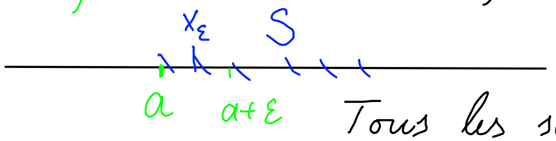
# Rappel: L'infimum et le supremum d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}$.

Si $S \subset \mathbb{R}$ non-vide et $a \in \mathbb{R}$ est tel que

(1) $a \leq x \quad \forall x \in S$

(2) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in S : x_\varepsilon - a \leq \varepsilon$

Alors $a = \inf S$ (= la borne inférieure de $S$)

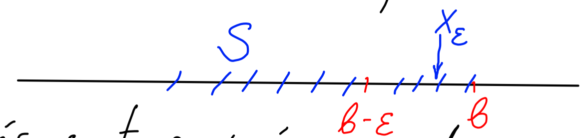



Si $S \subset \mathbb{R}$ non vide et $b \in \mathbb{R}$ est tel que

(1) $b \geq x \quad \forall x \in S$

(2) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in S : b - x_\varepsilon \leq \varepsilon$.

$b = \sup S$ (= la borne supérieure de $S$).



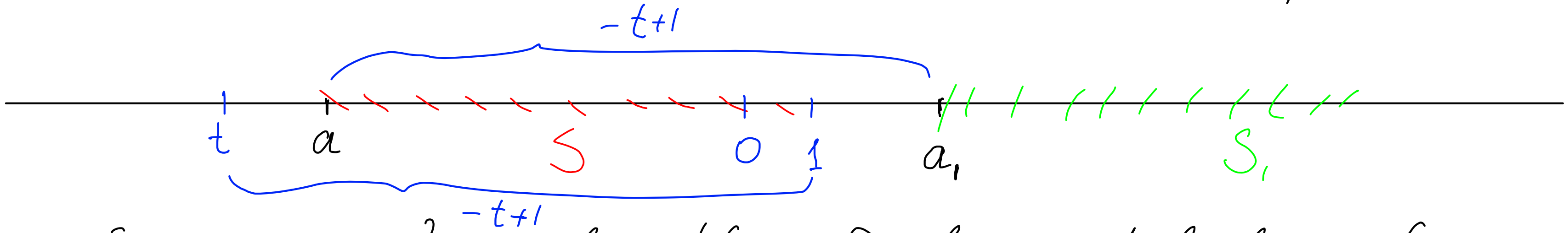

Tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ considérés sont supposé non vides.

**Thm** Tout sous-ensemble majoré $S \subset \mathbb{R}$ possède un supremum, qui est unique

Tout sous-ensemble minoré $S \subset \mathbb{R}$ possède un infimum qui est unique.

**Dém:** (a) Si $S \subset \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} \Rightarrow \exists a \overset{\in \mathbb{R}}{=} \inf S$ par l'axiome de la borne inférieure.

(b) $S \subset \mathbb{R} : \forall x \in S \ \exists t \in \mathbb{R} : x \geq t$, mais $t < 0$ ($S$ est minoré par $t$, $t < 0$)



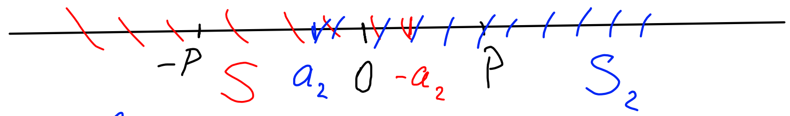

Soit $S_1 = \{x - t + 1, \ x \in S\} \subset$ réels positifs $\Rightarrow$ Par l'axiome de la borne inférieure, il existe $a_1 = \inf S_1$

Alors $a = a_1 + t - 1$ est l'infimum de $S$.

(c) Soit $S \subset \mathbb{R}$ : $\forall x \in S$, $x \leq p \in \mathbb{R}$ est majoré par $p \in \mathbb{R}$.

Considérons $S_2 = \{y \in \mathbb{R} . y = -x, x \in S\}$

$\Rightarrow$ $S_2$ est minoré par $-p \in \mathbb{R}$




Par la partie (b), $S_2$ possède un infimum $a_2 = \inf S_2$

$\Rightarrow$ alors $-a_2 = \sup S$.

