Cours de SUP
Aux lazaristes.
2016-2017

Bono Laurence
Fèvre Matthieu

Chapitre 1 - Les bases du raisonnement en mathématiques

Les mathématiques sont une science dans laquelle on ne sait jamais de quoi on parle, et où l'on ne sait jamais si ce que l'on dit est vrai. B.Russel.

1 Éléments de logique

1.1 Assertions

Définition 1.1 (Assertion)

Nous appellerons **assertion** tout énoncé mathématique ayant un sens et susceptible de prendre une des deux valeurs de vérité $\mathcal{V}$ (Vrai) ou $\mathcal{F}$ (Faux).

Exemples :

1. ≪ 2 est un nombre pair ≫ est une assertion (vraie).
2. ≪ $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel est une assertion (fausse).
3. ≪ $x^2 \geq 0$ ≫n'est pas une assertion. (Mais qui est x ?)
4. ≪ Soit k un entier ≫ n'est pas une assertion.

Définition 1.2 (Assertions logiquement équivalentes)

On dit que deux assertions A et B sont **logiquement équivalentes** lorsque A et B ont la même valeur de vérité.
On écrit alors :

$$A \equiv B.$$

Exemples :

1. ≪ 2 est un nombre pair ≫ et ≪ 2 n'est pas impair ≫ sont deux assertions logiquement équivalentes.
2. ≪ 2 est un nombre pair ≫ et ≪ 3 est un nombre impair ≫ sont deux assertions logiquement équivalentes.
3. ≪ 2 est un nombre pair ≪ et ≪ Je suis le pape ≫ ne sont pas deux assertions logiquement équivalentes.
4. ≪ 2 est un nombre impair ≪ et ≪ Je suis le pape ≫ sont deux assertions logiquement équivalentes.

1.2 Connecteurs logiques élémentaires

A partir d'assertions déjà connues, on peut créer de nouvelles assertions à l'aide de connecteurs logiques, dont nous donnerons les tableaux de vérité.
On suppose que l'on dispose d'une assertion tout le temps vraie que l'on note aussi $\mathcal{V}$ et d' une assertion tout le temps fausse que l'on note $\mathcal{F}$.

1.2.1 Le connecteur de négation

A partir d'une assertion A, on construit une nouvelle assertion $\neg A$ (se lit ≪ non A ≫) : celle-ci est vraie précisément lorsque l'assertion A est fausse.

A	$\neg A$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

1.2.2 Le connecteur de conjonction

A partir de deux assertions A et B, on construit une nouvelle assertion notée $A \wedge B$ (se lit « A et B ») : celle-ci est vraie précisément lorsque les deux assertions A et B sont vraies.

A	B	$A \wedge B$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

✓ Si A est une assertion, alors $A \wedge \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$ et $A \wedge \mathcal{V} \equiv A$. (On dira bientôt que $\mathcal{V}$ est élément neutre pour l'opération $\wedge$)

1.2.3 Le connecteur de disjonction

A partir de deux assertions A et B, on construit une nouvelle assertion notée $A \vee B$ (se lit « A ou B ») : celle-ci est vraie précisément lorsque l'une au moins deux assertions A ou B est vraie.

A	B	$A \vee B$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

✓ Le « ou » mathématique est inclusif (comme le devrait être le « ou » en bon français) : $A \vee B$ est vrai (entre autres situations) si les deux assertions A et B sont vraies.

✓ Si A est une assertion, alors $A \vee \mathcal{F} \equiv A$ et $A \vee \mathcal{V} \equiv \mathcal{V}$. (On dira bientôt que $\mathcal{F}$ est élément neutre pour l'opération $\vee$.

)

1.2.4 Le connecteur d'implication

A partir de deux assertions A et B, on construit une nouvelle assertion notée $A \Longrightarrow B$ (se lit « A implique B ») : celle-ci est définie par la table de vérité suivante :

A	B	$A \Longrightarrow B$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

✓ Lorsque A est une assertion fausse, l'assertion $A \Longrightarrow B$ est vraie quelle que soit la valeur de vérité de l'assertion B. Par exemple « Je suis le pape $\Longrightarrow$ 3 est pair » est une assertion parfaitement vraie.

✓ La véracité de l'assertion $A \Longrightarrow B$ ne permet, à elle-seule, de statuer sur la véracité d'aucune des assertions A ou B.

Ptitexo: *Étant données deux assertions A et B, comparer les assertions $\neg A \vee B$ et $A \Longrightarrow B$.*

Étant données deux assertions A et B, la véracité de l'assertion $A \Longrightarrow B$, s'exprime communément par l'une des assertions suivantes :
(−) A est une condition suffisante pour que B soit vraie.
(−) B est une condition nécessaire pour que A soit vraie.
(−) Pour que A soit vraie, il faut que B soit vraie.
(−) Pour que B soit vraie, il suffit que A soit vraie.
(−) B est vraie si A est vraie.
(−) A est vraie seulement si B est vraie.

Définition 1.3 (Réciproque)

Étant données deux assertions A et B, l'assertion $B \Longrightarrow A$ est appelée **la réciproque** de l'assertion $A \Longrightarrow B$.

Définition 1.4 (Contraposée)

Étant données deux assertions A et B, l'assertion $\neg B \Longrightarrow \neg A$ est appelée **la contraposée** de l'assertion $A \Longrightarrow B$.

✓ $\neg B \Longrightarrow \neg A$ et $A \Longrightarrow B$ ont les mêmes tables de vérité.

1.2.5 Le connecteur d'équivalence

A partir de deux assertions A et B, on construit une nouvelle assertion notée $A \Longleftrightarrow B$ (se lit « A équivaut à B ») : celle-ci est vraie précisément lorsque A et B sont logiquement équivalentes.

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

Ptitexo: *Soient A et B deux assertions. Vérifier que les assertions $(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$ et $A \Longleftrightarrow B$ sont logiquement équivalentes. Donner une assertion logiquement équivalente à $A \Longleftrightarrow B$ construite uniquement à l'aide des connecteurs $\wedge$ et $\neg$ et des assertions A et B.*

Les symboles mathématiques $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, ne constituent pas des abréviations, et ne doivent **en aucun cas être utilisés pour remplacer des expressions comme : « ce qui implique que », « donc », « ainsi », « c'est-à-dire », etc...**

1.3 Tautologies usuelles

Définition 1.5 (Tautologie)

Une **tautologie** (*tautos*, le même, *logos*, le discours) est une assertion vraie quelle que soit la valeur de vérité des assertions élémentaires qui la composent.

Ptitexo: *Montrer que les assertions suivantes sont des tautologies :*

$$\begin{aligned} A &\implies (A \vee B), \\ (A \wedge B) &\implies B, \\ (A \implies B) &\implies (A \implies (A \wedge B)), \end{aligned}$$

Propriété 1.6 (Tautologies usuelles)

Si A et B désignent des assertions alors les assertions suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned} A \wedge A &\iff A\,. \\ A \vee A &\iff A\,. \\ \neg(\neg A) &\iff A \text{ (Double negation)}. \\ A \vee B &\iff B \vee A \text{ (Commutativite)}. \\ A \wedge B &\iff B \wedge A \text{ (Commutativite)}. \\ (A \iff B) &\iff (B \iff A) \text{ (Commutativite)}. \\ A \vee (B \vee C) &\iff (A \vee B) \vee C \text{ (Associativite)} \\ A \wedge (B \wedge C) &\iff (A \wedge B) \wedge C \text{ (Associativite)} \\ A \wedge (B \vee C) &\iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \text{ (Distributivite)}. \\ A \vee (B \wedge C) &\iff (A \vee B) \wedge (A \vee C) \text{ (Distributivite)}. \\ \neg(A \vee B) &\iff (\neg A) \wedge (\neg B) \text{ (Loi de Morgan)}. \\ \neg(A \wedge B) &\iff (\neg A) \vee (\neg B) \text{ (Loi de Morgan)}. \\ A \implies B &\iff \neg A \vee B. \\ \neg(A \implies B) &\iff A \wedge \neg B. \\ A \implies B &\iff \neg B \implies \neg A. \end{aligned}$$

preuve:

2 Quelques exemples de raisonnements valides

Pour tous nos raisonnements, on s'appuie abondamment sur les tautologies suivantes :

$$\boxed{A \vee (\neg A). \text{ (Principe du tiers exclu).}}$$

$$\boxed{\neg(A \wedge (\neg A)). \text{ (Non contradiction).}}$$

$$\boxed{(A \wedge (A \implies B)) \implies B. \text{ (Syllogisme).}}$$

2.1 Démonstrations d'une implication de type $A \implies B$

2.1.1 Utiliser la table de vérité

On se donne A vraie, et l'on montre que B est vraie.

Ptitexo: *Montrer que pour tout entier relatif a :*
« a est pair »$\Longrightarrow$ « a^2 est pair ».

2.1.2 Utiliser la transitivité de l'implication

On utilise la tautologie suivante :

$$\boxed{((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)) \implies (A \Longrightarrow C).}$$

✓ On retient que si l'on a $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow C$, alors on a aussi $A \Longrightarrow C$.

Ptitexo: *Montrer que pour tout entier relatif a :*

« a est pair »$\Longrightarrow$ « a^4 est pair ».

2.1.3 Utiliser la contraposée

On utilise la tautologie suivante :

$$\boxed{(A \Longrightarrow B) \iff (\neg B \Longrightarrow \neg A)\,.}$$

✓ On retient que montrer l'implication $A \Longrightarrow B$, c'est prouver que si B n'est pas vraie, alors on ne peut pas avoir A vraie.

Ptitexo: *Montrer que si le carré d'un entier est impair, alors cet entier est impair.*

Ptitexo: *Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'assertion :*

« $2^n - 1$ est premier $\quad\Longrightarrow\quad$ n est premier. »

est vraie.

2.1.4 Utiliser une disjonction de cas

On utilise la tautologie suivante :

$$\boxed{((A \vee B) \implies C) \iff ((A \Longrightarrow C) \wedge (B \Longrightarrow C))\,.}$$

Ptitexo: *Montrer que pour tout entier naturel impair n, l'entier $n^2 - 1$ est divisible par 8.*

Ptitexo: *Montrer que pour tout x réel strictement positif,*

$$(x-1)\int_x^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

✓ Pour prouver qu'une implication est fausse, d'après la deuxième ligne de la table de vérité de $A \Longrightarrow B$, on s'aperçoit qu'il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une situation où A est vraie et B est fausse.

Exemples : $x > 0 \Rightarrow x > 3$

2.2 Démonstrations d'équivalence

2.2.1 Utiliser la transitivité de l'équivalence

On utilise la tautologie :

$$\boxed{((A \iff B) \wedge (B \iff C)) \implies (A \iff C)}$$

On retient que si l'on a $A \iff B$ et $B \iff C$ alors on a $A \iff C$.

Ptitexo: *Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:*

$$2x = \sqrt{x^2+1}.$$

2.2.2 Utiliser la double implication

On utilise la tautologie :

$$\boxed{(A \implies B) \wedge (B \implies A) \implies (A \iff B).}$$

Pour montrer l'équivalence $A \iff B$, on prouve que $A \implies B$ et que $B \implies A$. On présente souvent cette démarche en deux temps :
$(-)$ On prouve que B est une condition nécessaire à la réalisation de A. (C'est-à-dire que $A \implies B$).
$(-)$ On prouve que B est une condition nécessaire à la réalisation de A, c'est-à-dire que A est une condition nécessaire à la réalisation de B. (C'est-à-dire que $B \implies A$).

Ptitexo: *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) $f' = 3f$.
ii) $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \mathrm{e}^{3x}$.

2.3 Le raisonnement par analyse-synthèse

Pour montrer un certain nombre de résultats (en particulier, des résultats portant sur l'existence de certains objets vérifiant des conditions données), on peut procéder par « analyse-synthèse ».
$(-)$ Dans la première partie de la preuve dite **partie d'analyse**, on utilise les conditions qui doivent être vérifiées par notre objet pour restreindre le champ des valeurs possibles de cet objet.
$(-)$ Dans la seconde partie de la preuve, dite **partie de synthèse**, on montre que l'une au moins des valeurs possibles trouvées à l'issue de l'analyse convient.

Ptitexo: *Démontrer qu'il existe deux nombres réels strictement positifs a et b tels que :*

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \dfrac{11}{28} \\ ab = 28 \\ a < b \end{cases}.$$

✓ Notons que fait la partie analyse peut-être faite au brouillon, la partie synthèse constitue à elle-seule une preuve valide.

2.4 Le raisonnement par l'absurde

On utilise la tautologie suivante :

$$\boxed{(\neg A \implies (B \wedge \neg B)) \implies A.}$$

Pour montrer qu'une assertion A est vraie, on montre que sa négation implique une contradiction c'est à dire que $\neg A \Longrightarrow \mathcal{F}$.

Ptitexo: *Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.*

✓ Comme dans l'exercice précédent, on utilise fréquemment le raisonnement par l'absurde pour prouver qu'un certain objet n'existe pas. Une fois supposée la non-existence de cet objet, on se retrouve dans une situation quasi-identique à celle de la partie analyse évoquée précédemment.

✓ Les raisonnements par récurrence feront l'objet d'une étude approfondie à la fin de ce chapitre.

3 Prédicats

3.1 Définition

Définition 1.7 (Prédicat)

On appelle **prédicat** à une variable x tout énoncé $\mathcal{P}(x)$ dans lequel la variable x apparaît formellement et telle que, lorsque l'on remplace x dans l'énoncé en question par un objet d'un certain référentiel, on obtienne une assertion.

Exemple :
L'énoncé $x \geq 0$, est un prédicat à une variable x, de référentiel l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Quand on remplace x par 1 dans cet énoncé, on obtient l'assertion $1 \geq 0$ (vraie), tandis que lorsque l'on remplace x par -2, on obtient l'assertion $-2 \geq 0$ (fausse).

✓ On sera amené à utiliser des prédicats à une variable de référentiel $\mathbb{N}$ lorsque l'on fera des raisonnements par récurrence. On parlera alors de propriétés plutôt que de prédicats.

De la même manière, on peut définir des prédicats à deux variables, trois variables, etc....

3.2 Quantificateurs :

Définition 1.8 (Quantificateurs)

A partir d'un prédicat $\mathcal{P}(x)$ à une variable, on peut créer les nouvelles assertions définies ci-après :
(–) l'assertion :

$$\forall x, \mathcal{P}(x)$$

qui se lit « quel que soit x, $\mathcal{P}(x)$ » et est vraie lorsque l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout x ;
(–) l'assertion :

$$\exists x, \mathcal{P}(x)$$

qui se lit « il existe un x tel que $\mathcal{P}(x)$ » et est vraie lorsque l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour au moins un x ;
(–) l'assertion :

$$\exists! x, \mathcal{P}(x)$$

qui se lit « il existe un unique x tel que $\mathcal{P}(x)$ » et est vraie lorsque l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour un x et un seul.

✓ Les symboles $\forall$, $\exists$ et $\exists!$ ne peuvent en aucun cas être utilisés comme des abréviations.

✓ Dans chacune des assertions $\forall x, \mathcal{P}(x)$, $\exists x, \mathcal{P}(x)$, $\exists! x, \mathcal{P}(x)$, la variable x est muette : Par exemple, les assertions $\forall x, \mathcal{P}(x)$ et $\forall y, \mathcal{P}(y)$ sont logiquement équivalentes.

Exemples :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq n^2$ est une assertion vraie.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq x^2$ est une assertion fausse.
3. $\exists x \in \mathbb{C}$, $x^2 + 1 = 0$ est une assertion vraie.
4. $\exists! x \in \mathbb{R}$, $x^5 + 8 = 0$ est une assertion vraie.
5. $\exists! x \in \mathbb{R}$, $x^{10} + 8 = 0$ est une assertion fausse.

✓ Si $\mathcal{P}(x, y)$ est un prédicat à deux variables, alors $\forall x, \mathcal{P}(x, y)$, $\exists x, \mathcal{P}(x, y)$ et $\exists! x, \mathcal{P}(x, y)$ définissent des prédicats à une variable.

Propriété 1.9 (ordre des quantificateurs)

Quel que soit le prédicat à deux variables $\mathcal{P}(x, y)$:
(–) Les assertions $\forall x, \forall y, \mathcal{P}(x, y)$ et $\forall y, \forall x, \mathcal{P}(x, y)$ sont logiquement équivalentes.
(–) Les assertions $\exists x, \exists y, \mathcal{P}(x, y)$ et $\exists y, \exists x, \mathcal{P}(x, y)$ sont logiquement équivalentes.
(–) L'implication $(\exists x, \forall y, \mathcal{P}(x, y)) \Longrightarrow (\forall y, \exists x, \mathcal{P}(x, y))$ est vraie.
(–) En revanche, l'implication $(\forall y, \exists x, \mathcal{P}(x, y)) \Longrightarrow (\exists x, \forall y, \mathcal{P}(x, y))$ n'est pas nécessairement vraie.

Exemples :

1. $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = y$ est une assertion vraie.
2. $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, x^2 = y$ est une assertion fausse.

Propriété 1.10 (négation des quantificateurs)

Quel que soit le prédicat à une seule variable $\mathcal{P}(x)$:
$(-)$ Les assertions $\neg(\forall x, \mathcal{P}(x))$ et $\exists x, \neg\mathcal{P}(x)$ sont logiquement équivalentes.
$(-)$ Les assertions $\neg(\exists x, \mathcal{P}(x))$ et $\forall x, \neg\mathcal{P}(x)$ sont logiquement équivalentes.

Exemple : Le contraire de « toute maison bleue est adossée à la colline » est « il existe une maison bleue qui n'est pas adossée à la colline ».

Ptitexo: *Écrire la négation des propositions suivantes, et préciser quelles assertions sont vraies :*
$(-)$ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$;
$(-)$ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x \leq n$.

Ptitexo: *Écrire symboliquement les assertions suivantes puis leur négation :*
$(-)$ *f est une application croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.*
$(-)$ *La fonction f est identiquement nulle.*
$(-)$ *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.*

4 Les ensembles

Il n'est pas question ici de présenter de manière détaillée les axiomes de la théorie des ensembles, mais de préciser les règles que nous utiliserons tout au long des deux années de classe préparatoire.

4.1 Notions élémentaires

La théorie des ensemble est une théorie mathématique dont les objets sont appelés ensembles, et qui est muni d'une relation entre ces objets, notée $\in$, et appelée relation d'appartenance.
Étant donnés deux ensembles a et b, l'assertion $a \in b$ se lit « a appartient à b », tandis que $\neg(a \in b)$ se note $a \notin b$ et se lit a n'appartient pas à b.
Les ensembles appartenant à un ensemble sont appelés les éléments de E.

Axiome 1.11 (Axiome d'extensionnalité)

Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si ils possèdent les mêmes éléments, c'est-à-dire :

$$E = F \iff (\forall x, x \in E \Leftrightarrow x \in F).$$

Propriété 1.12 (Ensemble vide)

Il existe un et un seul ensemble n'admettant aucun élément : on l'appelle ensemble vide et on le note $\emptyset$.

preuve :

Définition 1.13 (Singleton)

Soit a un ensemble. Il existe un seul ensemble admettant a comme seul élément, on le note $\{a\}$.
Les ensembles à un élément sont appelés les **singletons**.

Axiome 1.14 (Axiome de sélection)

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(x)$ un prédicat à une variable défini pour tout élément x de E. Il existe un et un seul ensemble dont les éléments sont les éléments x de E pour lesquels $\mathcal{P}(x)$ est vrai. Cet ensemble est noté :

$$\left\{ x \in E \,\middle|\, \mathcal{P}(x) \right\}.$$

Exemples :

1. $\mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$.
2. $2\mathbb{Z} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k \}$.
3. L'ensemble des nombres premiers est :

$$\left\{ p \in \mathbb{N} \,\middle|\, p \geq 2 \text{ et } \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 2 \,\text{et}\, m \geq 2)\ mn \neq p \right\}.$$

4.2 Ensembles de nombres usuels

4.2.1 Ensembles du calcul élémentaire

$\mathbb{N}$	Nombres entiers naturels.
$\mathbb{Z}$	Nombres entiers relatifs.
$\mathbb{Q}$	Nombres rationnels (fractions d'entiers).
$\mathbb{R}$	Nombres réels.
$\mathbb{C}$	Nombres complexes.

4.2.2 Intervalles

a) Intervalles de réels

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.

$(-)$ L'ensemble $\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \}$, se note $[a, +\infty[$ et s'appelle un intervalle fermé.
$(-)$ L'ensemble $\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \}$, se note $]a, +\infty[$ et s'appelle un intervalle ouvert.
$(-)$ L'ensemble $\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$, se note $[a, b]$ et s'appelle un segment ou un intervalle fermé.
$(-)$ L'ensemble $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \}$, se note $]-\infty, b]$ et s'appelle un intervalle fermé.
$(-)$ L'ensemble $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \}$, se note $]-\infty, b[$ et s'appelle un intervalle ouvert.
$(-)$ L'ensemble $\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$, se note $]a, b[$ et s'appelle un intervalle ouvert.

b) Intervalles d'entiers

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \leq b$.
$(-)$ L'ensemble $\{ n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a \}$, se note $[\![a, +\infty[\![$.
$(-)$ L'ensemble $\{ n \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b \}$, se note $[\![a, b]\!]$.

4.3 Parties d'un ensemble

Définition 1.15 (Relation d'inclusion, partie)

Soient A et B deux ensembles. On dit que A est une **partie** de B, (ou que A est un **sous-ensemble** de B, ou encore que A est **inclus** dans B) lorsque tout élément de A est un élément de B, c'est-à-dire lorsque l'on a :

$$\forall x, x \in A \Longrightarrow x \in B.$$

On note alors $A \subset B$.

Propriété 1.16 (Propriétés de la relation d'inclusion)

Soient E, F et G trois ensembles. On a :
$(-)$ $E \subset E$.
$(-)$ $((E \subset F) \quad \text{et} \quad (F \subset E)) \Longleftrightarrow E = F$.
$(-)$ $(E \subset F \ \wedge \ F \subset G) \Longrightarrow E \subset G$. (Transitivité de l'inclusion).

preuve :

✓ La deuxième propriété est très souvent utilisée : pour montrer que deux ensembles E_1 et E_2 sont égaux, on procède souvent par double inclusion, c'est-à-dire que l'on prouve que $E_1 \subset E_2$ puis que $E_2 \subset E_1$.

Ptitexo: *Soit A l'ensemble des fonctions f dérivables qui vérifient $f' = f$ et B l'ensemble des multiples de la fonction* exp.
Montrer que $A = B$.

Axiome 1.17 (axiome des parties)

Pour tout ensemble E, il existe un unique ensemble dont les éléments sont les parties de E : on le note $\mathcal{P}(E)$, et on l'appelle **ensemble des parties** de E.

Autrement dit, pour tout ensemble E, $\mathcal{P}(E)$ est défini par la propriété :

$$\forall x,\, x \in \mathcal{P}(E) \Longleftrightarrow x \subset E.$$

✓ $Card\mathcal{P}(E) = 2^n$

preuve :(de trois manières différentes) **Exemples :**

1. Soit a un ensemble.

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\{a\}, \emptyset\}.$$

2. Soient a, b et c trois ensembles.

$$\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

Axiome 1.18 (Opération sur les parties d'un ensemble)

Soient A et B deux parties d'un même ensemble E.
$(-)$ On appelle **réunion** de A et B, l'ensemble noté $A \cup B$ défini par :

$$A \cup B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}.$$

$(-)$ On appelle **intersection** de A et B, l'ensemble noté $A \cap B$ défini par :

$$A \cap B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B \}.$$

$(-)$ On appelle **différence ensembliste** de A et B, l'ensemble noté $A \setminus B$ défini par :

$$A \setminus B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B \}.$$

$(-)$ On appelle complémentaire de A dans E, l'ensemble noté C_A^E défini par :

$$C_A^E = \{ x \in E \mid x \notin A \}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur l'ensemble E, le complémentaire de A dans E sera parfois noté $\overline{A}$.

✓ On vérifie aisément que chacun des ensembles $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$ est indépendant du choix d'un ensemble E dont A et B sont des parties.

Définition 1.19 (Ensembles disjoints)

Soient A et B deux sous-ensembles de E. On dit que A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 1.1

Soient $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$, $\mathcal{R}(x)$ trois prédicats à une variable x d'un ensemble E et les ensembles : $A = \left\{ x \in E \;\middle|\; \mathcal{P}(x) \right\}$, $B = \left\{ x \in E \;\middle|\; \mathcal{Q}(x) \right\}$ et
$C = \left\{ x \in E \;\middle|\; \mathcal{R}(x) \right\}$.

1) Écrire à l'aide des prédicats précédents les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $\overline{A}$.

2) Montrer la commutativité de la réunion et celle de l'intersection :

$$A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cup B = B \cup A.$$

3) Montrer l'associativité de la réunion et celle de l'intersection :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

4) Montrer la distributivité de la réunion sur l'intersection et celle de l'intersection sur la réunion :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

5) Montrer les lois de Morgan :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$

6) Démontrer que :

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

7) Démontrer l'équivalence :

$$A \subset B \implies \overline{B} \subset \overline{A}.$$

4.4 Produits cartésiens

Axiome 1.20 (Axiome des couples)

Étant donnés deux ensembles a et b, on peut construire un couple de composantes a et b noté (a, b) de telle sorte que :

$$\forall a_1, \forall a_2, \forall b_1, \forall b_2,\ (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \iff (a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2).$$

✓ Si les ensembles a et b sont distincts, le couple (a, b) n'est pas égal au couple (b, a). Par contre, la paire $\{a, b\}$ est égale à la paire $\{b, a\}$.

Définition 1.21 (produit cartésien)

Soient E et F deux ensembles. Les couples dont la première composante est un élément de E et la seconde un élément de F forment un ensemble noté $E \times F$ et appelé produit cartésien de E et de F. Autrement dit :

$$E \times F = \left\{ x \;\middle|\; \exists a \in E, \exists b \in F, x = (a, b) \right\}.$$

✓ Si Card$E = n \in \mathbb{N}$ et Card$F = p \in \mathbb{N}$ alors Card$E \times F = np$

Si $E = \varnothing$, $\varnothing \times F = \varnothing$ Dessin d'un produit cartésien :

Notation : Si E est un ensemble, on note usuellement E^2 le produit cartésien $E \times E$, on appelle cet ensemble carré cartésien de E.
Plus généralement, fixons un entier $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Étant donnés n ensembles $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on définit un ensemble appelé n-uplet de composantes $a_1, \ldots, a_n$

et noté $(a_1, \dots, a_n)$ de telles sorte que deux n-uplets sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes composantes.
Étant donnés n ensembles $E_1, \dots, E_n$, les n-uplets dont la i-ème composante est un élément de E_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ forment un ensemble noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.
En particulier, pour tout ensemble E, l'ensemble des n-uplets dont les composantes sont des éléments de E est noté E^n.

5 Raisonnements par récurrence

5.1 Construction de $\mathbb{N}$

La preuve des théorèmes de récurrence nécessite en principe de connaître la construction axiomatique de $\mathbb{N}$. Celle-ci dépasse le cadre du programme de sup. Nous utiliserons néanmoins les axiomes suivants :

Axiome 1.22 (Axiomes d'ensembles naturels)

$(-)$ Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément pour la relation $\leq$.
$(-)$ Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément pour la relation $\leq$.
$(-)$ $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

✓ Il est assez clair que les deux premiers axiomes seraient faux si l'on remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{R}$.

✓ Dans le second axiome, nous parlons de partie non vide majorée par un entier naturel, c'est-à-dire une partie A telle qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$, telle $a \in A \implies a \leq p$. Certes une partie majorée par un réel est toujours majorée par un entier un entier naturel. Néanmoins la petite construction suivante devrait nous permettre de rester sur nos gardes :
Considérons un ensemble Inf n'appartenant pas à $\mathbb{N}$. Construisons une nouvelle relation d'ordre (Il faudra attendre le prochain chapitre pour savoir ce qu'est une relation d'ordre) que l'on notera $\prec$ qui prolonge $\leq$ en convenant que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \prec Inf,$$

$$\forall (n, n') \in \mathbb{N}^2, n \prec n' \iff n \leq n'.$$

$$Inf \prec Inf.$$

Pour cette relation d'ordre $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{N}$ majorée par Inf qui n'admet pas de plus grand élément.

5.2 Raisonnement par récurrence simple

Théorème 1.23 (Raisonnement par récurrence simple)

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :
i) $\mathcal{P}(0)$ est vraie. (**Initialisation**).
ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$. (**Hérédité**).
Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

preuve :

Ptitexo: *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$2^n \geq n+1.$$

✓ Lorsque l'on effectue une récurrence sur $\mathbb{N}$, il serait aberrant d'écrire une hypothèse de récurrence du type $\mathcal{P}(n) =$ « $\forall n \in \mathbb{N}, blabla$ ». Par contre si p est une variable sans lien avec n, on peut tout à fait utiliser une hypothèse de récurrence du type $\mathcal{P}(n) =$ « $\forall p \in \mathbb{N}, blabla.$ »

Ptitexo: *Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$. Expliciter $f^{(n)}(x)$. (La notation $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ème de l'application f).*

Exercice 1.2

Démontrer par récurrence que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

On peut adapter le théorème au cas où l'initialisation n'est possible qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$:

Corollaire 1.24 (Récurrence à partir d'un certain rang)

Soit n_0 un entier naturel et $\mathcal{P}(n)$ une propriété définie pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$.
On suppose que :
i) $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
ii) $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
Dans ce cas, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$.

preuve :

Ptitexo: *Montrer que $\forall n \geq 2$, $e^n \geq n+3$.*

5.3 Récurrence multiples

Corollaire 1.25 (Récurrence avec prédécesseurs)

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :
i) $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies. (**Initialisation**).
ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+2)$. (**Hérédité**).
Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

preuve :

Ptitexo: *On admet qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers vérifiant les propriétés suivantes : $u_0 = 2$, $u_1 = -1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$. (La preuve de l'existence d'une telle suite est intuitivement évidente mais devrait se faire par récurrence). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-2)^n + 1$.*

Corollaire 1.26 (Récurrence forte)

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

i) $\mathcal{P}(0)$ est vraie (**Initialisation**.)

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\forall k \in [\![0, n]\!], \mathcal{P}(k)) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$. (**Hérédité**).

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

preuve :

Ptitexo: *On admet qu'il existe une suite définie par son premier terme* $u_0 = 1$ *et la relation de récurrence valable pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n+1$.

Exercice 1.3 **Existence de diviseurs premiers**

Montrer que tout entier strictement supérieur à 1 possède un diviseur premier.

Chapitre 2 - Applications et relations binaires

Les relations sont sûrement le miroir dans lequel on se découvre soi-même.
Jiddu Krishnamurti.

1 Applications : Généralités

1.1 Approche intuitive

Soient E et F deux ensembles. Intuitivement, définir une application de E vers F, c'est associer à chaque élément de E un et un seul élément de F. (Par exemple, on peut considérer l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à chaque réel associe sa valeur absolue).
On se représente donc mentalement une application comme un ensemble de flèches, chaque flèche partant de l'ensemble E et allant vers l'ensemble F. Un élément donné de E est l'origine d'exactement une flèche, par contre un élément donné de F est peut-être l'extrémité d'aucune, d'une ou de plusieurs flèches.

(Dessin)
Remarquons, avant de définir rigoureusement une application, que si l'on se donne une application de E vers F, et une flèche de cette application d'origine x et d'extrémité y, alors (x, y) est un élément de $E \times F$. L'ensemble des couples ainsi formés sera appelé graphe de l'application f, on le notera en général $\Gamma(f)$. Ce graphe vérifie la propriété essentielle :

Pour tout élément x de E, il existe exactement un élément y appartenant à F tel que le couple (x, y) appartienne à $\Gamma(f)$.

Inversement, si l'on se donne une partie $\Gamma \in E \times F$ vérifiant cette propriété, alors on peut définir une application de E vers F, en décidant que tout couple $(x, y) \in \Gamma$ correspond à la flèche de x vers y.
C'est-à-dire que l'extrémité de la flèche qui part de x est l'unique élément $y \in F$, tel que $(x, y) \in \Gamma$.

1.2 Approche rigoureuse

Définition 2.1 (Graphe)

Soient E et F deux ensembles. On appelle **graphe** de E vers F toute partie du produit cartésien $E \times F$.

Définition 2.2 (Graphe fonctionnel)

Soient E et F deux ensembles et Γ un graphe de E vers F. On dit que le graphe Γ est **fonctionnel** si :

$$\forall x \in E, \exists! y \in F,\ (x,y) \in \Gamma.$$

Exemples :

1. L'ensemble $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = y \right\}$ est un graphe fonctionnel de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2. L'ensemble $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x^2 \right\}$ est un graphe fonctionnel de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

3. L'ensemble $\left\{ (x,,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = y^2 \right\}$ n'est pas un graphe fonctionnel de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Ptitexo: *L'ensemble* $\left\{ (x,y) \in A \times B \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$ *est-il un graphe fonctionnel de* $A = [-1,1]$ *vers* $B = \mathbb{R}$ *? Comment choisir* A *et* B *pour que cet ensemble devienne un graphe fonctionnel ?*

✓ Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, et si l'on représente le graphe Γ en situant A sur l'axe des abscisses et B sur l'axe des ordonnées, alors le graphe Γ est fonctionnel si et seulement si , on ne peut trouver deux points distincts du graphe sur la ≪ même verticale ≫.

Définition 2.3 (application ou fonction)

Soient E et F deux ensembles.
On appelle **application** de E vers F, tout triplet de la forme (E, F, Γ) où Γ est un graphe fonctionnel de E vers F.

Définition 2.4 (Image, antécédent)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f = (E, F, \Gamma)$ une application.
$(-)$ L'ensemble E est appelé **ensemble de départ** de f.
$(-)$ L'ensemble F est appelé **ensemble d'arrivée** de f.
$(-)$ L'ensemble Γ est appelé **graphe** de f.
$(-)$ Pour tout élément x de E, l'unique élément $y \in F$ tel que $(x,y) \in \Gamma$ est appelé l'image de x par f, et est noté $f(x)$.
$(-)$ Étant donné un élément y de F, on appelle antécédent de y par f tout élément x de E tel que $y = f(x)$.

Pour signifier que f est une application de E vers F, on utilisera la notation $f : E \longrightarrow F$.
On utilisera la notation $f : E \longrightarrow F,\ x \longmapsto f(x)$ pour désigner l'application de E vers F par laquelle l'image de tout élément x est $f(x)$. Dans cette notation, la variable x est muette.

Propriété 2.5 (Égalité de deux applications)

Deux applications f et g sont égales si et seulement si les trois assertions suivantes sont vraies :
(−) f et g ont le même ensemble de départ.
(−) f et g ont le même ensemble d'arrivée.
(−) Pour tout élément x de l'ensemble de départ de f, on a $f(x) = g(x)$.

✓ Le programme ne distingue pas la notion de fonction de celle d'application. Lorsque l'on a une expression $f(x)$ d'une variable libre x (la plupart du temps réelle ou complexe), le domaine de définition de la fonction définie par cette expression $f(x)$ est l'ensemble noté D_f des éléments pour lesquels cette expression a un sens.

Notation : On note F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des fonctions de E vers F.

1.3 Exemples importants d'applications

Définition 2.6 (Application constante)

Soient E et F deux ensembles. Une application $f : E \longrightarrow F$ est **constante** lorsque tous les éléments de E ont la même image par f, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y).$$

Définition 2.7 (Application identité)

Soit E un ensemble. On appelle **fonction identité** de E l'application notée id_E définie par :

$$\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E,\ x \longmapsto x.$$

Définition 2.8 (Application diagonale)

Soit E un ensemble. On appelle **application diagonale** de E l'application notée Δ_E définie par :

$$\Delta_E : E \longrightarrow E^2,\ x \longmapsto (x, x).$$

Définition 2.9 (Projections)

Soient E et F deux ensembles. On appelle première et seconde projection du produit cartésien $E \times F$, les applications :

$$\pi_1 : (E \times F) \longrightarrow E,\ (x, y) \longmapsto x,$$

$$\pi_2 : (E \times F) \longrightarrow F,\ (x, y) \longmapsto y.$$

Définition 2.10 (Fonction caractéristique)

Soit E un ensemble. Soit A une partie de E. On appelle fonction caractéristique de l'ensemble A la fonction noté χ_A ou 1_A définie par :

$$1_A : E \longrightarrow \{0,1\},\ x \longmapsto \left| \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \in A \\ 0 & \text{si} & x \notin A \end{array} \right. .$$

Exercice 2.1

Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E.

1) Montrer que $A = B$ si et seulement si $\chi_A = \chi_B$.

2) Exprimer chacune des fonctions $\chi_{A\cap B}$, $\chi_{A\cup B}$, $\chi_{\overline{A}}$, $\chi_{A\setminus B}$ en fonction de χ_A et χ_B.

3) Vérifier que $A \subset B \iff \chi_A \leq \chi_B$.

1.4 Restrictions et prolongements

Définition 2.11 (Restriction d'une application)

Soient E et F deux ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et A une partie de E. L'application $f_A : A \longrightarrow F,\ x \longmapsto f(x)$ est appelée **restriction** de l'application de f à A.

Définition 2.12 (Prolongement d'une application)

Soient f et g deux applications. On dit que l'application g est un **prolongement** de l'application f lorsque f est une restriction de g.

Exemples :

1. L'application de $\mathbb{C}^2$ vers $\mathbb{C}$ qui à deux éléments de $\mathbb{C}$ associe leur produit est un prolongement de l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ qui à deux réels associe leur produit.

2. Les applications $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \left| \begin{array}{lll} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si} & x \neq 0 \\ 2 & \text{si} & x = 0 \end{array} \right.$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \left| \begin{array}{lll} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si} & x \neq 0 \\ 1 & \text{si} & x = 0 \end{array} \right.$ sont des prolongements à $\mathbb{R}$ de l'application $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$.

1.5 Image directe, Image réciproque

Définition 2.13 (Image directe)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et A une partie de E. On appelle **image directe** du sous-ensemble A l'ensemble formé par les images par f des éléments de A. On note cet ensemble $f(A)$. On a donc :

$$f(A) = \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in A \right\}.$$

L'image directe de A est donc constituée de tous les éléments de F qui ont un antécédent (par f) appartenant à A. C'est-à-dire que l'on a :

$$f(A) = \left\{ y \in F \;\middle|\; \exists x \in A, y = f(x) \right\}.$$

✓ L'image directe de A est donc une partie de l'espace d'arrivée.

✓ L'ensemble $f(E)$ est simplement appelé image de f. On le note parfois $\mathrm{Im}\,(f)$.

Exemple :

1. Si l'on considère l'application $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$. Alors $c(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ et $c(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$.
2. Soit $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 4 \right\}$. Soient π_1 et π_2 les restrictions à C des premières et secondes projection sur $\mathbb{R}$. On a $\pi_1(C) = [-2, 2] = \pi_2(C)$.

   Ptitexo: *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application entre deux ensembles E et F. Soit A et B deux parties de E. Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$. Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$.*

✓ Il ne faut pas confondre la notion d'image $f(x)$ d'un élément x de l'ensemble de départ avec cette notion d'image directe. Notons que, pour tout élément de l'ensemble de départ x d'une application f, on a : $f(\{x\}) = \{f(x)\}$.

Ptitexo: *Soit $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (3\cos(t), 3\sin(t))$. Décrire $c([0, 2\pi])$.*

Définition 2.14 (Image réciproque)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application de E vers F. Soit B une partie de F. On appelle **image réciproque** de B, l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ et formé de tous les antécédents par f d'un élément de B. C'est aussi l'ensemble des éléments de E qui ont une image par f appartenant à B. C'est-à-dire que l'on a :

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \}.$$

✓ Si f est une application et B une partie de l'ensemble d'arrivée, alors la notation $f^{-1}(B)$ a toujours un sens quelles que soient les propriétés de la fonction f. Par contre, il n'existe pas nécessairement de fonction f^{-1}.

Ptitexo: *Soient A et B deux points du plan euclidien que l'on note $\mathcal{P}$ ici.*

Soit l'application $u : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R},\ M \longmapsto AM - MB$. Déterminer $u^{-1}(\{0\})$.

Ptitexo: *Soit* $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$. *Déterminer les ensembles* $J = \mathrm{ch}([0,1])$ *et* $\mathrm{ch}^{-1}(J)$.

Ptitexo: *Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ qui au couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ associe le couple $(x+y, x-y)$.*

1. *Déterminer $f\left(\mathbb{R}^2\right)$.*
2. *Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \left\{ (2t,0) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$.*

Ptitexo: *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application entre deux ensembles E et F. Soit A et B deux parties de F. Comparer $f^{-1}(A \cap B)$ et $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Comparer $f^{-1}(A \cup B)$ et $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.*

Exercice 2.2

Soit $f \in F^E$. Quelles sont les assertions de la liste suivante qui sont tout le temps vraies ?

$$\forall A \in \mathcal{P}(F),\ f\left(f^{-1}(A)\right) \subset A.$$
$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}\left(f(A)\right) \subset A.$$
$$\forall A \in \mathcal{P}(F),\ A \subset f\left(f^{-1}(A)\right).$$
$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset f^{-1}\left(f(A)\right).$$

1.6 Composition

Définition 2.15 (Composée de deux applications)

Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$. On appelle **composée** de f par g l'application :

$$g \circ f : E \longrightarrow G,\ x \longmapsto g\left(f(x)\right).$$

Exemple : Soit $f \in F^E$. On a $f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_F \circ f = f$.

Ptitexo: *Soient $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \longmapsto x^2$ et $r : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \longmapsto \sqrt{x}$. Déterminer $c \circ r$ et $r \circ c$.*

✓ On n'a pas en général, $f \circ g = g \circ f$. Par exemple, on n'a pas en général $\mathrm{e}^{x^2} = (\mathrm{e}^x)^2$.

Propriété 2.16 (Associativité de la composition)

Quelles que soient les applications $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$, nous avons :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

✓ Cette propriété nous autorise à écrire $f \circ g \circ h$ sans parenthèses.

Exercice 2.3 **Compositions et images directes et réciproques**

Soient E, F et G trois ensembles. Soit $f \in F^E$ et $g \in G^F$. Soit A une partie de E et B une partie de F.

1) Montrer que $(g \circ f)(A) = g\left(f(A)\right)$.

2) Montrer que $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right)$.

1.7 Injections, surjection, bijection

Définition 2.17 (Équation)

On appelle équation d'inconnue x tout prédicat de la forme $u(x) = v(x)$ où u et v sont deux applications ayant même ensemble de départ A et même ensemble d'arrivée B.
On appelle alors solution de cette équation tout élément $x \in A$ tel que $u(x) = v(x)$.
Deux équations sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont les mêmes solutions.

1.7.1 Injection

Propriété 2.18 (Définition d'une injection)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :
$(-)$ Tout élément de F admet au plus un antécédent par f.
$(-)$ Pour tout élément b de F, l'équation $u(x) = b$ admet au plus une solution.
$(-)$ $\forall (x, y) \in E^2$, $u(x) = u(y) \implies x = y$.
Lorsque l'une de ces assertions est vraie, on dit que l'application f est une **injection** de E vers F. On dit aussi que l'application f est **injective**.

preuve :

✓ C'est la troisième de ces trois propriétés que l'on utilise le plus souvent pour prouver qu'une application est injective.

Dessin :

✓ Intuitivement, une application est injective, si deux flèches d'origines différentes ont des arrivées différentes.

Exemples :

1. Pour tout ensemble E, les applications id_E et Δ_E sont injectives.

2. L'application $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$ n'est pas injective, en revanche l'application $cbis : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$ est injective.

Propriété 2.19 (Composition de deux injections)

Lorsqu'elle existe la composée de deux applications injectives est injective.

preuve :

Propriété 2.20 (Composée injective)

Soient E, F et G trois ensembles. Soit $f \in F^E$. Soit $g \in G^F$. Si l'application $g \circ f$ est injective, alors l'application f est injective.

preuve :

✓ Si $g \circ f$ est injective, alors f est nécessairement injective mais g ne l'est pas forcément. Par exemple, l'application $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$ n'est pas injective, en revanche l'application $c \circ \exp$ est injective.

1.7.2 Surjections

Propriété 2.21 (Définition d'une surjection)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :
$(-)$ Tout élément de F admet au moins un antécédent par f.
$(-)$ Pour tout élément b de F, l'équation $u(x) = b$ admet au moins une solution.
$(-)$ L'ensemble image de f est égal à F : on a $f(E) = F$.
$(-)$ $\forall y \in F, \exists x \in E,\ f(x) = y$.
Lorsque l'une de ces assertions est vraie, on dit que l'application f est surjective, ou encore que f est une surjection de E vers F.

Exemples :

1. Pour tout ensemble E, l'application id_E est surjective, en revanche si E contient plus d'un élément alors Δ_E n'est pas surjective.

2. L'application $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$ n'est pas surjective, en revanche l'application $cbis : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \longmapsto x^2$ est surjective.

3. L'application $c : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\ x \longmapsto x^2$ n'est pas surjective.

✓ Intuitivement, on comprend qu'une application est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F est l'arrivée d'une flèche.

Dessin :

Ptitexo: *Les applications suivantes sont-elles surjectives ?injectives ?*

1. $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_*^+,\ x \longmapsto \mathrm{e}^x$?

2. $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*,\ x \longmapsto \mathrm{e}^x$?

Propriété 2.22 (Composée d'applications surjectives)

Lorsqu'elle existe, la composée de deux applications surjectives est elle-même surjective.

preuve :

✓ Si la composée $g \circ f$ de deux applications est surjective, alors il se peut que f ne soit pas surjective. Par exemple, si l'on considère $c : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*,\ x \longmapsto x^2$ et $v : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln|x|$, alors l'application $v \circ c$ est une surjection de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$, mais l'application c n'est pas surjective.

Propriété 2.23 (Composée surjective de deux applications)

Soient E, F et G trois ensembles. Soit $f \in F^E$ et $g \in G^F$. Si l'application $g \circ f$ est surjective, alors l'application g est surjective de F vers G.

preuve :

1.7.3 Bijections

Définition 2.24 (Bijection)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(−) Tout élément de F admet exactement un antécédent par f.
(−) Pour tout élément b de F, l'équation $f(x) = b$ admet exactement une solution.
(−) $\forall y \in F, \exists! x \in E,\ f(x) = y$.
Lorsque l'une de ces assertions est vraie, on dit que l'application f est bijective, ou encore que f est une bijection de E vers F.

✓ Soit $f : E \longrightarrow F$ une application dont on note Γ le graphe. Il ne faut pas confondre la propriété :

$$\forall x \in E, \exists! y \in F,\ (x, y) \in \Gamma,$$

qui signifie que le graphe est fonctionnel, c'est-à-dire que f est bien une fonction, avec la propriété :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E,\ (x, y) \in \Gamma,$$

qui signifie que l'application f est bijective.

Dessin :

✓ Une bijection d'un ensemble E vers lui-même est appelée une permutation de E. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E.

Exemples :

1. Pour tout ensemble E, l'application id_E est bijective, en revanche si E contient plus d'un élément alors Δ_E n'est pas bijective.
2. L'application $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$ n'est pas bijective, en revanche l'application $cbis : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \longmapsto x^2$ est bijective.
3. Les applications
$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1],\ x \longmapsto \cos(x),$$
$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1],\ x \longmapsto \sin(x)$$
et
$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \tan(x)$$
sont bijectives.

Propriété 2.25 (Bijectif= Injectif+surjectif)

Une application est bijective, si et seulement si elle est injective et surjective.

preuve :

Définition 2.26 (Bijection réciproque)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective de E vers F. Pour tout élément, x de F, notons $f^{-1}(x)$ l'unique antécédent de x par f. On définit ainsi une application de F vers E notée f^{-1} définie par :
$$f^{-1} : F \longrightarrow E,\ x \longmapsto f^{-1}(x).$$
Cette application est appelée **la bijection réciproque** de f.

✓ On retient donc la méthode pratique de détermination de la réciproque d'une fonction bijective : Trouver $f^{-1}(y)$ pour y appartenant à l'ensemble d'arrivée, c'est résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$. On a alors $f^{-1}(y) = x$.

Exemples :

1. La fonction $c : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \longmapsto x^2$ est bijective de réciproque $c^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \longmapsto \sqrt{x}$.
2. On appelle respectivement $\operatorname{Arc}\cos$, $\operatorname{Arc}\sin$, $\operatorname{Arc}\tan$ les réciproques des applications
$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1],\ x \longmapsto \cos(x),$$
$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1],\ x \longmapsto \sin(x)$$
et
$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \tan(x).$$

Exercice 2.4

Soient les fonctions :

$$ch : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [1, +\infty[,\ x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$sh : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0, +\infty[,\ x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$th : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[,\ x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Montrer que ces fonctions sont bijectives et expliciter leurs réciproques.

Propriété 2.27 (Réciproque de la réciproque)

Soient E et F deux ensembles. Si $f : E \longrightarrow F$ est une application bijective de E vers F, alors sa réciproque est une application bijective de F vers E et l'on a :

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

preuve :

Propriété 2.28 ()

Soient E F deux ensembles. Si une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective, alors on a :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E.$$

preuve :

Propriété 2.29 (Caractérisation des fonctions bijectives)

Soient E et F deux ensembles. Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que :

$$f \circ g = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{id}_E.$$

Dans ce cas, on a $g = f^{-1}$.

preuve :

Ptitexo: *Soit f une application d'un ensemble E vers E, telle que $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Justifier que f est bijective et déterminer f^{-1}.*

Ptitexo: *Soit E et F deux ensembles et φ une bijection de E vers E. Montrer que l'application $\Phi : F^E \longrightarrow F^E,\ f \longmapsto f \circ \varphi$ est bijective.*

Exercice 2.5 **Fonction homographique**

---

1) Montrer que la fonction $f : z \mapsto \dfrac{z-1}{z-3}$ définit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{3\}$ vers une partie de $\mathbb{C}$ que l'on précisera. Expliciter f^{-1}.

2) Soient a, b, c et d quatre nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$. Montrer que l'application $g : z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ définit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ vers une partie de $\mathbb{C}$ que l'on précisera. Expliciter f^{-1}.

✓ Il est nécessaire de prouver les deux égalités $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$. pour assurer la bijectivité de f. On peut avoir une des deux égalités vraies sans que la fonction f soit bijective.

Ptitexo: *Déterminer deux ensembles E et F, une fonction $f : E \longrightarrow F$ et une fonction $g : F \longrightarrow E$, telles que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ sans que l'on ait ni f bijective, ni g bijective.*

Propriété 2.30 (Composition de bijections)

Soient E, F et G trois fonctions. Si $f \in F^E$ et $g \in G^F$ sont deux bijections alors la composée $g \circ f$ est bijective, et l'on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

✓ D'après ce que l'on a vu sur les injections et sur les bijections, si l'application $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective. Mais en général, f et g ne sont pas bijectives.

Propriété 2.31 (Image réciproque par une application bijective)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. Soit B une partie de F. L'image réciproque de B par f est égale à l'image directe de B par f^{-1}.

preuve:

✓ Cette propriété montre qu'il n'y a pas d'ambiguité dans la notation $f^{-1}(B)$. Mais répétons que cette notation $f^{-1}(B)$ a un sens même si l'application f n'est pas bijective.

Propriété 2.32 (Graphe de la bij. réciproque d'une fonc. numérique)

Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$ et f une bijection de E vers F. Le graphe de la bijection réciproque f^{-1} est (dans un repère orthonormé) le symétrique du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).

preuve:

Exemple : Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonction ln et exp.

2 Relations binaires

2.1 Généralités

Définition 2.33 (relation binaire sur un ensemble)

Étant donné un ensemble E, on appelle **relation binaire** sur E tout graphe de E vers E, c'est-à-dire toute partie du carré cartésien E^2.

✓ On parle parfois du graphe d'une relation, mais cela n'apporte rien car, par définition une relation est un graphe.

Notation : Étant donné une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E, le prédicat $(x, y) \in \mathcal{R}$, de référentiel commun E à chaque variable x et y, est encore noté $x\mathcal{R}y$. Dans la pratique, comme pour les applications on définit les relations binaires à partir de prédicats à deux variables.

Définition 2.34 (Relation binaire associée à un prédicat)

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(x, y)$ un prédicat à deux variables x et y défini lorsque chacune est un élément de E. Alors l'ensemble $\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in E^2 \;\middle|\; \mathcal{P}(x, y) \right\}$ est appelé relation binaire associée à $\mathcal{P}$.

Exemples :

1. Sur l'ensemble $\mathbb{N}$, on peut définir la relation de divisibilité à partir du prédicat $m|n := \exists k \in \mathbb{N}, n = km$.
2. Sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on définit une relation binaire $\mathcal{R}$ par le prédicat :

$$f\mathcal{R}g := \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x).$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la relation $\equiv_a$ de congruence modulo a sur $\mathbb{R}$ par le prédicat :

$$x \equiv_a y := \exists k \in \mathbb{Z}, y = x + ka.$$

2.2 Propriétés des relations binaires

Définition 2.35 (Vocabulaire)

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que la relation $\mathcal{R}$ est :

(−) **réflexive** (sur E) lorsque

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x.$$

(−) **symétrique** (sur E) lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x.$$

(−) **antisymétrique** (sur E) lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \implies x = y.$$

(−) **transitive** sur E lorsque

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z.$$

Ptitexo: *Pour chacune des relations suivantes décider si la relation est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.*

1. *Relation d'égalité sur un ensemble E.*
2. *Relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$.*
3. *Relation de congruence modulo un réel $a > 0$ sur $\mathbb{R}$.*
4. *Relation d'ordre $(\leq)$ sur $\mathbb{R}$.*

2.3 Relations d'ordre

2.3.1 Définition et exemples

Définition 2.36 (Relation d'ordre)

Une **relation d'ordre** sur un ensemble E est une relation binaire sur E qui est réflexive, antisymétrique et transitive. Dans ce cas, on dit que le couple $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble ordonné.

Exemples :

1. La relation d'égalité sur un ensemble quelconque est une relation d'ordre.
2. La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre.
3. La relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ n'est pas une relation d'ordre.La relation de congruence sur $\mathbb{R}$ modulo un réel $a > 0$ n'est pas une relation d'ordre. (Il n'y a pas antisymétrie).
4. Sur chacun des ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ la relation $\leq$ est une relation d'ordre. Ce n'est pas le cas de la relation $<$.
5. Si E est un ensemble. On définit une relation d'ordre notée $\leq$ sur $\mathbb{R}^E$, en décidant :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^E, u \leq v \iff \forall x \in E, u(x) \leq v(x).$$

2.3.2 Ordre partiel, ordre total

Définition 2.37 (Ordre partiel, ordre total)

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.
Deux éléments x et y de E sont dits **comparables** pour la relation $\leq$ si $x \leq y$ ou $y \leq x$.
On dit que la relation $\leq$ est une **relation d'ordre total** ou encore que $(E, \leq)$ est un **ensemble totalement ordonné** sur E si deux éléments quelconques de E sont nécessairement comparables, i.e :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \leq y \,\text{ou}\, y \leq x.$$

Dans le cas, contraire on dit que la relation est une **relation d'ordre partiel**.

Exemples :

1. La relation d'égalité sur un ensemble quelconque est une relation d'ordre partiel.
2. La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre partielle dès que E comporte plus d'un élément.
3. La relation de divisibilité est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}$.
4. Sur chacun des ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ la relation $\leq$ est une relation d'ordre total.
5. Si E est un ensemble. On définit une relation d'ordre notée $\leq$ sur $\mathbb{R}^E$, en décidant :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^E, u \leq v \iff \forall x \in E, u(x) \leq v(x).$$

   Cette relation est-elle une relation d'ordre total ? partiel ?

Ptitexo: *Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par* $\forall (a_1, a_2), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1, b_2) \iff a_1 \leq a_2 \text{et} b_1 \leq b_2$. *Montrer que cette relation est une relation d'ordre sur* $\mathbb{R}^2$. *Cet ordre est-il partiel ? total ?*

2.3.3 Majorants, minorants

Définition 2.38 (Majorant, minorant)

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E. Soit x un élément de E.
$(-)$ On dit que x est un **majorant** de A (dans E) si $\forall a \in A$, $a \leq x$.
$(-)$ On dit que x est un **minorant** de A (dans E) si $\forall a \in A$, $a \geq x$.

✓ La notion de minorant/majorant est relative à l'ensemble considéré.

Exemples :

1. Les majorants de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ sont les réels de l'intervalle $[1, +\infty[$.
2. Les majorants de $[0, 1[$ dans $[0, 2[$ sont les réels de l'intervalle $[1, 2[$.
3. Soient A, B et C trois parties de E. On considère l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$. Les majorants de $\{A, B, C\}$ sont les parties de E qui contiennent $A \cup B \cup C$.

2.3.4 Plus grand élément, plus petit élément

Définition 2.39 (Plus grand/petit élément)

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie de E et a un élément de A.
$(-)$ On dit que a est un plus grand élément- ou encore un **maximum**-de A lorsque que :

$$\forall x \in A, x \leq a.$$

$(-)$ On dit que a est un plus petit élément- ou encore un **minimum**-de A lorsque que :

$$\forall x \in A, a \leq x.$$

✓ Un plus grand élément de A est donc un majorant de A qui appartient à A.

Propriété 2.40 (Unicité du maximum/minimum)

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie de E.
$(-)$ Si A admet un plus grand élément, alors celui-ci est unique. On le note $\max(A)$.
$(-)$ Si A admet un plus petit élément, alors celui-ci est unique. On le note $\min(A)$.

Exemples :

1. L'ensemble $(\mathbb{N}, \leq)$ admet 0 comme minimum.
2. L'ensemble $(\mathbb{Z}, \leq)$ n'admet ni majorant, ni minorant.
3. Soit E un ensemble. Pour la relation $\subset$, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ admet E comme maximum et $\emptyset$ comme minimum. En revanche, $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ n'admet pas de plus petit élément pour l'inclusion si E admet au moins deux éléments.
4. Dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité, $\min(\mathbb{N}) = 1$ et $\max(\mathbb{N}) = 0$.

Notation : Soit f une fonction appartenant à $\mathbb{R}^E$. Soit A une partie de E. Si l'ensemble $\left\{ f(x) \;\middle|\; x \in A \right\}$ admet un plus petit élément, on le note $\min_A f$, si il admet un plus grand élément on le note $\max_A f$. On a donc, lorsque ces objets existent :

$$\min_A f = \min f(A).$$

$$\max_A f = \max f(A).$$

✓ L'existence du minimum ou du maximum d'une partie A d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ ne dépend que de l'ensemble A et de la restriction de $\leq$ à A.

Ptitexo: *Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, on considère les ensembles $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$ et $B = \left\{ \frac{1}{2^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$. Quels sont les minorants, majorants de ces ensembles ? Admettent-ils un maximum ? un minimum ?*

2.4 Relations d'équivalence

2.4.1 Définition et exemples

Définition 2.41 (Relation d'équivalence)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur l'ensemble E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique, transitive.

1. La relation d'égalité sur un ensemble quelconque E est une relation d'équivalence.
2. La relation de parallélisme sur l'ensemble des droites du plan euclidien est une relation d'équivalence.
3. La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff \mathrm{Im}(x) = \mathrm{Im}(y).$$

est une relation d'équivalence.

2.4.2 Classes d'équivalence

Définition 2.42 (Classe d'équivalence)

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur cet ensemble. Soit $x \in E$. On appelle **classe d'équivalence** de x, l'ensemble de tous les éléments de E qui sont en relation avec x. On le note $\mathrm{Cl}(x)$. On a donc :

$$\mathrm{Cl}(x) = \{\, y \in E \mid x\mathcal{R}y \,\}.$$

✓ La réflexivité d'une relation d'équivalence implique que $x \in \mathrm{Cl}(x)$.

✓ Les classes d'équivalence forment une partition de E, c'est-à-dire que : la réunion des classes d'équivalence est égale à E, l'intersection de deux classe différentes est vide, chaque classe est non vide.

Exemples : Déterminer les classes d'équivalence pour chacune des relations d'équivalence exposées plus haut.

2.4.3 Relation de congruence modulo $a > 0$ dans $\mathbb{R}$

Définition 2.43 (Congruence modulo a dans $\mathbb{R}$)

Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On dit que le réel x est **congru** au réel y modulo a s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$, tel que $x = y + ka$. On écrit alors $x \equiv y(a)$.

Propriété 2.44 ()

La relation de congruence modulo $a \in \mathbb{R}_*^+$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

preuve :

Application : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \cos(x) & = & \cos(y) \\ \sin(x) & = & \sin(y) \end{cases} \iff x \equiv y(2\pi).$$

Propriété 2.45 (Relation de congruence dans $\mathbb{R}$ et opérations)

Soient $a \in \mathbb{R}_*^+$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$.
$(-)$ $x \equiv y\ (a)$ et $x' \equiv y'\ (a) \implies x + x' \equiv y + y'\ (a)$.
$(-)$ $\forall m \in \mathbb{R}_+^*$, $x \equiv y\ (a) \implies mx \equiv my\ (ma)$.
$(-)$ $\forall m \in \mathbb{R}$, $x \equiv y\ (a) \implies m + x \equiv m + y\ (a)$.

✓ Attention ! en général, on n'a pas
$x \equiv y(a)$ et $x' \equiv y'(a) \implies xx' \equiv yy'(a)$.

2.4.4 Relation de congruence modulo $p \in \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}$

Définition 2.46 (Congruence modulo a dans $\mathbb{Z}$)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que l'entier m est congru à l'entier n modulo p, s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$, tel que $m = n + kp$. On écrit alors $m \equiv n\ (p)$.

Propriété 2.47 ()

La relation de congruence modulo $p \in \mathbb{N}^*$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$.

preuve:

Propriété 2.48 (Relation de congruence dans $\mathbb{Z}$ et opérations)

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ et $(m', n') \in \mathbb{Z}^2$.
$(-)$ $m \equiv n\ (p)$ et $m' \equiv n'\ (p) \implies m + m' \equiv n + n'\ (p)$.
$(-)$ $\forall c \in \mathbb{Z}$, $m \equiv n\ (p) \implies cm \equiv cn\ (p)$.
$(-)$ $\forall c \in \mathbb{Z}$, $m \equiv n\ (p) \implies m + c \equiv n + c\ (p)$.

preuve:

Chapitre 3 - Calculs de sommes et produits

"Une idée qui ne peut servir qu'une fois est une astuce. Si l'on peut s'en resservir, elle devient une méthode." (G. Polya)

1 Généralités

1.1 Notations

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$, n nombres complexes.
On note $\sum_{k=1}^{n} a_k$ la somme de ces nombres et $\prod_{k=1}^{n} a_k$ le produit de ces n nombres.

✓ La variable k est « muette » : $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Par exemple, on appelle factorielle n le nombre entier noté $n!$ défini par :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n = \prod_{i=1}^{n} i.$$

et par convention $0! = 1$

Plus généralement, si p et q sont des entiers tels que $p \leq q$, et si l'on dispose de $q - p + 1$ nombres complexes $a_p, \ldots, a_q$, on note :

$$a_p + \cdots + a_q \text{ ou } \sum_{k=p}^{q} a_k \text{ ou } \sum_{p \leq k \leq q} a_k \text{ ou encore } \sum_{k \in [\![p,q]\!]} a_k \text{ leur somme.}$$

$$a_p \times \cdots \times a_q \text{ ou } \prod_{k=p}^{q} a_k \quad \prod_{p \leq k \leq q} a_k \text{ ou encore } \prod_{k \in [\![p,q]\!]} a_k \text{ leur produit.}$$

Dans une liste de nombres numérotés de PT à DT, il y a exactement $DT - PT + 1$ termes.

De manière encore plus général, si I est un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes indicés par I, on note alors :
$\sum_{k \in I} a_k$ la somme de ces nombres et $\prod_{k \in I} a_k$ le produit de ces nombres.

✓ On adopte les règles suivantes : $\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$ et $\prod_{i \in \emptyset} a_i = 1$. En particulier, $0! = 1$.

1.2 Règles de calcul élémentaires

Propriété 3.1 ()

Soit I un ensemble fini et soient $(a_k)_{k\in I}$ et $(b_k)_{k\in I}$ deux familles de nombres complexes.

(−) $\sum_{k\in I} \overline{a_k} = \overline{\sum_{k\in I} a_k}$ et $\prod_{k\in I} \overline{a_k} = \overline{\prod_{k\in I} a_k}$

(−) $\sum_{k\in I} (a_k + b_k) = \sum_{k\in I} a_k + \sum_{k\in I} b_k$ et $\prod_{k\in I} (a_k b_k) = \left(\prod_{k\in I} a_k\right)\left(\prod_{k\in I} b_k\right)$.

(−) On a :

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(a_k) \text{ et} \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}(a_k).$$

(−) Pour tout complexe λ :

$$\sum_{k\in I} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k\in I} a_k \text{ et } \prod_{k\in I} (\lambda a_k) = \lambda^{\operatorname{card} I} \prod_{k\in I} a_k.$$

En particulier :

$$\sum_{k\in I} \lambda = \operatorname{card}(I)\lambda \text{ et } \prod_{k\in I} \lambda = \lambda^{\operatorname{card} I}.$$

(−) Pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{k\in I} (a_k)^p = \left(\prod_{k\in I} a_k\right)^p.$$

(−) Si J et K sont deux parties disjointes de I :

$$\sum_{k\in J} a_k + \sum_{k\in K} a_k = \sum_{k\in J\cup K} a_k \text{ et } \prod_{k\in J} a_k \times \prod_{k\in K} a_k = \prod_{k\in J\cup K} a_k.$$

Exercice 3.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer à l'aide de factorielles et de puissances le produit A_n de tous les nombres pairs compris entre 1 et $2n$, puis le produit B_n de tous les nombres impairs entre 1 et $2n+1$.

2 Stratégies de calcul

2.1 Changements d'indices

Si $r \in \mathbb{Z}$, alors

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{j=p+r}^{q+r} a_{j-r},$$

on peut donc utiliser le changement d'indice $j = k + r$.
Si $r \in \mathbb{Z}$, alors
$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{j=-q+r}^{-p+r} a_{r-j},$$
on peut donc utiliser le changement d'indice $j = -k + r$.

✓ On a les propriétés analogues sur les produits.

✓ Attention les seuls changements d'indices utilisables,dans les calculs de sommes et produits, sont de la forme $j = \pm k + r$ où $r \in \mathbb{N}$. Il ne faudrait pas, par exemple, utiliser un changement de variable de la forme $j = 3k-2$, qui modifierait le nombre de termes de la somme. Rappelons que nous avons plus de latitude sur les choix de changements de variables dans les intégrales.

Ptitexo: *Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.*

Ptitexo: *Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.*

2.2 Télescopes

Si $a_p, \ldots, a_q$ sont $q - p + 1$ nombres complexes, alors on a : On a :
$$\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p.$$
Si $\forall j \in [\![p, q]\!], a_j \neq 0$, alors :
$$\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{q+1}}{a_p}.$$

Ptitexo: *Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3]$ de deux manières différentes, en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$. Calculer sur le même modèle, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.*

Ptitexo: *Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)$.*

Exercice 3.2 **Explicitation de suites récurrentes**

1) Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = u_k + 3k^2 + 2k + 1$ et $u_0 = 1$.

a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Soit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1} = 3^k(k+1)v_k$ et $v_0 = 2$.

a) Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. Soit une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $w_0 = \alpha$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = aw_n + b$. (Une telle suite est dite suite arithmético-géométrique). Calculer w_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Soit une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \dfrac{nt_n}{3}$. Calculer t_n en fonction de n et de t_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Sommation par paquets

Dans certains, calculs il peut être utile de regrouper les sommes par paquets pour faire apparaître certaines simplifications.

Ptitexo: *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$ en regroupant les termes deux par deux.*

2.4 Sommes doubles

Soit A un ensemble fini de couples. Si $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$ est une famille de nombres complexes, alors on note $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ la somme de ces nombres complexes. On dit que cette somme est une somme double.
Si A peut-s'écrire comme un produit cartésien $A = I \times J$, alors il résulte des propriétés des additions sur les complexes que :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I} \left(\sum_{j\in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I} a_{i,j} \right).$$

En particulier, si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont deux familles de nombres complexes, alors :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i \right) \left(\sum_{j\in J} b_j \right).$$

Ptitexo: *Calculer $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} i3^j$.*

Si l'ensemble A ne s'écrit pas comme un carré cartésien, on peut toujours intervertir les sommes et transformer $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$ en une expression du type, $\displaystyle\sum_{j\in J'} \left(\sum_{i\in I'_j} a_{i,j} \right)$ ou bien une expression du type $\displaystyle\sum_{i\in I'} \left(\sum_{j\in J'_i} a_{i,j} \right)$. Mais cette interversion est plus délicate car les ensembles I'_j et J'_i dépendent a priori de i et j.
Exemple :

Calculons $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq 6} (i+j)$

Ptitexo: *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Calculer* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^i$ *de deux manières différentes. En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1}+2$.

Ptitexo: *Calculer pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *la somme*

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}.$$

Exercice 3.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

$$m_n = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \min(i,j)$$

$$M_n = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \max(i,j)$$

2.5 Coefficients binomiaux, formule du binôme

2.5.1 Généralités sur les coefficients binomiaux

Définition 3.2 (Coefficient binomial)

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On appelle coefficient binomial « p parmi n », le réel noté $\binom{n}{p}$ défini par :

$$\binom{n}{p} = \frac{1}{p!}\prod_{k=0}^{p-1}(n-k).$$

✓ Si $p > n$, un des facteurs du produit est nul, donc $\binom{n}{p} = 0$.

✓ Si $p \leq n$, on a $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

✓ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Propriété 3.3 (Relation de Pascal)

Soient n et p deux entiers naturels.
(−) Si $p \leq n$, alors $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
(−) Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, alors $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

preuve :

✓ On utilise cette dernière propriété pour calculer les coefficients binomiaux sous forme d'un triangle dit triangle de Pascal.

Dessin :

Propriété 3.4 ()

Pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

preuve :

Propriété 3.5 ()

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

preuve:

2.5.2 Interprétations des coefficients binomiaux

Cette partie sera reprise et complétée dans le chapitre sur le dénombrement.

Propriété 3.6 (Nombre de mots)

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$. Le nombre de mots de n lettres comportant exactement p lettres S et $n-p$ lettres E est $\binom{n}{p}$.

Esquisse de preuve :

Corollaire 3.7 (Nombre de succès)

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$. Le nombre de manières de réaliser p succès dans une succession de n épreuves de Bernoulli est $\binom{n}{p}$.

Propriété 3.8 (Nombre de parties)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit un ensemble E comportant n éléments. le nombre de parties à p éléments de E est $\binom{n}{p}$.

preuve :

Exercice 3.4

1) Retrouver sans aucun calcul les égalités de la **Propriété 3.3**.

2) Donner sans calcul, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

3) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

4) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(3k^3 + 2k + 1\right) \binom{n}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.5.3 La formule du binôme et ses soeurs

Propriété 3.9 (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux nombres complexes. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Ptitexo: *Calculer pour $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ la somme* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

Exercice 3.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons P_n l'ensemble des nombres pairs appartenant à $[\![0, n]\!]$ et I_n l'ensemble des nombres impairs appartenant à $[\![0, n]\!]$. Calculer $\displaystyle\sum_{k \in P_n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k \in I_n} \binom{n}{k}$.
Y-a-t-il plus de parties de cardinal pair ou de cardinal impair dans un ensemble à n éléments ?

2.6 Bilan : Les sommes usuelles

2.6.1 Sommes d'entiers consécutifs

Propriété 3.10 ()

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Ptitexo: *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3k + 2k^2 + k$.

2.6.2 Sommes géométriques

Propriété 3.11 (Somme des termes d'une suite géométrique)

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 1$. Soit p et n deux entiers naturels tels que $p \leq n$. On a :

$$\sum_{k=p}^{n} a^k = \frac{a^p - a^{n+1}}{1-a}.$$

preuve :

✓ On retient que la somme de NT termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $a \neq 1$, est donnée par la formule :

$$PT \times \frac{1-a^{NT}}{1-a}.$$

Il est donc inutile de se perdre dans de longs changement d'indices pour calculer la somme des termes d'une suite géométrique.

Exercice 3.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit θ un réel non nul. Calculer les sommes :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$$

Corollaire 3.12 (Factorisation de $a^n - b^n$)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

preuve :

Ptitexo: *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Soient* a *et* b *deux nombres complexes. Factoriser* $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ *par* $a + b$.

2.6.3 Sommes avec des coefficients binomiaux

Propriété 3.13 ()

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(p, m) \in \mathbb{N}^2$. Soient a et b deux nombres complexes.

$(-)$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$. (Formule du binôme).

$(-)$ $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.(Formule sommatoire de Pascal).

$(-)$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

$(-)$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k}\binom{p}{n-k} = \binom{m+p}{n}$. (Formule de Van der Monde).

$(-)$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

preuve:

Chapitre 4 - Systèmes linéaires

Le génie, c'est l'erreur dans le système. (P.Klee.)

Dans tout ce chapitre, on utilise des nombres réels où des nombres complexes. On adoptera donc la notation $\mathbb{K}$ pour désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Vocabulaire

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère les familles $(a_{i,j})_{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $(b_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ d'éléments de $\mathbb{K}$.
Le système (S) :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \dots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

d'inconnues $x_1,\dots,x_p$ est appelé **système linéaire à n équations et p inconnues**.

La colonne $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelée **second membre**.

Si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $b_i = 0$, on dit que le système est **homogène**. On appelle **système homogène** associé à (S) le système obtenu en remplaçant dans (S) le second membre par $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si le système admet au moins une solution, on dit qu'il est **compatible** ; dans le cas contraire, le système est dit incompatible.

Exemples :

Le système $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x+y=2 \end{cases}$ est compatible, tandis que le système $\begin{cases} x+2y+z & = & 3 \\ x-y+z & = & 4 \\ 2x+y+2z & = & 8 \end{cases}$ est incompatible.

2 Méthode du pivot de Gauss

2.1 Opérations élémentaires

Définition 4.1 (Opérations élémentaires)

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes de (S) toute opération de l'un des types suivant :

1. **échange de deux lignes** de (S). (On note $L_i \longleftrightarrow L_j$ l'échange des lignes i et j) .
2. **multiplication d'une ligne par un scalaire non nul**(« dilatation »). (On note $L_i \longleftarrow \lambda L_i$, la multiplication de la ligne L_i par le réel λ non nul).
3. **addition** à une ligne de (S) d'un multiple d'une autre ligne de (S) (« importation »). (On note $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ l'ajout de λL_j à la ligne L_i.

Propriété 4.2 (Invariance des solutions par opération élémentaires)

Toute opération élémentaire sur les lignes d'un système linéaire (S) conserve l'ensemble des solutions du système.

preuve:

2.2 Algorithme du pivot de Gauss ; utilisation de la matrice augmentée

L'algorithme du pivot de Gauss consiste à effectuer les opérations suivantes :

1. Placer par échanges de lignes, dans la première ligne de la première colonne un coefficient non nul. (Ce coefficient s'appelle pivot). (Si cela n'est pas possible, on se ramène immédiatement à un système d'inconnues $x_2, \dots, x_p$).
2. Utiliser un nombre fini d'importations pour ne plus avoir en-dessous du pivot que des coefficients nuls.
3. Réitérer le même procédé sur le sous-système commençant à la deuxième ligne, jusqu'à obtenir un système triangulaire.
4. Résoudre le système triangulaire ainsi obtenu en « remontant » les équations, en commençant par la ligne du bas.

Ptitexo: *Résoudre les systèmes suivants :*

$$\begin{cases} 2x - y - 3z & = & 1 \\ 3x + 2y - 2z & = & 4 \\ -x - 4y + 6z & = & 22 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2x + y + z & = & 4 \\ x + y + z & = & 3 \\ -4x - 2y - 2z & = & 8 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2x + y - 7z & = & 1 \\ x + y + z & = & 4 \\ 5x + y + z & = & 8 \\ 8x + 3y - 5z & = & 13 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2x + y & = & a \\ x - y & = & b \end{cases} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

✓ Si un système à n équations et n inconnues admet un seul n-uplet de solutions, alors on dit que ce système est **de Cramer**.

Propriété 4.3 (Validité de l'algorithme du pivot de Gauss)

L'algorithme du pivot de Gauss transforme tout système linéaire en un système triangulaire

3 Interprétation de l'ensemble des solutions en petite dimension

3.1 Système linéaire à deux équations et deux inconnues

Soient a, b, c, d quatre réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Considérons le système :

$$(S) \qquad \begin{cases} ax + by = \lambda \\ cx + dy = \mu \end{cases}.$$

Travaillons dans le plan euclidien muni d'un repère (O, u, v).
On se rappelle que l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient $ax + by = \lambda$ est une droite que l'on notera ici $\mathcal{D}$ et l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient $cx + dy = \mu$ est une droite que l'on notera ici $\mathcal{D}'$.
Résoudre le système (S) revient donc à rechercher les points appartenant à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.
Il y a donc trois cas de figures possibles :

1. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est l'ensemble des points $(x, y) \in \mathcal{D}$.

2. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles et non confondues. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

3. Les droites sont sécantes. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est réduit à un point.

Rappel : Soient a, b, c, d quatre réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Les droites d'équation $ax + by = \lambda$ et $cx + dy = \mu$ sont parallèles ou confondues si et seulement la quantité notée $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ est nulle.
On en déduit donc la propriété suivante :

Propriété 4.4 (Caractérisation des systèmes de Cramer en dim. 2)

Soient a, b, c, d quatre réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$. Le système

$$\begin{cases} ax + by = \lambda \\ cx + dy = \mu \end{cases}$$

est de Cramer si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

(déterminant du système)

Propriété 4.5 (Résolution des systèmes de Cramer en dimension 2)

Soient a, b, c, d quatre réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$. Si le système

$$\begin{cases} ax + by = \lambda \\ cx + dy = \mu \end{cases}$$

est de Cramer alors il a pour solutions :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & b \\ \mu & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & \lambda \\ c & \mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

3.2 Système linéaire à trois inconnues

Considérons un système (S) à n équations et 3 inconnues x, y et z dont aucune ligne n'est triviale, c'est-à-dire que chacune de ces lignes sont de la forme $ax+by+cz = \lambda$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.
Travaillons dans l'espace euclidien muni d'un repère (O, u, v, w).
On se rappelle que, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si a, b et c sont trois réels non tous nuls, alors l'ensemble des points de l'espace euclidien dont les coordonnées x, y et z vérifient $ax + by + cz = \lambda$ est un plan.
Résoudre le système (S) revient donc à rechercher les points appartenant à une intersection de plans.
Il y a donc quatre cas de figure possibles :

1. L'intersection des plans est réduite à l'ensemble vide.
2. L'intersection des plans est un point.
3. L'intersection des plans est réduite à une droite. (C'est le cas où toutes les lignes peuvent s'exprimer comme une combinaison linéaire de deux lignes elles-mêmes non proportionnelles).
4. L'intersection des plans est égale à un plan. (C'est le cas où toutes les lignes sont proportionnelles).

4 Structure de l'ensemble des solutions

✓ Le p-uplet $(0, \ldots, 0)$ est toujours solution d'un système homogène

Propriété 4.6 (Solutions d'un système homogène)

Soit (S) un système linéaire homogène à p inconnues. Si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et $y = (y_1, \ldots, y_p)$ sont deux p-uplets solutions de S, alors pour tout couple (λ, μ) de réels, le p-uplet noté $\lambda x+\mu y$ défini par $\lambda x+\mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_p + \mu x_p)$. est encore une solution de (S).

preuve :

✓ On dira bientôt que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

✓ Le p-uplet identiquement nul est toujours solution d'un système linéaire homogène.

Propriété 4.7 (Solutions d'un système homogène)

Soit (S) un système linéaire homogène à p inconnues. Soit H le système linéaire homogène associé. Si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ est un p-uplet solution de S, alors l'ensemble des p-uplets solutions de S est l'ensemble des p-uplets de la forme $x + h = (x_1 + h_1, \ldots, x_p + h_p)$ où $h = (h_1, \ldots, h_p)$ est un p-uplet solution de (H).

✓ Si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et $y = (y_1, \ldots, y_p)$ sont deux p-uplets solutions du système (S) alors $x - y = (x_1 - y_1, \ldots, x_p - y_p)$ est solution du système linéaire homogène associé à (S).

✓ On dira bientôt que l'ensemble des solutions d'un système linéaire à p inconnues est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^p$.

Chapitre 5 - Nombres complexes

The natural numbers came from God and all else was man-made. (Léopold Kronecker).

1 Ensemble des nombres complexes

Imaginé par les mathématiciens italiens de la Renaissance tels Cardan ou Tartaglia pour contourner une difficulté de résolution d'équations de degré 3 ou 4, le nombre i n'a pris son écriture actuelle qu'en 1777 sous la plume de Leonhard Euler. Mais c'est le mathématicien irlandais William Hamilton qui rédigea en 1830 la première théorie rigoureuse de construction des nombres complexes à partir des couples de réels.

Fiche d'exercice sur la construction de $\mathbb{C}$.

Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on décide de noter $+$ et $\times$ les opérations définies de la manière suivante :

$$\forall (a,b)\times(c,d)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,\ (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d).$$
$$\forall (a,b)\times(c,d)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,\ (a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

On appelle $+$ loi d'addition et $\times$ loi de multiplication. L'objet de cette feuille d'exercice est de vérifier que ces lois vérifient les propriétés usuelles de la multiplication et de l'addition de réels. (Nous dirons bientôt que muni de ces opérations, $\mathbb{R}^2$ est un corps, appelé corps des nombres complexes).

1) a) Montrer que cette addition est commutative et associative, c'est-à-dire que pour tout triplet $(z,z',z'')\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$:

$$z+z'=z'+z.$$
$$z+(z'+z'')=(z+z')+z''.$$

b) Vérifier que $(0,0)$ est élément neutre pour cette addition, c'est-à-dire que $(a,b)+(0,0)=(a,b)$, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Vérifier que tout élément $z\in\mathbb{R}^2$ admet un opposé pour cette addition c'est-à-dire un élément z' tel que $z+z'=(0,0)$.

✓ On résumera bientôt les propriétés démontrées dans les deux questions précédentes, on disant que $\mathbb{R}^2$ muni de cette loi d'addition est un **groupe commutatif**.

2) a) Montrer que cette multiplication est commutative et associative, c'est-à-dire que pour tout triplet $(z,z',z'')\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$:

$$z\times z'=z'\times z,$$
$$z\times(z'\times z'')=(z\times z')\times z''.$$

b) Vérifier que $(1,0)$ est élément neutre pour cette multiplication, c'est-à-dire que $(a,b)\times(1,0)=(a,b)$, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Vérifier que tout élément $z\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ admet un inverse pour cette multiplication c'est-à-dire un élément z' tel que $z\times z'=(1,0)$.

✓ On dira bientôt que muni de cette loi de multiplication, $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est un **groupe multiplicatif**.

3) Vérifier que cette multiplication est distributive sur l'addition, c'est-à-dire que

$$\forall (z,z',z'')\in\left(\mathbb{R}^2\right)^3, z\times(z'+z'')=(z\times z')+(z\times z'').$$

On choisit de noter $\mathrm{i}=(0,1)$.

4) Montrer que $\mathrm{i}^2=-1$.

✓ On résumera bientôt les propriétés démontrées dans les deux questions précédentes, on disant que $\mathbb{R}^2$ muni de ces loi d'addition et de multiplication est un corps commutatif. On appelle cet ensemble corps des nombres complexes.

✓ Munis des opérations usuelles, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ sont des corps. Mais par exemple, $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps puisqu'il existe des éléments non nuls qui n'admettent pas d'inverse dans $\mathbb{Z}$ pour la multiplication.

5) Montrer que l'ensemble $\{\mathcal{V}, \mathcal{F}\}$ muni de l'opération d'addition ≪ OU EXCLUSIF ≫, et de l'opération de multiplication $\wedge$ est un corps.

On identifie tout réel de x avec le couple $(x, 0)$. On remarque alors que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \times (a,b) = (\lambda, 0) \times (a,b) = (\lambda a, \lambda b).$$

Et l'on s'autorise à omettre le symbole $\times$ dans une multiplication.
On a alors pour tout couple $z = (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$z = (a,b) = (a,0) + b(0,1) = (a,0) + \mathrm{i} \times b = a + \mathrm{i}b.$$

Définition 5.1 (Forme algébrique)

L'écriture de $z = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ sous forme $z = a + \mathrm{i}b$ est appelée forme algébrique de z. Dans ce contexte, le réel a s'appelle **partie réelle** de z et le réel b s'appelle **partie imaginaire** de z, et l'on note :

$$\mathcal{R}\mathrm{e}(z) = a \quad \mathcal{I}\mathrm{m}(z) = b.$$

Définition 5.2 (Conjugué)

Soit $z = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle conjugué de z l'élément noté $\overline{z}$ défini par :

$$\overline{z} = a - \mathrm{i}b = (a, -b).$$

6) Vérifier que si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a + \mathrm{i}b$. Alors :

$$\mathcal{R}\mathrm{e}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \mathrm{i}\mathcal{I}\mathrm{m}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}.$$

7) Vérifier que l'application $z \mapsto \overline{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire, c'est-à-dire que pour tout couple de réels λ, μ :

$$\overline{\lambda z + \mu z'} = \lambda \overline{z} + \mu \overline{z'}.$$

8) Vérifier que pour tout $z = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $z\overline{z} \in \mathbb{R}^+$.

Définition 5.3 (Module)

Soit $z = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **Module** de $z = a + \mathrm{i}b$ l'élément noté $|z|$ défini par :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Un complexe de partie réelle nulle s'appelle un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $\mathrm{i}\mathbb{R}$.

✓ Si $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, et $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, alors :

$$z = z' \quad \Longleftrightarrow \quad x = x' \text{ et } y = y'.$$

Attention toutefois à ne pas utiliser cette propriété lorsque x, y, x', y' ne sont pas des réels...

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $+$ et $\times$ définies dans cette fiche d'exercice.

1.1 Conjugaison

Définition 5.4 (Conjugué)

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $z = x + \mathrm{i}y$. On appelle **conjugué** de z nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par :

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}y.$$

Propriété 5.5 (Propriétés de la conjugaison)

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $z = x + \mathrm{i}y$. On a :
(−) $\mathcal{R}\mathrm{e}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
(−) $\overline{\overline{z}} = z$.
(−) $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
(−) $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.

preuve :

Propriété 5.6 (Conjugaison et opérations)

(−) $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$.
(−) $\forall z' \in \mathbb{C}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.
(−) $\forall (\lambda,\lambda') \in \mathbb{R}^2$, $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\overline{\lambda z + \mu z'} = \lambda\overline{z} + \mu\overline{z'}$.

preuve :

Ptitexo: *Calculer* $\mathcal{I}\mathrm{m}\left(\dfrac{1}{5-4\mathrm{i}} - \dfrac{1}{4+5\mathrm{i}}\right)$.

1.2 Module

Notons que pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = x^2 + y^2.$$

Définition 5.7 (Module d'un nombre complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **module** de z le réel défini par :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

✓ On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x+\mathrm{i}y| = \sqrt{x^2+y^2}$.

✓ Si z est un réel, alors $\overline{z} = z$, donc le module de z est donné par $\sqrt{z^2} = \mathrm{abs}(z)$. La fonction qui à un complexe associe son module est donc un prolongement à $\mathbb{C}$ de la fonction qui à un réel associe sa valeur absolue. Ce qui justifie que l'on puisse parler indifféremment de la valeur absolue ou du module d'un réel et que l'on adopte la même notation pour les valeurs absolues de réels que pour les complexes.

Propriété 5.8 (Propriétés du module)

Soit $z \in \mathbb{C}$.
(−) $|z| = 0 \iff z = 0$.
(−) $|z| = |\overline{z}|$.
(−) $\mathcal{R}\mathrm{e}z \leq |\mathcal{R}\mathrm{e}z| \leq |z|$.
(−) $\mathcal{I}\mathrm{m}z \leq |\mathcal{I}\mathrm{m}z| \leq |z|$.
(−) Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

preuve :

Propriété 5.9 (Module et opérations)

(−) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|zz'| = |z|\,|z'|$.
(−) $\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

preuve :

Propriété 5.10 (Inégalités triangulaires)

(−) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$,
$$|z + z'| \leq |z| + |z'| .$$

Il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+$, $z' = \lambda z$ ou $z = \lambda z'$.(On dit dans ce dernier cas que z et z' sont positivement liés.
(−) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$,
$$||z| - |z'|| \leq |z - z'| .$$

✓ On a aussi pour tout couple $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,
$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'| .$$

Exercice 5.1

Soient $n \in \mathbb{N}$. Soient $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que :
$$\left|\sum_{k=0}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |z_k| .$$

2 Nombres complexes et géométrie du plan euclidien

2.1 Plan complexe ou plan d'Argand-Cauchy

Dans toute cette partie 2, on travaille dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit M le point du plan d'abscisse

x et d'ordonnée y. On dit que le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est l'affixe du point M de coordonnées (x, y).
On dit que le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$.

Inversement, si z est un nombre complexe, on note $M(z)$ le point du plan d'affixe z, et l'on dit que $M(z)$ est l'image de z dans le plan complexe.

Propriété 5.11 (Interprétation du module)

Soit M un point du plan d'affixe z.

$$|z| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM.$$

Propriété 5.12 (Interprétation du conjugué)

Soit M un point du plan d'affixe z. Le point du plan d'affixe $\overline{z}$ est le point du plan obtenu par symétrie de M par rapport à l'axe des abscisses.

Dessins :

Propriété 5.13 (Affixe d'un vecteur, d'un milieu)

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives a et b.
$(-)$ Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.
$(-)$ Le milieu sur segment $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{a+b}{2}$.

preuve :

Propriété 5.14 ()

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives u et v. Le vecteur $\overrightarrow{u+v}$ a pour affixe $u + v$.

preuve :

Dessin :

2.2 Orthogonalité et colinéarité

Soient x, y, x' et y' quatre réels. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives $u = x + \mathrm{i}y$ et $v = x' + \mathrm{i}y'$. On a alors :

$$\overline{u}v = (x - \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y') = xx' + yy' + \mathrm{i}(xy' - x'y).$$

On observe donc que $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(\overline{u}v) = \vec{u}.\vec{v}$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}\,(\overline{u}v) = \det(\vec{u}, \vec{v})$.

On en déduit facilement :

Propriété 5.15 (Carac. de l'orthogonalité de deux vecteurs du plan)

Soient x, y, x' et y' quatre réels. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives $u = x + \mathrm{i}y$ et $v = x' + \mathrm{i}y'$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.
ii) $xx' + yy' = 0$.
iii) $\overline{u}v \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

preuve:

✓ Quand nous aurons revu la notion d'argument nous pourrons donner une autre preuve efficace de ces théorèmes.

Propriété 5.16 (Carac. de la colinéarité de deux vecteurs du plan)

Soient x, y, x' et y' quatre réels. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives $u = x + \mathrm{i}y$ et $v = x' + \mathrm{i}y'$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
ii) $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$.
ii) $xy' - x'y = 0$.
iii) $\overline{u}v \in \mathbb{R}$.

preuve:

2.3 Modules et distances

Propriété 5.17 (Distance entre deux points)

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$ et $b = b_1 + \mathrm{i}b_2$. (Avec $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$). La distance entre A et B est donnée par :

$$AB = |b - a|\,.$$

L'inégalité triangulaire s'interprète par :

Définition 5.18 (Disques, cercles)

Soit A un point d'affixe a. Soit r un réel strictement positif.
$(-)$ On appelle **cercle** de centre A et de rayon r, et l'on note $\mathcal{C}(A,r)$, l'ensemble des points M du plan vérifiant $AM = r$. On a donc :

$$\mathcal{C}(A,r) = \left\{ M(z) \in \mathcal{P} \;\middle|\; |z-a| = r \right\}.$$

$(-)$ On appelle **disque ouvert** de centre A et de rayon r, et l'on note $\mathcal{D}(A,r)$, l'ensemble des points M du plan vérifiant $AM < r$. On a donc :

$$\mathcal{D}(A,r) = \left\{ M(z) \in \mathcal{P} \;\middle|\; |z-a| < r \right\}.$$

$(-)$ On appelle **disque fermé** de centre A et de rayon r, et l'on note $\mathcal{DF}(A,r)$, l'ensemble des points M du plan vérifiant $AM \leq r$. On a donc :

$$\mathcal{DF}(A,r) = \left\{ M(z) \in \mathcal{P} \;\middle|\; |z-a| \leq r \right\}.$$

3 Rappels sur les fonctions circulaires de trigonométrie

3.1 Généralités

Dans le plan complexe, muni d'un repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ orthonormé direct, on appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1.
On convient que ce cercle est parcouru dans le sens positif, lorsqu'il est parcouru dans le sens antihoraire.

Définition 5.19 (Sinus, Cosinus, tangente)

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique et $x \in \mathbb{R}$. On note A le point d'affixe 1. (Ce point appartient à $\mathcal{C}$).
On appelle $\mathcal{T}$ la droite passant par A et parallèle à l'axe des ordonnées. On définit le point M d'affixe z de la manière suivante :
$(-)$ Si $x \geq 0$, l'enroulement sur le cercle $\mathcal{C}$, dans le sens positif, d'un segment d'origine A et de longueur x aboutit au point M du cercle $\mathcal{C}$.
$(-)$ Si $x \leq 0$, l'enroulement sur le cercle $\mathcal{C}$, dans le sens négatif, d'un segment d'origine A et de longueur $|x|$ aboutit au point M du cercle $\mathcal{C}$.

$(-)$ Le **cosinus** du réel x, est le réel noté $\cos(x)$ défini par $\cos(x) = \mathcal{R}\mathrm{e}(z)$.
$(-)$ Le **sinus** du réel x, est le réel noté $\sin(x)$ défini par $\sin(x) = \mathcal{I}\mathrm{m}(z)$.
$(-)$ Lorsque $\cos(x) \neq 0$, c'est à dire lorsque $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}$, la droite $\mathcal{T}$ et la droite (OM) se coupent en un point que l'on appelle N d'affixe z'. La **tangente** de x est le réel noté $\tan(x)$ défini par $\tan(x) = \mathcal{I}\mathrm{m}(z' - 1)$.

Propriété 5.20 (Expression de $\tan$ en fonction de $\cos$ et $\sin$)

Soit x un réel tel que $\cos(x) \neq 0$. On a :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

preuve:

✓ On définit ainsi les fonctions $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, la fonction $\tan$ est quant à elle à valeurs dans $\mathbb{R}$ et est définie pour tous les réels x tels que x n'est pas de la forme $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

✓ Si $\cos(x) \neq 0$, alors $\tan(x)$ est la distance AN comptée positivement si N est au-dessus de l'axe des abscisses et comptée négativement si N est en dessous de l'axe des abscisses

✓ Dans le contexte de la **Définition 5.19**, le nombre x est la mesure en radian de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right)$. La circonférence de $\mathcal{C}$ est égale à 2π. Cette mesure est donc déterminée modulo 2π.

Définition 5.21 (Fonction périodique)

Soit $T \in \mathbb{R}_*^+$. Soit f une fonction de la variable réelle dont le domaine de définition est noté D_f. On dit que la fonction f est T-périodique si :

$$\begin{gathered} \forall x \in D_f, x + T \in D_f \quad \text{et} \quad x - T \in D_f \\ \text{et} \, \forall x \in D_f, f(x + T) = f(x) = f(x - T). \end{gathered}$$

Propriété 5.22 (Périodicité des fonctions trigonométriques)

Les fonctions sin et cos sont 2π -périodiques.
La fonction tan est π-périodique.

Exercice 5.2 Propriétés de symétrie des fonctions trigonométriques

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Exprimer en fonction de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ lorsqu'ils existent les réels suivants :

$$\begin{array}{lll} \cos(-x) & \sin(-x) & \tan(-x) \\ \cos(\pi - x) & \sin(\pi - x) & \tan(\pi - x) \\ \cos(\pi + x) & \sin(\pi + x) & \tan(\pi + x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) & \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \end{array}$$

Propriété 5.23 ()

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\},\ 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}.$$

preuve :

Propriété 5.24 (Trigonométrie du triangle rectangle)

Soit ABC un triangle rectangle en B du plan euclidien tel que $AC \neq 0$. Soit a une mesure en radian de l'angle $\widehat{BAC}$.
$(-)$ $\sin(a)$ est le quotient de la longueur du côté de l'angle droit opposé à l'angle en A par l'hypoténuse, c'est-à-dire que l'on a :

$$\sin(a) = \frac{BC}{AC}.$$

$(-)$ $\cos(a)$ est le quotient de la longueur du côté de l'angle droit adjacent à l'angle en A par l'hypoténuse, c'est-à-dire que l'on a :

$$\cos(a) = \frac{AB}{AC}.$$

$(-)$ $\tan(a)$ est le quotient de la longueur du côté de l'angle droit opposé à l'angle en A par la longueur de l'angle droit adjacent à l'angle en A, c'est-à-dire que l'on a :

$$\tan(a) = \frac{BC}{BA}.$$

preuve:

Propriété 5.25 (Formules d'addition)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),\\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a),\\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b),\\
\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).
\end{aligned}$$

preuve:

Propriété 5.26 (Formules d'addition pour $\tan$)

Soient a et b deux réels tels que $\tan(a)$, $\tan(b)$ existent.
($-$) Si $\tan(a+b)$ existe alors :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

($-$) Si $\tan(a-b)$ existe alors :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}.$$

preuve:

Propriété 5.27 (Formules de duplication)

Soit $a \in \mathbb{R}$.
($-$) $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$.
($-$) $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.
($-$) Sous réserve d'existence, $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$.

preuve:

Propriété 5.28 (Formules de factorisation)

Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\sin(p)+\sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\sin(p)-\sin(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\cos(p)+\cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\cos(p)-\cos(q) &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).
\end{aligned}$$

preuve:

Propriété 5.29 (Formules de linéarisation)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Sous réserve d'existence :

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2},\ \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2},\ \tan^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{1-\cos(2a)}.$$

preuve:

✓ Si a et b sont deux réels, alors :
$\cos(a) = \cos(b) \iff a \equiv b\ (2\pi)$ ou $a \equiv -b\ (2\pi)$.
$\sin(a) = \sin(b) \iff a \equiv b\ (2\pi)$ ou $a \equiv \pi - b\ (2\pi)$.

Exercice 5.3 **Résolution de $a\cos(x)+b\sin(x)=c$ par déphasage.**

1) Résoudre $\sqrt{3}\cos(2x)-\sin(2x)=\sqrt{2}$.

2) Résoudre $\cos(x)+\sin(x)=1$.

3) Résoudre $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=2$.

