, (on accepte l'approximation $\pi \approx 3,14$).

b) En écrivant $\alpha = \beta - \gamma$, où β et γ sont des angles choisis judicieusement, déterminer, sans calculatrice, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$.

c) Soit P la projection orthogonale de A sur OB. Quelles sont les longueurs de OP et AP ?

E5.2 On considère la fonction réelle $f(x) = 3\cos(\pi x + \frac{\pi}{2})$. Montrer que f est impaire, périodique de période 2 et que $f(x) < 0$ pour $x \in]0,1[$.

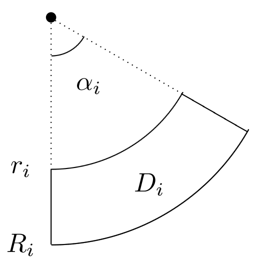
E5.3 Soient $f(x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{4})$ et $g(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{4})$.

a) Déterminer les points d'intersection des graphes de f et g.

b) Montrer que la fonction $h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$ est constante.

E5.4 Soit ABC un triangle. Sachant que $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{12}$, $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$ et $AB = 2\sqrt{3}$, déterminer AC et BC.

E5.5 On considère les domaines $D_i(\alpha_i, r_i, R_i)$, $i = 1, 2$ semblables à celui esquissé dans la figure ci-dessous. Déterminer R_1 en fonction de r_1 et R_2 sachant que les aires de D_1 et D_2 sont égales, que α_1 est le double de α_2 et que $r_2 = R_1$.



E5.6 Une charge est hissée à l'aide d'un câble enroulé sur une poulie de rayon égal à 12cm. Calculer la longueur du cable en contact avec la poulie sachant que le bout du câble sur lequel on tire forme un angle de 15° avec la verticale.

E5.7 Trouver la période de la fonction $f\ :\ x \mapsto 1 + 4\cos(3x + \sqrt{\pi})$.

E5.8 Soit ABC un triangle rectangle en C. Déterminer le sinus et le cosinus de l'angle $\widehat{CAB}$ sachant que $AC = 5$ et $CB = 12$. Déterminer, sans calculatrice, si $\widehat{CAB}$ est plus grand ou plus petit que $\pi/3$.

E5.9 Montrer que dans un triangle quelconque, non rectangle, d'angles α, β, γ on a :
$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$$

E5.10 Un bateau se trouve au pied d'une falaise de 600m, orientée est-ouest. Il prend la mer en suivant le méridien du lieu ; déterminer la hauteur de la partie de la falaise encore visible depuis le bateau lorsque celui-ci a parcouru 80km ainsi que la distance minimale à parcourir pour ne plus voir la falaise.
On admettra que la Terre est une sphère de rayon égal à 6370km.

E5.11 Un promeneur doit rejoindre nuitamment un point B depuis un point A. Marchant à la vitesse de 4km/h, il quitte A en ligne droite, en dérivant de $15°$. Arrivé à un point P, il corrige sa direction de $40°$ dans le sens adéquat et met encore 15 minutes pour atteindre B. Calculer la distance $\overline{AB}$

E5.12 Un observateur mesure, sous un angle de $30°$, la hauteur d'un mât situé en face de lui sur la berge opposée d'une rivière. En se déplaçant de 20m le long de la rive, l'observateur voit alors le mât sous un angle de $15°$. Calculer la largeur de la rivière ainsi que la hauteur du mât.

E5.13 Résoudre l'équation : $\sin x + \cos 5x = \cos 3x - \sin 7x.$

E5.14 Trouver $A > 0$ et φ tels que :
$$3 \cdot \cos x + 4 \cdot \sin x = A \cdot \cos(x - \varphi),\ \forall x.$$

E5.15 Résoudre l'équation
$$6 \sin t = \frac{\cos 2t - 5}{\sqrt{\tan X}}$$
si X est solution de
$$8 \sin 2x + \cos 2x = 10 \cot x - 2.$$

E5.16 Résoudre l'équation suivante pour $3\pi < t < \frac{7\pi}{2}$:
$$(\sin t - 2 - \sqrt{3}\cos t)(2 + \sin t - \sqrt{3}\cos t) = 3(\sqrt{2}\sin t - \sqrt{6}\cos t) - 8.$$

E5.17 Soit ABC un triangle tel que $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$. Déterminer l'angle α' pour que le triangle $A'B'C'$ ait la même aire que ABC, sachant que $b' = 2\sqrt{5}$ et $c' = 24$.

E5.18 On cherche à déterminer la distance δ d'un point A à un point B non visible de A. En se déplaçant le long d'une demi-droite issue de A, on choisit deux points D_1 et D_2 d'où l'on peut voir A et B.
Ayant mesuré les distances $AD_1 = 600$m et $AD_2 = 700$m ainsi que les angles $\measuredangle AD_1B = 56,25°$ et $\measuredangle AD_2B = 43,09°$, calculer la distance δ.

E5.19 Deux navires N_1 et N_2 situés sur un même méridien et distants l'un de l'autre de d kilomètres observent un satellite S.
A l'instant où la trajectoire de S coupe la verticale de N_1, l'observateur de N_2 voit le satellite sous un angle α. Déterminer l'altitude $h = N_1S$ du satellite (on note r, en km, le rayon de la Terre supposée sphérique).

E5.20 Les fonctions trigonométriques suivantes sont-elles périodiques ? Si oui, quelle est leur période ?

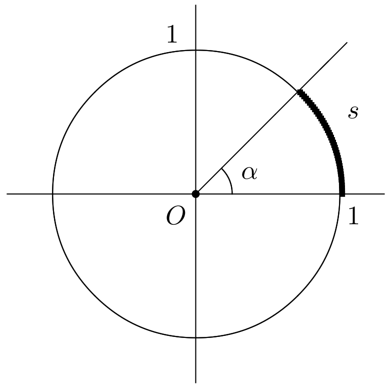
(1) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{14}x) + \cos(\frac{\pi}{91}x)$; (2) $f(x) = \sin x + \sin(\sqrt{2}x)$; (3) $f(x) = \frac{5}{2} + \sin^2 x$.

E5.21 Etudier la fonction $h(x) = e^{\sin(\pi x/2)}$.

Notions théoriques

5.1 Mesures d'angles et longueur d'arc

La **mesure en radians** d'un angle de sommet O est égale au nombre qui détermine la longueur de l'arc s que l'angle intercepte sur un cercle de rayon 1, centré en O :



Le *radian* est donc la mesure de l'angle de sommet O qui intercepte sur un cercle de centre O un arc de longueur égale au rayon de ce cercle.

Le *degré* est la mesure de l'angle de sommet O qui intercepte sur un cercle de centre O un arc égal à la $360^{\text{ème}}$ partie de ce cercle. Pour convertir des degrés en radians, on a la formule suivante :

$$\frac{\alpha(rad)}{2\pi} = \frac{\alpha(^\circ)}{360}$$

Sur un cercle de centre O et de rayon r, un angle au centre de α radians intercepte un arc de longueur

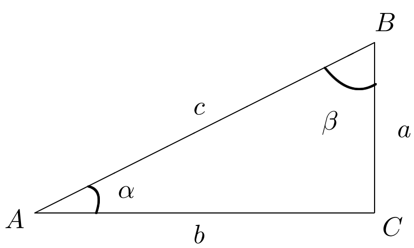
$$l = \alpha \cdot r$$

et l'aire du secteur circulaire ainsi défini est :

$$\sigma = \frac{1}{2}\alpha r^2.$$

5.2 Fonctions trigonométriques dans un triangle rectangle

Définitions



Soit $\alpha < \frac{\pi}{2}$ l'angle correspondant au sommet A d'un triangle ABC, rectangle en C ; on note $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ et $\cot\alpha$ respectivement le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente de α définis comme suit :

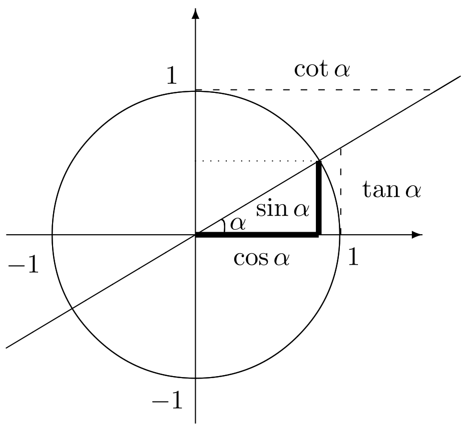
$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\alpha = \dfrac{a}{c} & \cos\alpha = \dfrac{b}{c} \\[2ex] \tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} & \cot\alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{\tan\alpha} \end{array}}$$

Propriétés

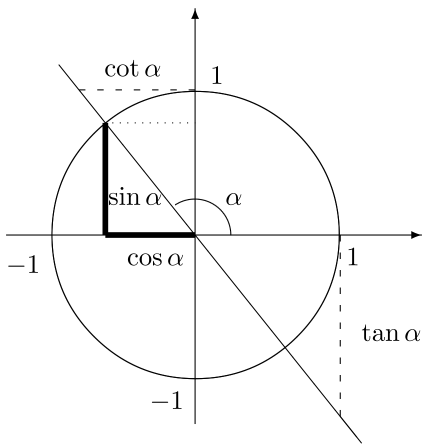
$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\beta = \sin(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha & \tan\beta = \tan(\pi/2-\alpha) = \cot\alpha. \\[2ex] \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha & \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1+\cot^2\alpha \end{array}}$$

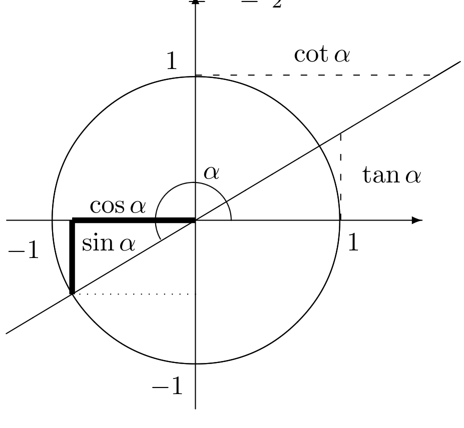
5.3 Le cercle trigonométrique



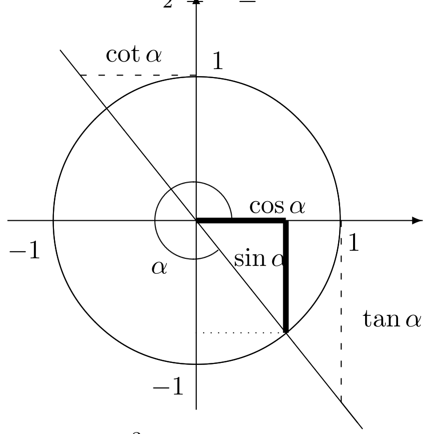
$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$



$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$



$\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$

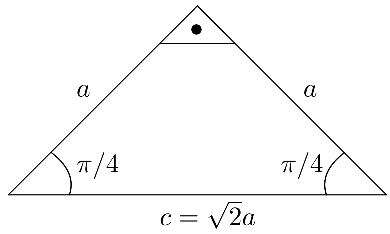


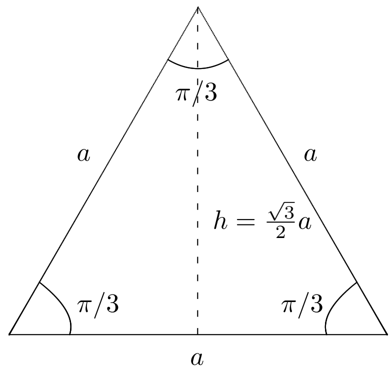
$\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$

Les quadrants déterminent les signes des couples $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

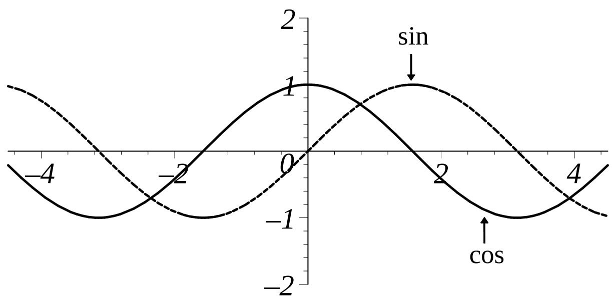
5.4 Valeurs pour des angles particuliers

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0	1	0	0	n.d.
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	n.d.	0

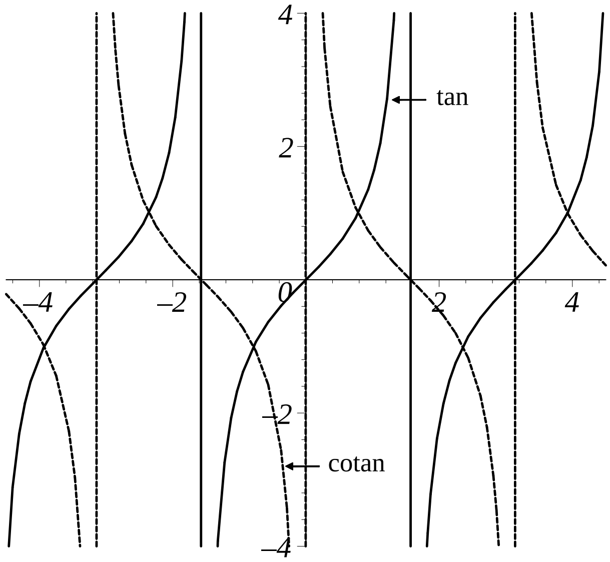




5.5 Courbes représentatives et propriétés des fonctions trigonométriques



$\sin\ :]-\infty,\infty[\longrightarrow [-1,1]$ $\qquad$ $\cos\ :]-\infty,\infty[\longrightarrow [-1,1]$



$$\begin{array}{rl} \tan & :]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi[\longrightarrow]-\infty,\infty[\\ \cot & :]k\pi,(k+1)\pi[\longrightarrow]-\infty,\infty[, \quad k\in\mathbb{Z}. \end{array}$$

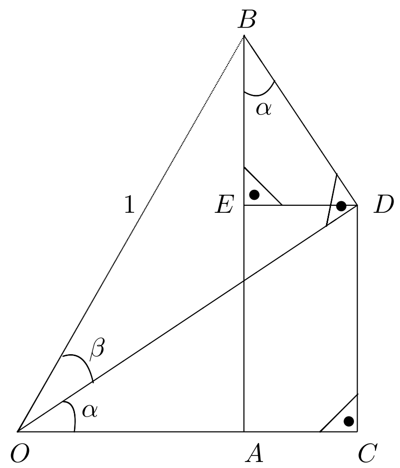
$\sin(\alpha+2\pi n)=\sin(\alpha),\quad n\in\mathbb{Z}$	$\cos(\alpha+2\pi n)=\cos(\alpha),\quad n\in\mathbb{Z}$
$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$	$\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$
$\tan(\alpha+n\pi)=\tan(\alpha),\quad n\in\mathbb{Z}$	$\cot(\alpha+n\pi)=\cot(\alpha),\quad n\in\mathbb{Z}$
$\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha),$	$\cot(-\alpha)=-\cot(\alpha)$

La fonction impaire sin est donc périodique de période 2π ; on dit aussi qu'elle est 2π-périodique. Il en découle que, pour p fixé, la période de $\sin(p\alpha)$ est $\dfrac{2\pi}{p}$.
La fonction cos est 2π-périodique et paire, les fonctions tan et cot sont π-périodiques et impaires.