$\blacksquare$

Unicité : Si $\inf S$ existe, alors il est le plus grand minorant de $S$

Si $\sup S$ existe, alors il est le plus petit majorant de $S$.

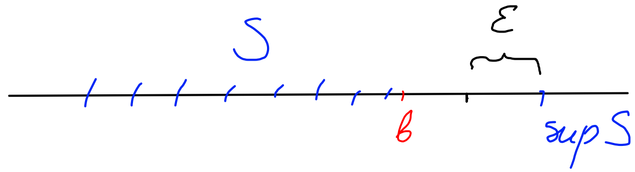
En particulier, $\inf S$ et $\sup S$ sont uniques (s'ils existent)

Idée : par absurde.

Supposons qu'il existe $\sup S$ et $b \in \mathbb{R}$ : $b < \sup S$, et $b$ est un majorant de $S$.

$\exists\, \varepsilon = \dfrac{\sup S - b}{2} > 0 \Rightarrow \sup S - \varepsilon > b \geq x \quad \forall x \in S$

majorant de $S$




$\Rightarrow \sup S - x > \varepsilon \quad \forall x \in S$ - absurde,

contradiction avec la déf de $\sup S$.

$\Rightarrow$ le $\sup S$ est le plus petit majorant et il est unique.

Le cas de l'infimum est symétrique.

$\blacksquare$

## Notations intervalles

Soit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b]$ intervalle fermé borné

$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} = ]a, b[$ intervalle ouvert borné

$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a, b[$ intervalle semi-ouvert borné

$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} = ]a, b]$ — " —

$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ la droite réelle achevée ; $-\infty < +\infty$

$\{-\infty < x < \infty\}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

## Intervalles non-bornés

$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} = [a, +\infty[$ fermé

$\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} = ]-\infty, b]$ fermé

$\{x \in \mathbb{R} : x > a\} = ]a, +\infty[$ ouvert

$\{x \in \mathbb{R} : x < b\} = ]-\infty, b[$ ouvert

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[ = \{x \geq 0\}$ , $\mathbb{R}_+^* = ]0, +\infty[ = \{x > 0\}$

$\mathbb{R}_- = ]-\infty, 0] = \{x \leq 0\}$ , $\mathbb{R}_-^* = ]-\infty, 0[ = \{x < 0\}$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

[DZ §1.1.5, 1.5.1, 1.5.3]

Comment trouver $\sup S$, $\inf S$ pour un ensemble $S \subset \mathbb{R}$ majoré (minoré)

**Exemples.** $\boxed{1}$ Intervalles bornés.

$$\sup\,[a,b] = \sup\,]a,b] = \sup\,[a,b[ = \sup\,]a,b[ = b$$

$$\inf\,[a,b] = \inf\,]a,b] = \inf\,[a,b[ = \inf\,]a,b[ = a.$$

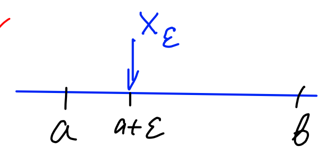
**Dém:** (a) $\sup\,[a,b] = b$. (1) $b \geq x \quad \forall x \in [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ✓

(2) Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow x_\varepsilon = b \in [a,b]$ et $b - x_\varepsilon = b - b = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ ✓

(b) $\inf\,]a,b[ = a$. (1) $\overset{a < x \Rightarrow}{a \leq x} \quad \forall x \in\, ]a,b[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ✓

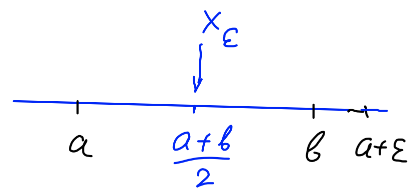
(2) Soit $\varepsilon > 0$. Trouver $x_\varepsilon \in\, ]a,b[ : x_\varepsilon - a \leq \varepsilon \iff \begin{cases} a < x_\varepsilon < b \\ x_\varepsilon \leq a + \varepsilon \end{cases}$

(1) Si $\varepsilon < b - a \Rightarrow$ on peut choisir $x_\varepsilon = a + \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} a < a+\varepsilon < b \\ a < a+\varepsilon \leq a+\varepsilon \end{cases}$ ✓




(2) Si $\varepsilon > b - a \Rightarrow$

$$x_\varepsilon = \frac{b+a}{2} \Rightarrow \begin{cases} a < \frac{b+a}{2} < b \\ a < \frac{b+a}{2} < b \leq a+\varepsilon \end{cases}$$ ✓