4) Donner une méthode générale de résolution des équation du type :

$$a\cos(x)+b\sin(x)=c.$$

4 Exponentielle complexe

4.1 Nombres complexes de module égal à 1

4.1.1 Groupe unitaire

Définition 5.30 (Groupe unitaire)

On appelle groupe unitaire l'ensemble noté $\mathbb{U}$ de tous les nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U}=\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;|z|=1\right\}.$$

Propriété 5.31 (Le groupe unitaire est un groupe)

(−) $\forall(z,z')\in\mathbb{U}^2$, $zz'\in\mathbb{U}$. (Stabilité de $\mathbb{U}$ par multiplication).
(−) $\forall(z,z')\in\mathbb{U}^2$, $zz'=z'z$. ($\mathbb{U}$ est abélien).
(−) $\forall(z,z',z'')\in\mathbb{U}^3$, $z(z'z'')=(zz')z''\in\mathbb{U}$. (Associativité de la multiplication).
(−) $\forall z\in\mathbb{U}$, $1z=z1$. ($1\in\mathbb{U}$ est élément neutre pour la multiplication).
(−) $\forall z\in\mathbb{U}$, $\dfrac{1}{z}\in\mathbb{U}$. (Tout élément de $\mathbb{U}$ admet un inverse qui appartient encore à $\mathbb{U}$).

✓ On résumera ces propriétés en disant que muni de la restriction à $\mathbb{U}$ de l' opération de multiplication des nombres complexes, $\mathbb{U}$ forme un groupe.

Propriété 5.32 ()

(−) $\forall z\in\mathbb{U}$, $\overline{z}\in\mathbb{U}$.
(−) $\forall z\in\mathbb{U}$, $z\neq 0$.
(−) $\forall z\in\mathbb{U}$, $z^{-1}=\overline{z}$.
(−) $\forall(z,z')\in\mathbb{U}^2$, $\dfrac{z}{z'}\in\mathbb{U}$.

4.1.2 Notation d'Euler

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on note $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)$.

✓ A ce stade, cela n'est qu'une convention de notation. Mais nous verrons très bientôt que cette notation est bien adaptée : c'est une extension de la notion d'exponentielle réelle.

Propriété 5.33 ()

$$\mathbb{U} = \left\{ e^{\mathrm{i}\theta} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Corollaire 5.34 (Paramétrisation du cercle trigonométrique)

Le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points du plan complexe de coordonnées $(\cos(t), \sin(t))$ lorsque t décrit $[0, 2\pi]$.

Propriété 5.35 ()

$$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2,\ e^{\mathrm{i}t} = e^{\mathrm{i}t'} \iff t = t'\ (2\pi).$$

preuve:

Propriété 5.36 ( )

Soient θ et θ' deux réels.
$(-)$ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$.
$(-)$ $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{-1} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.
$(-)$ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}}$.
$(-)$ $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$.

preuve:

✓ Ces formules donnent un bon argument pour utiliser la notation exponentielle.

✓ Si l'on se souvient de ces formules, alors en repassant aux notation avec des $\sin$ et des $\cos$ et en identifiant parties réelles et imaginaires, alors on peut retrouver les formules trigonométriques d'addition.

4.1.3 Formule de Moivre

On adoptera la convention $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z^0 = 1$.

Propriété 5.37 ()

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}.$$

Ptitexo: ***Méthode du demi-argument***

1. *Soient a et b deux réels. Montrer que :*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

2. *Établir une formule analogue pour $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$.*
3. *Retrouver alors les formules trigonométriques de factorisation.*
4. *Montrer que pour tout $\theta\in\mathbb{R}$:*

$$1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}.$$

$$1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}.$$

Ptitexo: *Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$.*

Exercice 5.4 **Linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$.**

Soit $x\in\mathbb{R}$.

1) a) Exprimer $\cos^4(x)$ comme une combinaison linéaire de $\cos(4x)$ et $\cos(2x)$ et de 1.

b) Établir une formule analogue pour $\sin^4(x)$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}$. Exprimer $\cos^n(x)$ puis $\sin^n(x)$ comme combinaisons linéaires de $\cos(kx)$ et $\sin(k'x)$ pour k et k' appartenant à $[\![0,n]\!]$. (on appelle cette opération de réécriture "opération de linéarisation". C'est une opération utile en analyse par exemple lorsque l'on recherche des primitives).

Exercice 5.5 **Transformation en somme de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$.**

Soit $x\in\mathbb{R}$.

1) a) Montrer que $\cos(3x)=4\cos^3(x)-3\cos(x)$ en commençant par écrire : $\cos(3x)=\mathcal{R}\mathrm{e}\left(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x)\right)^3$.

b) Établir une formule analogue pour $\sin(3x)$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}$. Exprimer $\cos(nx)$ puis $\sin(nx)$ uniquement à l'aide de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

4.2 Argument d'un nombre complexe non-nul

4.2.1 Définition et opération

Soit $z\in\mathbb{C}^*$. On a $\left|\dfrac{z}{|z|}\right|=1$. Il existe donc un réel θ tel que $\dfrac{z}{|z|}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Ce qui prouve la validité de la définition suivante :

Propriété 5.38 (Argument d'un complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle **argument** de z tout réel θ qui vérifie : $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,|z|$. On note alors $\arg z = \theta$.

✓ Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Si θ est un argument de z, alors l'ensemble des arguments de z est l'ensemble des réels congrus à θ modulo 2π.

Ptitexo: *Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer un argument de $z = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.*

Propriété 5.39 ()

Soient z et z' deux complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ'.

(−)
$$z = z' \iff |z| = |z'| \text{ et } \theta = \theta' \ (2\pi).$$

(−) zz' admet pour argument $\theta + \theta'$.

(−) $\dfrac{z}{z'}$ admet pour argument $\theta - \theta'$.

(−) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, z^n admet pour argument $n\theta$.

✓ Les propriétés vérifiées par $\arg$ et $\ln$ sont très similaires...

4.2.2 Interprétation géométrique

Dans ce paragraphe, on travaille dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Propriété 5.40 (Arguments et angles orientés)

On considère trois points deux à distincts A, B et M du plan d'affixes respectives a, b et z.

(−) Si M et 0 sont deux points distincts, alors $\arg(z) = \left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right)$ (2π).

(−) $\arg(z-a) = \left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM}}\right)$ (2π).

(−) $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}}\right)$.

preuve :

Ptitexo: *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives u et v. Retrouver la formule $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \mathcal{R}\mathrm{e}(\overline{u}v)$.*

4.3 Exponentielle complexe

Définition 5.41 (Exponentielle d'un nombre complexe)

Soit z un nombre complexe de partie réelle égale à x et de partie imaginaire égale à y. On appelle exponentielle complexe de z le nombre noté e^z défini par :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}.$$

Propriété 5.42 ()

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \left|e^{x+iy}\right| = e^x.$$
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, e^{x+iy}\neq 0.$$
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \arg\left(e^{x+iy}\right) = y\ (2\pi).$$

✓ On définit ainsi une application appelée exponentielle complexe et noté e ou $\exp$ qui à un complexe z associe e^z.

✓ L'exponentielle d'un nombre complexe peut être un réel négatif, par exemple $e^{i\pi} = -1$. Bien souvent, l'exponentielle d'un nombre complexe n'a même pas de signe.

Propriété 5.43 ()

Soient z et z' deux nombres complexes.

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'} \quad \text{et} \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

Ptitexo: *L'application* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *est-elle injective ? surjective ?*

5 Transformations usuelles du plan

On travaille dans tout ce paragraphe dans le plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct. On appelle transformation du plan toute application du plan vers le plan. On rappelle les définitions suivantes :

Définition 5.44 (Translation)

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle **translation** de vecteur $\vec{u}$ l'unique application qui à un point M du plan associe l'unique point du plan, noté M' défini par $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Définition 5.45 (Homothétie)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Soit Ω un point du plan. On appelle **homothétie** de rapport λ l'unique application qui à un point M du plan associe l'unique point du plan, noté M' défini par $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$.

Définition 5.46 (Réflexion)

Soit (Δ) une droite du plan. On appelle réflexion d'axe (Δ) l'unique application qui à un point du plan associe :
$(-)$ le point M si $M \in (\Delta)$,
$(-)$ le point M' tel que la droite (Δ) est la médiatrice du segment $[MM']$ si $M \notin (\Delta)$.

Définition 5.47 (Rotation)

Soit Ω un point du plan orienté. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ l'application qui à un point M du plan associe :
$(-)$ le point Ω si $M = \Omega$,
$(-)$ le point M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}} \equiv \theta(2\pi)$ si $\Omega \neq M$.

Dessins :

Dans la suite de ce paragraphe, on identifie un point et son affixe.

Propriété 5.48 ()

$(-)$ Si $\vec{u}$ un vecteur d'affixe u. L'application $z \mapsto z + u$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
$(-)$ L'application $z \mapsto -z$ est la symétrie de centre 0.
$(-)$ L'application $z \mapsto \overline{z}$ est la réflexion d'axe Ox.
$(-)$ Si $a \in \mathbb{R}$, alors l'application $z \mapsto az$ est l'homothétie de centre 0 et de rapport a.
$(-)$ Si $\theta \in \mathbb{R}$, alors l'application $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ est la rotation de centre 0 et d'angle θ.
$(-)$ Si $\omega \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, alors l'application $z \mapsto \lambda(z - \omega) + \omega$ est l'homothétie de centre ω et de rapport λ.
$(-)$ Si $\omega \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors l'application $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega$ est la rotation de centre ω et d'angle θ.

Définition 5.49 (Similitude directe)

On appelle **similitude directe** toute application de la forme :

$$z \mapsto az + b.$$

où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

✓ Il découle facilement des propriétés précédentes qu'une transformation du plan obtenue par composition de translations, de rotations et d'homothétie est une similitude directe. La **Propriété 5.50** qui suit indique que la réciproque de cette assertion est vraie.

Propriété 5.50 (Composition de similitudes directes)

La composée de deux similitudes directe est une similitude directe.

preuve:

Propriété 5.51 (Classification des similitudes directes)

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes. Soit F la similitude directe définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\, F(z) = az + b.$$

$(-)$ Si $a = 1$, alors F est la translation dont le vecteur de translation est d'affixe b.
$(-)$ Si $a \neq 1$. Alors F admet un unique point fixe notons le Ω. Si l'on note θ un argument de a, H l'homothétie de centre Ω de rapport $|a|$, et R la rotation de centre Ω et d'angle θ alors, on a :

$$F = R \circ H = H \circ R.$$

(On dit dans ce cas, que le point Ω est le **centre de la similitude**, le réel $|a|$ est le **rapport de la similitude**, et θ est une mesure en radian de **l'angle de la similitude**.

6 Résolution d'équations algébriques dans $\mathbb{C}$.

6.1 Équations du second degré

6.1.1 Racines carrés dans $\mathbb{C}$.

Définition 5.52 (Racine carrée d'un complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle racine carrée de z, tout nombre complexe Z qui vérifie $Z^2 = z$.

✓ Si $a \in \mathbb{R}^+$, la notation $\sqrt{a}$ désigne l'unique racine carrée positive de a.

✓ Le réel 0 possède une unique racine carrée qui est 0.

Propriété 5.53 (Méth. prat. d'extraction de rac. carrées en polaires)

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées. Si $z \in \mathbb{C}^*$ est un nombre complexe de module ρ et d'argument θ, alors ses deux racines carrées sont $Z_1 = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $Z_1 = -\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

preuve:

Méthode algébrique d'extraction de racines carrées
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul de partie réelle égale à x et de partie imaginaire égale à y. Recherchons ses racines carrées.
Soit Z une racine carrée de z. Si l'on note X (resp. Y) la partie réelle (resp.

imaginaire) de Z, alors on a :

$$\begin{aligned}
& (X+\mathrm{i}Y)^2 = z \quad \text{et} \quad \left|Z^2\right| = |z| \\
\Longleftrightarrow\ & X^2 - Y^2 + \mathrm{i}2XY = x + \mathrm{i}y \quad \text{et} \quad X^2+Y^2 = \sqrt{x^2+y^2} \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} X^2 - Y^2 & = & x \\ X^2 + Y^2 & = & \sqrt{x^2+y^2} \\ 2XY & = & y \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} X^2 & = & \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2} \\ Y^2 & = & \frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2} \\ 2XY & = y \end{cases}.
\end{aligned}$$

Des deux premières lignes du système ainsi obtenu, on déduit au signe près, les valeurs de X et Y en fonction de x et y. (On obtient quatre couples (X, Y) possibles). La dernière ligne du système obtenu permet de déterminer les deux racines carrées. Elle nous dira si X et Y sont ou non de même signe.

Ptitexo: *Déterminer sous forme algébrique et sous forme polaire les racines carrées de $1-i$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.*

6.1.2 Résolution des équations du second degré

Définition 5.54 (Forme canonique, discriminant)

Soient a, b et c trois complexes tels que $a \neq 0$. Il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ a(x+\alpha)^2 + \beta = ax^2 + bx + c.$$

On appelle l'expression $a(x+\alpha)^2+\beta$, forme canonique du trinôme ax^2+bx+c. Le réel Δ défini par $\Delta = b^2-4ac$ est appelé discriminant du trinôme ax^2+bx+c.

Propriété 5.55 (Solutions d'une équation du second degré.)

Soient a, b et c trois complexes tels que $a \neq 0$. Soit Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c. On considère l'équation d'inconnue le complexe x :

$$(E) \quad ax^2 + bx + c = 0.$$

$(-)$ Si $\Delta \neq 0$, et si δ est une racine carrée de Δ alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

$(-)$ Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une seule solution double $x = -\dfrac{b}{2a}$.

preuve :

Ptitexo: *Résoudre l'équation de second degré d'inconnue x :*

$$x^2 - 4x + 4 + 2i = 0.$$

Corollaire 5.56 (Solutions dans $\mathbb{C}$ d'une équ. de deg. 2 à coeff. réels)

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$. Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. On considère l'équation d'inconnue le complexe x :

$$(E) \quad ax^2 + bx + c = 0.$$

(−) Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(Et ces solutions sont deux réels).

(−) Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une seule solution double $x = -\dfrac{b}{2a}$.

(−) Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

(Et ces solutions sont conjugués et n'appartiennent pas à $\mathbb{R}$).

preuve:

Ptitexo: *Soit $\theta \in \mathbb{R}$, résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:*

$$z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0. \quad (E_1),$$

$$z^2 - 2z\sin(\theta) + 1 = 0. \quad (E_2).$$

Propriété 5.57 (Somme et produit des racines)

Soient a, b et c trois complexes tels que $a \neq 0$. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de produit égal à P et de somme égale à S. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) $S = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$.

ii) z_1 et z_2 sont solutions de l'équation d'inconnue z :

$$az^2 + bz + c = 0.$$

preuve:

✓ On peut utiliser la propriété précédente dans les deux sens : On peut l'utiliser pour trouver rapidement les deux solutions d'une équation du second degré ou bien l'utiliser pour déduire des propriétés sur les nombres z_1 et z_2 lorsque l'on sait qu'ils sont solutions d'une certaine équation du second degré.

Ptitexo: *Soit $b \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation d'inconnue z suivante :*

$$z^2 - \left(1 + b + b^2 + b^3\right) z + (1 + b^2)(b + b^3) = 0.$$

6.2 Résolution de $Z^n = z$

6.2.1 Racines de l'unité

Définition 5.58 (Racines n-ème de l'unité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ème de l'unité** tout nombre complexe z qui vérifie $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité.

Propriété 5.59 ($\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$(-)$ $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.
$(-)$ Si $z \in \mathbb{U}_n$ et $z' \in \mathbb{U}_n$, alors $zz' \in \mathbb{U}_n$.
$(-)$ Si $z \in \mathbb{U}_n$, alors $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$.

preuve:

✓ On résumera bientôt ces propriétés en disant que $\mathbb{U}_n$ lorsqu'il est muni de l'opération usuelle de multiplication de nombres complexes est un sous-groupe de $\mathbb{U}$ muni de l'opération de multiplication des nombres complexes.

Propriété 5.60 ()

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

preuve:

✓ Donc le groupe $\mathbb{U}_n$ contient exactement n éléments

✓ Si l'on note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi}{n}}$, on a donc $\mathbb{U}_n = \left\{\omega^0, \omega, \dots, \omega^{n-1}\right\}$.

Propriété 5.61 ()

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
$(-)$ Soit ζ une racine n-ème de l'unité différente de 1, on a :

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0.$$

$(-)$ La somme des n racines n-èmes de l'unité est nulle.

Dessin :

✓ Si l'on note R la rotation de centre 0 et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$. Si l'on note A le point d'affixe 1. Alors les racines n-èmes de l'unité sont les points $A, R(A), \ldots, R^{n-1}(A)$. (Où $R^i = R \circ R \circ \cdots \circ R$).

Ptitexo: *On note $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Exprimer en fonction de j les racines 3-èmes de l'unité. Que vaut $1 + j + j^2$? Que vaut $\overline{j}$?*

6.2.2 Racines n-èmes d'un nombre complexe

Définition 5.62 (Racine n-ème d'un complexe)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit z un nombre complexe. On appelle **racine n-ème de** z tout nombre complexe Z tel que $Z^n = z$.

Propriété 5.63 ()

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit z un nombre complexe. Soit Z_0 une racine n-ème de z. L'ensemble des racines n-èmes de z est l'ensemble :

$$Z_0\mathbb{U}_n = \left\{ Z_0\omega \;\middle|\; \omega \in \mathbb{U}_n \right\}.$$

Ptitexo: *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:*

$$z^n + 1 = 0.$$

Corollaire 5.64 ()

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit z un nombre complexe non nul de module ρ et d'argument θ. L'ensemble des racines n-èmes de z est l'ensemble :

$$\left\{ \rho^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \;\middle|\; k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Ptitexo: *Déterminer les racines 5-èmes de $-1 + i$*

Chapitre 6 - Généralités sur les fonctions d'une variable réelle

Le titre dégrade. Les honneurs déshonorent. La fonction abrutit. (Gustave Flaubert, lettre à Guy de Maupassant).

Ce chapitre est consacré à l'étude des fonctions numériques de la variable réelle. L'objectif du chapitre est de consolider les bases de acquises en Terminale. Les preuves de bon nombre de résultats importants seront donc remises à plus tard.

1 Généralités sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.1 Domaine de définition, opérations sur les fonctions et représentation graphique

1.1.1 Vocabulaire

On appelle fonction d'une variable réelle à valeurs réelles toute application d'une partie D_f de $\mathbb{R}$ vers une partie Y de $\mathbb{R}$. On rappelle (cf. **Chapitre 2**) qu'une fonction f d'une variable réelle est donc définie par une partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$, cette partie devant vérifier la propriété :

$$\forall x \in D_f, \exists! y \in F, (x, y) \in \Gamma_f.$$

On dit alors que Γ_f est le **graphe** de f, et l'ensemble D_f est appelé **domaine de définition** de f.

Rappel : Le programme ne distingue pas la notion de fonction de celle d'application. Lorsque l'on a une expression $f(x)$ d'une variable libre x (la plupart du temps réelle ou complexe), le domaine de définition de la fonction définie par cette expression $f(x)$ est l'ensemble noté D_f des éléments pour lesquels cette expression a un sens.

<u>Ptitexo:</u> *Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :*

$$\text{cotan} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad g : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{\sqrt{3x - 2}},$$

$$h : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad i : x \mapsto \ln\left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right).$$

1.1.2 Opérations sur les fonctions

Définition 6.1 (Opérations sur les fonctions)

Soit $X \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux éléments de $\mathbb{R}^X$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit :
(−) La **somme** de f et g est la fonction notée $f+g$ définie par :

$$f+g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x)+g(x).$$

(−) Le **produit** de f et g est la fonction notée $f \times g$ définie par :

$$f \times g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x)g(x).$$

(−) La fonction notée λf est définie par :

$$\lambda f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \lambda f(x).$$

(−) La fonction valeur absolue de f est la fonction notée $|f|$ définie par :

$$|f| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |f(x)|.$$

On rappelle que si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont deux fonctions de la variable réelle alors $g \circ f$ est l'application :
$g \circ f : X \longrightarrow Z,\ x \longmapsto g(f(x))$.

1.1.3 Représentation graphique

Définition 6.2 (Courbe représentative)

Soit f une fonction de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notons D_f son ensemble de définition. La **représentation graphique** de f, (ou **courbe représentative** de f), dans un repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x \in D_f$.

1.1.4 Transformations simples d'une fonction

Propriété 6.3 ()

Soit f une fonction de la variable réelle et à valeur dans $\mathbb{R}$.
Notons D_f son ensemble de définition et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ orthonormé du plan.
$(-)$ Soit $a \in \mathbb{R}$. La courbe C_g, représentative de la fonction $g : x \mapsto f(x) + a$ est l'image de C_f par la translation de vecteur $a\overrightarrow{e_2}$.
$(-)$ Soit $a \in \mathbb{R}$. La courbe C_g, représentative de la fonction $g : x \mapsto f(x - a)$ est l'image de C_f par la translation de vecteur $a\overrightarrow{e_1}$.
$(-)$ Soit $a \in \mathbb{R}$. La courbe C_g, représentative de la fonction $g : x \mapsto f(a - x)$ est l'image de C_f par la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$.
$(-)$ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La courbe C_g, représentative de la fonction
$g : x \mapsto b - f(a - x)$ est l'image de C_f par symétrie centrale de centre le point de coordonnées (a, b)
$(-)$ Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. La courbe C_g, représentative de la fonction $g : x \mapsto af(x)$ est l'image de C_f par l'affinité orthogonale d'axe l'axe des abscisses et de rapport a.
$(-)$ Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. La courbe C_g, représentative de la fonction $g : x \mapsto f(ax)$ est l'image de C_f par l'affinité orthogonale d'axe l'axe des ordonnées et de rapport a^{-1}.
$(-)$ Si la fonction f est bijective, alors $C_{f^{-1}}$, la courbe représentative de sa réciproque, est l'image de C_f par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice. (Droite d'équation $y = x$).

preuve et Dessins :

<u>Ptitexo:</u> *Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.*

Définition 6.4 (Fonction paire, fonction impaire)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{R}^X$.
$(-)$ On dit que f est **paire si :**

$$\begin{gathered} \forall x \in X, -x \in X \\ \text{et} \quad \forall x \in X, f(-x) = f(x). \end{gathered}$$

$(-)$ **On dit que f est impaire si :**

$$\begin{gathered} \forall x \in X, -x \in X \\ \text{et} \quad \forall x \in X, f(-x) = -f(x). \end{gathered}$$

✓ La fonction constante égale à 0 est la seule fonction constante impaire. Les fonctions constantes sont paires.

Ptitexo: *Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Soient les fonctions polynomiales $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1}$ et $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}$. Discuter de la parité de P et Q.*

Propriété 6.5 (Graphe d'une fonction paire/impaire)

$(-)$ Une fonction numérique est paire si et seulement si, dans un repère orthogonal du plan, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
$(-)$ Une fonction numérique est impaire si et seulement si, dans un repère quelconque du plan , sa courbe représentative d'une est symétrique par rapport à l'origine du repère.

preuve:

Propriété 6.6 ()

L'ensemble des fonctions impaires définies sur une partie X de $\mathbb{R}$ est stable par combinaison linéaire.
L'ensemble des fonctions paires définies sur une partie X de $\mathbb{R}$ est stable par combinaison linéaire.

preuve:

Ptitexo: *Soit $X \subset \mathbb{R}$. Montrer que si la fonction $f \in \mathbb{R}^X$ est impaire et bijective, alors la fonction f^{-1} est elle-aussi impaire.*

Ptitexo: *Soit X une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. Soient $(f, g) \in \mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X$. Discuter de la parité de la fonction $f \times g$ suivant la parité de la fonction f et la parité de la fonction g.*

Exercice 6.1

Soit $X \subset \mathbb{R}$, une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. Montrer que si $f \in \mathbb{R}^X$, il existe un unique couple de fonctions $(f_1, f_2) \in \mathbb{R}^X$ tel que :

i) La fonction f_1 est paire.
ii) La fonction f_2 est impaire.
iii) $f_1 + f_2 = f$.

Définition 6.7 (Fonction périodique)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Soit $T \in \mathbb{R}_*^+$. Soit $f \in \mathbb{R}^X$. On dit que la fonction f est **périodique de période** T (ou que f est T**-périodique**) si :

$$\forall x \in X, x + T \in X$$
$$\forall x \in X, x - T \in X$$
$$\forall x \in X, f(x + T) = f(x - T) = f(x).$$

Exemples :

1. Les fonctions cos et sin sont 2π-périodique.
2. La fonction tan est π-périodique.
3. Les fonctions $x \mapsto \cos(2\pi\omega x)$ et $x \mapsto \sin(2\pi\omega x)$ sont périodique de période $\dfrac{1}{\omega}$.

Propriété 6.8 (Courbe d'une fonction périodique)

Si f est une fonction T-périodique alors sa courbe représentative dans un repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ quelconque du plan est invariante par translation de vecteur $T\overrightarrow{e_1}$.

preuve et dessin :

Ptitexo: *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle partie entière de x, et l'on note $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier relatif appartenant à l'intervalle $]x - 1, x]$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est périodique.*

1.2 Fonctions et relation d'ordre

1.2.1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}^X$

Définition 6.9 (Relation d'ordre sur $\mathbb{R}^X$.)

Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soient f et g deux éléments de $\mathbb{R}^X$. On écrit $f \leq g$ si :

$$\forall x \in X, f(x) \leq g(x).$$

Propriété 6.10 ()

Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^X$.
Si l'ensemble X contient au moins deux éléments alors cette relation est une relation d'ordre partiel.

preuve :

✓ Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et soit $f \in \mathbb{R}^X$. On dit que f est positive (resp. négative) si $f \geq \tilde{0}$ (resp. $f \leq \tilde{0}$), ce que l'on note parfois $f \geq 0$ ($f \leq 0$).

Ptitexo: *Soit P une fonction polynomiale de degré 2. Montrer que :*

$$P \geq 0 \implies P + P' + P'' \geq 0.$$

1.2.2 Monotonie

Définition 6.11 (Variations d'une fonction)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{R}^X$.
$(-)$ On dit que la fonction f est **croissante** si :

$$\forall (x,y) \in X^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

$(-)$ On dit que la fonction f est **décroissante** si :

$$\forall (x,y) \in X^2, x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

$(-)$ On dit que la fonction f est strictement **croissante** si :

$$\forall (x,y) \in X^2, x < y \implies f(x) < f(y).$$

$(-)$ On dit que la fonction f est strictement **décroissante** si :

$$\forall (x,y) \in X^2,\ x < y \implies f(x) > f(y).$$

$(-)$ On dit que la fonction f est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
$(-)$ On dit que la fonction f est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

✓ La fonction f est décroissante si et seulement si la fonction $-f$ est décroissante.

Propriété 6.12 (Variations d'une composée)

Soient X, Y deux parties de $\mathbb{R}$. Soit $f \in Y^X$ et $g \in \mathbb{R}^Y$.
$(-)$ Si la fonction f est croissante et la fonction g est croissante, alors $g \circ f$ est croissante.
$(-)$ Si la fonction f est croissante et la fonction g est décroissante, alors $g \circ f$ est décroissante.
$(-)$ Si la fonction f est décroissante et la fonction g est croissante, alors $g \circ f$ est décroissante.
$(-)$ Si la fonction f est décroissante et la fonction g est décroissante, alors $g \circ f$ est croissante.

preuve:

Exercice 6.2 **Opérations sur les fonctions monotones**

1) Montrer que la somme de deux fonctions croissantes est croissante.

2) Montrer que la somme de deux fonctions décroissantes est décroissante.

3) Montrer que le produit de deux fonctions positives croissantes est croissant.

4) **a)** Les fonctions $i : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*,\ x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $ip : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}_*^+,\ x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sont-elles monotones ?

b) Montrer que si f est monotone sur X, ne s'annule pas et ne change pas de signe sur X, alors $\dfrac{1}{f} : x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est monotone sur X.

5) Étudier les variations des fonctions de $\mathbb{R}_*^+$ vers $\mathbb{R}$,
$f : x \mapsto x^2 \exp(x) + x^3 + \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \ln(x)$.

1.2.3 Fonctions majorées, minorées, bornées, minimum, maximum

Définition 6.13 (Fonction majorée, minorée, bornée)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{R}^X$. On dit que :
$(-)$ La fonction f est **majorée** si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, f(x) \leq M.$$

$(-)$ La fonction f est **minorée** si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in X, f(x) \geq m.$$

$(-)$ La fonction f est **bornée** si elle est majorée et minorée.

✓ Si $\forall x \in X, f(x) \leq M$, alors on dit que f est majorée par M. Cela équivaut à dire que la courbe représentative de C_f est au-dessous de la droite d'équation $y = M$. On dit aussi que M est un majorant de f.

✓ Si $\forall x \in X, f(x) \geq m$, alors on dit que f est minorée par m. Cela équivaut à dire que la courbe représentative de C_f est au-dessus de la droite d'équation $y = m$. On dit aussi que f est un minorant de f.

Ptitexo: *Déterminer les majorants et les minorants de la fonction*

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{e^{2x}+1}.$$

Propriété 6.14 (Carac. des fonctions bornées)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{R}^X$.
La fonction f est bornée si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, |f(x)| \leq M.$$

preuve:

Propriété 6.15 (Opération sur les fonctions bornées)

Une combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée. Un produit de fonctions bornées est borné.

preuve:

Définition 6.16 (Minimum, maximum)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{R}^X$ et soit $a \in X$.
$(-)$ On dit que f admet un **maximum** en a, si :

$$\forall x \in X, f(x) \leq f(a).$$

$(-)$ On dit que f admet un **maximum local** en a, si :

$$\exists h \in \mathbb{R}_*^+, \forall x \in X \cap]a-h, a+h[, f(x) \leq f(a).$$

$(-)$ On dit que f admet un **minimum** en a, si :

$$\forall x \in X, f(a) \leq f(x).$$

$(-)$ On dit que f admet un **minimum local** en a, si :

$$\exists h \in \mathbb{R}_*^+, \forall x \in X \cap]a-h, a+h[, f(a) \leq f(x).$$

$(-)$ On dit que f admet un **extremum** en a, si elle admet en a un maximum ou un minimum.
$(-)$ On dit que f admet un **extremum local** en a, si elle admet en a un maximum local ou un minimum local.

2 Continuité et dérivabilité : rappels

Les résultats de ce paragraphe seront provisoirement admis.

2.1 Continuité et applications

Définition 6.17 (Fonction continue en a)

Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur l'intervalle I.
On dit que la fonction f est continue en un point a appartenant à I, si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

On dit que f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I.

✓ Si la fonction f est continue, alors on peut tracer sa courbe représentative « sans lever le crayon ».

✓ Il est préférable d'éviter de parler de fonction continue sur une partie X de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle.

Exemples :

1. Les fonctions cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.3 **Lipschitzienne $\Longrightarrow$ continue**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est lipschitzienne s'il existe un réel $k \in \mathbb{R}^+$, tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

Montrer que toute fonction lipschitzienne est continue.

Propriété 6.18 (Image d'un intervalle par une fonc. $\mathcal{C}^0$)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction continue. Si J un intervalle inclus dans I, alors $f(J)$ est encore un intervalle.

✓ La réciproque n'est pas vraie.

Exemples :

1. $\cos(]0, \pi[) =]-1, 1[$.
2. Soit $E : x \mapsto \lfloor x \rfloor$. On a $E(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$.

Corollaire 6.19 ()

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux points de I. Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit c un réel appartenant au segment dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe un réel α appartenant au segment de bornes a et b tel que $f(\alpha) = c$.

Corollaire 6.20 ()

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction continue. Si la fonction f change de signe sur I, alors la fonction f s'annule sur I.

preuve:

Rappels : théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire :

> Ptitexo: *Montrer que l'équation* $\cos(x) = \dfrac{1}{x}$ *admet une solution sur l'intervalle* $\mathbb{R}_*^+$.

Théorème 6.21 (De la bijection)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{R}^I$. Si la fonction f est continue et strictement monotone, alors la fonction $f : I \longrightarrow f(I),\ x \longmapsto f(x)$ est une bijection et $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I.

> Ptitexo: *Montrer que l'équation* $\mathrm{e}^x + \ln(x) = 0$ *admet une unique solution réelle.*

Propriété 6.22 (Réciproque d'une fonction continue)

Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$. Si f est une fonction continue et bijective de l'intervalle I vers l'intervalle J, alors sa fonction réciproque f^{-1} est une fonction continue de J vers I.

(Théorème admis pour le moment).

2.2 Dérivabilité

2.2.1 Définition et interprétation géométrique

Définition 6.23 (Fonction dérivable en un point)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction. Soit $a \in I$.
On dit que la fonction f est **dérivable en** a, s'il existe un réel l tel que :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

On dit alors que l est le **nombre dérivée** de f en a et l'on note $f'(a) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = l$.

✓ Lorsqu'elle existe, la quantité $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ peut aussi s'écrire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x+a) - f(a)}{x}$.

Interprétation géométrique : On se place dans un repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan. Soit $(x, x_0) \in I^2$. Soient M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, et M le point de coordonnées $(x, f(x))$. La droite (MM_0) a pour pente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Elle a donc pour équation :

$$Y = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(X - x_0) + f(x_0).$$

Supposons que le nombre $f'(x_0)$ existe, dans ce cas la pente de cette droite tend vers $f'(x_0)$ lorsque x tend vers x_0, c'est-à-dire lorsque le point M se rapproche du point M_0.
La droite (MM_0) se rapproche donc lorsque x tend vers x_0 de la droite d'équation

$$Y = f'(x_0)(X - x_0) + f(x_0).$$

Définition 6.24 (Tangente à une courbe)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction. Soit x_0 un point de I en lequel la fonction f est dérivable. On appelle **tangente** à la courbe représentative de f, la droite d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

✓ On retient donc que si le nombre dérivée de f en x_0 existe, alors $f'(x_0)$ est la pente de la tangente à C_f en x_0.

Propriété 6.25 (Dérivable $\Longrightarrow$ continue)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{R}^I$. Si f est dérivable en un point x de I, alors elle est continue en ce point.

✓ Il n'y a pas de réciproque à cette propriété, par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

2.2.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 6.26 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point de I. On suppose que f et g sont dérivables en x_0. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$(-)$ La fonction $x \mapsto \lambda f + g$ est dérivable en x_0 et :

$$(\lambda f + g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + g'(x_0).$$

$(-)$ La fonction $x \mapsto fg$ est dérivable en x_0 et :

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

$(-)$ Si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

$(-)$ Si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

$(-)$ Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction $f^n : x \mapsto (f(x))^n$ est dérivable en x_0 et

$$(f^n)'(x_0) = nf'(x_0)\,(f(x_0))^{n-1}.$$

preuve:

Propriété 6.27 (Dérivée d'une composée)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f \in J^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$. Soit $x_0 \in I$. Si la fonction f est dérivable en x_0 et si la fonction g est dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0).$$

(Propriété admise).

✓ on retrouve la dernière propriété de la propriété précédente avec $g(x) = x^n$.

Propriété 6.28 (Dérivée d'une réciproque)

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers J. Soit $x_0 \in I$. Supposons que la fonction f soit dérivable en x_0. Notons $y_0 = f(x_0)$. Alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$. Dans ce cas, on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)}.$$

preuve:

Dessin.

2.2.3 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 6.29 (Fonction dérivable sur un intervalle)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction. On dit que la fonction f est **dérivable sur l'intervalle** I si elle est dérivable en tout point de I. On définit alors la fonction

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f'(x)$$

qui à tout point x de I, associe la dérivée de x en ce point. On l'appelle **fonction dérivée** de f.

Propriété 6.30 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables sur I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$(-)$ La fonction $x \mapsto \lambda f + g$ est dérivable sur I et :

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'.$$

$(-)$ La fonction $x \mapsto fg$ est dérivable sur I et :

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

$(-)$ Si g ne s'annule pas su l'intervalle I, alors la fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{(g)^2}.$$

$(-)$ Si g ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{(g)^2}.$$

$(-)$ Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction $f^n : x \mapsto (f)^n$ est dérivable sur I et

$$(f^n)' = nf'(f)^{n-1}.$$

2.2.4 Applications

Propriété 6.31 (Caractérisation des fonctions constantes)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I. La fonction f est constante sur l'intervalle I si et seulement si elle est dérivable sur I et sa dérivée est nulle en tout point de I.

preuve :

✓ Il ne faudrait pas essayer d'utiliser cette propriété sur un domaine qui n'est pas un intervalle.

Contre-exemple : $f : x \mapsto Arctan(x) + Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$

Propriété 6.32 (Monotonie et dérivation)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle trivial I de $\mathbb{R}$.
$(-)$ La fonction f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ en tout point de I.
$(-)$ La fonction f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ en tout point de I.

Propriété 6.33 (Stricte monotonie et dérivation)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle trivial I de $\mathbb{R}$.
$(-)$ Si $f'(x) > 0$ en tout point x de I (sauf éventuellement en un nombre fini de points), alors la fonction f est strictement croissante sur I.
$(-)$ Si $f'(x) < 0$ en tout point x de I (sauf éventuellement en un nombre fini de points), alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Ptitexo: *Étudier la monotonie de $f : x \mapsto x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$*

Propriété 6.34 (Condition nécessaire d'extremum)

Soit f une fonction dérivable sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Soit a un point de I qui n'est pas une borne de I. Si la fonction, f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

✓ Cette propriété ne s'applique pas si a est une borne de I. Par exemple, la fonction $\mathrm{id} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x$ est maximale en 1 pourtant la dérivée en 1 de cette fonction n'est pas nulle.

✓ Cette propriété ne donne qu'une condition nécessaire mais n'est pas suffisante. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ admet une dérivée nulle en 0, pourtant elle n'admet pas d'extremum local en 0.

2.2.5 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 6.35 (Dérivée n-ème)

Soit f une application dérivable sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$.
Si la fonction f' est dérivable sur I, on note f'' sa dérivée, et l'on appelle « dérivée seconde de f ».
Si la fonction f'' est dérivable sur I, on note f''' sa dérivée, et l'on appelle « dérivée troisième de f ».
De même, on définit les dérivées successives de f de la façon suivante :
$(-)$ On pose $f^{(0)} = f$.
$(-)$ Pour $n \in \mathbb{N}$, si la fonction $f^{(n)}$ existe et est dérivable, alors on note $f^{(n+1)}$ sa dérivée.
$(-)$ On note $\mathcal{D}^n(I)$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I.

Ptitexo: *Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.*

Ptitexo: *Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln(1+x)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f^{(n)}(x)$ existe. Exprimer en fonction de n et de x cette* *quantité.*

Propriété 6.36 (Formule de Leibniz)

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I, un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On suppose que f et g admettent des dérivées de tout ordre $n \in \mathbb{N}$. Alors la fonction fg des dérivées de tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et l'on a :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

preuve:

3 Études de fonctions

3.1 Plan d'étude

Pour étudier une fonction, on réalise successivement les étapes suivantes :

1. Détermination du domaine de définition.
2. Étude des périodicités et propriétés de symétries éventuelles afin de réduire le domaine d'étude. (Parité, imparité, centre ou axe de symétrie).
3. Détermination des limites et asymptotes éventuelles.
4. Détermination du tableau de variations.
5. Tracé du graphe.

Ptitexo: *Étudier aussi complètement que possible les fonctions :*

$$a : x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 1}. \qquad b : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}.$$

3.2 Applications

3.2.1 Résolutions d'équations

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. Soient C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un certain repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan.

Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, revient à trouver les abscisses des éventuels points d'intersection entre C_f et C_g.

Dessin :

En notant que $f(x) = g(x) \iff f(x) - g(x) = 0$, on remarque que résoudre cette inéquation revient à chercher les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ avec l'axe des abscisses.

Pour montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une unique solution sur l'intervalle I, il est fréquent de prouver successivement les deux points suivants :
(−) La fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ est bijective. (On peut utiliser pour cela le théorème de la bijection).
(−) 0 appartient à l'intervalle image de I.

> Ptitexo: *Montrer que l'équation la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2}$ admet un unique point fixe α, c'est-à-dire un unique réel vérifiant $f(\alpha) = \alpha$.*

3.2.2 Problème de minimisation, maximisation

Pour rechercher, les plus grandes ou plus petites valeurs d'une fonction, il est fréquent de commencer par établir les variations de la fonctions.

> Ptitexo: *Montrer que la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + x$ admet sur $\mathbb{R}$ un minimum que l'on déterminera.*

3.2.3 Résolutions d'inéquations

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. Soient C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un certain repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan.

Résoudre $f(x) \leq g(x)$, revient à trouver les abscisses des éventuels points pour lesquels C_f est en-dessous de C_g. Dessin :

En notant que $f(x) \leq g(x) \iff f(x) - g(x) \leq 0$, on remarque que résoudre cette inéquation revient à chercher les abscisses des points de la courbe C_{f-g} qui sont au-dessus de l'axe des abscisses.

4 Fonctions usuelles

4.1 Valeur absolue

Définition 6.37 (Valeur absolue)

On appelle fonction valeur absolue la fonction qui à tout réel x associe le réel noté $|x|$ et défini par :

$$|x| = \left| \begin{array}{lll} x & \text{si} & x \geq 0 \\ -x & \text{si} & x < 0 \end{array} \right. .$$

Courbe représentative :

Propriété 6.38 (Régularité de $x \mapsto |x|$)

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\mathbb{R}_*^-$. Mais n'est pas dérivable en 0.

4.2 Logarithme

Définition 6.39 (Logarithme ne paie rien)

On appelle **logarithme néperien** l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ qui s'annule en 1 et dont la dérivée est égale $x \mapsto \frac{1}{x}$. On note ln cette fonction.

✓ On démontrera plus tard l'existence d'une telle fonction.

✓ On a donc, par définition, $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x)$.

Propriété 6.40 (Dérivée du logarithme)

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Propriété 6.41 (Opérations sur les logarithmes)

Soient x et y deux réels strictement positifs. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln(x) + \ln(y) \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) &= -\ln(x) \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln(x) - \ln(y) \end{aligned}$$

✓ Méfiance : Que pensez-vous de l'égalité suivante :
$\ln(6) = \ln(-3 \times (-2)) = \ln(-3) + \ln(-2)$?

Propriété 6.42 (Bijectivité de ln)

L'application ln réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_*^+$ vers $\mathbb{R}$.

preuve:

4.3 Fonction exponentielle

Définition 6.43 (exponentielle)

On appelle fonction exponentielle la réciproque de la fonction logarithme népérien. On la note exp.

Propriété 6.44 ()

La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_*^+$.
La fonction exp est strictement croissante.
La fonction exp est dérivable et $\exp' = \exp$.

preuve:

Propriété 6.45 (Opérations et exponentielle)

La fonction exp vérifie les propriétés suivantes :

$$\exp(0) = 1.$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y),$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)},$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{Z}, \exp(nx) = (\exp(x))^n .$$

preuve :

Courbes représentatives de exp et ln :

4.4 Fonctions puissances

On observe que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et pour tout $x > 0$, $x^n = \exp(n \ln(x))$.
Par convention, on étend cette écriture pour définir les fonctions puissances pour n'importe quel nombre $a \in \mathbb{R}$:

Définition 6.46 (Fonction puissance)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance** « a » la fonction :

$$f_a : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}_*^+, \ x \longmapsto \mathrm{e}^{a\ln(x)}.$$

On choisit de noter pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f_a(x) = x^a$.

✓ Si a est positif, on peut prolonger f_a en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant $f_a(0) = 0^a = 1$.

✓ Si a est de la forme $a = \dfrac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors $f_a = f_{\frac{1}{n}}$ est la bijection réciproque de la fonction de $\mathbb{R}_*^+$ vers $\mathbb{R}_*^+$ qui à x associe x^n.

✓ D'après le programme, seules les puissances entières sont définies sur $]-\infty, 0]$.

Propriété 6.47 (Opérations sur les puissances)

Soient a et b deux réels. Soient x et y deux réels strictement positifs.

$$(xy)^a = x^a y^a, \quad x^a x^b = x^{a+b}, \qquad (x^a)^b = x^{ab},$$
$$1^a = 1, \quad x^0 = 1, \qquad \ln(x^a) = a\ln(x).$$

preuve:

Propriété 6.48 (Dérivation des fonctions puissances)

Soit $a \in \mathbb{R}$.
$(-)$ La fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et de dérivée $x \mapsto ax^{a-1}$.
$(-)$ La fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable en 0 si et seulement si $a \geq 1$.
$(-)$ Si f est une fonction dérivable sur I et à valeurs strictement positives sur I, alors la fonction $x \mapsto (f(x))^a$ est dérivable sur I et sa dérivée est $x \mapsto af'(x)\,(f(x))^{a-1}$.

preuve:

4.5 Croissances comparées et limites usuelles

Propriété 6.49 ()

On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

preuve:

Propriété 6.50 ()

Soient a et b deux réels strictement positifs.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} x^a\,|\ln(x)|^b = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{ax}\,|x|^b = 0.$$

preuve:

Ptitexo: *Soit P une fonction polynomiale de degré n. Montrer que si la fonction P est positive sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $f = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$ est positive sur $\mathbb{R}$. (On pourra étudier la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} f(x)$).*

4.6 Fonctions de trigonométrie hyperbolique

Définition 6.51 (ch, sh, tanh)

On appelle fonction **cosinus hyperbolique** la fonction

$$\mathrm{ch} : x \longrightarrow \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On appelle fonction **sinus hyperbolique** la fonction

$$\mathrm{sh} : x \longrightarrow \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On appelle fonction **tangente hyperbolique** la fonction

$$\tanh : x \longrightarrow \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

Propriété 6.52 (Formules de trigonométrie hyperbolique)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tanh(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}.$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \mathrm{e}^x.$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

preuve :

Ptitexo: *Pour* $x \in \mathbb{R}$*, déterminer* $\mathrm{ch}(2x)$ *et* $\mathrm{sh}(2x)$ *en fonction de* $\mathrm{ch}(x)$ *et* $\mathrm{sh}(x)$*.*

Propriété 6.53 ()

(−) La fonction sh est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.
(−) La fonction ch est paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$.
(−) La fonction tanh est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\tanh' = 1 - \tanh^2 = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$.

Représentations graphiques :

Exercice 6.4 **Réciproques des fonctions hyperboliques**

1) a) Montrer que la fonction ch réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[1, +\infty[$, dont on note argch la bijection réciproque.

b) Déterminer pour $x \in [1, +\infty[$, $\text{argch}(x)$ en fonction de x.

c) Montrer que argch est dérivable sur un intervalle que l'on précisera et déterminer sa dérivée.

2) a) Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, dont on note argsh la bijection réciproque.

b) Déterminer pour $x \in [1, +\infty[$, $\text{argsh}(x)$ en fonction de x.

c) Montrer que argsh est dérivable sur un intervalle que l'on précisera et déterminer sa dérivée.

3) a) Montrer que la fonction tanh réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $]-1, 1[$, dont on note argth la bijection réciproque.

b) Déterminer pour $x \in]-1, 1[$, $\text{argth}(x)$ en fonction de x.

c) Montrer que argth est dérivable sur un intervalle que l'on précisera et déterminer sa dérivée.

4.7 Fonctions de trigonométrie circulaire et réciproques

4.7.1 Fonctions sinus, cosinus, tangente.

Propriété 6.54 ()

($-$) La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$.
($-$) La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.
($-$) La fonction tan est dérivable sur chacun des intervalles de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ pour $k \in \mathbb{Z}$, et l'on a $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

4.7.2 Fonctions arcsin, arccos, arctan

Définition 6.55 (arcsin)

La fonction sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1, 1]$ dont on note arcsin la bijection réciproque.

On a donc, par définition :

$$\forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x.$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(x)) = x.$$

Ptitexo: *Calculer* $\arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :*

$$\arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Propriété 6.56 (Continuité et dérivabilité de arcsin**)**

(−) La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$ continue, strictement croissante et impaire.
(−) La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Définition 6.57 (arccos)

La fonction cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ vers $[-1,1]$ dont on note arccos la bijection réciproque.

On a donc, par définition :

$$\forall x \in [-1,1], \cos(\arccos(x)) = x.$$

$$\forall x \in [0,\pi], \arccos(\cos(x)) = x.$$

Ptitexo: *Calculer* $\arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :*

$$\cos(\arcsin(x)) = x.$$

Propriété 6.58 (Continuité et dérivabilité de arccos**)**

(−) La fonction arccos est définie sur $[-1,1]$ continue, strictement décroissante.
(−) La fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ptitexo: *Montrer que pour tout* $x \in [-1,1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$, *puis interpréter graphiquement cette égalité.*

Ptitexo: *Simplifier* $\cos(\arcsin(x))$ *et* $\sin(\arccos(x))$ *pour* $x \in [-1,1]$.

Définition 6.59 (arctan)

La fonction tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$ dont on note arctan la bijection réciproque.

On a donc, par définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x.$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) = x.$$

Ptitexo: *Calculer* $\arctan\left(\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$.

Propriété 6.60 (Continuité et dérivabilité de arctan**)**

(−) La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, continue, strictement croissante et impaire.
(−) La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ptitexo: *Montrer que :*

$$\forall x \neq 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sign}(x)\frac{\pi}{2}.$$

✓ $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

5 Fonction complexes à variables réelles

5.0.3 Vocabulaire

On appelle fonction de la variable réelle à valeur complexe toute fonction définie d'une partie X de $\mathbb{R}$ vers une partie Y de $\mathbb{C}$. Si f est une telle fonction, on définit :

$$\mathcal{R}\mathrm{e}(f) : X \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \mathcal{R}\mathrm{e}\left(f(x)\right),$$

$$\mathcal{I}\mathrm{m}(f) : X \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \mathcal{I}\mathrm{m}\left(f(x)\right).$$

Les fonctions $\mathcal{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(f)$ sont des fonctions de la variable réelle et sont aussi à valeurs réelles.
Exemple : La fonction $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U},\ t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est une fonction de la variable réelle et à valeurs complexes. De plus, $\mathcal{R}\mathrm{e}(r) = \cos$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(r) = \sin$.

5.0.4 Dérivée d'une fonction à valeurs complexes

Définition 6.61 (Dérivée d'une fonction à valeurs complexes)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{C}^I$. Soit $a \in I$.
On dit que f est dérivable de a si les fonctions $\mathcal{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(f)$ le sont. On appelle alors nombre dérivée de f en a, le complexe noté $f'(a)$ défini par :

$$f'(a) = \left(\mathcal{R}\mathrm{e}(f)\right)'(a) + \mathrm{i}\left(\mathcal{I}\mathrm{m}(f)\right)'(a).$$

On dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I si elle est dérivable en tout point de I. On appelle alors fonction dérivée de f, la fonction :

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{C},\ a \longmapsto f'(a).$$

✓ Toute fonction à valeurs réelle peut être vue comme une fonction à valeurs complexes. On retrouve alors la définition traditionnelle de la dérivée

Ptitexo: *Déterminer la dérivée de l'application* $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U},\ t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

Propriété 6.62 (Opérations et dérivation)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $x \in I$. Soient $f \in \mathbb{C}^I$ et $g \in \mathbb{C}^I$ deux fonctions dérivables en x.
(−) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x et l'on a :

$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

(−) La fonction fg est dérivable en x et l'on a :

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(−) Si la fonction f ne s'annule pas en x, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en x et l'on a :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}.$$

(−) Si la fonction g ne s'annule pas en x, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x et l'on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(f(x)\right)^2}.$$

(−) La fonction $\overline{f}$ est dérivable en x et l'on a :

$$\left(\,\overline{f}\,\right)'(x) = \overline{f'(x)}.$$

(−) La fonction $\mathrm{e}^f = \exp \circ f$ est dérivable en x et l'on a :

$$\left(\mathrm{e}^f\right)'(x) = f'(x)\exp(f(x)).$$

preuve :

Chapitre 7 - Primitives et équations différentielles linéaires

Ce n'est pas que je suis si intelligent, c'est que je reste plus longtemps avec les problèmes . (A.Einstein).

Dans tout ce chapitre, la notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Primitives

1.1 Définition

Définition 7.1 (Primitive)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{K}^I$. On dit qu'une fonction $F \in \mathbb{K}^I$ est une primitive de f sur I, si la fonction F est dérivable et si $F' = f$.

✓ D'après ce qui a été vu dans le chapitre 6, si f est une fonction à valeurs complexes, alors F est primitive de f si et seulement si $\mathcal{R}\mathrm{e}(F)$ est une primitive de $\mathcal{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(F)$ est une primitive de $\mathcal{I}\mathrm{m}(f)$.

Ptitexo: *Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I précisé.*

1. $x \mapsto \mathrm{cotan}(x)$ *sur* $I =]0, \pi[$.
2. $x \mapsto \tan(x)$ *sur* $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ *(où* $\lambda \in \mathbb{C}^*$*) sur* $I = \mathbb{R}$.
4. $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ *et* $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$ *(où* $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ *sur* $I = \mathbb{R}$.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ *sur* $I = \mathbb{R}$.
6. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ *sur* $]1, +\infty[$.
7. $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *(où* $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$*) sur* $\mathbb{R}$.
8. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Propriété 7.2 (Ensemble des primitives d'une même fonction.)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{K}^I$. Soit F une primitive de f sur l'intervalle I. L'ensemble des primitives de f est l'ensemble :

$$\{ F + \lambda \mid \lambda \in \mathbb{K} \}.$$

preuve:

✓ On ne peut donc jamais écrire ≪ **la** primitive ≫ de f. Puisque s'il existe une primitive de f, alors f admet une infinité de primitives.

✓ Dans les conditions de l'énoncé précédent, si a et b sont deux points de I, alors la quantité $F(b)-F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F de f.

Propriété 7.3 ()

Soit x_0 un point de I et soit $y_0 \in \mathbb{K}$. Si f admet une primitive sur I, alors il existe une unique primitive F de f sur I qui vérifie $F(x_0) = y_0$.

preuve:

✓ Il est donc possible d'écrire « **la** primitive de f qui s'annule en x_0 ».

1.2 Primitives et intégrales

Propriété 7.4 (Lien primitive/intégrale)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $(a, b) \in I^2$. Soit f une fonction appartenant à $\mathbb{K}^I$. Si f admet une primitive F sur I, alors f est intégrable entre a et b et l'on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Résultat admis provisoirement

✓ La notation $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne une primitive quelconque de la fonction f.

Exemples :

1. Déterminer $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.
2. Déterminer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

1.3 Primitives et fonctions continues

Théorème 7.5 (Primitive d'une fonction continue)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit f une fonction continue sur I.
$(-)$ La fonction f admet des primitives sur I.
$(-)$ La fonction $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur l'intervalle I, c'est l'unique primitive de de f qui s'annule en a.

preuve:

Exemple :

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, elle admet donc une unique primitive qui s'annule en 1, on la note ln.
2. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une unique primitive qui s'annule en 0.

Exercice 7.1

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

1) Montrer que si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors f s'annule sur le segment $[a, b]$.

2) En déduire que si f est continue sur $[0, 1]$ et vérifie $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$, alors il existe un réel $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

Définition 7.6 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur l'intervalle I. On dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et sa dérivée f' est continue sur I.

On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Corollaire 7.7 ()

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall (a, b) \in I^2, \int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a).$$

Exercice 7.2

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a - 1, a + 1]$. Calculer $\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} f'(t)\,dt$. (Nous aurons l'occasion de généraliser ce résultat).

1.4 Primitives usuelles

1.4.1 tableau des primitives usuelles

Fonction	Primitive	Domaine de validité
x^{α} , $\alpha \in \mathbb{R}\diagdown\{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}\diagdown\{0\}$	$\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x\ln x - x + C$	$\mathbb{R}$
$\sin(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}\diagdown\{0\}$	$\dfrac{-\cos(\alpha x)}{\alpha}+C$	$\mathbb{R}$
$\cos(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}\diagdown\{0\}$	$\dfrac{\sin(\alpha x)}{\alpha}+C$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}\diagdown\{0\}$	$\dfrac{\mathrm{ch}(\alpha x)}{\alpha}+C$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}\diagdown\{0\}$	$\dfrac{\mathrm{sh}(\alpha x)}{\alpha}+C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$\left]\dfrac{-\pi}{2}+k\pi, \dfrac{-\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\tanh\ x + C$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$?	$\left]\dfrac{-\pi}{2}+k\pi, \dfrac{-\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\tanh\ x$	$\ln(\mathrm{ch}x)+C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$]-1;1[$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + C$	$]-1;1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{argsh}x + C$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{argch}x + C$	$]1;+\infty[$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\mathrm{argth}x + C$	$]-1;1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$	$]-\infty;-1[$ ou $]-1;1[$ ou $]1;+\infty[$

1.4.2 Primitives de $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$.

Ptitexo: *Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (sur chacun des intervalles où elles sont continues) :*

$$
\begin{aligned}
f : x &\mapsto \frac{1}{x^2-3x+2} \\
g : x &\mapsto \frac{1}{9x^2-6x+1} \\
h : x &\mapsto \frac{1}{x^2+x+1}.
\end{aligned}
$$

Méthode générale :
Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$. On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}.$$

Cas 1 : $b^2-4ac>0$. Dans ce cas, le trinôme ax^2+bx+c admet deux racines $\alpha < \beta$ et l'on a :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$. On peut donc trouver deux réels A et B tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}, f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

Les primitives de f sur chacun des intervalles $]-\infty, \alpha[$, $]\alpha, \beta[$ et $]\beta, +\infty[$ sont donc de la forme

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = A \ln|x-\alpha| + B \ln|x-\beta| + ctte.$$

Cas 2 : $b^2-4ac=0$. Dans ce cas, le trinôme ax^2+bx+c admet une racine double α et l'on a :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2$. Les primitives de f sur chacun des intervalles $]-\infty, \alpha[$, $]\alpha, +\infty[$ sont donc de la forme

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{a(x-\alpha)} + ctte.$$

Cas 3 : $b^2-4ac<0$.
Le trinôme ax^2+bx+c n'admet aucune racine réelle.
On peut donc, par factorisation canonique du trinôme, se ramener à l'écriture suivante :

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\frac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2}.$$

En utilisant la formule $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+A^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\arctan\left(\frac{x}{A}\right) + cstte$, on obtient donc :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a\beta}\arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right).$$

Ptitexo: *Déterminer une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction*

$$\varphi : x \mapsto \frac{x+3}{x^2-x+1}.$$

1.5 Propriétés de l'intégrale

Propriété 7.8 (Linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$. Soient λ et μ deux réels. Soient a et b deux points de I.

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Admis

Propriété 7.9 (Croissance de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux points de I tels que $a \leq b$.

$(-)$ Si $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

$(-)$ Si $f \geq g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Admis

Corollaire 7.10 (Inégalité triangulaire))

Soit f une fonction continue sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux points de I tels que $a \leq b$. On a :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

preuve:

1.6 Méthodes de calcul

Pour déterminer, une primitive ou une intégrale, il existe essentiellement trois approches possibles (que l'on peut combiner) :

1. Reconnaître directement la dérivée d'une certaine fonction, éventuellement après transformation de l'expression à intégrer.
2. Procéder par intégration par parties.
3. Utiliser un changement de variable.

1.6.1 Intégration « directe »

On utilise le tableau des primitives usuelles, et l'on utilise à bon escient les formules du type $(f \circ u)' = u' \times f' \circ u$.

Ptitexo: *Déterminer une primitive de* $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{7x+1}}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Ptitexo: *Déterminer une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$.

Ptitexo: *Déterminer une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de chacune des fonctions sui-*

vantes :

$$f : x \mapsto \cos^3(x) \quad g : x \mapsto \cos(5x)\sin(4x) \quad h : x \mapsto \sin^4(x).$$

Exercice 7.3 **Intégrales de Bertrand**

1) Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, sur chacun des intervalles où ces fonctions sont continues :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} \qquad g : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$$
$$h : x \mapsto \frac{1}{x\ln^2(x)} \qquad i : x \mapsto \frac{1}{x\ln^3(x)}.$$

2) Plus généralement, déterminer une primitive de la fonction $f_\beta : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln^\beta(x)}$. sur les intervalles où cette fonction est continue.

Exercice 7.4 **Quelques primitives de fractions rationnelles**

1) Déterminer, sur les intervalles où cela a un sens, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-5x+6}$ et une primitive de $x \mapsto \dfrac{4x^2+2x+1}{x^2-5x+6}$.

2) a) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \notin \{1,2\}$:

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-2)}.$$

b) En déduire, sur les intervalles où cela a un sens, une primitive de

$$x \mapsto \frac{2x+1}{(x-1)^2(x-2)}.$$

1.6.2 Intégration par parties

Propriété 7.11 (IPP)

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux points de I.

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

preuve:

✓ On peut aussi utiliser cette formule pour déterminer des primitives.

Ptitexo: *Déterminer une primitive de la fonction* $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_*^+$*, une primitive de la fonction* $\arctan$ *sur* $\mathbb{R}_*^+$*, une primitive sur* $[-1,1]$ *de la fonction* $\arcsin(x)$.

Ptitexo: *Déterminer une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction* $x \mapsto x^2 e^x$.

Ptitexo: *Déterminer* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt$

Exercice 7.5

On note pour $A \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n,A} = \int_0^A x^n e^{-x} \, dx.$$

1) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1,A}$ en fonction de $I_{n,A}$.

2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{A \to +\infty} I_{n,A}$.

1.6.3 Changements de variables

Théorème 7.12 (Changement de variables)

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f une fonction continue sur $\varphi(I)$. Soient a et b deux éléments de I.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt.$$

preuve:

Corollaire 7.13 (Changement de variables bijectifs)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit φ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de I vers J. Soient a et b deux éléments de J. On a :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt.$$

Ptitexo: *Calculer, en utilisant un changement de variables :*
$I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t \, dt$; $I_2 = \displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{t(1 + \ln t)} \, dt$
$I_3 = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t+2}{t+1}\right)^4 dt$; $I_4 = \displaystyle\int_0^4 \frac{1}{t^2 + 2t + 4} \, dt$

Ptitexo: *En posant* $t = \sin(u)$, *déterminer* $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - t^2} \, dt$.

Ptitexo: *Déterminer à l'aide d'un changement de variable bien choisi*

$$\int_0^3 \frac{u^2 + 2u - 1}{\sqrt{u+1}} \, du.$$

Exercice 7.6

---

1) Déterminer les primitives sur $]0,\pi[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$ en utilisant le changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

2) En déduire, les primitives sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$.

L'application $x \mapsto \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est une bijection de $-]\pi,\pi[$ vers $\mathbb{R}$. On retient que si l'on pose $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, alors :

$$\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

2 Équations différentielles

2.1 Introduction : quelques exemples de sciences physiques et vocabulaire

2.1.1 Étude de la décharge d'un condensateur dans un circuit RC ou dans un circuit RLC.

On étudie la décharge d'un condensateur dans un circuit comportant une résistance et un condensateur placé en série. Si l'on note u_C la tension aux bornes du condensateur, et u_R la tension aux bornes de la résistance, on a :

$$u_R + u_C = 0.$$

La loi d'Ohm indique que $U_R = Ri$, où i est l'intensité dans le circuit.
La définition de l'intensité, implique que $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, de plus $q = Cu_C$, on a donc : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. Ainsi, obtient-t-on :

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0.$$

Ce que l'on peut réécrire, en posant $\tau = RC$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = 0.}$$

Si l'on rajoute une bobine dans ce circuit, la tension u_B aux bornes de la bobine étant donnée par

$$u_B = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

L'égalité $u_B + u_R + u_C = 0$ devient alors :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2U_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0.$$

C'est à dire :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2U_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = 0.}$$

2.1.2 Étude de la chute d'un corps

On considère un solide lâché dans l'air sans vitesse initiale. On note m la masse du solide et g la constante de gravitation. Notons x la distance parcourue depuis l'instant où le solide a été lâché. On suppose qu'il subit une force de frottement proportionnelle à sa vitesse égale à $-\lambda\dot{x}$. Le théorème fondamental de la dynamique donne donc :

$$m\ddot{x} = g - \lambda\dot{x}.$$

On a donc :

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g.}$$

2.1.3 Vocabulaire

On appelle **équation différentielle** toute équation d'inconnue une fonction f et reliant les premières dérivées de la fonction f.
Toutes les branches scientifiques font appel à la résolution de certaines équations différentielles.
Une **équation différentielle du premier ordre** est une équation du type
$y' = f(x, y)$ où f est une application d'un domaine D de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}$ vers $\mathbb{K}$. Résoudre une telle équation différentielle sur l'intervalle non trivial I, c'est trouver toutes les fonctions dérivables y telles que

$$\forall x \in I, y'(x) = f(x, y(x)).$$

Si $y_0 \in \mathbb{K}$ et $x_0 \in I$, et $(x_0, y_0) \in D$, résoudre le problème de Cauchy, associé à la condition initiale $y(x_0) = y_0$, c'est trouver les solutions y de cette équation différentielle qui vérifient de plus $y(x_0) = y_0$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on appelle courbe intégrale la représentation graphique d'une de ces solutions.
Une **équation différentielle du second ordre** est une équation du type
$y'' = f(x, y, y')$ où f est une application d'un domaine D de $\mathbb{R} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ vers $\mathbb{K}$.
Seul un très faible nombre d'équations différentielles peuvent être explicitement résolues. Parmi celles-ci figurent les équations différentielles linéaires du premier ordre, ou encore les équations différentielles à coefficients constants.

2.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

2.2.1 Définition et structure de l'ensemble des solutions

Ptitexo: *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur l'intervalle I, telles que $f' = \lambda f$.*

Définition 7.14 (Équation diff. linéaire du premier ordre)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + a(x)y = b(x).$$

est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre**.
L'équation différentielle :

$$(H) \quad y' + a(x)y = 0.$$

est appelée **équation différentielle homogène** (ou encore **équation sans second membre**) associée à (E).

✓ L'écriture $y' + a(x)y = b(x)$ est un abus de notation. Résoudre (E) signifie rechercher toutes les fonctions y dérivables sur I telles que $\forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.

Propriété 7.15 ( )

Sous les hypothèses de la définition précédente, l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire.

preuve:

✓ On dira bientôt que $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.

Théorème 7.16 (Résolution d'une équation homogène)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit a une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit A une primitive sur I de la fonction a. Soit (H) l'équation différentielle :

$$y' + a(x)y = 0.$$

L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de H est l'ensemble :

$$\left\{ x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(x)} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

preuve:

Ptitexo: *Résoudre sur* $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, *l'équation différentielle* $y' + \tan(x)y = 0$.

Théorème 7.17 (Structure de l'ensemble des solutions)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si φ est une solution particulière de l'équation différentielle (E). L'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + a(x)y = b(x).$$

est l'ensemble

$$\mathcal{S}_E = \varphi + \mathcal{S}_H = \left\{ \varphi + f \;\middle|\; f \in \mathcal{S}_H \right\}.$$

où $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E).

preuve:

✓ On prouvera bientôt que (E) admet toujours une solution particulière.

✓ On dira bientôt que $\mathcal{S}_E$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^I$.

Ptitexo: *Résoudre sur $\mathbb{R}$, les équations différentielles*
(E_1) : $y' + y = 2\mathrm{e}^x$ $\quad (E_2)$: $y' + y = 4x^3 + 3x^2$
(E_3) : $\left(1 - t^2\right) y' - y = 1 - t - t^2$ $\quad (E_4)$: $y' + 2y = \left(t^2 + 1\right) e^{-t}$
(E_5) : $y' + 2y = \left(t^2 + 1\right) e^{-2t}$ $\quad (E_6)$: $y' + y = 4 \sin x + 3 \cos x$

2.2.2 Méthodes de résolutions de l'équation avec second membre

a) Principe de superposition

Propriété 7.18 (Principe de superposition)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soient a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit φ_1 une solution particulière de l'équation différentielle

$$(E_1) \quad y' + a(x)y = b_1(x).$$

Soit φ_2 une solution particulière de l'équation différentielle

$$(E_2) \quad y' + a(x)y = b_2(x).$$

La fonction $\varphi_1 + \varphi_2$ est une solution particulière de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + a(x)y = (b_1 + b_2)(x).$$

preuve:

Ptitexo: *Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y' + y = 2\mathrm{e}^x + 4x^3 + 3x^2$.*

b) Méthode de la variation de la constante (Merci *Joseph Lagrange*)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux fonctions continues sur I.

On note (E) l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + a(x)y = b(x).$$

Notons x_0 un point de I. Puisque a est continue, elle admet une primitive que l'on note A. On peut donc introduire la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-A(x)}$, qui est une solution de (H), l'équation homogène associée à (E).
Puisque la fonction f ne s'annule pas sur I, on peut écrire toute fonction y sous forme $y = \lambda f$, où λ est une fonction dérivable sur I. Une telle fonction est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall x \in I, \lambda'(x)f(x) + \lambda(x)f'(x) + a(x)\lambda(x)f(x) = b(x).$$

Puisque f est solution de (H) cela équivaut à :

$$\forall x \in I, \lambda'(x)f(x) = b(x).$$

C'est-à-dire à :

$$\forall x \in I, \lambda'(x) = \frac{b(x)}{f(x)}.$$

(car f ne s'annule pas) Ce qui peut se récrire :

$$\forall x \in I, \lambda'(x) = b(x)\mathrm{e}^{A(x)}.$$

La continuité de b et celle de A, implique que la fonction $x \mapsto b(x)\mathrm{e}^{A(x)}$ est continue sur I.
Il ne nous reste donc qu'à primitiver la fonction $x \mapsto b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ pour déterminer λ puis y.
On en conclut donc que les fonctions solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto c\mathrm{e}^{-A(x)} + \mathrm{e}^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} b(s)\mathrm{e}^{A(s)}\, \mathrm{d}s. \text{ où } c \in \mathbb{K}.}$$

✓ Cette démonstration prouve donc que toute équation différentielle linéaire du premier ordre admet des solutions, ce qui permet donc d'utiliser le **Théorème 7.17**.

Ptitexo: *Résoudre l'équation différentielle : (E) : $xy' + 3y = \dfrac{1}{1-x^2}$ sur* $]-1;+\infty[$

2.2.3 Problème de Cauchy

Ptitexo: *Résoudre les équations différentielles exposées dans l'introduction :*

$$(E_1) \quad \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = 0.$$

et

$$(E_2) \quad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g.$$

Théorème 7.19 ()

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $x_0 \in I$. Soit $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} &\forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ \text{et } &y(x_0) = y_0, \end{aligned}$$

admet une unique solution.

preuve:

✓ Si l'on note, A une primitive de a et alors cette unique solution est la fonction
$x \mapsto y_0 \mathrm{e}^{A(x_0) - A(x)} + \mathrm{e}^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} b(s) \mathrm{e}^{A(s)} \, \mathrm{d}s.$

✓ Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Cette propriété signifie que par un point du plan dont l'abscisse appartient à I, passe une unique courbe intégrale. Les courbes intégrales d'une même équation différentielle réalisent donc une partition de $I \times \mathbb{R}$.

Ptitexo: *Résoudre les équations différentielles pour des conditions données.*
(E_1) : $y' - xy = xe^{x^2}$ *sur* $]-\infty; +\infty[$ *avec* $f(0) = 3$ *et*
(E_2) : $\left(1 + x^2\right) y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$ *sur* $]-\infty; 0[$ *avec* $f(-1) = 2$

2.2.4 Équations non résolues

On appelle équation différentielle du premier ordre non résolue en y' une équation de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x). \quad (E')$$

(où les fonctions a, b et c sont continues sur I). Pour résoudre une telle équation différentielle, on se précipite sur l'étude des valeurs d'annulation de a. Sur tous les intervalles où a ne s'annule pas, l'équation équivaut à :

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)} y = \frac{c(x)}{a(x)}.$$

On peut donc résoudre (E') sur chacun de ces intervalles. Il reste alors à voir s'il possible de « recoller ces solutions » pour déterminer une solution de (E').

Ptitexo: *Montrer que l'équation* $y' \sin(x) + y \cos(x) + 1 = 0$ *admet des solutions sur* $]0, \pi[$. *Admet-elle des solutions sur* $\mathbb{R}$ *?*

2.3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Dans tout ce paragraphe, on désigne par a, b et c trois éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$. On note (H) l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Une telle équation différentielle est appelée équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.

Ptitexo: *Soit* $r \in \mathbb{K}$. *Soit* $f_r : t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$. *Montrer que* f_r *est solution de* (H) *si et seulement si* $ar^2 + br + c = 0$.

Définition 7.20 (Équation caractéristique)

On appelle **équation caractéristique** de l'équation (H) l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{K}$:
$$ar^2 + br + c = 0.$$

2.3.1 Résolution dans $\mathbb{C}$

Théorème 7.21 (Résolution dans $\mathbb{C}$.)

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions complexes de l'équation différentielle (H).
$(-)$ Si l'équation caractéristique de (H) admet deux racines distinctes r_1 et r_2, alors :
$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$
$(-)$ Si l'équation caractéristique de (H) admet une racine double r , alors :
$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{rt} + \mu t \mathrm{e}^{rt} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

preuve:

Ptitexo: *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations différentielles* $(H_1) \quad y'' + y' + y = 0.$ *et* $(H_2) \quad y'' - 2\mathrm{i}y' - 2 = 0.$

✓ L'ensemble $\mathcal{S}_H$ est stable par combinaison linéaire et contient la fonction nulle. On dira donc bientôt que $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

2.3.2 Résolution dans $\mathbb{R}$

Théorème 7.22 (Résolution dans $\mathbb{R}$.)

On suppose ici que les nombres a, b et c sont réels. Notons $\mathcal{SR}_H$ l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle (H).
$(-)$ Si l'équation caractéristique de (H) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors :
$$\mathcal{SR}_H = \left\{ t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
$(-)$ Si l'équation caractéristique de (H) admet une racine double r , alors :
$$\mathcal{SR}_H = \left\{ t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{rt} + \mu t \mathrm{e}^{rt} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
$(-)$ Si l'équation caractéristique de (H) admet deux solutions non réelles conjuguées $\alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\alpha - \mathrm{i}\beta$ (avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$) alors :
$$\mathcal{SR}_H = \left\{ t \mapsto (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)) \, \mathrm{e}^{\alpha t} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

preuve:

✓ L'ensemble $\mathcal{SR}_H$ est stable par combinaison linéaire et contient la fonction nulle. On dira donc bientôt que $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Ptitexo: *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles*

$$(H_1) \quad y'' + y' + y = 0,$$

$$(H_2) \quad y'' - 3y' + 2y = 0,$$
$$(H_3) \quad 9y'' - 6y' + y = 0,$$
$$(H_4) \quad 4y'' - 12y' + 9y = 0.$$

Rechercher les solutions de (H_2) qui vérifient $y(0) = 3$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 7.7

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$. Soient k_1 et k_2 deux éléments de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{P}$ le problème suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0,$$
$$y(0) = k_1,$$
$$y'(0) = k_2.$$

Montrer le problème $\mathcal{P}$ admet une unique solution.

2.3.3 Résolution avec second membre

a) Structure de l'ensemble des solutions

Dans ce paragraphe, on considère trois éléments de $\mathbb{K}$: a, b et c tels que $a \neq 0$, et f une fonction continue d'un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{K}$. L'équation (E) désigne ici l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = f.$$

On appelle équation homogène associée l'équation :

$$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

Propriété 7.23 (Admis)

L'équation différentielle (E) admet des solutions sur l'intervalle I.

Propriété 7.24 (Structure de l'ensemble des solutions)

Si φ est une solution particulière de (E), alors l'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) est l'ensemble :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ \varphi + y \;\middle|\; y \in \mathcal{S}_H \right\}.$$

où $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé.

preuve:

✓ On dira bientôt que $\mathcal{S}_E$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^I$.

Propriété 7.25 (Principe de superposition)

Soient trois éléments de $\mathbb{K}$: a, b et c tels que $a \neq 0$, et f et g deux fonctions continues d'un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{K}$.
Si ϕ est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = f$, et ψ est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = g$, alors $\psi + \phi$ est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = f + g$.

preuve:

Théorème 7.26 (Momentanément Admis)

Soient trois éléments de $\mathbb{K}$: a, b et c tels que $a \neq 0$. Soient f une fonction continue sur I (un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$), $t_0 \in I$ et $(x_0, x_1) \in \mathbb{K}^2$, le problème (dit problème de Cauchy) :

$$\forall x \in I, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x),$$
$$y(t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad y'(t_0) = x_1.$$

admet une unique solution.

b) Méthodes pratiques de résolution

Comme on vient de le voir, le point clé de la résolution est la recherche d'une solution particulière, pour cela on peut penser au principe de superposition et l'on dispose de méthodes pour rechercher des solutions dans un certain nombre de cas particuliers de la forme du second membre :
Une solution particulière de $ay''+by'+cy = P(t)e^{\delta t}$ est de la forme $y(t) = Q(t)e^{\delta t}$, avec Q polynôme de degré :

- **cas 1 :** $deg(P)$ si δ n'est pas solution de l'équation caractéristique.
- **cas 2 :** $deg(P) + 1$ si δ est une solution simple de l'équation caractéristique.
- **cas 3 :** $deg(P) + 2$ si δ est une solution double de l'équation caractéristique

- **cas désespéré :** Si f_1 et f_2 sont deux solutions non colinéaires de l'équation homogène associée à (E), on recherche les solutions de (E) sous forme $x \mapsto \lambda(x)f_1(x)+\mu(x)f_2(x)$ où λ et μ sont deux fonctions deux fois dérivables dans $\mathbb{R}$.

Ptitexo: *Résoudre les équations différentielles :*

$$\begin{array}{ll}
(A) & y'' - 7y' + 12y = 2\mathrm{e}^t \\
(B) & y'' - 7y' + 12y = \mathrm{e}^{4t} \\
(C) & y'' - y = \mathrm{e}^t \\
(D) & y'' + y = \mathrm{ch}(t) \\
(E) & y'' + y = \sin(t) \\
(F) & y'' + 9y = \cos(3t) \\
(G) & y'' - y = 3\mathrm{e}^{2t} + 4t^2 - t + 1. \\
(H) & y'' + 2y' + y = e^{-t}.
\end{array}$$

Chapitre 8 - Nombres réels

Les mathématiques consistent à prouver des choses évidentes par des moyens complexes. Georges Polya.

1 Propriétés élémentaires de $\mathbb{R}$.

1.1 Axiomatique de $\mathbb{R}$.

Nous admettrons qu'il existe un ensemble noté $\mathbb{R}$ muni de deux lois internes $+$ et $\times$ et une relation d'ordre totale notée $\leq$ sur $\mathbb{R}$ de sorte que :

1. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : multiplication et addition sont commutatives et associatives, tout élément admet un opposé, tout élément non nul admet un inverse, la multiplication est distributive sur l'addition.

2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et $+$ et $\times$ prolongent les opérations sur $\mathbb{Q}$.

3. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x \leq y \implies x + z \leq y + z$.

4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $0 \leq x$ et $0 \leq y$ impliquent $0 \leq xy$.

5. $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure (cf. infra).

Cet ensemble est appelé ensemble des nombres réels.

1.2 Manipulation d'inégalités

Les propriétés **3** et **4** et le fait que $\leq$ est une relation d'ordre permettent de retrouver les propriétés bien connues de manipulation d'inégalités que nous redonnons ici avec quelques redondances.

Propriété 8.1 (Compatibilité de l'ordre avec l'addition)

1. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x \leq y \implies x + z \leq y + z$.
2. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x < y \implies x + z < y + z$.
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \leq y \iff 0 \leq y - x$.
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y \iff 0 < y - x$.
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \leq y \iff -y \leq -x$.
6. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y \iff -y < -x$.
7. $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $(x \leq y$ et $z \leq t) \implies x + z \leq y + t$.
8. $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $(x < y$ et $z \leq t) \implies x + z < y + t$.

preuve:

Propriété 8.2 (Comptabilité de l'ordre avec la multiplication)

1. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x \leq y \text{ et } 0 \leq z) \Longrightarrow xz \leq yz$.
2. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x \leq y \text{ et } z \leq 0) \Longrightarrow yz \leq xz$.
3. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x < y \text{ et } 0 < z) \Longrightarrow xz < yz$.
4. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x < y \text{ et } z < 0) \Longrightarrow yz < xz$.
5. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $xy > 0 \iff \left(\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \right)$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x > 0 \iff \dfrac{1}{x} > 0$.
7. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_*^+$, $x \leq y \iff \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$.
8. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_*^+$, $x < y \iff \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.
9. $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $(0 \leq x \leq y \,\text{et}\, 0 \leq z \leq t) \Longrightarrow xz \leq yt$.
10. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.

✓ Il ne faut pas inventer d'autres règles que celles-là, en particulier on ne retranche pas membre à membre des inégalités et on ne divise pas deux inégalités membre à membre.

Propriété 8.3 (Règle du produit nul)

Si x et y sont deux réels, alors :

$$xy = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $x_1, \ldots, x_n$ est une famille de n réels, alors :

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = 0 \iff \exists i \in [\![1,n]\!] x_i = 0.$$

preuve:

Propriété 8.4 (encadrement de sommes ou produits)

Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux n-uplets de réels.

$(-)$ Si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \leq y_i$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$.

$(-)$ Si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $0 \leq x_i \leq y_i$, alors $0 \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \prod_{i=1}^{n} y_i$.

preuve:

Propriété 8.5 (Somme nulle de réels positifs)

Soit $(m_1, \ldots, m_n)$ un n-uplet de réels positifs.
Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i = 0$, alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $m_i = 0$.

Ptitexo: 1 *: Après avoir démontré que* $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leq x$, *montrer que* $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *est minorée par* $\ln(n+1)$

2 *: Majorer et minorer la somme* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$

1.3 Valeur absolue

Définition 8.6 (Valeur absolue)

Étant donné un nombre réel x, on pose :

$$|x| = \max(x, -x).$$

Ce réel est appelé **valeur absolue** de x.

Propriété 8.7 (Propriétés élémentaires de la valeur absolue)

(−) Pour tout réel x, $|x| \geq 0$.
(−) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$.
(−) Pour tout réel x :

$$|x| = x \iff x \geq 0$$

et

$$|x| = -x \quad \iff \quad x \leq 0.$$

(−) Pour tout couple de réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|x| = |y| \iff x^2 = y^2 \iff (x = y \,\text{ou}\, x = -y)\,.$$

(−) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = 0 \iff x = 0$.

preuve:

Propriété 8.8 (Comptabilité avec le produit)

Soient x et y deux réels.

$$|xy| = |x|\,|y|\,.$$

preuve:

Propriété 8.9 (Valeur absolue et encadrement)

Soient a et x deux réels. Alors :

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a.$$

preuve:

Corollaire 8.10 (Valeur absolue et différence)

Soient a, x et y trois réels. Alors :

$$|x-y| \leq a \iff y-a \leq x \leq y+a.$$

preuve:

Propriété 8.11 (Inégalité triangulaire)

$(-)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x+y| \leq |x| + |y|$.
$(-)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x+y| = |x| + |y| \iff xy \geq 0$. Autrement dit : il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si x et y sont de même signe.
$(-)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

preuve:

Corollaire 8.12 (Inégalité triangulaire (généralisation))

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet de réels.

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont de même signe.

preuve:

Lemme 8.13 (Signe)

Soit x un nombre réel.
$(-)$ Si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_*^+$, $x \leq \epsilon$, alors $x \leq 0$.
$(-)$ Si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_*^+$, $|x| \leq \epsilon$, alors $x = 0$.

preuve:

1.3.1 Distance entre deux nombres réels

Définition 8.14 (Distance)

Étant donnés deux nombres réels x et y, on appelle **distance de x à y** le réel :

$$\mathrm{d}(x,y) = |x-y|.$$

Propriété 8.15 (Prop. caractéristiques de la dis. entre deux réels)

$(-)$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}(x,y)=0 \iff x=y$. (Séparation).
$(-)$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}(x,y)=\mathrm{d}(y,x)$. (Symétrie).
$(-)$ $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}(x,z)\leq\mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,z)$. (Inégalité triangulaire).

preuve:

✓ Si E est un ensemble quelconque et si l'on dispose d'une application : $d : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés de séparation, symétrie et d'inégalité triangulaire, alors on dit que l'application d est une distance sur E et que (E,d) est un espace métrique.

2 Bornes supérieures, bornes inférieures

2.1 Parties bornées de $\mathbb{R}$.

Définition 8.16 (Partie bornée)

Une partie de $\mathbb{R}$ est dite **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Propriété 8.17 (Caractérisation des parties bornées)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. La partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel M tel que $\forall x\in A$, $|x|\leq M$. Autrement dit, la partie A est bornée si et seulement si l'ensemble $\left\{ |x| \;\middle|\; x\in A\right\}$ est majoré.

preuve:

2.2 Bornes supérieures et inférieures : définition et propriétés élémentaires

Définition 8.18 (Bornes supérieures et inférieures)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$.
Lorsque l'ensemble des majorants réels de X admet un plus petit élément, ce dernier est appelé **borne supérieure** de X et est noté $\sup X$.
Lorsque l'ensemble des minorants réels de X admet un plus grand élément, ce dernier est appelé **borne inférieure** de X et est noté $\inf X$.

Autrement dit, lorsque X admet une borne supérieure, celle-ci vérifie les propriétés suivantes qui la caractérisent :

i) $\forall x\in X, x\leq \sup\ X$. (C'est-à-dire que $\sup\ X$ est un majorant de X).
ii) Pour tout réel M, si $\forall x\in X$, $x\leq M$, alors $\sup\ X\leq M$. (C'est-à-dire $\sup\ X$ minore tout majorant réel de X).

De même, lorsque X admet une borne inférieure, celle-ci vérifie les propriétés suivantes qui la caractérisent :

i) $\forall x\in X, x\geq \inf\ X$. (C'est-à-dire que $\inf\ X$ est un minorant de X).
ii) Pour tout réel m, si $\forall x\in X$, $x\geq m$, alors $\inf\ X\geq m$. (C'est-à-dire $\inf\ X$

majore tout minorant réel de X).

Ptitexo: *Donner les bornes supérieures et inférieures de*
$X_1 = \mathbb{R}_+^*$, $X_2 = \mathbb{R}_-^*$, $X_3 = \mathbb{R}_-$, $X_4 =]a;b[$, $X_5 = [b;+\infty[$

Propriété 8.19 ()

Soit X une partie de $\mathbb{R}$.
$(-)$ Si X admet un plus grand élément, alors X admet une borne supérieure et l'on a $\max\ X = \sup\ X$.
$(-)$ Si X admet un plus petit élément, alors X admet une borne inférieure et l'on a $\min\ X = \inf\ X$.

preuve:

✓ Il n'y a pas de réciproque à cette propriété. Par exemple, $\inf \mathbb{R}_*^+ = 0$ mais $\mathbb{R}_*^+$ n'admet pas de minimum.

Exercice 8.1 **Lien entre** $\sup$ **et** $\inf$

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On note $-X = \{ -x \mid x \in X \}$.

1) Montrer que si X admet une borne supérieure, alors $-X$ admet une borne inférieure et $\inf(-X) = -\sup(X)$.

2) Montrer que si X admet une borne inférieure, alors $-X$ admet une borne supérieure et $\sup(-X) = -\inf(X)$.

2.3 Axiome de la borne supérieure

Axiome 8.20 (De la borne $\sup$**)**

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Corollaire 8.21 (De la borne $\sup$**)**

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure

preuve:

✓ Considérons une partie non vide X de $\mathbb{R}$.
Si l'on dispose d'un réel M, tel que $\forall x \in X, x \leq M$, alors X est non vide et majorée et admet donc une borne supérieure. De plus, par définition de la borne supérieure, on a : $\sup\ X \leq M$.
Si l'on dispose d'un réel m, tel que $\forall x \in X, x \geq m$, alors X est non vide et minorée et admet donc une borne inférieure. De plus, par définition de la borne supérieure, on a : $\inf\ X \geq m$.

Propriété 8.22 (Caractérisation du $\sup$)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et soit a un nombre réel. Il y équivalence entre les assertions suivantes :
$(-)$ $\sup\ X = a$.
$(-)$ $\begin{cases} \forall x \in X, x \leq a \\ \forall \epsilon > 0, \exists x \in X, a - \epsilon < x \end{cases}$.

preuve:

Ptitexo: *Déterminer* $\sup\ X$ *pour* $X = \left\{1 - \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Propriété 8.23 (Caractérisation de l' $\inf$)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et soit a un nombre réel. Il y équivalence entre les assertions suivantes :
$(-)$ $\inf\ X = a$.
$(-)$ $\begin{cases} \forall x \in X, x \geq a \\ \forall \epsilon > 0, \exists x \in X, a + \epsilon > x \end{cases}$.

Ptitexo: *Déterminer les bornes supérieures et inférieures de :*
$X_1 = \left\{u_{p,q} = \dfrac{p}{pq+1}, p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*\right\}$ *et* $X_2 = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$

2.4 Droite numérique achevée

Définition 8.24 (Droite numérique achevée)

On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Cet ensemble est appelé **droite numérique achevée**.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre de $\mathbb{R}$, en décrétant que :

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, x \leq +\infty \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}, x \geq -\infty.$$

On récupère ainsi un ordre total sur $\overline{\mathbb{R}}$ dont $+\infty$ est le plus grand élément et $-\infty$ le plus petit élément.
Par souci de commodité, notamment pour les calculs de limite, on prolonge partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ les opérations $\times$ et $+$ en décrétant que :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty, \\
\forall x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty, \\
\forall x \in \mathbb{R}_*^+ \cup \{+\infty\}, x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = +\infty, \\
\forall x \in \mathbb{R}_*^+ \cup \{+\infty\}, x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = -\infty, \\
\forall x \in \mathbb{R}_*^- \cup \{-\infty\}, x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = -\infty, \\
\forall x \in \mathbb{R}_*^- \cup \{-\infty\}, x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = +\infty.
\end{aligned}$$

3 Intervalles de $\mathbb{R}$

✓ $\emptyset$ est un intervalle.

✓ Si $x \in \mathbb{R}$, alors $\{x\}$ est un intervalle.

Définition 8.25 (Intervalles de $\mathbb{R}$.)

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les ensembles de l'un type suivants :

$$\begin{aligned}
[a, +\infty[&= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \,\} \quad (a \in \mathbb{R}),\\
]-\infty, b] &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \,\} \quad (b \in \mathbb{R}),\\
]a, +\infty[&= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \,\} \quad (a \in \mathbb{R}),\\
]-\infty, b[&= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < b \,\} \quad (b \in \mathbb{R}),\\
[a, b] &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\} \quad \left((a, b) \in \mathbb{R}^2\right),\\
[a, b[&= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \,\} \quad \left((a, b) \in \mathbb{R}^2\right),\\
]a, b] &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \,\} \quad \left((a, b) \in \mathbb{R}^2\right),\\
]a, b[&= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\} \quad \left((a, b) \in \mathbb{R}^2\right).
\end{aligned}$$

Propriété 8.26 (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$)

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. L'ensemble I est un intervalle de $\mathbb{R}$, si et seulement s'il vérifie la propriété suivante :

$$(a, b) \in I^2 \implies [a, b] \subset I.$$

Exemple: $I_1 =]-\infty; -1[\bigcup]2; +\infty[$ *n'est pas un intervalle car* $[-2; 3] \not\subseteq I_1$ *mais* $I_2 = [2; 3]$ *est un intervalle.*

✓ Si I est un intervalle borné non vide de $\mathbb{R}$, on appelle **longueur** de l'intervalle I le réel $\sup\ I - \inf\ I$.

4 Entiers, (ir)rationnels, décimaux

4.1 Propriété d'Archimède

Propriété 8.27 (Propriété d'Archimède)

Pour tout réel A, il existe un entier naturel n tel que $n > A$.

preuve:

✓ $\mathbb{R}$ est une partie non majorée de $\mathbb{R}$.

Corollaire 8.28 (d'Archimède 1)

Soit A un réel. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_*^+$, il existe un entier naturel n tel que $nx > A$.

Corollaire 8.29 (d'Archimède 2)

Soit X une partie non vide de $\mathbb{Z}$.
$(-)$ Si X est majorée dans $\mathbb{R}$, alors elle admet un plus grand élément.
$(-)$ Si X est minorée dans $\mathbb{R}$, alors elle admet un plus petit élément.

preuve:

4.2 Partie entière

Propriété 8.30 (Existence et unicité de la partie entière)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$k \leq x < k+1.$$

preuve:

Définition 8.31 (Partie entière)

Soit x un nombre réel. L'unique entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k+1$ est appelée **partie entière** de x, et est noté $\lfloor x \rfloor$.

✓ Soient a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$. Soient q le quotient dans la division euclidienne de a par b et r le reste dans la division euclidienne de a par b. On a :
$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ et $r = a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$.

4.2.1 Rationnels et irrationnels

Définition 8.32 (Irrationnels)

Les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont dits **irrationnels**.

Ptitexo: *Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel. Montrer que le produit d'un rationnel non nul et d'un irrationnel est un irrationnel.*

Propriété 8.33 (densité)

Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$. On a :

$$\mathbb{Q} \cap]x, y[\neq \emptyset.$$

$$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]x, y[\neq \emptyset.$$

Autrement dit, tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

preuve:

✓ On dira bientôt que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

4.3 Approximation décimale d'un nombre réel

Propriété 8.34 (Existence et unicité de l'approx. décimale d'un réel)

Soit x un nombre réel et n un entier naturel. Il existe un unique entier k tel que :

$$\frac{k}{10^n} \leq x < \frac{k}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

preuve:

Définition 8.35 (Approximation décimale d'un réel)

Soit x un nombre réel et n un entier naturel. On note p_n l'unique entier tel que :

$$\frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

Le nombre rationnel $\dfrac{p_n}{10^n}$ est appelé l'**approximation décimale** à 10^{-n} près par défaut de x.
Le nombre rationnel $\dfrac{p_n}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}$ est appelé l'**approximation décimale** à 10^{-n} près par excès de x.

Définition 8.36 (Nombre décimaux)

L'ensemble des nombres décimaux est l'ensemble des nombres réels qui sont égaux à l'une de leurs approximations décimales.

✓ Les nombres décimaux sont nécessairement rationnels.

Chapitre 9 - Suites numériques

Le mathématicien est un oiselier capturant dans une volière des oiseaux aux brillantes couleurs.
Platon.

1 Généralités sur les suites réelles

1.1 L'ensemble des suites réelles

Définition 9.1 (Suite réelle)

On appelle **suite réelle** toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. Autrement dit, une suite réelle est une famille de réels indexée sur $\mathbb{N}$.
Le réel $u(n)$ est alors souvent noté u_n. On désigne usuellement une suite réelle $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit alors que u est la suite de terme général u_n.

✓ Plus généralement, on appelle suite réelle une fonction d'une partie $[\![n_0, +\infty[\![$ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$. On laissera au lecteur le soin d'adapter la suite du cours pour ces suites dites ≪ suites définies à partir d'un certain rang ≫.

Définition 9.2 (Opérations sur les suites)

Soient u et v deux suites réelles. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit :
(−) La suite $u + v$ dont le terme général est donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$(u + v)_n = u_n + v_n.$$

(−) La suite $u \times v$ dont le terme général est donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$(u \times v)_n = u_n v_n.$$

(−) La suite λu dont le terme général est donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$(\lambda u)_n = \lambda u_n.$$

(−) La suite $|u|$ dont le terme général est donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$|u|_n = |u_n|\,.$$

Définition 9.3 (Relation d'ordre sur les suites)

On définit une relation notée $\leq$ sur l'ensemble des suites, en posant pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$u \leq v \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n.$$

Propriété 9.4 (ordre partiel)

La relation $\leq$ définit un ordre partiel sur l'ensemble des suites réelles.

1.2 Suites monotones

Définition 9.5 (variations)

Une suite réelle $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite :
(−) **constante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.
(−) **stationnaire** s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq p$, $u_n = u_p$.
(−) **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
(−) **strictement croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.
(−) **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.
(−) **strictement décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$.
(−) **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
(−) **strictement monotone** si elle est strictement décroissante ou strictement croissante.

✓ La suite u est croissante si et seulement si la suite $-u$ est décroissante. La suite u est strictement croissante si et seulement si la suite $-u$ est strictement décroissante.

Exemples :

1. La suite $(nx)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $x > 0$ et strictement décroissante si $x < 0$.
2. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
3. La suite $\left(n - 10\left\lfloor \dfrac{n}{10} \right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
4. La suite $\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante mais n'est pas strictement croissante.

Propriété 9.6 (variations bis)

Soit u une suite réelle.
(−) Si u est croissante , $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m \leq n \implies u_m \leq u_n$.
(−) Si u est strictement croissante , $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m < n \implies u_m < u_n$.
(−) Si u est décroissante , $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m \leq n \implies u_m \geq u_n$.
(−) Si u est strictement décroissante , $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m < n \implies u_m > u_n$.

preuve:

Ptitexo: *Montrer que la somme de deux suites croissantes est croissante. Qu'en est-il du produit ?*

1.3 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 9.7 (Suite majorée, minorée, bornée)

Une suite réelle u est dite :
(−) **majorée** s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
(−) **minorée** s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
(−) **bornée** si elle est majorée et minorée.

✓ Une suite est majorée si l'ensemble $\left\{ u_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ de ses termes est majoré. Une suite est minorée si l'ensemble $\left\{ u_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ de ses termes est minoré. Une suite est bornée si l'ensemble $\left\{ u_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ de ses termes est borné.

✓ Toute suite croissante est minorée (par exemple, par son premier terme). Toute suite décroissante est majorée (par exemple, par son premier terme.

Propriété 9.8 (Carac. des suites bornées)

Une suite réelle u est bornée si et seulement si la suite $|u|$ est majorée.

preuve:

Exercice 9.1 **Espace vectoriel des suites bornées.**

On note $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles bornées. Montrer que $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire et par produit.

Exemples :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|a| \leq 1$.
2. La suite $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

2 Limite d'une suite réelle.

2.1 Suites convergentes

2.1.1 Définition de la convergence d'une suite

Définition 9.9 (Convergence d'une suite)

Soit u une suite réelle. On dit que la suite u **converge vers un réel** $l \in \mathbb{R}$ (ou que u **admet** l **pour limite** ou encore que u **tend vers** l) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \epsilon.$$

C'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \mathrm{d}\left(u_n, l\right) \leq \epsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ou $u_n \longrightarrow l$.

✓ Il ne faut jamais écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ avant d'avoir établi la convergence de la suite u.

Ptitexo: *Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\dfrac{a}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Ptitexo: *Soit a un réel tel que $|a| < 1$. Montrer que la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Ptitexo: *Montrer que si la suite u converge alors la suite v définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$ converge vers 0.*

Ptitexo: *Montrer que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge vers aucun réel.*

Ptitexo: *Montrer qu'une suite convergente d'entiers est stationnaire, c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang. En déduire qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels.*

2.1.2 Limite d'une suite convergente

Définition 9.10 (Suite convergente/divergente)

Une suite réelle u est dite **convergente** lorsqu'il existe un réel l tel que u converge vers l. Dans le cas contraire, la suite u est dite **divergente**.

Propriété 9.11 (Unicité de la limite)

Une suite réelle converge vers au plus un réel.

preuve:

Définition 9.12 (Limite d'une suite)

Si la suite réelle u converge vers l, on dit que l est **la** limite de la suite u.

