Rappel: Limite d'une suite.

Déf Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres reels.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \overset{\text{déf}}{\iff} \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0 \Rightarrow |a_n-\ell|\leq\varepsilon.$$

Quel que soit $\varepsilon>0$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que la queue de la suite (a_n), $n\geq n_0$ se trouve dans l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$. En général, n_0 dépend de ε.

Ex Soit $p\in\mathbb{Q}$, $p>0$. Considérons la suite $a_0=1$, $a_n=\frac{1}{n^p}$, $n\geq 1$.

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$

Dém: Soit $\varepsilon>0$. On cherche $n_0\in\mathbb{N}$: $\forall n\geq n_0$, $\left|\frac{1}{n^p}-0\right|\leq\varepsilon \iff \underbrace{\frac{1}{n^p}\leq\varepsilon}$

$\iff \frac{1}{\varepsilon}\leq n^p \underset{p>0}{\iff} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}\leq n$ (voir Exercice: Si $0<x\leq y \Rightarrow x^m\leq y^m$ et $x^{\frac{1}{m}}\leq y^{\frac{1}{m}}$ $\forall m\in\mathbb{N}^*$)

Si on choisit $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}\right]+1>\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}$, on a $\forall n\geq n_0 \Rightarrow \underbrace{n\geq n_0>\frac{1}{\varepsilon^{1/p}}} \iff$

$\iff \frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}<\varepsilon^{\frac{1}{p}} \underset{p>0}{\iff} \underbrace{\frac{1}{n^p}\leq\frac{1}{n_0^p}<\varepsilon} \Rightarrow$ la définition est satisfaite

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0 \quad \forall p>0}$$

En fait, la limite est zéro pour tout $p>0$. ▨

Exercice: $\forall x,y \in \mathbb{R}: 0 < x \leq y \Rightarrow x^m \leq y^m$ et $x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}}$ $\forall m \in \mathbb{N}^*$

Dém: (1) Soient $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}: 0 < x_1 \leq y_1$ et $0 < x_2 \leq y_2$. Alors $y_1 - x_1 \geq 0$, $x_2 > 0 \Rightarrow$ $y_1 x_2 - x_1 x_2 \geq 0$ (Axiome de $\mathbb{R}$)

Aussi, $y_2 - x_2 \geq 0$ et $y_1 > 0 \Rightarrow y_1 y_2 - x_2 y_1 \geq 0$. Alors $\underline{y_1 y_2} \geq x_2 y_1 \geq \underline{x_1 x_2}$.

(2) Si $0 < x \leq y \overset{(1)}{\Rightarrow} x^2 \leq y^2$, $x^3 \leq y^3$ et ainsi de suite (par récurrence) $\Rightarrow x^m \leq y^m$ $\forall m \in \mathbb{N}^*$

(3) Demontrons que $x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}}$. Par contraposée : $y^{\frac{1}{m}} < x^{\frac{1}{m}} \overset{(2)}{\Rightarrow} (y^{\frac{1}{m}})^m < (x^{\frac{1}{m}})^m \Leftrightarrow y < x$, contradiction avec la condition $0 < x \leq y$.

$\Rightarrow x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}}$ $\forall m \in \mathbb{N}^*$.

Proposition (unicité de la limite).

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente et supposons que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont des limites de (a_n). Alors $a = b$

Dém: Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ puisque $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

aussi, puisque $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = b$ $\exists m_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq m_0$, $|a_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $\forall n \geq \max(n_0, m_0) \Rightarrow |a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

inégalité triangulaire $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, |a - b| \leq \varepsilon \Rightarrow a = b$. ▨

Exercice: $|x+y| \leq |x| + |y|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$ (inégalité triangulaire)

Dém: $\forall x,y \in \mathbb{R}$ on a : $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$; $y \leq |y|$ et $-y \leq |y|$.

Alors si $(x+y) \geq 0 \Rightarrow \underline{|x+y|} = x + y \leq \underline{|x| + |y|}$ Si $(x+y) < 0 \Rightarrow \underline{|x+y|} = -x - y \leq \underline{|x| + |y|}$

▨

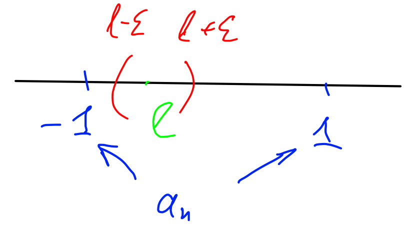
Ex $a_n = (-1)^n$ est divergente.

Par absurde: Supposons qu'il existe la limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{4} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |a_n - \ell| \leq \frac{1}{4}$

$a_{2k} = 1$, $a_{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall\, 2k \geq n_0,\ 2k+1 \geq n_0$, on a

$$|a_{2k} - \ell| = |1-\ell| \leq \frac{1}{4} \quad ; \quad |a_{2k+1} - \ell| = |-1-\ell| \leq \frac{1}{4}.$$



$$2 = |\ell - 1 + (-1-\ell)| \leq |\ell - 1| + |-1-\ell| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ absurde.

