Chapitre 2. Suites des nombres réels.

§ 2.1 Exemples des suites. Raisonnement par récurrence.

Déf Une suite de nombres réels est une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie pour tout nombre naturel (pour tout $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$).

Notation : (a_n) - suite $\quad (a_n)_{n\geq 0} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\} = \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$
ensemble ordonné

Ex $\boxed{1}$ $\quad a_n = n \quad = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\boxed{2}$ $\quad a_n = \frac{1}{n+1} \quad = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$

$\boxed{3}$ $\quad a_n = (-1)^n \quad = \{1, -1, 1, -1, \ldots\}$

$\boxed{4}$ $\quad a_n = \frac{1}{p_{n+1}}$ où p_{n+1} est le $(n+1)$-ième nombre premier $= \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11} \ldots\}$

$\boxed{5}$ Par récurrence : $f_0 = f_1 = 1$; $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Les nombres de Fibonacci.
$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots \ldots\}$

$\boxed{6}$ Suite arithmétique $a_n = a \cdot n + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$\boxed{7}$ Suite géométrique $a_n = a_0 \cdot r^n$, $a_0, r \in \mathbb{R}$: $a_0 \neq 0$, $r \neq 0$, $r \neq \pm 1$

Déf Une suite est majorée (minorée) s'il existe un nombre réel M (m) tel que $a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ($a_n \geq m$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

majorant — minorant

On dit que la suite (a_n) est bornée si elle est minorée et majorée

Remarque (a_n) bornée $\Longleftrightarrow$ $\exists\, M > 0$ tel que $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Déf
$$|x| = x \ , \quad \text{si } x \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
$$|x| = -x \ , \quad \text{si } x < 0$$

Dém: (a_n) bornée $\Rightarrow$ $\exists\, A, B \in \mathbb{R}$: $A \leq a_n \leq B$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ $M = \max(|A|, |B|)$.

$\Longrightarrow$ $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si $\exists\, M > 0$: $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $-M \leq a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ (a_n) est bornée.

Déf Une suite (a_n) est croissante (strictement croissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} > a_n$).

Une suite (a_n) est décroissante (strictement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+1} \leq a_n$ ($a_{n+1} < a_n$).

Une suite est dite (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Ex $\boxed{2}$ $(a_n) = \left(\frac{1}{n+1}\right)$ strictement décroissante : $a_{n+1} = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

bornée : $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{3}$ $a_n = (-1)^n$ pas monotone ; bornée : $-1 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{1}$ $a_n = n$ strictement croissante ; $a_{n+1} = n+1 > n = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Elle n'est pas majorée : les nombres naturels ne sont pas majorés

$\forall S > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : \ n > S.$

$\boxed{6}$ $a_n = a \cdot n + b$ strictement croissante si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$

$a_{n+1} - a_n = a(n+1) + b - (an + b) = a.$

Si $a > 0 \Rightarrow \forall S > 0 \ \forall b \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} : \ a \cdot n > S - b \Leftrightarrow an + b > S$

$\Rightarrow$ par l'Archimède (a_n) n'est pas majorée.

Si $a < 0 \Rightarrow$ de manière similaire (a_n) n'est pas minorée

$\boxed{5}$ $f_0 = f_1 = 1$; $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ $\Rightarrow$ croissante :

$f_{n+2} - f_{n+1} = f_n > 0 \quad n \in \mathbb{N}.$

(f_n) n'est pas majorée. On va le démontrer par récurrence.

Raisonnement par récurrence. Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n, tel que (1) $P(n_0)$ est vraie (l'initialisation), et (2) pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$ (l'hérédité) Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque. Généralisation : $\left.\begin{array}{l}(1)\ P(n_0), P(n_0+1), \ldots P(n_0+k) \text{ sont vraies} \\ (2)\ \{P(n), P(n+1) \ldots P(n+k)\} \Rightarrow P(n+k+1) \quad \forall n \geq n_0.\end{array}\right\} \Rightarrow P(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$ naturel.