5.6 Quelques formules

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

Démonstration graphique de $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.



$$\begin{array}{rclcl}
\sin(\alpha+\beta) & = & |AB| & = & |AE|+|EB| \\
 & & & = & |CD|+|EB| \\
 & & & = & |OD|\sin\alpha+|BD|\cos\alpha \\
 & & & = & \cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha
\end{array}$$

Problème : exprimer $\tan(\alpha+\beta)$ en fonction de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ à l'aide des quatre formules principales précédentes.

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\cos\alpha\cos\beta\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)}{\cos\alpha\cos\beta\left(1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}$$

De même, on en déduit les formules trigonométriques suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} & \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \\[2ex]
\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha} & \cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}
\end{array}}$$

On a d'autre part :

$$\begin{aligned}
\sin(2\varphi) &= \sin(\varphi+\varphi)=\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi\sin\varphi \\
&= 2\sin\varphi\cos\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha+\sin\beta \\
&= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right) \\
&= 2\left[\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}\right)+\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\right] \\
&= 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\right) \\
&= 2\left[\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\right] \\
&= 2\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]\end{aligned}$$

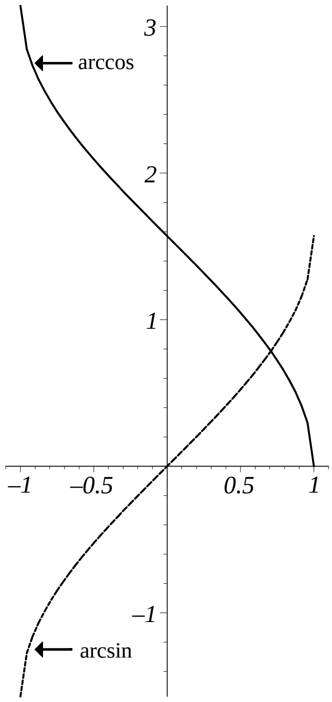
$$\boxed{\begin{aligned}\sin(2\varphi) &= 2\sin\varphi\cos\varphi & \cos(2\varphi) &= \cos^2\varphi-\sin^2\varphi\\ & & &= 1-2\sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi-1\end{aligned}}$$

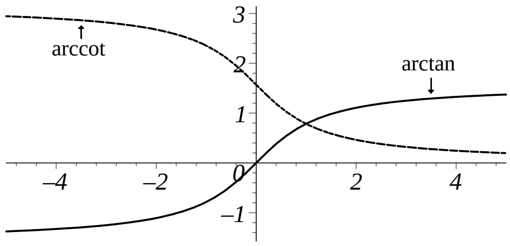
$$\boxed{\begin{aligned}\sin\frac{\varphi}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} & \cos\frac{\varphi}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}\\ \tan\frac{\varphi}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} & \cot\frac{\varphi}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}\\ &= \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} & &= \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}\\ \sin\varphi &= \frac{2\tan\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}} & \cos\varphi &= \frac{1-\tan^2\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \sin\alpha-\sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} & \cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \tan\alpha+\tan\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} & \cot\alpha+\cot\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\\ \tan\alpha-\tan\beta &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} & \cot\alpha-\cot\beta &= \frac{-\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] & \tan\alpha\tan\beta &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}\\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] & \tan\alpha\cot\beta &= \frac{\tan\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha+\tan\beta}\\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)] & \cot\alpha\cot\beta &= \frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\\ \cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] & &\end{aligned}}$$

5.7 Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques





arcsin : $[-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ **arctan :** $\mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

arccos : $[-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ arccot : $\mathbb{R} \longrightarrow]0,\pi[$.

Si $y=\sin\alpha$ et $x=\cos\alpha\neq 0$, on a toujours $\tan\alpha = y/x$; cependant,

$$\alpha = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x>0 \text{ et } y\geqslant 0 \\ \pi+\arctan(y/x) & \text{si } x<0 \text{ et } y\in\mathbb{R} \\ 2\pi+\arctan(y/x) & \text{si } x>0 \text{ et } y<0 \\ \pi/2 & \text{si } x=0 \text{ et } y>0 \\ 3\pi/2 & \text{si } x=0 \text{ et } y<0 \end{cases}$$

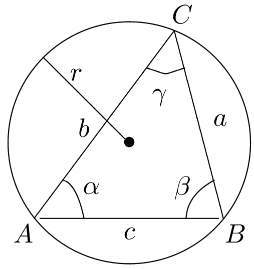
5.8 Equations trigonométriques

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on a :

$$\boxed{\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} \cos x = 0 & \Leftrightarrow & x=\pi/2+k\pi & \tan x = 0 & \Leftrightarrow & x=k\pi \\ \sin x = 0 & \Leftrightarrow & x=k\pi & \cot x = 0 & \Leftrightarrow & x=\pi/2+k\pi \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} \cos x=\cos y & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} x=y+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=-y+2k\pi \end{array}\right. & \tan x=\tan y & \Leftrightarrow & x=y+k\pi \\ \sin x=\sin y & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} x=y+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=\pi-y+2k\pi \end{array}\right. & \cot x=\cot y & \Leftrightarrow & x=y+k\pi \end{array}}$$

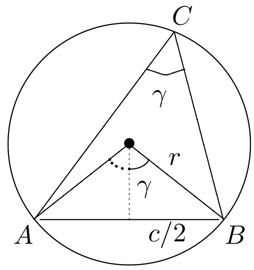
5.9 Relations trigonométriques dans un triangle quelconque



Théorème du sinus :

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r}$$

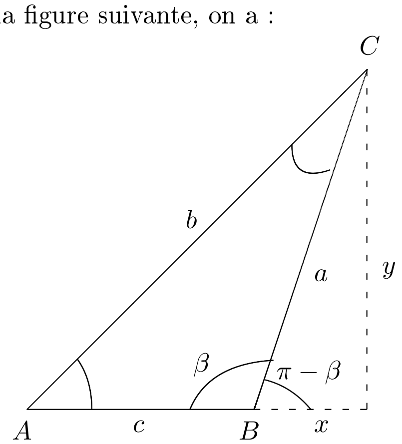
En effet, comme le montre la figure ci-dessous, on a bien : $\sin\gamma = \dfrac{c/2}{r} = \dfrac{c}{2r}$.



Théorème du cosinus :

$$\boxed{\begin{array}{c} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{array}}$$

En effet, d'après la figure suivante, on a :



$$b^2 = (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = (x^2 + y^2) + c^2 + 2xc = a^2 + c^2 + 2xc.$$

Or, $\cos(\pi - \beta) = x/a$ et $\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$; on obtient donc,

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos(\pi - \beta) = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

Formule de Heron :

$$\boxed{\text{Aire du triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

où $2p = a + b + c =$ périmètre du triangle.

Solutions des exercices

S5.1

a) on a $l = \alpha \cdot r$, d'où $\alpha(rad) = \dfrac{l}{r} = \dfrac{3,14}{12} \approx \dfrac{\pi}{12}$.
Par suite, $\alpha(°) = \dfrac{180}{\pi} \cdot \alpha(rad) = \dfrac{180}{\pi} \cdot \dfrac{\pi}{12} = 15°$.
b) On écrit $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$ (ou aussi $15° = 45° - 30°$) d'où

$$\sin(\frac{\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{6}) - \cos(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0,2588$$

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0,9659$$

et par suite $\tan(\dfrac{\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \approx 0,2679$.

c) On a $OA = r = 12$ cm et donc $OP = r\cos\alpha = 12\cos(\dfrac{\pi}{12}) \approx 11,591$ cm. et $AP = r\sin\alpha = 12\sin(\dfrac{\pi}{12}) \approx 3,105$ cm.

S5.2 On peut utiliser l'égalité $\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ pour remarquer que $f(x) = 3\sin(-\pi x) = -3\sin(\pi x)$, d'où $f(-x) = 3\sin(\pi x) = -f(x)$ et f est impaire.
La période fondamentale de la fonction cos est 2π, donc celle de f est T telle que $\pi(x+T) + \frac{\pi}{2} = \pi x + \frac{\pi}{2} + 2\pi$, d'où $T = 2$.
Comme $f(x) = -3\sin(\pi x)$ et $\sin(\pi x) > 0$ pour $x \in]0,1[$, on a $f(x) < 0$ pour $x \in]0,1[$.

S5.3

a) On cherche les valeurs de x vérifiant $g(x) - f(x) = 0$ c'est-à-dire les solutions de $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) - \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$. En utilisant les égalités $\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - (2x + \frac{\pi}{4})) = \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ et $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ on obtient $g(x) - f(x) = 0$ équivalent à $2\cos\frac{\pi}{4}\sin(2x) = 0$. Les valeurs cherchées sont donc $x_k = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, solution de $\sin(2x) = 0$. On en déduit que les points d'intersection des graphes de f et g sont les points $P_k\left(k\frac{\pi}{2}, (-1)^k\sqrt{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) De l'égalité $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, on déduit que $h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2 = 4$ pour tout x.

S5.4 On utilise le théorème du sinus, en remarquant que $\widehat{ACB} = \pi - (\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{2\pi}{3}$, et on obtient

$$AC = \frac{2\sqrt{3}}{\sin(\frac{2\pi}{3})}\sin(\frac{\pi}{12}) = 4\sin(\frac{\pi}{12}) \approx 1,0352\ ,$$

$$BC = \frac{2\sqrt{3}}{\sin(\frac{2\pi}{3})}\sin(\frac{\pi}{4}) = 4\sin(\frac{\pi}{4}) \approx 2,8284\ .$$

S5.5 En utilisant les relations $D_i = \frac{1}{2}\alpha_i(R_i^2 - r_i^2)$, $i = 1,2$ on obtient

$$R_1 = \sqrt{\frac{1}{3}(2r_1^2 + R_2^2)}.$$

S5.6 Sachant que la longueur cherchée est $l = \alpha \cdot r$ où $r = 12$cm et $\alpha = 165°$ qu'il faut exprimer en radians, on trouve

$$l = 11 \cdot \pi \approx 34,56\text{cm}.$$

S5.7 La fonction f est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.

S5.8 Un calcul simple donne la longueur $AB = 13$ et permet de déduire, en posant $\varphi = \widehat{CAB}$, que $\sin\varphi = 12/13$, $\cos\varphi = 5/13$ et que $\varphi > \pi/3$, car $\cos(\pi/3) = 1/2 > 5/13 = \cos\varphi$.

S5.9 Considérer $\tan(\alpha + \beta)$ qui peut être exprimé en fonction de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ et qui vaut $-\tan\gamma$.

S5.10 La hauteur H encore visible après 80km est, en mètres, $600 - h$; si $r = 6370$km est le rayon de la Terre et φ l'angle au centre de la Terre intercepté par les 80km parcourus, alors $(r + h)\cos\varphi = r$ d'où $H \approx 97,61$m. De même, la distance minimum à parcourir pour ne plus voir la falaise est $87,427$km.

S5.11 On applique le théorème du sinus et on obtient $\frac{\overline{AB}}{\sin 140°} = \frac{1\text{km}}{\sin 15°}$, d'où la distance $\overline{AB} \approx 2,48$km.

S5.12 Largeur de la rivière : 10,48 m ; hauteur du mât : 6,05 m.

S5.13 L'équation est équivalente à $2\sin(4x)\cos(3x) = 2\sin(4x)\sin(x)$, d'où :
$x = \dfrac{m\pi}{4}$ ou $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{2}$, $\quad m, n \in \mathbb{Z}$

S5.14 On déduit que A et φ doivent vérifier le système : $\left\{\begin{array}{lcl} A\cos\varphi & = & 3 \\ A\sin\varphi & = & 4 \end{array}\right.$,
ce qui implique que $A = 5$ et $\varphi \approx 0,927$radian.

S5.15 En posant $z = \tan x$ $(z \neq 0)$, on obtient $z^3 + 6z^2 + 3z - 10 = 0$ d'où $z \in \{-5, -2, 1\}$; seule est admissible la solution $\tan X = 1$. L'équation donnée devient : $\sin t + 1 = 0$ et a pour solution $t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

S5.16 On pose $y = \sin t - \sqrt{3}\cos t$; l'équation devient

$$(y - 2)(y + 2) = 3\sqrt{2}y - 8 \;\text{ et s'écrit }\; y^2 - 3\sqrt{2}y + 4 = 0.$$

Elle admet deux racines distinctes : $y_1 = \sqrt{2}$ et $y_2 = 2\sqrt{2}$.
Il reste à résoudre

$$\sin t - \sqrt{3}\cos t = y_i \quad ;$$

or, on peut écrire le membre de gauche sous la forme $A\sin(t - \alpha)$ avec $A = 2$, $\cos\alpha = 1/2$ et $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$, d'où $\alpha = \pi/3$.
Ainsi,

$$\sin(t - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{ou} \qquad \sin(t - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}, \text{ ce qui est impossible.}$$

Donc

$$\sin(t - \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{4} \text{ d'où } t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

ou

$$t - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

c'est-à-dire

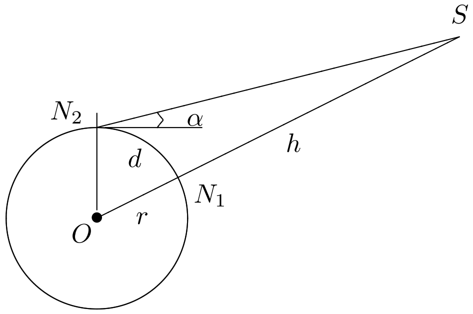
$$t = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad \frac{13\pi}{12} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

La condition $3\pi < t < \dfrac{7\pi}{2}$ implique alors $t = \dfrac{37\pi}{12}$.