Ptitexo: *On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. Étudier la limite éventuelle de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$.*

2.1.3 Propriétés élémentaires des suites convergentes

Théorème 9.13 (Convergente $\Longrightarrow$ bornée)

Toute suite convergente est bornée.

preuve:

Exercice 9.2 **Valeur absolue d'une suite convergente**

Montrer que si une suite réelle u converge vers un réel l, alors $|u|$ converge vers $|l|$.

Propriété 9.14 (limite strictement positive)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers un réel l *strictement* positif. Alors u_n est strictement positif à partir d'un certain rang, c'est-à-dire :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow u_n > 0.$$

Ptitexo: *Une suite qui converge vers un réel positif l, est-elle nécessairement positive à partir d'un certain rang ?*

Corollaire 9.15 (limite non nulle)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers un réel l différent de 0. Alors $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \neq 0.$$

preuve:

2.2 Limites infinies

Définition 9.16 (suite tendant vers $+\infty$)

On dit que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ \Longrightarrow\ u_n \geq M.$$

On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou bien $u_n \longrightarrow +\infty$.

Définition 9.17 (suite tendant vers $-\infty$)

On dit que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ \Longrightarrow\ u_n \leq M.$$

On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou bien $u_n \longrightarrow -\infty$.

✓ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

✓ On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si elle converge ou admet une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$.

2.3 Opérations sur les limites

Propriété 9.18 (Sommes de limites)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites admettant l et l' pour limites respectives dans $\overline{\mathbb{R}}$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}$, $l' \in \mathbb{R}$ et si λ et μ sont deux réels, alors $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda l + \mu l'$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}$ et $l' = +\infty$, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}$ et $l' = -\infty$, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
(−) Si $l = +\infty$ et $l' = +\infty$, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
(−) Si $l = -\infty$ et $l' = -\infty$, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
(−) Si $l = -\infty$ et $l' = +\infty$, alors on ne peut rien dire a priori de l'existence d'une éventuelle limite de $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.

preuve:

Corollaire 9.19 (CV + DV = DV)

La somme d'une suite réelle convergente et d'une suite réelle divergente est divergente.

preuve:

Propriété 9.20 (Produit de limites)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites admettant l et l' pour limites respectives dans $\overline{\mathbb{R}}$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$, alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ll'.
(−) Si $l \in \mathbb{R}_*^+$ et $l' = +\infty$, alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}_*^+$ et $l' = -\infty$, alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
(−) Si $l = +\infty$ et $l' = +\infty$, alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
(−) Si $l = -\infty$ et $l' = -\infty$, alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
(−) Si $l = -\infty$ et $l' = +\infty$, alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

preuve:

Propriété 9.21 (produit particulier)

Le produit d'une suite réelle bornée et d'une suite réelle tendant vers 0 converge vers 0.

preuve:

Propriété 9.22 (Quotient de limites)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites admettant l et l' pour limites respectives dans $\overline{\mathbb{R}}$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}^*$, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{l}{l'}$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \{+\infty, -\infty\}$, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
(−) Si $l \in \mathbb{R}_*^+ \cup \{+\infty\}$, $l' = 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}_*^+ \cup \{+\infty\}$, $l' = 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative à partir d'un certain rang, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}_*^- \cup \{-\infty\}$, $l' = 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}_*^- \cup \{-\infty\}$, $l' = 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative à partir d'un certain rang, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

preuve:

Propriété 9.23 (limite de l'inverse)

Soit u une suite à termes non nuls. Alors $|u|$ tend vers $+\infty$ si et seulement si $\dfrac{1}{u}$ converge vers 0.

2.4 Limites et relation d'ordre

2.4.1 Passages à la limites et inégalités

Lemme 9.24 (Limite d'une suite positive)

Soit u une suite de réels positifs qui converge vers un réel l. On a alors $l \geq 0$.

preuve:

Théorème 9.25 (Passage à la limite dans une inégalité)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles convergentes telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

preuve:

✓ On généralise ce résultat pour le cas où les suites admettent une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

✓ Attention, on ne peut pas a priori conserver les inégalités strictes en passant à la limite ; par passage à la limite les inégalités strictes deviennent larges : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$; $\lim_{n\to+\infty} v_n = l'$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$ alors $l < l'$: FAUX
Par exemple, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} > 0$, pourtant $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

Corollaire 9.26 (passage à la limite)

Soit u une suite réelle convergente et l un réel.
$(-)$ Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq l$.
$(-)$ Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq l$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \geq l$.

Avant d'utiliser ces résultats, il ne faut pas oublier de vérifier au préalable que les limites existent. Notons que l'existence de la limite est une hypothèse de chacune des propriétés de ce paragraphe. Dans le paragraphe suivant, l'existence de la limite est une conséquence.

2.4.2 Théorèmes d'encadrement

Lemme 9.27 (convergence vers 0)

Soient u et v deux suites réelles. Si la suite v converge vers 0 et si $|u| \leq v$, alors la suite u converge vers 0.

preuve:

Propriété 9.28 (Théorème « des gendarmes »)

Soient u, v et w trois suites réelles telles que $u \leq v \leq w$. On suppose que u et w convergent et ont même limite réelle. Dans ce cas, la suite v converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n.$$

preuve:

✓ propriété encore vraie avec une inégalité à partir d'un certain rang

Ptitexo: *Montrer, par encadrement, que la suite de terme général* $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}$ *converge vers* 2.

Propriété 9.29 (Théorème « de la voiture-balai »)

Soient u et v deux suites réelles telles que $u \leq v$.
$(-)$ Si u tend vers $+\infty$, alors v tend aussi vers $+\infty$.
$(-)$ Si v tend vers $-\infty$, alors u tend aussi vers $-\infty$.

preuve:

Ptitexo: *Étudier le comportement au voisinage de $+\infty$ de la suite de terme général* $\prod_{k=1}^{2n}\left(2-\frac{k}{2n}\right)$.

Exercice 9.3 **Convergence des suites d'approximations décimales**

---

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n + 10^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des approximations décimales par excès et défaut de x. Montrer que les suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n + 10^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers x.

2) En déduire que tout réel est limite d'une suite de rationnels.

---

3 Limites et monotonie

3.1 Suites monotones et convergence

Théorème 9.30 (Limite monotone)

Soit u une suite croissante.
$(-)$ Si la suite u est majorée, alors elle converge vers le réel $\sup\{\, u_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$.
$(-)$ Si la suite u n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

Soit u une suite décroissante.
$(-)$ Si la suite u est minorée, alors elle converge vers le réel $\inf\{\, u_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$.
$(-)$ Si la suite u n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Corollaire 9.31 (Lim. ds $\overline{\mathbb{R}}$ d'une suite monotone)

Toute suite monotone admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Ptitexo: *Montrer, en utilisant le théorème de la limite monotone, que la suite* $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$.

Ptitexo: *Montrer, en utilisant le théorème de la limite monotone, que la suite* $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge. (On établira bientôt que cette suite tend vers* e*).*

Ptitexo: *Étudier la convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$u_0 = a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1.$$

Exercice 9.4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que si $l < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) Montrer que si $l > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) Étudier le cas $l = 1$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

3.2 Suites adjacentes

Définition 9.32 (Suites adjacentes)

Deux suites u et v sont dites **adjacentes** lorsqu'elles vérifient les propriétés suivantes :

i) La suite u est croissante.
ii) La suite v est décroissante.
iii) La suite $v - u$ converge vers 0.

Théorème 9.33 (Convergence des suites adjacentes)

Si u et v sont deux suites réelles adjacentes, alors elles convergent et ont même limite l et on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0$.

preuve:

Ptitexo: *On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$. Montrer que les suites $v = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.*

Ptitexo: *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad S'_n = S_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

Montrer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes (et convergent donc vers la même limite).

Exercice 9.5 **Théorème des segments emboîtés**

Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissantes de segments non vides de $\mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\{\alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

4 Suites extraites

4.1 Généralités

Définition 9.34 (Extraction)

On appelle **fonction extractrice** ou **extraction** toute fonction *strictement* croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

Lemme 9.35 ($\varphi(n) \geq n$)

Soit φ une extraction. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

preuve:

Définition 9.36 (Suite extraite)

Soient u et v deux suites. On dit que v est une **suite extraite** de u, s'il existe une extraction φ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Exemples :

1. Toute suite u est une suite extraite d'elle-même.
2. Pour toute suite u, la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de u.
3. Pour toute suite u, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de u. Ces suites sont respectivement appelées « suites extraites des termes pairs » et « suite extraite des termes impairs ». Ainsi, la suite constante égale à 1 et la suite constante égale à -1 sont-elles des suites extraites de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété 9.37 (Limites d'une suite extraite)

Si v est une suite extraite d'une suite u qui admet une limite (finie ou non), alors v admet la même limite que u.

preuve:

✓ Ce résultat est souvent utilisé pour prouver qu'une suite diverge : si l'on prouve qu'une suite u admet deux suites extraites qui ont des limites différentes, alors l'unicité de la limite implique que cette suite u n'admet aucune limite. La propriété qui suit constitue une réciproque partielle à cette propriété.

Ptitexo: *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soient l et l' deux réels. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{7n} = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{5n} = l'$. Montrer que $l = l'$.*

Ptitexo: *Montrer que la suite de terme général $u_n = \cos\left(\dfrac{n^2-1}{n}\pi\right)$ diverge.*

Propriété 9.38 (suites extraites d'indices pairs et impairs)

Soit u une suite réelle. Si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent la même limite l (finie ou non), alors la suite u tend vers l.

preuve:

Ptitexo: *Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :*

$$v_0 = \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 1 - v_n^2.$$

4.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Exercice 9.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer qu'il existe une extraction φ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \in A_n$.

Théorème 9.39 (Bolzano-Weierstrass)

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

preuve:

✓ Notons qu'une suite bornée admet plusieurs sous-suites convergentes qui n'ont pas nécessairement la même limite.

5 Traduction séquentielle de quelques propriétés

5.1 Densité

Définition 9.40 (Partie dense dans $\mathbb{R}$)

On dit qu'une partie X de $\mathbb{R}$ est dense si elle vérifie :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b, \quad]a,b[\cap X \neq \emptyset.$$

Autrement dit, une partie est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Propriété 9.41 (Parties denses usuelles)

(−) L'ensemble des décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.
(−) L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.
(−) L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

Propriété 9.42 (Caractérisation séquentielle de la densité)

Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$, si et seulement si tout réel x est limite d'une suite d'éléments de A.

✓ On peut facilement généraliser la notion de densité de la façon suivante : Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Soit $A \subset X$. On dit que la partie A est dense dans X si tout élément de X est limite d'une suite d'éléments de A.

5.2 Caractérisation du $\sup$ et de l'$\inf$.

Propriété 9.43 (existence de certaines suites extraites)

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.
($-$) Si X est majorée, alors il existe une suite d'éléments de X qui converge vers $\sup\ X$.
($-$) Si X est non majorée, alors il existe une suite d'éléments de X qui converge vers $+\infty$.
($-$) Si X est minorée, alors il existe une suite d'éléments de X qui converge vers $\inf\ X$.
($-$) Si X est non minorée, alors il existe une suite d'éléments de X qui converge vers $-\infty$.

preuve:

Propriété 9.44 (Caractérisation du $\sup$.)

Soit X une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a :

$a = \sup\ X$ si et seulement si a est un majorant de X et il existe une suite d'éléments de X qui converge vers a.

preuve:

Propriété 9.45 (Caractérisation dd l'$\inf$.)

Soit X une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a :

$a = \inf\ X$ si et seulement si a est un minorant de X et il existe une suite d'éléments de X qui converge vers a.

6 Suites complexes

6.1 Définitions et notations

Définition 9.46 (Suite complexe)

On appelle **suite complexe** toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{C}$. Si l'on considère un élément $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors on note usuellement pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n au lieu de $u(n)$. On note indifféremment u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On étend de façon naturelle les opérations $+$, $\times$ aux suites complexes et l'on définit de plus :

Définition 9.47 (cas particuliers)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe, on définit :
(−) La partie réelle de u qui est la suite notée $\mathcal{R}\mathrm{e}(u)$ et de terme général $\mathcal{R}\mathrm{e}(u_n)$.
(−) La partie imaginaire de u qui est la suite notée $\mathcal{I}\mathrm{m}(u)$ et de terme général $\mathcal{I}\mathrm{m}(u_n)$.
(−) La suite conjuguée de la suite u, notée $\overline{u}$, qui est la suite de terme général $\overline{u_n}$.
(−) La suite $|u|$ qui est la suite de terme général $|u_n|$.

Les paragraphes qui suivent explorent les propriétés des suites complexes. Les propriétés des suites réelles sont souvent des propriétés encore valables pour des suites complexes, les propriétés qui ne fonctionnent pas pour les suites complexes sont essentiellement les propriétés liées à la relation d'ordre. Pour des suites complexes, on n'utilise pas :
(−) de théorème de la limite monotone,
(−) de suites adjacentes,
(−) de théorème d'encadrement,
(−) de limite infinie.

6.2 Suites complexes bornées

On étend aux suites complexes la définition, déjà vue pour les réels, de suite bornée :

Définition 9.48 (Suite bornée)

La suite complexe u est **bornée** si la suite $|u|$ est bornée, c'est-à-dire si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

Ptitexo: *Vérifier que l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{C}$ contient la suite nulle et est stable par combinaison linéaire et multiplication.*

Exemple : Soit $z \in \mathbb{C}$. La suite de terme général z^n est bornée si et seulement si $|z| \leq 1$.

Propriété 9.49 (Carac. des suites complexes bornées)

Soit u une suite complexe. La suite u est bornée si et seulement les suites $\mathcal{R}\mathrm{e}(u)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(u)$ sont bornées.

preuve:

6.3 Convergence des suites complexes

6.3.1 Définition et généralités

Définition 9.50 (Convergence d'une suite)

On dit qu'une suite complexe u converge vers le complexe $l \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq \epsilon.$$

On note dans ce cas $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ ou encore $u_n \longrightarrow l$.

✓ Cette définition est bien cohérente avec la définition donnée pour les suites à valeurs réelles puisque le module est un prolongement à $\mathbb{C}$ de la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$.

Propriété 9.51 (Unicité de la limite)

Une suite complexe u converge vers au plus un nombre complexe l. Si u converge vers le complexe l, alors on dit que l est **la** limite de la suite u.

preuve:

Lemme 9.52 (convergence vers l.)

la suite u tend vers l si et seulement si la suite de terme général $\mid u_n - l \mid$ tend vers 0.

✓ Une suite qui converge vers un complexe l est dite convergente, une suite qui ne converge vers aucun complexe est dite divergente.

Propriété 9.53 (Convergence de u et conv. de $\mathcal{R}\mathrm{e}(u)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(u)$)

Soit u une suite complexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :
$(-)$ La suite u converge vers l.
$(-)$ La suite $\mathcal{R}\mathrm{e}(u)$ converge vers $\mathcal{R}\mathrm{e}(l)$ et la suite $\mathcal{I}\mathrm{m}(u)$ converge vers $\mathcal{I}\mathrm{m}(l)$.

preuve:

Propriété 9.54 (Convergente $\implies$ bornée)

Toute suite complexe convergente est bornée.

preuve:

✓ La réciproque est évidemment fausse, mais comme on va le voir un peu plus loin, on dispose encore du théorème de Bolzano-Weierstrass.

6.3.2 opérations sur les suites convergentes

Propriété 9.55 (Opérations sur les suites convergentes)

Soient u et v deux suites complexes qui convergent respectivement vers les complexes l et l'. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
(−) La suite $\overline{u}$ converge vers $\bar{l}$.
(−) La suite $|u|$ converge vers $|l|$.
(−) La suite $u + \lambda v$ converge vers $l + \lambda l'$.
(−) La suite uv converge vers ll'.
(−) Si $l' \neq 0$, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{l}{l'}$.

preuve : même que dans $\mathbb{R}$.

Ptitexo: *Montrer que si une suite complexe u converge vers un complexe non nul l, alors l est non nulle à partir d'un certain rang.*

Propriété 9.56 (produit particulier)

Le produit d'une suite complexe bornée et d'une suite tendant vers 0 tend vers 0.

preuve : même que dans $\mathbb{R}$.

6.4 Suites extraites

La définition d'une suite extraite donnée précédemment est encore valable pour les suites à valeurs complexes (et d'ailleurs à valeurs dans un ensemble quelconque).

Propriété 9.57 (convergence des suites extraites)

Si une suite complexe u converge vers l, alors toute suite extraite de u converge vers l.

preuve : même que dans $\mathbb{R}$.

Propriété 9.58 (suites extraites de rang pair ou impair)

Soit u une suite complexe. Si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l, alors la suite u converge vers l.

preuve : même que dans $\mathbb{R}$.

Propriété 9.59 (Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

preuve:

7 Suites particulières

7.1 Suites très particulières

7.1.1 Suite arithmétique

Définition 9.60 (Suite arithmétique)

On dit que u est une **suite arithmétique** s'il existe un complexe r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r.$$

Dans ce cas, le complexe r est appelé **raison** de la suite u.
d'où la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$

Propriété 9.61 (Terme g^{al} d'une suite arithmétique)

Si u est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$, alors :
$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$: $u_n = u_p + (n-p)\, r$
En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr.$$

Propriété 9.62 (somme)

Si u est une suite arithmétique alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$

preuve:

7.1.2 Suite géométrique

Définition 9.63 (Suite géométrique)

On dit que u est une **suite géométrique** s'il existe un complexe q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Dans ce cas, le complexe q est appelé **raison** de la suite u d'où la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n.$$

Propriété 9.64 (Terme g^{al} d'une suite géométrique)

Si u est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$:
$u_n = u_p \times q^{n-p}$
En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n.$$

Propriété 9.65 (somme)

Si u est une suite géométrique alors, pour $q \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

preuve:

Propriété 9.66 (convergence)

Si u est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$ et de premier terme non nul, alors :
$(-)$ Si $|q| < 1$, la suite u converge vers 0.
$(-)$ Si $q = 1$, la suite u est constante.
$(-)$ Si $q \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, alors la suite u est bornée et divergente.
$(-)$ Si $|q| > 1$, alors la suite u est divergente et non bornée.

7.1.3 Suite arithmético-géométrique

Définition 9.67 (Suite arithmético-géométrique)

On dit que u est une **suite arithmético-géométrique** s'il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ de complexes tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Si $a = 1$, alors la suite est arithmétique.

Si $a \neq 1$, alors on peut trouver un complexe l, tel que : $l = al + b$. (En fait, $l = \frac{b}{1-a}$). En soustrayant cette égalité, à l'égalité : $u_{n+1} = au_n + b$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - l = a\left(u_n - l\right)$. La suite $\left(u_n - l\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison a, on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.}$$

De cette égalité, on déduit le comportement de u_n au voisinage de $+\infty$.

7.1.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

Définition 9.68 (Suite réc. lin. d'ordre 2 à coeff. constants.)

On dit qu'une suite numérique u est **récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants**, s'il existe des complexes a, b et c (avec $a \neq 0$), tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

Dans ce cas, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est appelée **équation caractéristique** de u.

Lemme 9.69 ()

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{C}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Il existe une unique suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie :

$$u_0 = \alpha,\ u_1 = \beta \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = f\left(u_n, u_{n+1}\right).$$

preuve:

Propriété 9.70 (Cas complexe)

Soit u une suite complexe telle qu'il existe des complexes a, b et c (avec $a \neq 0$), tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

$(-)$ Si l'équation caractéristique de u admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2, alors il existe un unique couple (λ, μ) de complexes tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

$(-)$ Si l'équation caractéristique de u admet une racine double $r \neq 0$, alors il existe un unique couple (λ, μ) de complexes tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

preuve:

✓ En général, on détermine λ et μ, en s'appuyant sur l'unicité du couple (λ, μ) et sur la connaissance des deux premiers termes de u.

✓ Si $r = 0$, la suite u est nulle à partir du terme d'indice 2.

Propriété 9.71 (Cas réel)

Soit u une suite réelle telle qu'il existe des réels a, b et c (avec $a \neq 0$), tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

$(-)$ Si l'équation caractéristique de u admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe un unique couple (λ, μ) de réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

$(-)$ Si l'équation caractéristique de u admet une racine double $r \neq 0$, alors il existe un unique couple (λ, μ) de réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

$(-)$ Si l'équation caractéristique de u admet deux racines complexes conjuguées non réelles distinctes $r_1 = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $r_2 = \rho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_*^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors il existe un unique couple (λ, μ) de réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \rho^n \cos(n\theta) + \mu \rho^n \sin(n\theta).$$

preuve:

Ptitexo: *Expliciter le terme général de la suite définie par :*

$$u_0 = 1,\, u_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n.$$

Faire de même avec la suite définie par :

$$v_0 = 1,\, v_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n.$$

Ptitexo: *Déterminer toutes les suites vérifiant la relation :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n + 2.$$

(On pourra commencer par déterminer les suites constantes).

7.2 Suites récurrentes : Généralités et exemples

7.2.1 Généralités

Position du problème : On dispose d'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur partie D de $\mathbb{R}$ et d'un point $a \in D$. On cherche à étudier, si elle existe, la suite u vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

Une telle suite est appelée **suite récurrente**.

✓ Par définition d'une fonction, on peut prouver par récurrence que si une telle suite existe, alors elle est unique.

✓ Une telle suite n'existe pas forcément. Exemple : Que penser d'une suite u vérifiant $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2}$?

Définition 9.72 (Partie stable)

Une partie I de D est dite **stable** par f si :

$$\forall x \in I, f(x) \in I.$$

Définition 9.73 (Point fixe)

Soit $x \in D$ un réel. On dit que x est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Propriété 9.74 ()

Soit I une partie de D stable par f et contenant a. Alors, il existe une unique suite réelle vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

preuve : récurrence immédiate.

Ptitexo: *Soit* $a \in \mathbb{R}^+$. *Montrer qu'il existe une unique suite* h *telle que* $h_0 = a$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_{n+1} = \dfrac{3h_n + 4}{2h_n + 3}$.

Théorème 9.75 ()

Soit u une suite réelle ou complexe vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite u converge vers l et si la fonction f est continue en l, alors $f(l) = l$.

preuve:

✓ L'hypothèse de la continuité de f en l est indispensable.

✓ La convergence de la suite u fait partie des hypothèses.

7.2.2 Exemples

Exercice 9.7

1) Dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$.

2) Justifier que $\forall a \in \mathbb{R}$, il existe un unique suite réelle vérifiant

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

3) Étudier suivant les valeurs de a la convergence de la suite u.

Exercice 9.8

Soit w la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \sqrt{2 - w_n} \quad \text{et} \quad w_0 = -\frac{1}{2}.$$

1) Montrer que la suite w est bien définie.

2) Étudier la convergence de cette suite.

Exercice 9.9 **Suite récurrente associée à une contraction**

1) Montrer qu'il existe une unique suite réelle vérifiant :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 2}.$$

2) On note $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \longmapsto \dfrac{2x+2}{x+2}$.

a) Montrer que la fonction f admet un unique point fixe α.

b) Montrer qu'il existe un réel $k \in [0, 1[$, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ |f(x) - \alpha| \leq k\,|x - \alpha|.$$

(On dit alors que la fonction f est une contraction de $\mathbb{R}^+$).

3) Montrer que la suite u converge vers α.

8 Grands classiques

Ce paragraphe regroupe sous forme d'exercices quelques théorèmes ultra-classiques qui ne font pas explicitement partie du programme de SUP.

Exercice 9.10 **Théorème de Cesaro**

L'objectif de cet exercice est de prouver l'énoncé suivant :

Théorème : Soit $l \in \mathbb{R}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle qui converge vers l, alors elle converge aussi en moyenne vers l, i.e :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = l.$$

1) a) Montrer que si N est un entier fixé, alors pour tout $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in [\![N, +\infty[\![$, $\forall n \geq n_0$, $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} u_k\right| \leq \dfrac{\epsilon}{3}$.

b) Prouver le théorème.

2) Étudier la réciproque à ce théorème.

3) Application :

a) Montrer que la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$ converge vers 0.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

c) Utiliser alors le théorème de Césaro pour déterminer un réel α tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha n u_n = 1$.

4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = l \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = l.$$

5) a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \implies \sqrt[n]{x_n} = l.$$

b) Ce résultat admet-il une réciproque ?

c) Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Exercice 9.11 **Critère spécial des séries alternées**

L'objectif de cet exercice est de prouver et utiliser l'énoncé suivant :
Théorème : Si $(a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante et de limite nulle, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

1) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2) Conclure.

3) a) En déduire que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ est convergente.

b) Calculer sa limite en observant que $\forall k \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 x^k \, \mathrm{d}x$.

4) Montrer que la suite de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ converge vers un irrationnel.

Chapitre 10 - Limites et continuité

Pour moi, la mathématique, c'est la conquête du continu par le discret.
René Thom.

Vocabulaire :

On dit qu'une fonction f est définie au voisinage d'un réel $a \in \mathbb{R}$, s'il existe un réel $h > 0$, tel que f soit définie au moins sur l'un des ensembles $]a-h, a[$, $]a, a+h[$, $]a-h, a[\cup]a, a+h[$.
On dit qu'une fonction f est définie au voisinage de $+\infty$, s'il existe un réel $A \in \mathbb{R}$, tel que f est définie au moins sur $]A, +\infty[$.
On dit qu'une fonction f est définie au voisinage de $-\infty$, s'il existe un réel $A \in \mathbb{R}$, telle que f est définie au moins sur $]-\infty, A[$.

On dit qu'un point a est intérieur à une partie $X \subset \mathbb{R}$, si il existe un réel h strictement positif, tel que $]a-h, a+h[\subset X$.

On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ portant sur une fonction f est :
$(-)$ vraie au voisinage du réel a, s'il existe un réel $h > 0$, telle que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie sur l'ensemble $D_f \cap]a-h, a+h[$,
$(-)$ vraie au voisinage de $+\infty$, s'il existe un réel A, telle que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie sur l'ensemble $D_f \cap [A, +\infty[$,
$(-)$ vraie au voisinage de $-\infty$, s'il existe un réel A, telle que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie sur l'ensemble $D_f \cap]-\infty, A]$.

1 Limites

1.1 Limite en un point $a \in \mathbb{R}$.

1.1.1 Définitions

Définition 10.1 (Limite finie en un point $a \in \mathbb{R}$)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a. Soit b un nombre réel. On dit que la fonction f **admet pour limite le réel** b **en** a lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon.$$

On écrit alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ ou encore $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Dessin :

Ptitexo: *Il ne faut pas changer l'ordre des quantificateurs ! Si l'on change l'ordre des quantificateurs, on obtient :*

$\exists \eta > 0, \forall \epsilon > 0, \forall x \in D_f, |x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)-b| \leq \epsilon.$
Que signifie cette phrase logique ?

Exemples :

1. La fonction constante égale à c admet c pour limite en tout point de $\mathbb{R}$.
2. La fonction id : $x \mapsto x$ admet a pour limite en a.

   Ptitexo: *Montrer que les fonctions $f : x \mapsto 3x+1$ et $g : x \mapsto x^2+1$ admettent une limite en tout point $a \in \mathbb{R}$.*

Propriété 10.2 (limite finie)

Soit f une fonction définie au voisinage de a. Si f admet une limite finie en a et si $a \in D_f$, alors cette limite est égale à $f(a)$.

preuve:

Ptitexo: *Montrer que la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'admet de limite en aucun point $n \in \mathbb{Z}$.*

Définition 10.3 (Limite infinie en un point $a \in \mathbb{R}$.)

Soit f une fonction définie au voisinage de a.
$(-)$ On dit que f **admet** $+\infty$ **comme limite en** a si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq A.$$

On écrit alors : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
$(-)$ On dit que f **admet** $-\infty$ **comme limite en** a si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \leq A.$$

On écrit alors : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Dessin :

✓ Si f admet une limite infinie en un point $a \in \mathbb{R}$, alors f n'est pas définie en a.

✓ Si f admet en a une limite finie ou infinie, on dit que f admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Ptitexo: *Déterminer la limite de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ en $a = 2$.*

Propriété 10.4 (Unicité de la limite)

Si f admet une limite finie ou non en un point a, alors celle-ci est unique.

preuve:

1.1.2 Limite à droite, limite à gauche

Définition 10.5 (Limite à gauche, limite à droite)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a.
Soit b un nombre réel.

$(-)$ On dit que la fonction f **admet pour limite le réel** b **à gauche en** a lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, a - \eta \leq x < a \Longrightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon.$$

On écrit alors $f(x) \longrightarrow b$ ou encore $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$.

$x \to a$

$x < a$

$(-)$ On dit que f **admet** $+\infty$ **comme limite à gauche en** a si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, a - \eta \leq x < a \Longrightarrow f(x) \geq A.$$

On écrit alors $f(x) \longrightarrow b$ ou encore $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.

$x \to a$

$x < a$

$(-)$ On dit que f **admet** $-\infty$ **comme limite à gauche en** a si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, a - \eta \leq x < a \Longrightarrow f(x) \leq A.$$

On écrit alors $f(x) \longrightarrow b$ ou encore $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

$x \to a$

$x < a$

$(-)$ On dit que f **admet pour limite le réel** b **à droite en** a lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, a < x \leq a + \eta \Longrightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon.$$

On écrit alors $f(x) \longrightarrow b$ ou encore $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$.

$x \to a$

$x > a$

$(-)$ On dit que f **admet** $+\infty$ **comme limite à droite en** a si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, a < x \leq a + \eta \Longrightarrow f(x) \geq A.$$

On écrit alors $f(x) \longrightarrow b$ ou encore $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

$x \to a$

$x > a$

$(-)$ On dit que f **admet** $-\infty$ **comme limite à droite en** a si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, a < x \leq a + \eta \Longrightarrow f(x) \leq A.$$

On écrit alors $f(x) \longrightarrow b$ ou encore $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

$x \to a$

Ptitexo: *Déterminer la limite de*
$f : x \mapsto \dfrac{x-3}{\mid x-3 \mid}$ *en* $a = 3$ *et de* $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ *en* $a = 2$

Propriété 10.6 (limite à droite et à gauche)

Soit f une fonction numérique et soit a un point intérieur à D_f. Soit $b \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = b$$

Les limites à gauche et à droite vérifient essentiellement les mêmes propriétés que les limites « normales » nous ne les répéterons donc pas.

1.2 Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

Définition 10.7 (Limite en $+\infty$)

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
$(-)$ On dit que la fonction f **admet le réel** b **pour limite en** $+\infty$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \geq A \implies |f(x) - b| \leq \epsilon.$$

On écrit alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} b$ ou encore $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.
$(-)$ On dit que la fonction f **admet** $+\infty$ **pour limite en** $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \geq A \implies f(x) \geq M.$$

On écrit alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
$(-)$ On dit que la fonction f **admet** $-\infty$ **pour limite en** $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \geq A \implies f(x) \leq M.$$

On écrit alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Dessin :

Définition 10.8 (Limite en $-\infty$)

Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$.
$(-)$ On dit que la fonction f **admet le réel** b **pour limite en** $-\infty$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \leq A \implies |f(x) - b| \leq \epsilon.$$

On écrit alors $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} b$ ou encore $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.
$(-)$ On dit que la fonction f **admet** $+\infty$ **pour limite en** $-\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \leq A \implies f(x) \geq M.$$

On écrit alors $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
$(-)$ On dit que la fonction f **admet** $-\infty$ **pour limite en** $-\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \leq A \implies f(x) \leq M.$$

On écrit alors $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Ptitexo: *Déterminer les limites de* $f \mapsto x^2$ *en* 2 , *de* $g \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ *en* $+\infty$ *et de* $h \mapsto \frac{x}{2} + \cos x$ *en* $+\infty$

Ptitexo: *Soit* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *une fonction périodique. Montrer que si* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, *alors* f *est constante.*

1.3 Propriétés générales des limites

1.3.1 Premières propriétés

Propriété 10.9 (limite en a)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si la fonction f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a, c'est-à-dire :
$(-)$ Si $a = +\infty$:

$$\exists A \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [A, +\infty[\cap D_f, |f(x)| \leq M.$$

$(-)$ Si $a = -\infty$:

$$\exists A \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\infty, A] \cap D_f, |f(x)| \leq M.$$

$(-)$ Si $a \in \mathbb{R}$:

$$\exists \eta > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap D_f, |f(x)| \leq M.$$

preuve:

Exercice 10.1

1) Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $l > 0$, $\lim_{x \to a} f(x) = l$. Montrer que f est strictement positive sur un certain voisinage de a, c'est-à-dire que :

$$\exists \epsilon > 0, \forall x \in D_f, |x - a| \leq \epsilon \Longrightarrow f(x) > 0.$$

2) Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On suppose qu'il existe un réel $l > 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$. Montrer que f est strictement positive sur un certain voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire que : $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \geq A \Longrightarrow f(x) > 0$.

✓ De même pour l'énoncé :"ne s'annule pas"

Propriété 10.10 (Caractérisation séquentielle des limites)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

ii) Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D_f^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, on a $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = l$.

preuve:

✓ Cette propriété est très utilisée : elle permet de ≪ transférer ≫ les résultats sur les limites de suites aux limites de fonctions.

✓ On utilise très souvent cette propriété pour prouver qu'une fonction n'admet pas de limite en $+\infty$.

Ptitexo: *Montrer que la fonction* cos *n'admet pas de limite en* $+\infty$.

Ptitexo: *Montrer que la fonction* $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *n'admet pas de limite en* 0.

1.3.2 Opérations sur les limites

Propriété 10.11 (produit "limite 0" et fonction bornée)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies sur un même voisinage de a. Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et si la fonction g est bornée au voisinage de a, alors $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$.

preuve:

Ptitexo: *Déterminer la limite en* 0 *de* $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 10.2 **Sous-espace vectoriel des fonctions de limites nulles**

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies au sur un même voisinage de a.

1) Montrer que si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = 0$.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f)(x) = 0$.

Pour les propriétés 10.12 à 10.15 : même démonstration avec utilisation de la propriété 10.10.

Propriété 10.12 (Addition de limites)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient l et l' deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l'$.
$(-)$ Si $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = l + l'$.
$(-)$ Si $l \in \mathbb{R}$ et $l' = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = +\infty$.
$(-)$ Si $l \in \mathbb{R}$ et $l' = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = -\infty$.
$(-)$ Si $l = +\infty$ et $l' = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = +\infty$.
$(-)$ Si $l = -\infty$ et $l' = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = -\infty$.
$(-)$ Si $l = -\infty$ et $l' = +\infty$, alors on ne peut rien dire a priori d'un éventuelle limite de $f + g$ en a.

Propriété 10.13 (Multiplication de limites par un réel)

Soit f une fonction définie sur un même voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit l un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$(-)$ Si $l \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda l$.
$(-)$ Si $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et $l = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f)(x) = +\infty$.
$(-)$ Si $\lambda \in \mathbb{R}_*^-$ et $l = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f)(x) = -\infty$.
$(-)$ Si $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et $l = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f)(x) = -\infty$.
$(-)$ Si $\lambda \in \mathbb{R}_*^-$ et $l = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f)(x) = +\infty$.

Propriété 10.14 (Produit de limites)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Soient l et l' deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} f(x) = l'$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \to a} (fg)(x) = ll'$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}_*^+$ et $l' = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} (fg)(x) = +\infty$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}_*^-$ et $l' = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} (fg)(x) = -\infty$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}_*^+$ et $l' = -\infty$, alors $\lim_{x \to a} (fg)(x) = -\infty$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}_*^-$ et $l' = -\infty$, alors $\lim_{x \to a} (fg)(x) = +\infty$.
(−) Si $l = +\infty$ et $l' = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} (fg)(x) = +\infty$.
(−) Si $l = -\infty$ et $l' = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} (fg)(x) = -\infty$.
(−) Si $l = -\infty$ et $l' = -\infty$, alors $\lim_{x \to a} (fg)(x) = +\infty$.
(−) Si $l = 0$ et $l' \in \{+\infty, -\infty\}$, alors on ne peut rien dire a priori d'un éventuelle limite de fg en a.

Propriété 10.15 (Quotient de limites)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Soient l et l' deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} f(x) = l'$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{l'}$.
(−) Si $l = +\infty$ et $l' \in \mathbb{R}_*^+$, alors $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = +\infty$.
(−) Si $l = +\infty$ et $l' \in \mathbb{R}_*^-$, alors $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = -\infty$.
(−) Si $l = -\infty$ et $l' \in \mathbb{R}_*^+$, alors $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = -\infty$.
(−) Si $l = -\infty$ et $l' \in \mathbb{R}_*^-$, alors $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = +\infty$.
(−) Si $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \{+\infty, -\infty\}$, alors $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = 0$.
(−) Si $l \neq 0$ et $l' = 0$ et si $\frac{f}{g}$ est strictement positif sur un voisinage de a privé de a, alors $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = +\infty$.
(−) Si $l \neq 0$ et $l' = 0$ et si $\frac{f}{g}$ est strictement négatif sur un voisinage de a privé de a, alors $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = -\infty$.
(−) Si $l \in \{+\infty, -\infty\}$ et $l' \in \{+\infty, -\infty\}$, alors on ne peut rien dire a priori d'un éventuelle limite de $\frac{f}{g}$ en a.

Propriété 10.16 (composition des limites)

Soient a, b et c trois éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Soit f une fonction définie sur un voisinage de a. Soit g une fonction définie sur un voisinage de b.

$$\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) = b \\ \\ \lim_{x\to b} g(x) = c \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = c.$$

preuve:

✓ Cette propriété autorise à faire des changements de variables dans un calcul de limite.

1.3.3 Propriétés liées à l'ordre

Propriété 10.17 (Passage à la limite dans une inégalité)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies sur un même voisinage de a. Soient l et l' deux réels. Si $f \leq g$ au voisinage de a et si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim_{x\to a} g(x) = l'$, alors $l \leq l'$.

preuve:

✓ Encore une fois, soulignons qu'en général, en passant à la limite, les inégalités strictes se transforment en inégalités larges.
Par exemple : $\forall x > 1, \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x}$. Pourtant $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$.

Pour les propriétés 10.18 et 10.19 : même démonstration avec utilisation de la propriété 10.10.

Propriété 10.18 (Th. d'encadrement-th. « des gendarmes »)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies sur un même voisinage de a qui admettent en a la même limite finie l. Si φ est une autre fonction définie sur le même voisinage de a, telle que $f \leq \varphi \leq g$ sur un voisinage de a, alors $\lim_{x\to a} \varphi(x) = l$.

preuve:

✓ énoncé toujours valable pour des limites à gauche et des limites à droites

Ptitexo: *Déterminer* $\lim_{x\to 0} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

Propriété 10.19 (Th. de min/majoration-de « la voiture balai »)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies sur un même voisinage de a telles que $f \leq g$ sur un voisinage de a.
(−) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \implies \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
(−) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty \implies \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Théorème 10.20 (Théorème de la limite monotone)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $\delta \in \mathbb{R}$, tel que $\delta < a$. On note $I =]\delta, a[$. Soit f une fonction réelle définie sur I.
(−) Supposons que la fonction f soit croissante sur I.
- Si la fonction f est majorée, alors elle admet une limite finie à gauche en a, et l'on a :
$$\lim_{x \to a-} f(x) = \sup\left\{ f(x) \;\middle|\; x \in I, x < a \right\}.$$
- Si la fonction f n'est pas majorée, elle admet $+\infty$ comme limite à gauche en a.

(−) Supposons que la fonction f soit décroissante sur I.
- Si la fonction f est minorée, alors elle admet une limite finie à gauche en a, et l'on a :
$$\lim_{x \to a-} f(x) = \inf\left\{ f(x) \;\middle|\; x \in I, x < a \right\}.$$
- Si la fonction f n'est pas minorée, elle admet $-\infty$ comme limite à gauche en a.

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $\delta \in \mathbb{R}$, tel que $a < \delta$. On note $I =]a, \delta[$. Soit f une fonction réelle définie sur I.
(−) Supposons que la fonction f soit croissante sur I.
- Si la fonction f est minorée, alors elle admet une limite finie à droite en a, et l'on a :
$$\lim_{x \to a+} f(x) = \inf\left\{ f(x) \;\middle|\; x \in I, x > a \right\}.$$
- Si la fonction f n'est pas minorée, elle admet $-\infty$ comme limite à droite en a.

(−) Supposons que la fonction f soit décroissante sur I.
- Si la fonction f est majorée, alors elle admet une limite finie à droite en a, et l'on a :
$$\lim_{x \to a+} f(x) = \sup\left\{ f(x) \;\middle|\; x \in I, x > a \right\}.$$
- Si la fonction f n'est pas majorée, elle admet $+\infty$ comme limite à droite en a.

preuve:

Dessin :

Ptitexo: *Montrer que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Corollaire 10.21 (du théorème de la limite monotone)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soit $f \in \mathbb{R}^I$. Soit a un point de I qui n'est pas une borne de I. Si la fonction f est monotone sur I, alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existent.

preuve:

2 Continuité

Dans tout ce paragraphe, les fonctions sont supposées définies sur des parties de $\mathbb{R}$ (en pratique des réunions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$).

2.1 Continuité en un point

2.1.1 Définition

Rappelons pour commencer que si une fonction définie en un réel a admet une limite finie en ce réel, alors cette limite est égale à $f(a)$.

Définition 10.22 (Continuité en un point)

Soit f une fonction définie en un réel a. On dit que f est continue en a lorsque f admet une limite finie en a, c'est-à-dire lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon.$$

Dessin :

Exemples :

1. Une fonction affine est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
2. La fonction $x \mapsto x^2$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
3. La fonction $E : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et n'est continue en aucun point de $\mathbb{Z}$.

Propriété 10.23 (Caractère local de la continuité)

Soient f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I. Si J est un intervalle contenant a dans son intérieur, si les fonctions f et g coïncident sur J, alors f est continue en a si et seulement si g est continue en a.

preuve:

2.1.2 Propriétés élémentaires

Propriété 10.24 ($\mathcal{C}^0$ en $a \Longrightarrow$ bornée au vois. de a)

Si la fonction f est continue en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Exercice 10.3

Soit f une fonction continue en a telle que $f(a) > 0$. Montrer qu'il existe un réel $m > 0$, et un réel $\epsilon > 0$, tels que $\forall x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap D_f,\ f(x) > m$.

Ptitexo: *Montrer que si la fonction f est continue en a, alors la fonction $|f|$ est continue en a.*

Propriété 10.25 (Opérations sur les fonctions continues en a)

Soient f et g deux fonctions continues en a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
(−) La fonction $f + \lambda g$ est continue en a.
(−) La fonction fg est continue en a.
(−) Si $g(a) \neq 0$, les fonctions $\dfrac{1}{g} : \left\{ x \in D_g \;\middle|\; g(x) \neq 0 \right\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{1}{g(x)}$ et $\dfrac{f}{g} : \left\{ x \in D_f \cap D_g \;\middle|\; g(x) \neq 0 \right\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ sont continues en a.

preuve:

Propriété 10.26 (Composition)

Soit f une fonction continue en un point $a \in \mathbb{R}$. Si g est une fonction continue en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.

preuve:

Ptitexo: *Montrer que toute fonction polynomiale est continue en tout point de $\mathbb{R}$.*

Propriété 10.27 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit f une fonction définie en a et sur un voisinage de a. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La fonction f est continue en a.
ii) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D_f qui converge vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

preuve:

Corollaire 10.28 (Lim. d'une suite réc. associée à une fonc. $\mathcal{C}^0$)

Soit f une fonction réelle et u une suite qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite u converge vers un réel l et si f est continue en l, alors l est un point fixe de f.

preuve:

2.2 Continuité à droite, continuité à gauche

Définition 10.29 (Continuité à droite, à gauche en un pt.)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et soit a un point de D. On dit qu'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est :
$(-)$ Continue à droite en a si la fonction $f_{D_f \cap [a,+\infty[}$ est continue en a.
$(-)$ Continue à gauche en a si la fonction $f_{D_f \cap]-\infty,a]}$ est continue en a.

✓ Les résultats précédent sur la continuité en un point se transposent facilement au cas de la continuité à gauche ou à droite excepté le résultat sur la composition.

Propriété 10.30 (Continuité à droite, continuité à gauche)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et soit a un point de D et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
$(-)$ Si la fonction f est définie à droite au voisinage de a (c'est-à-dire s'il existe $\epsilon > 0$, tel que f est définie au moins sur $[a, a+\epsilon]$), alors f est continue à droite en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
$(-)$ Si la fonction f est définie à gauche au voisinage de a (c'est-à-dire s'il existe $\epsilon > 0$, tel que f est définie au moins sur $[a-\epsilon, a]$), alors f est continue à gauche en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

preuve:

Corollaire 10.31 (Continuité à droite, continuité à gauche)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et soit a un point de D et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si la fonction f est définie à gauche et droite au voisinage de a, (c'est-à-dire s'il existe $\epsilon > 0$, tel que f est définie sur $[a-\epsilon, a+\epsilon]$), alors f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a.

preuve:

Dessin :

Ptitexo: *Étudier la continuité en* 0 *de la fonction :* $f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & si\ x > 0 \\ x & si\ x = 0 \end{cases}$

2.2.1 Prolongement par continuité

Définition 10.32 (Prolongement par continuité)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Soit $a \in D$. Soit $f : D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de a.
On appelle **prolongement par continuité** de f en a toute fonction $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en a qui soit un prolongement de f. On dit que f est prolongeable par continuité en a lorsqu'elle admet un prolongement par continuité en a.

Propriété 10.33 (CNS de prolongement par continuité)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Soit $a \in D$. Soit $f : D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de a.
La fonction f est prolongeable par continuité en a si et seulement si elle admet une limite finie en a.
Dans ce cas, la fonction f admet un unique prolongement par continuité en a. Si on le note, $\tilde{f}$, alors $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

preuve:

> Ptitexo: *Montrer que la fonction* $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *est prolongeable par continuité en* 0.

2.3 Continuité sur un intervalle

Définition 10.34 (Fonction continue sur un intervalle)

Soit f une fonction définie (au moins) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction f est **continue sur l'intervalle** I si elle est continue en tout point de I.

Exemples :

1. Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10.4 — **Lipschitzienne $\Longrightarrow$ continue**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}^+$, $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$. (On dit alors que la fonction f est k**-lipschitzienne**). Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle I.

✓ On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de I vers $\mathbb{R}$.

Propriété 10.35 (Opérations sur les fonctions continues)

Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues sur I.
$(-)$ Pour tout réel λ, la fonction $\lambda f + g$ est continue sur I.
$(-)$ La fonction fg est continue sur I.
$(-)$ Si g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

preuve:

✓ Nous dirons bientôt que $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$ stable par multiplication.

Propriété 10.36 (Composition de fonctions continues)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Soit g une fonction continue sur un intervalle contenant $f(I)$.
La fonction $g \circ f$ est continue sur I.

preuve:

Exercice 10.5

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Justifier que les fonctions $|f|$, $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont continues sur I.

3 « Grands théorèmes » sur les fonctions continues

3.1 Fonctions continues sur un intervalle

Théorème 10.37 (Des valeurs intermédiaires : cas particulier)

Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Soient a et b deux points de I tels que $a < b$. Si $f(a)f(b) < 0$ (i.e. si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires), alors il existe un élément $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

preuves : Avec un sup ou par dichotomie.

✓ La continuité est nécessaire.
Par exemple, la fonction $\varphi : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ ne s'annule pas sur $[-1, 1]$.
Pourtant, $\varphi(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $\varphi(1) = \dfrac{1}{2}$.

✓ Il est nécessaire de travailler sur un intervalle : Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ et sur $\mathbb{R}_*^-$, $f(1)$ et $f(-1)$ sont de signes contraires, pourtant f ne s'annule pas.

✓ Ce théorème s'adapte facilement aux cas où $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Ptitexo: *Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois.*

Corollaire 10.38 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Soient a et b deux points de I tels que $a < b$ (avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$). Si λ est strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \lambda$.

preuve:

Corollaire 10.39 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et **strictement** monotone sur I. Soient a et b deux points de I tels que $a < b$ (avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$). Si λ est strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un **unique** réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \lambda$.

preuve:

Exemple : $f(x) = x + \sin x$ sur $[0; 1]$; $\lambda = 1$.

Ptitexo: *Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow I$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.*

Théorème 10.40 (Image d'un intervalle par une fonction continue)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I, alors $f(J)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

preuve:

✓ L'image d'un intervalle par une fonction qui n'est pas continue n'est pas forcément un intervalle.

Exemple : $f(x) = \lfloor x \rfloor$: $f([0; 1]) = \{0, 1\}$

✓ la nature de l'intervalle d'arrivée peut être différente de celui de départ.

Exemples :

1. Pour $f(x) = \dfrac{1}{x}$, déterminer $f(]0, 1])$
2. Pour $g(x) = \arctan x$, déterminer $(\mathbb{R})$
3. Pour $h(x) = \cos x$, déterminer $f\left(\left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]\right)$

Ptitexo: *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que $|f|$ est constante sur I. Montrer que f est constante sur I.*

3.2 Image d'un segment par une fonction continue

Théorème 10.41 (Image d'un compact par une fonc. $\mathcal{C}^0$)

Toute fonction continue sur un (intervalle) fermé et borné de $\mathbb{R}$ (i.e. un segment) est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 10.6

Montrer qu'une fonction continue et périodique définie sur $\mathbb{R}$ est nécessairement bornée.

Exercice 10.7

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10.8

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions appartenant à $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ telles que $f > g$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, $f \geq g + \lambda$.

Corollaire 10.42 (« l'image d'un segment est segment »)

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si a et b sont deux réels appartenant à I, alors $f([a, b])$ est un segment.

3.3 Continuité et injectivité

Théorème 10.43 (Stricte monotonie des fonc. $\mathcal{C}^0$ injectives)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f une fonction réelle continue et injective sur l'intervalle I, alors f est strictement monotone sur l'intervalle I.

preuve:

Corollaire 10.44 (de la stricte monotonie)

Si f est une fonction bijective et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f est strictement monotone sur I.

✓ L'hypothèse de continuité de la fonction est indispensable.
Par exemple, si l'on considère la fonction

$$h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad x < \frac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} - x & \text{si} \quad x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

, on remarque que f est bijective puisque $f \circ f = \mathrm{id}$ et que f n'est pas monotone.

Lemme 10.45 (une conséquence de la continuité)

Soit f une fonction réelle monotone sur un intervalle d'intérieur non vide I. La fonction f est continue sur I si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.

preuve:

Théorème 10.46 (De la bijection)

Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et f une application définie sur I. Si la fonction f est continue et strictement monotone, alors, $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I et f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

preuve:

Théorème 10.47 (Réciproque d'une bijection continue)

Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et f une application définie sur I. Si la fonction f est continue et strictement monotone, alors la bijection réciproque f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ et de même sens que f et f^{-1} est continue sur $f(I)$.

preuve:

Exemples :

1. Les fonctions arcsin et arccos sont continues sur $[-1,1]$.
2. La fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_p : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{\frac{1}{p}}$ est continue, en particulier les fonctions racines et racines cubiques sont continues sur $\mathbb{R}^+$.

(Mais elles ne sont pas dérivables en 0).

Corollaire 10.48 (du th. de la bijection)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une application continue sur $[a, b]$.
$(-)$ Si la fonction f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors elle réalise une bijection vers l'intervalle $[f(a), f(b)]$.
$(-)$ Si la fonction f est strictement décroissante sur $[a, b]$, alors elle réalise une bijection vers l'intervalle $[f(b), f(a)]$.

preuve:

Exercice 10.9 **Théorème de réciprocité des limites**

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ une borne de I n'appartenant pas à I. On considère une fonction continue strictement monotone $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et l'on note $g : I \longrightarrow f(I)$ la bijection induite par f sur I, et $b \in \overline{\mathbb{R}}$, la limite de f en a.

1) Montrer que la fonction g^{-1} est définie au voisinage de b et que l'on a $\lim\limits_{x \to b} g^{-1}(x) = a$.

2) Application : En admettant que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x)$.

4 Limites et continuité des fonctions complexes

Notons que bien des résultats restent vrais pour les fonctions à variables complexes mais il n'y a plus la possibilité d'utiliser de résultat lié à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. On ne parle pas de fonction à valeur complexe qui tend vers l'infini.

Définition 10.49 (Limite en un point)

On dit que f **admet pour limite le complexe** $l \in \mathbb{C}$ **en** $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si la fonction réelle $|f - l|$ tend vers 0 en a, c'est-à-dire si :
$(-)$ Si $a \in \mathbb{R}$: $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon$.
$(-)$ Si $a = +\infty$: $\forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in D_f, x \geq A \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$.
$(-)$ Si $a = -\infty$: $\forall \epsilon > 0, \exists B < 0, \forall x \in D_f, x \leq B \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$.

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.
Si de plus, la fonction f est définie en a, on dit alors que f est **continue en** a.

Propriété 10.50 (Unicité de la limite)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soit $f \in \mathbb{C}^I$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point de I ou une borne de I, si la fonction f admet une limite en a, alors celle-ci est unique.

preuve:

Propriété 10.51 (Carac. à l'aide des parties réelles et imaginaires)

Soit $f \in \mathbb{C}^I$. Soit $l \in \mathbb{C}$ et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

$(-)$ $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si et seulement si $\begin{cases} \lim_{x \to a} \mathcal{R}\mathrm{e}(f(x)) = \mathcal{R}\mathrm{e}(l) \\ \lim_{x \to a} \mathcal{I}\mathrm{m}(f(x)) = \mathcal{I}\mathrm{m}(l) \end{cases}$.

$(-)$ La fonction f est continue en a si et seulement si les fonctions $\mathcal{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(f)$ sont continues en a.

preuve:

Propriété 10.52 (Opérations sur les limites)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient l et l' deux complexes. Soient f et g deux fonctions appartenant à $\mathbb{C}^I$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = l'$.

$(-)$ Si λ et μ sont deux complexes, alors $\lim_{x \to a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda l + \mu l'$.

$(-)$ $\lim_{x \to a} (fg)(x) = ll'$.

$(-)$ $\lim_{x \to a} |f|(x) = |l|$.

$(-)$ $\lim_{x \to a} \overline{f}(x) = \bar{l}$.

$(-)$ Si $l' \neq 0$, alors $\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{l'}$ et $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'}$.

preuve:

Définition 10.53 (Fonc. $\mathcal{C}^0$ sur un intervalle)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On dit qu'une fonction f définie sur I est **continue sur** I, si elle est continue en tout point de a de I.

On note $\mathcal{C}(\mathbb{C}, I)$ l'ensemble des fonctions continues de I vers $\mathbb{C}$.

Propriété 10.54 ()

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

$$f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C}) \iff \begin{cases} \mathcal{R}\mathrm{e}(f) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \\ \mathcal{I}\mathrm{m}(f) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \end{cases}.$$

preuve:

Propriété 10.55 (Opération sur les fonc. continues)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soient f et g deux fonctions appartenant à $\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$.
(−) Si λ et μ sont deux complexes, $\lambda f + g \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$.
(−) $fg \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$.
(−) Si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g} \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ et $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$.
(−) $\overline{f} \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$.
(−) $|f| \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.

preuve:

Définition 10.56 (Ensemble fermé de $\mathbb{C}$)

Soit $A \subset \mathbb{C}$. On dit que A est fermé si toute suite convergente d'éléments de A a une limite qui appartient à A.

Exemple : $D_1 = \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{R}\mathrm{e}(z) \geq 0\}$

Théorème 10.57 (Image d'un segment)

L'image d'un segment par une application continue est une partie bornée et fermée de $\mathbb{C}$.

Chapitre 11 - Relations de comparaison

L'inspiration c'est bien, mais la transpiration ça compte aussi.
Marc Lièvremont.

1 Relations de comparaison sur les suites

1.1 Définition et caractérisation

1.1.1 Négligeabilité

Définition 11.1 (Négligeabilité)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe un entier n_0 et une suite $(\epsilon_n)_{n\geq n_0}$ de limite nulle tels que :

$$\forall n \geq n_0\,, u_n = v_n\epsilon_n.$$

On note alors $u_n = o(v_n)$ et on lit « u_n égale petit o de v_n » ou « u_n est un petit o de v_n » ou « u_n est négligeable devant v_n ».

Propriété 11.2 (propriétés équivalentes)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_*^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \epsilon\,|v_n|\,.$
ii) $u_n = o\,(v_n)$.

preuve:

✓ On note simplement $u_n = o(v_n)$ et non $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$ car pour une suite l'équivalence ne s'étudie qu'en $+\infty$.

Propriété 11.3 (Caractérisation de la négligeabilité)

S'il existe un entier N tel que, pour tout $n \in [\![N, +\infty[\![$, v_n ne s'annule pas alors :

$$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

preuve:

Propriété 11.4 (Exemples fondamentaux de négligeabilité)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques.
$(-)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow u_n = o(1)$.

$(-)$ Soient α et β des réels fixés tels que $0 < \alpha < \beta$ on a $n^\alpha = o(n^\beta)$.

$(-)$ Soient α et β des réels strictement positifs fixés.
$\ln(n) = o(n^\alpha)$ et plus généralement $(\ln(n))^\beta = o(n^\alpha)$.

$n^\alpha = o(\mathrm{e}^n)$ et plus généralement $n^\alpha = o(\mathrm{e}^{\beta n})$.

$(-)$ Soit $L \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \Leftrightarrow u_n = L + o(1)$.

preuve:

Propriété 11.5 (Négligeabilités et opérations)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites numériques.
$(-)$ Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.

$(-)$ Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(t_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n t_n)$.

$(-)$ Si $u_n = o(v_n)$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ alors $u_n^\alpha = o(v_n^\alpha)$.

$(-)$ Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n + v_n = o(w_n)$.

$(-)$ Si $u_n = o\left(v_n\right)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n = o(\lambda v_n)$.

preuve:

1.1.2 Domination

Définition 11.6 (Domination)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **dominée** par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe un entier n_0 et une suite $(\epsilon_n)_{n\geq n_0}$ bornée tels que :

$$\forall n \geq n_0\,, u_n = v_n \epsilon_n.$$

On note alors $u_n = O(v_n)$ et on lit « u_n égale grand o de v_n » ou « u_n est un grand o de v_n » ou « u_n est dominé par v_n ».

Propriété 11.7 (Caractérisation de la domination)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\exists A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq A\,|v_n|$.
ii) $u_n = O\left(v_n\right)$.

✓ On note simplement $u_n = O(v_n)$ car, pour une suite la domination, ne s'étudie qu'en $+\infty$.

Propriété 11.8 (Caractérisation de la domination)

S'il existe un entier N tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, v_n ne s'annule pas alors :

$$u_n = O(v_n) \text{ si, et seulement si, la suite } \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq N} \text{ est bornée.}$$

preuve:

Propriété 11.9 (Exemples fondamentaux de domination)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques.
$(-)$ $u_n = o(v_n) \implies u_n = O(v_n)$.

$(-)$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $u_n = O(1)$.

$(-)$ Soient α et β des réels fixés tels que $0 < \alpha \leq \beta$ on a $n^\alpha = O(n^\beta)$.

$(-)$ Soient α et β des réels strictement positifs fixés.
$\ln(n) = O(n^\alpha)$ et plus généralement $(\ln(n))^\beta = O(n^\alpha)$.

$n^\alpha = O(\mathrm{e}^n)$ et plus généralement $n^\alpha = O(\mathrm{e}^{\beta n})$.
.

preuve:

Propriété 11.10 (Dominations et opérations)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites numériques.
$(-)$ Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$.

$(-)$ Si $u_n = O(v_n)$ et $w_n = O(t_n)$ alors $u_n w_n = O(v_n t_n)$.

$(-)$ Si $u_n = O(v_n)$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ alors $u_n^\alpha = O(v_n^\alpha)$.

$(-)$ Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n + v_n = O(w_n)$.

$(-)$ Si $u_n = O(v_n)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n = O(\lambda w_n)$.

Exercice 11.1 **Comparaisons logarithmiques**

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs.

1) Montrer que s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

alors $u_n = O(v_n)$.

2) a) Montrer que s'il existe un réel $k \in [0,1[$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k\frac{v_{n+1}}{v_n} \quad (*),$$

alors $u_n = o(v_n)$.

b) Montrer que $(*)$ est vraie dès que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}v_n}{u_n v_{n+1}} = l \in [0,1[$.

c) En déduire la domination à connaître $\forall a \in \mathbb{R}, a^n = o(n!)$.

1.1.3 Équivalence

Définition 11.11 (Relation d'équivalence pour les suites)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe un entier n_0 et une suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ convergeant vers 1 tels que :

$$\forall n \geq n_0\,, u_n = a_n v_n.$$

On note alors $u_n \sim v_n$ et on lit « u_n est équivalent à v_n ».

✓ On note simplement $u_n \sim v_n$ et non $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Propriété 11.12 (Caractérisation de l'équivalence)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $u_n \sim v_n$.

ii) $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - v_n| \leq \epsilon\,|v_n|$.

iii) $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - v_n| \leq \epsilon\,|u_n|$.

preuve:

Ptitexo: *Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites.*

Propriété 11.13 (Caractérisation de l'équivalence pour les suites)

S'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, v_n ne s'annule pas alors :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

preuve:

Exemple : $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$

Ptitexo:

(−) *Montrer que* $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *puis que* $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *et enfin que* $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \sim \left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

(−) *Montrer que* $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *puis que* $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *et enfin que* $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \left(\dfrac{1}{n}\right)$

Propriété 11.14 (Propriétés de la relation d'équivalence)

(–) La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites réelles.

(–) La relation $u_n \sim v_n$ équivaut à $u_n - v_n = o(v_n)$.

(–) L'égalité $u_n = o(v_n)$ équivaut à $u_n + v_n \sim v_n$.

(–) Si deux suites sont équivalentes et si l'une admet une limite, finie ou infinie, alors l'autre admet la même limite.

(–) Si $u_n \sim v_n$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas (respectivement est positive) à partir d'un certain rang, il en est de même de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(–) Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longleftrightarrow u_n \sim \ell$.

preuve:

✓ Ce dernier item est, en général, très faux si $\ell = 0$.

Propriété 11.15 (Équivalence et opérations)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites numériques.

(–) Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.

(–) Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.

(–) Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ et si de plus $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, alors : $\dfrac{u_n}{u'_n} \sim \dfrac{v_n}{v'_n}$

(–) Si $u_n \sim v_n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, ${u_n}^{\alpha} \sim {v_n}^{\alpha}$

preuve:

✓ Il ne faut pas inventer d'autres règles sur les équivalents : En particulier, il est interdit d'ajouter les équivalents.

<u>Ptitexo:</u> *On note $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + n$ et $v_n = -n^2 + \sqrt{n}$ et $a_n = n^2$. Vérifier que $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim -a_n$. A-t-on $u_n + v_n \sim 0$?*

<u>Ptitexo:</u> *Montrer que $u_n \sim 0$, si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.*

✓ Deux suites qui ont la même limite ne sont pas forcément équivalentes. Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$

✓ De ce fait, on ne devrait jamais avoir le besoin d'écrire qu'une suite est équivalente à 0. Les ≪ apprentis mathématiciens ≫ qui l'écrivent ont en général commis l'erreur d'ajouter des équivalents.

Propriété 11.16 (Équivalences classiques)

$(-)$ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors :

$$\begin{aligned} &\ln(1+u_n) \sim u_n, && \mathrm{e}^{u_n}-1 \sim u_n, \\ &(1+u_n)^a - 1 \sim a u_n, && \sin(u_n) \sim u_n \\ &\tan(u_n) \sim u_n && \cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}, \\ &\arctan(u_n) \sim u_n && \arcsin(u_n) \sim u_n. \end{aligned}$$

(Pour $a \in \mathbb{R}$).

$(-)$ Un polynôme non nul de la variable n est équivalent en $+\infty$ à son monôme non nul de plus haut degré :
Si $a_0, \dots, a_p$ sont p réels tels que $a_p \neq 0$:

$$\sum_{k=0}^{p} a_k n^k \sim a_p n^p.$$

$(-)$ Une fraction rationnelle non nulle de la variable n est équivalente en $+\infty$ au quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Ptitexo: *Déterminer un équivalent simple des quantités suivantes :*

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} \qquad n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad n^{\frac{1}{n}}-1$$

$$\ln(n+1)-\ln(n) \qquad \ln(n^3+1) \qquad \left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}}{n^3+e^n} \qquad \frac{\ln\left(e^n+2n\right)-n}{n^3+\sqrt{n^2+1}} \qquad \frac{\sin\left(\frac{n+\sqrt{n}}{e^n+1}\right)}{\ln\left(n^3+n\right)+\ln\left(n^2+n+1\right)}$$

Propriété 11.17 (Coefficient binomial)

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\binom{n}{k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.$$

preuve:

Propriété 11.18 (Formule de Stirling)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\mathrm{e}^{-n} n^n.$$

Ptitexo: *Montrer que :*

$$n^n = \underset{+\infty}{O}\left(n!\mathrm{e}^n\right) \qquad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k^2} \sim \mathrm{e}^{n^2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k! \sim n!.$$

Exercice 11.2 **Produit des premiers pairs,des impairs**

En utilisant la formule de Stirling, donner un équivalent de $P_n = \prod_{k=1}^{n}(2k)$ et $I_n = \prod_{k=0}^{n}(2k+1)$, lorsque n tend vers $+\infty$.

✓ On peut composer les équivalents à droite mais pas à gauche.
Exemple : $n \sim n+1$ mais $e^n \nsim \mathrm{e}^{n+1}$

Ptitexo: *Déterminer un équivalent aussi simple que possible des quantités suivantes lorsque l'entier n tend vers $+\infty$. Discuter ensuite de leur limite.*

$$\frac{\ln(5n+1)+\cos(n^2)+\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{\sin(n)}} \qquad (n+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1$$

$$\frac{n^3+2n+1}{n^2-\sqrt{n+1}} \qquad \left(\frac{\ln(n+2)}{\ln(n)}\right)^{n\ln(n)}$$

$$\ln\left(1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)\sqrt{4n-1} \qquad \left(\ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(\frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^{-n}+1}\right)^n \qquad .$$

2 Relations de comparaison pour les fonctions

Dans tout ce qui suit, on étudie le comportement au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ de fonctions définies sur un voisinage de x_0 ou sur un voisinage de x_0 privé de x_0. On notera D l'ensemble de définition.

2.1 Domination

Définition 11.19 (Domination)

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D.
Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point de l'ensemble D ou une borne de D. On dit que f est dominé par g au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, s'il existe V_{x_0} un voisinage de x_0 et une fonction réelle ε bornée, définie sur V_{x_0} tels que :

$$\forall x \in V_{x_0},\ f(x) = g(x)\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \text{ bornée.}$$

On note alors :

$$f = \underset{x_0}{O}(g) \text{ ou } f(x) = \underset{x_0}{O}(g(x)).$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note $f = O(g)$ ou $f(x) = O\left(g(x)\right)$ et on lit
« f égale grand o de g » ou « f est un grand o de g ».

Propriété 11.20 ()

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point de l'ensemble D ou une borne de D. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $f = \underset{x_0}{O}(g)$.

ii) Il existe un voisinage $V(x_0)$ de x_0 et un réel M tel que

$$\forall x \in V(x_0), |f(x)| \leq M\,|g(x)|\,.$$

Propriété 11.21 (Fonctions dominés : caractérisation)

S'il existe un voisinage de x_0 tel que pour tout x de V_{x_0}, $g(x) \neq 0$ alors :

$$f = \underset{x_0}{O}(g) \Leftrightarrow \text{« La fonction } \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } x_0 \text{ ».}$$

Propriété 11.22 (Exemples fondamentaux de domination)

Soient α et β deux réels fixés tels que $0 < \alpha \leq \beta$.
Au voisinage de 0, on a :

$$|x|^\beta = \underset{0}{O}\,(|x|^\alpha).$$

On retient « qu'au voisinage de 0 la plus petite puissance l'emporte ».

Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$x^\alpha = \underset{+\infty}{O}\left(x^\beta\right).$$

On retient « qu'au voisinage de $+\infty$ la plus grande puissance l'emporte ». (Il en est de même en $-\infty$.)

$$\ln(x) = \underset{+\infty}{O}\,(x^\alpha) \text{ et } x^\alpha = \underset{+\infty}{O}\,(\mathrm{e}^x),$$

et plus généralement :

$$\ln^\beta(x) = \underset{+\infty}{O}\left(x^\alpha\right),\ x^\alpha = \underset{+\infty}{O}\left(\mathrm{e}^{\beta x}\right) \text{ et } \mathrm{e}^{-\alpha x} = \underset{+\infty}{O}\left(x^{-\beta}\right).$$

On a aussi :

$$\mathrm{e}^x = \underset{-\infty}{O}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),$$

$$\ln(x) = \underset{0}{O}\left(\frac{1}{x}\right),$$

et plus généralement :

$$\ln(|x|) = \underset{0}{O}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right).$$

Propriété 11.23 (Domination et opérations)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On considère les fonctions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 et h définies sur un même ensemble D et l'on étudie la négligeabilité au voisinage de x_0.
(−) Si $f = \underset{x_0}{O}(g)$ et $g = \underset{x_0}{O}(h)$ alors $f = \underset{x_0}{O}(h)$.
(−) Si $f = \underset{x_0}{O}(g)$ et $k \in \mathbb{R}^*$, alors $kf = \underset{x_0}{O}(kg)$, $kf = \underset{x_0}{O}(g)$, $f = \underset{x_0}{O}(kg)$.
(−) Si $f = \underset{x_0}{O}(g)$, alors $|f| = \underset{x_0}{O}(|g|)$.
(−) Si $f = \underset{x_0}{O}(g)$ et si f et g ne s'annulent pas sur V_{x_0}, alors $\dfrac{1}{g} = \underset{x_0}{O}\left(\dfrac{1}{f}\right)$.
(−) Si $f_1 = \underset{x_0}{O}(g_1)$ et si $f_2 = \underset{x_0}{O}(g_2)$, alors $f_1 f_2 = \underset{x_0}{O}(g_1 g_2)$.
(−) Si $f = \underset{x_0}{O}(g)$ et si $p \in \mathbb{N}^*$, alors $f^p = \underset{x_0}{O}(g^p)$.
(−) Plus généralement, si les fonctions f et g sont positives sur un voisinage de x_0, si $f = \underset{x_0}{O}(g)$ et si $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, alors $f^\alpha = \underset{x_0}{O}(g^\alpha)$.
(−) En particulier, si les fonctions f et g sont positives sur un voisinage de x_0 et si $f = \underset{x_0}{O}(g)$, alors $\sqrt{f} = \underset{x_0}{O}(\sqrt{g})$.
(−) Si $f_1 = \underset{x_0}{O}(g)$ et si $f_2 = \underset{x_0}{O}(g)$, alors $f_1 + f_2 = \underset{x_0}{O}(g)$.

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $f = \underset{x_0}{O}(g)$ et si u est une fonction définie sur un domaine D_u telle que $u(D_u) \subset D$ et $\lim\limits_{t \to t_0} u(t) = x_0$, alors $f \circ u = \underset{t_0}{O}(g \circ u)$.

✓ Cette dernière propriété permet d'effectuer des « changements de variable » dans une relation de domination.

2.2 Négligeabilité

Définition 11.24 (Fonctions négligeables)

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D.
Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point du ensemble D ou une borne de D. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, s'il existe V_{x_0} un voisinage de x_0 et une fonction réelle ε, définie sur V_{x_0} tels que :

$$\forall x \in V_{x_0},\ f(x) = g(x)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors :

$$f = \underset{x_0}{o}(g) \text{ ou } f(x) = \underset{x_0}{o}(g(x)).$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note $f = o(g)$ ou $f(x) = o\,(g(x))$ et on lit « f égale petit o de g » ou « f est un petit o de g ».

Propriété 11.25 (Carac. de la négligeabilité)

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point de l'ensemble D ou une borne de l'ensemble D. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $f = \underset{x_0}{o}(g)$.

ii) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage $V(x_0)$ de x_0 tel que

$$\forall x \in V(x_0), |f(x)| \leq \epsilon\, |g(x)|\, .$$

Propriété 11.26 (Fonctions négligeables : caractérisation)

S'il existe un voisinage de x_0 tel que pour tout x de V_{x_0}, $g(x) \neq 0$ alors :

$$f = \underset{x_0}{o}(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

En particulier :

$$f = \underset{x_0}{o}(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Propriété 11.27 (Exemples fondamentaux de négligeabilité)

Soient α et β deux réels fixés tels que $0 < \alpha < \beta$.
$(-)$

$$|x|^\beta = \underset{0}{o}(|x|^\alpha).$$

On retient « qu'au voisinage de 0 la plus petite puissance l'emporte ».

$(-)$ Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$x^\alpha = \underset{+\infty}{o}(x^\beta).$$

On retient « qu'au voisinage de $+\infty$ la plus grande puissance l'emporte ». (Il en est de même en $-\infty$.)

$(-)$ Soient α et β deux réels fixés strictement positifs, on a alors :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha \mathrm{e}^x = 0$, ce qui entraîne :

$$\ln(x) = \underset{+\infty}{o}(x^\alpha) \text{ et } x^\alpha = \underset{+\infty}{o}(\mathrm{e}^x),$$

et plus généralement :

$$\ln^\beta(x) = \underset{+\infty}{o}(x^\alpha) \text{ , } x^\alpha = \underset{+\infty}{o}\left(\mathrm{e}^{\beta x}\right) \text{ et } \mathrm{e}^{-\alpha x} = \underset{+\infty}{o}\left(x^{-\beta}\right).$$

On retient « qu'en $+\infty$ toute puissance strictement positive de $\ln(x)$ est négligeable devant toute puissance strictement positive de x, qui est elle-même négligeable devant toute puissance strictement positive de e^x ».

Il en découle aussi :

$$\mathrm{e}^x = \underset{-\infty}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),$$

$$\ln(x) = \underset{0}{o}\left(\frac{1}{x}\right),$$

et plus généralement :

$$\ln(|x|) = \underset{0}{o}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right).$$

Propriété 11.28 (Fonctions négligeables et opérations)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On considère les fonctions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 et h définies sur un même ensemble D et l'on étudie la négligeabilité au voisinage de x_0.
(−) Si $f = \underset{x_0}{o}(g)$ et $g = \underset{x_0}{o}(h)$ alors $f = \underset{x_0}{o}(h)$.
(−) Si $f = \underset{x_0}{o}(g)$ et $k \in \mathbb{R}^*$, alors $kf = \underset{x_0}{o}(kg)$, $kf = \underset{x_0}{o}(g)$, $f = \underset{x_0}{o}(kg)$.
(−) Si $f = \underset{x_0}{o}(g)$, alors $|f| = \underset{x_0}{o}(|g|)$.
(−) Si $f = \underset{x_0}{o}(g)$ et si f et g ne s'annulent pas sur V_{x_0}, alors $\dfrac{1}{g} = \underset{x_0}{o}\left(\dfrac{1}{f}\right)$.
(−) Si $f_1 = \underset{x_0}{o}(g_1)$ et si $f_2 = \underset{x_0}{o}(g_2)$, alors $f_1f_2 = \underset{x_0}{o}(g_1g_2)$.
(−) Si $f = \underset{x_0}{o}(g)$ et si $p \in \mathbb{N}^*$, alors $f^p = \underset{x_0}{o}(g^p)$.
(−) Plus généralement, si les fonctions f et g sont positives sur un voisinage de x_0, si $f = \underset{x_0}{o}(g)$ et si $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, alors $f^\alpha = \underset{x_0}{o}(g^\alpha)$.
(−) En particulier, si les fonctions f et g sont positives sur un voisinage de x_0 et si $f = \underset{x_0}{o}(g)$, alors $\sqrt{f} = \underset{x_0}{o}(\sqrt{g})$.
(−) Si $f_1 = \underset{x_0}{o}(g)$ et si $f_2 = \underset{x_0}{o}(g)$, alors $f_1 + f_2 = \underset{x_0}{o}(g)$.

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $f = \underset{x_0}{o}(g)$ et si u est une fonction définie sur un ensemble D_u telle que $u(D_u) \subset D$ et $\lim\limits_{t \to t_0} u(t) = x_0$, alors $f \circ u = \underset{t_0}{o}(g \circ u)$.

✓ Cette dernière propriété permet d'effectuer des ≪ changements de variable ≫ dans une relation de négligeabilité.

2.3 Fonctions équivalentes

Définition 11.29 (Fonctions équivalentes)

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D.
Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point de l'ensemble D ou une borne de D.
On dit que la fonction f est équivalente à la fonction g au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, s'il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 et une fonction réelle r, définie sur V_{x_0} tels que :

$$\forall x \in V_{x_0},\ f(x) = g(x)r(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} r(x) = 1.$$

On note alors : $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et on lit ≪ f est équivalent à g au voisinage de x_0 ≫. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note simplement $f \sim g$ ou $f(x) \sim g(x)$.

✓ Un équivalent n'est vrai qu'au voisinage de x_0, c'est-à-dire localement. On ne peut pas remplacer une fonction sur un intervalle quelconque par son équivalent en x_0.

Propriété 11.30 (Fonctions équivalentes : caractérisation)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D. On étudie l'équivalence au voisinage de x_0.
Si pour tout x de V_{x_0}, $g(x) \neq 0$ alors :

$$f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Propriété 11.31 (cas particuliers)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D. On étudie l'équivalence au voisinage du point $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ qui est un point de D ou une borne de D.
(−) $f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f - g = \underset{x_0}{o}(g) \Longleftrightarrow f = g + \underset{x_0}{o}(g)$.
(−) $f + \underset{x_0}{o}(f) \underset{x_0}{\sim} f$.
(−) $f \underset{x_0}{\sim} g \Rightarrow \underset{x_0}{o}(f) = \underset{x_0}{o}(g)$.
(−) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si l'une des deux fonctions possède une limite finie ou infinie en x_0, alors l'autre fonction admet la même limite en x_0.
(−) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$ alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} L$ au voisinage de x_0.
(−) Si les fonctions f et g sont de même signe au voisinage de x_0, et si f ne s'annule pas au voisinage de x_0, alors il en est de même pour la fonction g.

Propriété 11.32 (Fonctions équivalentes et opérations)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On considère des fonctions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 et h définies sur un même ensemble D. On étudie l'équivalence au voisinage du point $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ qui est un point de D ou une borne de D.

(−) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$, alors $f \underset{x_0}{\sim} h$.
(−) Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et si $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$.
(−) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $p \in \mathbb{N}$ alors $f^p \underset{x_0}{\sim} g^p$.
(−) Plus généralement, si les fonctions f et g sont positives au voisinage de x_0, si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, alors $f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$.
(−) En particulier, si les fonctions f et g sont positives au voisinage de x_0 et si $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors $\sqrt{f} \underset{x_0}{\sim} \sqrt{g}$.
(−) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si f et g ne s'annulent pas sur V_{x_0}, alors $\dfrac{1}{g} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{f}$.

Soient $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

(−) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si u est une fonction définie sur un ensemble D_u telle que $u(D_u) \subset D$ et $\lim\limits_{t \to t_0} u(t) = x_0$, alors : $f \circ u \underset{t_0}{\sim} g \circ u$.

✓ Cette dernière propriété permet d'effectuer des « changements de variable » dans les relations d'équivalence .

✓ Il n'existe pas dans le cours de propriété permettant d'ajouter ou de composer des équivalents.

✓ On n'écrit jamais $f(x) \sim 0$, sauf si la fonction f est égale à la fonction nulle sur un voisinage de x_0. En général, l'élève qui écrit $f(x) \sim 0$ a commis l'erreur d'ajouter des équivalents.

Propriété 11.33 (équivalent d'ordre 1)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit f est une fonction définie sur un voisinage de x_0. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors :

$$f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0).$$

preuve:

Propriété 11.34 (Équivalents classiques)

(−) Logarithmes et exponentielles

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$$
$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x,$$

c'est-à-dire :

$$\ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1.$$

(−) Puissances
Pour tout réel α (α indépendant de x) :

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x.$$

En particulier :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} - 1 =& (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x. \\
\sqrt{1-x} - 1 =& (1-x)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x. \\
\frac{1}{1+x} - 1 =& (1+x)^{-1} - 1 \underset{0}{\sim} -x. \\
\frac{1}{1-x} - 1 =& (1-x)^{-1} - 1 \underset{0}{\sim} x. \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 =& (1+x)^{-\frac{1}{2}} - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x.
\end{aligned}$$

(−) Polynômes
Tout polynôme non nul est équivalent à son monôme non nul de plus haut degré au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.
Tout polynôme non nul est équivalent à son monôme non nul de plus bas degré au voisinage de 0.
(−) Équivalents classiques de trigonométrie circulaire :

$$\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}, \qquad \sin(x) \underset{0}{\sim} x, \quad \tan(x) \underset{0}{\sim} x,$$
$$\arcsin(x) \underset{0}{\sim} x, \qquad \arctan(x) \underset{0}{\sim} x.$$

(−) Équivalents classiques de trigonométrie hyperbolique :

$$\cosh(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}, \quad \sinh(x) \underset{0}{\sim} x, \quad \tanh(x) \underset{0}{\sim} x.$$

Ptitexo: *Déterminer les limites suivantes :*

$$\frac{\ln(1+\tan(x))}{\tan(2x)} \text{ en } 0, \quad (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}} \text{ en } 0, \quad \left(\ln(1+e^{-x})\right)^{\frac{1}{x}} \text{ en } +\infty.$$

3 Rappels sur les branches infinies

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$. On dit que leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont asymptotes l'une de l'autre.
On peut connaître l'allure de la courbe représentative d'une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ en utilisant le plan d'étude suivant :

1) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$
Dans ce cas, la droite d'équation $y = a$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

a) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$
La courbe $\mathcal{C}_f$ présente au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique d'axe $(0x)$.
Exemples : $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

b) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$
La courbe $\mathcal{C}_f$ présente au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction $(0y)$.
Exemples : $x \mapsto \exp(x)$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$.

c) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ **avec** $(a \in \mathbb{R}_*^+)$

i) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$
Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$. La position de la courbe par rapport à l'asymptote est alors donnée par le signe de $f(x) - (ax + b)$.
Exemples : $x \mapsto 3x + 2 - \mathrm{e}^{-x}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$, $x \mapsto \dfrac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1}$.

ii) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = +\infty$
Alors on dit que $\mathcal{C}_f$ présente une branche parabolique de direction donnée par la droite d'équation $y = ax$.
Exemples : $x \mapsto x + 2\sqrt{x}$, $x \mapsto 2x + \ln(x)$.

iii) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = -\infty$
Alors on dit que $\mathcal{C}_f$ présente une branche parabolique de direction donnée par la droite d'équation $y = ax$.
Exemples : $x \mapsto 3x - 2\sqrt{x}$, $x \mapsto 2x - \ln(x)$.

iv) Si $f(x) - ax$ **n'admet pas de limite en** $+\infty$
Alors, on dit que $y = ax$ est une direction asymptotique.
Exemple : $x \mapsto 3x + \sin(x)\ln(x)$.

On adapte sans peine ce schéma d'étude à l'étude des branches infinies au voisinage de $-\infty$.

4 Des exercices classiques pour finir

Exercice 11.3 Exemple de Développement asymptotique de suite implicite

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto x^n + 9x^2 - 4$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ n'admet qu'une seule solution strictement positive, on la note u_n.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0, 1[$.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, calculer sa limite l.

4) Montrer qu'il existe deux constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q \in]-1, 1[$ telles que
$u_n = l + \alpha q^n + o_{+\infty}(q^n)$.

Exercice 11.4 Logarithmes et exponentielles d'équivalents.

On sait qu'il est en général rigoureusement interdit de prendre le logarithme ou l'exponentielle d'un équivalent. Le présent exercice a pour but d'expliquer comment obtenir un équivalent d'une expression du type $\ln(u)$ ou $\exp(u)$ lorsqu'on dispose d'un équivalent $u \sim v$ au voisinage du point considéré.

1) Donner un équivalent en $+\infty$ de $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, $\ln(1 + e^x)$ et $\ln(1 + x^2)$, puis en 0 de $\ln(1 + \ln(1 + x))$.
On retient donc :
Lorsque l'on recherche un équivalent d'une expression du type $\ln(u)$*, et que l'on dispose d'un équivalent $u \sim v$ de u avec une fonction plus simple v qui admet une limite finie, ou tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et qui n'est pas équivalente à* 0*. Deux cas peuvent alors se présenter :*

Premier cas : v tend vers 1
Dans ce cas, on utilise l'équivalent connu $\ln(1 + x) \sim_{x\mapsto 0} x$*. On écrit* $\ln(u) = \ln(1 + (v - 1)) \sim (v - 1)$*. Ce qui est possible car $v - 1$ tend vers* 0*.*
Second cas : v ne tend pas vers 1.
Dans ce cas, on écrit $\ln(u) = \ln(v\frac{u}{v}) = \ln(v) + \ln(\frac{u}{v})$*. (Ce qui est possible car* $\ln(u)$ *et* $\ln(v)$ *existent donc $v > 0$ et $\frac{u}{v} > 0$ au voisinage du point où on recherche l'équivalent). On observe ensuite que* $\ln\left(\frac{u}{v}\right)$ *est négligeable devant* $\ln(v)$ *: $\frac{u}{v}$ tend vers* 1 *par définition d'un équivalent et* $\ln(v)$ *ne tend pas vers* 0*, car v tend vers une limite différente de* 1*. On obtient donc* $\ln(u) \sim \ln(v)$*. C'est à dire que dans ce cas précis on a pu prendre le* ln *d'un équivalent.*

2) Parmi les équivalents suivants lesquels sont vrais ? $\exp\left(x^2 + x\right) \sim_{+\infty} \exp(x^2)$, $\exp(x + x^2) \sim_0 \exp(x)$, $\exp\left(x + \dfrac{1}{x}\right) \sim_0 \exp(x)$, $\exp\left(x + \dfrac{1}{x}\right) \underset{0}{\sim} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$? .
On retient donc :
Si u et v sont deux fonctions définies au voisinage de a (avec $a \in \mathbb{R}$, ou $a = +\infty$, $a = -\infty$), telles que $u - v = o_a(1)$, alors $\exp(u) \sim_a \exp(v)$*.*
On remarque que si $u \sim_a v$, alors la condition $u - v = o_a(1)$ n'est pas forcément remplie....

Chapitre 12 - Dérivabilité

Je compterai toujours, pour ma part, au nombre des heures les plus douces, les plus heureuses de ma vie, celles où j'ai pu saisir dans l'espace et étudier sans trêve quelques-uns de ces êtres géométriques qui flottent en quelque sorte autour de nous.

Gaston Darboux.

1 Nombre dérivé en un point, tangente

1.1 Définitions et généralités

Définition 12.1 (Taux d'accroissement)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Soient a et b deux réels appartenant à I si $a \neq b$, on appelle taux d'accroissement de f entre a et b, la quantité notée $\Delta_f(a,b)$ définie par $\Delta_f(a,b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

✓ Si $a < b$ et si f est croissante sur l'intervalle $[a,b]$, alors $\Delta_f(a,b) \geq 0$. Tandis que si f est décroissante, alors $\Delta_f(a,b) \leq 0$.

Définition 12.2 (Dérivabilité en un point, nombre dérivée)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Soit a un réel appartenant à I. On dit que la fonction f est **dérivable en** a si la fonction
$\delta_a : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a.
On appelle alors **nombre dérivée de** f **en** a, la quantité notée $f'(a)$ et définie par $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
On peut aussi noter $f'(a) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

✓ Si $f'(a)$ existe, alors on a $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Ptitexo: *On considère les fonctions* $f_1 : x \mapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *et* $f_2 : x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. *Montrer que ces deux fonctions sont prolongeables par continuité en* 0 *et étudier la dérivabilité en* 0 *de leur prolongement.*

Propriété 12.3 (Dérivable $\Longrightarrow$ continue)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Soit a un réel appartenant à I. Si la fonction f admet un nombre dérivée en a, alors la fonction f est continue en a.

preuve:

Propriété 12.4 (DL à l'ordre 1 et dérivabilité)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Soit a un réel appartenant à I. Soit $l \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La fonction f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

ii) $f(x) = f(a) + l(x-a) + \underset{a}{o}(x-a)$.

preuve:

Définition 12.5 (Dérivabilité à gauche, à droite)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Soit $a \in \mathbb{R}$, tel qu'il existe $\epsilon > 0$, $[a, a+\epsilon] \subset I$.
On dit que la fonction f est **dérivable à droite en** a si la fonction
$\delta_a : I \cap]a, a+\epsilon] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a à droite.
On appelle alors **nombre dérivée à droite de** f **en** a, la quantité notée $f'_d(a)$ et définie par $f'_d(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Soit $a \in \mathbb{R}$, tel qu'il existe $\epsilon > 0$, $[a-\epsilon, a] \subset I$.
On dit que la fonction f est **dérivable à gauche en** a si la fonction
$\delta_a : I \cap [a-\epsilon, a[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a à gauche.
On appelle alors **nombre dérivée à gauche de** f **en** a, la quantité notée $f'_g(a)$ et définie par $f'_g(a) = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Ptitexo: *Étudier la dérivabilité, la dérivabilité à gauche et la dérivabilité à droite en* 0 *des fonctions* $x \mapsto |x|$ *et* $x \mapsto x\,|x|$.

Propriété 12.6 (Dérivable = dérivable à gauche et à droite)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Soit a un réel appartenant à l'intérieur de I. La fonction f est dérivable en a si et seulement si la fonction f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Définition 12.7 (Tangente)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Soit a un réel appartenant à l'intérieur de I. Si la fonction f admet un nombre dérivée en a, alors appelle **tangente** à la courbe représentative de f en a la droite d'équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Si la fonction f est continue en a et si : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, alors on appelle tangente (verticale) à la courbe représentative de f en a la droite d'équation $x = a$.

✓ Si la fonction f est simplement dérivable à droite ou à gauche en a, ou si $a = \inf(I)$ ou $a = \sup(I)$, alors on parle simplement de demi-tangentes.

Ptitexo: *Montrer que la fonction $f : x \longrightarrow \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Montrer qu'elle admet en 0 une demi-tangente verticale.*

Ptitexo: *Pour tout réel α, on note $f_\alpha : \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^\alpha$.*

1. *Pour quelles valeurs de α existe-t-il un prolongement par continuité de f_α en 0 ?*
2. *Pour les cas où ce prolongement existe, discuter de la dérivabilité de ce prolongement.*

Ptitexo: *Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert contenant a. Lorsque $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0 par valeurs supérieures, alors cette limite est appelée dérivée symétrique de f en a.*

1. *Montrer que si f est dérivable à droite et à gauche en a, alors elle admet une dérivée symétrique en a.*
2. *La réciproque est-elle vraie ?*

Exercice 12.1 **Autour de 0^0.**

Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^x$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

1.2 Opérations sur les nombres dérivés

Propriété 12.8 (Opérations sur les nombres dérivées)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a. Soient f et g deux fonctions définies sur I et dérivables en a.
$(-)$ Pour tout réel λ, la fonction $f + \lambda g$ est dérivable en a et $(f+\lambda g)'(a) = f'(a) + \lambda g'(a)$.
$(-)$ La fonction fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
$(-)$ Si la fonction f ne s'annule pas en a, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en a, et $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a) = -\dfrac{f'(a)}{(f(a))^2}$.
$(-)$ Si la fonction g ne s'annule pas en a, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a, et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

preuve:

✓ On dira bientôt que l'ensemble des fonctions dérivables en un réel a est un espace espace vectoriel stable par multiplication.

Propriété 12.9 (Composition de fonctions dérivables en a)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si la fonction f est dérivable en a et si la fonction g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a, et l'on a :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

preuve:

Propriété 12.10 (Nombre dérivée d'une bijection réciproque)

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection monotone continue entre deux intervalles I et J. On suppose que la fonction f est dérivable en a, et l'on pose $b = f(a)$.
$(-)$ Si $f'(a) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en b et l'on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

$(-)$ Si $f'(a) = 0$, alors la fonction f^{-1} n'est pas dérivable en b, mais son graphe admet néanmoins une tangente verticale au point d'abscisse b.

preuve:

Interprétation graphique : Dans un repère orthonormal les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Les tangentes respectives aux points $(a; f(a))$ et $(f(a); a)$ sont donc aussi symétriques par rapport à la première bissectrice et leurs pentes sont donc inverses l'une de l'autre.
Exemple : les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.

2 Fonctions dérivables sur un intervalle

Propriété 12.11 (Fonction dérivée)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{R}^I$. On dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I, si elle est dérivable en tout point de I. On appelle alors **fonction dérivée** la fonction $f' : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f'(x)$ qui à tout élément x de I associe le nombre dérivée de f en x.

Notation : On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

✓ On a $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et cette inclusion est stricte.

Ptitexo: *Déterminer toutes les applications dérivables de $\mathbb{R}_*^+$ vers $\mathbb{R}_*^+$ qui vérifient :*

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2, f(xy) = f(x)f(y).$$

Propriété 12.12 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ Soient f et g deux fonctions dérivables sur I.
$(-)$ Pour tout réel λ, la fonction $f+\lambda g$ est dérivable sur I et $(f+\lambda g)' = f' + \lambda g'$.
$(-)$ La fonction (fg) est dérivable en sur I et $(fg)' = f'g + gf'$.
$(-)$ Si la fonction f ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$.
$(-)$ Si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - gf'}{(g)^2}$.

✓ Nous dirons bientôt que l'ensemble $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel stable par multiplication.

Propriété 12.13 (Composition de fonctions dérivables)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. L'application $g \circ f$ est dérivable sur I, et l'on a :

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f.$$

Propriété 12.14 (Bijection réciproque)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective et dérivable de I vers J. Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$, alors f^{-1} est dérivable sur I et l'on a :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

3 Extremum local et point critique

Propriété 12.15 (Condition nécessaire d'extremum)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit a un point de l'intérieur de I. (C'est-à-dire un point qui n'est pas une borne de I). Soit $f \in \mathbb{R}^I$. Si la fonction f est dérivable en a et si elle admet en a un extremum local, alors $f'(a) = 0$.

preuve:

✓ Il n'y a pas de réciproque, par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ n'admet pas d'extremum en 0, pourtant sa dérivée en 0 est nulle. (On a un point d'inflexion en 0).

✓ La dérivabilité en 0 fait partie des hypothèses, par exemple, $x \mapsto |x|$ est minimale en 0, pourtant elle n'est pas dérivable en ce point.

✓ On ne peut utiliser ce théorème si a est une borne de l'intervalle, par exemple, la fonction $\mathrm{id} : [0,1] \longrightarrow [0,1],\ x \longmapsto x$ est maximale en 1, mais sa dérivée n'est pas nulle en ce point.

4 Théorèmes de Rolle et accroissements finis

4.1 Théorème de Rolle

Introduction cinématique : Si un mobile se déplace sur une droite et qu'il revient à son point de départ, alors sa vitesse instantanée s'annule au moins une fois (à l'endroit où il fait demi-tour).

Théorème 12.16 (de Rolle)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si la fonction f est continue sur $[a,b]$, dérivable en tout point de l'intervalle $]a,b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel $c \in]a,b[$, tel que $f'(c) = 0$.

preuve:

Interprétation géométrique : Ce théorème signifie qu'il existe alors un point de la courbe situé entre les points d'abscisses a et b qui admet une tangente horizontale.
Dessin :

✓ Il peut exister plusieurs points en lesquels le nombre dérivée de f est nul.

✓ La continuité de f sur $[a,b]$ est indispensable. Par exemple, si l'on considère l'application : $f : [0,1] \longrightarrow [0,1],\ x \longmapsto \left| \begin{array}{lll} x & \text{si} & x \in [0,1[\\ 0 & \text{si} & x = 1 \end{array} \right.$, alors on a bien $f(0) = f(1) = 0$ et f est dérivable sur $]0,1[$, pourtant la dérivée de f ne s'annule en aucun point de $]0,1[$.

Corollaire 12.17 (Zéros de la dérivée d'une fonc. à zéros multiples)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit p un entier naturel. Si la fonction f s'annule p fois sur l'intervalle I, alors sa dérivée s'annule au moins $p-1$ fois sur l'intervalle I.

preuve:

Exercice 12.2 **Polynômes scindés**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit P un polynôme à coefficient réels de degré n. Montrer que si P est scindé alors P' est encore scindé.

Exercice 12.3 **Théorème de Darboux**

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$.

1) On suppose que $f'(a)f'(b) < 0$. Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.

2) En déduire, qu'une dérivée possède toujours (sur un intervalle) la propriété des valeurs intermédiaires.

4.2 Accroissements finis

Introduction cinématique : Si l'on considère un mobile qui se déplace de manière rectiligne, et deux instants t_1 et t_2, alors il existe un moment où la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne entre t_1 et t_2.

Théorème 12.18 (Égalité des Accroissements finis)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si la fonction f est continue sur $[a, b]$, dérivable en tout point de l'intervalle $]a, b[$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$, tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

preuve:

Interprétation géométrique : Ce théorème signifie qu'il existe alors un point de la courbe situé entre les points d'abscisse a et ab qui admet une tangente parallèle à la droite (AB) avec $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.
Dessin :

Interprétation cinématique : Un mobile se déplaçant sur un axe entre deux instants t_1 et t_2 aura, à au moins un instant de son parcours, une vitesse instantanée égale à sa vitesse moyenne.

Ptitexo: *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant* $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$

1. *Montrer qu'il existe $B > 0$ tel que $\forall x \geq B$, $f'(x) \geq 1$.*
2. *Établir que* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Corollaire 12.19 (Inégalité des accroissements finis)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable en tout point de l'intervalle $]a, b[$.
$(-)$ S'il existe un réel M tel que $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) \leq M$, alors
$f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
$(-)$ S'il existe un réel m tel que $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) \geq m$, alors
$f(b) - f(a) \geq m(b - a)$.

preuve:

Ptitexo: *Montrer que* $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x + 1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$

Définition 12.20 (Fonction Lipschitzienne)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que la fonction f est **lipschitzienne de rapport** k (ou encore qu'elle est **k-lipschitzienne**) si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

Corollaire 12.21 (Inégalité des accroissements finis)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, dérivable en tout point de l'intervalle $]a, b[$. Soit k un réel positif. Les assertions suivantes sont équivalentes :
$(-)$ $\forall x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq k$.
$(-)$ La fonction f est k-lipschitzienne.

preuve:

✓ Ce résultat implique que, si la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et si $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq k$ (le réel k désignant une constante indépendante de x), alors la fonction f est k-lipschitzienne sur l'intervalle I.

Exercice 12.4 **Fonctions lipschitziennes**

1) Les fonctions $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, $x \longmapsto x^2$, $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \longmapsto x^2$, $a : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$, $x \longmapsto |x|$ et $c : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ sont-elles lipschitziennes ?

2) a) Montrer que toute fonction lipschitzienne est continue.

b) La réciproque est-elle vraie ?

3) Est-ce que « lipschitzienne » implique « dérivable » ?
Est-ce que « dérivable » implique « lipschitzienne » ?

