Rappel: Théorème Bolzano-Weierstrass.

Il existe une sous-suite convergente dans toute suite bornée

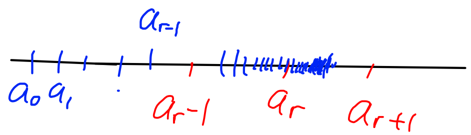
$$(a_n): \; m \leq (a_n) \leq M \;\Rightarrow\; \exists \underbrace{(a_{n_k})}_{\text{sous-suite}} \subset (a_n) \;:\; \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Déf La suite (a_n) est une suite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ et $m \geq n_0$, $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$.

Proposition Une suite (a_n) est une suite de Cauchy $\overset{\text{si et seulement si}}{\Longleftrightarrow}$ elle est convergente.

Dém: $\Rightarrow$) (a_n) est une suite de Cauchy $\Rightarrow$ (a_n) est bornée:

$\exists r \in \mathbb{N} : |a_n - a_r| \leq 1 \;\; \forall n \geq r \;\Rightarrow\; |a_n| \leq \max\{|a_r|+1, |a_0|, |a_1| \ldots |a_{r-1}|\}$



$\Rightarrow$ Par BW $\exists$ une sous-suite convergente $\cdot \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell$

On a: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m_0 \in \mathbb{N}, j_0 \in \mathbb{N}$ tels que

(1) $|a_p - a_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall p, q \geq m_0$ puisque (a_n) est une suite de Cauchy

(2) $|a_{n_j} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall j \geq j_0$ puisque (a_{n_k}) converge vers ℓ.

Soit $k_0 = \max(m_0, j_0) \Rightarrow \forall n \geq k_0 \Rightarrow n_{k_0} \geq k_0 \geq m_0$

$$\Rightarrow |a_n - \ell| = |a_n - a_{n_{k_0}} + a_{n_{k_0}} - \ell| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_{k_0}}|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_{k_0}} - \ell|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

$\Leftarrow)$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \ |a_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$

$\Rightarrow \forall p,q \geq n_0$ on a: $|a_p - a_q| \overset{\Delta}{\leq} |a_p - \ell| + |\ell - a_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow$ (a_n) est une suite de Cauchy $\blacksquare$

Remarque $\lim_{n\to\infty} (a_{n+k} - a_n) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ n'implique pas que (a_n) est une suite de Cauchy

Ex $a_n = \sqrt{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_{n+k} - a_n) = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n}} + 1\right)} = 0$

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{k}{n}} \leq 1 + \frac{1}{2}\frac{k}{n}, \quad 0 < \frac{k}{n} < 1$$

$$\downarrow \qquad \downarrow_{n\to\infty}$$

$$1 \qquad 1$$

(Série 5)

Mais $a_n = \sqrt{n}$ diverge

$\Rightarrow$ (a_n) n'est pas une suite de Cauchy.

Explication. Soit $k \in \mathbb{N}$. $\lim_{n\to\infty} (a_{n+k} - a_n) = 0$ implique $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $|a_{n+k} - a_n| \leq \varepsilon$ (k est fixé). Ici n_0 peut dépendre de k. Dans l'exemple $a_n = \sqrt{n}$, si on augmente k, on obtient n_0 toujours plus grands pour un ε donné. Mais dans la propriété de Cauchy $n_0 \in \mathbb{N}$ est le même pour toute différence $k = m-n$ d'indices.

Donc la propriété de Cauchy est plus forte que $\lim_{n\to\infty} (a_{n+k} - a_n) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

§29. Limite supérieure et limite inférieure d'une suite bornée.

Déf Soit (x_n) une suite bornée.

On définit la suite $y_n = \sup \{x_k, k \geq n\}$

la suite $z_n = \inf \{x_k, k \geq n\}$.

