THÉORIE DES GROUPES. — *Une démonstration de la conjecture de Connes-Kasparov pour les groupes de Lie linéaires connexes réductifs.* Note de Antony Wassermann, présentée par Alain Connes.

On détermine la C^*-algèbre réduite d'un groupe de Lie linéaire connexe réductif à isomorphisme stable près et l'on montre que l'induction de Dirac établit un isomorphisme entre sa K-théorie et le module des représentations spinorielles d'un sous-groupe compact maximal.

GROUP THEORY. — A proof of the Connes-Kasparov conjecture for connected reductive linear Lie groups.

We determine the reduced C^*-algebra of a connected reductive Lie group up to stable isomorphism and show that Dirac induction establishes an isomorphism between its K-theory and the module of spin representations of a maximal compact subgroup.

L'INDUCTION DE DIRAC. — Soient G un groupe de Lie linéaire connexe réductif, K un sous-groupe compact maximal de G, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ leurs algèbres de Lie respectives, et $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$. Par l'action adjointe, on obtient une représentation de K dans $SO(\mathfrak{p})$. Le 2-cocycle spinoriel de $SO(\mathfrak{p})$ induit un 2-cocycle spinoriel sur K et on peut ainsi parler des représentations « spinorielles » de K, y compris des virtuelles. Elles forment un module $R_{spin}(K)$ sur l'anneau des représentations ordinaires $R(K)$ de K. Soit S le module spinoriel canonique de $Spin(\mathfrak{p})$. Si $m=\dim(\mathfrak{p})=\dim(G/K)$ est pair, il y a une graduation naturelle $S=S^+\oplus S^-$ telle que la multiplication $c(X)$ de Clifford par les vecteurs X de $\mathfrak{p}$ transporte $S^\pm$ dans $S^\mp$. Soit V une représentation spinorielle de K, de sorte que $V\otimes S$ soit une représentation ordinaire de K. L'opérateur de Dirac total $D_V: (C_c^\infty(G)\otimes S\otimes V)^K\to(C_c^\infty(G)\otimes S\otimes V)^K$ peut être construit en prenant une base orthonormée X_i de $\mathfrak{p}$ et en posant $D_V=\sum X_i\otimes c(X_i)\otimes I$. Quand m est pair, D_V anticommute avec la graduation. Ainsi $F_V=D_V(I+D_V^2)^{-1/2}$ définit un endomorphisme de module hilbertien $L^2(G/K, S\otimes V)$ sur la C^*-algèbre réduite $C_r^*(G)$ de G, compatible avec la graduation si m est pair. Comme le carré de F_V est presque l'identité, on obtient de cette manière un élément de $K_m(C_r^*(G))$, qu'on notera $[D_V]$. L'application $V\mapsto[D_V]$ se prolonge en un homomorphisme $R_{spin}(K)\to K_m(C_r^*(G))$ que nous appellerons *l'induction de Dirac*. Nous pouvons maintenant annoncer la conjecture de Connes-Kasparov ([6], [3]) et sa solution. (Notons aussi que certains cas de la conjecture ont déjà été établis par Kasparov lui-même, par Penington-Plymen, et par Vallette.)

THÉORÈME 1. — *L'induction de Dirac établit un isomorphisme entre* $R_{spin}(K)$ *et* $K_*(C_r^*(G))$.

On peut interpréter ce théorème de différentes façons. D'une part, il généralise les résultats de Schmid et de Parthasarathy qui montrent que chaque représentation de la série discrète de G peut être réalisée sur le noyau L^2 de D_V pour un certain V. D'autre part, il fournit une version primitive du théorème de l'indice de Connes-Moscovici [3] pour les opérateurs elliptiques G-invariants entre des fibrés vectoriels homogènes sur G/K. En effet, un tel opérateur définit un élément de $C_r^*(G)$ de la même manière que D_V; on le notera $\mathrm{ind}_a(D)$, c'est l'indice analytique de D. L'indice topologique de D est défini à partir du symbole de D et donne un élément $\mathrm{ind}_t(D)$ de $K_K(\mathfrak{p})\cong R_{spin}(K)$ qui dépend seulement des fibrés vectoriels sous-jacents, c'est-à-dire des représentations de K. Le théorème 1 est alors l'équivalent du théorème de l'indice suivant, qui généralise un principe de Bott [2] au cas non-compact.