Exercice 12.5 **Suite récurrente associée à une contraction**

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est une **contraction** de l'intervalle I si elle est lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$.

1) Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. Soit b un réel tel que $b > \sqrt{a}$. On considère la suite u définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = b$ où $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[$.

b) Montrer que f est une contraction de l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

2) Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow I$ une contraction de l'intervalle I.

a) Montrer que la fonction f admet un unique point fixe.

b) Montrer que toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ récurrente de la forme $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.

4.3 Application : Monotonie et dérivabilité

Propriété 12.22 (Carac. des fonctions (strictement) croissantes)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, dérivable en tout point de l'intervalle $]a, b[$.
$(-)$ Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La fonction f est croissante sur $[a, b]$.
ii) $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$.

$(-)$ Si $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur $[a, b]$.

preuve:

✓ La réciproque du deuxième résultat n'est pas vraie en général, pensons à la fonction $x \mapsto x^3$.

En appliquant la propriété précédente à $-f$, on obtient le résultat analogue pour les fonctions décroissantes :

Propriété 12.23 (Carac. des fonctions (strictement) décroissantes)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, dérivable en tout point de l'intervalle $]a, b[$.
$(-)$ Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La fonction f est décroissante sur $[a, b]$.
ii) $\forall x \in]a, b[, f'(x)_{\leq} 0$.

$(-)$ Si $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur $[a, b]$.

Comme les fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes sont les fonctions constantes, on a :

Propriété 12.24 (Caractérisation des fonctions constantes)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, dérivable en tout point de l'intervalle $]a, b[$.
$(-)$ Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La fonction f est constante sur $[a, b]$.
ii) $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$.

Ce qui se généralise facilement au cas d'un intervalle quelconque :

Propriété 12.25 (Caractérisation des fonctions constantes)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction f est constante si et seulement si $f' = \tilde{0}$.

Propriété 12.26 ((Stricte) monotonie des fonc. dér. sur un intervalle)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable sur I.
$(-)$ Si $f' \geq 0$, alors f est croissante sur I.
$(-)$ f est strictement croissante sur I
$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in I, f'(x) \geq 0 \\ f' \text{n'est nulle sur aucun intervalle}]\alpha;\beta[\subset I \end{cases}$
$(-)$ Si $f' \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
$(-)$ f est strictement décroissante sur I
$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in I, f'(x) \leq 0 \\ f' \text{n'est nulle sur aucun intervalle}]\alpha;\beta[\subset I \end{cases}$

Exemples :

1. La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. La fonctions $x \mapsto \exp\left(x^5\right)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   Ptitexo: *L'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x + \sin(x)$ est-elle strictement croissante sur $\mathbb{R}$?*

4.4 Théorème limite de la dérivée

Théorème 12.27 (Limite de la dérivée)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I, dérivable sur $I \cap]-\infty, a[$ et $I \cap]a, +\infty[$.
$(-)$ Si $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f'(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ et la courbe représentative de f admet alors une tangente verticale en a.
$(-)$ Si $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f'(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ et la courbe représentative de f admet alors une tangente verticale en a.
$(-)$ Si il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$. La fonction f' est donc continue en a. La courbe représentative de f admet alors une tangente de pente égale à $f'(a)$ en a.

Exemple : la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$, sa courbe représentative admet une tangente verticale en 0.

Ptitexo: *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ est dérivable en 0 et que sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$.*

Ptitexo: *Déterminer le domaine de définition D de la fonction f définie par $f : x \mapsto \arcsin(1 - x^3)$. Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.*

Ptitexo: *Montrer que la fonction* sinc : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ *se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Dans tout ce paragraphe I et J désignent des intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$.

5.1 Définitions et généralités

Définition 12.28 (Dérivée n-ème)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On pose $f^{(0)} = f$ et l'on définit par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la **fonction dérivée n-ème de f** comme la dérivée, si elle existe, de la fonction $f^{(n-1)}$.

Notation : On note aussi $f^{(n)} = D^n(f) = \dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

✓ La dérivée d'une fonction dérivable n'est pas toujours continue. Pensons par exemple, à la fonction :

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \left| \begin{array}{lll} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} & x \neq 0 \\ \\ \quad 0 & \text{si} & x = 0 \end{array} \right. .$$

Définition 12.29 (Fonction de classe $\mathcal{C}^n$)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
$(-)$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que la fonction f est de **classe $\mathcal{C}^n$** si elle est admet une dérivée n-ème et si la fonction $f^{(n)}$ est continue.
$(-)$ On dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

Notation : Si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et à valeurs réelles.
On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et à valeurs réelles.

✓ On a donc $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

✓ On a : $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

✓ On sait que si une fonction est dérivable alors elle est continue, donc : $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Exemples :

1. Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Les fonction ln et exp sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Ptitexo: *Montrer que les fonctions* sin *et* cos *sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et expliciter pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $\sin^{(n)}$ *et* $\cos^{(n)}$.

Lemme 12.30 ($f^{(p+q)}$)

Soient p et q deux entiers naturels. Soit $f \in \mathbb{R}^I$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{p+q}$ si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^p$ et la fonction $f^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^q$.
On a alors $f^{(p+q)} = \left(f^{(p)}\right)^{(q)}$.

5.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

Théorème 12.31 (Linéarité)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et :

$$(f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)}.$$

preuve:

Théorème 12.32 (Formule de Leibniz)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. La fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

preuve:

Ptitexo: *Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de la fonction $f : x \mapsto (3x^2 - 1)\mathrm{e}^{2x}$.*

Ptitexo: *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée n-ème de l'application $f_n : x \mapsto x^{n-1}\ln(x)$.*

Ptitexo: *Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de la fonction $g : x \longrightarrow \dfrac{x^3}{(1+x)}$.*

Ptitexo: *Calculer la dérivée $n-$ième de $x^n\,(1+x)^n$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.*

✓ On dira bientôt que $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel stable par multiplication.

✓ On en déduit aisément que l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire et multiplication.

Exercice 12.6

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.
Soit $f_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \longmapsto x^a$. Pour quelles valeurs de n la fonction f_a est-elle de classe $\mathcal{C}^n$?

Théorème 12.33 (Composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. La fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I

preuve:

Corollaire 12.34 (Composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. La fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Propriété 12.35 (Quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. Si la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

preuve:

Propriété 12.36 (Quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Exemple :

1. Une fonction rationnelle définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des intervalles où son dénominateur ne s'annule pas.

Propriété 12.37 (Réciproque de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective de classe $\mathcal{C}^n$ de I vers J. Si la fonction f' ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

preuve:

Propriété 12.38 (Réciproque de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I vers J. Si la fonction f' ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

✓ Cette CNS pour savoir si une fonction réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ est encore de classe $\mathcal{C}^n$ ne porte que sur la dérivée première de la fonction.

Exemples :

1. Les fonctions arccos et arcsin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

2. La fonction arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12.7 **Égalité de Taylor-Lagrange**

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère dans cet exercice une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. Pour $A \in \mathbb{R}$, on note :

$$g_A : x \longrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) \right) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

1) Justifier qu'il existe A tel que $g_A(b) = g_A(a)$.

2) En déduire par application du théorème de Rolle, qu'il existe un réel $c \in]a, b[$, tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

5.3 Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

Théorème 12.39 (Fonction de classe $\mathcal{C}^n$ par prolongement)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur les intervalles $I \cap] - \infty, a[$ et $I \cap]a, +\infty[$. Si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la fonction $f^{(k)}$ admet une limite finie α_k lorsque x tend vers a, alors la fonction f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. De plus, ce prolongement est unique, s'il est noté $\tilde{f}$, alors on a :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \left(\tilde{f}\right)^{(k)}(a) = \alpha_k.$$

preuve:

Corollaire 12.40 (Fonction de classe $\mathcal{C}^n$ par prolongement)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^n$ sur les intervalles $I \cap] - \infty, a[$ et $I \cap]a, +\infty[$. Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction $f^{(k)}(x)$ admet une limite finie α_k lorsque x tend vers a, alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. De plus, on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], (f)^{(k)}(a) = \alpha_k.$$

Exercice 12.8 **Exemple de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact**

On note dans tout cet exercice la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \left| \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x \leq 0 \\ \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si} & x > 0 \end{array} \right. .$$

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que :

$$\forall x > 0, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x).$$

2) En déduire que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Exhiber une fonction $f_{a,b}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash]a,b[, f(x) = 0$$
$$\forall x \in]a,b[, f(x) > 0.$$

---

6 Dérivabilité des fonctions à valeurs complexes

6.1 Définition

Définition 12.41 (Dérivabilité en un point, nombre dérivée)

Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle I. Soit a un réel appartenant à I. On dit que la fonction f est **dérivable en** a si la fonction $\delta_a : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a. On appelle alors **nombre dérivée de** f **en** a, la quantité notée $f'(a)$ et définie par $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
On peut aussi noter $f'(a) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

✓ Si $f'(a)$ existe, alors on a $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Propriété 12.42 (Carac. par les parties réelles et imaginaires)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Soit $a \in I$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si les fonctions à valeurs réelles $\mathcal{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(f)$ sont dérivables en a. Dans ce cas, on a :

$$f'(a) = \left(\mathcal{R}\mathrm{e}(f)\right)'(a) + \mathrm{i}\left(\mathcal{I}\mathrm{m}(f)\right)'(a).$$

Propriété 12.43 (Dérivable $\Longrightarrow$ continue)

Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle I. Soit a un réel appartenant à I. Si la fonction f admet un nombre dérivée en a, alors la fonction f est continue en a.

Propriété 12.44 (Fonction dérivée)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{C}^I$. On dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I, si elle est dérivable en tout point de I. On appelle alors **fonction dérivée** la fonction $f' : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f'(x)$ qui à tout élément x de I associe le nombre dérivée de f en x.

Notation : On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$, l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs complexes.

Propriété 12.45 (Carac. par les parties réelles et imaginaires)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. La fonction f est dérivable sur I si et seulement si les fonctions à valeurs réelles $\mathcal{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(f)$ sont dérivables sur I. Dans ce cas, on a :

$$f' = (\mathcal{R}\mathrm{e}(f))' + \mathrm{i}\,(\mathcal{I}\mathrm{m}(f))'.$$

6.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 12.46 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions à valeurs complexes dérivables sur I.

$(-)$ Pour tout complexe λ, la fonction $f + \lambda g$ est dérivable sur I et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$.

$(-)$ La fonction (fg) est dérivable en sur I et $(fg)' = f'g + gf'$.

$(-)$ Si la fonction f ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur I, et $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$.

$(-)$ Si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I, et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - gf'}{(g)^2}$.

$(-)$ La fonction $\overline{f}$ est dérivable sur I et l'on a $\overline{f}' = \overline{f'}$.

✓ Nous dirons bientôt que l'ensemble $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel stable par multiplication.

Exercice 12.9 **Régularité de $|f|$**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable en a.

1) Montrer que la fonction $|f|^2$ est dérivable en a.

2) La fonction $|f|$ est-elle nécessairement dérivable en a ?

3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $|f|$ soit dérivable en a.

4) Montrer que si f ne s'annule pas en a, alors la fonction $\ln \circ |f|$ est dérivable en a et donner une expression du nombre dérivée en a de cette fonction.

Propriété 12.47 (Composition de fonctions dérivables)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables. L'application $g \circ f$ est dérivable sur I, et l'on a :

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f.$$

✓ On peut définir de même pour les fonctions à valeurs complexes, les ensembles des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et l'on conserve les mêmes formules que pour les fonctions à valeurs réelles.

Ptitexo: *Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t+a}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Expliciter pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\varphi^{(n)}$.*

6.3 Caractérisation des fonctions constantes

On ne peut évidemment parler de fonctions monotones à valeurs complexes, on conserve néanmoins la caractérisation des fonctions constantes suivantes :

Propriété 12.48 (Caractérisation des fonctions constantes)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable. La fonction f est constante si et seulement si $f' = \tilde{0}$.

6.4 Inégalité des accroissements finis

Introduction cinématique : Si un solide ce déplace dans le plan, il est possible qu'il revienne au point de départ sans que sa vitesse instantanée ne s'annule. Il suffit par exemple qu'il effectue un mouvement circulaire. On comprend donc que le théorème de Rolle n'est plus valable pour des fonctions à valeurs complexes.
Néanmoins, si la vitesse instantanée du mobile n'est jamais supérieure à $v \in \mathbb{R}^+$, alors à l'instant t, le mobile ne peut-être à l'extérieur du cercle de centre la position du mobile à l'instant 0 et de rayon vt. Si l'on sait majorer $|f'|$, il semble donc possible de majorer $|f|$. En effet, on dispose du théorème suivant (que nous justifierons dans le chapitre intégration) :

Théorème 12.49 (Accroissements finis)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. S'il existe une constante réelle M telle que $\forall t \in I$, $|f'(t)| \leq M$, alors :

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|\,.$$

Chapitre 13 - Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

(Certaines parties uniquement M.P.)

Les nombres sont le plus haut degré de la connaissance. Le nombre est la connaissance même. *Platon*.

0 Propriétés « élémentaires de $\mathbb{Z}$ ».

Rappelons pour commencer quelques propriétés de l'ensemble totalement ordonné $(\mathbb{Z}, \leq)$:

i) Toute partie non vide et majorée admet un plus grand élément.
ii) Toute partie non vide et minorée admet un plus petit élément.
iii) Les parties finies de $\mathbb{Z}$ sont les parties bornées de $\mathbb{Z}$.

Rappelons quelques propriétés de l'ensemble (anneau) $(\mathbb{Z}, +, \times)$:

i) $+$ est commutative, associative et tout élément admet un opposé.
ii) $\times$ est commutative, distributive sur $+$, associative.
iii) L'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est intègre c'est-à-dire que pour tout $a \neq 0$,

$$ax = ay \implies x = y.$$

Citons enfin, un résultat utile (en particulier en informatique) sur les suites d'entiers (considérées comme cas particuliers de suites de réels).

Propriété 13.1 (Suite d'entiers convergente)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite d'entiers. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors est stationnaire, c'est-à-dire qu'elle est constante à partir d'un certain rang.

preuve:

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1.1 Relation de divisibilité

Définition 13.2 (Diviseur, multiple)

Soient m et n deux entiers. On dit que m **divise** n (ou encore que n est un **multiple** de m) (ou encore que m est un **diviseur** de n) lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = km$. On note alors $m \,|n$.

Notation : On choisira de noter $D(n)$ l'ensemble des diviseurs de n et l'ensemble des multiples de l'entier n est par définition l'ensemble $n\mathbb{Z} = \{\, kn \mid k \in \mathbb{Z}\,\}$.

Exemples :

1. $D(12) = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
2. Tout entier divise 0.
3. 0 est le seul multiple de 0.
4. 1 et -1 divisent tout entier.
5. Tout entier est un diviseur de lui-même.

6. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $D(k) = D(-k)$.

✓ Si $m \mid n$ et si $m \neq 0$, il existe un unique entier relatif k tel que $n = km$. On note $k = \dfrac{n}{m}$.

Propriété 13.3 (opérations)

Soient d, a et b trois entiers relatifs.
(−) Si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, $d \mid (au + bv)$.
(−) Pour tout entier c non nul, $d \mid a \iff dc \mid ac$.

preuve:

Propriété 13.4 (entiers associés)

Soient m et n deux entiers relatifs. Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) $m \mid n$ et $n \mid m$.
ii) $m = n$ ou $m = -n$.
On dit alors que n et m sont **associés** et l'on note souvent $n \backsim m$

preuve:

✓ En particulier, si $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, alors $m \mid n$ et $n \mid m$ implique $m = n$. Ce qui entraîne l'antisymétrie de la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$. La relation $\mid$ est donc une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. Mais ce n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$, puisque sur $\mathbb{Z}$, cette relation n'est plus antisymétrique.

1.2 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

Théorème 13.5 (De division Euclidienne dans $\mathbb{Z}$)

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ un couple d'entiers tels que $b \neq 0$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que :

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < |b|.$$

preuve:

Exemples :
$81 = 12 \times 6 + 9$; $9 < 12$ donc c'est la division euclidienne de 81 par 12 mais $9 \lneq 6$
Par contre $81 = 6 \times 13 + 3$ et $3 < 6$ est la division euclidienne de 81 par 6
On obtient : $-81 = 12 \times (-6) - 9$ mais $-9 > 0$ Par contre $-81 = 12 \times (-7) + 3$ est la division euclidienne de -81 par 12

Ptitexo: *Vérifier que si l'on travaille dans $\mathbb{Q}$, alors si $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, alors* $q = \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor$.

Exercice 13.1 **Sous-groupes de** $(\mathbb{Z},+)$

On dit qu'une partie A de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$, si elle contient 0 et est stable par addition et par passage à l'opposé, c'est-à-dire si :

$$(\mathcal{P}_1) \qquad 0 \in A,$$

$$(\mathcal{P}_2) \qquad \forall (a,b) \in A^2, a+b \in A,$$

$$(\mathcal{P}_3) \qquad \forall a \in A, -a \in A.$$

1) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z} = \{\, nk \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

2) Soit A un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$. On suppose que A n'est pas réduit à $\{0\}$.

a) Montrer que $A \cap \mathbb{N}^*$ admet un plus petit élément que l'on notera n.

b) Montrer que $A = n\mathbb{Z}$. Montrer que n est l'unique entier naturel qui vérifie cette propriété.

3) Caractériser alors l'ensemble des sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$.

2 PGCD et PPCM

2.1 PPCM

Propriété 13.6 (Définition du PPCM)

Soient m et n deux entiers relatifs. Il existe un unique entier **naturel** N tel que :
i) $n \,|N$ et $m \,|N$.
ii) $\forall k \in \mathbb{Z}$, si $m \,|k$ et $n \,|k$, alors $N \,|k$.

Si de plus m et n sont tous les deux non nuls, alors :

$$N = \min\left\{ a \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; m \,|a \quad \text{et} \quad n \,|a \right\}.$$

On appelle cet unique entier **PPCM** de m et n et on le note $m \vee n$ ou $\operatorname{ppcm}(m,n)$.

preuve:

Exemple : Pour $m = 12$ et $n = 30$ alors $m \vee n = 60$

✓ $\forall k \in \mathbb{Z}$, $k \vee 0 = 0 \vee k = 0$.

✓ $\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2, m \vee n = n \vee m$.

Les multiples communs à m et à n sont les multiples de $m \vee n$. Autrement dit, on a la propriété suivante (qui aurait pu tenir lieu de définition du PPCM :

Propriété 13.7 (Carac. ensembliste du PPCM)

Soient m et n deux entiers. Soit $d \in \mathbb{N}$. On a l'équivalence suivante :

$$m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad d = n \vee m.$$

preuve:

2.2 PGCD

Propriété 13.8 (Existence, unicité, et définition du PGCD)

Soient m et n deux entiers relatifs non tous les deux nuls. L'ensemble, $D(m) \cap D(n)$ des diviseurs communs à m et n admet un plus grand élément, on le note $m \wedge n$, ou $\operatorname{pgcd}(m, n)$, et on l'appelle **PGCD** des entiers m et n.
On convient que $\operatorname{pgcd}(0, 0) = 0$.

preuve:

Exemple : Pour $m = 12$ et $n = 30$ alors $m \wedge n = 6$

- ✓ $\forall k \in \mathbb{Z},\ k \wedge 0 = |k|$.
- ✓ $\forall k \in \mathbb{Z},\ k \wedge 1 = 1$.
- ✓ $\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, m \wedge n = n \wedge m = |n| \wedge |m|$.

Propriété 13.9 (Caractérisation ensembliste du PGCD)

Soient a et b sont deux entiers. Il existe un unique entier naturel d tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$.

preuve:

Propriété 13.10 (PGCD et division euclidienne)

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$. On note r le reste dans la division euclidienne de a par b, on a :

$$D(a) \cap D(b) = D(b) \cap D(r).$$

On a donc :

$$a \wedge b = b \wedge r.$$

preuve:

Propriété 13.11 (Caractérisation du PGCD)

Soient m et n deux entiers relatifs. Le PGCD de m et n est l'unique entier naturel d tel que :
i) $d\,|n$ et $d\,|m$.
ii) $\forall k \in \mathbb{Z}$, si $k\,|m$ et $k\,|n$, alors $k\,|d$.
C'est-à-dire que l'on a :

$$D(m) \cap D(n) = D(m \wedge n).$$

preuve:

Propriété 13.12 (Caractérisation du PGCD)

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ un couple d'entiers naturels. On a $(a \wedge b)\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

preuve:

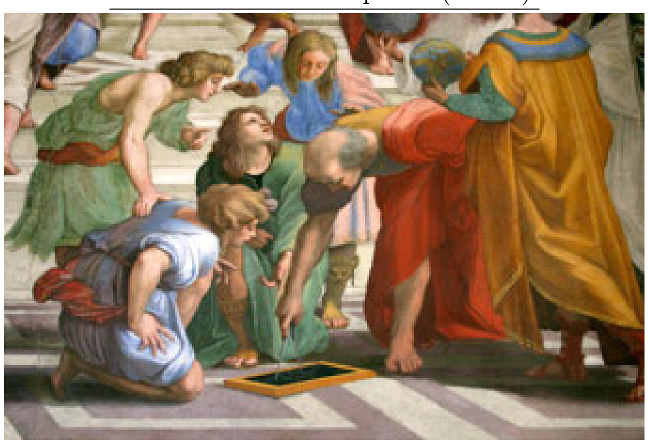
Propriété 13.13 (Homogénéité)

$\forall k \in \mathbb{N}$. Si $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, alors :

$$\operatorname{pgcd}(km, kn) = k\operatorname{pgcd}(m, n).$$

2.3 Algorithme d'Euclide

L'école d'Athènes. Raphaël. (Détail).



Corollaire 13.14 (Algorithme d'Euclide)

Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On pose $r_0 = a$ et $r_1 = b$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si r_n a été défini et est non nul, on définit r_{n+1} comme le reste dans la division euclidienne de r_{n-1} par r_n.
Alors, la suite de terme général r_n est une suite finie et la dernière valeur non nulle de cette suite est le PGCD de a et b.

preuve:

Ptitexo: *Calculer* $\operatorname{pgcd}(2015, 2225)$ *puis* $\operatorname{pgcd}(6468, 1547)$

2.4 Relation de Bézout : M.P.

Théorème 13.15 (Théorème de Bézout)

Soient a et b deux entiers. Il existe deux entiers u et v tels que :

$$au + bv = \operatorname{pgcd}(a, b).$$

preuve : (Constructive algorithme de Bézout étendu).
On peut reformuler le théorème de Bézout de la manière suivante :

Exercice 13.2

1) Déterminer $\operatorname{pgcd}(162, 207)$.

2) Déterminer deux entiers u et v tels que $162u + 207v = \operatorname{pgcd}(162, 207)$.

3 Entiers premiers entre eux : M.P.

3.1 Définition

Définition 13.16 (Entiers premiers entre eux)

Deux entiers m et n sont premiers entre eux si les seuls diviseurs communs à m et à n sont 1 et -1.

✓ Les entiers m et n sont premiers entre eux si et seulement si $\operatorname{pgcd}(m, n) = 1$.

3.2 Théorème de Bézout et applications

La caractérisation suivante des entiers premiers entre eux est due comme son nom ne l'indique pas à Claude-Gaspard Bachet, sieur de Méziriac (1581-1638 - Bourg-en-Bresse). Bézout a eu l'idée d'adapter ce théorème aux polynômes. Bachet est notamment auteur d'une traduction en latin de l'*Arithmetica* de Diophante parue en 1621. C'est dans un exemplaire de cette traduction que Fermat écrivit en marge sa célèbre note annonçant qu'il avait trouvé la démonstration de son dernier et fameux théorème. Il est l'auteur en 1612 d'un livre intitulé *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*, qui est un recueil de récréations mathématiques parmi lesquelles, on trouve le problème des maris jaloux : 3 couples doivent traverser une rivière, ils ont une seule barque à leur disposition, qui ne peut transporter que 2 personnes. Les maris sont jaloux et ne peuvent admettre que leur femme se retrouve seule en compagnie d'un autre homme. Comment faire traverser tous les couples ? Que se passe-t-il avec 4 couples ?

Propriété 13.17 (Théorème de Bézout)

Soient a et b deux entiers relatifs. Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) Les entiers a et b sont premiers entre eux.
ii) Il existe un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, tel que $au + bv = 1$.
iii) $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

preuve:

Propriété 13.18 (du PGCD)

Soient a et b deux entiers relatifs non tous les deux nuls. Si l'on note $\delta = \text{pgcd}(a, b)$, alors il existe un couple $(a', b') \in \mathbb{Z}^2$ d'entiers premiers entre eux tels que :

$$a = \delta a' \quad \text{et} \quad b = \delta b'.$$

preuve:

Propriété 13.19 (des entiers premiers entre eux)

Soient a, b et c trois entiers relatifs.
Si $a \wedge c = 1$ et $b \wedge c = 1$, alors $(ab) \wedge c = 1$.

preuve:

Corollaire 13.20 (familles d'entiers premiers entre eux)

Soient $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{Z}^m$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ deux familles d'entiers tels que $\forall (i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$, $a_i \wedge b_j = 1$. On a alors :

$$\left(\prod_{i=1}^{m} a_i \right) \wedge \left(\prod_{j=1}^{n} b_j \right) = 1.$$

preuve:

3.3 Lemme de Gauss

Propriété 13.21 (Lemme de Gauss)

Soient a, b et c trois entiers.
Si $a \wedge b = 1$ et si $a \,|bc$, alors $a \,|c$.

preuve:

Corollaire 13.22 (Produit du PGCD et du PPCM)

Soient a et b deux entiers non tous deux nuls. Notons $\delta = \text{pgcd}(a, b)$, $a' = \dfrac{a}{\delta}$ et $b' = \dfrac{b}{\delta}$. On a :

$$\text{pgcd}(a', b') = 1.$$

Si de plus, on suppose que a et b sont tous les deux positifs, alors :

$$\text{ppcm}(a, b) = a'b'\text{pgcd}(a, b) \quad \text{et} \quad ab = \text{ppcm}(a, b) \times \text{pgcd}(a, b).$$

preuve:

✓ Puisque, nous connaissons un algorithme (celui d'Euclide) pour le calcul du PGCD, ce corollaire nous fournit une méthode pratique pour calculer le PPCM de deux entiers.

Corollaire 13.23 (PPCM d'entiers premiers entre eux)

Soient a et b deux entiers naturels.

$$a \wedge b = 1 \iff a \vee b = ab.$$

preuve:

3.4 PGCD d'un nombre fini d'entiers

Propriété 13.24 (Définition du PGCD)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Z}^p$. Il existe un unique nombre entier naturel d tel que :

$$D(d) = \bigcap_{i=1}^{n} D(a_i).$$

On appelle cet entier naturel $PGCD$ des nombres $a_1, \ldots, a_p$, et on le note :

$$d = \operatorname{pgcd}(a_1, \ldots, a_p) = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p.$$

preuve:

Idée : récurrer.

Ptitexo: *Déterminer le* $\operatorname{pgcd}(15, 120, 36, 24, 105)$.

✓ Il découle de cette définition que $\forall n \in \mathbb{Z}, \operatorname{pgcd}(n) = |n|$.

✓ On a donc de manière évidente, pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = a_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge a_{\sigma(n)}$.

Ptitexo: *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

1. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer* $\operatorname{pgcd}(S_n, S_{n+1})$.

2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer* $S_n \wedge S_{n+1} \wedge S_{n+2}$.

Propriété 13.25 (Associativité du PGCD)

Soit $p \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ et $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Z}^p$. On a :

$$\operatorname{pgcd}(a_1, \ldots, a_p) = \operatorname{pgcd}(a_1, (\operatorname{pgcd}(a_2, \ldots, a_p))).$$

preuve:

Propriété 13.26 (Caractérisation du PGCD)

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Z}^p$. Soit $d \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) $\forall i \in [\![1, p]\!], d \,|\, a_i \quad$ et $\quad (\forall i \in [\![1, p]\!], n \,|\, a_i \implies n \,|\, d)$.
ii) $d = \text{pgcd}\,(a_1, \dots, a_p)$.

preuve:

Propriété 13.27 (Relation de Bézout)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Z}^p$. Il existe un p-uplet d'entiers relatifs $(u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{Z}^p$ tel que :

$$\text{pgcd}\,(a_1, \dots, a_p) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i.$$

preuve:

Idée : récurrer.

Propriété 13.28 (du PGCD)

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Z}^p$. Le nombre $\text{pgcd}\,(a_1, \dots, a_p)$ est l'unique entier naturel d tel que :

$$d\mathbb{Z} = a_1\mathbb{Z} + \cdots + a_p\mathbb{Z}.$$

preuve:

Définition 13.29 (Entiers p. entre eux)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Z}^p$. On dit que les entiers $a_1, \dots, a_p$ sont **premiers entre eux** (dans leur ensemble) si $\text{pgcd}\,(a_1, \dots, a_p) = 1$, c'est-à-dire si les seuls diviseurs communs à $a_1, \dots, a_p$ sont 1 et -1.

Définition 13.30 (Entiers deux à deux premiers entre eux)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Z}^p$. On dit que les entiers $a_1, \dots, a_p$ sont **deux à deux premiers entre eux** si $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]$, $i \neq j \implies \text{pgcd}\,(a_i, a_j) = 1$.

Exercice 13.3 **Exemples d'équation diophantienne**

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, les équations d'inconnue (x, y) :

$$(E_1) \quad 162x + 207y = 27.$$

$$(E_2) \quad 162x + 207y = 25.$$

$$(E_3) \quad 321x + 247y = 15.$$

4 Nombres premiers

Définition 13.31 (Nombre premier)

Un entier naturel est dit **premier** lorsqu'il admet exactement deux diviseurs positifs 1 et lui-même.

Exemples :

1. 1 n'est pas premier puisqu'il n'admet qu'un seul diviseur.
2. 0 n'est pas premier puisqu'il admet une infinité de diviseurs.
3. Les 10 premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

✓ On peut assez efficacement calculer la liste des nombres premiers inférieurs à un entier fixé en utilisant le crible d'Ératosthène. Mais la recherche de grands nombre premier reste très coûteuse mais très utile (cryptage, générateurs de nombres pseudo-aléatoires...) Découvert le 25 janvier 2013, le plus grand nombre premier connu est le nombre premier de Mersenne $2^{257885161} - 1$, qui comporte 17425170 chiffres en écriture décimale. Écrits les uns à la suite des autres, ses chiffres occuperaient plus de 4000 pages en police 12.

Ptitexo: *Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, et si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier. La réciproque est-elle vraie ?(Étudier $2^{23} - 1$)*

Ptitexo: *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe n entiers consécutifs non premiers.*

Propriété 13.32 (Caractérisation d'un nombre premier)

Soit a un entier et p un nombre premier. Alors $p \wedge a = 1$ ou $p \,|\, a$.

preuve:

✓ Si p_1 et p_2 sont deux nombres premiers distincts, alors ils sont premiers entre eux.

Euclide est un des plus grands mathématiciens de l'Antiquité et pourtant on ne connaît pas grand chose de sa vie. Il a probablement étudié à l'école d'Athènes fondée par Platon. Il a vécu à Alexandrie en Égypte. Dans la prestigieuse École d'Alexandrie, il dirige une équipe de mathématiciens qui participent à l'écriture de son oeuvre magistrale, *Les éléments* qui a servi de base à toute la géométrie pendant plus de 2000 ans. Après la Bible, c'est l'ouvrage qui possède le plus d'éditions. Elle est composée de 13 livres, qui traitent des figures géométriques, des polygones inscrits et circonscrits à un cercle, des proportions, de la géométrie dans l'espace ainsi que des nombres. Elle sera complétée plus tard notamment par Archimède. Dans *Les éléments*, on trouve en particulier les cinq postulats qui fondent les bases de la géométrie dite Euclidienne du plan.

Propriété 13.33 (Lemme d'Euclide)

Soient a et b deux entiers et p un nombre premier.
Si p divise ab, alors p divise a ou p divise b.

preuve:

Théorème 13.34 (théorème d'Euclide)

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.

preuve:

Exercice 13.4

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

✓ On notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Propriété 13.35 (Théorème de décomposition en facteurs premiers)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique suite finie de $N \in \mathbb{N}$ nombres premiers $(p_1, \dots, p_N)$ et un unique p-uplet $(a_1, \dots, a_N)$ d'entiers naturels non nuls, tels que

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_N \quad \text{et} \quad |n| = \prod_{k=1}^{N} p_k^{a_k}.$$

On note alors $a_k = v_{p_k}(n)$ et cet entier est appelé **valuation p-adique** de n.

preuve : **(M.P.)**

✓ Si p est un nombre premier qui ne divise pas n, alors on convient de noter $v_p(n) = 0$.

✓ On s'autorisera donc à écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$. Ce produit apparemment infini a bien un sens, puisqu'il ne comporte qu'un nombre fini de termes différents de 1.

Propriété 13.36 (Diviseurs et valuations)

Soient m et n deux entiers relatifs non nuls. On a :

$$m\,|n \iff \forall p \in \mathcal{P},\, v_p(m) \leq v_p(n).$$
$$m \wedge n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min(v_p(m), v_p(n))}.$$
$$m \vee n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max(v_p(m), v_p(n))}.$$

preuve:

Propriété 13.37 (corollaire)

Si n est un entier naturel composé alors il admet un diviseur premier p tel que $p \leqslant \sqrt{n}$.

Crible Ératosthène : faire la liste des nombres premiers inférieurs à un entier n donné.
Le principe est le suivant :
(−) On écrit tous les nombres entiers entre 2 et n.
(−) On entoure le nombre premier 2 et on raye (grise) tous les multiples de 2.
(−) On entoure le nombre premier 3 et on raye (grise) tous les multiples de 3.etc.
Lorsque l'algorithme s'arrête, tous les nombres qui n'ont pas été rayés (grisés) sont les nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Mais d'après la propriété précédente, pour vérifier qu'un entier est premier, il suffit de vérifier que n n'a aucun diviseur premier $p \leqslant \sqrt{n}$.

Exemple : $n = 919$ est-il premier ?
Comme $30^2 = 900$ et $31^2 = 961$, on a $30 < \sqrt{919} < 31$ et par conséquent, si 919 est composé, il doit admettre un diviseur premier $p \leqslant 30$.

	[2]	[3]	4	[5]	6	[7]	8	9	[10]
[11]	12	[13]	14	15	16	[17]	18	[19]	20
21	22	[23]	24	25	26	27	28	[29]	30

On doit vérifier s'il on a, parmi les nombres premiers $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ un diviseur de 919.
Ce n'est pas le cas pour chacun d'eux donc 919 est premier.

5 Nombres rationnels : M.P.

Passons sur la construction de $\mathbb{Q}$. Mais signalons la propriété essentielle suivante : $\forall r \in \mathbb{Q}, \exists (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, r = \dfrac{a}{b}$.

Définition 13.38 (Représentant)

On appelle **représentant** d'un nombre rationnel r tout couple (p, q) d'entiers relatifs, tels que $q \neq 0$ et $r = \dfrac{p}{q}$.

Propriété 13.39 (Écriture irréductible)

Soit $r \in \mathbb{Q}$ un nombre rationnel. Il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et que :

$$r = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad p \wedge q = 1.$$

Ce représentant est appelé **représentant irréductible** de r et l'écriture $r = \dfrac{p}{q}$ est appelée **écriture irréductible** de $\dfrac{p}{q}$.

preuve:

✓ Si (p, q) est le représentant irréductible d'un rationnel r, alors l'ensemble des représentants de r est l'ensemble
$\left\{ (kp, kq) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}^* \right\}$.

Rappel : pour trouver l'écriture irréductible d'une fraction d'entiers, on commence par déterminer le PGCD du numérateur et du dénominateur de cette fraction.

Exercice 13.5 **Valuation p-adique d'un rationnel**

Soit p un nombre premier. On a déjà observé comment définir, $v_p(x)$, la valuation p-adique d'un entier relatif x non nul.
On pose par convention $v_p(0) = +\infty$.
On définit, pour $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $v_p\left(\dfrac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b)$. Enfin, pour $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$,

on pose :

$$d_p(x,y) = \left| \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x=y \\ \\ p^{-v_p(x-y)} & \text{si} & x \neq y \end{array} \right. .$$

1) Montrer d_p est une distance ultramétrique, c'est-à-dire que :

$$(\mathcal{P}_1) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2, d_p(x,y) \in \mathbb{R}^+,$$
$$(\mathcal{P}_2) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2, d_p(x,y) = d_p(y,x),$$
$$(\mathcal{P}_3) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2, d_p(x,y) = 0 \iff x = y,$$
$$(\mathcal{P}_4) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3, d_p(x,y) \leq \max\left(d_p(x,z), d_p(z,y)\right).$$

2) Pour $a \in \mathbb{Q}$ et $r > 0$, on définit :

$$BF_p(a,r) = \left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, d_p(a,x) \leqslant r \right\}.$$

Montrer que $x \in BF_p(a,r) \implies BF_p(a,r) = BF_p(x,r)$

---

6 Congruences : M.P.

6.1 Généralités

Définition 13.40 (Congruence)

Soient n un entier naturel non nul. Soient a et b deux entiers. Lorsque $n \,|a-b$, on dit que a **est congru à** b **modulo** n est l'on note $a \equiv b \ [n]$.

✓ On a donc l'équivalence : $a \equiv 0 \ [b] \iff b\,|a$.

✓ La relation de congruence ainsi définie sur $\mathbb{Z}$ n'est rien d'autre que la relation induite par la relation de congruence modulo n sur $\mathbb{R}$. Les propriétés peuvent donc s'en déduire.

Propriété 13.41 (Relation d'équivalence)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence. C'est-à-dire que :
$(-)$ $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \equiv a \ [n]$.
$(-)$ $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $a \equiv b \ [n] \implies b \equiv a \ [n]$.
$(-)$ $\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, $(a \equiv b \ [n] \text{ et } b \equiv c \ [n]) \implies a \equiv c \ [n]$.

preuve:

Propriété 13.42 (congruence modulo mn)

Soient $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, a \equiv b \ [mn] \implies a \equiv b \ [n].$$

preuve:

Propriété 13.43 (Congruence et addition ou multiplication)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
(−) $\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3, a \equiv b \ [n] \iff a+c \equiv b+c \ [n]$.
(−) $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4, (a \equiv b \ [n] \text{ et } c \equiv d \ [n]) \iff a+c \equiv b+d \ [n]$.
(−) $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4, (a \equiv b \ [n] \text{ et } c \equiv d \ [n]) \iff a-c \equiv b-d \ [n]$.
(−) $\forall (a,b,m) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^*, a \equiv b \ [n] \Longrightarrow ma \equiv mb \ [mn]$.
(−) $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4, (a \equiv b \ [n] \text{ et } c \equiv d \ [n]) \implies ac \equiv bd \ [n]$.

preuve:

Corollaire 13.44 (Congruences et Puissances)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \forall m \in \mathbb{N},\ a \equiv b \ [n] \implies a^m \equiv b^m \ [n].$$

preuve:

Propriété 13.45 (Congruence et DE)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) r est le reste de la division euclidienne de a par n.
ii) $r \in [\![0, n-1]\!]$ et $k \equiv r \ [n]$.

preuve:

> Ptitexo: *Vérifier que si k est un entier impair, alors k^2-1 est divisible par 8 en prouvant que : $k^2 \equiv 1 \ [8]$.*
>
> Ptitexo: *Quel est le dernier chiffre de l'écriture en base 10 de 2^{1000} ?*
>
> Ptitexo: *Montrer que dans toute base $b \geq 4$, le nombre $\underline{12321}_b$ est un carré parfait.*

Exercice 13.6 — **Critères de divisibilité**

Soit $a = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ avec $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k \in [\![0, 9]\!]$ et $a_n \in [\![1, 9]\!]$.

1) Montrer que l'entier a est pair si son chiffre des unités a_0 est pair.

2) Montrer que a est divisible par 3 si et seulement si $\sum_{k=0}^{n} a_k$ est divisible par 3.

3) Montrer que a est divisible par 5 si et seulement si $a_0 \in \{0, 5\}$.

4) Montrer que a est divisible par 9 si et seulement si $\sum_{k=0}^{n} a_k$ est divisible par 9.

5) Montrer que a est divisible par 11 si et seulement si $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ est divisible par 11.

6.2 Petit théorème de Fermat

Propriété 13.46 (d'un nombre premier)

Soit p un nombre premier.

$(-)$ Pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $p \,\Big|\, \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$.

$(-)$ $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \ \ [p]$.

preuve:

Corollaire 13.47 (Petit théorème de Fermat)

Si p est un nombre premier, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$n^p \equiv n \ \ [p].$$

preuve:

Idée : Si $n \in \mathbb{N}$, alors $(n+1)^p \equiv n^p + 1 \ \ [p]$, puis on peut récurrer.

Ptitexo: *Montrer que si n et p sont deux entiers premiers entre eux et p premier, alors $n^{p-1} \equiv 1 \ \ [p]$.*

Ptitexo: *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n$ est divisible par* 30.

Ptitexo: *Étudions la réciproque du petit théorème de Fermat.*
Vérifier que 1729 *n'est pas premier. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \wedge 1729 = 1$, montrer que $n^{1728} \equiv 1 \ \ [1729]$.*
Que peut-on en conclure ?

Chapitre 14 - Structures algébriques usuelles

(uniquement M.P.)

La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.
Poincaré.

1 Lois de composition internes

Définition 14.1 (Loi interne)

Soit E un ensemble. On appelle **loi de composition interne** sur E toute application de $E \times E$ vers E.

Notation : Si T est une loi de composition interne, on note souvent $x \mathrm{T} y$ au lieu de $\mathrm{T}(x, y)$ pour $(x, y) \in E^2$.
Exemples :

1. L'addition ou la multiplication sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sont des lois de composition interne.

2. L'intersection et la réunion sont des lois de composition interne sur $\mathcal{P}(E)$.

Définition 14.2 (Partie stable)

Soit E un ensemble muni d'une loi interne T. Soit F une partie de E. On dit que F est **stable** par T, si $\forall (x, y) \in F^2$, $x \mathrm{T} y \in F$.

Exemples :

1. L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 est stable pour la multiplication.

2. L'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est stable pour la composition.

3. L'ensemble des fonctions continues est stable par l'addition de fonctions.

Propriété 14.3 (Loi interne induite)

Soit E un ensemble muni d'une loi interne T. Soit F une partie de E. La restriction de la loi T à $F \times F$ est une loi interne sur F si et seulement si F est stable par E. On appelle alors cette restriction, **loi interne induite** par T sur F.

preuve:

Définition 14.4 (Propriétés des lois internes)

Soit E un ensemble et une loi $\top$ interne sur E.
$(-)$ On dit que $\top$ est **associative** si $\forall(x,y,z) \in E^3$, $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$.
$(-)$ On dit que $\top$ est **commutative** si $\forall(x,y) \in E^2$, $(x \top y) = (y \top x)$.
$(-)$ Si $\top'$ est une autre loi interne sur E, on dit que $\top$ est **distributive à gauche** sur $\top'$ si : $\forall(x,y,z) \in E^3$, $x \top (y \top' z) = (x \top y) \top' (x \top z)$.
$(-)$ Si $\top'$ est une autre loi interne sur E, on dit que $\top$ est **distributive à droite** sur $\top'$ si : $\forall(x,y,z) \in E^3$, $(y \top' z) \top x = (y \top x) \top' (z \top x)$.
$(-)$ Si $\top'$ est une autre loi interne sur E, on dit que $\top$ est **distributive** sur $\top'$ si elle est distributive à gauche et à droite.

Exemples :

1. Sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ la multiplication est distributive sur l'addition. Mais l'addition n'est pas distributive sur la multiplication.
2. Sur $\mathcal{P}(E)$, l'intersection est distributive sur la réunion et la réunion est distributive sur l'intersection.

Définition 14.5 (Élément neutre)

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\top$. Soit e un élément de E. On dit que e est un **élément neutre** pour $\top$ lorsque

$$\forall x \in E, x \top e = e \top x = x.$$

✓ Si E est un ensemble et $\top$ une loi interne sur E. Si F est une partie de E stable par $\top$, et si $\top_F$ désigne la loi induite par $\top$ sur E, alors :
$(-)$ Si $\top$ est associative, alors $\top_F$ est associative.
$(-)$ Si $\top$ est commutative, alors $\top_F$ est commutative.
$(-)$ Si $e \in F$ est élément neutre pour $\top$, alors il l'est aussi pour $\top_F$.

Propriété 14.6 (Unicité du neutre (s'il existe))

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\top$. Il existe au plus un élément neutre pour $\top$.

preuve:

Exemples :

1. 0 est élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
2. L'addition est une loi interne sur $\mathbb{N}^*$, mais sur cet ensemble il n'y a pas d'élément neutre.
3. L'ensemble $\emptyset$ est le neutre pour la réunion dans $\mathcal{P}(E)$, tandis que E est élément neutre pour l'intersection dans $\mathcal{P}(E)$.

Pour gagner quelques lignes dans les définitions qui suivent, définissons :

Définition 14.7 (Monoïde)

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $\top$. On dit que $(E, \top)$ est un **monoïde** si :

i) La loi $\top$ est associative.
ii) La loi $\top$ possède un élément neutre.

Si de plus $\top$ est commutative, alors on dit que $(E, \top)$ est un monoïde commutatif.

Exemples :

1. Si E est un ensemble, alors $(\mathcal{P}(E), \cap)$ et $(\mathcal{P}(E), \cup)$ sont des monoïdes commutatifs.

2. $(\mathbb{N}, +)$ est un monoïde commutatif.

   Ptitexo: *Montrer que* $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \circ\right)$ *est un monoïde qui n'est pas commutatif.*

Propriété 14.8 (Unicité (s'il existe) de l'inverse)

Soit (E, T) un monoïde dont on note e l'élément neutre. Soit x un élément de E. Il existe au plus un élément x' de E tel que :

$$x \mathrm{T} x' = x' \mathrm{T} x = e.$$

preuve:

Définition 14.9 (Élément inversible)

Soit (E, T) un monoïde dont on note e l'élément neutre. On dit qu'un élément $x \in E$ est inversible pour T s'il existe un élément $x' \in E$ tel que :

$$x \mathrm{T} x' = x' \mathrm{T} x = e.$$

On dit alors que x' est l'inverse de x.

Notation : Lorsque la loi est notée additivement $(+)$, si l'élément x admet un inverse alors on le note $-x$ et on l'appelle opposé. . Lorsque la loi est notée multiplicativement $(\times)$, si l'élément x admet un inverse alors on le note x^{-1}.

Ptitexo: *Déterminer l'ensemble des inversibles des monoïdes suivants :* $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{N}, \times)$, $(\mathbb{Z}, \times)$, $(\mathbb{Q}, \times)$, $\left(E^E, \circ\right)$, $(\mathcal{P}(E), \cap)$, $(\mathcal{P}(E), \cup)$.

Propriété 14.10 (Inverse de $x * y$)

Soit $(E, *)$ un monoïde. Soient x et y deux éléments inversibles de ce monoïde. L'élément $x * y$ est inversible et $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.

preuve:

✓ Cette propriété s'étend facilement par récurrence à un nombre fini d'éléments inversibles $x_1, \ldots, x_n$.
Dans ce cas : $(x_1 * \cdots * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * \cdots * x_1^{-1}$.

✓ Si la loi est notée additivement, alors cette propriété s'écrit :
$-(x + y) = (-x) + (-y)$.

Exercice 14.1

Soit $(E, *)$ un monoïde dont on note e l'élément neutre.
On suppose que $\forall x \in E,\ x * x = e$. Montrer que $(E, *)$ est abélien.

Propriété 14.11 (Simplification par un inversible)

Soit $(E,\ \mathrm{T}\ )$ un monoïde et a un élément inversible de E. On a :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ a \mathrm{\ T\ } x = a \mathrm{\ T\ } y \implies x = y.$$

et :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \mathrm{\ T\ } a = y \mathrm{\ T\ } a \implies x = y.$$

✓ On retient simplement qu'il est possible de ≪ simplifier ≫ par un élément inversible.

preuve:

2 Puissances itérées dans un monoïde

Dans toute cette partie, on se donne un monoïde $(E, *)$ dont l'élément neutre est noté e. Étant donné un élément x de E, on souhaite donner un sens précis à la notion intuitive consistant à désigner par x^n l'élément $\underbrace{x * x * \cdots * x}_{n \text{ fois}}$.

Définition 14.12 (Puissances itérées)

Soit x un élément de E. On note $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite vérifiant les propriétés suivantes :

$$x^0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, x^{n+1} = x^n * x.$$

Notation : Lorsque la loi du monoïde en question est notée additivement, la puissance itérée de x à l'ordre n est notée $n.x$ plutôt que x^n.

Propriété 14.13 (Calculs sur les itérées)

Soit x un élément de E.

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, x^m * x^n = x^{m+n}.$$

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, (x^m)^n = x^{mn}.$$

preuve : Récurrer.

Propriété 14.14 ()

Soient x et y deux éléments de E qui commutent.
$(-)$ Toute puissance de x commute avec toute puissance de y.
$(-)$ Pour tout entier naturel n, on a $(x * y)^n = x^n * y^n$.

✓ L'hypothèse de commutation est indispensable pour écrire cela.

Définition 14.15 (Puissance négative)

Soit x un élément inversible de E. Pour tout entier strictement négatif n, on pose :

$$x^k = \left(x^{-1}\right)^{-k}.$$

Propriété 14.16 (Propriétés des puissances négatives)

Soit x un élément inversible de E.
$(-)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, x^k est inversible et son inverse est x^{-k}.
$(-)$ $\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, $x^{k_1} * x^{k_2} = x^{k_1+k_2}$.
$(-)$ $\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, $\left(x^{k_1}\right)^{k_2} = x^{k_1 k_2}$.
$(-)$ Si y est un élément de E qui commute avec avec x, alors :
$\forall k \in \mathbb{Z}, (x * y)^k = x^k * y^k$.

3 Groupes

3.1 Généralités

Définition 14.17 (Groupe)

On appelle **groupe** tout couple $(G, \top)$ formé d'un ensemble G et d'une loi de composition interne $\top$ sur G vérifiant les propriétés suivantes :

i) La loi $\top$ est associative.
ii) La loi $\top$ admet un élément neutre.
iii) Tout élément de G est inversible pour $\top$.

Lorsqu'en outre la loi $\top$ est commutative, on dit que le groupe $(G, \top)$ est abélien.

Exemples :

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes abéliens.
2. $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe puisque, par exemple, 2 n'est pas inversible.
3. $(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{Q}_*^+, \times)$ $(\mathbb{U}, \times)$, $(\{-1, 1\}, \times)$ sont des groupes abéliens.
4. $\left((\mathcal{S}(\mathbb{R}))^{\mathbb{R}}, \circ\right)$ est un groupe non abélien.
5. $\left([\![1,5]\!]^{[\![1,4]\!]}, \circ\right)$ n'est pas un groupe.

Exercice 14.2 — **Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{a}$ la classe de a pour la relation de congruence modulo n. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation de congruence modulo n.

1) Montrer que si $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$, vérifient $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ et $\overline{b_1} = \overline{b_2}$, alors :

$$\overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}.$$

On peut donc définir l'opération $+ : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \left(\overline{a}, \overline{b}\right) \longmapsto \overline{a+b}$.

2) Montrer que, muni de cette opération d'addition $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien.

Exercice 14.3 — **Groupe produit**

Soient $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes. Pour $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$ deux éléments de $(G_1 \times G_2)$ on définit :

$$X * Y = (x_1 *_1 y_1, x_2 *_2 y_2).$$

1) Montrer que $(G_1 \times G_2, *)$ est un groupe.

2) Donner une CNS pour que ce groupe soit abélien.

3) Justifier alors que $\left(\mathbb{R}^2, +\right)$ est un groupe abélien.

Exercice 14.4 **Structure de groupe sur G^X.**

Soit $(G, *)$ un groupe. Soit X un ensemble non vide. Si $\varphi \in G^X$ et $\psi \in G^X$, on définit l'application $\varphi \bar{*} \psi$ par

$$\varphi \bar{*} \psi : X \longrightarrow G,\ x \longmapsto \varphi(x) * \psi(x).$$

1) Montrer que l'on définit ainsi une loi interne sur G^X.

2) Montrer que $\left(G^X, \bar{*}\right)$ est un groupe.

3) Montrer que si G est commutatif alors $\left(G^X, \bar{*}\right)$ est aussi un groupe commutatif.

Rappel de notation : On note $\mathcal{S}(E)$ ou $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des permutations de E.

Propriété 14.18 (Groupe des permutations de E)

Soit E un ensemble non vide. L'ensemble $(\mathcal{S}(E), \circ)$ des permutations de E muni de la loi de composition est un groupe.

preuve:

Ptitexo: *Montrer que ce groupe n'est pas abélien dès que* $\operatorname{card}(E) \geq 3$.

3.2 Sous-groupes

Définition 14.19 (Sous-groupe)

Soient $(G, *)$ un groupe et H un sous-ensemble de G. On dit que H est un **sous-groupe de** G lorsque H est stable par $*$ et que H muni de la loi induite sur H par $*$ est un groupe.

✓ On emploie en général, la même notation pour désigner la loi du groupe et celle du sous-groupe, mais c'est un abus.

Exemples :

1. $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$ qui lui-même est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. $(\mathbb{Q}_*^+, *)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^*, *)$.
3. Si e est l'élément neutre du groupe $(G, *)$, alors $\{e\}$ est un sous-groupe de G. De même, G est un sous-groupe de G.

Propriété 14.20 (Propriétés élémentaires des sous-groupes)

Soit $(G, *)$ un groupe et H un sous-groupe de G.
$(-)$ $1_G = 1_H$.
$(-)$ L'inverse d'un élément $x \in H$ dans h est son inverse dans G.

preuve : Soit x un élément quelconque de H. (Un tel élément existe car H est un groupe donc il n'est pas vide. Notons x_G^{-1} son inverse dans G. On a donc : $x.1_H = x$. D'où $x_G^{-1}.x.1_H = x_G^{-1}.x$. Donc, par définition de l'inverse :
$1_G.1_H = 1_G$. Donc $1_H = 1_G$.

Propriété 14.21 (Caractérisation des sous-groupes)

Soit $(G, *)$ un groupe et H un sous-ensemble de G. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- H est un sous-groupe de G.
- $H \neq \emptyset$ et $\forall (x, y) \in H^2, x * y^{-1} \in H$.

preuve:

✓ Dans ce théorème, on peut remplacer la condition $H \neq \emptyset$ par la condition $e_G \in H$. (où e_G désigne l'élément neutre de G).

Propriété 14.22 (Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$)

Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les ensembles de la forme $a\mathbb{Z}$ pour $a \in \mathbb{Z}$.

preuve:

Exercice 14.5 **Zentralisateur**

Soit $(G, *)$ un groupe. Montrer que l'ensemble $Z(G)$ des éléments de G qui commutent avec tout élément de G forme un sous-groupe de G.

Exercice 14.6 **Intersection et réunion de sous-groupes**

1) Montrer que l'intersection de deux sous-groupes d'un même groupe $(G, *)$ est encore un sous-groupe de $(G, *)$.

2) Ce résultat est-il encore vrai pour une intersection d'un nombre quelconque de sous-groupes ?

3) Que dire de la réunion de deux sous-groupes ?

Exercice 14.7 **Sous-groupe engendré par une partie**

Soit $(G, .)$ un groupe. Soit A une partie de G.

1) Montrer qu'il existe un plus petit (au sens de l'inclusion) sous-groupe de G contenant A.
On l'appelle **sous-groupe de G engendré par A**.

2) Soient $n \in [\![2, +\infty]\!]$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right\}$ engendre $(\mathbb{U}_n, \times)$ si et seulement si $k \wedge n = 1$.

Définition 14.23 (Morphisme de groupes)

Soient $(G, *)$ et $(G', \times)$ deux groupes. On appelle morphisme de groupe de $(G, *)$ vers $(G', \times)$ toute application $\varphi : G \longrightarrow G'$ qui vérifie :

$$\forall (g_1, g_2) \in G^2,\ \varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \times \varphi(g_2).$$

Exercice 14.8 — Morphismes de groupes

1) Montrer que exp est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathbb{R}_*^+,\times)$.

2) a) Montrer que $E:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{U},\ \theta\longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathbb{U},\times)$.

b) Montrer que l'ensemble $A=\left\{k\dfrac{\pi}{3}\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.

c) Montrer que $E(A)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U},\times)$.

3) Propriétés des morphismes
Soit φ un morphisme de groupe de $(G,*)$ vers $(G',\times)$.

a) Montrer que $\varphi\left(e_G\right)=e_{G'}$.

b) Montrer que $\forall x\in G, (\varphi(x))^{-1}=\varphi\left(x^{-1}\right)$.

c) Montrer que $\forall x\in G, \forall k\in\mathbb{Z}, (\varphi(x))^{k}=\varphi\left(x^{k}\right)$.

4) Montrer que l'image d'un sous-groupe par un morphisme de groupe est un sous-groupe du groupe d'arrivée.

5) Montrer que l'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe est un sous-groupe du groupe de départ.

6) On appelle noyau du morphisme de groupe φ de $(G,*)$ vers $(G',\times)$, l'ensemble noté $\operatorname{Ker}(\varphi)$ défini par :

$$\operatorname{Ker}(\varphi)=\varphi^{-1}\left(\{e_{G'}\}\right).$$

a) Montrer que $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe de G.

b) Retrouver le fait que le centralisateur est un sous-groupe de G.

c) Montrer que φ est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker}(\varphi)=\{e_G\}$.

Exercice 14.9 — Théorème de Lagrange

Soit $(G,.)$ un groupe et $(H,.)$ un sous-groupe de G. On définit la relation sur G la relation $\mathcal{R}$ par $a\mathcal{R}b \iff a^{-1}.b\in H$.

1) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G.
On note G/H l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation.

2) Vérifier que pour $a\in G$, $cl(a)=aH=\{\,ah\mid h\in H\,\}$.

3) Montrer que si G est un groupe de cardinal fini, toutes les classes sont de même cardinal.

4) En déduire le théorème de Lagrange, si G est groupe fini, si H est sous-groupe de G, alors :

$$\boxed{\operatorname{card}(H)\,|\operatorname{card}(H).}$$

Exercice 14.10 — Classification des sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ c'est-à-dire une partie de $\mathbb{R}$ stable par addition, par passage à l'opposé et contenant 0. On cherche à prouver que soit G est dense dans $\mathbb{R}$ soit il existe un élément $a\in G$ tel que $G=a\mathbb{Z}$.

1) Traiter le cas $G\cap\mathbb{R}_*^+=\emptyset$.
On suppose dans la suite que $G\cap\mathbb{R}_*^+\neq\emptyset$.

2) Montrer que $G \cap \mathbb{R}_*^+$ admet une borne inférieure, on la note : a.

3) cas $a = 0$ Montrer que si $a = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.

4) cas $a \neq 0$.

a) Montrer que si $a \neq 0$, alors $a \in G$.

b) Prouver que $G = a\mathbb{Z}$.

5) Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

---

4 Anneaux

4.1 Définition

Définition 14.24 (Anneau)

On appelle **anneau** tout triplet $(A, +, \times)$ formé d'un ensemble A et de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ sur A vérifiant :

i) $(A, +)$ est un groupe abélien. (On note 0_A son élément neutre).

ii) $(A, \times)$ est associative et admet un élément neutre noté 1_A et appelé élément unité.

iii) La loi $\times$ est distributive sur $+$.

Si de plus, $\times$ est commutative, alors on dit que l'anneau A est commutatif.

Exemples :

1. $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des anneaux.
2. $(\mathbb{N}, +, \times)$ n'est pas un anneau puisque $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe.

✓ Si $1_A = 0_A$, on a alors $A = \{0_A\}$ et l'on dit que l'anneau est trivial.

✓ Dans un anneau, les éléments non nuls ne sont pas nécessairement tous inversibles pour $\times$. Par exemple, $(\mathbb{Z}, +, \times)$ ne contient que deux éléments inversibles pour $\times$.

Notation : Dans un anneau, on note, pour $n \in \mathbb{N}$, et $a \in A$, $n.a = a + a + \cdots + a$ l'itérée n-ème pour la loi $+$ et a^n l'itérée n-ème pour la loi $\times$.

Ptitexo: *Soit $(A, +, *)$ un anneau. Soit X un ensemble, on munit A^X des opérations $+$ et $*$ définies par :*

$$\forall (f, g) \in A^X \times A^X, f + g : X \longrightarrow A,\ x \longmapsto f(x) + g(x).$$

$$\forall (f, g) \in A^X \times A^X, f * g : X \longrightarrow A,\ x \longmapsto f(x) * g(x).$$

Montrer que $\left(A^X, +, *\right)$ est un anneau. (On en déduit, en particulier, que, muni des opérations usuelles sur les fonctions, $\left(\mathbb{R}^X, +, \times\right)$ est un anneau).

Ptitexo: *Montrer que $(\{\mathcal{V}, \mathcal{F}\}, \vee, \wedge)$ est un anneau.*

Ptitexo: *Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif.*

4.2 Calcul dans un anneau

4.2.1 Règles élémentaires

Propriété 14.25 ()

Soit $(A,+,\times)$ un anneau.
$(-)$ Pour tout $a \in A$, $0_A \times a = a \times 0_A = 0_A$. (On dit que 0_A est un élément absorbant).
$(-)$ Pour tout $(a,b) \in A^2$, $a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$.

preuve:

Propriété 14.26 (Opérations dans un anneau)

Soit $(A,+,\times)$ un anneau et I et J deux ensembles finis.
$(-)$ $\forall b \in A, \forall \left(a_i\right)_{i\in I} \in A^I$,

$$b \times \left(\sum_{i\in I} a_i\right) = \sum_{i\in I} (b \times a_i),$$

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right) \times b = \sum_{i\in I} (a_i \times b).$$

$(-)$ $\forall \left(a_i\right)_{i\in I} \in A^I, \forall \left(b_j\right)_{j\in J} \in A^J$

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right) \times \left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i \times b_j.$$

$(-)$ Soient a et b deux éléments d'un anneau $(A,+,\times)$.

$$\forall (k,k') \in \mathbb{Z}^2, (k.a) \times (k'.b) = (kk').(a \times b).$$

preuve:

Propriété 14.27 (Identités remarquables)

Soient a et b deux éléments d'un anneau $(A,+,\times)$. $\boxed{\text{Si } a \text{ et } b \text{ commutent}}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k\right),$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} .a^k b^{n-k}.$$

preuve:

Exercice 14.11 **Éléments nilpotents**

Soit $(A,+,.)$ un anneau.
Un élément a de A est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k = 0$.

1) Montrer que la somme de deux éléments nilpotents qui commutent est encore un élément nilpotent.

2) Soit a un élément nilpotent, montrer que $1-a \in A^*$ et donner son inverse.

Définition 14.28 (Sous-anneau)

Soit $(A,+,\times)$ un anneau. On appelle sous-anneau d'un anneau $(A,+,\times)$ toute partie B de A telle que B est stable par $+$ et $\times$ et telle que muni de ces lois induites, $(B,+,\times)$ forme un anneau d'élément unité 1_A.

Ptitexo: *De la nécessité de la condition $1_A \in B$.*
On considère l'anneau $(\mathbb{Z}^2,+,.)$ muni des opérations définies par :

$$\forall\left((n_1,m_1),(n_2,m_2)\right) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2, (n_1,m_1)+(n_2,m_2)=(n_1+n_2,m_1+m_2),$$

$$\forall\left((n_1,m_1),(n_2,m_2)\right) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2, (n_1,m_1)\times(n_2,m_2)=(n_1\times n_2,m_1\times m_2).$$

1. *Vérifier que $(\mathbb{Z}^2,+,.)$ est bien un anneau.*
2. *On définit $B_1 = \{(n,0) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et $B_2 = \{(0,n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que muni de la restriction de $+$ et $\times$ de $\mathbb{Z}^2$ à B_1, l'ensemble B_1 est un anneau. Montrer, de même, que muni de la restriction de $+$ et $\times$ de $\mathbb{Z}^2$ à B_2, l'ensemble B_2 est un anneau.*
3. *B_1 et B_2 sont-ils des sous-anneaux de A ?*

Propriété 14.29 (Caractérisation des sous-anneaux)

Soit $(A,+,\times)$ un anneau. Soit B une partie de A. La partie B est un sous-anneau de A si et seulement si :
i) $1_A \in B$.
ii) $\forall (x,y) \in B^2, x-y \in B$
iii) $\forall (x,y) \in B^2, x\times y \in B$.

preuve:

Ptitexo:

1. *Montrer que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q},+,\times)$.*
2. *Caractériser les sous-anneaux de $\mathbb{Z}$.*

Exercice 14.12 **L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{a}$ la classe de a pour la relation de congruence modulo n. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation de congruence modulo n.

1) Montrer que si $(a_1,a_2,b_1,b_2) \in \mathbb{Z}^4$, si $\overline{a_1}=\overline{a_2}$ et si $\overline{b_1}=\overline{b_2}$, alors $\overline{a_1b_1}=\overline{a_2b_2}$. On peut donc définir l'opération $\times : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \left(\overline{a},\overline{b}\right) \longmapsto \overline{ab}$.

2) Montrer que, muni de l'opération d'addition précédemment définie et de la relation de multiplication $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau.

3) Quels sont les éléments inversibles de cet anneau ?

Définition 14.30 (Groupe des éléments inversibles d'un anneau)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On appelle **groupe des éléments inversibles de** A l'ensemble des éléments de A qui sont inversibles pour $\times$. S'il n'y a pas d'ambiguité, on le note A^*.

Ptitexo: *Déterminer le groupe des éléments inversibles des anneaux* $(\mathbb{Q}, +, \times)$ *et* $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

Propriété 14.31 (A^* est un groupe)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Le groupe des éléments inversibles de A muni de l'application induite par $\times$ est un groupe.

Exercice 14.13 **Morphismes d'anneaux**

Soient $(R_1, +, \times)$ et $(R_2, +, \times)$ deux anneaux. On dit qu'une application f de R_1 vers R_2 est un morphisme de l'anneau $(R_1, +, \times)$ vers l'anneau $(R_2, +, \times)$ si :

$$(P_1)\ \forall (a, b) \in R_1^2, f(a + b) = f(a) + f(b),$$
$$(P_2)\ \forall (a, b) \in R_1^2, f(ab) = f(a)f(b),$$
$$(P_3)\ f(1) = 1.$$

1) Montrer que la conjugaison définit un morphisme d'anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$ vers $(\mathbb{C}, +, \times)$.

2) Montrer que l'image d'un sous-anneau par un morphisme d'anneau est un sous-anneau.

3) Montrer que l'image réciproque d'un sous-anneau par un morphisme d'anneau est un sous-anneau.

4) Montrer que si f est un morphisme d'anneau de $(R_1, +, \times)$ vers $(R_2, +, \times)$, alors $\operatorname{Ker}(f)$ est un stable par multiplication par éléments de R_1 à droite ou à gauche. On notera qu'en général, $\operatorname{Ker}(f)$ n'est pas un anneau.

5 Corps

Définition 14.32 (corps)

On appelle **corps** tout anneau commutatif non trivial (i.e. non réduit à 0), dans lequel tout élément non nul est inversible.

Exemples :

1. $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps.
2. $(\mathbb{Q}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}, +, \times)$ sont des corps.

Définition 14.33 (Sous-corps)

On appelle sous-corps d'un corps K tout sous-anneau de K qui muni des lois induites est encore un corps.

Exemples :

1. $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
2. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

✓ Si K est un corps, alors $K^* = K \setminus \{0\}$.

Si K est un corps, alors pour tout $y \in K^*$ et tout $x \in K$, on a $x \times y^{-1} = y^{-1} \times x$, on peut donc noter

$$x \times y^{-1} = y^{-1} \times x = \frac{x}{y}.$$

Les calculs sur ces fractions s'effectuent alors comme les calculs sur les fractions de réels.

Exercice 14.14 **Le corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n est un nombre premier si et seulement si $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps.

Ptitexo: *Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif intègre fini.*
Montrer que A est un corps.

Chapitre 15 - Polynômes

(Certaines parties uniquement M.P.)

Citation à compléter :

Pour rendre l'opéra supportable, il faudrait allonger .... Jean le o d'Alembert.

Le programme indique que nous devons nous intéresser uniquement aux polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Néanmoins nous donnerons dans un premier temps les définitions générales pour les polynômes à coefficients dans un anneau commutatif.

1 Polynômes à coefficient dans un anneau commutatif

Dans tout ce paragraphe, $(A, +, \times)$ désigne un anneau commutatif.

1.1 Suites presque nulles

Définition 15.1 (Suite presque nulle)

Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ est dite **presque nulle** s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, a_n = 0_A.$$

Exemples :

1. La suite $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$ est une suite presque nulle.
2. La suite $(1, 1, 1, 1, 2, 1, 0, 0, 0, \ldots$ est une suite presque nulle.

Propriété 15.2 (Opérations sur les suites p.nulles)

Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites presque nulles de $A^{\mathbb{N}}$.
(−) Pour tout $\lambda \in A$, la suite $\lambda \bullet a = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.
(−) La suite $a + b = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.
(−) La suite $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.
(−) La suite $((a * b)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a * b)_n = \displaystyle\sum_{i+j=n,(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i b_j$ est presque nulle.

preuve:

Définition 15.3 (Somme d'une suite presque nulle)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite presque nulle d'éléments de A. La quantité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} a_n$ ne dépend pas du choix d'un entier n_0 tel que $\forall n > n_0, a_n = 0$. On la note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

1.2 Anneau des polynômes

Définition 15.4 (Polynôme)

On appelle **polynôme** à une indéterminée et à coefficients dans A toute suite presque nulle d'éléments de A.

Notation : On note $A[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans A.

Définition 15.5 (Polynôme nul)

On appelle **polynôme nul** la suite identiquement nulle.

Définition 15.6 (Opérations sur les Polynômes)

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans A.
$(-)$ On appelle somme des polynômes P et Q, le polynôme noté $P+Q$ défini par $P+Q = (a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$(-)$ Pour tout $\lambda \in A$, on note $\lambda \bullet P$ le polynôme défini par $\lambda \bullet P = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$(-)$ On appelle produit des polynômes P et Q, le polynôme noté $P*Q$ défini par $P*Q = a*b = \left(\displaystyle\sum_{i+j=n,(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i b_j \right)_{n\in\mathbb{N}}$.

✓ La multiplication $*$ ainsi définie ne correspond pas à la multiplication usuelle des suites. Si a et b sont deux suites, le produit de ces deux suites est la suite $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

✓ Le polynôme $(1,0,\dots)$ est élément neutre de $*$ et le polynôme nul est élément neutre de $+$.

Propriété 15.7 (Structure d'anneau (M.P.))

Muni des opérations $+$ et $*$ définies plus haut, $A[X]$ est un anneau commutatif si A est commutatif.

preuve:

Propriété 15.8 (Structure d'algèbre (M.P.))

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Le quadruplet $(\mathbb{K}[X],+,*,.)$ est une algèbre commutative. Autrement dit : $(K[X],+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau :

$$(\alpha.x)\times y = \alpha.(x\times y) = x\times(\alpha.y).$$

preuve:

Notation : On note $X = (0,1,0,\dots,....)$. Puisque $(1,0,0,0,0,\dots)$ est élément neutre pour la multiplication $*$, on a donc en vertu des définitions vues dans le chapitre 14 **Structures algébriques usuelles**, $X^0 = (1,0,0,0,0,0,\dots)$ et
$\forall k \in \mathbb{N}, X^k = (0,0,\dots,0,1,0,0\dots)$ (le seul 1 étant en position k.)
On remarque alors que si $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite nulle à partir du rang n_0,

alors

$$P = \sum_{k=0}^{n_0} \left(a_k \bullet X^k\right).$$

On peut aussi noter cette somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k \bullet X^k\right)$ mais l'on se rappelle que cette somme est en fait une somme finie.

On convient d'omettre les symboles $\bullet$ et $*$. De noter, indifféremment $P(X)$ et P. Le polynôme X^0 peut aussi être noté simplement 1. Le polynôme identiquement nul peut être noté $\tilde{0}$ voire simplement 0.

Définition 15.9 (Monôme, coefficients)

On appelle :
($-$) **monôme** tout polynôme de la forme $a_k X^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $a_k \in A$.
($-$) **polynôme constant** tout polynôme de la forme $a_0 X^0$ pour $a_0 \in A$.
($-$) **suite des coefficients du polynôme** P, l'unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. Le terme d'indice n de cette suite est appelé coefficient en degré n du polynôme P.

✓ Ainsi construit, un polynôme n'est surtout pas un nombre, ce n'est pas non plus exactement une fonction. On évitera donc autant que possible la notation $P(x)$ si x est un réel.

Propriété 15.10 (A intègre $\Longrightarrow$ $A[X]$ est intègre)

Si l'anneau A est intègre, alors l'anneau $(A[X], +, *)$ est intègre, c'est-à-dire que le produit de deux polynômes non nuls est nécessairement non nul.

preuve:

Corollaire 15.11 (contraposée)

Si A est un anneau intègre et si P et Q sont deux polynômes appartenant $A[X]$ tels que $PQ = \tilde{0}$, alors $P = \tilde{0}$ ou $Q = \tilde{0}$.

preuve : Il suffit de contraposer la propriété précédente.

Si $A = \sum_{k=0}^{n_0} a_k X^k$ et B sont deux éléments de $A[X]$. Alors, on peut définir B^k (en utilisant la **Définition 14.12**). On peut donc donner un sens à la définition suivante :

Définition 15.12 (Composition de polynômes)

Soient $A = \sum_{k=0}^{n_0} a_k X^k$ et B sont deux éléments de $A[X]$. On appelle **composée des polynômes** A **et** B, le polynôme :

$$A \circ B = \sum_{k=0}^{n_0} a_k B^k.$$

✓ On définit ainsi une loi interne notée $\circ$ sur $A[X]$.

✓ Le polynôme X est élément neutre pour la loi $\circ$.

Propriété 15.13 (Composition et opérations (M.P))

Muni de l'addition de polynômes définie plus haut et de la loi $\circ$ de composition, l'anneau $(A[X], +, \circ)$ est un anneau non commutatif.

preuve:

1.3 Degré

1.3.1 Définitions

Si P est un polynôme non nul et si l'on note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses coefficients, alors $\left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; a_n \neq 0 \right\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus grand élément ce qui permet de donner un sens à la définition qui suit :

Définition 15.14 (Degré d'un polynôme)

Soit $P \in A[X]$ un polynôme. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses coefficients.
$(-)$ Si P est le polynôme nul, alors on note $\deg(P) = -\infty$.
$(-)$ Si $P \neq 0$, alors on pose $\deg(P) = \max\left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; a_n \neq 0 \right\}$.
L'élément $\deg(P)$ de $\overline{\mathbb{R}}$ est appelé le **degré du polynôme** P.

Exemples :

1. Le polynôme nul est l'unique polynôme de degré $-\infty$.
2. Les polynômes de degré nul sont les polynômes constants non nuls.
3. Les polynômes constants sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 0.
4. Si $(a_0, \ldots, a_n)$ désigne un n-uplet d'éléments de A, alors :

$$\deg\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = n \iff a_n \neq 0_A.$$

Définition 15.15 (Coefficient dominant)

Si $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ est un polynôme non nul de degré n, alors on appelle a_n **coefficient dominant** de $P(X)$. Le monôme $a_n X^n$ est appelé monôme dominant.

Dans toute la suite, on considère des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.3.2 Opérations sur les degrés

Propriété 15.16 (Opérations sur les degrés)

Soient P et Q deux polynômes appartenant à $\mathbb{K}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
$(-)$ $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
$(-)$ Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
$(-)$ $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
$(-)$ Si $\lambda \neq 0$, alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.
$(-)$ Si $\deg(Q) \geqslant 1$, $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

preuve:

✓ Si $\deg(P) = \deg(Q)$, alors on peut avoir $\deg(P+Q) \neq \max(\deg(P), \deg(Q))$, par exemple, si l'on prend $P = 1 + X$ et $Q = 2 - X$.

✓ Soient P et Q deux polynômes non nuls, alors le coefficient dominant de PQ est le produit du coefficient dominant de P par celui du coefficient dominant de Q.

Propriété 15.17 (Inversibles de $\mathbb{K}[X]$)

Les éléments inversibles de $(\mathbb{K}[X], +, *)$ sont les polynômes constants, non nuls.

preuve:

Ptitexo: *Retrouver à partir des opérations sur les degrés le fait que l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.*

Notation : Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{K}_n[X]$, le sous-ensemble de $\mathbb{K}[X]$ formé par les des polynômes de degré inférieur ou égal à n . ($\mathbb{K}_0[X]$ est donc l'ensemble des polynômes constants).

Exercice 15.1 — **L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire que cet ensemble est stable par combinaison linéaire et contient le polynôme nul.

2) L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est-il stable par multiplication ? Composition ?

2 Division de polynômes

2.1 Relation de divisibilité

Définition 15.18 (multiple)

Soient A et B deux polynômes appartenant à $\mathbb{K}[X]$. Lorsqu'il existe un polynôme $C \in \mathbb{K}[X]$, tel que $A = CB$, on dit que B **divise** A, ou que A **est un multiple de** B. On note alors $B \,|\, A$.

✓ On vérifie sans difficulté que la relation de divisibilité sur les polynômes est réflexive et transitive. Mais elle n'est pas antisymétrique. Par exemple, le polynôme $3X$ divise X et X divise $3X$.

✓ Tout polynôme divise le polynôme nul.

✓ Tout polynôme est divisible par n'importe quel polynôme constant non nul.

✓ Si P et Q sont deux polynômes tels que $Q \neq 0$, si P divise Q, alors il existe R un polynôme tel que $Q = PR$. Le polynôme R est nécessairement non nul. On a donc :
$\deg(Q) = \deg(P) + \deg(R)$. On a donc $\boxed{\deg(P) \leq \deg(Q)}$.

✓ Le fait qu'un polynôme divise un autre ou non dépend a priori du corps sur lequel on travaille. Par exemple, si l'on considère deux polynômes A et B de $\mathbb{R}[X]$ tels que $A \,|\, B$ dans $\mathbb{C}[X]$, il n'est pas a priori évident que $A \,|\, B$ dans $\mathbb{R}[X]$. Mais nous verrons qu'en fait la relation de divisibilité ne dépend pas du surcorps sur lequel on travaille.

Ptitexo: *Montrer que* $X^2 - 1 \,\big|\, X^6 - 1$.

Ptitexo: *Montrer que* $P - X$ *divise* $P \circ P - X$.

Définition 15.19 (Polynômes associés)

Deux polynômes P et Q sont dits **associés** lorsque $P \,|\, Q$ et $Q \,|\, P$. On notera alors $P \sim Q$.

Propriété 15.20 (Caractérisation des polynômes associés)

Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. On a :

$$P \sim Q \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ P = \lambda Q.$$

preuve:

✓ Deux polynômes associés ont même degré.

2.2 Division euclidienne des polynômes

Théorème 15.21 (Division euclidienne)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$.
Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg B.$$

Le polynôme Q est appelé le **quotient** de la division euclidienne de A par B.
Le polynôme R est appelé le **reste** de la division euclidienne de A par B.

preuve : Unicité puis existence par récurrence forte ou bien en utilisant en utilisant le minimum de l'ensemble : $\left\{ \deg(A - BQ) \;\middle|\; Q \in \mathbb{R}[X] \right\}$.

Algorithme de la division Euclidienne : cf `Python`.

Ptitexo: *Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :*
$X^5 + 4X^4 + 2X^3 + X^2 - X + 1$ *par* $X^3 - 2X + 2$
$X^5 + 2X^3 - 4$ *par* $X^3 + X + 2$.

Propriété 15.22 (Caractérisation de la divisibilité par DE)

Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) B divise A.
ii) Le reste dans la division euclidienne de A par B est nul.

preuve:

Corollaire 15.23 (inclusion)

Soient A et B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$. Soit $\mathbb{K}'$ un corps contenant $\mathbb{K}$. A divise B dans $\mathbb{K}'[X]$ si et seulement si A divise B dans $\mathbb{K}[X]$.

preuve:

3 Racines d'un polynôme

3.1 Fonction polynomiale

Définition 15.24 (Fonction polynomiale)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$. Soit $x \in \mathbb{K}$. On note $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et l'on appelle **fonction polynomiale** associée au polynôme P la fonction :

$$\tilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Notation : Définissons l'application $Ev : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{K}},\ P \longmapsto \tilde{P}$. L'application Ev est un morphisme d'algèbre de $(\mathbb{K}[X], +, *, .)$ vers $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{K}}, +, \times, .\right)$, en particulier :

Propriété 15.25 (somme et produits)

Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\forall x \in \mathbb{K}, (P + Q)(x) = P(x) + Q(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{K}, (PQ)(x) = P(x)Q(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{K}, (\lambda P)(x) = \lambda P(x).$$

preuve:

✓ Pour calculer rapidement, $P(x)$ on utilise l'algorithme de Hörner : Pour $\deg(P) = n$, $P(x) = ((...((a_n x + a_{n-1})x + ... + a_2 x + a_1)x + a_0$: même nombre d'additions mais n multilication au lieu de $2n - 1$.

3.2 Racines d'un polynôme

Définition 15.26 (Racine)

On appelle **racine** (ou encore **zéro**) d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tout élément $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Autrement dit, les racines d'un polynôme sont les zéros de la fonction polynomiale associée à P, c'est-à-dire les solutions sur $\mathbb{K}$ de l'équation $P(x) = 0$.
Exemples :

1. Tout élément de $\mathbb{K}$ est une racine du polynôme nul.
2. Un polynôme constant non nul n'admet aucune racine.
3. Un polynôme de degré 1 admet exactement une seule racine.

Lemme 15.27 ()

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est $P(\alpha)$.

Théorème 15.28 (Caractérisation des racines par la divisibilité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a :

(−) α est racine de $P \iff (X - \alpha)\,|P \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P = (X - \alpha)\,Q$.
(−) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts,

$$\text{alors } \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \text{ sont des racines de } P \text{ ssi } \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) \text{ divise } P$$

preuve:

Ptitexo: *Pour $n \geq 1$, montrer que $A = X\,(X+1)\,(2X+1)$ divise $P = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$*

✓ Pour factoriser rapidement par $X - \alpha$ lorsque α est racine, on utilise le schéma de Hörner.

3.3 Ordre de multiplicité d'une racine

Définition 15.29 (Ordre de multiplicité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle **ordre de multiplicité** de α (en tant que racine de P) l'entier naturel :

$$\max\left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; (X - \alpha)^k \,|P \right\}.$$

✓ Puisque le polynôme P est supposé non nul, $\left\{ k \in \mathbb{N} \,\middle|\, (X-\alpha)^k \,|P \right\}$ est une partie non vide (car elle contient 0) et majorée (par $\deg(P)$) de $\mathbb{N}$. Cela justifie qu'elle admet un maximum.

✓ Si $P(\alpha) \neq 0$, alors α est racine de P de multiplicité 0.

On dit que α est racine **simple** de P, lorsque son ordre de multiplicité est égal 1.
On dit que α est racine **multiple** de P, lorsque son ordre de multiplicité est strictement supérieur à 1.
On dit que α est racine **double** de P, lorsque son ordre de multiplicité est égal 2.

Propriété 15.30 (Carac. de l'ordre de multiplicité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) α est d'ordre exactement n en tant que racine de P.

ii) Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^n Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

preuve:

Exemples : 1 est une racine d'ordre 2 de $(X^4 - 1)(X^3 - 1)$.
Notation : On note $\text{ordre}_\alpha(P)$ l'ordre de multiplicité de α en tant que racine du polynôme P.

Propriété 15.31 (Multiplicité et produit de polynômes)

Soient A et B deux polynômes non nuls et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\text{ordre}_\alpha(AB) = \text{ordre}_\alpha(A) + \text{ordre}_\alpha(B).$$

preuve:

Théorème 15.32 (Factorisation à l'aide de plusieurs racines)

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ des éléments 2 à 2 distincts de $\mathbb{K}$ et
$(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\text{ordre}_{\alpha_k}(P) = r_k$. Alors $\prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)^{r_k}$ divise P.

preuve:

Application : Factorisation de $X^n - 1$
Nous avons déjà vu que $X^n - 1$ admet exactement n racines complexes distinctes qui sont les racines n-èmes de l'unité. Donc le polynôme $X^n - 1$ est factorisable par $\prod_{i=1}^{n-1} \left(X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$. On en déduit donc en raisonnant sur les degrés et les coefficients dominants que

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} (X - \zeta).$$

Exemple : pour $n = 4$: $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$

3.4 Nombre de racines d'un polynôme

Propriété 15.33 (Nombre de racines et degré)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ la liste des racines distinctes du polynôme P.
$(-)$ $n \leq \deg(P)$.
$(-)$ Si l'on se donne une famille d'entiers naturels $(r_1, \ldots, r_n)$ telle que α_k soit racine d'ordre supérieur ou égal à r_k de P quel que soit $k \in [\![1, n]\!]$, alors :

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \leq \deg P.$$

preuve:

Corollaire 15.34 (nombre fini de racines)

Tout polynôme non nul admet un nombre fini (éventuellement nul) de racines.

Corollaire 15.35 (contraposée)

Tout polynôme qui admet un nombre infini de racines est nul.

Ptitexo: *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(cos(x)) = \cos(nx)$ et établir une formule une formule de récurrence sur P_n.*

Corollaire 15.36 (égalité)

Si P et Q sont deux polynômes de degré inférieur ou égal n tels qu'il existe $n+1$ réels distincts $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ tels que
$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(\alpha_k) = Q(\alpha_k)$, alors $P = Q$.

✓ L'application $Ev : P \longrightarrow \tilde{P}$ est donc injective ; ce résultat reste vrai dès que le corps $\mathbb{K}$ contient une infinité d'éléments.

3.5 Relations coefficients-racines

Définition 15.37 (Polynôme scindé)

On dit qu'un polynôme P est **scindé** s'il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et des entiers $r_1, \ldots, r_n$ et un scalaire λ tel que :

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)^{r_k}.$$

Corollaire 15.38 (existence)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ la liste des racines distinctes du polynôme P. Le polynôme P est scindé si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^{n} \text{ordre}_{\alpha_k}(P) = \deg(P).$$

preuve:

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n scindé dont les racines (comptées avec leur multiplicité) sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. On a alors :

$$\begin{aligned} P(X) =& \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ =& a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) \\ =& a_n \left(X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \dots + (-1)^p \sigma_p X^{n-p} + \dots + (-1)^n \sigma_n \right) \end{aligned}$$

où l'on a noté :

$$\forall p \in [\![1, n]\!], \sigma_p = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_p}$$

En particulier, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_1 =& \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \\ \sigma_2 =& \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_n \\ \sigma_n =& \prod_{i=1}^{n} a_i = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \end{aligned}$$

Les $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont appelées fonctions symétriques élémentaires de $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.

Propriété 15.39 (coeff et fct sym)

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n scindé dont les racines (comptées avec leur multiplicité) sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. On a alors :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], a_i = (-1)^{n-i} \sigma_{n-i} a_n.$$

preuve:

Exemples :

1. Si l'on considère un trinôme du second degré $aX^2 + bX + c$, où a, b et c sont trois complexes avec $a \neq 0$. Si l'on note λ et μ les deux racines (éventuellement confondues du trinôme) alors :

$$\lambda + \mu = \frac{-b}{a} \qquad \lambda\mu = \frac{c}{a}.$$

2. On note $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ la liste des racines n-ème de l'unité et l'on note $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les fonctions symétriques associées. Que valent $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$?

Ptitexo: *Déterminer les racines de $Q = X^4 - 3X^3 + 6X^2 - 15X + 5$, sachant que ce polynôme admet deux racines de produit égal à 5.*

Ptitexo: *Déterminer la somme des puissances 7-èmes des racines de $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$. On pourra commencer par calculer le reste dans la division euclidienne de X^5 par P.*

4 Dérivation des polynômes

4.1 Polynôme dérivée

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme à coefficients réels, alors la fonction $\tilde{P} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polynomiale associée est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction : $\tilde{P}' : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. C'est-à-dire la fonction polynomiale associée au polynôme $\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$. Cela motive l'introduction de la définition suivante :

Définition 15.40 (Polynôme dérivée)

Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$. On appelle **polynôme dérivée** le polynôme noté P' est défini par :

$$P' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} X^k.$$

On peut aussi le noter $D(P)$.

Propriété 15.41 (P')

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors la fonction polynomiale associée à P' est la dérivée de la fonction polynomiale associée à P.

Propriété 15.42 (Degré du polynôme dérivée)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
(−) Si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
(−) Si P est un polynôme constant, alors $P' = 0$.

Corollaire 15.43 (polynôme constant)

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est constant si et seulement si $P' = 0$

4.2 Propriétés algébriques de la dérivation

Propriété 15.44 (Opérations et dérivées)

Soient P et Q deux polynômes. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
(−) $(P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$. (La dérivation de polynômes est linéaire).
(−) $(P \times Q)' = P'Q + Q'P$.
(−) $(P \circ Q)' = (P' \circ Q) \times Q'$.

preuve:

✓ De cette propriété, on déduira que l'application
$D : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X],\ P \longmapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

4.3 Dérivées successives

Définition 15.45 (Dérivées n-ème d'un polynôme)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence une suite $\left(P^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par les conditions :

$$P^{(0)} = P$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, P^{(n+1)} = \left(P^{(n)}\right)'$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la polynôme $P^{(n)}$ est appelé n-ème polynôme dérivée de P.

✓ On a pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $D^n(P) = P^{(n)}$, où la notation D^n désigne $D^n = \underbrace{n\text{fois}} D \circ \cdots \circ D$.

Ptitexo: *Soit le Polynôme $P = iX^3 + 3X^2 - (2 - 3i)X + 6$, déterminer les dérivées successives de P.*

Propriété 15.46 (degré du polynôme dérivé)

Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$.
(−) Si $m \leq n$, alors $\deg\left(P^{(m)}\right) = n - m$.
(−) Si $m = n$, alors $P^{(m)}$ est un polynôme constant.
(−) Si $m > n$, alors $P^{(m)}$ est le polynôme nul.

preuve:

Propriété 15.47 (Formule de Leibniz)

Soient P et Q deux polynômes.

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

preuve:

Lemme 15.48 (Lien entre coefficients et dérivées successives)

Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

preuve:

Propriété 15.49 (Formule de Taylor)

Soit $a \in \mathbb{K}$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}.$$

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(a) \frac{X^k}{k!}.$$

✓ La somme $\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}$ est bien une somme finie, car $P^{(k)}$ est nul pour tout k supérieur strictement à $\deg(P)$.

preuve:

4.4 Caractérisation de la multiplicité d'une racine

Propriété 15.50 (racine d'ordre r)

Soient $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) α est racine d'ordre r de P.

ii) $P(\alpha) = 0$ et α est une racine d'ordre $r-1$ de P'.

preuve:

Ptitexo: *Quels sont les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui sont divisibles par leur dérivée ?*

Corollaire 15.51 (Caractérisation des rac. simples/multiples)

Soient $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
$(-)$ α est racine simple de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$.
$(-)$ α est racine multiple de P si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.

preuve:

Ptitexo: *Montrer que le polynôme* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ *n'a que des racines simples dans* $\mathbb{C}$.

Théorème 15.52 (Caractérisation de la multiplicité d'une racine)

Soient $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $r \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) α est une racine d'ordre r de P.
ii) $\forall i \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(i)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

Ptitexo: *Soit* $n \geqslant 3$, *donner l'ordre de multiplicité de* 1, *racine du polynôme* $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$.

5 Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ (M.P.)

5.1 PGCD

Considérons deux polynômes $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ dont l'un au moins est non nul. Les polynômes A et B admettent au moins un diviseur commun : le polynôme constant égal à 1. Considérons l'ensemble :

$$d\mathcal{D} = \left\{ \deg P \;\middle|\; P\,|A \text{ et } P\,|B \right\}.$$

Cet ensemble est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (car elle contient $\deg(1) = 0$) et majorée par $(\max(\deg(A), \deg(B)))$, elle admet donc un plus grand élément.
Ce qui justifie la validité de la définition suivante :

Définition 15.53 (PGCD)

Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls.
Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé **un PGCD de** A **et** B. On convient que le polynôme nul est un PGCD de 0 et de 0.

✓ Il y a plusieurs PGCD de deux polynômes non nuls : si P est un PGCD, alors pour tout $\lambda \neq 0$, λP en est un autre.

Lemme 15.54 ()

Soient A, B, Q et R des éléments de $\mathbb{K}[X]$ tels que $A = BQ + R$:

$$\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(R).$$

preuve:

Propriété 15.55 (Caractérisation des PGCD)

Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes non tous les deux nuls. Soit D un autre polynôme. Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) $\mathcal{D}(D) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$.
ii) $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $(P\,|A$ et $P\,|B\,) \Longleftrightarrow D\,|A$ et $D\,|B\,$.
ii) D est un PGCD de A et B.

preuve:

Propriété 15.56 ()

Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes non tous les deux nuls. Si D_1 et D_2 sont deux PGCD de A et B, alors ils sont associés.

Définition 15.57 ()

Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes non tous les deux nuls. Il existe un seul PGCD de A et B unitaire. On le note $A \wedge B$.

Ptitexo: *Déterminer $A \wedge B$ lorsque $A = X^3 - 1$ et $B = X^2 - 1$. Puis lorsque $A = X^2 - 5X + 4$ et $B = X^4 - 1$.*

Ptitexo: *Soit $(a, b) \in \mathbb{K}$. Déterminer $(X - a) \wedge (X - b)$.*

Propriété 15.58 ()

Soient A, B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls. Soit C un polynôme unitaire.

$$(AC) \wedge (BC) = (A \wedge B)C.$$

preuve:

Ptitexo: *Déterminer en utilisant l'algorithme d'Euclide $A \wedge B$ lorsque $A = X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4$.*

Théorème 15.59 (Relation de Bézout)

Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. Il existe deux éléments U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$AU + BV = A \wedge B.$$

Les polynôme U et V sont appelés coefficients de Bézout du couple (U, V).

preuve:

On calcule $A \wedge B$ en utilisant l'algorithme d'Euclide. (Cf cours d'INFO).

✓ Les coefficients de Bézout ne sont pas uniques : Si U et V sont des coefficients de Bézout, alors $U' = U + BP$ et $V' = V - AP$ sont encore des coefficients de Bézout pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 15.2 **Les idéaux de $\mathbb{K}[X]$**

Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif. Soit I un sous-ensemble de A, on dit que I est un idéal de A si :

$(\mathcal{P}_1)$, I est un sous-groupe de $(A,+)$.
$(\mathcal{P}_2)$, I est stable par multiplication par éléments de A :

$$\forall (x,a) \in I \times A, x.a \in I.$$

1) Caractériser les idéaux de $(\mathbb{Z},+,.)$.

2) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. On le note $\langle P \rangle$.

3) Montrer que tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme $\langle P \rangle$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$.

4) Montrer que si P, Q et D sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ et D est ou unitaire ou nul, alors : $\langle P \rangle + \langle Q \rangle = \langle D \rangle \iff D = P \wedge Q$.

5) Montrer que toute suite croissante d'idéaux de $\mathbb{K}[X]$ est stationnaire.

5.2 PPCM

Considérons deux polynômes $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls. Les polynômes A et B admettent au moins un multiple commun : AB. Considérons l'ensemble :

$$\mathcal{M} = \left\{ \deg P \;\middle|\; P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, A \,|P \text{ et } B\,|P \right\}.$$

Cet ensemble est une partie non vide (car elle contient $\deg(AB)$) de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus petit élément.
Ce qui justifie la validité de la définition suivante :

Définition 15.60 (PPCMs)

Soient A et B deux éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$.
Tout multiple commun à A et B de degré minimal est appelé **un PPCM de A et B**. On convient que si A ou B est nul, alors le polynôme nul est le seul PPCM de A et B.

✓ Il y a plusieurs PPCM de deux polynômes non nuls : si P est un PPCM, alors pour tout $\lambda \neq 0$, λP en est un autre.

Propriété 15.61 (Caractérisation du PPCM)

Soient A et B deux éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$. Soit $M \in \mathbb{K}[X]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) $A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = M\mathbb{K}[X]$
ii) M est un PPCM de A et B.

preuve:

✓ Si l'un des polynômes A ou B est nul, alors le seul polynôme vérifiant **i)** et **ii)** est le polynôme nul. Cela justifie la convention adoptée dans la définition des PPCMs pour ce cas où l'un des polynômes est nul.

Propriété 15.62 ()

Soient A et B deux élément de $\mathbb{K}[X]$. Si M_1 et M_2 sont deux PPCM de A et B, alors ils sont associés.

preuve:

Définition 15.63 ()

Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes non tous les deux nuls. Il existe un seul PPCM de A et B unitaire. On le note $A \vee B$.

Propriété 15.64 ()

Soient A, B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tous les deux non nuls. Soit C un polynôme unitaire.

$$(AC) \vee (BC) = (A \vee B)C.$$

preuve:

5.3 Polynômes premiers entre eux

5.3.1 Généralités

Définition 15.65 (Polynômes premiers entre eux)

Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. On dit que A et B sont **premiers entre eux** si $A \wedge B = 1$, c'est-à-dire si les seuls diviseurs communs à A et B sont les polynômes de degré nul.

✓ D'après cette définition, si deux polynômes sont premiers entre eux, alors l'un au moins est non nul.

Exercice 15.3

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathbb{K}$. Donner une CNS sur a et b pour que $X - a$ et $X - b$ soient premiers entre eux.

Propriété 15.66 (Identité de Bézout)

Les polynômes $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement si il existe un couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

preuve:

Propriété 15.67 ()

Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls. Notons $D = A \wedge B$. Il existe deux polynômes A_1 et B_1 tels que

$$A = DA_1 \text{ et } B = DB_1 \text{ et } A_1 \wedge B_1 = 1.$$

preuve:

Propriété 15.68 ()

Soient A, B et C des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On a :

$$(A \wedge B \,\text{et}\, A \wedge C = 1) \Longrightarrow A \wedge (BC) = 1.$$

preuve:

Ptitexo: *Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si $P+Q$ et PQ le sont.*

Propriété 15.69 ()

Soient $A_1, \ldots, A_m$ et $B_1, \ldots, B_n$ deux familles d'éléments de $\mathbb{K}[X]$, telles que $\forall (i,j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$, $A_i \wedge B_j = 1$.

$$\left(\prod_{i=1}^{m} A_i\right) \wedge \left(\prod_{i=1}^{m} B_j\right) = 1.$$

preuve:

5.3.2 Lemme de Gauss et applications

Propriété 15.70 (Lemme de Gauss)

Soient A, B et C trois éléments de $\mathbb{K}[X]$. Si $A \,|BC$ et si $A \wedge B = 1$, alors $A \,|C$.

preuve:

Propriété 15.71 (Lien entre le PPCM et le PGCD)

Soient A et B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non nuls. On note A_1 et B_1 les polynômes vérifiant $A = (A \wedge B)A_1$ et $B = (A \wedge B)B_1$.
$(-)$ $A_1 \wedge B_1 = 1$.
$(-)$ $(A \vee B)(A \wedge B)$ est l'unitarisé du polynôme AB.