Proposition : $\left(f_n \geq n \quad \forall n \geq 1.\right) = P(n)$; (f_n) est la suite de Fibonacci

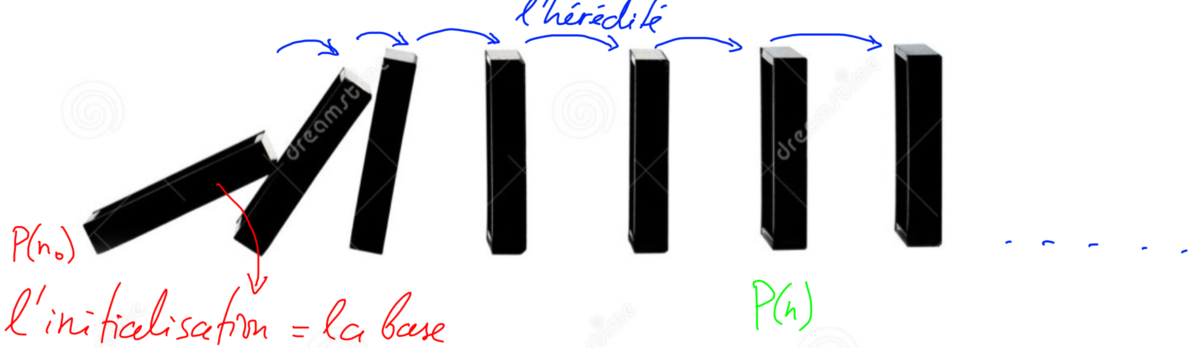
(1) Initialisation :
$$f_1 = 1 \geq 1 \quad \text{vrai}$$
$$f_2 = 2 \geq 2 \quad \text{vrai}$$

(2) Hérédité : Supposons que $f_n \geq n$ et $f_{n+1} \geq n+1$ ($\overset{n \geq 1}{n}$ fixé). Il nous faut démontrer que $f_{n+2} \geq n+2$.
$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \underset{\text{la supposition}}{\geq} (n+1) + n = 2n+1 \geq n+2$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall n \geq 1 \ - \text{vrai}$$

$\Rightarrow$ par récurrence on obtient $f_n \geq n \quad \forall n \geq 1$.

Alors $\forall S > 0 . \ \exists n > S \Rightarrow f_n > n > S \Rightarrow (f_n)$ n'est pas majorée. $\blacksquare$

Démonstration par récurrence:



Il est important à démontrer les <u>deux</u> parties de l'argument:
<u>l'initialisation</u> et <u>l'hérédité</u>.

<u>Contre-exemple</u> Hypothèse : Tout nombre naturel est égal au nombre naturel suivant

Hérédité : Supposont que $P(n)$ soit vraie : $n = n+1$

Alors en ajoutant 1 à l'égalité on obtient $n+1 = n+2 \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

Faute: on a oublié l'initialisation ; mais $0 \neq 1$ (axiome de $\mathbb{R}$)

<u>Ex</u> Trouver la somme de n premiers nombres naturels impairs.

$S_1 = 1$

$S_2 = 1+3 = 4$

$S_3 = 1+3+5 = 9$

$S_4 = 1+3+5+7 = 16$

Hypothèse. $S_n = 1+3+\dots(2n-1) = n^2$

Démonstration par récurrence: (1) Initialisation: déjà démontrée pour $n = 1, 2, 3, 4$.

(2) Hérédité. Supposons $S_n = n^2$. Il faut en déduire que $S_{n+1} = (n+1)^2$

$$S_{n+1} = \underbrace{1+3+5+\ldots(2n-1)}_{=S_n} + (2n+1) = S_n + (2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

la supposition

$\Rightarrow$ par récurrence, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ ▨

Contre-exemple Le paradoxe des chevaux.

Hypothèse „Tous les chevaux sont de la même couleur (race)"
(dans n'importe quel troupeau de $n \geq 1$ chevaux)

„Dém:" (1) Initialisation:

Dans un troupeau d'un cheval
tous les chevaux sont évidemment
de la même couleur.
$\Rightarrow$ P(1) est vraie.