0249-6291/87/03040559 $ 2.00 © Académie des Sciences

COROLLAIRE 2. — $\mathrm{ind}_a(D) = \mathrm{ind}_t(D)$.

COCYCLES DES GROUPES DE TRANSFORMATIONS LINÉAIRES. — Soit Γ un groupe fini opérant linéairement sur l'espace vectoriel réel V. Il faut déterminer le spectre du produit croisé $C_0(V) \rtimes \Gamma$. En utilisant l'isomorphisme $C_0(V) \cong C^*(V^*)$ donné par la transformation de Fourier, où V^* désigne le dual de V (comme espace vectoriel ou comme groupe), on peut identifier $C_0(V) \rtimes \Gamma$ et $C^*(V^* \rtimes \Gamma)$, de sorte que le problème est réduit à la détermination des représentations irréductibles du produit semi-direct $V^* \rtimes \Gamma$. On utilise alors l'analyse de sous-groupe normal de Mackey.

PROPOSITION 3. — *Les représentations irréductibles $\pi_{v,\sigma}$ de $C_0(V) \rtimes \Gamma$ sont de dimension finie et correspondent aux points v (ou plus exactement aux Γ-orbites) dans V et aux représentations irréductibles σ des stabilisateurs Γ_v. On a*

$$\mathrm{Tr}(\pi_{v,\sigma}(\varphi)\,\pi_{v,\sigma}(\gamma)) = |\Gamma|^{-1} \sum \varphi(\gamma_1^{-1} v)\,\chi_\sigma(\gamma_1 \gamma \gamma_1^{-1}),$$

pour $\varphi \in C_0(V)$, $\gamma \in \Gamma$, *où χ_σ est le caractère de σ prolongé par zéro en dehors de Γ_v.*

Supposons maintenant que $u_\gamma \in C(V, U_n)$ est un Γ-cocycle, de sorte que $u_{\gamma_1\gamma_2} = u_{\gamma_1}\gamma_1(u_{\gamma_2})$ pour γ_1, γ_2 dans Γ. On forme le projecteur $p(u) = |\Gamma|^{-1} \sum u_\gamma . \gamma$ dans l'algèbre des multiplicateurs de $(C_0(V) \otimes M_n(C)) \rtimes \Gamma$.

PROPOSITION 4. — $\mathrm{Tr}(\pi_{v,\sigma}(p(u)) = \langle \pi_v, \sigma \rangle_{\Gamma_v} / |\Gamma : \Gamma_v|$ *où* $\pi_v(\gamma) = u_\gamma(v)$ *pour* $\gamma \in \Gamma_v$.

COROLLAIRE 5. — $\mathrm{supp}(p(u)) = \{\pi : \pi(p(u)) \neq 0\}$ *ne dépend que de la représentation* $\pi_0 = u.(0)$ *de* Γ.

Démonstration. — Comme l'action est linéaire, $\Gamma_v = \Gamma_{\lambda v}$ pour tout scalaire non nul λ. En faisant tendre λ vers zéro, on déduit que $\pi_v \cong \pi_0|_{\Gamma_v}$. Mais alors on a $\langle \pi_v, \sigma \rangle_{\Gamma_v} = \langle \pi_0, \mathrm{ind}_{\Gamma_v \uparrow \Gamma}\, \sigma \rangle_\Gamma$ par réciprocité de Frobenius, d'où le résultat.

COROLLAIRE 6. — *Soit $u_\gamma \in C(V, U(\mathscr{H}))$ un Γ-cocycle qui commute avec une famille croissante de projecteurs de rang fini sur $\mathscr{H}$ tendant fortement vers I. Si v_γ est le cocycle défini par $v_\gamma(x) \equiv u_\gamma(0)$, on a* $\mathrm{supp}(p(u)) = \mathrm{supp}(p(v))$.

