§1.5. Nombres complexes [DZ, Annexe B].

On a vu que l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Maintenant : l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice: Dériver à partir des axiomes de $\mathbb{R}$ [DZ §1.1.3]

(1) Si $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x \geq 0 \Rightarrow x + (-x) \geq -x \Rightarrow 0 \geq -x$.

(2) $\forall x \in \mathbb{R} : \quad 0 \cdot x = 0$

$0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \Rightarrow 0 = 0 \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(3) $\forall x \in \mathbb{R} : \quad x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \geq 0$ et $x \cdot (-x) = (-x) \cdot x \leq 0$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 0 \cdot x = (x + (-x)) \cdot x = x \cdot x + (-x) \cdot x = 0 \Rightarrow (-x) \cdot x \overset{\text{commutativité}}{=} x \cdot (-x) = -(x \cdot x) \\ 0 = 0 \, (-x) = (x + (-x)) \cdot (-x) = x \cdot (-x) + (-x) \cdot (-x) = 0 \Rightarrow x \cdot (-x) = (-x) \cdot x = -((-x) \cdot (-x)) \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot x = (-x) \cdot (-x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x \geq 0 \Rightarrow x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \geq 0 \\ \text{Si } x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow (-x) \cdot (-x) = x \cdot x \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ x \, x \geq 0 \text{ et } (-x) \cdot x = x \cdot (-x) = -x \cdot x \leq 0.$$

(4) $-1 < 0$.

$1 \neq 0$ (axiome) $\Rightarrow -1 \neq 0$. Si $-1 > 0 \Rightarrow (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1 > 0$, absurde, contradiction avec (1).

$\Rightarrow -1 < 0$ Par (3), $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.

$\Longrightarrow$ Donc $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Alors on introduit le symbole „ i " tel que $i^2 = -1$.

On considère les expressions de la forme $\{z = a+ib\} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{C}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
avec des opérations suivantes :

$\boxed{+}$: $(a+ib)+(c+id) = (a+c) + i(b+d)$
associative, commutative (exercice)
$\exists$ l'élément neutre $(0+i0) \equiv 0$
et réciproque pour $(a+ib)$: $(-a+i(-b)) + (a+ib) = 0+i0 = 0 \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\times}$: $(a+ib)\cdot(c+id) = ac - bd + i(bc+ad)$
associative, commutative
$\exists$ l'élément neutre $(1+i0) \equiv 1$. : $(a+ib)(1+i0) = a+ib$
Si $z \in \mathbb{C}$: $z \neq 0 \Rightarrow \exists\, z^{-1} \in \mathbb{C}$ tel que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.

__Prop__ Soit $z = a+ib$, $z \neq 0$ $\Rightarrow z^{-1} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$ $\quad (z \neq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \neq 0)$

Vérification : $(a+ib)\cdot\dfrac{a-ib}{a^2+b^2} = \dfrac{a^2+b^2+\overbrace{i(ab-ab)}^{0}}{a^2+b^2} = 1$

$$z = a+ib \neq 0 \Rightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}}$$

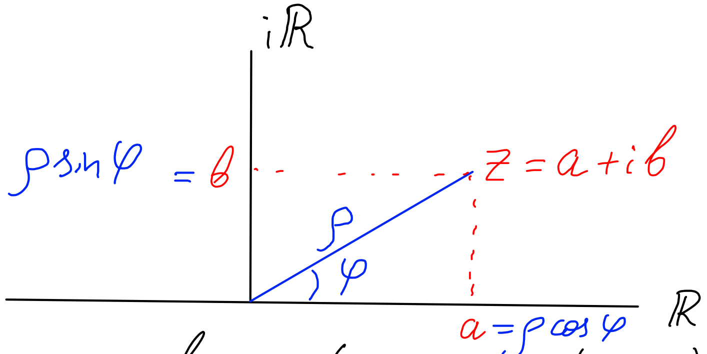
Donc $\mathbb{C}$ est un corps commutatif (complet).

