Rappel: Théorème des deux gendarmes

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ trois suites, telles que

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell \\ (2)\ \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k,\ a_n \leq b_n \leq c_n\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Alors } \lim_{n\to\infty} b_n = \ell$$

ℓ

Ex 1 Soit $a_0 = 1$, $a_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$ $\forall n \geq 1$.

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$; Ex: $1, 5, \sqrt[2]{5}, \sqrt[3]{5}$.

Dém: (1) Soit $a = 1 \Rightarrow a_n = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

(2) Soit $a > 1$. Formule $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) = x^n - 1$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$x = \sqrt[n]{a} > 1 \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} - 1 = \frac{a-1}{\underbrace{\underbrace{a^{\frac{n-1}{n}}}_{>1} + \underbrace{a^{\frac{n-2}{n}}}_{>1} + \ldots + \underbrace{a^{\frac{1}{n}}}_{>1} + 1}_{>n}} < \frac{a-1}{n}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \\ a > 0\end{array}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}$$

$0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\frac{a-1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\Rightarrow$ Par les 2 gendarmes $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(3) Soit $0 < a < 1 \Rightarrow$ Soit $b = \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow$ par (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1$$

$\boxed{///}$

Ex 2 Suite géométrique : $a_n = a_0 r^n$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$

Alors :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim\limits_{n\to\infty} a_0 r^n = 0, & |r| < 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_0 r^n = a_0, & r = 1 \\ a_n = a_0 r^n \text{ diverge}, & |r| > 1 \text{ ou } r = -1 \end{array}}$$

Notation : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Dém : (1) Soit $r > 1 \Rightarrow r = 1 + x$, $x > 0$.

$$r^n = (1+x)^n = 1 + \underbrace{\binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n}_{} \geq 1 + \binom{n}{1}x = 1 + nx \quad \forall n \geq 1$$

$\forall M > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : (1+nx) > M$ > 0 (propriété d'Archimède).

$\Rightarrow |a_0 r^n| = |a_0(1+x)^n| \geq |a_0|\,|1+nx| > |a_0| \cdot M \Rightarrow$ la suite n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente.

(2) Soit $0 < r < 1$ Soit $q = \frac{1}{r} > 1 \Rightarrow \forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : q^n > M \quad \forall n \geq n_0$.

Soit $\varepsilon > 0$ On choisit $M = \frac{|a_0|}{\varepsilon} \Rightarrow q^n > \frac{|a_0|}{\varepsilon} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow r^n < \frac{\varepsilon}{|a_0|} \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow |a_0 r^n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$ par la déf de la limite, $\lim\limits_{n\to\infty} a_0 r^n = 0$

(3) $r = 1 \Rightarrow a_0 r^n = a_n = a_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_0 r^n = a_0$.

(4) $r < 0$. Exercice. Astuce : Si $|r| > 1 \Rightarrow |a_0 r^n|$ n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente.

Si $-1 < r < 0 \Rightarrow$ Soit $q = -r \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n q^n = 0$ par (2) ; $a_0 r^n = \underbrace{(-1)^n}_{\text{bornée}} \underbrace{a_0 q^n}_{\to 0} \longrightarrow 0$

(voir Remarque 3, p. 70)

∎

Ex 3. $a_n = \dfrac{5^n}{n!} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Dém:

Soit $n \geq 6$

$$a_n = \underbrace{\frac{5}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{5}}_{M}\cdot\underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{5}{n}}_{\leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}} \leq M\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5} = M\left(\frac{6}{5}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \forall n \geq 6.$$

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{6}{5}\right)^5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n = M\left(\frac{6}{5}\right)^5 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0.$$

suite géométrique, $r = \left(\frac{5}{6}\right) < 1.$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{5^n}{n!} \leq M\left(\frac{6}{5}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \forall n \geq 6$$

$n\to\infty$: $0 \to 0$, $M\left(\frac{6}{5}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow$ Par les 2 gendarmes

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n!} = 0$$

D'une façon similaire on a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000000^n}{n!} = 0.$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{s^n}{n!} = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}}$$

EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
15 octobre 2018

Calcul des limites.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ pour tout $p > 0$.
2. Soient $x_n = a_p n^p + \ldots + a_0$ et $y_n = b^q n^q + \ldots + b_0$ deux suite polynômiales telles que $a_p > 0, b_q > 0$. Alors:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0, \quad \text{si} \quad p < q$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a_p}{b_q}, \quad \text{si} \quad p = q$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \infty, \quad \text{si} \quad p > q$$

$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ divergente, $p>q$

cours du 15 octobre

cours du 10 octobre

cours du 15 octobre

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pour tout $a > 0$.
4. La suite géométrique $(a_0 r^n)$, $a_0, r \in \mathbb{R}$, converge vers la limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_0 r^n = 0$, si $|r| < 1$, et diverge si $|r| > 1$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p^n}{n!} = 0$ pour tout $p > 0$. , aussi vrai $\forall p \in \mathbb{R}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$.
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Série 5

Remarques. (1) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |\ell|$.

