Théorème 2 Soit A une matrice de taille $m \times n$. Les énoncés suivants sont équivalents :

a) $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m \ \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{b}$ (admet une solution pour toute donnée)

b) $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m, \ \vec{b} \in \operatorname{Col} A \left[= \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \right]$

b1) $\operatorname{col} A = \mathbb{R}^m$

c) A a une position pivot dans chaque ligne

d) $A\vec{x} = \vec{b}$ représente un système compatible pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

Théorème 5 Les colonnes d'une matrice A sont linéairement indépendantes, si et seulement si l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale.

Théorème 6 Soit $E = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$, $p \geq 2$.

E est linéairement dépendant

$\iff \exists\, i \in \{1, \dots, p\}$ t.q. $\vec{v}_i \in \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_p\}$

Proposition (i) : Le vecteur nul est unique : $\exists!\, v \in V : v + w = w \ \forall w$

Soit $v \in V : v + w = w \ \forall w$. Alors $v + 0_V = 0_V$. Mais aussi $v + 0_V \overset{(1)}{=} 0_V + v \overset{(3)}{=} v$

D'où $v = 0_V$ ∎

Proposition (ibis) : S'il existent 2 vecteurs $v, w \in V$ t.q. $v + w = w$, alors $v = 0_V$

Soient $v, w \in W$ t.q. $v + w = w$. On développe $(v+w)+(-w)$:

$$(v+w)+(-w) \overset{(2)}{=} v + (w + (-w)) \overset{(4)}{=} v + 0_V \overset{(3)}{=} v$$

$$(v+w)+(-w) = w + (-w) \overset{(4)}{=} 0_V$$

D'où $v = 0_V$ ∎

Proposition (ii) : Pour un $u \in V$ donné, $-u$ est unique, i.e. si $u + w = 0_V$, alors $w = -u$

soit $w \in V$ tq $u + w = 0_V$. Alors

$$(-u) \overset{(3)}{=} 0_V + (-u) = (u+w) + (-u) \overset{(1+2)}{=} (u + (-u)) + w \overset{(4)}{=} 0_V + w \overset{(3)}{=} w$$

∎

Théorème 2.2. $v_1, \dots, v_p \in V$, V un espace vectoriel, $W = \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_p\}$.

W est un sous-espace vectoriel de V.

Théorème 2.3 V, W deux espaces vectoriels, $T : V \longrightarrow W$ transformation linéaire

(i) Si $X \subset V$ est s-e-v de V, alors

$$Y = T(X) = \{T(x),\ x \in X\} \text{ est un s-e-v de } W$$

ii) Soit $Y \subset W$ s-e-v de W. Alors

$$X = \{v \in V,\ T(v) \in Y\} \text{ est un s-e-v de } V$$

Théorème 2.6. Soit $B = \{b_1, .., b_p\}$ une base (ordonné) d'un espace vectoriel V.
Alors $\forall v \in V$ $\exists!$ (existe un unique) $\vec{a} \in \mathbb{R}^p$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ t.q. $v = a_1 b_1 + \dots + a_p b_p$

Théorème 2.7. L'application coordonnés est linéaire.

Théorème 2.8 : Soit B une base de l'espace vectoriel V.

L'application coordonnées est un isomorphisme

Théorème 2.9 Il existe une unique matrice A, notée aussi $[T]_{CB}$, appelé matrice de T associée aux bases B et C, telle que

$x \in V$ $$[T(x)]_C = A\,[x]_B = [T]_{CB}\,[x]_B$$

De plus, $A = \left([T(b_1)]_C \cdots [T(b_n)]_C \right)$ où $B = \{b_1, .., b_n\}$

Ou sa version pour applications linéaires de R^n -> R^m

Théorème 2.10 Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire, A sa matrice canonique.

Les énoncé suivants sont équivalents :

a) T surjective

b) $\operatorname{col} A = \mathbb{R}^m$

b bis) $A\vec{x} = \vec{b}$ a une solution $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$

c) La forme échellonée de A a un pivot dans chaque ligne

Théorème 2.10 bis Soit $T : V \to W$ linéaire, $B = \{b_1, .., b_n\}$ base de V et C base de W.

V, W espaces vectoriels, $A = ([T(b_1)]_C \cdots [T(b_n)]_C)$. Les énoncés suivants sont équivalents

a) T est surjective

b) $\operatorname{span}\{T(b_1), .., T(b_n)\} = W$

c) la forme échellonée de A a un pivot dans chaque ligne

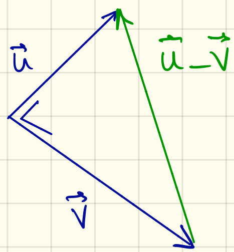
b bis) $\operatorname{col} A = \mathbb{R}^m$

Théorème 5.1 A $n \times n$. $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $A \iff \det(A - \lambda I) = 0$

Théorème 5.4 Soient A et B $n \times n$ semblables. Alors $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$

Théorème 6.2 (Pythagore)

$$(u \mid v) = 0 \iff \|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u-v\|^2$$



Preuve : $(u|v)=0$ i.e. u et v orthogonaux.

$$\|u-v\|^2 = (u-v \mid u-v) = (u \mid u-v) - (v \mid u-v) = (u-v \mid u) - (u-v \mid v)$$

$$= (u \mid u) - (v \mid u) - (u \mid v) + (v \mid v)$$

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u \mid v)$$

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff (u \mid v) = 0$$

$\blacksquare$

Théorème 7.1 Soit A $n \times n$ symétrique à coefficients réels. Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs propres de A associés à λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Alors $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.