(Exercice : vérifier la distributivité.
$z_1(z_2+z_3) = z_1 z_2 + z_1 \cdot z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.)

$\mathbb{C}$ n'est pas ordonné : $\left.\begin{array}{l} \text{Si } i>0 \Rightarrow i^2=-1>0 \\ \text{Si } i<0 \Rightarrow -i>0 \Rightarrow (-i)^2=-1>0 \end{array}\right\}$ absurde puisque $-1<0$ dans $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

On a deux racines complexes de l'équation $z^2=-1$: $z_1=i$ et $z_2=-i$

Remarque L'addition des nombres complexes est l'addition vectorielle dans $\mathbb{R}^2$.



3 formes des nombres complexes.

Forme cartesienne

$$\boxed{z=a+ib} \qquad a,b\in\mathbb{R}$$

$$z = \underbrace{\mathrm{Re}\,z}_{\text{partie réelle}} + i\,\underbrace{\mathrm{Im}\,z}_{\text{partie imaginaire}}$$

partie réelle $\mathrm{Re}\,z=a\in\mathbb{R}$ partie imaginaire $\mathrm{Im}\,z=b\in\mathbb{R}$

Le module

$$|z|=\sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2}=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0$$

$$|z|=0 \Leftrightarrow z=0.$$

Forme polaire (trigonométrique)

$$\boxed{z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)} \qquad \rho\geq 0,\ \varphi\in\mathbb{R}$$

$$\mathrm{Re}\,z=\rho\cos\varphi,\quad \mathrm{Im}\,z=\rho\sin\varphi$$

$$|z|=\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=\rho\geqslant 0.$$

le module de z $=\rho$.

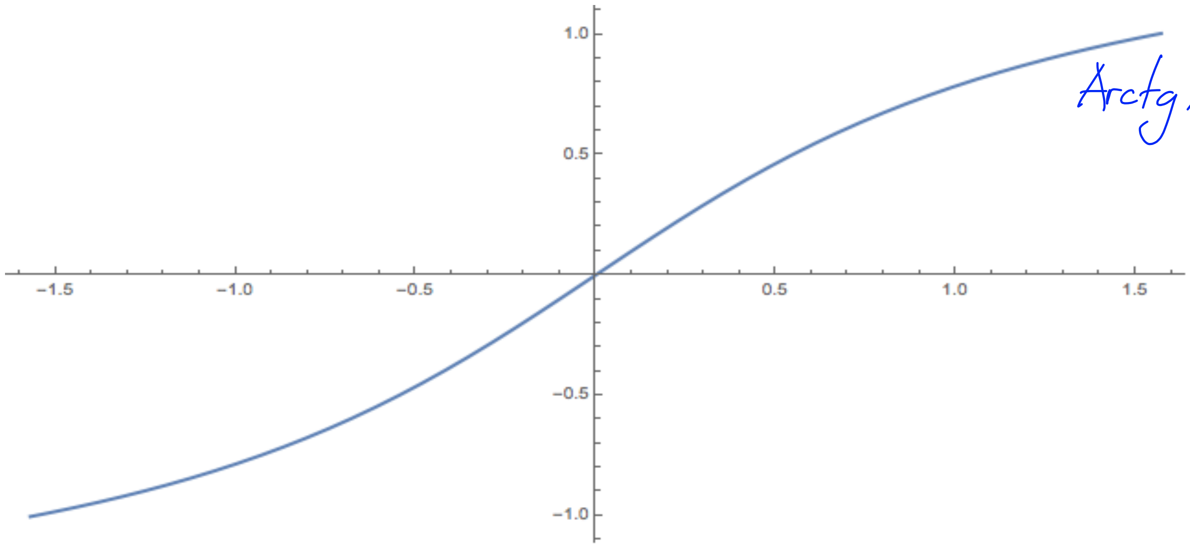
L'argument de z : $\varphi\in\mathbb{R}$ qui est défini à $2k\pi$ près, $k\in\mathbb{Z}$.

$$\rho\neq 0 \Rightarrow \sin\varphi=\frac{\mathrm{Im}\,z}{\rho}\ ;\ \cos\varphi=\frac{\mathrm{Re}\,z}{\rho}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{\mathrm{Im}\,z}{\mathrm{Re}\,z}=\frac{b}{a} \quad \text{si } a=\mathrm{Re}\,z\neq 0$$

Comment trouver l'argument d'un nombre complexe ?