(Exercice : $\big||x_n| - |\ell|\big| \leq |x_n - \ell|$, voir [DZ § 1 4.4]).

(2) Si $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

(2a) Si $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \ell \neq 0$ $\not\Rightarrow$ convergence de x_n. Ex : $x_n = (-1)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = 1$, mais (x_n) diverge.

(3) Si (a_n) est bornée et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

Dém: $\underbrace{|a_n| < M > 0}_{\text{bornée}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq |a_n b_n| \leq M|b_n|$

$$0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad M|b_n| \to 0 \quad \left(\lim_{n\to\infty} |b_n| = 0\right)$$

$\Rightarrow$ Par les 2 gendarmes $\lim_{n\to\infty} |a_n b_n| = 0 \Rightarrow$ Par (2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. ▨

Théorème: Critère de d'Alembert.

Soit (a_n) une suite telle que $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

et $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \geq 0$.

Alors Si $\rho < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Si $\rho > 1 \Rightarrow (a_n)$ diverge.

Dém: Soit $\rho < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho < 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \rho + \varepsilon < 1$

choix de ε ; $\rho < 1$.

$$\Rightarrow \text{Soit } m > n_0 \Rightarrow \underbrace{\underbrace{\left|\frac{a_m}{\cancel{a_{m-1}}}\right|}_{\leq \rho+\varepsilon} \cdot \underbrace{\left|\frac{\cancel{a_{m-1}}}{\cancel{a_{m-2}}}\right|}_{\leq \rho+\varepsilon} \cdot \left|\frac{\cancel{a_{m-2}}}{\cancel{a_{m-3}}}\right| \cdots \underbrace{\left|\frac{\cancel{a_{n_0+1}}}{a_{n_0}}\right|}_{\leq \rho+\varepsilon}}_{= \left|\frac{a_m}{a_{n_0}}\right|} \leq (\rho+\varepsilon)^{m-n_0}$$

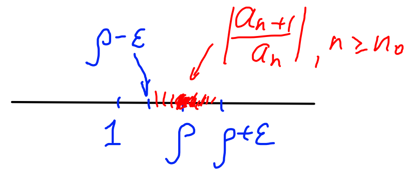
$$\Rightarrow |a_m| \leq (\rho+\varepsilon)^{m-n_0} |a_{n_0}| \quad \forall m > n_0$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\downarrow m\to\infty \\ 0}}{0} \leq |a_m| \leq \underset{\substack{\downarrow m\to\infty \\ 0}}{|a_{n_0}|(\rho+\varepsilon)^{m-n_0}} \quad \forall m > n_0$$

$\lim\limits_{m\to\infty} (\rho+\varepsilon)^{m-n_0}|a_{n_0}| = 0$ suite géométrique, avec $r = \rho+\varepsilon < 1$.

$\Rightarrow$ par les 2 gendarmes, $\lim\limits_{m\to\infty} |a_m| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_m = 0$.

Soit $\rho > 1$ $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0 \ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \rho - \varepsilon > 1$ choix de ε



$$\Rightarrow \left|\frac{a_m}{\cancel{a_{m-1}}}\right| \left|\frac{\cancel{a_{m-1}}}{\cancel{a_{m-2}}}\right| \cdots \left|\frac{\cancel{a_{n_0+1}}}{a_{n_0}}\right| \geq (\rho-\varepsilon)^{m-n_0} \Rightarrow |a_m| \geq (\rho-\varepsilon)^{m-n_0} |a_{n_0}|$$

$\forall m > n_0$

$(\rho-\varepsilon) > 1 \Rightarrow (|a_m|)$ n'est pas bornée $\Rightarrow (a_m)$ n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente. $\boxed{}$

Remarque $\rho = 1 \Rightarrow$ pas d'information sur la convergence de (a_n):

Ex $a_n = n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ et (a_n) diverge; $b_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$, et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

§ 2.5. Limites infinies.

