Rappel :

$z = a + ib = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$

cartesienne — polaire trig. — polaire exp.

Formule de Moivre :

$(\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}$, $\rho > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ à $2k\pi$ près, $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex. $z = 3 + 3\sqrt{3}\,i$. Trouver z^{15}

$z^{15} = (3 + 3\sqrt{3}\,i)^{15}$ = [coefficient binomiaux ..] très long.

$(a+b)^3 \longrightarrow$ 1 3 3 1

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
. . . . .

Triangle de Pascal

$z \to$ forme polaire exponentielle et appliquer de Moivre :

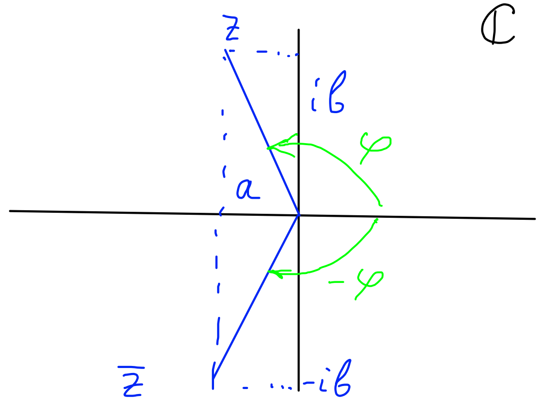
$|z| = \sqrt{9+27} = 6$; $\arg z = \mathrm{Arctg}\,\frac{3\sqrt{3}}{3} = \mathrm{Arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$
$\mathrm{Re}\, z = 3 > 0$

$\Rightarrow z = 6e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow z^{15} = 6^{15} e^{5\pi i} = 6^{15} e^{\pi i} = -6^{15}$

Conjugaison

Déf $z = a + ib \in \mathbb{C}$, alors le conjugué de z est $\bar{z} \overset{\text{déf}}{=} a - ib$

Si $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \Rightarrow \boxed{z\bar{z} = |z|^2} \in \mathbb{R}$.



Sous forme polaire :

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow \bar{z} = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) =$

$= \rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) \Rightarrow \boxed{\bar{z} = \rho e^{-i\varphi}}$

Propriétés :

(1) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ ← utiliser la forme cartesienne

Exercice : vérifier les propriétés

$$\left.\begin{aligned}
&(2) \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \\
&(3) \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \qquad w \neq 0 \\
&(4) \quad |\bar{z}| = |z|
\end{aligned}\right\}$$ ← utiliser la forme polaire.

(5) $z = a + ib, \quad \bar{z} = a - ib \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} a &= \boxed{\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}} \\ b &= \boxed{\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}} \end{aligned}\right. \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

En particulier, si $|z| = 1$

$z = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{aligned}} \qquad \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

Application : Exprimer $\sin^4\varphi$ en termes des fonctions d'angle multiple.

$$\sin^4\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4i\varphi} - 4e^{2i\varphi} + 6 - 4e^{-2i\varphi} + e^{-4i\varphi}\right) = \frac{1}{8}\cos 4\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{3}{8}.$$

$e^{4i\varphi} + e^{-4i\varphi} = 2\cos 4\varphi$, $\quad -4e^{2i\varphi} - 4e^{-2i\varphi} = -8\cos 2\varphi$

Racines des nombres complexes.

Proposition Si $w = s e^{i\varphi}$, $w \in \mathbb{C}^*$, $s>0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\{z \in \mathbb{C}^* : z^n = w\} = \left\{ \sqrt[n]{s}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\ k=0,1,\dots n-1 \right\}.$$

Dém. Soit $z = r e^{i\vartheta}$, $r>0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Supposons que $z^n = w \Rightarrow \underbrace{r^n e^{in\vartheta} = s e^{i\varphi}}$ (de Moivre)

$$\Rightarrow r^n = s > 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{s} \text{ et } n\vartheta = \varphi + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \vartheta = \frac{\varphi+2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \begin{array}{l} k=0 \Rightarrow \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \\ k=n \Rightarrow \frac{\varphi+2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \end{array}$$

$\Rightarrow$ même solution pour $k=0$ et $k=n$

$$\Rightarrow \left\{\vartheta = \frac{\varphi+2k\pi}{n},\ k=0,1,2,\dots,n-1\right\}$$

