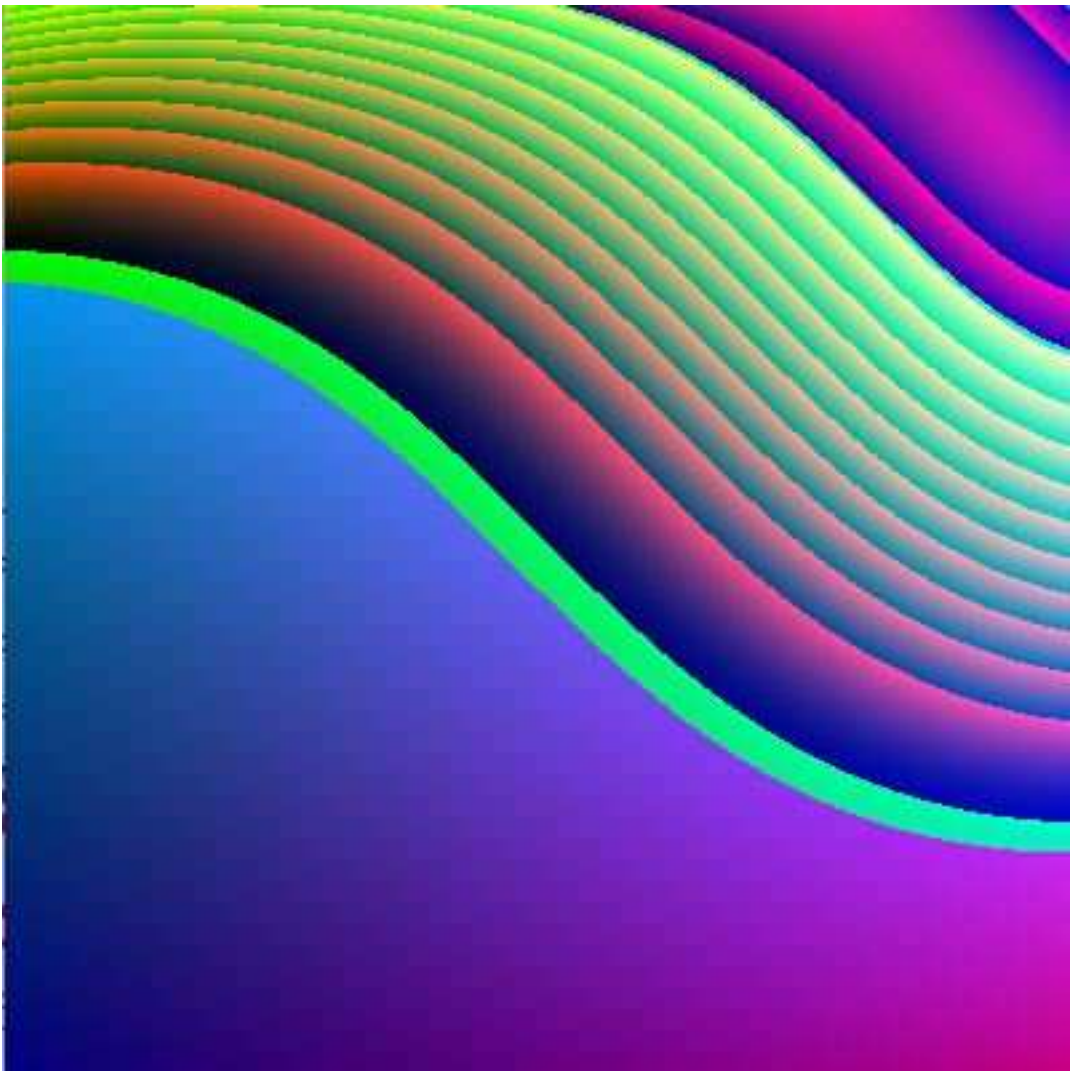


---

Felice Ronga

# Topologie et géométrie

---



Genève, MMVI ap. J.-C.



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>A Topologie générale</b>	<b>1</b>
<b>I Topologies</b>	<b>3</b>
I.1 Espaces topologiques . . . . .	3
I.1.1 Espaces métriques . . . . .	4
I.1.2 Base de topologie . . . . .	5
I.1.3 Comparaison de topologies . . . . .	7
I.2 Applications continues, homéomorphismes . . . . .	7
Continuité . . . . .	7
Homéomorphismes . . . . .	9
I.2.1 Ouverts, fermés, voisinages . . . . .	10
Fermés . . . . .	10
Frontière d'un sous-ensemble . . . . .	12
Voisinages . . . . .	12
Applications ouvertes, fermées . . . . .	13
I.3 Topologie somme disjointe . . . . .	14
<b>II Topologie produit et topologie quotient</b>	<b>17</b>
II.1 Topologie produit . . . . .	17
II.1.1 Définition et propriétés fondamentales . . . . .	17
II.1.2 Encore des propriétés de la topologie produit . . . . .	19
Tranches . . . . .	19
Métrisabilité . . . . .	21
Amplification . . . . .	22
II.1.3 L'ensemble de Cantor . . . . .	23
II.2 Topologie quotient . . . . .	25
<b>III Espaces compacts</b>	<b>31</b>
III.1 Espaces topologiques séparés . . . . .	31
III.2 Espaces compacts . . . . .	32
III.2.1 Somme disjointe et produits d'espaces compacts . . . . .	35
III.2.2 Attachement de deux espaces . . . . .	36
III.3 Compacts dans les espaces métriques . . . . .	37
III.4 Espaces localement compacts . . . . .	39
III.4.1 Applications propres . . . . .	41
III.4.2 Le compactifié d'Alexandroff . . . . .	42
III.5 Les espaces projectifs . . . . .	43

<b>IV</b>	<b>Espaces connexes</b>	<b>47</b>
IV.1	Espaces connexes . . . . .	47
	Composantes connexes . . . . .	50
	Produits de connexes . . . . .	51
	Le théorème fondamentale de l'algèbre. . . . .	52
IV.2	Espaces connexes par arcs . . . . .	53
IV.3	Espaces localement connexes . . . . .	54
<b>B</b>	<b>Topologie et géométrie différentielle</b>	<b>57</b>
<b>V</b>	<b>Degré des applications du cercle dans lui-même</b>	<b>59</b>
V.1	Définition et propriétés du degré . . . . .	59
	Le théorème du point fixe de Brower . . . . .	67
	Le théorème de Nash sur l'existence de points d'équilibre . . . . .	68
V.2	Champs de vecteurs sur la sphère $S^2$ . . . . .	69
	Champs de vecteurs dans le plan . . . . .	69
	Champs de vecteurs sur la sphère . . . . .	71
<b>VI</b>	<b>Géométrie différentielle des courbes</b>	<b>75</b>
	Préliminaires . . . . .	75
VI.1	Courbes régulières . . . . .	75
VI.1.1	Longueur d'arc . . . . .	76
VI.2	Ordre de contact . . . . .	77
VI.3	Courbes planes : cercles osculateurs, courbure, points d'inflexion . . . . .	80
VI.3.1	Cercles osculateurs . . . . .	80
	Osculation ordinaire et hyperosculation . . . . .	84
VI.3.2	Points d'inflexion . . . . .	87
VI.3.3	Le théorème des quatre sommets . . . . .	87
VI.4	Courbes dans l'espace . . . . .	90
<b>VII</b>	<b>Géométrie différentielle des surfaces de l'espace</b>	<b>95</b>
VII.1	Définitions et exemples . . . . .	95
VII.2	Première et deuxième formes fondamentales . . . . .	97
	La première forme fondamentale . . . . .	97
	La deuxième forme fondamentale . . . . .	98
VII.2.1	Les ombilics de l'ellipsoïde . . . . .	101
	<b>Bibliographie</b>	<b>103</b>
	<b>Index</b>	<b>104</b>

# Table des figures

I.1	Boules pour les métriques $d_1, d_2, d_\infty$	7
I.2	Un voisinage de $x$	13
II.1	Un morceau de surface de révolution	20
II.2	Le tore des topologues	20
II.3	Un tore des autres	21
II.4	Esquisses des identifications	29
II.5	Une représentation du ruban de Moebius	30
II.6	Le quotient de l'exemple II.2.11(2)	30
III.1	Les divers ensembles qui apparaissent dans le lemme III.4.5	40
III.2	La projection stéréographique depuis le pôle nord	44
IV.1	Le peigne des topologues	49
IV.2	La spirale $\rho = e^{-\frac{1}{\theta}}$ , $\theta > 0$	50
IV.3	Demi-droites issues de l'origine de pente $\frac{1}{n}$ , $n \geq 1$	51
IV.4	Le peigne des topologues n'est pas localement connexe, bien que connexe	55
V.1	Image par $p$ de l'intervalle $]a, b[$ et un ouvert de la forme $U_t$	60
V.2	L'application $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ se relève en $\hat{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$	61
V.3	Extension de $\hat{f}$	63
V.4	L'application $f : S^1 \rightarrow S^1$ , $f(z) = z^2$ , est de degré 2	64
V.5	Construction de $\hat{h}(s, t)$ dans la preuve de V.1.13	66
V.6	Définition de l'application $g : D^2 \rightarrow S^1$	68
V.7	Interprétation du lemme V.1.25	69
V.8	Passage de $\sigma_N(P)$ à $\sigma_S(P)$	73
VI.1	Interprétation du signe de la courbure	83
VI.2	Cercles osculateurs à l'ellipse	84
VI.3	Cercles tangents en un point d'osculation ordinaire	85
VI.4	Une droite coupe une courbe convexe	88
VI.5	Une courbe fermée avec deux sommets	89
VI.6	Situation de la courbe dans la preuve de VI.3.16	90
VI.7	Esquisse de la variation de $k(s)$	90
VI.8	Deux visions de la cubique gauche	92



**Partie A**

**Topologie générale**





# Chapitre I

## Topologies

*Sommaire.*<sup>1</sup> On définit les notions de bases : espace topologique, ouverts, fermés, voisinages, applications continues, homéomorphismes. Les définitions sont inspirées des notions analogues que l'on connaît dans  $\mathbb{R}^n$ . Le but est autant de généraliser des notions fondamentales comme la continuité, que de mieux saisir leur sens profond; ainsi, la notion de fonction continue  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  peut s'exprimer uniquement en termes d'ouverts, ou de fermés, ou de voisinages, sans référence à la métrique de  $\mathbb{R}$  (voir I.2.2).

### I.1 Espaces topologiques

On commence par une définition fondamentale.

**Définition I.1.1** (Espace topologique). Soit  $X$  un ensemble et désignons par  $\mathcal{P}(X)$  l'ensemble de ses parties. Une *topologie* sur  $X$  est un sous-ensemble  $\tau \subset \mathcal{P}(X)$  (c'est-à-dire :  $\tau$  est un certain ensemble de parties de  $X$ ), qui vérifie :

- (1)  $\emptyset, X \in \tau$
- (2) Si  $\{U_i\}_{i \in I} \subset \tau$ , alors  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$
- (3) Si  $U_1, \dots, U_N \in \tau$ , alors  $\bigcap_{j=1}^N U_j \in \tau$

Les éléments de  $\tau$  sont appelés *les ouverts* de la topologie; les conditions (1), (2) et (3) ci-dessus sont les axiomes d'une topologie. On peut donc rephraser cette définition en disant qu'une topologie est une collection de sous-ensembles de  $X$ , appelés ouverts, qui doivent vérifier que

- (1) l'ensemble vide et  $X$  sont ouverts
- (2) une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert
- (3) une intersection finie d'ouverts est un ouvert

On écrira parfois  $(X, \tau)$  pour préciser que l'on considère l'ensemble  $X$  muni de la topologie  $\tau$ .

Voici quelques exemples; les trois premiers sont plutôt formels, le quatrième est un exemple plus substantiel.

#### Exemples I.1.2.

- (1)  $X$  un ensemble quelconque,  $\tau = \{\emptyset, X\}$ . On l'appelle *topologie grossière* ; elle contient le minimum possible d'ouverts. Les axiomes de topologie sont trivialement satisfaits.
- (2)  $X$  un ensemble quelconque,  $\tau = \mathcal{P}(X)$ . On l'appelle *topologie discrète*; elle contient le maximum possible d'ouverts. Les axiomes de topologie sont évidemment satisfaits.

---

<sup>1</sup>Version du 8 décembre 2006, à 14h. 07

- (3)  $X = 0, 1$ ,  $\tau = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$ . Ce n'est ni la topologie discrète, ni la topologie grossière. On vérifie facilement que les axiomes de topologie sont satisfaits. Cet espace est appelé *espace de Sirpinski*.
- (4) On considère  $\mathbb{R}^2$ , muni de la distance euclidienne

$$x, y \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

et on définit la *boule ouverte de centre  $x$ , rayon  $r > 0$*  par :

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, y) < r\} \quad .$$

On définit une topologie  $\tau$  en disant que  $U \subset \mathbb{R}^2$  est ouvert si :

$$\forall x \in U \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset U \quad .$$

Voyons que les axiomes d'une topologie donnés dans [I.1.1](#) sont satisfaits :

- (1) est immédiat
- (2) Soit  $\{U_i\}_{i \in I}$  des éléments de  $\tau$ ; pour tout  $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ , il existe  $i_0$  tel que  $x \in U_{i_0}$ . Comme  $U_{i_0}$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset U_{i_0}$ ; donc  $x \in B(x, r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ . Ceci montre bien que  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ .
- (3) Soient  $U_1, \dots, U_N \in \tau$ ; si  $x \in \bigcap_{j=1}^N U_j$ , pour tout  $j = 1, \dots, N$  il existe  $r_j > 0$  tel que  $x \in B(x, r_j) \subset U_j$ . On pose  $r = \min\{r_1, \dots, r_N\} > 0$ , et alors  $x \in B(x, r) \subset U_j, \forall j = 1, \dots, N$ , donc  $x \in B(x, r) \subset \bigcap_{j=1}^N U_j$ . Ceci montre bien que  $\bigcap_{j=1}^N U_j \in \tau$ .
- (5) L'exemple précédent se généralise sans autres à  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  : on définit la *distance euclidienne* par

$$x, y \in \mathbb{R}^n \quad , \quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

et la *boule ouverte de centre  $x$  et rayon  $r > 0$*  par

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\} \quad .$$

La topologie correspondante sur  $\mathbb{R}^n$  est définie en disant que  $U \subset \mathbb{R}^n$  est ouvert si

$$\forall x \in U \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset U$$

- (6) *Topologie induite sur un sous-ensemble*. Soit  $(X, \tau_X)$  un espace topologique et  $A \subset X$  un sous-ensemble. On définit une topologie  $\tau_A$  sur  $A$  en posant :

$$\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau_X\} \quad .$$

Autrement dit, on prend comme ouverts de  $A$  les intersections d'ouverts de  $X$  avec  $A$ .

### I.1.1 Espaces métriques

L'exemple de  $\mathbb{R}^n$  avec la distance euclidienne ci-dessus se généralise aux espaces métriques.

**Définition I.1.3** (Espaces métriques). Soit  $X$  un ensemble; une *distance* ou *métrique* sur  $X$  est une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$  et  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ .
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie)
- (3)  $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité du triangle)

On dit que le couple  $(X, d)$  est un espace métrique.

Par exemple, la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$  en fait un espace métrique : c'est un exercice qui est laissé au lecteur; on peut en trouver la démonstration dans [3, th. IV.1.1].

La définition de topologie sur  $\mathbb{R}^2$  à partir de la distance euclidienne 1.1.2(4) se généralise aux espaces métriques.

**Définition I.1.4** (Topologie associée à une métrique). Soit  $(X, d)$  un espace métrique; soient  $x \in X$  et  $r > 0$ . La *boule ouverte* de centre  $x$  et rayon  $r$  est définie par :

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

et on définit une topologie  $\tau$  sur  $X$  en disant que  $U \subset X$  est ouvert si :

$$\forall x \in U \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset U \quad .$$

La vérification que c'est bien une topologie se fait comme dans l'exemple de  $\mathbb{R}^2$  1.1.2(4).

L'exemple de base est une fois de plus  $\mathbb{R}^n$  muni de la distance euclidienne et sa topologie associée. Un exemple plus surprenant est celui de la métrique discrète :

**Exemple I.1.5** (Métrique discrète). Soit  $X$  un ensemble quelconque et définissons  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$x, y \in X \quad , \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad .$$

Les conditions (1) et (2) de 1.1.3 sont immédiates. Pour l'inégalité du triangle, si  $x = z$  il n'y a rien à vérifier; si  $x \neq z$ , alors  $z \neq y$  ou bien  $x \neq y$ , et donc  $d(z, y) + d(y, x) \geq 1 = d(x, z)$ . Si  $U \subset X$  est quelconque et  $x \in U$ , puisque  $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$ , on a  $x \in B(x, \frac{1}{2}) \subset U$ , donc  $U$  est ouvert. Ainsi, la topologie associée à la métrique discrète est la topologie discrète 1.1.2(2).

**Remarques I.1.6.**

- (1) Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Les boules ouvertes elles-mêmes sont des ouverts. En effet, si  $y \in B(x, r)$ , alors  $d(x, y) < r$  et alors  $\rho = r - d(x, y) > 0$ . Vérifions que  $B(y, \rho) \subset B(x, r)$  : si  $z \in B(y, \rho)$ ,  $d(z, y) < \rho$  et alors  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \rho = d(x, y) + r - d(x, y) = r$ .
- (2) Toutes les topologies ne proviennent pas d'une métrique. L'exemple le plus simple est celui de la topologie grossière sur un ensemble avec au moins 2 éléments : si  $d$  est une quelconque métrique sur  $X$  et  $x, y \in X$ , posons  $r = d(x, y)$ ; alors  $B(x, r)$  est un ouvert, comme on vient de le voir, et il contient  $x$ , mais pas  $y$ . Mais un tel ouvert n'existe pas dans la topologie grossière.

## I.1.2 Base de topologie

Une fois de plus, l'inspiration vient de l'espace  $\mathbb{R}^2$ , où on a construit une topologie à partir des boules ouvertes.

**Définition I.1.7** (Base de topologie). Soit  $X$  un ensemble. On dit qu'un ensemble  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  de parties de  $X$  est une base de topologie si

- (1)  $\forall x \in X \exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que } x \in B$
- (2)  $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ et } x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B} \text{ tel que } x \in B_3 \text{ et } B_3 \subset B_1 \cap B_2$

**Définition I.1.8** (Topologie associée à une base). Soit  $\mathcal{B}$  une base de topologie sur l'ensemble  $X$ . La topologie  $\tau_{\mathcal{B}}$  associée à cette base est définie en prenant comme ouverts les réunions quelconques d'éléments de la base :

$$\tau_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}, i \in I \right\} \quad .$$

A noter que si on prend  $I = \emptyset$ , on obtient l'ensemble vide. Aussi, il est équivalent de prendre comme ouverts les  $U \subset X$  tels que  $\forall x \in U \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ tel que } x \in B_x \subset U$  : une telle propriété est vérifiée par les éléments de la définition première de  $\tau_{\mathcal{B}}$ ; d'autre part, un tel  $U$  est réunion des  $B_x$ , donc dans  $\tau_{\mathcal{B}}$ .

Reste à voir que  $\tau_{\mathcal{B}}$  est effectivement une topologie : il suit de (1) de I.1.7 que  $X \in \tau_{\mathcal{B}}$  et on a vu (ou précisé) que  $\emptyset \in \tau_{\mathcal{B}}$  comme réunion de la famille vide d'éléments de la base : l'axiome (1) de I.1.1 est donc satisfait. L'axiome (2) vient du fait que la réunion d'une famille de réunions d'éléments de base est une réunion d'éléments de base :

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left( \bigcup_{i_{\lambda} \in I_{\lambda}} B_{i_{\lambda}} \right) = \bigcup_{i_{\lambda} \in I_{\lambda}, \lambda \in \Lambda} B_{i_{\lambda}} \quad .$$

Enfin, pour l'axiome (3), il suffit de prendre 2 ouverts et voir que leur intersection est encore un ouvert :

$$\left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (B_i \cap B_j)$$

et il suit de I.1.7(2) que  $B_i \cap B_j$  est réunion d'éléments de la base.

**Exemple I.1.9.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On pose  $\mathcal{B}_d = \{\text{boules ouvertes}\}$ . C'est une base de topologie : pour la condition I.1.7(2), si  $x \in B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2)$ , on pose  $\rho = \min \{r_1 - d(x, a_1), r_2 - d(x, a_2)\} > 0$ , et alors si  $y \in B(x, \rho)$ ,  $d(y, x) < \rho$ , donc, pour  $i = 1, 2$ ,  $d(y, a_i) \leq d(y, x) + d(x, a_i) < r_i - d(y, a_i) + d(y, a_i) = r_i$ , ce qui fait que  $B(y, \rho) \subset B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ .

Parfois des bases différentes peuvent engendrer les mêmes topologies; c'est le cas si les bases sont équivalentes au sens suivant.

**Définition I.1.10** (Bases équivalentes). Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de topologie sur  $X$ ; on dit qu'elles sont équivalentes si

$$\forall B' \in \mathcal{B}' \text{ et } x \in B', \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ tel que } x \in B_x \subset B'$$

et inversement :

$$\forall B \in \mathcal{B} \text{ et } x \in B, \exists B'_x \in \mathcal{B}' \text{ tel que } x \in B'_x \subset B \quad .$$

Si c'est le cas, on a évidemment que  $\tau_{\mathcal{B}} = \tau_{\mathcal{B}'}$

**Exemple I.1.11** (Métriques équivalentes). On dit que 2 métriques  $d_1$  et  $d_2$  sur le même ensemble  $X$  sont équivalentes s'il existe des constantes  $K_1$  et  $K_2$  telles que

$$\forall x, y \in X \quad , \quad d_1(x, y) \leq K_1 \cdot d_2(x, y) \text{ et } d_2(x, y) \leq K_2 \cdot d_1(x, y) \quad .$$

Si c'est le cas, les bases de topologie  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  constituées par les boules ouvertes associées à  $d_1$  et  $d_2$  respectivement sont équivalentes. En effet, si  $B_1(a, r)$  désigne une boule définie à l'aide de  $d_1$  et  $x \in B_1(a, r)$ , on sait que  $B_1(x, \rho) \subset B_1(a, r)$ , où  $\rho = r - d_1(x, a)$ ; mais alors  $B_2(x, \frac{\rho}{K_2}) \subset B_1(x, \rho) \subset B_1(a, r)$ . Comme on peut échanger les rôles de  $d_1$  et  $d_2$ , on a bien que les deux bases sont équivalentes.

Dans le cas de  $\mathbb{R}^n$ , il y a d'autres métriques qui sont naturelles :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad , \quad d_{\infty} = \sup \{|x_i - y_i|, i = 1, \dots, n\}$$

et, en désignant par  $d_2$  la métrique euclidienne, on vérifie que

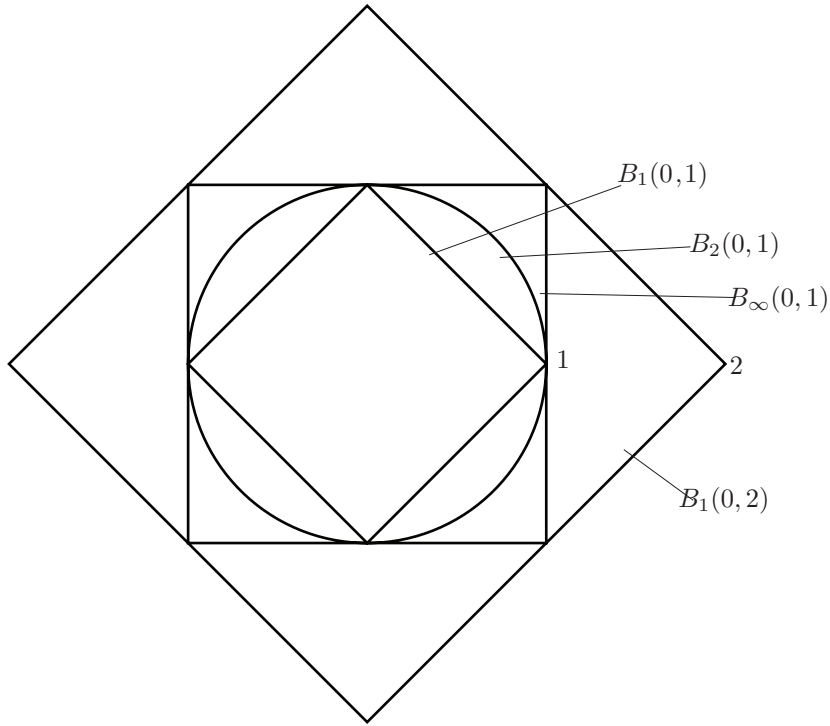
$$(1-1) \quad d_{\infty}(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n \cdot d_{\infty}(x, y)$$

ce qui fait que toutes ces métriques sont équivalentes, et donc définissent la même topologie sur  $\mathbb{R}^n$ . Par contre, la métrique discrète n'est pas équivalente à ces métriques.

Si on note  $B_i(0, r)$  la boule de centre 0 et rayon  $r$  par rapport à la métrique  $d_i$ ,  $i = 1, 2, \infty$ , pour  $n = 2$  on déduit de (1-1) des inclusions :

$$B_1(0, 1) \subset B_2(0, 1) \subset B_{\infty}(0, 1) \subset B_1(0, 2)$$

qui sont représentées sur la figure I.1

Figure I.1: Boules pour les métriques  $d_1, d_2, d_\infty$ 

### I.1.3 Comparaison de topologies

Soient  $\tau_1$  et  $\tau_2$  deux topologies sur le même ensemble  $X$ . On dit que  $\tau_2$  est plus fine que  $\tau_1$  si  $\tau_1 \subset \tau_2$ , c'est-à-dire si tout sous-ensemble de  $X$  qui est ouvert pour  $\tau_1$  est aussi ouvert pour  $\tau_2$ . La topologie discrète  $\tau_d$  est plus fine que toute autre topologie, alors que la topologie grossière  $\tau_g$  est moins fine que toute topologie : on peut écrire  $\tau_g \subset \tau \subset \tau_d$  pour toute topologie  $\tau$ , toujours sur le même ensemble  $X$ .

Deux topologies ne sont pas forcément comparables : si l'on prend  $X = \{0, 1\}$ ,  $\tau_1 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$ ,  $\tau_2 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}\}$  on n'a ni  $\tau_2 \subset \tau_1$ , ni  $\tau_1 \subset \tau_2$ .

## I.2 Applications continues, homéomorphismes

### Continuité

**Définition I.2.1.** Soient  $(X, \tau_X)$  et  $(Y, \tau_Y)$  deux espaces topologiques,  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $x \in X$ ,  $y = f(x)$ . On dit que  $f$  est continue au point  $x$  si :

$$\forall V \in \tau_Y, V \ni y, \exists U \in \tau_X, U \ni x \text{ et } f(U) \subset V \quad .$$

Autrement dit, pour tout ouvert  $V$  de  $Y$  contenant  $y$ , on peut trouver un ouvert  $U$  de  $X$  contenant  $x$ , dont l'image par  $f$  est contenue dans  $V$ .

On dit que  $f$  est continue (tout court) si elle est continue pour tout  $x \in X$ .

Montrons que dans le cas des espaces métriques, en particulier  $\mathbb{R}^n$  avec la métrique euclidienne, on retrouve la définition classique de continuité.

**Proposition I.2.2.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques,  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $x \in X$ ,  $y = f(x)$ . Alors  $f$  est continue au point  $x$ , au sens de la définition précédente, pour les topologies associées aux métriques  $d_X$  respectivement  $d_Y$ , si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tel que } d_X(x, x') < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \quad .$$

*Preuve:* Supposons que  $f$  soit continue au sens de 1.2.1. Soit  $\varepsilon > 0$  donné; puisque  $B_Y(y, \varepsilon)$  est un ouvert, contenant  $y$ , il existe un ouvert  $U$  de  $X$ ,  $U \ni x$  et  $f(U) \subset B_Y(y, \varepsilon)$ . Puisque  $U$  est ouvert et  $U \ni x$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $B_X(x, \delta) \subset U$ . Alors  $f(B_X(x, \delta)) \subset f(U) \subset B_Y(y, \varepsilon)$ ; cette inclusion équivaut à dire :

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

c'est-à-dire la continuité au sens classique.

Réciproquement, soit  $V \ni y$  un ouvert de  $Y$ ; par définition des ouverts associés à une métrique, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_Y(y, \varepsilon) \subset V$ . Par hypothèse, il existe  $\delta_\varepsilon$  tel que  $d_X(x, x') < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ , ce qui implique que  $f(B_X(x, \delta_\varepsilon)) \subset V$ ; ceci montre la continuité de  $f$  au point  $x$ , au sens de 1.2.1.

*q.e.d.*

### Exemples 1.2.3.

- (1) On retrouve évidemment toutes les fonctions continues au sens classique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , ou de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ , telles que  $x \mapsto x^2$ ,  $\sin(x)$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ .
- (2) Si  $X$  est muni de la topologie discrète, toute application  $f : X \rightarrow Y$  est continue.
- (3) Si  $Y$  est muni de la topologie grossière, toute application  $f : X \rightarrow Y$  est continue.
- (4) Une application constante  $f : X \rightarrow Y$  est toujours continue : si  $f(X) = \{y_0\}$ ,  $f^{-1}(V)$  est soit  $X$ , si  $y_0 \in V$ , soit vide, si  $y_0 \notin V$ .
- (5) La continuité d'une application dépend des topologies que l'on considère. Par exemple, soit  $X = \{0, 1\}$ ,  $\tau_1 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$ ,  $\tau_2 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}\}$ . L'application identité  $id : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_1)$  est évidemment continue, alors que la même application, mais avec des topologies différentes  $id : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$  n'est pas continue au point 1, car  $id^{-1}(\{1\}) = \{1\}$ , qui n'est pas ouvert pour  $\tau_1$ ; par contre, elle est continue au point 0.



**Remarque 1.2.4.** Il faut faire attention à l'ambiguïté de la notation  $f^{-1}$ , où  $f : X \rightarrow Y$  est une application.

D'une part, sans aucune hypothèse sur  $f$ , on peut définir une application, que l'on note  $f^{-1}$ , qui va des parties de  $Y$  dans les parties de  $X$ , et qui à  $B \subset Y$  associe son image inverse par  $f$  :

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \quad .$$

D'autre part, si l'on suppose que  $f$  est bijective, son inverse est une vraie application de  $Y$  dans  $X$ , que l'on note aussi  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ . Notons que si  $B \subset Y$ , l'image de  $B$  par  $f^{-1}$ , notée  $f^{-1}(B)$ , coïncide avec l'image inverse par  $f$  de  $B$ , notée aussi  $f^{-1}(B)$ .

La continuité globale d'une application revient à dire qu'elle respecte les topologies par image inverse, c'est-à-dire :

**Proposition 1.2.5.** Soient  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une application. Alors

$$f \text{ est continue} \iff \forall V \in \tau_Y, \quad f^{-1}(V) \in \tau_X \quad .$$

*Preuve:* Si  $f : X \rightarrow Y$  est continue et  $V \subset Y$  est ouvert, soit  $U = f^{-1}(V)$  et  $x \in U$ . Puisque  $f$  est continue au point  $x$ , il existe  $U_x$  ouvert dans  $X$ ,  $U_x \ni x$ , tel que  $f(U_x) \subset V$ , ce qui implique que  $U_x \subset f^{-1}(V) = U$ . Alors  $f^{-1}(V) = U = \bigcup_{x \in U} U_x$  est une réunion d'ouverts, donc ouvert.

Réciproquement, soit  $x \in X$  et  $V \ni f(x)$  un ouvert de  $Y$ ; alors par hypothèse  $U = f^{-1}(V)$  est un ouvert de  $X$ , et  $x \in U$ ,  $f(U) \subset V$ ;  $f$  est donc continue au point  $x$  au sens de 1.2.1.

*q.e.d.*

**Remarques 1.2.6.** (1) Il suit de cette proposition que si  $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$  est continue et que l'on remplace  $\tau_X$  et  $\tau_Y$  par des topologies  $\tau'_X$ ,  $\tau'_Y$ , avec  $\tau'_X$  plus fine que  $\tau_X$  et  $\tau'_Y$  moins fine que  $\tau_Y$ , soit en symboles  $\tau'_X \supset \tau_X$  et  $\tau'_Y \subset \tau_Y$ , alors  $f : (X, \tau'_X) \rightarrow (Y, \tau'_Y)$  est encore continue.

- (2) En général, l'image directe d'un ouvert par une application continue n'est pas un ouvert. Par exemple, prenons  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ ; alors  $f([-1, 1]) = [0, 1]$ , qui n'est pas ouvert dans  $\mathbb{R}$ .

**Exemple I.2.7.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. L'ensemble  $U = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\}$  est ouvert, car si  $y \neq 0$ , la boule  $B(y, |y|)$ , qui est égale à  $]0, 2y[$  si  $y > 0$ , et sinon à  $] - 2y, 0[$ , est contenue dans  $U$ . Il en suit que l'ensemble  $U = \varphi^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$  est ouvert. Par exemple, soit  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(a_1, a_2, b_1, b_2) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Le fait que  $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) \neq 0\}$  est ouvert a pour conséquence que si  $a = (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$  sont deux vecteurs linéairement indépendants, ce qui équivaut à dire que  $f(a, b) \neq 0$ , alors les paires de vecteurs proches de  $(a, b)$  le sont aussi.

Voici quelques propriétés générales des applications continues.

**Proposition I.2.8.** Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  des applications continues.

- (1) La composition  $g \circ f : X \rightarrow Z$  est continue.
- (2) Soit  $A \subset X$ ; si on munit  $A$  de la topologie induite par celle de  $X$ , la restriction  $f|_A$  de  $f$  à  $A$  est continue.
- (3) Soit  $B \subset Y$  tel que  $f(X) \subset B$ . Si on munit  $B$  de la topologie induite,  $f : X \rightarrow B$  est continue.

*Preuve:* (1) Si  $W \in \tau_Z$ ,  $g^{-1}(W) \in \tau_Y$  car  $g$  est continue, donc  $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$  est dans  $\tau_X$  car  $f$  est continue.

(2) Si  $V \in \tau_Y$ ,  $(f|_A)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ , et  $f^{-1}(V)$  est ouvert dans  $X$  car  $f$  est continue et alors  $f^{-1}(V) \cap A$  est ouvert dans  $A$  par définition de la topologie induite.

(3) Il suffit de remarquer que, puisque  $f(X) \subset B$ , si  $V \in \tau_Y$ ,  $f^{-1}(V) = f^{-1}(B \cap V)$ .

*q. e. d.*

## Homéomorphismes

Nous allons définir la notion d'homéomorphisme, qui est celle d'équivalence au sens des topologies.

**Définition I.2.9** (Homéomorphisme). Soient  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques. On dit que  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme si les 3 conditions suivantes sont satisfaites :

- (1)  $f$  est continue
- (2)  $f$  est une bijection, dont l'inverse est noté  $f^{-1} : Y \rightarrow X$
- (3) L'application  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  est continue.

On dit que les espaces topologiques  $X$  et  $Y$  sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme  $f : X \rightarrow Y$ .

Un des buts de la topologie est de pouvoir dire quand deux espaces sont homéomorphes.

## Exemples I.2.10.

- (1) Le cercle  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  et le carré  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sup\{|x|, |y|\} = 1\}$  sont homéomorphes :  $f : S^1 \rightarrow C$ ,  $f(x, y) = \frac{1}{\sup\{|x|, |y|\}}(x, y)$  est un homéomorphisme, dont l'inverse est  $g : C \rightarrow S^1$ ,  $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)$ .
- (2) On reprend l'exemple de  $X = \{0, 1\}$ , avec les topologies  $\tau_1 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$ ,  $\tau_2 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}\}$ . L'application  $f : X \rightarrow X$  qui envoie 0 sur 1 et 1 sur 0 est un homéomorphisme.
- (3) Si on a une bijection, continue, ce n'est pas forcément un homéomorphisme. Par exemple, on reprend l'espace  $X = \{0, 1\}$ , avec la topologie  $\tau_1$  et avec la topologie grossière  $\tau_g$ . Alors  $id : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_g)$  est continue, mais  $id : (X, \tau_g) \rightarrow (X, \tau_1)$  ne l'est pas.
- (4) L'application  $f : [0, 1[ \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto (\sin(\pi t), \cos(\pi t))$  est continue, bijective, mais son inverse n'est pas continu (exercice).

### I.2.1 Ouverts, fermés, voisinages

En plus des ouverts, il y a d'autres sous-ensembles qui jouent un rôle pour un espace topologique, les fermés et les voisinages des points, à l'aide desquels on peut aussi exprimer la continuité d'une application. En fait il y a plusieurs façons équivalentes de se donner une topologie : en se donnant la famille des ouverts, comme on l'a fait déjà, ou bien en se donnant la famille des fermés, ou encore les voisinages de chaque point.

#### Fermés

**Définition I.2.11** (Sous-ensembles fermés). Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique. On dit que  $A \subset X$  est *fermé* si  $X \setminus A$  est ouvert.

**Exemple I.2.12.** Soit  $(X, d)$  une espace métrique, et considérons la topologie associée à cette métrique. Alors, si  $x \in X$ , le sous-ensemble de  $X$  réduit au point  $x$ , que l'on note  $\{x\}$ , est fermé. En effet, si  $x' \in X \setminus \{x\}$ , cela veut dire que  $x' \neq x$  et alors  $B_d(x, d(x, x')) \subset X \setminus \{x\}$ , ce qui montre que  $X \setminus \{x\}$  est ouvert, donc  $\{x\}$  est fermé.

**Proposition I.2.13** (Propriétés fondamentales des fermés). Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique.

- (1)  $\emptyset$  et  $X$  sont fermés
- (2) Si  $\{A_i\}_{i \in I}$  est une famille de fermés, alors  $\bigcap_{i \in I} A_i$  est un fermé
- (3) Si  $A_1, \dots, A_N \subset X$  sont fermés, alors  $\bigcup_{h=1, \dots, N} A_h$  est fermé

La preuve consiste à passer aux complémentaires et utiliser les points correspondants de la définition I.1.1.

■

La notion d'adhérence (on dit aussi fermeture) permet de mieux comprendre la notion de fermé.

**Définition I.2.14** (Adhérence d'un sous-ensemble). Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique et  $A \subset X$ . On définit l'*adhérence* ou *fermeture*  $\overline{A}$  de  $A$  par :

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \text{si } U \in \tau \text{ et } U \ni x \text{ alors } U \cap A \neq \emptyset\} \quad .$$

Autrement dit,  $x$  est dans l'adhérence de  $A$  si tout ouvert  $U$  qui contient  $x$  rencontre  $A$ .

Evidemment,  $A \subset \overline{A}$ . Si on prend par exemple  $A = [0, 1[ \subset \mathbb{R}$ ,  $\overline{A} = [0, 1]$ .

**Proposition I.2.15** (Propriétés de l'adhérence). Soit  $X$  un espace topologique et  $A \subset X$ .

- (1)  $\overline{A}$  est fermé
- (2)  $A$  est fermé  $\iff A = \overline{A}$  .
- (3) Si  $A \subset B$ , alors  $\overline{A} \subset \overline{B}$ .
- (4)  $\overline{A}$  est le plus petit fermé qui contient  $A$  :  $\overline{A}$  est fermé et si  $F \subset X$  est fermé et  $F \supset A$ , alors  $F \supset \overline{A}$ .
- (5)  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Preuve:

- (1) Si  $U \subset X$  est ouvert et  $U \cap \overline{A} \neq \emptyset$ , alors  $U \cap A \neq \emptyset$ ; en effet, si  $x \in U \cap \overline{A}$ , il suit de la définition de  $\overline{A}$  que  $U \cap A \neq \emptyset$ . Si  $x \in X \setminus \overline{A}$ , cela veut dire qu'il existe un ouvert  $U_x$  tel que  $U_x \cap A = \emptyset$ ,  $U_x \ni x$ ; mais alors  $U_x \cap \overline{A} = \emptyset$ , et donc  $x \in U_x \subset X \setminus \overline{A}$ , ce qui fait que  $X \setminus \overline{A} = \bigcup_{x \in X \setminus \overline{A}} U_x$  est réunion d'ouverts, donc ouvert.
- (2) Si  $A$  est fermé alors  $U = X \setminus A$  est ouvert, et  $U \cap A = \emptyset$ ; donc si  $x \in U$ ,  $x \notin \overline{A}$ , et il en suit que  $A = \overline{A}$ . La réciproque résulte de (1).
- (3) Si  $x \in \overline{A}$  et  $U \ni x$ ,  $U \subset X$  ouvert, alors  $U \cap B \supset U \cap A \neq \emptyset$ , et donc  $x \in \overline{B}$ .



(4) Si  $F \subset X$  est fermé et  $A \subset F$ , alors d'après ce qui précède  $\overline{A} \subset \overline{F} = F$ .

(5)  $\overline{A}$  est fermé d'après (1), donc  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$  d'après (2).

*q.e.d.*

C'est à cause de la propriétés (4) ci-dessus, que l'on appelle  $\overline{A}$  la *fermeture* de  $A$ .

A l'aide de la notion de limite d'une suite dans un espace métrique, qui imite la notion analogue dans  $\mathbb{R}^n$ , on peut donner une caractérisation utile de l'adhérence dans ces espaces.

**Définition I.2.16** (Limite d'une suite). Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  une suite dans  $X$  et  $a \in X$ . On dit que la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $a$ , ou bien qu'elle possède  $a$  pour limite, noté  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } (n \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon) \quad .$$

**Proposition I.2.17** (Adhérence dans les espaces métriques). Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $A \subset X$ . Alors

$$\overline{A} = \left\{ x \in X \mid \text{il existe une suite } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x \right\} \quad .$$

*Preuve:* Si  $x \in \overline{A}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap A$  et il est clair que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ . Si  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  et  $r > 0$ ,  $B(x, r) \supset \{a_n \mid n \geq N_r\}$  et donc  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

*q.e.d.*

La continuité peut s'exprimer en termes de fermés :

**Proposition I.2.18.** Soient  $(X, \tau_X)$  et  $(Y, \tau_Y)$  deux espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une application. On a :

$$f : X \rightarrow Y \text{ est continue} \iff \forall F \subset Y \text{ fermé de } Y, f^{-1}(F) \subset X \text{ est fermé (dans } X) \quad .$$

*Preuve:* Si  $F \subset Y$  est fermé,  $Y \setminus F$  est ouvert, et il résulte de I.2.5 que  $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$  est ouvert et donc  $f^{-1}(F)$  est fermé.

*q.e.d.*

**Exemple I.2.19.** Le sous-ensemble  $\{0\} \subset \mathbb{R}$  est fermé d'après I.2.12. Donc, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est continue,  $f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$  est fermé. Si on reprend la fonction

$$f(a_1, a_2, b_1, b_2) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

on en déduit que l'ensemble des paires de vecteurs  $a, b \in \mathbb{R}^2$  qui sont linéairement dépendants est un fermé. Il suit alors de la proposition I.2.17 que si on a deux suites de vecteurs  $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$  telles que  $a_n$  et  $b_n$  sont linéairement dépendants (c'est-à-dire  $f(a_n, b_n) = 0$ ), alors si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , on a encore que  $a$  et  $b$  sont linéairement dépendants.

On peut définir de manière symétrique à l'adhérence, l'intérieur d'un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $X$  par

$$\text{int}(A) = \{x \in A \mid \exists U_x \subset A, U_x \text{ ouvert et } U_x \ni x\} \quad .$$

Il suit de cette définition que  $\text{int}(A)$  est le complémentaire de l'adhérence du complémentaire de  $A$ . On a des propriétés symétriques de celles de I.2.15 :  $\text{int}(U)$  est ouvert,  $A$  est ouvert si et seulement si  $A = \text{int}(A)$ ,  $\text{int}(A)$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ , et  $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$ .

### Frontière d'un sous-ensemble

**Définition I.2.20.** Soit  $X$  un espace topologique et  $A \subset X$ . On définit la *frontière*, ou *bord*, de  $A$  ainsi :

$$Fr(A) = \{x \in X \mid \forall U_x \subset X \text{ ouvert t.q. } U_x \ni x, U_x \cap A \neq \emptyset \text{ et } U_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\} \quad .$$

On utilise aussi les notations  $\partial A$  ou  $\dot{A}$  pour désigner la frontière (ou bord) de  $A$ .

**Exemples I.2.21.** (1) Soit  $X = \mathbb{R}^2$  et  $B(0, 1) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ . Alors

$$\partial B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad .$$

(2) Prenons encore  $X = \mathbb{R}^2$ , mais  $A = \overline{B}(0, 1) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . On a encore

$$\partial \overline{B}(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

(3) Si  $X = \mathbb{R}^2$  et  $A = B(0, 1) \cup \{(2, 0)\}$  :

$$\partial A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(2, 0)\}$$

**Proposition I.2.22.** Soit  $X$  un espace topologique et  $A \subset X$ .

$$(1) \partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$$

$$(2) \partial A \text{ est fermé dans } X$$

$$(3) \overline{A} = \partial A \cup \text{int}(A)$$

*Preuve:* (1) résulte immédiatement de la définition de  $\partial A$  et (2) est une conséquence de (1).

Pour (3), remarquons que  $\overline{A} \supset \partial A$  et  $\overline{A} \supset A \supset \text{int}(A)$ , donc  $\overline{A} \supset \partial A \cup \text{int}(A)$ . D'autre part, si  $x \in \overline{A}$  et  $U_x$  est un ouvert contenant  $x$ , alors  $U_x \cap A \neq \emptyset$ , et si  $x \notin \text{int}(A)$ , nécessairement  $U_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ , donc  $x \in \partial A$ ; il en suit que  $\overline{A} \subset \partial A \cup \text{int}(A)$ , et donc finalement  $\overline{A} = \partial A \cup \text{int}(A)$ .

*q.e.d.*

### Voisinages

**Définition I.2.23.** Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique,  $x \in X$ . On dit que  $V \subset X$  est un *voisinage* de  $x$  s'il existe un ouvert  $U_x$  tel que  $x \in U_x \subset V$ . On note  $\mathcal{V}_x$  l'ensemble des voisinages de  $x$ .

**Proposition I.2.24** (Propriétés fondamentales des voisinages).

$$(1) \text{ Si } V \in \mathcal{V}_x \text{ et } V' \supset V, \text{ alors } V' \in \mathcal{V}_x.$$

$$(2) \text{ Si } V_1, \dots, V_N \in \mathcal{V}_x, \text{ alors } V_1 \cap \dots \cap V_N \in \mathcal{V}_x.$$

$$(3) \text{ Si } V \in \mathcal{V}_x, \text{ il existe } U \subset V, U \ni x, \text{ tel que } U \in \mathcal{V}_{x'}, \forall x' \in U$$

*Preuve:* (1) Si  $V \in \mathcal{V}_x$ ,  $\exists U$  ouvert,  $x \in U \subset V$ , et donc  $x \in U \subset V \subset V'$ , ce qui fait que  $V' \in \mathcal{V}_x$ .

