

MATHÉMATIQUES

*Traité de topologie générale*  
*en vue de ses applications*

PAUL JAFFARD

*Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon  
et au Conservatoire National des Arts et Métiers*



PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

# Sommaire

AVANT-PROPOS .....	XI
Ch. 0. PRÉLIMINAIRES .....	1
Définitions et notations employées .....	1
Ch. I. ENSEMBLES ORDONNÉS .....	5
<i>Ensembles préordonnés et ensembles ordonnés.</i> Ensembles préordonnés et ensembles ordonnés. Définitions diverses. Ensembles inductifs. Ensembles bien ordonnés. ....	5
<i>Ensembles totalement ordonnés.</i> Composantes convexes. Failles. Groupes totalement ordonnés. ....	11
Ch. II. RELATIONS. RECOUVREMENTS. ÉCARTS .....	19
<i>Relations.</i> Relation d'un ensemble vers un autre. Définitions diverses. Liaisons entre les relations et les recouvrements. ....	19
<i>Écarts et distances.</i> Écarts et distances. Exemples. Corps valués. Opérations sur les écarts. Boules. Liaisons entre un écart et une suite de relations. ....	23
Ch. III. FILTRES ET FAMILLES FILTRANTES .....	31
<i>Filtres, bases de filtres, familles filtrantes.</i> Définitions. Filtre engendré par une famille filtrante. Filtres compatibles. Base associée à une famille de bases. ....	31
<i>Ultrafiltres.</i> .....	38
<i>Morphismes de filtres.</i> Morphisme d'un filtre $\mathcal{C}$ vers un filtre $\mathcal{F}$ . Image directe et image réciproque d'un filtre. Famille filtrante sous-jacente. Extension d'un filtre .....	39

<i>Filtres à base dénombrable.</i> Suites et sous-suites. Filtres à base dénombrable. <i>s</i> -filtres. ....	46
Ch.IV. CATÉGORIES .....	49
<i>Notions élémentaires sur les catégories.</i> Catégories. Familles monomorphiques. Familles épimorphiques. Isomorphismes. Sections. Rétractions. Foncteurs. Morphismes fonctoriels. Catégorie duale. ..	49
<i>Transports de structures.</i> Catégories d'ensembles enrichis. Objet initial défini par une famille d'applications. Sous-objet. Plongement. Objet final défini par une famille d'applications. Objet quotient. Flèche quotient. Flèche harmonieuse. Décomposition canonique d'une flèche. ....	54
<i>Produits directs.</i> Produit direct d'une famille d'objets. Flèche diagonale. Produit direct d'une famille de flèches. Cas d'une catégorie d'objets enrichis. Produit direct de flèches. ....	62
<i>Sommes directes.</i> Somme directe d'une famille d'objets. Flèche codiagonale. Somme directe d'une famille de flèches. Somme directe d'une famille d'ensembles. Cas d'une catégorie d'objets enrichis. ....	70
Ch. V. ESPACES TOPOLOGIQUES .....	75
<i>Ensembles ouverts. Ensembles fermés.</i> Espaces topologiques. Ensembles ouverts. Espaces écartelés et espaces métriques. Base des ouverts. Espaces à base dénombrable. Espaces de Lindelöf. Ensembles fermés. Topologie $\text{Sup} (\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ . Ensembles ordonnés topologiques. Sous-espace. Espace associé à un filtre ouvert. ....	75
<i>Intérieur. Adhérence. Frontière.</i> Intérieur. Topologie définie par les intérieurs. Adhérence. Frontière. Ensembles denses. Espaces séparables. Intérieur et adhérence dans un sous-espace. ....	87
Ch. VI. VOISINAGES. CONVERGENCE .....	95
<i>Voisinages.</i> Filtres des voisinages. Premier axiome de dénombrabilité. Topologie définie par les filtres de voisinages. Topologie sur un groupe invariante par les translations. Voisinages dans la topologie $\mathcal{T} = \bigvee_{i \in I} \mathcal{T}_i$ . Point adhérent à un filtre. ....	95
<i>La convergence.</i> Convergence d'un filtre, d'une famille filtrante. Prolongement des inégalités. Cas d'un espace vérifiant le premier axiome de dénombrabilité. Cas d'un sous-espace. ....	101