(2) Hérédité : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ On suppose que tout ensemble de n chevaux contient seulement des chevaux de la même couleur.

Soit $\{c_1 \dots c_{n+1}\}$ un ensemble arbitraire de $(n+1)$ chevaux.

Alors $\{c_1 \dots c_n\}$ sont de la même couleur

la supposition

$\{c_2 \dots c_{n+1}\}$ sont de la même couleur $\Rightarrow$ c_1 et c_{n+1} sont de la même couleur que les autres

$\Rightarrow \{c_1 \dots c_{n+1}\}$ sont de la même couleur.

Ex : Supposons que $P(2)$ soit vraie. Considérons un ensemble de 3 chevaux.

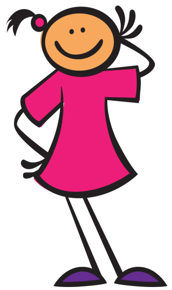
$\{\overbrace{c_1 \; c_2}^{P(2)} \; c_3\}$ ← même couleur

$\{c_1 \; \underbrace{c_2 \; c_3}_{P(2)}\}$ ← même couleur

$\Rightarrow$ couleur(c_1) = couleur(c_3)

$\Rightarrow \{c_1, c_2, c_3\}$ sont de la même couleur.

" $\boxed{//}$ "



La faute : L'hérédité $P(n) \rightarrow P(n+1)$ ne marche que pour $n \geq 2$. Elle ne marche pas pour $n = 1$.

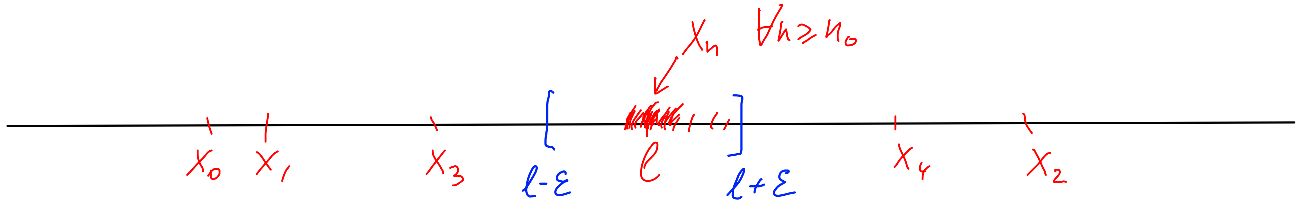
Les dominos : $\boxed{1}$ l'initialisation $\quad \boxed{1} \; \boxed{2} \; \boxed{3} \; \boxed{4} \; \dots$ l'hérédité.

§ 2.2 Limite d'une suite.

Déf On dit que la suite (x_n) est convergente et admet pour limite le nombre réel $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Notation: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \ell$.

Remarque $|x_n - \ell| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x_n - \ell \leq \varepsilon \iff \ell - \varepsilon \leq x_n \leq \ell + \varepsilon$. $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$



Quel que soit $\varepsilon > 0$, si on considère l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ autour de ℓ, alors tous les termes de (x_n) sauf peut-être un nombre fini d'entre eux se trouvent dans cet intervalle.

Déf Une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Ex La suite (a_n), $a_n = \frac{1}{n+1}$ est convergente. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Dém: Soit $\varepsilon > 0$ Il faut démontrer l'existence (ou trouver) $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ $|a_n - 0| \leq \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| \leq \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$

$\frac{1}{n+1} > 0$

$\iff \underset{>0}{\frac{1}{n+1}} \leq \underset{>0}{\varepsilon} \iff \frac{1}{\varepsilon} \leq n+1$

$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ par déf.

Si on prend $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ $\Rightarrow$ $n_0 + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$

partie entière

$\Rightarrow$ Si $n \geq n_0 \Rightarrow n+1 \geq n_0 + 1 \geq \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow$ On a trouvé $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$,

$$\underset{\displaystyle |a_n - \ell| \leq \varepsilon}{\underset{\|}{\left|\frac{1}{n+1} - 0\right|}} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ par la définition $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

$\square$