S5.17 A l'aide de la formule de Heron, on obtient l'aire du triangle $ABC = 12\sqrt{5}$ égale aussi à l'aire du triangle $A'B'C'$ qui vaut $\frac{1}{2}b'c'\sin\alpha'$. On en déduit que $\sin\alpha' = 0.5$ d'où $\alpha' = \dfrac{\pi}{6}$ ou $\dfrac{5\pi}{6}$.

S5.18 En utilisant le théorème du sinus dans le triangle BD_1D_2, on trouve $D_1B \approx 300$m, puis à l'aide du le théorème du cosinus dans le triangle BAD_1 on détermine δ^2 d'où $\delta = AB \approx 500$m.

S5.19



On a :

$$\widehat{ON_2S} = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\widehat{N_2SO} = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \varphi) \quad \text{où} \quad \varphi = \frac{d}{r} = \widehat{SON_2}.$$

Il s'ensuit, par le théorème du sinus :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\varphi)\right)}{r} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{h+r} \quad \text{d'où} \quad \frac{\cos\left(\alpha + \frac{d}{r}\right)}{r} = \frac{\cos\alpha}{h+r}$$

et

$$h = r\left[\frac{\cos\alpha}{\cos\left(\alpha + \frac{d}{r}\right)} - 1\right].$$

S5.20

(1) Posons $f_1(x) = \sin(\frac{\pi}{14}x)$ et $f_2(x) = \cos(\frac{\pi}{91}x)$. Ces fonctions sont périodiques de périodes respectives $T_1 = 28$ et $T_2 = 182$. La fonction $f = f_1 + f_2$ est périodique de période T si l'on peut trouver m et n dans $\mathbb{N}^*$ tels que $m \cdot 28 = n \cdot 182$; les plus petites valeurs sont $m = 13$, $n = 2$ d'où $T = 364 = PPCM(T_1, T_2)$.

(2) Dans ce cas, on doit trouver m et n tels que $2\pi \cdot m = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot n$, ce qui est impossible puisque $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel : la fonction f n'est donc pas périodique.

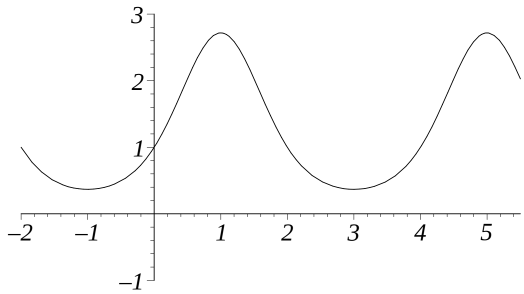
(3) La fonction f s'écrit $f(x) = 3 - \frac{1}{2}\cos(2x)$, elle est donc π-périodique.

S5.21 La fonction h est définie sur tout $\mathbb{R}$ donc $D_h = \mathbb{R}$; elle est périodique de période fondamentale 4, puisque la période fondamentale de la fonction sin est 2π. Il suffit donc de l'étudier sur l'intervalle $[0,4]$. On a $h'(x) = \dfrac{\pi}{2}\cos(\dfrac{\pi x}{2})e^{\sin(\frac{\pi x}{2})}$ s'annule en $x = 1$ et $x = 3$, elle est positive sur les intervalles $[0,1[$ et $]3,4]$; donc h y est croissante, et négative sur $]1,3[$; donc h y est décroissante. Pour trouver les zéros de $h''(x) = \dfrac{\pi^2}{4}\left(1 - \sin^2(\dfrac{\pi x}{2}) - \sin(\dfrac{\pi x}{2})\right)e^{\sin(\frac{\pi x}{2})}$, on pose $t = \sin(\frac{\pi x}{2})$ et on résout l'équation : $t^2 + t - 1 = 0$, on obtient $t = \sin(\dfrac{\pi x}{2}) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ seule solution admissible, d'où, dans notre intervalle,

$x = 0,424$ et $x = 1.576$ sont les zéros de h''. On résume ces résultats dans le tableau de variation suivant :

x	0		0.424		1		1.576		3		4
h'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
h''		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
h	1	$\nearrow$	$e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	$e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$	$\searrow$	e^{-1}	$\nearrow$	1

on en déduit que h a un maximum local en $(1, e)$, un minimum local en $(3, \frac{1}{e})$, deux points d'inflexion en $(0.424, e^{0.618})$ et $(1.576, e^{0.618})$; $(0.618 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$, elle est concave sur $[0.424, 1.576]$ et est convexe sur les intervalles $[0, 0.424]$ et $[1.576, 4]$ et son graphe :



CHAPITRE 6

Suites, séries numériques et limites

Exercices

E6.1 Déterminer, si elles existent, les limites des suites (a_n) suivantes, $n \in \mathbb{N}^*$;

$a)$ $a_n = \pi + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; $b)$ $a_n = \dfrac{1}{n}[\pi + (-1)^n \cdot n]$; $c)$ $a_n = \dfrac{n^2 + n\sqrt{n}\cos \pi n - 1}{2n^2 + n\cos \pi n}$.

E6.2 Soit (x_n) la suite donnée par $x_0 = 2$, $x_1 = 1$ et $2x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$. Montrer par récurrence que $x_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. En déduire que la suite (x_n) est convergente et donner sa limite.

E6.3 Calculer la somme de la série $\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^{-k}$.

E6.4 Soit $f(x) = x - [x]$, où $[x]$ est la partie entière de x définie au § 3.3. Donner l'expression de $f(x)$ sur l'intervalle $]k, \ k+1[$ en fonction de k, pour $k \in \mathbb{Z}$. En déduire $\lim\limits_{x \to k^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to k^-} f(x)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

E6.5 Soit $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2|x| + 1}{x^2 - 1}$. Montrer que les droites d'équations $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ et $y = 2x$ sont des asymptotes de la fonction f.

E6.6 Même question que E 6.1 pour les suites de terme général x_n :

$a)$ $x_n = \dfrac{2(n+1)! - n \cdot n!}{(n+2)!}$; $b)$ $x_n = \dfrac{[1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)]^2}{(2n-1)^4}$;

$c)$ $x_n = \cos\left[\dfrac{3^n + \pi^n}{3^n + (\pi - \frac{1}{4})^n}\right]^{\frac{1}{n}}$; $d)$ $x_n = \left[\dfrac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}\right]^n$.

E6.7 Calculer $y = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$ si $y_n = \dfrac{\sin(n^2 + \ln n)}{\sqrt[7]{n^{11}}}$

E6.8 Soit x_n la suite donnée par $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 3$ et $x_0 = 0$. Calculer la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

E6.9

a) Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$.

b) Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$.

Remarque : on peut écrire $\dfrac{k}{3^k} = \dfrac{1}{3^k} + \dfrac{k-1}{3^k}$ pour $k \geq 2$.

E6.10 Soit $\mathcal{C}_1$ un cube d'arête $c_1 = c$ donné, de volume V_1, et dont la base est située dans Oxy. On pose sur $\mathcal{C}_1$ un cube $\mathcal{C}_2$ tel que $V_2 = \frac{1}{2}V_1$ puis sur $\mathcal{C}_2$ un cube $\mathcal{C}_3$ tel que $V_3 = \frac{1}{2}V_2$, etc ...
Quelle est la hauteur h maximum que peut atteindre l'ensemble des cubes ainsi superposés ? Quel est le volume V du corps solide correspondant ?

E6.11 On considère un point O et deux demi-droites p et q issues de O, telles que l'angle φ compris entre ces droites soit aigu. A partir d'un point $P_1(\neq O)$ de p, on mène une perpendiculaire sur q coupant q en Q_1 ; à partir de Q_1, on mène une perpendiculaire sur p coupant p en P_2 ; et ainsi de suite.
Sachant que $OP_1 = a$, calculer - quand cette somme existe -

$$L(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (P_kQ_k + Q_kP_{k+1}).$$

E6.12 On considère dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs horizontaux $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, tels que leur sens soit positif si k est impair et négatif si k est pair. Sachant que $A_0 = O$, $\|\overrightarrow{A_0A_1}\| = \ell$ et $\|\overrightarrow{A_kA_{k+1}}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{A_{k-1}A_k}\|$, calculer $\lim\limits_{k\to\infty} \|\overrightarrow{OA_k}\|$.

E6.13 En utilisant la définition de la limite d'une fonction en un point, montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

E6.14 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$a) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} \ ; \quad b) \quad \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}.$$

E6.15 Calculer $\quad \lim e^{1/x\sqrt{|x|}} \quad$ lorsque x tend vers zéro.

E6.16 On considère les fonctions f et g définies par :

$$a) \ f(x) = \begin{cases} \arctan(\frac{1}{x-3}) & \text{si} \quad x \neq 3 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x = 3 \end{cases} , \quad b) \ g(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 \\ \frac{1}{x} + 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 3$ et de g en $x_0 = 1$.

E6.17 Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

$a)$ $f_1(x) = \cos(5x^2 - e^{2x+1})$ $\qquad$ $b)$ $f_2(x) = |x|$

$c)$ $f_3(x) = [x]$ $\qquad$ $d)$ $f_4(x) = \text{sgn } x$

où $|x|$ est la valeur absolue de x, $[x]$ la partie entière de x et sgn x le signe de x, définis aux § 1.9 et § 3.3.

E6.18
$a)$ Représenter graphiquement dans l'intervalle $-\dfrac{1}{3} \le x \le \dfrac{1}{2}$, la fonction $f(x) = [1 - x^2]$ où $[x]$ est la partie entière de x.
$b)$ Pour quel c la fonction $g(x) = 2[x(2-x)] + c[\cos \pi x]$ est-elle continue en $x = 1$?

E6.19 Déterminer les asymptotes des fonctions suivantes :

$$a) \quad f_1(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2x - 6} \ ; \quad b) \quad f_2(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \ .$$

Notions théoriques

6.1 Ensembles

Opérations booléennes
Voir § 1.11

Ensembles bornés et intervalles
Voir § 1.8

Voisinage
Soit V une partie de $\mathbb{R}$ et soit $x \in V$. V est un *voisinage* de x dans $\mathbb{R}$ s'il existe un intervalle ouvert $]a, b[\subset V$ tel que $x \in]a, b[$.
Cela revient à dire que V est un *voisinage* de x dans $\mathbb{R}$ s'il existe, par exemple, $\delta > 0$ tel que $]x - \delta, x + \delta[\subset V$.
Notons encore que si U et V sont deux voisinages de x dans $\mathbb{R}$, alors $U \cap V$ et $U \cup V$ sont aussi des voisinages de x dans $\mathbb{R}$.

6.2 Suites

Suite
Une *suite numérique* est une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne la suite par $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus brièvement (x_n).

Suite bornée
Soit (x_n) une suite. On appelle *ensemble des valeurs* de (x_n) ou l'*ensemble des images* de (x_n) l'ensemble des valeurs prises par (x_n). La notion de suite bornée correspond à celle d'un ensemble borné si l'on considère son ensemble des valeurs.
Ainsi, on dira que (x_n) est *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \geqslant m$ et que (x_n) est *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \leqslant M$. Elle sera dite *bornée* si elle est à la fois minorée et majorée.

Proposition
La suite (x_n) est bornée si et seulement s'il existe $c \geqslant 0$ tel que $|x_n| \leqslant c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suite monotone
Une suite (x_n) est dite *croissante*, respectivement *strictement croissante*, si $x_n \leqslant x_{n+1}$, respectivement $x_n < x_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est dite *décroissante*, respectivement *strictement décroissante*, si $x_n \geqslant x_{n+1}$, respectivement $x_n > x_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est dite *monotone* si elle est toujours croissante ou toujours décroissante.

Suite convergente
Une suite (x_n) *converge vers* $x \in \mathbb{R}$, si à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer un entier naturel N_ε tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$ on a $|x_n - x| < \varepsilon$. On écrit alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

On dit que la suite (x_n) est *convergente* et admet pour *limite* $x \in \mathbb{R}$.
Une suite non convergente est dite *divergente*.

Remarque : Lorsque la limite existe, elle est unique, c'est-à-dire que toute suite possède **au plus** une limite.

Proposition

Toute suite convergente est bornée.

Propriétés des valeurs limites

Soient (x_n) et (y_n) deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$.
Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y. \tag{6.1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = xy. \tag{6.2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y} \qquad \text{si} \quad y_n, y \neq 0. \tag{6.3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = |x| (= |\lim_{n\to+\infty} x_n|). \tag{6.4}$$

Suite arithmétique

Une *suite arithmétique* est une suite de terme général $x_n = n \cdot a + d$, $n \in \mathbb{N}$ et $a, d \in \mathbb{R}$. Si $a = 0$, la suite est constante et donc converge ; sinon, elle diverge.

Suite géométrique

Une *suite géométrique* est une suite de terme général $x_n = \lambda \cdot a^n$, $n \in \mathbb{N}$ et $a, \lambda \in \mathbb{R}$. Si $a = 1$, la suite est constante et donc converge ; si $a = -1$ elle diverge.
Pour $|a| > 1$, la suite diverge et pour $|a| < 1$, elle converge vers 0.

Suite puissance

Soit q un rationnel positif ; les suites $\frac{1}{n^q}$ et $\frac{(-1)^n}{n^q}$, $n \geq 1$, sont convergentes et leur limite est nulle.