COROLLAIRE 7. — *Soit $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma : \pi_0(\gamma) \in C\,1\}$. On suppose que Γ s'écrit comme un produit semi-direct $\Gamma = \Gamma_0 \rtimes \Gamma_1$. Si la restriction de π_0 à Γ_1 est quasi équivalente à la représentation régulière de Γ_1, alors*

$$(C_0(V) \otimes \mathscr{K}(\mathscr{H}))^{\mathrm{Ad}\,u\,.\,(\alpha \otimes \mathrm{id})} \cong p(u)((C_0(V) \otimes \mathscr{K}) \rtimes \Gamma)\, p(u)$$
$$\simeq p(v)((C_0(V) \otimes \mathscr{K}) \rtimes \Gamma)\, p(v) \simeq C_0(V/\Gamma_0) \rtimes \Gamma_1.$$

DÉTERMINATION DE LA C^*-ALGÈBRE RÉDUITE À ISOMORPHISME STABLE PRÈS.

THÉORÈME 8 ([1], [4]). — *Soit G un groupe de Lie réductif connexe. Alors on a*

$$C_r^*(G) \cong \oplus_{P,\omega} (C_0(\hat{A}) \otimes \mathscr{K}(\mathscr{H}_\omega))^{\mathrm{Ad}\,u\,.\,(\alpha \otimes \mathrm{id})}.$$

La sommation se fait sur les classes d'équivalence (P, ω) où $P = MAN$ est un sous-groupe parabolique cuspidal et ω est une représentation de la série discrète du groupe réductif M (non connexe en général). On peut prolonger la représentation trivialement à MAN et induire une représentation $\mathrm{ind}(\omega)$ de G sur $\mathscr{H}_\omega$ — c'est la représentation de la série principale généralisée correspondant au paramètre 0 dans $\hat{A}$. Le groupe de Weyl de A est défini comme $W = N_K(A)/C_K(A)$. Rappelons la correspondance entre sous-groupes de Cartan de G et sous-groupes paraboliques cuspidaux, ou au moins leurs composantes de Levi $L = MA$. La composante connexe C^0 d'un sous-groupe de Cartan est un produit direct $C^0 = T.A$ où T est un tore et A un groupe vectoriel; la composante de Levi est simplement le centralisateur de A dans G et admet une décomposition naturelle $L = MA$.

où M contient T comme tore maximal. Ainsi W agit naturellement dans A, $\hat{A}$ et $\hat{M}$. Soient W_ω le stabilisateur de ω dans W, et α l'action de W dans $\hat{A}$ restreinte à W_ω. Si G est linéaire, les opérateurs d'entrelacement de Knapp-Stein $u_\gamma \in C(\hat{A}, \mathcal{U}(\mathcal{H}_\omega))$ satisfont à la relation de cocyle $u_{\gamma_1 \gamma_2} = u_{\gamma_1} \alpha_{\gamma_1} \otimes \mathrm{id}(u_{\gamma_2})$ pour $\gamma_1 \gamma_2 \in W_\omega$. Posons $\pi_0(\gamma) = u_\gamma(0)$ et $W'_\omega = \{\gamma \in W_\omega : \pi_0(\gamma) \in \mathbf{C}\, I\}$. Knapp et Stein ont démontré que :

(i) $W_\omega = W'_\omega \rtimes R_\omega$, où R_ω est un 2-groupe abélien élémentaire et W'_ω est le groupe de Weyl d'un système de racines dans un sous-espace de A invariant par R_ω.

(ii) Les opérateurs $\pi_0(\gamma)$ $(\gamma \in R_\omega)$ sont linéairement indépendants et engendrent le commutant de $\mathrm{ind}(\omega)$; donc π_0 est quasi équivalente à la représentation régulière de R_ω.

En combinant ces résultats avec le théorème 8 et le corollaire 7, on obtient :

THÉORÈME 9. — *Soit G un groupe de Lie linéaire connexe réductif. Alors, à isomorphisme stable près,* $C_r^*(G) \simeq \oplus_{P,\omega} C_0(\hat{A}/W'_\omega) \rtimes R_\omega$.

