Rappel: **Ex 1** Série géométrique : $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & |r|<1 \\ \text{divergente}, & |r| \geq 1 \end{cases}$

Ex 2 Série harmonique. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente.

Ex 3 La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Dém. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \left(\frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{2}\Big(\underbrace{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots}_{\leq S_n}\Big)$

$\leq 2 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}$ $\qquad \leq 2 \cdot \frac{1}{4^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}$ $\qquad \leq 2 \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2}$

$\Rightarrow S_n < 1 + \frac{1}{2} S_n \Rightarrow \frac{1}{2} S_n < 1 \Rightarrow S_n < 2 \quad \forall n \geq 2$

$(S_n) \uparrow$: $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Alors $(S_n) \uparrow$ et majorée par $2 \Rightarrow (S_n)$ converge.

$\Rightarrow$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Remarques (1) En général, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ est convergente pour tout $p > 1$ (Série 7).

(2)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler ~1750)

Fonction zêta de Riemann

(3)* La fonction zêta de Riemann : $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$; convergente $s > 1$

$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$; $\zeta(s) \in \mathbb{R}$ $s > 1$.

$\zeta(2k) = C_k (\pi)^{2k}$; $C_k \in \mathbb{Q} \Rightarrow \zeta(2k) \notin \mathbb{Q}$ $\forall k \geq 1$ (Euler ~1750)

$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ est irrationnel (Apéry ~ 1979)

$\zeta(5) \notin \mathbb{Q}$?? dans l'état d'incertitude ; $\zeta(7) \notin \mathbb{Q}$? question ouverte.

Hypothèse $\zeta(n)$ sont transcendants $\forall n \geq 2$ naturels.

Exercice ** : $\prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \cdot \zeta(s) = 1$, $s \geq 2$ naturel.

Déf Convergence absolue. Une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ est convergente.

Proposition Une série absolument convergente est convergente.

Dém: Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$; $P_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ On sait que (P_n) converge.

$\forall m > n \Rightarrow |S_m - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = |P_m - P_n| \leq \varepsilon$ parce que (P_n) est une suite de Cauchy

inégalité $\triangle$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |S_m - S_n| \leq \varepsilon \Rightarrow (S_n)$ est une suite de Cauchy

$\Rightarrow$ elle est convergente. ▨

Proposition. (Condition nécessaire)

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dém: $\left(S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ est une suite de Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}:$

$\forall m,n \geq n_0$, $|S_m - S_n| \leq \varepsilon$, en particulier $|S_{n+1} - S_n| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$$\underbrace{|S_{n+1} - S_n|}_{=|a_{n+1}|} \leq \varepsilon \overset{\text{déf de limite}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \blacksquare$$

Ex $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2}$ n'existe pas $\Rightarrow$ la série est divergente.

Remarque $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ n'implique pas la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente)

§ 3.2 Critères de convergence.

Proposition Critère de Leibnitz pour les séries alternées.

Soit (a_n) une suite telle que

$$\left.\begin{cases} (1) \text{ il existe } p \in \mathbb{N} : \forall n \geq p, & |a_{n+1}| \leq |a_n| \\ (2) \quad \text{—}\,\text{''}\,\text{—} & a_{n+1} \cdot a_n \leq 0. \ \xleftarrow{\text{déf}} \text{alternée} \\ (3) \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente

Dém: $\forall n \geq p \quad \forall k \in \mathbb{N},\ k>1$, pair

$$S_{n+k} - S_{n-1} = \underbrace{a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}}_{\text{impair}} = \overset{>0,\ <0}{a_n} + (\underbrace{a_{n+1} + a_{n+2}}_{\leq 0,\ \geq 0}) + \ldots + (\underbrace{a_{n+k-1} + a_{n+k}}_{\leq 0,\ \geq 0})$$

$$= (\underbrace{a_n + a_{n+1}}_{\geq 0,\ \leq 0}) + (\underbrace{a_{n+2} + a_{n+3}}_{\geq 0,\ \leq 0}) + \ldots + \overset{>0,\ <0}{a_{n+k}}$$

Si $a_n > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k} \leq a_n$

$a_n < 0 \quad \Rightarrow \quad a_n \leq a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k} \leq 0$

$\Rightarrow \quad |a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| \leq |a_n|$

Mais $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0,\ |a_n| \leq \varepsilon.$

$\Rightarrow \quad |S_{n+k} - S_n| \leq |a_n| \leq \varepsilon \quad \forall k>1$, k pair (le même n_0 pour tout k pair, $k>1$)

k impair : Voir [DZ, §3.2.3]

$\Rightarrow (S_n)$ est une suite de Cauchy

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente.