6.2.1 Critères de convergence

Critère des deux gendarmes ou théorème de l'encadrement

Soient $(x_n), (u_n)$ et (v_n) trois suites telles que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite L. S'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout $n \geqslant N_0$ on a $u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$, alors (x_n) converge vers L.

Il s'ensuit les critères de convergence suivants :

- Soit (x_n) une suite pour laquelle la limite
$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$$
existe. Alors, si $\rho < 1$ la suite converge et si $\rho > 1$, elle diverge. Si $\rho = 1$, la suite peut être convergente (par exemple, la suite donnée par $x_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) ou divergente (par exemple, la suite donnée par $x_n = (-1)^n$).

- Soit (x_n) une suite bornée et (y_n) une suite qui converge vers 0. Alors, la suite $(x_n y_n)$ converge vers 0.

– **Critères de monotonie**

1. Toute suite croissante et majorée converge vers le supremum de son ensemble des valeurs.
2. Toute suite décroissante et minorée converge vers l'infimum de son ensemble des valeurs.
3. Soit (x_n) une suite croissante et (y_n) une suite décroissante telles que

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0.$$

Alors,
(a) pour tout $n \in \mathbb{N} : x_0 \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant y_{n+1} \leqslant y_n \leqslant y_0$.
(b) (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite.

6.2.2 Suites récurrentes

La récurrence linéaire $x_{n+1} = qx_n + b$
Soit (x_n) définie par

$$x_{n+1} = qx_n + b \quad \text{et} \quad x_0 = a$$

Le terme général peut s'écrire explicitement (démonstration par récurrence) :

$$x_n = x_0 q^n + b\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{b}{1-q} + \left(a - \frac{b}{1-q}\right) q^n \quad \text{si} \quad q \neq 1$$

et

$$x_n = a + bn \quad \text{si} \quad q = 1.$$

Soit $q \neq 1$. Il découle de ce qui précède (suite géométrique) que l'on a le résultat suivant :

> La suite récurrente $x_{n+1} = qx_n + b$ converge pour tout x_0 si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas,
> $$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{b}{1-q}$$

La récurrence $x_{n+1} = (1+q)x_n - qx_{n-1}$
Soit la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = (1+q)x_n - qx_{n-1} \quad \text{et} \quad x_0 = a_0,\ x_1 = a_1.$$

Le terme général peut s'écrire explicitement (démonstration par récurrence) :

$$x_n = \frac{a_1 - qa_0}{1-q} + \frac{a_0 - a_1}{1-q} q^n,\ n \geqslant 2 \ \text{ si } \ q \neq 1$$

et

$$x_n = a_0 + n(a_1 - a_0) \ \text{ si } \ q = 1.$$

> La suite ainsi définie converge pour tout couple (a_0, a_1) si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas,
> $$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{a_1 - qa_0}{1-q}$$

Suites récurrentes non-linéaires
Soit la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = a$$

où f est une fonction continue (voir section 6.4). Si la suite converge vers une limite l, alors l doit vérifier l'équation

$$l = f(l).$$

Ainsi, si l'on montre que (x_n) converge, alors sa limite est une racine déterminée L de l'équation $l = f(l)$ (les autres solutions éventuelles étant à rejeter).

6.3 Séries

Série de terme général x_n
On appelle *série de terme général* x_n le couple formé des deux suites (x_n) et (S_n) tel que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + \ldots + x_n.$$

x_n est appelé le $n^{\text{ème}}$ *terme* de la série et S_n la $n^{\text{ème}}$ *somme partielle* de la série de terme général x_n.

Convergence
Une série est dite *convergente*, ou qu'elle *converge*, si la suite (S_n) de ses sommes partielles converge, c'est-à-dire si

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

S est appelé la *somme de la série*. Dans ce cas, $S = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$.
Si une série ne converge pas, on dit qu'elle est *divergente*, ou qu'elle *diverge*.

6.3.1 Exemples de séries

Série géométrique
On appelle *série géométrique* la série dont le terme général est $x_n = x^n$. Elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} x^k = \begin{cases} n - m + 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^{n+1} - x^m}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$;

2. elle converge si et seulement si $|x| < 1$; dans ce cas, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

Série harmonique
On appelle *série harmonique* la série dont le terme général x_n et défini par

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$

Cette série diverge.

Série harmonique alternée

On appelle *série harmonique alternée* la série dont le terme général x_n et défini par

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{et} \qquad x_0 = 0$$

Cette série converge vers $-\ln 2$.

6.4 Limite d'une fonction et fonction continue

Limite d'une fonction (réelle)
On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ a pour *limite* le nombre l lorsque x tend vers x_0, ou tend vers l lorsque x tend vers x_0, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $x \in X$,

$$\boxed{0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \varepsilon}$$

Remarquons que δ dépend de x_0 et de ε.
On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Remarque : Une fonction f tend vers l lorsque x tend vers x_0, si et seulement si pour toute suite (x_n) tendant vers x_0, la suite $(f(x_n))$ tend vers l.

Limite à droite et limite à gauche
On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ définie à droite, respectivement à gauche, de x_0 a pour *limite à droite*, respectivement *limite à gauche*, au point x_0 le nombre l si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $x \in X$,

$$\boxed{0 < x - x_0 < \delta \ , \quad \text{respectivement } 0 < x_0 - x < \delta \ , \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \varepsilon}$$

On note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$, respectivement $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

Limite à l'infini
On dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers l'infini si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que

$$x > N \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

On dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers moins l'infini si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que

$$x < N \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Propriétés des limites
Les règles (6.1), (6.2), (6.3), (6.4) et le théorème de l'encadrement établies pour les limites des suites peuvent être étendues aux limites de fonctions. On a alors : si f, g et h sont des fonctions définies au voisinage de a tels que

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \qquad$ et $\qquad \lim\limits_{x \to a} g(x) = l \quad$ où a est fini ou infini et L, l sont finis ;

alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}(\alpha f(x)+\beta g(x)) &= \alpha L+\beta l\\
\lim_{x\to a} f(x)g(x) &= Ll\\
\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{L}{l} \qquad \text{si} \quad l\neq 0\ ;
\end{aligned}$$

$$\text{si de plus } L=l \text{ et } f(x)\leq h(x)\leq g(x), \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} h(x)=l=L.$$

REMARQUE : Les cas où L, l sont simultanément nuls ou infinis peuvent donner lieu à des *formes indéterminées* que l'on peut souvent lever à l'aide du théorème de Bernoulli-L'Hospital, voir § 7.3.

Fonction continue en x_0
Une fonction f est dite *continue en* x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Cela revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\boxed{|x-x_0|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon}$$

En d'autres termes, la valeur limite en $x = x_0$ et la valeur de définition de $f(x)$ en ce point sont égales.

Fonction continue à droite et continue à gauche en x_0
Une fonction f est dite *continue à droite en* x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
Une fonction f est dite *continue à gauche en* x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Remarque : Une fonction est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en x_0.

Fonction continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$
Une fonction f est dite *continue sur* $]a, b[$ si $f(x)$ est continue en tout $x_0 \in]a, b[$.

Fonction continue sur un intervalle borné et fermé $[a, b]$
Une fonction f est dite *continue sur* $[a, b]$ si $f(x)$ est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Opérations sur les fonctions continues
Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle I et h une fonction continue sur un intervalle J contenant $f(I)$. Alors $\alpha f + \beta g$ et fg sont continues sur I, où α , $\beta \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $I \setminus \{\text{les zéros de } g\}$ et $h \circ f$ est continue sur I.

Fonctions continues particulières

1. Toute fonction polynomiale $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Une fonction rationnelle $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ est continue en tout point x_0 tel que $q(x_0) \neq 0$.
3. Les fonctions puissances $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
4. Les fonctions logarithmes $f(x) = \log_b(x)$ $(b > 0,\ b \neq 1)$ sont continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Les fonctions trigonométriques $\sin x$ et $\cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, $\tan x$ est continue en tout $x_0 \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{N}$ et $\cot x$ est continue en tout $x_0 \neq k\pi,\ k \in \mathbb{N}$.

Théorème de la valeur intermédiaire
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f possède un maximum M et un minimum m et f prend toutes les valeurs comprises entre m et M, c'est-à-dire $\mathrm{Im} f = [m,M]$.
En conséquence, si c est une *valeur intermédiaire* comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = c$.
En particulier, si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$.

6.5 Asymptotes

Asymptote verticale
On appelle *asymptote verticale* de la fonction f, la droite d'équation $x = a$, si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Asymptote horizontale
On appelle *asymptote horizontale* de la fonction f en $+\infty$, la droite d'équation $y = h_1$, si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = h_1.$$

De même, si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = h_2$, la droite d'équation $y = h_2$ est une *asymptote horizontale* de la fonction f en $-\infty$.

Asymptote oblique
On appelle *asymptote oblique* de la fonction f en $+\infty$, la droite d'équation $y = m_1x + h_1$, si

$$f(x) = m_1x + h_1 + \Delta(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to+\infty} \Delta(x) = 0.$$

Dans ce cas,

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{et} \qquad h_1 = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - m_1x\big).$$

La définition est analogue pour une asymptote oblique de la fonction f en $-\infty$.

Solutions des exercices

S6.1

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pi$; *b)* il n'existe pas de limite ;

c) $a_n = \dfrac{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{(-1)^n}{n}}$ d'où $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

S6.2 On a bien $x_0 = \dfrac{1}{2^{-1}} = 2$ et $x_1 = \dfrac{1}{2^0} = 1$. Supposons que $x_p = \dfrac{1}{2^{p-1}}$ pour tout $0 \leq p \leq n$; on a alors $2x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1} = \dfrac{3}{2^{n-1}} - \dfrac{1}{2^{n-2}} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ d'où $x_{n+1} = \dfrac{1}{2^n}$ ce qui termine la démonstration.
La suite (x_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, elle converge donc vers 0.

S6.3 La série donnée est une série géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$; sa somme est donc $\frac{2}{3}$.

S6.4 Pour $x \in]k,\ k+1[$, on a $[x] = k$ par définition de la partie entière de x, d'où $f(x) = x - k$. On en déduit que :

$$\lim_{x\to k^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to k\\ x>k}} f(x) = \lim_{\substack{x\to k\\ x>k}} x - k = 0, \text{ et}$$

$$\lim_{x\to k^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to k\\ x<k}} f(x) = \lim_{\substack{x\to k\\ x<k}} x - (k-1) = 1.$$

S6.5 Pour $x \geq 0$, $|x| = x$ et $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2-1}$. La fonction f n'est donc pas définie en $x = 1$, de plus $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; par conséquent la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale.
En étudiant la limite de $f(x)$ à l'infini, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\frac{2+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}} = 2$$

$$\text{et } \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Il en découle que la droite $y = 2x$ est une asymptote oblique en $+\infty$.
Remarque : on a ici $f(x) = 2x + \dfrac{2x+1}{x^2-1}$.
De même, pour $x < 0$, $|x| = -x$ et $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. La fonction f n'est donc pas définie en $x = -1$, de plus $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$; par conséquent la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale.
En $-\infty$ on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$, d'où il découle que la droite $y = 0$ est une asymptote horizontale.

S6.6

a) La limite cherchée est 0 ; en effet, $x_n = \dfrac{1}{n+1}$;

b) On a $x_n = \dfrac{n^4}{(2n)^4(1-\frac{1}{2n})^4}$, d'où la limite de cette suite est $\dfrac{1}{16}$;

c) On écrit : $x_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{[1+(q_1)^n]^{1/n}}{[1+(q_2)^n]^{1/n}}\right)$ où q_1 et q_2 sont des positifs < 1, d'où $\lim_{x\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$;

d) On a $x_n = \dfrac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \dfrac{(2n)^n}{(2n+1)^n} = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{(1+\frac{1}{2n})^{2n}}}$,

d'où $\lim_{x\to\infty} x_n = e^{-3/2}$ (cf § 1.7).

S6.7 Puisque $0 \le |y_n| \le \dfrac{1}{n^{11/7}}$, $|y_n|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini d'où $y = 0$.

S6.8 Cette suite est récurrente du type $x_{n+1} = qx_n + b$ avec $q = \frac{1}{2}$ et $b = 3$, d'où sa limite est 6.

S6.9

a) Cette série est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$, son premier terme est $\frac{1}{3}$; sa somme est donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{2}.$$

b) Notons S la somme cherchée. En utilisant la remarque et a), on obtient

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{3^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{3^{k-1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sum_{k'=1}^{\infty} \frac{k'}{3^{k'}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}S.$$

De l'égalité $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}S$, on déduit que $S = \dfrac{3}{4}$.

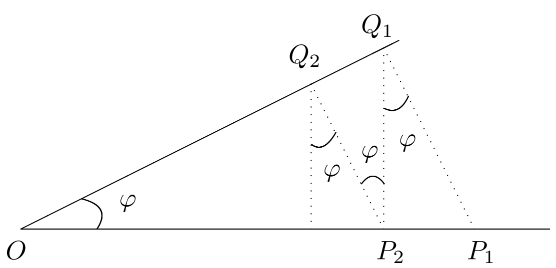
S6.10 Puisque le cube $\mathcal{C}_{k+1}$ a pour volume $V_{k+1} = \dfrac{1}{2}V_k$, son arête est $c_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}c_k$. On a alors

$$h = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k = c\sum_{m=0}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt[3]{2}})^m = (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 2)c$$

et

$$V = V_1 \sum_{m=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^m = 2c^3.$$

S6.11



D'après la figure ci-dessus,

$$L(\varphi) = \lim_{n\to\infty} (l + l\cos\varphi + l\cos^2\varphi + \cdots + l\cos^{n+1}\varphi) \quad \text{où} \quad l = P_1Q_1 \ ;$$

$$\text{d'où} \quad L(\varphi) = \frac{l}{1-\cos\varphi} = \frac{a\sin\varphi}{1-\cos\varphi}.$$

S6.12 Compte tenu du sens des vecteurs $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{OA_k}\| &= \|\overrightarrow{A_0A_1}\| - \|\overrightarrow{A_1A_2}\| + \|\overrightarrow{A_2A_3}\| - \cdots + (-1)^{k-1}\|\overrightarrow{A_{k-1}A_k}\| \\ &= \ell - \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{4}\ell - \frac{1}{8}\ell + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}\ell. \end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{k\to\infty} \|\overrightarrow{OA_k}\|$ est la somme de la série géométrique alternée $(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots)\ell$ qui vaut $\frac{\ell}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\ell$.