$z = a + ib$ => On utilise la fonction $\mathrm{Arctg}\, x$, réciproque à $\mathrm{tg}\, x$:

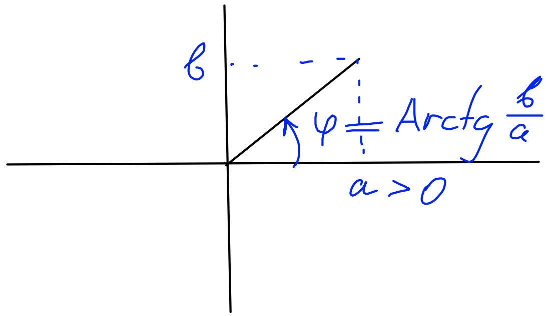


$\mathrm{Arctg}\, x : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Si $z = a + ib$: $a > 0$, alors

$$\boxed{\arg z = \mathrm{Arctg}\, \frac{b}{a}} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

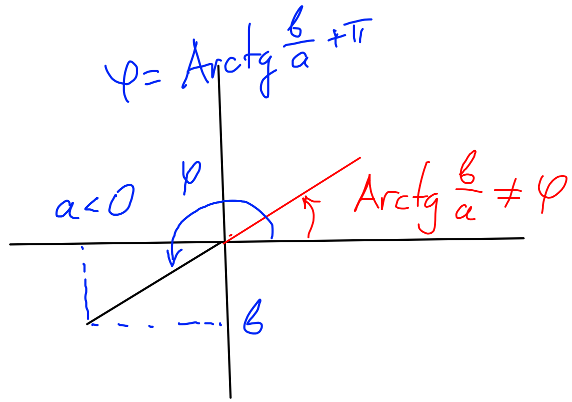
(à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$)



Si $z = a + ib$: $a < 0$, alors

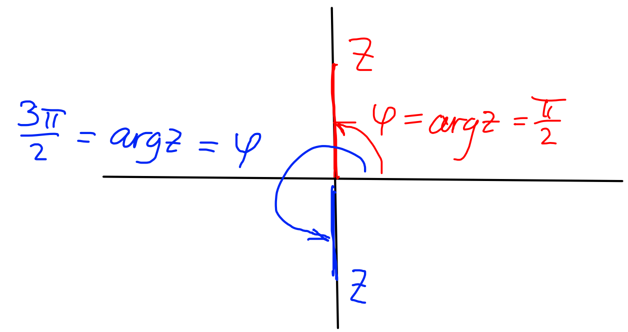
$$\boxed{\arg z = \mathrm{Arctg}\, \frac{b}{a} + \pi} \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$$

(à $2k\pi$ près).



Si $\operatorname{Re} z = a = 0 \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}$, si $\operatorname{Im} z = b > 0$

$\arg z = -\frac{\pi}{2}$, si $\operatorname{Im} z = b < 0$.



Remarque L'argument de z est défini seulement pour les nombres complexes différents de zéro.

Troisième forme de $z \in \mathbb{C}$: la forme polaire exponentielle.

Déf Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $\underbrace{e^z = \exp(z)}_{\text{fonction exp complexe}} \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{e^x}_{\text{exp réelle}}(\cos y + i \sin y)$

Si $z = x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \Rightarrow e^z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x$. $(y = 0)$.

Si $z = iy \in i\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \Rightarrow e^z = \cos y + i \sin y$ $(x = 0)$.

