Analyse I

Chapitre 0. Prérequis

§ 0.1 Identités algébriques

Polynômiales:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2).$$

Exponentielles: a, b des nombres réels positifs, x, y des nombres réels.

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad n \text{ - naturel positif}$$
$$(ab)^x = a^x b^x \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$
$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a.$$

Logarithmes :

$\log = \log_e$

x, y réels positifs

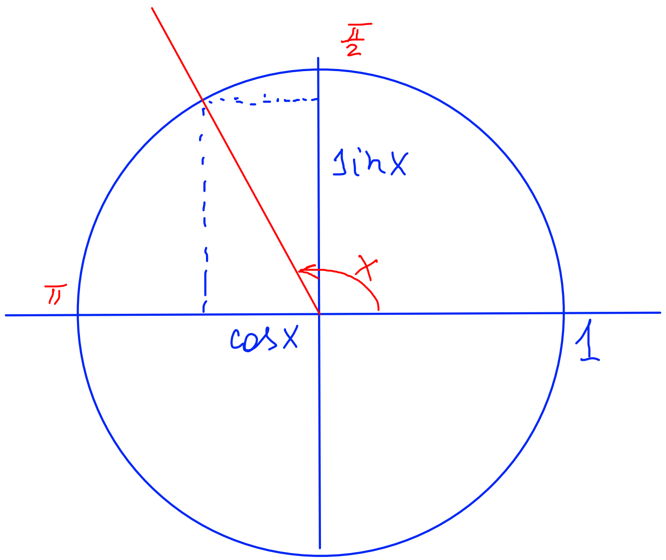
$$\log(xy) = \log x + \log y \qquad \log(1) = 0$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \qquad \log(e) = 1$$

$$\log(x^c) = c \cdot \log x \qquad c \text{ réel}$$

$$\log_a(1) = 0 \ ; \ \log_a(a) = 1 \qquad a \text{ réel positif}, \ a \neq 1.$$

§ 0.2 Trigonométrie.



$\sin x$, $\cos x$ definis pour tout x réel

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\cos x \neq 0 \qquad \sin x \neq 0$$

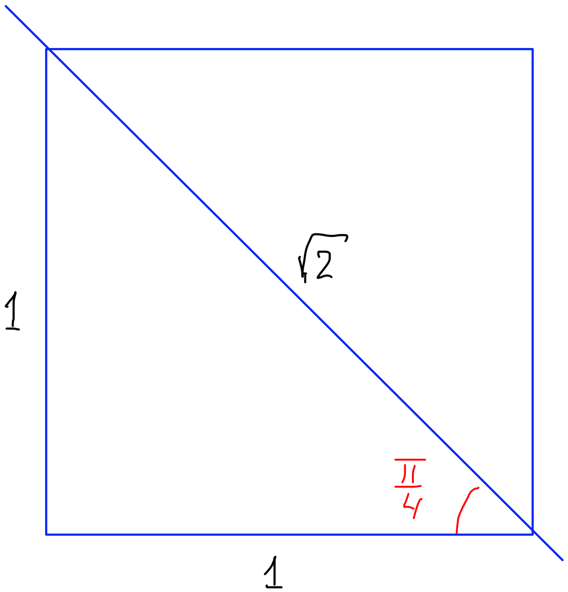
$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{aligned}}$$

$\Downarrow$

$$1 = \cos(x - x) = \cos^2 x + \sin^2 x$$

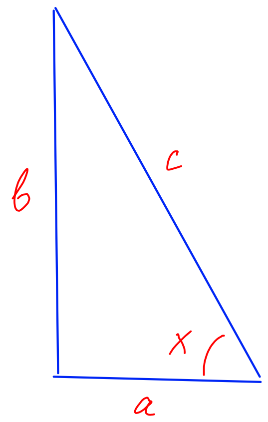
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Valeurs de $\cos x$, $\sin x$ pour $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, 0 \ldots$