S6.13 On a

$$|\cos x - 1| = 2\sin^2(\frac{x}{2}) = 2|\sin(\frac{x}{2})| \cdot |\sin(\frac{x}{2})| \leq 2|\frac{x}{2}| \cdot |\frac{x}{2}| = \frac{x^2}{2} < \varepsilon$$

pour $|x| < \sqrt{2\varepsilon} = \delta$; il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

S6.14

a) La fonction $\sin x$ est comprise entre -1 et $+1$; on a donc l'inégalité :

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \text{pour } x > 0.$$

Or, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0$; il en résulte que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

b) De même que *a*), puisque $-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|$ et que $\lim\limits_{x\to 0} |x| = \lim\limits_{x\to 0} -|x| = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

S6.15 Si x tend vers zéro par valeur positive, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x\sqrt{x}} = +\infty$; si x tend vers zéro par valeur négative, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x\sqrt{-x}} = 0$.

S6.16

a) On calcule les limites à droite et à gauche de $f(x)$ en $x_0 = 3$ et on obtient :

$$\lim_{x\to 3^+} \arctan(\frac{1}{x-3}) = \frac{\pi}{2} = f(3)$$

d'où f est continue à droite en 3 ; d'autre part,

$$\lim_{x\to 3^-} \arctan(\frac{1}{x-3}) = -\frac{\pi}{2} \neq f(3).$$

Ainsi, f n'est pas continue à gauche en 3 et donc n'est pas continue en $x_0 = 3$.

b) Dans ce cas on a :

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+1)^2 = 4 = \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} (\frac{1}{x} + 3) \quad \text{et} \quad g(1) = 4 \;;$$

donc $g(x)$ est continue en $x_0 = 1$.

S6.17

a) La fonction $f_1(x) = (h \circ g)(x)$, où $h(x) = \cos x$ et $g(x) = 5x^2 - e^{2x+1}$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, est donc continue sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $f_2(x) = |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$; elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $f_2(x) = x$ si $x \geq 0$, continue sur $\mathbb{R}_-^*$ car $f_2(x) = -x$ si $x < 0$ et vérifie $\lim\limits_{x \to 0^-} f_2(x) = 0 = f_2(0)$, c'est-à-dire qu'elle est continue à gauche en 0 ; elle est donc continue en 0 et par suite continue sur tout $\mathbb{R}$.

c) La fonction $f_3(x) = [x]$ est définie sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur chaque intervalle $]n, n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$ mais n'est pas continue en $x_n = n \in \mathbb{Z}$; en effet, pour $n \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to n^-} [x] = n - 1$ et $\lim\limits_{x \to n^+} [x] = n$; elle est, par conséquent, continue à droite sur $\mathbb{R}$.

d) La fonction $f_4(x) = \operatorname{sgn} x$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ donc sur son domaine de définition.

S6.18

a) On obtient $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ ailleurs et donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$.

b) On a : $g(1) = 2[1] + c[-1] = 2 - c$.

Pour $x = 1 \pm \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$, on a $g(1 \pm \varepsilon) = 2[1 - \varepsilon^2] - c[\cos \pi\varepsilon] = 2 \cdot 0 - c \cdot 0$ puisque $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos \pi\varepsilon < 1$; ainsi, $\ell = \lim\limits_{x \to 1} g(x) = 0$ et g est continue si $\ell = g(1)$, d'où $c = 2$.

S6.19

a) La fonction $f_1(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{2x - 6}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. En 3, on a $\lim\limits_{x \to 3^+} f_1(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} f_1(x) = -\infty$: la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale. D'autre part, on peut écrire $f_1(x) = \dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{4}{2x - 6}$ et en déduire que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_1(x) - (\dfrac{x}{2} + 1) = 0$; donc la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 1$ est une asymptote oblique de f_1 en $\pm\infty$.

b) La fonction $f_2(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et l'on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_2(x) = 1$; il en découle que la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale de f_2 en $\pm\infty$.

CHAPITRE 7

Calcul différentiel

Exercices

E7.1 En utilisant la formule fondamentale de la dérivée $y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}$, déterminer $y'(1)$ lorsque $y(x) = \sqrt{x}$.

E7.2 Déterminer les x pour lesquels la dérivée de la fonction $f(x) = e^x - 2e^{-x}$ est égale à 3.

E7.3 Etablir l'équation de la tangente t à la courbe $\Gamma \;:\; y = 2x^2 - x + 1$ parallèle à la tangente τ à la courbe $\gamma \;:\; \eta = x^2 + 3x + 1$ au point $P(0,1)$.

E7.4 Pour quels x la courbe $\sigma \;:\; y(x) = e^{\sin x} \cdot e^{\cos x}$ a-t-elle des tangentes horizontales ?

E7.5 Soient $g(x)$ une fonction continue et positive dans $\mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\sin[\alpha x g(x)]}{\sqrt{g(x)}}$.
A l'aide de la relation fondamentale $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, déterminer α pour que $f'(0) = g(0)$.

E7.6 Soit γ l'arc de courbe d'équation $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}, \quad x \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Déterminer l'équation de la tangente à γ issue du point $P(\ 4\ ,\ 2\ )$.

E7.7 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\sin x}{x^2 + 1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \;;$$

(i) Montrer que f est continue en 0.
(ii) f est-elle dérivable en 0 ?

E7.8 On considère les courbes
$\gamma_1 : y = x^2 - px,\ x \leqslant 1$ et $\gamma_2 : y = q \sin \frac{\pi}{4} x + \cos \frac{\pi}{4} x,\ x \geqslant 2$.
On raccorde γ_1 à γ_2 à l'aide d'un segment de droite dans $x \in [1, 2]$.
Déterminer p et q pour que la courbe Γ obtenue sur $\mathbb{R}$ soit continûment dérivable partout.

E7.9 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$(i) \quad e^{\sin(x^3 + \cos x^2)} \qquad\qquad (ii) \quad \cos^2\left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\right) \; .$$

E7.10 A l'aide de la formule $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, calculer les dérivées de $\arctan x$ et $\arcsin x$.
Indication : on a $f'(x) = \dfrac{[g(f(x))]'}{g'(f(x))}$. Poser $f(x) = \arctan x$ (ou $\arcsin x$) et choisir la fonction appropriée pour g.

E7.11 A l'aide des propriétés du logarithme (voir § 1.7) et de la formule $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$, calculer les dérivées des fonctions suivantes pour $a > 0$ et $x > 0$:

$$(i)\ \ a^x \qquad\qquad (ii)\ \ \log_a x \qquad\qquad (iii)\ \ x^x$$

E7.12 Calculer la dérivée des fonctions $\tanh x$ et $\operatorname{argtanh} x$ (voir § 3.3)

E7.13 Déterminer $b \neq 0$ de telle sorte que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - bx - e^{-\sin bx}}{x^2} = -b$.

E7.14 Calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$, $x > 0$.

E7.15 On considère $f(x) = \sin ax$. Montrer que $f^{(n)}(x) = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2})$.

E7.16 Déterminer les extrema relatifs et le minimum absolu éventuels de la fonction

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}, \quad x \geqslant 0$$

(on demande les coordonnées exactes).

E7.17 En quel point P de la parabole γ d'équation $y = x^2 - 6x + 3$ la tangente à γ en P est-elle parallèle à celle de la courbe $y = x^3 + 6x^2 + 14x - 7$ en son point d'inflexion ?

E7.18 On considère une citerne à mazout C formée d'un réservoir cylindrique d'axe horizontal dont la section est un disque de rayon $R = 50$cm ; la longueur du réservoir est $L = 4$m.
Sachant que le fluide contenu dans C s'écoule par le fond à un débit constant $\delta = 2$ litres par heure, à quelle vitesse diminue le niveau du liquide quand la jauge indique que celui-ci se trouve à 75cm du haut du réservoir ?

Notions théoriques

7.1 Notions fondamentales

Dérivée d'une fonction en un point
Soit f une fonction continue, $x_0 \in D_f$ et $h \neq 0$ un réel tel que $x_0 + h \in D_f$.
On dit que f est *dérivable* au point x_0 si la limite suivante existe :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Dans ce cas, elle se note $f'(x_0)$: c'est la *dérivée de* f *en* x_0.
Pour une fonction dérivable en x_0, on peut écrire par conséquent

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + h \cdot r(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h \to 0} r(h) = 0 \ ;$$

il en découle que $f(x)$ est continue en $x = x_0$.

Fonction dérivée
Soit $D(f')$ l'ensemble des éléments de X pour lesquels la fonction $f : X \to Y$ est dérivable. Si $D(f')$ n'est pas vide, l'application de $D(f')$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément x de $D(f')$, fait correspondre le nombre réel $f'(x)$ est appelée la *fonction dérivée* de f ou la *dérivée* de f. On la note f' ou $\dfrac{df}{dx}$. L'opérateur $\dfrac{d}{dx}$ est un *opérateur différentiel*.
Si $f(x) = y$, on a la relation $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$, d'où $dy = f'(x)dx$;
on appelle dy la *différentielle* de y.

Théorème
Soit f une fonction définie sur l'intervalle ouvert I ; si $f'(x)$ existe sur I, alors f est continue sur I.

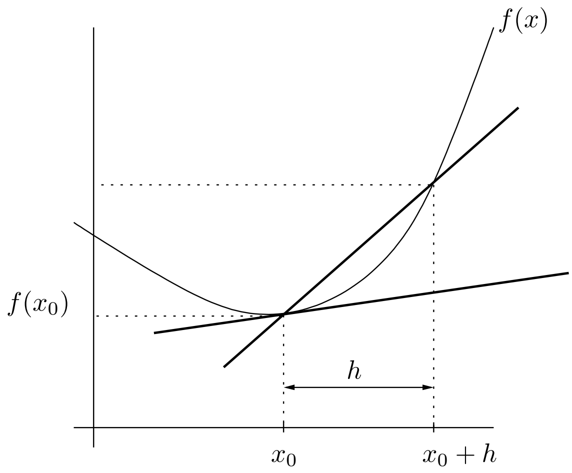
Remarque
Une fonction continue f peut admettre une dérivée f' non continue. On note $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions *continûment dérivable* sur I, c'est-à-dire les fonctions dont la dérivée est continue sur I.

Interprétation géométrique
La pente de la droite sécante passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ est égale à

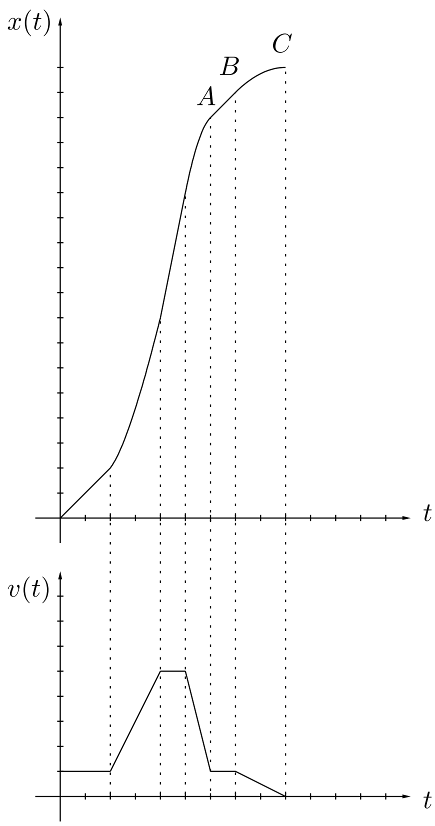
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Lorsque h tend vers 0 la sécante tend vers la tangente de f en x_0. $f'(x_0)$ est donc la pente de la tangente de f en x_0 et l'équation de cette tangente est

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$



Interprétation physique (mécanique)



La notion de dérivée, ou plus généralement le calcul différentiel, a été développé pour répondre à certains besoins de la physique. On doit son développement notamment à Newton et Leibniz.
Du point de vue de la mécanique, si $x(t)$ représente l'abscisse de la position d'une particule au cours du temps, sa dérivée $x'(t)$ représente la vitesse de cette abscisse, comme le montre la figure ci-contre (où l'on a noté $v(t)$ pour la vitesse).
Comme nous l'avons vu ci-dessus, la valeur de la vitesse (figure du bas) à un instant donné correspond à la pente de la tangente, au même instant, dans la figure du haut.
Il est également à remarquer que, dans cet exemple, l'aire du domaine situé entre la courbe de la vitesse et l'axe des t a une valeur égale à la distance parcourue par l'abscisse (ordonnée finale dans la figure du haut) (voir chapitre 8).
À noter par exemple que AB est un segment de droite et BC un arc de parabole.

Dérivée à gauche et dérivée à droite
Une fonction $f : X \to Y$ définie à droite d'un point x_0 de son domaine de définition est dite *dérivable à droite* en x_0 si la limite suivante existe :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Dans ce cas, elle se note $f'(x_0^+)$: c'est la *dérivée à droite* de f en x_0.

On définit de manière analogue la dérivée à gauche :

$$f'(x_0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{k\to 0^+} \frac{f(x_0)-f(x_0-k)}{k}$$

Proposition
Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0)$.