$\Rightarrow a_n = (-1)^n$ est divergente. $\blacksquare$

Proposition Toute suite convergente est bornée.

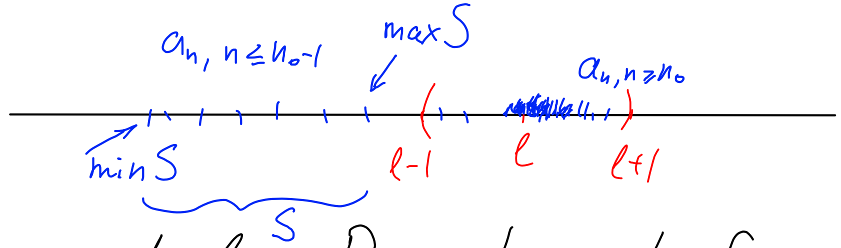
Dém: Soit $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Soit $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0,\ |a_n - \ell| \leq 1$

$\Leftrightarrow \ell - 1 \leq a_n \leq \ell + 1$

Soit $S = \{a_0, a_1, \ldots a_{n_0-1}\}$ ensemble fini $\Rightarrow \exists \max S, \min S$

$\Rightarrow$ la suite (a_n) est bornée par $\min(\min S, \ell-1)$ et $\max(\max S, \ell+1)$.

Ex



$\Rightarrow$ dans ce cas, $\min S \leq a_n \leq \ell + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

La réciproque de la Proposition est fausse: $a_n = (-1)^n$ est bornée, mais divergente.

§2.3. Opérations algébriques sur les limites.

Proposition. Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$; $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Alors:

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & \lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b \\
(2) & \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b \\
(3) & \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \quad \text{si } \lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0
\end{array}\right\} \quad \text{voir [DZ §2.33]}$$

Dém: (1) Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq m_0 \Rightarrow |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall n \geq \max(n_0, m_0) \Rightarrow |a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \overset{\triangle}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$\blacksquare$

Remarques $\boxed{1}$ $(a_n + b_n)$ convergente $\Rightarrow$ Soit (a_n) et (b_n) convergentes, soit (a_n) et (b_n) divergentes.

Dém: Si (b_n) convergente $\Rightarrow$ par (1) $\Rightarrow a_n = (a_n + b_n) - b_n$ est convergente

Ex $a_n = n$, $b_n = -n$ $\Rightarrow a_n + b_n = n - n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n + b_n)$ est convergente $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

divergentes

$\boxed{2}$ Soit (a_n) et (b_n) telles que $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Alors soit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, soit les suites (a_n) et (b_n) sont divergentes (Exercice, suivre $\boxed{1}$

$\boxed{3}$ Linéairité de la limite : si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Alors $\forall p, q \in \mathbb{R}$ on a:

$$\lim_{n\to\infty}(p a_n + q b_n) = pa + qb$$ (Idée: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$, $\underset{\text{fixé}}{p>0} \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{p} \leq a_n - a \leq \frac{\varepsilon}{p} \Rightarrow -\varepsilon \leq pa_n - pa \leq \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p\cdot a_n = pa.$)

$\boxed{4}$ $(a_n \cdot b_n)$ convergente.

$\Rightarrow$ Ex : $\underbrace{a_n = (-1)^n, \quad b_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}}_{\text{divergentes}}$; $a_n \cdot b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ convergente

$\Rightarrow$ Si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$. Alors $a_n = \frac{a_n \cdot b_n}{b_n}$ est convergente. par Proposition (3)

$\Rightarrow$ Si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Alors (a_n) peut être convergente ou divergente.

<u>Ex</u> $\underbrace{a_n = (n+1)}_{\text{divergente}}$, $b_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0}_{\lim = 0.}$; $a_n \cdot b_n = 1 \Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 1}_{\text{convergente}}$

$\boxed{5}$ Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ est divergente.

<u>Dém</u>: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ $|a_n - 0| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |a_n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| \geq \frac{1}{\varepsilon}$

Soit $M > 0$ et $\varepsilon = \frac{1}{M}$ $\Rightarrow \forall n \geq n_0$, $\left|\frac{1}{a_n}\right| \geq \frac{1}{\varepsilon} = M \Rightarrow \left(\frac{1}{a_n}\right)$ n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente. ▨

Proposition Quotient de deux suites polynomiales

$$x_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0 \quad , a_i \in \mathbb{R} \, , \, a_p \neq 0 \qquad p, q \in \mathbb{N}^*$$

$$y_n = b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots + b_1 n + b_0 \quad , b_i \in \mathbb{R} \, , \, b_q \neq 0 \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Alors $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \begin{cases} 0, & \text{si } p < q \\ \frac{a_p}{b_q}, & \text{si } p = q \\ \text{divergente}, & \text{si } p > q \end{cases}$

Dém.