Ex 1 $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 1$ bornée: $-2 \leq (x_n) \leq 2$

$$x_n = \left(-2,\ 1+\frac{1}{4},\ -1-\frac{1}{9},\ 1+\frac{1}{16},\ -1-\frac{1}{25},\ \dots\right)$$

$$y_n = \left(1+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{16},\ 1+\frac{1}{16},\ \dots\ 1+\frac{1}{\left(n+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right)^2}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 1$$

$$z_n = \left(-2,\ -1-\frac{1}{9},\ -1-\frac{1}{9},\ -1-\frac{1}{25}\ \dots\ -1-\frac{1}{\left(n+\frac{1+(-1)^n}{2}\right)^2}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = -1.$$

En général, $z_n \leq x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$(y_n) \downarrow$ suite décroissante et bornée $\Rightarrow$ $\exists \lim y_n \overset{\text{déf}}{=} \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$

$(z_n) \uparrow$ suite croissante et bornée $\Rightarrow$ $\exists \lim z_n \overset{\text{déf}}{=} \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$

Remarque Si $\lim y_n = \lim z_n = \ell \Rightarrow$ par les 2 gendarmes, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$.

$$\begin{array}{ccccc} z_n & \leq & x_n & \leq & y_n \\ \downarrow & & & & \downarrow {\scriptstyle n\to\infty} \\ \ell & & & & \ell \end{array} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = \ell.$$

Proposition Une suite bornée (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ $\iff$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n \qquad \text{(Voir DZ)}.$$

Ex 1 $x_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 1$

On a calculé $\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} x_n = -1$ $\Rightarrow$ la suite (x_n) est divergente.

Ex 2 $x_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Trouver y_n, z_n, $\limsup x_n$, $\liminf x_n$.

$$y_n = \sup\{x_k,\ k \geq n\} = (1, 1, 1, 1, \ldots) \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} x_n = 1$$

$$z_n = \inf\{x_k,\ k \geq n\} = \left(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \ldots\right) = x_n \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = 1$$

(x_n) est convergente, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Chapitre 3. Séries numériques.

§3.1 Definition et exemples.

Déf La série de terme général a_n est un couple
(1) la suite (a_n)
(2) la suite des sommes partielles $S_n \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Notation: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ – Série de terme général a_k.
a_n n'ième terme ; $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ – n'ième somme partielle.

Déf Serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est convergente $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ la suite (S_n) des sommes partielles est convergente.

la limite $\lim_{n\to\infty} S_n = \ell$ s'appelle la somme de la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

On écrit
$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell}$$

Si (S_n) est divergente, alors on dit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est divergente.
En particulier, si $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, on écrit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \pm\infty$.

Ex 0 $\sum_{n=0}^{\infty} n$: $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$ n'est pas bornée ; $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} n = \infty$.

La série est divergente.

Ex 1 Série géométrique

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$; $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right) \overset{x=\frac{1}{2}}{=} \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

$\frac{1}{2^{n+1}} \to 0$ suite géométrique, $\frac{1}{2}<1$

Rappel: $(1+x+x^2+\ldots+x^n)(1-x) = 1-x^{n+1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $\forall x \neq 1$

$\Rightarrow$ par déf $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$.

D'une même manière on obtient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad |r|<1}$$

Exercice. $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ est divergente, si $|r| \geq 1$.

Si $r>1$ ou $r<-1$ $\Rightarrow$ $S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente.

