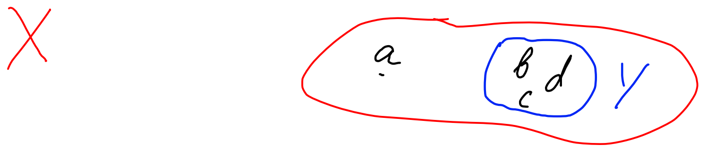
Chapitre 1. Nombres réels.

§1.1. Ensembles.

Ensemble = „ Collection des objets définis et distincts" G. Cantor



$X = \{a, b, c, d\}$ $\qquad\qquad$ $Y = \{b, c, d\}$

Y est un sous-ensemble de X.

Notations:

$b \in Y \longleftrightarrow$ b appartient à Y

$a \notin Y \longleftrightarrow$ a n'appartient pas à Y

$\forall \longleftrightarrow$ pour tout

$\exists \longleftrightarrow$ il existe

$Y \subset X \longleftrightarrow$ Y est un sous-ensemble de X

$$Y \subset X \overset{\text{déf}}{\iff} \forall b \in Y \Rightarrow b \in X$$

$$Y \not\subset X \iff \exists b \in Y \text{ t.q. } b \notin X$$

$$Y = X \overset{\text{déf}}{\iff} Y \subset X \text{ et } X \subset Y.$$

$$Y \neq X \iff Y \not\subset X \quad \text{ou} \quad X \not\subset Y.$$

$\emptyset$ ensemble vide $\quad \emptyset = \{ \ \} \Rightarrow \emptyset \subset X \quad \forall X$

$$X \subset X \quad \forall X.$$

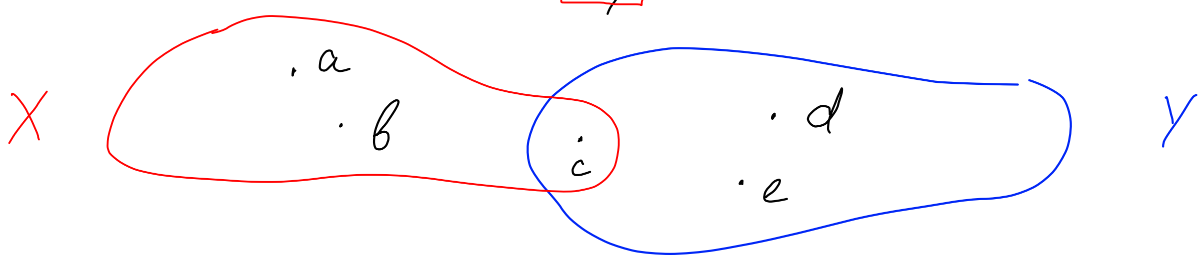
Supposons que les sous-ensembles considérés sont sous-ensembles d'un ensemble universelle $\mathcal{U}$.

Opérations ensemblistes.

Soient $X, Y, Z \subset \mathcal{U}$

$\boxed{1}$ Réunion : $X \cup Y \overset{\text{déf}}{=} \{ a \in \mathcal{U} \underset{\text{t.q.}}{:} a \in X \text{ ou } a \in Y \}$

Ex



$$X \cup Y = \{a, b, c, d, e\}.$$

On a : $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ $\quad X, Y, Z \subset \mathcal{U}$

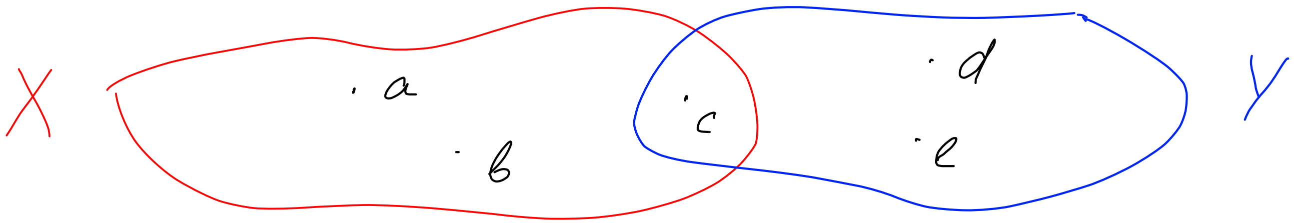
$$X \cup Y = Y \cup X$$

$$X \cup \emptyset = X$$

$$X \cup X = X$$

$\boxed{2}$ Intersection $\quad X \cap Y = \{a \in \mathcal{U} : a \in X \text{ \underline{et} } a \in Y\}$