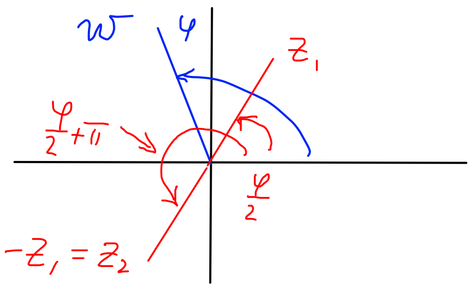
$$\Rightarrow \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = w\} = \left\{ \sqrt[n]{s}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\ k=0,1,\dots n-1 \right\}. \qquad \blacksquare$$

Racines carrées $z^2 = w = s e^{i\varphi}$, $s>0$, alors

$$\left\{ z = \sqrt{s}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{2}},\ k=0,1 \right\} = \left\{ \sqrt{s}\, e^{i\frac{\varphi}{2}},\ \sqrt{s}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)} \right\} \overset{e^{i\pi}=-1}{=} \left\{ \sqrt{s}\, e^{i\frac{\varphi}{2}},\ -\sqrt{s}\, e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\}.$$

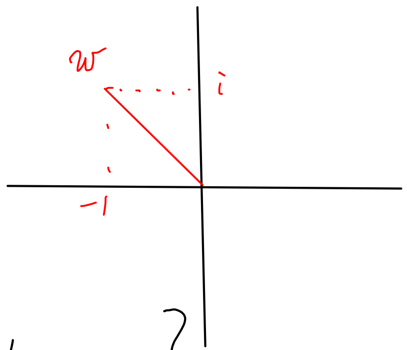
$\Rightarrow$ il existe 2 racines carrées pour tout $w \neq 0$, $w \in \mathbb{C}$.

$$z_1^2 = z_2^2 = w,\quad z_1 = -z_2$$



Ex Resoudre $(-1+i) = z^3$, $z \in \mathbb{C}$

Soit $w = -1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$



$|w| = \sqrt{2}$, $\arg w = \text{Arctg}\,\frac{+1}{-1} + \pi = \text{Arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

$\text{Re}\, w = -1 < 0$

$\Rightarrow$ Proposition $\Rightarrow$ $\{z : z^3 = w,\ z \in \mathbb{C}^*\} = \left\{ \sqrt[3]{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3}},\ k = 0,1,2 \right\}$.

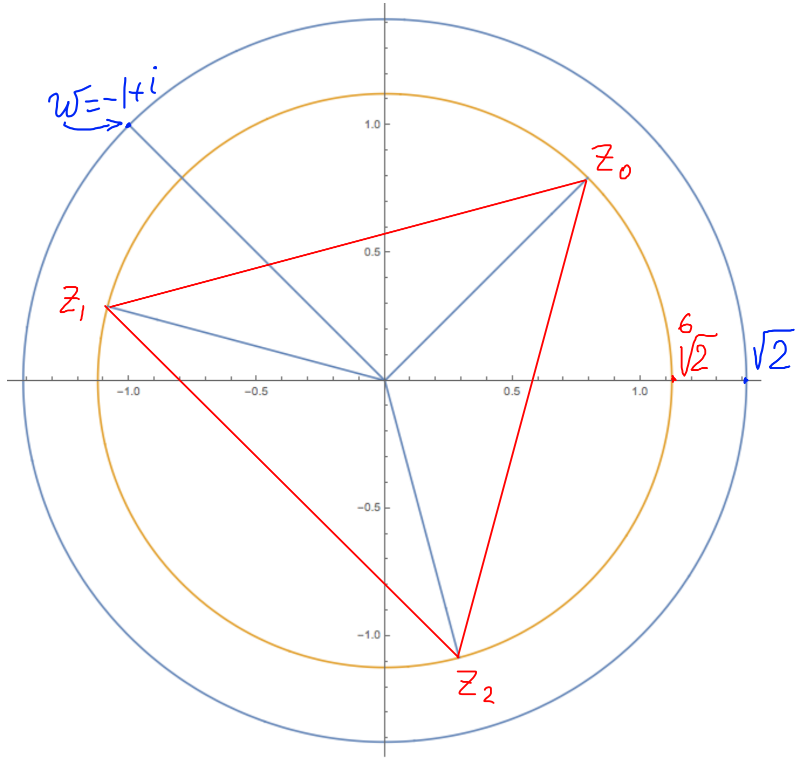
Exercice : écrire les solutions explicites sous forme polaire et les presenter graphiquement.

$k=0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$k=1 \Rightarrow z_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$

$k=2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{19\pi}{12}} =$

$= \sqrt[6]{2}\, e^{-i\frac{5\pi}{12}}$



Les trois solutions $\{z_0, z_1, z_2\}$ se trouvent aux sommets d'un triangle régulier.