Corollaire 15.72 ()

Soient A et B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non nuls. $A \wedge B = 1$ si et seulement si $A \vee B$ est le normalisé de AB.

Corollaire 15.73 ()

Soient A, B et C trois polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On a :

$$(A \,|C \,\text{ et}\, B \,|C \,\text{ et}\, A \wedge B = 1) \Longrightarrow (AB) \,|C \,.$$

preuve:

5.4 Extension à un nombre fini de polynômes

Définition 15.74 (PGCD d'un nb. fini de polynômes)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \dots, A_n$ des polynômes appartenant à $\mathbb{K}[X]$ non tous nuls. On appelle PGCD des polynômes $A_1, \dots, A_n$ un diviseur commun à $A_1, \dots, A_n$ de degré maximal.

Propriété 15.75 (Caractérisation des PGCD)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \dots, A_n$ des polynômes appartenant à $\mathbb{K}[X]$ non tous nuls. Soit D un autre polynôme. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathcal{D}(D) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}(A_i)$.

ii) $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $(\forall i \in [\![1, n]\!], P \,|A_i\,) \iff P \,|D$.

ii) D est un PGCD de $A_1, \dots, A_n$.

preuve:

Propriété 15.76 (Relation de Bézout)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \dots, A_n$ des polynômes appartenant à $\mathbb{K}[X]$. Soit D un PGCD des polynômes $A_1, \dots, A_n$. Il existe une liste $(U_1, \dots, U_n)$ de polynômes tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} A_i U_i = D.$$

Propriété 15.77 (Lien entre les PGCD)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \dots, A_n$ des polynômes appartenant à $\mathbb{K}[X]$ non tous nuls. Si D_1 et D_2 sont deux PGCD de $A_1, \dots, A_n$, alors ils sont associés.

Définition 15.78 ()

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \dots, A_n$ des polynômes appartenant à $\mathbb{K}[X]$ non tous nuls . Il existe un seul PGCD de $A_1, \dots, A_n$ unitaire. On le note $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$.

Définition 15.79 (Polynômes premiers entre eux)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \dots, A_n$ des éléments de $\mathbb{K}[X]$.
On dit que les polynômes $A_1, \dots, A_n$ sont **premiers entre eux (dans leur ensemble)** si $A_1 \wedge \dots \wedge A_n = 1$.

Définition 15.80 (Polynômes deux à deux premiers entre eux)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des éléments de $\mathbb{K}[X]$.
On dit que les polynômes $A_1, \ldots, A_n$ sont **deux à deux premiers entre eux** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Longrightarrow A_i \wedge A_j = 1$.

✓ Si des polynômes sont deux à deux premiers entre eux, alors ils sont premiers entre eux dans leur ensemble. Mais la réciproque n'est pas vraie. Il suffit de considérer les polynômes : $A = (X-1)(X-2)$, $B = (X-1)(X-3)$ et $C = (X-2)(X-3)$.

6 Polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$

6.1 Définition et premières propriétés

Définition 15.81 (Polynôme irréductible)

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **irréductible** lorsqu'il est non constant et :

$$\forall (A,B) \in (\mathbb{K}[X])^2, P = AB \Longrightarrow (\deg(A) = 0 \,\text{ou}\, \deg(B) = 0).$$

Autrement dit, un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible si et seulement si il est non constant et ses diviseurs sont les éléments inversibles de $\mathbb{K}$ et les polynômes associés à P.

Exemples : Le polynôme $X-1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, en revanche le polynôme X^2+4 est irréductible sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{C}$.

Propriété 15.82 (diviseur)

Soient P un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ et $A \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$P \,|\, A \text{ ou } P \wedge A = 1.$$

✓ Cette propriété implique en particulier, que si P un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ et $A \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ et $\deg(P) < \deg(A)$, alors $P \wedge A = 1$.

Lemme 15.83 (2 polynômes irréductibles)

Soient P et Q deux éléments irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Alors $P \sim Q$ ou $P \wedge Q = 1$.

Propriété 15.84 (Lemme d'Euclide)

Soit P un polynôme irréductible et A et B deux polynômes. Alors :

$$P \,|\, AB \Longrightarrow (P \,|\, A \text{ ou } P \,|\, B).$$

6.2 Décomposition en produit de facteurs irréductibles

Lemme 15.85 (produits)

Soient $P_1, \dots, P_n$ des polynômes irréductibles deux à deux non associés. Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^N$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^N$ deux n-uplets d'entiers naturels. Alors

$$\left(\prod_{k=1}^{n} P_k^{a_k}\right) \Bigg| \left(\prod_{k=1}^{n} P_k^{b_k}\right) \iff (\forall k \in [\![1, n]\!], a_k \leq b_k)\,.$$

Théorème 15.86 (décomposition)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. Il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, un n-uplet $(P_1, \dots, P_n)$ de polynômes irréductibles <u>unitaires</u> deux à deux distincts , un n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$ d'entiers naturels non nuls, et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tels que :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} P_k^{a_k}.$$

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

✓ Cette propriété de $\mathbb{K}[X]$ porte un nom : Les algébristes disent que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau factoriel.

✓ Un polynôme est scindé si et seulement si ses diviseurs irréductibles sont tous de degré 1.

Exercice 15.4 **Contenu d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$.**

Soit P un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$.
On appelle **contenu** du polynôme P, et l'on note $c(P)$, le PGCD des coefficients de P.
On dit que P est primitif si $c(P) = 1$.

1) Soit $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$. Calculer $c(nP)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Montrer que le produit de deux polynômes primitifs est primitif.

3) Soient P et Q deux polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{Z}$, montrer que $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

4) Soit $A \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et $P \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire, tels que P divise A dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que $P \in \mathbb{Z}[X]$. (Un polynôme unitaire irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ est donc aussi irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$).

6.3 Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Théorème 15.87 (de D'Alembert-Gauss)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

preuve : voir par ailleurs.

Corollaire 15.88 (Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$)

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

preuve:

Corollaire 15.89 (Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$)

Soit $A \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines deux à deux distinctes de P et $r_1, \ldots, r_n$ leurs ordres de multiplicité respectifs. Soit λ le coefficient dominant de P. On a :

$$A = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)^{r_k}.$$

✓ Cette propriété indique que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

✓ D'après **15.85** et **15.87** cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Ptitexo: *Décomposer en produit d'irréductibles le polynôme de* $\mathbb{C}[X]$, $A = X^8 - 1$.

Ptitexo: *Décomposer en produit d'irréductibles le polynôme de* $\mathbb{C}[X]$, $B = X^5 + 1$.

6.4 Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Il y a évidemment dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes irréductibles qui ne sont pas de degré 1, par exemple $X^2 + 1$.

Lemme 15.90 (cas particulier)

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit $A \in \mathbb{R}[X]$. L'ordre de multiplicité de α en tant que racine de A dans $\mathbb{C}[X]$ est égal à l'ordre de multiplicité de $\overline{\alpha}$ en tant que racine de A dans $\mathbb{C}[X]$.

preuve:

Propriété 15.91 (Irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$)

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les trinômes du second degré de discriminant strictement négatif.

preuve:

Corollaire 15.92 (Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$)

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant. Soient $a_1, \ldots, a_n$ les racines deux à deux distinctes de P et $r_1, \ldots, r_n$ leurs ordres de multiplicité respectifs. Soit λ le coefficient dominant de P. Il existe $m \in \mathbb{N}$ couples deux à deux distincts de réels $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_m, \beta_m)$ tels que $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $\alpha_i^2 - 4\beta_i < 0$ et des entiers $l_1, \ldots, l_m$

$$A = \lambda \left(\prod_{k=1}^{n} (X - a_k)^{r_k} \right) \left(\prod_{i=1}^{m} (X^2 + \alpha_i X + \beta_i)^{l_i} \right).$$

✓ Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Ptitexo: *Décomposer en produit d'irréductibles le polynôme de $\mathbb{R}[X]$, $A = X^8 - 1$.*

Ptitexo: *Décomposer en produit d'irréductibles le polynôme de $\mathbb{R}[X]$, $B = X^5 + 1$.*

Ptitexo: $P = X^4 + X^3 - 10X^2 + 2X - 24$ *Vérifier que $\sqrt{2}i$ est racine de P, en déduire la décomposition de P dans $\mathbb{R}$.*

7 Interpolation de Lagrange (M.P.)

Position du problème

On se donne n éléments $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ de $\mathbb{K}^2$. On cherche à savoir s'il existe un polynôme P qui vérifie $\forall i = 1, \ldots, n$, $P(x_i) = y_i$.

La réponse est évidemment négative, s'il existe deux éléments (x_i, y_i) et (x_j, y_j) tels que $x_i = x_j$ et $y_i \neq y_j$. On va donc supposer à présent que les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts.

Dans le cas, où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ cela revient à rechercher une fonction polynomiale dont la courbe représentative passe par les points de coordonnées $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

Ptitexo: *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Soit $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$.*
Montrer que si P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ qui vérifient $\forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = y_i$ et $\forall i \in [\![1, n]\!], Q(x_i) = y_i$, alors $P - Q$ est divisible par $\prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$.
Montrer qu'il existe au plus un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$ vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = y_i$.

Propriété 15.93 (Polynôme de Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Il existe une unique famille de polynômes $L_1, \ldots, L_n \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, L_i\left(x_j\right) = \delta_{i,j}.$$

On a $\forall i \in [\![1,n]\!]$:

$$L_i = \prod_{1 \leq k \leq n, k \neq i} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

Les polynômes de cette famille sont appelés **polynômes de Lagrange** associés à la famille $(x_1, \ldots, x_n)$.

preuve:

Ptitexo: *Quels sont les polynômes de Lagrange associés à la famille* $(2,4,6)$ *?*

Propriété 15.94 ()

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Soit $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$.
Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], P\left(x_i\right) = y_i.$$

et l'on a $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i L_i$. où $(L_1, \ldots, L_n)$ sont les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $x_1, \ldots, x_n$.

preuve:

Corollaire 15.95 ()

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Soit $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$. Soient $(L_1, \ldots, L_n)$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $x_1, \ldots, x_n$. On a

$$\left\{ P \in \mathbb{K}[X] \;\middle|\; \forall i \in [\![1,n]\!], P\left(x_i\right) = y_i \right\} = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i + \left(\prod_{i=1}^{n} \left(X - x_i\right) \right) \mathbb{K}[x].$$

✓ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Si $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction. Il existe un unique polynôme P de degré au plus $n-1$ tel que :
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P\left(x_i\right) = f\left(x_i\right)$. On l'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange de f associé à la famille $x_1, \ldots, x_n$.

Ptitexo: *Déterminer un polynôme* P *de degré au plus* 2 *qui vérifie* $P(2) = \sqrt{2}$, $P(3) = \pi$, $P(6) = 2\pi$.

Ptitexo: *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Soient* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ *un* n*-uplet d'éléments de* $\mathbb{K}$ *deux à deux distincts. Soient* $L_1, \ldots, L_n$ *les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à* $x_1, \ldots, x_n$. *Que vaut* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i$ *?*

Ptitexo: *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Soient* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *un* n*-uplet de réels deux à deux distincts. Soit* $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *un* n*-uplet de réels. Soient* $L_1, \ldots, L_n$ *les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à* $x_1, \ldots, x_n$*. Déterminer une CNS pour que l'on ait :*

$$\deg\left(\sum_{i=1}^{n} y_i L_i\right) \leq 1.$$

Chapitre 16 - Fractions rationnelles

(uniquement M.P.)

Archimedes will be remembered when Aeschylus is forgotten, because languages die and mathematical ideas do not. "Immortality" may be a silly word, but probably a mathematician has the best chance of whatever it may mean. G. H. Hardy

Dans tout ce chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{C}$ ou le corps $\mathbb{R}$.

1 Corps des fractions rationnelles

1.1 Propriétés élémentaires de $\mathbb{K}(X)$

On admet qu'il existe un corps $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ dont $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un sous-anneau et qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall F \in \mathbb{K}(X), \exists (A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}), F = \frac{A}{B}.$$

Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés les fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On verra bientôt que $(\mathbb{K}(X), +, \times, .)$ est en fait une $\mathbb{K}$-algèbre dont $\mathbb{K}[X]$ est une sous-algèbre.
On a de plus les propriétés calculatoires suivantes :

Propriété 16.1 ()

Soient P_1, P_2, Q_1, Q_2 des éléments de $\mathbb{K}[X]$ tels que $Q_1 \neq 0$ et $Q_2 \neq 0$.

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \Longleftrightarrow P_1 Q_2 = P_2 Q_1,$$

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2},$$

$$\frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}.$$

Définition 16.2 (Représentant d'une fraction rationnelle)

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.
$(-)$ On appelle **représentant** de F tout couple $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ tel que :

$$F = \frac{A}{B}.$$

$(-)$ On appelle **représentant irréductible** de F tout représentant (A, B) de F tel que $A \wedge B = 1$.
$(-)$ On appelle **représentant irréductible unitaire** de F tout représentant (A, B) de F tel que $A \wedge B = 1$ et B unitaire.

Exemple : Le couple $((X-2), X)$ est un représentant irréductible unitaire de la fraction rationnelle $1 - \dfrac{2}{X}$.

Propriété 16.3 ()

Soit F une fraction rationnelle.
(−) La fonction F admet un représentant irréductible.
(−) Étant donné (A_0, B_0) un représentant irréductible de F, les représentants de F sont les couples de la forme (PA_0, PB_0) pour $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.
(−) La fraction F admet un unique représentant irréductible et unitaire.

preuve:

1.2 Degré d'une fraction rationnelle

Propriété 16.4 (Définition du degré d'une fraction rationnelle)

Soit F une fraction rationnelle. La quantité $\deg(A) - \deg(B) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ne dépend pas du choix d'un représentant (A, B) de F, et est appelé degré de la fraction rationnelle F et notée $\deg(F)$.

preuve:

Exemples :

1. La fraction rationnelle $\dfrac{X^2 - X - 1}{X^3 + 2X + 3}$ est de degré -1.
2. La fraction rationnelle $\dfrac{X^4 - X^3 + 2}{2X^4 + 2X + 3}$ est de degré 0.

Propriété 16.5 (Degré et opérations sur les fractions rationnelles)

Soient F_1 et F_2 deux fractions rationnelles.
(−) $\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg(F_1), \deg(F_2))$.
(−) Si $\deg(F_1) \neq \deg(F_2)$, alors $\deg(F_1 + F_2) = \max(\deg(F_1), \deg(F_2))$.
(−) $\deg(F_1 F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$.
(−) Si $F_2 \neq 0$, alors $\deg\left(\dfrac{F_1}{F_2}\right) = \deg(F_1) - \deg(F_2)$.
(−) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\deg(\lambda F) = \deg(F)$.

1.3 Racines et pôles d'une fraction rationnelle

Définition 16.6 (racines, pôles)

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Soit (A, B) le représentant irréductible unitaire de F.
Les racines de A sont appelées les racines de F.
Les racines de B sont appelées les pôles de F.
Étant donné une racine a de A, on appelle ordre de multiplicité de a en tant que racine de F son ordre de multiplicité en tant que racine de A.
Étant donné une racine a de B, on appelle ordre de multiplicité de a en tant que pôle de F son ordre de multiplicité en tant que racine de B.

✓ Si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors son unique représentant irréductible en tant qu'élément de $\mathbb{K}(X)$ est $(P, 1)$. On note alors que la définition des racines de P et de leurs multiplicités en tant qu'éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont cohérentes avec leur définition en tant qu'éléments de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple :

Si $F = \dfrac{(X-1)^3(X+2)^5}{3(X-3)^4}$, alors F admet deux racines 1 et -2 de multiplicités respectives 3 et 2. F n'admet qu'un seul pôle 3 de multiplicité 4.

✓ Un scalaire ne peut pas être simultanément une racine et un pôle d'une fraction rationnelle.

✓ L'ensemble des pôles d'une fraction rationnelle est fini. L'ensemble des racines d'une fraction rationnelle non nulle est fini.

✓ On peut comme pour les polynômes parler de pôle ou de racine simple, double, multiple...

Propriété 16.7 (Détermination pratique des ordres de multiplicité)

Soit $F \in \mathbb{K}[X]$ une fraction rationnelle qui admet (A, B) pour représentant. Soit $a \in \mathbb{K}$. On note m (resp. n) l'ordre de multiplicité de a en tant que racine de A (resp. de B).

- Si $m > n$, alors a est une racine de F et son ordre de multiplicité est $m - n$.
- Si $m > n$, alors a est un pôle de F et son ordre de multiplicité est $n - m$.
- Si $m = n$, alors a n'est ni une racine ni un pôle de F.

preuve:

Exercice 16.1

Soient F_1 et F_2 deux fractions rationnelles. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{K}$. Si a n'est ni un pôle de F_1 ni un pôle de F_2, alors a n'est pas un pôle de $F_1 + \lambda F_2$.

1.4 Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle

Lemme 16.8 ()

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle. Soit x un élément de $\mathbb{K}$ qui n'est pas un pôle de F. La quantité $\dfrac{A(x)}{B(x)} \in \mathbb{K}$ ne dépend pas du choix du représentant (A, B) de F tel que $B(x) \neq 0$. On notera $F(x)$ cette quantité dans la suite.

preuve:

Définition 16.9 (Fonction rationnelle)

Soit $F \in \mathbb{K}[X]$ une fraction rationnelle. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de F. La fonction

$$\tilde{F} : \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto F(x)$$

est appelée **fonction rationnelle** associée à F.

✓ On dira bientôt que l'application $F \mapsto \tilde{F}$ est un morphisme d'algèbre de de $(K(X), +, \times, \bullet)$ vers $(\mathcal{PK}, +, \times, \bullet)$ où l'on note $\mathcal{PK}$ l'ensemble des fonctions définies en tous les points de $\mathbb{K}$ sauf en un nombre fini de points et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exercice 16.2 Composition d'une fraction rationnelle et d'un polynôme

---

Soient F une fraction rationnelle et P un polynôme non constant.

1) Montrer que la fraction rationnelle $\dfrac{A(P(X))}{B(P(X))}$ ne dépend pas du choix du représentant (A, B) de F. On la note $F \circ P$.

2) Que peut-on dire de $\deg(F \circ P)$?

---

2 Décomposition en éléments simples

2.1 Partie entière d'une fraction rationnelle

Propriété 16.10 (Partie entière)

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $(P, F) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$F = P + F_1 \text{ et } \deg(F_1) < 0.$$

Le polynôme P est appelé **la partie entière de** F, on le note $E(F)$.

✓ $E(F)$ est l'unique polynôme P tel que $\deg(F - P) < 0$.

✓ On notera bientôt que les ensembles $\mathbb{K}[X]$ et $\left\{ F \in \mathbb{K}(X) \,\middle|\, \deg(F) < 0 \right\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $K(X)$.

Ptitexo: *Déterminer la partie entière de chacune des fractions :*

$$F_1 = \frac{X^3 + 2X^2 + 1}{X^3 + X} \quad \text{et} \quad G_1 = \frac{X^5 - 5X + 1}{X^2 - X - 1}.$$

2.2 Théorie de la décomposition en éléments simples

Exercice 16.3 **Partie polaire d'un élément de $\mathbb{K}(X)$**

---

1) Soit $a \in \mathbb{C}$. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\lambda_n \neq 0$. Soit F une fraction rationnelle dont a n'est pas un pôle. Montrer que a est un pôle d'ordre n de la faction rationnelle $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{(X - a)^k} \right) + F$.

2) a) Soit F une fraction rationnelle et a un pôle de F. Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{N}^*$ et un unique m-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que $\lambda_m \neq 0$ et a ne soit pas un pôle de $F - \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{(X - a)^k}$.

b) Montrer qu'alors m est l'ordre de a en tant que pôle de F. *La fraction rationnelle* $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{(X-a)^k}$ *est appelée* **partie polaire de F relativement à** a.

3) Soit a est un pôle non réel d' une fraction rationnelle F à coefficients réels.

a) Montrer que $\overline{a}$ est encore un pôle de F.

b) Montrer que les parties polaires $\overline{a}$ et a ont des parties polaires conjuguées.

Propriété 16.11 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.)

Soit F un élément de $\mathbb{C}(X)$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de F. Pour $a \in \mathcal{P}$, on note $\operatorname{pol}_a(F)$ la partie polaire de F relativement à a. On a alors :

$$F = E(F) + \sum_{a \in \mathcal{P}} \operatorname{pol}_a(F).$$

preuve:

✓ Ce résultat est évidemment faux si l'on se place dans le corps $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients réels. Il suffit , par exemple de penser à la fraction $\dfrac{1}{X^2+1}$.

Théorème 16.12 (Décomposition dans $\mathbb{K}(X)$)

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle dont le représentant irréductible unitaire est (A, B).
Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que la décomposition en produit de facteurs irréductibles de B dans $\mathbb{K}[X]$ soit :

$$B = \prod_{i=1}^{n} Q_i^{r_i}.$$

(où les Q_i sont des polynômes irréductibles deux à deux distincts et les r_i des entiers naturels).
Alors, il existe un unique polynôme E et une unique famille de polynômes $(P_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r_i]\!]}$ tels que :

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{P_{i,j}}{Q_i^j} \right)$$
$$\deg\left(\frac{P_{i,j}}{Q_i}\right) < 0$$

Le polynôme E est alors la partie entière de la fraction F.
Cette décomposition s'appelle **décomposition en éléments simples** de la fraction F.

✓ Si l'on travaille sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors les polynômes irréductibles $P_{i,j}$ sont de la forme $X - a_i$ où a_i est un pôle de F, les polynômes $(P_{i,j})_{1 \le j \le r_j}$ sont des constantes, et $\displaystyle\sum_{j=1}^{r_j} \frac{P_{i,j}}{(X-a_i)^j}$ est la partie polaire de la fraction F associée au pôle a_i. On retrouve donc la propriété 16.11

✓ Si l'on travaille sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors les polynômes irréductibles $P_{i,j}$ sont de la forme $X - a_i$ où a_i est un pôle de F ou bien ce sont des trinômes du second degré de discriminant strictement négatifs.

2.3 Méthodes pratiques de décomposition en éléments simples

2.3.1 Calculs de parties polaires

Propriété 16.13 (Pôle simple)

Soit $F \in \mathbb{K}[X]$ une fraction rationnelle de représentant irréductible (P, Q) admettant a pour pôle simple. Alors la partie polaire associée à a est $\dfrac{\lambda_a}{X-a}$ avec $\lambda_a = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$. Le scalaire λ_a est appelé le résidu de F au pôle a.

preuve:

Ptitexo: *Déterminer la partie polaire associée à* i *puis celle associée à* $-$i *de la fraction* $\dfrac{X^5+2X+1}{(X^3-1)(X^2+1)}$. *Déterminer enfin la partie polaire associée à* 1.

Propriété 16.14 ()

Soit $F \in \mathbb{K}[X]$ une fraction rationnelle de représentant irréductible (P, Q) admettant a pour pôle d'ordre 2. Il existe alors $Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tel que a n'est pas une racine de Q_2 et $(X-a)^2 Q_2 = Q$. La partie polaire relative au pôle a est $\dfrac{\lambda_1}{X-a} + \dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2}$ avec

$$\lambda_2 = \frac{P(a)}{Q_2(a)}$$

et λ_1 est égal à 0 ou au résidu au pôle a de la fraction rationnelle $F - \dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2}$.

preuve:

Ptitexo: *Déterminer la partie polaire associée à* 1 *puis celle associée à* -1 *de la fraction* $\dfrac{X^5+2X+1}{(X^3-1)(X^4-1)}$.

Exercice 16.4

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle (de réprésentant irréductible (A, B)) et a un pôle d'ordre n de F. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les complexes tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{(X-a)^k}$

soit la partie polaire de F relativement à a. Notons $Q = \dfrac{B}{(X-a)^n}$.

1) Prouver que $\lambda_n = \dfrac{A(a)}{Q(a)}$.

2) En déduire que $\lambda_n = \dfrac{n!A(a)}{B^{(n)}(a)}$.

2.3.2 Le cas particulier $\dfrac{P'}{P}$

Propriété 16.15 ()

Soit P un polynôme non constant scindé de $\mathbb{K}[X]$. Notons $a_1, \dots, a_N$ ses racines et $r_1, \dots, r_N$ les ordres de multiplicités de ces racines. On a

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{N} \frac{r_k}{X - a_k}.$$

preuve:

Exercice 16.5

Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. On suppose que P admet n racines réelles distinctes. Montrer que $P''P - P'^2$ ne prend que des valeurs strictement négatives.

2.3.3 Décompositions en éléments simples sur $\mathbb{C}[X]$

Pour rechercher la décomposition en élément simples d'une fraction rationnelle :
$(-)$ On commence par déterminer la partie entière de cette fraction rationnelle, souvent à l'aide d'une division euclidienne.
$(-)$ On recherche ensuite les pôles de F pour établir la forme de la décomposition en élément simples.
$(*)$ Pour les pôles simples ou doubles, on peut utiliser les formules établies précédemment.
$(*)$ On peut aussi utiliser des substitutions habiles notamment $X = +\infty$ ou bien $X = a$ où a est le pôle considéré, (après multiplication par $(X-a)^{n_a}$ où n_a est la multiplicité du pôle a).
$(*)$ On peut parfois s'aider de la parité ou de l'imparité voire d'autres propriétés de symétrie de F.
$(*)$ Dans le cas, d'un pôle unique $\left(F = \dfrac{A}{(X-a)^n}\right)$, on peut s'aider de la formule de Taylor voire simplement appliquer la formule du binôme de Newton à $A(X+a)$.
$(*)$ Il est parfois utile d'utiliser, un développement limité, on rappelle à cet effet la formule suivante :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{0}{o}(x).$$

Exercice 16.6

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ les fractions suivantes :

$$F = \frac{X^4 - 3X + 1}{X(X-1)^2}$$
$$H = \frac{X^2 + X + 1}{(X-1)^2(X+3)^2}$$
$$I = \frac{X^2}{(X^2-1)^2}$$
$$J = \frac{X^5 + 1}{(X-1)^4}$$
$$K = \frac{X+3}{X^2(X^2+1)}$$
$$R_1 = \frac{X^5 + 2X + 1}{(X^3-1)(X^2+1)}$$
$$R_2 = \frac{X^5 + 2X + 1}{(X^3-1)(X^4-1)}$$

2.3.4 Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$.

La plupart du temps, on utilise la décomposition sur $\mathbb{C}(X)$, puis on regroupe les pôles conjugués.

Exercice 16.7

---

1) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$ les fractions suivantes :

$$K = \frac{X+3}{X^2(X^2+1)}$$
$$R_1 = \frac{X^5 + 2X + 1}{(X^3-1)(X^2+1)}$$
$$R_2 = \frac{X^5 + 2X + 1}{(X^3-1)(X^4-1)}$$

2.4 Applications

Parmi les nombreuses applications des décompositions en éléments simples, remarquons qu'il est facile de primitiver une fraction décomposée en élément simples. Il est aussi aisé de déterminer les dérivées successives d'une fraction décomposée en éléments simples :

Exercice 16.8

Déterminer une primitive des fonctions rationnelles suivantes :

$$k : x \mapsto \frac{x+3}{x^2(x^2+1)}$$
$$r_1 : x \mapsto \frac{x^5 + 2x + 1}{(x^3-1)(x^2+1)}$$
$$r_2 x \mapsto \frac{x^5 + 2x + 1}{(x^3-1)(x^4-1)}$$

Chapitre 17 - Introduction aux espaces vectoriels

La première impulsion est venue de considérations sur la signification des nombres négatifs en géométrie. Habitué à voir AB comme une longueur, j'étais néanmoins convaincu que AB = AC + CB, quelle que soit la position de A, B et C sur une droite. Hermann Günther Grassmann.

Dans toute le chapitre, la notation $\mathbb{K}$ désigne un corps. Si l'on veut se conformer à la lettre du programme on prendra $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition

Définition 17.1 ($\mathbb{K}$-espace vectoriel)

On appelle **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** (ou encore espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) tout triplet $(E, +, .)$ formé d'un ensemble E, d'une loi de composition interne $+$ et d'une **loi externe** :

$$. : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E,\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda.x.$$

qui satisfont aux conditions suivantes :

i) $(E, +)$ est un groupe abélien. (associativité, élément neutre, inverse, commutativité)
ii) $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$.
iii) $\forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E, (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$.
iv) $\forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E, \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.
v) $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}}.x = x$.

1.2 Espaces vectoriels usuels

1.2.1 Premiers exemples

Exemples :

1. L'ensemble des vecteurs du plan euclidien muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.
2. L'ensemble des vecteurs de l'espace euclidien muni de de l'addition et la multiplication par un réel est un espace vectoriel.
3. L'ensemble $\{0_{\mathbb{K}}\}$ muni des seules lois possibles, a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On l'appelle espace vectoriel nul.
4. $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 17.1

Soit $(A, +, \times)$ un anneau dont $\mathbb{K}$ est un sous-anneau. On définit alors l'application :

$$\mathbb{K} \times A \to A, (\lambda, x) \mapsto \lambda \times x$$

Montrer que $(A, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemples (suite) :

1. En utilisant $. : \mathbb{R}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ (x,z) \longmapsto xz$, l'espace $(\mathbb{C},+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. En utilisant $. : \mathbb{K}\times\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X],\ (a,P) \longmapsto a\times P$ et l'addition des polynômes, l'espace $(\mathbb{K}[X],+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En utilisant les lois induites sur $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Définissons les applications :
   $$+ : \mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ (x_1,\dots,x_n)\times(y_1,\dots,y_n) \longmapsto (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$
   $$. : \mathbb{K}\times\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ \lambda\times(x_1,\dots,x_n) \longmapsto (\lambda_1 x_1,\dots,\lambda_n x_n)$$
   On vérifie alors que $(\mathbb{K}^n,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
4. Soit I une partie de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\left(\mathbb{R}^I,+,.\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, munis des opérations usuelles sur les fonctions, les ensembles $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$, sont des espaces vectoriels.

1.2.2 Espaces vectoriels produits

Propriété 17.2 (Espace vectoriel produit)

Soient $(E,+',\times')$ et $(F,+'',\times'')$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit les lois :

$$+ : (E\times F)\times(E\times F) \longrightarrow E\times F,\ ((x,y),(x',y')) \longmapsto (x+'x', y+''y').$$

et

$$\times : \mathbb{K}\times(E\times F) \longrightarrow E\times F,\ (\lambda,(x,y)) \longmapsto (\lambda\times' y, \lambda\times'' y').$$

Alors l'espace $(E\times F,+,\times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On l'appelle **espace vectoriel produit** des espaces vectoriels $(E,+',\times')$ et $(F,+'',\times'')$.

preuve:

✓ Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$. On remarque que pour les lois usuelles, le produit des espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+p}$.

✓ on généralise sans peine cette définition au cas d'un nombre fini d'espaces vectoriels.

1.2.3 Structure d' espace vectoriel sur $\mathcal{F}(X,E)$

Propriété 17.3 (L'espace vectoriel $(\mathcal{F}(X,E),+,.)$)

Soit $(E,+,\times)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et X un ensemble. On définit les lois suivantes :

$$+ : \mathcal{F}(X,E)\times\mathcal{F}(X,E) \longrightarrow \mathcal{F}(X,E),\ (f,g) \longmapsto [x\mapsto f(x)+g(x)]$$

et

$$. : \mathbb{K}\times\mathcal{F}(X,E) \longrightarrow \mathcal{F}(X,E),\ (\lambda,f) \longmapsto [x\mapsto \lambda\times f(x)]$$

Alors $(\mathcal{F}(X,E),+,.)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

preuve:

Exemples :

1. Pour toute partie X de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, muni des opérations usuelles est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
2. L'ensemble des suites réelles, muni des opérations usuelles est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
3. L'ensemble des suites complexes, muni des opérations usuelles est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

1.3 Calculs dans un espace vectoriel

1.3.1 Règles de calcul

Propriété 17.4 (Lien entre itérés et multiplication par un scalaire)

On considère $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in E$, on a :

$$(k \cdot 1_{\mathbb{K}}) \cdot x = k \cdot x.$$

preuve:

✓ Si l'on travaille avec un corps $\mathbb{K}$ qui contient $\mathbb{Z}$, alors pour tout entier k et tout vecteur x de E, l'itéré k-ème de x par le scalaire k est le produit de x par k.

Propriété 17.5 (Règles de calcul dans un espace vectoriel)

On considère $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. Pour tous vecteurs u, v, x, y de E, si 0_E est le vecteur nul de E :
(−) $u + x = v + x \Longrightarrow u = v$;
(−) $u + x = v \Longrightarrow x = v - u$;
(−) $0 \cdot x = 0_E$;
(−) $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$;
(−) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$;
(−) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$;
(−) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \cdot x = \mu \cdot x \Longleftrightarrow \lambda = \mu$ ou $x = 0_E$;
(−) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$ et $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$;
(−) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot x = \lambda \cdot y \Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = y$.

En résumé : on applique les ≪ règles standards ≫ de calcul en s'interdisant d'écrire :
(−) des produits de vecteurs ;
(−) des produits de vecteurs par des nombres dans cet ordre.

Ptitexo: *Soit Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Pour $a \in E$, on note $\mathbb{K}a = \{\, \lambda \cdot a \mid \lambda \in \mathbb{K} \,\}$.*
Que vaut $\mathbb{K}0_E$?
Soient a et b deux éléments non nuls de E.
Montrer que $b \in \mathbb{K}a \Longleftrightarrow a \in \mathbb{K}b$.

1.3.2 Combinaisons linéaires

Définition 17.6 (Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs)

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ et $(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$. Le vecteur de E donné par $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.x_k$ est appelé **la combinaison linéaire** de la famille de vecteurs $(x_1,\ldots,x_n)$ affectée des coefficients $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

Exemples :

1. Dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\left(\mathbb{R}^2,+,.\right)$ le vecteur $(3,-2)$ est la combinaison linéaire de la famille de vecteurs $((1,0),(0,1))$ affectée des coefficients $(3,-2)$.

2. Dans le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(\mathbb{K}[X],+,.)$ le vecteur $2+3X-5X^2+7X^3$ est la combinaison linéaire de la famille de vecteurs $\left(1,X,X^2,X^3\right)$ affectée des coefficients $(2,3,-5,7)$.

Ptitexo: *Soit* $u_1=(1;0;-3)$ *;* $u_2=(2;-1;5)$ *et* $u_3(3;-2;13)$ *trois vecteurs de* $\mathbb{R}^3$*.* u_3 *est-il combinaison linéaire de* u_1 *et* u_2 *?*

Ptitexo: *Dans* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, soit* $f:x\mapsto\sin(x+1)$ *,* $g:x\mapsto\cos(x)$ *,* $h:x\mapsto\sin(x)$ *et* $f_1:x\mapsto\sin^2(x)$*. La fonction* f *est-elle combinaison linéaire de* g *et* h *?* f_1 *?*

'Plusieurs combinaisons linéaires peuvent donner un même vecteur, par exemple dans $\mathbb{R}[X]$:
$P=X^2+1$, $Q=X^2-1$, $R=5$: $4P+2Q-R=6X^2-3=-P+7Q+R$

Propriété 17.7 (Calculs sur les combinaisons linéaires)

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, $(\mu_1,\ldots,\mu_n)\in\mathbb{K}^n$ et $(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.x_k+\sum_{k=1}^{n}\mu_k.x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k+\mu_k\right).x_k$$

et

$$\lambda.\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda\lambda_k\right).x_k.$$

preuve:

Définition 17.8 (Famille presque nulle)

Soit $\mathbb{K}$ un corps et I un ensemble quelconque. Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille indicée sur I d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est **presque nulle** ou (**à support fini**) si l'ensemble $\left\{i\in I\;\middle|\;\lambda_i\neq 0\right\}$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments.

Définition 17.9 (C. linéaire d'un nb. quelconque de vecteurs)

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit I un ensemble quelconque. Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille presque nulle d'éléments de $\mathbb{K}$. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Il existe un entier $r\in\mathbb{N}$ et un nombres fini d'indices $i_1,\dots,i_r$ tels que

$$\left\{i\in I \;\middle|\; \lambda_i\neq 0\right\}=\{i_1,\dots,i_r\}.$$

Le vecteur de E, $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\lambda_{i_k}.x_{i_k}$ est appelé **la combinaison linéaire** de la famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ affectée des coefficients $(\lambda_i)_{i\in I}$.
On la note $\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$.

Exemple :
Tout élément de $\mathbb{K}[X]$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2 Sous espaces vectoriels

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 17.10 (Sous-espace vectoriel)

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $F\subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :
F est un sous-groupe de $(E,+)$
tel que $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall x\in F$, $\lambda.x\in F$.

Propriété 17.11 (Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel)

Si F est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$, alors F est lui-même un espace vectoriel pour les lois induites par $+$ et $.$ sur F.

preuve:

Exemples :

1. $(\mathbb{R},+,.)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$.
2. $(\{0_E\},+,.)$ est sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$.

✓ Tout sous-espace vectoriel contient 0_E.

<u>Ptitexo:</u>
L'ensemble $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\neq y\right\}$ *est-il un sous-espace vectoriel de* $(\mathbb{R}^2,+,.)$ *?*
L'ensemble $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\neq y\right\}\cup\{(0,0)\}$ *est-il un sous-espace vectoriel de* $(\mathbb{R}^2,+,.)$ *?*
L'ensemble C *des suites convergentes est-il un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles ?*

Propriété 17.12 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit F un ensemble. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :
i) $F \subset E$.
ii) $F \neq \emptyset$.
iii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall (x, y) \in F^2$, $\lambda x + \mu y \in F$.

preuve:

Exemples :
$(-)$ Soit E un $\mathbb{K}$e.v. ; u et v deux vecteurs non colinéaires de E. On définit $P = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; w = au + bv, (a, b) \in \mathbb{K}^2 \right\}$: P est un plan vectoriel de E.
$(-)$ Soit $\mathbb{K}_n[X] = \left\{ P \in \mathbb{K}[X] \;\middle|\; \deg(P) \leqslant n \right\}$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un s.e.v. de $\mathbb{K}[X]$.
$(-)$ Soit $F = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; f\, paire \right\}$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

✓ La plupart du temps, pour prouver qu'un espace est un espace vectoriel, on utilise ce théorème (et très rarement la définition)

Ptitexo:

1. *L'ensemble des fonctions affines est-il un sous-espace vectoriel de* $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, .\right)$ *?*
2. *L'ensemble des fonctions décroissantes est-il un sous-espace vectoriel de* $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, .\right)$ *?*

Ptitexo: *Montrer que si* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$*, alors l'ensemble* $D = \left\{ (x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz = 0 \right\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
Qu'en est-il de $\left\{ (x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz = 2 \right\}$ *?*

✓ Pour tout entier naturel n, l'ensemble $(\mathbb{K}_n[X], +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}[X], +, .)$.

Ptitexo: *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit* $a \in \mathbb{C}$.
Soit $\mathcal{B} = \left\{ P \in \mathbb{C}_n[X] \;\middle|\; P(a) = P'(a) = 0 \right\}$.
Montrer que $\mathcal{B}$ *est un* $\mathbb{C}$*-sous-espace vectoriel de* $\mathbb{C}_n[X]$.

Propriété 17.13 (Droite vectorielle)

Soit x un vecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, .)$. L'ensemble

$$\mathbb{K}x = \left\{ \lambda . x \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle droite vectorielle engendrée par le vecteur x.

preuve:

✓ Si l'on travaille sur $E = \left(\mathbb{R}^2, +, .\right)$ alors toute droite vectorielle peut s'écrire, pour un certain couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, comme l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées (x, y) vérifient $ax + by = 0$.

Propriété 17.14 (combinaison linéaire)

Si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, .)$, alors toute combinaison linéaire d'éléments de F est encore un élément de F.

preuve:

Propriété 17.15 (Intersection de sous-espaces vectoriels)

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel. Soit $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.

preuve:

Propriété 17.16 (Application)

Pour p et n des entiers naturels non nuls, l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de p équations à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^n, +, .)$.

preuve:

✓ La réunion de deux sous-espaces vectoriels est très rarement un sous-espace vectoriel. Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel. Nous y reviendrons plus loin.

Ptitexo: *Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $y' = ay$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

2.2 Sous-espace vectoriel engendré

Définition 17.17 (Sous-espace vectoriel engendré par une partie)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et X une partie de E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par X l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels qui contiennent X. On le note $\mathrm{Vect}\,(X)$.

✓ Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs de E, alors on appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ le plus petit sous-espace vectoriel qui contient tous les vecteurs de cette famille. On le note $\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i \in I}$. On a donc : $\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i \in I} = \mathrm{Vect}\,(\{\, x_i \mid i \in I \,\})$.

Propriété 17.18 (Un Vect est un sous-espace vectoriel)

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et X une partie de E. L'ensemble $\mathrm{Vect}\,(X)$ est un sous-espace vectoriel de E, c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel qui contient tous les vecteurs de X.

✓ Si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient tous les vecteurs de X, alors $\mathrm{Vect}\,(X) \subset F$.

Propriété 17.19 (Carac. des sous-espaces vectoriels engendrés)

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et X une partie de E. $\mathrm{Vect}\,(X)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de X.
En particulier, si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, alors :

$$\mathrm{Vect}\,(x_1,\dots,x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.x_i \;\middle|\; (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

preuve:

Exemples usuels :

1. $\mathrm{Vect}\,(\emptyset) = \{0_E\}$.
2. Si x est un vecteur du $\mathbb{K}-$espace vectoriel E, alors $\mathrm{Vect}\,(x) = \mathbb{K}.x$ est la droite vectorielle engendrée par x.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}\,\left(X^0, X^1, \dots, X^n\right) = \mathbb{K}_n[X]$.
4. Dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $(\mathbb{C},+,.)$, $\mathrm{Vect}\,((1,0)) = \mathbb{R}$.

Ptitexo: *Pour chacun des cas suivants, montrer que F est un s.e.v. de E, engendré par les vecteurs que l'on précisera.*

1. (−) $E = \mathbb{R}^3$ $F_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - 2y + 3z = 0 \right\}$
   (−) $E = \mathbb{R}^3$ $F_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + y - z = 0 \right\}$
   (−) $E = \mathbb{R}^4$ $F_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x - y + z + 2t = 0 \\ 2x - 4y - z + 5t = 0 \\ 3x - 5y - 3z + 4t = 0 \end{cases} \right\}$
2. *Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, tel que $F_1 \cap F_2 = \mathrm{Vect}\,(w)$.*

Ptitexo: *Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Soit $a \in \mathbb{R}$.*

1. *Démontrer que $F_1 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3\,[X] \;\middle|\; P(5) = 0 \right\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}_3\,[X]$.*
2. *Déterminer une famille $P_1,\dots,P_p$ de p polynômes tels que*

$$F_2 = \mathrm{Vect}\,(P_1,\dots,P_p) = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; P(a) = P'(a) = 0 \right\}.$$

3. *Déterminer, de même, une famille $(P_i)_{i\in I}$ de polynômes tels que*

$$F_3 = \mathrm{Vect}\,(P_i)_{i\in \mathrm{i}} = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; P(a) = P'(a) = 0 \right\}.$$

3 Familles libres, génératrices, bases

3.1 Familles génératrices

Définition 17.20 (Famille génératrice)

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. La famille $(e_i)_{i\in I}$ est **génératrice** de E si et seulement si :

$$E = \text{Vect } (e_i)_{i\in I}\,.$$

Si X est une partie de E, on dit que X est génératrice de E, si

$$E = \text{Vect}\,(X).$$

Propriété 17.21 (Caractérisation des familles génératrices)

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E.

ii) $E = Vect\,(e_i)_{i\in I}$.

iii) Tout vecteur de E s'exprime comme combinaison linéaire des éléments de $(e_i)_{i\in I}$

preuve:

Ptitexo: *Montrer que la famille* $\left(X, X^2+1, X^2, 1\right)$ *est génératrice de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Ptitexo: *Montrer que la famille* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

Ptitexo: *Montrer que la famille* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$.

Ptitexo: *Soit* $E = \mathbb{R}_3[X]$, *et* $F = \left\{ P \in E \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

1. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$.*
2. *Déterminer une famille génératrice de F.*

Ptitexo: *Soit* $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x+y-z-t &= 0 \\ x-y+z-t &= 0 \end{cases} \right\}$.

1. *Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{R}^4,+,.\right)$.*

2. *Déterminer une famille génératrice de F.*

Exemples usuels :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $\left(X^0, \ldots, X^n\right)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$.
3. Travaillons dans $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on définit la suite u^i, par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^i = \delta_{i,n}$. Montrer que la famille $\left(u^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Propriété 17.22 ( )

Une famille génératrice reste génératrice :
$(-)$ si l'on change l'ordre des vecteurs de la famille ;
$(-)$ ou si l'on ajoute ou si l'on retranche à la famille un vecteur qui est combinaison linéaire des autres ;
$(-)$ ou si l'on multiplie un vecteur de la famille par un réel non nul.
$(-)$ Soit $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille génératrice de E et $(v_1, v_2, ..., v_p)$ une famille de vecteurs de E, alors $(v_1, v_2, ..., v_p)$ est une famille génératrice de E si et seulement si les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n$ sont combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_p$

preuve:

Ptitexo: *Démontrer que la famille* $(X + 1?X^2 + X, X^2 + 1, X^2 + X + 1)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}[X]$

3.2 Familles libres

3.2.1 Familles finies

Définition 17.23 (Famille finie libre)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Une famille finie $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de n vecteurs de E est **libre** si,
pour tout n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_i = 0.$$

Autrement dit : une famille finie $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de n vecteurs de E est dite libre si toute combinaison linéaire nulle de ces vecteurs a nécessairement tous ses coefficients nuls. On dit aussi que les vecteurs $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ sont **linéairement indépendants**.

Ptitexo: *Montrer que la famille* $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$ *est libre dans* $\mathbb{R}^3$*.*

Ptitexo: *Montrer que la famille* $(X + 1)^3, (X + 1)^2, (X + 1)$ *est libre dans* $\mathbb{R}_3[X]$.

Ptitexo: *Dans* $\mathbb{R}[X]$ *avec* $P_1 = X^3 + 1$ *;* $P_1 = X^3 - X$ *;* $P_3 = X^2 - X$ *;* $P_1 = X^2 + 1$ *La famille* (P_1, P_2, P_3, P_4) *est-elles libres ?*

Ptitexo: *Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.*
Soient $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $g : x \mapsto \ln(x+1)$ et $h : x \mapsto \sqrt{x}$.
Montrer que la famille (f, g, h) est une famille libre de E.

Définition 17.24 (Vecteurs colinéaires)

Deux vecteurs u et v, d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel sont dits colinéaires s'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$u = \lambda \cdot v \quad \text{ou} \quad v = \lambda \cdot u.$$

✓ En particulier le vecteur nul est colinéaire à tous les autres vecteurs.

✓ La famille (e_1) est libre si et seulement si $e_1 \neq 0_E$.

✓ La famille (e_1, e_2) est libre si et seulement si e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires.

✓ Une famille libre reste libre si l'on change l'ordre des vecteurs de la famille.

✓ Si la famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est libre, alors toutes ses sous-familles sont aussi libres.

Propriété 17.25 (Identification)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit une famille finie $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de n vecteurs du $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, .)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
La famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est libre si et seulement si pour tous n-uplets d'éléments de $\mathbb{K}$ $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i \Longrightarrow \lambda_i = \mu_i \text{ pour tout } i \text{ dans } [\![1, n]\!].$$

Exemple : Dans l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ la famille $(1, X, X^2, X^3)$ est libre, ainsi $bX + (2a-1)X^3 = X + 3X^3$ implique $b = 1$ et $2a - 1 = 3$. (On a ici effectué ce que l'on appelle en langage courant une identification de polynômes).

Ptitexo: *Soit (u, v, w) une famille libre d'un espace vectoriel E. Montrer qu'il existe un unique triplet de réels $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tel que*
$2u + (a+b)v + (b+1)w = (1+c)u + 3v + w$.

Exercice 17.2 **Famille de polynômes échelonnée en degrés**

Soient $P_1, \ldots, P_n$ une famille de n polynômes de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_n$. On suppose que ces degrés sont deux à deux distincts. Montrer que la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Définition 17.26 (Famille liée)

Une famille (finie) qui n'est pas libre est dite **liée**.

Propriété 17.27 (condition nécessaire et suffisante)

La famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est **liée** si et seulement si l'un au moins de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Ptitexo: *Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?*

1. $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix}\right)$

2. $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$

3. $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

4. $\left(\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\8\\9\end{pmatrix}\right)$

Attention : Dans $(\mathbb{C}, +, .)$ considéré comme un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, la famille $(\mathrm{i}, 1)$ est libre. Dans $(\mathbb{C}, +, .)$ considéré comme un $\mathbb{C}-$espace vectoriel, la famille $(\mathrm{i}, 1)$ est liée. En effet $a \times i + b \times 1 = 0$, dans $\mathbb{R}$: $a = b = 0$ et dans $\mathbb{C}$: $a = i; b = 1$.

3.2.2 Familles libres de cardinal quelconque

Définition 17.28 (Famille libre, famille liée)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de vecteurs de E. On dit que cette famille est **libre**, si toute sous-famille finie $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$, $(n \in \mathbb{N},\ (i_1, \ldots, i_n) \in I^n)$ de vecteurs pris dans cette famille est libre.
Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

✓ On peut aussi utiliser cette définition pour une partie quelconque X d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel : une partie $X \subset E$ est libre si et seulement si toute famille finie d'éléments de X est libre. Autrement dit, une partie est libre si toute combinaison linéaire nulle des vecteurs de cette partie a tous ses coefficients nuls.

Cette définition, permet d'étendre la définition d'une famille libre aux familles infinies.
Exemples :

1. La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$ si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle.

2. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites réelles, la famille $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ où pour tout $p\in\mathbb{N}$, la suite u^p est définie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ par, $u_n^p = \left| \begin{array}{l} 1 \ si \ p=n \\ \\ 0 \ \ sinon \end{array} \right.$ est libre.

Propriété 17.29 (conditions libre ou liée)

1. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E. Soit $x\in E$. La famille obtenue par concaténation de (x) et de $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si $x\notin \text{Vect }(x_i)_{i\in I}$.
2. Une famille (x) constituée d'un seul vecteur est libre si et seulement si $x\neq 0$
3. Si une famille $\mathcal{F}=(x_1,x_2,...,x_n)$ est libre alors toute famille contenue dans $\mathcal{F}$ est libre.
4. Si Si une famille $\mathcal{F}=(x_1,x_2,...,x_n)$ est liée alors toute famille contenant $\mathcal{F}$ est liée.
5. Une famille $\mathcal{F}=(x_1,x_2,...,x_n)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des $n-1$ autres.

preuve:

Exercice 17.3

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on définit la fonction $f_\alpha : x \longrightarrow \mathrm{e}^{\alpha x}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

3.3 Bases

Définition 17.30 (Bases)

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit e une famille de vecteurs de E, on dit que e est une **base** de E si elle est libre et génératrice.

Propriété 17.31 (caractérisation)

Si e est une base d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E,+,.)$si et seulement si tout vecteur u de E s'exprime de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de e.
En particulier, si e est une famille finie et $e=(e_1,\ldots,e_n)$:

$$\forall u \in E,\ \exists!(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ \ \lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n = u$$

Dans ce cas, les réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont appelés coordonnées du vecteur u dans la base $(e_1,\ldots,e_n)$.
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque, alors

$$\forall u \in E,\ \exists!(\lambda_i)\in\mathcal{PN}\left(\mathbb{K}^I\right),\ \ u=\sum_{i\in I}\lambda_i u_i.$$

(On a noté $\mathcal{PN}\left(\mathbb{K}^I\right)$, l'ensemble des suites presque nulles (ou à support fini) indicées par I d'éléments de $\mathbb{K}$.)
On doit connaître les bases canoniques (ou usuelles) de certains espaces vectoriels :

1. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. La famille $(1,X,X^2,\ldots,X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

   Ptitexo: *Montrer que* $((1,1),(1,-1))$ *est une base de* $\mathbb{R}$.

   Ptitexo: *Montrer que la famille* $(f_1,f_2,f_3,f_4)=(1,1+X,X+X^2,X^2+X^3)$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$ *et exprimer les coordonnes de* $P=3X-2X^2$ *dans cette base.*

   Ptitexo: *Montrer que la famille* $(u_1,u_2,u_{3)}=(i,1,-1)$ *est une base de* $\mathbb{C}^3$ *et exprimer les coordonnes de* $w=(3+i,1-i,2)$ *dans cette base.*

Exercice 17.4

Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit $p\in\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que la famille $\left(1,(X-a),(X-a)^2,\ldots,(X-a)^p\right)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

2) Soit $P\in\mathbb{R}_p[X]$, exprimer P comme une combinaison linéaire des éléments de cette base.

Exercice 17.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(P_0, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \deg(P_i) = i.$$

Montrer que la la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

---

4 Sommes de sous-espaces vectoriels

4.1 Sommes de deux sous-espaces vectoriels

Définition 17.32 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. On définit l'ensemble :

$$F + G = \left\{ x + y \;\middle|\; (x, y) \in F \times G \right\}.$$

appelé **somme** de F et de G.

Propriété 17.33 (e.v.)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. L'ensemble $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient F et G. Autrement dit, $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$.

preuve:

✓ Si $F \subset G$, alors $F + G = G$.

✓ Soit E un e.v.et u_1, u_2, u_3 trois vecteurs de E. Que vaut $\text{Vect}(u_1, u_2) + \text{Vect}(u_3)$?

Ptitexo: *Montrer que* $\text{Vect}((1,0)) + \text{Vect}((0,1)) = \mathbb{R}^2$.
Montrer que $\text{Vect}((1,0)) + \text{Vect}((2,1)) = \mathbb{R}^2$.

Ptitexo: *Dans* $\mathbb{R}^3$*, donner une équation cartésienne de* $\mathbb{K}(1,1,1) + \mathbb{K}(1,0,-1)$.

4.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition 17.34 (Somme directe)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, .)$. On dit que les espaces F et G sont en **somme directe** ou que la **somme** $F + G$ **est directe** si

$$\forall z \in F + G, \exists!(x, y) \in F \times G, z = x + y.$$

On note alors :

$$F + G = F \oplus G.$$

Ptitexo: *Soient a et b deux vecteurs non colinéaires d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Montrer que la somme $\mathbb{K}.a + \mathbb{K}.b$ est directe.*

Propriété 17.35 (Caractérisation des sommes directes)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, .)$. Les espaces F et G sont en **somme directe** si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

preuve:

Définition 17.36 (Supplémentaires)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, .)$. On dit que F et G sont **supplémentaires** si :

$$E = F \oplus G.$$

Propriété 17.37 (Caractérisation des supplémentaires)

Soient F et deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, .)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Les espaces F et G sont supplémentaires.

ii) $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

iii) $\forall x \in E, \exists! \, (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G$.

preuve:

Exemples :

1. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel$(E, +, .)$. Soit $r \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$\text{Vect }(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect }(e_1, \dots, e_r) \oplus \text{Vect }(e_{r+1}, \dots, e_n).$$

2. Dans $\left(\mathbb{R}^2, +, .\right)$, on a :

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}.(0, 1) \oplus \mathbb{R}.(1, 0).$$

Ptitexo: *Soit $E = \mathbb{R}^3$. Montrer que $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y + z = 0 \right\}$ et $G = \left\{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\right\}$ sont supplémentaires dans E.*

Exercice 17.6 **Fonctions paires et impaires**

Travaillons dans $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, .\right)$. Notons $\mathcal{FP}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{FI}$ l'ensemble des fonctions impaires.

1) Montrer que $\mathcal{FP}$ et $\mathcal{FI}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, .\right)$.

2) Montrer que ces espaces vectoriels sont supplémentaires.

Exercice 17.7

Travaillons dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$. Soit $u = (a, b, c)$ un vecteur non nul.
Soit $P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz = 0 \right\}$.

1) Montrer que $\mathbb{R}.u$ et P sont supplémentaires.

2) Soit $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Donner une CNS sur le vecteur w, pour que $\mathbb{R}.w$ et P soient supplémentaires.

✓ Ce dernier exercice montre qu'un sous-espace vectoriel admet généralement plusieurs supplémentaires.

4.3 Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Définition 17.38 (Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. On définit l'ensemble :

$$F_1 + \cdots + F_n = \left\{ x_1 + \cdots + x_n \;\middle|\; \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in F_i \right\}.$$

appelé **somme** des espaces $F_1, \dots, F_n$.

Propriété 17.39 (e.v.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. L'ensemble $F_1 + \cdots + F_n$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$.

Autrement dit, $F_1 + ... + F_n = \text{Vect}\,(F_1 \cup +... \cup F_n)$.

preuve:

Lemme 17.40 ()

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un même $(E, +, .)$. On a :

$$F + (G + H) = (F + G) + H = F + G + H.$$

preuve:

Corollaire 17.41 ()

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

$$F_1 + \cdots + F_n = (\dots((F_1 + F_2) + F_3) \cdots + F_n)\,.$$

preuve:

Ptitexo: *Montrer que* Vect $((1,0,0))+$Vect $((0,1,0))+$Vect $((0,0,1)) = \mathbb{R}^3$. *Déterminer une équation cartésienne de* Vect $((1,0,0)) +$ Vect $((2,1,1))$.

4.4 Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Définition 17.42 (Somme directe)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. On dit que les espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont en **somme directe** ou que la **somme** $F_1 + \cdots + F_n$ **est directe** si

$$\forall z \in F_1 + \cdots + F_n, \exists! \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in \left(F_1 \times \cdots \times F_n\right), z = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

On note alors :

$$F_1 + \cdots + F_n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i.$$

Ptitexo: *Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre devecteurs d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Montrer que la somme $\mathbb{K}.e_1 + \cdots + \mathbb{K}.e_n$ est directe.*

Propriété 17.43 (Caractérisation des sommes directes)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $+_i^n F_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i$.

ii) $\forall x \in +_i^n F_i, \exists! \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in F_1 \times \cdots \times F_n, x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$

preuve:

Exercice 17.8 **Sous-espaces deux à deux en somme directe**

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, .)$.

1) Montrer que si $F + G + H = F \oplus G \oplus H$, alors les sous-espaces vectoriels F, G et H sont deux à deux en somme directe.

2) La réciproque est-elle vraie ?

Chapitre 18 - Introduction aux applications linéaires

Les mathématiques sont un jeu que l'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles ou des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière. D. Hilbert.

Dans tout ce chapitre, la notation $\mathbb{K}$ désignera un corps quelconque ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si l'on veut se conformer à la lettre du programme). On s'autorisera à écrire « l'espace vectoriel E » au lieu de « le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E,+,.)$ ».

1 Application linéaire

1.1 Généralités

1.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 18.1 (Application linéaire)

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux espaces vectoriels. Soit f une application de E vers F, on dit que l'application f est **linéaire** si :

$$\forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$$

✓ En particulier, on a : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, et $\forall u \in E$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$, et pour tous u et v dans E, $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

Exemples et contre-exemples :

1. $D : f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mapsto f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est linéaire.
2. $I : f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ est linéaire.
3. $\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) \in \mathbb{R}[X]$ est linéaire.
4. Pour $u_0 \neq 0 \in E$, l'application $f : E \longrightarrow E,\ u \longmapsto u+u_0$ n'est pas linéaire, car $f(0_E) \neq 0_E$.
5. L'application $g : x \in \mathbb{R}, \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ n'est pas linéaire, car $g(1+1) \neq g(1)+g(1)$.
6. L'application $h : u \in \mathbb{R}, \mapsto \sin(x) \in \mathbb{R}$ n'est pas linéaire car $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \neq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Ptitexo: *Vérifier que les applications suivantes sont linéaires :*

1. $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x-y-5z, x+y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $g : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ *définie par* $f(P)(X) = XP'(X) + P''(X)$.
3. $h : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ *définie par* $h(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

Propriété 18.2 (caractéristiques)

Soit f une application linéaire de $(E,+,.)$ vers $(F,+,.)$. On a alors :

— $f(0_E)=0_F$

— $\forall n\in\mathbb{N}, \forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$, $\forall(u_1,\dots,u_n)\in E^n$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(u_i).$$

Exemple :
Il est facile de voir que l'application $g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ (x,y)\longmapsto(x+2y-1,x-y)$ n'est pas linéaire.

1.2 Image d'une application linéaire

1.2.1 Définition

Définition 18.3 (image)

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E vers F. On appelle **image de** f, le sous-ensemble de F, noté $\mathrm{Im}(f)$ défini par :

$$\mathrm{Im}(f)=\{\,f(u)\mid u\in E\,\}.$$

Autrement dit, $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble $f(E)$ de toutes les images des vecteurs de E. C'est le sous-ensemble de F (l'espace d'arrivée) formé de tous les vecteurs ayant un antécédent par f dans E.

Propriété 18.4 ($\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel.)

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E vers F. Alors, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble d'arrivée F.

preuve:

Ptitexo: *Vérifier que les applications suivantes sont des applications linéaires, puis déterminer leur image, et donner une base de leur image :*

1. $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}2x-y+z\\x+y+z\\3x+2z\end{pmatrix}.$
2. $g:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}x-y+z\\x+y+z\\x+z\end{pmatrix}.$
3. $\Psi:\mathbb{R}_3[X]\longrightarrow\mathbb{R}_3[X],\ P\longmapsto P(X)-P(X+1).$

4. $\Delta : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X],\ P \longmapsto P(X) - P(X+1).$

1.2.2 Caractérisation de la surjectivité

Propriété 18.5 (Carac. des app. lin. surjectives)

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E vers F, alors l'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = F$.

preuve:

Propriété 18.6 (Image d'une famille génératrice)

Soient E et F deux espaces vectoriels. On suppose que E admet pour base la famille $(e_i)_{i\in I}$. Soit u une application linéaire de E vers F. Alors la famille $(u\,(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de $\mathrm{Im}\,(u)$. C'est à dire que l'on a :

$$\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}\,\left((u(e_i))_{i\in I}\right).$$

Ainsi, l'application linéaire u est-elle surjective si et seulement si la famille $(u\,(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de F .

preuve:

Ptitexo: *Montrer que l'application* $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *définie par* $f(P) = (P(0), P'(0))$ *est surjective.*

Ptitexo: *Montrer que l'application* $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X],\ P \longmapsto P(X+1)$ *est surjective.*

Propriété 18.7 (équivalences)

Soient E et F deux espaces vectoriels. On suppose que E admet une base. Soit l'application linéaire $f : E \mapsto F$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) L'application f est surjective.

ii) L'image par f de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

iii) Il existe une famille génératrice de E dont l'image par f est une famille génératrice de F.

preuve:

1.3 Noyau d'une application linéaire

1.3.1 Définition et premières propriétés

Définition 18.8 (Noyau d'une application linéaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E vers F. On appelle alors **noyau de** f le sous-ensemble de E (espace de départ), noté $\operatorname{Ker}(f)$ défini par :

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ u \in E \;\middle|\; f(u) = 0_F \right\}.$$

Propriété 18.9 ($\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel)

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E vers F. Alors, $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de départ E.

preuve:

✓ En particulier, il est impensable d'écrire $\operatorname{Ker}(f) = \emptyset$. (Comme tous les espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(f)$ contient au moins l'élément neutre 0_E). On n'écrira pas non plus, $Ker(f) = 0_E$. (On écrirait alors qu'un espace vectoriel est égal à un vecteur de ce même espace). [1]

Ptitexo: *Déterminer une base du noyau de chacune des applications linéaires suivantes :*

1. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x,y,z) = (2x+y-z, x+2y)$.
2. $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par* $g(x,y,z) = (2x-y-z, x+y+2z, 3x-3y-4z)$.
3. $h_1 : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par* $h(P) = (P(0), P(1), P(2))$ *et* $h_2 : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ P \longmapsto (P(0), P(1), P(2), P(3))$.
4. $i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto (2x-y+2z, x+y+z, 3x+2z)$.
5. $j : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ P \longmapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$ *où* $a_1, \dots, a_n$ *est une famille de* $n \in \mathbb{N}^*$ *réels distincts.*

1.3.2 Caractérisation des applications injectives

La proposition suivante est la plus utilisée pour montrer qu'une application linéaire est injective :

Propriété 18.10 (Carac. des app. lin. injectives)

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E vers F. Alors :

$$f \text{ est injective si et seulement si } \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

✓ Si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire si u_0 et u_1 sont deux vecteurs de E tels que $f(u_0) = f(u_1)$, alors il existe $w \in \operatorname{Ker}(f)$ tel que $u_0 = u_1 + w$. En effet, par linéarité de f, on a $f(u_0 - u_1) = 0_E$ donc $u_0 - u_1 \in \operatorname{Ker}(f)$, il suffit donc de poser $w = u_0 - u_1$.

Ptitexo: *Déterminer quelles sont les applications injectives parmi les applications f, g, h, i et j définies ci-dessus.*

Ptitexo:

1. Ces deux erreurs sont passibles de peine de mort...

1. *Soit f_t l'application définie pour tout réel t par :*

$$f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ \\ y \\ \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} (1+t)x + y + 2z \\ \\ (2+t)x + y + 3z \\ \\ (-1+2t)x + y \end{pmatrix}.$$

   Pour quelles valeurs de t, l'application f_t est-elle injective ?

2. *Soit l'application $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ \\ y \\ \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ \\ x+y+z \\ \\ x+y+z \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de λ l'application $g - \lambda \mathrm{id} : u \mapsto g(u) - \lambda u$ est-elle injective ?*

Propriété 18.11 (Image d'une base par une injection lin)

Soient E et F deux espaces vectoriels. On suppose que l'espace vectoriel E admet pour base la famille $(e_i)_{i \in I}$. Soit f une application linéaire de E vers F. Alors, l'application linéaire f est injective si et seulement si la famille $(f(e_i))_{i \in I}$ est libre.

On a de plus le résultat plus fort suivant :

Propriété 18.12 (équivalences)

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) L'application f est injective.

ii) L'image par l'application f de toute famille libre de E est une famille libre de F.

preuve:

Ptitexo: *Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que l'application :*

$$\Psi : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X], \; P \longmapsto P(X-a)$$

est bijective. En déduire que la famille $((X-a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$. est libre.

Exercice 18.1

Soit u une application linéaire $E \to F$ et v une application linéaire $F \to G$

1) a) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v \circ u)$.

b) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(v) \cap \mathrm{Im}\,(u) = \{0_F\}$.

2) a) Montrer que $\mathrm{Im}\,(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\,(v)$.

b) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(v) + \mathrm{Im}\,(u) = F$.

Exercice 18.2

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel. Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que $\text{Ker}\,(u)$ et $\text{Im}\,(u)$ sont stables par u, c'est-à-dire que :

$$v\,(\text{Ker}\,(u)) \subset \text{Ker}\,(u) \quad \text{et} \quad v\,(\text{Im}\,(u)) \subset \text{Im}\,(u).$$

1.4 Isomorphismes et automorphismes

Définition 18.13 (Isomorphisme)

On appelle **isomorphisme** toute application linéaire bijective.

Définition 18.14 (Automorphisme d'espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel. On appelle **automorphisme** de E tout isomorphisme de E vers E.

Ptitexo: *Les applications suivantes sont-elles des isomorphismes ? des automorphismes ? :*

— $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto (x+y-z, x-y+z, -x+y+z)$.
— $f_2 : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X],\ (P) \longmapsto (P')$.
— $f_3 : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X],\ (P) \longmapsto (P+P')$.
— $f_4 : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X],\ (P) \longmapsto (XP)$.

Exercice 18.3

Soit E un espace vectoriel. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire. On dit que l'application f est une application linéaire nilpotente s'il existe un indice $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0_E$. (ici, $f^0 = \text{id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}\,(k$ fois).

Montrer que si f est un endomorphisme nilpotent d'indice 2, alors $id + f$ est inversible et déterminer $(id+f)^{-1}$.

Propriété 18.15 (Carac. des isomorphismes par l'image d'une base)

Soient E et F deux espaces vectoriels. On suppose que E admet une base. Soit f une application linéaire de E vers F. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) L'application linéaire f est un isomorphisme.
ii) Il existe une base de E dont l'image par f est une base de F.
iii) L'image de toute une base de E est une base de F.

preuve:

Propriété 18.16 (Réciproque d'un isomorphisme)

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $f : E \mapsto F$ un isomorphisme. Alors, l'application réciproque $f^{-1} : F \mapsto E$ est encore un isomorphisme.

preuve:

Ptitexo: *Soit* $\varphi : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X],\ P(X) \longmapsto P(X+1)$. *Montrer que* φ *est bijective. Déterminer sa réciproque.*

Définition 18.17 (Espaces vectoriels isomorphes)

On dit que deux espaces vectoriels sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E vers F.

Ptitexo: *Montrer que* $\mathbb{R}_6[X]$ *et* $\mathbb{R}^7$*, munis des opérations usuelles, sont isomorphes.*

Ptitexo: *Montrer que* $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$ *et* $\mathbb{R}^2$ *sont isomorphes.*

Exercice 18.4

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que E admet pour base la famille $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et que F admet pour base la famille $(f_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$. Montrer que E et F sont isomorphes.

Exercice 18.5 Isomorphisme entre l'image et un supplémentaire du noyau

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E dans F. On suppose que $\mathrm{Ker}\,(f)$ admet un supplémentaire que l'on note G. On définit l'application

$$\bar{f} : G \longrightarrow \mathrm{Im}\,(f),\ x \longmapsto f(x).$$

Montrer que l'application $\bar{f}$ est un isomorphisme.

1.5 L'espace $\mathcal{L}(E,F)$

✓ Soient E et F deux espaces vectoriels.
L'application $\tilde{0} : E \longrightarrow F,\ x \longmapsto 0_F$ est linéaire.

Soient E et F deux espaces vectoriels. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

Définition 18.18 (Combinaison linéaires d'app. linéaires)

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f+g$ et $\lambda.f$ sont les applications de E vers F définies par :

$$\forall u \in E, (f+g)(u) = f(u) + g(u),$$

$$(\lambda.f)(u) = \lambda f(u).$$

Propriété 18.19 ($\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel)

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ muni des opérations précédentes d'addition et de multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

preuve : (comme s.e.v. de $\mathcal{F}(E,F)$)

Propriété 18.20 (Composée de deux applications linéaires)

La composée de deux applications linéaires est encore une application linéaire, c'est-à-dire que :
Si E, F et G sont trois espaces vectoriels, et si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

preuve:

Exemple :

Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ et

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x-y \\ x-y-z \end{pmatrix}$. On observe que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont linéaires.

2 Détermination d'une application linéaire

2.1 Détermination par l'image de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Lemme 18.21 (App. Lin. coïncidant sur une somme directe)

Soient E et E' deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Soient F et G deux espaces vectoriels supplémentaires dans E.
Si deux applications linéaires $\varphi \in \mathcal{L}(E,E')$ et $\psi \in \mathcal{L}(E,E')$ coïncident sur F et sur G alors elles sont égales. Autrement dit :

$$\begin{cases} \forall x \in F, \varphi(x) = \psi(x) \\ \forall x \in G, \varphi(x) = \psi(x) \end{cases} \implies \varphi = \psi.$$

preuve:

Propriété 18.22 (App. lin. définie sur 2 sevs supplémtaires)

Soient E et E' deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Soient F et G deux espaces vectoriels supplémentaires dans E. Si $f \in \mathcal{L}(F, E')$ et $g \in \mathcal{L}(G, E')$, alors il existe une unique application linéaire φ telle que :

$$\begin{cases} \varphi \in \mathrm{L}\left(E, E'\right), \\ \forall x \in F, \varphi(x) = f(x), \\ \forall x \in G, \varphi(x) = g(x). \end{cases}$$

preuve:

Propriété 18.23 (Généralisation)

Soient $E_1, \ldots, E_p$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Soit $u_1, \ldots, u_p$ une famille d'application linéaires telles que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $u_i \in \mathrm{L}\left(E_i\right)$. Alors, il existe une unique application linéaire $u \in \mathrm{L}(E)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall x \in E_i, u(x) = u_i(x).$$

preuve:

Corollaire 18.24 (somme directe)

Deux applications linéaires qui coïncident sur une somme directe sont égales.

Ptitexo: *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.*

1. *On suppose que u est injective et que $\mathrm{Im}\,(u)$ admet un supplémentaire dans F. Vérifier l'existence de $v \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $v \circ u = \mathrm{id}_E$.*
2. *On suppose que u est surjective et que $\mathrm{Ker}\,(u)$ possède un supplémentaire dans E. Vérifier l'existence de $v \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u \circ v = \mathrm{id}_F$.*

2.1.1 Détermination par l'image d'une base

Théorème 18.25 (Définition d'une app. lin. par l'image d'une base)

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. On suppose que l'espace vectoriel E admet pour base la famille $(e_i)_{i \in I}$. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F. Il existe une unique application linéaire $u : E \longrightarrow F$ telle que :

$$\forall i \in I, u\left(e_i\right) = f_i.$$

preuve:

✓ On en déduit donc que si $f \in \mathrm{L}(E, F)$ et $g \in \mathrm{L}(E, F)$, si $\forall i \in I$, $f\left(e_i\right) = g\left(e_i\right)$, alors $f = g$.

Ptitexo: *Dans $\left(\mathbb{R}^3, +, .\right)$, dont note (u_1, u_2, u_3) la base canonique, expliciter*

$f(x,y,z)$ où f est l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(u_1) = (3,1,2)$, $f(u_2) = (1,0,-1)$, $f(u_3) = u_3$.

<u>Ptitexo:</u> *Travaillons dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$. On note $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ et $v_3 = (0,0,1)$. Vérifier que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Expliciter $g(x,y,z)$ où g est l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $g(u_1) = (3,1,2)$, $g(u_2) = (1,0,-1)$, $g(u_3) = u_3$.*

<u>Ptitexo:</u> *Reconnaître L l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifie :*

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, L\left(X^i\right) = iX^{i-1} - 3X^i.$$

et

$$L\left(X^0\right) = -3.$$

3 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$

3.1 Généralités

Définition 18.26 (Endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel. On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire de E vers E.

✓ Si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire de E vers F et si H est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors la restriction de l'application f à H induit un endomorphisme de H.

Notation : On note $\mathcal{L}(E,E) = \mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

En conséquence de ce que l'on a vu dans le paragraphe précédent, $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel. Et la composée de deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ est encore un élément de $\mathcal{L}(E)$.
Exemples :

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y+z \\ -x+y+z \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$.
2. Si E est un espace vectoriel, alors l'application $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E$, $x \longmapsto x$ est un endomorphisme de E.

   <u>Ptitexo:</u> *Soit l'application :*

   $$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X],\ P \longmapsto XP' - 2P + 2P''.$$

   Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont on précisera l'image et le noyau.

✓ La composition des endomorphismes est une loi interne dans $\mathcal{L}(E)$.

✓ Quand on cherche à prouver qu'une application f définie sur l'espace vectoriel E est un endomorphisme, la preuve se déroule la plupart du temps en deux étapes. Dans la première, on prouve que $f(E) \subset E$ (≪ endo ≫), dans la seconde, on prouve la linéarité (≪ morphisme ≫).

M.P.

Propriété 18.27 (Anneau $(\mathrm{L}(E), +, \circ)$)

Soit E un espace vectoriel. L'ensemble $(\mathrm{L}(E), +, \circ)$ des endomorphismes de E muni de la loi d'addition d'applications et de la loi de composition d'applications linéaires est un anneau.

preuve:

Exercice 18.6

Soit E un espace vectoriel.

1) On suppose dans cette question que tous les vecteurs de E sont colinéaires (on dira bientôt que $\dim(E) \leq 1$). Montrer que $(\mathrm{L}(E), +, \circ)$ est un anneau commutatif.

2) On suppose dans cette question que E contient deux vecteurs non-colinéaires (on dira bientôt que $\dim(E) > 1$) et que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire. Montrer que $(\mathrm{L}(E), +, \circ)$ est un anneau non commutatif.

On rappelle la définition suivante issue des règles opératoires dans un anneau :

Définition 18.28 (Puissances itérées d'un endomorphisme)

Soit u un endomorphisme de E. On définit alors u^n par les relations :
- $*$ $u^0 = \mathrm{id}_E$
- $*$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u$.

Propriété 18.29 ($\mathrm{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. L'ensemble $(\mathrm{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, c'est-à-dire que l'on a :

i) $(\mathrm{L}(E), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
ii) $(\mathrm{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.
iii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (f, g) \in \mathrm{L}(E) \times \mathrm{L}(E), (\alpha.f) \circ g = f \circ (\alpha.g) = \alpha.(f \circ g)$.

Exemple : Si $f \in \mathrm{L}(E)$ et $g \in \mathrm{L}(E)$ alors $(f+3g)^2 = f^2+3f\circ g+3g\circ f+9g^2$. Si de plus, f et g commutent (c'est-à-dire si $f\circ g = g\circ f$) alors $(f+3g)^2 = f^2+6f\circ g+9g^2$. De manière générale, la formule du binôme de Newton est utilisable si $f \circ g = g \circ f$. De même, si les endomorphismes f et g commutent, on peut alors utiliser la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n - g^n = (f - g) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k} \right).$$

✓ On s'autorise parfois à écrire uv au lieu de $u \circ v$ pour désigner la composée des endomorphismes u et v.

<u>Ptitexo:</u> *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant :*

$$f^2 - 7f + 12\mathrm{id}_E = \tilde{0}.$$

Montrer que $E = \ker(f - 3\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - 4\mathrm{id})$.

3.2 Polynômes d'endomorphismes

Définition 18.30 (Polynôme d'endomorphisme)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à d, dont on note $a_0, \dots, a_d$ la liste des coefficients. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

On note $P(f)$ l'endomorphisme $\sum_{k=0}^{d} a_k f^k$. (La puissance désignant ici une itérée au sens de la composition des endomorphismes).

Propriété 18.31 ()

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Soit f un endomorphisme de E. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$(P + \lambda Q)(f) = P(f) + \lambda Q(f).$$

$$(PQ)(f) = Q(f) \circ P(f) = P(f) \circ Q(f).$$

preuve:

Exercice 18.7

Soient P et Q deux polynômes premiers entre eux de $\mathbb{K}[X]$. Soit f un endomorphisme de E tel que $(PQ)(f) = \tilde{0}$. Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}\,(P(f)) \oplus \mathrm{Ker}\,(Q(f)).$$

3.3 Groupe linéaire

✓ Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

Notation : On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

✓ $\mathcal{GL}(E)$ n'est pas un espace vectoriel, par exemple : si $f \in \mathcal{GL}(E)$ alors $-f \in \mathcal{GL}(E)$ et pourtant $f + (-f) = \tilde{0} \notin \mathcal{GL}(E)$.

Propriété 18.32 (Le groupe $\mathcal{GL}(E)$.)

Soit E un espace vectoriel. $(GL(E), \circ)$ est un groupe. On l'appelle **groupe linéaire de l'espace vectoriel** E.

preuve:

3.4 Homothétie

Définition 18.33 (Homothétie)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On appelle **homothétie** de E toute application f telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall x \in E, f(x) = \lambda.x \ .$$

Exercice 18.8

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda . x.$$

Montrer que f est une homothétie.

3.5 Projecteurs et symétries

3.5.1 Projecteurs

Définition 18.34 (Projecteur)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$, tel que $x = x_F + x_G$.
On note alors $p_F(x) = x_F$. On définit ainsi une application :

$$p_F : E \longrightarrow E,\ x \longmapsto p(x) = x_F$$

que l'on appelle **projecteur** sur F et parallèlement à G.

Dessin :

Exemples :

1. Dans $\left(\mathbb{R}^2, +, .\right)$, on note $A = \mathbb{R}.(1,0)$ et $B = \mathbb{R}.(0,1)$. Alors le projecteur sur A et parallèlement à B est l'application :

$$\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x,0).$$

(On remarque que $\pi_1 \circ \pi_1 = \pi_1$).

2. Dans $\left(\mathbb{R}^2, +, .\right)$, on note $A = \mathbb{R}.(1,0)$ et $C = \mathbb{R}.(1,1)$. Alors le projecteur sur A et parallèlement à C est l'application :

$$\pi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x-y,0).$$

(On remarque que $\pi_2 \circ \pi_2 = \pi_2$).

Ptitexo: *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les sous-espaces vectoriels $A_n = \text{Vect}\left(X^0, \ldots, X^n\right)$ et $B_n = \text{Vect}\left(X^i\right)_{i \geq n+1}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}[X]$. Expliciter f, le projecteur sur A_n parallèlement à B_n.*

Ptitexo: *On sait que $\mathcal{FI}$ (l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$) et $\mathcal{FP}$ (l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$) sont supplémentaires dans $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, .\right)$. Expliciter P_1, le projecteur sur $\mathcal{FI}$ parallèlement à $\mathcal{FP}$ et le projecteur P_2 sur $\mathcal{FP}$ parallèlement à $\mathcal{FI}$.*

Propriété 18.35 (Propriétés élémentaires des projecteurs)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. On a :
$(-)$ $p \in \mathcal{L}(E)$.
$(-)$ $\operatorname{Ker}(p) = G$.
$(-)$ $\operatorname{Im}(p) = F = \left\{ x \in E \;\middle|\; p(x) = x \right\} = \operatorname{Ker}(p - Id_E)$.
$(-)$ $p \circ p = p$.

preuve:

✓ $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$

Exercice 18.9 **Projecteurs associés**

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G et soit q le projecteur sur G parallèlement à F. (On dit alors que les endomorphismes p et q sont des **projecteurs associés**).

1) Montrer que $p + q = \mathrm{id}_E$.

2) Montrer que $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$.

✓ Si p est un projecteur, alors il admet un unique projecteur associé : le projecteur $\mathrm{id}_E - p$.

Théorème 18.36 (Caractérisation des projecteurs)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $p \in \mathrm{L}(E)$ un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) p est un projecteur.
ii) $p \circ p = p$.
Dans ce cas, p est le projecteur sur $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Inv}(p)$ et parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$.

✓ Ce théorème affirme en particulier que si $p \in \mathrm{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$, alors $\operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont supplémentaires.

✓ Si p est une projection :
On détermine son image (l'espace sur lequel on projette), en résolvant, pour $u \in E$, l'équation $p(u) = u$.
On détermine son noyau (la direction selon laquelle on projette), en résolvant, pour $u \in E$, l'équation $p(u) = 0_E$ puis p projection sur F parallèlement à G.

Ptitexo: *Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :*

$$f((x, y, z)) = \left(\frac{2x + y - z}{2}, \frac{x + y}{2}, \frac{x + y}{2} \right)$$

est un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques.

3.5.2 Symétries

Définition 18.37 (Symétrie)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$, tel que $x = x_F + x_G$.
On note alors $s(x) = x_F - x_G$. On définit ainsi une application

$$s : E \longrightarrow E,\ x \longmapsto s(x) = x_F - x_G$$

que l'on appelle **symétrie** par rapport à F et parallèlement à G.

Exemples :

1. Dans $\left(\mathbb{R}^2, +, .\right)$, on note $A = \mathbb{R}.(1,0)$ et $B = \mathbb{R}.(0,1)$. Alors la symétrie par rapport A et parallèlement à B est l'application :

$$s_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x, -y).$$

(On remarque que $s_1 \circ s_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$).

2. Dans $\left(\mathbb{R}^2, +, .\right)$, on note $A = \mathbb{R}.(1,0)$ et $C = \mathbb{R}.(1,1)$. Alors la symétrie par rapport A et parallèlement à C est l'application :

$$s_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x, -2y).$$

(On remarque que $s_2 \circ s_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$).

Ptitexo: *Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons déjà observé que les sous-espaces vectoriels $A_n = \mathrm{Vect}\left(X^0, \dots, X^n\right)$ et $B_n = \mathrm{Vect}\left(X^i\right)_{i \geq n+1}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}[X]$. Expliciter s, la symétrie par rapport à A et parallèlement à B.*

Ptitexo: *On sait que $\mathcal{FI}$ (l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$) et $\mathcal{FP}$ (l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$) sont supplémentaires dans $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, .\right)$. Expliciter S, la symétrie par rapport à $\mathcal{FI}$ parallèlement à $\mathcal{FP}$ et la symétrie par rapport à $\mathcal{FP}$ parallèlement à $\mathcal{FI}$.*

Ptitexo: *Soient $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y + 2z = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$.*

1. *Vérifier que $E = F \oplus G$.*
2. *Expliciter p_F, le projecteur sur F parallèlement à G.*
3. *Expliciter de même, s_F la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.*
4. *Que vaut $2p_F - s_F$?*

Propriété 18.38 (Propriétés élémentaires des symétries)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On a :
$(-)$ $s \in \mathcal{GL}(E)$.
$(-)$ $\mathrm{Im}\,(s) = E$
$(-)$ $\mathrm{Ker}\,(s) = 0_E$
$(-)$ $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}) = \mathrm{Inv}(s) = F$.
$(-)$ $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}) = G$.
$(-)$ $s \circ s = s$ (s est involutive)
$(-)$ $s = 2p - Id_E$ où p désigne la projection sur F parallèlement à G.

preuve:

Théorème 18.39 (Caractérisation des symétries)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $s \in \mathrm{L}(E)$ un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) s est une symétrie.

ii) $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Inv}(s) = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id})$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id})$.

preuve:

✓ Si s est une symétrie, alors :
-La direction est l'ensemble des solutions de $s(u) = -u$.
-l'axe ou le plan de symétrie est l'ensemble des solutions de $s(u) = u$.

Ptitexo: *Montrer que les applications suivantes sont des symétries et préciser les éléments caractéristiques.*

— $f_1 : z \in \mathbb{C} \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$.
— $f_2 : P(X) \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(-X) \in \mathbb{K}[X]$.
— $f_3 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y + z, -z, -y) \in \mathbb{R}^3$.
— $f_4 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (-x - 2y - 4z, 2x + 3y + 4z, -x - y - z) \in \mathbb{R}^3$.

4 Formes linéaires

4.0.3 Formes linéaires

Définition 18.40 (Forme linéaire)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On appelle **forme linéaire** toute application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.

Notation : On note $\mathrm{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$ l'ensemble des formes linéaires de E vers $\mathbb{K}$.

Lemme 18.41 (Somme directe)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel qui admet pour base la famille $(e_i)_{i \in I}$. Pour tout $i \in I$, on a :

$$E = \mathbb{K}.e_i \oplus \mathrm{Vect}\,(e_j)_{j \in I, j \neq i}\,.$$

preuve:

Définition 18.42 (Forme coordonnées)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectorielqui admet pour base la famille $(e_i)_{i\in I}$.
Pour tout vecteur $x \in E$, pour tout $i \in I$, il existe un unique couple $(x_i, u_i) \in \mathbb{K} \times \text{Vect}\,(e_j)_{j\in I, j\neq i}$ tel que :

$$x = x_i e_i + u_i.$$

On note alors $e_i^*(x) = x_i$. On définit ainsi une application e_i^* de E vers $\mathbb{K}$. Les applications $(e_i^*)_{i\in I}$ sont appelées **formes coordonnées** relativement à la base $(e_i)_{i\in I}$.

Exemples :

1. Dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ les formes coordonnées relativement à la base canonique sont les applications :

$$\begin{aligned} p_1 &: (x, y, z) \mapsto x, \\ p_2 &: (x, y, z) \mapsto y, \\ p_3 &: (x, y, z) \mapsto z. \end{aligned}$$

2. Dans $(\mathbb{K}[X], +, .)$ les formes coordonnées relativement à la base canonique sont les applications $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$f_k : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K},\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \longmapsto a_k.$$

Lemme 18.43 (Supplémentaires du noyau)

Si $F \in E^*$ et si $u \notin \text{Ker}\,(f)$, alors $\text{Ker}\,(f) \bigoplus \mathbb{K}u = E$

Propriété 18.44 (Formes linéaires associées)

Soient f et g deux formes linéaires *non nulles*. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\text{Ker}\,(f) = \text{Ker}\,(g)$.

ii) $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, f = \lambda g$.

preuve:

4.0.4 Hyperplans (M.P.)

Définition 18.45 (Hyperplan)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit H une partie de E. On dit que H est un **Hyperplan** de E s'il existe une forme linéaire Λ *non nulle* dont H est le noyau. On dit alors que H admet $\Lambda(x) = 0$ comme équation.

Exemples :

1. L'ensemble $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + z = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, car c'est le noyau de la forme linéaire $\Lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x + 2y + z$.

2. Plus généralement, si $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble :

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$$

   est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.
3. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ qui admettent 2 pour racine est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$. En effet, c'est le noyau de la forme linéaire

$$G : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K},\ P \longmapsto P(2).$$

✓ D'après la propriété 18.41, si un hyperplan admet deux équations $\Lambda_1(x) = 0$ et $\Lambda_2(x) = 0$, alors ces deux équations sont liées, c'est-à-dire qu'il existe $\mu \in \mathbb{K}^*$, tel que $\Lambda_1 = \mu\Lambda_2$.

Propriété 18.46 ()

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit H un hyperplan de E. Soit D une droite vectorielle de E non contenue dans D. On a :

$$H \oplus D = E.$$

preuve:

La propriété qui suit est une forme de réciproque de la précédente :

Propriété 18.47 ()

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
Soit D une droite vectorielle de E. Soit H une partie de E. Si $E = H \oplus D$, alors H est un hyperplan de E.

preuve:

5 Éléments propres d'un endomorphisme

5.1 définitions

Dans tout ce paragraphe, sauf mention contraire E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 18.48 (Valeur propre)

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé **valeur propre** de $f \in \mathrm{L}(E)$ lorsqu'il existe un vecteur x <u>non nul</u> dans E tel que $f(x) = \lambda x$.

✓ Dans cette définition, la condition $x \neq 0$ est capitale, sinon tout scalaire serait une valeur propre car $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(0) = \lambda 0 = 0$.

On appelle **spectre de** f, l'ensemble noté $\mathrm{Sp}(f)$ de toutes les valeurs propres de f.
Exemple : Pour l'application $\Lambda : P(X) \in \mathbb{R}_p[X] \mapsto XP'(X) \in \mathbb{R}_p[X]$, les réels $0, 1, \dots, p$ sont des valeurs propres. En effet, on a, pour tout entier $i \in \{0 \dots p\}$, $\Lambda(X^i) = iX^i$.

Exercice 18.10

Soit $F = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables. Soit D l'endomorphisme de F qui à une fonction associe sa dérivée. Montrer que tout réel est une valeur propre de D.

Définition 18.49 (Vecteur propre)

Si λ est une valeur propre de $f \in \mathrm{L}(E)$, tout vecteur de $x \in E$ non nul, tel que $f(x) = \lambda x$ est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.

Exemple : Les vecteurs $X^0, X^1, \dots, X^p$ sont des vecteurs propres de l'application Λ définie plus haut. Par contre, $X^2 + 3X$ n'est pas un vecteur propre de cet endomorphisme.

Définition 18.50 (Espace propre)

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle **espace propre** associé à la valeur propre λ, l'ensemble E_λ défini par :

$$E_\lambda(f) = \{\, x \in E \mid f(x) = \lambda x \,\}.$$

Il est constitué du vecteur nul et tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

Exemple : $E_2(\Lambda)$ est l'ensemble des polynômes de la forme aX^2 pour $a \in \mathbb{R}$. C'est une droite vectorielle de $\mathbb{R}_p[X]$.

✓ Si il n'y a pas d'ambiguïté sur l'endomorphisme considéré, on écrira simplement E_λ au lieu de $E_\lambda(f)$.

✓ Si λ est une valeur propre de l'endomorphisme f, alors E_λ est un sous-espace vectoriel de E non réduit à 0_E.

✓ $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{id})$, en effet : écrire $f(x) = \lambda x$ c'est écrire $(f - \lambda \mathrm{id})(x) = 0_E$. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{id}) \Leftrightarrow x \in E_\lambda(f)$. Ainsi, rechercher des vecteurs propres, c'est simplement rechercher les éléments d'un noyau, ce qui est bien souvent résoudre un système linéaire homogène.

✓ Soit $x \in E$ un vecteur de E. On a l'équivalence : le vecteur x est un vecteur propre de f si et seulement si $x \neq 0$ et la famille $(x, f(x))$ est liée.

5.2 Propriétés

Propriété 18.51 (caractérisation)

L'endomorphisme f de E admet $\lambda \in \mathbb{K}$ comme valeur propre si et seulement si $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas injectif.

preuve:

Exemple : L'endomorphisme $\Lambda - 2\mathrm{id}$ n'est pas injectif.

Corollaire 18.52 (injectivité)

Soit f un endomorphisme de E.
f est injectif si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de f.

Ptitexo: *Soit* $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ x+y+2z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. *Quelles sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de* f *?*

Ptitexo: *Soit* $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+y+z \\ -x+y+z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Propriété 18.53 (Fam. de vec. propres associés à des vap. distinctes)

Une famille de vecteurs propres d'un même endomorphisme associés à des valeurs propres distinctes est libre.

preuve:

Ptitexo: *Montrer que la famille* $\left(f_\alpha : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\right)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ *est libre.*

Corollaire 18.54 (somme directe)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres 2 à 2 distinctes de f, alors on a :

$$E_{\lambda 1} + \cdots + E_{\lambda p} = E_{\lambda 1} \oplus E_{\lambda 2} + \cdots + \oplus E_{\lambda p}.$$

preuve:

Chapitre 19 - Compléments d'analyse

Es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen ; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien. B.Riemann.

Dans tout le chapitre sauf mention contraire, I désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

1 Continuité uniforme (M.P.)

Rappelons qu'une fonction est dite continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I, c'est-à-dire

$$\forall y \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_y > 0, \forall x \in D_f, |x-y| \leq \eta_y \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Dans cette définition, le réel η_y dépend a priori du réel y. Si l'on peut pour tout $\varepsilon > 0$, trouver un réel η indépendant de y, alors on dira que la fonction f est uniformément continue sur I.

Définition 19.1 (Fonction uniformément continue)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que la fonction f est **uniformément continue** sur l'intervalle I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in I^2, |x-y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Ptitexo: *Montrer que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.*

Ptitexo: *Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue.*

Théorème 19.2 (de Heine)

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

preuve:

✓ Si f est uniformément continue sur $[a,b]$ ou $]a,b]$ et sur $[b,d]$ ou $[b,d[$ alors f est uniformément continue sur $[a,d]$ ou $]a,d[$

Ptitexo: *Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.*

Exercice 19.1 Opérations sur les fonctions uniformément continues

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions uniformément continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $f + \lambda g$ est uniformément continue.

2) En est-il de même pour la fonction fg ?

3) La composée de deux fonctions uniformément continues est-elle nécessairement uniformément continue ?

2 Subdivisions d'un segment (M.P.)

Définition 19.3 (Subdivision, support, pas)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Une **subdivision** du segment $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (a_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ $(n \geq 1)$, telle que :

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b.$$

Le **support** de cette subdivision est l'ensemble noté $\mathrm{supp}(\sigma)$ des valeurs de cette suite. Autrement dit :

$$\mathrm{supp}(\sigma) = \left\{ a_k \;\middle|\; k \in [\![0, n]\!] \right\}.$$

Le **pas** de la subdivision σ, est le réel noté $\delta(\sigma)$ donnant l'écart maximal entre deux points consécutifs de la subdivision, autrement dit :

$$\delta(\sigma) = \max\{\, a_{k+1} - a_k \mid k \in [\![0, n-1]\!] \,\}.$$

✓ La subdivision $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est dite régulière si $a_{k+1} - a_k$ est une constante.

Définition 19.4 (Subdivision plus fine)

Soient σ et σ' deux subdivisions du même segment $[a, b]$. On dit que σ' est plus fine que σ, si :

$$\mathrm{supp}(\sigma) \subset \mathrm{supp}(\sigma').$$

Autrement dit, une subdivision est plus fine qu'une autre si elle ≪ contient quelques points en plus ≫.

Propriété 19.5 (Subdivisions plus fines)

Soient σ et σ' deux subdivisions du même segment $[a, b]$. Il existe une subdivision du segment $[a, b]$ plus fine que σ et plus fine que σ'.

preuve:

3 Intégrales de fonctions en escaliers (M.P.)

Sauf mention explicite dans tout ce paragraphe a et b sont deux réels tels que $a < b$.

3.1 Fonctions en escalier

Définition 19.6 (Fonction en escalier)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. La fonction f est dite **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_k)$ du segment $[a,b]$ telle que la fonction f soit constante sur chacun des intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ (pour $k \in [\![0, n-1]\!]$). Dans ce cas, on dit que σ est une subdivision adaptée à f.

✓ Si σ est une subdivision adaptée à f, alors toute subdivision plus fine que σ est encore adaptée à f.

✓ Soulignons qu'une fonction en escalier sur $[a,b]$ n'admet qu'un nombre fini de marches.

Exemples :

1. Si f est une fonction constante sur $[a,b]$, alors f est en escalier sur $[a,b]$.
2. La restriction de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ à tout segment de $\mathbb{R}$ est une fonction en escalier.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Si X désigne une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors la fonction : $F_X : [0,n] \longrightarrow [0,1], \ x \longmapsto \mathrm{p}(X \leq x)$ est une fonction en escalier.
4. Si f est une fonction en escalier sur $[a,b]$, alors $|f|$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$.

Ptitexo: *Montrer que toute fonction en escalier sur $[a,b]$ est bornée.*

Notation : On note $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs complexes et $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ et à valeurs réelles.

Propriété 19.7 (s.e.v.)

L'ensemble $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{C})$. Il est stable pour le produit de fonction.

preuve:

3.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Propriété 19.8 (Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier)

Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Soit $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note λ_i la valeur prise par f sur le segment $]a_i, a_{i+1}[$. Alors, la valeur de la somme :

$$S_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\, \lambda_i.$$

est indépendante de la subdivision σ adaptée à f.
On appelle cette somme **intégrale de f sur le segment** $[a,b]$. On la note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

preuve:

Exemple :
Si la fonction f est constante égale à λ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lambda(b - a)$.

✓ La valeur de l'intégrale d'une fonction en escalier reste inchangée si l'on modifie la valeur de la fonction en un nombre fini de points.