$\boxed{/\!/\!/}$

Ex Série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ est convergente par le critère de Leibnitz.
$= \log 2$ (à voir plus tard).

Proposition Critère de comparaison (pour les séries à termes $a_n \geq 0$)

Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que $\exists k \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq k$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

Dém: (1) Soit $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$, $P_n = \sum_{i=0}^{n} b_i \Rightarrow 0 \leq a_i \leq b_i \quad \forall i \geq k$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=n+1}^{m} a_i \leq \sum_{i=n+1}^{m} b_i \quad \forall m > n \geq k$$

$$0 \leq \overset{\parallel}{S_m - S_n} \leq P_m - P_n \quad \forall m, n \geq k$$

$\Rightarrow$ Si (P_n) est une suite de Cauchy $\Rightarrow (S_n)$ l'est aussi.

$\Rightarrow$ Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Si (S_n) divergente $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$; $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n = +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est divergente.

$\blacksquare$

Ex $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2}$ Considérons $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{\cos(n!)}{(n+1)^2}\right|$

$\Rightarrow \displaystyle\left|\frac{\cos(n!)}{(n+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ convergente.

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{\cos(n!)}{(n+1)^2}\right|$ est convergente par le critère de comparaison.

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2}$ est absolument convergente $\Rightarrow$ convergente.

Remarque Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ possède que de termes positifs (négatifs), et la suite des sommes partielles est majorée (minorée), alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente.

Proposition **Critère de d'Alembert**

Soit (a_n) une suite : $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \in \mathbb{R}$

Alors si $\rho < 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente absolument.

si $\rho > 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est divergente.

Idée : comparaison avec une série géométrique. (Voir Série 7)

Proposition. Critère de Cauchy (de la racine)

Soit (a_n) une suite et $\exists \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \rho \in \mathbb{R}$

Alors si $\rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument

si $\rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Idée: comparaison avec une série géométrique (Voir Série 7).

Remarques. (1) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ et $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \Rightarrow$ forcement $r = \ell$.

(2) Parfois $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, mais $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ n'existe pas.
(Voir un exemple dans Série 7).

(3) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, alors pas de conclusion sur la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Ex $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$ et la série diverge.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = 1$ et la série converge

Ex (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ $\Rightarrow$ Par d'Alembert $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0$.

Puisque $0 < 1$ $\Rightarrow$ la série est convergente.

(Remarque. $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!} = 0$ par le critère nécessaire)

(2) Série avec paramètre $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $x \in \mathbb{R}$ un paramètre.

$\Rightarrow$ Par le critère de d'Alembert $\lim_{k\to\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{x}{k+1} = 0 < 1$

$\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$. (On va voir plus tard que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{3n-1}\right)^{2n-1}$, $x \in \mathbb{R}$ un paramètre.

Par le critère de Cauchy: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{nx}{3n-1}\right|^{\frac{2n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{3-\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}\right|^{2-\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}} = \left|\frac{x}{3}\right|^2 = \rho$

$\Rightarrow$ Si $|x| < 3 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{3}\right|^2 < 1$ $\Rightarrow$ la série converge absolument.

Si $|x| > 3 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{3}\right|^2 > 1$ $\Rightarrow$ la série diverge.

Soit $x = 3$. $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ condition nécessaire ?

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\left(1-\frac{1}{3n}\right)}^{\to 1}}{\underbrace{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{3n\cdot\frac{2}{3}}}_{\to \frac{1}{e}}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{e}\right)^{2/3}} = e^{\frac{2}{3}} \neq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n-1} \text{ diverge}$$

Soit $x=-3 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-3n}{3n-1}\right)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\overbrace{(-1)^{2n-1}}^{=-1\ \forall n}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n-1} = -\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n-1}}_{\text{divergente}} \Rightarrow$ divergente.

Conclusion: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3x}{3n-1}\right)^{2n-1}$ converge absolument si $|x|<3$

diverge si $|x|\geq 3$.