$\blacksquare$

**Thm** Propriété d'Archimède. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}$ tel que $x > 0$ et $y \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nx > y$

**Dém:** (1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ n'est pas majoré. Par absurde : supposons que $\mathbb{N}$ est majoré

Alors $\exists \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$, et pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ : $\sup \mathbb{N} - n \leq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$$\sup \mathbb{N} \leq n + \frac{1}{2} < \underbrace{n+1}_{m} \in \mathbb{N} \Rightarrow$$ absurde, contradiction avec la déf de $\sup \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

(2) Soit $\frac{y}{x} \in \mathbb{R}_+$, alors $\exists n \in \mathbb{N}$. $n > \frac{y}{x} \Leftrightarrow nx > y$. ▨

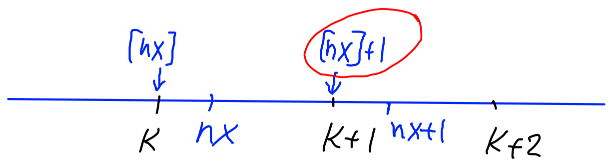
Donc $\mathbb{R}$ est un corps archimédien. (commutatif, ordonné, complet).

**Thm** $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Pour tout couple $x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$, il existe un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ : $x < r < y$

**Dém:** Par la propriété d'Archimède $\exists n \in \mathbb{N}^*$ : $n(y-x) > 1 \Rightarrow y - x > \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow x < x + \frac{1}{n} < y$$

$$x = \frac{nx}{n} < \frac{[nx]+1}{n} \leq \frac{nx+1}{n} < y$$




$[nx]$ est la partie entière de $nx$

$$\Rightarrow r = \frac{[nx]+1}{n} \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad x < r < y.$$

▨

Exercice : Soient $r < q$, $r, q \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ : $r < x < q$
irrationnel

[DZ, §1.3.7]

Ex $\boxed{2}$ $S = \{x > a\} = ]a, +\infty[$ : $\exists \inf S = a$ (comme Ex 1.), $\sup S$ n'existe pas.

Ex. $\boxed{3}$ $S = \left\{ \frac{3n-2}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{R}$

(1) $\frac{3n-2}{n} = 3 - \frac{2}{n}$ ; $\frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow -\frac{2}{n+1} > -\frac{2}{n} \Rightarrow 3 - \frac{2}{n+1} > 3 - \frac{2}{n}$

$\Rightarrow \left\{ \frac{3n-2}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est croissante $\Rightarrow n = 1$, on a $3 - \frac{2}{1} = 1$

$\Rightarrow$ S est borné : $1 \leq x < 3$ $\forall x \in S \Rightarrow \inf S$ et $\sup S$ existent.

(2) $\inf S = 3 - \frac{2}{n} \Big|_{n=1} = 1 \in S$.

(3) $\sup S = ?$ $S = \left\{ 3 - \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Il faut démontrer que $\sup S = 3$

(1) $3 > 3 - \frac{2}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ✓

(2) Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver (ou démontrer l'existence) de $x_\varepsilon \in S$ : $3 - x_\varepsilon \leq \varepsilon$

$3 - \left(3 - \frac{2}{n}\right) \leq \varepsilon \iff \frac{2}{n} \leq \varepsilon \iff \frac{2}{\varepsilon} \leq n$

Puisque $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ : $n \geq \frac{2}{\varepsilon}$ quel que soit $\varepsilon > 0$. ✓

$\Rightarrow \sup S = 3 \notin S$.

**Remarque.** Si $\inf S \in S$, on dit que $S$ possède un minimum, $\min S \overset{\text{déf}}{=} \inf S$.
Si $\sup S \in S$, on dit que $S$ possède un maximum, $\max S \overset{\text{déf}}{=} \sup S$

**Ex $\boxed{3}$** . $\min S = 1$ ; $S$ ne possède pas de maximum.

---

## Annexe : Remarques sur les fonctions injectives, surjectives, bijectives et réciproques

**Déf** $f : \underset{\subset \mathbb{R}}{E} \to \underset{\subset \mathbb{R}}{F}$ est une règle qui donne une seule valeur $f(x)$ pour tout $x \in D_f \subset E$.

$$D_f = D(f) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in E : f(x) \text{ est bien définie}\} = \underline{\text{le domaine de définition}}$$

$$f(D) \overset{\text{déf}}{=} \{y \in F : \exists\, x \in D_f \text{ tel que } f(x) = y\} = \underline{\text{l'ensemble image}}$$

**Déf** $f : E \to F$ est <u>surjective</u> si pour tout $y \in F$ il existe au moins un $x \in D_f$ tel que $f(x) = y$

**Déf** $f : E \to F$ est <u>injective</u> si pour tout couple $x_1, x_2 \in D_f$, tel que $f(x_1) = f(x_2)$, on a $x_1 = x_2$.