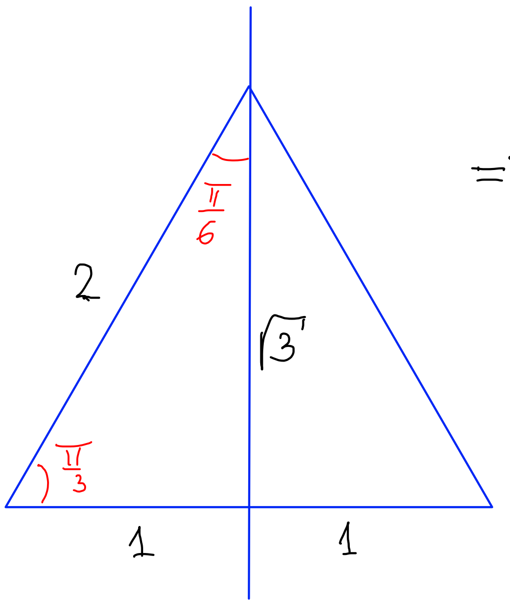
$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

carré de côté $= 1$



$$\sin x = \frac{b}{c}$$

$$\cos x = \frac{a}{c}$$



$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

triangle équilatéral de côté $= 2$

§0.3. Rappel: Fonctions réelles d'une variable réelle.

Ex: $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

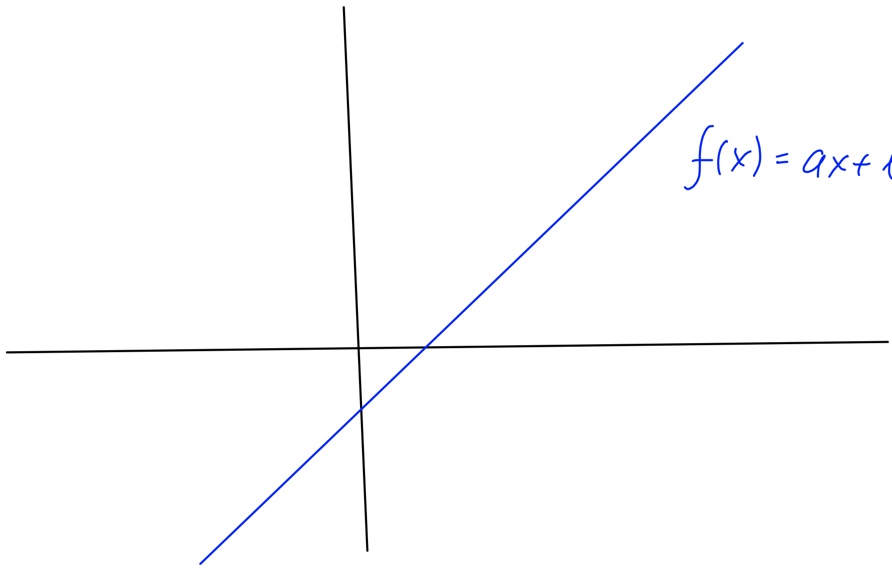
Types des fonctions élémentaires (exemples)

$\boxed{1}$ Polynômes

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ où a_i sont des nombres réels. n naturel positif.

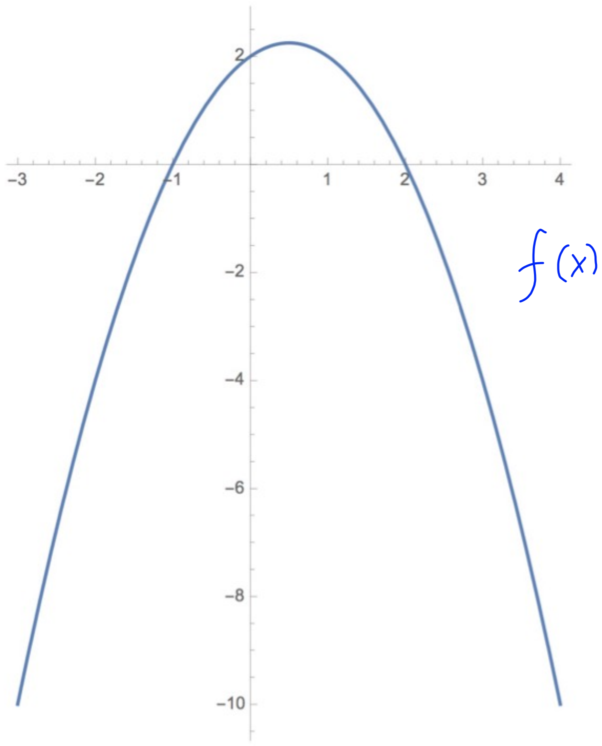
Ex $f(x) = ax + b$

fonction linéaire



Ex $\quad f(x) = -(x+1)(x-2)$

polynôme quadratique



$\boxed{2}$ Fonctions rationnelles

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes,

$Q(x) \neq 0$

Ex : $\quad f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-1} \qquad x$ réel, $x \neq \pm 1$