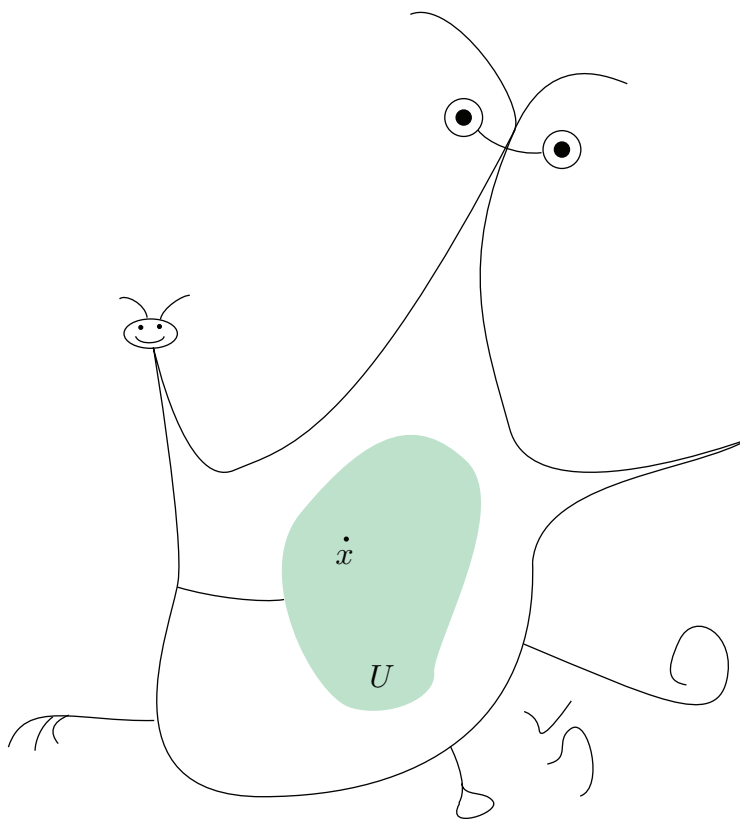
(2) Si  $V_1, \dots, V_N \in \mathcal{V}_x$ , il existe  $U_h$ ,  $h = 1, \dots, N$  tels que  $x \in U_h \subset V_h$ ,  $h = 1, \dots, N$ , et donc  $x \in U_1 \cap \dots \cap U_N \subset V_1 \cap \dots \cap V_N$  et comme  $U_1 \cap \dots \cap U_N$  est un ouvert, cela montre que  $V_1 \cap \dots \cap V_N \in \mathcal{V}_x$ .

(3) Si  $V \in \mathcal{V}_x$ , on sait qu'il existe  $U$  ouvert tel que  $x \in U \subset V$ . Du fait que  $U$  est ouvert,  $U \in \mathcal{V}_{x'}, \forall x' \in U$ .

*q.e.d.*

Remarquons que dire que  $U \subset X$  est ouvert revient à dire que  $U \in \mathcal{V}_x, \forall x \in U$ ; cela permet de retrouver la famille des ouverts à partir de la famille des voisinages  $\mathcal{V}_x, x \in X$ .

A l'aide des voisinages, on peut caractériser la continuité d'une application en un point :

Figure I.2: Un voisinage de  $x$ 

**Proposition I.2.25.** Soient  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques,  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $x \in X$ ,  $y = f(x)$ . Alors :

$$f \text{ est continue au point } x \iff \left( V \in \mathcal{V}_y \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x \right)$$

*Preuve:* Si  $f$  est continue au point  $x$  et que  $V \in \mathcal{V}_y$ , il existe un ouvert  $V' \subset V$ ,  $V' \ni y$ . D'après la définition de continuité I.2.1, il existe un ouvert  $U$  de  $X$ ,  $U \ni x$ , tel que  $f(U) \subset V'$ , ce qui fait que  $f^{-1}(V) \supset U \ni x$  est bien un voisinage de  $x$ .

Réciproquement, soit  $W \subset Y$  un ouvert,  $W \ni y$ . En particulier,  $W \in \mathcal{V}_y$ , donc par hypothèse  $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_x$ , ce qui implique qu'il existe un ouvert  $U$  de  $X$ ,  $U \ni x$  et  $U \subset f^{-1}(W)$ , d'où il suit que  $f(U) \subset W$ , donc  $f$  est bien continue au point  $x$ .

*q.e.d.*

### Applications ouvertes, fermées

On a vu dans I.2.5 qu'une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue si et seulement si pour tout ouvert  $V$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(V)$  est ouvert dans  $X$ , et dans I.2.18 un résultat analogue pour les fermés. On a vu aussi dans l'exemple I.2.6(2) qu'en général l'image *directe* d'un ouvert par une application continue n'est pas un ouvert. Il en est de même pour les fermés; par exemple, si  $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dénote l'application  $p_1(x_1, x_2) = x_1$ , si on prend le fermé  $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \cdot x_2 - 1 = 0\}$ ,  $p_1(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , qui n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition I.2.26** (Applications ouvertes, fermées). Soient  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques. On dit que l'application  $f : X \rightarrow Y$  est *ouverte* si

$$\forall U \subset X \text{ ouvert, } f(U) \text{ est ouvert dans } Y.$$

On dit que  $f$  est *fermée* si

$$\forall F \subset X \text{ fermé, } f(F) \text{ est fermé dans } Y.$$

**Proposition I.2.27.** Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $f$  est un homéomorphisme
- (2)  $f$  est bijective, continue et ouverte
- (3)  $f$  est bijective, continue et fermée

*Preuve:* Si  $f$  est bijective, désignons par  $g : Y \rightarrow X$  son inverse. Alors, si  $A \subset X$ ,  $g^{-1}(A) = f(A)$ . Il suffit d'appliquer I.2.5 et I.2.18.

*q.e.d.*

### I.3 Topologie somme disjointe

C'est un premier exemple de construction de nouveaux espaces topologiques à partir d'espaces topologiques donnés. D'autres exemples seront fournis au chapitre suivant par la topologie produit et la topologie quotient.

Tout d'abord, la somme disjointe d'une famille d'ensembles  $\{X_i\}_{i \in I}$  est définie par :

$$\coprod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} \{(x, i) \mid i \in I, x \in X_i\} \quad .$$

Cette définition revient à prendre la réunion de copies disjointes de chaque  $X_i$ . En effet, il se pourrait que pour un  $i \neq j$ ,  $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ ; mais, même si  $x \in X_i \cap X_j$ ,  $(x, i) \neq (x, j)$ . Donc, si on définit  $\varphi_j : X_j \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$  par  $\varphi_j(x) = (x, j)$ ,  $j \in I$ , alors  $\varphi_j$  est une bijection de  $X_j$  sur  $X'_j = \{(x, j) \mid x \in X_j\}$ , et les  $X'_j$  sont effectivement disjoint, même si les  $X_j$  ne l'étaient pas.

On suppose maintenant que l'on a une famille  $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$  d'espaces topologique et on aimerait mettre une topologie sur  $\coprod_{i \in I} X_i$  qui ait de bonnes propriétés.

**Définition I.3.1** (Topologie somme disjointe). La topologie somme disjointe sur  $\coprod_{i \in I} X_i$  est définie par

$$\tau = \left\{ U \subset \coprod_{i \in I} X_i \mid \varphi_i^{-1}(U) \in \tau_i \ \forall i \in I \right\} \quad .$$

**Théorème I.3.2** (Propriétés fondamentales de la topologie somme disjointe).

- (1) C'est une topologie au sens de I.1.1
- (2) Les applications  $\varphi_j : X_j \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$  sont continues, ouvertes et fermées; ce sont en fait des homéomorphismes sur

$$\varphi_j(X_j) = \left\{ (x, j) \in \coprod_{i \in I} X_i \mid x \in X_j \right\}$$

- (3) Soit  $Y$  un espace topologique et  $f : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow Y$  une application. Alors

$$f \text{ est continue} \iff f \circ \varphi_j : X_j \rightarrow Y \text{ est continue } \forall j \in I$$

- (4) La topologie somme disjointe est la plus fine parmi celles pour lesquelles les  $\varphi_j$ ,  $j \in I$  sont continues.

*Preuve:* (1) Il est clair que  $\emptyset$  et  $\coprod_{i \in I} X_i$  appartiennent à  $\tau$ . Les axiomes (2) et (3) sont une conséquence de ce que les  $\tau_i$  sont des topologies et des deux propriétés suivantes, de nature ensembliste, de l'opération  $\varphi_j^{-1}$  :

- a) si on a une famille  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de sous-ensembles de  $\coprod_{i \in I} X_i$ , alors :

$$\varphi_j^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \varphi_j^{-1}(U_\lambda)$$

b) si  $U_1, \dots, U_N \subset \coprod_{i \in I} X_i$ ,

$$\varphi_j^{-1}(U_1 \cap \dots \cap U_N) = \varphi_j^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \varphi_j^{-1}(U_N) \quad .$$

(2) La proposition I.2.5 montre que les  $\varphi_i$ ,  $i \in I$ , sont continues.

Si  $U \subset X_i$  est ouvert, voyons que  $\varphi_i(U)$  est ouvert. En effet :

$$\varphi_j^{-1}(\varphi_i(U)) = \begin{cases} U & \text{si } i = j \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc c'est un ouvert pour la topologie que l'on a défini sur  $\coprod_{i \in I} X_i$ .

Si  $F \subset X_j$  est fermé, soit  $A = (\coprod_{i \in I} X_i) \setminus \varphi_j(F)$ . Alors

$$\varphi_i^{-1}(A) = \begin{cases} X_j \setminus F & \text{si } i = j \\ X_i & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc  $A$  est ouvert pour la topologie que l'on a défini sur  $\coprod_{i \in I} X_i$ , ce qui fait que  $\varphi_j(F)$  est fermé.

Il résulte de I.2.27 que les  $\varphi_j$  sont des homéomorphismes sur leur image.

(3) Si  $f : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow Y$  est continue, pour tout  $j \in I$  la composition  $f \circ \varphi_j$  est aussi continue d'après I.2.8(2).

Supposons que  $\varphi_j \circ f$  soit continue  $\forall j \in I$  et soit  $V \subset Y$  un ouvert. Alors  $\varphi_j^{-1}(f^{-1}(V))$  est ouvert dans  $X_j$ ,  $\forall j \in I$ , ce qui veut bien dire que  $f^{-1}(V)$  est ouvert dans  $\coprod_{i \in I} X_i$ , donc  $f$  est continue.

(4) Soit  $\tau'$  une topologie sur  $\coprod_{i \in I} X_i$  pour laquelle les  $\varphi_j$  sont continues,  $\forall j \in I$ . Si  $U' \in \tau'$ , on a donc que  $\varphi_j^{-1}(U')$  est ouvert dans  $X_j$ ,  $\forall j \in I$ , ce qui fait que  $U' \in \tau$ . On a donc bien  $\tau' \subset \tau$ , c'est-à-dire que  $\tau'$  est moins fine que  $\tau$ .

*q.e.d.*



## Chapitre II

# Topologie produit et topologie quotient

### II.1 Topologie produit

#### II.1.1 Définition et propriétés fondamentales

Soit  $\{X_i\}_{i \in I}$  une famille d'ensembles. On définit le *produit* de cette famille par :

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i\} \quad .$$

La notation  $(x_i)_{i \in I}$  indique donc une famille d'éléments, où  $x_i$  est un élément de  $X_i$ . Dans le cas d'une famille finie ou dénombrable  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  on peut représenter les éléments du produit par des suites  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ , avec  $x_h \in X_h$ . Mais dans le cas général,  $I$  est un ensemble quelconque et une telle représentation n'a pas de sens.

Notons que si l'un des  $X_i$  est vide, alors  $\prod_{i \in I} X_i$  est vide aussi. On suppose dorénavant que les  $X_i$  sont non vides.

Les projections sur les coordonnées, que l'on connaît dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , ont pour analogue les *projections canoniques* dans un produit quelconque :

**Définition II.1.1** (Projections canoniques). Soit  $\{X_i\}_{i \in I}$  une famille d'ensembles. Pour tout  $j \in I$  on définit la projection canonique par :

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j \quad , \quad \pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j \quad .$$

Dans le cas du produit d'une famille finie d'ensemble,  $\pi_h$  est simplement la projection sur le  $h$ -ième facteur.

On suppose maintenant que chaque  $X_i$  est muni d'une topologie  $\tau_i$  et on va définir une topologie sur  $\prod_{i \in I} X_i$  en définissant d'abord une base de topologie, dont les éléments s'appelleront *rectangles*, et seront vaguement analogues aux rectangles du plan de côtés parallèles aux axes.

**Définition II.1.2** (Rectangles). On appelle rectangle de  $\prod_{i \in I} X_i$  tout sous-ensemble défini de la manière suivante. On se donne un sous-ensemble fini  $J \subset I$ ,  $J = \{j_1, \dots, j_N\}$  et pour tout  $j \in J$  on se donne un ouvert  $U_j$  de  $X_j$ . Le rectangle correspondant à ces données est défini par :

$$R(U_{j_1}, U_{j_2}, \dots, U_{j_N}) = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid x_{j_h} \in U_{j_h}, h = 1, \dots, N \right\} \quad .$$

On note aussi plus simplement  $R(U_j, j \in J)$ , ou encore :

$$\left( \prod_{j \in J} U_j \right) \times \left( \prod_{i \in I \setminus J} X_i \right) \quad .$$

Dans le cas de  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , si on prend des intervalles ouverts  $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ ,  $R(I_1, I_2) = I_1 \times I_2$  est effectivement ce qu'on appelle un rectangle en géométrie élémentaire.

En particulier, on peut prendre comme famille un seul ouvert  $U_j \subset X_j$ , et alors  $R(U_j) = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_j \in U_j\}$  désignera le rectangle correspondant.

**Lemme II.1.3.** *Les rectangles de  $\prod_{i \in I} X_i$  forment une base de topologie, au sens de I.1.7*

Nous devons vérifier les axiomes (1) et (2) d'une base de topologie I.1.7.

Pour (1), il suffit de prendre  $J = \emptyset$ , de sorte que le rectangle correspondant est  $\prod_{i \in I} X_i$ .

Vérifions (2) ; soient  $J, J' \subset I$  deux sous-ensembles finis,  $\{U_j\}_{j \in J}$  et  $\{U_{j'}\}_{j' \in J'}$  deux familles d'ouverts,  $U_j \subset X_j$  et  $U_{j'} \subset X_{j'}$ . Si  $h \in J \cup J'$ , on pose :

$$U_h'' = \begin{cases} U_h \cap U_h' & \text{si } h \in J \cap J' \\ U_h & \text{si } h \in J \setminus J' \\ U_h' & \text{si } h \in J' \setminus J \end{cases}$$

et alors

$$R(U_j, j \in J) \cap R(U_{j'}, j' \in J') = R(U_h'', h \in J \cup J') \quad .$$

*q.e.d.*

On appelle topologie produit celle engendrée par les rectangles.

**Théorème II.1.4** (Propriétés fondamentales de la topologie produit).

(1) *Les projections canoniques  $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ ,  $\pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$ , sont continues et ouvertes.*

(2) *Soit  $Y$  un espace topologique et  $f : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  une application. Alors*

$$f \text{ est continue} \iff \pi_i \circ f : Y \rightarrow X_i \text{ est continue } \forall i \in I$$

(3) *La topologie produit est la moins fine pour laquelle les  $\pi_i$ ,  $i \in I$ , sont continues.*

*Preuve:*

(1) Soit  $j \in I$  et voyons que  $\pi_j$  est continue : si  $U_j \subset X_j$  est ouvert,  $\pi_j^{-1}(U_j) = R(U_j)$ , où  $R(U_j)$  qui est bien un ouvert de  $\prod_{i \in I} X_i$ .

Voyons que  $\pi_j$  est ouverte. Puisque tout ouvert de  $\prod_{i \in I} X_i$  est réunion de rectangles, il suffit de voir que l'image par  $\pi_j$  d'un rectangle est un ouvert de  $X_j$ . Considérons donc le rectangle  $R = R(U_h, h \in H)$ ; s'il existe  $h \in H$  avec  $U_h = \emptyset$ , alors  $\pi_j(R) = \emptyset$ , sinon

$$\pi_j(R) = \begin{cases} U_j & \text{si } j \in H \\ X_j & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc dans tous les cas on trouve un ouvert de  $X_j$ .

(2) Si  $f$  est continue, il suit de (1) ci-dessus et I.2.8(1) que  $f \circ \pi_i$  est continue  $\forall i \in I$ .

Réciproquement, si  $f \circ \pi_i$  est continue  $\forall i \in I$ , soit  $R(U_j, j \in J)$  un rectangle. En posant  $R_j = R(U_j)$  on a :

$$R(U_j, j \in J) = \bigcap_{j \in J} R_j = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j)$$

et donc

$$f^{-1}(R(U_j, j \in J)) = f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} R_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(\pi_j^{-1}(U_j)) = \bigcap_{j \in J} (\pi_j \circ f)^{-1}(U_j)$$

qui est ouvert puisque  $\pi_j \circ f$  est continue par hypothèse. Puisque tout ouvert de  $\prod_{i \in I} X_i$  est réunion de rectangles, il en suit que  $f$  est continue.

(3) Soit  $\tau'$  une topologie sur  $\prod_{i \in I} X_i$  pour laquelle les  $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$  sont continues. Si  $U_j \subset X_j$  est ouvert, on doit avoir  $\pi_j^{-1}(U_j) = R(U_j) \in \tau'$ . Il en suit que tout rectangle  $R(U_j, j \in J) = \bigcap_{j \in J} R(U_j)$  appartient à  $\tau'$  et donc aussi tout ouvert de la topologie produit.

*q.e.d.*



**Exemples II.1.5.**

- (1) On aimerait vérifier que la topologie usuelle sur  $\mathbb{R}^n$  coïncide avec la topologie produit de  $n$  copies de  $\mathbb{R}$ , muni de la métrique  $d(u, v) = |u - v|$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ . Dans  $\mathbb{R}^n$  on peut définir la topologie usuelle à partir de la métrique  $d_\infty(x, y) = \sup \{|x_i - y_i| \mid i = 1, \dots, n\}$ . Une boule pour cette métrique est un produit d'intervalles :

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - a_i| < r\} = ]a_1 - r, a_1 + r[ \times \cdots \times ]a_n - r, a_n + r[ \quad ;$$

c'est un rectangle, au sens de II.1.2, donc un ouvert pour la topologie produit. D'autre part, les projections  $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\pi(x) = x_i$  sont continues pour la topologie usuelle sur  $\mathbb{R}^n$ , donc d'après II.1.4(4) tout ouvert pour la topologie produit l'est aussi pour la topologie usuelle. Donc ces deux topologies coïncident.

- (2) Soit  $A_n = \{0, 2\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , muni de la topologie discrète. L'espace produit  $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$  n'est pas un espace discret, car, par exemple, l'ensemble réduit au point  $(0, 0, \dots, 0, \dots)$  n'est pas un ouvert. On montrera dans II.1.13 que cet espace est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.
- (3) Soit  $OZ = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$  (axe  $OZ$ ) et soit  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$ . L'espace  $\mathbb{R}^3 \setminus OZ$  est homéomorphe à  $S^1 \times \mathbb{R}_+^2$  (muni de la topologie produit, cela va de soi), où

$$S^1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\} \quad ,$$

est le cercle unité centré en 0. Pour le voir, posons :

$$\begin{aligned} & \text{pour } ((u, v), (x, 0, z)) \in S^1 \times \mathbb{R}_+^2 \quad , \quad f((u, v), (x, 0, z)) = (u \cdot x, v \cdot x, z) \\ & \text{et pour } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus OZ, \quad g(x, y, z) = \left( \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), (\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z) \right) \end{aligned}$$

On vérifie que les applications  $f$  et  $g$  sont continues et inverses l'une de l'autre.

- (4) Un cas particulier de surface de révolution (cf VII.1.24) se définit à partir de la donnée  $S = S(d, \alpha, \Gamma)$  d'une droite  $d$ , appelée axe de révolution, d'un plan  $\alpha$  qui contient  $d$ , et d'une courbe  $\Gamma$ , que l'on appelle génératrice, contenue dans  $\alpha$ . La surface  $S$  est obtenue en faisant tourner la génératrice, dans son plan  $\alpha$ , autour de l'axe de révolution (voir figure II.1). Choisissons des axes de coordonnées de sorte que  $d = OZ$ ,  $\alpha = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$ . Si on suppose que  $\Gamma$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}_+^2$ , alors  $S$  est homéomorphe au produit  $S^1 \times \Gamma$ . Pour le voir, il suffit de remarquer que l'hypothèse que  $\Gamma \subset \mathbb{R}_+^2$  assure que l'homéomorphisme  $f$  de l'exemple précédent se restreint en un homéomorphisme entre  $S^1 \times \Gamma$  et  $S$ .
- (5) Un exemple de surface de révolution est le tore, qui est obtenu en prenant pour  $\Gamma$  un cercle. Lorsque  $\Gamma$  ne rencontre pas l'axe de rotation, le tore est homéomorphe au produit  $S^1 \times S^1$ . (En topologie, lorsqu'on parle de tores, il s'agit toujours du cas où  $\Gamma \cap d = \emptyset$ .)

**II.1.2 Encore des propriétés de la topologie produit****Tranches**

Soit  $\{X_i\}_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques et  $x^0 = (x_i^0)_{i \in I} \prod_{i \in I} X_i$  un élément fixé. Pour  $j \in I$ , on définit la tranche par  $x^0$  parallèle à  $X_j$  par :

$$T(j, x^0) = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid x_i = x_i^0 \text{ si } i \neq j \right\} \quad .$$

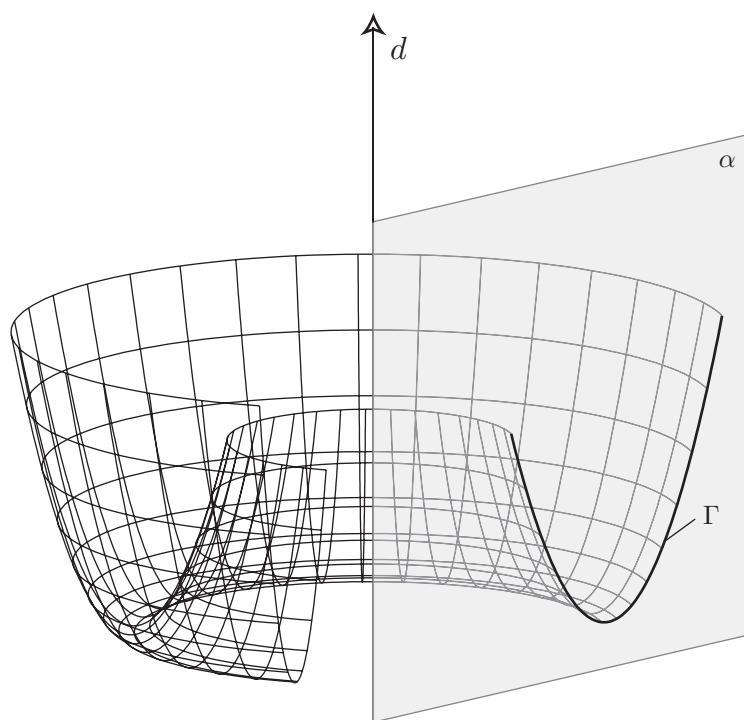


Figure II.1: Un morceau de surface de révolution

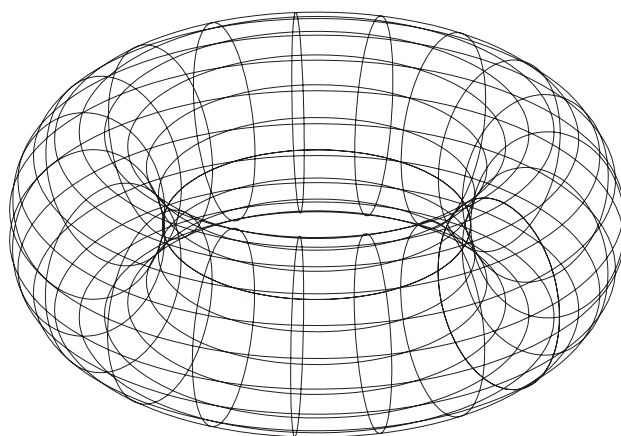


Figure II.2: Le tore des topologues

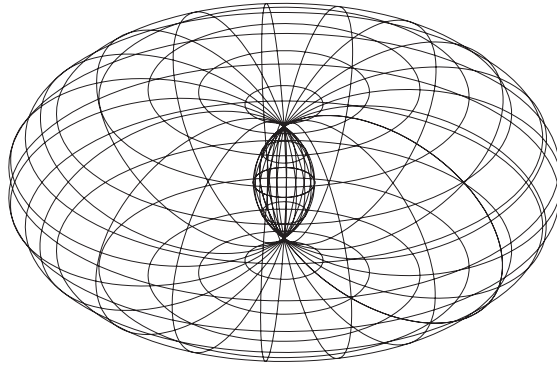


Figure II.3: Un tore des autres

Par exemple, si on prend deux copies de  $\mathbb{R}$ , numérotées 1 et 2, la tranche correspondant à  $i = 2$  et  $x^0 = (a_1, a_2)$  dans le produit  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est la droite horizontale passant par le point  $(a_1, a_2)$ .

L'application

$$\varphi_{j,x^0} : X_j \rightarrow \prod_{i \in I} X_i, \quad x_j \mapsto \begin{cases} x_i^0 & \text{si } i \neq j \\ x_j & \text{sinon} \end{cases}$$

est une bijection sur la tranche  $T(j, x^0)$ ; on a même mieux :

**Proposition II.1.6.**  $\varphi_{j,x^0}$  est un homéomorphisme de  $X_j$  sur  $T(j, x^0)$ .

*Preuve:*  $\pi_j \circ \varphi_{j,x^0}$  est l'identité sur  $X_j$ , et pour  $i \neq j$ ,  $\pi_i \circ \varphi_{j,x^0}$  est la constante  $x_i^0$ ; il suit de II.1.4(2) que  $\varphi_{j,x^0}$  est continue.

Si  $U_j \subset X_j$  est un ouvert,  $\varphi_{j,x^0}(U_j) = R(U_j) \cap T(j, x^0)$ , qui est bien un ouvert pour la topologie induite par  $\prod_{i \in I} X_i$  sur la tranche  $T(j, x^0)$ .

$\varphi_{j,x^0}$  est donc une bijection de  $X_j$  sur  $T(j, x^0)$  qui est continue et ouverte; il suit de 1.2.27(2) que c'est un homéomorphisme.

*q.e.d.*

**Remarque II.1.7.** On a vu dans le cas de la somme disjointe que l'on a des applications  $\varphi_j : X_j \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ , qui sont des homéomorphismes sur leur images, tout comme les tranches  $\varphi_{j,x^0}$  de ce paragraphe. Cependant, les  $\varphi_j$  sont *ouvertes et fermées*, alors que les  $\varphi_{j,x^0}$  sont ouvertes, mais peuvent *ne pas être fermées*. Prenons par exemple l'espace de Sierpinski  $\mathcal{S} = \{0, 1\}$ , avec la topologie  $\{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$ ; alors la tranche  $T = \{(x, 0), x \in \{0, 1\}\} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S}$  n'est pas fermée : par exemple, parce que son complémentaire est  $\{(x, 1), x \in \{0, 1\}\}$ , dont la projection sur le deuxième facteur est  $\{1\}$ , qui n'est pas ouvert, malgré que la projection soit une application ouverte.

### Métrisabilité

Soit  $\{(X_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable d'espaces métriques. Posons :

$$d'_n(x, y) = \inf \left\{ d_n, \frac{1}{n} \right\} ;$$

on vérifie que c'est encore une métrique sur  $X_n$ , et qu'elle définit la même topologie sur  $X_n$  que  $d_n$ . Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$  et posons :

$$\delta((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup \{d'_n(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}\} .$$

On vérifie que  $\delta$  est une métrique sur  $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ .

**Proposition II.1.8.** La topologie produit sur  $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$  est la même que la topologie associée à la métrique  $\delta$ .

*Preuve:* Soit  $a = (a_1, \dots, a_n, \dots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$  et  $r > 0$ . Alors, si  $N = \sup \{n \mid \frac{1}{n} \geq r\}$ , la boule de centre  $a$ , rayon  $r$  pour la métrique  $\delta$  s'écrit :

$$B_\delta(a, r) = \left\{ x \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \mid d'_n(x_n, a_n) < r, n \leq N \right\}$$

et donc cette boule coïncide avec le rectangle  $R(B_1(a_1, r), \dots, B_N(a_N, r))$ , où  $B_n(a_n, r)$  est la boule dans  $X_n$  de centre  $a_n$ , rayon  $r$ , pour la métrique  $d'_n$ . Il en suit que les ouverts associés à la métrique  $\delta$  et ceux de la topologie produit coïncident.

*q.e.d.*

**Proposition II.1.9.** *Soit  $\{X_i\}_{i \in I}$  une famille d'espaces discrets, chaque  $X_i$  contenant au moins 2 éléments, et supposons que  $I$  soit de cardinalité strictement supérieure au dénombrable. Alors la topologie produit sur  $\prod_{i \in I} X_i$  ne provient pas d'une métrique.*

*Preuve:* Dans un espace métrique  $X$ , pour tout  $x \in X$  on a :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(x, 1/n) = \{x\} \quad ;$$

nous allons montrer qu'une telle suite d'ouverts n'existe pas dans un produit qui vérifie les hypothèses de la proposition.

En effet, soit  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable d'ouverts non vides. Alors  $V_n$  contient au moins un rectangle non vide  $R(U_j, j \in J_n)$ , où  $J_n \subset I$  est un sous-ensemble fini; il en suit que  $\pi_i(V_n) = X_i$  si  $i \in I \setminus J_n$ . L'ensemble  $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$  est au plus dénombrable, donc  $I \setminus J$  est non vide; or si  $i \in I \setminus J$ ,  $\pi_i(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n) = X_i$  et comme les  $X_i$  contiennent au moins deux éléments,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$  n'est jamais réduit à un seul point.

*q.e.d.*

### Amplification

**Proposition II.1.10.** *Soient  $\{X_i\}_{i \in I}$  et  $\{Y_i\}_{i \in I}$  deux familles d'espaces topologiques, indexées par le même ensemble  $I$ . Soit  $\{f_i : X_i \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$  une famille d'applications continues. Alors l'application :*

$$F : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i \quad , \quad F((x_i)_{i \in I}) = (f_i(x_i))_{i \in I}$$

*est continue.*

*Preuve:* Appelons respectivement  $\pi_j^X : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$  et  $\pi_j^Y : \prod_{i \in I} Y_i \rightarrow Y_j$  les projections canoniques. Alors  $\pi_j^Y \circ F = f_j \circ \pi_j^X$ , ce qui montre que  $\pi_j^Y \circ F$  est la composition de deux applications continues, donc est continue, ceci pour tout  $j \in I$ . Il suit alors de II.1.4(2) que  $F$  est continue.

*q.e.d.*

**Proposition II.1.11.** *Soient  $\{X_i\}_{i \in I}$  et  $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  deux familles d'espaces topologiques. Supposons qu'il existe une bijection  $\varphi : I \rightarrow \Lambda$ , et pour tout  $i \in I$  un homéomorphisme  $f_i : X_i \rightarrow Y_{\varphi(i)}$ . Alors l'application :*

$$\psi : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \quad , \quad \text{définie par} \quad (\psi(x_i)_{i \in I})_\lambda = f_j(x_j) \quad \text{si} \quad \varphi(j) = \lambda$$

*est un homéomorphisme.*

*Preuve:*  $\psi$  est une bijection parce que les  $\varphi_j$  le sont; elle est continue par II.1.10.

D'autre part, si  $R(U_j, j \in J)$  est un rectangle de  $\prod_{i \in I} X_i$ ,  $\psi(R(U_j, j \in J)) = R(f_j(U_j), j \in J)$  est un rectangle de  $\prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ ; donc  $\psi$  est aussi ouverte, et alors c'est un homéomorphisme.

*q.e.d.*

Voici le phénomène d'amplification :

**Corollaire II.1.12.** Soit  $X$  un espace topologique et posons  $X_n = X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Y = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ . Alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe un homéomorphisme :

$$\psi_k : Y \xrightarrow{\simeq} Y^k = \underbrace{Y \times \cdots \times Y}_{k\text{-fois}}$$

de  $Y$  avec le produit  $k$ -fois de  $Y$  avec lui-même.

*Preuve:* Les deux ensembles  $\mathbb{N}$  et  $\underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{k\text{-fois}}$  sont dénombrables, il existe donc une bijection  $\varphi_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^k$ .

D'autre part,  $Y^k$  est le produit de copies de  $X$  indexées par  $\mathbb{N}^k$ . Ce corollaire est alors une conséquence de II.1.11, où le rôle de  $f_i$  est joué par l'application identité :  $X \rightarrow X$ .

*q.e.d.*

### II.1.3 L'ensemble de Cantor

Voici une première approche heuristique de ce sous-ensemble de l'intervalle  $[0, 1]$ . On applique l'opération qui consiste à ôter l'intervalle ouvert  $]1/3, 2/3[$ , soit le tiers du milieu, de l'intervalle  $[0, 1]$ ; appelons  $C_1$  l'ensemble obtenu ainsi : il consiste en deux intervalles de longueur  $1/3$ , soit  $[0, 1/3]$  et  $[2/3, 1]$ . On recommence avec ces deux nouveaux intervalles, et ainsi de suite. A la limite, on obtiendra un ensemble  $C \subset [0, 1]$ , appelé ensemble de Cantor.

Pour une approche plus rigoureuse, appelons  $w_0(x) = \frac{1}{3} \cdot x$  et  $w_2(x) = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{3}$  les homotéties de rapport  $\frac{1}{3}$ , de centre respectivement 0 et 1. Si on pose  $C_0 = [0, 1]$ , on a  $C_1 = w_0(C_0) \cup w_2(C_0)$ ; on définit par récurrence  $C_{n+1} = w_0(C_n) \cup w_2(C_n)$ , et alors  $C = \bigcap_{n \geq 1} C_n$ .

Soit  $A_n = \{0, 2\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Un élément de  $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$  est une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , avec  $a_n = 0$  ou  $a_n = 2$ . Notons que la série à termes positifs  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{3^n}$  converge dans  $[0, 1]$ , car elle est dominée par  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{3^n} = 1$ .

**Théorème II.1.13.** L'application

$$\varphi : \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow [0, 1] \quad , \quad \varphi((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

induit un homéomorphisme de  $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$  sur l'ensemble de Cantor  $C$ .

*Preuve:*

(1)  $\varphi$  est une bijection sur  $C$ .

Montrons d'abord que tout  $x \in C_n$  s'écrit de manière unique sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} + r \quad , \quad a_i \in \{0, 2\} \quad , \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{3^n}$$

(a) Unicité de l'écriture :

si

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} + r = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{3^i} + s \quad , \quad 0 \leq r, s \leq \frac{1}{3^n}$$

supposons que  $a_i = b_i$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ , où  $m \leq n$ , mais  $a_m < b_m$ ; alors  $a_m = 0$ ,  $b_m = 2$  et

$$\begin{aligned} x &= \underbrace{\frac{a_1}{3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{3^{m-1}}}_{=A} + \frac{a_m}{3^m} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + r \\ &< A + \left( \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \right) + \frac{1}{3^n} = A + \frac{2}{3^{m+1}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} + \frac{1}{3^n} = A + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{3^n} \leq A + \frac{2}{3^m} \end{aligned}$$

et donc  $x < A + \frac{2}{3^m}$ ; mais d'autre part :

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{3^i} + s = A + \frac{2}{3^m} + \frac{b_{m+1}}{3^{m+1}} + \cdots + s \geq A + \frac{2}{3^m}$$

d'où contradiction.

(b) Existence de l'écriture :

Par induction sur  $n$  : si  $x \in C_1$ , ou bien  $x = 0 + r$ , ou bien  $x = \frac{2}{3} + r$ ,  $0 \leq r \leq \frac{1}{3}$ . Si on sait que tout  $x' \in C_n$  s'écrit  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} + r$ ,  $0 \leq r \leq \frac{1}{3^n}$ , soit  $x \in C_{n+1}$ . Alors, ou bien :

$$x = w_0(x') = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^{i+1}} + \frac{r}{3}$$

ou bien

$$x = w_2(x') = \frac{2}{3} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^{i+1}} + \frac{r}{3}$$

et donc dans les deux cas  $x$  peut s'écrire sous la forme voulue.

Comme conséquence, si  $x \in C$ , alors  $x \in C_n$  pour tout  $n$ , et ce qui précède montre que

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} + r \quad , \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{3^n}$$

cette écriture étant unique. En faisant  $n \rightarrow \infty$  :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

les  $a_i$  étant déterminés de manière unique par  $x$ ; donc  $\varphi$  est bien une bijection sur  $C$ .

(2)  $\varphi$  est continue :

Montrons la continuité de  $\varphi$  au point  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Posons  $x = \varphi(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ . Si  $\varepsilon > 0$  est donné, soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} < \varepsilon \quad .$$

Le rectangle de  $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$  correspondant aux ouverts  $\{a_1\}, \dots, \{a_N\}$  (rappelons que  $A_n$  est muni de la topologie discrète) s'écrit :

$$R(a_1, \dots, a_N) = \left\{ (b_1, \dots, b_i, \dots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid a_i = b_i \text{ pour } i = 1, \dots, N \right\}$$

et donc si  $b \in R(a_1, \dots, a_N)$ , alors  $|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} < \varepsilon$ , ce qui montre que  $\varphi(R(a_1, \dots, a_N)) \subset B(x, \varepsilon)$ .

(3) Montrons que  $\varphi$  est ouverte :

Soit  $R(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$  un rectangle de  $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$  et  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in R(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ . Soit  $N = \max\{i_1, \dots, i_k\}$  et  $W = B(\varphi(a), \frac{1}{3^{N+1}}) \cap C$ ; alors  $\varphi(a) \in W$  et  $W \subset \varphi(R(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}))$ , car si  $y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a'_i}{3^i} \in B(\varphi(a), \frac{1}{3^{N+1}}) \cap C$ , nécessairement  $a'_i = a_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , et donc  $(a'_i) \in R(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ . Ceci montre que  $\varphi(R(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}))$  est un ouvert de  $C$  et de là il suit que  $\varphi$  est ouverte,

*q.e.d.*

## II.2 Topologie quotient

Soit  $X$  un ensemble. Rappelons qu'une relation binaire sur  $X$  est un sous-ensemble  $R$  du produit  $X \times X$ ; en général, on note  $xRy$  si  $(x, y) \in R$ , et on dit que  $x$  est en relation avec  $y$ .

**Définition II.2.1.** Une relation d'équivalence sur l'ensemble  $X$  est une relation binaire  $R \subset X \times X$  qui vérifie les trois axiomes :

- (1)  $xRx$  (réflexivité)
- (2)  $xRy \Rightarrow yRx$  (symétrie)
- (3)  $xRy$  et  $yRz \Rightarrow xRz$  (transitivité).

Par exemple, sur l'ensemble des entiers relatifs  $\mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , on peut définir la relation d'équivalence :

$$xRy \iff x \equiv y \pmod{n}$$

où  $x \equiv y \pmod{n}$  signifie que  $x - y$  est un multiple de  $n$ .

On note souvent  $x \sim y$  pour dire que  $(x, y)$  est dans une certaine relation d'équivalence.

**Définition II.2.2.** Une *partition* de l'ensemble non vide  $X$  est un ensemble  $\mathcal{C}$  de parties de  $X$  (i.e.  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ ) qui vérifie :

- (1) Si  $C \in \mathcal{C}$ , alors  $C \neq \emptyset$ .
- (2) Si  $C, C' \in \mathcal{C}$ , alors  $C \cap C' \neq \emptyset \Rightarrow C = C'$ .
- (3) Pour tout  $x \in X$ , il existe  $C \in \mathcal{C}$  tel que  $x \in C$ .

A une relation d'équivalence est associée une partition de  $X$  de la manière suivante : si  $x \in X$ , sa classe d'équivalence  $C_x$  est définie par

$$C_x = \{y \in X \mid xRy\} \quad .$$

**Proposition II.2.3.** Les classes d'équivalences associées à une relation d'équivalence  $R$  sur  $X$  forment une partition sur  $X$ . Réciproquement, une partition  $\mathcal{C}$  de  $X$  est associée à la relation d'équivalence définie par

$$xRy \iff \exists C \in \mathcal{C} \text{ tel que } x, y \in C$$

*Preuve:* Supposons que  $C_y \cap C_z \neq \emptyset$  et soit  $x \in C_y \cap C_z$ ; cela implique que  $xRy$ ,  $xRz$  et  $yRz$ , donc finalement  $C_x = C_y = C_z$ . Les classes d'équivalence sont donc disjointes; par définition  $C_x \ni x$ , ce qui montre qu'elles sont non vides et que tout  $x \in X$  est dans l'une d'elles.

La réciproque se vérifie sans peine.

*q.e.d.*

On note  $X/R$  l'ensemble des classes d'équivalence associées à la relation  $R$ ; on l'appelle *ensemble quotient* de  $X$  par la relation  $R$ . On a une application surjective  $\pi : X \rightarrow X/R$ , qui à  $x \in X$  associe sa classe d'équivalence; on l'appelle projection canonique. Parfois on note  $[x]$  la classe d'équivalence de  $x \in X$ .

**Définition II.2.4.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $X$ ; on dit que  $f$  est compatible avec la relation  $\sim$  si

$$x \sim x' \implies f(x) = f(x') \quad .$$

Si c'est le cas, on déduit de  $f$  une application  $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$  en posant  $\bar{f}([x]) = f(x)$ . En d'autres termes,  $\bar{f}$  associe à une classe d'équivalence  $C$  l'image de n'importe quel représentant  $x \in C$  par  $f$  : le choix du représentant n'a pas d'importance puisque  $f$  est compatible avec  $\sim$ .

### Exemples II.2.5.

- (1) Sur  $\mathbb{R}$  on peut définir la relation d'équivalence :

$$x \sim y \quad \text{si} \quad x - y \in \mathbb{Z} \quad .$$

La classe d'équivalence de  $x$  est  $\{x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . L'ensemble  $\mathbb{R}/\sim$  est en bijection avec le cercle  $S^1$  : si  $x \in \mathbb{R}$  et  $[x]$  désigne sa classe dans  $\mathbb{R}/\sim$ , on pose

$$\varphi([x]) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \quad .$$

$\varphi$  est bien définie parce que  $\cos(2\pi x)$  et  $\sin(2\pi x)$  sont compatibles avec la relation  $\sim$ . On vérifie que  $\varphi$  est une bijection.

- (2) Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application, on définit la relation  $x \sim x'$  si  $f(x) = f(x')$ . Les classes d'équivalence s'appellent les *fibres* de  $f$ ; ce sont les ensembles  $f^{-1}(y)$ , où  $y \in f(X)$ . Evidemment,  $f$  est compatible avec  $\sim$ , et l'application  $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$  qu'on en déduit est injective. On peut représenter ces espaces et application par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

Si  $f$  est surjective, alors  $\bar{f}$  est bijective.

- (3) Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Les fibres de  $f$  sont les cercles centrés à l'origine, y compris le cercle dégénéré de rayon 0, qui consiste en l'origine.
- (4) Si  $A \subset X$ , on peut définir la relation d'équivalence :

$$xRy \iff x \in X \setminus A \text{ et } x = y \quad , \quad \text{ou bien } x, y \in A \quad .$$

Les classes d'équivalence sont donc de la forme :

$$C_x = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in X \setminus A \\ A & \text{si } x \in A \end{cases} \quad .$$

L'espace quotient est noté d'habitude  $X/A$ . La projection canonique  $\pi : X \rightarrow X/A$  envoie le sous-ensemble  $A$  sur un seul point, la classe d'équivalence  $A$ ; elle est injective sur  $X \setminus A$ .

On suppose maintenant que  $X$  est un espace topologique, et que l'ensemble sous-jacent est muni d'une relation d'équivalence  $R$ . On aimerait munir l'espace quotient  $X/R$  d'une topologie, ayant des bonnes propriétés.

**Définition II.2.6** (Topologie quotient). Soit  $X$  un espace topologique,  $R$  une relation d'équivalence sur  $X$  et  $\pi : X \rightarrow X/R$  la projection canonique associée. On pose :

$$U \subset X/R \text{ est ouvert} \iff \pi^{-1}(U) \text{ est ouvert dans } X \quad .$$

Notons que  $\pi^{-1}(U) = \cup_{C \in U} C$  et donc  $U \subset X/R$  est dit ouvert si la réunion des classes d'équivalence qui le constituent est un ouvert de  $X$ . Aussi, il revient au même de définir la topologie quotient en disant que  $F \subset X/R$  est fermé si et seulement si  $\pi^{-1}(F)$  est fermé dans  $X$ .

**Théorème II.2.7** (Propriétés fondamentales de la topologie quotient). Soit  $X$  un espace topologique et  $R$  une relation d'équivalence sur  $X$ ; on munit  $X/R$  de la topologie quotient. Alors :

- (1) La topologie quotient est la plus fine pour laquelle la projection canonique  $\pi : X \rightarrow X/R$  est continue.



- (2) Soit  $Y$  un espace topologique et  $f : X \rightarrow Y$  une application compatible avec  $R$ . On pose  $\bar{f}([x]) = f(x)$ , ce qui revient à définir  $\bar{f}$  par la relation  $f = \bar{f} \circ \pi$ , que l'on peut représenter sur le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ X/R & & \end{array} .$$

Alors :

$$f \text{ est continue} \iff \bar{f} \text{ est continue}$$

- (3) Si l'application  $f$  est ouverte, alors  $\bar{f}$  est aussi ouverte. Si  $f$  est fermée, alors  $\bar{f}$  est aussi fermée.

*Preuve:* (1) est une conséquence immédiate de la définition de la topologie quotient. Pour (2), si  $\bar{f}$  est continue,  $f$  est continue car  $f = \bar{f} \circ \pi$ , composition de deux applications continues. Réciproquement, si  $f$  est continue et  $V \subset Y$  un ouvert,  $\pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(V)) = (\bar{f} \circ \pi)^{-1}(V) = f^{-1}(V)$  est un ouvert de  $X$  parce que  $f$  est continue, donc  $\bar{f}^{-1}(V)$  est un ouvert de  $X/R$  par définition de la topologie quotient.

Pour (3), soit  $U \subset X/R$  un ouvert. Alors  $\bar{f}(U) = f(\pi^{-1}(U))$ , qui est ouvert parce que  $\pi^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X$  et que  $f$  est ouverte.

*q.e.d.*

Dans les exemples qui suivent, il faut imaginer les relations d'équivalence comment permettant d'identifier les points qui sont dans une même classe d'équivalence. Aussi, lorsqu'on définit la relation, on omet généralement d'indiquer les points qui sont isolés dans leur classe d'équivalence; c'est le cas par exemple pour le ruban de Möbius ci-après.

### Exemples II.2.8.

- (1) On peut reprendre l'exemple II.2.5(1) à la lumière de ce théorème. L'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$  est continue et compatible avec la relation de l'exemple II.2.5(1), soit  $x \sim x'$  si  $x - x' \in \mathbb{Z}$ . En fait,  $f$  est à pour image le cercle  $S^1$ , et on va la regarder comme telle :  $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  est une application surjective. Elle induit donc une application continue  $\bar{f}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ \mathbb{R}/\sim & & \end{array}$$

qui est en fait bijective. D'autre part, on vérifie que  $f$  est ouverte, et alors  $\bar{f}$  l'est aussi d'après II.2.7(3);  $\bar{f}$  est donc un homéomorphisme.

Remarquons que la projection canonique dans cet exemple n'est pas fermée : si elle l'était,  $f$  le serait aussi, car  $f = \bar{f} \circ \pi$  et  $\bar{f}$  étant un homéomorphisme est fermée, et la composition d'applications fermées est évidemment une application fermée. Or si on prend  $A = \{n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,

$$f(A) = \left\{ \left( \cos \left( 2\pi \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right), \sin \left( 2\pi \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right) \right), n \in \mathbb{N} \right\}$$

et donc  $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(2\pi(1 - \frac{1}{n})), \sin(2\pi(1 - \frac{1}{n})))$  appartient à  $\overline{f(A)}$ , mais  $1 \notin f(A)$ . Donc  $f$  n'est pas fermée, et  $\pi$  non plus.