**Déf** Si $f : E \to F$ est injective et surjective, elle est <u>bijective</u>.

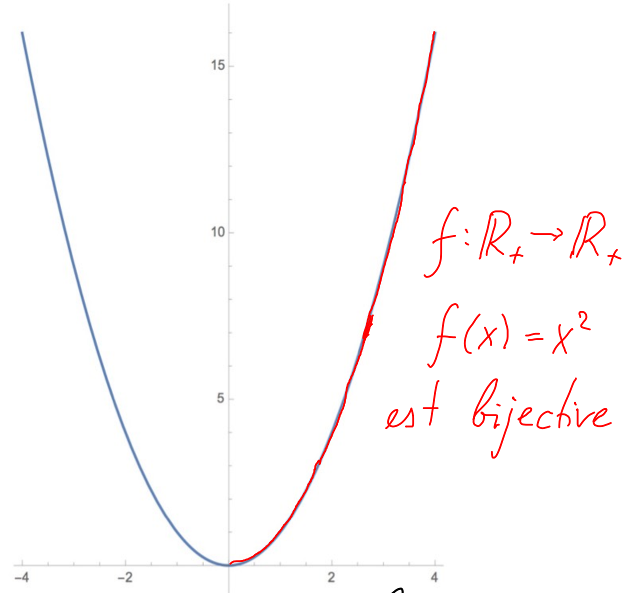
**Ex** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ n'est pas surjective.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $f(x) = x^2$ est surjective.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $f(x) = x^2$ n'est pas injective

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $f(x) = x^2$ est injective

$\Rightarrow$ $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est bijective



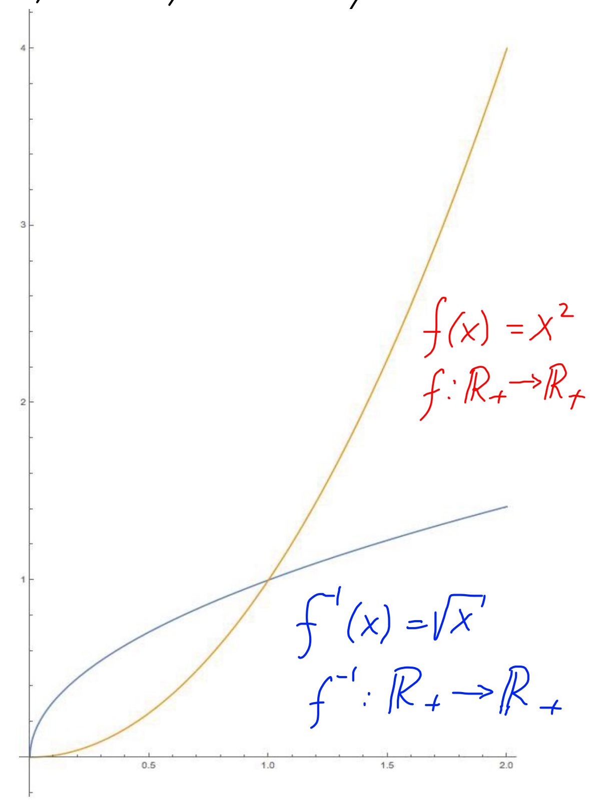

**Déf** Pour $f : E \to F$ bijective on définit la fonction réciproque par l'équation

$$\underset{x \in E}{f(x) = y} \iff \underset{y \in F.}{x = f^{-1}(y)}$$

**Ex 1** $f(x) = x^2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est bijective.

$f^{-1}(x) = \sqrt{x} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
sa fonction réciproque.

Les graphiques des fonctions réciproques sont symétriques par la droite $x = y$.