Ex



$$X \cap Y = \{c\}$$

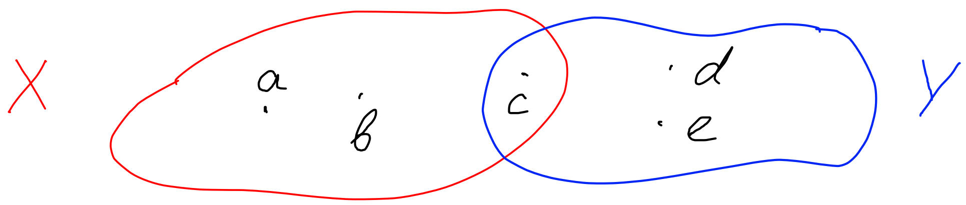
On a : $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$ $\quad X, Y, Z \subset \mathcal{U}$

$$X \cap Y = Y \cap X$$

$$X \cap \emptyset = \emptyset$$

$$X \cap X = X.$$

$\boxed{3}$ **Différence** : $X \setminus Y = \{a \in \mathcal{U} : a \in X \text{ et } a \notin Y\}$



$$X \setminus Y = \{a, b\} \qquad Y \setminus X = \{d, e\}$$

En général
$$X \setminus (Y \setminus Z) \neq (X \setminus Y) \setminus Z$$

Ex $\overbrace{X \setminus \underbrace{(\emptyset \setminus X)}_{\emptyset}}^{X} \neq \overbrace{\underbrace{(X \setminus \emptyset)}_{X} \setminus X}^{\emptyset}$

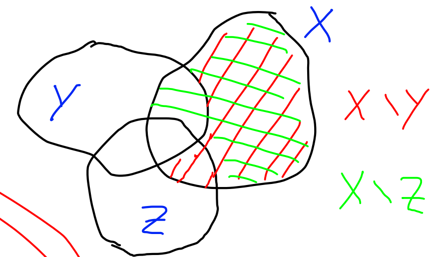
$$X \setminus Y \neq Y \setminus X$$

$$X \setminus \emptyset = X$$
$$X \setminus X = \emptyset.$$

Proposition $X, Y, Z \subset \mathcal{U}$ alors $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$

Dém : À gauche : $\{a \in \mathcal{U} : a \in X \text{ et } a \notin (Y \cap Z)\} =$

$= \{a \in \mathcal{U} : a \in X \text{ et } (a \notin Y, \text{ ou } a \notin Z)\}$



À droite : $\{a \in \mathcal{U} : a \in (X \setminus Y), \text{ ou } a \in (X \setminus Z)\} =$

$= \{a \in \mathcal{U} : (a \in X \text{ et } a \notin Y), \text{ ou } (a \in X \text{ et } a \notin Z)\} =$

$= \{a \in \mathcal{U} : a \in X \ (a \notin Y \text{ ou } a \notin Z)\}$

∎

§ 1.2 Nombres naturels, rationnels, réels.

Les nombres naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

avec „+" „·" Alors on dit que $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{N}$

$\iff \exists c \in \mathbb{N} : a + c = b$

Propriété de bon ordre : Tout sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$ contient un plus petit élément.

Les entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ possède un élément réciproque par rapport à l'addition $\forall x \in \mathbb{Z}$.

$$\forall x \in \mathbb{Z} \ \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0.$$

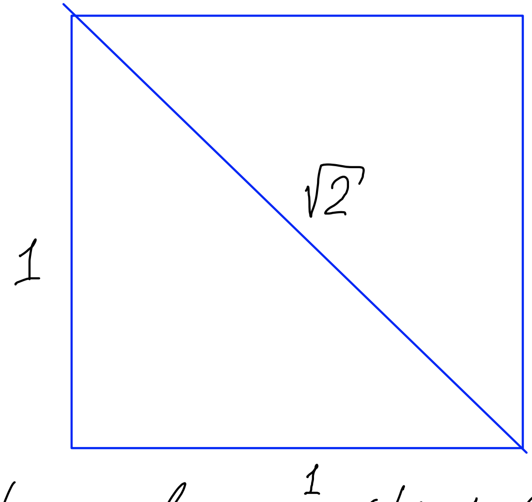
Notation : $y = -x$.

Les nombres rationnels. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} \Big/ \left(\frac{p}{q} = \frac{t}{s} \text{ si } p \cdot s = t \cdot q \right)$

$$\forall x \neq 0, x \in \mathbb{Q} \ \exists y \in \mathbb{Q} \overset{\text{tel que}}{:} x \cdot y = 1.$$

Notation : $y = \frac{1}{x}$.

§ 1.3 Nombres réels.



Proposition $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\qquad (x : x^2 = 2)$

Dém: par absurde.

Supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ $\quad p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0.$

tels que q est le plus petit possible (q existe par la propriété de bon ordre).

ex. $\left(\dfrac{18}{15} = \dfrac{6}{5} \Rightarrow p = 6,\ q = 5\right).$

Alors $2 = \dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ est pair $\Rightarrow p$ est pair

$\left(\text{Si } \underset{k \in \mathbb{Z}}{p = 2k+1} \Rightarrow p^2 = 4k^2 + 4k + 1 \text{ impair}\right) \Rightarrow p = 2m,\ m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2q^2 = (2m)^2 \Rightarrow 2q^2 = 4m^2 \Rightarrow$ par le même argument

$q^2 = 2m^2$ $\qquad$ q et pair

$\Rightarrow q = 2n,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{p}{q} = \dfrac{2m}{2n} = \dfrac{m}{n}$ absurde, puisque $0 < n < q$

contredit le choix de q le plus petit possible, $q > 0$.