<i>Groupes topologiques. Semi-groupes topologiques. Groupes topologiques. Sous-groupes d'un groupe topologique. Anneaux topologiques. Corps topologiques. L'exemple des corps valués. Espaces vectoriels topologiques. ....</i>	107
Ch. VII. QUELQUES PROPRIÉTÉS PARTICULIÈRES .....	115
<i>Propriétés de séparation. Espaces séparés. Espaces réguliers. Espaces normaux. Espaces complètement normaux. ....</i>	115
<i>Recouvrements d'un espace topologique. Enrobages. <math>v</math>-relations. Espaces pleinement normaux et espaces paracompacts. ....</i>	124
Ch. VIII. APPLICATIONS D'ESPACES TOPOLOGIQUES .....	129
<i>Applications continues. Applications continues. Critères de continuité. Prolongement d'une application continue. ....</i>	129
<i>La catégorie des espaces topologiques. Catégorie des espaces topologiques. Homéomorphismes. Topologie initiale, topologie finale définie par une famille d'applications. ....</i>	136
<i>Applications ouvertes. Applications fermées. Définitions. Caractérisations. Relations d'équivalence ouvertes, fermées. ....</i>	141
<i>Applications harmonieuses. Caractérisations. Conservation des propriétés. Espace séparé associé à un espace vérifiant l'axiome (HS). ....</i>	147
<i>Espaces quotients. Espaces quotients. Conservation de quelques propriétés. Construction au moyen des topologies saturées. L'exemple des espaces projectifs. Espaces homogènes. ....</i>	152
Ch. IX. TOPOLOGIES INITIALES. TOPOLOGIES FINALES .....	161
<i>Topologies initiales. Propriétés d'une topologie initiale. Produit d'espaces topologiques. Espace <math>F</math>-initiaux. Espaces éparpillés. ....</i>	161
<i>Espaces complètement réguliers. Ensembles <math>z</math>-ouverts. Espaces complètement réguliers. Topologie engendrée par un ensemble d'écarts. Espaces uniformisables. ....</i>	167
<i>Compléments sur les espaces produits. Propriétés des produits d'applications. Produit direct de deux espaces. Double limite. Voisinages de la diagonale. Graphe d'une application continue. Groupe topologique quotient. ....</i>	172
<i>Sur la topologie des espaces vectoriels. Topologie usuelle d'un espace vectoriel de dimension finie. Continuité des applications linéaires et des applications multilinéaires. ....</i>	180

<i>Topologies finales.</i> Topologie définie par une famille de sous-espaces. Somme directes d'espaces topologiques. ....	183
Ch. X. LIMITES PROJECTIVES. LIMITES INDUCTIVES .....	187
<i>Limites projectives.</i> Limite projective d'un foncteur. Cas de la catégorie des ensembles. Cas d'une catégorie d'objets enrichis. Limite projective filtrante d'espaces topologiques. ....	187
<i>Limites inductives.</i> Limite inductive d'un foncteur. Cas de la catégorie des ensembles. Cas d'une catégorie d'objets enrichis. Sommes amalgamées dans la catégorie des ensembles et dans la catégorie des espaces topologiques. Sommes directes pointées. ....	194
Ch. XI. LA CONVERGENCE POUR L'ORDRE .....	201
<i>La convergence pour l'ordre sur un ensemble ordonné.</i> Limite supérieure et limite inférieure d'un filtre sur un ensemble ordonné. Convergence pour l'ordre. Cas d'un treillis conditionnellement complet. ....	201
<i>La convergence pour l'ordre sur un ensemble totalement ordonné.</i> Sur un ensemble ordonné topologique la convergence pour l'ordre est la convergence topologique. Caractérisation des limites supérieures et inférieures. Cas d'un ensemble conditionnellement complet. ....	205
<i>Familles sommables et séries.</i> Familles sommables de nombres réels. Séries. Continuité de la somme d'une série de fonctions. Cas d'une suite d'écarts. Ensemble triadique de Cantor. ....	208
Ch. XII. ESPACES NORMAUX .....	215
<i>Les théorèmes de Tietze et d'Urysohn.</i> Lemme d'Urysohn. Théorème du prolongement de Tietze. Théorème de métrisabilité d'Urysohn. ....	215
<i>Partition de l'unité dans un espace normal.</i> Partition continue de l'unité. Cas d'un espace normal. ....	218
Ch. XIII. ESPACES COMPACTS .....	223
<i>Définitions et propriétés élémentaires.</i> Caractérisations diverses d'un espace compact. Sous-ensembles compacts. Cas d'un ensemble ordonné topologique. Action d'une application continue. Le tore. ....	223
<i>Propriétés de séparation.</i> Voisinages d'un ensemble compact. Prolongement d'une fonction continue à valeurs dans un espace compact. Topologie sur l'ensemble des idéaux maximaux de l'anneau des fonctions numériques continues sur un espace compact. ....	230