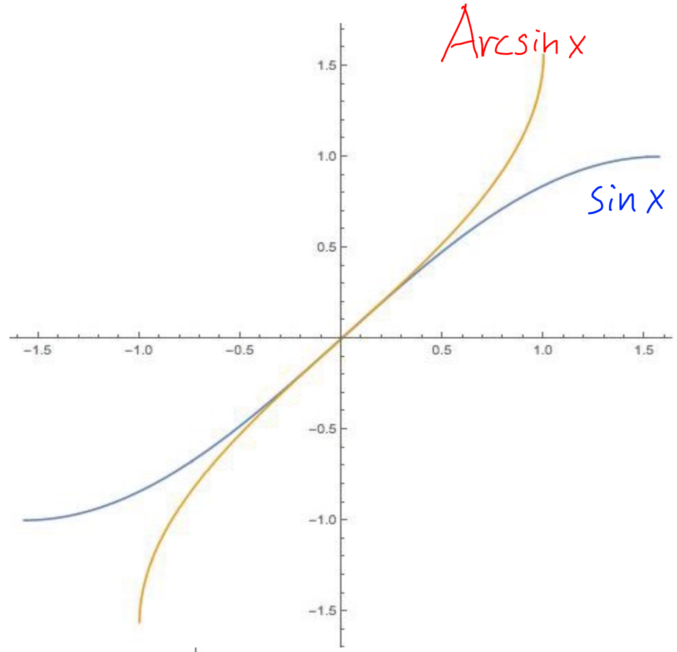
Si la fonction n'est pas bijective, on coupe son domaine de définition pour obtenir une fonction bijective et pouvoir définir la fonction réciproque.

## Ex 2

$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$
bijective.

$y = \sin x \iff x = \operatorname{Arcsin} y$

$\operatorname{Arcsin} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

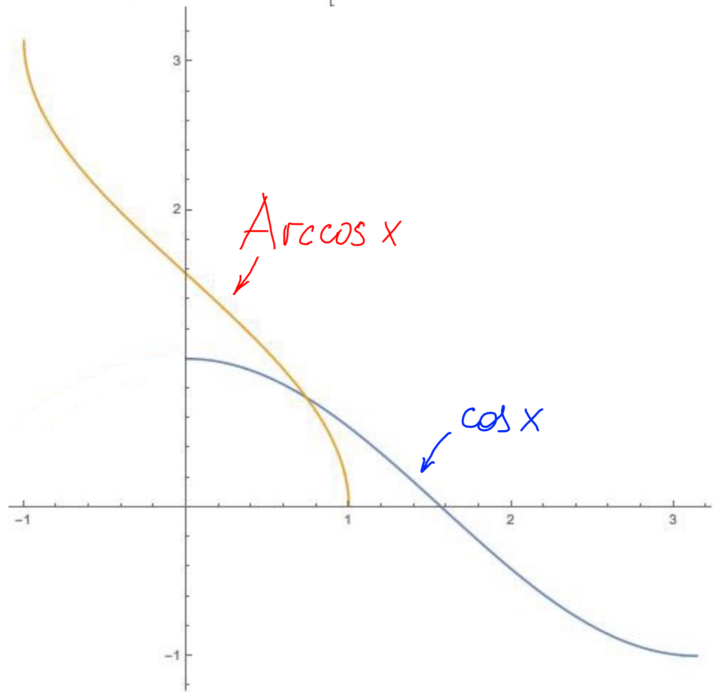



## Ex 3

$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$
bijective

$y = \cos x \iff x = \operatorname{Arccos} y$

$\operatorname{Arccos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$



# Fonctions composées

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$

Supposons que $f(D_f) \subset D_g$. Alors on peut définir la fonction composée

$$g \circ f : D_f \longrightarrow \mathbb{R} \text{ par la formule } g\circ f(x) = g(f(x)).$$

En général $g \circ f \neq f \circ g$.

Ex 1 $\quad f(x) = 2x+3$, $g(x) = \sin x \Rightarrow g\circ f(x) = \sin(2x+3)$

$$f \circ g(x) = 2\sin x + 3.$$

Ex 2 $\quad f^{-1}\circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ par la définition d'une fonction reciproque.

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

Si $f(D_f) \subset D_f$, on peut definir $f\circ f$, $f \circ f \circ f$, et ainsi de suite.

Ex 3 $\quad f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors $f\circ f\circ f\circ f(x) = x^{81}$.