3.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier

Propriété 19.9 (Inégalité triangulaire)

Si f est une fonction en escalier sur le segment $[a, b]$, alors :

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f| \, .$$

preuve:

Théorème 19.10 (Linéarité de l'intégrale)

L'application

$$f \in \mathcal{E}\left([a, b], \mathbb{C}\right) \mapsto \int_{[a,b]} f \in \mathbb{C}$$

est une application $\mathbb{C}$-linéaire.

preuve:

Propriété 19.11 (Positivité et croissance)

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles en escalier sur le segment $[a, b]$.
$(-)$ Si $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$. (Cette propriété s'appelle la positivité de l'intégrale).
$(-)$ Si $f \geq g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$. (Cette propriété s'appelle la croissance de l'intégrale).

preuve:

Propriété 19.12 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Soit $c \in]a, b[$. Les fonctions $f_{[a,c]}$ et $f_{[c,b]}$ sont en escalier et :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

preuve:

4 Intégrales de fonctions continues par morceaux sur un segment (M.P.)

4.1 Fonctions continues par morceaux

4.1.1 Fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition 19.13 (Fonctions continues par morceaux)

Soient a et b deux réels. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On dit que f **est continue par morceaux sur** $[a, b]$ si :
il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ du segment $[a, b]$ telle que :
- Pour tout $k \in \{0...n-1\}$, f est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$.
- Pour tout $k \in \{1...n-1\}$, f admet une limite finie à gauche et à droite en a_k, et f admet une limite finie à droite en a et une limite finie à gauche en b.

(On dit dans ce cas que σ est une **subdivision du segment** $[a, b]$ **adaptée à** f).

Exemples :
1. Toute fonction continue sur $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.
2. Toute fonction en escalier est continue par morceaux sur $[a, b]$.
3. La fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$.
4. La fonction $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \left| \begin{array}{lll} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{si} & x > 0 \\ 1 & \text{si} & x = 0 \end{array} \right.$

Propriété 19.14 (fonction bornée)

Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée.

preuve:

Notation : On note $\mathrm{Cpm}\left([a, b], \mathbb{C}\right)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Propriété 19.15 (e.v.)

L'ensemble $\mathrm{Cpm}\left([a, b], \mathbb{C}\right)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{F}\left([a, b], \mathbb{R}\right)$ stable pour le produit de fonctions.

4.1.2 Fonction continue par morceaux sur un intervalle

Définition 19.16 (Fonction continue sur un intervalle)

On dit qu'une fonction f est **continue par morceaux sur un intervalle** I de $\mathbb{R}$, si elle est continue par morceaux sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I.

Exemples :

1. Les fonctions $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et $g : x \mapsto 2x^2 - \lfloor 2x \rfloor$ sont des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction de répartition d'une variable de loi géométrique est continue par morceau sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$. Mais, elle est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

4.2 Approximations de fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier

✓ Si f est une fonction bornée sur I, alors on peut définir la borne supérieure de l'ensemble $\left\{ |f(x)| \;\middle|\; x \in I \right\}$, on la note $\|f\|_{\infty,I}$ ou plus simplement $\|f\|_\infty$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'intervalle I considéré.

Propriété 19.17 (approximation de f-1)

Soit $f \in \mathrm{Cpm}([a, b], \mathbb{R})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier v telle que :

$$|f - v| \leq \varepsilon.$$

preuve:

Corollaire 19.18 (approximation de f-2)

Soit $f \in \mathrm{Cpm}([a, b], \mathbb{R})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un couple (φ, ψ) de fonctions en escaliers sur $[a, b]$, telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad 0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

Corollaire 19.19 (approximation de f-3)

Soit $f \in \mathrm{Cpm}([a, b], \mathbb{C})$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = 0$$

.

✓ On dit dans ce cas, que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

4.3 Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Théorème 19.20 (Intégrale d'une fonction continue sur un segment)

Soit $f \in \mathrm{Cpm}([a,b],\mathbb{C})$.
$(-)$ Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escaliers telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f-\varphi_n\|_\infty = 0$$

alors la suite $\left(\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel.
$(-)$ La valeur de cette limite ne dépend pas du choix de la suite de fonctions en escalier vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \|f-\varphi_n\|_\infty = 0.$$

On appelle cette limite, **intégrale de la fonction f sur le segment** $[a,b]$. On la note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

preuve:

✓ Si f est une fonction en escalier, alors cette définition coïncide avec la définition donnée plus haut.

Exercice 19.2 **Fonctions intégrables au sens de Riemann**

Soit f est une fonction définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et bornée sur $[a,b]$.
On note $e(f)$ l'ensemble des fonctions en escaliers qui sont inférieures à f.
On note $E(d)$ l'ensemble des fonctions en escaliers qui sont supérieures à f.

1) Justifier l'existence des réels $i(f) = \sup\left\{ \displaystyle\int_{[a,b]} g \;\middle|\; g \in e(f) \right\}$ et
$I(f) = \inf\left\{ \displaystyle\int_{[a,b]} g \;\middle|\; g \in e(f) \right\}$.
On dit que f est **intégrable au sens de Riemann** si $i(f) = I(f)$.
On appelle alors intégrale de f sur $[a,b]$, le réel $i(f) = I(f)$.

2) Vérifier que toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann. Vérifier que cette définition de l'intégrale coïncide avec la définition ci-dessus.

3) La fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ est-elle intégrable au sens de Riemann ?

4) Montrer que si f est continue sur $]a,b]$ et bornée, alors f est intégrable au sens de Riemann.

5) **a)** Vérifier que la fonction $f : t \mapsto \left| \begin{array}{lll} \sin\left(\dfrac{1}{t}\right) & \text{si} & 1 \geq t > 0 \\ 1 & \text{si} & t = 0 \end{array} \right.$ est intégrable sur $[0,1]$.

b) Existe-t-il une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers sur $[0,1]$ telle que

$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0\,?$

4.4 Valeur moyenne

Définition 19.21 (Valeur moyenne)

Soit $f \in \mathrm{Cpm}\left([a,b], \mathbb{C}\right)$. On appelle valeur moyenne de f sur le segment $[a,b]$ le réel :

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f.$$

✓ La valeur moyenne est l'unique réel λ tel que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \tilde{\lambda}$.

4.5 Propriétés de l'intégrale de fonctions C.p.m. sur un segment

4.5.1 Inégalité triangulaire

Propriété 19.22 (Inégalité triangulaire)

Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, alors :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|\,.$$

preuve:

4.5.2 Linéarité

Théorème 19.23 (Linéarité de l'intégrale)

L'application

$$f \in \mathrm{Cpm}\left([a,b], \mathbb{C}\right) \mapsto \int_{[a,b]} f \in \mathbb{C}$$

est une application $\mathbb{C}$-linéaire.

preuve:

Corollaire 19.24 (complexes)

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, alors les fonctions $\mathcal{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(f)$ sont continues par morceaux sur $[a, b]$ et

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathcal{R}\mathrm{e}(f) + \mathrm{i} \int_{[a,b]} \mathcal{I}\mathrm{m}(f),$$

$$\overline{\int_{[a,b]} f} = \int_{[a,b]} \overline{f}.$$

preuve:

Propriété 19.25 (égalité)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$. Si f et g sont égales excepté en un nombre fini de points alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.

preuve:

4.5.3 relation de Chasles

Propriété 19.26 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $c \in]a, b[$. Les fonctions $f_{[a,c]}$ et $f_{[c,b]}$ sont continues par morceaux et :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

preuve:

Corollaire 19.27 (Chasles)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision adaptée à f. Si l'on note pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\widetilde{f_i}$ le prolongement par continuité de f au segment $[a_i, a_{i+1}]$, alors :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{[a_i, a_{i+1}]} f.$$

preuve:

4.5.4 Propriétés liées à l'ordre pour les fonctions à valeurs réelles

Propriété 19.28 (Positivité et croissance)

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles **continues** sur le segment $[a,b]$.
$(-)$ Si $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$. (Cette propriété s'appelle la positivité de l'intégrale).
$(-)$ Si $f \geq g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$. (Cette propriété s'appelle la croissance de l'intégrale).

preuve:

Propriété 19.29 (Positivité stricte des intégrales de fonc. continues)

Soit f une fonction à valeurs réelles *positive* et *continue* sur $[a,b]$.
$(-)$ Si f est non nulle, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.
$(-)$ Si $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = \tilde{0}$.

preuve:

Corollaire 19.30 (fonction nulle)

Si $f \geq 0$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$ alors f est nulle sauf en un nombre dénombrable de points

Propriété 19.31 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles continues par morceaux sur le segment $[a,b]$. On a :

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leq \left(\int_{[a,b]} f^2\right)\left(\int_{[a,b]} g^2\right).$$

preuve:

Corollaire 19.32 (cas particulier)

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles continues par morceaux sur le segment $[a,b]$. Alors

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 = \left(\int_{[a,b]} f^2\right)\left(\int_{[a,b]} g^2\right)$$

si et seulement si il existe λ tel que $f = \lambda g$ ou $g = \lambda f$.

preuve:

4.6 Notation $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I. Soient α et β deux éléments de I :
(−) Si $\alpha < \beta$, alors la fonction f est continue par morceaux sur $[\alpha, \beta]$ et l'on note :

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[\alpha,\beta]} f.$$

(−) Si $\alpha > \beta$, alors la fonction f est continue par morceaux sur $[\beta, \alpha]$ et l'on note :

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{[\beta,\alpha]} f.$$

(−) Si $\alpha = \beta$, alors on pose

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Cette extension de notion de l'intégrale vérifie les mêmes propriétés que précédemment sauf celles liées à l'ordre.

5 Sommes de Riemann

Exercice 19.3 Théorème des Sommes de Riemann-Interdit- 18 ans

Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Si $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ est une subdivision de $[a, b]$, si $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ est une autre subdivision de $[a, b]$ telle que $\forall i \in [\![0, n-1]\!], \xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$, alors on dit que ξ est une subdivision subordonnée à σ.
On note alors :

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, f(\xi)\,.$$

Montrer que :

Si f est continue sur $[a, b]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel α tel que pour toute subdivision σ de $[a, b]$ de pas inférieur à α, et pour toute sudivision ξ subordonnée à σ, on a :

$$\left|\int_{[a,b]} f - S(f, \sigma, \xi)\right| \leq \varepsilon.$$

Théorème 19.33 (Des sommes de Riemann-tout public)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction *continue* sur $[a, b]$.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \\ &= \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right).\end{aligned}$$

.

preuve pour le cas où les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$:
On note $a_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$ pour tout $k = 0 \dots n$.
On note e_k, l'erreur commise quand, on remplace $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ par l'aire du rectangle de hauteur $f(a_k)$ et de largeur $h = \dfrac{b-a}{n}$.

— Exprimer e_k sous forme d'une intégrale sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$.
— Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour majorer l'intégrande de la question précédente. En déduire, une majoration de $|e_k|$.
— Conclure.

Dessin :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right)$ représente ce que l'on pourrait appeler la somme des aires des « rectangles de gauche » et
$D_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right)$ représente ce que l'on pourrait appeler la somme des aires des « rectangles de droite ».
Exemple :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

✓ Quand un exercice nous amène à étudier la limite d'une expression du type $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{k,n}$, on peut penser alors essayer de faire intervenir une somme de Riemann.

✓ Par changement de variable affine, on peut toujours se ramener d'une intégrale sur $[a, b]$ à une intégrale sur $[0, 1]$. Il n'y a donc pas à se casser la tête dans les exercices sur les sommes de Riemann, on va poser $a = 0$ et $b = 1$...

Ptitexo: *Déterminer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}$.

Ptitexo: *On note* $I(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos(t) + 1\right)\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que $I(x)$ est bien défini pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.*
2. *Calculer $I(x)$ à l'aide de ses sommes de Riemann.*

6 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème 19.34 (Th. fondamental d'intégration des fonc. $\mathcal{C}^0$)

Soit f une fonction continue sur un intervalle d'intérieur non vide I. Soit $a \in I$. La fonction :

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

est définie et dérivable sur I et sa dérivée est égale à f.

preuve:

Corollaire 19.35 (une primitive)

Si f est une fonction continue sur l'intervalle I, alors f admet une primitive F sur I et l'on a pour tout couple $(a, b) \in I^2$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

(et la quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix d'une primitive de f).

On retrouve à ce stade la définition d'une intégrale employée au premier semestre : ce qui nous permet de valider la preuve des théorèmes de changements de variables et d'intégration par parties.

Exercice 19.4 **Formules de la moyenne**

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1) Montrer que si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ telle que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que $g \geq 0$. Montrer que :

$$\exists c \in [a, b], f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

7 Formules de Taylor

7.1 Avec reste intégrale

Théorème 19.36 (Formule de Taylor avec reste intégrale)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Soient a et b deux réels de I, on a :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(b-a)^k$ est appelée **développement de Taylor à l'ordre** n **de** f **en** a.
Le terme $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ est appelé reste intégrale.
preuve : par récurrence sur n.

Ptitexo: *Écrire la formule de Taylor à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dans les cas suivants :*

1. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ *avec* $a = 0$ *et* $b = x$.
2. $f : x \mapsto \sin(x)$ *avec* $a = 0$ *et* $b = x$.
3. $f : x \mapsto \ln(1+x)$ *avec* $a = 0$ *et* $b = x$.
4. a *et* b *deux réels quelconques et* $f = P$ *un polynôme de degré* n.
5. $x \mapsto e^{kx}$ *où* $k \in \mathbb{R}$, *et* $a = 0$ *et* $b = x$.

7.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 19.37 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Soient a et b deux réels de I. Si M_{n+1} est un réel qui vérifie $\forall x \in [a,b]$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$, on a alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{M_{n+1}|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

preuve:

✓ A l'ordre 0, ce théorème est simplement l'inégalité des accroissements finis.

✓ Ce théorème est extrêmement utile pour obtenir des majorations fines.

✓ Sous les hypothèses du théorème, le majorant M_{n+1} existe forcément. En effet, la fonction f^{n+1} est continue sur le segment $[a,b]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes.

Exemples :

1. Pour tout réel $x \in [0,1]$, on a :

$$|\exp(x) - 1 - x| \leq \frac{\mathrm{e}}{2}|x|^2.$$

2. Pour tout réel positif x, on a :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

   Donc :

$$\forall x \in [-1,1], \ln(1+x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

7.3 Formule de Taylor-Young

Lemme 19.38 (lemme de présentation du D.L.)

Si f est continue et si $f = o_{x \mapsto a}\left((x)^n\right)$ alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = o_{x \mapsto a}\left((x-a)^{n+1}\right)$

Théorème 19.39 (formule de Taylor-Young)

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$ un point de cet intervalle, on a au voisinage de a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{x \mapsto a}\left((x-a)^n\right).$$

✓ La formule de Taylor-Young ne peut être utilisée que pour fournir une information locale. Au contraire, la formule de Taylor-Lagrange donne une information sur tout un segment.

✓ On aurait pu se contenter de prendre f de classe $\mathcal{D}^n$.

8 Développements limités

8.1 Généralités

Lemme 19.40 (lemme de Young)

Soit f définie de I dans $\mathbb{R}$. Si $f(x) = o_{x\mapsto a}\left((x-a)^n\right)$ alors
$f(x) - f(a) = o_{x\mapsto a}\left((x-a)^{n+1}\right)$

Définition 19.41 (Développement limité d'une fonction en 0)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o_0(x^n).$$

✓ Par définition du o cela revient à dire qu'il existe une fonction ϵ définie sur un voisinage de 0, telle que $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$ et
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \epsilon(x)$.

Définition 19.42 (Développement limité d'une fonction en a)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a, s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o_a\left((x-a)^n\right).$$

✓ Dans la pratique, on utilise essentiellement les DL en 0, en fait si f admet un DL d'ordre n en a de la forme
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o_a\left((x-a)^n\right)$ alors,
$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k (h)^k + o_0\left(h^n\right)$ ainsi, par changement de variable est-on ramené à un DL en 0.

✓ Il est clair que f admet en DL en a si et seulement si f admet une limite finie a_0 en a. On a alors $f(x) = a_0 + o_a(1)$.

✓ D'après ce que l'on a déjà vu, si f est une fonction définie en a, alors f admet un DL d'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a. Si f n'est pas définie en a, alors elle admet un DL d'ordre 1 en a si et seulement si elle est prolongeable en une fonction dérivable en a.

✓ Si f admet un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a, alors f admet un DL d'ordre p pour tout entier inférieur à n. Plus précisément :
si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o_a\left((x-a)^n\right)$ alors pour tout entier $p \leq n$,
$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k (x-a)^k + o_a\left((x-a)^p\right)$. (En clair, il suffit de n'en prendre qu'un bout).

Théorème 19.43 (Unicité du DL)

Si f possède un DL d'ordre n au voisinage de a celui-ci est unique.

preuve:

Propriété 19.44 (DL et parité)

Soit f une fonction définie au voisinage de 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet un DL en 0 de la forme $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o_0\left(x^n\right)$.

— Si la fonction f est paire, alors pour tout indice $k \leq n$ impair $a_k = 0$.
— Si la fonction f est impaire, alors pour tout indice $k \leq n$ pair $a_k = 0$.

preuve:

8.2 Développements limités usuels

Le théorème de Taylor-Young est une machine à fabriquer des DL. (Nous le démontrerons dans le futur chapitre intégration).
Il permet en particulier d'établir les développements limités suivants :

Propriété 19.45 (Développements limités usuels)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_0\left(x^n\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_0\left(x^n\right) \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o_0\left(x^n\right) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{x^n} + o_0\left(x^n\right) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_0\left(x^n\right). \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} x^k + o_0\left(x^n\right) = 1 + x + \cdots + x^n + o_0\left(x^n\right). \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o_0\left(x^n\right) = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + o_0\left(x^n\right). \\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0\left(x^{2n+2}\right) = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0\left(x^{2n+2}\right). \\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o_0\left(x^{2n+1}\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o_0\left(x^{2n+1}\right). \\
\arctan(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o_0\left(x^{2n+2}\right) \\
\sinh(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0\left(x^{2n+2}\right) = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0\left(x^{2n+2}\right). \\
\cosh(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0\left(x^{2n+1}\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0\left(x^{2n+1}\right). \\
\tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o_0\left(x^8\right). \\
\tanh(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o_0\left(x^8\right).
\end{aligned}
$$

preuve:

8.3 Opérations sur les développements limités

Comme on l'a déjà vu, on peut toujours se ramener d'un DL en un point quelconque $a \in \mathbb{R}$ à un DL en 0. C'est pourquoi, nous détaillerons uniquement les opérations sur les DL en 0.

Définition 19.46 (Partie régulière)

Si f admet un DL en 0 d'ordre $n \in \mathbb{N}$, de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{0}{o}(x^n),$$

on dira alors que le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est la **partie régulière** du DL d'ordre n de f en 0.

Propriété 19.47 (Combinaison linéaire et produit de DL)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions admettant chacune au voisinage de 0, un développement limité d'ordre n dont on note respectivement P et Q les parties régulières. Alors :

i) La fonction $f + \lambda g$ admet un DL d'ordre n en 0 de partie régulière $P + \lambda Q$.

ii) La fonction fg admet un DL d'ordre n en 0, dont la partie régulière est obtenue en ne gardant dans le produit PQ que les termes de degré inférieur ou égal n.

preuve:

Ptitexo: *Donner le DL à l'ordre* 3 *en* 0 *de* $\ln(1+x) + 2\mathrm{e}^x$, $\dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$, $\ln\left(1-x^2\right)$, $\mathrm{e}^x\sqrt{1+x}$, $\sin(x)\cos(x)$, $\tan(x) + \mathrm{e}^{-x}$

Propriété 19.48 (Primitivation de DL)

Soit I un intervalle contenant 0. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et possédant un DL à l'ordre n de partie régulière $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Alors toute primitive F de f sur I admet un développement limité à l'ordre $n+1$, sa partie régulière est :

$$F(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

preuve:

Ptitexo: *Retrouver en utilisant une primitivation de DL, le DL à l'ordre* 5 *de la fonction* $\tan$.

Ptitexo: *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Retrouver en utilisant une primitivation de DL,*
- le DL à l'ordre $2n+1$ *de la fonction* $\arctan$.
- le DL à l'ordre n *de la fonction* $\ln(1+x)$ *puis de* $\ln(1-x)$

Propriété 19.49 (Composition de DL)

Soient f et g deux fonctions telles que $f(D_f) \subset D_g$, admettant chacune un DL d'ordre n en 0, de parties régulières respectives P et Q. On suppose que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Alors $g \circ f$ admet au voisinage de 0 un DL d'ordre n dont la partie régulière est obtenue en ne gardant que les termes de $Q \circ P$ de degré inférieur ou égal à n.

preuve:

Ptitexo: *Donner le DL en* 0 *à l'ordre* 3 *de* $\sqrt{1+\ln(1-x)}$, $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}-1}$, $\sin\left(\pi\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)\right)$, $\exp\left(\cos(x)-1\right)$.

✓ Cette propriété traite du cas particulier où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, ci ce n'est pas le cas on s'adapte, en commençant souvent par une factorisation préalable par un terme dominant.

Ptitexo: *Donner le DL en* 0 *à l'ordre* 3 *de* $\exp\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$, $\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$, $\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$ *et* $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$.

Pour établir le développement limité en 0 d'un quotient dont le dénominateur ne s'annule pas en 0, on s'appuie sur le développement limité de $\dfrac{1}{1+u}$ en 0.

Propriété 19.50 ($\dfrac{1}{1+f}$)

Si la fonction f admet au voisinage de 0, un développement limité d'ordre n et a pour limite 0 en 0, alors $\dfrac{1}{1+f}$ admet un DL d'ordre n en 0.

preuve:

Ptitexo: *Donner le DL d'ordre* 3 *en* 0 *de* $x \mapsto \dfrac{1}{1+\ln(1-x)}$.

Corollaire 19.51 ($\dfrac{1}{f}$)

Si la fonction f admet en 0 un DL d'ordre d'ordre n et si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ admet en 0 un DL d'ordre n.

preuve:

✓ Ces deux dernières preuves donnent une méthode pratique pour calculer les DL des quotients de fonctions admettant un DL et dont le dénominateur ne s'annule pas.

Ptitexo: *Calculer les DL en 0, à l'ordre* 2 *de* $\dfrac{1}{\sqrt{3}+x}$, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{2+x^2}$, $\tan(x)$, $\dfrac{2+\sinh(x)}{x^2+\cosh(x)}$.

✓ Si $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ n'est même pas prolongeable par continuité en 0, et n'admet donc pas de développement limité d'ordre 0.

9 Applications des développements limités

9.1 Préliminaire : équivalents

Bien souvent, on utilise des développements limités pour rechercher des équivalents. (En particulier, pour rechercher l'équivalent d'une somme, nous nous rappelons que s'il est possible d'ajouter des DL, il est interdit d'ajouter des équivalents).

Propriété 19.52 (Équiv. d'une fonc. admettant un DL non nul)

Soit f une fonction admettant en 0 un DL d'ordre n de la forme :

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + \underset{0}{o}(x^n)$$

tel que $a_p \neq 0$, alors $f(x) \sim_0 a_p x^p$.

✓ On retient qu'une fonction est équivalente en a au premier terme non nul de son développement limité en a s'il existe.

Ptitexo: *Donner un équivalent en* 0 *de* $\sqrt{1+x}-1$, $\mathrm{e}^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{9+x}} - \dfrac{1}{3}$ *et* $\dfrac{\sin(x)}{x} - \cosh(x)$.

9.2 Étude au voisinage d'un point fini

Ptitexo: *Déterminer* $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x} - 1 + 2x}{\cos(x-1)}$ *:* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x) - 1 + 2x^2}{\sin^2(3x)}$ *et* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1}{x^2}$

9.2.1 Premiers exemples

Ptitexo: *Étudier la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x}$ *au voisinage de* 0.

Ptitexo: *Étudier la fonction* $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ *au voisinage de* 0.

Ptitexo: *Étudier la fonction* $\varphi : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ *au voisinage de* 0.

9.2.2 Développement limité à l'ordre 1

Si f est définie en x_0 et admet en ce point un développement limité d'ordre 1 du type :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0).$$

alors $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$ et une équation de la tangente en x_0 à la courbe

représentative de f est
$$y = a_0 + a_1(x - x_0).$$
Si de plus, la fonction f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Si f n'est pas définie en x_0 et admet en ce point un développement limité d'ordre 1 du type :
$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$$
alors la fonction f est prolongeable par continuité en x_0, et si l'on note $\tilde{f}$ ce prolongement, alors $a_0 = \tilde{f}(x_0)$, $a_1 = \tilde{f}'(x_0)$ et une équation de la tangente en x_0 à la courbe représentative de f est
$$y = a_0 + a_1(x - x_0).$$

9.2.3 Terme non nul suivant

Le premier terme suivant non nul du développement limité permet d'étudier la position de la courbe représentant la fonction f par rapport à cette tangente : Si $f(x) = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\underset{x_0}{o}\left((x-x_0)^2\right)$ avec $a_2 \neq 0$, alors au voisinage de 0, $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \underset{x_0}{\sim} a_2\,(x - x_0)^2$. Donc, si $a_2 > 0$ la courbe est au dessus de la tangente (On parle alors de fonction localement convexe). Tandis que si $a_2 < 0$ la courbe est au-dessous de la tangente au voisinage de x_0 (On parle alors de fonction localement concave) .
Si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + \underset{x_0}{o}\left((x - x_0)^p\right)$ avec $a_p \neq 0$ et p impair, alors $(x-x_0)^p$ change de signe en x_0, la courbe possède donc un point d'inflexion : la tangente traverse la courbe.
Si $f(x) = a_0+a_1(x-x_0)+a_p(x-x_0)^p+o_{x_0}((x-x_0)^p)$ avec $a_p \neq 0$ et p pair, alors $(x - x_0)^p$ ne change pas de signe en x_0, la courbe ressemble alors au voisinage de x_0 à la courbe représentative de $x \mapsto x^p$ en 0, il n'y a pas de point d'inflexion en x_0.
On retient en particulier :

Propriété 19.53 (Caractérisation des extrema locaux)

Soient $p \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction définie en x_0 qui admet le développement limité suivant :
$$f(x) = a_0 + a_p(x - x_0)^p + \underset{x_0}{o}\left((x - x_0)^p\right).$$
où $a_p \neq 0$.
Alors la fonction f admet un extremum local en x_0 si et seulement si p est pair.
Si de plus $a_p > 0$, alors f admet en x_0 un minimum local.
Si de plus $a_p < 0$, alors f admet en x_0 un maximum local.

✓ Bien souvent, on préfère toutefois transformer les études au voisinage de x_0, en études au voisinage de 0 à l'aide du changement de variable $h = x - x_0$.

Ptitexo: *Étudier au voisinage de* 0, *les fonctions* $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x}$ *et* $x \mapsto \dfrac{\ln\left(1 - x^2\right)}{x^2}$.

9.3 Étude au voisinage de $\pm\infty$ - développements asymptotiques.

Observation fondamentale : le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$ transforme une étude au voisinage de $\pm\infty$, en une étude au voisinage de 0, où l'on peut alors utiliser tous les Dl connus

Ptitexo: *Donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ de* $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\ln(n+1)$ *et de* $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

Ptitexo: *Étudier le comportement au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ de la fonction* $f : x \mapsto 2x + 1 - \sqrt{x^2+2}$.

Ptitexo: *Étudier le comportement au voisinage de $+\infty$ de la fonction* $h : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x+2}e^{\frac{x-1}{x^2}}$.

Ptitexo: *Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au voisinage de zéro pour* $f : x \mapsto \ln(x^2+2x+2)$

Ptitexo: *Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à ses asymptotes au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ de la fonction* $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$

Ptitexo: *Étude complète de la fonction* $f : x \mapsto \left(x^2(x-2)\right)^{\frac{1}{3}}$

Ptitexo: *Étude complète de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$

Chapitre 20 - Introduction au Calcul Matriciel

A l'école, en algèbre, j'étais du genre Einstein. Mais plutôt Franck qu'Albert. Le chat à Malibu. P.Geluck.

1 Définitions

Définition 20.1 (Matrice)

Soit E un ensemble. Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle **matrice** à n lignes et p colonnes et à coefficients dans E toute famille $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ d'éléments de E indexée sur le produit cartésien $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Une telle matrice se note classiquement sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Le premier indice dans la notation $a_{i,j}$ est l'indice de ligne et le second est l'indice de colonne.

✓ Deux matrices $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux, i.e. si et seulement si : $\forall i \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], a_{i,j} = b_{i,j}$.

Notation : Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans E est noté $\mathrm{M}_{n,p}(E)$.

✓ On identifie classiquement $\mathrm{M}_{1,1}(E)$ et E.

Définition 20.2 (Lignes et colonnes)

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_{n,p}(E)$.
(−) Si $n = 1$, on dit que A est une matrice ligne.
(−) Si $p = 1$, on dit que A est une matrice colonne.
(−) On note, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $L_i = (a_{i,1}\, a_{i,2}\, \dots\, a_{i,p})$. Les vecteurs $L_1, \dots, L_n$ sont appelés **les lignes** de la matrice A.

(−) On note, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$. Les vecteurs $C_1, \dots, C_n$ sont appelés **les colonnes** de la matrice A.

Définition 20.3 (Matrices carrées particulières)

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]} \in \mathrm{M}_{n,n}(E)$.
(−) On dit que A est une matrice **triangulaire supérieure** lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0.$$

(−) On dit que A est une matrice **triangulaire inférieure** lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i < j \Longrightarrow a_{i,j} = 0.$$

(−) On dit que A est une matrice **diagonale** lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0.$$

(−) On dit que A est une matrice **scalaire** lorsque :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} = \lambda.\delta_{i,j}.$$

(−) On dit que A est une matrice **symétrique** lorsque :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} = a_{j,i}.$$

(−) On dit que A est une matrice **antisymétrique** lorsque :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} = -a_{j,i}.$$

Exemples :

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique.

3. La matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

4. La matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonale.

5. La matrice $E = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est scalaire.

Définition 20.4 (Matrice identité)

On appelle **matrice identité** la matrice notée I, définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \mathrm{I}_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

Dans toute la suite, on considère des matrices à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ qui sera le plus souvent égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2 L'espace vectoriel $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

2.1 Généralités

Définition 20.5 (Opérations sur les matrices)

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On définit les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire suivantes : Si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et

$$\lambda.A = (\lambda.a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Propriété 20.6 (Espace vectoriel $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

Le triplet $(\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

preuve:

Propriété 20.7 (Base canonique de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

Dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui placé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui est égal à 1.
Alors la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On l'appelle base canonique de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

preuve:

✓ On remarque donc que la base canonique de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de cardinal np. On écrira dira bientôt que $\dim(\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

✓ On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

2.2 Sous-espaces vectoriels particuliers

Propriété 20.8 (Matrices triangulaires)

Le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ formé par les matrices triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ formé par les matrices triangulaires inférieures est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

preuve:

Ptitexo: *Le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ formé par les matrices triangulaires supérieures et le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ formé par les matrices triangu-*

laires inférieures sont-ils supplémentaires ? Donner un supplémentaire dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.*

Ptitexo: *Déterminer une base de ces espaces vectoriels.*

Notations : On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ formé par les matrices symétriques.
On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ formé par les matrices antisymétriques.

Propriété 20.9 (s.e.v.)

L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
L'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

preuve:

Propriété 20.10 (supplémentaires)

On a :

$$M_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K}).$$

preuve:

Ptitexo: *Donner une base de* $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ *et une base de* $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

3 Produit matriciel

Définition 20.11 (Produit de deux matrices)

Soient $(n,p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On définit l'opération $\times$ de multiplication d'une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice de $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de la façon suivante :
Si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]} \in \mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K}).$$

Ptitexo: *Déterminer* $A \times B$ *pour* $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ *et*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,4}.$$

✓ On ne peut effectuer le produit matriciel $A \times B$ que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

✓ On peut avoir $AB = 0$ sans qu'aucune des matrices A ou B ne soit nulle. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $AB = 0$ et $A \neq 0_2$ et $B \neq 0_2$.

Ptitexo: *Une matrice A est dite stochastique si* $\forall (i,j) \in [1,n]^2, a_{i,j} \geq 0$ *et* $\forall i \in [1,n]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$
Montrer que si A et B sont stochastiques alors AB l'est aussi.
L'ensemble de matrices stochastique forme-t-il un e.v. ?

Propriété 20.12 (Propriétés du produit matriciel)

(−) Le produit matriciel est associatif, c'est-à-dire que :

$$\forall (A,B,C) \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

(−) Le produit matriciel est bilinéaire, c'est-à-dire que :

$$\forall (A, B_1, B_2) \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times (\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} :$$

$$A \times (B_1 + \lambda . B_2) = A \times B_1 + \lambda . (A \times B_2).$$

et

$$\forall (A_1, A_2, B) \in (\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K}))^2 \times (\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} :$$

$$(\lambda . A_1 + A_2) \times B = \lambda . (A_1 \times B) + A_2 \times B.$$

(−) On a :

$$\forall A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathrm{I}_n \times A = A \times \mathrm{I}_p = A.$$

preuve:

Propriété 20.13 (Produits des matrices de la base canonique)

Soit $(n,p,q) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Notons $(E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ les matrices de la base canonique de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\left(E'_{k,l}\right)_{(k,l) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]}$ les matrices de la base canonique de $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et enfin $\left(E''_{\alpha,\beta}\right)_{(\alpha,\beta) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]}$ les matrices de la base canonique de $\mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ Pour tout $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} E_{i,j} \times E'_{k,l} &= E''_{i,l} && \text{si } j = k \\ E_{i,j} \times E'_{k,l} &= 0_{n,q} && \text{si } j \neq k. \end{aligned}$$

preuve:

3.1 Anneau $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

3.1.1 Structure d'anneau

Propriété 20.14 (Anneau $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$)

Le triplet $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

preuve:

✓ $(\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \times, .)$ est en fait une algèbre.

Exercice 20.1

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

1) Exhiber deux éléments non nuls A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB = 0_n$.

2) Justifier que $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ n'est pas un anneau commutatif.

On a donc établi la propriété suivante :

Propriété 20.15 ()

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
$(-)$ L'anneau $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ n'est pas un anneau commutatif.
$(-)$ L'anneau $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ n'est pas un anneau intègre.

3.1.2 Puissances de matrices

Rappelons que la structure d'anneau nous permet d'effectuer les calculs usuels dans un anneau, on peut notamment élever une matrice à une certaine puissance. Rappelons, que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors on définit par récurrence $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$, en posant :

$$A^0 = \mathrm{I}_n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, A^{n+1} = A^n \times A = A \times A^n.$$

Les règles de calcul dans un anneau s'appliquent : en particulier *si les matrices A et B commutent*, alors la formule du binôme de Newton permet d'écrire :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^k B^{n-k}.$$

Exercice 20.2 Puissances de matrices et suites récurrentes linéaires croisées

---

Soient u, v et w trois suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = -2$ et $w_0 = 5$, et les relations : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + bv_n + cw_n \\ v_{n+1} &= du_n + ev_n + fw_n \\ w_{n+1} &= gu_n + hv_n + iw_n \end{aligned}$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer U_n en fonction de U_0, et des puissances d'une certaine matrice A que l'on précisera.

2) Expliciter pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n, v_n et w_n lorsque $a = b = c = d = e = f = g = h = i = 1$.

Exercice 20.3

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. On note $\chi_A = X(X-1)(X-2) = X^3 - 3X^2 + 2X$.

1) Montrer que χ_A est annulateur de A, c'est-à-dire que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_n$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$.

3) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de A^n.

3.1.3 Matrices nilpotentes (M.P.)

Définition 20.16 (Matrice nilpotente)

Soit $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice N est **nilpotente** s'il existe un indice $p \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$N^{p-1} \neq 0_n \quad \text{et} \quad N^p = 0_n.$$

Dans ce cas, l'entier p est appelé **indice de nilpotence** de la matrice p.

Exercice 20.4

Soient $M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Prouver que la matrice M est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.

2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de la matrice A^n.

On retient donc que si N est un matrice nilpotente d'indice p et si B est une matrice qui commute avec N, alors on peut déterminer les puissances de la matrice $A = N + B$ en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (N+B)^n = \sum_{k=0}^{p-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} N^k B^{n-k}.$$

Ne reste plus alors qu'à calculer les premières puissances de N et les puissances de B.

✓ Cette méthode n'a un intérêt que si les puissances de la matrice B sont faciles à calculer.

Ptitexo: *Calculer* $(A(x))^n$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *avec* $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

3.1.4 Groupe linéaire

Définition 20.17 (Groupe linéaire)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **groupe linéaire** de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices inversibles de l'anneau $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On note cet ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

✓ Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = \mathrm{I}_n$. Mais nous prouverons bientôt qu'il suffit de vérifier l'une des égalités $AB = \mathrm{I}$ ou $BA = \mathrm{I}$ pour en déduire que la matrice A est inversible d'inverse $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples :

1. Toute matrice scalaire non nulle est inversible.
2. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$, alors la matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 20.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^5 + 7A^4 - 3\mathrm{I} = 0$. Montrer que la matrice A est inversible.

2) Généralisation : Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle qu'il existe des réels $a_0, \dots, a_d$ tels que $\sum_{k=0}^{d} a_k A^k = 0$. On suppose que $a_0 \neq 0$. Montrer que A est inversible et préciser son inverse.

Propriété 20.18 (Le groupe linéaire est un groupe)

$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.

preuve:

Ptitexo: *Montrer qu'une matrice nilpotente n'est pas inversible.*

3.1.5 Autres ensembles stables par multiplication

Propriété 20.19 (Matrices triangulaires)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$(-)$ Le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ formé par les matrices triangulaires supérieures est stable par multiplication.
$(-)$ Le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ formé par les matrices triangulaires inférieures est stable par multiplication.

preuve:

Propriété 20.20 (Matrices diagonales)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$(-)$ Le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ formé par les matrices diagonales est stable par multiplication.
$(-)$ L'ensemble des matrices diagonales dont aucun des coefficients diagonaux n'est nul est stable par multiplication.

preuve:

4 Transposition

Définition 20.21 (Transposition)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit une application appelée transposition :

$$t : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \longmapsto {}^t A = (a_{j,i})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}.$$

La notation anglo-saxonne ${}^tA$ est A^T est recommandée dans le programme de P.C.S.I.

Exemples :

1. Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure.

Propriété 20.22 (Linéarité de la transposée)

La transposition est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

preuve:

Propriété 20.23 (Autres propriétés de la transposée)

(−) La transposition est idempotente, c'est-à-dire que :

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), {}^t\left({}^tA\right) = A.$$

(−) $\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, ${}^t(AB) = ({}^tB)\,({}^tA)$.
(−) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow ({}^tA) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors ${}^t\left(A^{-1}\right) = ({}^tA)^{-1}$.

preuve:

Exercice 20.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application :

$$p : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ A \longmapsto \frac{A +^t A}{2}.$$

1) Montrer que p est un projecteur de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

2) En déduire que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

5 Trace (M.P.)

Définition 20.24 (Trace)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A, le réel noté $\mathrm{tr}\,(A)$, défini par :

$$\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}.$$

✓ La trace d'une matrice carrée est donc la somme de ses éléments diagonaux.

Exemples :

1. $\mathrm{tr}\,(0_n) = 0$, $\mathrm{tr}\,(\mathrm{I}) = n$.
2. $\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\right) = 3.$

Propriété 20.25 (Propriétés de la trace)

$(-)$ L'application $\mathrm{tr}\, : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
$(-)$ $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}\,({}^tA) = \mathrm{tr}\,(A)$.
$(-)$ $\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$.
$(-)$ $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{tr}\,({}^tAA) \geq 0$, et
$\mathrm{tr}\,({}^tAA) = 0 \iff A = 0_n$.

preuve:

Chapitre 21 - Algèbre linéaire en dimension finie

"Pour choisir une chaussette de chaque paire, parmi une infinité de paires, l'axiome du choix est nécessaire. Mais pour des chaussures, on n'en a pas besoin." B. Russell.

1 Dimension d'un espace vectoriel

1.1 Existence de bases

Définition 21.1 (Espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On dit que E est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice de cardinal fini. Dans le cas contraire, on dit que E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de **dimension infinie** et l'on note $\dim_{\mathbb{K}}(E) = +\infty$.

✓ Si E est de dimension infinie et s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps $\mathbb{K}$, on note simplement $\dim(E) = +\infty$.

Exemples :

1. $M_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.
2. $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension infinie.

Propriété 21.2 (principe de réduction d'une famille génératrice)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $\mathcal{G} = (u_1, ..., u_{p+1})$ une famille génératrice finie de E. Si $u_{p+1} \in Vect(u_1, ..., u_p)$ alors la sous famille $(u_1, ..., u_p)$ est génératrice.

preuve:

Propriété 21.3 (principe d'extension d'une famille libre)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $\mathcal{G} = (u_1, ..., u_p)$ une famille libre finie de E et $v \in E$. Si $v \notin Vect(u_1, ..., u_p)$ alors la famille $(u_1, ..., u_p, v)$ est libre.

preuve:

Théorème 21.4 (Théorème de la base extraite)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E.

preuve:

Corollaire 21.5 (de la base extraite)

Tout espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base de cardinal fini.

Théorème 21.6 (Théorème de la base incomplète)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.
$(-)$ Si la famille $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E de cardinal fini, si la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre de E, alors la famille $\mathcal{B}$ peut être complétée avec des vecteurs de $\mathcal{G}$ pour former une base de E.
$(-)$ Toute famille libre de E peut être complétée en une base.

preuve:

> Ptitexo: $E = \mathbb{R}^3$ *Soient* $u_1 = (3, 2, -4)$ *et* $u_2 = (2, 1, -2)$ *deux vecteurs de* E*. La famille* (u_1, u_2) *est-elle libre ? Si oui, la compléter en une base de* E.

1.2 Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Propriété 21.7 (Lemme de Steinitz)

Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel qui admet une famille génératrice de cardinal n, alors toute famille de strictement plus de n de vecteurs de E est liée.

preuve:

Théorème 21.8 (Théorème de la dimension)

Si E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension fini, alors toutes les bases de E admettent le même cardinal. On appelle ce nombre la **dimension de** E, on le note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ (ou simplement $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps considéré).

preuve:

Propriété 21.9 (Dimension des espaces vectoriels usuels)

1. Par convention, $\dim(\{0_E\}) = 0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \dim(\mathbb{K}^n) = n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$.
4. $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \dim(\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$.
5. $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.
6. Si a est une fonction continue sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$, alors l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$ de dimension 1.
7. Si a et b sont des fonctions continues sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$, alors l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation différentielle
$$y'' + a(x)y + b(x)y = 0.$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$ de dimension 2.
8. Si $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, alors l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0.$$
est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 2.
9. $\dim\left(\mathbb{R}^I\right) = +\infty$.
10. $\dim(\mathbb{K}[X]) = +\infty$.

preuve:

Corollaire 21.10 ()

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n.
$(-)$ Toute famille libre de E possède au maximum n vecteurs.
$(-)$ Une famille de strictement plus de n vecteurs de E est liée.
$(-)$ Toute famille génératrice de E possède au minimum n vecteurs.
$(-)$ Toute famille de E qui possède strictement moins de n vecteurs est non génératrice de E.

preuve:

Exercice 21.1 **nombre de vecteurs d'une famille**

Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathrm{L}(E)$ est nilpotent s'il existe un indice $p \in \mathbb{N}$, tel que $f^{p-1} \neq \tilde{0}$ et $f^p = \tilde{0}$. En considérant la famille $\left(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\right)$ pour un vecteur x bien choisi, prouver que s'il existe un endomorphisme de E nilpotent d'indice p, alors $p \leq \dim(E)$.

Corollaire 21.11 (dim infinie)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) $\dim_{\mathbb{K}}(E) = +\infty$.
ii) Il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_0, \ldots, e_n)$ est libre.

preuve:

Exemples :

1. $\dim\left(\mathbb{R}^I\right) = +\infty$.
2. $\dim\left(\mathbb{K}[X]\right) = +\infty$.

1.2.1 Caractérisation des bases dans un espace de dimension finie

Théorème 21.12 (Carac. des bases parmi les fam. de card. $\dim(E)$**)**

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie égale à n. Soit b une famille de n vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La famille b est une base de E.

ii) La famille b est libre.

iii) La famille b est génératrice de E.

preuve:

✓ Ce théorème nous fournit naturellement une méthode très rapide pour prouver qu'une famille b d'un espace vectoriel de dimension finie égale à n est une base : on prouve successivement les assertions :
$(-)$ $\operatorname{card}(b) = n$.
$(-)$ b est une famille libre de vecteurs de E.
On en déduit que la famille b est une base.

✓ En général, il est plus simple de prouver le fait qu'une famille b est libre (on résout un système homogène), que de montrer qu'elle est génératrice (on cherche si un système non homogène a des solutions).

Ptitexo: *Montrer que la famille* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

Ptitexo:

1. *Montrer que la famille* $\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
2. *Quelles sont les coordonnées de la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *dans cette base ?*
3. *Quelles sont les coordonnées de la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *dans cette base ?*

Ptitexo: *Déterminer une CNS sur les complexes z_1 et z_2 pour qu'ils forment une base du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{C}$.*

Ptitexo: *Soit $b = (P_0, \ldots, P_n)$ une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degrés deux à deux distincts. Montrer que la famille b est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.*

1.2.2 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels de dimension finie

Propriété 21.13 (Dimension d'un produit d'espaces vect.)

Si $E_1, \ldots, E_n$ est une liste de n $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie, alors :

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_1 \times \cdots \times E_n) = \sum_{k=1}^{n} \dim_{\mathbb{K}}(E_i).$$

preuve:

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

2 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Propriété 21.14 (dim s.e.v.)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E de dim finie.
$(-)$ On a :

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

$(-)$ On a :

$$E = F \iff \dim(E) = \dim(F).$$

preuve:

✓ Le deuxième item de cette propriété nous fournit une méthode très pratique pour prouver que deux espaces vectoriels A et B sont égaux : on montre que $A \subset B$ et que $\dim(A) = \dim(B)$.

✓ Le deuxième item de ce théorème est le meilleur ami du théorème du rang.

Ptitexo: *Dans $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère les vecteurs* $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \textit{ et } Y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \textit{ Montrer que :}$$

$$\mathrm{Vect}\,(u,v) = \mathrm{Vect}\,(X,Y).$$

Corollaire 21.15 (Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$)

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. F est de l'une des formes suivantes :
$(-)$ $F = \{(0,0)\}$, dans ce cas, $\dim(F) = 0$;
$(-)$ $F = \mathbb{R}.x$ (pour $x \neq 0_{\mathbb{R}^2}$) dans ce cas, $\dim(F) = 1$;
$(-)$ $F = \mathbb{R}^2$, dans ce cas $\dim(F) = 2$.

preuve:

Corollaire 21.16 (Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$)

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. F est de l'urne des formes suivantes :
$(-)$ $F = \{(0,0,0)\}$, dans ce cas, $\dim(F) = 0$;
$(-)$ $F = \mathbb{R}.x$ (pour $x \neq 0_{\mathbb{R}^3}$), dans ce cas, $\dim(F) = 1$;
$(-)$ $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax+by+cz=0 \right\}$ (pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$), dans ce cas $\dim(F) = 2$.
$(-)$ $F = \mathbb{R}^3$, dans ce cas $\dim(F) = 3$.

preuve:

2.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 21.17 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une famille finie de $n \in \mathbb{N}$ vecteurs d'un sous-espace vectoriel E. On appelle **rang** de la famille e la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par la famille e. On la note $\mathrm{rg}\,(e) = \mathrm{rg}\,(e_1, \dots, e_n)$. Autrement dit :

$$\mathrm{rg}\,(e) = \mathrm{rg}\,(e_1, \dots, e_n) = \dim \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_n)\,.$$

✓ On peut utiliser cette définition même si l'espace vectoriel E est de dimension finie.

Propriété 21.18 (rang et dimension)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit e une famille de vecteurs de E.
$(-)$ On a :

$$\mathrm{rg}\,(e) \leq \dim(E).$$

$(-)$ De plus $\mathrm{rg}\,(e) = \dim(E)$ si et seulement si la famille est génératrice de E.
$(-)$ La famille e est une base de e si et seulement si $\dim(E) = \mathrm{card}\,(e) = \mathrm{rg}\,(e)$.

preuve:

Ptitexo: *Dans* $\mathbb{R}[X]$, $P_1 = X - 1$; $P_2 = X^2 - 1$; $P_3 = X^2 - X$ *Déterminer le rang de* (P_1, P_2, P_3)

2.3 Sommes de sous-espaces vectoriels et dimensions

2.3.1 Sommes de deux sous-espaces vectoriels

Propriété 21.19 (Existence et dime d'un s.e.supplémentaire)

Soient E un $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension finie égale à n.
$(-)$ Si F est un s.e.v. de E alors F admet au moins un supplémentaire dans E.
$(-)$ Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, qui admettent respectivement pour base f et g, alors la famille obtenue par concaténation de f et de g est une base de E et $dimE = dimF + dimG$

preuve:

✓ On en déduit que tous les supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel F de E, ont la même dimension égale à $\dim(E) - \dim(F)$.

Ptitexo: $E = \mathbb{R}^4$; $F = Vect(f_1 = (1,3,1,0); f_2 = (0,1,1,0))$. *Déterminer un supplémentaire de* F *dans* dr^4.

Définition 21.20 (base adaptée)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
$(-)$ Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $r \in \mathbb{N}$. On dit que la famille $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une **base de E adaptée** à F si la sous-famille $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base de F.
$(-)$ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. On dit que la famille $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une **base de E adaptée à la somme directe** $F \oplus G$ si la sous-famille $\left(e_1, \ldots, e_{\dim(F)}\right)$ est une base de F et si la sous-famille $\left(e_{\dim(F)+1}, \ldots, e_n\right)$ est une base de G.

✓ On peut définir sur le même principe une base adaptée à une somme directe du type $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Propriété 21.21 (Existence de bases adaptées)

Si $(F_1, \dots, F_n)$ est une famille de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E de dimension finie, telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$, alors il existe une base adaptée à cette somme directe.

preuve:

Ptitexo: *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Déterminer* $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K}))$, *la dimension du sous-espace vectoriel de E formé par les matrices symétriques. En déduire* $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$, *la dimension du sous-espace vectoriel de E formé par les matrices anti-symétriques.*

Propriété 21.22 (Formule de Grassmann)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E de dimension finie. On a :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

preuve:

Ptitexo: *Que dire de l'intersection de deux plans vectoriels de* $\mathbb{R}^3$ *?*

Corollaire 21.23 (de Grassmann)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E de dimension finie.
$(-)$ On a :

$$\dim(F+G) \leq \dim(F) + \dim(G).$$

$(-)$ Les espaces vectoriels F et G sont en somme directe si et seulement si :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G).$$

preuve:

Propriété 21.24 (Caractérisation des supplémentaires)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) $E = F \oplus G$.
ii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
iii) $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

preuve:

✓ La propriété **ii)** est une des propriétés la plus utilisées pour vérifier si deux espaces sont supplémentaires.

Ptitexo: $F_1 = Vect((0,1,-1,0),(1,0,1,0))$ *et* $F_2 = Vect((1,0,0,-1),(0,0,1,2))$
Montrer que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^4$

2.3.2 Sommes de plusieurs sous-espaces vectoriels

Propriété 21.25 (sommes (M.P.S.I.))

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
$(-)$ Soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Soient $r+1$ indices $i_1,\dots,i_{r+1}$ tels que $1=i_1<\dots<i_{r+1}=n$.
Pour tout $k\in[\![1,r]\!]$, on note $E_k=\mathrm{Vect}\left(e_{i_k},\dots,e_{i_{k+1}-1}\right)$. Dans ce cas :

$$E=\bigoplus_{k=1}^{r}E_k.$$

$(-)$ Soient $E_1,\dots,E_r$ une famille de r sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$E=\bigoplus_{k=1}^{r}E_k.$$

Si $b_1,\dots,b_r$ désignent des bases de chacun de ces sous-espaces vectoriels, alors la famille obtenue par concaténation de b_1, b_2, ..., b_r est une base de E.

preuve:

Corollaire 21.26 (sommes et dim (M.P.S.I.))

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension quelconques. Soient $E_1,\dots,E_r$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Si chacun de ces espaces vectoriels est de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^{r}E_i$ est de dimension finie. De plus :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{r}E_i\right)\leq\sum_{i=1}^{r}\left(\dim\left(E_i\right)\right).$$

Il y a égalité dans cette dernière égalité si et seulement si la somme est directe.

preuve:

3 Applications linéaires en dimension finie

✓ Une application linéaire f est injective si et seulement si $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(f\right)\right)=0$.

3.1 Théorème du rang

3.1.1 Rang d'une application linéaire

Définition 21.27 (rang d'une application linéaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $u \in \mathrm{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F. Si $\mathrm{Im}\,(u)$ est de dimension finie, alors on appelle cette quantité **le rang de** u et on le note $\mathrm{rg}\,(u)$. Autrement dit :

$$\mathrm{rg}\,(u) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(u)\right).$$

On dit alors que u est de rang fini.

Ptitexo: *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rang de l'application :*

$$D : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X], \ P \longmapsto P'.$$

Propriété 21.28 (rang et famille génératrice)

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $u \in \mathrm{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F. Si la famille $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice de E, alors :

$$\mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,\left(f\,(e_1)\,, \ldots, f\,(e_n)\right).$$

Ptitexo: *Déterminer le rang des applications :*

1. $f : \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - y + z \\ x + y + z \\ x + z \end{pmatrix}.$
2. $\Psi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X], \ P(X) \longmapsto P(X) - P(X+1).$

Propriété 21.29 (rang et dimension)

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $u \in \mathrm{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F.
$(-)$ Si la dimension de E est finie, alors u est de rang fini et

$$\mathrm{rg}\,(u) \leq \dim(E).$$

Il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si u est injective.
$(-)$ Si la dimension de F est finie, alors u est de rang fini et

$$\mathrm{rg}\,(u) \leq \dim(F).$$

Il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si u est surjective.

preuve:

3.1.2 espaces isomorphes

Théorème 21.30 (Carac. des esp. vect. isomorphes en dim. finie)

Deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels F et G sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension finie.

preuve:

Exemples :

1. Les espaces vectoriels $\mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{K})$, $\mathbb{R}^6$, $\mathbb{R}_5[\mathbb{K}]$ sont isomorphes.
2. Tout espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Exercice 21.2 Espace vectoriel associé à une suite récurrente linéaire d'ordre p.

Soit $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$. On considère l'espace vectoriel E des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k.$$

1) Montrer que l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}^p,\ u \longmapsto (u_0, \dots, u_{p-1})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2) En déduire que E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie dont on donnera la dimension.

3.1.3 Énoncé du théorème

Théorème 21.31 (Théorème du rang)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit F un espace vectoriel de dimension quelconque. Si u est une application linéaire de E vers F, alors :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}\,(u)) + \mathrm{rg}\,(u).$$

preuve:

Ptitexo: *Déterminer la dimension du noyau et de l'image de l'application :*

$$\Delta : \mathbb{R}_5[X] \longrightarrow \mathbb{R}_5[X],\ P \longmapsto (P(0), P(2)).$$

Ptitexo: *Déterminer l'image de l'application :*

$$\Delta : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X],\ P \longmapsto P(X+1) - P(X).$$

Exercice 21.3

Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Soient $u \in \mathrm{L}(E, F)$ et $v \in \mathrm{L}(F, G)$ deux applications linéaires de rang fini.

1) Montrer que $v \circ u$ est une application linéaire de rang fini et que :

$$\mathrm{rg}\,(v \circ u) \leq \min(\mathrm{rg}\,(u), \mathrm{rg}\,(v)).$$

2) Exhiber un cas où il y a égalité dans cette égalité et un cas où il y a inégalité dans cette égalité.

Exercice 21.4

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. Soit $u \in \mathrm{L}(E, F)$ et $v \in \mathrm{L}(F, G)$.

1) Montrer que :

$$\mathrm{rg}\,(v \circ u) = \mathrm{rg}\,(u) - \dim\left(\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(v)\right).$$

2) En déduire que :

$$\mathrm{rg}\,(v \circ u) \geq \mathrm{rg}\,(v) + \mathrm{rg}\,(u) - \dim(F).$$

3) Montrer que :

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\,(v \circ u)\right) \leq \dim\left(\mathrm{Ker}\,(v)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right).$$

3.2 Isomorphismes en dimension finie

3.2.1 Caractérisation des isomorphismes

Théorème 21.32 (Caractérisation des isomorphismes en dim. finie)

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de **dimension finie**. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F. Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) f est injective.
ii) f est surjective.
iii) f est bijective.
iv) f est un isomorphisme de E vers F.

preuve:

Théorème 21.33 (Caractérisation des automorphismes en dim. finie)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de **dimension finie**. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.
4. f est un automorphisme de E.

preuve:

Exemples :

1. Montrer que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} x-y+z \\ -x+y+z \\ x+y-z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. L'application $D : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X],\ P \longmapsto P'$ n'est pas injective donc elle n'est pas non plus surjective.

Exercice 21.5 Polynômes d'interpolation de Lagrange-L'élégant retour

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ une liste de $n+1$ réels 2 à 2 distincts.
Soit $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},\ P \longmapsto (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n))$.

1) Montrer que l'application Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2) On note $(e_0, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.
On note $L_i = \Phi^{-1}(e_i)$.

a) Justifier qu'il existe une constante $\lambda_i \in \mathbb{R}$, telle que

$$L_i(X) = \lambda_i \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} (X - a_j)\,.$$

b) Déterminer la valeur de λ_j.

c) En déduire l'antécédent $(x_0, \ldots, x_n)$ d'un $n+1$-uplet quelconque de réels.

✓ Attention, l'hypothèse f est un endomorphisme de E est indispensable :
L'application $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (2x+y-z, x+y+z)$ est surjective sans être injective, tandis que l'application
$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y) \longmapsto (x+y, x-y, x)$ est injective mais pas surjective.

✓ Il n'y aucun espoir d'appliquer ce théorème si E n'est pas de dimension finie ou pire si f n'est pas linéaire. Remarquons par exemple, que l'application $D : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X],\ P \longmapsto P'$ est un endomorphisme surjectif mais non injectif de l'espace vectoriel de dimension infinie $\mathbb{R}[X]$. Tandis que l'application $\psi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X],\ P(X) \longmapsto XP(X)$ est un endomorphisme injectif mais non surjectif de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Corollaire 21.34 (caractérisation des éléments inversibles (M.P.S.I.))

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de **même dimension finie**. Soit $f \in \mathrm{L}(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est inversible à gauche, i.e.

$$\exists g \in \mathrm{L}(F,E), g \circ f = \mathrm{id}_E.$$

ii) f est inversible à droite, i.e.

$$\exists g \in \mathrm{L}(F,E), f \circ g = \mathrm{id}_F.$$

iii) f est un isomorphisme et dans ce cas $g = f^{-1}$.

preuve:

Corollaire 21.35 (caractérisation des endomorphismes inversibles (M.P.S.I.))

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$. Soit $g \in \mathrm{L}(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) $f \circ g = \mathrm{id}_E$.
ii) $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
iii) f est un automorphisme et $g = f^{-1}$.

preuve:

3.3 Formes linéaires et hyperplan en dimension finie (M.P.S.I.)

Propriété 21.36 (Carac. des hyperplans en dim. finie)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.

preuve:

Propriété 21.37 ()

Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$.
Les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 21.38 (Intersections d'hyperplans)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n.
$(-)$ L'intersection de m hyperplans est de dimension au moins égale à $n-m$.
$(-)$ Soit F un sous-espace vectoriel de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\dim(F) \geq p$.
ii) Il existe $n-p$ hyperplans $H_1, \ldots, H_{n-p}$ de E tels que :

$$F = \bigcap_{i=1}^{n-p} H_i.$$

preuve:

Exercice 21.6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$ un endomorphisme de E qui stabilise tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension k. Montrer que f est une homothétie. On pourra procéder par récurrence.

Chapitre 22 - Matrices et Applications linéaires

" Il vaut mieux viser la perfection et la manquer que viser l'imperfection et l'atteindre."' B.Russell.

1 Matrice d'une application linéaire

1.1 Isomorphisme entre $\mathrm{L}(E,F)$ et $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Dans tout ce paragraphe :
E et F désignent deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie ;
les entiers p et n désignent respectivement la dimension de E et de F ;
$e=(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E et $f=(f_1,\dots,f_n)$ est une base de F.

1.1.1 Matrice des coordonnées d'une famille de vecteurs de E

Tout vecteur x de E, s'exprime de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs $e_1,\dots,e_p$:

$$\forall x \in E,\ \exists!\,(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{K}^p,\ x=x_1e_1+\cdots+x_pe_p.$$

On appelle **matrice-colonne des coordonnées de x dans la base** e, la matrice-colonne de taille p : $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$. On note cette matrice $\mathrm{Mat}_e(x)$.

Exemple :
Dans $\mathbb{R}_3[X]$, la matrice-colonne des coordonnées de $2X^3-X^2+X+1$ dans la base $\left(X^3,X^2+X,X+1,1\right)$ est $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

> Ptitexo: *Déterminer la matrice des coordonnées de $4X^3-X^2+X-1$ dans la base $\left(X^3+X,X^3+X^2,X+1,1\right)$?*

Propriété 22.1 (isomorphisme vecteur-matrice colonne)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie p. Soit e une base de E. L'application

$$\mathrm{Mat} : E \longrightarrow M_P(\mathbb{K}),\ x \longmapsto \mathrm{Mat}_e(x),$$

qui à tout vecteur de E associe la matrice-colonne de ses coordonnées dans la base $(e_1,\dots,e_p)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E et $\mathbb{K}^p$.

preuve:

Exemple : Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 3 qui admet b pour base. Si $u \in E$ a pour coordonnées dans la base b, $(1, -1, 3)$ et $v \in E$ a pour coordonnées $(2, -1, 4)$ dans la base b, alors dans cette même base b, le vecteur $u + 3v$ admet pour coordonnées $(7, -4, 15)$.

Définition 22.2 (Matrice d'une fam. de vect. ds une base donnée)

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $(v_1, \dots, v_k) \in E^k$ est une famille de vecteurs de E, alors on appelle **matrice des coordonnées de** $(v_1, \dots, v_k)$ **dans la base** e la matrice dont la j-ème colonne (pour tout $j \in [\![1, k]\!]$) est égale à la matrice-colonne des coordonnées de v_j dans la base e. On note cette matrice $\mathrm{Mat}_e\,(v_1, \dots, v_k)$.

Propriété 22.3 (isomorphisme famille de vecteurs-matrice)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie p. Soit e une base de E. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'application

$$\mathrm{Mat} : E^k \longrightarrow \mathbb{K},\ u \longmapsto \mathrm{Mat}_e(u),$$

qui à toute famille de k vecteurs de E associe la matrice-colonne de ses coordonnées dans la base $(e_1, \dots, e_p)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E^k et $\mathrm{M}_{p,k}(\mathbb{K})$.

preuve:

1.1.2 De l'application linéaire à la matrice

Définition 22.4 (Matrice d'une application linéaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n.
Soit $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $f = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Soit $u \in \mathrm{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F. La matrice de u dans les bases e et f est la matrice dont (pour tout $j \in [\![1, p]\!]$) le j-ème vecteur-colonne est le vecteur des coordonnées de $u\,(e_j)$ dans la base f. On la note $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$.

✓ Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie qui admet la famille e pour base et si $u \in \mathrm{L}(E)$ est un endomorphisme de E, alors on note simplement $\mathrm{Mat}_e(u)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{e,e}(u)$. On appelle cette matrice, matrice de u dans la base e

Ptitexo: *Donner la matrice* $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ *de l'application*

$$u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

dans les bases $e = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ *et* $f = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, *puis la matrice de* u *dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^2$.

<u>Ptitexo:</u> *Donner la matrice de l'application*

$$D : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X],\ P \longmapsto P'$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

<u>Ptitexo:</u> *Donner la matrice dans la base canonique de*

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X],\ P(X) \longmapsto P(X+1).$$

Expliciter en particulier le coefficient de la ligne i *et de la colonne* j *de la matrice de* ϕ *dans la base canonique.*

✓ En général, la matrice d'une application linéaire dépend de la base choisie.

Exemples :

1. Si E est de dimension p, la matrice de l'application $Id_E : x \in E \mapsto x \in E$ est I_n, la matrice identité de taille n (et cela, quelque soit la base de E choisie).
2. La matrice de l'application $\tilde{0} \in \mathrm{L}(E,F)$ est la matrice $0_{\dim(F),\dim(E)}$.

<u>Ptitexo:</u> *Donner la matrice de l'application*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y + 2z \\ x + y - z \\ x - y - z \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

<u>Ptitexo:</u> *Déterminer la matrice, relativement aux bases canoniques des ensembles de départ et d'arrivée de l'application linéaire :*

$$\varphi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ P \longmapsto (P(2), P'(1) - P(0), P"(-1)$$

<u>Ptitexo:</u> *Donner dans la base canonique de* $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ *la matrice de l'application*

$$\Phi : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ X \longmapsto AX - XB$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Propriété 22.5 (Isomorphisme entre $\mathrm{L}(E, F)$ et $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Soit $e = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. L'application

$$\mathrm{Mat} : E \longrightarrow F,\ u \longmapsto \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$$

qui à une application linéaire associe sa matrice est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

preuve:

✓ Cette proposition, nous dit en substance qu'une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice.

Exemple :
Soient e et f deux bases de $\mathbb{R}^2$. Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ de matrices respectives : $Mat_{e,f}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, et $Mat_{e,f}(v) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Mat}_{e,f}(u - 2v) = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$.

Corollaire 22.6 ($\dim(\mathrm{L}(E, F))$.)

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions respectives n et p. Soit $e = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Alors

$$\dim(\mathrm{L}(E, F)) = n \times p.$$

Une base de $\mathrm{L}(E, F)$ est la famille $(u_{i,j})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p}$ où l'application $u_{i,j}$ est définie par $u_{i,j}(e_j) = f_i$ et $u_{i,j}(e_k) = 0\ si\ k \neq j$.

✓ Avec les notations du corollaire, $\mathrm{Mat}_{e,f}(u_{i,j}) = E_{i,j}$.

Exemple : $\dim\left(\mathrm{L}\left(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^5\right)\right) = 20$.

1.1.3 De l'application linéaire à la matrice

Propriété 22.7 (lien entre application linéaire et matrice)

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p. Soit $e = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Soit $u \in \mathrm{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F. Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $A = \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$.

ii) $\forall x \in E, \forall y \in F, \quad u(x) = y \Longleftrightarrow A\mathrm{Mat}_e(x) = \mathrm{Mat}_f(y)$.

✓ Cette propriété permet de retrouver $u(x)$ pour $x \in E$, lorsque la matrice de u et les coordonnées de x sont connues.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On note e, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'on suppose que $A = \mathrm{Mat}_e(u)$. L'endomorphisme u est alors l'endomorphisme :

$$u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ y + 2z \\ x + y + 3z \end{pmatrix}.$$

Ptitexo: *On considère l'endomorphisme K de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique $\left(1, X, X^2, X^3\right)$ est* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Que vaut $K\left(X^3 - 2X^2\right)$?*
2. *Que vaut $K\left(a + bX + cX^2 + dX^3\right)$?*

Corollaire 22.8 (égalités particulières)

Soient A et B deux éléments de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$(-)$ Si $\forall X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = 0$, alors $A = 0$.
$(-)$ Si $\forall X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = BX$, alors $A = B$.

preuve:

✓ Ce corollaire fait apparaître des implications, les implications réciproques sont évidemment vraies quoique moins utiles.

1.2 Composition d'endomorphismes et produit matriciel

Propriété 22.9 (Matrice d'une composée)

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie munis respectivement des bases e, f et g. Soient $u \in \mathrm{L}(E, F)$ et $v \in \mathrm{L}(F, G)$ deux applications linéaires. Alors on a :

$$\mathrm{Mat}_{e,g}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{f,g}(v) \times \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$$

preuve:

On retiendra que la matrice de la composée est le produit des matrices.

Ptitexo: *Soient les applications linéaires :*

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x-y \\ \\ x+y \end{pmatrix}$$

et

$$v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x-y \\ \\ x+2y \\ \\ 2x-y \end{pmatrix}.$$

On note e la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner les matrices $\mathrm{Mat}_e(u)$, $\mathrm{Mat}_{e,f}(v)$ et $\mathrm{Mat}_{e,f}(v \circ u)$.

✓ Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle n. Le théorème précédent implique que l'application $\mathrm{Mat} : \mathrm{L}(E) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui à un endomorphisme associe sa matrice est un morphisme d'algèbre.

Propriété 22.10 (Cas particulier des endomorphismes)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base e. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ un endomorphisme de E.

* $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Mat}_e\left(u^k\right) = (\mathrm{Mat}_e(u))^k$.
* L'endomorphisme u est un automorphisme de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_e(u)$ est inversible. Dans ce cas, on a :

$$\mathrm{Mat}_e\left(u^{-1}\right) = (\mathrm{Mat}_e(u))^{-1}.$$

et

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \mathrm{Mat}_e\left(u^k\right) = (\mathrm{Mat}_e(u))^k.$$

preuve:

On retient donc, qu'un *un endomorphisme est bijectif si et seulement si sa matrice est inversible* et que dans ce cas la matrice de la réciproque de l'endomorphisme est l'inverse de la matrice de l'endomorphisme.

Ptitexo: *Soient les applications linéaires :*

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x-y \\ \\ x+y \end{pmatrix}$$

et

$$v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}_1[X], \quad \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 2xX + 3y.$$

On note e la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f la base canonique de $\mathbb{K}_1[X]$. Donner les matrices $\mathrm{Mat}_e(u)$, $\mathrm{Mat}_{e,f}(v)$, $\mathrm{Mat}_{e,f}(v \circ u), \mathrm{Mat}_e(u^{-1})$. En déduire l'image de $x = (-1, 2)$ par v, par g, par $v \circ u$ et par u^{-1}

Ptitexo: *Soit l'application*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - y + z \\ 2x + y - z \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

2.1 Définitions et premières propriétés

Dans tout ce paragraphe, on identifie $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 22.11 (App. lin. canoniquement associée à une matrice)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à la matrice A l'application :

$$f_A : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n, \ X \longmapsto AX.$$

En construisant ainsi, l'application linéaire canoniquement associée à une matrice, on peut définir le rang, le noyau et l'image d'une matrice : ce sont ceux de son application linéaire canoniquement associée.

Définition 22.12 (Rang, Image, Noyau d'une matrice)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $f_A \in \mathrm{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A. On définit alors :

($-$) Le noyau de la matrice A est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ noté $\mathrm{Ker}\,(A)$ et défini par :

$$\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(f_A).$$

($-$) L'image de la matrice A est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ noté $\mathrm{Im}\,(A)$ et défini par :

$$\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(f_A).$$

($-$) Le rang de la matrice A est l'entier noté $\mathrm{rg}\,(A)$ et défini par :

$$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(f_A).$$

Ptitexo: *Déterminer le rang, le noyau et l'image de la matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$,*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriété 22.13 (image et rang)

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \ldots, C_p$ les vecteurs-colonnes de A.
$(-)$ $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}\,(C_1, \ldots, C_p)$.
$(-)$ $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(C_1, \ldots, C_p)$.

preuve:

Propriété 22.14 (noyau)

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{Ker}\,(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p \;\middle|\; \left\{ \begin{matrix} a_{1,1}x_1 & +\cdots+ & a_{1,p}x_p & = 0 \\ a_{2,1}x_1 & +\cdots+ & a_{2,p}x_p & = 0 \\ \vdots & +\cdots+ & \vdots & = 0 \\ a_{n,1}x_1 & +\cdots+ & a_{n,p}x_p & = 0 \end{matrix} \right. \right\}.$$

preuve:

2.2 Application à la caractérisation des matrices inversibles

Propriété 22.15 (Caractérisation des matrices inversibles)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice *carrée*. Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) A est inversible.
ii) $\mathrm{Im}\,(A) = \mathbb{K}^n$.
iii) $\mathrm{rg}\,(A) = n$.
iv) $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0\}$.
v) $\exists B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), AB = \mathrm{I}_n$.
vi) $\exists B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), BA = \mathrm{I}_n$.
vii) ${}^{\mathrm{t}}A$ est inversible.

preuve:

Lemme 22.16 (matrice triangulaire supérieure)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A. On note pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$E_k = \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_k)\,.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La matrice A est triangulaire supérieure.

ii) $\forall k \in [\![1, n]\!]$, l'espace vectoriel E_k est stable par f.

preuve:

Propriété 22.17 (Inversibilité des matrices triangulaires)

Une matrice carrée $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

preuve:

Propriété 22.18 (ensemble des matrices triangulaires supérieurs)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp.inférieures) inversibles est un sous-groupe du groupe $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ des matrices inversibles carrées d'ordre n.

preuve:

3 Calculs matriciels par blocs (M.P.S.I.)

3.0.1 Écriture par blocs

Soit (n, p) un couple d'entiers strictement supérieurs à 1.
Soit $(n_1, n_2) \in [\![1, n-1]\!]^2$ tel que $n_1 + n_2 = n$.
Soit $(p_1, p_2) \in [\![1, p-1]\!]^2$ tel que $p_1 + p_2 = p$.

On considère une matrice $M \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dont on note $m_{i,j}$ le coefficient situé à l'intersection de la ligne $i \in [\![1, n]\!]$ et de la ligne $j \in [\![1, p]\!]$.
On définit alors les matrices $A \in \mathrm{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$, $D \in \mathrm{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$ par les relations :

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1, n_1]\!], \forall j \in [\![1, p_1]\!], a_{i,j} &= m_{i,j},\\
\forall i \in [\![1, n_1]\!], \forall j \in [\![1, p_2]\!], b_{i,j} &= m_{i,j+p_1},\\
\forall i \in [\![1, n_2]\!], \forall j \in [\![1, p_1]\!], c_{i,j} &= m_{i+n_1,j}\\
\forall i \in [\![1, n_2]\!], \forall j \in [\![1, p_2]\!], d_{i,j} &= m_{i+n_1,j+p_1}.
\end{aligned}$$

On dit alors que l'écriture $M = \begin{pmatrix} A & B \\ & \\ C & D \end{pmatrix}$ est une **écriture de M par blocs**.

Propriété 22.19 (Interprétation géo. pour des matrices carrées)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ un endomorphisme dont on note $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dans la base e. Soit $r \in [\![1, n-1]\!]$ un entier et les matrices $A \in \mathrm{M}_{r,r}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{K})$ telles que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ soit une écriture par blocs de M. Notons $E_r = \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_r)$ et $F_{n-r} = \mathrm{Vect}\,(e_{r+1}, \dots, e_n)$. On a alors :

$(-)$ $A = \mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_r)}(\pi \circ u)$ où π désigne la projection sur E_r parallèlement à F_{n-r}.

$(-)$ $\Delta = \mathrm{Mat}_{(e_{r+1},\dots,e_n)}(\psi \circ u)$ où ψ désigne la projection sur F_{n-r} parallèlement à E_r.

$(-)$ Le sous-espace vectoriel E_r est stable par u si et seulement si $C = 0$. Dans ce cas, l'endomorphisme induit par restriction de u à E_r a pour matrice A dans la base $(e_1, \dots, e_r)$.

$(-)$ Le sous-espace vectoriel F_{n-r} est stable par u si et seulement si $B = 0$. Dans ce cas, l'endomorphisme induit par restriction de u à F_{n-r} a pour matrice D dans la base $(e_{n-r}, \dots, e_n)$.

preuve:

Propriété 22.20 (Produit par blocs)

Soit n, p et q trois entiers naturels. Soit $M \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M' = \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ admettant les écritures par blocs suivantes : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$. Si le produit matriciel AA' est défini, alors :

$$MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

preuve:

✓ Attention dans cette formule, on ne peut en général, pas inverser l'ordre des facteurs dans les produits matriciels...

4 Changements de base et similitude

On a compris dans les paragraphes précédent que les coordonnées d'un vecteur et la matrice d'une application linéaire dépendent de la base choisie. Le but de ce paragraphe est d'expliquer comment passer d'une base à l'autre.

4.1 Matrices de passage d'une base à une autre

Définition 22.21 (Matrice de passage)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ muni des bases $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$. On appelle **matrice de passage de la base e à la base e'** la matrice définie par :
Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne est formée des coordonnées du vecteur e'_j dans la base e. On note cette matrice $P_e^{e'}$, ce qui se lit « matrice de passage de e à e' ».

Ptitexo: *Soit e la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $e' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Justifier que e' est une base de $\mathbb{R}^2$, et donner $P_e^{e'}$ et $P_{e'}^{e}$.*

Propriété 22.22 (propriétés des matrices de passage)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ muni des bases $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$.

i) $P_e^{e'} = Mat_{e',e}(Id_E)$

ii) $P_e^{e} = I_n$

iii) $P_e^{e'}$, la matrice de passage de e à e' et $P_{e'}^{e}$, la matrice de passage de e' à e sont inverses l'une de l'autre : $P_e^{e'} P_{e'}^{e} = \mathrm{I}_n$ et $P_{e'}^{e} P_e^{e'} = \mathrm{I}_n$ c'est à dire $P_e^{e'}$ est inversible et $(P_e^{e'})^{-1} = P_{e'}^{e}$

preuve:

Ptitexo: *On note e la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

Soit $b = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Donner P_e^{b} et P_b^{e}.

Ptitexo: *Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note $u = \big(X^2, X, 1\big)$ et $v = \big((X+1)^2, (X+1), 1\big)$. Montrer que u et v sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$ et former P_u^{v} et P_v^{u}.*

4.2 Changements de bases pour les coordonnées d'un vecteur

Propriété 22.23 (Changemt de base pour les coord. d'un vecteur)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ muni des bases $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$. Soit x un vecteur de E. Notons X le vecteur-colonne des coordonnées de x dans la base e et X' le vecteur-colonne des coordonnées de x dans la base e'. On a alors :

$$X = P_e^{e'} X'.$$

$$X' = P_{e'}^{e} X.$$

✓ On retient que l'on lit ce genre d'écriture de gauche à droite et bas en haut.

preuve:

Ptitexo: *Soit x le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *dans la base canonique. Quelles sont ses coordonnées dans la base :*

$$b = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ?$$

Ptitexo: *Soit $P(X) = 3X^2 + 2X - 4$. Donner les coordonnées de P dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, puis dans la base $e' = \left(2X^2, X^2 + X, X^2 + 1\right)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et enfin dans la base $v = \left((X+1)^2, (X+1), 1\right)$.*

4.3 Changements de bases pour les matrices d'applications linéaires

Propriété 22.24 (Changement de base pour les app. lin.)

-Cas général : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ muni des bases $e = (e_1, \ldots, e_p)$ et $e' = \left(e'_1, \ldots, e'_p\right)$. Soit F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ muni des bases $f = (f_1, \ldots, f_n)$ et $f' = (f'_1, \ldots, f'_n)$. Soit $u \in \mathrm{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F. On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = P_f^{f'} \mathrm{Mat}_{e',f'}(u) P_{e'}^{e}.$$

-Cas d'un endomorphisme : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ muni des bases $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ un endomorphisme de E.

$$\mathrm{Mat}_e(u) = P_e^{e'} \mathrm{Mat}_{e'}(u) P_{e'}^{e}.$$

preuve:

✓ Encore une fois, cette formule est à lire de la gauche vers la droite et de bas en haut .

Ptitexo: *Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base cano-*

nique est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Quelle est sa matrice dans la base $b = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ *?*

Ptitexo: *Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est* $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Quelle est sa matrice dans la base $c = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ *?*

✓ Bien qu'elle soit toujours vraie, cette formule de changement de base ne doit pas nous aveugler et nous faire perdre de vue que l'exercice proposé suggère parfois des méthodes plus rapides, par exemple : si f est endomorphisme nilpotent d'indice 3 de $\mathbb{R}^3$, u un vecteur de $\mathbb{R}^3$, si $f^2(u) \neq 0$, alors on sait que la famille $\big(u, f(u), f^2(u)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On peut alors facilement déterminer la matrice de f dans cette base. [2]

5 Matrices semblables

Définition 22.25 (Matrices semblables)

Deux matrices M et M' de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$M' = PMP^{-1}.$$

✓ La relation ainsi définie est bien une relation d'équivalence.

Propriété 22.26 (matrice semblable et endomorphisme)

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles sont les matrices d'un même endomorphisme dans des bases éventuellement différentes.

preuve:

2. Le faire...

Propriété 22.27 (puissances)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux matrices carrées appartenant à $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée inversible d'ordre n. On suppose que $B = P^{-1}AP$ alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad B^k = P^{-1}A^kP.$$

preuve:

Exemple :

Au vu de ce qui a été fait ci-dessus, les matrices $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ sont semblables.

<u>Ptitexo:</u> *Montrer que les matrices* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ *sont semblables quelque soient les réels* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$*. Proposez une généralisation de ce résultat.*

6 Trace (M.P.S.I.)

Définition 22.28 (Trace d'une matrice carrée)

La **trace** d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme de ses éléments diagonaux, on note cette quantité $\mathrm{tr}\,(A)$. Autrement dit :

$$\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}.$$

Exemples :

1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{tr}\,(A) = 9$.
2. La trace d'une matrice antisymétrique est nulle.

✓ La transposition ne changeant pas les éléments diagonaux, on a de manière évidente : $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{tr}\,(A)$.

Propriété 22.29 (Linéarité de la trace)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application

$$\mathrm{tr} : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\ A \longmapsto \mathrm{tr}\,(A).$$

qui à toute matrice associe sa trace est une forme linéaire non nulle.

preuve:

✓ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des matrices de trace nulle est donc un hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 22.1

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $\mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}AA) \in \mathbb{R}^+$.

2) Montrer que :

$$\mathrm{tr}\,\left({}^{\mathrm{t}}AA\right) = 0 \iff A = 0_n.$$

3) En déduire que $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}AA)$.

Propriété 22.30 (Trace d'un produit de matrices)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA).$$

preuve:

Propriété 22.31 (Invariance de la trace par similitude)

Soient A et B deux matrices carrées de taille n. Si A et B sont semblables, alors $\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(B)$.

preuve:

Propriété 22.32 (Définition de la trace d'un endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$. La quantité $\mathrm{tr}\,(\mathrm{Mat}_e(u))$ ne dépend pas de la base e de E que l'on choisit. On appelle cette quantité **la trace de l'endomorphisme** u et on la note $\mathrm{tr}\,(u)$.

preuve:

Propriété 22.33 (Trace d'une composée)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit u et v deux endomorphismes de E. On a :

$$\mathrm{tr}\,(u \circ v) = \mathrm{tr}\,(v \circ u).$$

Propriété 22.34 (Trace d'un projecteur)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Si $p \in \mathrm{L}(E)$ est un projecteur de E, alors :

$$\mathrm{tr}\,(p) = \dim\left(\mathrm{Inv}(p)\right).$$

preuve:

Ptitexo: *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Que dire de la trace d'une symétrie de E ?*

7 Matrices équivalentes et rang (M.P.S.I.)

7.1 Matrices équivalentes

Définition 22.35 (Matrices équivalentes)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Deux matrices M et M' de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont **équivalentes** si et seulement si il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que

$$M' = PMQ.$$

✓ Si deux matrices sont semblables alors elles sont équivalentes.

Propriété 22.36 (propriété)

les matrices équivalentes forment une relation d'équivalence

Propriété 22.37 (Interprétation géométrique)

Soient M et M' deux matrices de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Les matrices M et M' sont équivalentes.

ii) Il existe un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension p, un $\mathbb{K}-$espace vectoriel F de dimension n, deux bases e et e' de E, deux bases f et f' de F et une application linéaire $u \in \mathrm{L}(E, F)$ telle que

$$M = \mathrm{Mat}_{e,f}(u) \quad \text{et} \quad M' = \mathrm{Mat}_{e',f'}(u).$$

preuve:

7.2 Caractérisation des matrices équivalentes

Pour $r \in [\![1, \min(n, p),]\!]$, on notera $J_r \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls excepté les r premiers coefficients diagonaux qui sont égaux à 1.

Propriété 22.38 (propriété)

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimensions respectives p et n. Soit $u \in \mathrm{L}(E,F)$. Si l'on note $\mathrm{rg}\,(u) = r$, alors il existe une base e de E et une base f de F telle que :

$$\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = J_r \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

preuve:

✓ La réciproque à cette propriété est évidente.

Théorème 22.39 (Caractérisation des matrices de rang r)

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $M \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à une matrice $J_r \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

preuve:

Corollaire 22.40 (équivalences et rang)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soient M et M' deux matrices de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Les matrices M et M' sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

preuve:

Corollaire 22.41 (rang de la transposée)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :

$$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,\left({}^{\mathrm{t}}A\right).$$

preuve:

Ptitexo: *Montrer que $Sp(A) = Sp({}^{\mathrm{t}}A)$*

Corollaire 22.42 (rang)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$(-)$ On a :

$$\mathrm{rg}\,(A) \leq \min(p,n).$$

$(-)$ Le rang de A est le rang de la famille de ses vecteurs-colonnes.
$(-)$ Le rang de A est le rang de la famille de ses vecteurs-lignes.

preuve:

Ptitexo: *Exhiber des matrices équivalentes qui ne sont pas semblables.*

Ptitexo: *$A \in M_n(\mathbb{K})$ de rang r. $\mathcal{F} = B \in M_n(\mathbb{K}), ABA = 0$ Calculer $dim\mathcal{F}$.*

Définition 22.43 ()

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Si $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ et $1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_l \leq p$ sont des indices entiers, alors la matrice $A' = \left(A_{i_\alpha, j_\beta}\right)_{(\alpha,\beta)\in[\![1,k]\!]\times[\![1,l]\!]}$ est appelée **matrice extraite** de A.

Propriété 22.44 (Rang des matrices extraites)

Si A est une matrice extraite de A', alors

$$\operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(A').$$

preuve:

✓ Rappel : Une matrice carrée $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement elle est de rang n.

Propriété 22.45 (Carac. du rg par les matrices carrées extraites)

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe une matrice carrée extraite de A, d'ordre r et inversible.

preuve:

✓ Grâce à ce critère, on transforme le calcul du rang en une détermination d'inversibilité. C'est intéressant puisque l'on disposera bientôt d'un critère efficace d'inversibilité (la non-nullité du déterminant).

Chapitre 23 - Méthodes pratiques matricielles

Chaque chercheur a sa propre théorie sur le processus de solution,[...] . Pour ma part, je distingue aussi plusieurs périodes : une première phase, longue, où l'on est plongé dans l'obscurité totale ; puis une deuxième, où s'allume une lueur faible et diffuse, qui laisse entrevoir quelque chose d'intéressant ; et enfin, c'est l'illumination, le moment où l'on comprend, rédige, recoupe, publie et partage avec ses pairs le résultat. Bien sûr, on reste la plupart du temps bloqué à la première ou à la deuxième étape. Et dans les cas où l'on atteint la troisième, ce moment intense est inéluctablement suivi d'une légère dépression, où l'on se dit qu' " après tout, c'était si facile"...
C.Villani.

Tout au long de ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

1 Opérations élémentaires

1.1 Définition des opérations élémentaires

Définition 23.1 (Opérations élémentaires)

On appelle **opération élémentaire sur les lignes** de la matrice $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ toute opération de l'un des types suivant :

1. Échange de deux lignes de A. (On note $L_i \longleftrightarrow L_j$ l'échange des lignes i et j) .
2. Multiplication d'une ligne de A par un scalaire non nul(≪ dilatation ≫). (On note $L_i \longleftarrow \lambda L_i$, la multiplication de la ligne L_i par le réel λ non nul).
3. Addition à une ligne de A d'un multiple d'une autre ligne de A (≪ importation ≫). (On note $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ l'ajout de λL_j à la ligne L_i.

On appelle **opération élémentaire sur les colonnes** de la matrice $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ toute opération de l'un des types suivant :

1. Échange de deux colonnes de A. (On note $C_i \longleftrightarrow C_j$ l'échange des lignes i et j) .
2. Multiplication d'une colonne de A par un scalaire non nul(≪ dilatation ≫). (On note $C_i \longleftarrow \lambda C_i$, la multiplication de la colonne C_i par le réel λ non nul).
3. Addition à une colonne de A d'un multiple d'une autre colonne de A (≪ importation ≫). (On note $C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$ l'ajout de λC_j à la colonne C_i.

1.2 Traduction des opérations élémentaires en produits matriciels

Considérons $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si l'on écrit $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ en lignes, alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, E_{i,j}A = \begin{pmatrix} 0 \\ L_j \,\text{sur la ligne}\, i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit $E_{i,j}A$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la i-ème qui est égale à L_j.

Si l'on écrit $A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}$ en colonnes, alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, AE_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & C_i \,\text{sur la colonne}\, j & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit $AE_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la j-ème qui est égale à C_i.

Propriété 23.2 (Opérations élémentaires et produits matriciels)

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$(-)$ Soient i et j deux entiers distincts dans $[\![1,n]\!]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Par l'op. élémentaire...	on obtient à partir de A la matrice MA, où :
$L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$	$M = \mathrm{I}_n + \lambda E_{i,j}$
$L_i \longleftarrow \alpha L_i$	$M = \mathrm{I}_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$
$L_i \longleftrightarrow L_j$	$M = \mathrm{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

$(-)$ Soient i et j deux entiers distincts dans $[\![1,p]\!]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Par l'op. élémentaire...	on obtient à partir de A la matrice AM, où :
$C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$	$M = \mathrm{I}_p + \lambda E_{j,i}$
$C_i \longleftarrow \alpha C_i$	$M = \mathrm{I}_p + (\alpha - 1)E_{i,i}$
$C_i \longleftrightarrow C_j$	$M = \mathrm{I}_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

Propriété 23.3 (matrices d'opérations élémentaires)

Soient i et j deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Dans chacun des cas suivants, la matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible :

1. $M = \mathrm{I} + \lambda E_{i,j}$,
2. $M = \mathrm{I} + (\alpha - 1)E_{i,i}$,
3. $M = \mathrm{I} - E_{i,i} - E_{i,j} + E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

preuve:

Exemple Pour $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{K})$

on a : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \\ j & k & l \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+3j & e+3k & f+3l \\ g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}$

et aussi :

$A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \\ j & l & k \end{pmatrix}$ et $A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c+3d \\ d & e & f+3e \\ g & h & i+3h \\ j & k & l+3k \end{pmatrix}$

✓ On retient donc que les opérations élémentaires sur les lignes correspondent à des multiplications à gauche par des matrices inversibles et les opérations élémentaires sur les colonnes correspondent à des multiplications à droite par des matrices inversibles.

Corollaire 23.4 (équivalence par ligne ou par colonne)

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$(-)$ Supposons qu'une suite finie d'opérations sur les lignes ait permis d'obtenir à partir de A une matrice A'. Alors, il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = PA$.
$(-)$ Supposons qu'une suite finie d'opérations sur les colonnes ait permis d'obtenir à partir de A une matrice A''. Alors, il existe une matrice inversible $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $A'' = AQ$.

preuve:

2 Application au calcul du rang d'une matrice

2.1 Méthodes théoriques utiles

Lemme 23.5 (rang)

On suppose ici que $n \geq 2$ et $p \geq 2$. Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{1,p-1}(\mathbb{K})$ et $C = \mathrm{M}_{n-1,p-1}(\mathbb{K})$ telle que s'écrive par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & B \\ 0_{n-1,1} & C \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\,(A) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}\right) & \text{si} \quad a_{1,1} = 0 \\ \mathrm{rg}\,(A) &= \mathrm{rg}\,(C) + 1 & \text{si} \quad a_{1,1} \neq 0. \end{aligned}$$

✓ En utilisant, l'invariance du rang par transposition, on obtient des résultats similaires lorsque la première ligne de A est nulle sauf peut-être son premier terme.

Propriété 23.6 (conservation du rang)

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si B est une matrice obtenue à partir de A par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes où les colonnes alors $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B)$.

preuve:

2.2 Méthodes du pivot pour le calcul du rang d'une matrice

2.2.1 Algorithme du pivot pour le rang

On dispose donc d'un algorithme pour calculer le rang d'une matrice A.

$(-)$ Si A est nulle, alors $\mathrm{rg}\,(A) = 0$.
$(-)$ Si A ne comporte qu'une seule colonne non nulle alors $\mathrm{rg}\,(A) = 1$.
$(-)$ Sinon, on peut noter j_1 l'indice de la première colonne de A qui n'est pas nulle. Puis par des échanges de lignes, on peut se ramener à la situation où a_{1,j_1} est non nulle. En utilisant , pour tout $i \geq 2$, l'opération $L_i \longleftarrow L_i - \dfrac{a_{i,j_1}}{a_{1,j_1}} L_1$, on

obtient alors une matrice de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,j_1} & C \\ & & \\ 0_{n-1,j_1-1} & 0_{n-1,1} & A' \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A') + 1$. On poursuit alors l'algorithme en itérant sur la matrice A'.

✓ Cet algorithme se termine car la suite donnant le nombre de colonnes de la matrice dont on cherche le rang est une suite d'entiers strictement décroissante.

✓ Dans cet algorithme, on n'utilise que des opérations sur les lignes.

Ptitexo: *Déterminer par la méthode du pivot, le rang la de matrice A :*

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & - \\ -2 & 4 & 7 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 9 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ptitexo: *Déterminer par la méthode du pivot, le rang la de matrice B_m en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$:*

$$B_m = \begin{pmatrix} 0 & 2 & m & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m+1 & m+1 \\ -1 & m & -1 & m \end{pmatrix}$$

✓ Attention, bien que cet algorithme ait le mérite de fonctionner dans toutes les situations, il faut éviter de l'utiliser dans les cas où le rang de la matrice saute aux yeux.

2.2.2 Variantes

Autre algorithme : En opérant sur les lignes et les colonnes

$(-)$ Si A est nulle, alors $\mathrm{rg}\,(A) = 0$.
$(-)$ Si A ne contient qu'un seul coefficient non nul, alors $\mathrm{rg}\,(A) = 1$.
$(-)$ Sinon, il existe un coefficient non nul dans A. On peut quitte à échanger des lignes et des colonnes, se ramener à la situation où $a_{1,1} \neq 0$. Par opérations sur les lignes, on se ramène alors à la situation suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & B \\ & \\ 0_{n-1,1} & A' \end{pmatrix}.$$

Dès lors, $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A') + 1$.
Puisque la matrice $A' \in \mathrm{M}_{n-1,p-1}(\mathbb{K})$, on peut itérer ce procédé pour déterminer ensuite le rang de la matrice A'.

Ptitexo: *Déterminer le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$:*

$$((4,5,6),(7,8,9),(10,11,12)).$$

Ptitexo: *Déterminer le rang de l'application linéaire :*

$$L : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X],\ P \longmapsto XP'(X) - 2P(X+1).$$

Ptitexo: *Déterminer le rang de l'application linéaire puis une base du noyau et une base de l'image :*

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2y - z + 4t \\ 4x - 5y - 4z + 10t \\ x - 15y - 5z + 12t \\ 6x + 18y + 4z + 9t \end{pmatrix} \end{array}$$

$$g : \begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 5y - z + 3t \\ -2x - 8y + 13z \\ 2x + 3y + 7z + 5t \end{pmatrix} \end{array}$$

3 Inversion de matrices

✓ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. L'algorithme du pivot pour le rang fabrique, par opérations élémentaires sur les lignes uniquement, une matrice A' équivalente à A, et triangulaire supérieure avec aucun des coefficients diagonaux nuls.

Algorithme de ≪ remontée ≫
Entrée : une matrice $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.
algorithme :
$(-)$ Si $T \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{K})$ il n'y a rien à faire.
$(-)$ Si $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Dans ce cas, $t_{n,n} \neq 0$. En effectuant , pour

tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, l'opération $L_i \longleftarrow L_i - \dfrac{t_{i,n}}{t_{n,n}} L_n$, on se ramène à la situation suivante :

$$T = \begin{pmatrix} T' & 0_{n-1,1} \\ 0_{n-1,1} & t_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On peut alors itérer le procéder sur la matrice $T' \in Gl_{n-1}(\mathbb{K})$ qui est encore inversible et triangulaire supérieure.
sortie : On obtient ainsi par opérations sur les lignes uniquement une matrice diagonales dont aucun des coefficients n'est nul.
Par dilatation, on peut alors facilement obtenir la matrice identité.
En utilisant successivement l'algorithme du pivot de Gauss pour le rang, et cet algorithme de remontée, on peut passer par opérations sur les lignes de $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ à la matrice I.

Théorème 23.7 (détermination de l'inverse)

Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de M qui permet de passer de M à I_n. La suite de ces opérations sur les lignes fait passer de la matrice I à la matrice M^{-1}.

Ptitexo: *Déterminer l'inverse des matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ptitexo: *Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par : f :* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - z \\ 2x + y + 3z \\ x + y + 2z \end{pmatrix}$

Montrer que f est un automorphisme et expliciter f^{-1}.

Ptitexo: *On considère la famille $C = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ des polynômes suivants de $\mathbb{K}_3[X]$:*
$P_1 = X^3+2X+1$, $P_2 = 2X^2+2$, $P_3 = -X^3+X^2-2X$, $P_4 = X^3+X+3$

4) *Calculer le rang de C et en déduire que C est une base de $\mathbb{K}_3[X]$*

5) *Déterminer les coordonnées dans la base C d'un polynôme quelconque $Q = aX^3 + bX^2 + cX + d$ de $\mathbb{K}_3[X]$.*

4 Résolutions de systèmes linéaires

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère les familles $(a_{i,j})_{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $(b_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ d'éléments de $\mathbb{K}$.
Le système (S) :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \dots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

d'inconnues $x_1, \dots, x_p$ est appelé système linéaire à n équations et p inconnues.

La colonne $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelée second membre. Si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $b_i = 0$, on dit que le système est homogène. On appelle système homogène associé à (S) le système obtenu en remplaçant dans (S) le second membre par $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si le système admet au moins une solution, on dit qu'il est **compatible** ; dans le cas contraire, le système est dit incompatible.
La matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ s'appelle matrice du système.
On appelle **rang du système** (S) le rang de la matrice A.

Définition 23.8 (Système de Cramer)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues. On dit que (S) est de **Cramer** s'il admet un unique n-uplet de solutions.

4.1 Approche matricielle

Si l'on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^p$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n$, alors on peut réécrire le système (S) ainsi :

$$AX = B.$$

Propriété 23.9 (solution d'un système)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $B \in \mathbb{K}^n$. Si la matrice A est inversible le système $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ admet une unique solution qui est $A^{-1}B$.

preuve:

4.2 Méthode du pivot de Gauss

En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss utilisé pour déterminer le rang d'une matrice, on se ramène à un système triangulaire $TX = B'$. Les opérations élémentaires se traduisant par une suite de multiplications par des matrices inversibles $P_1, \dots, P_k$, on obtient donc :

$$AX = B \Longleftrightarrow TX = B'$$

où $T = P_k P_{k-1} A \dots P_1$ et $B' = P_k P_{k-1} \dots P_1 B$.
On résout alors le système en remontant les équations.
Si la matrice T est inversible, alors le système est de Cramer.

Ptitexo: *Résoudre dans* $\mathbb{R}^3$ *les systèmes :* $\begin{cases} 2x + 3y - 7z = 1 \\ x + y + z = 4 \\ 5x + y + z = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} -x + 4y + z = 1 \\ x - 3y - 3z = 2a \\ -2x + 5y + 8z = a - 1 \end{cases}$

avec $a \in \mathbb{R}$ *un paramètre*

4.3 Interprétation vectorielle du système

Notons $V_1, \dots, V_p$ les vecteurs-colonnes de la matrice A. le système (S) se réécrit donc :

$$\sum_{j=1}^{p} x_j V_j = B.$$

Notons $\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par $V_1, \dots, V_p$.