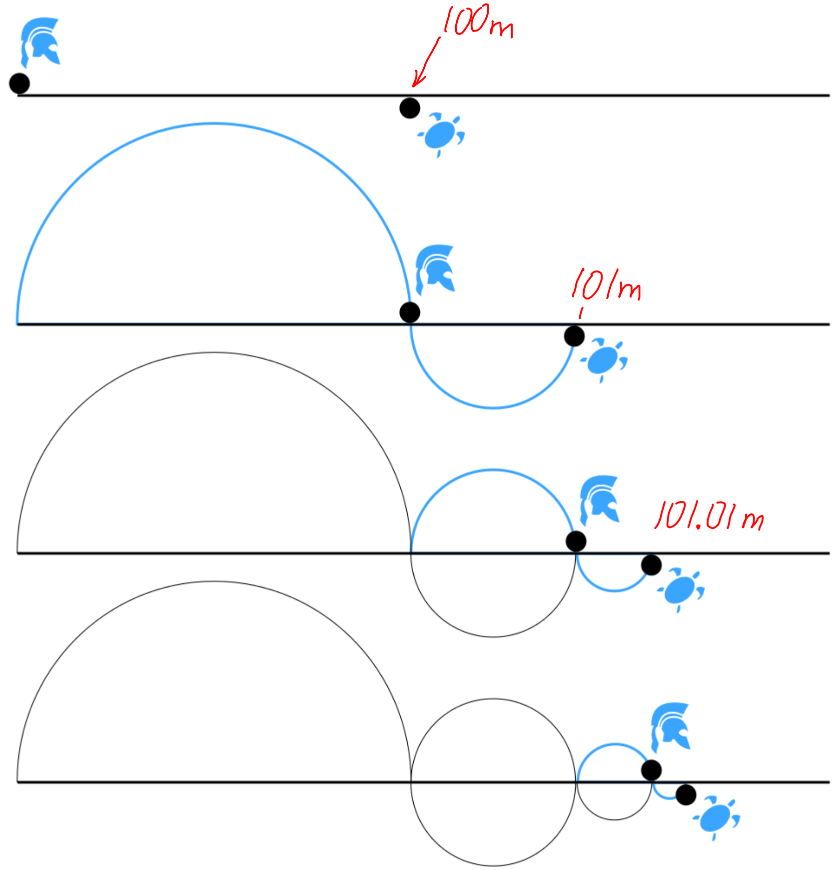
Si $r=1$ $\Rightarrow$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$; $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

Si $r=-1$ $\Rightarrow$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ pair} \\ 0, & n \text{ impair} \end{cases}$ $\Rightarrow$ (S_n) est divergente.

Le paradoxe d'Achille et de la tortue (Zénon, ~450 av J.C.)

Achille. $10 \frac{m}{s}$

la tortue: $0.1 \frac{m}{s}$



Zénon: Achille ne pourra jamais rattraper la tortue s'il la accorde une avance de 100m (par exemple)

Achille → + 100m, la tortue → + 1 m

Achille → + 1 m, la tortue → + 1 cm, ...

Ainsi, chaque fois la tortue se retrouve encore plus loin qu'Achille

Considérons le temps qu'il faudrait à Achille pour rattraper la tortue:

$$T = \frac{100m}{10\frac{m}{s}} + \frac{1m}{10\frac{m}{s}} + \frac{0.01m}{10\frac{m}{s}} + \dots = 10 + \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} + \dots = 10\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots\right) =$$

$$= 10 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k = 10 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = 10 \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{1000}{99} s.$$

$\Rightarrow$ Achille va rattraper la tortue dans $\frac{1000}{99}$ secondes.

Conclusion D'après Zénon, l'impossibilité pour Achille de rattraper la tortue vient du fait qu'il lui faudrait courir un nombre infini d'intervalles. Mais d'après notre calcul, une somme infinie d'intervalles (de temps ou de distance) de décroissance géométrique converge vers une somme finie.

Ex 2 **Série harmonique.**

sous-suite

$(S_2, \; S_4, \; S_6 \; \ldots \;)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Cette série est divergente $\qquad (S_2, S_4 \ldots \;) \subset (S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots \; \ldots \;)$

Supposons $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$; Soit $(S_{2n}) \subset (S_n)$ sous-suite

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \;, \quad S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} \qquad\qquad S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Mais : $\quad S_{2n} - S_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

$n \to \infty$: $\quad S_{2n} \to S$, $\quad S_n \to S$, $\quad 0 = S - S \qquad \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq \frac{1}{2} \quad \text{absurde}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ est divergente.}}$$