Par contre  $\pi$  est ouverte : si  $U \subset \mathbb{R}$  est un ouvert,  $\pi^{-1}(\pi(U))$  est la réunion des translatés de  $U$  par des éléments de  $\mathbb{Z}$ , c'est donc un ouvert de  $\mathbb{R}$ , et il en résulte, par définition de la topologie quotient, que  $\pi(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}/\sim$ .

- (2) Appelons  $g : [0, 1] \rightarrow S^1$  la restriction de l'application  $f$  de l'exemple précédent à  $I = [0, 1]$ ; alors  $g(0) = g(1)$ . La relation d'équivalence associée au sous-ensemble  $\partial I = \{0, 1\}$  est donc la même que celle associée à  $g$  comme dans l'exemple II.2.5(2). On a donc un diagramme commutatif d'applications continues :

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{g} & S^1 \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{g} & \\ I/\partial I & & \end{array}$$

et  $\bar{g}$  est de nouveau un homéomorphisme, car on peut vérifier que  $g$  est fermée. On dit que le cercle est obtenu à partir de l'intervalle  $[0, 1]$  en identifiant 0 et 1.

- (3) L'exemple précédent se généralise en dimension supérieure. Regardons le cas de la sphère de dimension deux :

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \quad .$$

Si  $s, t \in [0, 1]$ , on pose  $\varphi = 2\pi s$ ,  $\theta = \pi t$ , de sorte que  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Définissons  $g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  par :

$$g(s, t) = (\cos(\varphi) \sin(\theta), \sin(\varphi) \sin(\theta), \cos(\theta)) \quad .$$

On peut vérifier que  $g$  induit un homéomorphisme :

$$\bar{g} : [0, 1] \times [0, 1] / \sim \xrightarrow{\cong} S^2$$

où  $\sim$  est la relation d'équivalence définie par :  $(0, t) \sim (1, t)$ ,  $(s, 0) \sim (s', 0)$  et  $(s, 1) \sim (s', 1)$ ,  $\forall s, s' \in [0, 1]$ .

- (4) Le ruban simple est défini comme le quotient du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par la relation  $(0, t) \sim (1, t)$  (sous-entendu :  $(s, t) \sim (s, t)$  si  $s \neq 0, 1$ ).
- (5) Le *ruban de Möbius*, imaginé par le mathématicien allemand A. F. Möbius en 1858, à l'âge de 68 ans, est défini comme le quotient du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par l'identification :  $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ .
- (6) Le tore peut être redéfini comme quotient de  $[0, 1] \times [0, 1]$  par les identifications  $(s, 0) \sim (s, 1)$  et  $(0, t) \sim (1, t)$ . L'application  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times S^1$ ,  $f(s, t) = ((\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)), (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)))$  induit un homéomorphisme de  $[0, 1] \times [0, 1] / \sim$  avec  $S^1 \times S^1$ .
- (7) La *bouteille de Klein* (F. Klein, 1882) est définie comme quotient du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par les identifications :  $(s, 0) \sim (s, 1)$  et  $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ .
- (8) Le *plan projectif* peut être défini comme le quotient de  $[0, 1] \times [0, 1]$  par la relation  $(s, 0) \sim (1 - s, 1)$ ,  $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ .

Les identifications de ces cinq derniers exemples sont représentées sur la figure II.4.

On reviendra sur la représentation des espaces définis ci-dessus lorsqu'on disposera de la notion de compact, au chapitre suivant.

Pour terminer, on introduit la notion d'ensemble saturé, qui permet de dire quand la projection canonique est ouverte ou fermée.

**Définition II.2.9.** Soit  $X$  un ensemble muni d'une relation d'équivalence  $R$  et soit  $A \subset X$ . Le saturé de  $A$ , par rapport à  $R$ , est la réunion de toutes les classes d'équivalence qui rencontrent  $A$ , soit :

$$\bigcup_{x \in A} C_x \quad .$$

Le saturé de  $A$  peut donc s'écrire  $\pi^{-1}(\pi(A))$ , où  $\pi : X \rightarrow X/R$  désigne la projection canonique; la proposition suivante en résulte aussitôt :

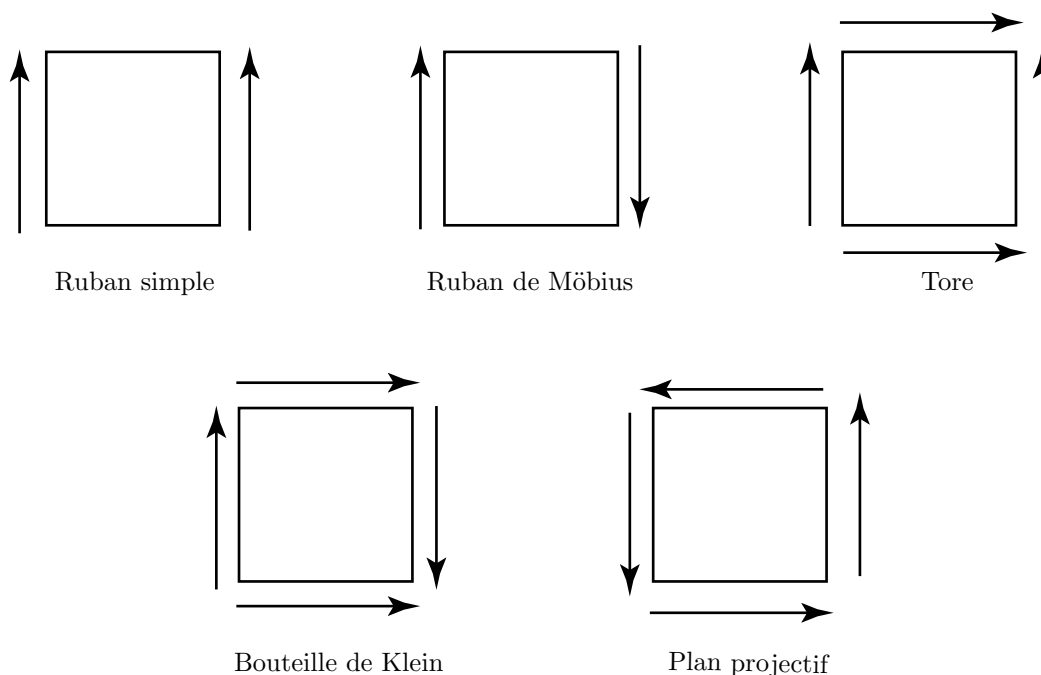


Figure II.4: Esquisses des identifications

**Proposition II.2.10.** *Soit  $X$  un espace topologique,  $R$  une relation d'équivalence sur  $X$ . La projection canonique  $\pi : X \rightarrow X/R$  est ouverte si et seulement si le saturé de tout ouvert de  $X$  est ouvert; elle est fermée si et seulement si le saturé de tout fermé de  $X$  est fermé. ■*

**Exemples II.2.11.**

- (1) Dans l'exemple II.2.8(2), le saturé de  $[0, \frac{1}{2}[$ , qui est ouvert, est  $[0, \frac{1}{2}[\cup \{1\}$ , qui n'est pas ouvert; la projection canonique n'est donc pas fermée. Par contre, on voit facilement que le saturé d'un fermé de  $[0, 1]$  est fermé, donc la projection canonique est fermée.
- (2) Sur  $[-2, 2]$  considérons la relation d'équivalence :

$$x \sim -x \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \text{ ou } -2 \leq x \leq -1.$$

On vérifie que l'application :

$$\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = \begin{cases} (x^2, 0) & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \text{ ou } -2 \leq x \leq -1 \\ -(\cos(\pi t), \sin(\pi t)) & \text{sinon} \end{cases}$$

est fermée et donc elle induit un homéomorphisme  $\bar{\varphi}$  de  $[-2, 2]/\sim$  sur le sous-ensemble du plan constitué par  $S^1 \cup [1, 4]$  (voir figure II.6).

Dans cet exemple, le saturé de  $A \subset [-2, 2]$  est la réunion de  $A$  avec  $A' = A \cap [-2, -1] \cup [1, 2]$  et son symétrique  $A'' = \{x \in [-2, 2] \mid -x \in A'\}$ . Il en résulte que si  $A$  est fermé, son saturé l'est aussi, donc la projection canonique  $\pi : [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]/\sim$  est fermée. Par contre, elle n'est pas ouverte : le saturé de l'ouvert  $[-2, 0[$  est  $[-2, 0[ \cup [1, 2]$ , qui n'est pas ouvert.

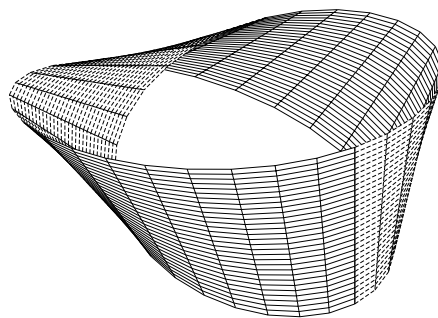
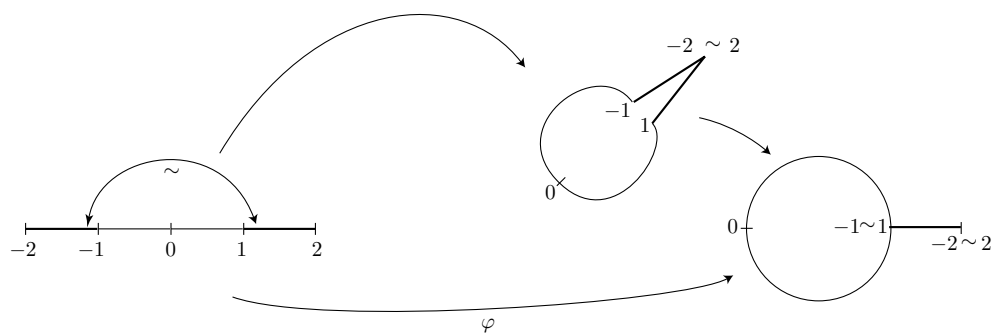


Figure II.5: Une représentation du ruban de Moebius

Figure II.6: Le quotient de l'exemple [II.2.11\(2\)](#)

# Chapitre III

## Espaces compacts

### III.1 Espaces topologiques séparés

**Définition III.1.1.** Soit  $X$  un espace topologique; on dit qu'il est séparé si pour tout  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , il existe deux ouverts  $U_x$  et  $U_y$  tels que  $x \in U_x$ ,  $y \in U_y$  et  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

On dit que les ouverts  $U_x$  et  $U_y$  séparent les points  $x$  et  $y$ .

Dans l'approche de F. Hausdorff de la notion d'espace topologique, la condition d'être séparé faisait partie de la définition. C'est pourquoi on dit parfois *espace de Hausdorff* pour espace séparé.

Remarquons qu'il suit immédiatement de la définition que dans un espace séparé les points sont des fermés : si  $x \in X$  et  $y \in X \setminus \{x\}$ , alors  $x \neq y$  et  $y \in U_y \subset X \setminus \{x\}$ .

#### Exemples III.1.2.

- (1) Tout espace métrique  $(X, d)$  est séparé : si  $x, y \in X$  et  $x \neq y$ , alors  $r = d(x, y) > 0$  et on peut prendre  $U_x = B(x, \frac{r}{2})$ ,  $U_y = B(y, \frac{r}{2})$ .
- (2) Si  $X$  est muni de la topologie grossière et contient au moins deux éléments, il n'est pas séparé.
- (3) L'espace de Sierpinski  $\mathcal{S} = \{0, 1\}$ , muni de la topologie  $\tau = \{\{0\}, \{0, 1\}, \emptyset\}$  n'est pas séparé : tout ouvert qui contient 1 contient aussi 0.
- (4) Considérons sur  $\mathbb{R}^n$  la relation d'équivalence :  $x \sim \lambda \cdot x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Si  $x \neq 0$ , la classe d'équivalence  $[x]$  est la droite par  $x$  privée de 0, et  $[0] = \{0\}$ . Si  $U \subset \mathbb{R}^n / \sim$ , avec  $[0] \in U$ , est ouvert, alors  $\pi^{-1}(U)$  est un ouvert saturé de  $\mathbb{R}^n$  qui contient un voisinage de 0; ce ne peut être que  $\mathbb{R}^n$  tout entier. Il n'est donc pas possible de séparer  $[0]$  et  $[x]$ ,  $x \neq 0$ .

Voici quelques propriétés des espaces séparés.

#### Proposition III.1.3.

- (1) Si  $X$  est séparé et  $A \subset X$  est muni de la topologie induite, alors  $A$  est séparé.
- (2) Soit  $\{X_i\}_{i \in I}$  une famille d'espaces. Alors :

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ est séparé} \iff X_i \text{ est séparé } \forall i \in I$$

- (3) Soit  $\{X_i\}_{i \in I}$  une famille d'espaces non vides. Alors :

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ est séparé} \iff X_i \text{ est séparé } \forall i \in I$$

(4) Si  $\sim$  est une relation d'équivalence sur l'espace topologique  $X$ , alors :

$$X/\sim \text{ est séparé } \iff \forall x, y \in X, x \not\sim y, \exists \text{ des ouverts saturés } U_x, U_y \subset X \text{ tels que } U_x \cap U_y = \emptyset$$

*Preuve:*

(1) Si  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$  et  $U_x, U_y \subset X$  sont des ouverts de  $X$  qui séparent  $x$  et  $y$ , alors  $U_x \cap A$  et  $U_y \cap A$  sont des ouverts de  $A$  qui séparent  $x$  et  $y$ .

(2) Si  $\coprod_{i \in I} X_i$  est séparé, rappelons que l'application  $\varphi_j : X_j \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ ,  $\varphi_j(x) = (x, j)$ , est un homéomorphisme sur son image, qui est séparée d'après (1), et donc  $X_j$  lui-même est séparé.

Réciproquement, soient  $(x, j), (x', j') \in \coprod_{i \in I} X_i$ ,  $(x, j) \neq (x', j')$ .

- Si  $j = j'$ , alors  $x \neq x'$  et on peut séparer  $x$  et  $x'$  par des ouverts  $U$  et  $U'$  de  $X_j$ ; alors  $(x, j)$  et  $(x', j)$  seront séparés par  $\varphi_j(U)$  et  $\varphi_j(U')$ , qui sont ouverts dans  $\coprod_{i \in I} X_i$  d'après 1.3.2(2).
- Si  $j \neq j'$ , on peut séparer  $(x, j)$  et  $(x', j')$  par  $\varphi_j(X_j)$  et  $\varphi_{j'}(X_{j'})$ , qui sont ouverts dans  $\coprod_{i \in I} X_i$ , toujours d'après 1.3.2(2).

(3) Supposons que les  $X_i$  soient séparés  $\forall i \in I$  et soient  $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ , avec  $x \neq y$ . Alors  $\exists j \in I$  tel que  $x_j \neq y_j$ ; puisque  $X_j$  est séparé, il existe des ouverts  $U_j^x$  et  $U_j^y$  de  $X_j$ , contenant respectivement  $x_j$  et  $y_j$ , et tels que  $U_j^x \cap U_j^y = \emptyset$ . Alors les rectangles  $R(U_j^x)$  et  $R(U_j^y)$  sont des ouverts de  $\prod_{i \in I} X_i$  qui séparent  $x$  et  $y$ .

Réciproquement, si  $\prod_{i \in I} X_i$  est séparé, sachant que les  $X_i$  sont non vides, on peut choisir un élément  $x^0 \in \prod_{i \in I} X_i$ . On a vu dans II.1.6 que, pour tout  $j \in I$ ,  $X_j$  est homéomorphe à la tranche  $T(j, x^0)$ , qui d'après (1) est un espace séparé parce que c'est un sous-espace de  $\prod_{i \in I} X_i$ , qui est séparé par hypothèse; donc  $X_j$  est séparé.

(4) est une conséquence immédiate des définitions.

*q. e. d.*

## III.2 Espaces compacts

**Définition III.2.1.** Soit  $X$  un espace topologique. Un recouvrement de  $X$  par des ouverts est une famille  $\{U_i\}_{i \in I}$  d'ouverts de  $X$  tels que :

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \quad .$$

**Définition III.2.2.** On dit que l'espace  $X$  est compact s'il est séparé et de plus satisfait la condition suivante, qu'on appelle *condition de compacité* : pour tout recouvrement  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$  par des ouverts, on peut trouver un sous-ensemble *fini*  $J \subset I$  tel que

$$X = \bigcup_{i \in J} U_i \quad .$$

On dit que  $\{U_i\}_{i \in J}$  est un sous-recouvrement *extrait* du recouvrement  $\{U_i\}_{i \in I}$ . On peut donc reformuler la condition précédente en disant que de tout recouvrement de  $X$  par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

En passant aux complémentaires, on peut reformuler cette condition en termes de fermés : si  $\{F_i\}_{i \in I}$  est une famille de fermés de  $X$  telle que  $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ , alors il existe un sous-ensemble *fini*  $J \subset I$  tel que  $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$ . Autrement dit, si l'intersection d'une famille de fermés est vide, il existe une sous-famille dont l'intersection est vide.

Dans la pratique, on se trouve souvent dans la situation où  $X$  est un sous-espace d'un espace  $Y$ , et que le recouvrement de  $X$  est donné par une famille  $\{V_i\}_{i \in I}$  d'ouverts de  $Y$ ; strictement parlant, le recouvrement de  $X$  est la famille  $\{V_i \cap X\}_{i \in I}$ . La condition de compacité de  $X$  s'exprime alors en disant qu'il existe  $J \subset I$  fini tel que  $X \subset \bigcup_{i \in J} V_i$ . En termes de fermés, si  $\{F_i\}_{i \in I}$  est une famille de fermés de  $Y$ , la compacité de  $X$  s'exprime en disant que si  $X \cap (\bigcap_{i \in I} F_i) = \emptyset$ , alors il existe  $J \subset I$  fini tel que  $X \cap (\bigcap_{i \in J} F_i) = \emptyset$ .

**Remarque III.2.3.** En particulier, si  $X$  est compact et  $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n \subset \dots$  est une suite croissante d'ouverts tels que  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ , alors il existe  $n_0$  tel que  $X = U_n, \forall n \geq n_0$ .

De même, toujours si  $X$  est compact, et si  $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$  est une suite décroissante de fermés dont l'intersection est vide, alors  $\exists n_0$  tel que  $F_n = \emptyset$  si  $n \geq n_0$ .

On peut montrer qu'un sous-espace  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  est compact si et seulement si il est fermé et borné (voir [3, IV.1.18-IV.1.21]). Nous reviendrons au §III.3 sur ce résultat fondamental, qui nous fournit les exemples de base d'espaces compacts.

Voici quelques propriétés élémentaires des espaces compacts.

**Proposition III.2.4.**

- (1) Soit  $X$  un espace compact et soit  $F \subset X$  un sous-espace fermé; alors  $F$  est compact.
- (2) Soit  $X \subset Y$ ; si  $X$  est compact et  $Y$  est séparé, alors pour tout  $y \in Y \setminus X$  il existe des ouverts  $V_y$  et  $U_X$  de  $Y$  tels que  $y \in V_y$ ,  $X \subset U_X$  et  $V_y \cap U_X = \emptyset$ . En particulier,  $X$  est fermé dans  $Y$ .

*Preuve:*

(1)  $F$  est séparé d'après III.1.3(1). Si  $\{U_i\}_{i \in I}$  est une famille d'ouverts de  $X$  tels que  $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ , alors si on ajoute l'ouvert  $X \setminus F$  à la famille  $\{U_i\}_{i \in I}$  on obtient un recouvrement de  $X$  par des ouverts, dont on peut extraire un recouvrement fini, de la forme  $\{U_i\}_{i \in J}$ ,  $J \subset I$ , plus éventuellement l'ouvert  $X \setminus F$ . Dans tous les cas,  $\{U_i\}_{i \in J}$  est un recouvrement fini de  $F$ .

(2) Soit  $y \in Y \setminus X$ . Comme  $Y$  est séparé, pour tout  $x$  on peut trouver de ouverts  $U_x$  et  $V_y^x$ ,  $U_x \ni x$ ,  $V_y^x \ni y$ , tels que  $U_x \cap V_y^x = \emptyset$ . Evidemment la famille d'ouverts  $\{U_x\}_{x \in X}$  recouvre  $X$ ; on peut donc en extraire un recouvrement fini  $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\}$  de  $X$ . Posons  $U_X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$  et  $V_y = \bigcap_{h=1, \dots, k} V_y^{x_h}$ ; alors  $U$  et  $V$  sont des ouverts,  $U_X \supset X$ ,  $V_y \ni y$  et  $U_X \cap V_y = \emptyset$ , car si  $z \in U_X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$ , il existe  $h$  tel que  $z \in U_{x_h}$ , et puisque  $U_{x_h} \cap V_y^{x_h} = \emptyset$ ,  $z \notin V_y$ . En particulier,  $V_y \cap X = \emptyset$ , donc  $Y \setminus X = \bigcup_{y \in Y \setminus X} V_y$  est un ouvert.

*q.e.d.*

Notons que pour le point (2), nous avons démontré que l'on peut séparer  $y \in Y \setminus X$  et le fermé  $X$  par les ouverts  $V_y$  et  $U_X$ ; ceci nous sera utile dans la prochaine proposition

**Proposition III.2.5.** Soit  $X$  un espace compact; alors :

- (1)  $\forall x \in X$  et  $F \subset X$  fermé, il existe des ouverts  $U_x, U_F \subset X$  tels que  $x \in U_x$ ,  $F \subset U_F$  et  $U_x \cap U_F = \emptyset$ .
- (2) Soient  $F_1, F_2 \subset X$  deux fermés. Il existe des ouverts  $U_1, U_2 \subset X$  tels que  $F_1 \subset U_1$ ,  $F_2 \subset U_2$  et  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

Cette proposition nous dit que, dans un espace compact, on peut séparer deux fermés par des ouverts. Notons que, les points de  $X$  étant fermés, l'assertion (1) suit de (2); mais (1) est en fait une étape utilisée dans la démonstration de (2).

*preuve de III.2.5*

(1) est un cas particulier du point (2) de la proposition précédente. Pour (2), soit  $y \in F_2$ ; d'après (1), il existe des ouverts  $U_{F_1}^y \supset F_1$  et  $U_y \ni y$ , avec  $U_{F_1}^y \cap U_y = \emptyset$ . D'après III.2.4(1),  $F_2$  est compact, et les ouverts  $\{U_y\}_{y \in F_2}$  forment un recouvrement de  $F_2$ ; on peut donc en extraire un recouvrement fini  $U_{y_1}, \dots, U_{y_n}$ . Prenons  $U_1 = \bigcap_{h=1, \dots, k} U_{F_1}^{y_h}$  et  $U_2 = U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$ . Alors  $F_1 \subset U_1$ ,  $F_2 \subset U_2$  et  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

*q.e.d.*

Signalons qu'une espace topologique séparé vérifiant la propriété que l'on peut séparer un point et un fermé est appelé *régulier*. Aussi, un espace topologique dans lequel on peut séparer deux fermés disjoints est appelé *normal*. Ainsi, la proposition précédente peut se résumer en disant que tout espace compact est normal.

**Théorème III.2.6.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Si  $X$  est compact et  $Y$  séparé, alors  $f(X)$  est compact.

*Preuve:* Puisque  $Y$  est séparé,  $f(X)$  l'est aussi, par III.1.3(1). Il suffit donc de vérifier que  $f(X)$  satisfait la condition de compacité; supposons que  $f(X) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ , où  $\{U_i\}_{i \in I}$  est une famille d'ouverts de  $Y$ . Puisque  $f$  est continue,  $f^{-1}(U_i)$  est ouvert dans  $X$ ,  $\forall i \in I$ , et donc  $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$  est un recouvrement de  $X$  par des ouverts, dont on peut extraire un recouvrement fini :  $X = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)$ , où  $J \subset I$  est un sous-ensemble fini. Alors les  $\{U_i\}_{i \in J}$  forment un recouvrement fini de  $f(X)$ .

*q.e.d.*

**Corollaire III.2.7.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue, où  $X$  est compact et  $Y$  séparé. Alors  $f$  est fermée.*

*Preuve:* Prenons un fermé  $F \subset X$  : d'après III.2.4(1) il est compact, et alors d'après III.2.6  $f(F)$  est compact, donc d'après III.2.4(2)  $f(F)$  est fermé dans  $Y$ .

**Corollaire III.2.8.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue, bijective, où  $X$  est compact et  $Y$  séparé. Alors  $f$  est un homéomorphisme.*

*Preuve:* Il suit du corollaire précédente que  $f$  est fermée, donc  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  est continue (cf. I.2.27).  
*q.e.d.*

**Corollaire III.2.9.** *Soit  $X$  un espace compact,  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $X$ . Alors*

$$X/\sim \text{ est compact } \iff X \text{ est séparé}$$

*Preuve:* On applique III.2.6 à la projection canonique  $\pi : X \rightarrow X/\sim$ , qui est surjective.

*q.e.d.*

**Corollaire III.2.10.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue, surjective,  $X$  compact et  $Y$  séparé. Soit  $\sim$  la relation d'équivalence sur  $X$  associée à  $f : x \sim x'$  si  $f(x) = f(x')$ . Alors l'application  $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$  induite par  $f$ ,  $\bar{f}([x]) = f(x)$ , est un homéomorphisme.*

*Preuve:* Les classes d'équivalence sont les fibres de  $f$ , c'est-à-dire les sous-ensembles  $f^{-1}(y)$ ,  $y \in Y$ . Si  $y \neq y'$ , il existe des ouverts  $V_y$  et  $V_{y'}$  qui séparent  $y$  et  $y'$ . Alors  $f^{-1}(V_y)$  et  $f^{-1}(V_{y'})$  sont des ouverts saturés de  $X$  qui séparent  $f^{-1}(y)$  et  $f^{-1}(y')$ , donc  $X/\sim$  est séparé et le corollaire précédent implique qu'il est compact. On peut donc appliquer le corollaire III.2.8 à  $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ .

*q.e.d.*

**Corollaire III.2.11.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  avec les mêmes hypothèses que le corollaire précédent. Soit de plus  $g : Y \rightarrow Z$  une application compatible avec  $f$ , c'est-à-dire telle que  $f(x) = f(x') \Rightarrow g(x) = g(x')$ . Alors on peut définir  $\bar{g} : Y \rightarrow Z$  en posant  $\bar{g}(f(x)) = g(x)$  et cette définition est cohérente. On a :*

$$g \text{ est continue } \iff \bar{g} \text{ est continue}$$

*Preuve:* Représentons les divers espaces et applications qui interviennent sur un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ \pi \swarrow & & \nearrow \bar{g} \\ X/\sim & \xrightarrow{\bar{f}} & Y \end{array}$$

Si  $\bar{g}$  est continue, alors  $g = \bar{g} \circ f$  est continue car composition d'applications continues.

Si  $g$  est continue, soit  $V \subset Z$  ouvert et vérifions que  $U = \bar{g}^{-1}(V)$  est ouvert dans  $Y$ . Pour cela, remarquons que  $U$  est ouvert si et seulement si  $U' = \bar{f}^{-1}(U)$  est ouvert, car d'après le corollaire précédent  $\bar{f}$  est un homéomorphisme. Aussi, par définition de la topologie quotient,  $U'$  est ouvert si et seulement si  $\pi^{-1}(U')$  est ouvert. Or  $\pi^{-1}(U') = \pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(U)) = \pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(\bar{g}^{-1}(V))) = g^{-1}(V)$ , qui est ouvert parce que  $g$  est continue.

*q.e.d.*

Dans la situation du corollaire précédent, on dit que  $g$  se factorise par  $f$ , et  $\bar{g}$  est sa factorisée..



**Exemples III.2.12.**

- (1) Reprenons l'exemple II.2.8(2) : l'application  $g : [0, 1] \rightarrow S^1$  est continue, surjective,  $S^1$  est séparé. Donc il suit sans autre de III.2.10 que  $f$  induit un homéomorphisme  $\bar{f} : [0, 1]/\sim \rightarrow S^1$ , où  $\sim$  est la relation associée à  $f$ , c'est-à-dire celle qui identifie 0 et 1.
- (2) L'application  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(s, t) = (s \cdot \cos(2\pi t), s \cdot \sin(2\pi t), s)$  est une surjection sur le cône  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ , donc  $\bar{f} : [0, 1] \times [0, 1]/\sim \rightarrow C$  est un homéomorphisme. La relation  $\sim$  identifie tous les points de la forme  $(0, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , ainsi que  $(s, 0)$  et  $(s, 1)$ ,  $s \in [0, 1]$ .

**III.2.1 Somme disjointe et produits d'espaces compacts**

**Proposition III.2.13.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. Alors la somme disjointe  $X \amalg Y$  est compacte si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont compacts.*

*Preuve:* On a vu dans I.3.2(2) les applications  $\varphi_X : X \rightarrow X \amalg Y$  et  $\varphi_Y : Y \rightarrow X \amalg Y$  qui sont des homéomorphismes sur leur image, qui sont des fermés dans  $X \amalg Y$ . Donc si  $X \amalg Y$  est compact, il en est de même pour  $X$  et  $Y$ .

Supposons que  $X$  et  $Y$  soient compacts; c'est facile de voir que  $X \amalg Y$  est séparé. Occupons-nous de la condition de compacité pour  $X \amalg Y$ ; si  $\{W_i\}_{i \in I}$  est un recouvrement de  $X \amalg Y$  par des ouverts,  $\{\varphi_X^{-1}(W_i)\}_{i \in I}$  est un recouvrement de  $X$ , et  $\{\varphi_Y^{-1}(W_i)\}_{i \in I}$  est un recouvrement de  $Y$  par des ouverts. On peut donc extraire des recouvrements finis  $\{\varphi_X^{-1}(W_i)\}_{i \in J_X}$  et  $\{\varphi_Y^{-1}(W_i)\}_{i \in J_Y}$  de  $X$ , respectivement  $Y$ , où  $J_X, J_Y \subset I$  sont des sous-ensembles finis. Alors, si on pose  $J = J_X \cup J_Y$ ,  $\{W_i\}_{i \in J}$  est un sou-recouvrement fini de  $X \amalg Y$ .

*q.e.d.*

**Remarque III.2.14.** Si on prend une famille infinie d'espaces  $\{X_i\}_{i \in I}$  non vides, leur somme disjointe  $\coprod_{i \in I} X_i$  ne peut pas vérifier la condition de compacité; en effet, si on appelle  $X'_i = \{(x, j) \mid x \in X_i, j = i\}$ , les  $X'_i$  forment un recouvrement de  $\coprod_{i \in I} X_i$  par des ouverts, dont on ne peut pas extraire un recouvrement fini.

Par contre, on voit facilement que la proposition précédente reste valable si au lieu de deux espaces on en prend une famille finie.

Le Théorème de Tychonoff affirme que si on a une famille quelconque  $\{X_i\}_{i \in I}$  d'espaces non vides, alors leur produit  $\prod_{i \in I} X_i$  est compact si et seulement si chaque  $X_i$  est compact. Nous nous contentons de considérer ici le cas d'un produit fini d'espaces, qui est beaucoup plus simple.

**Proposition III.2.15.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces non vides. Alors :*

$$X \times Y \text{ est compact} \iff X \text{ et } Y \text{ sont compacts}$$

*Preuve:* On s'est déjà occupé de la propriété d'être séparé dans III.1.3(3). D'autre part,  $X$  et  $Y$  sont l'image des projections canoniques  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ , respectivement  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ , et donc si  $X \times Y$  est compact,  $X$  et  $Y$  le sont aussi, d'après III.2.6.

Supposons donc que  $X$  et  $Y$  soient compacts et montrons que  $X \times Y$  vérifie la condition de compacité. Soit  $\{U_i\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $X \times Y$  par des ouverts. Pour tout  $y \in Y$  fixé, considérons l'application continue  $\varphi_X : X \rightarrow X \times Y$ ,  $\varphi_X(x) = (x, y)$  (cf. le paragraphe sur les tranches II.1.2). Les  $\varphi_X^{-1}(U_i)$  forment un recouvrement de  $X$  par des ouverts; on peut donc trouver un sous-ensemble fini  $J_y \subset I$  tel que les  $\{\varphi_X^{-1}(U_i)\}_{i \in J_y}$  recouvrent  $X$ , ceci pour tout  $y \in Y$ .

Rappelons que la projection canonique  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  est ouverte (II.1.4(1)) et posons  $V_y = \bigcap_{j \in J_y} \pi_Y(U_j)$ . Puisque  $Y$  est compact, on peut extraire de la famille d'ouverts  $\{V_y\}_{y \in Y}$  un recouvrement fini  $V_{y_1}, \dots, V_{y_k}$ ; posons  $J = J_{y_1} \cup \dots \cup J_{y_k}$ . Alors les  $\{U_i\}_{i \in J}$  forment un recouvrement fini de  $X \times Y$ .

*q.e.d.*

Une conséquence immédiate :

**Corollaire III.2.16.** *Soient  $X_1, \dots, X_n$  des espaces topologiques non vides. Alors*

$$X_1 \times \dots \times X_n \text{ est compact} \iff X_1, \dots, X_n \text{ sont compacts}$$

### III.2.2 Attachement de deux espaces

Voici encore une manière de construire des espaces à l'aide de la topologie quotient.

**Définition III.2.17.** Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques,  $A \subset X$  et  $f : A \rightarrow Y$  une application continue. On définit l'attachement (ou recollement) de  $X$  et  $Y$  par  $f$ , noté  $X \cup_f Y$ , par :

$$X \cup_f Y = X \amalg Y / \sim \quad , \quad \text{où} \quad x \sim y \text{ si } x \in A, y \in Y \text{ et } f(x) = y \quad .$$

Comme d'habitude, il est sous-entendu que  $x \sim x$  si  $x \in X$ ,  $y \sim y$  si  $y \in Y$  et  $x \sim x'$  si  $f(x) = f(x')$ . Les classes d'équivalence sont les points isolés de  $X \setminus A$ , les points isolés de  $Y \setminus f(A)$  et les fibres de  $f$ .

On peut résumer en disant que  $X \cup_f Y$  est obtenu en identifiant, dans la somme disjointe de  $X$  et  $Y$ , les points de  $A$  et leur image dans  $Y$  par  $f$ .

Pour pouvoir profiter de cette construction, la proposition suivante est utile; sa démonstration fait appel à deux lemmes élémentaires, qui sont utiles en soi.

**Proposition III.2.18.** Soient  $X$  et  $Y$  compacts,  $A \subset X$  fermé et  $f : A \rightarrow Y$  continue; alors l'espace  $X \cup_f Y$  est compact.

**Lemme III.2.19.** Soit  $X$  un espace compact,  $F_1, F_2 \subset X$  deux fermés disjoints :  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ . Alors il existe deux ouverts  $U_1, U_2 \subset X$  tels que  $F_1 \subset U_1$ ,  $F_2 \subset U_2$  et  $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$ .

*Preuve:* D'après III.2.5, il existe deux ouverts  $V_1, V_2 \subset X$  qui séparent  $F_1$  et  $F_2$ . Il en suit que  $\overline{V_1} \cap F_2 = \emptyset$ . Toujours d'après III.2.5, il existe des ouverts  $W_1, W_2 \subset X$  qui séparent  $\overline{V_1}$  et  $F_2$ ; alors  $\overline{V_1} \cap \overline{W_2} = \emptyset$ , et on peut prendre  $U_1 = V_1$ ,  $U_2 = W_2$ .

*q. e. d.*

**Lemme III.2.20.** Soit  $X$  un espace compact,  $A \subset X$  fermé,  $F_1, F_2 \subset A$  deux fermés, et soient  $U_1, U_2 \subset A$  deux ouverts de  $A$  tels que  $F_1 \subset U_1$ ,  $F_2 \subset U_2$  et  $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$ . Alors il existe deux ouverts  $V_1, V_2 \subset X$  tels que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  et  $U_1 = V_1 \cap A$ ,  $U_2 = V_2 \cap A$ .

*Preuve:* Puisque  $A$  est fermé dans  $X$ , les adhérences  $\overline{U_1}$  et  $\overline{U_2}$  sont contenues dans  $A$ . D'après le lemme précédent, il existe des ouverts  $W_1, W_2$  de  $X$  qui séparent  $\overline{U_1}$  et  $\overline{U_2}$ . On pose alors  $V_i = W_i \setminus (A \setminus U_i)$ ,  $i = 1, 2$ ; puisque  $U_i$  est ouvert dans  $A$ ,  $A \setminus U_i$  est fermé dans  $A$ , donc aussi dans  $X$ , et alors  $W_i$  est ouvert dans  $X$ . D'autre part,  $V_1 \cap V_2 \subset W_1 \cap W_2 = \emptyset$  et  $V_i \cap A = U_i$ ,  $i = 1, 2$ .

*q. e. d.*

*Preuve de III.2.18*

On sait que  $X \amalg Y$  est compact par III.2.13; il suffit donc de voir que le quotient  $X \amalg Y$  est séparé. Ecrivons les points de  $X \amalg Y$  sous la forme  $(x, 1)$ ,  $x \in X$  et  $(y, 2)$ ,  $y \in Y$ . Les classes d'équivalence de la relation  $\sim$  qui définit l'attachement de  $X$  et  $Y$  par  $f$  sont :

- (1) Les ensembles réduits à des points  $\{(x, 1)\}$ ,  $x \in X \setminus A$  et  $\{(y, 2)\}$ ,  $y \in Y \setminus f(A)$
- (2) Les ensembles de la forme  $\{(y, 2)\} \cup \{(x, 1) \mid f(x) = y\}$

On peut séparer des classes du type (1) par des ouverts de  $X \setminus A$  ou  $Y \setminus f(A)$  parce que  $X$  et  $Y$  sont séparés. Pour séparer deux classes du type (2), supposons que  $y_1, y_2 \in f(A)$ ,  $y_1 \neq y_2$ , et séparons  $y_1$  et  $y_2$  par des ouverts  $U_1$  et  $U_2$  de  $Y$  tels que  $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$ , ce que permet le lemme III.2.19. Alors  $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \emptyset$  et d'après le lemme III.2.20 on peut trouver des ouverts  $V_1, V_2$  de  $X$  tels que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  et  $V_i \cap A = f^{-1}(U_i)$ ; les ensembles :

$$\{(x, 1) \mid x \in V_i\} \cup \{(y, 2) \mid y \in U_i\} \quad , \quad i = 1, 2$$

sont saturés et séparent les deux classes

$$\{(y_i, 2)\} \cup \{(x, 1) \mid f(x) = y_i\} \quad , \quad i = 1, 2 \quad .$$

Les fibres  $f^{-1}(y)$  étant des fermés, on peut utiliser la proposition III.2.5 pour séparer des classes de type (1) et (2) par des ouverts saturés.

*q. e. d.*

**Exemple III.2.21.** La sphère  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  peut être obtenue en recollant l'hémisphère nord et l'hémisphère sud le long de l'équateur. Plus précisément, soit  $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  le disque unité centré en  $0 \in \mathbb{R}^2$ , dont le bord est le cercle unité  $S^1$ ; dans la définition précédente, on prend  $X = Y = D^2$ ,  $A = S^1$  et  $f = 1_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$  l'application identique. Pour voir que  $D^2 \cup_{1_{S^1}} D^2$  s'identifie à  $S^2$ , appelons  $D_+^2$  et  $D_-^2$  deux copies de  $D^2$  et définissons :

$$\varphi_+ : D_+^2 \rightarrow S^2, \quad \varphi_+(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \quad \text{et} \quad \varphi_- : D_-^2 \rightarrow S^2, \quad \varphi_-(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

L'application  $\psi : D_+^2 \amalg D_-^2 \rightarrow S^2$ , qui est  $\varphi_+$  sur  $D_+^2$  et  $\varphi_-$  sur  $D_-^2$ , est compatible avec la relation d'équivalence qu'on déduit de  $1_{S^1}$  selon la définition III.2.17, parce que si  $(x, y) \in S^1$ ,  $\varphi_+(x, y) = \varphi_-(x, y) = (x, y, 0)$ . On en déduit un diagramme d'applications continues :

$$\begin{array}{ccc} D_+^2 \amalg D_-^2 & \xrightarrow{\psi} & S^2 \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\psi} & \\ D_+^2 \amalg D_-^2 / \sim & & \end{array}$$

et on peut vérifier que  $\bar{\psi}$  est un homéomorphisme.

### III.3 Compacts dans les espaces métriques

Dans tous ce §,  $(X, d)$  désignera un espace métrique; sur  $\mathbb{R}^n$ , on considérera la métrique provenant de la norme euclidienne.

Dans le cas des espaces métriques, la notion de compact peut s'exprimer en termes de limites de suites.

**Définition III.3.1.** Soit  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  une suite dans l'espace  $X$ . On appelle *valeur d'adhérence* de cette suite tout élément de l'ensemble

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} F_N, \quad \text{où} \quad F_N = \overline{\{x_n, n \geq N\}}.$$

Par exemple, si on prend la suite dans  $\mathbb{R}$  définie par  $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ , les valeurs d'adhérence sont 1 et  $-1$ ; mais cette suite ne converge pas.

**Définition III.3.2.** Soit  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  une suite dans l'espace  $X$ . Désignons par  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante dans  $\mathbb{N} : n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$ . Alors on dit que la suite  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite extraite de la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Par exemple, les termes pairs de la suite  $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  forment la suite  $x_{n_k} = (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$ , qui converge vers 1.

**Proposition III.3.3.** Soit  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  une suite dans l'espace  $X$ . Alors  $a \in X$  est une valeur d'adhérence de cette suite si et seulement si il existe une suite extraite de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $a$ .

*Preuve:* Si  $a$  est une valeur d'adhérence, alors

$$a \in F_N = \overline{\{x_n, n \geq N\}} \quad \forall N.$$

Définissons  $x_{n_k}$  par récurrence sur  $k$ .

Puisque  $a \in \overline{\{x_n, n \geq 1\}}$ , il existe  $n_1 \geq 1$  tel que  $x_{n_1} \in B(a, 1)$ .

Supposons d'avoir défini  $x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$ . Puisque  $a \in \overline{\{x_n, n \geq n_k + 1\}}$ , il existe  $n_{k+1} \geq n_k + 1$  tel que  $x_{n_{k+1}} \in B(a, \frac{1}{k})$ .

Puisque  $x_{n_k} \in B(a, \frac{1}{k})$ , il est clair que  $x_{n_k}$  tend vers  $a$ .

Réciproquement, supposons qu'une suite extraite  $\{x_{n_k}\}$  converge vers  $a \in X$ . Posons :

$$F'_K = \overline{\{x_{n_k} \mid k \geq K\}} \quad .$$

Alors  $F'_K \subset F_{n_K}$  et  $\{a\} = \bigcap_{K \geq 1} F'_K \subset \bigcap_{N \geq 1} F_N$ .

*q. e. d.*

**Théorème III.3.4.** *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *L'espace métrique  $(X, d)$  est compact.*
- (2) *Toute suite dans  $X$  possède au moins une valeur d'adhérence.*
- (3) *De toute suite dans  $X$  on peut extraire une suite qui converge.*

Pour la démonstration, on doit d'abord établir deux lemmes.

**Lemme III.3.5.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique tel que toute suite possède au moins une valeur d'adhérence. Alors pour tout recouvrement  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$  par des ouverts, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :*

$$\forall x \in X \exists i \in I \text{ tel que } B(x, \varepsilon) \subset U_i \quad .$$

Un nombre tel que  $\varepsilon$  dans l'énoncé précédent est appelé *nombre de Lebesgue* du recouvrement  $\{U_i\}_{i \in I}$ .

*Preuve de III.3.5.* Si un tel  $\varepsilon$  n'existe pas, il existe une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U_i, \forall i \in I$ . Soit  $a \in X$  une valeur d'adhérence de la suite  $x_n$ ; il existe un ouvert  $U_{i_0}$  qui contient  $a$ , et donc aussi  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(a, \varepsilon) \subset U_{i_0}$ . Soit  $\{x_{n_k}\}$  une suite extraite de  $\{x_n\}$  qui converge vers  $a$ ; alors pour  $k$  assez grand, que l'on peut prendre aussi tel que  $n_k > \frac{1}{\varepsilon}$ ,  $x_{n_k} \in B(a, \varepsilon/2)$ , et alors  $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset B(a, \varepsilon) \subset U_{i_0}$ , contradiction.  
*q. e. d.*

**Lemme III.3.6.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique tel que toute suite possède au moins une valeur d'adhérence. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un ensemble fini  $\{a_1, \dots, a_N\} \subset X$  tel que :*

$$X = \bigcup_{n=1}^N B(a_n, \varepsilon) \quad .$$

*Preuve:* Prenons  $a_1 \in X$  quelconque; si  $X = B(a_1, \varepsilon)$ , le lemme est démontré. Sinon, il existe  $a_2 \in X \setminus B(a_1, \varepsilon)$ ; on recommence avec  $a_1, a_2$  : si  $X = B(a_1, \varepsilon) \cup B(a_2, \varepsilon)$ , on a fini, sinon on prend  $a_3 \in X \setminus (B(a_1, \varepsilon) \cup B(a_2, \varepsilon))$ , et ainsi de suite.

Si le procédé ne s'arrête pas, on peut construire une suite infinie  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  telle que pour  $m \leq n$ ,  $d(a_n, a_m) \geq \varepsilon$ . Il est clair que l'on ne peut pas extraire une suite qui converge d'une telle suite; le procédé doit donc s'arrêter après un nombre fini de pas, ce qui démontre le lemme.

*q. e. d.*

*Preuve de III.3.4* Si  $X$  est compact et  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  une suite, les fermés  $F_N = \overline{\{x_n, n \geq N\}}$  sont non vides et on peut appliquer la remarque III.2.3 pour en conclure que  $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} F_N$ , qui est l'ensemble des valeurs d'adhérence, est non vide. Ceci montre que (1)  $\Rightarrow$  (2), et il suit de la proposition III.3.3 que (2) et (3) sont équivalents.

Il reste à voir que (2)  $\Rightarrow$  (1). Soit  $\{U_i\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $X$  par des ouverts; soit  $\varepsilon$  un nombre de Lebesgue de ce recouvrement, fourni par le lemme III.3.5, et soient  $a_1, \dots, a_N \in X$  les points fournis par le lemme III.3.6. Si  $U_{i_n}$  est un ouvert qui contient  $a_{i_n}$ , les ouverts  $U_{i_1}, \dots, U_{i_N}$  recouvrent  $X$ .

*q. e. d.*

Comme application, on peut caractériser les compacts de  $\mathbb{R}^n$  en partant du théorème de Cantor qui affirme que si  $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_k \supset \dots$  est une suite décroissante d'intervalles fermés et bornés de  $\mathbb{R}$ , alors  $\bigcap I_k \neq \emptyset$ . La preuve du théorème de Cantor est intimement liée à la construction des nombres réels : si

$I_k = [a_k, b_k]$ , on a que  $a_k \leq b_1$  et  $b_k \geq a_1$ , donc il suit de propriétés fondamentales des nombres réels (voir par exemple [3, th. III.1.12]) que l'on peut poser

$$a = \sup \{a_k\} \quad , \quad b = \inf \{b_k\} \quad ;$$

on aura  $a \leq b$  et  $\bigcap_{k \geq 1} I_k = [a, b]$ . Dans le cas où la longueur de  $I_k$  tend vers 0, on aura  $a = b$  et  $\bigcap_{k \geq 1} I_k = \{a\}$ .

**Théorème III.3.7.**

$$X \subset \mathbb{R}^n \text{ est compact} \iff X \text{ est fermé et borné}$$

*Preuve:* Si  $X \subset \mathbb{R}^n$  est compact, il est fermé d'après III.2.4(2). De plus  $X$  doit être borné, sinon  $\forall N \in \mathbb{N} \exists x_N$  tel que  $\|x_N\| \geq N$ . On ne peut pas extraire une suite qui converge de la suite  $\{x_N\}$ .