Le système a donc des solutions si et seulement si $B \in \mathcal{V}$ et dans ce cas, les solutions correspondent aux coefficients des combinaisons linéaires de $V_1, \dots, V_p$ qui sont égales à B.
Notons que $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(V_1, \dots, V_p)$.
Il y a trois situations possibles :

1. $p = n$ et $\mathrm{rg}\,(A) = n$, le système est alors de Cramer et admet une unique solution.
2. $p < n$ et $\mathrm{rg}\,(A) = p$. Dans ce cas, la famille $(V_1, \dots, V_p)$ est libre, et le système admet une unique solution si $B \in \mathcal{V}$ et n'admet aucune solution si $B \notin \mathcal{V}$.

3. $\mathrm{rg}\,(A) < p$. Dans ce cas, la famille $(V_1, \ldots, V_p)$ est liée et le système admet une infinité de solutions si $B \in \mathcal{V}$ et aucune solution si $B \notin \mathcal{V}$.

4.4 Interprétation du système à l'aide d'une application linéaire

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ vers $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice A du système. Avec la notation précédente, le système s'écrit :

$$u(X) = B.$$

Le système est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{Im}\,(u)$.

Les solutions du système homogène associé à (S) sont les éléments de $\mathrm{Ker}\,(u)$. Si $\mathrm{rg}\,(u) = r$, alors le système (S_H) homogène associé est de rang r et l'ensemble des solutions de (S_H) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p - r$.
Si X_0 est une solution de (S), alors l'ensemble des solutions de (S) est

$$\left\{ X_0 + Y \;\middle|\; Y \in \mathrm{Ker}\,(u) \right\}.$$

✓ On appellera bientôt cet ensemble **le sous-espace affine de** $\mathbb{K}^n$ **passant par** X_0 **et dirigé par** $\mathrm{Ker}\,(u)$. On le note $X_0 + \mathrm{Ker}\,(u)$.

Si (S) est un système homogène de rang r, alors l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p - r$.

Ptitexo: *Résoudre les systèmes :* $\begin{cases} 2x + y + 4z = 4 \\ x + y + z = 3 \\ -4x - 2y - 2z = -8 \end{cases}$ *et* $\begin{cases} 2x - y + 2t = 1 \\ 3y - z - 3t = 0 \\ 4x + y - z + t = 2 \\ -2x + 4y - z + 3t = 4 \end{cases}$

4.5 Interprétation à l'aide de formes linéaires et d'hyperplans

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit l'application :

$$\Lambda_i : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K},\; X = (x_1, \ldots, x_p) \longmapsto \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j = 0.$$

Dès lors, le système (S) se réécrit :

$$(S) \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \Lambda_i(X) = b_i.$$

et le système homogène associé se réécrit :

$$(S) \quad \forall i \in [\![1, n]\!], X \in \mathrm{Ker}\;(\Lambda_i)\,.$$

Si aucune ligne de A n'est nulle, alors les solutions du système linéaire homogène associé sont les points de l'intersection des n hyperplans vectoriels Ker (Λ_1), ..., Ker (Λ_n).
Si aucune ligne de A n'est nulle, alors les solutions du système (S) sont les points de l'intersection de n hyperplans affines.

4.6 Caractérisation des systèmes de Cramer

Théorème 23.10 (Caractérisation des systèmes de Cramer)

Soit (S) un système linéaire à n équation et n inconnues. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Le système (S) est de Cramer.
ii) Le système homogène associé admet une unique solution $0_{\mathbb{K}^n}$.
iii) La matrice du système (S) est inversible.

preuve:

4.7 Calcul d'inverse de matrice par résolution de système.

Propriété 23.11 (Inversion par résolut° de système lin.)

Soient A et B deux éléments de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \forall Z \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = Z \Longleftrightarrow X = BZ$.
ii) $B = A^{-1}$.

preuve:

Application au calcul d'inverse :

Ptitexo: *Inverser en résolvant un système la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$

Chapitre 24 - Groupe symétrique

C'est une erreur de croire que la rigueur dans une démonstration est l'ennemie de la simplicité... L'effort même de la rigueur nous force à découvrir les méthodes de démonstration les plus simples. David Hilbert.

1 Généralités

1.1 Groupe symétrique

Définition 24.1 (Groupe symétrique)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le groupe $(\mathcal{S}(\llbracket 1, n \rrbracket), \circ)$ des permutations de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ est appelé **le groupe symétrique d'ordre** n. On le note $(\mathcal{S}_n, \circ)$.

Notation : Si $(k_1, \ldots, k_n) \in \llbracket 1, n \rrbracket^n$, alors on note $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & \ldots & n \\ k_1 & \ldots & k_i & \ldots & k_n \end{pmatrix}$ l'application :

$$\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket, \ i \longmapsto k_i.$$

✓ $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & \ldots & n \\ k_1 & \ldots & k_i & \ldots & k_n \end{pmatrix}$ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ si et seulement si les entiers $k_1, \ldots, k_n$ sont deux à deux distincts.

Ptitexo: *Décrire la liste de tous les éléments de* $\mathcal{S}_3$.

Exercice 24.1

Soit E un ensemble de cardinal égal à $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(\mathcal{S}(E), \circ)$ est isomorphe à l'ensemble $(\mathcal{S}_n, \circ)$.

Propriété 24.2 (Cardinal de $\mathcal{S}_n$)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}_n$ est un groupe fini de cardinal $n!$.

Exercice 24.2 **Ordre d'une permutation-ordre d'un élément.**

Soit $s \in \mathcal{S}_n$.

1) Montrer que l'ensemble

$$\left\{ i \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; s^i = \mathrm{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket} \right\}.$$

admet un plus petit élément. On appelle ce plus petit élément ordre de la permutation s.

2) Soit $x \in [\![1, n]\!]$. Montrer que l'ensemble :

$$\left\{ i \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; s^i(x) = x \right\}.$$

admet un plus petit élément. On appelle ce plus petit élément, ordre de l'élément x pour la permutation s.

3) Montrer que l'ordre de la permutation s est le PPCM des ordres de tous les éléments de $[\![1, n]\!]$.

1.2 Permutations remarquables

Dans tout ce paragraphe, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Définition 24.3 (Transposition)

Soient i et j deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$. On définit l'application suivante :

$$\tau_{i,j} : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!],\ k \longmapsto \left| \begin{array}{lll} k & \text{si} & k \notin \{i, j\} \\ j & \text{si} & k = i \\ i & \text{si} & k = j \end{array} \right. .$$

On appelle **transposition** de $[\![1, n]\!]$ toute application de cette forme.

Propriété 24.4 (Propriétés des transpositions)

Soient i et j deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$. Alors :
$(-)$ $\tau_{i,j} \circ \tau_{i,j} = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$.
$(-)$ $\tau_{i,j} \in \mathcal{S}_n$ et $(\tau_{i,j})^{-1} = \tau_{i,j}$.
$(-)$ $\tau_{i,j} = \tau_{j,i}$.

preuve:

1.2.1 Cycles

Définition 24.5 (Cycles)

Soit $p \in [\![2,n]\!]$ et $(a_1,\dots,a_p)$ un p-uplet d'éléments de $[\![1,n]\!]$ deux à deux distincts.
On définit l'application suivante :

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix} : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!],\ k \longmapsto \left| \begin{array}{ccc} k & \text{si} & k \notin \{a_1,\dots,a_p\} \\ a_{j+1} & \text{si} & k = a_j \text{pour} j \in [\![1,p-1]\!] \\ a_1 & \text{si} & k = a_p \end{array} \right. .$$

On appelle p**-cycle** de $[\![1,n]\!]$ toute application de cette forme.
Les n-cycles de $[\![1,n]\!]$ sont appelés les **permutations circulaires** de $[\![1,n]\!]$.
On dit que $(a_1,\dots,a_n)$ est le **support** du p-cycle $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix}$.

Propriété 24.6 (Propriétés des p-cycles)

Soit $p \in [\![2,n]\!]$ et σ un p-cycle.
$(-)$ On a $\sigma^p = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$.
$(-)$ Plus précisément, on a :

$$p = \min\{\, k \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^k = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]} \,\}.$$

$(-)$ $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

preuve:

Ptitexo: *Montrer que les éléments non égaux à l'identité de $\mathcal{S}_3$ sont des cycles.*

✓ Les transpositions sont les 2-cycles.

✓ Si $(a_1,\dots,a_p)$ est un p-uplet d'éléments deux à deux distincts de $[\![1,n]\!]$, alors : $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & \dots & a_p & a_1 \end{pmatrix}$.

✓ Si $(a_1,\dots,a_p)$ est un p-uplet d'éléments deux à deux distincts de $[\![1,n]\!]$, alors : $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_p & a_{p-1} & \dots & a_1 \end{pmatrix}$. Par conséquent, l'inverse d'un p-cycle est encore un p-cycle.

Ptitexo: *Démontrer que la composée de deux transpositions à supports disjoint n'est pas un cycle.*

2 Décompositions

2.1 Décomposition en produit de cycles

Propriété 24.7 ()

Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $\sigma' \in \mathcal{S}_n$ sont deux cycles à support disjoints, alors

$$\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma.$$

preuve:

Exercice 24.3 **Orbites**

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Soit $x \in [\![1, n]\!]$, on appelle orbite de l'élément x, l'ensemble :

$$\mathcal{O}(x) = \left\{ \sigma^i(x) \;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Pour deux éléments x et y appartenant à $[\![1, n]\!]$, on note $x\mathcal{R}y$ lorsque $y \in \mathcal{O}(x)$.

1) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $[\![1, n]\!]$.

2) Montrer que si $x \in [\![1, n]\!]$, n'est pas un point fixe de σ, alors la restriction de σ à l'orbite de x est un cycle.

3) En déduire que toute permutation peut s'écrire comme la composée de plusieurs cycles à supports disjoints.

Théorème 24.8 (Décomposition en cycles)

Toute permutation $s \in \mathcal{S}_n$ se décompose en produit de cycles à support disjoints. C'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ cycles à supports deux à deux disjoints $c_1, \dots, c_k$ tels que $s = c_1 \circ \cdots \circ c_k$. Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

preuve:

2.2 Décomposition en produit de transpositions

2.2.1 Théorème de décomposition

Théorème 24.9 (Décomposition en produit de transpositions)

Toute permutation de $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme un produit d'un nombre fini de transpositions.

preuve:

✓ Cette décomposition n'est pas unique.

Exercice 24.4

Décomposer de plusieurs manières différentes en produit de transpositions la permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 8 & 1 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24.5

Décomposer un p-cycle quelconque en produit de transpositions.

2.2.2 Signature

Exercice 24.6 **Nombre d'inversions d'une permutation**

Soit $s \in \mathcal{S}_n$. Soit $\{i, j\}$ une paire de deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$. On dit que $\{i, j\}$ est une **inversion** de σ si l'on a :

$$\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} < 0.$$

C'est-à-dire si les images $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$ de i et j sont rangés dans l'ordre inverse de celui dans lequel sont rangés i et j.
Notons $\mathcal{I}(\sigma)$ le nombre d'inversions distinctes de la permutation σ.

1) Montrer que toute transposition a un nombre impair d'inversions.

2) Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)}$. Montrer que que pour tout couple $((\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2)$, on a :

$$\varepsilon\left(\sigma \circ \sigma'\right) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon\left(\sigma'\right).$$

Théorème 24.10 (Définition de la signature)

Il existe une et une seule application ε de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$ telle que :

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_n, \varepsilon(\tau) = -1$$

et

$$\forall\left(\sigma, \sigma'\right) \in \mathcal{S}_n, \varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\sigma').$$

Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, alors on dit que $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.

preuve:

✓ En langage courant, on dit que ε est un morphisme de groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ vers $(\{-1, 1\}, \times)$.

✓ Si $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \tau_k$, où $\tau_1, \ldots, \tau_k$ sont des transpositions, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$.

<u>Ptitexo:</u> *Déterminer la signature de la permutation* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 24.7 **Signature d'un p-cycle**

Déterminer la signature d'un p-cycle.

Chapitre 25 - Déterminants

Dans la plupart des sciences une génération déchire ce qu'une autre a construit et ce que l'une a établi, une autre le défait. En mathématiques seulement, chaque génération construit une nouvelle histoire pour la vieille structure. H. Hankel.

1 Introduction

Exercice 25.1 **Aire d'un parallélogramme**

Soit $(e) = (e_1, e_2)$ une base orthonormée directe du plan euclidien. Si u et v sont deux vecteurs du plan dont les coordonnées dans la base e sont respectivement $U = \begin{pmatrix} x_u \\ \\ y_u \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} x_v \\ \\ y_v \end{pmatrix}$, alors on note $\det_e(u,v) = x_u y_v - y_u x_v$.

1) Montrer que la quantité $\det_e(u,v)$ ne dépend pas du choix de la base orthonormale directe e.

2) Montrer que si e' est une base orthonormale indirecte, alors $\det_{e'}(u,v) = -\det_e(u,v)$.

3) Soit $ABCD$ un parallélogramme de sorte que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ soit une base directe. Montrer que l'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à $\det_e\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$. *On appelle la quantité* $\det_e\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ *aire orientée du parallélogramme* $ABCD$.

La notion de déterminant a (entre autres buts) pour objet de généraliser cette construction pour définir des (hyper)volumes orientés.

2 Applications n-linéaires (M.P.)

2.1 Applications n-linéaires

Dans tout ce chapitre n désigne un entier naturel non nul.

Définition 25.1 (Application n-linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Soit $f : E^n \longrightarrow F$ une application. On dit que l'application f est n-**linéaire** si pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in E^n$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application

$$f_i : E \longrightarrow F,\ x \longmapsto f\left(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n\right).$$

est linéaire.
Si de plus, $F = \mathbb{K}$, alors on dit que f est une forme linéaire.

Exemples :

1. Une application 1-linéaire est une application linéaire traditionnelle.

2. L'application

$$F : (\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))^3 \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ (A, B, C) \longmapsto ABC.$$

est une application trilinéaire.

3. L'application

$$S : \left(\mathcal{C}^0\left([0,1], \mathbb{R}\right)\right)^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (f, g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

est une forme bilinéaire.

4. L'application $\det_e : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie dans le premier exercice est une forme bilinéaire.

Propriété 25.2 (Expression d'une f. n-lin. par l'image d'une base)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie égale à $p \in \mathbb{N}^*$. Soit F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $f : E^n \longrightarrow F$ une application n-linéaire.
Soit $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $u = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$. On note pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(a_{i,1}, \dots, a_{i,p})$ les coordonnées du vecteur u_i dans la base e. Alors :

$$f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{(j_1,\dots,j_n) \in [\![1,p]\!]^n} a_{1,j_1} a_{2,j_2} \dots a_{n,j_n} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}).$$

preuve:

2.2 Applications n-linéaires alternées

Définition 25.3 (Forme n-linéaire alternée)

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Soit $f : E^n \longrightarrow F$ une application n-linéaire. On dit que l'application f est **alternée** si : Pour tous vecteurs u_1, u_2, ... , u_n de E et pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$:

$$u_i = u_j \implies f(u_1, \dots, u_n) = 0.$$

Définition 25.4 (Forme n-linéaire antisymétrique)

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Soit $f : E^n \longrightarrow F$ une application n-linéaire. On dit que l'application f est antisymétrique si, pour tous vecteurs u_1, u_2, ..., u_n de E et pour tout couple d'indices i et j tels que $1 \leq i < j \leq n$, on a :

$$f\left(u_1, \dots, \underbrace{u_i}_{\text{position } i}, \dots, \underbrace{u_j}_{\text{position } j}, \dots, u_n\right) = -f\left(u_1, \dots, \underbrace{u_j}_{\text{position } i}, \dots, \underbrace{u_i}_{\text{position } j}, \dots, u_n\right).$$

Pour toute la suite, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Propriété 25.5 (alternée ssi antisym)

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Soit $f : E^n \longrightarrow F$ une application n-linéaire. L'application f est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

preuve:

(M.P.)
Exemple :
L'application $\det_e : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie dans le premier exercice est une forme bilinéaire alternée.

Propriété 25.6 (Image d'une famille liée)

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Soit $f : E^n \longrightarrow F$ une application n-linéaire alternée. Si la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille liée de vecteurs de E, alors

$$f(u_1, \ldots, u_n) = 0.$$

preuve:

Corollaire 25.7 (Invariance par ajout d'une combinaison linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Soit $f : E^n \longrightarrow F$ une application n-linéaire alternée. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.
Si $\mathcal{F}' = (u_1, \ldots, u_i', \ldots, u_n)$ est une autre famille de vecteurs de E obtenue ajoutant à l'un des u_i $(i \in [\![1, n]\!])$ une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_j)_{j \neq i}$, alors :

$$f(u_1, \ldots, u_n) = f(u_1, \ldots, u_i', \ldots, u_n).$$

preuve:

Propriété 25.8 (Effet d'une permutation des vecteurs)

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Soit $f : E^n \longrightarrow F$ une application n-linéaire alternée. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ une permutation dont on note ε la signature. On a :

$$f\left(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma)(u_1, \ldots, u_n).$$

preuve:

Propriété 25.9 (Expression d'une f. n-lin. alt. dans un ev. de dim n.)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soit F un autre $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On suppose que $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note $a_{1,j}, \ldots, a_{n,j}$ les coordonnées dans la base e du vecteur u_j.
Si $f : E^n \longrightarrow F$ est une application n-linéaire alternée, alors :

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} f(e_1, \ldots, e_n).$$

preuve:

3 Déterminant d'une famille de vecteurs (M.P.)

Dans toute la suite $n \in \mathbb{N}^*$, et E désigne un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n.

3.1 Espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n

Notation : On note $\Lambda^{*n}(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E.

Théorème 25.10 (Définition du déterminant)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Si $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors il existe une unique forme n-linéaire alternée f sur E telle que $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$. On la note $\det_e$ et on appelle cette forme n-linéaire **le déterminant dans la base e.**

preuve:

✓ Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de n vecteurs de E, alors le scalaire $\det_e(u_1, \ldots, u_n)$ est appelé **déterminant** dans la base e de la famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$.

Théorème 25.11 (Proportionnalité au déterminant)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Si $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est une forme n-linéaire alternée sur E.

ii) $\exists \lambda \in \mathbb{K}, f = \lambda \det_e$.

preuve:

Corollaire 25.12 (Espace vectoriel des f. n-lin. alternées)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. L'ensemble $\Lambda^{*n}(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est un espace vectoriel de dimension 1.

preuve:

3.2 Propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 25.13 (Déterminant d'une famille de vecteurs)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soit e une base de E. Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de n vecteurs de E, alors le scalaire $\det_e(u_1, \ldots, u_n)$ est appelé **déterminant** dans la base e de la famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$.

✓ Par définition, $\det_e(e) = 1$.

✓ L'application $\det_e$ étant une forme n-linéaire alternée, on sait que : Le déterminant dans la base e d'une famille liée de vecteurs de E est

nul.
Le déterminant d'une famille de vecteurs est inchangé si l'on ajoute à un vecteur de la famille une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Propriété 25.14 (Formule de changement de base)

Soient e et e' deux bases d'un même $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension n.
$(-)$ $\forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n, \det_{e'}(u_1, \ldots, u_n) = \det_{e'}(e) \det_e(u_1, \ldots, u_n)$.
$(-)$ $\det_{e'}(e) = (\det_e(e'))^{-1}$.

preuve:

3.3 Caractérisation des bases

Propriété 25.15 (Caractérisation des bases par le déterminant)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soit e une base de E. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_e(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$.

preuve:

Exercice 25.2

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n. On définit sur l'ensemble des bases de E la relation $\mathcal{R}$ par :

$$e\mathcal{R}e' \iff \det_e(e') > 0.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E.

Définition 25.16 (Orientation d'un espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n. On définit une **orientation** sur E par le choix d'une base e, en convenant que la base e est directe et que pour toute base e' de E :
$(-)$ Si $\det_e(e') > 0$, alors la base e' est **directe**.
$(-)$ Si $\det_e(e') < 0$, alors la base e' est **indirecte**.

3.4 Expression du déterminant dans une base

Propriété 25.17 (Expression du déterminant dans une base)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soit e une base de E. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note $a_{1,j}, \dots, a_{n,j}$ les coordonnées du vecteur u_j dans la base e. On a :

$$\begin{aligned}\det_e(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.\end{aligned}$$

preuve:

Exemples :

1. Si e désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et si $u = (x_u, y_u)$ et $v = (x_v, y_v)$ alors

$$\det_e((x_u, y_u), (x_v, y_v)) = x_u y_v - y_u x_v.$$

   On retrouve la caractérisation bien connue des familles liées de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. La famille (u, v) est liée si et seulement si $\det_e(u, v) = 0$. C'est-à-dire que la famille (u, v) est liée si et seulement si $x_u y_v - y_u x_v = 0$.

2. Si e désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et si $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ et $z = (z_1, z_2, z_3)$ alors

$$\det_e(x, y, z) = x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2.$$

   On retrouve la caractérisation bien connue des familles liées de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La famille (x, y, z) est liée si et seulement si $\det_e(x, y, z) = 0$.

✓ Si e désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\det_e\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est l'aire orientée du parallélogramme $ABCD$. (On ajoutera plus tard que cette quantité ne dépend pas du choix d'une base orthonormale).

✓ Si e désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et si $ABCDEFGH$ un parallélépipède, alors $\det_e\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ est le volume orienté du parallélépipède $ABCDEFGH$.

4 Déterminant d'un endomorphisme (M.P.)

4.1 Définition

Propriété 25.18 (Définition du déterminant d'un endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.
Il existe un unique scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que pour toute base e de E et pour tout n-uplet $(u_1, \dots, u_n)$ d'éléments de E, on ait :

$$\det_e(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda \det_e(u_1, \dots, u_n).$$

On appelle ce scalaire **le déterminant de** f et on le note $\det_e(f)$.

preuve:

Exemples :

1. $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.

2. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, alors on peut définir l'application f_σ qui est l'unique application linéaire telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

On a alors $\det(f_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

4.2 Propriétés du déterminant

Propriété 25.19 (propriétés)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soient f et g deux endomorphismes de E et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :
$(-)$ $\det(\lambda f) = \lambda^n \times \det(f)$.
$(-)$ $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.

preuve:

Propriété 25.20 (Caractérisation des automorphismes par le det.)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Si f est un endomorphisme de E, alors f est un automorphisme si et seulement si son déterminant est non nul. Dans ce cas, on a :

$$\det\left(f^{-1}\right) = (\det(f))^{-1}.$$

preuve:

Ptitexo: *Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n. On suppose qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $f^2 + \mathrm{id}_E = 0$. Montrer que la dimension de E est paire.*

5 Déterminant d'une matrice carrée

5.1 Définition et expression

Notation : Soient $C_1, \ldots, C_n$ une famille de n vecteurs-colonnes de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On note dans la définition qui suit $[C_1; \ldots, C_n]$ la matrice formée en colonne des vecteurs $C_1, ..., C_n$.

Définition 25.21 ()

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une application.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On dit que f est **linéaire par rapport à la i-ème colonne** de sa variable ($i \in [\![1, n]\!]$) si pour toute famille de vecteurs-colonnes $C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i, C'_i, C_{i+1}, \ldots, C_n$ et pour tous $(\alpha; \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a :
$$f([C_1; \ldots; C_{i-1}; \alpha C_i + \beta C'_i; C_{i+1}; ...; C_n]) =$$
$$\alpha f([C_1; ...; C_{i-1}; C_i; C_{i+1}; ...; C_n]) + \beta f([C_1; ...; C_{i-1}; C'_i; C_{i+1}; ...; C_n])$$
2. On dit que f est **antisymétrique par rapport aux colonne** de sa variable si pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$, et pour toutes famille de vecteurs-colonnes $C_1, ..., C_n$ on a :
$$f([C_1; ...; C_i; ...C_j; ...; C_n]) = -f([C_1; ...; C_j; ...; C_i; ...; C_n]).$$
Autrement dit, $f(M)$ est transformé en son opposé si l'on permute deux colonnes de la matrice M.

Exemples : Si f est une application de $\mathrm{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ linaire par rapport à sa troisième colonne et antisymétrique par rapport aux colonnes :
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4\alpha + 2\beta \\ 5 & 6 & 3\alpha - 5\beta \\ 8 & 9 & 9\beta \end{pmatrix}\right) = \alpha f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \\ 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}\right) + \beta f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & -5 \\ 8 & 9 & 9 \end{pmatrix}\right) \text{ et}$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}\right) = -f\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}\right).$$

Définition 25.22 (Déterminant d'une matrice carrée A)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable.
2. f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable.
3. $f(I_n) = 1$

Cette application est appelée **application déterminant**. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le scalaire $f(A)$ sera notédet(A) et sera appelé le **déterminant** de la matrice A.

✓ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et si l'on note f_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, alors $\det(A) = \det(f_A)$.

✓ Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs de l'espace vectoriel E de dimension n. Si e est une base de E et si $A = \mathrm{Mat}_e(u_1, \ldots, u_n)$, alors $\det(A) = \det_e(u_1, \ldots, u_n)$.

Propriété 25.23 (Expression du dét. en f. des coeff. de la matrice)

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ une matrice carrée. On a :

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

preuve:

Notation : Si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, alors on note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Exemples :

1. Si $(a,b,c,d)\in\mathbb{K}^4$, alors
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$
2. Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$, alors :
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}.$$
3. Si D est une matrice diagonale, alors son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux.
4. $\det(\mathrm{I}_n) = 1$.

Exercice 25.3 **Polynôme caractéristique**

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que l'application

$$\chi_A : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto \det(x\mathrm{I} - A).$$

est une application polynomiale dont on précisera le degré et le monôme dominant.

2) En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \exists t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, A + t\mathrm{I} \in GL_n(\mathbb{R})$. (On dira bientôt que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$).

Propriété 25.24 (Déterminant d'une matrice/endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$ un endomorphisme de E. Le déterminant de f est égal au déterminant de la matrice de f dans n'importe quelle base de E.

5.2 Propriétés du déterminant

Propriété 25.25 (Deux colonnes égales)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède deux colonnes égales alors $\det(A) = 0$.

Propriété 25.26 (propriétés)

Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
On a :
$(-)$ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
$(-)$ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

preuve:

✓ **Attention :** Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
$(\lambda a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \lambda(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $\det(\lambda a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \lambda^n \det(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.
Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = 2^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$
$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ (dem. en dim. 2)

Propriété 25.27 (Caractérisation des matrices inversibles)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
Dans ce cas, on a :
$$\det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1}.$$

preuve:

✓ L'application det réalise un morphisme du groupe $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ vers le groupe $(\mathbb{K}^*, \times)$.

Corollaire 25.28 (Déterminant de la transposée)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :
$$\det\left({}^{\mathrm{t}}A\right) = \det(A).$$

preuve:

Propriété 25.29 (propriété)

Le déterminant d'une matrice est une forme n-linéaire alternée de ses lignes.

preuve:

6 Calculs de déterminants

6.1 Effets des opérations élémentaires

Rappelons quelques conséquences pratiques des propriétés du déterminant vues précédemment :

i) Si la famille des vecteurs lignes d'une matrice (resp. vecteurs colonnnes) est liée, alors le déterminant de cette matrice est nul.
ii) En particulier, si une matrice possède une ligne ou une colonne nulle, alors son déterminant est nul.
iii) Si l'on échange deux lignes (resp. deux colonnes) d'une matrice, alors on multiplie son déterminant par -1.
iv) Si l'on ajoute à une ligne (resp. une colonne) d'une matrice A, une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes) de A, alors on ne change pas le déterminant de A.
v) Si l'on multiplie une ligne (resp. colonne) de la matrice A par un scalaire λ, alors on multiplie le déterminant par λ.
vi) En particulier, si l'on multiplie la matrice A par un scalaire λ, alors on multiplie son déterminant par λ^n.

✓ Ces opérations élémentaires, permettent soit de prouver que $\det(A) = 0$, soit d'effectuer des transformations préalables en vue d'utiliser les résultats des paragraphes qui suivent.
Les transformations élémentaires, ont en général pour objectif de faire apparaître un maximum de coefficients nuls.

Ptitexo: *Calculer les déterminants :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & 12 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & -1 & 11 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

6.2 Déterminant de matrices triangulaires

Propriété 25.30 (Cas d'une colonne p. nulle)

On suppose ici que $n \geq 2$. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$ une matrice carrée telle que $\forall i \in [\![2,n]\!], a_{i,1} = 0$. Notons A' la matrice extraite de A en supprimant la première ligne et la première colonne. On a alors :

$$\det(A) = a_{1,1} \det(A').$$

preuve:

Corollaire 25.31 (Dét. d'une matrice triangulaire)

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.

preuve:

Exercice 25.4 **Utilisation d'un polynôme**

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on note :

$$D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & c & \dots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

1) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que la fonction $x \mapsto D(a+x, b+x, c+x)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.

2) En déduire la valeur de $D(a,b,c)$ pour $b \neq c$.

3) En déduire la valeur de $D(a,b,c)$ pour $b = c$.

6.3 Développements par rapport à une ligne ou une colonne (M.P.)

Définition 25.32 (Cofacteur, mineur)

On suppose que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
$(-)$ On appelle **mineur** de $a_{i,j}$ (ou mineur d'indices i et j), le déterminant le matrice extraite de A, obtenue en supprimant de A la i-ème ligne et la j-ème colonne. On le note $\Delta_{i,j}$.
$(-)$ On appelle **cofacteur** de $a_{i,j}$ (ou cofacteur d'indices i et j) le scalaire $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.

Théorème 25.33 (Développement par rapport à une colonne)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

On appelle cette écriture **le développement du déterminant de A par rapport à la j-ème colonne.**

preuve:

Théorème 25.34 (Développement par rapport à une ligne)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

On appelle cette écriture **le développement du déterminant de A par rapport à la i-ème ligne.**

Ptitexo: *Soient a, b et c trois réels. Déterminer :*

$$V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 25.5

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. Déterminer le déterminant de la matrice $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients de la diagonale sont égaux à a et tous les coefficients de l'antidiagonale sont égaux à b.

6.4 Matrices triangulaires par blocs

Exercice 25.6

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $p \in [\![1,n-1]\!]$. Soit $A \in \mathrm{M}_{p,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$.

1) Déterminer le déterminant des matrices écrites par bloc :

$$M' = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & C \\ 0_{n-p,p} & B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M'' = \begin{pmatrix} A & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & \mathrm{I}_{n-p,n-p} \end{pmatrix}.$$

2) Déterminer le produit MM'.

3) En déduire le déterminant de la matrice écrite par bloc :

$$M' = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_{n-p,p} & B \end{pmatrix}.$$

4) Soient A, B, C et D des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $CD = DC$ et $D \in GL_n(\mathbb{K})$.

a) Calculer le produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$.

b) En déduire que $\det(AD - BC) = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$.

c) Montrer que le résultat subsiste si D n'est plus supposée inversible.

Ptitexo: *Calculer le déterminant de la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété 25.35 (matrice triangulaire par blocs)

Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

6.5 Déterminant de Van der Monde (M.P.)

Définition 25.36 (Déterminant de Van der Monde)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $x_0, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. On appelle déterminant de Van der Monde le scalaire noté $V(x_0, \ldots, x_n)$ défini par :

$$V(x_0, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Exercice 25.7

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_0, \ldots, x_{n-1}$ des éléments de $\mathbb{K}$. Montrer que la fonction $x \mapsto V(x_0, \ldots, x_{n-1}, x)$ est une fonction polynomiale de $\mathbb{K}$ vers $\mathbb{K}$. Montrer que son degré est inférieur ou égal à n et préciser son coefficient de degré n.

2) En déduire par récurrence $V(x_0, \ldots, x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriété 25.37 (Calc. du Van der Monde)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $x_0, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. On a :

$$V(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_j - x_i).$$

Corollaire 25.38 (matrice des puissances)

Soit $x_0, \ldots, x_n$ des réels, alors la matrice $\left(x_i^j\right)_{(i,j) \in [\![0,n]\!]^2}$ est inversible si et seulement si les réels $x_0, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts.

preuve:

6.6 Comatrice (M.P.)

Définition 25.39 (Comatrice)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$, on appelle **comatrice** de A, la matrice des cofacteurs de A. On la note $Com(A)$. Autrement dit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (Com(A))_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}).$$

(On a noté $A_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j de A).

Propriété 25.40 (propriété)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$ {}^{\mathrm{t}}Com(A)A = A\,{}^{\mathrm{t}}Com(A) = (\det(A))\,\mathrm{I}. $$

preuve:

Corollaire 25.41 (matrice inverse)

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$ A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^{\mathrm{t}}Com(A). $$

preuve:

Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 25.8

Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif unitaire. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les éléments inversibles de $\mathrm{M}_n(A)$ sont les éléments dont le déterminant est inversible dans A.

Chapitre 26 - Préhilbertiens réels

Dieu existe parce que les mathématiques sont cohérentes, et le diable existe parce que nous ne pouvons pas le prouver. A. Weil.

Dans tout ce chapitre, on ne considère que des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels.

1 Produit scalaire

1.1 Définitions

Définition 26.1 (Produit scalaire)

Soit E un espace vectoriel. Soit $B : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de E^2 vers $\mathbb{R}$. On dit que B est **produit scalaire** sur E si :
$(-)$ B est **bilinéaire**, i.e :

$$\forall (x, x', y) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, B(x + \lambda x', y) = B(x, y) + \lambda B(x', y),$$

$$\forall (x, y, y') \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, B(x, y + \lambda y') = B(x, y) + \lambda B(x, y'),$$

$(-)$ **symétrique** :

$$\forall (x, x') \in E^2, B(x, x') = B(x', x),$$

$(-)$ et **définie positive** :

$$\forall x \in E, B(x, x) \geq 0 \quad \text{et} \quad B(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E.$$

Ptitexo: *Montrer que l'ensemble des formes bilinéaires symétriques est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}\left(E^2, \mathbb{R}\right)$. *L'ensemble des produits scalaires sur E est-il un espace vectoriel ?*

Notation : Si B est un produit scalaire, on note souvent $B(x, y)$: $\langle x, y\rangle$, ou $(x|y)$, ou encore $x \cdot y$.

✓ Lorsque l'on veut démontrer qu'une application est un produit scalaire, il est plus judicieux de commencer par prouver qu'elle est symétrique. La démonstration de la bilinéarité se résume alors à la preuve de la linéarité à gauche (ou à droite).

Définition 26.2 (Espace préhilbertien, espace Euclidien)

Un couple $(E, \langle , \rangle)$ formé par un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E et un produit scalaire (noté $\langle , \rangle$) sur E est appelé **espace préhilbertien réel**.
Si de plus, l'espace vectoriel E est de dimension finie, alors on parle d'**espace euclidien**.

✓ Si F est un sous-espace vectoriel de E et si $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E, alors la restriction de $\langle , \rangle$ à F, donne à F une structure d'espace préhilbertien.

Lemme 26.3 (Fondamental)

Soient a et b deux vecteurs d'un espace préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$. On a :

$$a = b \iff \forall x \in E, \langle a, x \rangle = \langle b, x \rangle .$$

En particulier,

$$a = 0 \iff \forall x \in E, \langle a, x \rangle = 0.$$

preuve:

1.2 Produits scalaires usuels

Lemme 26.4 (propriétés matricielles)

Soient $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$(-)$ $\forall (X, Y) \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $X^T AY = 0 \Longrightarrow A = 0_n$.
$(-)$ $\forall (X, Y) \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $X^T AY = X^T BY \Longrightarrow A = B$.

preuve:

Exercice 26.1 **Produit scalaire canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application

$$\Phi : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ (A, B) \longmapsto \mathrm{tr}\,(A^T B).$$

définit un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété 26.5 (Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application :

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ x = (x_1, \dots, x_n)\,, y = (y_1, \dots, y_n) \longmapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On l'appelle **produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$**.

preuve:

Corollaire 26.6 (Produit scalaire canonique sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application :

$$\langle , \rangle : \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \longmapsto {}^{\mathrm{t}}XY$$

est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On l'appelle **produit scalaire canonique sur** $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

preuve:

Propriété 26.7 (Produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. L'application :

$$(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$). On l'appelle **produit scalaire canonique sur** $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$).

Ptitexo: *Pour deux éléments* $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$ *et* $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k X^k$ *de* $\mathbb{R}[X]$*, on note*

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k q_k.$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2 Norme associée à un produit scalaire

2.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Propriété 26.8 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. On a alors :

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle x,y \rangle^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle .$$

Cas d'égalité :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle x,y \rangle^2 = \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle \iff (x,y) \text{ liée.}$$

preuve:

Exemples :

1. $\forall (x_1,\dots,x_n)\times(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$,
$$\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$
2. Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Soit f et g deux éléments de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, on a :
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t}.$$

Ptitexo: *Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur* $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Ptitexo: *Montrer que* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}e^{-t}dt \leq \frac{1}{2}\sqrt{1-e^{-2}}$.

2.2 Norme associée à un produit scalaire

Définition 26.9 (Norme)

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. On appelle **norme** sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie :
- $\forall x\in E,\quad N(x)=0 \Longrightarrow x=0_E$.
(Propriété de **séparation**).
- $\forall\lambda\in\mathbb{R}, \forall x\in E, N(\lambda x)=|\lambda|\,N(x)$.
(Propriété d'**homogénéité**).
- $\forall (x,y)\in E^2, N(x+y)\leq N(x)+N(y)$.
(**Inégalité triangulaire**).

Exemples :
1. Sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{C}$, l'application $z\mapsto |z|$ est une norme.
2. Sur l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$, l'application :
$$f\mapsto \max\left\{ |f(x)| \;\middle|\; x\in[0,1]\right\}.$$
est une norme. On la note usuellement $\|f\|_\infty$.

Ptitexo: *Soit N une norme sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel E. Montrer que :*
$$\forall (x,y)\in E^2, |N(x)-N(y)|\leq N(x-y).$$

Définition 26.10 (distance)

Soit E un ensemble. Soit $d : E\times E\longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application. On dit que d est une distance sur E si elle vérifie les trois propriétés suivantes :
i) $\forall (a,b)\in E^2,\quad d(a,b)=0\Longrightarrow a=b$.
(Propriété de **séparation**).
ii) $\forall (a,b)\in E^2, d(a,b)=d(b,a)$.
(Propriété de **symétrie**).
iii) $\forall (a,b,c)\in E^3, d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)$.
(**Inégalité triangulaire**).

Exemples :

1. L'application $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x-y|$ est une distance.
2. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. On note $Z(x,y)=1$ si $x \neq y$ et $Z(x,y)=0$ si $x=y$. L'application Z ainsi définie est une distance sur E.

Propriété 26.11 (Distance associée à une norme)

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Soit N une norme sur E. L'application

$$D : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ (x,y) \longmapsto N(x-y).$$

est une distance sur E. On l'appelle **distance associée à la norme** N.

preuve:

Ptitexo: *Justifier que la distance Z définie précédemment n'est pas associée à une norme.*

Propriété 26.12 (Inégalité triangulaire)

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien. On note $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire. On a :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

De plus :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, x=\lambda y \text{ ou } y=\lambda x.$$

✓ Si x et y sont deux vecteurs de E tels que :
$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+, x=\lambda y$ ou $y=\lambda x$, alors on dit que x et y sont positivement liés.

Propriété 26.13 (Norme associée à un produit scalaire)

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien. L'application :

$$\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

est une norme sur E, on l'appelle **norme associée au produit scalaire** $\langle,\rangle$.

preuve:

✓ Si on se donne une norme N et que l'on constate qu'elle est associée à un produit scalaire φ, alors on dit que φ est la forme polaire de N.

Ptitexo: *Soit l'application :*

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto \sqrt{x^2+3y^2+6z^2-2xy-4yz+2xz}.$$

Montrer que Φ est bien définie sur $\mathbb{R}^3$ et que c'est une norme associée à un produit scalaire que l'on précisera.

2.3 Formules de polarisation

Les formules suivantes permettent de retrouver la forme bilinéaire d'une norme associée à un produit scalaire.

Propriété 26.14 (Identités de polarisation)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. On note $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire. Soient x et y deux vecteurs de E.

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle .$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle .$$
$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y\rangle .$$

preuve:

Ptitexo: *Montrer que* $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| . \|x-y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$

Propriété 26.15 (Identité du parallélogramme)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. On note $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire. Soient x et y deux vecteurs de E.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Ptitexo: *Montrer que l'application* $N : (x,y) \mapsto \max(|x|, |y|)$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$ *qui n'est pas associée à un produit scalaire.*

3 Orthogonalité

3.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 26.16 (Vecteurs orthogonaux)

Deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$ sont dits **orthogonaux** si :

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

Exemples :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire canonique.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Travaillons dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.
   Soit $H = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \}$. Alors tout vecteur de H est orthogonal au vecteur $a_1 + \dots + a_n$.
3. Travaillons dans $\mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. Si f est une fonction paire et si g est une fonction impaire alors f et g sont orthogonales.

✓ Attention, la notion d'orthogonalité est relative au produit scalaire considéré.
Exemple : les fonctions $f : x \mapsto \sin x$ et $g : x \mapsto \cos x$ sont orthogonales

pour le produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ mais pas pour le produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)g(t)(1+t^2)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 26.17 (Théorème de Pythagore)

Soient x et y d'un espace préhilbertien $(E, \langle,\rangle)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Les vecteurs x et y sont orthogonaux.
ii) On a $\langle x, y\rangle = 0$.
iii) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

preuve:

3.2 Orthogonal d'une partie

Définition 26.18 (Orthogonal d'une partie)

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien. Soit F une partie de E. On appelle **orthogonal de la partie** F, l'ensemble formé par les vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les éléments de F. On le note $F^{\perp}$. Autrement dit :

$$F^{\perp} = \left\{ x \in E \,\middle|\, \forall y \in F, \langle x, y\rangle = 0 \right\}.$$

Exemples :

1. $\{0_E\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0_E\}$.

2. Si a est un vecteur non nul de E, alors $\{a\}^{\perp}$ est un hyperplan : c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $\lambda_a : x \mapsto \langle a, x\rangle$.

Propriété 26.19 (Orthogonal et inclusion)

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien. Soient A et B deux parties de E.

$$A \subset B \Longrightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}.$$

$$A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}.$$

preuve:

Propriété 26.20 (L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel)

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien. Si F est une partie de E, alors l'orthogonal de F est un sous-espace vectoriel de E.

preuve:

Propriété 26.21 (famille génératrice)

Si $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$, alors :

$$(\{ x_i \mid i \in I \})^{\perp} = \left(\mathrm{Vect}\ (x_i)_{i\in I}\right)^{\perp}.$$

preuve:

3.3 Famille orthogonale, famille orthonormale

Définition 26.22 (Vecteur unitaire ou normé)

Un vecteur d'un espace préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$ est dit **normé** ou **unitaire** si $\|x\| = 1$.

Définition 26.23 (Famille orthogonale)

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$, est dite **orthogonale** si

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \Longrightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$, est dite **orthonormale** si

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \Longrightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in I, \|x_i\| = 1.$$

Propriété 26.24 (Généralisation du théorème de Pythagore)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit une famille orthogonale $(x_i)_{i\in [\![1,n]\!]}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$. On a :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

preuve:

✓ Attention :la réciproque est fausse, exemple dans $\mathbb{R}^2$ pour $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (3, 0)$ et $u_3 = (2, -11)$, on obtient $\|u_1 + u_2 + u_3\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|u_3\|^2 = 136$ et $\langle u_1, u_2 \rangle \neq 0$, la famille n'est donc pas orthogonale.

Propriété 26.25 (Liberté d'une famille orthogonale)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Toute famille orthogonale de vecteurs *non nuls* de E est libre.

preuve:

Théorème 26.26 (Orthonormalisation de Schmidt)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre de E. Il existe une et une seule famille $(e_1, \ldots, e_p)$ orthonormale de E, telle que :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \text{Vect } (e_1, \ldots, e_k) = \text{Vect } (u_1, \ldots, u_k) \quad \text{et} \quad \langle e_k, u_k \rangle > 0.$$

preuve :
On construit par récurrence $e_1, \ldots, e_p$, en posant :

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, p-1]\!], e_{k+1} = \frac{u'_{k+1}}{\|u'_{k+1}\|}$$

avec :

$$u'_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle u_{k+1}, e_i \rangle \, e_i.$$

Dessin :

Ce procédé s'appelle le **procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**.

✓ Dans la pratique, il sera parfois plus simple de construire dans un premier temps la famille orthogonale $(u'_1, ..., u'_p)$ en définissant successivement :
$u'_1 = u_1$,
$u'_2 = u_2 + a_1 u'_1$ avec $a_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\langle u'_2, u'_1 \rangle = 0$,
$u'_3 = u_3 + a_2 u'_2 + a_1 u'_1$ avec $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\langle u'_3, u'_1 \rangle = 0$ et $\langle u'_3, u'_2 \rangle = 0$ etc.
Ne restera plus alors qu'à normer les vecteurs de cette famille.

Ptitexo: *Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Orthonormaliser la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (1, -2, -1), u_3 = (-1, 1, 0)$.*

Exercice 26.2

Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, on note :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) \, \mathrm{d}t.$$

1) Montrer que que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

2) Que donne le procédé de Schmidt pour la famille $\left(X^0, X^1, X^2, X^3\right)$?

Exercice 26.3 **Injection canonique de E vers E^*, adjoints**

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tout vecteur $a \in E$, on définit l'application :

$$j_a : E \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \langle a, x \rangle .$$

1) Montrer que l'application $j : a \mapsto j_a$ est une application linéaire injective de E vers E^*.
On l'appelle **injection canonique de E vers E^*.**

2) Montrer que si la dimension de E est finie, alors j est un isomorphisme de E vers E^*.
Dans toute la suite, on suppose que E est de dimension finie.

3) Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

a) Montrer que pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique vecteur de E que l'on note $f^*(x)$ tel que :

$$\forall y \in E, \langle x, f(y) \rangle = \langle f^*(x), y \rangle .$$

b) Montrer que $f^* : x \mapsto f^*(x)$ est un endomorphisme de E, on l'appelle adjoint de f.

c) Pour f et g deux endomorphismes de E, déterminer l'adjoint de $f \circ g$.

4 Bases orthonormales d'un espace euclidien

Dans tout ce paragraphe, $(E, \langle , \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension n.

4.1 Existence de bases orthonormales

Définition 26.27 (Base orthonormale)

On dit qu'une famille b de vecteurs de E est une **base orthogonale** (resp. **base orthonormale**) si c'est une base de E et si elle est orthogonale. (resp. orthonormale).

Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt entraîne de manière immédiate les propriétés suivantes.

Propriété 26.28 (Existence de b. orthonormales en dim. finie)

Toute espace euclidien admet une base orthonormale.

Propriété 26.29 (Théorème de la base orthonormale incomplète)

Soit e une famille orthonormale de vecteurs d'un espace euclidien E. On peut compléter la famille e en une base orthonormale de E.

4.2 Travail dans une base orthonormale

Lemme 26.30 (Expression du p.s. dans une base orthogonale)

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une famille orthogonale de E. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ deux n-uplets d'éléments de $\mathbb{R}^n$. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et si $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, alors :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \|e_i\|^2 .$$

preuve:

Propriété 26.31 (Norme et p.s. dans une base orthonormale)

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
$(-)$ On a :

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Autrement dit, la i-ème coordonnée du vecteur x dans la base e est : $x_i = \langle x, e_i\rangle$.
$(-)$ Pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ et tout vecteur $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$, on a :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2}.$$

et :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \langle y, e_i\rangle .$$

✓ En particulier, si $u \in \mathrm{L}(E)$, alors $\mathrm{tr}\,(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), e_i\rangle$.

Exercice 26.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F un espace vectoriel de dimension finie égale à n qui admet la famille $f = (f_1, \dots, f_n)$ pour base. Montrer que l'application :

$$\Phi : F^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i, \sum_{i=1}^{n} y_i f_i\right) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

est un produit scalaire sur F.
On retiendra donc que pour munir un espace de dimension finie d'une structure euclidienne, il suffit de se donner une base de cet espace et de décider que cette base est orthonormale.

Ptitexo: *Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un isomorphisme de E vers $(\mathbb{R}^n, (,))$ qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire tel que :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle .$$

5 Matrice de produit scalaire dans un espace euclidien (M.P.)

Dans tout ce paragraphe n désigne un entier naturel non nul.

Lemme 26.32 (matrice symétrique)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
Si $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^{\mathrm{t}}XAX = 0$, alors $A = 0_n$.

preuve:

Définition 26.33 (Matrice symétrique définie positive)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On dit que A est **définie positive** si :

$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^{\mathrm{t}}XAX \geq 0$$

et

$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^{\mathrm{t}}XAX = 0 \Longleftrightarrow X = 0_{n,1}.$$

Définition 26.34 (Matrice de produit scalaire)

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de e. On appelle matrice du produit scalaire $\langle,\rangle$ dans la base e, la matrice

$$A = (\langle e_i, e_j\rangle)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}.$$

✓ La base e est orthonormale pour le produit scalaire $\langle,\rangle$, si et seulement si la matrice de ce produit scalaire dans la base e est I_n.

Ptitexo: *Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle,\rangle$ défini pour tout couple (P,Q) de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 3 par :*

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer la matrice de ce produit scalaire dans la base canonique.

Propriété 26.35 (matrice de produit scalaire)

Toute matrice de produit scalaire est symétrique et définie positive.

preuve:

Inversement, la propriété suivante affirme que pour se donner un produit scalaire, il suffit de se donner une matrice symétrique définie positive :

Propriété 26.36 (application associée)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Soit E un espace de dimension n et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit l'application φ de E^2 vers $\mathbb{R}$ qui à un couple de vecteurs (x, y) de E (dont on note X et Y les vecteurs-colonnes des coordonnées dans la base e.) associe le réel ${}^{\mathrm{t}}XAY$.
Alors l'application φ est un produit scalaire sur E. C'est l'unique produit scalaire sur E qui admet A pour matrice dans la base $e = (e_1, \dots, e_n)$.

preuve:

Exercice 26.5 Changement de base pour les matrices de produits scalaires

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soient e et e' deux bases de E. Soit $\langle , \rangle$ un produit scalaire sur E dont on note A la matrice dans la base e et A' la matrice dans la base e'.
Exprimer A' en fonction de A et de la matrice de passage de la base e vers la base e'.

Corollaire 26.37 (De Gram-Schmidt)

Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive, alors il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = {}^{\mathrm{t}}PP.$$

preuve:

✓ De ce lemme, il découle que le déterminant d'une matrice symétrique définie positive est strictement positif.

6 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

6.1 Supplémentaires orthogonaux

Définition 26.38 (Sous-espaces vectoriels orthogonaux)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$. On dit que F et G sont **orthogonaux** si :

$$\forall (x, y) \in F \times G, \langle x, y \rangle = 0.$$

On note alors $F \perp G$.

Définition 26.39 (Supplémentaires orthogonaux)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$. On dit que F et G sont **supplémentaires orthogonaux** si :

$$F \perp G \quad \text{et} \quad E = F \oplus G.$$

On note alors $E = F \oplus^{\perp} G$

Propriété 26.40 (égalités)

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux d'un même espace préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$, alors :

$$G = F^{\perp} \quad \text{et} \quad F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}.$$

preuve:

✓ Un sous-espace quelconque F, d'un espace préhilbertien n'admet pas toujours de supplémentaire orthogonal. Il se peut que dans ce cas l'inclusion $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ ne soit qu'une inclusion stricte et non une égalité.

Ptitexo: *On admet ici que si f est une fonction continue sur $[0,1]$ et ε un réel strictement positif, alors il existe une fonction polynomiale P telle que $\|f-P\|_{\infty} \leq \varepsilon$. (Ce résultat porte le nom de théorème de Weierstrass). On définit sur $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, le produit scalaire $\langle , \rangle$ en posant pour*

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, \mathrm{d}t.$$

On note F le sous-espace vectoriel de E formé par les fonctions polynomiales.
Montrer que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal et que $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} \neq F$.

6.2 Projecteurs orthogonaux

Définition 26.41 (Projecteur orthogonal)

On appelle **projecteur orthogonal** tout projecteur p d'un espace préhilbertien E tel que $\mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Ker}\,(p)$ soient supplémentaires orthogonaux.

Théorème 26.42 (Caractérisation des projecteurs orthogonaux)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
$(-)$ Un projecteur p d'image F est un projecteur orthogonal si et seulement si F admet un supplémentaire orthogonal $G = F^{\perp}$ et si $\mathrm{Ker}\,(p) = F^{\perp}$.
$(-)$ Si F admet un supplémentaire orthogonal, alors le seul projecteur orthogonal d'image F est la projection orthogonale d'image F et de noyau $F^{\perp}$.

preuve:

✓ Si F admet un supplémentaire orthogonal, alors on note p_F la projection orthogonale sur F.

Exercice 26.6

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\| .$$

6.3 Distance à un sous-espace

Définition 26.43 (Distance d'un point à une partie)

Soit E un ensemble muni d'une distance d et P une partie non vide de E. Soit a un élément de E. On appelle **distance du point a à la partie P** le réel noté $d(a, P)$ défini par :

$$d(a, P) = \inf \left\{ d(a, p) \;\middle|\; p \in P \right\}.$$

✓ Dans les conditions de la définition, l'ensemble $\left\{ d(a, p) \;\middle|\; p \in P \right\}$ est une partie non vide et minorée de E. Elle admet donc un $\inf$. Ce qui justifie la définition.

Ptitexo: *Travaillons dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = ax$ (où $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$). Soit M le point de coordonnées $(1, 1)$.*

1. *Montrer qu'il existe un unique point $P_M \in \mathcal{D}$ tel que $d(P_M, M) = d(M, \mathcal{D})$.*

2. *Vérifier que les droites $(P_M M)$ et $\mathcal{D}$ sont orthogonales.*

Exercice 26.7 **La distance à une partie est 1-Lipschitzienne.**

Soit E un ensemble muni d'une distance d et P une partie non vide de E. Soient a et b deux éléments de E. Montrer que :

$$|d(a, P) - d(b, P)| \leq d(a, b).$$

Théorème 26.44 (Carac. de la distance à un sous-espace vectoriel)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. On note $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire et d la distance associée. Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $a \in E$.
$(-)$ $\forall x \in F$, on a l'équivalence :

$$\|a - x\| = d(a, F) \iff a - x \in F^{\perp}.$$

$(-)$ Il existe au plus un vecteur $x \in F$ qui vérifie $\|a - x\| = d(a, F)$.
$(-)$ Si le sous-espace vectoriel F admet un supplémentaire orthogonal, alors $p_F(a)$ est l'unique vecteur x de F tel que $\|a - x\| = d(a, F)$.
De plus, $\|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + (d(a, F))^2$.

preuve:

Dessin :

6.4 Supplémentaire orthogonal et projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Théorème 26.45 (Existence d'un supplémentaire orthogonal)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E admet un supplémentaire orthogonal.

preuve:

Corollaire 26.46 (Orthogonal d'un sous-espace vect. en dim. finie)

Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. On a :

$$E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}.$$
$$\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = \mathcal{F}.$$
$$\dim\left(F^{\perp}\right) =$$
$$dim(E) - \dim(F).$$

preuve:

Ptitexo: *Soit X une partie d'un espace euclidien. Montrer que :*

$$\left(X^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(X).$$

Ptitexo: *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien. Montrer que :*

$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp} \quad \text{et} \quad (F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}.$$

Propriété 26.47 (Expression de la projection orthogonale)

Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Soit $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F.
$(-)$ On a pour tout $x \in E$:

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle \, e_i.$$

$(-)$ On a pour tout $x \in E$:

$$\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2 .$$

(Cette inégalité porte le nom d'inégalité de Bessel).
$(-)$ On a alors pour tout $x \in E$:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle^2 + (d(x, F))^2$$

preuve:

✓ Il y a égalité dans l'inégalité de Bessel si et seulement si $x \in F$.

Exercice 26.8 **Matrice de Gram**

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension égale à n. Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille de p vecteurs de E, on appelle **matrice de Gram** associée à la famille $(x_1, \dots, x_p)$ la matrice appartenant à $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne $i \in [\![1, p]\!]$ et colonne $j \in [\![1, p]\!]$ est $\langle x_i, x_j \rangle$. On la note $G\,(x_1, \dots, x_p)$. Le déterminant de cette matrice est appelé **déterminant de Gram** de la famille $(x_1, \dots, x_p)$. On le note ici $g\,(x_1, \dots, x_p)$.

1) Que vaut $g\,(x_1, \dots, x_p)$ si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée ?

2) Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre si et seulement si $g\,(x_1, \dots, x_p) > 0$.

3) Montrer que :

$$\mathrm{rg}\ (G\,(x_1, \dots, x_p)) = \mathrm{rg}\ (x_1, \dots, x_p) \, .$$

4) On suppose ici que $\dim(E) = n = p$. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ un endomorphisme de E. Montrer que :

$$g\,(u(x_1), \dots, u(x_p)) = (\det(u))^2 \, g\,(x_1, \dots, x_p) \, .$$

5) On suppose dans cette question que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.
Soit $F = \text{Vect}\,(x_1, \dots, x_p)$. Soit $a \in E$. Montrer que :

$$\mathrm{d}(a, F) = \sqrt{\frac{g\,(a, x_1, \dots, x_p)}{g\,(x_1, \dots, x_p)}}.$$

6.5 Définition d'un hyperplan par son orthogonal (M.P.)

Propriété 26.48 (Hyperplan orthogonal à un vecteur non nul)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Si $a \in E \setminus \{0\}$, alors il existe un unique hyperplan H tel que $H = \{a\}^{\perp}$.

preuve:

Propriété 26.49 (Définition d'un hyperplan par son orthogonal)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. Soit H un hyperplan de E. Soit e une base orthonormale de E.

$(-)$ Il existe $a \in E \setminus \{0\}$ tel que $H = \{a\}^{\perp}$.

$(-)$ Si les coordonnées de a dans e sont $(a_1, \dots, a_n)$, alors H est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ dont les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ dans la base e vérifient $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.

preuve:

7 Automorphismes orthogonaux (M.P.)

7.1 Généralités

Ptitexo: *Montrer qu'une application de E vers E qui conserve le produit scalaire est linéaire.*

Définition 26.50 (Automorphisme orthogonal, isométrie vectorielle)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$ un automorphisme de E, on dit que f est un **automorphisme orthogonal** ou une **isométrie vectorielle** s'il préserve le produit scalaire c'est-à-dire si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle .$$

Propriété 26.51 (Caractérisation des automorphismes orthogonaux)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit $f \in GL(E)$ un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) L'automorphisme f est un automorphisme orthogonal.

ii) L'automorphisme f préserve le produit scalaire c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle .$$

iii) L'automorphisme f préserve la norme c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\| .$$

iv) L'automorphisme f préserve les distances :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| .$$

✓ Dans cette propriété, l'hypothèse $\varphi \in \mathrm{L}(E)$ est indispensable. On vient de voir que la conservation du produit scalaire implique la linéarité. Par contre, la conservation de la norme n'implique pas la linéarité.

Propriété 26.52 (Symétrie orthogonale)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit s une symétrie de E. L'automorphisme s est orthogonal si et seulement si $\mathrm{Inv}(s)$ et $\mathrm{Ker}\ (s + \mathrm{id}_E)$ sont orthogonaux. On dit alors que s est une **symétrie orthogonale**. Si de plus, $\mathrm{Inv}(s)$ est un hyperplan de E, on dit que s est une **réflexion**.

Ptitexo: *On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique, justifier que l'application*

$$\text{transpose} : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ A \longmapsto {}^{\mathrm{t}}A.$$

est une symétrie orthogonale dont on précisera les éléments caractéristiques.

Ptitexo: *Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit p un projecteur orthogonal de E. Justifier que $s = 2p - \mathrm{id}_E$ est une symétrie orthogonale.*

✓ Un projecteur orthogonal, n'est pas un automorphisme orthogonal excepté s'il est égal à l'identité.

Exercice 26.9

Soient a et b deux vecteurs unitaires distincts d'un espace préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$.

1) Montrer que qu'il existe une seule réflexion qui échange a et b. On la notera $s_{a,b}$ dans la suite.

2) Montrer que si l'on note $e = \dfrac{1}{\|a - b\|}(a - b)$, alors :

$$\forall x \in E, s_{a,b}(x) = x - 2 \langle x, e \rangle e.$$

preuve:

Définition 26.53 (Groupe orthogonal)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. On appelle **groupe orthogonal** l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E. On le note $\mathrm{O}(E)$.

Propriété 26.54 ()

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. $(\mathrm{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.

preuve:

7.2 Cas des espaces euclidiens

7.2.1 Automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien

Propriété 26.55 (Carac. des endo. orthog. d'un espace euclidien)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) L'endomorphisme f est orthogonal.

ii) L'endomorphisme f préserve le produit scalaire c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle .$$

iii) L'endomorphisme f préserve la norme c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\| .$$

iv) L'endomorphisme f préserve les distances :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| .$$

v) Il existe une base orthonormale de E dont l'image par f est une base orthonormale de E.

vi) L'image par f de toute base orthonormale de E est une base orthonormale de E.

vii) La matrice A de f dans une base orthonormale de E vérifie ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}$.

viii) Si l'on note $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de la matrice A de f dans une base orthonormale de f, alors la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est une famille orthonormale de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique.

preuve:

Propriété 26.56 ()

Si e et e' sont deux bases orthonormales d'un espace euclidien $(E, \langle , \rangle)$, alors il existe une unique isométrie f telle que l'image de e par f est e'.

preuve:

Exercice 26.10 **Isométrie vectorielle et sous-espaces stables**

Soit $(E, \langle , \rangle)$ une espace euclidien. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u.

1) Montrer que u_F, la restriction de u à F appartient à $\mathrm{O}(F)$.

2) Montrer que $u\left(F^{\perp}\right) = (F)^{\perp}$.

Exercice 26.11 **Générateurs de $\mathrm{O}(E)$**

Soit $(E, \langle , \rangle)$ une espace euclidien. Montrer que $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les réflexions.

7.2.2 Matrices orthogonales

Définition 26.57 (Matrice orthogonale)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une **matrice orthogonale** si elle vérifie : ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n$.

Propriété 26.58 (Caractérisation des matrices orthogonales)

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est orthogonale.
ii) A est la matrice d'une isométrie de $\mathbb{R}^n$ dans une base orthonormale.
iii) La famille des vecteurs-colonnes de A est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
iv) ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n$.

preuve:

Définition 26.59 (Groupe orthogonal)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **groupe orthogonal** de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On le note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou O_n.

preuve:

Propriété 26.60 ()

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.

preuve:

Exercice 26.12 **Décomposition QR**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire

$$A = QR,$$

avec $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et R une matrice triangulaire supérieure.

Propriété 26.61 (Déterminant d'une matrice orthogonale)

Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à 1 ou à -1.

preuve:

Corollaire 26.62 (Déterminant d'une isométrie)

Le déterminant d'une isométrie est égal à 1 ou à -1.

Définition 26.63 (Matrice orthogonale positive, négative)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une **matrice orthogonale positive** (resp. **matrice orthogonale négative**) si $\det(A) = 1$ (respectivement $\det(A) = -1$).

Définition 26.64 (Groupe spécial orthogonal)

On appelle **groupe spécial orthogonal** de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales positives, on le note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Propriété 26.65 ()

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times)$.

preuve:

Définition 26.66 (Isométrie positive, négative)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathrm{O}(E)$. On dit que f est une **isométrie positive** (resp. **isométrie négative**) si $\det(f) = 1$ (resp. $\det(f) = -1$).

Définition 26.67 (Groupe spécial orthogonal)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. On appelle **groupe spécial orthogonal** de $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des isométries positives, on le note $\mathrm{SO}(E)$.

Propriété 26.68 ()

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{O}(E), \circ)$.

preuve:

Propriété 26.69 (Carac. des iso. positives)

Une isométrie f d'un espace euclidien orienté $(E, \langle , \rangle)$. est positive si et seulement si l'image par f d'une base orthonormale directe de E est une base orthonormale directe de E.

preuve:

7.2.3 Produit mixte dans un espace euclidien orienté

a) Cas général

Propriété 26.70 ()

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soient e et e' deux bases orthonormales directes de cet espace. Pour toute famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de n vecteurs de E, on a :

$$\det_e (x_1, \ldots, x_n) = \det_{e'} (x_1, \ldots, x_n) .$$

preuve:

Cette propriété nous invite à formuler la définition suivante :

Définition 26.71 (Produit mixte)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit e une base orthonormale directe de e. On appelle **produit mixte** de la famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$, la quantité

$$[x_1, \ldots, x_n] = \det_e (x_1, \ldots, x_n) .$$

Propriété 26.72 ()

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de n-vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension n, alors :
$(-)$ $[x_1, \ldots, x_n] \neq 0$ si et seulement si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E.
$(-)$ $[x_1, \ldots, x_n] > 0$ si et seulement si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base directe de e.
$(-)$ $[x_1, \ldots, x_n] < 0$ si et seulement si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base indirecte de e.

preuve:

✓ Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base orthonormale directe alors son produit mixte est égal à 1, si c'est une base orthonormale indirecte alors son produit mixte est égal à -1.

Exercice 26.13 **Inégalité de Hadamard**

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n-vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension n, dont on note $\|\|$ la norme associée au produit scalaire.

1) Montrer que

$$[x_1, \ldots, x_n] \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\| .$$

(Cette inégalité porte le nom d'inégalité de Hadamard).

2) Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est orthogonale ou si l'un des vecteurs est nul.

b) Cas particulier de la dimension 3

Propriété 26.73 (Définition du produit vectoriel)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3. Soient u et v deux vecteurs de E. Il existe un unique vecteur que l'on note $u \wedge v$ tel que :

$$\forall x \in E, [u, v, x] = \langle u \wedge v, x \rangle .$$

On appelle ce vecteur **produit vectoriel** de u et v.

Preuve : Soit $(u, v) \in E^2$. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto [u, v, x]$.
La n-linéarité du déterminant implique que f est une forme linéaire.
On a déjà vu que dans un espace euclidien, l'application

$$j : E \longrightarrow E^*,\ a \longmapsto j_a : x \mapsto \langle a, x \rangle$$

est isomorphisme de E vers E^*. La forme linéaire f admet donc un unique antécédent par f qui est le vecteur $u \wedge v$ recherché. (Autrement dit, $u \wedge v = j^{-1}(f)$).

Propriété 26.74 ()

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3. Soit e une base orthonormée de E. Soient u et v deux vecteurs de E. Le produit vectoriel $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.

Preuve : De la définition du produit vectoriel, il découle que

$$[u, v, u] = \langle u \wedge v, u \rangle .$$

L'antisymétrie du déterminant, donne alors $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$. On prouve de même que $\langle u \wedge v, v \rangle = 0$. Donc, le produit vectoriel $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.

Propriété 26.75 (Intersection de deux plans de $\mathbb{R}^3$)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3. Soit e une base orthonormée de E. Soit n_1 et n_2 deux vecteurs non colinéaires de E. Soit P_1 le plan de vecteur normal n_1 et P_2 le plan de vecteur normal n_2. L'intersection $P_1 \cap P_2$ est une droite engendrée par $n_1 \wedge n_2$.

preuve:

8 Isométries vectorielles en dimension 2 (M.P.)

8.1 Matrices orthogonales de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$

Propriété 26.76 (Matrices orthogonales en dim. 2)

Les matrices orthogonales de $O_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(avec $\theta \in \mathbb{R}$.)

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ R(\theta) \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

preuve:

✓ Avec les notations précédentes, on a :
$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2,\ R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta')R(\theta)$.

Propriété 26.77 ()

(−) Le groupe $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe commutatif.
(−) Le groupe $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{U}, \times)$.

preuve:

8.2 Angles et rotations vectorielles

Propriété 26.78 (Rotations du plan)

Si r une isométrie positive du plan, alors il existe un réel θ, unique modulo (2π) tel que la matrice de r dans toute base orthonormale directe soit égale à $R(\theta)$.

On dit alors que r est la **rotation vectorielle** d'angle θ.
On dit que θ est une mesure de l'angle de la rotation.

preuve:

Propriété 26.79 (Isométries positives du plan)

Les isométries positives du plan sont les rotations.

Exercice 26.14

Soient a et b deux vecteurs unitaires du plan euclidien. Montrer qu'il existe une unique rotation vectorielle r telle que $r(a) = b$.

Définition 26.80 (Angle orienté)

Soient u et v deux vecteurs non nuls du plan. On appelle **mesure de l'angle orienté** entre u et v, toute mesure θ de l'angle de l'unique rotation r telle que $r\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$. On note alors :

$$\widehat{(u,v)} \equiv \theta\,(2\pi)\,.$$

Propriété 26.81 (Relation de Chasles)

Si u, v et w sont trois vecteurs non nuls du plan, alors :

$$\widehat{(u,w)} \equiv \widehat{(u,v)} + \widehat{(v,w)} \ \ (2\pi)\,.$$

preuve:

Propriété 26.82 (Petites propriétés des angles)

Si u, v sont deux vecteurs non nuls du plan, alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{(u,u)} &\equiv 0 \ \ (2\pi)\,,\\
\widehat{(u,-u)} &\equiv \pi \ \ (2\pi)\,,\\
\widehat{(u,v)} &\equiv \ -\widehat{(v,u)} \ \ (2\pi)\,,\\
\widehat{(-u,v)} &\equiv \widehat{(u,v)} + \pi \ \ (2\pi)\,,\\
\widehat{(-u,-v)} &\equiv \widehat{(u,v)} \ \ (2\pi)\,.
\end{aligned}$$

preuve:

Propriété 26.83 ()

Soient u et v deux vecteurs non nuls du plan et e une base orthonormée directe du plan. On a :

$$\det_e(u,v) = \|u\|\,\|v\|\sin\left(\widehat{(u,v)}\right).$$

$$\langle u,v\rangle = \|u\|\,\|v\|\cos\left(\widehat{(u,v)}\right).$$

preuve:

Retours sur les calculs d'aires

Considérons un parallélogramme $ABCD$. On sait depuis le lycée que l'aire du triangle ABC est donnée égale à :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\right|.$$

On a donc :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

On retrouve donc :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right|.$$

Si la famille $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est une base directe, alors l'aire orientée du parallélogramme $ABCD$ est positive. Sinon l'aire orientée du parallélogramme $ABCD$ est négative.

Propriété 26.84 ()

Soient u et v deux vecteurs non nuls du plan. Soit r une isométrie vectorielle du plan.
$(-)$ Si r est positive, alors :

$$(\widehat{f(u), f(v)}) \equiv (\widehat{u, v})(2\pi).$$

$(-)$ Si r est négative, alors :

$$(\widehat{f(u), f(v)}) \equiv -(\widehat{u, v})(2\pi).$$

8.3 Réflexions vectorielles du plan

Propriété 26.85 (Réflexions du plan)

Soit $e = (e_1, e_2)$ une base orthonormale du plan. Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui admet pour matrice

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

alors, f est la réflexion vectorielle par rapport à la droite $\mathbb{R}.\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$.

preuve:

Corollaire 26.86 (Isométries du plan)

Les isométries indirectes du plan sont les réflexions.

preuve:

✓ Si r est une isométrie négative du plan, il existe donc une base b orthonormée du plan telle que : $\mathrm{Mat}_b(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Propriété 26.87 (Composée de deux réflexions)

Soient u et u' deux vecteurs non nuls du plan. Si s et s' sont les deux réflexions du plan d'axes respectifs $\mathbb{R}.u$ et $\mathbb{R}.u'$, alors :
$s' \circ s$ est la rotation d'angle $2\left(\widehat{u, u'}\right)$.

preuve:

Corollaire 26.88 (Classification des isométries du plan)

Toute isométrie du plan est soit une réflexion, soit la composée de deux réflexions.

preuve:

Chapitre 27 - Géométrie affine

Il n'y a pas de place durable en ce monde pour des mathématiques laides.
G.H.Hardy.

1 Généralités

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. On va s'amuser à distinguer les points de E et les vecteurs de E qui sont obtenus comme différence de deux points de E. C'est un peu étrange puisque la différence de deux éléments de E est un élément de E mais on s'autorisera des opérations différentes sur les points et les vecteurs. En particulier, on évitera d'ajouter des points).
On notera les points avec des lettres majuscules et les vecteurs de E avec des flèches. On admettra donc les règles suivantes :

1. Le point 0 est le vecteur nul de E. (Le vecteur nul est noté $\overrightarrow{0}$).
2. Si $(A, B) \in E^2$, $\overrightarrow{AB}$ désigne le vecteur $B - A$.
3. Les éléments de E s'identifient à des points en confondant le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et le point M.
4. $\forall (A, B) \in E^2$, $A = B \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.
5. $\forall (A, B) \in E^2$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. (i.e. $B - A = -(A - B)$).
6. $\forall (A, B) \in E^2, \forall \overrightarrow{u} \in E$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow B = A + \overrightarrow{u}$.
7. $\forall (A, B, C) \in E^3$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. (i.e. $B - A + C - B = C - A$).

Faire les choses plus rigoureusement aurait nécessité de parler d'action de groupes.

Définition 27.1 (Translations)

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $\overrightarrow{u} \in E$. L'application

$$t_{\overrightarrow{u}} : E \longrightarrow E,\ M \longmapsto M + \overrightarrow{u}$$

est appelée **translation** de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Propriété 27.2 (Composée de translations)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E.

$$t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u+v}}.$$

preuve:

Cela découle directement de l'associativité de la loi d'addition dans E. $\square$

2 Sous-espaces affines

2.1 Définition et direction

Définition 27.3 (Sous-espace affine)

Soit E un espace vectoriel. On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de E est un **sous-espace affine** s'il existe un point Ω in E et F un sous-espace vectoriel de E tel que

$$\mathcal{F} = \Omega + F = \{\,\Omega + \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \in F\,\}.$$

Le sous-espace affine $\Omega + F$ est alors appelée sous-espace affine de E passant par Ω et admettant F pour direction.

Exemples :

1. Travaillons dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure d'espace vectoriel canonique. Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Considérons $\mathcal{F} = A + F$.
   — Si $\dim(F) = 0$, alors $\mathcal{F} = \{A\}$.
   — Si $\dim(F) = 1$, alors $\mathcal{F}$ est la droite (affine) passant par A et dirigée par tout vecteur $\overrightarrow{u} \in F \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
   — Si $\dim(F) = 2$, alors $\mathcal{F} = \mathbb{R}^2$.
2. Travaillons dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure d'espace vectoriel canonique. Soit $A \in \mathbb{R}^3$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Considérons $\mathcal{F} = A + F$.
   — Si $\dim(F) = 0$, alors $\mathcal{F} = \{A\}$.
   — Si $\dim(F) = 1$, alors $\mathcal{F}$ est la droite (affine) passant par A et dirigée par tout vecteur $\overrightarrow{u} \in F \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
   — Si $\dim(F) = 2$, alors $\mathcal{F}$ est un plan qui passa par A et est dirigé par Vect $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille libre de vecteurs de F.
   — Si $\dim(F) = 3$, alors $\mathcal{F} = \mathbb{R}^3$.

Propriété 27.4 (Lien entre un s.e.a et sa direction)

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E passant par Ω et de direction F.
$(-)$ $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = A + F$.
$(-)$ $\forall A \in \mathcal{F}$, $F = \{\,\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathcal{F}\,\}$.

preuve:

Corollaire 27.5 (Unicité de la direction d'un sous-espace affine)

Soit E un espace vectoriel. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E. Il existe un unique sous-espace vectoriel F de E tel que $\forall A \in \mathcal{F}, \mathcal{F} = A + F$. Cet espace vectoriel F est appelé **direction** de $\mathcal{F}$.

preuve:

Soit $A \in \mathcal{F}$ Il existe donc $\overrightarrow{a} \in F$ tel que $A = \Omega + \overrightarrow{a}$.
$(-)$ Montrons que $\mathcal{F} = A + F$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} &\iff \exists \overrightarrow{u} \in F, M = \Omega + \overrightarrow{u}, \\ &\iff \exists \overrightarrow{u} \in F, M = \Omega + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{u} - \overrightarrow{a}, \\ &\iff \exists \overrightarrow{v} \in F, M = A + \overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

(La dernière égalité provenant du fait que l'application $\overrightarrow{u} \in F \mapsto \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{a}$. est une bijection de F vers F).

$(-)$ Montrons que $F = \{\,\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathcal{F}\,\}$.

On a :

$$\begin{aligned}\{\,\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathcal{F}\,\} &= \{\, M - A \mid M \in \mathcal{F}\,\}\\ &= \{\,\Omega + \overrightarrow{u} - (OM + \overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{u} \in F\,\}\\ &= \{\,\overrightarrow{u} - \overrightarrow{a} \mid \overrightarrow{u} \in F\,\}\\ &= F. \text{ (Car } F \text{ est un s.e.v.}\end{aligned}$$

$\square$

<u>Ptitexo:</u> *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *Soit* $\mathcal{F} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - z = a \right\}$. *Montrer que* $\mathcal{F}$ *est un sous-espace affine de* $\mathbb{R}^3$ *dont on donnera la direction et un point.*

<u>Ptitexo:</u> *Déterminer une CNS simple pour qu'un sous-espace affine soit un sous-espace vectoriel.*

<u>Ptitexo:</u> *Soit* $\mathcal{F}$ *l'ensemble des suites récurrentes vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n + 5.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ *est un sous-espace affine de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

✓ Un sous-espace affine non réduit à un point ne peut pas être borné.

✓ L'ensemble des solutions d'un système linéaire à p inconnues est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^p$, sa direction est le sous-espace vectoriel des solutions du système homogène qui lui est associé.

2.2 Dimension

Définition 27.6 (Dimension d'un sous-espace affine)

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine d'un espace vectoriel E. On appelle **dimension** de $\mathcal{F}$ la dimension de sa direction.

✓ L'ensemble des solution de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et de dimension 1.

Notation :
Si $\mathcal{D}$ est un sous-espace affine de dimension 1 et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de sa direction, alors on dit que $\mathcal{D}$ est une droite affine. Si A est un point de $\mathcal{D}$, alors on note $\mathcal{D} = (A, \overrightarrow{u})$ et l'on dit que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
Si $\mathcal{P}$ est un sous-espace affine de dimension 2, alors on dit que $\mathcal{P}$ est un plan affine. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de sa direction et A un point de $\mathcal{P}$, alors on note $\mathcal{P} = (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Définition 27.7 (Repère cartésien, coordonnées d'un point)

Soit E un espace vectoriel. On appelle **repère cartésien** de E tout couple (Ω, b) où $\Omega \in E$ est un point de E et b une base de E. On dit que ce repère est un **repère orthonormé** si b est une base orthonormée de E.
S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, et des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ tels que $b = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ soit une base de E, alors pour tout point $M \in E$, on appelle **coordonnées** de M dans le repère (Ω, b), l'unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tel que $\overrightarrow{\Omega M} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overrightarrow{e_k}$.

✓ Les coordonnées de M dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$.

2.3 Hyperplans affines

Définition 27.8 (Hyperplans affines)

Soit E un espace vectoriel. On appelle **hyperplan affine de** E un sous-espace affine de E dont la direction est un hyperplan de E.

Propriété 27.9 (Carac. par la dim.)

Si E est un espace vectoriel de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$ alors un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de E est un hyperplan affine de E si et seulement si c'est un sous-espace affine de dimension $n-1$.

preuve:

Cette propriété est une conséquence directe du fait que les hyperplans d'un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ sont les sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.
□

Propriété 27.10 (Équation d'un hyperplan)

Soit E un espace vectoriel. Soit $\mathcal{H} \subset E$. L'ensemble $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine de E si et seulement si il existe une forme linéaire $\Lambda \in E^*$ et un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{H} = \{ x \in E \mid \Lambda(x) = a \}$. Dans ce cas, on dit que $\Lambda(x) = a$ est une équation de $\mathcal{H}$.

preuve:

$(-)$ Première implication.
Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de direction H. Soit $M \in \mathcal{H}$. On sait que H est le noyau d'une certaine forme linéaire non nulle Λ. On a donc $\mathcal{H} = M + \operatorname{Ker}(\Lambda)$. On en déduit facilement que :

$$\mathcal{H} = \left\{ X \in E \,\middle|\, \Lambda(X) = \Lambda(M) \right\}.$$

En posant, $a = \Lambda(M)$, on obtient effectivement :

$$\mathcal{H} = \{ x \in E \mid \Lambda(x) = a \}.$$

$(-)$ Réciproque.

Supposons qu'il existe une forme linéaire $\Lambda \in E^*$, non nulle telle que

$\mathcal{H} = \{ x \in E \mid \Lambda(x) = a \}$. Puisque Λ est non nulle, elle est surjective, donc il existe M tel que $\Lambda(M) = a$. On obtient alors $\mathcal{H} = M + \mathrm{Ker}\,(\Lambda)$. Donc $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine. $\square$

Corollaire 27.11 (Équation cartésienne d'un hyperplan aff.)

Soit $\mathcal{H}$ une partie de E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{R} = (\Omega, b)$ un repère cartésien de E. L'ensemble $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine de E si et seulement si il existe des réels $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ et $a \in \mathbb{R}^n$ tels que $\mathcal{H}$ soit l'ensemble des points dont les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans le repère $\mathcal{R}$ vérifient $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i x_i = a$. On dit dans ce cas que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i x_i = a$ est une **équation cartésienne** de $\mathcal{H}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

preuve:

Évident ! $\square$

2.4 Parallélisme et intersection

Définition 27.12 (sous-espaces affines parallèles)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G.

$(-)$ On dit que $\mathcal{F}$ est **parallèle** à $\mathcal{G}$ si $F \subset G$.
$(-)$ On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont **parallèles** si $F = G$.

Propriété 27.13 (Parallélisme d'hyperplans)

Soit $\mathcal{R} = (\Omega, b)$ un repère cartésien de E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Soient $(u'_1, \ldots, u'_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ et $a' \in \mathbb{R}$.
Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ les hyperplans affines d'équations respectives dans le repère $\mathcal{R}$:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k x_k = a$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u'_k x_k = a'$.
Alors les hyperplans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont parallèles si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $(u_1, \ldots, u_n) = \lambda\,(u'_1, \ldots, u'_n)$.

preuve:

L'hyperplan $\mathcal{H}$ a pour direction $H = \mathrm{Ker}\,(\Lambda)$ où $\mathrm{Mat}_b(\Lambda) = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{pmatrix}$.

L'hyperplan $\mathcal{H}'$ a pour direction $H' = \mathrm{Ker}\,(\Lambda)'$ où $\mathrm{Mat}_b(\Lambda') = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{pmatrix}$.

Ces deux hyperplans sont parallèles si et seulements si leurs directions sont égales, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(\Lambda) = \mathrm{Ker}\,(\Lambda')$. Ce qui équivaut à dire que les formes linéaires non nulles Λ et Λ' sont liées, ou à dire qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $\Lambda = \lambda\Lambda'$. i.e. $\mathrm{Mat}_b\,(\Lambda) = \mathrm{Mat}_b\,(\lambda\Lambda')$.
Donc les hyperplans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont parallèles si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $(u_1, \ldots, u_n) = \lambda\,(u'_1, \ldots, u'_n)$. $\square$

Propriété 27.14 (Parallélisme et intersection)

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines d'un même espace vectoriel.
(−) Si $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ou $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.
(−) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ou $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

preuve:

(−) Supposons que $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$, alors par définition du parallélisme $F \subset G$. Donc si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, il existe un point $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Dans ce cas, on sait que $\mathcal{F} = A + F$ et $\mathcal{G} = A + G$, ce qui entraîne, (en utilisant $F \subset G$), $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.
(−) On réutilise le premier point deux fois : directement puis en échangeant les rôles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. □

Propriété 27.15 (Intersection de sous-espaces affines)

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines d'un même espace vectoriel E. On note F (respectivement G) la direction de $\mathcal{F}$ (respectivement $\mathcal{G}$). Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

preuve:

Reprenons les notations et hypothèses de l'énoncé. Supposons que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, dans ce cas, il existe $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Donc $\mathcal{F} = A + F$ et $\mathcal{G} = A + G$.
On a donc de manière évidente, $A + F \cap G \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.
De plus, Si M est un point de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, on peut noter $\overrightarrow{u}$, l'unique vecteur de E tel que $M = A + \overrightarrow{u}$. Alors, puisque $M \in \mathcal{F}$, on a $\overrightarrow{u} \in F$ et puisque $M \in \mathcal{G}$, on a $\overrightarrow{u} \in G$, donc $\overrightarrow{u} \in F \cap G$. Il en découle que $M \in A + F \cap G$.
Ainsi, a-t-on démontré par double inclusion que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = A + F \cap G$. Ce qui prouve que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $F \cap G$. □

✓ On retrouve donc que deux droites affines non parallèles de $\mathbb{R}^2$ ont un unique point d'intersection. De même, dans $\mathbb{R}^3$, si $\mathcal{D}$ est une droite affine non parallèle au plan affine $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ est un point.

3 Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$

Dans tout ce chapitre, on travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Propriété 27.16 (Équation d'un plan affine)

Soit $\mathcal{R} = (\Omega, b)$ un repère cartésien de $\mathbb{R}^3$. Soit A un point de $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$. Si l'on identifie les points à leurs coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ et les vecteurs à leurs coordonnées dans la base b, alors le plan affine $\mathcal{P} = (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ admet pour équation $\det_b\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}\right)$.

preuve:

Soit $M \in \mathbb{R}^3$. Puisque la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est libre :

$$\begin{aligned} M \in (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) &\iff \overrightarrow{AM} \in \text{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \\ &\iff \det_b\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}\right) = 0. \end{aligned}$$

□

Ptitexo: *L'espace $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à un repère quelconque. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par les points $A(4,1,2)$, $B(1,1,-1)$, $C(2,2,-1)$.*

Propriété 27.17 (Intersection de deux plans)

Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans affines non parallèles de $\mathbb{R}^3$ alors leur intersection est une droite.

preuve:

On sait qu'il existe deux formes linéaires ℓ et ℓ' et deux réels a et a' tels que :

$$\mathcal{P} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \ell(X) = a \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \ell'(X) = a' \right\}.$$

Soit $\Lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ X \longmapsto (\ell(X), \ell'(X))$. L'application Λ est linéaire et puisque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas parallèles, elles n'ont pas même noyau, donc $\operatorname{Ker}(\Lambda) = \operatorname{Ker}(\ell) \cap \operatorname{Ker}(\ell')$ est de dimension 1. Grâce au théorème du rang, on constate que cette application Λ est donc surjective.
Donc (a, a') admet un antécédent, donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \neq \emptyset$. Donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est un sous-espace affine de dimension $\dim(\operatorname{Ker}(\ell) \cap \operatorname{Ker}(\ell'))$. C'est donc une droite affine. $\square$

4 Hyperplans affines d'un espace euclidien

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que E est orienté.

Définition 27.18 (Vecteur normal à un hyperplan affine)

On appelle **vecteur normal** d'un hyperplan affine $\mathcal{H}$ de E tout vecteur normal de sa direction.

Définition 27.19 (Orientation d'un hyperplan)

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine. L'**orientation de l'hyperplan** $\mathcal{H}$ est la donnée d'un vecteur normal $\overrightarrow{a}$ à $\mathcal{H}$. Une base $(h_1, \dots, h_{n-1})$ de $\mathcal{H}$ est alors dite **directe** si si la base $(h_1, \dots, h_{n-1}, \overrightarrow{a})$ est directe (en tant que base de l'espace orienté E).

Propriété 27.20 (Équation et vecteur normal)

Soit $\mathcal{R} = (\Omega, b)$ un repère orthonormé de E. Soit $\overrightarrow{a}$ un vecteur de $E \setminus \{0\}$ dont les coordonnées dans la base b sont $(a_1, \dots, a_n)$. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E. Il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = c$ soit une équation de c si et seulement si $\overrightarrow{a}$ est un vecteur normal à $\mathcal{H}$.

preuve:

Exemples :

1. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, si $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $c \in \mathbb{R}$, alors l'équation $ax + by + c = 0$ est l'équation d'une droite de vecteur normal (a,b).
2. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et $d \in \mathbb{R}$, alors

l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'une droite de vecteur normal (a, b, c).

Rappel : lignes de niveaux :
Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{R}$. On appelle ligne de niveau k l'ensemble des points $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(\bar{x}) = k$.
Sur une carte IGN, on peut lire certaines des lignes de niveau de l'application qui à un point de coordonnées (x, y) associe l'altitude du sol à cet endroit.

Propriété 27.21 (Lignes de niveau de $M \mapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}$.)

Soit A un point de E. Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de E. Les lignes de niveaux de l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R},\ M \longmapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}$ sont des hyperplans de direction $(\operatorname{Vect}\overrightarrow{n})^{\perp}$ (C'est-à-dire de vecteur normal égal à $\overrightarrow{n}$).

Dessin :

preuve:

Soient M et M' deux points de E.

$$\begin{aligned} f(M) = f(M') &\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{n} \\ &\iff \overrightarrow{M'M}.\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{0} \\ &\iff \overrightarrow{M'M} \in \{n\}^{\perp} \\ &\iff M' \in M + \{n\}^{\perp}. \end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{D}$ la droite affine passant par A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}$. il existe un unique point H_k de la droite $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{AH_k}.\overrightarrow{n} = k$.
Donc $M \in L_k \iff M \in H_k + (\operatorname{Vect}\overrightarrow{n})^{\perp}$.
Donc la ligne de niveau k est bien l'hyperplan passant par H_k et de direction $(\operatorname{Vect}\overrightarrow{n})^{\perp}$. $\square$

Définition 27.22 (Distance à une partie)

Soit E un espace métrique (c'est-à-dire muni d'une distance que l'on note d). Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de E. Soit A un point de E. On appelle distance de A à la partie $\mathcal{P}$ le réel noté $\mathrm{d}(A, \mathcal{P})$ défini par :

$$\mathrm{d}(A, \mathcal{P}) = \inf\left\{ \mathrm{d}(A, M) \;\middle|\; M \in \mathcal{P} \right\}.$$

✓ Ce réel existe bien, car puisque $\mathcal{P}$ est non vide, $\left\{ \mathrm{d}(A, M) \;\middle|\; M \in \mathcal{P} \right\}$

est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et minoré par 0.

Exercice 27.1

Soit E un espace métrique (c'est-à-dire muni d'une distance que l'on note d). Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de E. Soient A et B deux points de E. Montrer que :

$$|\mathrm{d}(A,\mathcal{P}) - \mathrm{d}(B,\mathcal{P})| \leq \mathrm{d}(A,B).$$

(On dit que l'application distance à une partie donnée est 1-Lipschitzienne).

Soit E un espace euclidien. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de direction F et passant par le point Ω. Notons $\overrightarrow{p}$ la projection orthogonale sur F. On définit, alors une application $p_\Omega : E \longrightarrow E$, en posant pour tout $A \in E$:

$$p_\Omega(A) = \Omega + \overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{\Omega A}\right).$$

On remarque que $p_\Omega(A)$ ne dépend pas du point Ω choisi dans $\mathcal{F}$. En effet :
Si $\Omega' \in \mathcal{F}$, alors $\overrightarrow{\Omega\Omega'} \in F$, donc :

$$\overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{\Omega\Omega'}\right) = \overrightarrow{\Omega\Omega'}.$$

Donc :

$$\Omega' - \Omega = \overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{A\Omega'} - \overrightarrow{A\Omega}\right).$$

Donc :

$$\Omega' + \overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{\Omega' A}\right) = \Omega + \overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{\Omega A}\right).$$

On peut donc définir une application $p : E \longrightarrow E$, en posant :

$$\forall A \in E, p(A) = \Omega + \overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{\Omega A}\right).$$

On a alors, pour tout point A de E :

$$\overrightarrow{Ap(A)} = \Omega + \overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{\Omega A}\right) - A.$$

Ce qui implique :

$$\overrightarrow{Ap(A)} = \overrightarrow{A\Omega} - \overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{A\Omega}\right) \in \mathrm{Ker}\ (\overrightarrow{p}) = F^\perp.$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{Ap(A)}$ est orthogonal à F.
Naturellement, l'application p est appelée projection orthogonale sur $\mathcal{F}$.

Propriété 27.23 (Distance à un sous-espace affine)

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E (un espace euclidien) de direction F. Soit A un point de E. La distance de A à $\mathcal{F}$ est donnée par :

$$\mathrm{d}(A,\mathcal{F}) = \left\|\overrightarrow{Ap(A)}\right\| = \mathrm{d}(A,p(A)),$$

où $p(A)$ désigne le projeté orthogonal du point A sur $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que $p(A) \in \mathcal{F}$ et $\overrightarrow{Ap(A)} \in F^\perp$.

preuve:

Soit A un point de E. Pour tout point $M \in \mathcal{F}$, on a en utilisant le théorème de Pythagore puisque $\overrightarrow{Ap(A)} \in F^{\perp}$ et $\overrightarrow{p(A)M} \in F$:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}(A, M))^2 &= \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 \\
&= \left\|\overrightarrow{Ap(A)} + \overrightarrow{p(A)M}\right\|^2 \\
&= \left\|\overrightarrow{Ap(A)}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{p(A)M}\right\|^2
\end{aligned}$$

Il est clair que cette quantité est minimale pour $M = p(A)$. □

✓ On a donc prouvé qu'il existe un unique point qui réalise la distance du point A à un sous-espace affine $\mathcal{F}$ donné : c'est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{F}$.

Propriété 27.24 (Distance à un hyperplan affine)

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Soit M un point quelconque de E. On a :

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{H}) = \frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}.$$

preuve:

Plaçons nous dans les conditions de l'énoncé et notons $p(M)$ le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{H}$ et H la direction de $\mathcal{H}$.
Par propriété précédente, $\mathrm{d}(M, \mathcal{H}) = \mathrm{d}\,(M, p(M))$.
De plus, $\overrightarrow{p(M)M} \in H^{\perp}$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{p(M)M} = \lambda \overrightarrow{n}$.
Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{Ap(M)} + \lambda \overrightarrow{n}$.
Ce qui entraîne, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \lambda \|\overrightarrow{n}\|^2$.
Tandis que, $\mathrm{d}\,(M, p(M)) = \left\|\overrightarrow{p(M)M}\right\| = \|\lambda \overrightarrow{n}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{n}\|$.
Donc :

$$\mathrm{d}\,(M, p(M)) = \frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}.$$

Donc :

$$\boxed{\mathrm{d}(M, \mathcal{H}) = \frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}.}$$

□

✓ Cela prouve en particulier que si $\overrightarrow{n}$ est unitaire, on a : $\mathrm{d}(M, \mathcal{H}) = \left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right|$.

Corollaire 27.25 (Distance à un hyperplan)

Soit $h \in \mathbb{R}$. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan affine de E d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + k = 0$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$. Soit M un point de E dont les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ sont $x_1, \ldots, x_n$. On a :

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{H}) = \frac{\left| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + k \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.$$

preuve:

Soit $h \in \mathbb{R}$. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan affine de E d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + k = 0$ dans le repère $\mathcal{R}$. On sait que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ est un vecteur normal à $\mathcal{H}$. Donc, d'après la propriété précédente, si A un point de coordonnée $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{H}$, alors on a :

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{H}) = \frac{\left| \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} \right|}{\| \overrightarrow{n} \|}.$$

Par définition, on a : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - \alpha_i)$.

En utilisant, le fait que $A \in \mathcal{H}$ donc $\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i = -k$, on obtient :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + k.$$

Par ailleurs, $\| \overrightarrow{n} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$.

Donc :

$$\boxed{\mathrm{d}(M, \mathcal{H}) = \frac{\left| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + k \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.}$$

□

Propriété 27.26 (Cas particulier de $\mathbb{R}^2$)

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique et rapporté à un repère orthonormé. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Soit $c \in \mathbb{R}$. La distance du point M de coordonnées (x, y) à la droite affine $\mathcal{D}$ d'équation $aX + bY + c = 0$ est :

$$\mathrm{d}\left(M, \mathcal{D}\right) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Propriété 27.27 (Cas particulier de $\mathbb{R}^2$)

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique et d'une base orthonormée b. Soit A un point de $\mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul. Soit $\mathcal{D}$ la droite affine passant par A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$. La distance d'un point M quelconque à la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\mathrm{d}\left(M,\mathcal{D}\right)=\frac{\left|\det_b\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AM}\right)\right|}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

preuve:

Il suffit de remarquer que $\det_b\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AM}\right)$ est est une équation de la droite affine $\mathcal{D}$. Ou bien que si l'on note $\overrightarrow{n}$ le vecteur tel que la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{n})$ forme uen base orthonormale directe, alors $\dfrac{\left|\det_b(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AM})\right|}{\|\overrightarrow{u}\|}=\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM}$. On retrouve alors la formule de la propriété **27.24**. □

Propriété 27.28 (Cas particulier de $\mathbb{R}^3$)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et rapporté à un repère orthonormé. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$. Soit $d\in\mathbb{R}$. La distance du point M de coordonnées (x,y,z) au plan affine $\mathcal{P}$ d'équation $aX+bY+cZ+d=0$ est :

$$\mathrm{d}\left(M,\mathcal{P}\right)=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Propriété 27.29 (Cas particulier de $\mathbb{R}^3$)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et d'une base orthonormée b. Soit A un point de $\mathbb{R}^3$ et $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{P}$ le plan affine passant par A et dirigé par les vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. La distance d'un point M quelconque au plan $\mathcal{P}$ est :

$$\mathrm{d}\left(M,\mathcal{P}\right)=\frac{\left|\det_b\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{AM}\right)\right|}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|}.$$

preuve:

Il suffit de remarquer que $\det_b\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{AM}\right)$ est est une équation de la droite affine $\mathcal{D}$. On bien de remarquer que :

$$\begin{aligned}\det_b\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{AM}\right) &= \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{AM}\right]\\ &= \frac{\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}.\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|}.\end{aligned}$$

On retrouve alors la formule de la propriété **27.24**. □

Exercice 27.2

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et d'un repère orthonormé. Soient A et A' deux points de $\mathbb{R}^3$. Soient les droites affines $\mathcal{D}=(A,\overrightarrow{u})$ et $\mathcal{D}'=(A',\overrightarrow{v})$. On suppose que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

1) Démontrer qu'il existe une unique perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

2) Montrer qu'il existe deux points $H \in \mathcal{D}$ et $H' \in \mathcal{D}'$ tels que

$$\mathrm{d}(H, H') = \inf\left\{ \mathrm{d}(M, M') \;\middle|\; M \in \mathcal{D},\ \text{ et } M' \in \mathcal{D}' \right\}.$$

On appelle alors la distance $\mathrm{d}(H, H')$, distance entre les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, on la note $\mathrm{d}\left(\mathcal{D}, \mathcal{D}'\right)$.