<i>Limites projectives d'espaces compacts.</i> Théorème de Tychonoff. Espaces métrisables compacts. Limites projectives filtrantes d'espaces compacts. ....	233
<i>Généralisations diverses.</i> Espaces dénombrablement compacts. Espaces séquentiellement compacts. Espaces pseudo-compacts. Espaces absolument fermés. ....	237
Ch. XIV. ESPACES LOCALEMENT COMPACTS .....	241
<i>Définitions et premières propriétés.</i> Espaces localement compacts. Groupes localement compacts. Produits d'espaces localement compacts. $k$ -espaces. ....	241
<i>Compactification d'Alexandroff.</i> Compactification d'Alexandroff. Espaces localement compacts dénombrables à l'infini. Détermination de certaines compactifications d'Alexandroff. ....	246
Ch. XV. APPLICATIONS PROPRES .....	253
<i>Définitions et premières propriétés.</i> Définitions et critères. Produits d'applications propres. Une caractérisation des espaces compacts. ....	253
<i>Relations d'équivalence propres.</i> Définition. Relation d'équivalence propre sur un espace compact, sur un espace localement compact. ....	257
Ch. XVI. ESPACES MÉTRISABLES .....	261
Recouvrements d'un espace écartelable. Divers critères de métrisabilité. ....	261
Ch. XVII. ESPACES PARACOMPACTS .....	269
<i>Propriétés liées aux recouvrements.</i> Liens entre diverses propriétés d'un espace topologique liées aux recouvrements de cet espace. Cas des espaces écartelables. Critères de compacité d'un espace métrisable. ....	269
<i>Recouvrements normaux.</i> Définition. Critère de paracompacité. Lien avec les partitions continues de l'unité. ....	274
<i>Cas des ensembles ordonnés topologiques.</i> C.n.s. pour qu'un ensemble ordonné topologique soit paracompact. ....	278
Ch. XVIII. ESPACES UNIFORMES .....	283
<i>Structures uniformes.</i> Définitions. Exemples. ....	283
<i>Structure uniforme engendrée par un ensemble d'écart.</i> Structures uniformes écartelables. Structures uniformes engendrées par un ensemble d'écart. Caractérisation d'une structure uniforme écartelable. Cas d'un groupe topologique. ....	286

<i>Espaces totalement bornés. Filtres de Cauchy. Ensembles totalement bornés. Exemples. Caractérisation. Filtres de Cauchy. Caractérisation d'une famille de Cauchy. Application à la caractérisation des espaces totalement bornés. ....</i>	291
Ch. XIX. APPLICATIONS UNIFORMÉMENT CONTINUES .....	299
<i>Applications uniformément continues. Définition. Exemples. Caractérisation par les écarts. Propriétés. Catégorie des espaces uniformes. Structure uniforme initiale définie par une famille d'applications. Sous-espace uniforme. Produits d'espaces uniformes. Écarts uniformément continus. Structure uniforme finale définie par une famille d'applications. Espace uniforme quotient. ....</i>	299
<i>Séparation des espaces uniformes. Espaces uniformes séparés. Applications uniformément harmonieuses. Espace uniforme séparé associé à un espace uniforme. ....</i>	307
Ch. XX. TOPOLOGIE D'UN ESPACE UNIFORME .....	311
<i>Topologie définie par une structure uniforme. Définition. Exemples. Propriétés du foncteur <math>Uni \rightarrow Top</math>. Espaces uniformes complets. Cas d'un espace écartelé. ....</i>	311
<i>Sous-espace dense d'un espace uniforme. Topologie de <math>E \times E</math>. Relation entre la structure uniforme d'un espace uniforme <math>E'</math> et celle d'un espace uniforme <math>E</math> dense dans <math>E'</math>. ....</i>	318
<i>Complétion. Complété <math>\hat{E}</math> d'un espace uniforme séparé <math>E</math>. Existence de ce complété. Le foncteur <math>E \rightsquigarrow \hat{E}</math>. Complété d'un groupe topologique abélien, d'un anneau topologique. Nombres <math>p</math>-adiques. ....</i>	322
Ch. XXI. ESPACES UNIFORMES ET ESPACES COMPACTS .....	331
<i>Structure uniforme d'un espace compact. C.n.s. pour qu'un espace uniforme séparé soit compact. Un espace compact est, de façon unique, un espace uniforme. ....</i>	331
<i>Compactifications. Compactifications d'un espace complètement régulier <math>E</math>. Relation d'ordre entre ces compactifications. Elles correspondent aux structures uniformes totalement bornées qui engendrent la topologie de <math>E</math>. Elles forment un ensemble complètement réticulé supérieurement. ....</i>	333
<i>Compactification de Čech. Compactification de Čech <math>\beta(E)</math> d'un espace complètement régulier <math>E</math>. Caractérisations de <math>\beta(E)</math>. Le foncteur <math>E \rightsquigarrow \beta(E)</math>. Interprétation de <math>\beta(E)</math> comme espace d'idéaux maximaux. ....</i>	337