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0} = \frac{n^p}{n^q} \frac{\overbrace{\left(a_p + a_{p-1}\frac{1}{n} + \dots + \frac{a_0}{n^p}\right)}^{u_n}}{\underbrace{\left(b_q + b_{q-1}\frac{1}{n} + \dots + \frac{b_0}{n^q}\right)}_{v_n}} = \frac{n^p}{n^q} \frac{u_n}{v_n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a_p + a_{p-1}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + \dots + a_0 \underbrace{\frac{1}{n^p}}_{\to 0}}{b_q + b_{q-1}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + \dots + b_0 \underbrace{\frac{1}{n^q}}_{\to 0}} = \frac{a_p}{b_q} \neq 0.$$

Si $p < q \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^q} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{n^{q-p}}_{\to 0}} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^p}{n^q}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{u_n}{v_n}}_{\to \frac{a_p}{b_q}} = 0.$

Si $p = q \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^q} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^p}{n^q}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{u_n}{v_n}}_{\to \frac{a_p}{b_q}} = \frac{a_p}{b_q}.$

Si $p > q \Rightarrow \overbrace{n^{p-q}}^{\to 0}$ est divergente puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p-q}} = 0$

$\Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \underbrace{n^{p-q}}_{div} \cdot \underbrace{\frac{u_n}{v_n}}_{\to \frac{a_p}{b_q}}$ est divergente $\blacksquare$

Ex

$$\lim_{n\to\infty} \frac{100n^2+5n+12}{3n^3+2n+7} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \frac{100+\overbrace{\frac{5}{n}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{12}{n^2}}^{\to 0}}{3+\underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{7}{n^3}}_{\to 0}} = 0$$

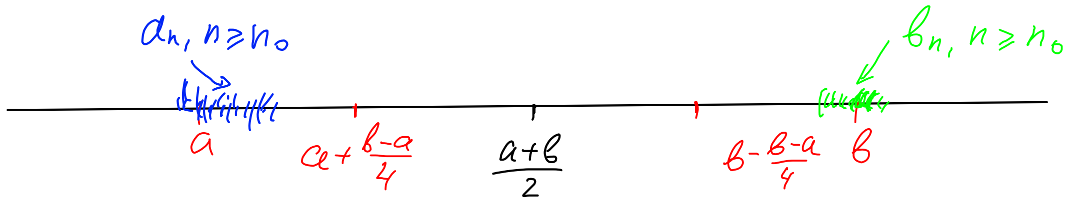
§ 2.4 Relation d'ordre.

Proposition. Soit (a_n) et (b_n) deux suites convergentes, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Supposons que $\exists m_0 \in \mathbb{N}: \forall n \ge m_0,\ a_n \ge b_n$. Alors $a \ge b$.

Dém: par contraposée. Supposons que $b > a$. Soit $\varepsilon = \frac{b-a}{4}$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}:\ a-\varepsilon \le a_n \le a+\varepsilon$ et $b-\varepsilon \le b_n \le b+\varepsilon \quad \forall n \ge n_0$.



$\forall n \ge n_0 \Rightarrow\ \underline{a_n} \le a+\varepsilon = a+\frac{b-a}{4} < a+\frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} = b-\frac{b-a}{2} < b-\frac{b-a}{4} = b-\varepsilon \le \underline{b_n} \quad \forall n \ge n_0.$

$\Rightarrow \forall n \ge n_0,\ a_n < b_n$. Mais on a la condition $\forall n \ge m_0,\ a_n \ge b_n$.

$\Rightarrow \forall n \ge \max(n_0, m_0)$ on a $(a_n < b_n)$ et $(a_n \ge b_n)$, contradiction. $\blacksquare$

Théorème de deux gendarmes pour les suites.

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ trois suites telles que

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$.

(2) $\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n$

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

(a_n) (b_n) (c_n)

ℓ

Dém: Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$, on a:

$$-\varepsilon \leq a_n - \ell \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad -\varepsilon \leq c_n - \ell \leq \varepsilon.$$

$$\forall n \geq k \quad \Rightarrow a_n - \ell \leq b_n - \ell \leq c_n - \ell$$

$\forall n \geq \max(n_0, k) \Rightarrow$

$$-\varepsilon \leq a_n - \ell \leq b_n - \ell \leq c_n - \ell \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad -\varepsilon \leq b_n - \ell \leq \varepsilon \Leftrightarrow |b_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

$$\overset{(\text{déf})}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} b_n = \ell.$$

$\square$