Réciproquement, on commence par montrer que tout intervalle fermé, borné  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  est compact, en montrant que de toute suite on peut extraire une sous-suite qui converge. Soit donc  $\{x_m\} \subset [a, b]$  une suite; on partage  $[a, b]$  en deux :  $[a, b] = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b]$  et l'un des deux nouveaux intervalles doit contenir une infinité d'éléments de la suite. On l'appelle  $I_1$  et on choisit un élément  $x_{m_1} \in I_1$ ; on recommence avec  $I_1$ . On obtient ainsi une suite d'intervalles  $I_k$  de longueur  $\frac{b-a}{2^k}$ , et une sous-suite  $\{x_{m_k}\}$  de  $\{x_m\}$ , avec  $x_{m_k} \in I_k$ . On appelle  $c = \bigcap_{k \geq 1} I_k$  : ce nombre existe d'après le théorème de Cantor (si on travaillait avec des nombres rationnels, son existence ne serait pas assurée!), et la suite  $\{x_{m_k}\}$  a  $c$  pour limite, car  $|x_{m_k} - c| \leq \frac{b-a}{2^k}$ .

Il suit de III.2.15 que si  $I_1, \dots, I_n$  sont des intervalles fermés bornés, leur produit  $I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$  est compact. Si  $X \subset \mathbb{R}^n$  est borné, disons que  $X \subset B(0, R)$ , il est contenu dans le produit d'intervalles  $[-R, R] \times \dots \times [-R, R]$ , qui est compact. Si de plus  $X$  est fermé, il est compact, car fermé dans un compact (proposition III.2.4(1)).

*q.e.d.*

On trouve comme corollaire une généralisation d'un théorème bien connu en analyse réelle (voir [3, Theorem IV(2.3)]).

**Corollaire III.3.8.** *Soit  $X$  un espace compact et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. Alors  $f$  est bornée et elle atteint ses bornes :*

$$\exists a, b \in X \text{ tels que } f(a) = \inf \{\|f(x)\|, x \in X\} \quad , \quad f(b) = \sup \{\|f(x)\|, x \in X\}$$

*Preuve:* D'après III.2.6,  $f(X)$  est compact, donc fermé et borné dans  $\mathbb{R}^n$ . Puisque  $f(X)$  est borné, les bornes inférieure et supérieure suivantes sont bien définies :

$$m = \inf \{\|f(x)\|, x \in X\}$$

$$M = \sup \{\|f(x)\|, x \in X\}$$

Du fait que  $f(X)$  est fermé,  $m$  et  $M$  appartiennent à  $f(X)$ , ce qui fait qu'il existe  $a, b \in X$  tels que  $m = f(a)$ ,  $M = f(b)$ .

*q.e.d.*

## III.4 Espaces localement compacts

**Définition III.4.1.** On dit que l'espace topologique séparé  $X$  est *localement compact* si tout point  $x \in X$  possède un voisinage compact. En symboles :

$$\forall x \in X \exists V \in \mathcal{V}_x, V \text{ compact.}$$

Par exemple, l'espace  $\mathbb{R}^n$  est localement compact, car pour tout  $a \in \mathbb{R}^n$ , la boule fermée  $\{a \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq 1\}$  est compacte. Aussi, si  $X$  est compact, il est voisinage de chacun de ses points, donc  $X$  est localement compact.

Dans la définition de localement compact, on exige l'existence d'un voisinage compact pour tout point; mais cela implique en fait l'existence de beaucoup de voisinages compacts de chaque point :

**Proposition III.4.2.** *Soit  $X$  un espace topologique localement compact. Alors, pour tout  $x \in X$  et tout voisinage  $V$  de  $x$ , il existe un voisinage compact  $V'$  de  $x$  tel que  $V' \subset V$ .*

Pour la preuve, on passe par deux lemmes.

**Lemme III.4.3.** *Soit  $X$  un espace compact,  $x \in X$  et  $V \in \mathcal{V}_x$  un voisinage de  $x$ . Alors il existe un voisinage compact  $V' \subset V$  de  $x$ .*

*Preuve:* Soit  $V_O \subset V$  un ouvert tel que  $V_O \ni x$ . Alors  $X \setminus V_O$  est un fermé, et  $x \notin X \setminus V_O$ . D'après III.2.5, il existe des ouverts disjoints  $U_V$  et  $U_x$ ,  $U_V \supset X \setminus V_O$ ,  $U_x \ni x$ . Posons  $V' = \overline{U_x}$ ; c'est un voisinage fermé, donc compact, de  $x$  et  $V' \cap (X \setminus V_O) = \emptyset$ , ce qui fait que  $V' \subset V_O \subset V$ .

*q.e.d.*

**Remarque III.4.4.** Si  $X$  est compact et  $a \in X$ , il suit du lemme précédent que  $X \setminus \{a\}$  est localement compact. En effet, si  $x \in X \setminus \{a\}$ , l'ensemble  $X \setminus \{a\}$  est un voisinage de  $x$  dans  $X$ , qui contient donc un voisinage compact  $V$  de  $x$  dans  $X$ . Comme  $X \setminus \{a\}$  est ouvert dans  $X$ ,  $V$  est aussi un voisinage de  $x$  dans  $X \setminus \{a\}$ , et il est compact.

La construction du compactifié d'Alexandroff du § prochain montre que tous les espaces localement compacts apparaissent ainsi.

**Lemme III.4.5.** *Soit  $X$  un espace topologique,  $x \in X$ ,  $V$  un voisinage de  $x$  dans  $X$  et  $W \subset V$  un voisinage de  $x$  dans  $V$ . Alors  $W$  est un voisinage de  $x$  dans  $X$ .*

*Preuve:* Soit  $V_O \subset V$  un ouvert de  $X$  tel que  $V_O \ni x$ , et soit  $G \subset V$  un ouvert de  $V$  tel que  $x \in G \subset W$ . Il existe un ouvert  $E$  de  $X$  tel que  $E \cap V = G$ . Posons  $W_O = E \cap V_O$ ; c'est un ouvert de  $X$ , et  $x \in W_O \subset G \subset W$ , ce qui montre que  $W$  est un voisinage de  $x$  dans  $X$  (voir figure III.1).

*q.e.d.*

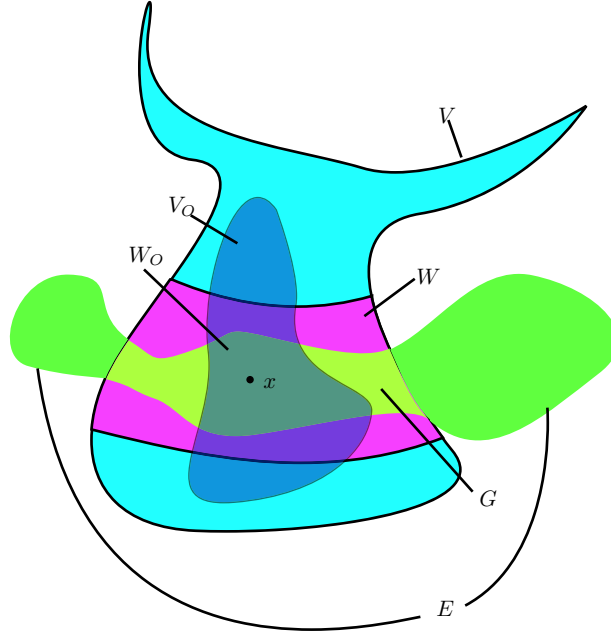


Figure III.1: Les divers ensembles qui apparaissent dans le lemme III.4.5

*Preuve de III.4.2.* Soit  $V$  un voisinage de  $x$  et  $K$  un voisinage compact de  $X$ . Alors  $V \cap K$  est un voisinage de  $x$  dans  $K$ ; il suit du lemme III.4.3 qu'il existe un voisinage compact  $V' \subset V \cap K$  de  $x$  dans  $K$ . Il suit du lemme III.4.5 que  $V'$  est un voisinage de  $x$  dans  $X$ .

*q.e.d.*

Voici une proposition qui nous dit que dans un espace localement compact, dans une certaine mesure, la topologie est déterminée par les sous-espaces compacts.

**Proposition III.4.6.** *Soit  $X$  un espace localement compact. Alors  $F \subset X$  est fermé si et seulement si pour tout  $K \subset X$  compact,  $F \cap K$  est fermé.*

*Preuve:* Si  $F$  est fermé,  $F \cap K$  est fermé car c'est l'intersection de deux fermés de  $X$ . Réciproquement, supposons que  $F \cap K$  soit fermé pour tout compact  $K \subset X$  et soit  $x \in X \setminus F$ . Soit  $V$  un voisinage compact de  $x$ ; alors  $V \cap F$  est fermé et il existe un voisinage  $W$  de  $x$  dans  $V$  tel que  $W \cap (F \cap V) = \emptyset$ . Comme on l'a vu dans III.4.5,  $W$  est aussi un voisinage de  $x$  dans  $X$ , et  $W \cap F = \emptyset$ , ce qui montre que  $F$  est fermé dans  $X$ .

*q.e.d.*

### III.4.1 Applications propres

**Définition III.4.7.** Soient  $X$  et  $Y$  des espaces localement compacts et  $f : X \rightarrow Y$  une application. On dit que  $f$  est *propre* si elle est continue et de plus :

$$\forall K \subset Y \text{ compact} \quad , \quad f^{-1}(K) \subset X \text{ est compact} \quad .$$

**Proposition III.4.8.** *Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  des espaces métriques localement compacts,  $f : X \rightarrow Y$  une application continue.  $f$  est propre si et seulement si la condition suivante est vérifiée :*

*Pour toute suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  qui n'admet pas de valeur d'adhérence dans  $X$ , la suite  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  n'admet pas de valeur d'adhérence dans  $Y$ .*

*Preuve:* Supposons que  $f$  soit propre; soit  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  une suite et supposons qu'on puisse extraire de  $\{f(x_n)\}$  une suite  $\{f(x_{n_k})\}$  qui converge vers  $y \in Y$ . Alors  $K = \{f(x_{n_k}), k \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$  est compact, donc  $f^{-1}(K)$  aussi; mais  $f^{-1}(K) \supset \{x_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$ , ce qui implique qu'on peut aussi extraire une suite qui converge de la suite  $\{x_{n_k}\}$ , donc finalement de la suite  $\{x_n\}$ .

Réciproquement, si la condition sur les valeurs d'adhérence est satisfaite, soit  $K \subset Y$  un compact et  $\{x_n\} \subset f^{-1}(K)$  une suite; si elle ne possède pas de valeur d'adhérence, alors  $\{f(x_n)\} \subset K$  non plus, d'après la condition, contredisant le fait que  $K$  est compact.

*q.e.d.*

On dit qu'une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{R}^k$  tend vers l'infini si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \infty$ , soit explicitement :

$$\forall R > 0 \exists N_R \text{ tel que } n \geq N_R \Rightarrow \|x_n\| \geq R \quad .$$

Voici une condition très utile pour vérifier si une application est propre :

**Corollaire III.4.9.** *Soit  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application continue. Alors  $f$  est propre si et seulement si pour toute suite  $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^k$  qui tend vers l'infini, la suite  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^p$  tend vers l'infini.*

*Preuve:* Il suffit de remarquer que dans  $\mathbb{R}^k$  dire qu'une suite tend vers l'infini équivaut à dire qu'elle n'a pas de valeur d'adhérence, ce qui équivaut encore à dire qu'on ne peut en extraire une suite qui converge.

En effet, si une suite tend vers l'infini, toute suite extraite aussi, et on ne peut donc pas en extraire une suite qui converge.

Réciproquement, si une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$  n'a pas de valeur d'adhérence, pour tout  $R > 0$  l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} \mid \|x_n\| \leq R\}$  est fini, sinon, la boule fermée  $\overline{B}(0, R)$  étant compacte, on pourrait extraire de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente dans cette boule. On pose  $N_R = \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \|x_n\| \leq R\} + 1$ , et alors  $\|x_n\| > R$  si  $n \geq N_R$ , c'est-à-dire que la suite  $\{x_n\}$  tend vers l'infini.

*q.e.d.*

### Exemples III.4.10.



- (1) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ , une application polynomiale non constante; on peut supposer que  $a_d \neq 0$ , et  $d \geq 1$ . Alors elle est propre, car si on l'écrit sous la forme :

$$f(x) = x^d \left( a_d + \frac{a_{d-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^d} \right)$$

on voit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x^d a_d| = \infty$ .

- (2) Le même type d'argument s'applique au cas d'un polynôme complexe  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \sum_{i=1}^d a_i z^i$ ,  $z, a_i \in \mathbb{C}$ .
- (3) L'application  $\sin(x) : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  n'est pas propre, car l'image inverse du compact  $\{0\}$  est l'ensemble  $\{k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$ , qui n'est pas compact.
- (4) L'exponentielle  $e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  n'est pas propre : la suite  $x_n = -\frac{1}{n}$  tend vers l'infini, mais son image  $\left\{e^{-\frac{1}{n}}\right\}$  tend vers 0.
- (5) La même exponentielle, regardée comme application  $e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , où  $\mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ , est propre, car c'est un homéomorphisme, l'inverse étant le logarithme naturel.
- (6) L'application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t_1, \dots, t_n) = t_1^2 + \cdots + t_n^2 = \|t\|^2$  est propre, car si  $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$  est une suite qui tend vers l'infini, cela implique que  $f(x_k) = \|x_k\|^2$  tend vers l'infini.
- (7) L'application  $(x, y) \rightarrow x^2 - y^2$  n'est pas propre, car l'image inverse du compact  $\{0\}$  est la réunion des deux droites  $x = y$  et  $x = -y$ , qui n'est pas compacte.

Et voici une bonne raison de s'intéresser aux applications propres :

**Théorème III.4.11.** *Soient  $X, Y$  des espaces localement compacts et  $f : X \rightarrow Y$  propre. Alors  $f$  est fermée.*

*Preuve:* Soit  $F \subset X$  fermé et  $K \subset Y$  compact. Alors  $f^{-1}(K)$  est compact, donc  $F \cap f^{-1}(K)$  est aussi compact. Mais alors  $f(F) \cap K = f(F \cap f^{-1}(K))$  est compact par III.2.6, donc fermé dans  $Y$ . Il suit alors de III.4.6 que  $f(F)$  est fermé dans  $Y$ .

*q.e.d.*

**Corollaire III.4.12.** *Si  $X$  et  $Y$  sont localement compacts et  $f : X \rightarrow Y$  bijective, propre, alors  $f$  est un homéomorphisme. ■*

### III.4.2 Le compactifié d'Alexandroff

Il s'agit de généraliser et préciser la notion de point à l'infini que l'on ajoute parfois à  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition III.4.13.** Soit  $X$  un espace localement compact. On appelle  $\omega_X$  l'espace réduit à un point. Le compactifié d'Alexandroff de  $X$  est l'ensemble :

$$\tilde{X} = X \amalg \omega_X$$

muni de la topologie suivante : on utilise l'identification naturelle de  $X$  à un sous-ensemble de  $\tilde{X}$ ; les ouverts de  $\tilde{X}$  seront les ouverts de  $X$  et les complémentaires de compacts de  $X$  dans  $\tilde{X}$ .

Le point  $\omega_X$  est appelé parfois *point à l'infini*.

**Théorème III.4.14.** *Soient  $X$  et  $Y$  des espaces localement compacts.*

- (1) *L'espace  $\tilde{X}$  est compact.*
- (2) *L'application continue  $f : X \rightarrow Y$  est propre si et seulement si son extension  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ , définie par  $\tilde{f}(x) = f(x)$  si  $x \in X$  et  $\tilde{f}(\omega_X) = \omega_Y$ , est continue.*



- (3)  $\tilde{X}$  est essentiellement unique, dans le sens que si on a une application  $\varphi : X \rightarrow Z$ , avec  $Z$  compact, qui est un homéomorphisme sur son image et telle que  $Z \setminus \varphi(X) = \{z_0\} = 1$  point, alors l'application  $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow Z$ , définie par  $\tilde{\varphi}|_X = \varphi$ ,  $\tilde{\varphi}(\omega_X) = z_0$ , est un homéomorphisme.

*Preuve:*

(1) Soit  $\{U_i\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $\tilde{X}$  par des ouverts; parmi ceux-ci, l'un au moins, disons  $U_{i_0}$ , doit contenir  $\omega_X$ . Alors  $K = \tilde{X} \setminus U_{i_0}$  est un compact de  $X$ ; les  $U_i \cap K$ ,  $i \in I$ , forment un recouvrement de  $K$ , dont on peut extraire un recouvrement fini  $U_{i_1} \cap K, \dots, U_{i_N} \cap K$ . Alors les  $U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_N}$  forment un recouvrement de  $\tilde{X}$ .

(2) Soit  $U \subset \tilde{Y}$  un ouvert. Si  $U \subset Y$ ,  $\tilde{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ ; sinon,  $U = (Y \setminus K) \cup \{\omega_Y\}$ , et alors  $\tilde{f}^{-1}(U) = (X \setminus f^{-1}(K)) \cup \{\omega_X\}$ . Il en résulte que  $\tilde{f}$  est continue si et seulement si  $f^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X$  pour tout ouvert  $U \subset Y$  et  $f^{-1}(K)$  est compact dans  $X$  pour tout compact  $K$  de  $Y$ , c'est-à-dire si et seulement si  $f$  est propre.

(3) Il est clair que  $\varphi$  est une bijection. Pour voir qu'elle est continue, soit  $U \subset Z$  un ouvert. Si  $U \subset \varphi(X)$ ,  $\tilde{\varphi}^{-1}(U) = \varphi^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X$ , donc aussi dans  $\tilde{X}$ , parce que  $\varphi$  est continue. Si  $U \ni z_0$ ,  $Z \setminus U = K$  est compact et ne contient pas  $z_0$ , donc  $\tilde{\varphi}^{-1}(U) = \tilde{\varphi}^{-1}(Z \setminus K) = \tilde{X} \setminus \varphi^{-1}(K)$ , qui est un ouvert de  $\tilde{X}$ , car  $\varphi^{-1}(K)$  est un compact de  $X$  parce que  $\varphi : X \rightarrow Z \setminus \{z_0\}$  est un homéomorphisme. Donc  $\tilde{\varphi}$  est continue et bijective, et alors d'après III.2.8 c'est un homéomorphisme.

*q.e.d.*

**Exemple III.4.15.** La projection stéréographique. Soit  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$  la sphère et  $N = (0, 0, 1)$  le pôle nord. La projection stéréographique depuis le pôle nord  $\sigma_N : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est définie par :  $\sigma_N(P) =$  intersection de la droite par  $N$  et  $P$  avec le plan horizontal défini par  $z = 0$  (voir figure III.2). En coordonnées :

$$\sigma_N(x, y, z) = \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) .$$

Pour le voir, si on pose  $\sigma_N(x, y, z) = (u, v, 0)$ , on doit avoir :

$$\begin{aligned} (u, v, 0) &= (0, 0, 1) + \lambda((x, y, z) - (0, 0, 1)) \Rightarrow 0 = 1 + \lambda(z - 1) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1-z} \\ &\Rightarrow u = \lambda \cdot x = \frac{x}{1-z} \quad , \quad v = \lambda \cdot y = \frac{y}{1-z} . \end{aligned}$$

$\sigma_N$  admet un inverse, que l'on calcule en exprimant  $x, y, z$ , liés par la relation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , en fonction de  $u, v$ ; il s'écrit :

$$\sigma_N^{-1}(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 1} \right) .$$

Donc  $\sigma_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$  est un homéomorphisme sur son image. On est alors dans les conditions de III.4.14(3), ce qui présente la sphère  $S^2$  comme le compactifié d'Alexandroff du plan, le pôle nord jouant le rôle du point à l'infini.

## III.5 Les espaces projectifs

La projection stéréographique permet de voir la sphère  $S^n$  comme compactifié d'Alexandroff de l'espace  $\mathbb{R}^n$ , en ajoutant à  $\mathbb{R}^n$  un seul point à l'infini. L'espace projectif  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$  est aussi un espace compact, obtenu à partir de  $\mathbb{R}^n$  en ajoutant les *directions à l'infini*, ce qui sera précisé un peu plus loin; cette compactification permet, dans le cas  $n = 2$ , de comprendre à l'aide d'un procédé algébrique les points à l'infini de courbes planes décrites par des équations polynomiales (homogénéisation de leur équation).

On traite simultanément le cas réel et le cas complexe :  $\mathbb{K}$  désigne soit  $\mathbb{R}$  soit  $\mathbb{C}$ , et si  $x \in \mathbb{K}$ ,  $|x|$  désigne la valeur absolue de  $x$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , le module de  $x$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Définition III.5.1.** Soit  $V$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$ . On désigne par  $\mathbb{P}(V)$  l'espace des droites par l'origine de  $V$ , soit :

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\}) / \sim \quad , \quad \text{où} \quad x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tel que } y = \lambda \cdot x .$$

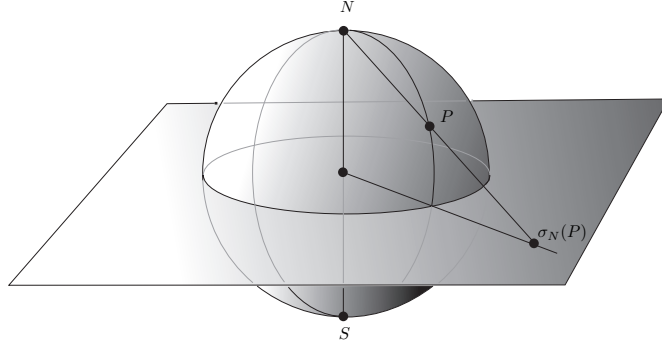


Figure III.2: La projection stéréographique depuis le pôle nord

Dans le cas où  $V = \mathbb{K}^{n+1}$ , on munit  $\mathbb{P}(V)$  de la topologie quotient de la topologie induite sur  $V \setminus \{0\}$ . On note

$$\mathbb{P}\mathbb{R}^n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \quad , \quad \mathbb{P}\mathbb{C}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$$

que l'on appelle espace projectif réel, respectivement complexe, de dimension  $n$ .

Si  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ , on note  $[x]$  ou  $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$  sa classe dans  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$ .

**Définition III.5.2.** Soit  $A \subset \mathbb{P}\mathbb{K}^n$  un sous-ensemble non vide; le *cône sur  $A$* , noté  $C(A)$ , est la réunion dans  $\mathbb{K}^{n+1}$  des droites qui appartiennent à  $A$ , soit :

$$C(A) = \{x \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \mid [x] \in A\} \cup \{0\} \quad .$$

**Proposition III.5.3.** L'ensemble  $A \subset \mathbb{P}\mathbb{K}^n$  est fermé si et seulement si son cône  $C(A) \subset \mathbb{K}^{n+1}$  est fermé.

*Preuve:* Par définition de la topologie quotient sur  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ ,  $A$  est fermé si et seulement si  $C(A)' = \{x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid [x] \in A\}$  est fermé. Comme  $A \neq \emptyset$ , le point  $0 \in \mathbb{K}^{n+1}$  est dans l'adhérence de  $C(A)'$  dans  $\mathbb{K}^{n+1}$ , et il en résulte que  $C(A)'$  est fermé dans  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  si et seulement si  $C(A)$  est fermé dans  $\mathbb{K}^{n+1}$ .  
q.e.d.

Posons

$$U_0 = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}\mathbb{K}^n \mid x_0 \neq 0\}$$

et définissons

$$\varphi_0 : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{K}^n \quad , \quad \varphi_0(x_1, \dots, x_n) = [1 : x_1 : \dots : x_n] \quad .$$

**Proposition III.5.4.**

(1)  $\varphi_0$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  sur  $U_0$

(2)  $U_0$  est ouvert dans  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$  et  $\overline{U_0} = \mathbb{P}\mathbb{K}^n$

(3)  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n \setminus U_0 = \mathbb{P}(\{0\} \times \mathbb{K}^n) \simeq \mathbb{P}\mathbb{K}^{n-1}$

*Preuve:* (1) L'application :

$$\theta : \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_0 \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{K}^n \quad , \quad \theta(x_0, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

est continue et compatible avec la relation  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim \lambda(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Elle passe donc au quotient en l'application  $\theta : U_0 \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $([x_0 : \dots : x_n] = (\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}))$ , dont on vérifie immédiatement que c'est l'inverse de  $\varphi_0$ .

(2) et (3). Le cône sur  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n \setminus U_0$  est l'espace  $\{0\} \times \mathbb{K}^n$ , qui est fermé dans  $\mathbb{K}^{n+1}$ . Cela montre que  $U_0$  est ouvert, et que  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n \setminus U_0 = \mathbb{P}(\{0\} \times \mathbb{K}^n) \simeq \mathbb{P}\mathbb{K}^{n-1}$ . Si  $[x] = [0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}\mathbb{K}^n \setminus U_0$ , tout voisinage de  $[x]$  contient un point de la forme  $[\varepsilon : x_1 : \dots : x_n]$ ,  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit; donc  $\overline{U_0} = \mathbb{P}\mathbb{K}^n$ .  
q.e.d.

On appelle les points de  $U_0$  les points à distance finie dans  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$ , ceux de  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n \setminus U_0$  les points à l'infini.

**Proposition III.5.5.** *L'espace  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$  est compact.*

*Preuve:* Soit  $\mathbb{S} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ ; c'est une sphère, de dimension  $n$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , de dimension  $2n + 1$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , donc en tous les cas un espace compact. La restriction de la projection canonique  $\pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{K}^n$  à  $\mathbb{S}$  est surjective, car toute droite par l'origine rencontre  $\mathbb{S}$ ; pour voir que  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$  est compact il suffit alors de voir qu'il est séparé.

Soient  $[x] = [x_0 : \dots : x_n]$  et  $[y] = [y_0 : \dots : y_n]$  deux points de  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$ , avec  $[x] \neq [y]$ . Les  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , ne sont pas tous nuls; on peut supposer sans perte de généralité que  $x_0 \neq 0$ .

Si de plus  $y_0 \neq 0$ , on peut séparer  $\varphi_0^{-1}([x])$  et  $\varphi_0^{-1}([y])$  par deux ouverts  $U_x$  et  $U_y$  de  $U_0$ , et alors  $\varphi_0(U_x)$  et  $\varphi_0(U_y)$  séparent  $[x]$  et  $[y]$  dans  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$ .

Si  $y_0 = 0$ , on considère les deux ouverts :

$$U_x = \left\{ [z] \in \mathbb{P}\mathbb{K}^n \mid \frac{|z_0|^2}{\sum_{i=0}^n |z_i|^2} > \frac{|x_0|^2}{2 \sum_{i=0}^n |x_i|^2} \right\}$$

et

$$U_y = \left\{ [z] \in \mathbb{P}\mathbb{K}^n \mid \frac{|z_0|^2}{\sum_{i=0}^n |z_i|^2} < \frac{|x_0|^2}{2 \sum_{i=0}^n |x_i|^2} \right\}$$

et on vérifie que  $U_x \ni [x]$ ,  $U_y \ni [y]$ ,  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

*q.e.d.*

Soit  $f(x, y) = \sum_{i+j \leq d} a_{i,j} x^i y^j$  un polynôme de degré  $d$ , à coefficients  $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ ; il définit une courbe dans  $\mathbb{K}^2$  :

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\} \quad .$$

Posons  $f_d(x, y) = \sum_{i+j=d} a_{i,j} x^i y^j$ ; c'est la partie homogène de degré  $d$  de  $f$ , que l'on suppose non identiquement nulle.

**Définition III.5.6.** L'homogénéisé de  $f$  est le polynôme en trois variables  $(t, x, y)$  :

$$f^*(t, x, y) = t^d f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) = \sum_{i+j=d} a_{i,j} t^{d-i-j} x^i y^j \quad .$$

On voit que  $f^*$  est une somme de monômes en  $(t, x, y)$ , tous de même degré  $d$ , c'est pourquoi on dit qu'il est homogène. Si  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $f^*(\lambda(t, x, y)) = \lambda^d \cdot f^*(t, x, y)$ , ce qui fait que l'ensemble suivant est bien défini :

$$\Gamma_f^* = \{[t : x : y] \mid f^*(t, x, y) = 0\} \quad .$$

**Proposition III.5.7.** *Soit  $f(x, y) = \sum_{i+j \leq d} a_{i,j} x^i y^j$  un polynôme de degré  $d$ , tel que sa partie homogène de degré  $d$ ,  $f_d(x, y) = \sum_{i+j=d} a_{i,j} x^i y^j$ , ne soit pas identiquement nulle. Alors :*

- (1) *L'ensemble  $\Gamma_f^*$  est compact.*
- (2)  $\Gamma_f^* \cap U_0 = \varphi_0(\Gamma_f)$
- (3)  $\Gamma_f^* \setminus \varphi_0(\Gamma_f)$  est un ensemble fini de points.

*Preuve:* (1) Le cône sur  $\Gamma_f^*$  est l'ensemble :

$$C(\Gamma_f^*) = \{(t, x, y) \mid f^*(t, x, y) = 0\} = (f^*)^{-1}(\{0\})$$

c'est donc un fermé.

(2) On remarque que  $f^*(1, x, y) = f(x, y)$  et alors

$$\Gamma_f^* \cap U_0 = \{[1 : x : y] \mid f^*(1, x, y) = 0\} = \{[1 : x : y] \mid f(x, y) = 0\} = \varphi_0(\Gamma_f)$$

(3)

$$\Gamma_f^* \setminus \varphi_0(\Gamma_f) = \Gamma_f^* \setminus U_0 = \{[0 : x : y] \mid f(0, x, y) = f_d(x, y) = 0\} \quad .$$

Comme  $f_d$  n'est pas identiquement nul, les polynômes à une variable  $f_d(1, y)$  et  $f_d(x, 1)$  ne sont pas identiquement nuls, et ont donc un nombre fini de zéros. Donc :

$$\Gamma_f^* \setminus \varphi_0(\Gamma_f) = \{[0 : x : y] \mid f(0, x, y) = f_d(x, y) = 0\} = \{[1 : y] \mid f_d(1, y) = 0\} \cup \{[x : 1] \mid f(x, 1) = 0\}$$

qui est bien constitué d'un ensemble fini de points.

*q.e.d.*

### Exemples III.5.8.

- (1) Si  $f(x, y) = x \cdot y - 1$ ,  $f^*(t, x, y) = x \cdot y - t^2$ . Les points à l'infini sont les zéros de  $f^*(0, x, y) = x \cdot y$ , soit  $[0 : 1 : 0]$  et  $[0 : 0 : 1]$ , c'est-à-dire les axes  $OX$  et  $OY$ .
- (2) Soit  $f(x, y) = y - x^2(x - y)$ ; alors  $f^*(t, x, y) = t^2 \cdot y - x^2(x - y)$ , et  $f^*(0, x, y) = x^2(x - y)$ . Les points à l'infini sont donc  $[0 : 0 : 1]$  et  $[0 : 1 : 1]$ . Or le point  $[0 : 0 : 1]$  est isolé dans  $\Gamma_f^*$ , car si  $t^2 = x^2 \cdot (x - y)$  et  $t$  et  $x$  sont proche de 0,  $x^2 \cdot (x - y)$  est négatif si  $x \neq 0$ .

# Chapitre IV

## Espaces connexes

La notion d'espace connexe est censée traduire l'idée d'un espace qui est un seul morceau, ou d'un seul tenant. Il y a plusieurs approches possibles, en termes d'ouverts et de fermés uniquement (§ 1), ou bien à l'aide de la notion d'arc (§3).

### IV.1 Espaces connexes

**Définition IV.1.1.** Soit  $X$  un espace topologique. On dit qu'il est *connexe* si et seulement si les seuls sous-espaces à la fois ouverts et fermés sont  $X$  et  $\emptyset$ . En symboles :  $A \subset X$ ,  $A$  ouvert et fermé  $\iff A = \emptyset$  ou  $A = X$

**Proposition IV.1.2.** Soit  $X$  un espace topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $X$  est connexe
- (2)  $X = A \cup B$ ,  $A$  et  $B$  ouverts non vides  $\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$
- (3)  $X = F \cup G$ ,  $F$  et  $G$  fermés non vides  $\Rightarrow F \cap G \neq \emptyset$
- (4)  $X = A \cup B$ ,  $A$  et  $B$  ouverts et  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$
- (5)  $X = F \cup G$ ,  $F$  et  $G$  fermés et  $F \cap G = \emptyset \Rightarrow F = \emptyset$  ou  $G = \emptyset$

*Preuve:* (1)  $\Rightarrow$  (2). Si  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A = X \setminus B$  est aussi fermé, car le complémentaire de l'ouvert  $B$ . Comme  $B$  est non vide,  $A \subsetneq X$  est ouvert et fermé,  $A \neq X$  et  $A \neq \emptyset$ , contredisant que  $X$  est connexe.

(1)  $\Rightarrow$  (3) se montre de façon analogue, et (2)  $\Leftrightarrow$  (3) se voit en remplaçant  $A$  et  $B$  par leur complémentaires.

(1)  $\Leftrightarrow$  (4) et (1)  $\Leftrightarrow$  (5) sont immédiats.

*q.e.d.*

Il sera facile d'avoir des exemples d'espaces non connexes; la prochaine proposition nous procure un exemple de base d'espace connexe.

**Proposition IV.1.3.** Le sous-espace  $X$  de  $\mathbb{R}$  est connexe si et seulement si c'est un intervalle.

*Preuve:* Si  $X \subset \mathbb{R}$  est connexe, soient  $a, b \in X$ ,  $a \neq b$ , disons  $a < b$ . Soit  $a < z < b$ ; si  $z \notin X$ , posons

$$X_- = \{x \in X \mid x < z\} \quad , \quad X_+ = \{y \in X \mid z < y\} \quad .$$

Alors  $X_-$  et  $X_+$  sont deux ouverts, contenant respectivement  $a$  et  $b$ , donc non vides, et  $X = X_- \cup X_+$ , contredisant que  $X$  est connexe. Donc, si  $a, b \in X$ ,  $a < b$ , et  $a < z < b$ , alors  $z \in X$ , ce qui fait que  $X$  est un intervalle.

Réciproquement, soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle. Supposons que  $I = A \cup B$ ,  $A$  et  $B$  ouverts non vides, et montrons qu'alors  $A \cap B \neq \emptyset$ . Quitte à échanger  $A$  et  $B$ , on peut supposer qu'il existe  $a \in A$  et  $b \in B$  tels que  $a < b$ . Soit

$$\mu = \sup \{x \in A \mid x < b\} \quad ;$$

alors  $\mu \in \overline{A}$ . Comme  $A$  est ouvert, si  $\mu \in A$ ,  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $]\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon[ \subset A$ , donc  $\mu < \mu + \varepsilon \in A$ , contredisant la définition de  $\mu$ . On doit donc avoir que  $\mu \in B$ , qui est un ouvert; puisque  $\mu \in \overline{A}$ , on doit avoir que  $A \cap B \neq \emptyset$ . En conclusion,  $I$  est connexe.

*q.e.d.*

#### Exemples IV.1.4.

- (1)  $[0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$  n'est pas connexe d'après IV.1.3, puisque ce n'est pas un intervalle; mais aussi, directement, parce que  $[0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$  est la réunion des deux ouverts disjoints  $[0, \frac{1}{2}[$  et  $]\frac{1}{2}, 1]$ , qui sont aussi fermés.

On peut en déduire que  $[0, 1]$  et le cercle  $S^1$  ne sont pas homéomorphes; en effet, si on enlève n'importe quel point  $P$  de  $S^1$ ,  $S^1 \setminus \{P\}$  est homéomorphe à un intervalle, donc connexe, alors que  $[0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$  n'est pas connexe.

- (2) L'ensemble  $\mathbb{Q}$  des rationnels, avec la topologie induite par  $\mathbb{R}$ , n'est pas connexe, puisque ce n'est pas un intervalle. Mais aussi parce que

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\}$$

qui sont les deux ouverts.

- (3) Rappelons l'espace de Sierpinski  $\mathcal{S} = \{0, 1\}$ , avec topologie  $\{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$ . Il est connexe : le seul ouvert non vide et différent de  $\mathcal{S}$  est  $\{0\}$ , et il n'est pas fermé.
- (4) Tout espace muni de la topologie grossière est connexe. En particulier, l'espace réduit à un seul point est connexe.

**Proposition IV.1.5.** *Soit  $X$  un espace connexe et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Alors  $f(X)$  est connexe.*

*Preuve:* Si  $f(X) = A \cup B$ ,  $A$  et  $B$  ouverts, non vides,  $f^{-1}(A)$  et  $f^{-1}(B)$  sont ouverts non vides et  $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ , donc  $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ . Or  $A \cap B \supset f(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) \neq \emptyset$ . En conclusion,  $f(X)$  est connexe.

*q.e.d.*

**Corollaire IV.1.6.** *Le quotient d'un espace connexe est connexe.*

En effet, la projection canonique  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  du quotient de  $X$  pour une relation  $\sim$  est surjective. ■

**Corollaire IV.1.7.** *Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue, où  $X$  est un espace connexe. Alors, si  $f$  prend les valeurs  $y_1$  et  $y_2$ , elle prend aussi toutes les valeurs intermédiaires. En symboles :*

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}, y_1 < y_2, \text{ tels que } \exists x_1, x_2 \in X \text{ tels que } f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2 \\ \implies \forall y, y_1 \leq y \leq y_2, \exists x \in X \text{ tel que } f(x) = y.$$

*Preuve:* En effet,  $f(X)$  est connexe, donc c'est un intervalle. S'il contient  $y_1$  et  $y_2$ , il contient aussi tout  $y$  tel que  $y_1 \leq y \leq y_2$ .

*q.e.d.*

**Proposition IV.1.8** (Réunion de connexes). *Soit  $X$  un espace topologique et soient  $\{A_i\}_{i \in I}$ ,  $A_i \subset X$ , des sous-espaces connexes de  $X$ . Supposons que  $\forall i, j \in I$ ,  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ . Alors  $\bigcup_{i \in I} A_i$  est connexe.*

*Preuve:* Si  $F \subset \bigcup_{i \in I} A_i$  est ouvert et fermé, et  $F \neq \emptyset$ , il existe un indice  $i_0 \in I$  tel que  $F \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ . Comme  $A_{i_0}$  est connexe et que  $F \cap A_{i_0}$  est fermé, ouvert et non vide, on a forcément que  $F \supset A_{i_0}$ . Pour tout  $j \in I$ ,  $A_j \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ , donc  $F \cap A_j \neq \emptyset$ , et alors on a aussi  $F \supset A_j$ . Donc finalement  $F = \bigcup_{i \in I} A_i$ , ce qui montre que cette réunion est connexe.

*q.e.d.*

**Corollaire IV.1.9.** Soit  $X$  un espace topologique et  $A_i \subset X$  des sous-espaces connexes,  $i \in I$ . Si  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ , alors  $\bigcup_{i \in I} A_i$  est connexe.

C'est un cas particulier de la proposition précédente. ■

**Exemple IV.1.10.** Soient

$$A_\infty = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\} \quad ,$$

$$A_n = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \left\{ \left( \frac{1}{n}, y \right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \right\} \quad , n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \quad .$$

Chaque  $A_n$  est la réunion de l'image de deux intervalles dans  $\mathbb{R}^2$ , dont l'intersection est non vide; c'est donc un connexe. D'autre part,  $\bigcap_{n \geq 0} A_n \neq \emptyset$ . Donc l'espace  $\bigcup_{n \geq 0} A_n$  est connexe. On l'appelle *le peigne des topologues* (voir figure IV.1).

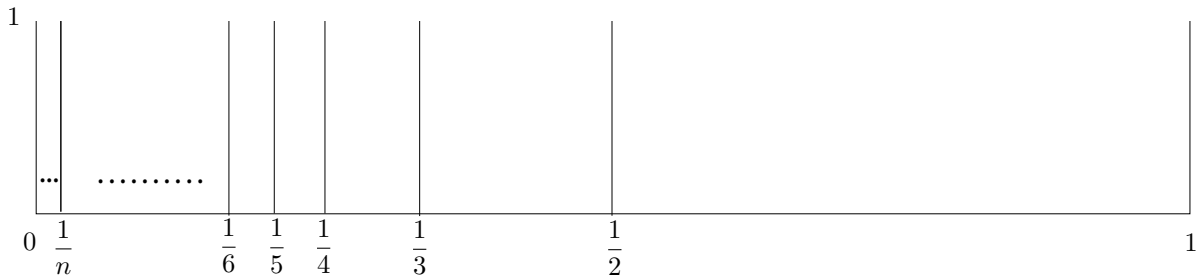


Figure IV.1: Le peigne des topologues

**Proposition IV.1.11** (Adhérence de connexes). Soit  $X$  un espace topologique et  $A \subset X$  un sous-espace connexe. Supposons que  $A \subset B \subset \overline{A}$ ; alors  $B$  est connexe. En particulier,  $\overline{A}$  est connexe.

*Preuve:* Montrons d'abord que si  $x \in \overline{A} \setminus A$ , alors  $A \cup \{x\}$  est connexe; si  $F \subset A \cup \{x\}$  est ouvert et fermé, alors  $F \cap A$  aussi :

- ou bien  $F \cap A = A$ , auquel cas  $x \in F$  car  $x \in \overline{A}$  et  $F$  est fermé
- ou bien  $F \cap A = \emptyset$ ; comme  $F$  est ouvert, si  $x \in F$  on contredirait que  $x \in \overline{A}$ . Donc  $F = \emptyset$ .

Il suit du corollaire IV.1.9 que  $B = \bigcup_{x \in B \setminus A} (A \cup \{x\})$  est connexe.

*q. e. d.*

**Exemples IV.1.12.**

- (1) La spirale de  $\mathbb{R}^2$  suivante est exprimée en coordonnées polaires, définies par :  $x = \rho \cos(\theta)$ ,  $y = \rho \sin(\theta)$  :

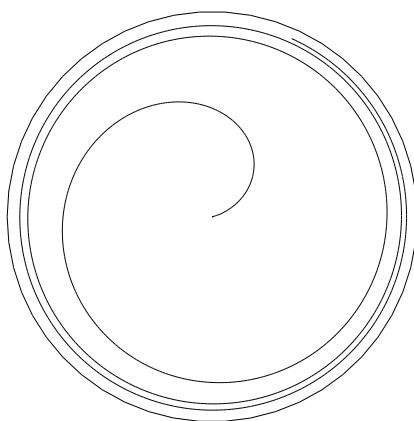
$$A = \left\{ (\rho, \theta) \mid \rho = e^{-\frac{1}{\theta}}, \theta > 0 \right\} \quad .$$

Son adhérence dans  $\mathbb{R}^2$  est  $A \cup S^1 \cup \{0\}$ , qui est donc connexe (voir figure IV.2).

- (2) L'intérieur d'un connexe n'est pas nécessairement connexe. Par exemple, soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  la réunion de deux disques fermés tangents :

$$A = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 1\} \quad .$$

Alors  $\text{int}(A) = B((1, 0), 1) \cup B((-1, 0), 1)$  n'est pas connexe, par exemple parce que  $B(1, 1)$  est ouvert et fermé dans  $A$ .

Figure IV.2: La spirale  $\rho = e^{-\frac{1}{\theta}}$ ,  $\theta > 0$ 

### Composantes connexes

**Définition IV.1.13.** Soit  $X$  un espace topologique et  $x \in X$ . La *composante connexe* de  $x$  est définie par :

$$C_x = \bigcup A \text{ où } A \subset X \text{ est connexe et } A \ni x \text{ .}$$

**Proposition IV.1.14** (Propriétés des composantes connexes). Soit  $X$  un espace topologique et  $x \in X$ .

- (1) La composante connexe de  $x$  est fermée; c'est le plus grand sous-ensemble connexe de  $X$  qui contient  $x$ .
- (2) Les  $C_x, x \in X$  forment une partition de  $X$ , associée à la relation d'équivalence :

$$x \sim y \iff \exists A \subset X \text{ connexe et } A \ni x, y \text{ .}$$

*Preuve:* Remarquons que  $C_x \ni x$ , car  $\{x\}$  est connexe. Il suit de IV.1.8 que  $C_x$  est connexe. Si  $A \subset X$  est connexe et  $A \ni x$ , alors  $A \subset C_x$ , donc  $C_x$  est effectivement le plus grand connexe contenant  $x$ . Il suit de IV.1.11 que  $C_x$  est fermée.

Si  $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ , alors  $C_x \cup C_y$  est connexe d'après IV.1.8, donc  $C_x = C_y$ . Il suit de là que les  $C_x$  forment une partition de  $X$ , et leur définition même montre que la relation d'équivalence associée est bien celle énoncée.

*q.e.d.*

### Exemples IV.1.15.

- (1) Soit  $X = [0, 1[ \cup [2, 3[ \subset \mathbb{R}$ . Ses composantes connexes sont les deux intervalles  $[0, 1[$  et  $[2, 3[$ . Elles sont fermées dans  $X$ , mais aussi ouvertes :

$$[0, 1[ = ] - 1, 1[ \cap X \quad , \quad [1, 2] = ] \frac{2}{3}, 3[ \cap X$$

- (2) Soit  $X$  la réunion des demi-droites issue de l'origine dans le premier cadran, plus la partie positive de l'axe  $Ox$  (voir figure IV.3) :

$$X = \left( \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \left( x, \frac{1}{n}x \right) \mid x \geq 0 \right\} \right) \cup \{ (x, 0) \mid x \geq 0 \} \text{ .}$$

Alors  $X$  est connexe par IV.1.8, car chaque demi-droite est homéomorphe à un segment et elles se coupent deux à deux en  $\{(0, 0)\}$ .

Par contre, l'espace  $Y = X \setminus \{0\}$  n'est pas connexe : la composante connexe de chaque point est la demi-droite qui le contient. Les demi-droites sont fermées, comme prévu par la proposition IV.1.14; elles sont aussi ouvertes, à l'exception de la demi-droite horizontale, car tout ouvert du plan qui la contient rencontre aussi des demi-droites voisines.



- (3) Si  $X$  est muni de la topologie discrète, ses composantes connexes sont réduites aux points. Elles sont ouvertes et fermées, comme tout ensemble dans un espace discret.
- (4) Les composantes connexes de  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  sont aussi réduites aux points. En effet, d'après IV.1.3 les seuls sous-ensembles connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles, et les seuls intervalles contenus dans  $\mathbb{Q}$  sont les points.

Par contre, si  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $\{x\}$  n'est pas ouvert dans  $\mathbb{Q}$ , car tout intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contient une infinité de nombres rationnels; ceci montre que la topologie de  $\mathbb{Q}$  n'est pas la topologie discrète.

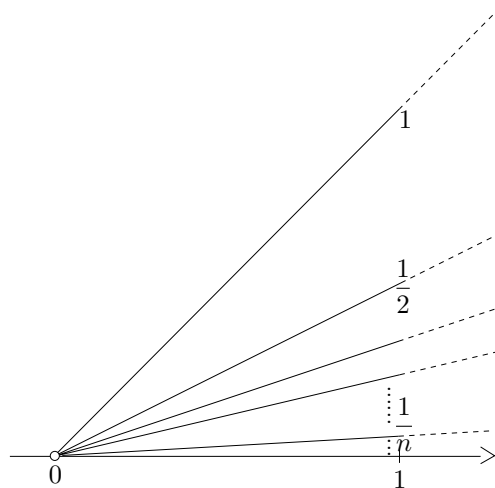


Figure IV.3: Demi-droites issues de l'origine de pente  $\frac{1}{n}$ ,  $n \geq 1$

## Produits de connexes

**Théorème IV.1.16.** Soient  $\{X_i\}_{i \in I}$  des espaces topologiques non vides. Alors

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ est connexe} \iff X_j \text{ est connexe } \forall j \in I$$

*Preuve:* Si  $\prod_{i \in I} X_i$  est connexe, il suit de la proposition IV.1.5 que  $X_j$  est connexe pour tout  $j \in I$ , car c'est l'image de la projection canonique  $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ .

La réciproque se montre en trois étapes.

- (1) Montrons que si  $X_1$  et  $X_2$  sont connexes, alors  $X_1 \times X_2$  est aussi connexe. Pour cela, fixons  $(a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$  et soit  $(b_1, b_2) \in X_1 \times X_2$  quelconque. On pose

$$T_1 = \{(a_1, x_2) \mid x_2 \in X_2\} \quad , \quad T_2 = \{(x_1, b_2) \mid x_1 \in X_1\} \quad ;$$

il s'agit de tranches au sens de la proposition II.1.6, qui affirme qu'elles sont homéomorphes à  $X_2$  et  $X_1$  respectivement, donc connexes. D'autre part,  $T_1 \cap T_2 = \{(a_1, b_2)\} \neq \emptyset$ , et il suit de IV.1.8 que  $T_1 \cup T_2$  est connexe. Ceci montre que la composante connexe de  $(a_1, a_2)$  est égale à  $X_1 \times X_2$ .

Il en suit aussi qu'un produit fini de connexes est connexe.

- (2) Revenons à notre famille d'espace connexes  $\{X_i\}_{i \in I}$  et fixons  $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ . Soit  $(b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$  tel que l'ensemble  $J = \{j \in I \mid a_j \neq b_j\}$  soit fini. L'application

$$\varphi : \prod_{j \in J} X_j \rightarrow \prod_{i \in I} X_i \quad , \quad \varphi((x_i)_{i \in I}) = \begin{cases} a_i & \text{si } i \in I \setminus J \\ x_i & \text{sinon} \end{cases}$$

est un homéomorphisme sur son image, dont l'inverse est la restriction à l'image de  $\varphi$  du produit d'applications :

$$\theta = \prod_{j \in J} \pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{j \in J} X_j \quad , \quad \theta((x_i)_{i \in I}) = (x_j)_{j \in J} \quad ;$$

l'image de  $\varphi$  est donc connexe. Comme elle contient  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$ , on en déduit que la composante connexe de  $(a_i)_{i \in I}$  contient l'ensemble :

$$A = \left\{ (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid \text{l'ensemble } \{j \in I \mid b_j \neq a_j\} \text{ est fini} \right\} .$$

(3) Montrons que

$$\overline{A} = \prod_{i \in I} X_i \quad ;$$

il suivra alors de IV.1.11 que  $\prod_{i \in I} X_i$  est connexe.

Soit  $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$  et soit  $R(U_{i_1}, \dots, U_{i_k})$  un rectangle contenant  $x$ . Alors

$$R(U_{i_1}, \dots, U_{i_k}) \cap A \ni x' \quad , \quad \text{où} \quad x'_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in \{i_1, \dots, i_k\} \\ a_i & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui montre bien que  $x \in \overline{A}$ .

*q.e.d.*

**Le théorème fondamentale de l'algèbre.** Ce théorème affirme que tout polynôme complexe non constant possède une racine. Nous en proposons ici une preuve basée sur des propriétés topologiques des polynômes et de l'espace  $\mathbb{C}$  des nombres complexes.

Pour être complet, nous reprenons un résultat de théorie des fonctions holomorphes, qui équivaut au principe du maximum (cf.[2, Théorème 9.4]).

**Lemme IV.1.17.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un ouvert et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une application holomorphe non constante. Alors  $f$  est ouverte.*

*Preuve:* Soit  $w_0 = f(z_0)$ ; on doit montrer que l'image de  $f$  contient un ouvert qui contient  $w_0$ . Pour  $z$  dans un voisinage de  $z_0$  on peut écrire

$$f(z) = w_0 + (z - z_0)^n \cdot g(z) \quad , \quad g(z_0) \neq 0 \quad .$$

Puisque  $g(z_0) \neq 0$ , on peut faire un choix de l'argument des nombres complexes proches de  $g(z_0)$ , et donc la fonction

$$(g(z))^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log(g(z))}$$

est holomorphe pour  $z$  proche de  $z_0$ . L'application  $z'(z) = (z - z_0) \cdot (g(z))^{\frac{1}{n}}$  est un homéomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de  $z_0$ , et  $f(z') = (z')^n + w_0$ , dont l'image d'un petit disque  $D'$  centré en  $z'$  contient un disque  $D$  centré en  $w_0$ . Donc  $f(z'^{-1}(D'))$  contient  $D$ .

*q.e.d.*

**Théorème IV.1.18.** *Soit  $p(z) = a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_d \cdot z^d$  un polynôme non constant,  $a_i, z \in \mathbb{C}$ . Alors l'application  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  qui lui est associée est surjective; en particulier, il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $p(\alpha) = 0$ .*

*Preuve:* On a déjà remarqué (voir III.4.10(2)) que l'application  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est propre, donc d'après III.4.11 elle est fermée, et d'après IV.1.17 elle est aussi ouverte. Donc l'image de  $p$  est à la fois ouverte et fermée, et non vide. Puisque en tant qu'espace topologique  $\mathbb{C}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^2$ , il est connexe, car produit de deux copies de  $\mathbb{R}$ , qui est connexe d'après IV.1.3. Il en suit que l'image de  $p$  doit être  $\mathbb{C}$  tout entier.

*q.e.d.*

## IV.2 Espaces connexes par arcs

On aborde la notion de connexe d'une autre manière, basée sur l'idée que dans un ensemble connexe on peut connecter deux points par un chemin continu.

**Définition IV.2.1.** Soit  $X$  un espace topologique. On dit qu'il est *connexe par arcs* si  $\forall a, b \in X$  il existe une application continue  $c : [0, 1] \rightarrow X$  telle que  $c(0) = a$ ,  $c(1) = b$ . On dit que  $c$  est un *chemin* ou un *arc* qui joint  $a$  à  $b$ .

**Exemple IV.2.2.**

- (1) Toute boule  $B(a, r)$  de  $\mathbb{R}^n$ , pour l'une quelconque des normes usuelles sur  $\mathbb{R}^n$  est connexe par arcs : si  $x, y \in B(a, r)$ ,  $c(t) = t \cdot y + (1 - t) \cdot x$  vérifie que  $c(0) = x$ ,  $c(1) = y$ , et

$$\begin{aligned} \|c(t) - a\| &= \|ty + (1 - t)x - a\| = \|t(y - a) + (1 - t)(x - a)\| \\ &\leq t\|y - a\| + (1 - t)\|x - a\| < (t + 1 - t)r = r \quad , \end{aligned}$$

ce qui montre que  $c(t)$  reste bien dans  $B(a, r)$ .

- (2) On dit que  $C \subset \mathbb{R}^n$  est *convexe* si lorsque  $x, y \in C$ , le segment qui joint  $x$  et  $y$ , à savoir  $\{t \cdot y + (1 - t) \cdot x, 0 \leq t \leq 1\}$ , est contenu dans  $C$ . Il est clair qu'un convexe est connexe par arcs.

**Proposition IV.2.3.** Si  $X$  est connexe par arcs, il est connexe.

*Preuve:* En effet, soit  $a \in X$  fixé et pour  $b \in X$  appelons  $c_{a,b} : [0, 1] \rightarrow X$  le chemin qui joint  $a$  à  $b$ . Posons  $\Gamma_{a,b} = c_{a,b}([0, 1])$ ; c'est l'image d'un connexe, donc connexe, par les propositions IV.1.3 et IV.1.5. Alors  $X = \bigcup_{b \in X} \Gamma_{a,b}$  est connexe d'après IV.1.8.

*q.e.d.*

**Exemple IV.2.4.** La réciproque de cette proposition est fautive, comme le montre l'exemple de l'adhérence de la spirale IV.1.12(1) : il n'est pas possible de joindre par un chemin continu un point de la spirale avec un point du cercle  $S^1$ . Cela se comprend intuitivement, car en s'approchant du cercle, on tourne de plus en plus vite, on ne peut donc pas s'approcher continûment d'un point de  $S^1$ .

**Proposition IV.2.5.** Soit  $X$  un espace topologique. La relation :

$$xRy \iff \exists c : [0, 1] \rightarrow X \text{ continu tel que } c(0) = x, c(1) = y$$

est une relation d'équivalence.

*Preuve:* Reflexivité : si  $x \in X$ , le chemin constant  $c(t) = x$ ,  $t \in [0, 1]$  joint évidemment  $x$  à lui-même, donc  $xRx$ .

Symétrie : si  $xRy$ , cela signifie qu'il existe un chemin  $c : [0, 1] \rightarrow X$  tel que  $c(0) = x$ ,  $c(1) = y$ . Il s'agit de montrer que  $yRx$ , c'est-à-dire qu'il existe un chemin  $c' : [0, 1] \rightarrow X$  tel que  $c'(0) = y$ ,  $c'(1) = x$ ; pour cela il suffit de parcourir  $c$  dans le sens inverse, c'est-à-dire de poser :

$$c'(t) = c(1 - t) \quad .$$

On appelle  $c'$  le *chemin inverse* de  $c$

Transitivité : on doit montrer que si  $x, y, z \in X$ ,  $xRy$  et  $yRz \Rightarrow xRz$ . Soient donc  $c_1 : [0, 1] \rightarrow X$  tel que  $c_1(0) = x$ ,  $c_1(1) = y$ , et  $c_2 : [0, 1] \rightarrow X$ ,  $c_2(0) = y$ ,  $c_2(1) = z$ . On pourra joindre  $x$  à  $z$  par le *chemin composé* de  $c_1$  et  $c_2$ , c'est-à-dire :

$$c_3(t) = \begin{cases} c_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c_2(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad .$$

Notons que la définition de  $c_3$  en  $t = \frac{1}{2}$  est cohérente :  $c_3(\frac{1}{2}) = c_1(1) = c_2(0) = y$ . Aussi, si  $F \subset X$  est fermé,  $c_3^{-1}(F) = c_1^{-1}(F) \cup c_2^{-1}(F)$ , où  $c_1^{-1}(F) = c_1^{-1}(F) : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow X$  et  $c_2^{-1}(F) = c_2^{-1}(F) : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow X$  sont continues; il en suit que  $c_3^{-1}(F)$  est fermé et donc  $c_3$  est continue.

*q.e.d.*

**Exemple IV.2.6.** A l'aide de la proposition précédente, on voit facilement que le peigne des topologues IV.1.10  $X$  est connexe par arcs : si  $(a_1, y_1), (a_2, y_2)$  sont dans  $X$ ,  $a_i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  et  $0 \leq y_1, y_2 \leq 1$ , on peut joindre  $(a_1, y_1)$  à  $(a_1, 0)$  par le chemin  $t \mapsto (a_1, (1-t)y_1)$ , puis on joint  $(a_1, 0)$  à  $(a_2, 0)$  par  $t \mapsto ((1-t)a_1 + ta_2, 0)$ , puis  $(a_2, 0)$  à  $(a_2, y_2)$  par  $t \mapsto (a_2, (1-t)y_2)$ . Par transitivité de la relation  $R$ , on peut joindre  $(a_1, y_1)$  à  $(a_2, y_2)$  par un chemin, que l'on pourrait expliciter à partir de la preuve de IV.2.5 en composant les chemins.

**Définition IV.2.7.** Soit  $X$  un espace topologique et  $x \in X$ . La *composante connexe par arcs* de  $x$  est l'ensemble :

$$C_x = \{y \in X \mid \exists \text{ un chemin joignant } x \text{ à } y\} \quad .$$

**Proposition IV.2.8.** Soit  $X$  un espace topologique et  $x \in X$

- (1) La composante connexe de  $x$  est le plus grand sous-ensemble connexe par arcs contenant  $x$ .
- (2) Les composantes connexes par arc forment une partition de l'espace  $X$ .

*Preuve:* (1) est évident et (2) suit de IV.2.5.

*q.e.d.*

Il faut remarquer que les composantes connexes par arcs ne sont pas fermées en général. Par exemple, si on reprend la spirale de l'exemple IV.1.12(1), les composantes connexes par arc de l'adhérence  $\bar{A}$  de la spirale sont  $A \cup \{0\}$ , qui n'est pas fermée, et  $S^1$ .

### IV.3 Espaces localement connexes

**Définition IV.3.1.** Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *localement connexe* si :

$$\forall x \in X, \forall V \text{ voisinage de } x, \exists U \subset V, U \text{ voisinage de } x \text{ et } U \text{ connexe} \quad .$$

On dit que  $X$  est *localement connexe par arcs* si :

$$\forall x \in X, \forall V \text{ voisinage de } x, \exists U \subset V, U \text{ voisinage de } x \text{ et } U \text{ connexe par arcs} \quad .$$

Par exemple,  $\mathbb{R}^n$  est localement connexe par arcs, car si  $x \in \mathbb{R}^n$ , tout voisinage  $V$  de  $x$  contient une boule. Aussi, il suit de la définition que tout ouvert d'un espace localement connexe (respectivement localement connexe par arcs), est aussi localement connexe (respectivement localement connexe par arcs).

**Remarques IV.3.2.**

- (1) Remarquons que dans un espace localement connexe, les composantes connexes sont ouvertes : si  $C$  est une telle composante et  $x \in C$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  connexe; alors  $U \subset C$ , puisque  $C$  contient tous les connexes contenant  $x$ , ce qui montre que  $C$  est ouverte. On sait déjà (proposition IV.1.14(1)) que les composantes connexes sont fermées.
- (2) Par un raisonnement analogue, si  $X$  est localement connexe par arcs, alors les composantes connexes par arcs sont ouvertes. Comme ces composantes forment une partition, l'une d'entre elles est le complémentaire de la réunion des autres, qui est un ouvert car réunion d'ouverts. Il en suit que dans un espace localement connexe par arcs les composantes connexes par arcs sont *ouvertes et fermées*.
- (3) Un espace peut être connexe sans être localement connexe : c'est le cas du peigne  $X$  des topologues. Il est connexe, même par arcs. Mais si l'on prend un point de la forme  $(y, 0) \in X$ ,  $0 < y \leq 1$ , toute boule de la forme  $B((y, 0), \frac{y}{2})$  contient une infinité de segments disjoints de la forme  $\{(\frac{1}{n}, z), |z - y| < \varepsilon\}$  (voir figure IV.4). Cela montre aussi que la réciproque de l'affirmation (1) ci-dessus est fausse :  $X$  est connexe, donc constitue une composante connexe ouverte, sans pour autant que  $X$  soit localement connexe.

**Proposition IV.3.3.** Si l'espace topologique  $X$  est connexe et localement connexe par arcs, alors il est connexe par arcs.

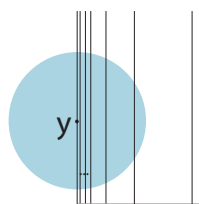


Figure IV.4: Le peigne des topologues n'est pas localement connexe, bien que connexe

*Preuve:* En effet, on a remarqué ci-dessus que dans un espace localement connexe par arcs, les composantes connexes par arcs sont ouvertes et fermées. Puisque  $X$  est connexe, la composante connexe par arcs d'un  $x \in X$  doit être  $X$  tout entier.

*q.e.d.*

Par exemple,  $\mathbb{R}^n$  étant localement connexe, si  $A \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert, il sera connexe par arcs si et seulement si il est connexe.



## Partie B

# Topologie et géométrie différentielle





## Chapitre V

# Degré des applications du cercle dans lui-même

*Sommaire.* Soit  $f : S^1 \rightarrow S^1$  une application continue du cercle dans lui-même. On peut lui associer un nombre entier, qui représente le nombre algébrique de tours que fait  $f(z)$  lorsque  $z$  parcourt le cercle source. Cela permet par exemple de démontrer le théorème du point fixe de Brower [V.1.19](#). À l'aide du degré, on peut aussi définir l'indice des zéros d'un champ de vecteurs sur un ouvert du plan. Cet indice est lié à des propriétés globales de la géométrie des surfaces : sur la sphère, tout champ de vecteurs doit s'annuler [V.2.6](#), alors qu'il existe des champs de vecteurs qui ne s'annulent jamais sur le tore.

### V.1 Définition et propriétés du degré

Il sera commode de représenter le cercle comme l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \quad .$$

On peut paramétrer le cercle à l'aide de l'application l'exponentielle; on note :

$$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \quad , \quad p(t) = e^{2i\pi t}$$

où  $i = \sqrt{-1}$ . Rappelons que

$$p(t) = p(t') \iff t - t' = k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad .$$

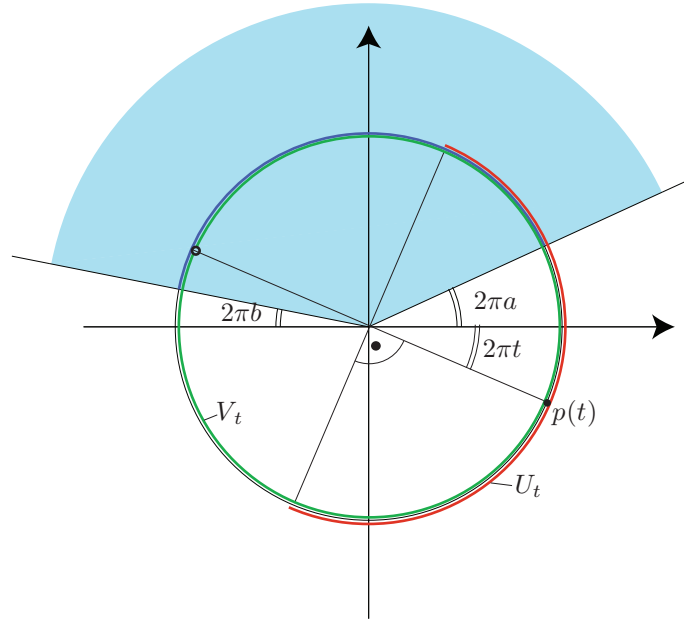
Aussi,  $p$  est une application ouverte. Cela suit par exemple du fait que si  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$  et  $b - a < 2\pi$ ,  $p(]a, b[)$  est la portion du cercle comprise dans le secteur ouvert délimité par les demi-droites par l'origine faisant un angle de  $2\pi a$ , respectivement  $2\pi b$  avec l'axe  $OX$  (voir figure [V.1](#)).

**Proposition V.1.1.** Soit  $\varphi : [0, 1] \rightarrow S^1$  une application continue. Soit  $z_0 = \varphi(0)$  et soit  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $z_0 = e^{2i\pi t_0}$ . Alors il existe une unique application continue  $\widehat{\varphi} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie :

- (1)  $\widehat{\varphi}(0) = t_0$
- (2)  $\varphi(t) = e^{2i\pi \widehat{\varphi}(t)}, \quad 0 \leq t \leq 1.$

En d'autres termes, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \widehat{\varphi} & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \end{array}$$

Figure V.1: Image par  $p$  de l'intervalle  $]a, b[$  et un ouvert de la forme  $U_t$ 

On dit que  $\widehat{\varphi}$  est un *relèvement* de  $\varphi$ .

*Preuve:* Les demi-cercles ouverts de la forme  $U_t = p([t - \frac{1}{4}, t + \frac{1}{4}[)$  forment un recouvrement de  $S^1$  par des ouverts, dans lesquels deux points ne sont jamais antipodaux ( $z, z' \in U_t \Rightarrow z \neq -z'$ ). Les  $\varphi^{-1}(U_t)$  forment donc un recouvrement de  $[0, 1]$  par des ouverts; soit  $\varepsilon$  un nombre de Lebesgue pour ce recouvrement (voir III.3.5) et soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Posons  $s_j = \frac{j}{n}$ ,  $j = 0, \dots, n$ ; alors, si  $s, s' \in [s_j, s_{j+1}]$ ,  $|s - s'| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ , ce qui entraîne que  $\varphi(s)$  et  $\varphi(s')$  ne sont pas antipodaux.

Posons  $V_t = p([t - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}[)$ , qui est l'ensemble des points du cercle qui ne sont pas antipodaux à  $p(t)$ ; on va définir  $\widehat{\varphi}$  sur  $[0, s_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ , par induction sur  $j$ , en utilisant le fait que si  $t \in \mathbb{R}$ , la restriction de  $p$  à l'intervalle  $]t - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}[$  est un homéomorphisme sur  $V_t$ .

- Si  $j = 0$ , la définition est imposée par le fait que l'on exige que  $\widehat{\varphi}(0) = t_0$ .
- Si  $j = 1$ ,  $\varphi([0, s_1])$  est contenu dans l'ouvert  $V_{t_0}$ ; définissons  $p_0 : ]t_0 - \frac{1}{2}, t_0 + \frac{1}{2}[ \rightarrow V_{t_0}$  comme étant la restriction de  $p$ , qui est un homéomorphisme sur  $V_{t_0}$ . L'unique façon d'étendre  $\widehat{\varphi}$  à  $[0, s_0]$  est de poser :

$$\widehat{\varphi}(s) = p_0^{-1}(\varphi(s)), \quad s \in [0, s_0]$$

- Supposons d'avoir défini  $\widehat{\varphi}(s)$  pour  $s \in [0, s_j]$  et montrons comment l'étendre à  $[0, s_{j+1}]$ . Posons  $t_j = \widehat{\varphi}(s_j)$ ; alors  $\varphi([s_j, s_{j+1}]) \subset V_{t_j}$ . Posons  $p_j = p|_{]t_j - \frac{1}{2}, t_j + \frac{1}{2}[}$ , qui est un homéomorphisme sur  $V_{t_j}$ . L'unique façon d'étendre  $\widehat{\varphi}$  à  $[s_j, s_{j+1}]$  est de poser :

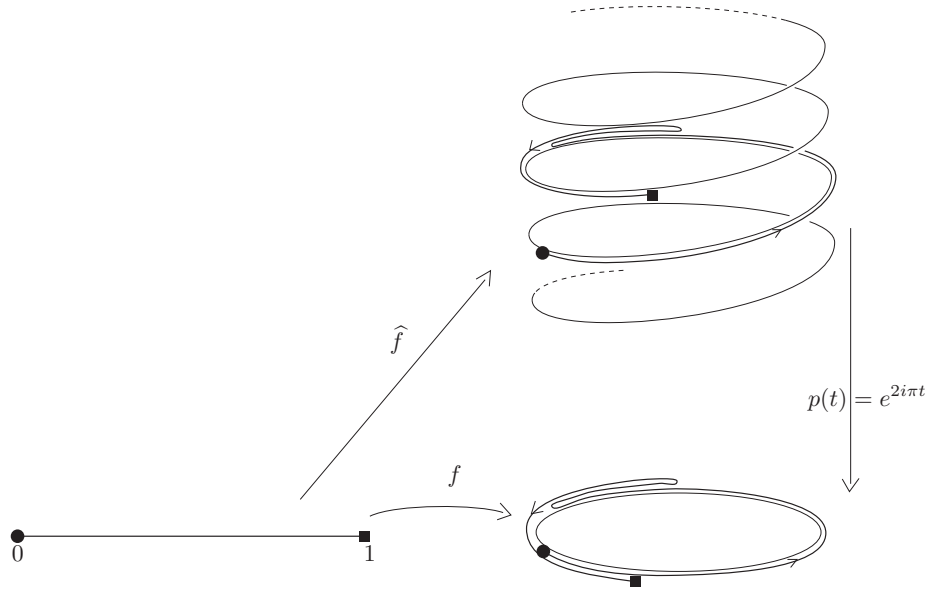
$$\widehat{\varphi}(s) = p_j^{-1}(\varphi(s)), \quad s \in [s_j, s_{j+1}]$$

On a vu que la définition de  $\widehat{\varphi}$  par induction est unique. On peut encore vérifier l'unicité du relèvement de façon indépendante comme suit. Supposons d'avoir deux relèvements  $\widehat{\varphi}$  et  $\widehat{\psi}$  de  $\varphi$  vérifiant  $\widehat{\varphi}(0) = \widehat{\psi}(0) = t_0$ . Posons

$$A = \left\{ s \in [0, 1] \mid \widehat{\varphi}(s) = \widehat{\psi}(s) \right\}.$$

Alors

- (1)  $A \ni 0$ , donc  $A$  est non vide.
- (2)  $A$  est l'image inverse de  $\{0\} \subset \mathbb{R}$  par l'application continue  $\widehat{\varphi}(s) - \widehat{\psi}(s) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , donc il est fermé.

Figure V.2: L'application  $f : [0, 1] \rightarrow S^1$  se relève en  $\hat{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 

- (3) Si  $\hat{\varphi}(s) = \hat{\psi}(s) = t$ , posons  $p_t = p|_{]t-\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2}[}$ . Il suit de la continuité de  $\hat{\psi}$  et  $\hat{\varphi}$  en  $s$  qu'il existe  $r > 0$  tel que si  $|s - s'| < r$ ,  $\hat{\psi}(s'), \hat{\varphi}(s') \in ]t - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}[$ , et donc on doit avoir que  $\hat{\psi}(s') = \hat{\varphi}(s') = p_t^{-1}(\varphi(s'))$ . Autrement dit, les deux relèvements doivent coïncider sur l'intervalle  $]s - r, s + r[ \cap [0, 1]$ . Ceci montre que  $A$  est ouvert.

En conclusion,  $A$  est ouvert, fermé, non vide dans  $[0, 1]$ , qui est connexe, donc doit coïncider avec  $[0, 1]$ , ce qui veut dire que  $\hat{\psi} = \hat{\varphi}$ .

*q.e.d.*

**Proposition V.1.2.** Soit  $\varphi : [0, 1] \rightarrow S^1$  continue et  $\hat{\varphi}, \hat{\psi} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  deux relèvements :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} & \\ \hat{\varphi}, \hat{\psi} \nearrow & \downarrow p & \\ [0, 1] & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \end{array}$$

Alors il existe un entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\hat{\varphi}(s) = \hat{\psi}(s) + k, \quad \forall s \in [0, 1]$$

*Preuve:* Puisque  $e^{2i\pi\hat{\varphi}(0)} = e^{2i\pi\hat{\psi}(0)} = \varphi(0)$ , on doit avoir que  $\hat{\varphi}(0) = \hat{\psi}(0) + k$ . Posons :

$$\hat{\theta}(s) = \hat{\psi}(s) + k.$$

Alors  $\hat{\theta}(0) = \hat{\psi}(0) + k = \hat{\varphi}(0)$ , et

$$p(\hat{\theta}(s)) = e^{2i\pi(\hat{\psi}(s) + k)} = e^{2i\pi\hat{\psi}(s)} = \varphi(s).$$

Donc  $\hat{\theta}$  est aussi un relèvement de  $\varphi$ , et il coïncide avec  $\hat{\varphi}$  en  $s = 0$ . D'après V.1.1,  $\hat{\varphi} = \hat{\theta}$ , ce qui veut dire que  $\hat{\varphi}(s) = \hat{\psi}(s) + k$ ,  $s \in [0, 1]$ .

*q.e.d.*

Nous allons définir le degré d'une application continue du cercle dans lui-même. Pour cela, nous nous servirons de la paramétrisation du cercle  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S^1$ ,  $\alpha(t) = e^{2i\pi t}$ , qui n'est autre que la restriction de  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  à l'intervalle  $[0, 1]$ .

**Définition V.1.3** (Degré). Soit  $f : S^1 \rightarrow S^1$  une application continue. Posons  $\varphi = f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow S^1$ , c'est-à-dire  $\varphi(t) = f(e^{2i\pi t})$ . Soit  $\hat{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  un relèvement quelconque de  $\hat{f}$ , de sorte que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbb{R} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow p \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

On définit le degré de  $f$  par :

$$d^\circ(f) = \hat{f}(1) - \hat{f}(0)$$

**Proposition V.1.4.** Le degré de  $f : S^1 \rightarrow S^1$  est un entier, qui ne dépend pas du relèvement  $\hat{f}$  de  $f \circ \alpha$  que l'on choisit.

*Preuve:* On reprend les notations de la définition V.1.3. Puisque  $f(\alpha(0)) = f(\alpha(1))$ ,  $e^{2i\pi\hat{f}(0)} = e^{2i\pi\hat{f}(1)}$  et donc  $\hat{f}(1) - \hat{f}(0) \in \mathbb{Z}$ . Si  $\hat{\psi} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est un autre relèvement de  $\varphi = f \circ \alpha$ , d'après V.1.2  $\hat{\psi}(t) = \hat{\varphi}(t) + k$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ , et donc  $\hat{\psi}(1) - \hat{\psi}(0) = \hat{f}(1) - \hat{f}(0)$ .

q.e.d.

**Remarque V.1.5.** On peut prolonger  $\hat{f}$  à  $\mathbb{R}$  tout entier en posant :

$$\hat{f}(s + k) = \hat{\varphi}(s) + k(\hat{f}(1) - \hat{f}(0)) \quad , \quad \text{où } 0 \leq s \leq 1$$

(voir figure V.3). On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbb{R} \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

et  $\hat{f}(s + 1) - \hat{f}(s) = \hat{f}(1) - \hat{f}(0) = d^\circ(f)$ . En particulier, si dans la définition V.1.3 on remplace  $\alpha$  par  $\beta(t) = e^{2i\pi(t+t_0)}$ , on obtient pour le degré  $\hat{f}(t_0 + 1) - \hat{f}(t_0)$ , qui a la même valeur que  $\hat{f}(1) - \hat{f}(0) = d^\circ(f)$ .

**Exemples V.1.6.**

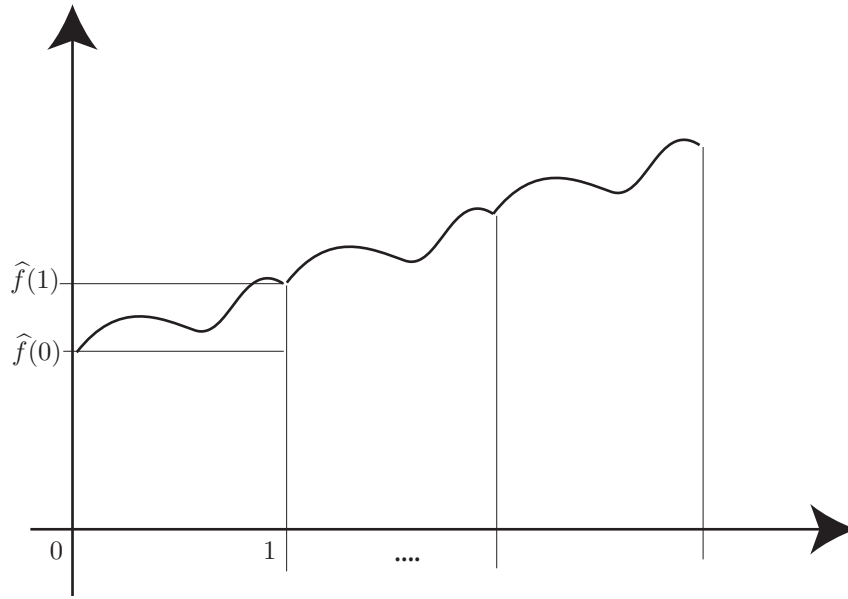
- (1) Soit  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $f(z) = z^2$ . Alors  $\varphi(t) = f(\alpha(t)) = e^{4i\pi t}$  et on peut prendre le relèvement  $\hat{f}(t) = 2 \cdot t$ , ce qui fait que  $d^\circ(f) = \hat{f}(1) - \hat{f}(0) = 2 - 0 = 2$  (voir figure V.4).
- (2) De manière analogue, on peut voir que si  $f(z) = z^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $d^\circ(f) = n$  : on peut relever  $f \circ \alpha$  par  $\hat{f}(t) = n \cdot t$ . En particulier,  $f(z) = \bar{z} = \frac{1}{z}$  est de degré  $-1$ .

**Proposition V.1.7.** Soient  $f : S^1 \rightarrow S^1$  et  $g : S^1 \rightarrow S^1$  deux applications continues. Alors le degré de la composition de  $f$  avec  $g$  est le produit des degrés de  $f$  et  $g$  :

$$d^\circ(g \circ f) = d^\circ(f) \cdot d^\circ(g)$$

*Preuve:* Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\hat{g}} & \mathbb{R} \\ p \downarrow & & p \downarrow & & p \downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \end{array}$$

Figure V.3: Extension de  $\hat{f}$ 

ce qui montre que  $\hat{g} \circ \hat{f}$  est un relèvement de  $g \circ f \circ p$ . Soit  $k = d^\circ(f)$ , de sorte que  $\hat{f}(1) = \hat{f}(0) + k$ ; posons  $\hat{f}(0) = s$ . Alors :

$$\begin{aligned} d^\circ(g \circ f) &= \hat{g}(\hat{f}(1)) - \hat{g}(\hat{f}(0)) = \hat{g}(s+k) - \hat{g}(s) = \\ &= \underbrace{\hat{g}(s+k) - \hat{g}(s+k-1)}_{=d^\circ(g)} + \underbrace{\hat{g}(s+k-1) - \hat{g}(s+k-2)}_{=d^\circ(g)} + \cdots + \underbrace{\hat{g}(s+1) - \hat{g}(s)}_{=d^\circ(g)} = k \cdot d^\circ(g) = d^\circ(f) \cdot d^\circ(g) \end{aligned}$$

*q.e.d.*

**Définition V.1.8** (Homotopie). Soient  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : X \rightarrow Y$  des applications continues. Une *homotopie de  $f$  vers  $g$*  est une application continue  $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  qui vérifie :

$$h(x, 0) = f(x) \quad , \quad h(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X \quad .$$

On peut voir une homotopie de  $f$  vers  $g$  comme une déformation continue de  $f$  vers  $g$ .

#### Exemples V.1.9.

- (1) Soit  $X$  un espace topologique et  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On peut toujours définir une homotopie de  $f$  vers  $g$  en posant :

$$h(x, t) = (1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x) \quad .$$

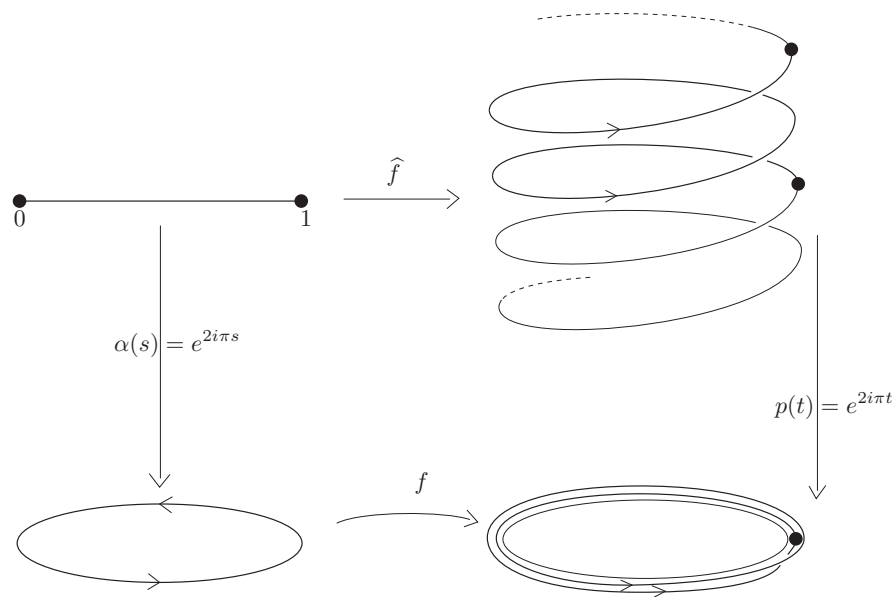
- (2) Soit  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $f(z) = z \cdot e^{2i\pi t_0}$ . Posons

$$h(z, t) = z \cdot e^{2i\pi t_0(1-t)} \quad .$$

On vérifie que  $h(z, 0) = f(z)$ ,  $h(z, 1) = z$ . Donc  $h$  est une homotopie de  $f$  vers l'application identité de  $S^1$ .

Pour avoir des exemples d'applications qui ne sont pas homotopes, il faudra attendre d'avoir établi le théorème V.1.11. Montrons d'abord que l'homotopie est une relation d'équivalence. Plus précisément, si  $f, g : X \rightarrow Y$ , notons  $f \sim g$  s'il existe une homotopie de  $f$  vers  $g$ .

#### Proposition V.1.10.

Figure V.4: L'application  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $f(z) = z^2$ , est de degré 2

- (1)  $f \sim f$
- (2) Si  $f \sim g$ , alors  $g \sim f$
- (3) Si  $f \sim g$  et que  $g \sim \ell$ , alors  $f \sim \ell$

*Preuve:*

- (1) L'application  $h(x, t) = f(x)$  est une homotopie de  $f$  vers  $f$ .
- (2) Si  $h(x, t)$  est une homotopie de  $f$  vers  $g$ , cela signifie que  $h(x, 0) = f(x)$ ,  $h(x, 1) = g(x)$ ,  $\forall x \in X$ . On pose  $h'(x, t) = h(x, 1 - t)$ , et alors  $h'(x, 0) = g(x)$ ,  $h'(x, 1) = f(x)$   $\forall x \in X$ .
- (2) Soient  $h_1$  une homotopie de  $f$  vers  $g$  et  $h_2$  une homotopie de  $g$  vers  $\ell$ . Définissons  $h_3 : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  par :

$$h_3(x, t) = \begin{cases} h_1(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h_2(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Notons que si  $t = \frac{1}{2}$ ,  $h_1(x, \underbrace{2t}_{=1}) = g(x) = h_2(x, \underbrace{2t-1}_{=0})$ , donc la définition ci-dessus est cohérente. Il suit de l'exercice 2.a), série 3, que  $h_3$  est continue. Enfin, on a que  $h_3(x, 0) = h_1(x, 0) = f(x)$ ,  $h_3(x, 1) = h_2(x, 1) = \ell(x)$ .

*q. e. d.*

Voici un théorème qui justifie l'intérêt pour la notion d'homotopie.

**Théorème V.1.11.** Deux applications  $f, g : S^1 \rightarrow S^1$  sont homotopes si et seulement si elles ont le même degré.

La démonstration va utiliser deux lemmes.

**Lemme V.1.12.** Soit  $Y$  un espace topologique. Les applications  $f, g : S^1 \rightarrow Y$  sont homotopes si et seulement si il existe une homotopie  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$  qui vérifie :

$$h(s, 0) = f(e^{2i\pi s}) \quad , \quad h(s, 1) = g(e^{2i\pi s}) \quad , \quad h(0, t) = h(1, t) \quad , \quad \forall s, t \in [0, 1]$$

*Preuve:* Si  $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$  est une homotopie de  $f$  vers  $g$ ,  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$  définie par  $h(s, t) = H(e^{2i\pi s}, t)$  sera une homotopie comme souhaité.

Réciproquement, si on a une homotopie telle que  $h$ , considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & X \\ \pi \downarrow & \nearrow H & \\ S^1 \times [0, 1] & & \end{array}$$

où  $\pi(s, t) = (e^{2i\pi s}, t)$ . L'application  $\pi$  vérifie les hypothèses du corollaire III.2.10 et les hypothèses sur  $h$  font que si  $\pi(s, t) = \pi(s', t)$ , alors  $h(s', t) = h(s, t)$ . On peut donc appliquer le corollaire III.2.11 pour en déduire que si l'on définit  $H$  en posant  $H(e^{2i\pi s}, t) = h(s, t)$ , cette définition est cohérente et  $H$  est continue.

*q. e. d.*

**Lemme V.1.13.** Soit  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$  une homotopie,  $f(s) = h(s, 0)$  et  $\hat{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  un relèvement de  $f : f(s) = e^{2i\pi \hat{f}(s)}$ . Alors il existe un unique relèvement  $\hat{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de  $h$  qui prolonge  $\hat{f}$ , ce qui veut dire que  $\hat{h}(s, 0) = \hat{f}(s)$  et  $h(s, t) = e^{2i\pi \hat{h}(s, t)}$ .

*Preuve:* Représentons sur un diagramme les diverses applications :

$$\begin{array}{ccccc} & & & \mathbb{R} & \\ & & \nearrow \hat{h} & \downarrow p(t)=e^{2i\pi t} & \\ [0, 1] \times \{0\} & \hookrightarrow & [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & S^1 \end{array}$$

La preuve est analogue à celle de la proposition V.1.1. Les demi-cercles ouverts  $U_t = p([t - \frac{1}{4}, t + \frac{1}{4}])$  forment un recouvrement de  $S^1$  par des ouverts, dans lesquels deux points ne sont jamais antipodaux. Les  $h^{-1}(U_t)$  forment un recouvrement du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre de Lebesgue (voir III.3.5) pour ce recouvrement et prenons un entier positif  $n$  tel que  $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ; considérons les  $n^2$  petits carrés  $C_{u,v} = [\frac{u}{n}, \frac{u+1}{n}] \times [\frac{v}{n}, \frac{v+1}{n}]$  de côté  $\frac{1}{n}$ ,  $u, v = 0, \dots, n-1$ . Si  $(s, t), (s', t') \in C_{u,v}$ , alors  $h(s, t)$  et  $h(s', t')$  sont dans un même ouvert  $U_{t_0}$ , pour un certain  $t_0$ , et donc ne peuvent pas être antipodaux. On pose  $V_{t_0} = p([t_0 - \frac{1}{2}, t_0 + \frac{1}{2}])$ , et alors si  $h(s, t) = p(t_0)$ , on  $(s', t') \in V_{t_0}$ .

Pour commencer, en appliquant V.1.1, on relève  $h(s, 0)$  en posant  $\hat{h}(s, 0) = \hat{f}(s)$ , ce qui nous est imposé par l'énoncé. On va définir  $\hat{h}(s, t)$  en l'étendant successivement aux petits carrés  $C_{0,0}, C_{1,0}, \dots, C_{n-1,0}$ , qui forment la rangée horizontale du bas, puis à la rangée au-dessus, formée des petits carrés  $C_{0,1}, C_{1,1}, \dots, C_{n-1,1}$ , et ainsi de suite (voir figure V.5). Supposons d'avoir défini  $\hat{h}(s, t)$  pour  $0 \leq s \leq 1$  et  $0 \leq t \leq \frac{v}{n}$ ,  $v < n$ , et montrons comment l'étendre à l'ensemble  $0 \leq s \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq \frac{v+1}{n}$ .

- Supposons que  $\hat{h}(0, \frac{v}{n}) = t_{0,v}$ ; alors l'image de  $C_{0,v}$  par  $h$  est contenue dans l'ouvert  $V_{t_{0,v}}$ . On pose  $p_{0,v} = p|_{[t_{0,v} - \frac{1}{2}, t_{0,v} + \frac{1}{2}]}$  et on peut étendre  $\hat{h}$  à  $C_{0,v}$  en posant

$$\hat{h}(s, t) = p_{0,v}^{-1}(h(s, t)) \quad , \quad (s, t) \in C_{0,v} \quad .$$

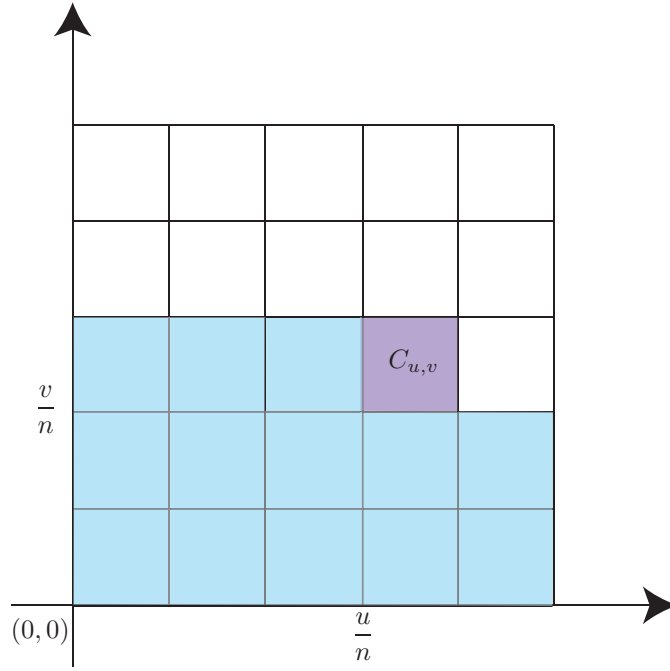
- On suppose maintenant que  $\hat{h}(s, t)$  a été défini en plus pour  $0 \leq s \leq \frac{u}{n}$ ,  $u < n$ , et  $0 \leq t \leq \frac{v+1}{n}$ ; on va l'étendre à  $C_{u,v}$ . Si  $\hat{h}(\frac{u}{n}, \frac{v}{n}) = t_{u,v}$ ,  $h(C_{u,v}) \subset V_{t_{u,v}}$ ; on pose  $p_{u,v} = p|_{[t_{u,v} - \frac{1}{2}, t_{u,v} + \frac{1}{2}]}$  et on étend  $\hat{h}$  en posant

$$\hat{h}(s, t) = p_{u,v}^{-1}(h(s, t)) \quad , \quad (s, t) \in C_{u,v} \quad .$$

*Preuve de V.1.11.* Soit  $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$  une homotopie de  $f$  vers  $g$ . Définissons  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$  en posant  $h(s, t) = H(e^{2i\pi s}, t)$ . Soit  $\hat{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  un relèvement de  $f(e^{2i\pi f(s)})$  et soit  $\hat{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  le relèvement de  $h$  donné par le lemme V.1.13. Alors :

$$d^\circ(f) = \hat{h}(1, 0) - \hat{h}(0, 0) \quad , \quad d^\circ(g) = \hat{h}(1, 1) - \hat{h}(0, 1)$$

et  $\delta_t = \hat{h}(1, t) - \hat{h}(0, t)$  est un entier, qui varie continûment avec  $t \in [0, 1]$ , donc constant. En particulier  $d^\circ(f) = d^\circ(g)$ .

Figure V.5: Construction de  $\hat{h}(s, t)$  dans la preuve de V.1.13

Réciproquement, supposons que  $d^\circ(f) = d^\circ(g)$  et soient  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  des relèvements de  $f(e^{2i\pi s})$  et  $g(e^{2i\pi s})$  respectivement, ce qui veut dire que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\hat{f}, \hat{g}} & \mathbb{R} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow p \\ S^1 & \xrightarrow{f, g} & S^1 \end{array}$$

Considérons l'homotopie  $\hat{h}(s, t) = (1 - t) \cdot \hat{f}(s) + t \cdot \hat{g}(s)$  de  $\hat{f}$  vers  $\hat{g}$ . Or :

$$\begin{aligned} \hat{h}(1, t) - \hat{h}(0, t) &= (1 - t) \cdot \hat{f}(1) + t \cdot \hat{g}(1) - (1 - t) \cdot \hat{f}(0) - t \cdot \hat{g}(0) = \\ &= (1 - t) \cdot (\hat{f}(1) - \hat{f}(0)) + t \cdot (\hat{g}(1) - \hat{g}(0)) = (1 - t) \cdot d^\circ(f) + t \cdot d^\circ(g) = k \quad , \quad \text{où } k = d^\circ(f) = d^\circ(g) \end{aligned}$$

Si on pose  $h(s, t) = e^{2i\pi \hat{h}(s, t)}$ , alors

$$h(1, t) = e^{2i\pi \hat{h}(1, t)} = e^{2i\pi \hat{h}(0, t) + k} = e^{2i\pi \hat{h}(0, t)} = h(0, t)$$

et  $h(s, 0) = e^{2i\pi \hat{h}(s, 0)} = e^{2i\pi \hat{f}(s)} = f(e^{2i\pi s})$ ,  $h(s, 1) = e^{2i\pi \hat{h}(s, 1)} = e^{2i\pi \hat{g}(s)} = g(e^{2i\pi s})$ ; il résulte du lemme V.1.12 que l'on déduit de  $h$  une homotopie  $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$  de  $f$  vers  $g$ .

*q.e.d.*

La prochaine proposition sera utile pour les applications.