DÉTERMINATION DE $K(C_r^*(G))$: REPRÉSENTATIONS ESSENTIELLES.

LEMME 10. — *Si* $W'_\omega \neq \{1\}$ *pour* $\omega \in \hat{M}_d$, *alors on a* $K_*(C_0(\hat{A}/W'_\omega) \rtimes R_\omega) = 0$.

Démonstration. — D'après une remarque d'Atiyah $K_*(C_0(\hat{A}/W'_\omega) \rtimes R_\omega) = K^*_{R_\omega}(\hat{A}/W'_\omega)$. D'après (i) ci-dessus, en appelant V_1 le sous-espace de $\hat{A}$ engendré par le système de racines de W'_ω et V_2 son complémentaire orthogonal, on a :

$$\hat{A}/W'_\omega = (V_1 \times V_2)/W'_\omega = V_1/W'_\omega \times V_2 = C \times V_2,$$

où C est un cône fermé de V_1 sur lequel R_ω opère par automorphismes affines. Si on compactifie le cône $C \times V_2$ en ajoutant les rayons issus de l'origine, il est clair que la compactification est contractile de manière équivariante par la contraction radiale évidente. De plus, l'espace des rayons qu'on a ajoutés peut être lui-même contracté de manière équivariante sur le rayon barycentrique de C. On en déduit le résultat.

DÉFINITION 11. — Soit ω une représentation limite de série discrète de M. On dira que ω est *essentielle* si $W'_\omega = \{1\}$, et *inessentielle* dans le cas contraire. (Notons que les définitions de Knapp-Stein s'étendent aux limites de série discrète, et que pour M = G toute ω est essentielle.)

Supposons que G soit un groupe linéaire connexe réductif à série discrète. Tel est le cas si un tore maximal T de K est aussi abélien maximal dans G. La décomposition de Cartan de G est invariante par T et permet de séparer les racines de T en types compacts et non compacts, selon que les vecteurs propres correspondants sont dans $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ ou dans $\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$. Soit Φ un choix de racines positives pour T dans $\mathfrak{t}^*$. Les caractères de la série discrète de G sont définis pour les paramètres λ de $\mathfrak{t}^*$ qui satisfont à $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Phi$ ainsi qu'à une condition d'intégralité. En autorisant l'inégalité au sens large pour les racines positives non compactes, on obtient un caractère $\Theta(\lambda, \Phi)$, dit une limite de série discrète. Si j est le nombre de racines positives (simples) non compactes orthogonales à λ, on a 2^j choix possibles pour Φ et par conséquent une *classe* de 2^j caractères de limites de série discrète associées, tous irréductibles et inéquivalents. D'après [8], on obtient :

LEMME 12. — *Il y a une correspondance bijective entre les représentations essentielles* ω *de la série discrète de* M, *quand* M *varie, et les classes de représentations* ω_i *limites de série discrète de* M_{max}, *où* P_{max} *est le sous-groupe parabolique cuspidal correspondant à un sous-groupe de Cartan fondamental (maximalement compact) de* G. *Cette correspondance est spécifiée par la formule* $\mathrm{ind}(\omega) \simeq \oplus_{i=1}^{2^j} \mathrm{ind}(\omega_i)$. *De plus on a*

$$\log_2 |R_\omega| = j = \dim A - \dim A_{max}.$$

THÉORÈME 13. — *Si $j \equiv \dim A_{max} \pmod 2$, $K_j(C^*_r(G)) \cong \oplus \mathbf{Z}$, avec une copie de $\mathbf{Z}$ pour chaque classe de représentations essentielles limites de série discrète de P_{max}; l'autre K-groupe est zéro.*

La démonstration de ce théorème repose sur les lemmes 10 et 12, et sur le résultat élémentaire suivant. On fait agir $\mathbf{Z}_2$ par multiplication par -1 dans $\mathbf{R}$.

LEMME 14. — $K^0_{\mathbf{Z}_2}(\mathbf{R}) = \mathbf{Z}$ *et* $K^1_{\mathbf{Z}_2}(\mathbf{R}) = 0$.