Ex Soit $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. Alors l'équation $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = z$ possède

Vrai $\boxed{(1)}$ Exactement 3 solutions dans $\mathbb{C}^*$.

(2) Exactement 2 solutions dans $\mathbb{C}^*$

(3) Un nombre infini de solutions dans $\mathbb{C}^*$

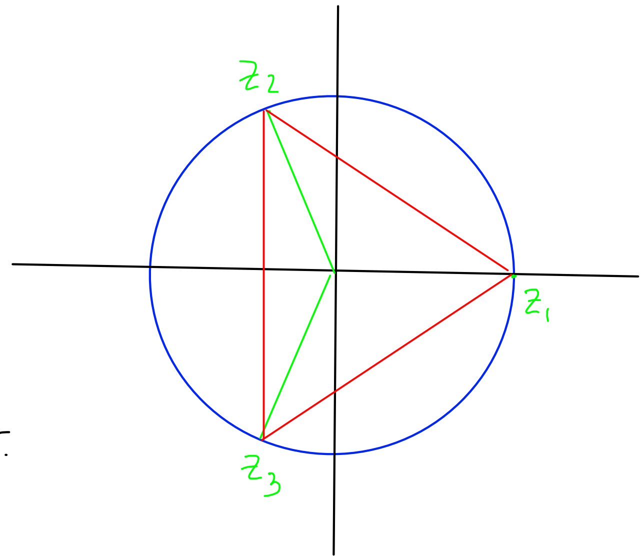
~~(4)~~ au moins une solution dans $\mathbb{C}^*$ avec $|z| > 1$.

Soit $z \neq 0$, $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0 \Rightarrow \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = \left(\frac{\cancel{\rho} e^{i\varphi}}{\cancel{\rho} e^{-i\varphi}}\right)^2 = z = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \left(e^{2i\varphi}\right)^2 = \rho e^{i\varphi}$

$\Rightarrow e^{4i\varphi} = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \underline{\underset{>0}{\rho} = e^{3i\varphi}} \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow \underline{e^{3i\varphi} = 1.}$

Proposition $\Rightarrow e^{3i\varphi} = 1 = e^{2\pi k i} \Rightarrow \left\{\varphi = \frac{2k\pi}{3},\ k = 0, 1, 2\right\}$

$\Rightarrow \varphi = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\} \Rightarrow z = \left\{\underset{z_1}{1}, \underset{z_2}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}, \underset{z_3}{e^{i\frac{4\pi}{3}}}\right\}$



En général: Les racines n'ièmes de $w \in \mathbb{C}^*$ sont situées sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{|w|}$ aux sommets d'un polygone régulier à n côtés.

L'orientation du polygone dépend de l'argument de w.

Equations polynomiales dans $\mathbb{C}$.

Quadratique dans $\mathbb{C}$: $az^2+bz+c=0$ $\quad a,b,c\in\mathbb{C},\ z\in\mathbb{C},\ a\neq 0$.

$$\Rightarrow z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ racine carrée d'un nombre complexe !

$\Rightarrow$ Si $b^2-4ac=0$ $\Rightarrow$ il y a une solution $z=-\frac{b}{2a}$ à multiplicité 2.

$\Rightarrow$ Si $b^2-4ac\neq 0$ $\Rightarrow$ il existe toujours 2 solutions complexes.

Théorème fondamental de l'Algebre.

Toute polynôme $P(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0$, $\quad a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0\in\mathbb{C},\ a_n\neq 0$ peut s'écrire sous la forme :

$P(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)\ldots\ldots(z-z_n)$ où $z_1, z_2, \ldots z_n\in\mathbb{C}$ (peut-être avec répétitions)

$P(z)=a_n(z-w_1)^{m_1}(z-w_2)^{m_2}\ldots(z-w_p)^{m_p}$ où $w_1,\ldots w_p\in\mathbb{C}$ distincts

$m_1+m_2+\ldots+m_p=n$, $\quad m_1\ldots m_p\in\mathbb{N}^*$

On dit que m_i est la multiplicité de la racine w_i.

Remarque Ce n'est pas vrai dans $\mathbb{R}$.

Ex $(x^2+4x+8)(x^2+7)=P(x)$ degré 4, n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$

Exercice: Trouver les 4 racines complexes de ce polynôme. $z\in\{-2\pm 2i;\ \pm i\sqrt{7}\}$.