**Proposition V.1.14.** *Soit  $f : S^1 \rightarrow Y$  une application continue et soit  $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$  le disque de bord  $S^1$ . Il existe une extension de  $f$  à  $D^2$  si et seulement si  $f$  est homotope à une constante.*

*Preuve:* L'application  $\rho : S^1 \times [0, 1] \rightarrow D^2$ ,  $\rho(x, t) = x \cdot t$ , satisfait les hypothèses du corollaire III.2.10, par conséquent, toute application continue de  $S^1 \times [0, 1]$  dans  $Y$  qui est compatible avec  $\rho$  se factorise par  $\rho$ .



Supposons donc que  $h : S^1 \times [0, 1] \rightarrow Y$  soit une homotopie d'une application constante  $c \in Y$  vers  $f$ . On peut étendre alors  $f$  en l'application  $\bar{f} : D^2 \rightarrow Y$  en demandant que  $\bar{f}(\rho(z, t)) = h(z, t)$ , et cette définition est cohérente et  $\bar{f}$  est continue :

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & Y \\ \rho \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ D^2 & & \end{array}$$

Réciproquement, si  $\bar{f} : D^2 \rightarrow X$  étend  $f$ , on pose  $h(z, t) = \bar{f}(z \cdot t)$ , et  $h$  est alors une homotopie de l'application constante  $\bar{f}(0)$  vers  $f$ .

*q.e.d.*

**Corollaire V.1.15.** *L'application  $f : S^1 \rightarrow S^1$  s'étend en une application  $\bar{f} : D^2 \rightarrow S^1$  si et seulement si  $d^\circ(f) = 0$ .*

*Preuve:* En effet, d'après V.1.11,  $f$  est homotope à une constante si et seulement si  $d^\circ(f) = 0$ , puis on applique V.1.14.

*q.e.d.*

**Définition V.1.16.** Soit  $X$  un espace et  $A \subset X$  un sous-espace. Une rétraction de  $X$  sur  $A$  est une application continue  $\rho : X \rightarrow A$  telle que

$$\forall a \in A, \rho(a) = a$$

ou en d'autres termes,  $\rho|_A = \mathbb{I}_A$  (=application identité de  $A$ ). Si un tel  $\rho$  existe, on dit que  $X$  se rétracte sur  $A$ , ou encore que  $A$  est un rétract de  $X$ .

**Exemples V.1.17.**

- (1) Par exemple, si  $x_0 \in X$ , l'application constante  $\rho(x) = x_0$  est une rétraction de  $X$  sur le sous-ensemble réduit à un point  $\{x_0\}$ .
- (2) L'application  $\rho : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ ,  $\rho(x) = \frac{x}{\|x\|}$ , est une rétraction.

**Corollaire V.1.18.** *Il n'existe pas de rétraction de  $D^2$  sur  $S^1$ .*

*Preuve:* En effet, si on avait une rétraction  $\rho : D^2 \rightarrow S^1$ , sa restriction à  $S^1$  serait l'application identité  $\mathbb{I} : S^1 \rightarrow S^1$ , qui est de degré 1; mais d'après V.1.14, puisque  $\rho$  l'étend à  $D^2$ , elle devrait être de degré 0, contradiction.

*q.e.d.*

### Le théorème du point fixe de Brower

**Théorème V.1.19.** *Toute application continue  $f : D^2 \rightarrow D^2$  admet un point fixe : il existe  $\omega \in D^2$  tel que  $f(\omega) = \omega$ .*

*Preuve:* Sinon, on pourrait déduire de  $f$  l'application  $g : D^2 \rightarrow S^1$ , qui est esquissée sur la figure V.6 : on veut que  $g(x)$  soit de la forme  $g(x) = x + \lambda(x - f(x))$ , avec  $\lambda \geq 0$ . Du fait que  $\|g(x)\|^2 = 1$  on déduit que

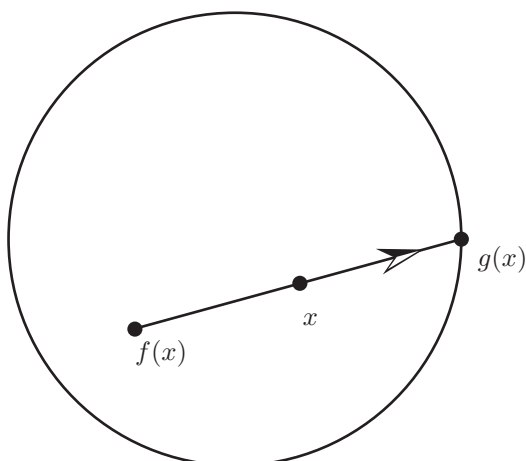
$$\lambda^2(\|x - f(x)\|^2) + 2\lambda\langle x, x - f(x) \rangle - \underbrace{(1 - \|x\|^2)}_{\geq 0} = 0$$

d'où on déduit que

$$\lambda = \lambda(x) = \frac{-\langle x, x - f(x) \rangle + \sqrt{\langle x, x - f(x) \rangle^2 + (1 - \|x\|^2)(\|x - f(x)\|^2)}}{\|x - f(x)\|^2}$$

et comme l'expression sous la racine est positive ou nulle,  $\lambda(x)$  est continue, donc  $g(x) = x + \lambda(x)(x - f(x))$  aussi. On vérifie que si  $\|x\| = 1$ ,  $\lambda(x) = 0$  et  $g(x) = x$ .

*q.e.d.*

Figure V.6: Définition de l'application  $g : D^2 \rightarrow S^1$ 

**Remarque V.1.20.** Ce théorème reste valable si on remplace le disque  $D^2$  par un espace qui lui est homéomorphe, comme par exemple le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

**Le théorème de Nash sur l'existence de points d'équilibre** Ce résultat de Nash se place dans la théorie des jeux, et trouve son application dans la modélisation de stratégies économiques. On en propose ici une version simplifiée, calquée sur l'exposition donnée par John Milnor dans [5].

On suppose qu'il y a  $n$  joueurs, numérotés de 1 à  $n$ . Le  $i$ -ème joueur choisit la valeur d'une variable  $s_i$  dans un ensemble  $S_i$ , l'ensemble des stratégies possibles pour le  $i$ -ème joueur, ceci pour  $i = 1, \dots, n$ ; les joueurs choisissent leur stratégies simultanément. A chaque joueur correspond une fonction *gain*  $p_i : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ . Chaque joueur essaie de maximaliser son gain  $p_i(s_1, \dots, s_n)$ , mais ne peut choisir que sa propre stratégie  $s_i$ . Le but du jeu est de faire en sorte que chaque joueur puisse gagner de manière satisfaisante (par opposition aux jeux dits à *somme nulle*, comme la guerre, où les uns gagnent dans la mesure où les autres perdent).

La première contribution importante de Nash a été de donner une notion appropriée de point d'équilibre pour ces jeux; la voici :

**Définition V.1.21.** Un  $n$ -tuple de stratégies  $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$  est un point d'équilibre si aucun joueur ne peut augmenter son gain  $p_i(s_1, \dots, s_n)$  en changeant la valeur de  $s_i$ , pendant que les  $s_j$ ,  $j \neq i$ , restent fixes.

**Exemple V.1.22.** Un groupe de  $n$  personnes va dîner au restaurant. Le prix des menus varie de 20 à 30 francs; on décide de partager la facture en  $n$  parts égales, indépendamment du menu choisi. Ici  $s_i$  = prix du menu choisi par  $i$ , et  $S_i = [20, 30]$ ; le gain de chacun est la différence entre le prix du menu qu'il a choisi et ce qu'il paye :

$$p_i(s_1, \dots, s_n) = s_i - 1/n(s_1 + \dots + s_n) \quad .$$

On voit que  $p_i$  est strictement croissante en  $s_i$ , quelles que soient les valeurs des autres  $s_j$ . Le seul point d'équilibre est donc  $(30, \dots, 30)$  : tout le monde choisit le menu le plus cher.

Et voici le résultat principal.

**Théorème V.1.23.** Supposons que les ensembles  $S_i$  soient des sous-ensembles convexes de  $\mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  et que les fonctions  $p_i : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$  soient continues par rapport à l'ensemble des variables  $(s_1, \dots, s_n)$  et linéaires par rapport à la variable  $s_i$ . Alors il existe au moins un point d'équilibre.

Nous ferons la démonstration seulement dans le cas où  $n = 2$  et  $S_1 = S_2 = [-1, 1]$ ; on va se ramener au théorème du point fixe de Brouwer V.1.19. On suppose dorénavant que  $S_1 = S_2 = [-1, 1]$ .

**Exemple V.1.24.** Voici un exemple abstrait. On prend  $p_1(s_1, s_2) = s_1 \cdot s_2^2$  et  $p_2 = s_1^4 \cdot s_2 - 3s_1^3 + 2$ . Les points  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$  sont des points d'équilibre.

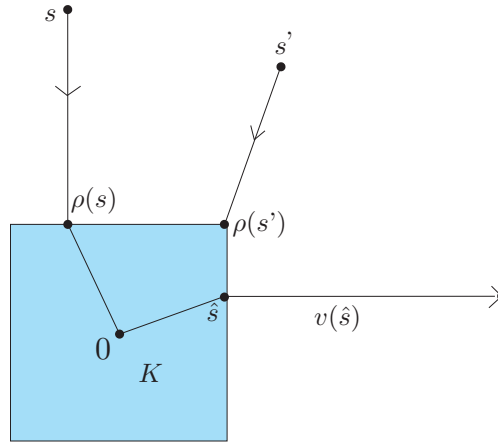


Figure V.7: Interprétation du lemme V.1.25

**Lemme V.1.25.** Soit  $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$  et  $v : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  continue. Alors :

- soit il existe  $\hat{s} \in K$  avec  $v(\hat{s}) = 0$
- soit il existe  $\hat{s}$  sur le bord de  $K$  tel que  $v(\hat{s})$  pointe vers l'extérieur de  $K$ .

*Preuve:* Soit  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow K$  la rétraction de  $\mathbb{R}^2$  sur  $K$  définie par en envoyant  $(s_1, s_2)$  sur le point de  $K$  le plus proche, soit :

$$\rho(s_1, s_2) = \left( \frac{s_1}{\sup\{1, |s_1|\}}, \frac{s_2}{\sup\{1, |s_2|\}} \right)$$

(voir figure V.7). Alors l'application  $f : K \rightarrow K$ ,  $f(s) = \rho(s + v(s))$ , admet un point fixe  $\hat{s}$  d'après le théorème du point fixe de Brouwer V.1.19 (voir la remarque V.1.20) :

- si  $\hat{s} + v(\hat{s}) \in K$ , alors

$$\hat{s} = \hat{s} + v(\hat{s}) \quad \Rightarrow \quad v(\hat{s}) = 0$$

- sinon  $\hat{s} + v(\hat{s}) \notin K$ , donc  $\hat{s} = \rho(\hat{s} + v(\hat{s}))$  est sur le bord de  $K$ , et  $v(\hat{s})$  pointe vers l'extérieur de  $K$  (voir figure V.7).

*q.e.d.*

*Preuve de V.1.23.* On applique le lemme V.1.25 à  $v(s_1, s_2) = (\frac{\partial p_1}{\partial s_1}, \frac{\partial p_2}{\partial s_2})$ .

*q.e.d.*

## V.2 Champs de vecteurs sur la sphère $S^2$

**Champs de vecteurs dans le plan** Soit  $U \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert; un champ de vecteurs sur  $U$  est une application continue  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Si on parle de champ de vecteurs, plutôt que simplement d'application de  $U$  dans  $\mathbb{R}^2$ , c'est parce que on s'intéresse aux trajectoires de ce champ (voir cours d'analyse II réelle). Aussi, l'effet d'un changement de coordonnées est défini de façon à respecter les trajectoires d'un champ :

**Définition V.2.1.** Soit  $h : U \rightarrow U'$  un difféomorphisme, c'est-à-dire une application bijective, de classe de différentiabilité  $\mathcal{C}^\infty$ , admettant un inverse qui est aussi  $\mathcal{C}^\infty$ . Soit  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  un champ de vecteurs. On définit le transporté de  $\xi$  sur  $U'$  par  $h$  comme étant le champ de vecteur  $\xi'$  sur  $U'$  défini par :

$$\xi'(h(x)) = dh_x(\xi(x))$$

où  $dh_x$  est la dérivée de  $h$  au point  $x$ , application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemple V.2.2.** Considérons le champ de vecteurs constant  $\xi(x, y) = (-1, 0)$ , défini pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  l'inversion par rapport au cercle unité, c'est-à-dire :

$$h(x, y) = \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}$$

et calculons le transporté de  $\xi|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$  par  $h$ . Notons que l'on a l'habitude, pour des raisons typographiques, d'écrire les champ de vecteurs comme vecteurs ligne, alors qu'il faut les écrire comme vecteurs colonne, notamment lorsqu'il faut les multiplier par la matrice jacobienne d'un difféomorphisme pour calculer son transporté :

$$dh_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}, \quad \xi'(h(x, y)) = dh_{(x,y)} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^2 - h_2^2 \\ 2h_1 h_2 \end{pmatrix}$$

et en fin de compte  $\xi'(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ . Si on utilise l'écriture complexe, en posant  $w = u + iv$ , on a que  $\xi'(w) = w^2$ . Ce calcul va jouer un rôle important dans la preuve du théorème de Poincaré V.2.6 un peu plus loin.

Une singularité ou point d'équilibre d'un champ de vecteurs  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un point  $x_0 \in U$  où  $\xi(x_0) = 0$ . On dit qu'il est isolé s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $x_0$  est le seul point singulier de  $\xi$  dans la boule fermée  $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$ .

**Définition V.2.3.** Soit  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  un champ de vecteurs et soit  $x_0 \in U$ . Supposons qu'il existe  $r > 0$  tel que  $\overline{B}(x_0, r) \subset U$  et que  $\xi(x) \neq 0$  si  $x \neq x_0$  (autrement dit, le seul point singulier éventuel de  $\xi$  dans  $\overline{B}(x_0, r)$  est  $x_0$ ). Définissons l'application  $\varphi_r : S^1 \rightarrow S^1$  par

$$\varphi_r(z) = \frac{\xi(x_0 + r \cdot z)}{\|\xi(x_0 + r \cdot z)\|}.$$

L'indice du champ  $\xi$  en  $x_0$  est défini par :

$$i(\xi, x_0, r) = d^\circ(\varphi_r).$$

**Proposition V.2.4.** Soient  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x_0 \in U$  et  $r > 0$  comme dans la définition précédente.

- (1) Si  $0 < r' \leq r$ ,  $i(\xi, x_0, r) = i(\xi, x_0, r')$ . On notera  $i(\xi, x_0)$  leur valeur commune.
- (2) Si  $\xi(x_0) \neq 0$ ,  $\forall x \in \overline{B}(x_0, r)$ , alors  $i(\xi, x_0) = 0$
- (3) Soit  $\eta : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  un autre champ de vecteur, vérifiant les mêmes hypothèses que  $\xi$  en  $x_0$ . Alors, si  $\xi$  et  $\eta$  ne sont jamais en opposition sur le cercle  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| = r\}$ , on a :

$$i(\xi, x_0) = i(\eta, x_0)$$

Précisons que pour le point 3), l'hypothèse de ne pas être en opposition signifie que quelque soit  $x$  tel que  $\|x - x_0\| = r$ , il n'existe pas de  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda < 0$ , tel que  $\xi(x) = \lambda \cdot \eta(x)$ .

*Preuve de V.2.4*

(1) On peut définir l'homotopie

$$h : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1, \quad h(z, t) = \frac{\xi(x_0 + (1-t) \cdot r \cdot z + t \cdot r' \cdot z)}{\|\xi(x_0 + (1-t) \cdot r \cdot z + t \cdot r' \cdot z)\|}$$

qui va de  $\varphi_r(z)$  vers  $\varphi_{r'}(z)$ ; ces deux applications ont donc le même degré, d'après V.1.11.

(2) Si  $\xi(x) \neq 0$  pour  $x \in \overline{B}(x_0, r)$ , la définition de  $\varphi_r$  se prolonge sans autre à  $D^2$  :

$$\overline{\varphi}_r(z) = \frac{\xi(x_0 + r \cdot z)}{\|\xi(x_0 + r \cdot z)\|}, \quad |z| \leq 1$$

et il suit alors de la proposition V.1.15 que  $d^\circ(\varphi_z) = 0$ .

(3) Si  $\xi$  et  $\eta$  ne sont jamais en opposition sur le bord de  $\overline{B}(x_0, r)$ , on peut définir l'homotopie :

$$h : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1 \quad , \quad h(z, t) = \frac{(1-t) \cdot \xi(x_0 + r \cdot z) + t \cdot \eta(x_0 + r \cdot z)}{\|(1-t) \cdot \xi(x_0 + r \cdot z) + t \cdot \eta(x_0 + r \cdot z)\|} \quad .$$

En effet, le seul danger est que le dénominateur s'annule; mais si tel était le cas pour un  $t \in ]0, 1[$ , on aurait

$$(1-t) \cdot (\xi(x_0 + r \cdot z)) + t \cdot (\eta(x_0 + r \cdot z)) = 0 \Rightarrow \xi(x_0 + r \cdot z) = - \underbrace{\frac{t}{1-t}}_{<0} \cdot \eta(x_0 + r \cdot z)$$

contredisant l'hypothèse que ces deux champs de vecteurs ne sont pas en opposition sur le bord de  $\overline{B}(x_0, r)$ . Comme  $h(z, t)$  est une homotopie de  $\varphi_{r,\xi}$  vers  $\varphi_{r,\eta}$ , on en déduit que  $i(\xi, x_0) = d^\circ(\varphi_{r,\xi}) = d^\circ(\varphi_{r,\eta}) = i(\eta, x_0)$ .  
q.e.d.

### Exemples V.2.5.

- (1) Posons  $\xi(x, y) = (x, y)$ ; alors  $\varphi_{1,\xi}(z) = z$ , donc  $i(\xi, (0, 0)) = 1$ .
- (2) Si on prend  $\xi(x, y) = (-x, -y)$ ,  $\varphi_{1,\xi}(z) = -z$ . Or les applications  $z$  et  $-z$  du cercle  $S^1$  dans lui-même sont homotopes par l'homotopie  $h(z, t) = e^{i\pi \cdot t} z$ , donc elles ont même degré, ce qui fait que  $i(\xi, (0, 0)) = 1$  aussi.
- (3) Si on prend  $\xi(x, y) = (x, -y)$ ,  $\varphi_{1,\xi}(z) = \bar{z} = \frac{1}{z}$ , qui est de degré  $-1$  (voir V.1.6(2)). Donc  $i(\xi, (0, 0)) = -1$ .
- (4) Si  $\xi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ , son indice en  $(0, 0)$  vaut 2, puisque ce champs peut s'écrire  $\xi(z) = z^2$ , où  $z = x + iy$ .

**Champs de vecteurs sur la sphère** Soit  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  la sphère standard de dimension 3. L'espace tangent à la sphère en un point  $P = (x, y, z)$  est :

$$T_P(S^2) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w = 0\}$$

c'est-à-dire l'espace orthogonal au vecteur  $(x, y, z)$ . Un champ de vecteurs sur la sphère est une application continue  $\xi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que  $\xi(P) \in T_P(S^2)$ , ce qui revient à dire que  $\xi(P)$  doit être orthogonal à  $P$ .

Si  $U \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert et  $\varphi : U \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$  est une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , qui est une bijection sur un ouvert de  $S^2$ , et dont la dérivée est injective en tout point, on dit que  $\varphi$  est une *carte* sur la sphère. Dans ce cas, si  $\varphi(u, v) = P$ , l'espace tangent  $T_P(S^2)$  est égal à l'image de la dérivée de  $\varphi$  au point  $(u, v)$ , et un champ de vecteur  $\xi$  sur la sphère peut être transposé par  $\varphi$  en un champ de vecteurs  $\xi_\varphi$  sur  $U$  en posant :

$$\xi_\varphi(u, v) = d\varphi_{(u,v)}^{-1}(\xi(P)) \quad .$$

Dans le cas de la sphère, on a défini dans III.4.15 la projection stéréographique  $\sigma_N$  depuis le pôle nord  $N = (0, 0, 1)$ , en associant à  $P \in S^2 \setminus \{N\}$  l'intersection de la droite par  $N$  et  $P$  avec le plan horizontal  $z = 0$  (voir figure III.2); elle s'écrit :

$$\sigma_N : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \sigma_N(x, y, z) = \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

Son inverse est une carte sur  $S^2$ , d'image  $S^2 \setminus \{N\}$  :

$$\sigma_N^{-1}(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 1} \right) \quad .$$

De manière analogue, on peut définir la projection stéréographique depuis le pôle sud  $S = (0, 0, -1)$  en associant à tout  $P \in S^2 \setminus \{S\}$  l'intersection de la droite par  $P$  et  $S$  avec le plan  $z = 0$ ; elle peut s'écrire en remplaçant  $z$  par  $-z$  dans l'expression de  $\sigma_N$  :

$$\sigma_S : S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \sigma_S(x, y, z) = \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right)$$

et son inverse s'écrit :

$$\sigma_N^{-1}(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) .$$

Ces projections stéréographiques vont être utilisées dans la preuve du théorème qui suit.

**Théorème V.2.6.** *Tout champ de vecteurs sur  $S^2$  doit s'annuler quelque part.*

*Preuve:* Soit  $\xi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un champ de vecteurs et supposons que  $\xi(S) \neq 0$ . Après rotation autour de l'axe  $OZ$  et division de  $\xi$  par  $-\frac{1}{2} \|\xi(S)\|$ , on peut supposer que  $\xi(S) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Appelons  $\xi_N$  le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$  qui est le transformé de  $\xi$  par  $\sigma_N$  :

$$\xi_N(\sigma_N(P)) = d\sigma_N(\xi(P)) \quad , \quad P = (x, y, z) \in S^2 .$$

La dérivée de  $\sigma_N$  au point  $(x, y, z)$  vaut :

$$(d\sigma_N)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-z} & 0 & \frac{x}{(1-z)^2} \\ 0 & \frac{1}{1-z} & \frac{y}{(1-z)^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{et donc } \xi_N(0, 0) = (d\sigma_N)_{(0,0,-1)}(\xi(S)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant le transformé  $\xi_S$  de  $\xi$  par  $\sigma_S$ . Pour voir comment passer de  $\xi_N$  à  $\xi_S$ , considérons la composition :

$$h(u, v) = \sigma_S \circ \sigma_N^{-1}(u, v) : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

qui a pour expression

$$h(u, v) = \left( \frac{\frac{2u}{u^2+v^2+1}}{1 + \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}}, \frac{\frac{2v}{u^2+v^2+1}}{1 + \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}} \right) = \left( \frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2} \right) ;$$

on voit que  $h$  est l'inversion par rapport au cercle unité. On peut aussi s'en convaincre à l'aide de la figure V.8 : on voit que  $\alpha'' = \frac{1}{2} \text{arc}(NP)$ ,  $\beta = \frac{1}{2} \text{arc}(PS)$ , donc  $\alpha'' + \beta = \frac{\pi}{2}$ ; comme  $\alpha' + \beta = \frac{\pi}{2}$  aussi, on voit que  $\alpha' = \alpha''$ , et par le théorème de Thalès  $\frac{a}{1} = \frac{1}{b}$ , soit  $a \cdot b = 1$ .

On peut voir  $\xi_S|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$  comme le transformé de  $\xi_N|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$  par  $h = \sigma_S \circ \sigma_N^{-1}$ ; en effet :

$$d(\sigma_S \circ \sigma_N^{-1})_{\sigma_N(P)}(\xi_N(\sigma_N(P))) = (d\sigma_S)_P \circ (d\sigma_N)_{\sigma_N(P)}^{-1} \circ (d\sigma_N)_P(\xi(P)) = (d\sigma_S)_P(\xi(P)) = \xi_S(\sigma_S(P)) .$$

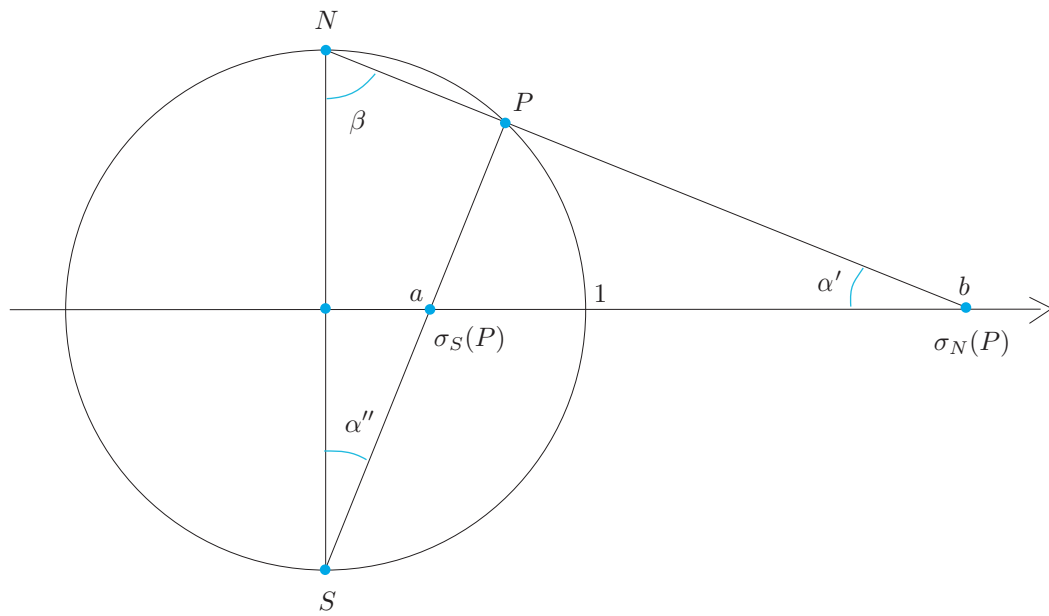
Or  $\xi_N(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc, pour  $r > 0$  assez petit, si  $(u, v)$  appartient à un cercle de rayon  $r$  centré en  $(0, 0)$ ,

$\xi_N$  et le champ de vecteurs constant  $\gamma_N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ne seront pas en opposition. Il en sera alors de même

pour les transformés de  $\gamma$  et  $\xi_N$  par  $h$ , ce qui donne les champs de vecteurs  $\gamma'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} \\ \frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2} \end{pmatrix}$  et  $\xi_S$

respectivement. On a vu (exemple V.2.54) que l'indice de  $\gamma'$  sur n'importe quel cercle centré en  $(0, 0)$  vaut 2, et il suit alors de V.2.4(3) que l'indice de  $\xi_S$  sur le cercle de rayon  $\frac{1}{r}$  vaut aussi 2, donc il suit de V.2.4(2) que  $\xi_S$  doit s'annuler quelque part dans le disque de rayon  $\frac{1}{r}$  centré en  $(0, 0)$ , et donc que  $\xi$  doit s'annuler quelque part sur  $S^2$ .

*q. e. d.*

Figure V.8: Passage de  $\sigma_N(P)$  à  $\sigma_S(P)$





# Chapitre VI

## Géométrie différentielle des courbes

*Sommaire.*<sup>1</sup> La géométrie différentielle étudie les propriétés locales et globales des courbes, surfaces (ainsi que leurs analogues en dimension supérieure), qui sont liées à la métrique de l'espace ambiant et aux dérivées des équations locales ou des paramétrisations locales des objets considérés. Ainsi, l'existence de cercles osculateurs est une propriété locale des courbes planes régulières (théorème VI.3.1); le théorème des quatre sommets exprime une propriété globale des courbes planes fermées simples (théorème VI.3.16). Les méthodes utilisées reposent sur le calcul différentiel et intégral.

Ouvrages de référence : [1], [4].

**Préliminaires** Nous utiliserons toujours la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ . Le produit scalaire de deux vecteurs  $v = (v_1, \dots, v_n)$  et  $w = (w_1, \dots, w_n)$  s'écrit :

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

et alors  $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ .

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert, est une fonction dérivable d'une variable, on écrit sa dérivée :

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Si  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont deux fonctions dérivables, on a :

$$\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle' = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \cdot \beta_i(t) \right)' = \sum_{i=1}^n \alpha_i'(t) \cdot \beta_i(t) + \alpha_i(t) \cdot \beta_i'(t) = \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle.$$

### VI.1 Courbes régulières

**Définition VI.1.1.** Une courbe paramétrée est une application  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , où  $I = ]a, b[$  est un intervalle ouvert,  $a \geq -\infty$ ,  $b \leq +\infty$ . On note  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ , et  $t$  est appelé *paramètre*. La dérivée  $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \dots, \alpha_n'(t))$  est appelé *vecteur vitesse* et l'image  $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^n$  la *trace* de la courbe.

Si  $n = 3$ , on dit que  $\alpha$  est une *courbe dans l'espace*. Si  $n = 2$ , on dit que  $\alpha$  est une *courbe plane*.

Si  $c, d \in I$ ,  $c < d$ , on appelle  $\alpha([c, d])$  l'arc de la courbe compris entre  $\alpha(c)$  et  $\alpha(d)$ .

#### Exemples VI.1.2.

- (1) Le cercle peut être paramétré par  $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Son vecteur vitesse est  $(-\sin(t), \cos(t))$ .
- (2) L'hélice est la courbe de l'espace paramétrée par  $t \mapsto (a \cdot \cos(t), a \cdot \sin(t), b \cdot t)$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Son vecteur vitesse est  $(-a \sin(t), a \cos(t), b)$ .

---

<sup>1</sup>Version du 8 décembre 2006, à 14h. 07

- (3) La courbe plane paramétrée par  $t \mapsto (t^2, t^3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , est appelée *parabole semi-cubique*. Son vecteur vitesse  $(2t, 3t^2)$  s'annule pour  $t = 0$ .
- (4) La courbe plane  $\alpha(t) = (t^2, t^3 - t)$  possède un *point double* : le point  $(1, 0)$  est l'image de  $t = 1$  et  $t = -1$ . Son vecteur vitesse  $(2t, 3t^2 - 1)$  ne s'annule jamais.
- (5)  $\alpha(t) = (t, t^2, \dots, t^n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une courbe dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition VI.1.3.** On dit que la courbe paramétrique  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est *régulière* si son vecteur vitesse ne s'annule jamais; en symboles :  $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$ .

Dans les exemples VI.1.2, (1), (2), (4), (5) sont des courbes régulières; la parabole semi-cubique (3) par contre n'est pas une courbe régulière.

**Définition VI.1.4.** Soient  $I$  et  $J$  des intervalles ouverts. On dit que l'application  $h : J \rightarrow I$  est un difféomorphisme si  $h$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dont l'inverse est aussi  $\mathcal{C}^\infty$ ; si c'est le cas,  $h'(u) \neq 0, \forall u \in J$ , car  $h^{-1}(h(u)) = u \Rightarrow (h^{-1})'(h(u)) \cdot h'(u) = 1$ .

Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrique et soit  $h : J \rightarrow I$  un difféomorphisme. Alors l'application  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\beta(u) = \alpha(h(u))$  est aussi une courbe paramétrique, qui a la même trace que  $\alpha$ . On dit que  $\beta$  est une *reparamétrisation* de  $\alpha$ .

Si  $\alpha$  est une courbe régulière, alors  $\beta$  l'est aussi, car  $\beta'(u) = \alpha'(h(u)) \cdot h'(u)$ .

Par exemple,  $\beta(u) = (\cos(\pi u), \sin(\pi u))$  est un reparamétrisation du cercle VI.1.2(1), avec  $h(u) = \pi \cdot u$ . Par contre,  $\gamma(u) = (\cos(u^3), \sin(u^3))$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , n'est pas une reparamétrisation du cercle; en effet, ce n'est pas une courbe régulière, car  $\gamma'(0) = (0, 0)$ .

**Définition VI.1.5.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrique et  $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  une reparamétrisation. On dit que  $\alpha$  et  $\beta$  définissent la *même orientation* si  $h'(u) > 0, \forall u \in J$ . Sinon on dit qu'elles définissent des orientations opposées.

Par exemple, si  $\alpha(t) : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une courbe paramétrique,  $\alpha(-t) : ]-b, -a[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une reparamétrisation avec orientation opposée.

### VI.1.1 Longueur d'arc

**Définition VI.1.6.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrique, et soient  $t_0, t \in I$ . La longueur de l'arc joignant  $\alpha(t_0)$  à  $\alpha(t)$  est défini comme la valeur de l'intégrale suivante :

$$(1-1) \quad \int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau$$

où on rappelle que  $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\alpha'_1(t)^2 + \alpha'_2(t)^2 + \dots + \alpha'_n(t)^2}$ . Notons que la fonction que l'on intègre dans (1-1) est positive, et donc si  $t_0 < t_1$  cette longueur est positive, sinon elle est négative.

Supposons que  $t_0 < t$ ; la définition précédente est justifié par le fait que si  $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = t$  est un partage de l'intervalle  $[t_0, t]$ , la courbe polygonale obtenue en joignant par des segments de droite  $\alpha(\tau_0)$  à  $\alpha(\tau_1)$ , puis  $\alpha(\tau_1)$  à  $\alpha(\tau_2)$ , et ainsi de suite, est une approximation de l'arc  $\alpha([t_0, t])$ , tout au moins lorsque la maille du partage  $\delta = \inf\{\Delta\tau_i, i = 1, \dots, N\}$  est suffisamment petit, où  $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ . La longueur de cette courbe polygonale vaut

$$(1-2) \quad \sum_{i=1}^N \|\alpha(\tau_i) - \alpha(\tau_{i-1})\|$$

et puisque  $\|\alpha(\tau_i) - \alpha(\tau_{i-1})\|$  est approximé par  $\|\alpha'(\tau_i)\| \Delta\tau_i$ , lorsque la maille  $\delta$  tend vers zéro, la somme (1-2) tend vers (1-1).

**Proposition VI.1.7.** La longueur d'un arc ne change pas après reparamétrisation avec même orientation; sinon, elle change de signe.

*Preuve:* Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrique et soit  $h : J \rightarrow I$  un difféomorphisme et  $\beta(u) = \alpha(h(u))$  la reparamétrisation correspondante. Soient  $t_0, t_1 \in I$ ,  $u_0 = h^{-1}(t_0)$ ,  $u_1 = h^{-1}(t_1)$ . La formule de changement de variable dans les intégrales nous donne :

$$\int_{u_0}^{u_1} \|\beta'(u)\| du = \int_{u_0}^{u_1} \|\alpha'(h(u))\| \cdot |h'(u)| du = \pm \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt$$

où  $\pm$  est le signe de  $h'(u)$ .

*q.e.d.*

Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe régulière et fixons  $t_0 \in I$ . Posons :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau$$

ce qui représente la longueur de l'arc joignant  $\alpha(t_0)$  à  $\alpha(t)$ , comptée positivement si  $t > t_0$ , négativement sinon. Remarquons que

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\| \neq 0$$

donc  $s(t)$  définit un difféomorphisme de  $I$  sur un certain intervalle ouvert  $J$ . On peut alors reparamétriser la courbe en posant :

$$\beta(s(t)) = \alpha(t) \quad ;$$

on appelle  $\beta(s)$  paramétrisation par la longueur d'arc. Elle jouit des propriétés suivantes :

**Proposition VI.1.8.** *Soit  $\beta(s)$  une paramétrisation par la longueur d'arc d'une courbe régulière. Alors :*

$$(1) \quad \|\beta'(s)\| = 1$$

$$(2) \quad \langle \beta'(s), \beta''(s) \rangle = 0$$

*Preuve:* En dérivant la relation  $\beta(s(t)) = \alpha(t)$  par rapport à  $t$  on trouve

$$\beta'(s(t)) \cdot s'(t) = \alpha'(t)$$

et puisque  $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ , on en déduit que  $\|\beta'(s)\| = 1$ . Cette égalité peut aussi s'écrire  $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = 1$ , et en dérivant cette égalité par rapport à  $s$  on obtient que  $\langle \beta'(s), \beta''(s) \rangle = 0$ .

*q.e.d.*

## VI.2 Ordre de contact

On aimerait exprimer le fait que deux sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  (notre cas principal : deux courbes planes) sont proches au voisinage d'un point. On peut le faire en utilisant des paramétrisations et équations locales et leur dérivées.

**Définition VI.2.1.** Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $\mathcal{C}^\infty$  et  $t_0 \in ]a, b[$ . On dit que  $f$  s'annule à l'ordre  $m$  en  $t_0$  si :

$$f(t_0) = 0 \quad , \quad f'(t_0) = 0 \quad , \quad \dots \quad , \quad f^{m-1}(t_0) = 0 \quad , \quad f^m(t_0) \neq 0 \quad .$$

On note  $m = \mu(f, t_0)$  et on l'appelle l'ordre d'annulation de  $f$  en  $t_0$ .

Notons que si  $\mu(f, t_0) = 0$  cela veut dire que  $f$  ne s'annule pas en  $t_0$ .

**Définition VI.2.2.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe régulière,  $t_0 \in I$ ,  $P = \alpha(t_0)$ . Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $U \ni P$ , et  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $F(P) = 0$ ,  $dF_P \neq 0$ , de sorte que  $F$  définit une hypersurface contenant  $P$ , régulière en ce point. Quitte à remplacer  $I$  par un intervalle plus petit de la forme  $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ , on peut supposer que  $\alpha(I) \subset U$ . L'ordre de contact de  $\alpha$  et  $F$  au point  $P$ , noté  $\mathfrak{o}(F, \alpha, P)$ , est défini par :

$$\mathfrak{o}(F, \alpha, t_0) = \mu(F \circ \alpha, t_0) - 1 \quad .$$

En d'autres termes, l'ordre de contact au point  $\alpha(t_0)$  de la courbe paramétrée par  $\alpha$  et de l'hypersurface d'équation  $F = 0$  est un de moins que l'ordre d'annulation au point  $t_0$  de la composition de la paramétrisation de la courbe avec l'équation de l'hypersurface. Notons que cet ordre de contact ne dépend que des valeurs de  $\alpha$  près de  $t_0$  et de  $F$  près de  $\alpha(t_0)$ .

**Exemple VI.2.3.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrique plane régulière,  $t_0 \in I$ . Les droites par  $P = \alpha(t_0)$  ont pour équation :

$$F(v) = \langle v - P, \nu \rangle = 0$$

où  $\nu$  est un vecteur perpendiculaire à la droite. On a :

$$(F \circ \alpha)'_{t_0} = \langle \alpha'(t_0), \nu \rangle$$

donc si on veut que  $\mathfrak{o}(F, \alpha, P) \geq 1$ , il faut choisir  $\nu$  perpendiculaire au vecteur vitesse  $\alpha'(t_0)$  et on obtient alors la droite tangente à la courbe en  $P$ . Par exemple, si  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  désigne la rotation de  $\frac{\pi}{2}$ , on peut prendre  $\nu = \rho(\alpha'(t_0)) = (-\alpha'_2(t_0), \alpha'_1(t_0))$ .

**Remarque VI.2.4.** Dans la situation de la définition VI.2.2, supposons que  $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$  soit un ouvert contenant  $\alpha(t_0)$  et soit  $h : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difféomorphisme sur un ouvert  $V'$  de  $\mathbb{R}^n$ . Quitte à restreindre  $I$  on peut supposer que  $\alpha(I) \subset V$ ; alors l'image par  $h$  de la courbe  $\alpha$  est paramétrée par  $\beta(t) = h \circ \alpha(t)$ . L'image par  $h$  de la partie de l'hypersurface se trouvant dans  $V$  a pour équation  $G = F \circ h^{-1}$ . La situation est représentée sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{\alpha} & V & \xrightarrow{F|_V} & \mathbb{R} \\ & \searrow \beta = h \circ \alpha & \downarrow h & \nearrow G = h^{-1} \circ F & \\ & & V' & & \end{array}$$

Par conséquent

$$G \circ \beta = F \circ h^{-1} \circ h \circ \alpha = F \circ \alpha$$

et on en déduit que

$$\mathfrak{o}(F, \alpha, t_0) = \mathfrak{o}(G, \beta, t_0)$$

autrement dit, l'ordre de contact est invariant par difféomorphisme local au voisinage de  $\alpha(t_0)$ .

L'ordre de contact d'une courbe et une hypersurface en un point  $P$  nous renseigne comment elles sont situées l'une par rapport à l'autre au voisinage du point  $P$ .

**Proposition VI.2.5.** Si l'ordre de contact de la courbe paramétrique régulière  $\alpha$  et de l'hypersurface d'équation locale  $F$  ont un ordre de contact exactement  $k$  au point  $P = \alpha(t_0)$ , alors :

- (1) Si  $k$  est pair, la courbe  $\alpha$  restreinte à un voisinage de  $t_0$  traverse l'hypersurface au point  $P$ .
- (2) Si  $k$  est impair, la courbe  $\alpha$  restreinte à un voisinage de  $t_0$  est d'un même côté de l'hypersurface.

*Preuve:* Les deux côtés de l'hypersurface sont définis au voisinage de  $P$  par  $F(x) \geq 0$  et  $F(x) \leq 0$ . Si l'ordre de contact de  $F$  et  $\alpha$  en  $P = \alpha(t_0)$  est exactement  $k$ , alors on peut écrire :

$$F(\alpha(t)) = a_{k+1} \cdot (t - t_0)^{k+1} + r(t - t_0)$$

où  $a_{k+1} = \frac{(F \circ \alpha)^{(k+1)}}{(k+1)!} \neq 0$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{r(t - t_0)}{(t - t_0)^{k+1}} = 0$ , ce qui fait que le signe de  $F(\alpha(t))$  est le même que le signe de  $a_{k+1} \cdot t^{k+1}$  pour  $t$  suffisamment proche de  $t_0$ . Il en suit que si  $k$  est pair,  $F(\alpha(t))$  change de signe au voisinage de  $t = t_0$ , donc la courbe  $\alpha$  traverse l'hypersurface au point  $P$  lorsque  $t$  varie au voisinage de  $t_0$ . Par contre, si  $k$  est impair,  $F(\alpha(t))$  ne change pas de signe, donc  $\alpha$  ne traverse pas l'hypersurface pour  $t$  proche de  $t_0$ .

*q.e.d.*

Nous serons concernés ici surtout par le contact d'ordre 1 et 2 pour les courbes planes. Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe plane régulière et  $P = \alpha(t_0)$ , l'image d'un intervalle  $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$  admet une équation locale régulière, c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \ni P$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , telle que  $dF_P \neq 0$  et dont les zéros décrivent  $\alpha(]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[)$ . L'exemple de la courbe  $\alpha(t) = (t^2, t^3 - t)$  et  $t_0 = -1$  montre pourquoi on doit se restreindre à un petit intervalle autour de  $t_0$  :  $\alpha(-1) = \alpha(1) = (1, 0)$ , et en ce point la courbe présente deux branches; il n'est pas possible de trouver une équation régulière pour toute l'image de  $\alpha$ .

**Proposition VI.2.6.** *Soient  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  deux courbes régulières et supposons que  $\alpha(t_0) = \beta(u_0) = P$ . Soit  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une équation locale de  $\alpha(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[)$ , pour un certain  $\varepsilon > 0$ . Alors*

(1)

$$\mathfrak{o}(F, \beta, u_0) \geq 1 \iff \exists \lambda \text{ tel que } \beta'(u_0) = \lambda \cdot \alpha'(t_0)$$

(2)

$$\mathfrak{o}(F, \beta, u_0) \geq 2 \iff \exists \lambda, \mu \text{ telles que } \beta'(u_0) = \lambda \cdot \alpha'(t_0) \text{ et } \beta''(u_0) = \lambda^2 \cdot \alpha''(t_0) + \mu \cdot \alpha'(t_0)$$

*Preuve:* Puisque  $F(\alpha(t)) = 0$ , on a  $dF_P(\alpha'(t_0)) = 0$ . Comme  $dF_P \neq 0$ , le noyau de l'application linéaire  $dF_P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est la droite engendrée par le vecteur  $\alpha'(t_0)$ . On en déduit que

$$(2-1) \quad dF_P(v) = 0 \Rightarrow \exists \lambda \text{ tel que } v = \lambda \cdot \alpha'(t_0)$$

Pour (1), si  $\mathfrak{o}(F, \beta, u_0) \geq 1$ , alors  $dF_P(\beta'(u_0)) = 0$ , donc il suit de (2-1) qu'il existe  $\lambda$  tel que  $\beta'(u_0) = \lambda \cdot \alpha'(t_0)$ .

Pour (2), on sait déjà par (1) qu'il existe  $\lambda$  tel que  $\beta'(u_0) = \lambda \cdot \alpha'(t_0)$ . Pour calculer la dérivée deuxième de  $F \circ \alpha$ , il faut dériver  $(F \circ \alpha)'(t) = \sum_{i=1,2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\alpha(t)) \cdot \alpha'_i(t)$ , et c'est pareil pour  $F \circ \beta$ . Il vient :

$$(2-2) \quad \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\alpha(t_0)) \alpha'_i(t_0) \alpha'_j(t_0) + \sum_{i=1,2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\alpha(t_0)) \alpha''_i(t_0) = 0$$

$$(2-3) \quad \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\beta(u_0)) \beta'_i(u_0) \beta'_j(u_0) + \sum_{i=1,2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\beta(u_0)) \beta''_i(u_0) = 0$$

Si on calcule (2-3) -  $\lambda^2 \cdot$  (2-2) on trouve :

$$\sum_{i=1,2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\alpha(t_0)) (\beta''_i(u_0) - \lambda^2 \cdot \alpha''_i(t_0)) = dF_P(\beta''(u_0) - \lambda^2 \cdot \alpha''(t_0)) = 0$$

et en appliquant (2-1) on en déduit qu'il existe  $\mu$  tel que  $\beta''(u_0) - \lambda^2 \cdot \alpha''(t_0) = \mu \cdot \alpha'(t_0)$ .

*q.e.d.*

On dira que l'ordre de contact des deux courbes paramétriques  $\alpha$  et  $\beta$  est au moins 1, respectivement au moins 2, si la condition (1), respectivement (2), de la proposition précédente est satisfaite. Remarquons que ces conditions sont symétriques en  $\alpha$  et  $\beta$  (ce qui est rassurant!) : si  $\beta(u_0) = \lambda \cdot \alpha'(t_0)$ , nécessairement  $\lambda \neq 0$ , car  $\beta'(u_0) \neq 0$ , donc on peut aussi écrire  $\alpha'(t_0) = \frac{1}{\lambda} \beta'(u_0)$ . De la condition (2) on déduit aussi que

$$\alpha''(t_0) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot \beta''(u_0) - \frac{\mu}{\lambda} \cdot \beta'(u_0) \quad .$$

**Corollaire VI.2.7.** *L'ordre de contact de  $\alpha$  et  $\beta$  au point  $\alpha(t_0) = \beta(u_0)$  est au moins  $k$ , où  $1 \leq k \leq 2$ , si et seulement si il existe une reparamétrisation  $\gamma = \alpha \circ h$  de  $\alpha$  au voisinage de  $t_0$  telle que  $h(t_0) = t_0$  et*

$$\beta^{(h)}(u_0) = \gamma^{(h)}(t_0) \quad \forall h \leq k, h \geq 1 \quad .$$

*En particulier, la condition d'avoir un ordre de contact au moins  $k$  est indépendante de la paramétrisation .*

On s'est limité ici au contact d'ordre au plus 2 pour simplifier, mais le résultat est valable pour tout ordre de contact.