Démonstration du théorème 1. — Soit V_μ une représentation spinorielle de poids dominant $\mu \in \mathfrak{t}^*$. Alors dans la représentation $\operatorname{ind}(\omega_\lambda \otimes i\nu \otimes 1)$, l'opérateur de Dirac total D_{V_μ} a pour carré $|\mu+\rho_c|^2+|\nu|^2-|\lambda|^2$ où ρ_c est la demi-somme des racines compactes de M_{max} (rappelons que $T \subset M_{max}$). Supposons que ω_λ soit essentielle. Si $|\mu+\rho_c| > |\lambda|$, on n'obtient aucune contribution à la K-théorie en la composante ω_λ; par contre si $|\mu+\rho_c| \leq |\lambda|$, on obtient une contribution seulement si $(\mathscr{H}^*_\omega \otimes S_K \otimes V_\mu)^K \neq 0$ et la dimension de cet espace détermine le multiple du générateur qu'on obtient dans cette composante. Supposons que ω_λ corresponde à une classe $\{\omega_i\}$ de caractères essentiels de limites de série discrète de M_{max}. Alors par réciprocité de Frobenius, la dimension à calculer est $\sum \dim(\mathscr{H}^*_i \otimes S_K \otimes V_\mu)^{K \cap M^0_{max}}$ où $\mathscr{H}_i$ est l'espace de la représentation ω_i. Le fait que c'est la dimension exacte pour fournir un générateur en une composante exacte résulte de l'argument de Schmid (utilisant la conjecture de Blattner pour les limites de la série discrète [5]) pour réaliser la série discrète [9], ainsi que des résultats suivants.

LEMME 15. — (i) *Les caractères essentiels de limites de série discrète de M^0_{max} correspondent aux paramètres $\mu+\rho_c$ où μ est K-dominant.*

(ii) $S_K|_{K \cap M^0_{max}} \cong 2^{\dim A_{max}} \cdot S_{K \cap M^0_{max}}$.

(iii) *Si $W_{\mu'}$ est la représentation spinorielle de $K \cap M^0_{max}$ de poids dominant $\mu' \in \mathfrak{t}^*$, alors* $V_\mu|_{K \cap M^0_{max}} \cong W_\mu \oplus (\oplus_{|\mu'+\rho_c| < |\mu+\rho_c|} n_{\mu'} W_{\mu'})$ *où* $n_{\mu'} \geq 0$.

Reçue le 15 décembre 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J. ARTHUR, A theorem on the Schwartz space of a reductive Lie group, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 72, n° 12, 1975, p. 4728-4719.

[2] R. BOTT, The index theorem for homogeneous differential operators, dans *Differential and combinatorial topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*, Princeton, 1965, 1965, p. 167-186.

[3] A. CONNES et H. MOSCOVICI, The L^2-index theorem for homogeneous spaces of Lie groups, *Ann. of Math.*, 115, 1982, p. 291-330.

[4] HARISH-CHANDRA, Harmonic analysis on real reductive groups III, *Ann. of Math.*, 104, 1976, p. 117-201.

[5] H. HECHT et W. SCHMID, A proof of Blattner's conjecture, *Invent. Math.*, 31, 1975, p. 129-154.

[6] G. G. KASPAROV, The index of invariant of invariant elliptic operators, K-theory, and Lie group representations, *Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R.*, 268, 1983, p. 533-537.

[7] A. W. KNAPP et E. M. STEIN, Intertwining operators for semi-simple Lie groups II, *Invent. Math.*, 60, 1980, p. 9-84.

[8] A. W. KNAPP et G. J. ZUCKERMAN, Classification of irreducible tempered representations of semi-simple groups, *Ann. of Math.*, 116, 1982, p. 389-455.

[9] W. SCHMID, On the characters of the discrete series (the Hermitian symmetric case), *Invent. Math.*, 30, 1975, p. 47-144.

Department of Mathematics, University of Liverpool,
P.O. Box 147, *Liverpool L69 3BX, England, U.K.*