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$$ Formule d'Euler

Si $y_1 = y_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow e^{iy_1} = e^{i(y_2 + 2k\pi)} = \cos(y_2 + 2k\pi) + i \sin(y_2 + 2k\pi) = \cos y_2 + i \sin y_2 = e^{iy_2}$

$\Rightarrow e^{iy_1} = e^{iy_2}$ si $y_1 - y_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{i\pi} = \overset{=-1}{\cos\pi} + i\overset{=0}{\sin\pi} = -1 \Rightarrow \boxed{e^{i\pi} = -1}$$ Formule d'Euler, $y = \pi$.

$$z = \rho\underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{= e^{i\varphi} \text{ par déf}} \Rightarrow \boxed{z = \rho e^{i\varphi}}$$ – la forme exponentielle polaire

$$\boxed{z = \underbrace{\mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z}_{\text{cartesienne}} = \underbrace{|z|\left(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right)}_{\text{polaire trigonométrique}} = \underbrace{|z|\, e^{i\arg z}}_{\text{polaire exponentielle}}}$$ – les 3 formes d'un nombre complexe

où $|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}$ le module de z

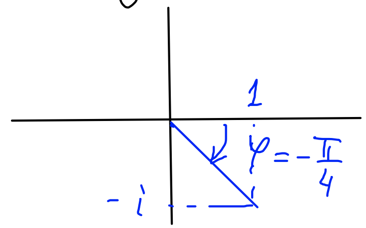
$$\text{Si } |z| \neq 0 \Rightarrow \arg z = \left.\begin{cases} \mathrm{Arctg}\left(\dfrac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}\right) & \text{si } \mathrm{Re}\, z > 0 \\ \mathrm{Arctg}\left(\dfrac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}\right) + \pi & \text{si } \mathrm{Re}\, z < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } \mathrm{Re}\, z = 0,\ \mathrm{Im}\, z > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } \mathrm{Re}\, z = 0,\ \mathrm{Im}\, z < 0 \end{cases}\right\} \text{ défini à } 2k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z}$$

Remarque: Forme polaire: $\underbrace{z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{\text{trigonométrique}} = \underbrace{\rho e^{i\varphi}}_{\text{exponentielle}}$, $|z| = \rho$, $\varphi = \arg z$.

Ex 1. $z = 1 - i$. Forme polaire ?

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\arg z = ?$ $\operatorname{Re} z = 1 > 0 \Rightarrow \arg z = \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \operatorname{Arctg} \frac{-1}{1} =$
$= \operatorname{Arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

$\Rightarrow z = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$



Ex 2 $z = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$ Forme cartesienne ?

$$z = 3e^{i\frac{5\pi}{6}} = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \underbrace{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}_{\operatorname{Re} z} + i\,\underbrace{\frac{3}{2}}_{\operatorname{Im} z}.$$

Multiplication en forme polaire.

Proposition Soient $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ deux nombres complexes.
Alors $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Dém:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \cdot \rho_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) =$$

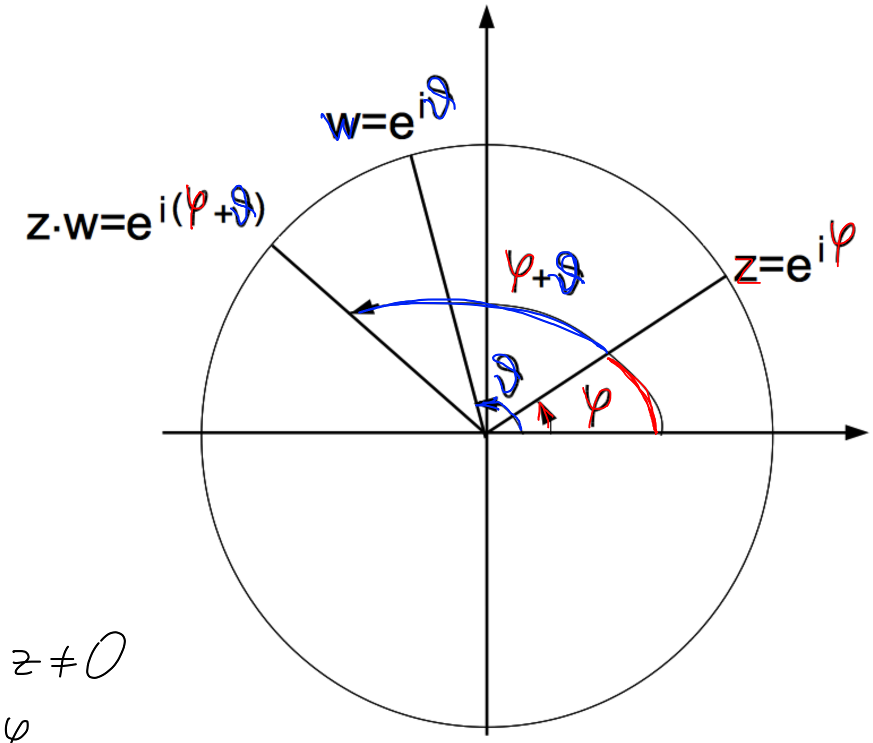
$$\overset{(déf)}{=} \rho_1 \cdot \rho_2 \left(\underbrace{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}_{} + i\left(\underbrace{\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2}_{}\right)\right) =$$