Ch. XXII. ESPACES CONNEXES. ESPACES LOCALEMENT CONNEXES .....	341
<i>Espaces connexes.</i> Définition. Exemples. Sous-ensembles connexes. Action d'une application continue. Produit d'espaces connexes. Espaces compacts connexes. ....	341
<i>Composantes connexes.</i> La relation d'équivalence $\Gamma$ . Composantes connexes. Quasi-composantes. Caractérisation de certains espaces topologiques. ....	347
<i>Espaces localement connexes.</i> Définition. Caractérisation. Quotients et produits d'espaces localement connexes. Une caractérisation du groupe topologique $\mathbb{R}$ . ....	352
<i>Espaces totalement discontinus.</i> Espaces totalement discontinus, espaces totalement séparés, espaces éparpillés. Cas des espaces localement compacts. Composantes connexes d'un groupe localement compact. ....	355
Ch. XXIII. ESPACES DE BAIRE .....	361
<i>Ensembles rares. Ensembles maigres.</i> Ensembles rares. Exemples. Caractérisation. Ensembles maigres. Exemples. Caractérisation. ...	361
<i>Espaces de Baire.</i> Définition. Caractérisation. Théorème de Baire. Application aux groupes localement compacts. L'équivalence de Baire. Tribu de Baire. ....	366
Ch. XXIV. ESPACES FONCTIONNELS. LA CONVERGENCE SIMPLE ET LA CONVERGENCE COMPACTE .....	373
<i>La convergence simple.</i> Topologie de la convergence simple. Exemples. ....	373
<i>La convergence compacte.</i> Topologie de la convergence compacte. Une condition suffisante de convergence compacte. Exemples. Les espaces $H(E, F)$ . ....	375
<i>Ensembles équicontinus.</i> Définition. Convergence simple et convergence compacte sur un ensemble équicontinu. Théorème d'Ascoli. Groupe dual d'un groupe abélien localement compact. ....	381
Ch. XXV. ESPACES FONCTIONNELS. LA CONVERGENCE UNIFORME .....	387
Convergence uniforme et théorèmes d'approximation. La structure uniforme de la convergence uniforme. Limite uniforme de fonctions continues. La topologie de $\mathcal{C}_u(E, F)$ . Lemme de Dini. Lorsque $E$ est compact, densité dans $\mathcal{C}_u(E, \mathbb{R})$ d'un sous-espace vectoriel coréticulé contenant les constantes, d'une sous-algèbre contenant les constantes. Théorème de Stone-Weierstrass. ....	387



<i>La notion générale de convergence uniforme.</i> Structure uniforme de la convergence uniforme sur un ensemble de parties. Simplification éventuelle de son étude. Structure uniforme de la convergence simple. Structure uniforme de la convergence uniforme sur les compacts. C.n.s. pour qu'un espace uniforme $\mathcal{F}_A$ soit complet, soit compact. ....	395
LECTURES SUGGÉRÉES .....	403
INDEX DES NOTATIONS .....	405
INDEX TERMINOLOGIQUE .....	409