Anna Lachowska

Analyse I – Série 3

Exercice 1. (V/F : Sous-ensembles de $\mathbb{R}$)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

Q1 : Si $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$, alors A est un intervalle fermé.

Q2 : Si A est un intervalle fermé et borné, alors $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$.

Q3 : Si $\sup A \in A$ et $\inf A \notin A$, alors A est un intervalle semi-ouvert.

Q4 : Si $\sup A = \inf A$, alors A est un point.

Q5 : Si A est minoré, alors $\inf A \notin A$.

Q6 : Si A est majoré, alors $\max A$ existe.

Nombres complexes.

Exercice 2. (V/F: Formule d'Euler)

$Q1: \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = i$ $\qquad Q2: \quad e^{-i\pi} = -1$ $\qquad Q3: \quad \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$

Exercice 3. (Forme polaire)

Calculer le module des nombres complexes suivants :

$i)$ e^{i+1} $\qquad ii)$ $e^{-(i+1)}$ $\qquad iii)$ $e^{-(i-1)}$ $\qquad iv)$ $e^{(i-50)}$

$v)$ $e^{(1-50i)}$ $\qquad vi)$ $\cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5)$

Exercice 4. (Partie réelle et partie imaginaire)

Trouver la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$i)$ $(2-3i)(3+2i)$ $\qquad ii)$ $\dfrac{2-3i}{3+2i}$ $\qquad iii)$ $\left(\dfrac{1}{i}\right)^{19}$

$iv)$ $(1-i\sqrt{3})^{10}$ $\qquad v)$ $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{1}{1+3i}$ $\qquad vi)$ $\dfrac{2-3i}{2+i} + \dfrac{1-i}{1+3i}$

$vii)$ e^{6+3i} $\qquad viii)$ $e^{2i} + e^{3i}$ $\qquad ix)$ $(e^{1-3i})\left(\dfrac{1+i}{1-3i}\right)$

Exercice 5. (Module et argument)

Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants :

i) $2+2i$ *ii)* $-e^i + i\sqrt{3}$ *iii)* $-1+i\tan(3)$

iv) $\dfrac{8i^{21}-2i^{11}}{1-i}$ *v)* $e^{\pi+i\pi}+1$ *vi)* $\sin(\pi/5)+i\cos(\pi/5)$

Exercice 6. (Racines de nombres complexes)

Trouver toutes les solutions des équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

i) $z^5=-1$ *ii)* $z^2=-3-3i$ *iii)* $z^2=5+2\sqrt{6}i$ *iv)* $z^4=-2i$

v) $z^3=-\sqrt{3}+i$

Exercice 7. (Equations polynomiales)

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

i) $z^2+6z+12-4i=0$ *ii)* $z^6+4z^3+2=0$

Exercice 8. (Encore une équation)

Trouver la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de tous les nombres complexes z qui satisfont l'équation

$$z^2 = \left(1+\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^8 \ .$$

Exercice 9. (Décomposition d'un polynôme)

Décomposer le polynôme z^6+8 en produit de facteurs irréductibles complexes et en produit de facteurs irréductibles réelles.

Exercice 10. (Sous-ensembles de $\mathbb{C}$)

Démontrer l'égalité suivante :

$$\left\{z\in\mathbb{C}\colon\ z\neq 0,\ z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}\right\} = \{z\in\mathbb{C}\colon\ z\neq 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z)=0, \text{ ou } |z|=1\} \ .$$

Exercice 11. (V/F : Nombres complexes)

Q1 : Le polynôme z^2+1 divise $z^6+3z^4+z^2-1$.

Q2 : Soient $z_1,\ldots,z_n$ les racines complexes du polynôme $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$. Alors on a $\prod_{j=1}^{n} z_j = (-1)^n a_0$.

Q3 : Il existe un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $(2+2i\sqrt{3})^n$ soit réel.