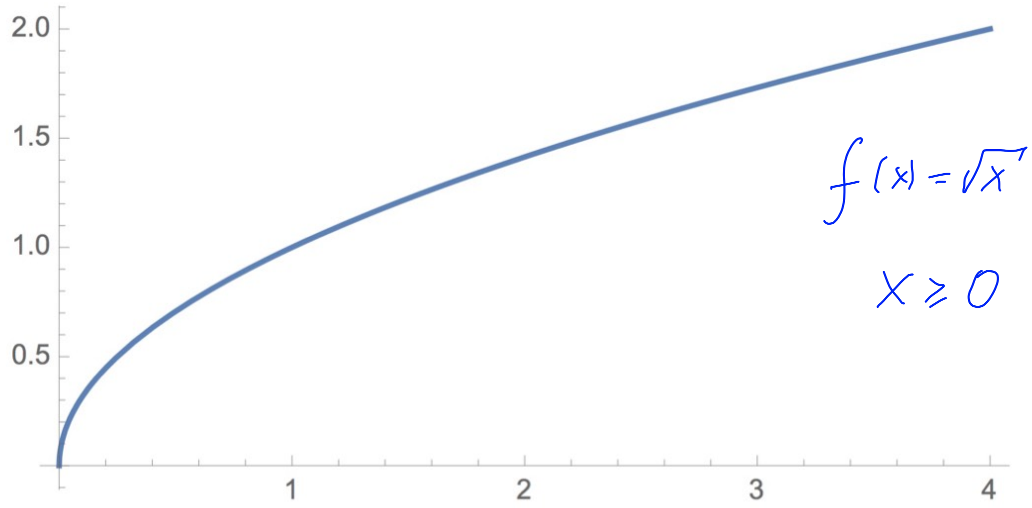
$x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$\boxed{3}$ Fonctions algébriques

Toute fonction obtenue à partir des polynômes par application des opérations $+$, $-$, $\div$, $\cdot$, puissances, $\sqrt{\ }$

Ex $f(x) = \sqrt{x}$

$x \geq 0$



Ex

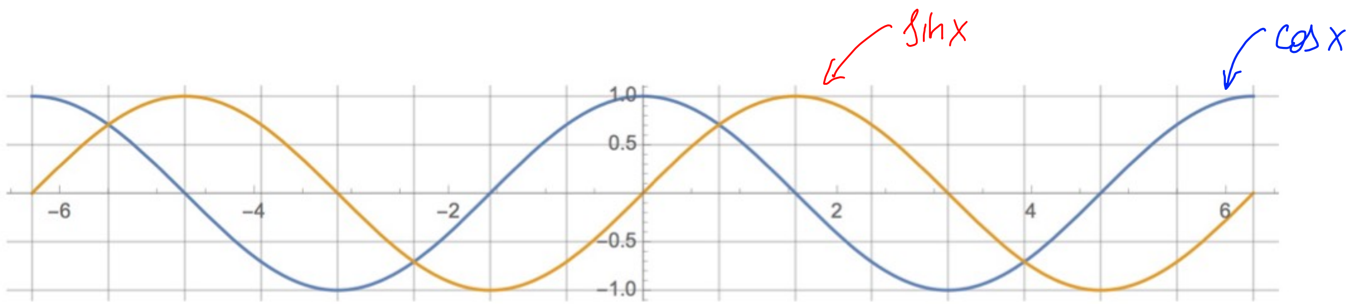
$$f(x) = \frac{2 + \sqrt{x+1}}{x^2 + 4}, \quad x \geq -1.$$

$\boxed{4}$ Fonctions transcendantes (ne sont pas algébriques)

$\boxed{4a}$ Fonctions trigonométriques (et leurs réciproques).