*Preuve:* S'il existe une reparamétrisation  $\gamma(u) = \alpha(h(t))$  comme énoncé, en dérivant on obtient :

$$\beta'(u) = \gamma'(t) = (\alpha \circ t)'(t) = \alpha'(h(t)) \cdot h'(t_0)$$

et en posant  $\lambda = h'(t_0)$ , on voit que  $\beta'(t_0) = \alpha'(t_0 \cdot \lambda)$ , donc d'après VI.2.6 l'ordre de contact de  $\alpha$  et  $\beta$  en  $\alpha(t_0) = \beta(u_0)$  est au moins 1. Si  $k = 2$ , on dérive encore une fois :

$$\beta''(u_0) = \gamma''(t_0) = \alpha''(t_0) \cdot (h'(t_0))^2 + \alpha'(t_0) \cdot h''(t_0)$$

et en posant  $\mu = h''(t_0)$  on voit que  $\beta''(u_0) = \lambda^2 \cdot \alpha''(t_0) + \mu \cdot \alpha'(t_0)$ ; de nouveau par VI.2.6 on voit que le contact est d'ordre au moins 2.

Pour la réciproque, dans le cas  $k = 2$ , on sait d'après VI.2.6 qu'il existe  $\lambda$  et  $\mu$  telles que

$$\beta'(u_0) = \lambda \cdot \alpha'(t_0) \quad , \quad \beta''(u_0) = \lambda^2 \cdot \alpha''(t_0) + \mu \cdot \alpha'(t_0) \quad .$$

On pose alors :

$$h(t) = t_0 + \lambda \cdot (t - t_0) + \mu \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \alpha' \left( t_0 + \lambda \cdot (t - t_0) + \mu \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2} \right) \cdot (\lambda + \mu(t - t_0)) \\ \gamma''(t) &= \alpha'' \left( t_0 + \lambda \cdot (t - t_0) + \mu \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2} \right) \cdot \lambda \cdot (\lambda + \mu(t - t_0)) + \alpha' \left( t_0 + \lambda \cdot (t - t_0) + \mu \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2} \right) \cdot \mu \end{aligned}$$

d'où il suit que

$$\begin{aligned} \beta'(u_0) &= \lambda \cdot \alpha'(t_0) = \gamma'(t_0) \\ \beta''(u_0) &= \lambda^2 \cdot \alpha''(t_0) + \mu \cdot \alpha'(t_0) = \gamma''(t_0) \end{aligned}$$

Le cas  $k = 1$  s'obtient en prenant simplement  $h(t) = \lambda(t - t_0)$ .

*q.e.d.*

## VI.3 Courbes planes : cercles osculateurs, courbure, points d'inflexion

### VI.3.1 Cercles osculateurs

Voici l'énoncé qui établit l'existence de cercles osculateurs en un point  $x_0$  d'une courbe régulière, pourvu que la première et deuxième dérivée en ce point soient linéairement indépendantes. Ces cercles sont limite de cercles passant par trois points proches de  $x_0$  et sont caractérisés par le fait qu'ils ont un ordre de contact au moins 2 avec la courbe. La condition d'indépendance linéaire des deux premières dérivées exprime que la courbe ne doit pas être trop plate au voisinage de  $x_0$ ; on verra (proposition VI.3.10) que cela équivaut à dire que  $x_0$  n'est pas un point d'inflexion. Dans un tel point, on peut considérer que le cercle osculateur dégénère en la droite tangente à la courbe en  $x_0$ .

**Théorème VI.3.1.** *Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe plane régulière et soit  $x_0 = \alpha(t_0)$  un point de cette courbe. Supposons que  $\alpha'(t_0)$  et  $\alpha''(t_0)$  soient linéairement indépendantes. Alors, pour  $t_1, t_2$  suffisamment proches de  $t_0$ , avec  $t_0, t_1$  et  $t_2$  distincts, les 3 points  $x_0 = \alpha(t_0)$ ,  $x_1 = \alpha(t_1)$  et  $x_2 = \alpha(t_2)$  ne sont pas alignés, et déterminent un unique cercle passant par  $x_0, x_1$  et  $x_2$ . Appelons  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la rotation d'angle  $\pi/2$  :*

$\rho(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$ . Si  $t_1$  et  $t_2$  tendent vers  $t_0$ , les cercles par  $x_0, x_1$  et  $x_2$  ont pour limite le cercle de centre  $C(t_0)$  et rayon  $r(t_0)$ , qui sont donnés par :

$$(3-1) \quad C(t_0) = \alpha(t_0) + \frac{\langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle}{\langle \rho(\alpha'(t_0)), \alpha''(t_0) \rangle} \cdot \rho(\alpha'(t_0))$$

$$(3-2) \quad r(t_0) = \frac{\|\alpha'(t_0)\|^3}{|\langle \rho(\alpha'(t_0)), \alpha''(t_0) \rangle|} \quad .$$

Ce cercle est appelé cercle osculateur à la courbe au point  $\alpha(t_0)$ .

Notons que  $\langle \rho(\alpha'(t_0)), \alpha''(t_0) \rangle = -\alpha_2'(t_0)\alpha_1''(t_0) + \alpha_1'(t_0)\alpha_2''(t_0)$  et que cette expression est non nulle du fait que  $\alpha'(t_0)$  et  $\alpha''(t_0)$  sont linéairement indépendantes.

*Preuve:* La représentation paramétrique de la médiatrice de  $x_0, x_1$  s'écrit :

$$(3-3) \quad \lambda \mapsto \frac{x_0 + x_1}{2} + \lambda \cdot \rho(x_1 - x_0)$$

et les points  $x$  de la médiatrice de  $x_1, x_2$  satisfont équation :

$$(3-4) \quad \langle x - \frac{x_1 + x_2}{2}, x_2 - x_1 \rangle = 0 \quad .$$

En remplaçant (3-3) dans (3-4) on obtient :

$$(3-5) \quad \langle \frac{x_0 + x_1}{2} + \lambda \cdot \rho(x_1 - x_0) - \frac{x_1 + x_2}{2}, x_2 - x_1 \rangle = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\langle x_2 - x_0, x_2 - x_1 \rangle}{2\langle \rho(x_1 - x_0), x_2 - x_1 \rangle}$$

L'intersection de ces deux médiatrice est donc donnée par la formule :

$$(3-6) \quad C(t_0, t_1, t_2) = \frac{x_0 + x_1}{2} + \rho(x_1 - x_0) \cdot \frac{\langle x_2 - x_0, x_2 - x_1 \rangle}{2\langle \rho(x_1 - x_0), x_2 - x_1 \rangle}$$

ceci à condition que le dénominateur  $\langle \rho(x_1 - x_0), x_2 - x_1 \rangle$  ne soit pas nul.

En divisant en haut et en bas par  $(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)$  il vient :

$$(3-7) \quad \rho(x_1 - x_0) \cdot \frac{\langle x_2 - x_0, x_2 - x_1 \rangle}{2\langle \rho(x_1 - x_0), x_2 - x_1 \rangle} = \rho\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}\right) \cdot \frac{\langle \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_0}, \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \rangle}{2\langle \rho(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}), \frac{x_2 - x_1}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)} \rangle}$$

On va utiliser la formule suivante : si  $\varphi(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $a, b \in I$ , alors :

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_0^1 \varphi'(a + u(b - a)) \cdot (b - a) du$$

dont on peut se convaincre en remarquant que  $\varphi'(a + u(b - a)) \cdot (b - a)$  est la dérivée de  $\varphi(a + u(b - a))$  par rapport à  $u$ . Rappelons que  $x_i = \alpha(t_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ . En écrivant :

$$\alpha(t_i) - \alpha(t_0) = \int_0^1 \alpha'(t_0 + u(t_i - t_0)) \cdot (t_i - t_0) du, i = 1, 2 \quad , \quad \alpha(t_2) - \alpha(t_1) = \int_0^1 \alpha'(t_1 + u(t_2 - t_1)) \cdot (t_2 - t_1) du$$

on voit que

$$\lim_{t_i \rightarrow t_0} \frac{x_i - x_0}{t_i - t_0} = \alpha'(t_0), i = 1, 2 \quad , \quad \lim_{t_1, t_2 \rightarrow t_0} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \alpha'(t_0) \quad .$$

Pour calculer la limite de  $2\langle \rho(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}), \frac{x_2 - x_1}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)} \rangle$ , remarquons que  $\langle \rho(x_1 - x_0), x_1 - x_0 \rangle = 0$ , et donc cela revient au même de calculer la limite de :

$$E(t_0, t_1, t_2) = E = 2\langle \rho\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}\right), \frac{x_2 - x_1}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)} - \frac{x_0 - x_1}{(t_0 - t_1)(t_2 - t_0)} \rangle \quad .$$

Posons

$$F = \frac{x_2 - x_1}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)} - \frac{x_0 - x_1}{(t_0 - t_1)(t_2 - t_0)} = \frac{1}{t_2 - t_0} \cdot \left( \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} - \frac{x_0 - x_1}{t_0 - t_1} \right) .$$

Alors

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_0^1 \alpha'(t_1 + u(t_2 - t_1))(t_2 - t_1) du = \int_0^1 \alpha'(t_1 + u(t_2 - t_1)) du$$

et de même :

$$\frac{x_0 - x_1}{t_0 - t_1} = \frac{1}{t_0 - t_1} \cdot \int_0^1 \alpha'(t_1 + u(t_0 - t_1))(t_0 - t_1) du = \int_0^1 \alpha'(t_1 + u(t_0 - t_1)) du$$

donc

$$F = \frac{1}{t_2 - t_0} \int_0^1 (\alpha'(t_1 + u(t_2 - t_1)) - \alpha'(t_1 + u(t_0 - t_1))) du .$$

Si on pose  $\psi(t) = \alpha'(t_1 + u(t - t_1))$ , on a  $F = \frac{\psi(t_2) - \psi(t_0)}{t_2 - t_0} = \int_0^1 \psi'(t_0 + v(t_2 - t_0)) dv$ , d'où :

$$F = \int_0^1 \int_0^1 \alpha''(t_1 + u(t_0 + v(t_2 - t_0) - t_1)) \cdot u dv du$$

et donc

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow t_0} F = \int_0^1 \int_0^1 \alpha''(t_0) u dv du = \left( \int_0^1 \int_0^1 u dv du \right) \cdot \alpha''(t_0) = \frac{1}{2} \alpha''(t_0) .$$

On en déduit que

$$\lim_{t_0, t_1 \rightarrow t_0} E = \langle \rho(\alpha'(t_0)) , \alpha''(t_0) \rangle$$

qui par hypothèse est non nul; il en suit que  $E$  est non nul pour  $t_1, t_2$  assez proches de  $t_0$ , ce qui implique que  $x_0, x_1$  et  $x_2$  ne sont pas alignés. Enfin, on déduit de (3-6) que

$$C(t_0) = \lim_{t_1, t_2 \rightarrow t_0} C(t_0, t_1, t_2) = \alpha(t_0) + \rho(\alpha'(t_0)) \cdot \frac{\langle \alpha'(t_0) , \alpha'(t_0) \rangle}{\langle \rho(\alpha'(t_0)) , \alpha''(t_0) \rangle}$$

qui est le centre du cercle osculateur. Son rayon est la distance du centre à  $\alpha(t_0)$ , qui vaut la norme du vecteur

$$\frac{\langle \alpha'(t_0) , \alpha'(t_0) \rangle}{\langle \rho(\alpha'(t_0)) , \alpha''(t_0) \rangle} \cdot \rho(\alpha'(t_0)) .$$

Remarquons que  $\rho(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$  et que  $\rho$  conserve la norme. Il vient donc :

$$r(t_0) = \left\| \frac{\langle \alpha'(t_0) , \alpha'(t_0) \rangle}{\langle \rho(\alpha'(t_0)) , \alpha''(t_0) \rangle} \cdot \rho(\alpha'(t_0)) \right\| = \frac{\|\alpha'(t_0)\|^2 \cdot \|\alpha'(t_0)\|}{\langle (-\alpha_2'(t_0), \alpha_1'(t_0)) , \alpha''(t_0) \rangle} = \frac{\|\alpha'(t_0)\|^3}{|-\alpha_2'(t_0)\alpha_1''(t_0) + \alpha_1'(t_0)\alpha_2''(t_0)|} .$$

*q.e.d.*

**Définition VI.3.2.** Le rayon  $r(t_0)$  du cercle osculateur est appelé *rayon de courbure* au point  $\alpha(t_0)$ , et son inverse  $k_{\pm}(t_0) = \frac{1}{r(t_0)}$  est appelé la *courbure non signée* au point  $\alpha(t_0)$ . On a donc :

$$k_{\pm}(t_0) = \frac{|-\alpha_2'(t_0)\alpha_1''(t_0) + \alpha_1'(t_0)\alpha_2''(t_0)|}{\|\alpha'(t_0)\|^3} .$$

On appelle *courbure signée* l'expression

$$k(t_0) = \frac{-\alpha_2'(t_0)\alpha_1''(t_0) + \alpha_1'(t_0)\alpha_2''(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|^3}$$

dont on remarque que c'est égal à  $k_{\pm}(t_0)$  si  $\langle (-\alpha_2'(t_0), \alpha_1'(t_0)) , \alpha''(t_0) \rangle > 0$ ,  $-k_{\pm}(t_0)$  sinon (voir figure VI.1).

On appelle *centre de courbure* le centre  $C(t_0)$  du cercle osculateur.



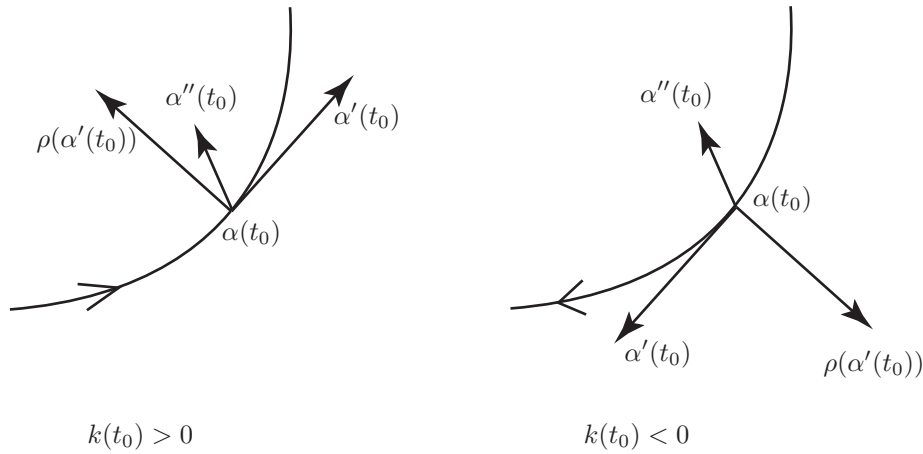


Figure VI.1: Interprétation du signe de la courbure

Remarquons que si  $t$  tend vers une valeur  $t_0$  pour laquelle  $\alpha'(t_0)$  et  $\alpha''(t_0)$  sont linéairement dépendants,  $k(t)$  tend vers zéro, et  $r = \frac{1}{k}$  tend vers l'infini.

**Proposition VI.3.3.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe régulière et supposons que  $\alpha'(t_0)$  et  $\alpha''(t_0)$  soient linéairement indépendantes. Le cercle osculateur à cette courbe en  $\alpha(t_0)$  est caractérisé par le fait que son ordre de contact avec  $\alpha$  au point  $\alpha(t_0)$  est au moins 2.

*Preuve:* Soit  $C$  le centre d'un cercle passant par  $\alpha(t_0)$ . Si on pose  $r = \|\alpha(t_0) - C\|$ , son équation s'écrit :

$$F(v) = \langle v - C, v - C \rangle - r^2 = 0 \quad .$$

Posons  $f(t) = F(\alpha(t)) = \langle \alpha(t) - C, \alpha(t) - C \rangle - r^2$ . Alors

$$f'(t) = 2\langle \alpha'(t), \alpha(t) - C \rangle \quad , \quad f''(t) = 2(\langle \alpha''(t), \alpha(t) - C \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle)$$

et pour que l'ordre de contact du cercle avec  $\alpha$  soit au moins 2 pour  $t = t_0$  on doit avoir :

$$(3-8) \quad \langle \alpha(t_0)', \alpha(t_0) - C \rangle = 0$$

$$(3-9) \quad \langle \alpha''(t_0), \alpha(t_0) - C \rangle + \langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle = 0$$

On déduit de (3-8) que  $C = \alpha(t_0) + \lambda \cdot \rho(\alpha'(t_0))$ , pour un certain scalaire  $\lambda$ . En remplaçant dans (3-9) il vient :

$$\langle \alpha''(t_0), -\lambda \cdot \rho(\alpha'(t_0)) \rangle + \langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle = 0 \quad \implies \quad \lambda = \frac{\langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle}{\langle \rho(\alpha'(t_0)), \alpha''(t_0) \rangle}$$

et on retrouve donc pour  $C$ , et donc aussi pour le rayon, les mêmes valeurs que dans le théorème VI.3.1. q.e.d.

Si on paramétrise une courbe par la longueur d'arc, on obtient des formules très simples pour déterminer le cercle osculateur, établies en premier par Euler vers 1736 :

**Théorème VI.3.4** (Euler 1736). Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée par la longueur d'arc et supposons que  $\alpha''(s_0) \neq 0$ . Alors le rayon et le centre du cercle osculateur sont donnés par :

$$r(s_0) = \frac{1}{\|\alpha''(s_0)\|} \quad , \quad C(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{\alpha''(s_0)}{\|\alpha''(s_0)\|} \cdot r(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{\alpha''(s_0)}{\|\alpha''(s_0)\|^2}$$

et par conséquent la courbure non signée est donnée par  $k_{\pm}(s_0) = \|\alpha''(s_0)\|$ .

*Preuve:* Il suffit de se rappeler que lorsqu'on paramétrise par la longueur d'arc,  $\langle \alpha'(s_0), \alpha'(s_0) \rangle = 1$ ,  $\langle \alpha'(s_0), \alpha''(s_0) \rangle = 0$ , et alors  $\langle \rho(\alpha'(s_0)), \alpha''(s_0) \rangle = \pm \|\alpha''(s_0)\|$ , et de remplacer dans (3-1) et (3-2). q.e.d.

### Osculation ordinaire et hyperosculation

**Définition VI.3.5.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrique régulière et supposons que  $\alpha'(t_0)$  et  $\alpha''(t_0)$  soient linéairement indépendantes, de sorte que le cercle osculateur en ce point est bien défini. On dit que le point  $\alpha(t_0)$  est un *point d'osculation ordinaire* si l'ordre de contact de  $\alpha$  et le cercle osculateur en ce point est exactement 2. Sinon on dit que  $\alpha(t_0)$  est un *point d'hyperosculation*, ou *sommet* de la courbe.

Si l'ordre de contact du cercle osculateur est exactement 3, on dit que c'est un point d'*hyperosculation ordinaire*.

**Proposition VI.3.6.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrique régulière.

- (1) Si  $\alpha(t_0)$  est un point d'osculation ordinaire, la restriction de  $\alpha$  à un voisinage de  $t_0$  traverse le cercle osculateur.
- (2) Si  $\alpha(t_0)$  est un point d'hyperosculation ordinaire, la restriction de  $\alpha$  à un voisinage de  $t_0$  reste d'un même côté du cercle osculateur.

*Preuve:* C'est une conséquence immédiate de la proposition VI.2.5 (voir figure VI.2).

*q.e.d.*

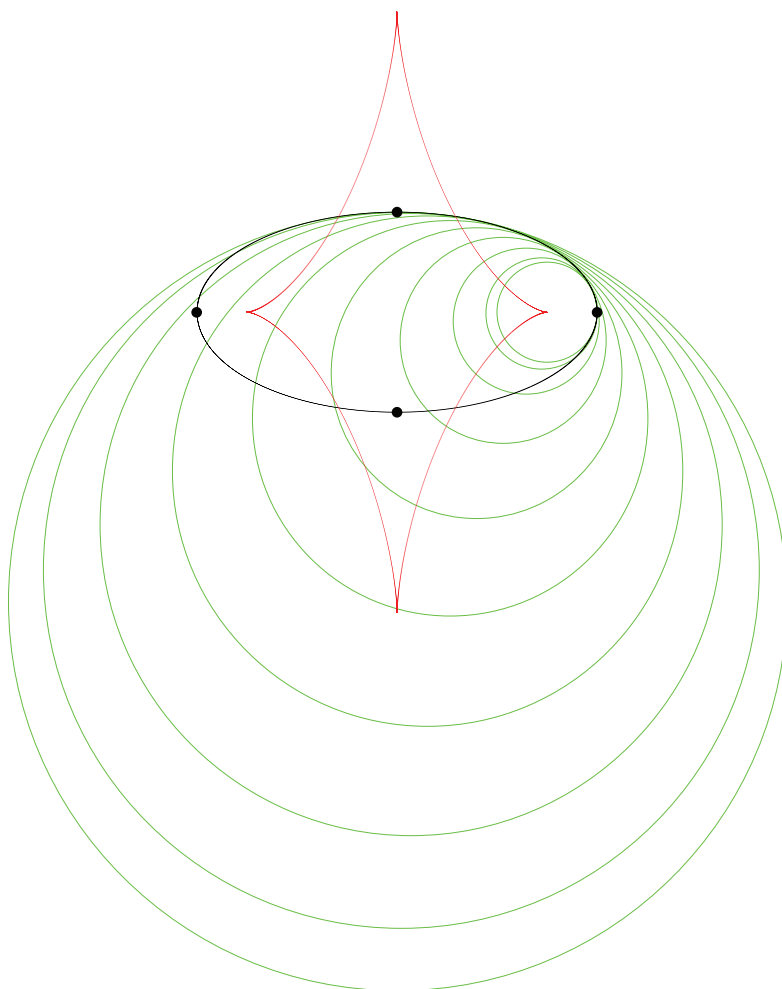


Figure VI.2: Cercles osculateurs à l'ellipse  $(\cos(t), \frac{1}{2}\sin(t))$ , pour  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  et lieu des centres des cercles osculateurs. Les points marqués sont les points d'hyperosculation.

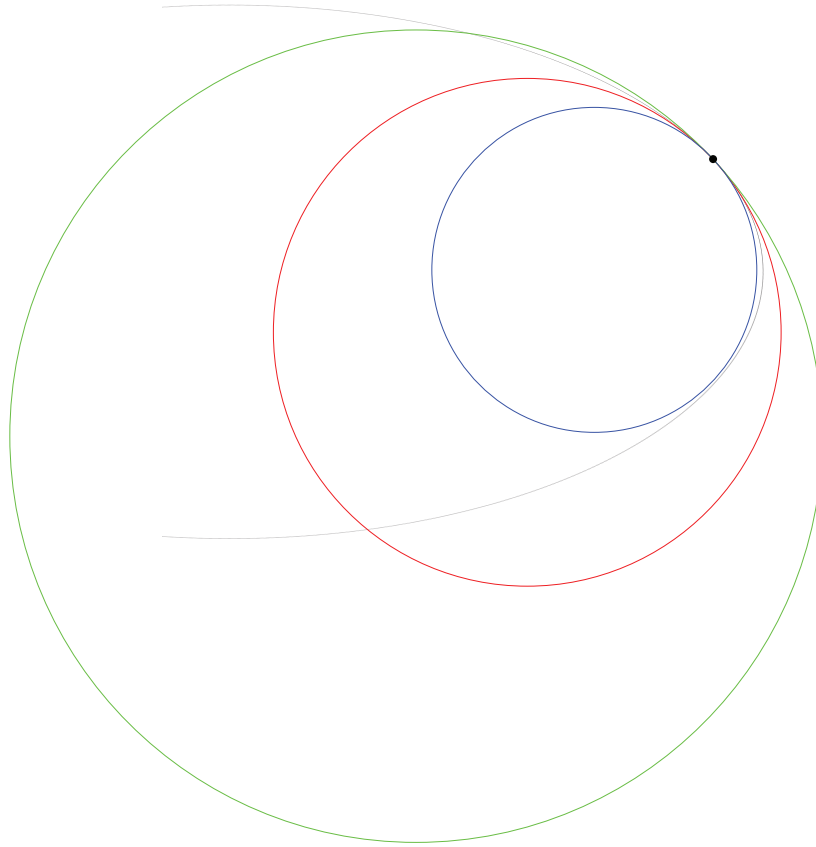


Figure VI.3: Cercles tangents en un point d'osculation ordinaire. Le cercle osculateur est le seul qui traverse la courbe au voisinage de  $P$ .

**Proposition VI.3.7.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe régulière et soit  $k(t)$  sa courbure. Alors si  $k(t_0) \neq 0$ ,  $\alpha(t_0)$  est un point d'hyperosculation si et seulement si la dérivée de  $k(t)$  est nulle en ce point, soit :  $k'(t_0) = 0$ , ce qui inclut les points où  $k(t)$  admet un extremum local non nul.

*Preuve:* On peut supposer que  $\alpha$  est paramétrée par la longueur d'arc, que l'on note traditionnellement par  $s$ . Alors  $k(s)^2 = \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle$  et sa dérivée vaut

$$(3-10) \quad 2k(s) \cdot k'(s) = 2\langle \alpha'''(s), \alpha''(s) \rangle$$

D'autre part, l'équation du cercle osculateur en  $\alpha(s_0)$  est  $F(v) = \langle v - C(s_0), v - C(s_0) \rangle - r(s_0)^2 = 0$ , où d'après VI.3.4  $C(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{\alpha''(s_0)}{\|\alpha''(s_0)\|^2}$ . Posons  $f(s) = F(\alpha(s)) = \langle \alpha(s) - C(s_0), \alpha(s) - C(s_0) \rangle - r(s_0)^2$ . Alors :

$$\begin{aligned} f'(s) &= 2\langle \alpha'(s), \alpha(s) - C(s_0) \rangle, & f''(s) &= 2(\langle \alpha''(s), \alpha(s) - C(s_0) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle) \\ f'''(s) &= 2(\langle \alpha'''(s), \alpha(s) - C(s_0) \rangle + \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle). \end{aligned}$$

On sait déjà que  $f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = 0$ . Dire que le cercle est hyperosculateur, c'est dire qu'en plus  $f'''(s_0) = 0$ , c'est-à-dire, d'après les calculs ci-dessus :

$$\langle \alpha'''(s_0), \alpha(s_0) - C(s_0) \rangle + \underbrace{\langle \alpha''(s_0), \alpha'(s_0) \rangle}_{=0} = -\langle \alpha'''(s_0), \frac{\alpha''(s_0)}{\|\alpha''(s_0)\|^2} \rangle = 0$$

ce qui équivaut à dire que  $\langle \alpha'''(s_0), \alpha''(s_0) \rangle = 0$ . D'après (3-10), si  $k(s_0) \neq 0$ , cela équivaut à dire que  $k'(s_0) = 0$ .

*q.e.d.*

**Exemple VI.3.8.** Considérons l'ellipse  $\alpha(t) = (\cos(t), a \cdot \sin(t))$ ,  $0 < a < 1$ . On a :

$$\alpha'(t) = (-\sin(t), a \cos(t)) \quad , \quad \alpha''(t) = (-\cos(t), -a \sin(t))$$

et donc

$$k(t) = \frac{\langle (-a \cos(t), -\sin(t)) , (-\cos(t), -a \sin(t)) \rangle}{(\sin(t)^2 + a^2 \cos(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{(\sin(t)^2 + a^2 \cos(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k(t)^2 = \frac{a^2}{(\sin(t)^2 + a^2 \cos(t)^2)^3}$$

d'où on tire :

$$(k(t)^2)' = (*) \cdot ((1 - a^2)2 \sin(t) \cos(t)) = (*) \cdot (1 - a^2) \sin(2t)$$

où  $(*)$  est une expression qui ne s'annule pas. Les points d'hyperosculation sont donc déterminés par les solutions de l'équation  $\sin(2t) = 0$ , ce qui donne  $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{4}$ . On trouve les quatre points d'intersection de l'ellipse avec les axes de coordonnées, que l'on peut voir sur la figure VI.2. On peut montrer que ce sont en fait des points d'hyperosculation ordinaire.

La prochaine proposition nous dit que sur un arc de courbe régulière compris entre deux sommets, les cercles osculateurs sont contenus les uns dans les autres, comme le montre la figure VI.2.

**Proposition VI.3.9.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe régulière, que l'on suppose paramétrée par la longueur d'arc. Soit  $[c, d] \subset I$  et supposons que  $\alpha''(s) \neq 0$ ,  $s \in [c, d]$ , et  $k'(s) \neq 0$ ,  $s \in ]c, d[$ , où  $k(s)$  désigne la courbure signée. Alors, si  $s_1, s_2 \in [c, d]$ ,  $s_1 < s_2$ , on a :

$$\{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v - C(s_2)\| \leq r(s_2)\} \subset \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v - C(s_1)\| < r(s_1)\} \quad \text{si } k'(s) > 0 \quad \forall s \in ]c, d[$$

où  $C(s)$  désignent respectivement le centre et le rayon de courbure. Si  $k'(s) < 0$ ,  $\forall s \in ]c, d[$ , on a l'inclusion inverse.

Quitte à remplacer  $s$  par  $-s$ , on peut supposer que  $k(s) > 0$ , ce qui fait que  $r(s) = \frac{1}{k(s)}$  et donc  $r'(s) = \frac{-k'(s)}{k^2(s)}$ . On va travailler dans le cas  $k'(s) > 0$ , ce qui fait que  $k(s)$  est croissante et  $r(s)$  décroissant; le cas  $k'(s) < 0$  se traite de manière analogue, en échangeant les rôles de  $s_1$  et  $s_2$ . Montrons d'abord que

$$\|C(s_1) - C(s_2)\| < r(s_1) - r(s_2) \quad , \quad s_1 < s_2 \quad .$$

On a :

$$C(s) = \alpha(s) + r(s) \cdot \rho(\alpha'(s))$$

et en dérivant il vient :

$$(3-11) \quad C'(s) = \alpha'(s) + r'(s) \cdot \rho(\alpha'(s)) + r(s) \cdot \rho(\alpha''(s))$$

mais  $\alpha''(s) = k(s) \cdot \rho(\alpha'(s)) = \frac{\rho(\alpha'(s))}{r(s)}$  et  $\rho \circ \rho = -1$ , donc il suit de (3-11) que :

$$C'(s) = \alpha'(s) + r'(s) \cdot \rho(\alpha'(s)) - \alpha'(s) = r'(s) \cdot \rho(\alpha'(s))$$

et donc

$$\|C'(s)\| = |r'(s)| = -r'(s) \quad .$$

Or

$$\|C(s_1) - C(s_2)\| = \left\| \int_{s_1}^{s_2} C'(s) ds \right\| \leq \int_{s_1}^{s_2} \|C'(s)\| ds$$

avec égalité seulement si  $C(s)$  parcourt une droite; si c'était le cas, on aurait :

$$C''(s) = r''(s) \cdot \rho(\alpha'(s)) + r'(s) \cdot \rho(\alpha''(s)) = 0 \quad \forall s \in [c, d]$$

ce qui, du fait que  $\alpha'(s)$  et  $\alpha''(s)$  sont linéairement indépendantes, entraînerait que  $r'(s) = 0 \forall s \in [c, d]$ , ce qui est contraire à l'hypothèse que  $k'(s) \neq 0$  pour  $s \in ]c, d[$ . On a donc :

$$\|C(s_1) - C(s_2)\| < \int_{s_1}^{s_2} \|C'(s)\| ds = \int_{s_1}^{s_2} -r'(s) ds = r(s_1) - r(s_2) \quad .$$

Supposons maintenant que  $\|v - C(s_2)\| \leq s_2$ . Alors :

$$\|v - C(s_1)\| \leq \|v - C(s_2)\| + \|C(s_2) - C(s_1)\| < r(s_2) + r(s_1) - r(s_2) = r(s_1) \quad .$$

*q. e. d.*

### VI.3.2 Points d'inflexion

Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrique régulière. On a vu dans VI.2.3 que la droite tangente au point  $\alpha(t_0)$  pour équation  $F(v) = \langle v - \alpha(t_0), \rho(\alpha'(t_0)) \rangle = 0$ , comme conséquence du fait que la tangente doit avoir un ordre de contact au moins 1 avec la courbe. En général, l'ordre de contact de la courbe avec sa tangente en un point est exactement 1; mais il arrive que cet ordre de contact soit supérieur à 1 en certains points, qu'on appelle points d'inflexion.

**Proposition VI.3.10.** *Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe régulière. L'ordre de contact de la courbe avec sa tangente en un point  $\alpha(t_0)$  est au moins 2 si et seulement si  $\alpha'(t_0)$  et  $\alpha''(t_0)$  sont linéairement dépendantes.*

*Preuve:* La composition de  $\alpha$  avec l'équation de sa tangente au point  $\alpha(t_0)$  s'écrit  $f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), \rho(\alpha'(t_0)) \rangle$ . On a :

$$f'(t) = \langle \alpha'(t), \rho(\alpha'(t_0)) \rangle \quad , \quad f''(t) = \langle \alpha''(t), \rho(\alpha'(t_0)) \rangle \quad .$$

On sait déjà que  $f(t_0) = f'(t_0) = 0$ . Dire que l'ordre de contact de la courbe avec sa tangente en  $\alpha(t_0)$  est au moins 2, c'est dire que  $f''(t_0) = \langle \alpha''(t_0), \rho(\alpha'(t_0)) \rangle = 0$ , c'est-à-dire que  $\alpha''(t_0)$  est perpendiculaire à  $\rho(\alpha'(t_0))$ , c'est-à-dire que  $\alpha''(t_0)$  est parallèle à  $\alpha'(t_0)$ .

*q. e. d.*

**Définition VI.3.11.** On dit que  $\alpha(t_0)$  est un *point d'inflexion* de la courbe régulière  $\alpha$  si  $\alpha'(t_0)$  et  $\alpha''(t_0)$  sont linéairement dépendantes. On dit que c'est un point d'inflexion *ordinaire* si  $\alpha'''(t_0)$  et  $\alpha'(t_0)$  ne sont pas linéairement dépendantes.

**Proposition VI.3.12.** *Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe régulière. Le point d'inflexion  $\alpha(t_0)$  est ordinaire si et seulement si l'ordre de contact de la courbe avec sa tangente en  $\alpha(t_0)$  est exactement 2. Dans ce cas, la courbe traverse sa tangente en  $\alpha(t_0)$  pour  $t$  proche de  $t_0$ .*

*Preuve:* On pose de nouveau  $f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), \rho(\alpha'(t_0)) \rangle$  et on remarque que  $f'''(t_0) = \langle \alpha'''(t_0), \rho(\alpha'(t_0)) \rangle$ . Dire que  $f'''(t_0) \neq 0$  équivaut donc à dire que  $\alpha'(t_0)$  et  $\alpha'''(t_0)$  sont linéairement indépendantes. Si c'est le cas, l'ordre de contact de la courbe avec sa tangente au point  $\alpha(t_0)$  est exactement 2 et il suit alors de la proposition VI.2.5 que la courbe traverse sa tangente au point  $\alpha(t_0)$ .

*q. e. d.*

### VI.3.3 Le théorème des quatre sommets

On commence par définir ce qu'est une courbe fermée simple. On est amené à considérer des fonctions différentiables sur un intervalle fermé  $[a, b]$ ; pour pouvoir parler convenablement de dérivées aux extrémités d'un tel intervalle, on doit supposer que la fonction est définie sur un intervalle ouvert contenant  $[a, b]$ .

**Définition VI.3.13.** Soit  $I = [a, b]$  un intervalle fermé. On dit que  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  s'il existe une extension  $\hat{\alpha} : ]a', b'[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $\alpha$ , où  $a' < a$ ,  $b < b'$ , qui est  $\mathcal{C}^\infty$ .

Une *courbe fermée* paramétrique est une application  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , et  $\alpha^{(k)}(a) = \alpha^{(k)}(b)$ ,  $\forall k \geq 1$ .

Une telle courbe est dite *simple* si elle est régulière et de plus  $\alpha(t) \neq \alpha(t')$  si  $t, t' \in [a, b[$  et  $t \neq t'$ .

Par exemple, l'ellipse  $\alpha(t) = (\cos(t), a \sin(t))$ ,  $0 < a < 1$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  est une courbe plane fermée, simple et régulière.

**Définition VI.3.14.** On dit que la courbe plane fermée, simple, régulière  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est *convexe* si pour tout  $t \in I$ , en désignant par  $\ell$  la droite tangente à  $\alpha$  au point  $\alpha(t)$ , on a  $\alpha([a, b]) \cap \ell = \{\alpha(t)\}$ . En particulier, la trace  $\alpha([a, b])$  de la courbe est entièrement située d'un même côté de la droite tangente à  $\alpha$  au point  $\alpha(t)$ .

**Remarque VI.3.15.** Si  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe plane fermée simple convexe et si  $X = \alpha([a, b])$  désigne sa trace, alors toute droite  $\ell$  coupe  $X$  en au plus deux points. Sinon, supposons que  $\ell \cap X$  contient trois points distincts  $p, q, r$  et que  $q$  soit situé entre  $p$  et  $r$ ; alors la tangente à la courbe au point  $q$  doit coïncider avec  $\ell$ , sinon  $p$  et  $r$  seraient de part et d'autre de cette tangente, contredisant la convexité. Mais cette tangente à la courbe au point  $q$  rencontre  $X$  encore en  $p$  et  $q$ , contredisant encore une fois la convexité de la courbe (voir figure VI.4).

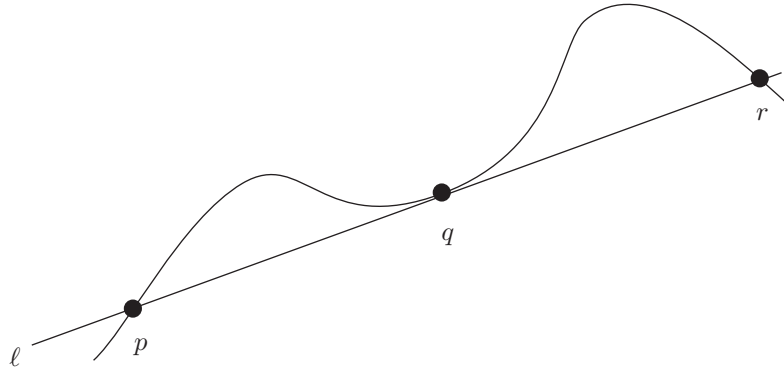


Figure VI.4: Une droite coupe une courbe convexe en au plus deux points

Si  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe fermée, la courbure  $k(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une application continue et possède donc au moins un minimum et un maximum, ce qui se traduit par le fait que  $\alpha$  possède au moins 2 sommets. Le *théorème des quatre sommets* nous dit que si la courbe est simple, alors elle possède au moins quatre sommets, dont nécessairement deux sont des maxima locaux et deux autres des minima locaux de la courbure. Nous démontrerons ce théorème dans le cas plus simple où la courbe est convexe. La figure VI.5 montre une courbe fermée, non simple, dont la courbure présente un seul minimum et un seul maximum; la courbure est maximale en  $(1, 0)$ , minimale en  $(3, 0)$ .

**Théorème VI.3.16** (Théorème des quatre sommets). *Soit  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe fermée, simple, convexe. Alors elle possède au moins quatre sommets.*

*Preuve:* On peut supposer que la courbe est paramétrée par la longueur d'arc; alors la dérivée de  $\alpha$  peut être regardée comme une application à valeurs dans le cercle :  $\alpha' : [a, b] \rightarrow S^1$ . On notera  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ . Si on choisit  $\theta_a \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha'(a) = (\cos(\theta_a), \sin(\theta_a))$ , il suit de V.1.1 qu'il existe une unique application  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\theta(a) = \theta_a$  et :

$$\alpha'(s) = (x'(s), y'(s)) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$$

On appelle  $\theta(s)$  l'*indicatrice tangente* :  $\theta(s)$  est l'angle que fait la tangente à la courbe au point  $\alpha(s)$  avec une droite horizontale. Notons que

$$\alpha''(s) = k(s)(-y'(s), x'(s)) = \theta'(s) \cdot (-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s)))$$

et donc  $k(s) = \theta'(s)$ . On a :

$$\begin{aligned} (3-12) \quad \int_a^b y(s) \cdot k'(s) ds &= \underbrace{y(s) \cdot k(s)}_{=0} \Big|_a^b - \int_a^b y'(s) \cdot k(s) ds = - \int_a^b \sin(\theta(s)) \cdot \theta'(s) ds \\ &= - \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} \sin(\theta) d\theta = \cos(\theta) \Big|_{\theta(a)}^{\theta(b)} = 0 \end{aligned}$$

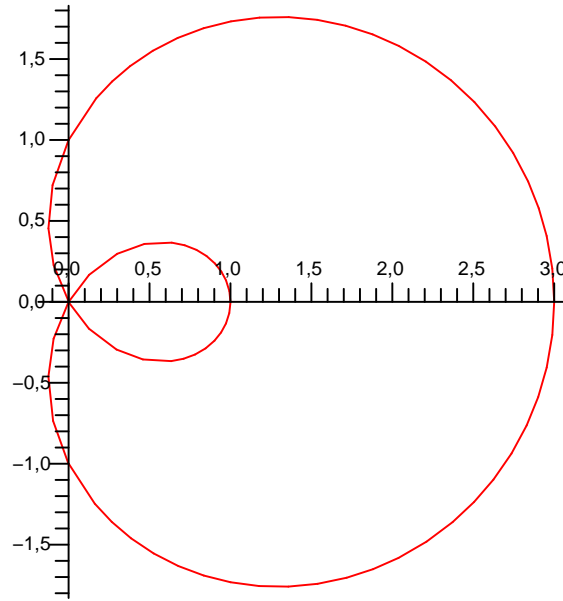


Figure VI.5: Une courbe fermée avec deux sommets

Puisque  $[a, b]$  est compact et la courbure est continue, elle possède un minimum global en un point  $p$  et un maximum global en un point  $q$ . On peut supposer que la courbe possède un nombre fini de sommets, sinon le théorème est évident.

Par un choix de système orthogonal de coordonnées, on peut supposer que  $p$  et  $q$  sont situés sur l'axe  $OX$ , avec  $p$  à gauche de  $q$ . D'après la remarque VI.3.15, la courbe rencontre l'axe  $OX$  en  $p$  et  $q$  seulement. On peut choisir de parcourir la courbe de sorte que la partie avec  $y(s) \geq 0$  est parcourue de  $p$  vers  $q$ , et la partie avec  $y(s) \leq 0$  de  $q$  vers  $p$  (voir figure VI.6).

Puisque la courbure a un minimum en  $p$  et un maximum en  $q$ , au points proches de  $p$  ou proches de  $q$  avec  $y(s) > 0$  on aura  $k'(s) > 0$ . De même, aux points proches de  $p$  ou de  $q$  avec  $y(s) < 0$ , on aura  $k'(s) < 0$ .

Si on avait  $k'(s) \geq 0$  en tous les points où  $y(s) > 0$  et  $k'(s) \leq 0$  en tous les points où  $y(s) < 0$ , on aurait  $y(s) \cdot k'(s) \geq 0$  en tous les points, et cette fonction n'a qu'un nombre fini de zéros, car on n'a qu'un nombre fini de sommets. Il en suivrait que

$$\int_a^b y(s) \cdot k'(s) ds > 0$$

en contradiction avec (3-12). On doit donc avoir que

- (1) ou bien  $k'(s) < 0$  en un point où  $y(s) > 0$ , auquel cas, en allant de  $p$  vers  $q$ ,  $k(s)$ , qui croît au voisinage de  $p$ , doit passer par un maximum local, décroître lorsque  $k'(s) < 0$ , puis passer par un minimum local au moins avant d'arriver à  $q$  (voir figure VI.7)
- (2) ou bien  $k'(s) > 0$  en un point où  $y(s) < 0$ , auquel cas, en passant de  $q$  à  $p$  la courbure, qui commence par décroître, doit passer par un minimum local, puis un maximum local au moins.

Bien entendu, les deux cas peuvent se présenter pour une même courbe. On en déduit que la courbe possède, en dehors de  $p$  et  $q$ , un minimum local et un maximum local au moins. En tous les cas, la courbe aura donc au moins 4 sommets.

*q. e. d.*

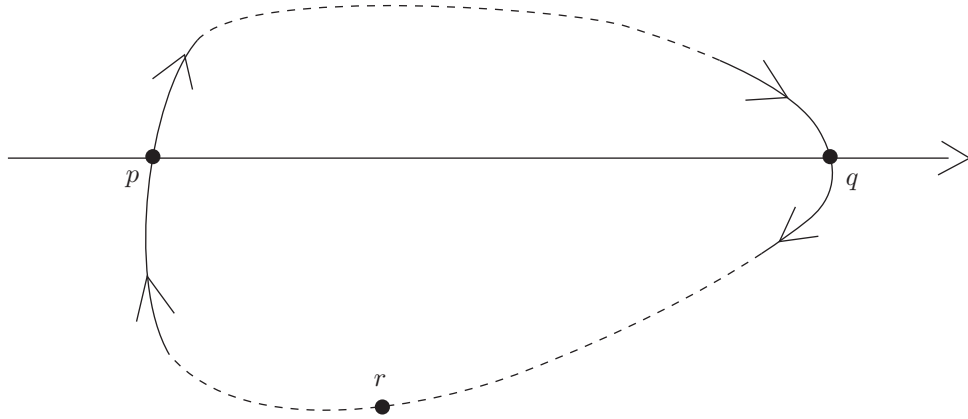
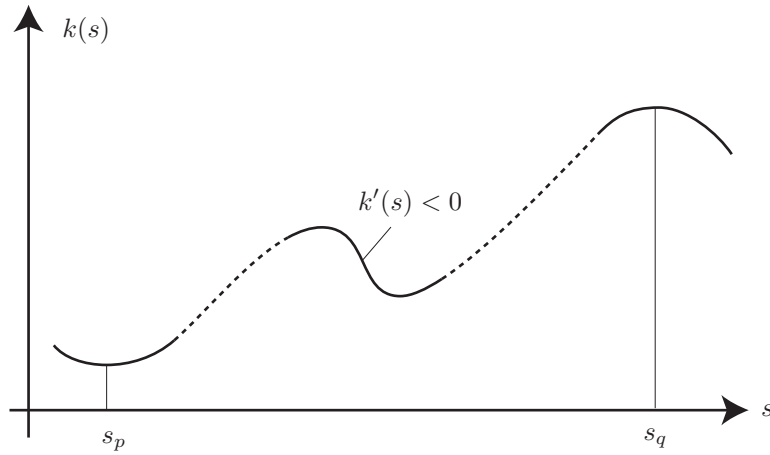


Figure VI.6: Situation de la courbe dans la preuve de VI.3.16

Figure VI.7: Esquisse de la variation de  $k(s)$  pour la preuve de VI.3.16, cas (1), où on a posé  $p = \alpha(s_p)$  et  $q = \alpha(s_q)$ 

## VI.4 Courbes dans l'espace

Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe régulière, paramétrée par la longueur d'arc. On pose :

$$T(s) = \alpha'(s) \text{ (et } \|T'(s)\| = 1) \quad , \quad K(s) = \|\alpha''(s)\|$$

et si  $K(s) \neq 0$  :

$$N(s) = \frac{T'(s)}{K(s)} \quad , \quad B(s) = T(s) \times N(s)$$

Notons que, comme on utilise une paramétrisation par la longueur d'arc,  $\|T(s)\| = 1$ , donc  $\langle T'(s), T(s) \rangle = 0$ . Comme  $N(s) = \frac{T'(s)}{K(s)} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ ,  $N(s)$  est orthogonal à  $T(s)$  et de longueur 1. Enfin, la définition même de  $B(s)$  montre qu'il est de norme 1, orthogonal à  $T(s)$  et  $N(s)$ .

**Définition VI.4.1.** Le vecteur  $T(s)$  est appelé *vecteur tangent* à la courbe. Le vecteur  $N(s)$  est appelé *vecteur normal* à la courbe et le vecteur  $B(s)$  *vecteur binormal* à la courbe.  $K(s)$  s'appelle la courbure.