$$= \rho_1 \rho_2 \Big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\Big) = \rho_1 \rho_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$\blacksquare$

Si $z_1 = |z_1| e^{i \arg z_1}$, $z_2 = |z_2| e^{i \arg z_2}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{z_1 z_2 = |z_1||z_2| e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}}$$



Ex Soit $z = e^{i\varphi}$; $|z| = 1$.

$w = e^{i\vartheta}$; $|w| = 1$.

Alors $z \cdot w = e^{i(\varphi + \vartheta)}$

Division en forme polaire.

$z = |z| e^{i \arg z}$, $z \neq 0$

$$z = \rho e^{i\varphi}, \rho > 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}$$

Dém. $z \cdot z^{-1} = \rho e^{i\varphi} \cdot \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} = \rho \cdot \frac{1}{\rho} e^{i(\varphi - \varphi)} = 1 \cdot e^{i0} = 1.$ ▨

Si $z_1 = |z_1| e^{i \arg z_1}$, $z_2 = |z_2| e^{i \arg z_2}$, $z_2 \neq 0$.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\arg z_1 - \arg z_2)}, \quad |z_2| \neq 0}$$

Proposition (Formule de Moivre)

Pour tout $\rho > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

$$\boxed{(\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}}$$ Formule de Moivre.

Dém: (par récurrence)

(1) Proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq m$ fixé pour $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$)

Initialisation: (2) Démontrer que Prop est vraie pour $n = 0$ ($n = m$)

Hérédité : (3) Démontrer que si Prop est vraie pour $n = k \in \mathbb{N}$, alors elle est vraie pour $n = k+1$.

$\Rightarrow$ Alors Prop est vraie pour $n = m \overset{(2)}{\Rightarrow} n = m+1 \overset{(3)}{\Rightarrow} n = m+2 \overset{(3)}{\Rightarrow} \ldots$ tout $n \geq m$.

$\Rightarrow$ Prop est vraie pour tout $n \geq m$ naturel.

Initialisation: $n = 1 \Rightarrow (\rho e^{i\varphi})^1 = \rho e^{i\varphi}$ VRAI ✓

Hérédité : Supposons que Prop est vraie pour $n = k \in \mathbb{N}^*$ ($\Leftrightarrow (\rho e^{i\varphi})^k = \rho^k e^{ik\varphi}$).

Démontrons que Prop est vraie pour $n = k+1$: par supposition

$$(\rho e^{i\varphi})^{k+1} = (\rho e^{i\varphi})^k \cdot (\rho e^{i\varphi}) = \rho^k e^{ik\varphi} \cdot \rho e^{i\varphi} \overset{\text{produit en forme polaire}}{=} \rho^{k+1} e^{i(k\varphi+\varphi)} = \rho^{k+1} e^{i(k+1)\varphi} \quad ✓$$

$\Rightarrow$ Proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence. ▨