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



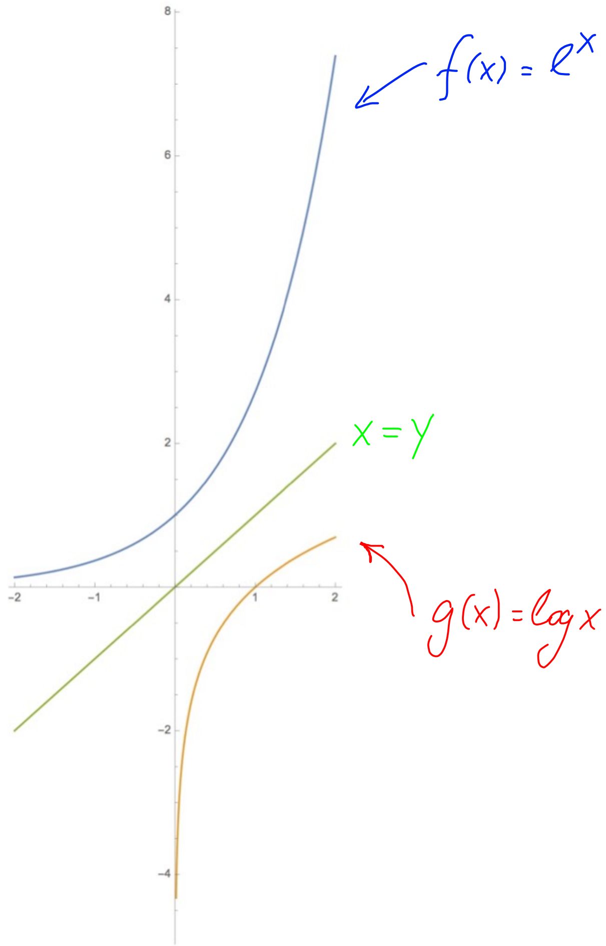
$\boxed{4b}$ Fonctions exponentielles et logarithmiques

<u>Ex</u> $f(x) = e^x$, $g(x) = \log x$, $x > 0$ (log de base e).

Pour tout x réel $\Rightarrow \log(e^x) = x$

Pour tout x réel positif $\Rightarrow e^{\log x} = x$ $\Leftrightarrow$ e^x et $\log x$ sont des fonctions réciproques.

Ex



En général, si on a

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

on dit que $f(x)$ et $f^{-1}(x)$ sont réciproques

(il faut préciser les valeurs admissibles de x et y).

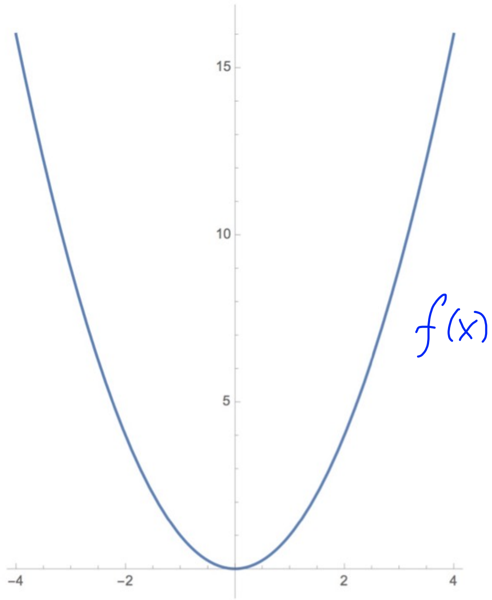
Les graphique de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $x = y$

Ex $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, x réel

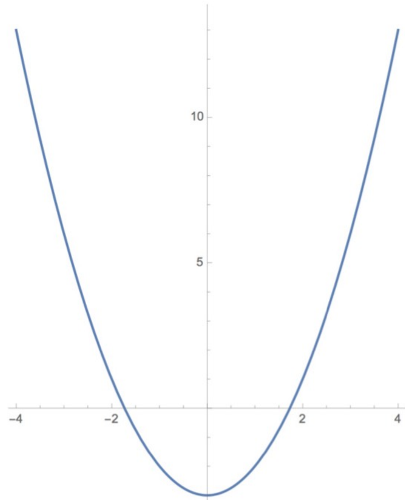
Alors la fonction réciproque est $f^{-1}(x) = \log_a x$, $x > 0$.

§0.4. Transformations des graphiques

Ex $f(x) = x^2 - 3$.