$\blacksquare$

Définition axiomatique de $\mathbb{R}$.

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}$ est un corps : ensemble avec $+, \cdot$ satisfaisant les axiomes suivants

Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a :

(·) $(x+y)+z = x+(y+z)$

(·) $x+y = y+x$

(·) $\exists\, 0 \in \mathbb{R} : x+0 = x$

(·) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x+y=0$

(·) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(·) $x \cdot y = y \cdot x$

(·) $\exists\, 1 \in \mathbb{R} : 1 \neq 0,\ x \cdot 1 = x$

(·) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$

(·) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}$ est un corps ordonné : $\exists$ une relation d'ordre $\leq$ tel que pour tout couple d'éléments $x, y \in \mathbb{R}$, on a

(·) $x \leq y$ ou $y \leq x$. Si $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$

pour tout triple d'éléments $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a

(·) $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(·) Si $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$

(·) Si $x \geq 0$ et $y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$.

Notation:

Si $x \leq y$ et $x \neq y \overset{\text{déf}}{\Rightarrow} x < y$

Si $x \geq y$ et $x \neq y \overset{\text{déf}}{\Rightarrow} x > y$

$\boxed{3}$ Axiome de la borne inférieure.

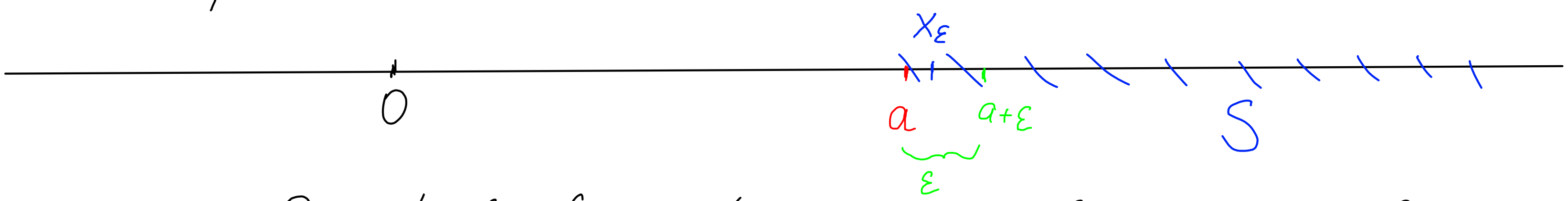
Pour tout sous-ensemble S non-vide de $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $S \subset \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

il existe un nombre $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ tel que

(1) $a \leq x \quad \forall x \in S$

(2) Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x_\varepsilon \in S$

tel que $x_\varepsilon - a \leq \varepsilon \qquad (\Longleftrightarrow a + \varepsilon \geq x_\varepsilon)$.



On dit que $a \in \mathbb{R}$ est l'infimum (= la borne inférieure) de l'ensemble S

Alors $\mathbb{R}$ est un corps commutatif, ordonné et complet

Borne inférieure et borne supérieure.

Déf Soit $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$. On dit que $b \in \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}$) est un majorant (un minorant) de S si $\forall x \in S$ on a $x \leq b$ ($x \geq a$).

Si S admet un majorant (un minorant), alors S est majoré (minoré).

Si S est majoré et minoré, alors S est borné.

Déf Soit S un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$. Un nombre réel b (resp a) vérifiant les propriétés suivantes:

(·) $\forall x \in S$, $x \leq b$ $(x \geq a)$

(·) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, il existe un élément $x_\varepsilon \in S$ tel que $b - x_\varepsilon \leq \varepsilon$ (resp $x_\varepsilon - a \leq \varepsilon$)

est le $\left\{ \begin{array}{ll} \text{supremum} & \text{l'infimum} \\ b = \sup S & a = \inf S \end{array} \right\}$ de S

borne supérieure de S. Borne inférieure de S

Ex. $S = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*} = \{1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Clairement $0 < S \leq 1$

(1) $1 = \sup S$

(1) $1 \geq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ Vrai

(2) Soit $\varepsilon > 0$ Trouver $x_\varepsilon \in S$: $1 - x_\varepsilon \leq \varepsilon$.

On peut prendre $x_\varepsilon = 1$ pour tout choix de $\varepsilon > 0$. Vrai.

(2) $0 = \inf S$.

(1) $0 \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ Vrai

(2) Soit $\varepsilon > 0$ Trouver $x_\varepsilon \in S$: $x_\varepsilon - 0 \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ trouver $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n} - 0 \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

On peut prendre $\underbrace{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]}_{\text{partie entière}} + 1 = n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon \geq \frac{1}{n} \in S$.

$\Rightarrow x_\varepsilon = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1} \in S$ Vrai.

$\blacksquare$