Ex Est-ce que le polynôme $z^2+(1-i)z-i = P(z)$ est divisible par $(z-i)$?

On calcule $P(i) = i^2+(1-i)i-i = -1+i+1-i = 0 \Rightarrow z=i$ est une racine $\Rightarrow$ Oui.

Polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$

Proposition Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de $P(z)$ à coefficients réels, alors $\bar{z}$ l'est aussi.

Dém: On va démontrer que $P(z)=0 \Rightarrow P(\bar{z})=0$, si $P(z)$ à coefficients réels.

$$P(\bar{z}) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k}_{a_n\bar{z}^n+a_{n-1}\bar{z}^{n-1}+\dots+a_1\bar{z}+a_0} \underset{\forall k}{\overset{a_k=\bar{a}_k\in\mathbb{R}}{=}} \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \overline{P(z)} = \bar{0} = 0.$$

a_i sont réels

$\Rightarrow$ Si z est une racine, alors $\bar{z}$ l'est aussi $\blacksquare$

Soit $P(z)$ à coefficients réels

Alors si $P(z_i)=0$ et $z_i \notin \mathbb{R} \Rightarrow (z-z_i)(z-\bar{z}_i)$ divise $P(z)$

$$\Rightarrow (z-z_i)(z-\bar{z}_i) = \Big(z^2 - z\underbrace{(z_i+\bar{z}_i)}_{2\operatorname{Re} z_i} + \underbrace{z_i\bar{z}_i}_{|z_i|^2}\Big) = \left(z^2-(2\operatorname{Re} z_i)z+|z_i|^2\right) \text{ divise } P(z).$$

Conclusion: Tout polynôme non-constant à coefficients réels peut être factorisé en polynômes à coefficients réels de degré 1 ou 2, irreductibles sur $\mathbb{R}$.

Déf Un polynôme non-constant est irreductible sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{C}$) s'il n'est pas égal au produit des deux polynômes non-constants à coefficients dans $\mathbb{R}$ (dans $\mathbb{C}$).

Ex x^2+4x+8 est irreductible sur $\mathbb{R}$ (mais pas sur $\mathbb{C}$).

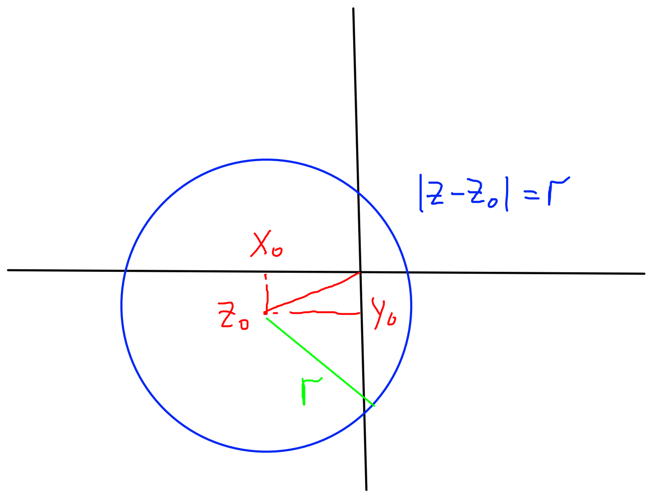
$$x^2+4x+8 = (x+2+2i)(x+2-2i) \text{ sur } \mathbb{C}.$$

$$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3) \text{ n'est pas irreductible sur } \mathbb{R}.$$

Théorème fondamental de l'algèbre $\Rightarrow$ Les seuls polynômes irreductibles sur $\mathbb{C}$ sont les polynômes linéaires

Sous-ensembles du plan complexe.

Ex 1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$



Alors $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$

est un cercle de rayon r et centre z_0.

$$|z - z_0| = |x + iy - x_0 - iy_0| = |x - x_0 + i(y - y_0)| =$$

$$= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$$

$\Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ équation du cercle de rayon r centré en (x_0, y_0).

Ex 2 $\left\{ z \in \mathbb{C}^* : \frac{\bar{z}}{z} = -1 \right\} \Rightarrow$ Soit $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$.

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\rho} e^{-i\varphi}}{\cancel{\rho} e^{i\varphi}} = e^{-2i\varphi} = -1 = e^{i(\pi + 2\pi k)}$$

$$\Rightarrow -\varphi = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi \right\} \Rightarrow \varphi = \left\{ -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} \right\}; \rho > 0.$$

$\Rightarrow$ deux intervalles $\{\pm ib, b > 0\}$.