$f(x) = x^2$

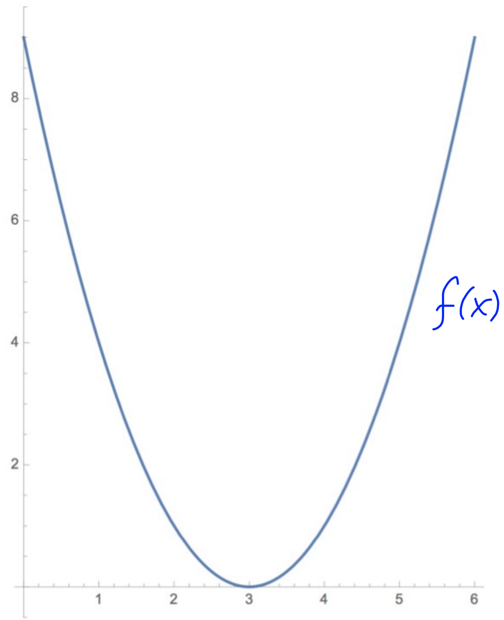


$f(x) = x^2 - 3$

descendre le graphique $f(x) = x^2$ par 3.

Ex $f(x) = (x-3)^2$

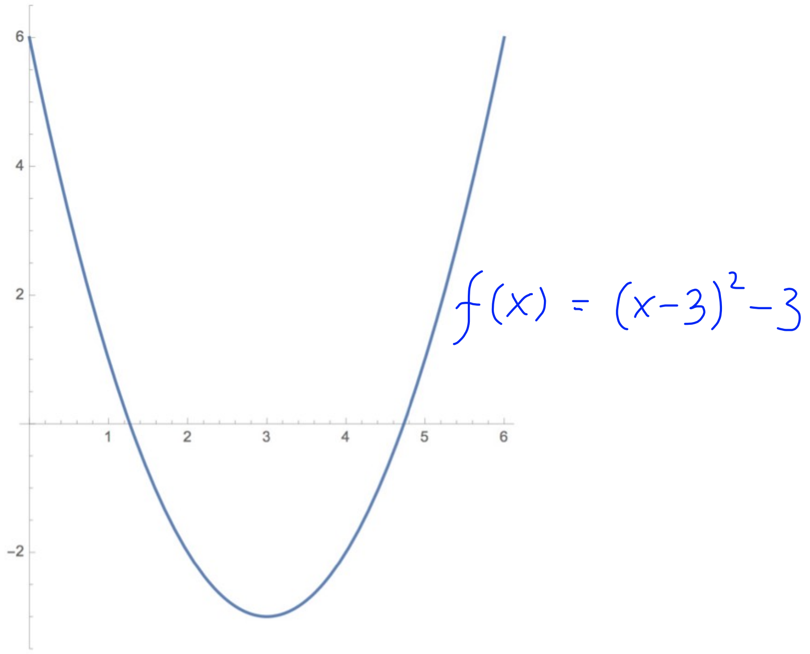
Deplacer le graphique $y = x^2$ à droite par 3



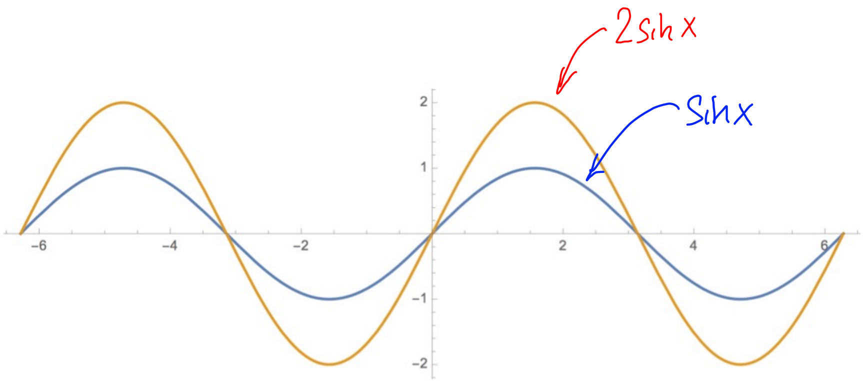
$f(x) = (x-3)^2$

Ex $f(x) = (x-3)^2 - 3$

déplacer le graphique
$y = x^2$ à droite par 3
et descendre par 3



Ex $f(x) = 2\sin x$.



Etendre
le graphique de $\sin x = y$
en direction verticale

Ex $\quad f(x) = \sin(2x)$

Serrer le graphique de $y = \sin x$ en direction horisontale