Notons que les 3 vecteurs  $T(s), N(s), B(s)$  forment un repère orthonormal droit de  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition VI.4.2.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation quelconque d'une courbe régulière. Alors, si  $t_0 \in I$ , l'espace vectoriel engendré par  $\alpha'(t_0)$  et  $\alpha''(t_0)$  est indépendant de la paramétrisation.



*Preuve:* En effet, si  $h : J \rightarrow I$  est un difféomorphisme, avec  $h(u_0) = t_0$ , on a :

$$(\alpha \circ h)'(u_0) = \alpha'(t_0) \cdot h'(u_0) \quad , \quad (\alpha \circ h)''(u_0) = \alpha''(t_0) \cdot (h'(u_0))^2 + \alpha'(t_0) \cdot \beta''(u_0)$$

ce qui montre que l'espace vectoriel  $V$  engendré par  $\alpha'(t_0)$  et  $\alpha''(t_0)$  est contenu dans l'espace vectoriel  $W$  engendré par  $\beta'(u_0)$  et  $\beta''(u_0)$  :  $V \subset W$ . En échangeant les rôles de  $\alpha$  et  $\beta$ , on aura  $W \subset V$ , et donc finalement  $V = W$ .

*q.e.d.*

**Définition VI.4.3.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe régulière et supposons que  $\alpha'(t_0)$  et  $\alpha''(t_0)$  sont linéairement indépendants, où  $t_0 \in I$ . On définit le *plan osculateur* de la courbe au point  $\alpha(t_0)$  comme étant le plan passant par  $\alpha(t_0)$ , parallèle à  $\alpha'(t_0)$  et  $\alpha''(t_0)$ . Il suit de la proposition VI.4.2 que ce plan ne dépend pas de la paramétrisation de la courbe. En particulier, il coïncide avec le plan par  $\alpha(s_0)$  parallèle à  $T(s_0)$  et  $N(s_0)$  dans une paramétrisation par longueur d'arc.

**Remarque VI.4.4.** Supposons  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  paramétrisée par la longueur d'arc et appelons  $H$  le plan osculateur à  $\alpha$  au point  $\alpha(s_0)$ . Soit  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow H$  la projection orthogonale; alors  $\beta(t) = \pi(\alpha(t))$  est une courbe dans le plan  $H$ , et puisque  $\alpha'(s_0)$  et  $\alpha''(s_0)$  sont parallèles à  $H$ , on a  $\beta'(s_0) = \pi(\alpha'(s_0)) = \alpha'(s_0)$ ,  $\beta''(s_0) = \pi(\alpha''(s_0)) = \alpha''(s_0)$ . On en déduit que  $K(s_0) = \|\alpha''(s_0)\|$  est la courbure de  $\beta$  au point  $\beta(s_0)$ .

**Proposition VI.4.5.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe régulière et  $t_0 \in I$  tel que  $\alpha'(t_0)$  et  $\alpha''(t_0)$  sont linéairement indépendants. Alors le plan osculateur est caractérisé par le fait que son ordre de contact avec  $\alpha$  en  $\alpha(t_0)$  est au moins 2. Ce contact est d'ordre exactement 2 si et seulement si  $\alpha'''(t_0)$  n'est pas dans le plan osculateur.

*Preuve:* Soit  $F(v) = \langle v - \alpha(t_0), \nu \rangle = 0$  l'équation d'un plan par  $\alpha(t_0)$ , perpendiculaire à un vecteur  $\nu$ . La composition  $f(t) = F(\alpha(t))$  a pour dérivées au point  $t_0$ :

$$f'(t_0) = \langle \alpha'(t_0), \nu \rangle \quad , \quad f''(t_0) = \langle \alpha''(t_0), \nu \rangle \quad , \quad f'''(t_0) = \langle \alpha'''(t_0), \nu \rangle$$

d'où on déduit que  $f'(t_0) = f''(t_0) = 0$  si et seulement si  $\nu$  est perpendiculaire à  $\alpha'(t_0)$  et  $\alpha''(t_0)$ , c'est-à-dire si  $\nu$  est perpendiculaire au plan osculateur. Aussi,  $f'''(t_0) = 0$  si et seulement si  $\alpha'''(t_0)$  est dans le plan osculateur.

*q.e.d.*

Remarquons qu'il suit de la proposition précédente et de VI.2.5 que si  $\alpha'(t_0)$ ,  $\alpha''(t_0)$  et  $\alpha'''(t_0)$  sont linéairement indépendantes, alors la courbe traverse son plan osculateur lorsque  $t$  varie dans un voisinage de  $t_0$ .

**Exemple VI.4.6.** Prenons la courbe  $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ . Ses dérivées sont  $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ ,  $\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$ ,  $\alpha'''(t) = (0, 0, 6)$ . Pour  $t = 0$ , le plan osculateur est engendré par  $(1, 0, 0)$  et  $(0, 2, 0)$ . La troisième dérivée en ce point n'est pas dans le plan osculateur, la courbe traverse donc son plan osculateur au point  $(0, 0, 0)$  (voir figure VI.8). On appelle cette courbe la *cubique gauche*.

Revenons à une courbe  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  paramétrée par la longueur d'arc et supposons que  $\alpha'(s)$  et  $\alpha''(s)$  soient linéairement indépendantes. Remarquons que

$$\langle B(s), T(s) \rangle = 0 \quad , \quad \langle B(s), N(s) \rangle = 0 \quad , \quad T'(s) = K(s) \cdot N(s) \quad , \quad \langle B(s), B(s) \rangle = 1$$

impliquent que

$$(4-1) \quad \langle B'(s), T(s) \rangle + \langle B(s), T'(s) \rangle = \langle B'(s), T(s) \rangle = 0$$

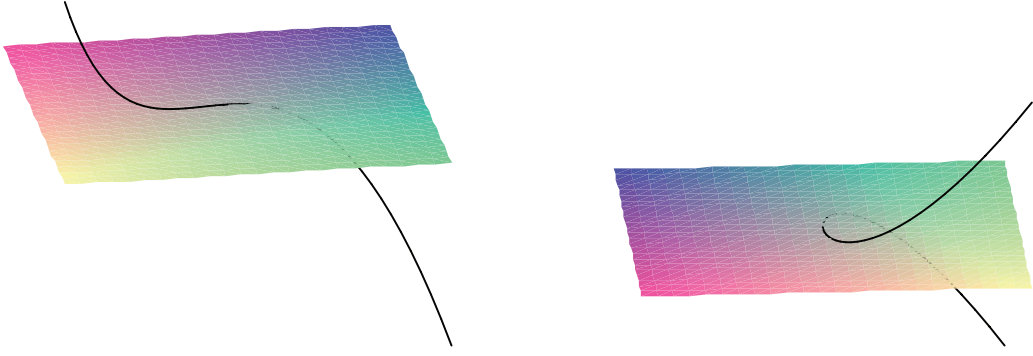
$$(4-2) \quad \langle B'(s), N(s) \rangle + \langle B(s), N'(s) \rangle = 0$$

$$(4-3) \quad \langle B'(s), B(s) \rangle = 0$$

Il suit de (4-1) et (4-3) que  $B'(s)$  est parallèle à  $N(s)$ .

**Définition VI.4.7.** La torsion de  $\alpha$  au point  $s$  est le scalaire  $\tau(s)$  tel que

$$B'(s) = -\tau(s) \cdot N(s)$$

Figure VI.8: Deux visions de la cubique gauche et de son plan osculateur en  $(0,0,0)$ .

Ainsi, à tout point d'une courbe régulière  $\alpha$ , paramétrée par la longueur d'arc, et telle que  $\alpha''(s) \neq 0$  (ce qui équivaut à dire que  $K(s) \neq 0$ ), on a associé trois vecteurs  $T(s), N(s), B(s)$  et deux scalaires  $K(s), \tau(s)$ . Ces cinq entités sont reliées par les formules consignées dans le théorème suivant.

**Théorème VI.4.8** (Frenet-Serret). *Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe régulière paramétrée par la longueur d'arc et supposons que  $\alpha''(s) \neq 0$ . Alors :*

$$T'(s) = K(s) \cdot N(s) \quad , \quad N'(s) = -K(s) \cdot T(s) + \tau(s) \cdot B(s) \quad , \quad B'(s) = -\tau(s) \cdot N(s)$$

*Preuve:* Seule la formule du milieu nécessite une preuve, les deux autres viennent de la définition de  $K(s)$  et  $\tau(s)$  respectivement. Puisque  $T(s), N(s), B(s)$  forment une base orthonormale de  $\mathbb{R}^3$ , on a :

$$(4-4) \quad N'(s) = \langle N'(s), T(s) \rangle T(s) + \langle N'(s), N(s) \rangle N(s) + \langle N'(s), B(s) \rangle B(s) \quad .$$

Or

$$\langle N(s), T(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle N'(s), T(s) \rangle + \langle N(s), T'(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle N'(s), T(s) \rangle = -K(s) \quad .$$

En dérivant l'équation  $\langle N(s), N(s) \rangle = 1$  on voit que  $\langle N'(s), N(s) \rangle = 0$ .

Enfin, il suit de (4-2) que :

$$\langle N'(s), B(s) \rangle = -\langle N(s), B'(s) \rangle = -\langle N(s), -\tau(s)N(s) \rangle = \tau(s) \quad .$$

En remplaçant dans (4-4) on trouve la formule voulue pour  $N'(s)$ .

*q.e.d.*

On aimerait trouver maintenant des formules exprimant ces entités pour une courbe paramétrée, non nécessairement par la longueur d'arc. Soit donc  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe régulière,  $t_0 \in I$  et  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau$ . On pose  $\hat{\alpha}(s(t)) = \alpha(t)$ , ce qui fait de  $\hat{\alpha}$  une reparamétrisation de  $\alpha$  par la longueur d'arc; on suppose que sa courbure ne s'annule pas. Si on désigne par  $\hat{T}(s), \hat{N}(s), \hat{B}(s), \hat{K}(s), \hat{\tau}(s)$  respectivement les vecteurs tangent, normal, binormal, la courbure et la torsion de  $\hat{\alpha}$ , on pose :

$$T(t) = \hat{T}(s(t)) \quad , \quad N(t) = \hat{N}(s(t)) \quad , \quad B(t) = \hat{B}(s(t)) \quad , \quad K(t) = \hat{K}(s(t)) \quad , \quad \tau(t) = \hat{\tau}(s(t)) \quad .$$

On pose encore  $v(t) = \|\alpha'(t)\| = s'(t)$ . On a alors les formules suivantes :

$$(4-5) \quad T'(t) = \hat{T}'(s(t)) \cdot s'(t) = K(t) \cdot v(t) \cdot N(t)$$

$$(4-6) \quad N'(t) = \hat{N}'(s(t)) \cdot s'(t) = -v(t) \cdot K(t) \cdot T(t) + v(t) \cdot \tau(t) \cdot B(t)$$

$$(4-7) \quad B'(t) = \hat{B}'(s(t)) \cdot s'(t) = -v(t) \cdot \tau(t) \cdot N(t)$$

**Lemme VI.4.9.**

$$(4-8) \quad \alpha'(t) = v(t) \cdot T(t)$$

$$(4-9) \quad \alpha''(t) = v'(t) \cdot T(t) + v(t)^2 \cdot K(t) \cdot N(t)$$

*Preuve:* Il suffit de dériver  $\alpha(t) = \widehat{\alpha}(s(t))$  :

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \widehat{\alpha}'(s(t)) \cdot s'(t) = v(t) \cdot T(t) \\ \alpha''(t) &= \widehat{\alpha}''(s(t)) \cdot s'(t)^2 + \widehat{\alpha}'(s(t)) \cdot s''(t) = v(t)^2 \cdot K(t) \cdot N(t) + v'(t) \cdot T(t)\end{aligned}$$

*q.e.d.*

**Théorème VI.4.10.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe régulière telle que  $\alpha'(t)$  et  $\alpha''(t)$  soient linéairement indépendantes. Alors :

$$\begin{aligned}T(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \quad , \quad N(t) = B(t) \times T(t) \quad , \quad B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \\ K(t) &= \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \quad , \quad \tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t) , \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}\end{aligned}$$

*Preuve:* Seules les formules pour  $B(t), K(t)$  et  $\tau(t)$  nécessitent une preuve. Calculons à l'aide des formules (4-8) et (4-9) :

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (v(t) \cdot T(t)) \times (v'(t) \cdot T(t) + v(t)^2 \cdot K(t) \cdot N(t)) = K(t) \cdot v(t)^3 \cdot T(t) \times N(t) = K(t) \cdot v(t)^3 \cdot B(t)$$

d'où on tire les formules énoncées pour  $K(t)$  et  $B(t)$ .

Pout  $\tau(t)$ , dérivons la formule (4-9) :

$$\alpha'''(t) = (v'(t) \cdot T(t) + v(t)^2 \cdot K(t) \cdot N(t))' = K(t) \cdot v(t)^2 \cdot N'(t) + R(t)$$

où  $R(t)$  est un vecteur orthogonal à  $B(t)$ . En utilisant VI.4.8, on trouve :

$$\alpha'''(t) = K(t) \cdot v(t)^3 \cdot \tau(t) \cdot B(t) + S(t)$$

où  $S(t)$  est un vecteur orthogonal à  $B(t)$ . De là on tire :

$$\begin{aligned}\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t) , \alpha'''(t) \rangle &= \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| \cdot \langle B(t) , \alpha'''(t) \rangle = \\ &= K(t) \cdot v(t)^3 \langle B(t) , B(t) \rangle \cdot K(t) \cdot v(t)^3 \cdot \tau(t) = \\ &= K(t)^2 \cdot v(t)^6 \cdot \tau(t) = \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2 \cdot \tau(t)\end{aligned}$$

et la formule énoncée pour  $\tau(t)$  en suit.

*q.e.d.*



## Chapitre VII

# Géométrie différentielle des surfaces de l'espace

### VII.1 Définitions et exemples

**Définition VII.1.1.** Une surface régulière de l'espace est un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}^3$  qui peut être recouverte par des cartes régulières de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Cela veut dire que pour tout  $P \in X$ , il existe un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $V \ni P$  et une application  $\varphi : U \rightarrow V$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , telle que

- (1)  $\varphi$  est une bijection sur  $V \cap X$ .
- (2) la dérivée  $d\varphi_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est injective,  $\forall (u, v) \in U$ .

On appelle  $\varphi$  une *carte* sur la surface régulière  $X$ . Il suit du théorème du rang (voir [6]) que  $\varphi$  est un homéomorphisme sur son image. On dit aussi que  $\varphi$  est une paramétrisation locale régulière de  $X$ . Traditionnellement, on note  $(u, v)$  les variables de la source d'une carte  $\varphi$ .

#### Exemples VII.1.2.

- (1) On a vu dans V.2 comment définir les projections stéréographiques de la sphère  $S^2$  depuis le pôle nord et le pôle sud,  $\sigma_N$  et  $\sigma_S$  respectivement, dont les inverses forment un système de cartes sur la sphère
- (2) Si  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que sa dérivée  $dF_P$  est non nulle en tout point  $P$  tel que  $F(P) = 0$ , alors l'ensemble de ses zéros :

$$X = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid F(P) = 0\}$$

est une surface régulière de l'espace. En effet, si  $P = (u_0, v_0, z_0) \in X$ , puisque  $dF_P \neq 0$ , on peut supposer par exemple que  $\frac{\partial F}{\partial z}(P) \neq 0$ . Il suit alors du théorème des fonctions implicites qu'il existe un ouvert  $V \subset \mathbb{R}^3$  contenant  $P$ , un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$  et une fonction  $\mathcal{C}^\infty$   $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :

$$X \cap V = \{(u, v, z) \in U \times \mathbb{R} \mid z = g(u, v)\}$$

et donc  $(u, v) \mapsto (u, v, g(u, v))$  est une carte sur  $X$  contenant  $P$ .

- (3) L'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

où  $a, b, c > 0$  satisfait aux conditions de l'exemple précédent. Les cartes sont de la forme :

$$(u, v) \mapsto \left(u, v, \pm c \sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}}\right), \quad \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} < 1$$

ce qui fait en tout, en échangeant les rôles de 3 coordonnées de l'espace, 6 cartes. Si on prend  $a = b = c = 1$ , on retrouve la sphère.

- (4) *Surfaces de révolution.* Si  $\Gamma$  est une courbe dans l'espace, on obtient une surface  $X$  par rotation de  $\Gamma$  autour de l'axe  $OZ$  :

$$X = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi]} R_\theta(\Gamma)$$

où  $R_\theta$  désigne la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $OZ$ . Sous forme matricielle :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si  $\Gamma$  est une courbe paramétrique régulière, simple, paramétrée par  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , alors on peut paramétrer la surface de révolution par

$$(u, \theta) \mapsto R_\theta(\alpha(u)) = (\cos(\theta)\alpha_1(u) - \sin(\theta)\alpha_2(u), \sin(\theta)\alpha_1(u) + \cos(\theta)\alpha_2(u), \alpha_3(u)) \quad .$$

Si  $\Gamma$  ne rencontre pas  $OZ$ , on obtient des cartes régulières sur  $X$  en restreignant la paramétrisation à des rectangles de la forme  $I' \times J$ ,  $I' \subset I$  et  $J \subset \mathbb{R}$ . Par exemple, le tore est obtenu par ce procédé, en prenant pour  $\Gamma$  le cercle  $\alpha(u) = (0, R + r \cos(u), R + r \sin(u))$ , ce qui donne comme paramétrisation du tore

$$(u, v) \mapsto ((R + r \cos(u)) \cos(v), (R + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u)) \quad .$$

- Si  $\Gamma$  est contenue dans le plan  $YOZ$  et est décrite par une équation régulière  $f(y, z) = 0$ , alors la surface est décrite par l'équation  $F(u, v, z) = f(\sqrt{u^2 + v^2}, z) = 0$ . Si on reprend le tore, en partant de  $\Gamma$  décrite par l'équation  $(y - R)^2 + z^2 - r^2 = 0$ , on obtient l'équation :

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2 = 0$$

- (5) *Surfaces réglées.* Si  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  sont deux courbes régulières, simples de l'espace qui ne se rencontrent pas, il leur est associé la surface paramétrée par  $\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi(u, v) = v \cdot \alpha(u) + (1 - v) \cdot \beta(u)$ . On dit que c'est une surface réglée parce que c'est en fait une réunion de droites, celles qui joignent les paires de points  $\alpha(u), \beta(u)$ ,  $u \in I$ . C'est une surface régulière en dehors des points  $P$  qui sont image par  $\varphi$  de deux couples distincts  $(u, v)$  et  $(u', v')$ , ainsi que les points où  $\alpha(u) - \beta(u)$  et  $v\alpha'(u) + (1 - v)\beta'(u)$  sont linéairement dépendants, qui sont les points où le jacobien de  $\varphi$  n'est pas de rang 2. Par exemple, si on prend  $\alpha(u) = (u, 0, 0)$ ,  $\beta(u) = (0, 1, u)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , on obtient la surface paramétrée par  $(u, v) \mapsto (u \cdot v, 1 - v, u \cdot (1 - v))$ , qui est en fait la quadrique d'équation  $(x + z)y - z = 0$ .

- (6) Le cône d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  est une surface régulière, en dehors du point  $(0, 0, 0)$ .

**Définition VII.1.3.** Soit  $X \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière,  $P \in X$ , et soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une carte sur  $X$  telle que  $\varphi(u_0, v_0) = P$ . Le plan tangent à la surface  $X$  au point  $P$ , noté  $T_P X$ , est l'image de la dérivée  $d\varphi_{(u_0, v_0)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Si  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  est une équation locale régulière de  $X$ , avec  $V \ni P$ , on a

$$\text{Im}(d\varphi_{(u_0, v_0)}) = \text{Ker}(dF_P) = T_P X$$

ceci quelque soit l'équation locale ou la paramétrisation locale, ce qui montre que le plan tangent est indépendant de celles-ci.

Si  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une paramétrisation locale régulière d'une surface et  $(u_0, v_0) \in U$ ,  $P = \varphi(u_0, v_0)$ , on écrit

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \quad , \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \quad .$$

Puisque  $\varphi_u, \varphi_v$  forment une base de  $T_P X$ , le vecteur

$$(1-1) \quad N(P) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

est un vecteur unitaire, orthogonal à  $T_P X$ .

## VII.2 Première et deuxième formes fondamentales

**La première forme fondamentale** Soit  $X \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière,  $P \in X$ ,

**Définition VII.2.1.** La première forme fondamentale  $I_P(\xi, \eta)$  est la forme bilinéaire symétrique sur  $T_P X$  définie par la restriction à  $T_P X$  du produit scalaire :

$$w_1, w_2 \in T_P X \quad , \quad I_P(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle .$$

Si  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une carte telle que  $\varphi(u, v) = P$ , on définit :

$$E(u, v) = I_P(\varphi_u, \varphi_u) \quad , \quad F(u, v) = I_P(\varphi_u, \varphi_v) \quad , \quad G(u, v) = I_P(\varphi_v, \varphi_v)$$

de sorte que si  $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$(2-1) \quad I_P(d\varphi_{(u,v)}(\xi), d\varphi_{(u,v)}(\eta)) = I_P(d\varphi_{(u,v)}(\xi_1 \cdot e_1 + \xi_2 \cdot e_2), d\varphi_{(u,v)}(\eta_1 \cdot e_1 + \eta_2 \cdot e_2)) = \\ E(u, v)\xi_1 \cdot \eta_1 + F(u, v)(\xi_1 \cdot \eta_2 + \xi_2 \cdot \eta_1) + G(u, v) \cdot \xi_2 \cdot \eta_2 = \xi^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \eta$$

où  $\xi^t = (\xi_1, \xi_2)$  denote le transposé de  $\xi$ .

A l'aide de la première forme fondamentale on peut exprimer l'aire d'une surface. Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation locale d'une surface régulière,  $R = [a, b] \times [c, d] \subset U$  un rectangle et supposons qu'on ait un partage de  $R$  en petits rectangles  $R_{i,j}$  de côtés  $\Delta_i, \Delta_j$ . Alors, si on choisit  $(u_i, v_j) \in R_{i,j}$ , l'aire de  $\varphi(R_{i,j})$  est approximée par  $\|\varphi_u(u_i, v_j) \times \varphi_v(u_i, v_j)\| \cdot \Delta_i \cdot \Delta_j$  et l'aire de  $\varphi(R)$  est approximée par  $\sum_{i,j} \|\varphi_u(u_i, v_j) \times \varphi_v(u_i, v_j)\| \cdot \Delta_i \cdot \Delta_j$ , qui a pour limite, lorsque les rectangles deviennent de plus en plus petits :

$$\iint_R \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \, dv \quad .$$

Or si  $\gamma$  désigne l'angle formé par  $\varphi_u$  et  $\varphi_v$ , on a :

$$\begin{aligned} \|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 &= \|\varphi_u\|^2 \cdot \|\varphi_v\|^2 \cdot \sin^2(\gamma) = \|\varphi_u\|^2 \cdot \|\varphi_v\|^2 \cdot (1 - \cos^2(\gamma)) \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \cdot \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \cdot \left(1 - \frac{(\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle)^2}{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \cdot \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle}\right) = I_P(\varphi_u, \varphi_u) \cdot I_P(\varphi_v, \varphi_v) - I(\varphi_u, \varphi_v)^2 = E \cdot G - F^2 \end{aligned}$$

ce qui nous donne la formule :

$$\text{aire de } \varphi(R) = \iint_R \sqrt{E \cdot G - F^2}$$

que l'on pourra utiliser même lorsque la paramétrisation n'est pas régulière sur des sous-ensembles, comme des courbes, qui ne comptent pas pour le calcul de l'aire.

**Exemple VII.2.2.** On considère la paramétrisation de la sphère de rayon 1 centrée à l'origine :

$$\varphi(u, v) = (\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \cos(u)) \quad , \quad 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi \quad .$$

On calcule les dérivées :

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (\cos(u) \cos(v), \cos(u) \sin(v), -\sin(u)) \\ \varphi_v &= (-\sin(u) \sin(v), \sin(u) \cos(v), 0) \end{aligned}$$

d'où on tire :

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \cos^2(u)(\cos^2(v) + \sin^2(v)) + \sin^2(u) = 1 \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = -\cos(u) \cos(v) \sin(u) \sin(v) + \cos(u) \sin(v) \sin(u) \cos(v) = 0 \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \sin^2(u) \sin^2(v) + \sin^2(u) \cos^2(v) = \sin^2(u) \end{aligned}$$

et donc  $\sqrt{EG - F^2} = \sin(u)$ , qui s'annule pour  $u = 0$  et  $u = \pi$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ ; ces deux segments sont écrasés respectivement sur le pôle nord et le pôle sud. L'aire de la sphère vaut donc :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(u) du dv = \int_0^{2\pi} (-\cos(u)|_0^\pi) dv = \int_0^{2\pi} 2 dv = 4\pi$$

On peut aussi utiliser les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$  pour exprimer la longueur d'une courbe sur la surface. Soit  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  une courbe et posons  $\gamma(t) = \varphi(\alpha(t))$ . Alors la longueur de  $\gamma$  vaut :

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Mais

$$\|\gamma'(t)\|^2 = I_P(\gamma'(t), \gamma'(t)) = E(\alpha(t))\alpha_1'(t)^2 + 2F(\alpha(t))\alpha_1'(t)\alpha_2'(t) + G(\alpha(t))\alpha_2'(t)^2$$

et donc

$$(2-2) \quad \ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E(\alpha(t))\alpha_1'(t)^2 + 2F(\alpha(t))\alpha_1'(t)\alpha_2'(t) + G(\alpha(t))\alpha_2'(t)^2} dt$$

**La deuxième forme fondamentale** Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation locale d'une surface régulière  $X \subset \mathbb{R}^3$  et  $P = \varphi(u, v) \in X$ . Si  $G : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application définie sur un ouvert  $V$  de  $X$  contenant  $P$ ,  $V \subset \varphi(U)$ , on dit que  $G$  est différentiable au point  $P$  si la composition  $G \circ \varphi$  est différentiable au point  $(u, v)$ . La dérivée  $dG_P : T_P \rightarrow \mathbb{R}^n$  est définie par :

$$\text{si } w \in T_P X, w = d\varphi(\xi)_{(u,v)} \quad , \quad dG_P(w) = d(G \circ \varphi)_{(u,v)}(\xi) \quad .$$

L'expression (1-1) du vecteur normal unitaire montre que l'application  $N : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  est dérivable en tout point. En fait, elle est à valeurs dans la sphère  $S^2$ ; on l'appelle *application de Gauss*.

Notons qu'en tout point  $P \in X$  il y a deux vecteurs normaux unitaires : si  $N(P)$  en est un,  $-N(P)$  est l'autre, que l'on peut exprimer en coordonnées en échangeant le rôle de  $u$  et  $v$  :

$$N(P) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = -\frac{\varphi_v \times \varphi_u}{\|\varphi_v \times \varphi_u\|} = -N(P) \quad .$$

**Proposition VII.2.3.**

(1) Si  $w \in T_P X$ ,  $dN_P(w) \in T_{N(P)} S^2$ .

(2)

$$\langle dN_P(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_P(w_2) \rangle$$

*Preuve:*

(1) Puisque  $\langle N(P), N(P) \rangle = 1$ , si  $w \in T_P(X)$ , en dérivant on obtient :  $2\langle dN_P(w), N(P) \rangle = 0$  ce qui montre que  $dN_P(w) \in T_{N(P)} S^2$ .

(2) Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation locale de  $X$  avec  $\varphi(u, v) = P$ . Posons

$$N_u = dN_P(\varphi_u) \quad , \quad N_v = dN_P(\varphi_v)$$

Si on dérive l'égalité  $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$  par rapport à  $v$ , on obtient :

$$(2-3) \quad \langle N_v, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{u,v} \rangle = 0$$

et en dérivant  $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$  par rapport à  $u$  :

$$(2-4) \quad \langle N_u, \varphi_v \rangle + \langle N, \varphi_{v,u} \rangle = 0 \quad .$$

Or  $\varphi_{u,v} = \varphi_{v,u}$ , donc on tire de (2-3) et (2-4) que

$$(2-5) \quad \langle N_v, \varphi_u \rangle = \langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle \varphi_v, N_u \rangle \quad .$$



La matrice de la forme bilinéaire  $\langle dN_P(w_1), w_2 \rangle$  dans la base  $\varphi_u, \varphi_v$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \langle N_u, \varphi_u \rangle & \langle N_u, \varphi_v \rangle \\ \langle N_v, \varphi_u \rangle & \langle N_v, \varphi_v \rangle \end{pmatrix}$$

et il suit de (2-5) que cette matrice, et donc la forme bilinéaire, est symétrique, ce qui démontre (2).  
q.e.d.

**Remarque VII.2.4.** Il suit de (1) ci-dessus que  $T_P X = T_{N(P)} S^2$ , puisque ces deux plans sont perpendiculaires à  $N(P)$ . On peut donc regarder  $dN_P$  comme application linéaire de  $T_P X$  dans lui-même :

$$dN_P : T_P X \rightarrow T_P X \quad .$$

La propriété (2) ci-dessus s'exprime en disant que l'application linéaire  $dN_P$  est *auto-adjointe*.

**Définition VII.2.5.** La deuxième forme fondamentale  $\Pi_P$  est la forme bilinéaire symétrique sur  $T_P X$  définie par :

$$\Pi_P(w_1, w_2) = -\langle dN_P(w_1), w_2 \rangle$$

On utilisera la même notation pour la forme quadratique associée :  $\Pi_P(w) = -\langle dN_P(w), w \rangle$

*Interprétation de la deuxième forme fondamentale.* Soit  $\alpha : I \rightarrow X$  une courbe régulière sur la surface  $X$ , paramétré par la longueur d'arc. Alors  $\alpha'(s) \in T_{\alpha(s)} X$ , donc  $\langle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0 \forall s \in I$  et en dérivant on obtient :

$$\langle (N(\alpha(s)))', \alpha'(s) \rangle + \langle N(\alpha(s)), \alpha''(s) \rangle = \langle dN_{\alpha(s)}(\alpha'(s)), \alpha'(s) \rangle + \langle N(\alpha(s)), \alpha''(s) \rangle = 0$$

ce qui montre que

$$\Pi_{\alpha(s)}(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \langle N(s), \alpha''(s) \rangle$$

et si on suppose que la trace de  $\alpha$  est contenue dans un 2-plan contenant  $N(\alpha(s_0))$ , alors on peut prendre  $N(\alpha(s_0))$  comme vecteur normal à  $\alpha$  dans ce plan, ce qui fait que  $\langle N(s_0), \alpha''(s_0) \rangle = k(s_0)$ , la courbure de  $\alpha$  en  $s_0$ . En fin de comptes :

$$\Pi_{\alpha(s_0)}(\alpha'(s_0), \alpha'(s_0)) = k(s)$$

ce qui veut dire que la forme quadratique associée à la deuxième forme fondamentale associée à un vecteur  $w$  tangent à la surface au point  $P$  la courbure au point  $P$  de toute courbe située sur la surface et dans le 2-plan par  $\tau$  et  $N(P)$ , dont le vecteur vitesse au point  $P$  est  $w$ .

*Rappel d'algèbre linéaire.* Soit  $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire symétrique et  $q(w) = B(w, w)$  la forme quadratique associée. Alors il existe une base orthonormale  $\{e_1, e_2\}$  dans laquelle  $q$  s'écrit :

$$q(w_1 e_1 + w_2 e_2) = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2$$

avec  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ . Notons que si  $\|w\| = 1$ , si on pose  $t = w_1$ , alors  $q(w) = t^2 \lambda_2 + (1 - t^2) \lambda_1 = t^2 (\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_2$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ ; on voit donc que  $\lambda_1$  est le maximum de  $q(w)$  sur le cercle  $\|w\| = 1$ , et  $\lambda_2$  la valeur minimale.

Voici une façon de démontrer l'existence de la base  $\{e_1, e_2\}$ . On pose  $\lambda_1 = \sup \{q(x) \mid \|x\| = 1\}$  et on choisit  $e_1$  tel que  $q(e_1) = \lambda_1$ . On choisit  $e_2$  orthogonal à  $e_1$ , de norme égale à 1, et on pose  $\lambda_2 = q(e_2)$ . Alors, si  $w \neq 0$ ,  $\frac{w}{\|w\|}$  est sur le cercle unité et  $q(\frac{w}{\|w\|}) = \frac{q(w)}{\|w\|^2}$ . On en déduit que

$$q(w) \leq \lambda_1 \|w\|^2 \quad \forall \mathbb{R}^2 w \in$$

et si on écrit  $w = w_1 e_1 + w_2 e_2$ , on voit que :

$$\begin{aligned} q(w) &= B(w_1 e_1 + w_2 e_2, w_1 e_1 + w_2 e_2) = w_1^2 q(e_1) + 2w_1 w_2 B(e_1, e_2) + w_2^2 q(e_2) = \\ &= \lambda_1 w_1^2 + 2w_1 w_2 B(e_1, e_2) + \lambda_2 w_2^2 \leq \lambda_1 (w_1^2 + w_2^2) \\ &\implies 2w_1 w_2 B(e_1, e_2) \leq (\lambda_1 - \lambda_2) w_2^2 \end{aligned}$$

ce qui n'est possible que si  $B(e_1, e_2) = 0$ , sinon en prenant  $w_2 = 1$  et  $w_1 > \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2B(e_1, e_2)}$  on contredit l'inégalité précédente. On a donc  $q(w) = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2$ . Dans cette nouvelle base, la matrice de  $B$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et on voit que  $\lambda_1, \lambda_2$  sont les valeurs propres de  $B$  et leur produit  $\lambda_1 \cdot \lambda_2$  est le déterminant de  $B$ .

Dans le cas de la deuxième forme fondamentale d'une surface régulière  $X$ , on note  $k_1, k_2$  les valeurs maximales et minimales qu'elle prend sur le cercle unité. Elles correspondent à une base orthonormale  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_P X$  telle que

$$\Pi_P(w_1 e_1 + w_2 e_2) = k_1 w_1^2 + k_2 w_2^2 \quad .$$

Si  $\alpha$  est une courbe régulière, paramétrée par la longueur d'arc, située sur la surface et dans un plan contenant  $N(P)$ , et  $\alpha(s_0) = P$ , si  $w = \alpha'(s_0)$ , la courbure de  $\alpha$  vaut  $k_1 w_1^2 + k_2 w_2^2$ . En particulier la courbure signée  $k(s_0)$  de  $\alpha$  en  $s_0$  est comprise entre  $k_1$  et  $k_2$ .

Notons que si on remplace  $N(P)$  par  $-N(P)$ , ce qui arrive par exemple si on échange  $u$  et  $v$  dans une paramétrisation locale de  $X$  au voisinage de  $P$ , alors  $\{k_1, k_2\}$  est remplacé par  $\{-k_2, -k_1\}$ . Par contre, le produit  $K = k_1 \cdot k_2$  ne change pas; on l'appelle *courbure de Gauss* de la surface au point  $P$ . La courbure de Gauss est égale au déterminant de la matrice de  $\Pi_P$  dans une base orthonormale de  $T_P X$ .

**Définition VII.2.6.** On dit que le point  $P$  est

- (1) *elliptique* si  $K > 0$
- (2) *hyperbolique* si  $K < 0$
- (3) *parabolique* si  $K = 0$ , mais  $dN_P \neq 0$
- (4) *planaire* si  $dN_P = 0$

De plus, on dit que  $P$  est un *ombilic* si  $k_1 = k_2$ , ce qui inclut le cas planaire, pour lequel  $k_1 = k_2 = 0$ .

Avant de regarder des exemples, il convient d'interpréter la deuxième forme fondamentale en termes d'équation locale régulière de la surface.

**Proposition VII.2.7.** Soit  $X \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière,  $P \in X$ ,  $U \ni P$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une équation locale de la surface  $X$  au voisinage de  $P$ . Alors la deuxième forme fondamentale  $\Pi_P$  coïncide à un scalaire près avec la restriction à  $T_P X$  de la deuxième dérivée de  $f$ . Plus précisément :

$$w \in T_P X \quad , \quad \Pi_P(w) = -\frac{1}{\|df_P\|} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (P) w_i w_j$$

*Preuve:* On peut prendre  $N(P) = \frac{df_P}{\|df_P\|}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \Pi_P(w) &= -\langle dN_P(w), w \rangle = -\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial x_j} (P) w_i w_j = -\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\|df_P\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) w_i w_j \\ &= -\frac{1}{\|df_P\|} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (P) w_i w_j - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\|df_P\|} \right) \underbrace{\left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} w_i \right)}_{=0} w_j \end{aligned}$$

*q.e.d.*

**Exemples VII.2.8.** On va regarder des exemples de surfaces qui sont des graphes de fonctions  $g(u, v)$ , au voisinage de  $u = v = 0$ ; elles sont donc paramétrées par  $(u, v) \mapsto (u, v, g(u, v))$ , qui est bien une paramétrisation régulière. On suppose que  $g(0, 0) = 0$  et que  $g_u(0, 0) = g_v(0, 0) = 0$ , ce qui revient à

dire que le plan tangent à la surface au point  $(0,0,0)$  est le plan horizontal.  $f(u, v, z) = z - g(u, v) = 0$  est une équation locale régulière au voisinage de  $P = (0,0,0)$ , pour laquelle

$$df_P = (-g_u, -g_v, 1) \Rightarrow \|df_P\| = 1$$

et  $f_{u,u} = -g_{u,u}$ ,  $f_{u,v} = -g_{u,v}$ ,  $f_{v,v} = -g_{v,v}$ . Dans ces conditions :

$$\Pi_P(w) = g_{u,u}w_1^2 + 2g_{u,v}w_1w_2 + g_{v,v}w_2^2$$

- (1) Si l'on prend  $g(u, v) = u^2 - v^2$ , la deuxième forme fondamentale en  $P$  est  $2w_1^2 - 2w_2^2$ . On a donc  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = -2$ ,  $K = -4$  et  $P$  est un point hyperbolique.
- (2) Si  $g(u, v) = u^2 + v^2$ ,  $P$  est un point elliptique, avec  $k_1 = k_2 = 2$ ; c'est donc un ombilic. Si on prend  $g(u, v) = u^2 + 2v^2$ ,  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 4$ ,  $K = 8$ ;  $P$  est un point elliptique, mais pas un ombilic.
- (3) Si  $g(u, v) = u^2$ ,  $\Pi_P(w) = 2w_1^2$ , donc  $P$  est un point parabolique et  $K = 0$ .
- (4) Si  $g(u, v) = u^3 + v^3$ ,  $\Pi_P = 0$ ,  $P$  est un point plaine et  $K = 0$ .

### VII.2.1 Les ombilics de l'ellipsoïde

On a vu qu'un point  $P$  d'une surface régulière  $X$  est dit *ombilic* si la deuxième forme fondamentale s'écrit sous la forme  $k(x_1^2 + x_2^2)$  dans une base orthogonale, et donc en fait dans n'importe quelle base orthogonale de  $T_P X$ . Cela revient à dire que  $\Pi_P(w) = k \cdot \langle w, w \rangle$ . On va utiliser ce fait pour calculer les ombilics de l'ellipsoïde défini par l'équation

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1 = 0$$

que nous désignerons par  $X$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $a > b > c > 0$ .

L'espace tangent au point  $P = (x, y, z)$  s'écrit

$$T_P X = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \mid \frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta = 0 \right\}$$

et si  $z \neq 0$ , on peut le paramétrer par l'inverse de sa projection sur le plan  $OXY$ , soit :

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_P X \quad , \quad \alpha(\xi, \eta) = \left( \xi, \eta, -\frac{c^2}{z} \left( \frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta \right) \right) \quad .$$

Il suit VII.2.7 que, à un coefficient non nul près, la deuxième forme fondamentale s'écrit, à l'aide de cette paramétrisation de  $T_P X$  :

$$\begin{aligned} \Pi_P(\alpha(\xi, \eta)) &= \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{1}{c^2} \left( \frac{c^2}{z} \left( \frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta \right) \right)^2 \\ &= \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{c^2}{z^2} \left( \frac{x^2}{a^4}\xi^2 + 2\xi\eta \frac{xy}{a^2b^2} + \frac{y^2}{b^4}\eta^2 \right) \\ &= \xi^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{c^2}{a^4} \frac{x^2}{z^2} \right) + \eta^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{c^2}{b^4} \frac{y^2}{z^2} \right) + 2\xi\eta \frac{1}{c^2} \left( \frac{xy}{z^2} \frac{c^4}{a^2b^2} \right) \end{aligned}$$

La première forme fondamentale s'écrit comme la composition de  $\alpha$  avec le produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{aligned} I_P(\alpha(\xi, \eta)) &= \xi^2 + \eta^2 + \frac{c^4}{z^2} \left( \frac{x^2}{a^4}\xi^2 + 2\xi\eta \frac{xy}{a^2b^2} + \frac{y^2}{b^4}\eta^2 \right) \\ &= \xi^2 \left( 1 + \frac{x^2}{z^2} \frac{c^4}{a^4} \right) + \eta^2 \left( 1 + \frac{y^2}{z^2} \frac{c^4}{b^4} \right) + 2\xi\eta \left( \frac{xy}{z^2} \frac{c^4}{a^2b^2} \right) \end{aligned}$$

Supposons que  $\Pi_P = k \cdot I_P$ , pour un  $k$  à déterminer.

Si  $x, y \neq 0$ , cela entraîne, en regardant le coefficient de  $\xi\eta$ , que  $k = \frac{1}{c^2}$ , et en regardant le coefficient de  $\xi^2$  on en déduit :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{c^2}{a^4} \frac{x^2}{z^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{x^2}{z^2} \frac{c^2}{a^4} \implies a^2 = c^2$$

ce qui est impossible.

Supposons donc que  $y = 0$ . Alors

$$\begin{aligned} \Pi_P &= \xi^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{c^2}{a^4} \frac{x^2}{z^2} \right) + \eta^2 \frac{1}{b^2}, \quad \text{I} = \xi^2 \left( 1 + \frac{x^2}{z^2} \frac{c^4}{a^4} \right) + \eta^2 \Rightarrow k = \frac{1}{b^2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{c^2}{a^4} \frac{x^2}{z^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{x^2}{z^2} \frac{c^4}{a^4 b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{z^2} \left( \frac{c^2}{a^4} - \frac{c^4}{a^4 b^2} \right) = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \Rightarrow \frac{x^2}{z^2} \left( \frac{b^2 c^2 - c^4}{a^4 b^2} \right) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{z^2} = \frac{a^2}{c^2} \left( \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} \right) \end{aligned}$$

et comme suit de l'équation de l'ellipsoïde que  $\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &= \left( \frac{a^2 - x^2}{a^2} \right) a^2 \left( \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} \right) \Rightarrow x^2 \left( 1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} \right) = a^2 \left( \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} \right) \Rightarrow \\ &x^2 \left( \frac{b^2 - c^2 + a^2 - b^2}{b^2 - c^2} \right) = a^2 \left( \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} \right) \Rightarrow x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \end{aligned}$$

et en échangeant les rôles de  $x$  et  $z$ , ce qui revient à échanger  $a$  et  $c$ , on trouve que

$$z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

ce qui nous donne en tout 4 solutions.

# Bibliographie

- [1] Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1976. [75](#)
- [2] E. Hairer. Analyse complexe, 2005–2006. [52](#)
- [3] E. Hairer and G. Wanner. *Analysis by its history*. Springer Verlag, Berlin, 1997. [5](#), [33](#), [39](#)
- [4] John McCleary. *Geometry from a differentiable Viewpoint*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. [75](#)
- [5] J. Milnor. A Nobel Prize for John Nash. *The mathematical Intelligencer*, 17(3), 1995. [68](#)
- [6] Felice Ronga. [Analyse réelle post-élémentaire](#). [95](#)

# Index

- adhérence, 10
- amplification, 22
- application
  - compatible, 25
  - continue, 7
  - de Gauss, 98
  - fermée, 13
  - ouverte, 13
  - polynomiale, 42
  - propre, 41
- arc
  - dans un espace topologique, 53
  - de courbe, 75
- attachement de deux espaces, 36
- bases
  - de topologie, 5
  - équivalentes, 6
- bord d'un sous-ensemble, 12
- boule ouverte, 4, 5
- bouteille de Klein, 28
- Cantor, ensemble de, 23
- carte, 95
- carte sur la sphère, 71
- centre de courbure, 82
- cercle osculateur, 80
- chemin, 53
  - composé, 53
  - inverse, 53
- compacité
  - somme disjointe, 35
- compactifié d'Alexandroff, 42
- comparaison de topologies, 7
- composante connexe, 50
- composante connexe par arcs, 54
- cône sur un sous-ensemble, 44
- courbe
  - convexe, 88
  - de l'espace, 75
  - fermée, 87
  - fermée simple, 87
  - paramétrée, 75
  - plane, 75
  - régulière, 76
- courbure, 82
- courbure signée, 82
- courbure (courbe dans l'espace), 90
- courbure de Gauss, 100
- cubique gauche, 91
- degré d'une application, 62
- deuxième forme fondamentale, 99
- difféomorphisme, 76
- dîner au restaurant, 68
- distance, 4
- distance euclidienne, 4
- ensemble
  - de Cantor, 23
  - quotient, 25
  - saturé, 28
- espace
  - compact, 32
  - connexe, 47
  - connexe par arcs, 53
  - de Sirpinski, 4
  - de Hausdorff, 31
  - localement compact, 39
  - localement connexe, 54
  - localement connexe par arcs, 54
  - métrique, 4
  - normal, 33
  - projectif, 44
  - régulier, 33
  - séparé, 31
  - topologique, 3
- factoriser une application, 34
- fermé, 10
- fermeture, 10, 11
- fibres, 26
- frontière d'un sous-ensemble, 12
- gain, 68
- homéomorphisme, 9
- homotopie, 63

- intérieur, 11
- limite d'une suite, 11
- métriques
  - équivalentes, 6
- métrique, 4
- métrisabilité, 21
- nombre de Lebesgue, 38
- ombilic, 100
- ordre d'annulation, 77
- ordre de contact, 77, 79
- orientation, 76
- ouverts, 3
- parabole semi-cubique, 76
- partition, 25
- peigne des topologies, 49
- plan osculateur, 91
- plan projectif, 28
- point
  - d'hyperosculation, 84
  - d'équilibre de Nash, 68
  - d'inflexion, 87
  - d'inflexion ordinaire, 87
  - d'osculation ordinaire, 84
  - elliptique, 100
  - hyperbolique, 100
  - parabolique, 100
  - planaire, 100
  - singulier isolé d'un champ de vecteurs, 70
- première forme fondamentale, 97
- produits
  - de compacts, 35
  - de connexes, 51
  - de séparés, 31
- projection stéréographique, 43
- projection canonique (produits), 17
- projection canonique (quotients), 25
- rayon de courbure, 82
- recollement de deux espaces, 36
- recouvrement, 32
- rectangle, 17
- relation d'équivalence, 25
- relèvement, 60
- reparamétrisation, 76
- rétract, 67
- rétraction, 67
- ruban
  - de Möbius, 28
  - simple, 28
- somme disjointe, 14
- sommet, 84
- suite extraite, 37
- surface
  - de révolution, 96
  - révolution, 19
  - réglée, 96
  - régulière, 95
- théorème
  - d'existence d'équilibre de Nash, 68
  - des quatre sommets, 88
  - du point fixe de Brower, 67
  - fondamental de l'algèbre, 52
- théorie des jeux, 68
- topologie, 3
  - associée à une métrique, 5
  - discrète, 3
  - grossière, 3
  - induite, 4
  - produit, 18
  - somme disjointe, 14
- tore, 28
- tranche, 19
- valeur d'adhérence, 37
- vecteur
  - binormal, 90
  - normal, 90
  - tangent, 90
  - vitesse, 75
- voisinage, 12