7.2 Règles de dérivation et dérivées des fonctions élémentaires

Si f et g sont dérivables (ou différentiables) sur I, on a alors les

Règles de dérivation

$$(i) \quad (\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

$$(ii) \quad (f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$(iii) \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$(iv) \quad (g(f(x)))' = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

La propriété (iv) s'écrit aussi

$$\left.\frac{dg\big(f(x)\big)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dg(y)}{dy}\right|_{y=f(x_0)} \cdot \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Dérivée des fonctions réciproques
Si $f(x)$ est une fonction bijective dérivable, la relation $y = f^{-1}(x)$ implique $x = f(y)$ et $dx = f'(y)dy$, d'où $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{f'(y)}$ c'est-à-dire

$$\boxed{[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

EXEMPLE :
$f(x) = \sinh x$; la fonction réciproque est notée $f^{-1}(x) = \text{argsinh } x$, x réel. Alors,
$(\text{argsinh } x)' = \dfrac{1}{\cosh(\text{argsinh } x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\text{argsinh } x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Dérivées usuelles élémentaires :

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
x^p	$px^{p-1} \quad (p \in \mathbb{R})$
$\|x\|$	$\text{sgn}x \qquad (x \neq 0)$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$

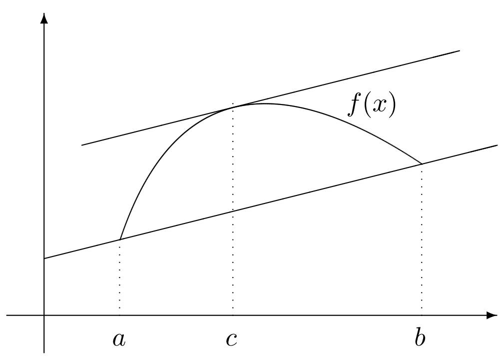
NB : si p est un réel quelconque, x^p n'est défini que pour $x > 0$.
A l'aide des règles de dérivation et du tableau ci-dessus, il est possible de calculer n'importe quelle dérivée (cf exercices).

7.3 Théorèmes

Théorème de Rolle
Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis
Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Pour calculer certaines expressions indéterminées du type $\frac{0}{0}$, on peut utiliser le

Théorème de Bernoulli-L'Hospital
Soient f et g deux fonctions dérivables en a telles que $f(a) = g(a) = 0$. Alors, si $g'(a) \neq 0$ et si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, on a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ce théorème peut être généralisé aux cas où f et g ne sont pas définies en a.

7.4 Dérivées d'ordre supérieur

Si f' est elle-même dérivable, on écrit $(f')' = f''$ (on dit que f'' est la *dérivée seconde de* f) et ainsi de suite : f''', $f^{(4)}$,..., $f^{(n)}$. On écrit l'opérateur itéré comme suit :

$$f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx} = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

On définit $\mathcal{C}^k(I)$ comme étant l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I, telles que $f^{(k)}$ soient continues (par convention, $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I). On a donc les inclusions suivantes :
$\mathcal{C}^{k+1}(I) \subset \mathcal{C}^k(I) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^0(I)$.

Interprétation géométrique et physique
Nous avons vu que $f'(x_0)$ représente la pente de la tangente à $f(x)$ en x_0, c'est-à-dire la variation infinitésimale de $f(x)$ au voisinage de x_0. De même, $f''(x_0)$ représente la variation infinitésimale de $f'(x)$ en x_0, ou ce que l'on appelle la *convexité* de $f(x)$ en x_0. Si $f''(x_0) \geqslant 0$ la courbe de $f(x)$ est *convexe* en x_0 ; si $f''(x_0) \leqslant 0$ elle est *concave* en x_0 (voir chapitre 3).
D'un point de vue physique, si $x(t)$ est la position d'une particule se déplaçant sur l'axe Ox et $v(t) = x'(t)$ sa vitesse, $x''(t) = v'(t)$ représentera la variation de la vitesse, c'est-à-dire l'accélération.

7.4.1 Caractérisation des extrema

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$. Il est possible de caractériser les extrema d'une fonction à l'aide de ses dérivées. Si $(x_0, f(x_0))$ est un extremum, alors x_0 appartient à l'un des trois ensembles suivants :

1. les extrémités (éventuelles) de I ;
2. les points intérieurs de I où f' n'existe pas ;
3. les points intérieurs de I où f' existe et est nulle.

Pour le cas (3), supposons que f' existe sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$.

$$\boxed{\text{Si} \quad \left\{ \begin{array}{lll} f'(x) < 0 & \text{pour} & x_0 - \alpha < x < x_0 \\ f'(x_0) = 0 & & \\ f'(x) > 0 & \text{pour} & x_0 < x < x_0 + \alpha \end{array} \right. , \quad \text{alors} \quad f(x_0) \quad \text{est un minimum}}$$

(on a l'analogue pour le cas d'un maximum en intervertissant les signes $<$ et $>$ pour $f'(x)$).
Ainsi : si $f'(x)$ change de signe en $x = x_0$ alors f possède un extremum en

$(x_0,f(x_0))$.
La dérivée seconde permet d'étudier et de s'assurer du changement de signe de f' et donc de caractériser les extrema. Si $f'(x_0) = 0$ alors :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f''(x_0) > 0 & \Rightarrow & (x_0, f(x_0)) \text{ est un minimum local.} \\ f''(x_0) < 0 & \Rightarrow & (x_0, f(x_0)) \text{ est un maximum local.} \end{array}}$$

7.4.2 Variations locales du graphe de f

Si $f' > 0$, respectivement $f' < 0$, pour tout $x \in I$, la fonction est strictement croissante, respectivement strictement décroissante, sur cet intervalle.
Si $f'(x_0) = 0$, le graphe de f possède une *tangente horizontale* en $(x_0, f(x_0))$.
Si f est continue en x_0 et si $f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+)$ existent, le graphe de f possède un *point anguleux* en $(x_0, f(x_0))$.
Si f est continue en x_0 et si $\lim\limits_{x \to x_0} |f'(x)| = +\infty$, le graphe de f possède une *tangente verticale* en $(x_0, f(x_0))$.

Point d'inflexion
Le point $(x_0, f(x_0))$ est un *point d'inflexion* du graphe de f si la courbe γ de f traverse la tangente à γ en x_0. Plus précisément, si l'équation de la tangente est $y(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, alors

$$f(x)-y(x) \text{ change de signe en } x = x_0 \quad \Rightarrow \quad (x_0, f(x_0)) \text{ est un point d'inflexion .}$$

Si f'' change de signe au voisinage de x_0, c'est-à-dire si f change de convexité en x_0, le graphe possède de même un *point d'inflexion* en $(x_0, f(x_0))$. Dans le cas où $f'(x_0) = 0$, le point d'inflexion est à tangente horizontale ; sinon, il est dit à tangente oblique.

Solutions des exercices

S7.1 On a :

$$y'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

S7.2 Il faut résoudre $f'(x) = e^x + 2e^{-x} = 3$, ce qui implique l'équation $(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$ d'où $e^x = 1$ ou $e^x = 2$ c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = \ln 2$.

S7.3 Soient μ la pente de τ et m la pente de t. On a $\mu = \eta'(0) = (2x+3)\Big|_0 = 3$ et $m = 4x - 1 = \mu = 3$ d'où $x = 1$ et $y = 2$. On en déduit l'équation de $t\ :\ 3x - y - 1 = 0$.

S7.4 On doit avoir

$$0 = y'(x) = \left(e^{\sin x + \cos x}\right)' = (\cos x - \sin x)\, e^{\sin x + \cos x},$$

d'où $\tan x = 1$ et donc $x_k = \pi(k + \frac{1}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$.

S7.5 On a ici $x_0 = 0$, $f(0) = 0$ et
$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin[\alpha h g(h)]}{h\alpha g(h)} \cdot \alpha\sqrt{g(h)} = \alpha\sqrt{g(0)}$ puisque $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$.
Il s'ensuit que la condition $f'(0) = g(0)$ implique $\alpha = \sqrt{g(0)}$.

S7.6 L'équation de la tangente est $y = \dfrac{1}{2}x$.
En effet, si x_P, y_P sont les coordonnées de P et $(x_T, y_T) \in \gamma$ est le point de tangence à γ, on a $\dfrac{y_T - y_P}{x_T - x_P} = y'\Big|_{x_T}$ d'où $x^4 + 5x^2 - 8x + 2 = 0$ qui ne possède qu'une racine $\geqslant \dfrac{1}{2}$. Car on peut écrire, après factorisation,

$$x^4 + 5x^2 - 8x + 2 = (x-1)(x^3 + x^2 + 6x - 2) = (x-1)P_3(x)\ ;$$

comme on a $P_3'(x) > 0$ pour $x > 0$ et $P_3(\dfrac{1}{2}) > 0$, alors $P_3(x) > 0$ pour $x > \dfrac{1}{2}$.

S7.7 (i) Il suffit de montrer que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 - 2x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x^2+1} = 0.$

(ii) Il faut vérifier si $f'(0^-) = f'(0^+)$. On trouve $f'(0^-) = -2$ et $f'(0^+) = 1$: f n'est donc pas dérivable en 0.

S7.8 Soient $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, y_i, $i = 1, 2$, l'ordonnée du point de Γ d'abscisse x_i et y_i', $i = 1, 2$, la pente de la tangente à Γ au point (x_i, y_i). On doit avoir $y_1' = y_2'$ d'où $p = 2 + \dfrac{\pi}{4}$, et $y_2 - y_1 = -\dfrac{\pi}{4}$ d'où $q = -\Big(1 + \dfrac{\pi}{2}\Big)$.

S7.9

(i)
$$\begin{aligned}
\left(e^{\sin(x^3+\cos x^2)}\right)' &= \left(e^{\sin(x^3+\cos x^2)}\right) \cdot \left(\sin(x^3 + \cos x^2)\right)' \\
&= \left(e^{\sin(x^3+\cos x^2)}\right) \cdot \cos(x^3 + \cos x^2) \cdot \left(x^3 + \cos x^2\right)' \\
&= \left(e^{\sin(x^3+\cos x^2)}\right) \cdot \cos(x^3 + \cos x^2) \cdot \left(3x^2 - \sin x^2 \cdot (x^2)'\right) \\
&= \left(e^{\sin(x^3+\cos x^2)}\right) \cdot \cos(x^3 + \cos x^2) \cdot (3x^2 - 2x \sin x^2)\ .
\end{aligned}$$

(ii)
$$\left[\cos^2\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)\right]' = -\frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} \sin 2\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)\ .$$

S7.10 On a $f'(x) = \dfrac{\big[g\big(f(x)\big)\big]'}{g'\big(f(x)\big)}$. En posant $f(x) = \arctan x$ et $g(x) = \tan x$, et donc $g'(x) = 1 + (\tan x)^2$, on obtient

$$\big(\arctan x\big)' = \frac{\big(\tan(\arctan x)\big)'}{1 + \big(\tan(\arctan x)\big)^2} = \frac{(x)'}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

En utilisant la même méthode (ou la formule du § 7.2), on obtient $\big(\arcsin x\big)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

S7.11

(i) Pour dériver des fonctions dont l'exposant est une fonction de la variable, on utilise une propriété du logarithme : on sait (voir § 1.7) que $\ln a^x = x \ln a$. En posant $f(x) = a^x$, on a : $\ln f(x) = x \ln a$ d'où $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln a$ et $f'(x) = a^x \ln a$.

(ii) On sait que $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. On a donc $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

(iii) Si $f(x) = x^x$ alors $\ln f(x) = x \ln x$ d'où $f'(x) = f(x) \cdot (\ln x + 1) = (1 + \ln x)x^x$.

S7.12 $(\tanh x)' = \left(\dfrac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$.

$(\operatorname{argtanh} x)' = \dfrac{1}{1 - \big(\tanh(\arg\tanh x)\big)^2} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

S7.13 En utilisant deux fois la règle de Bernoulli-L'Hospital, on obtient :
$-b = -\dfrac{b}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos bx \cdot e^{-\sin bx}}{x} = -\dfrac{b^2}{2} \lim\limits_{x\to 0} (\sin bx + \cos^2 bx) e^{-\sin bx}$
d'où $b = 2$.

S7.14 La fonction donnée s'écrit aussi : $f(x) = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{8}} x^{\frac{1}{16}} = x^{\frac{15}{16}}$ d'où $f'(x) = \frac{15}{16} x^{-\frac{1}{16}}$.

S7.15 On a $f'(x) = a \cos ax = a \sin(ax + \frac{\pi}{2})$, ce qui montre que la formule est vraie pour $n = 1$. On suppose qu'elle est vraie pour n : $f^{(n)}(x) = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2})$; alors, $f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]' = a^n \cos(ax + \frac{n\pi}{2}) \cdot a = a^{n+1} \sin(ax + \frac{(n+1)\pi}{2})$ cqfd.

S7.16 Le maximum relatif de f est en $(1, 0)$, le minimun relatif est en $(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3})$ et le minimum absolu est en $(0, -\sqrt[3]{2})$.

S7.17 L'abscisse du point d'inflexion I est égale à -2 et la pente de la tangente en I vaut 2, d'où $P(4, -5)$.

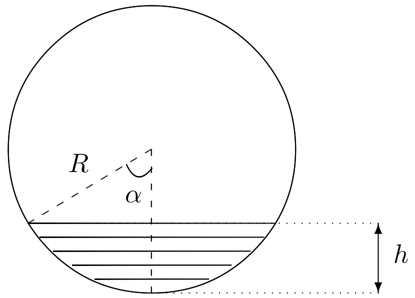
S7.18 Si l'on commence à vider la citerne à l'instant $t = 0$ et si $h = h(t)$ représente le niveau du mazout mesuré à partir du fond de la citerne, alors, après t heures,

$$h = R - R\cos\alpha = R(1 - \cos\alpha)$$

et le volume du mazout qui reste dans la citerne est

$$V = L \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot R^2 - \frac{1}{2} \cdot 2R \sin\alpha \cdot R\cos\alpha) = LR^2(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha),$$

où α est l'angle indiqué dans la figure ci-dessous.



Ainsi, puisque V, h et α varient en fonction de t :

$$\frac{dV}{dt} = LR^2(1-\cos 2\alpha)\cdot\frac{d\alpha}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dh}{dt} = R\sin\alpha\,\frac{d\alpha}{dt}$$

d'où $\quad \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{R\sin\alpha}{LR^2(1-\cos 2\alpha)}\cdot\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\delta}{2LR\sin\alpha}.$

Numériquement,

$h = 2R - 75 = 25$cm d'où $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; alors $|\dfrac{dh}{dt}| = \dfrac{1}{10\sqrt{3}}$cm/heure.