Déf On dit que (a_n) tend vers $+\infty$ si $\forall A>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0,\ a_n \geq A$.
(b_n) $-\infty$ $b_n \leq -A$.

Notation : $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$; $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$

Attention Les suites (a_n) et (b_n) sont divergentes.

Propriétés. (1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty = \lim_{n\to\infty} b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ et (b_n) est bornée $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \pm\infty$

(3) $\lim b_n = \infty$ et $a_n \geq b_n$ $\forall n \geq n_0$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
$= -\infty$ $a_n \leq b_n$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

„règle d'un gendarme"

(4) (a_n) bornée et $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Exercice: [$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \Rightarrow \forall M\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0,$
$b_n \geq M \Rightarrow \frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{M}\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0$.
$\Rightarrow (a_n)$ bornée $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.].

(5) $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, $a_n \neq 0\ \forall n$ $\Rightarrow$ alors (a_n) diverge

Formes indéterminées. (1) $\infty - \infty$

Ex $\sqrt{n} - \sqrt{n+2} = a_n$ $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} = 0$

par contre, $b_n = n^2 - n$ est divergente : $\lim_{n\to\infty} (n^2 - n) = \lim_{n\to\infty} n(n-1) = \infty$

(2) $0 \cdot \infty$

Ex $\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{\searrow 0} \cdot \underbrace{(n+1)}_{\searrow \infty} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; $\underbrace{\frac{1}{(n+1)}}_{\searrow 0} \cdot \underbrace{(n+1)^2}_{\searrow \infty} = (n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{diverge}} \infty$

$\underbrace{\frac{1+\cos n}{1+n}}_{\searrow 0} \underbrace{(1+n)}_{\searrow \infty} = 1+\cos n$ sont divergentes.

Remarque. $(\cos n)$ et $(\sin n)$ divergent $\quad 3 < \pi < 4$

Dém: Supposons que $\exists \lim_{n\to\infty} \cos n = \ell$; $\{\cos n, \cos(n+1), \cos(n+2), \cos(n+3), \cos(n+4)\}$ contient des valeurs negatives et positives $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ il existe un nombre infini des valeurs positives et un nombre infini des valeurs négatives $\Rightarrow$ si $\lim \cos n$ existe, elle ne peut être ni négative, ni positive $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos n = 0$.

Alors $\lim_{n\to\infty} (1-\cos^2 n) = \lim_{n\to\infty} \sin^2 n = 1 - 0 = 1$. contradiction

Mais par le même argument, si $\lim_{n\to\infty} \sin n$ existe, alors $\lim_{n\to\infty} \sin n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sin^2 n = 0$

$\Rightarrow$ les suites $(\cos n)$, $(\sin n)$ sont divergentes. $\square$

(3) $\frac{\infty}{\infty}$ Ex : quotient des polynômes.

(4) $\frac{0}{0}$ Ex : $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \infty$; $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$.

Théorème : Convergence des suites monotones

Toutes suite croissante qui est majorée converge vers son supremum.
décroissante minorée infimum

Toute suite croissante qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$ (diverge)
décroissante qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$ (diverge)

Notation: $(a_n)\uparrow \iff (a_n)$ est croissante
$(b_n)\downarrow \iff (b_n)$ est décroissante.

Idée de demonstration: Soit $(a_n)\uparrow$ et majorée. Alors $\exists\, \ell = \sup\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$

$\Rightarrow \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N} : 0 \le \ell - a_{n_0} \le \varepsilon}_{\text{déf de sup}}$; puisque $(a_n)\uparrow \Rightarrow \forall n \ge n_0,\ a_n \ge a_{n_0}$

$\Rightarrow \forall n \ge n_0,\ 0 \le \ell - a_n \le \ell - a_{n_0} \le \varepsilon \overset{\text{par déf}}{\Longrightarrow} \lim a_n = \ell.$

Soit $(a_n)\uparrow$ pas majorée. $\Rightarrow \forall A > 0\ \exists n_0 : a_{n_0} \ge A$; $(a_n)\uparrow \Rightarrow a_n \ge a_{n_0} \ge A\ \forall n \ge n_0$
$\Rightarrow$ par déf. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty.$ $\blacksquare$

Soit $(a_n)\downarrow$: voir [DZ §2.4.1]