CHAPITRE 8

Calcul intégral

Exercices

E8.1 On considère les fonctions $F_1(x) = 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$ et $F_2(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 0$. Déterminer les fonctions $f_i(x)$, $i = 1, 2$, dont les primitives sont les F_i. Que peut-on conclure ?

E8.2 On considère, pour $x > 0$, les fonctions $F_1(x) = \displaystyle\int_0^x (t^3 + 2t^2 - 3t - 1)\ dt$ et $F_2(x) = \displaystyle\int_0^x (t^3 + t^2 - 2t - 2)\ dt$. Montrer, sans intégrer, que le polynôme $P(x) = F_1(x) - F_2(x)$ n'a pas de racines positives.

E8.3 Pour quel α l'intégrale définie $I = \displaystyle\int_0^1 (x-1)(\alpha x - 1)\ dx$ est-elle nulle ?

E8.4 Démontrer que si $f(-x) = f(x)$ sur l'intervalle $[-a,\ a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$.

E8.5 Vérifier que $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{3}{4}\right)^x\ dx = \frac{1}{\ln 256 - \ln 81}$.

E8.6 Trouver la courbe γ asymptotique à la droite $y = 1$, et dont la pente m de la tangente en chaque point $P(x, y) \in \gamma$ vaut $\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$.

E8.7 Calculer l'aire A du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1],\ x^3 \leqslant y \leqslant \sqrt[3]{x}\}$.

E8.8 Soit γ la courbe définie par $xy - x + 1 = 0$. On mène par l'origine une tangente τ à γ. Déterminer l'aire A du domaine fini limité par τ, l'axe Ox et γ.

E8.9 On considère dans xOy les droites d parallèles à la première bissectrice. Déterminer l'équation de celle qui forme avec la courbe $\gamma\ :\ y = x^2 - x + 1$ la frontière d'un domaine fini d'aire égale à 288.

E8.10 Déterminer $\quad a)\ I = \displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\ dx \qquad b)\ I = \int \frac{1}{1+x+\sqrt{1+x}}\ dx.$

E8.11 Déterminer $I = \displaystyle\int \arcsin x\ dx$.

E8.12 Déterminer $\quad a)\ I = \displaystyle\int (\ln x)^2\ dx \qquad b)\ I = \int x^3 \cos x\ dx.$

E8.13 Pour quelle valeur de p la fonction $f(x) = \dfrac{4x^3 - px^2 - 6x - 3}{1 - x^4}$ possède-t-elle des primitives $F(x)$ où ne figure pas de fonction $\arctan x$? Déterminer alors $F(x)$.

E8.14 Calculer

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$$

en utilisant la relation, à démontrer, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

Notions théoriques

8.1 Primitive

Primitive de f sur I
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On appelle *primitive de f sur I* une fonction dérivable F telle que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$; il s'ensuit que F est continue sur I.

Remarque : une primitive est définie à une constante additive près, c'est-à-dire que deux primitives d'une même fonction sur un intervalle I peuvent varier d'une constante.

Exemple :

$f(x) = x^2 + 1$	$F_1(x) = \dfrac{x^3}{3} + x + 2$	$F_2(x) = \dfrac{x^3}{3} + x - 1$
$f(x) = \sin 2x$	$F_1(x) = 1 + \sin^2 x$	$F_2(x) = 4 - \cos^2 x$

Intégrale indéfinie
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On note

$$\int f(x)dx$$

l'ensemble des primitives de f sur I. C'est l'*intégrale indéfinie* de f.
Si F est une primitive particulière de f sur I, on a donc

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ , \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Propriété :

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Primitives usuelles

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
a	ax	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
x^p	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1} \quad (p \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\ln x$	$x(\ln x - 1)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
e^x	e^x	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argsinh} x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{argcosh} x$
$\cos x$	$\sin x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\dfrac{1}{a-b}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x-b}\right\rvert \quad (a \neq b)$

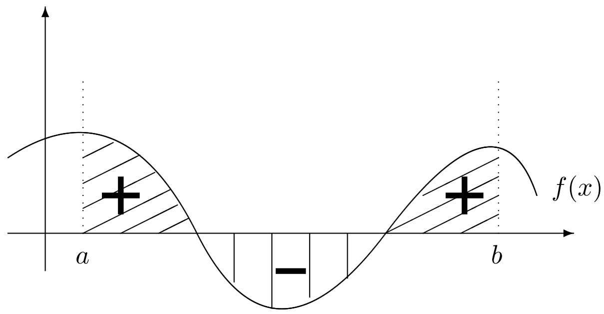
8.2 Intégrale définie

Intégrale définie
Soient f une fonction continue sur $[a;b]$ et $x_0,\ x_1, \ldots,\ x_n$ la subdivision de $[a,b]$ telle que $x_0 = a$, $x_n = b$ et $h = \frac{b-a}{n}$ le pas de subdivision constant. On appelle *intégrale définie* de f sur $[a,b]$ la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \frac{b-a}{n}, \quad c_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Si elle existe, on note cette limite $\int_a^b f(x)dx$ et on appelle a et b les *bornes d'intégration.*
Il est également possible d'utiliser une subdivision quelconque de l'intervalle $[a;b]$, c'est-à-dire une subdivision dont le pas n'est pas constant. Il faut néanmoins que tous les pas tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini. On parle dans ce cas d'*intégrale de Riemann.*

Interprétation géométrique
Si f est positive sur $[a,b]$, la valeur de $\int_a^b f(x)dx$ correspond à l'aire du domaine délimité par le graphe de f, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$ (on parle parfois d'*aire sous la courbe*). Si f est négative, l'aire est comptée négativement. Par conséquent, $\int_a^b f(x)dx$ représente une aire algébrique.



Théorème fondamental du calcul infinitésimal
Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Propriétés de l'intégrale définie

$$(i) \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$(ii) \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$(iii) \quad \int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

$$(iv) \quad f(x) \leqslant g(x) \ \ \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

$$(v) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad , \quad a < c < b$$

$$(iv) \quad \Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big|dx \quad , \quad a < b$$

Théorème de la moyenne (du calcul intégral)
Soient $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $\rho(x) \geqslant 0 \ \forall x \in I = [a,b]$; alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = f(c)\int_a^b \rho(x)dx$$

Cas particulier $\rho \equiv 1$: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$

8.3 Recherche des primitives, techniques d'intégration

Calcul direct
Certaines primitives sont obtenues directement à partir des règles du calcul différentiel. On considère l'**intégrant** $f(x)$ que l'on transforme si nécessaire

pour obtenir une forme connue de dérivée.
Principe : on regarde en particulier si l'intégrant est du type $u'(x)h(u(x))$; si l'on sait trouver H tel que $H' = h$, alors

$$\int u'(x)h(u(x))dx = H(u(x)) + C.$$

Dans le cas d'une intégrale définie, si u est continûment dérivable sur $[a, b]$ et h continue entre $u(a)$ et $u(b)$, alors

$$\int_a^b u'(x)h(u(x))dx = \int_{u(a)}^{u(b)} h(t)dt.$$

Intégration par parties
Elle découle de la relation $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ d'où $f'(x)g(x) = (f(x) \cdot g(x))' - f(x)g'(x)$. On a donc

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Dans le cas d'une intégrale définie, on obtient

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

où, par définition, $f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Remarque : dans certains cas on peut faire plusieurs intégrations par parties succesives jusqu'à obtention d'une intégrale connue.

Intégration par changement de variables
On pose $x = \Phi(t)$. Alors $f(x) = f\big(\Phi(t)\big)$ et $dx = \Phi'(t)dt$. On a donc

$$\int f(x)dx = \int f(\Phi(t))\Phi'(t)dt.$$

Si f est continue sur $[a, b]$ et que Φ est continûment dérivable sur $[c, d]$, avec $\Phi(c) = a$ et $\Phi(d) = b$, on a alors, dans le cas d'une intégrale définie,

$$\int_{\Phi(c)}^{\Phi(d)} f(x)dx = \int_c^d f\big(\Phi(t)\big)\Phi'(t)dt$$

Primitives de fonctions rationnelles
La méthode est basée sur la décomposition en facteurs irréductibles des polynÃťmes et la décomposition en éléments simples. Chaque élément simple (fraction) admet une primitive élémentaire.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^3+x}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \ln|x| + \arctan x + C.$

Solutions des exercices

S8.1 Pour trouver $f_i(x)$, on calcule $F_i'(x)$; on obtient ici $f_1(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}} = f_2(x)$. Par conséquent, F_1 et F_2 ne diffèrent que d'une constante.

S8.2 On a $P(x) = \displaystyle\int_0^x (t^2 - t + 1)\ dt$; or $t^2 - t + 1 > 0$ pour tout t implique $P(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

S8.3 Il faut résoudre $0 = \displaystyle\int_0^1 \left[\alpha x^2 - (1+\alpha)x + 1\right]\ dx = \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{2}(1+\alpha) + 1$, d'où $\alpha = 3$.

S8.4 Soit $S = \displaystyle\int_{-a}^a f(x)\ dx = \int_{-a}^0 f(x)\ dx + \int_0^a f(x)\ dx$; en posant $I = \displaystyle\int_0^a f(x)\ dx$ et $t = -x$ dans l'autre intégrale, on obtient

$$S = \int_a^0 f(-t)\ (-dt) + I = \int_0^a f(-t)\ dt + I = \int_0^a f(t)\ dt + I = 2I\ .$$

S8.5 On a

$$\int_0^1 \left(\frac{3}{4}\right)^x\ dx = \int_0^1 e^{x \ln \frac{3}{4}}\ dx = \frac{1}{\ln \frac{3}{4}} \left(\frac{3}{4}\right)^x \Big|_0^1 = \frac{1}{4(\ln 4 - \ln 3)}.$$

S8.6 En chaque $P(x, y(x))$, on doit avoir $y'(x) = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$; d'où, après intégration,
$y(x) = -\dfrac{2}{1+x^2} + C$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$, on obtient $C = 1$ et $y(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

S8.7 L'aire A est donnée par : $A = \displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx - \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{2}$.

S8.8 Soient $T(x_T, y_T)$ le point de tangence et $y = y(x)$ l'équation explicite de γ. On a : $y'(x_T) = \dfrac{y_T}{x_T}$ d'où $T(2, \dfrac{1}{2})$.
Alors,

$$A = [\text{ Aire du triangle rectangle d'hypoténuse } OT] - \int_1^2 (1 - \frac{1}{x})\ dx = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

S8.9 Soit $y = x + h$ l'équation de d, avec h à déterminer de telle sorte que
$I = \displaystyle\int_a^b [(x+h) - (x^2 - x + 1)]dx = 288$ où a et b sont les abscisses des points intersections de γ par d. On trouve $a = 1 - \sqrt{h}$ et $b = 1 + \sqrt{h}$ et l'on obtient, après calculs, $I = \frac{4}{3}h\sqrt{h}$, d'où $h = 36$.

S8.10
a) $I = \displaystyle\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\ln|e^{-x} + 1| + C.$

b) $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}{1+\sqrt{1+x}}dx = 2\ln(1 + \sqrt{x+1}) + C.$

S8.11 On intègre par parties et on obtient :
$I = \displaystyle\int (x)' \arcsin x\ dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

S8.12
a) On intègre par parties deux fois et on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \int (x)'(\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x \, dx = x(\ln x)^2 - 2\left(x\ln x - \int 1 \, dx\right) \\ &= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C. \end{aligned}$$

b) On intègre par parties trois fois et on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \int x^3(\sin x)' \, dx = x^3 \sin x - 3\int x^2 \sin x \, dx \\ &= x^3 \sin x - 3\left[-x^2\cos x - \int (-2x\cos x) \, dx\right] \\ &= x^3 \sin x - 3\left[-x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x \, dx\right)\right] \\ &= x^3 \sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x + C. \end{aligned}$$

S8.13 On décompose $f(x)$ en fractions simples : $f(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$. Pour que la fonction $\arctan x$ ne figure pas dans la primitive de $f(x)$, il faut imposer $D = 0$. On trouve $A = \frac{1}{4}(p+5)$, $B = -\frac{1}{4}(p+1)$, $-3 = -A+B$ en posant $x = 0$, d'où $p = 3$ puis $C = -5$.
Ainsi, $F(x) = \displaystyle\int \frac{4x^3 - 3x^2 - 6x - 3}{1 - x^4} dx = 2\ln|x-1| - \ln|x+1| - \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + K.$
S8.14 Si l'on pose $x = a + b - t$, on a :

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = -\int_{t=b}^{a} f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-t)dt.$$

Ainsi, $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1 + \cos^2(\pi - x)} \, dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx,$

d'où $\quad 2I = \pi \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx = -\pi \arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$, $\quad$ et donc $\quad I = \dfrac{\pi^2}{4}$.

CHAPITRE 9

Calcul matriciel

Exercices

E9.1 Sachant que $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -8 & 10 & -2 \end{pmatrix}$, calculer $A + B$ et $\frac{1}{2}M$.

E9.2 Sachant que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$,
calculer $A \cdot B$ et $B \cdot A$ quand c'est possible.

E9.3 Calculer A^n où $n \in \mathbb{N}^*$ si a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

E9.4 Calculer le déterminant $Det(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & -7 \\ -2 & -4 & -10 \end{pmatrix}$.

E9.5 Calculer l'inverse A^{-1} de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ si c'est possible.

E9.6 Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 8 & -10 & -7 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A \cdot B \cdot C$. Quelles conclusions peut-on tirer du résultat ?

E9.7 Peut-on trouver une matrice A telle que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

E9.8 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^{-1}. Qu'en conclure ?

E9.9 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer AB et AC.

E9.10 Trouver la matrice A telle que $A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

E9.11 Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

E9.12 Résoudre, à l'aide de la règle de Cramer, le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 2y + 3z = -3 \\ 3x - 7y - 5z = 4 \\ 5x - 3y - 2z = 5 \end{array}\right.$$

Notions théoriques

9.1 Notions de bases

Matrice
Soient m et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *matrice* $m \times n$, ou matrice de *type* $m \times n$, ou matrice d'*ordre* $m \times n$, un tableau à m *lignes* et n *colonnes*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On note aussi $A = (a_{ij})_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,m}$ ou encore $A = (a_{ij})$. Les a_{ij} sont des nombres réels appelés *coefficients* de la matrice A.

Exemples :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Les matrices A_1, A_2 et A_3 sont de type respectivement 3×3, 3×1 et 2×2.

Remarque : un vecteur dans $\mathbb{R}^3$ peut être représenté par une matrice 3×1. Une matrice peut donc être considérée comme formée de plusieurs vecteurs côte à côte (voir § 9.2.5).

Matrice carrée
Si $m = n$, on dit que la matrice est *carrée* d'ordre m. Les matrices A_1 et A_3 de l'exemple précédent sont carrées d'ordre 3 et 2 respectivement.

Matrices particulières
La matrice $O = (o_{ij})$ avec $o_{ij} = 0 \ \ \forall i, j$ est une *matrice nulle*.
La matrice carrée d'ordre n définie par $I_n = \big(\delta_{ij}\big)$, où δ_{ij} est le *symbole de Kronecker*, c'est-à-dire $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon, est la matrice *identité* d'ordre n.

Exemples :
– matrices nulles

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– matrices identité

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.2 Opérations sur les matrices

9.2.1 Somme de deux matrices

Pour pouvoir additionner deux matrices A et B, il est nécessaire qu'elles soient de **même type**. Si tel est le cas, la somme s'effectue coefficient par coefficient ayant mêmes indices, c'est-à-dire $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Propriétés :

$$\begin{array}{rl} (i) & A+B=B+A \\ (ii) & A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C \\ (iii) & A+O=A \end{array}$$

9.2.2 Multiplication d'une matrice par un nombre réel

Si l'on multiplie la matrice $A=(a_{ij})$ par $\lambda \in \mathbb{R}$, chaque coefficient de la matrice est multiplié par λ. En d'autres termes, $\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda \cdot a_{ij})$.

Exemple : $-\dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Propriétés :

$$\begin{array}{rl} (i) & A\cdot\lambda=\lambda\cdot A \\ (ii) & \lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B \\ (iii) & (\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A \\ (iv) & \lambda\cdot(\mu\cdot A)=(\lambda\mu)\cdot A \\ (v) & 1\cdot A=A \\ (vi) & 0\cdot A=O \end{array}$$

9.2.3 Produit de deux matrices

Le produit $A{\cdot}B$ de deux matrices n'est défini que si **le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B**. En particulier, il est possible que $A\cdot B$ soit défini, mais que $B\cdot A$ ne le soit pas.
Soient $A=(a_{ik})$ une matrice $m\times p$ et $B=(b_{kj})$ une matrice $p\times n$. La matrice $C=A\cdot B$ sera la matrice $m\times n$ définie par $C=(c_{ij})$ tel que

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Produit "ligne-colonne" : l'élément c_{ij} est égal au produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la première matrice et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la seconde matrice.

Exemple : $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot1+0\cdot(-3)+2\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot(-1)+2\cdot1 \\ 0\cdot1+3\cdot(-3)+4\cdot0 & 0\cdot0+3\cdot(-1)+4\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cet exemple, BA a un sens et est égal à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & -10 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Propriétés :

$$\begin{array}{rl} (i) & A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C \\ (ii) & A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C \\ (iii) & (A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C \\ (iv) & A\cdot(\lambda\cdot B) = \lambda\cdot(A\cdot B) \end{array}$$

NB : Si A et B sont des matrices carrées $n \times n$, les produits AB et BA ont un sens, mais **en général** $A \cdot B \neq B \cdot A$: le produit de deux matrices n'est pas une opération commutative.

9.2.4 Matrice transposée

La *matrice transposée* de la matrice $A = (a_{ij})$ est la matrice notée ${}^tA$ définie par ${}^tA = (a_{ji})$. En d'autres termes la $i^{\text{ème}}$ ligne, respectivement la $j^{\text{ème}}$ colonne, de la matrice A devient la $i^{\text{ème}}$ colonne, respectivement la $j^{\text{ème}}$ ligne, de la matrice ${}^tA$.

EXEMPLE : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Propriétés :

$$\begin{array}{rl} (i) & {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \\ (ii) & {}^t(\lambda\cdot A) = \lambda\cdot {}^tA \\ (iii) & {}^t(A\cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA \end{array}$$

9.2.5 Déterminant des matrices 2×2 et 3×3

Soit A la matrice carrée d'ordre 2 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Son *déterminant*, noté $Det(A)$ ou $|A|$ est le nombre **réel** $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.
Dans le cas d'une matrice carrée A d'ordre 3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

on peut appliquer la **règle de Sarrus** pour calculer son déterminant : on additionne le produit des diagonales "descendantes" et on soustrait le produit des diagonales "montantes" ; cette règle n'est valable que pour les **matrices carrées d'ordre** 2 **et** 3.
On procède donc de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

et on obtient

$Det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$

NB : le déterminant n'est défini que pour des matrices carrées.

Remarque : soient $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs, et M la matrice formée de la juxtaposition de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. On a donc $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ et on note parfois $Det(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b})$ au lieu de $Det(M)$.
De même, si $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, on note parfois $Det(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}; \overrightarrow{c})$ au lieu de $Det(M)$.

Propriétés :

- (i) $Det(A \cdot B) = Det(A) \cdot Det(B)$
- (ii) $Det({}^tA) = Det(A)$
- (iii) Additionner à une ligne, respectivement une colonne, le multiple d'une autre ligne, respectivement d'une autre colonne, ne change pas le déterminant.
- (iv) Si l'on permute deux lignes (ou deux colonnes) le déterminant change de signe.
- (v) Si l'on multiplie une ligne (ou une colonne) par λ, le déterminant est aussi multiplié par λ.
- (vi) Pour les matrices d'ordre 2,
  $Det(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}; \overrightarrow{b}) = Det(\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{b}) + Det(\overrightarrow{a_2}; \overrightarrow{b})$,
  et pour les matrices d'ordre 3,
  $Det(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}; \overrightarrow{b}; \overrightarrow{c}) = Det(\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{b}; \overrightarrow{c}) + Det(\overrightarrow{a_2}; \overrightarrow{b}; \overrightarrow{c})$;
  en particulier, si une matrice a une ligne ou une colonne ne comportant que des 0, son déterminant est nul.

NB : en général, $Det(A+B) \neq Det(A) + Det(B)$ et $Det(\lambda A) \neq \lambda Det(A)$ mais, si A est une matrice carrée d'ordre n, $Det(\lambda A) = \lambda^n Det(A)$, d'après la propriété (v), puisque λA est obtenue en multipliant chaque ligne de A par λ.

9.2.6 Inverse d'une matrice carrée d'ordre $\leqslant 3$

La *matrice inverse* d'une matrice carrée A d'ordre n est la matrice A^{-1} définie par

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n.$$

Remarque : soit A une matrice carrée ; sa matrice inverse existe si et seulement si $Det(A) \neq 0$. Dans ce cas, on dit que la matrice A est *inversible*.

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et telle que $ad - cb \neq 0$, c'est-à-dire que les vecteurs non nuls $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires ; sa matrice inverse est alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

Si A est une matrice carrée d'ordre 3 telle que $Det(A) \neq 0$, sa matrice inverse est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} \Big((-1)^{i+j} \cdot d_{ij} \Big),$$

où d_{ij} est le déterminant de la matrice que l'on obtient en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de ${}^tA$.

EXEMPLE : soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après avoir écrit la transposée, on trouve $d_{11} = 0 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -3$, $d_{12} = 2$, $d_{13} = 6$ et ainsi de suite. Après calcul du déterminant de A et en n'oubliant pas de multiplier chaque d_{ij} par $(-1)^{i+j}$, on obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 7 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Propriétés :

$$\begin{array}{ll} (i) & (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \\ (ii) & {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} \\ (iii) & Det(A^{-1}) = \dfrac{1}{Det(A)} \\ (iv) & (\lambda \cdot A)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot A^{-1} \end{array}$$

9.3 Applications du calcul matriciel

Le calcul matriciel permet, entre autres applications, de résoudre très facilement les problèmes de n équations à n inconnues. Pour ce faire, on utilise ici la **règle de Cramer**.

9.3.1 Résolution des systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

On pose

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Le système admet une solution unique si et seulement si $Det(\overrightarrow{a}\,;\overrightarrow{b}\,;\overrightarrow{c}\,) \neq 0$. Ce déterminant est appelé *déterminant principal*. Dans le cas considéré, la solution est alors :

$$\boxed{x = \frac{Det(\overrightarrow{d}\,;\overrightarrow{b}\,;\overrightarrow{c}\,)}{Det(\overrightarrow{a}\,;\overrightarrow{b}\,;\overrightarrow{c}\,)}, \quad y = \frac{Det(\overrightarrow{a}\,;\overrightarrow{d}\,;\overrightarrow{c}\,)}{Det(\overrightarrow{a}\,;\overrightarrow{b}\,;\overrightarrow{c}\,)}, \quad z = \frac{Det(\overrightarrow{a}\,;\overrightarrow{b}\,;\overrightarrow{d}\,)}{Det(\overrightarrow{a}\,;\overrightarrow{b}\,;\overrightarrow{c}\,)}.}$$

Si $Det(\overrightarrow{a}\,;\overrightarrow{b}\,;\overrightarrow{c}\,) = 0$, deux cas peuvent se présenter :

1. $Det(\overrightarrow{d}\,;\overrightarrow{b}\,;\overrightarrow{c}\,) = Det(\overrightarrow{a}\,;\overrightarrow{d}\,;\overrightarrow{c}\,) = Det(\overrightarrow{a}\,;\overrightarrow{b}\,;\overrightarrow{d}\,) = 0$ et le système possède une infinité de solutions,
2. au moins un de ces trois déterminants est non nul et dans ce cas le système ne possède aucune solution.

Solutions des exercices

S9.1 La réponse est $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{2}M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

S9.2 On obtient, après calcul, $A\cdot B=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 7 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Le produit $B\cdot A$ n'est pas défini car le nombre de colonnes de B qui est 2 est différent du nombre de lignes de A qui est 3.

S9.3

a) On trouve par récurrence $A^n=\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) On effectue le calcul de $A^2=A\cdot A$ et on obtient $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où, pour tout $n>2$, $A^n=A^{n-2}\cdot A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

S9.4 Le déterminant ne change pas si on ajoute à la troisième ligne 2 fois la première ligne ; on obtient $Det(A)=Det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0$ car la dernière ligne ne comporte que des 0.

S9.5 On a $Det(A)=2$; donc A est inversible et, après calcul, on obtient $A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

S9.6

$$A\cdot B\cdot C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que A, B et C sont inversibles et que $A=C^{-1}\cdot B^{-1}$, $B=A^{-1}\cdot C^{-1}$ et $C=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

S9.7 La matrice A doit être de type 2×2. Si l'on note $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $Det(B)=0$, $Det(C)=1$ et donc A n'existe pas, car sinon, on aurait :
$Det(AB)=Det(A)\cdot Det(B)=Det(C)$ c'est-à-dire $0=1$, ce qui n'est pas possible.

S9.8

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme A^2 est égal à la matrice identité, on en déduit que $A=A^{-1}$, ce que l'on peut également vérifier en appliquant la formule (9.1) de § 9.2.6. Il est donc possible qu'une matrice soit sa propre inverse, sans que cette matrice soit l'identité.

S9.9

$$A\cdot B=A\cdot C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que pour des matrices qui ne sont pas carrées, $A \cdot B = A \cdot C$ n'implique pas nécessairement $B = C$. On remarque aussi que $A \cdot B = A \cdot C = I_2$ mais que ni B ni C ne sont les matrices inverses de A, puisque A n'étant pas une matrice carrée, elle n'a pas d'inverse.

S9.10 Si l'on note $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $Det(B) \neq 0$, donc B est inversible et $A = C \cdot B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

S9.11 On obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -8 & 8 & -8 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

S9.12 La solution du système est : $x = \dfrac{38}{38} = 1$, $y = \dfrac{76}{38} = 2$, $z = \dfrac{-114}{38} = -3$.

Références

[1] Commission romande de mathématiques (CRM), *Notions élémentaires*, Editions du Tricorne, collection *Fundamentum de mathématiques*, 2005.

[2] Commission romande de mathématiques (CRM), *Géométrie 1*, Editions du Tricorne, collection *Fundamentum de mathématiques*, 7$^{\text{ème}}$ édition, 1999.

[3] Commission romande de mathématiques (CRM), *Géométrie 2*, Editions du Tricorne, collection *Fundamentum de mathématiques*, 7$^{\text{ème}}$ édition, 1999.

[4] Commission romande de mathématiques (CRM), *Algèbre*, Editions du Tricorne, collection *Fundamentum de mathématiques*, 2$^{\text{ème}}$ édition, 1996.

[5] Commission romande de mathématiques (CRM), *Analyse*, Editions du Tricorne, collection *Fundamentum de mathématiques*, 2002.

[6] Commission romande de mathématiques (CRM), *Géométrie vectorielle et analytique plane*, Editions du Tricorne, collection *Fundamentum de mathématiques*, 2$^{\text{ème}}$ édition, 1993.

[7] Commission romande de mathématiques (CRM), *Géométrie vectorielle et analytique de l'espace*, Editions du Tricorne, collection *Fundamentum de mathématiques*, 2$^{\text{ème}}$ édition, 2003.

[8] Commission romande de mathématiques (CRM), *Algèbre linéaire*, Editions du Tricorne, collection *Fundamentum de mathématiques*, 2$^{\text{ème}}$ édition, 2000.

[9] Commission romande de mathématiques (CRM), *Formulaires et tables*, Editions du Tricorne, 2002.

[10] Jean-Michel Kern, *Algèbre*, Editions Loisirs et Pédagogie (L.E.P.), 3$^{\text{ème}}$ édition, 1992.

[11] Heinrich Matzinger, *Aide-mémoire d'analyse*, Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR), 2000.

[12] J. Douchet et B. Zwahlen, *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles d'une variable réelle*, PPUR, 2$^{\text{ème}}$ édition, 1992.
[Référence de manuel de base proposé aux étudiants de 1$^{\text{ère}}$ année à l'EPFL].