3) Montrer que :

$$\mathrm{d}\left(\mathcal{D}, \mathcal{D}'\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AA'}\right]\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|}.$$

Chapitre 28 - Séries numériques

Le but des mathématiques n'est pas de démontrer des choses que tout le monde voit : il est de trouver des résultats riches, et, pour en être sûr, de les démontrer.
Laurent Schwartz.

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Définition et convergence

Définition 28.1 (Séries)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors appelée **série de terme général** u_n. On la note $\sum u_n$. La somme S_n est appelée la n-ème **somme partielle** de la série $\sum u_n$. On dit aussi parfois que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

✓ La notation $\sum u_n$ se lit « série de terme général u_n ».

✓ Parfois, la suite (u_n) n'est définie qu'à partir d'un certain rang N_0. Il arrive donc que l'on ne s'intéresse à la série $(S_n)_{n\geq n_0} = \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n\geq n_0}$.

✓ Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n, alors on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Autrement dit, toute suite peut-être vue comme la suite des sommes partielles d'une certaine série et à partir de la suite des sommes partielles on peut retrouver le terme général.

Définition 28.2 (Convergence d'une série, somme d'une série)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. On note $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
On dit que la série de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Si la série ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Lorsque la série de terme général u_n converge, on note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Cette quantité est appelée la **somme de la série** de terme général u_n.

✓ On peut employer la notation $\sum u_n$ quelle que soit la nature de la série, mais la notation $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'existe que si la série converge.

Définition 28.3 (Reste d'une série convergente.)

Soit $\sum u_n$ une série convergente de somme S_∞. On note S_n la somme partielle d'indice n. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n = S_n - S_\infty = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Cette quantité est appelé **reste d'ordre** n de la série de terme général u_n.

✓ La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes d'une série convergente converge vers 0.

Propriété 28.4 (CV et modif. d'un nb. fini de termes)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sont deux suites qui ne diffèrent qu'en au plus un nombre fini de termes alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

preuve:

Propriété 28.5 (CN mais non Suffisante de CV)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. Si la série de terme général u_n converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers zéro, la série de terme général u_n diverge, et l'on dit alors que la série de terme général u_n **diverge grossièrement**.

preuve:

✓ Attention ! Il existe des séries qui divergent mais dont le terme général tend vers 0.

Ptitexo: *Déterminer la nature (convergence ou divergence des séries suivantes) :*

$$\sum \frac{3^n}{7^{2n+1}}, \quad \sum (-1)^n, \quad \sum \frac{1}{n(n+1)}.$$

Exercice 28.1 **Série harmonique**

On appelle série harmonique la série de terme général $\frac{1}{n}$.
Montrer que la série harmonique diverge en commençant par observer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \geq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

1.2 Opérations sur les séries convergentes

Propriété 28.6 (Combinaisons linéaires de séries convergentes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$.
(−) Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la série $\sum u_n + \lambda v_n$ converge et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

(−) Si la série $\sum u_n$ diverge et si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n + v_n$ diverge.

preuve:

Ptitexo: *Exhiber des exemples prouvant qu'on ne peut rien dire a priori de la nature de la somme de deux séries divergentes.*

Propriété 28.7 (Convergence des séries de complexes)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ alors :
$\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum \mathcal{R}\mathrm{e}(u_n)$ et $\sum \mathcal{I}\mathrm{m}(u_n)$ convergent.

On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{R}\mathrm{e}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{I}\mathrm{m}(u_n).$$

1.3 Convergence absolue

Exercice 28.2 **Série harmonique alternée**

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. La série de terme général u_n est appelée série harmonique alternée.

1) Quelle est la nature de la série $\sum |u_n|$?

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

3) En déduire que la série de terme général u_n converge et déterminer sa somme.

Définition 28.8 (Convergence absolue d'une série)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que la série de terme général u_n **converge absolument** si la série de terme général $|u_n|$ converge.

Propriété 28.9 (Convergence absolue implique convergence)

Si une série converge absolument, alors elle converge.

✓ L'**Exercice 28.2** prouve qu'il n'y a pas de réciproque à ce théorème.

Exemple : Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{\sin(n)}{3^n}$

1.4 Lien suite série

Propriété 28.10 (Lien CV de suite/ CV de série)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum (u_{n+1}-u_n)$ sont de même nature.

preuve:

✓ Cette propriété est souvent utilisée pour étudier la nature de suites dont l'expression du terme général fait intervenir une expression du type $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

Le petit exercice qui suit illustre bien l'utilisation typique de cette propriété mais il est à faire après le théorème d'équivalence sur les séries à termes positifs.

Ptitexo: *Montrer qu'il existe une constante (usuellement notée γ) telle que* $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

2 Séries de référence

Propriété 28.11 (Séries géométriques et dérivées)

Soit q un nombre complexe.
La série de terme général q^n converge si et seulement si $|q| < 1$, et alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

et pour tout premier terme $PT \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=PT}^{+\infty} q^n = \frac{q^{PT}}{1-q}$.

La série de terme général nq^{n-1}(série géométrique dérivée première de raison q) converge si et seulement si $|q| < 1$ et a alors pour somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

La série de terme général $n(n-1)q^{n-2}$ (série géométrique dérivée seconde de raison q) converge si et seulement $|q| < 1$ et a alors pour somme :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

preuve:

Propriété 28.12 (Série exponentielle)

Pour tout $x \in \mathbb{C}$, la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

preuve:

Propriété 28.13 (Série de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est appelée **série de Riemann**.

La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

preuve:

✓ En particulier, pour $\alpha = 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{n}$, dite série harmonique, diverge.

3 Critères de convergence

L'objectif du paragraphe et d'établir un certain nombre de critères permettant d'établir la nature de certaines séries sans avoir à calculer leur somme.

3.1 Séries alternées

Définition 28.14 (Série alternée)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la série $\sum u_n$ est **alternée** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n| \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|.$$

Propriété 28.15 (Critère Spécial des Séries Alternées)

Soit $\sum u_n$ une série de réels tels que :

(−) la série $\sum u_n$ est alternée,

(−) la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
(−) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
On a alors :
(−) La série $\sum u_n$ converge.

(−) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme de la série est encadrée par deux termes consécutifs de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n.
(−) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_{n+1}|.$$

preuve:

Quitte à utiliser la suite $-u$, supposons sans perte de généralité que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n|.$$

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n.

On constate facilement que la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$. Ainsi, les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles adjacentes. Ce qui prouve qu'elles convergent vers une même limite S_∞. Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S_∞. Autrement dit, la série $\sum u_n$ converge.

On a, de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+1} \leq S_\infty \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}. (*)$$

Donc la somme de la série est bien encadrée par deux termes consécutifs de la suite.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} \leq 0$ et $S_\infty - S_{2n} \leq 0$, donc $\sum\limits_{k=2n+1}^{+\infty} u_k$ a bien le signe de u_{2n+1}.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} \geq 0$ et $S_\infty - S_{2n+1} \geq 0$, donc $\displaystyle\sum_{k=2n+2}^{+\infty} u_k$ a bien le signe de u_{2n+2}.

Donc, quelle que soit la parité de n, le reste $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1}.

Enfin, en utilisant $(*)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k\right| = S_{2n} - S_\infty \leq S_{2n} - S_{2n+1} = |u_{2n+1}|.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sum_{k=2n}^{+\infty} u_k\right| = S_\infty - S_{2n-1} \leq S_{2n} - S_{2n-1} = |u_{2n}|.$$

On en déduit bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_{n+1}|.$$

✓ On peut évidemment adapter ce théorème pour le cas où les hypothèses ne seraient vérifiées qu'à partir d'un certain rang.

Ptitexo: *Étudier la convergence des séries :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

3.2 Critères à base de majoration

Propriété 28.16 (Par majoration des sommes partielles)

La série de terme général u_n à *termes positifs* est convergente si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est majorée.
La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs divergente tend vers $+\infty$.

preuve:

Ptitexo: *Exhiber un exemple prouvant qu'on ne peut, dans ce théorème, se passer de l'hypothèse de la positivité des termes de la suite.*

Exercice 28.3 — Un exemple typique de transformation d'Abel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est bornée. On cherche à étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{u_k}{k}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - S_0 + \frac{S_n}{n}.$$

(Cette transformation s'appelle une transformation d'Abel).

2) Montrer que la suite des sommes partielles de la série $\sum_k |S_k| \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.
est bornée.

3) Conclure.

Propriété 28.17 (Th. de comp. pour les séries à termes positifs)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels.
On suppose qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge.
Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge.

preuve:

> Ptitexo: *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \in \mathbb{R}$. Discuter suivant la valeur de l de la nature de la série de terme général u_n.*

Exercice 28.4 — **Théorème de point fixe**

Soit A une partie fermée et non vide de $\mathbb{C}$. Soit $f : A \longrightarrow A$ une application contractante. C'est-à-dire telle qu'il existe une constante $K \in [0, 1[$ telle que :

$$\forall (x, y) \in A^2, |f(x) - f(y)| \leq K |x - y|.$$

Soit $x_0 \in A$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - x_n| \leq K^n |x_1 - x_0|.$$

2) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que f admet un point fixe.

Exercice 28.5 — **Comparaison logarithmique**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

1) Montrer que la convergence de la série de terme général v_n implique la convergence de la série de terme général u_n.

2) Montrer que la divergence de la série de terme général u_n implique la divergence de la série de terme général v_n.

Théorème 28.18 (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série de complexes non nuls.

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.
$(-)$ Si $l > 1$, alors la série de terme général u_n diverge grossièrement.
$(-)$ Si $l < 1$, alors la série de terme général u_n est absolument convergente.
$(-)$ Si $l = 1$, on ne peut a priori rien dire de la nature de la série de terme général u_n.

preuve:

> Ptitexo: *Quelles sont les valeurs du réel x pour lesquelles la série $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ converge ?*
>
> Ptitexo: *Soit $z \in \mathbb{C}$. Retrouver la convergence de la série exponentielle $\sum \dfrac{z^n}{n!}$.*
>
> Ptitexo: *Étudier la convergence de la série : $\sum \dfrac{n!}{n^n}$. (On évitera de recourir à la formule de Stirling).*

Exercice 28.6 **Rayon de convergence d'une série entière**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On cherche à étudier la série de terme général $a_n x^n$ lorsque $x \in \mathbb{C}$.

1) Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que $\forall x \in]-R, R[$, la série $\sum a_n x^n$ converge. *On dit alors que R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.*

2) On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$. Discuter de la valeur de R en fonction de la valeur de ℓ.

3) On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n (z_0)^n$ converge.
Montrer que $R \leq |z_0|$.

Propriété 28.19 (Théorème de domination)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.
On suppose que $u_n = O(v_n)$.

Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n est absolument convergente donc convergente.

preuve:

Propriété 28.20 (Th. d'équivalence pour les séries à termes positifs)

On considère les séries de termes généraux u_n et v_n positifs.
Si $u_n \sim v_n$ alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

preuve:

✓ Si la série de terme général u_n est négative, alors on étudie la série de terme général $-u_n$ pour pouvoir utiliser les théorèmes précédents.

✓ Si la série n'est pas de signe constant, on ne peut pas du tout utiliser ce théorème. Ce fait est illustré par le petit exo qui suit.

Ptitexo: *Montrer que la série* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *converge.*
Démontrer que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
Étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
Qu'observe-t-on ?

Ptitexo: *Montrer que la suite* $\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers un réel.*

4 Comparaisons séries-intégrales

Lemme 28.21 (Comparaisons séries-intégrales)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et monotone.
$(-)$ Si la fonction f est croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et}$$

$$f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$(-)$ Si la fonction f est décroissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et}$$

$$f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=0}^{n} f(k) \geq \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

preuve:

✓ Si la fonction f est monotone, l'existence d'une limite lorsque x tend vers $+\infty$ pour la quantité $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ équivaut à la convergence de la série de terme général $f(k)$.

✓ Il est plus important de savoir retrouver ces résultats que de les apprendre par coeur ! D'ailleurs, il sera parfois nécessaire de les retrouver lorsque f est uniquement définie sur un intervalle de la forme $[N, +\infty[$, avec $N \in \mathbb{N}$.

Exercice 28.7

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

2) Déterminer pour $0 < \alpha < 1$, un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 28.8 **Séries de Bertrand**

On souhaite étudier, suivant la valeur de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$

1) Démontrer que si $\alpha > 1$, alors la série converge.

2) Traiter le cas $\alpha < 1$.

3) On suppose que $\alpha = 1$. On pose, pour $n \in [\![2, +\infty[\![$, $T_n = \displaystyle\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. Calculer T_n en fonction de n. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Théorème 28.22 (cas particulier)

Si f est une fonction continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ converge.

preuve:

Plaçons nous dans les hypothèses du théorème et notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t) - f(n)\,\mathrm{d}t$.

La décroissance de f, donne alors :

$$0 \leq w_n \leq \int_{n-1}^{n} f(n-1) - f(n)\,\mathrm{d}t = f(n-1) - f(n). \quad (*)$$

La fonction f est décroissante et positive, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite en $+\infty$. Donc, la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite en $+\infty$, ce qui assure la convergence la série de terme général $f(n-1) - f(n)$.

L'encadrement $(*)$ et le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs impliquent alors que $\sum w_n$ converge.

5 Sommations de relations de comparaisons

Propriété 28.23 (Comparaison des restes de séries CV)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang. On suppose que $\sum v_n$ converge.

(−) Si $u_n = o\left(v_n\right)$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

(−) Si $u_n = O\left(v_n\right)$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

(−) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

preuve:

Ptitexo: *Pour* $\alpha > 1$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note :* $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Montrer que R_n *est équivalent, en* $+\infty$, *à* $\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Propriété 28.24 (Comparaison des sommes partielles de séries CV)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang. On suppose que $\sum v_n$ diverge.

(−) Si $u_n = o\left(v_n\right)$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

(−) Si $u_n = O\left(v_n\right)$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

(−) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ est divergente et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Exercice 28.9 **Césaro**

Redémontrer le théorème de Césaro.

Propriété 28.25 (Développ. asymptotique de la série harmonique)

On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

6 Développement décimal propre d'un réel.

Propriété 28.26 (Développement décimal)

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Il existe un unique $p \in \mathbb{Z}$ et une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[\![0, 9]\!]$ non stationnaire égale à 9 et de premier terme non nul tels que :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 10^{p-n}.$$

preuve:

✓ Si $x \in \mathbb{R}_*^+$. Le développement décimal de x est périodique si et seulement si x est rationnel.
Exemple : $\frac{3}{13} = 0,230769230...$, la suite des chiffres $2, 3, 0, 7, 6, 9$ se répète indéfiniment.

Chapitre 29 - Dénombrement

En ces jours-là, parut un édit de l'empereur Auguste, ordonnant de recenser toute la terre. Ce premier recensement eut lieu lorsque Quirinius était gouverneur de Syrie.

1 Cardinal d'un ensemble fini

1.1 Définition

Définition 29.1 (Ensemble fini, cardinal)

Un ensemble A est dit **fini** si $A = \emptyset$ ou s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection φ de A vers $[\![1, n]\!]$. On admet que dans ce cas l'entier n est unique. Ce nombre est appelé le **cardinal** de A. On le note $\mathrm{card}\,(A)$ ou $|A|$ ou encore $\#A$. Par convention, $\mathrm{card}\,(\emptyset) = 0$.

Exemples :

1. $\mathrm{card}\,([\![p, q]\!]) = q - p + 1$, lorsque $p < q$ et $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.

✓ Si E est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe alors une bijection x de $[\![1, n]\!]$ vers E. Donc $E = \{x(1), \ldots, x(n)\}$. On peut donc noter $x_1, \ldots, x_n$ les éléments de E.

Propriété 29.2 (Bijection et égalité des cardinaux)

Deux ensembles finis ont le même cardinal si et seulement si ils sont en bijection.

preuve:

1.2 Sous-ensembles d'un ensemble fini

Propriété 29.3 (Cardinal de $E \setminus \{a\}$)

Soit E est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Si $a \in E$, alors $E \setminus \{a\}$ est un ensemble fini de cardinal $n - 1$.

preuve:

Ptitexo: *En déduire que $\mathbb{N}$ n'est pas de cardinal fini.*

1.3 Cardinal d'une réunion

Propriété 29.4 (Cardinal d'une réunion disjointe)

Soient A et B deux ensembles finis et disjoints. La réunion $A \cup B$ est finie et $\mathrm{card}\,(A \cup B) = \mathrm{card}\,(A) + \mathrm{card}\,(B)$.

preuve :

Corollaire 29.5 (Cardinal du complémentaire)

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E dont on note $\overline{A}$ le complémentaire dans E. On a $\text{card}\left(\overline{A}\right) = \text{card}\,(E) - \text{card}\,(A)$.

Propriété 29.6 (sous ensemble d'un ensemble fini)

Soit E un ensemble fini. Soit $F \subset E$ un sous-ensemble de E.
$(-)$ F est fini et $\text{card}\,(F) \leq \text{card}\,(E)$.
$(-)$ $\text{card}\,(E) = \text{card}\,(F) \iff F = E$.

preuve :

Corollaire 29.7 (Réunion d'ensembles 2 à 2 disjoints)

Soient $n \in \mathbb{N}$. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont n ensembles deux à deux disjoints, alors leur réunion est de cardinal fini et :

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}\,(A_i)\,.$$

preuve :

✓ Ce résultat s'appelle parfois le « **lemme des bergers** » car il décrit, si tous les A_i ont le même cardinal, le cas de n bergers gardant chacun p moutons (il y en a donc en tout np moutons np).

Propriété 29.8 (Cardinal d'une réunion)

Soient A et B deux ensembles finis. La réunion $A \cup B$ est finie et l'on a :

$$\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) - \text{card}\,(A \cap B)\,.$$

preuve :

Ptitexo: *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient n ensembles finis $A_1, \ldots, A_n$. Montrer que :*

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \text{card}\,(A_i)\,.$$

Propriété 29.9 (Formule du Crible)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ une liste de n ensembles finis. Alors la réunion $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est fini et l'on a :

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \text{card}\,(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})\,.$$

preuve :

1.4 Cardinal d'un produit cartésien

Propriété 29.10 (Cardinal d'un produit cartésien)

Soient A et B deux ensembles finis. Le produit cartésien $A \times B$ est fini et $\text{card}\,(A \times B) = \text{card}\,(A) \times \text{card}\,(B)$.

preuve :

Corollaire 29.11 (Généralisation)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient p ensembles A_1, ..., A_p finis. Le produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_p$ est fini et l'on a :

$$\text{card}\,(A_1 \times \cdots \times A_p) = \prod_{i=1}^{p} \text{card}\,(A_i).$$

Corollaire 29.12 (Cas particulier)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit A un ensemble de cardinal fini égal à n. Le produit cartésien A^p est fini et l'on a :

$$\text{card}\,(A^p) = n^p.$$

✓ Cette propriété se reformule en disant que le nombre de p -listes ou p-uplets d'un ensemble fini à n éléments est n^p.

Ptitexo: *Combien y-a-t-il de numéros de téléphone commençant par* 06 *?*

2 Applications entre ensembles finis

2.1 Nombre d'applications

Propriété 29.13 (Nombre d'applications entre deux ens. finis)

Soient E et F deux ensembles finis non vides. L'ensemble F^E des applications de E vers F est un ensemble de cardinal fini et l'on a :

$$\text{card}\,\left(F^E\right) = (\text{card}\,(F))^{\text{card}\,(E)}.$$

preuve:

Soit $p = \text{card}\,(E)$. Il existe donc une bijection a de $[\![1, p]\!]$ vers E. On observe que l'application :

$$\Phi : F^E \longrightarrow F^p,\ f \longmapsto (f\,(a(1))\,, f\,(a(2))\,, \ldots, f(a(p)))\,.$$

est bijective. Le résultat en découle immédiatement. $\square$

Ptitexo: *De combien de manières peut-on ranger p chaussettes deux à deux distinctes dans n tiroirs ?*

Ptitexo: *Combien y-a-t-il de surjections de* $[\![1, n]\!]$ *vers* $[\![1, 3]\!]$ *?*

2.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité entre ensembles finis

Lemme 29.14 (Cardinal de l'image d'une injection)

Soient E et F deux ensembles non vides. On suppose que E est fini.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application injective de E vers F. Alors l'ensemble $f(E)$ est fini et $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(f(E))$.

preuve:

Il suffit de remarquer que l'application $g : E \longrightarrow f(E),\ x \longmapsto f(x)$ est une bijection de E vers $f(E)$. $\square$

Propriété 29.15 (Caractérisation des injections)

Soient E et F deux ensembles non vides. On suppose que E est fini. Soit $f \in F^E$.

i) L'ensemble $f(E)$ est fini et $\operatorname{card}(f(E)) \leq \operatorname{card}(E)$.
ii) L'application f est injective si et seulement si $\operatorname{card}(f(E)) = \operatorname{card}(E)$.

preuve:

Par récurrence sur le cardinal de E.
$\cdots$ $\square$

Propriété 29.16 (Cardinal d'une image)

Soient E et F deux ensembles finis et non vides. Soit $f \in F^E$.

i) L'ensemble $f(E)$ est fini et $\operatorname{card}(f(E)) \leq \operatorname{card}(F)$.
ii) L'application f est surjective si et seulement si $\operatorname{card}(f(E)) = \operatorname{card}(F)$.

preuve :

Propriété 29.17 (Caractérisation des bijections)

Soient E et F deux ensembles finis, non vides et de même cardinal. Soit $f \in F^E$.
Alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}.$$

preuve :

2.3 Nombre d'injections

Propriété 29.18 (Arrangements)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit F un ensemble fini de cardinal n. Alors, le nombre de p-listes d'éléments deux à deux distincts de F est le nombre noté A_n^p défini par :

$$A_n^p = \left| \begin{array}{ll} n(n-1)\times\cdots\times(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si} \quad p \leq n \\ 0 & \text{si} \quad p > n \end{array} \right. .$$

preuve:

Par récurrence sur p. □

✓ Une p-listes d'éléments deux à deux distincts de F est aussi appelée un p-arrangement. Mais depuis Zebda y-a pas d'arrangement.

Corollaire 29.19 (Nombre d'injections)

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. Le nombre d'injections de E vers F est A_n^p.

preuve:

Soit $p = \operatorname{card}(E)$. Il existe donc une bijection a de $[\![1,p]\!]$ vers E. L'application :

$$\Phi : F^E \longrightarrow F^p,\ f \longmapsto (f(a(1)), f(a(2)), \ldots, f(a(p))).$$

définie plus haut, induit une bijection de l'ensemble des injections de E vers F vers l'ensemble des p-listes d'éléments deux à deux distincts de F. □

2.4 Nombre de permutations

Propriété 29.20 (Nombre de bijections/ permutations)

Le nombre de permutations d'un ensemble fini non vide E de cardinal n est $n!$

preuve :

Exercice 29.1

Soient A et B deux ensembles finis. On note $n = \operatorname{card}(A)$ et $p = \operatorname{card}(B)$. On note S_n^p le nombre de surjections de A vers B.

1) Montrer que si $1 \leq p \leq n$, alors :

$$S_n^p = p\left(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p\right).$$

2) En déduire S_n^p pour $(n,p) \in [\![1,4]\!]^2$.

3) Écrire une fonction `Python` de calcul de S_n^p.

3 Parties et sous-parties

3.1 Du nombres de parties

Propriété 29.21 (Nombre de parties)

Soit E un ensemble fini de cardinal n. On a $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

preuve:

On considère l'application :

$$\Phi : E \longrightarrow \{0,1\}^E\,,\ A \longmapsto 1_A$$

qui à une partie associe sa fonction caractéristique. Cette application est bijective.
On sait que $\operatorname{card}\left(\{0,1\}^E\right) = 2^{\operatorname{card}(E)}$.
Le résultat en découle immédiatement. $\square$

Propriété 29.22 (Nombre de mots)

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$. Le nombre de mots de n lettres comportant exactement p lettres S et $n-p$ lettres E est $\begin{pmatrix} n \\ \\ p \end{pmatrix}$.

preuve :

Propriété 29.23 (Nombre de parties à p éléments)

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\begin{pmatrix} n \\ \\ p \end{pmatrix}$.

preuve:

Plaçons-nous dans le cas où $0 \leq p \leq n$. (Les autres cas étant immédiats). Soit Φ l'application qui à une p-liste $(a_1, \ldots, a_p)$ d'éléments distincts associe l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_p\}$. Cette application est surjective et chaque partie de cardinal p de E admet exactement $p!$ antécédents.
On sait qu'il y a A_n^p listes de p éléments deux à deux distincts pris dans E.
Donc le nombre de parties à p-éléments est : $\dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. $\square$

✓ Cela implique que le nombre de p listes $(i_1, \ldots, i_p)$ d'éléments de $[\![1, n]\!]$ tels que $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$ est $\begin{pmatrix} n \\ \\ p \end{pmatrix}$.

Ptitexo: *Combien y-a-t-il d'anagrammes de ALIBABABABA ?*

Exercice 29.2

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

1) Combien y-a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$?

2) Combien y-a-t-il d'applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$?

3.2 Coefficients binomiaux et sommes avec coefficients binomiaux

3.2.1 Propriétés des coefficients binomiaux

Propriété 29.24 (Propriétés des coefficients binomiaux)

Soient p et n deux entiers.

(−) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$.

(−) Si $p \leq n$, alors $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix}$.

(−) Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, alors $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$.

(−) Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $p\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$.

Ptitexo: *Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soient k et p deux entiers tels que : $0 \leq k \leq p \leq n$.*

1. *En dénombrant de deux manières le nombre de couples (A, B) de parties de l'ensemble E, telles que* $\operatorname{card}(A) = k$, $\operatorname{card}(B) = p$ *et $A \subset B$. Montrer que :*

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-k \\ p-k \end{pmatrix}.$$

2. *Que donne cette formule dans le cas particulier $k = 1$?*

3.2.2 Sommes avec des coefficients binomiaux

Propriété 29.25 (A connaître !)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(p,m) \in \mathbb{N}^2$. Soient a et b deux nombres complexes.

(−) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$. (Formule du binôme).

(−) $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.(Formule sommatoire de Pascal).

(−) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

(−) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k}\binom{p}{n-k} = \binom{m+p}{n}$. (Formule de Van der Monde).

(−) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Ptitexo: *Soit E un ensemble ordonné de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Combien y-a-t-il de parties de E ?*
2. *Combien y-a-t-il de parties de cardinal pair ?*
3. *Combien y-a-t-il de parties de cardinal impair ?*
4. *Combien y-a-t-il de couples $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que :*
   (a) *A et B quelconques ?*
   (b) *$A \subset B$.*
   (c) $\operatorname{card}(A \bigcap B) = k$
   (d) $\min(A) = \min(B)$.

Exercice 29.3

1) Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Combien y-a-t-il de chemins partant du point de coordonnées $(0,0)$ et allant vers le point de coordonnées (a,b) et ne comportant que des déplacements d'une unité vers le haut ou d'une unité vers la droite ?

2) En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, le nombre de solutions de l'équation :

$$x_1 + \cdots + x_n = p.$$

d'inconnue $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^2$.

3) En déduire le nombre de solutions de l'équation :

$$x_1 + \cdots + x_n = p.$$

Les inconnues x_1, ..., x_n étant des éléments de $\mathbb{N}^*$.

4) Combien y-a-t-il de manières de choisir p objets parmi n sans ordre et avec répétition possible dans un ensemble à n éléments ?

5) On doit placer 10 boules indiscernables au toucher dans 3 boîtes A, B et C. De combien de manières peut-on placer ces boules ?

Tableau bilan :
Nombre de choix de k éléments dans un ensemble à n éléments :

	Avec répétition possible	Sans répétition
avec ordre	n^k	pour $k \leq n$: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
sans ordre	$\begin{pmatrix} n+k-1 \\ \\ k \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n \\ \\ k \end{pmatrix}$

Chapitre 30 - Espaces probabilisés

Il y a tellement de gens qui trouvent à travers le monde la seule femme qu'il puissent aimer, que l'énorme fréquence de ces rencontres me rend sceptique, moi qui ai un certain respect du calcul des probabilités. Tristan Bernard.

1 Préliminaires ensemblistes

Propriété 30.1 (Transfo. en réunion disjointe)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties d'un ensemble Ω.

Posons, $\forall n \in \mathbb{N}^*, A'_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right)$ et $A'_0 = A_0$.

Alors, la famille $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de parties deux à deux disjointes, et l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \bigcup_{i=0}^{n} A_i = \bigcup_{i=0}^{n} A'_i.$$

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i=0}^{+\infty} A'_i.$$

preuve :

✓ Cette propriété permet de récrire toute réunion de parties comme une réunion de parties deux à deux disjointes.

Propriété 30.2 (Transfo. en inter. ou réunion monotone)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties d'un ensemble Ω. Soit $N \in \mathbb{N}$.

($-$) La suite $\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante (au sens de l'inclusion d'ensembles).

($-$) La suite $\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (au sens de l'inclusion d'ensembles).

$$\bigcup_{n=0}^{N} A_n = \bigcup_{n=0}^{N} \left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right).$$

$$\bigcap_{n=0}^{N} A_n = \bigcap_{n=0}^{N} \left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right).$$

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right).$$

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right).$$

preuve :

> ✓ Cette propriété permet de récrire toute réunion de parties d'un même ensemble comme une réunion d'une suite croissante d'ensembles.

1.1 Espaces probabilisés

2 Expérience aléatoire univers

On appelle **épreuve** ou **expérience aléatoire** toute expérience dont le résultat dépend du hasard.
L'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire est appelé **univers**.
On appelle **éventualité** un élément ω de l'ensemble Ω.

Exemples :

1. On lance deux dés tétraédriques, un vert et un rouge, on note les numéros obtenus sur chacun des faces contre le sol de ces dés. Les résultats possibles sont $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),$ $(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)$. L'univers Ω est donc $[\![1,4]\!]^2$. Le couple $(1,3)$ est donc une éventualité. On peut s'intéresser à l'obtention d'une partie de cette univers, par exemple, au fait que « le premier dé donne un numéro plus petit que le second ». Cela correspond à la partie
$A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$.
Une telle partie de Ω s'appellera bientôt un événement.

2. Modèle d'Ehrenfest. Une boîte contient N molécules de gaz. Ces molécules de gaz, peuvent occuper la partie gauche du compartiment ou bien la partie droite du compartiment. Les molécules sont indifférenciées et l'on s'intéresse au nombre de boules dans l'urne de gauche. L'univers est alors $[\![1,N]\!]$.

3. Un groupe de n électeurs cherche à élire un BDE composé de p personnes. (On considère que chaque électeur est susceptible d'être élu.
Si le BDE est un conseil de sages, ayant tous le même rôle, l'univers est l'ensemble des parties à p éléments de l' ensemble à n éléments formé par les électeurs. (C'est un ensemble de cardinal $\begin{pmatrix} n \\ \\ p \end{pmatrix}$).
Si l'on considère que les électeurs doivent aussi assigner un ministère distinct à chacun des membres du BDE. Alors l'univers est l'ensemble des p-listes de p éléments distincts pris dans l'ensemble des électeurs.

Dans le cas où <u>l'univers Ω est fini</u>, on appelle **événement** toute partie de $\mathcal{P}(\Omega)$.
On peut alors reformuler en langage probabiliste ce que nous avons l'habitude de faire en langage ensembliste.

Langage ensembliste	**Langage probabiliste**
Un résultat d'expérience	ω où $\omega \in \Omega$
Un événement élémentaire	Un singleton $\{\omega\}$ de Ω
L'éventualité ω réalise A	$\omega \in A$
Événement certain ou sûr	Ω
Événement impossible	$\emptyset$
Événement « non A »	$\overline{A} = \Omega \setminus A$
L'éventualité ω ne réalise pas A	$\omega \in \overline{A}$
Événement « A ou B »	$A \cup B$
L'éventualité ω réalise A ou B	$\omega \in A \cup B$
Événement « A et B »	$A \cap B$
L'éventualité ω réalise A et B	$\omega \in A \cap B$
La réalisation de A implique celle de B	$A \subset B$.

Dans le cas, où l'univers est infini la notion d'événement doit être définie avec plus de soin. On va définir un événement dans la perspective de définir ensuite sa probabilité.
Exemples :

1. On choisit un point au hasard dans $[0, 1]$. Dans ce cas, $\Omega = [0, 1]$.
2. On réitère un lancer de pièce Pile ou Face jusqu'à obtenir le premier Pile. Dans ce cas, on doit considérer que dans Ω, il y a l'éventualité où l'on obtient une infinité de faces.

2.1 Espace probabilisable

Définition 30.3 (σ-algèbre, tribu, événement)

Soit Ω un ensemble et soit τ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que τ est une σ-**algèbre de Boole** ou une **tribu** si :

i) $\Omega \in \tau$.
ii) $\forall A \in \tau$, $\overline{A} \in \tau$. (Stabilité par passage au complémentaire).
iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tau^{\mathbb{N}}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \tau$. (Stabilité par réunion dénombrable).

On dit alors que le couple (Ω, τ) est un **espace probabilisable**. On appelle alors **événement** une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui appartient à τ.

✓ Le fait d'être ou ne pas un être un événement dépend donc de la tribu considérée.

✓ En utilisant la stabilité par passage au complémentaire, on observe que si (Ω, τ) est un espace probabilisable, alors $\emptyset \in \tau$, et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tau^{\mathbb{N}}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \tau$.

✓ En utilisant, le fait que $\Omega \in \tau$, on peut remarquer une tribu est nécessairement stable par réunion et intersection finie.

Exemples :

1. Toute σ-algèbre sur Ω contient au moins $\emptyset$ et Ω. De plus, $\{\Omega, \emptyset\}$ est une tribu.
2. Quelque soit l'ensemble Ω, le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable.
3. Si A est un sous-ensemble de Ω, alors $\left\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ est une σ-algèbre.

Exercice 30.1

Soit Ω un ensemble.

1) a) Montrer que l'intersection de deux tribus de Ω est encore une tribu.

b) Montrer qu'une intersection au plus dénombrable de tribus est une tribu.

c) Soit $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$, montrer qu'il existe une unique plus petite tribu contenant à A au sens de l'inclusion. On la note $\tau(A)$ et on l'appelle tribu engendrée par A au sens de l'inclusion.

2) Quelle est la tribu engendrée par tous les singletons de $\mathbb{N}$?

3) On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu engendrée par tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont appelées boréliens.

a) Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient tous les intervalles fermés (et donc tous les singletons).

b) En déduire que toute partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ est un borélien.

4) Montrer que si $A \subset B$, alors $\tau(A) \subset \tau(B)$.

La définition suivante servira à mettre en forme rigoureuse les raisonnements probabilistes par disjonction de cas :

Définition 30.4 (Système complet d'événements)

Soit (Ω, τ) un espace probabilisable. La famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est appelée un **système complet d'événements** si :
$(-)$ I est une partie de $\mathbb{N}$,
$(-)$ $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$,
$(-)$ Pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de I, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Exemples :

1. Soit (Ω, τ) un espace probabilisable. Si por tout $\omega \in \Omega$, le singleton $\{\omega\}$ est un événement, si Ω est un ensemble au plus dénombrable, alors la réunion des éventualités de Ω est un système complet d'événements. Si Ω n'est pas dénombrable la réunion de ses singletons n'est pas un système complet d'événements.

2. Si l'on revient sur le lancer des deux dés tréadriques. Alors $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable. Posons

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\} \\ V_2 &= \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\} \\ V_3 &= \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\} \\ V_4 &= \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}\,. \end{aligned}$$

Alors $(V_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ est un système complet d'événements. (Cela revient à regrouper les éventualités suivant le résultat du premier dé).

3. Si l'on considère l'espace probabilisé $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, alors $(2\mathbb{N}, \mathbb{N}\setminus(2\mathbb{N}))$ est un système complet d'événements.

2.2 Probabilité

2.2.1 Définition

Définition 30.5 (Probabilité, espace probabilisé)

Soit (Ω, τ) un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur (Ω, τ) une fonction $\mathrm{p} : \tau \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

i) $\mathrm{p}(\Omega) = 1$.

ii) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ d'événements de τ deux à deux incompatibles, la série $\sum \mathrm{p}(A_n)$ converge et :

$$\mathrm{p}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{p}(A_n)\,.$$

(On appelle cette propriété : « **propriété de σ-additivité** ».).

Le triplet $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ est appelé **espace probabilisé**.

✓ On admettra que pour définir p il suffit de définir sa restriction à une partie P de τ telle que $\mathcal{T}(A) = \tau$.

Propriété 30.6 (probabilité de l'ensemble vide)

Si $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ est un espace probabilisé, alors $\mathrm{p}(\emptyset) = 0$.

preuve:

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \emptyset$. Alors la propriété de σ-additivité impose que la série de terme général constant égal à $\mathrm{p}(\emptyset)$ converge. Cela implique que $\mathrm{p}(\emptyset) = 0$. □

Définition 30.7 (Événement négligeable)

On dit qu'un événement $A \in \tau$ est **négligeable** si $\mathrm{p}(A) = 0$.

✓ Le vide n'est pas le seul événement de probabilité nulle. Par exemple, nous verrons que dans une série de lancers de pièces l'événement obtenir PFPFPFPFPFPF... est différent du vide, il est pourtant de probabilité nulle.

Propriété 30.8 (Additivité finie)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé.
$(-)$ $\forall (A,B) \in \tau^2, A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B)$.
$(-)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est une famille de n éléments de τ deux à deux disjoints, alors :

$$\mathrm{p}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}\left(A_i\right).$$

✓ Si l'espace probabilisable est $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ et si Ω est fini, la propriété de σ-additivité est équivalente à l'additivité simple. Mais cela n'est plus vrai si l'univers est infini.

2.2.2 Règles de calcul

Propriété 30.9 (Calculs de probabilités simples)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements.
$(-)$ $\mathrm{p}(A \setminus B) = \mathrm{p}(A) - \mathrm{p}(A \cap B)$.
$(-)$ $\mathrm{p}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathrm{p}(A)$.
$(-)$ $\mathrm{p}(A) \in [0,1]$.
$(-)$ $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{p}(A) \leq \mathrm{p}(B)$.

Exemples :

1. Si Ω est de cardinal fini égal à $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\tau = \mathcal{P}(\Omega)$ est la tribu discrète. On peut alors donner à chaque événement élémentaire la même probabilité qui est alors nécessairement égale à $\frac{1}{n}$. Dès lors, quel que soit $A \in \tau$:
$$\mathrm{p}(A) = \sum_{x \in A} \mathrm{p}\left(\{x\}\right) = \frac{\mathrm{card}\,(A)}{\mathrm{card}\,(\Omega)}.$$
On dit alors que Ω est muni de la **probabilité uniforme**. Cela permet par exemple de simuler le lancer d'un dé parfait ou le choix d'un numéro au hasard et de manière uniforme dans $[\![1, n]\!]$.
2. On revient au dés tétraédriques.
On peut considérer que chaque couple de numéros a la même probabilité d'être tirée.

Propriété 30.10 (somme des probabilités)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé.
$(-)$ Pour tout système complet d'événements $(A_1, \ldots, A_n)$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}\left(A_i\right) = 1.$$

$(-)$ Si $\left(A_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série de terme général $\mathrm{p}\left(A_n\right)$ converge et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{p}\left(A_n\right) = 1.$$

preuve :

Propriété 30.11 (Probabilités totales)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit I une partie de $\mathbb{N}$. Soit $(E_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements. Pour tout événement $A \in \tau$, on a l'égalité :

$$\mathrm{p}(A) = \sum_{i\in I} \mathrm{p}\left(A \cap E_i\right).$$

preuve :

Exemple :

1. On revient aux dés tétraédriques. On note A l'événement la somme des numéros des deux dés fait 6. Puisque V_1, V_2, V_3, V_4 est un système complet d'événements, on a : $\mathrm{p}(A) = \mathrm{p}\left(A \cap V_1\right)+\mathrm{p}\left(A \cap V_2\right)+\mathrm{p}\left(A \cap V_3\right)+\mathrm{p}\left(A \cap V_4\right)$. Comme $A \cap V_1 = \emptyset$, on en déduit que :

$$\mathrm{p}(A) = \mathrm{p}\left(A \cap V_2\right) + \mathrm{p}\left(A \cap V_3\right) + \mathrm{p}\left(A \cap V_4\right).$$

Propriété 30.12 (Probabilité d'une réunion)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements. On a :

$$\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B).$$

preuve :

Propriété 30.13 (Probabilité d'une réunion finie)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ une famille finie d'événements.

(−) $\mathrm{p}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}\left(E_i\right)$.

(−) $\mathrm{p}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} \mathrm{p}\left(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}\right)$.

preuve :

2.2.3 Probabilité sur un ensemble dénombrable ou fini

Propriété 30.14 (Probabilité d'un évènement)

Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable. Soit I une partie de $\mathbb{N}$, de sorte que les éléments Ω soient notés $(\omega_i)_{i\in I}$.
Si p est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, alors :

$$\sum_{i\in I} \mathrm{p}\left(\{\omega_i\}\right) = 1.$$

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{p}(A) = \sum_{i\in I, \omega_i\in A} \mathrm{p}\left(\{\omega_i\}\right).$$

preuve :

La propriété suivante fournit une réciproque à ce théorème :

Propriété 30.15 (Probabilité définie sur les singletons)

($-$) Soit Ω un ensemble fini. Soit I une partie de $\mathbb{N}$, de sorte que les éléments Ω soient notés $(\omega_i)_{i\in I}$. Soit $(p_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs de somme égale à 1. Alors il existe une unique probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, telle que

$$\forall i \in I, \mathrm{p}\left(\{\omega_i\}\right) = p_i.$$

Cette probabilité est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{p}(A) = \sum_{i\in I, \omega_i \in A} \mathrm{p}\left(\{\omega_i\}\right).$$

($-$) Soit Ω un ensemble fini dénombrable dont les éléments sont $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de réels positifs telle que $\sum p_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Alors il existe une unique probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{p}\left(\{\omega_n\}\right) = p_n.$$

Cette probabilité est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{p}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}, \omega_i \in A} \mathrm{p}\left(\{\omega_n\}\right).$$

preuve :

Définition 30.16 (négligeable, presque certain)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit $A \in \tau$ un événement.
($-$) On dit que A est **négligeable** si $\mathrm{p}(A) = 0$.
($-$) On dit que A est **quasi-certain** ou **presque certain** si $\mathrm{p}(A) = 1$.

Exemple : On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir le premier Pile. Les événements élémentaires sont donc les $\omega_n = (F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, P_n)$, et l'événement $\omega_0 = \ll$ la partie est infinie $\gg$. On pose donc $\Omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\tau = \mathcal{P}(\Omega)$. Il est donc naturel (en considérant les lancers identiques et indépendants de poser
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{p}\left(\omega_n\right) = p_n = q^{n-1}p$ et $\mathrm{p}(E) = p_0 = 0$. (où $p \in]0,1[$ représente la probabilité d'obtenir un Pile à un lancer donné et $q = 1 - p$)
Puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} = 1$, on a bien $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Il existe donc bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{p}\left(\omega_n\right) = p_n$.

Ptitexo: *Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $\left(\dfrac{\alpha}{(n+1)(n+2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définisse une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.*

2.2.4 Théorème de continuité monotone

Théorème 30.17 (Théorème de continuité monotone)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tau^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements.
$(-)$ Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{p}\left(A_n\right) = \mathrm{p}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

$(-)$ Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{p}\left(A_n\right) = \mathrm{p}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

preuve:

Posons, comme dans le préliminaire ensembliste :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, A'_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} A_j\right)$ et $A'_0 = A_0$. Les événements $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \bigcup_{i=0}^{n} A'_i = \bigcup_{i=0}^{n} A_i = A_n.$$

L'additivité finie implique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{p}\left(\bigcup_{i=0}^{n} A'_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{p}\left(A'_i\right) = \mathrm{p}(A_n) \quad (*).$$

La σ-additivité implique que la série de terme général $\mathrm{p}\left(A'_i\right)$ converge et :

$$\mathrm{p}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A'_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{p}\left(A'_i\right).$$

Donc d'après $(*)$:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{p}\left(A'_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{p}\left(A_n\right).$$

Réutilisons, alors, le préliminaire ensembliste, qui donne :

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} A'_i = \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i.$$

On obtient donc :

$$\mathrm{p}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{p}\left(A_n\right).$$

On obtient le résultat sur les intersections décroissantes par passage au complémentaire.
□

Corollaire 30.18 (Proba d'une inter. ou d'une réunion qqc.)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tau^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On a :

$$\mathrm{p}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{p}\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right).$$

$$\mathrm{p}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{p}\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right).$$

preuve:

On utilise les préliminaires pour se ramener à une réunion d'une suite croissante d'événements, on conclut alors par théorème de la limite monotone :

$$\begin{aligned}\mathrm{p}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) &= \mathrm{p}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathrm{p}\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right).\end{aligned}$$

□

Corollaire 30.19 (Sous-additivité)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tau^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On a dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\mathrm{p}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{p}\left(A_n\right).$$

preuve : *On utilise le corollaire précédent puis la sous-additivité finie :*

$$\begin{aligned}\mathrm{p}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) &= \mathrm{p}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathrm{p}\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right).\\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathrm{p}\left(A_i\right)\\ &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{p}\left(A_i\right).\end{aligned}$$

Exercice 30.2

Montrer qu'une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Exercice 30.3 **Borel-Cantelli**

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, on note :

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right).$$

1) Justifier que limsup A_n est un événement. Donner un sens concret à cet événement.

2) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Montrer que :

$$\sum \mathrm{p}\left(A_n\right) \mathrm{CV} \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\left(\text{limsup } A_n\right)=0.$$

---

3 Probabilités conditionnelles

Exemple : On lance deux dés cubiques non pipés. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 sachant que la somme des faces est supérieure ou égale à 10 ?

Théorème 30.20 (Définition d'une probabilité conditionnelle)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé et $A \in \tau$ un événement vérifiant $\mathrm{p}(A)>0$. L'application :

$$\mathrm{p}_A : \tau \longrightarrow [0,1],\ E \longmapsto \frac{\mathrm{p}(E\cap A)}{\mathrm{p}(A)}.$$

est une probabilité. On l'appelle **probabilité conditionnelle** relative à A. Pour tout événement E, la quantité $\mathrm{p}_A(E)=\dfrac{\mathrm{p}(E\cap A)}{\mathrm{p}(A)}$ est appelée probabilité conditionnelle de E relativement à A, ou encore probabilité de E sachant A.

✓ Soulignons que nous définissons ainsi une probabilité conditionnelle, mais on ne peut pas définir d'événement conditionnel. Ainsi, si l'on rencontre parfois la notation $\mathrm{p}(E/A)$ la notation (E/A) seule est à proscrire.

✓ Si Ω est un ensemble fini, et si $\tau=\mathcal{P}(\Omega)$ et p la probabilité uniforme et si $\mathrm{p}(A)\neq 0$. Alors pour tout événement E, on a :
$\mathrm{p}_A(E)=\dfrac{\mathrm{card}\,(E\cap A)}{\mathrm{card}\,(A)}$.

Théorème 30.21 (Formule des probabilités composées)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit $(A_1,\ldots,A_n)$ une famille d'événements tels que $\mathrm{p}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\neq 0$. Alors :

$$\mathrm{p}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=\mathrm{p}\left(A_1\right)\mathrm{p}_{A_1}\left(A_2\right)\mathrm{p}_{A_1\cap A_2}\left(A_3\right)\times \mathrm{p}_{A_1\cap\times\cap A_{n-1}}\left(A_n\right).$$

preuve :

Ptitexo: *Dans une urne contenant initialement une boule noire et une boule verte. On tire les boules selon le processus suivant :*
$(-)$ *Si on tire une boule noire, on la remet dans l'urne en rajoutant une boule noire.*
$(-)$ *Si on tire une boule verte, alors on gagné.*
On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ *qui modélise cette expérience.*

On note G_n l'événement : « on gagne à l'issue du n-ème tirage ».

1. *Déterminer $\mathrm{p}(G_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
2. *Déterminer la probabilité que le jeu s'arrête.*

Propriété 30.22 (Formule des probabilités totales)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilité non nulle (c'est-à-dire $\forall i \in I, \mathrm{p}(A_i) \neq 0$). On a alors, pour tout $E \in \tau$:

$$\mathrm{p}(E) = \sum_{i\in I} \mathrm{p}_{A_i}(E)\mathrm{p}(A_i).$$

preuve :

✓ On a donc en particulier pour $A \in \tau$ tel que $\mathrm{p}(A) \in]0,1[$, pour tout $E \in \tau$: $\mathrm{p}(E) = \mathrm{p}_A(E)\mathrm{p}(A) + \mathrm{p}_{\overline{A}}(E)\mathrm{p}\left(\overline{A}\right)$.

Ptitexo: *On jette n dés cubiques non pipés. Quelle est la probabilité que la somme des n chiffres soit paire ?*

Lemme 30.23 (Première formule de Bayes)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit $(A, B) \in \tau^2$ un couple d'événements tels que $\mathrm{p}(A) \neq 0$ et $\mathrm{p}(B) \neq 0$, alors :

$$\mathrm{p}_A(B) = \frac{\mathrm{p}(B)\mathrm{p}_B(A)}{\mathrm{p}(A)}.$$

preuve :

Propriété 30.24 (Formule de Bayes)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Soit B un événement tel que $\mathrm{p}(B) \neq 0$. On a alors pour tout $i \in I$:

$$\mathrm{p}_B(A_i) = \frac{\mathrm{p}_{A_i}(B)\mathrm{p}(A_i)}{\displaystyle\sum_{j\in I} \mathrm{p}_{A_j}(B)\mathrm{p}(A_j)}.$$

preuve :

4 Indépendance

4.1 Indépendance de deux événements

Définition 30.25 (Indépendance de deux événements)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Deux événements A et B de τ sont dits indépendants si :

$$\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A)\mathrm{p}(B).$$

✓ La notion d'indépendance de deux événements dépend donc de la probabilité choisie sur notre espace probabilisable.

✓ Si $\mathrm{p}(A) = 0$ ou si $\mathrm{p}(A) = 1$, alors $\forall B \in \tau$, A et B sont indépendants.

✓ Tout couple (A, B) d'événements incompatibles non négligeables est formé d'événements non indépendants.

Propriété 30.26 (Propriété d'indépendance)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements tels que $\mathrm{p}(A) \neq 0$. Alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathrm{p}_A(B) = \mathrm{p}(B)$.

preuve :

Propriété 30.27 (Indépendance et complémentaire)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
$(-)$ Les événements A et B sont indépendants.
$(-)$ Les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.
$(-)$ Les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

preuve :

4.2 Indépendance d'une famille d'événements

Définition 30.28 (Indépendance deux à deux)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements. On dit que les événements de cette famille sont **deux à deux indépendants** si :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Longrightarrow \mathrm{p}\left(A_i \cap A_j\right) = \mathrm{p}(A_i)\mathrm{p}(A_j).$$

Définition 30.29 (Indépendance mutuelle)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements. On dit que les événements de cette famille sont **mutuellement indépendants** si :
Pour toute partie $J \subset I$ de cardinal fini :

$$\mathrm{p}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathrm{p}\left(A_j\right).$$

✓ Il est clair que l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux. Mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple qui suit.

Ptitexo: *On lance deux dés équilibrés à six faces. On définit les événements :*
$(-)$ $A=$ *≪ Le numéro du deuxième dé est supérieur ou égal à 4 ≫.*
$(-)$ $B=$ *≪ Le numéro du premier dé est supérieur ou égal à 3 ≫.*
$(-)$ $C=$ *≪ La somme des deux numéros est égale à 7 ≫.*
Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Propriété 30.30 (Famille d'événements et indépendance)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'événements d'un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$˙
Soit $(A'_1, \ldots, A'_n)$ une famille d'événements tels que $\forall i \in [\![1, n]\!], A'_i = A_i$ ou $A'_i = \overline{A_i}$.
$(-)$ Les événements de la famille $(A_1, \ldots, A_n)$ sont deux à deux indépendants si et seulement si les événements de la famille $(A'_1, \ldots, A'_n)$ sont deux à deux indépendants.
$(-)$ Les événements de la famille $(A_1, \ldots, A_n)$ sont mutuellement indépendants si et seulement si les événements de la famille $(A'_1, \ldots, A'_n)$ sont mutuellement indépendants.

preuve :

Chapitre 31 - Variables aléatoires

Toute connaissance dégénère en probabilité. D.Hume.

1 Généralités

1.1 Définition

Définition 31.1 (Variable aléatoire réelle (pour adultes))

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. On dit qu'une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle si :
Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on a :

$$X^{-1}(I) \in \tau.$$

✓ Dans ce cas, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $X^{-1}(B) \in \tau$, on peut donc calculer $\mathrm{p}\left(X^{-1}(B)\right)$.

Définition 31.2 (Variable aléatoire discrète (pour adolescents))

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit E un ensemble. On appelle **variable aléatoire discrète** une application $X : \Omega \longrightarrow E$ telle que :

i) $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

ii) $\forall x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \tau$.

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **variable aléatoire réelle discrète**. Ce que nous noterons VARD en abrégé.

Ptitexo: *Vérifier que ces deux définitions coïncident lorsque $E = \mathbb{R}$ et $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.*

Propriété 31.3 (Opérations sur les VARD)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}$.
$(-)$ Les fonctions $X+Y$, αX, $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$, XY, X^r sont des variables aléatoires réelles discrètes.
$(-)$ La variable (X, Y) une variable aléatoire discrète à valeur dans $\mathbb{R}^2$.

preuve:

évident □

Propriété 31.4 (Tribu engendrée par une variable discrète)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit E un ensemble. Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète. L'ensemble $\left\{ X^{-1}(A) \;\middle|\; A \in \mathcal{P}(E) \right\}$ est une tribu de Ω incluse dans τ. On l'appelle **tribu engendrée** par X.

preuve:

Notons $\mathcal{A} = \left\{ X^{-1}(A) \,\middle|\, A \in \mathcal{P}(E) \right\}$.
$(-)$ Remarquons tout d'abord, que si A est une partie de E, alors $X^{-1}(A) = X^{-1}(A \cap X(\Omega))$, et puisque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, alors $X^{-1}(A)$ s'écrit comme une réunion finie ou dénombrable d'ensembles de la forme $X^{-1}(\{\omega\})$. Donc, par σ-additivité, on a $X^{-1}(A) \in \tau$. Finalement, on a bien, $\boxed{\mathcal{A} \subset \tau.}$
$(-)$ $\Omega = X^{-1}(E)$. Donc $\boxed{\Omega \in \tau.}$

$(-)$ Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $\overline{X^{-1}(A)} = X^{-1}(E \setminus A)$.
Donc $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire.

$(-)$ Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \subset E$, tel que $B_n = X^{-1}(A_n)$. Donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = X^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. Donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.
Donc $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable.
De ces trois points, il découle que $\mathcal{A}$ est bien une tribu. $\square$

1.2 Caractérisation par la loi de probabilité

Dans toute la suite, on ne considérera que des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 31.5 (Loi de probabilité)

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. On peut alors considérer l'application :

$$\mathbb{P}_X : \mathbb{B}(\mathbb{R}^p) \longrightarrow [0,1], \ A \longmapsto \mathrm{p}(X^{-1}(A)).$$

Cette application est une probabilité sur $(\mathbb{R}^p, \mathbb{B}(\mathbb{R}^p))$. On l'appelle **loi de probabilité** (ou distribution de probabilité) de la variable aléatoire X.

preuve:

✓ On dit donc que deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ ont la même loi si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. On constate donc que deux variables définies sur des espaces probabilisés différents peuvent avoir la même loi.

Ptitexo: *On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois une pièce de monnaie équilibrée. On suppose que tous les séries $PF\dots$ de résultats sont équiprobables. On note X_n le nombre de faces obtenues au cours des n lancers.*

1. *Décrire l'espace probabilisé permettant de modéliser naturellement cette expérience.*

2. *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.*

Notations : Si X est une variable aléatoire réelle et si a et b sont des réels , on adopte usuellement les notations suivantes :

Notation	Événement
$(X = a)$	$X^{-1}(\{a\})$
$(X \geq a)$	$X^{-1}([a, +\infty[)$
$(X \leq a)$	$X^{-1}(]-\infty, a[)$
$(X > a)$	$X^{-1}(]a, +\infty[)$
$(a \leq X \leq b)$	$X^{-1}([a, b])$

Propriété 31.6 (Plus simplement !)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une variable aléatoire discrète.
$(-)$ L'application $\mathbb{P}_X$ est entièrement déterminée par la donnée des $\mathrm{p}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.
$(-)$ $\forall x \in X(\Omega)$, $\mathrm{p}(X = x) \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathrm{p}(X = x) = 1$.

preuve:

✓ Attention : deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ peuvent avoir la même loi et ne pas être égales. Par exemple, si l'on effectue une série de n lancers d'une pièce équilibrée, X le nombre de Piles et Y le nombre de Faces obtenus suivent la même loi. Mais les variables X et Y ne sont évidemment pas égales.

En pratique, on a plus facilement accès à la loi de probabilité de la variable X et à l'ensemble $X(\Omega)$ qu'à l'univers Ω.

✓ Avec un univers Ω fini, l'ensemble $X(\Omega)$ est alors un ensemble fini $x_1, \cdots, x_n$. Si on pose, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i = P(X = x_i)$, la loi de X peut être représentée dans un tableau de la forme :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n

Ptitexo: *On lance un dé cubique équilibré dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. On convient que, lorsque l'on tombe sur la face numérotée i, on gagne $2i - 2$ euros. On note X la variable aléatoire représentant le gain obtenu. Donner la loi de X.*

Théorème 31.7 (Existence de variables discrètes)

(−) Soit I une partie finie de $\mathbb{N}$. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de $\mathbb{R}^p$ deux à deux distincts. Soit $(p_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs dont la somme fait 1. Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ et une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ telle que :

$$X(\Omega) = \left\{ x_i \;\middle|\; i \in I \right\} \quad \text{et} \quad \forall i \in I, \mathrm{p}(X = x_i) = p_i.$$

(−) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille finie d'éléments de $\mathbb{R}^p$ deux à deux distincts. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de réels positifs telle que $\sum p_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Alors $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité sur $X(\Omega)$ c'est-à-dire qu' il existe un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ et une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ telle que :

$$X(\Omega) = \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \} \quad \text{et} \quad \forall i \in I, \mathrm{p}(X = x_n) = p_n.$$

preuve:

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'éléments de $\mathbb{R}^p$ deux à deux distincts. Soit $(p_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs dont la somme fait 1. Posons $\Omega = \{ x_i \mid i \in I \}$ et $\tau = \mathcal{P}(\Omega)$. D'après le **Théorème 29.15** du chapitre **Espaces probabilisés**, il existe une unique probabilité p sur (Ω, τ) telle que $\forall i \in I, \mathrm{p}(\{x_i\}) = p_i$. Il suffit, alors de définir X en posant $\forall i \in I$, $X(x_i) = x_i$. Ainsi, $X(\Omega)$ est bien au plus dénombrable et $\forall i \in I$, $X^{-1}(\{x_i\}) \in \tau$. La fonction X est donc bien une variable discrète. □

1.3 Image d'une variable aléatoire par une fonction

Propriété 31.8 (Loi d'une fonction d'une v.a.)

Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une variable aléatoire discrète définie sur cet espace probabilisé. Soit φ une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{p'}$.
(−) La fonction $\varphi \circ X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{p'}$ est une variable aléatoire discrète. On la note usuellement $\varphi(X)$.
(−) Sa loi est donnée par :

$$\forall x \in X(\Omega), \mathrm{p}(\varphi(X) = \varphi(x)) = \sum_{a \in X(\Omega), \varphi(a) = \varphi(x)} \mathrm{p}(X = a).$$

preuve:

Ptitexo: *On considère une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ telle que $X(\Omega) = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ et on pose $Y = X^2$. La loi de Xest donnée par :*

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\mathrm{p}(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$

Donner la loi de probabilité de Y.

2 Introduction aux familles sommables

Exercice 31.1

1) On rappelle que la série harmonique alternée converge. Que dire de la somme suivante :

$$S = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{7} + \dots$$

2) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On suppose que $\sum a_n$ est absolument convergente.
Montrer que pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$, la série de terme général $a_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$.

3) Montrer que si $\sum a_n$ ne converge pas absolument, alors il existe une bijection $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$ tel que $\sum a_{\sigma(n)}$ diverge.

4) $(*)$ Montrer que si $\sum a_n$ converge et ne converge pas absolument, alors pour tout réel α, il existe une bijection $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha$.

2.1 Familles sommables

On admettra tous les théorèmes de ce paragraphe :

Définition 31.9 (Famille sommable de réels positifs)

Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs est dite **sommable**, si l'ensemble $\left\{ \sum_{j\in J} a_j \;\middle|\; J \subset I, J \text{ fini} \right\}$ est majoré. La borne supérieure cet ensemble est alors appelé **somme de la famille** $(a_i)_{i\in I}$, on la note $\sum_{i\in I} a_i$.

Propriété 31.10 (Somme de familles sommables)

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles sommables de réels positifs. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Alors la famille $(a_i + \lambda b_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} (a_i + \lambda b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \lambda \sum_{i\in I} b_i.$$

preuve:

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles sommables de réels positifs. Alors, par définition pour tout ensemble J fini et inclus dans I, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in J}(a_i+\lambda b_i) &\leq \sum_{i\in J}a_i+\lambda\sum_{i\in J}b_i\\ &\leq \sum_{i\in I}a_i+\lambda\sum_{i\in I}b_i.\end{aligned}$$

Cela prouve que la famille $(a_i+\lambda b_i)_{i\in I}$ est sommable et que

$$\sum_{i\in I}(a_i+\lambda b_i)\leq \sum_{i\in I}a_i+\lambda\sum_{i\in I}b_i.$$

Soit ε' un réel strictement positif. Choisissons ε strictement positif tel que $\varepsilon+\lambda\varepsilon<\varepsilon'$. Par définition de la borne supérieure, il existe une partie I_1 telle que $\left(\sum_{i\in I}a_i\right)-\varepsilon\leq\sum_{i\in I_1}a_i$.

Par ailleurs, il existe une partie I_2 telle que $\left(\sum_{i\in I}b_i\right)-\varepsilon\leq\sum_{i\in I_2}b_i$. On a donc

$$\left(\sum_{i\in I}a_i+\lambda b_i\right)-(\varepsilon+\lambda\varepsilon)\leq\left(\sum_{i\in I_1\cup I_2}\right)(a_i+\lambda b_i).$$

Ce qui prouve donc que

$$\boxed{\sum_{i\in I}(a_i+\lambda b_i)=\sum_{i\in I}a_i+\lambda\sum_{i\in I}b_i.}$$

□

Propriété 31.11 (Suite sommable = série convergente)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, si et seulement, la série de terme général u_n est convergente, et $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

Ptitexo: *Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $x\in E$. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de E. Montrer que la famille $\left(\langle e_i,x\rangle^2\right)_{i\in I}$ est une famille sommable.*

Propriété 31.12 (Sommation par paquet des familles de réels positifs)

Soit $(a_i)\in I$ une famille de réels positifs. Soit $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de parties telle que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda=I$. La famille des $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si chacunes des familles $(a_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable et la famille $\left(\sum_{i\in I_\lambda}a_i\right)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable. Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I}a_i=\sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda}a_i\right).$$

preuve:

Théorème 31.13 (De comparaison sur les familles de réels positifs)

Soient deux familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ de réels positifs tels que $\forall i \in I, 0 \leq a_i \leq b_i$. Si la famille $(b_i)_{i\in I}$ est sommable, il en est de même pour la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Définition 31.14 (Famille sommable de complexes)

Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est dite **sommable**, si la famille (de réels positifs) $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable, c'est-à-dire s'il existe une constante réelle M, telle que pour toute partie finie $J \subset I, \sum_{j\in J} |a_j| \leq M$.

Propriété 31.15 (Somme d'une famille sommable)

$(-)$ Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres réels.
Notons $\forall i \in I, a_i^+ = \max(a_i, 0)$ et $a_i^- = \max(-a_i, 0)$. Les familles $\left(a_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(a_i^-\right)_{i\in I}$ sont sommables et l'on appelle somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$ le réel noté $\sum_{i\in I} a_i$ défini par :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-.$$

$(-)$ Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Les familles $(\mathcal{R}\mathrm{e}(a_i))_{i\in I}$ et $(\mathcal{I}\mathrm{m}(a_i))_{i\in I}$ sont sommables et l'on appelle somme de la famille (a_i) le complexe noté $\sum_{i\in I} a_i$ défini par :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} \mathcal{R}\mathrm{e}\,(a_i) + i \sum_{i\in I} \mathcal{I}\mathrm{m}\,(a_i)\,.$$

preuve:

Il suffit d'utiliser le fait que $\forall i \in I$,

$$0 \leq a_i^+ \leq |a_i|\,.$$

$$0 \leq a_i^- \leq |a_i|\,.$$

On peut alors utiliser le théorème de comparaison sur les familles sommables de réels positifs. □

Propriété 31.16 (Suite sommable)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. La famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum a_n$ est absolument convergente ; dans ce cas :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

preuve:

Pas difficile. □

Propriété 31.17 (Inégalité triangulaire)

Si $(a_k)_{k\in I}$ est une famille sommable de nombres complexes, alors :

$$\left|\sum_{i\in I} a_i\right| \leq \sum_{i\in I} |a_i|\,.$$

preuve:

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i\in a_i}\right| &= \left|\sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-\right| \\ &\leq \sum_{i\in I} a_i^+ + \sum_{i\in I} a_i^- \\ &\leq \sum_{i\in I} a_i^+ + a_i^- \\ &\leq \sum_{i\in I} |a_i|\,.\end{aligned}$$

□

Propriété 31.18 (Permutation des termes)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. Soit $\sigma : I \longrightarrow I$ une bijection de I vers I.
La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $\left(a_{\sigma(i)}\right)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in I} a_{\sigma(j)}.$$

preuve:

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels. Pour tout partie finie J de I On a, en observant que $\sigma(J)$ est une partie finie de I :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in J} \left|a_{\sigma(i)}\right| &= \sum_{i\in\sigma(J)} |a_i| \\ &\leq \sum_{i\in I} |a_i|\,.\end{aligned}$$

Cela prouve que la famille $\left(a_{\sigma(i)}\right)_{i\in I}$ est sommable. Le même calcul prouve que si (a_i) est une famille de réels positifs, alors

$$\sum_{i\in I} a_{\sigma(i)} \leq \sum_{i\in I} a_i.$$

En appliquant à σ^{-1} ce même résultat, on a donc

$$\sum_{i\in I} a_{\sigma(i)} \geq \sum_{i\in I} a_i.$$

D'où par double inégalité,

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_{\sigma(i)}.$$

Le résultat sur les suites sommables quelconques s'en déduit naturellement. □

Propriété 31.19 (Combinaison linéaire de familles sommables.)

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles sommables de nombres complexes. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
La famille $(a_i + \lambda b_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} (a_i + \lambda b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \lambda \sum_{i\in I} b_i.$$

preuve:

Cela découle naturellement de ce qui a été fait sur les suites positives. □

Propriété 31.20 (Sommation par paquets)

Soit $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'ensemble deux à deux disjoints dont la réunion est égale à I. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes.
Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la famille $(a_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\lambda\in\Lambda} \left(\sum_{i\in I_\lambda} a_i \right).$$

Réciroquement :
Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes, telle que : $(-)$ pour tout $\lambda \in \Lambda, (a_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable,
$(-)$ la famille $\left(\sum_{i\in I_\lambda} |a_i| \right)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable,
alors la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\lambda\in\Lambda} \left(\sum_{i\in I_\lambda} a_i \right).$$

2.2 Cas particulier des suites doubles

Propriété 31.21 (Caractérisation des suites doubles sommables)

Soit u une application de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{R}$. On note aussi $u = (u_{i,j}) = u_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$, ce genre de suite est aussi appelée suite double.
$(-)$ Si pour tout j fixé dans $\mathbb{N}$, la série de terme général $|u_{i,j}|$ converge, et
$(-)$ si la série (indicée sur j) de terme général $\sum_{i=0}^{+\infty} |u_{i,j}|$ est convergente
alors la la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

preuve:

Il suffit de remarquer que dans les conditions du théorème :

$$\sum_{(i,j)\in J} |u_{i,j}| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} |u_{i,j}|.$$

□

Propriété 31.22 (Échange des Σ pour les suites doubles sommables)

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famille sommable.

- $(-)$ $\forall i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_j u_{i,j}$ converge (absolument) et la série de terme général $\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$ converge ;
- $(-)$ $\forall j \in \mathbb{N}$, la série $\sum_i u_{i,j}$ converge et la série de terme général $\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$ converge ;

et alors :

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} u_{i,j}$$

Ptitexo: *Montrer que la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ par $u_{i,j} = \dfrac{(-1)^{i+j}}{2^{i+j}}$ est sommable.*

Ptitexo: *Montrer qu'il en est pas de même pour la famille $(v_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ par $v_{i,j} = \dfrac{1}{(i+j+1)(i+j+2)}$.*

Exercice 31.2

Soit u la suite double définie pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par

$$u_{i,j} = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{1}{i^2 - j^2} & \text{si} \quad i \neq j \\ 0 & \text{si} \quad i = j \end{array} \right. .$$

Montrer l'existence et calculer les sommes :

$$SIJ = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \quad \text{et} \quad SJI = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}.$$

---

3 Espérance et moments d'une variable aléatoire réelle discrète

3.1 Espérance

Définition 31.23 (Espérance d'une variable aléatoire réelle finie)

Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. Notons $X(\Omega) = \{ x_i \mid i \in [\![1, n]\!] \}$ et $\forall i \in [\![1, n]\!], p_i = \mathrm{p}(X = x_i)$. L'**espérance** de X est le réel noté $\mathrm{E}(X)$ défini par :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Définition 31.24 (Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète infinie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. Notons $X(\Omega) = \{ x_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ et $\forall i \in \mathbb{N}, p_i = \mathrm{p}(X = x_i)$. On dit que la variable aléatoire X admet une espérance si et seulement la série de terme général $p_i x_i$ converge absolument, dans ce cas, l'**espérance** de X est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i x_i.$$

Exemple : Soit X la variable aléatoire dont la loi est donnée par :

x_i	-1	1	4	5
$\mathrm{p}(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$

Son espérance est : $\mathrm{E}(X) = (-1) \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{4}{10} + 5 \times \frac{3}{10} = \frac{12}{5}$

Ptitexo: *On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ qui permet de modéliser l'expérience suivante : dans une urne qui contient initialement une boule Blanche et une boule Noire, indiscernables au toucher, on tire des boules selon le processus suivant :*
$(-)$ *Si on tire une blanche, alors on arrête les tirages.*
$(-)$ *Si on tire une boule noire, alors on la remet dans l'urne accompagnée de j autres boule(s) noire(s).*

On note X, la variable qui donne le nombre de tirages effectués si celui-ci est fini et prend la valeur 0 si l'expérience ne s'arrête pas. On admet que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$.

1. *Déterminer la loi de X lorsque $j = 0$.*

2. *Déterminer l'espérance de X lorsque $j = 0$.*

3. *Reprendre les mêmes questions pour le cas où $j = 1$.*

Propriété 31.25 (condition nécessaire et suffisante)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. La variable X admet une espérance si et seulement si la famille $(\mathrm{p}(\{\omega\})X(\omega))_{\omega\in\Omega}$ est sommable et dans ce cas :

$$\mathrm{E}\,(X) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{p}(\{\omega\})X(\omega).$$

preuve:

Il suffit d'utiliser le théorème de sommation par paquets et le fait que :

$$\mathrm{p}(X = x_i) = \sum_{\omega\in\Omega, X(\omega)=x_i} \mathrm{p}\,(\{\omega\})\,.$$

□

Définition 31.26 (Variable centrée)

Une VARD est dite **centrée** si son espérance existe et est égale à 0.

✓ Si X est une VARD admettant une espérance, il est très facile de fabriquer une variable centrée : la variable $X - \mathrm{E}\,(X)$ est encore une VARD, et elle est centrée. On l'appelle variable centrée associée à X.

Propriété 31.27 (Positivité de l'espérance)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. Si la variable X admet une espérance alors :

$$X \geq 0 \Longrightarrow \mathrm{E}\,(X) \geq 0.$$

preuve:

Théorème 31.28 (Théorème de transfert-cas fini)

Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$.
Notons $X(\Omega) = \{\, x_i \mid i \in [\![1, n]\!] \,\}$ et $\forall i \in [\![1, n]\!], p_i = \mathrm{p}(X = x_i)$.
Soit $\varphi : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
La variable aléatoire $\varphi(X)$ admet pour espérance :

$$\mathrm{E}\,(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\,(x_i)\,p_i.$$

preuve:

Théorème 31.29 (Théorème de transfert)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète non finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$.
Notons $X(\Omega) = \{ x_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ et $\forall i \in \mathbb{N}, p_i = \mathrm{p}(X = x_i)$. Soit $\varphi : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\varphi(x_i) p_i$ converge absolument et dans ce cas :

$$\mathrm{E}(\varphi(X)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varphi(x_i) p_i.$$

preuve:

✓ L'intérêt du théorème de transfert réside dans le fait que l'on peut déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\varphi(X)$ sans avoir à déterminer explicitement sa loi.

Ptitexo: *Soit $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ un espace probabilisé. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket -6, 6 \rrbracket)$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X^2.*

3.2 Moments

Définition 31.30 (Moment d'une VARD)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Soit $r \in \mathbb{N}$. On appelle, s'il existe **moment d'ordre** r, la quantité $m_r(X) = \mathrm{E}(X^r)$.

Propriété 31.31 (Calcul des moments)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. Notons $X(\Omega) = \{ x_i \mid i \in I \}$ et $\forall i \in I, p_i = \mathrm{p}(X = x_i)$. Soit $r \in \mathbb{N}$. La variable X admet un moment d'ordre r si et seulement la famille $(|x_i^r| p_i)_{i \in I}$ est sommable et dans ce cas :

$$m_r(X) = \sum_{i \in I} x_i^r p_i.$$

preuve:

On applique le théorème de transfert à la fonction $\varphi : t \mapsto t^r$. $\square$

Propriété 31.32 (Existence des moments d'ordres inférieurs)

Si X est une variable réelle discrète qui admet un moment d'ordre r, alors elle admet un moment de tout ordre inférieur ou égal à r.

preuve:

3.3 Moments d'ordre 2-Variance

Définition 31.33 (Variance d'une VARD)

Soit X une VARD qui admet une espérance. On dit que X admet une **variance** si et seulement si $X - \mathrm{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2. On appelle alors variance de X le réel noté $\mathrm{v}(X)$ défini par :

$$\mathrm{v}(X) = \mathrm{E}\Big((X - \mathrm{E}(X))^2 \Big).$$

✓ Dans les conditions de cette définition, X est une VARD et $\mathrm{E}(X)$ existe donc $(X - \mathrm{E}(X))^2$ est une VARD.

✓ La variance mesure l'écart par rapport à l'espérance qui est la moyenne des valeurs de X. La variance mesure donc la dispersion par rapport à cette moyenne.

Propriété 31.34 (Formule de Huygens)

Soit X une VARD. La variable X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2 et en cas d'existence, on a :

$$\mathrm{v}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2.$$

Preuve :

Propriété 31.35 (combinaison linéaire)

Soit X une VARD admettant une variance $\mathrm{v}(X)$, alors pour tout couple (a, b) de réels la variable aléatoire $aX + b$ admet une variance qui vérifie :

$$\mathrm{v}(aX + b) = a^2 \mathrm{v}(X).$$

Preuve :

Définition 31.36 (Écart-type)

Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2, l'**écart-type** de X est le réel noté $\sigma(X)$ défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{v}(X)}.$$

Définition 31.37 (Variable centrée-réduite)

Une VARD X est dite **centrée réduite** si $\sigma(X) = 1$ et $\mathrm{E}(X) = 0$.

Propriété 31.38 (Variable aléatoire centrée réduite associée à X)

Si X est une VARD admettant un moment d'ordre 2, si $\sigma(X) \neq 0$, alors la variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est une VARD centrée réduite. On l'appelle **variable aléatoire centrée réduite associée** à X.

preuve:

4 Lois discrètes très usuelles

J'ai décidé la notation suivante : Si $X : \Omega \longrightarrow E$ est une variable aléatoire discrète. On notera :

$$\text{val}(X) = \left\{ x \in E \;\middle|\; \text{p}(X = x) \neq 0 \right\}.$$

4.1 Loi uniforme discrète

Définition 31.39 (Loi uniforme discrète)

Soit E un ensemble de cardinal fini. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, τ, p). On dit que X suit la **loi uniforme** sur $E \in \mathbb{R}$ si

$$\forall e \in E, \text{p}(X = e) = \frac{1}{\text{card}\,(E)}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}\,(E)$ et l'on a $\text{val}(X) = E$.

✓ Si a et b sont deux entiers tels que $a < b$, alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}\,([\![a, b]\!]) \Longleftrightarrow X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}\,([\![1, b - a + 1]\!])$.

Propriété 31.40 (Caractéristiques d'une loi uniforme)

Soient a et b deux entiers tels que $a < b$. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, τ, p). On suppose que X suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ alors :

$$\text{E}\,(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \text{v}\,(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}.$$

Preuve :

4.2 Loi de Bernoulli

Définition 31.41 (Loi de Bernoulli)

Soit $p \in [0, 1]$. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, τ, p). On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si :

$$\text{p}(X = 0) = 1 - p,\ \text{p}(X = 1) = p.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$ et l'on a $\text{val}(X) = \{0, 1\}$.

✓ Si l'on considère un espace probabilisé qui modélise un expérience à deux issues possibles $E =$« échec » et $S =$« succès » alors si le succès advient avec la probabilité p et l'échec avec la probabilité $1 - p$, alors la variable aléatoire qui prend la valeur 0 en cas d'échec et 1 en cas de succès suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

✓ Si l'on considère un espace probabilisé qui modélise l'expérience consistant à tirer une boule au hasard dans une urne qui contient une proportion p de boules blanches, alors la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si la boule tirée n'est pas blanche et 1 sinon suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Propriété 31.42 (Caractéristiques de la loi de Bernoulli)

Soit $p \in [0,1]$. Notons $p = 1 - q$. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ qui suit la loi $\mathcal{B}(1,p)$. On a :

$$\mathrm{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathrm{v}(X) = pq.$$

5 Loi binomiale

Définition 31.43 (Loi binomiale)

Soit $p \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. On dit que X suit la **loi Binomiale** de paramètres n et p si :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \mathrm{p}(X=i) = \begin{pmatrix} n \\ \\ i \end{pmatrix} p^i(1-p)^{n-i}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et l'on a et l'on a $\mathrm{val}(X) \subset [\![0,n]\!]$.

✓ Une telle variable existe bien, puisque dans les conditions de l'énoncé d'après la formule du binôme de Newton : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ \\ i \end{pmatrix} p^i(1-p)^{n-i} = 1.$

✓ Si l'on considère un espace probabilisé qui modélise l'expérience consistant à tirer n boules au hasard et avec remise dans une urne qui contient une proportion p de boules blanches, alors la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches tirées au cours des n tirages sinon suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Propriété 31.44 (Caractéristiques de la loi binomiale)

Soit $p \in [0,1]$. Notons $p = 1 - q$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ qui suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

$$\mathrm{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathrm{v}(X) = npq.$$

preuve:

5.1 Loi hypergéométrique

Définition 31.45 (Loi Hypergéométrique)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $Np \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. On dit que X suit la **loi de Hypergéométrique** de paramètres N, n et p si :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \mathrm{p}(X=i) = \frac{\begin{pmatrix} Np \\ \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N(1-p) \\ \\ n-i \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ \\ n \end{pmatrix}}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$ et l'on a $\mathrm{val}(X) \subset [\![0,n]\!]$.

✓ Une telle variable existe bien, puisque dans les conditions de l'énoncé d'après la formule de Van der Monde : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\begin{pmatrix} Np \\ \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N(1-p) \\ \\ n-i \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ \\ n \end{pmatrix}} = 1.$

✓ Si l'on considère un espace probabilisé qui modélise l'expérience consistant à tirer n boules au hasard et <u>sans remise</u> dans une urne qui contient une proportion p de boules blanches, alors la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches tirées au cours des n tirages suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Propriété 31.46 (Caractéristiques de la loi hypergéométrique)

Soit $p \in [0,1]$. Notons $p = 1-q$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ qui suit la loi $\mathcal{H}(N,n,p)$.

$$\mathrm{E}\left(X\right) = np \quad \text{et} \quad \mathrm{v}\left(X\right) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right).$$

preuve:

Exercice 31.3 Convergence en loi d'une Hypergéométrique vers une Binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$. Soit $(X_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé suivant chacune la loi $\mathcal{H}(N,n,p)$. Soit X une variable de loi $\mathcal{B}(n,p)$.

1) Montrer que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathrm{p}(X_N = k) = \mathrm{p}(X = k)$.

2) Interpréter ce résultat.

5.2 Loi de Poisson

Exercice 31.4 **Convergence en loi de binomiales vers une Poisson**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires définies sur un certain espace probabilisé (Ω,τ,p) telles que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un réel p_k tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{p}(X_n = k) = p_k$.

2) Montrer que la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité $\mathcal{L}_\lambda$ sur $\mathbb{N}$. On dira qu'une variable de loi $\mathcal{L}_\lambda$ suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Définition 31.47 (Loi de Poisson)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. On dit que la variable aléatoire réelle X définie sur l'espace probabilisé (Ω,τ,p) suit la **loi de Poisson** de paramètre λ si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{p}(X = k) = \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et l'on a $\mathrm{val}(X) \subset \mathbb{N}$.

Propriété 31.48 (Caractéristiques de la loi de Poisson)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Soit une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé (Ω,τ,p) qui suit la loi de Poisson de paramètre λ, alors X admet des moments de tous ordres et l'on a :

$$\mathrm{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathrm{v}(X) = \lambda.$$

preuve:

5.3 Loi géométrique

5.3.1 Généralités

Définition 31.49 (Loi géométrique)

Soit $p \in]0,1]$. On dit que la variable aléatoire réelle X définie sur l'espace probabilisé (Ω,τ,p) suit la **loi géométrique** de paramètre p si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{p}(X = k) = pq^{k-1},\ q = 1 - p.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et l'on a $\mathrm{val}(X) \subset \mathbb{N}^*$.

✓ Une telle variable existe bien, puisque dans les conditions de l'énoncé d'après la formule de sommation des séries géométriques : $\sum_{i=0}^{+\infty} pq^{i-1} = 1$ et $\forall i \in \mathbb{N}, pq^{i-1} \geq 0$.

✓ Si l'on considère un espace probabilisé qui modélise une série de tirages successifs et avec remise d'une boule dans une urne contenant une proportion p de boules blanches jusqu'à obtenir la première boule blanche. Si X désigne la variable aléatoire donnant le rang de la première blanche tirée, alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

✓ La loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ est la loi du temps d'attente du premier succès au cours d'une succession (éventuellement infinie) d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de même probabilité de succès p.

Propriété 31.50 (Caractéristiques de la loi géométrique)

Soit $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p, alors :
$(-)$ X admet des moments de tous ordres et :

$$\mathrm{E}\,(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathrm{v}\,(X) = \frac{q}{p^2}.$$

$(-)$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{p}(X > k) = q^k.$$

5.3.2 Variables sans mémoires discrètes

On considère un objet, on note X sa durée de vie (à valeur dans $\mathbb{N}$) mesurée à partir de l'instant 0. On suppose que cet objet vérifie la propriété suivante : s'il est vivant à l'instant t_0, alors sa durée de vie mesurée à partir de l'instant t_0 suit la même loi que sa durée de vie à partir de l'instant 0. On a donc pour tout $t \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{p}_{(X > t_0)}(X > t + t_0) = \mathrm{p}(X > t)$$

d'où

$$\mathrm{p}(X > t + t_0) = \mathrm{p}(X > t)\mathrm{p}(X > t_0).$$

C'est à dire que la durée de vie de l'objet ne prend pas en compte l'usure du temps qu'il a déjà passé à vivre !
On dit alors que la loi de durée de vie de cet objet est sans vieillissement.
Pour donner un exemple plus concret, on peut imaginer une machine qui fonctionne à peu près sans usure et dont les pannes ne peuvent être produites que par des raisons extérieures. Si elle a fonctionné jusqu'à l'instant t_0, tout se passe comme si elle était neuve.
On dira que la variable aléatoire associée à cette durée de vie est sans mémoire.

Définition 31.51 (Variable sans mémoire)

Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X est **sans mémoire** si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{p}(X > x + y) = \mathrm{p}(X > x)\mathrm{p}(X > y).$$

Propriété 31.52 (Carac. des géométriques par l'absence de mémoire)

Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui n'est pas la variable certaine nulle. La variable aléatoire X est sans mémoire si et seulement si elle suit une loi géométrique.

Preuve :

6 Couples de VARD

6.1 Loi d'un couple de VARD, lois marginales

On considère deux VARD X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. Alors (X, Y) est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. Dans ce contexte, la loi du couple (X, Y) est la donnée de toutes les probabilités $\mathrm{p}\left((X = x) \cap (Y = y)\right)$ pour tous les couples $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Les lois de X et Y sont dans ce contexte appelées lois marginales.
Si les variables aléatoires X et Y sont des variables finies, on représente volontiers la loi du couple (X, Y) sous la forme du tableau suivant :

	$(X = x_1)$	$(X = x_2)$	$(X = x_3)$	$\dots$
$(Y = y_1)$	$\mathrm{p}\left((X = x_1) \cap (Y = y_1)\right)$	$\mathrm{p}\left((X = x_2) \cap (Y = y_1)\right)$	$\mathrm{p}\left((X = x_3) \cap (Y = y_1)\right)$	$\dots$
$(Y = y_2)$	$\mathrm{p}\left((X = x_1) \cap (Y = y_2)\right)$	$\mathrm{p}\left((X = x_2) \cap (Y = y_2)\right)$	$\mathrm{p}\left((X = x_3) \cap (Y = y_2)\right)$	$\dots$
$(Y = y_3)$	$\mathrm{p}\left((X = x_1) \cap (Y = y_3)\right)$	$\mathrm{p}\left((X = x_2) \cap (Y = y_3)\right)$	$\mathrm{p}\left((X = x_3) \cap (Y = y_3)\right)$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$

Ptitexo: *On lance deux dés équilibrés et indépendants. On note X le numéro du premier dé, Y le numéro du second, S la somme des deux dés et D la différence entre le numéro du premier et le numéro du second. Donner la loi du couple (X, Y) et celle du couple (S, D).*

La formule des probabilités totales donne :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \mathrm{p}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathrm{p}((X = x) \cap (Y = y)).$$

$$\forall y \in Y(\Omega),\ \mathrm{p}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathrm{p}((X = x) \cap (Y = y)).$$

Pour plus de clarté, écrivons ces formules dans le cas où X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathrm{p}(X = i) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{p}((X = i) \cap (Y = j)).$$

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \mathrm{p}(Y = j) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{p}((X = i) \cap (Y = j).$$

On peut donc retrouver les lois marginales à partir de la loi du couple, par contre à partir des lois marginales, il est impossible de retrouver la loi du couple, sauf

à connaître une information supplémentaire : par exemple, l'indépendance des variables aléatoires X et Y, ou les probabilités conditionnelles du type
$\mathrm{p}_{(X=x)}(Y=y)$ ou $\mathrm{p}_{(Y=y)}(X=x)$.

6.2 Lois conditionnelles

En gardant les mêmes notations, si $y \in Y(\Omega)$ est tel que $\mathrm{p}(Y=y)$ est non nul, on peut alors définir la probabilité conditionnelle $\mathrm{p}_{(Y=y)}(X=x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
Or $p_{(Y=y)}$ est encore une probabilité sur l'espace probabilisable (Ω, τ), et l'on peut donc regarder la loi de la variable aléatoire X considérée comme variable aléatoire sur $\left(\Omega, \tau, \mathrm{p}_{(Y=y)}\right)$. Cette loi est définie par la donnée de tous les $\mathrm{p}_{(Y=y)}(X=x)$ pour $x \in X(\Omega)$.
On l'appelle **loi conditionnelle de X sachant que** $(Y=y)$.
Autrement dit :

Définition 31.53 (Loi conditionnelle)

Si (X,Y) est couple de variables aléatoires réelles discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$, et si $y \in Y(\Omega)$ vérifie $\mathrm{p}\,(Y=y) \neq 0$, alors on appelle **loi conditionnelle de X sachant** $(Y=y)$ l'application :

$$\mathbb{P}^X_{(Y=y)} : \mathbb{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1],\ A \longmapsto \mathrm{p}_{(Y=y)}\left(X^{-1}(A)\right).$$

Propriété 31.54 (détermination de la loi conditionnelle)

Si (X,Y) est un couple de variables aléatoires réelles discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$, et si $y \in Y(\Omega)$ vérifie $\mathrm{p}\,(Y=y) \neq 0$, alors la loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$ est entièrement définie par la donnée des $\mathrm{p}_{(Y=y)}(X=x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

preuve:

Ptitexo: *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. On dispose de deux urnes contenant chacune $2n$ boules. La première urne contient 3 boules rouges et $2n-3$ boules noires. La deuxième urne contient 2 boules rouges et $2n-2$ boules noires. On choisit une urne au hasard, puis sans changer d'urne on tire avec remise n boules. On note X la variable aléatoire qui donne le numéro de l'urne choisie. On note Y le nombre de boules rouges obtenues à l'issue de l'expérience. Expliciter les lois conditionnelles Y sachant $(X=1)$ et Y sachant $(X=2)$.*

Ptitexo: *Comment faire apparaître ces lois conditionnelles dans le tableau de loi du couple ?*

Exercice 31.5 — Formule des proabilités totale pour l'espérance

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. Soit $(A_i)_{i \in i}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. On note-si elle existe- $\mathrm{E}_{A_i}(X)$ l'espérance de la varaible aléatoire X pour la loi conditionnelle sachant A_i. Montrer que X admet une espérance si et seulement si $\forall i \in I, \mathrm{E}_{A_i}(X)$ existe. Montrer que dans ce cas $\mathrm{E}\,(X) = \displaystyle\sum_{i \in I} \mathrm{E}_{A_i}(X)\mathrm{p}(A_i)$.

Exercice 31.6 **Couplage binomiale-Poisson**

1) Étude d'un exemple
Le nombre N de formules de cours qu'apprendra BSP dans un chapitre de math donné est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 10. La probabilité qu'il soit interrogé en cours ou en DS sur une formule donnée est 0.2. Soit X la va donnant le nombre de fois Benoît va énerver son professeur. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

2) Généralisation
Soit $p \in]0,1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Soit Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Soit X une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$, telle que
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire X sachant que $(Y = n)$ est la loi $\mathcal{B}(n, p)$ et la loi de la variable X sachant $(Y = 0)$ est celle de la variable certaine égale à 0. Montrer que X suit encore une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Exercice 31.7 **Couplage Binomiale-Binomiale**

Soit $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$ et $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n_1, p_1)$. Soit X une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, la loi de X sachant $(Y = k)$ soit la loi $\mathcal{B}(k, p_2)$ et la loi de X sachant $(Y = 0)$ soit celle de la variable certaine à 0. Montrer que X suit encore une loi Binomiale dont on précisera les paramètres.

Exercice 31.8 **Espérance totale**

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$, telles que
$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{p}(X = i) \neq 0$ et $\mathrm{p}(X = j) \neq 0$.
On note $\mathrm{E}(X_Y)$ la variable aléatoire à valeurs dans
$\left\{E\left(X_{(Y=1)}\right), \ldots, E\left(X_{(Y=n)}\right)\right\}$ et définie par $E(X_Y = \varphi(Y)$ où $\varphi : t \mapsto E(X_{(y=t)})$
Montrer que $E(X) = E\left(E(X_Y)\right)$.

6.3 Loi d'une fonction de deux variables aléatoires discrètes

On rencontre souvent des situations où nous sommes appelés à rechercher la loi d'une fonction de deux variables aléatoires réelles discrètes, citons par exemple, $min(X, Y)$, $X + Y$, $X - Y$, $max(X, Y)$. La proposition suivante donne une expression générale pour trouver les lois de ces variables aléatoires si l'on connaît la loi du couple (X, Y).

Propriété 31.55 (Loi d'une fonction de 2 VARD)

Soient X et Y deux VARD définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. Soit f une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On peut donc définir la variable aléatoire réelle discrète $f(X, Y)$. Pour tout $z \in f(X, Y)(\Omega)$,

$$\mathrm{p}(f(X, Y) = z) = \sum_{\begin{pmatrix} x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega) \\ f(x, y) = z \end{pmatrix}} \mathrm{p}(X = x \cap Y = y).$$

Ptitexo: *Soient X et Y deux VARD définies sur un même espace probabilisé. On suppose que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Écrire sous forme d'une somme les probabilités suivantes :*

1. $\mathrm{p}(X+Y=k)$ *pour tout* $k \in (X+Y)(\Omega)$.
2. $\mathrm{p}(X-Y=k)$ *pour tout* $k \in (X-Y)(\Omega)$.
3. $\mathrm{p}(\max(X,Y)=k)$ *pour tout* $k \in \max(X,Y)(\Omega)$.
4. $\mathrm{p}(\min(X,Y)=k)$ *pour tout* $k \in \min(X,Y)(\Omega)$.
5. $\mathrm{p}(|X-Y|=k)$ *pour tout* $k \in |X-Y|(\Omega)$.
6. $\mathrm{p}(XY=k)$ *pour tout* $k \in (XY)(\Omega)$.
7. *Que faut-il changer aux réponses des questions précédentes si l'on suppose maintenant $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, puis $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1 \dots n\}$?*

Comme pour la loi d'un couple, on ne peut calculer cette somme si l'on ne connaît que les lois de X et Y mais pas les lois conditionnelles.

6.4 Espérance d'une fonction de deux VARD :

6.4.1 Cas de deux VARD finies

Théorème 31.56 ()

Soient X et Y deux VARD finies définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. Soit g une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$, où m et n sont deux entiers naturels non nuls. La VA finie $Z = g(X,Y)$ admet alors une espérance et :

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(x_i, y_j)\mathrm{p}((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Preuve :

Ptitexo: *Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, on tire deux boules ; on note X le premier numéro tiré et Y le second numéro tiré. On note $S = \max(X,Y)$ et $I = \min(X,Y)$. Donner l'espérance de I et de S, dans le cadre de tirages avec remise, puis dans le cadre de tirages sans remise.*

Ptitexo: *On tire sans remise les n boules d'une urne contenant n boules dont deux sont blanches et $n-2$ sont noires. On note X le rang de la première blanche tirée et Y rang de la seconde blanche tirée.*

1. *Quelle est la loi du couple (X,Y) ?*
2. *On note $S = X + Y$. Donner l'espérance de S.*

6.4.2 Cas général de deux VARD infinies

Théorème 31.57 (Esp. d'une fonction de deux VARD)

Soit X et Y deux VARD infinie définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. Soit g une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. La VARD $Z = g(X,Y)$ admet une espérance si et seulement si : la famille $(g(x,y)\mathrm{p}((X=x) \cap (Y=y)))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,(Z) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} g(x,y)\mathrm{p}((X=x)\cap(Y=y)) \\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} \sum_{x\in X(\Omega)} g(x,y)\mathrm{p}((X=x)\cap(Y=y)).\end{aligned}$$

✓ On ne se lance pas tête baissée dans l'utilisation de cette formule. En effet, l'exercice propose bien souvent quelques bidouilles qui peuvent raccourcir grandement les calculs d'espérance comme l'illustreront de prochains exercices.

Théorème 31.58 (Linéarité de l'espérance)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient X et Y deux VARD définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. Si X et Y admettent une espérance, alors $aX+Y$ admet une espérance et $\mathrm{E}\,(aX+Y) = a\mathrm{E}\,(X) + \mathrm{E}\,(Y)$.

Preuve :

Corollaire 31.59 (Croissance de l'espérance)

Soient X et Y deux variables réelles discrètes définies sur un même espace probabilisé telles que $X \leq Y$, et admettant chacune une espérance, alors : $\mathrm{E}\,(X) \leq \mathrm{E}\,(Y)$.

Preuve :

6.5 Moments d'ordre 2 d'une somme de variables aléatoires (M.P.)

Calcul de variance de la somme $X+Y$ dans le cas fini :

Soient X et Y deux VARD finies sur un même espace probabilisé. On peut alors écrire

$$\mathrm{v}\,(X+Y) = E\left([X+Y-E(X)-E(Y)]^2\right) = E\left([(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2\right)$$

$$V(X+Y) = E\left([X-E(X)]^2\right) + E\left([Y-E(Y)]^2\right) + 2E((X-E(X))(Y-E(Y))$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2E((X-E(X))(Y-E(Y))$$

Propriété 31.60 (Espérance)

Soient X et Y deux VARD définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors XY et $(X-\mathrm{E}\,(X))(Y-\mathrm{E}\,(Y))$ admettent une espérance et

$$\mathrm{E}\,((X-\mathrm{E}\,(X))(Y-\mathrm{E}\,(Y))) = \mathrm{E}\,(XY) - \mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y)\,.$$

Définition 31.61 (Covariance-coefficient de corrélation linéaire)

Soient X et Y deux VARD d'un même espace probabilisé admettant chacune un moment d'ordre 2.
$(-)$ On appelle **covariance** de X et Y la quantité :

$$\mathrm{cov}\,(X,Y) = \mathrm{E}\,((X - E(X))(Y - E(Y))) = \mathrm{E}\,(XY) - \mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y)\,.$$

$(-)$ Si $\sigma(X) \neq 0$ et $\sigma(Y) \neq 0$, on appelle **coefficient de corrélation linéaire** la quantité :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}\,(X,Y)}{\sigma(X) \times \sigma(Y)}.$$

Propriété 31.62 (Lien covariance, variance)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2,

$$\mathrm{cov}\,(X,X) = \mathrm{v}\,(X)\,.$$

Propriété 31.63 (Propriétés)

Soient X , Y et Z trois VARD d'un même e.p. admettant chacune un moment d'ordre 2 .

1. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{cov}\,(a,X) = 0$.
2. $\mathrm{cov}\,(X,Y) = \mathrm{cov}\,(X,Y)$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{cov}\,(\lambda X,Y) = \lambda \mathrm{cov}\,(X,Y)$.
4. $\mathrm{cov}\,(X+Y,Z) = \mathrm{cov}\,(X,Z) + \mathrm{cov}\,(Y,Z)$.

✓ Les deuxième et troisième propriétés se résument sous la forme $\mathrm{cov}\,(X+\lambda Y,Z) = \mathrm{cov}\,(X,Z) + \lambda \mathrm{cov}\,(Y,Z)$. Cette propriété s'appelle linéarité à gauche. La première propriété, dite de symétrie, nous assure qu'il y aussi linéarité à droite, c'est à dire que
$\mathrm{cov}\,(X,Y+\lambda Z) = \mathrm{cov}\,(X,Y) + \lambda \mathrm{cov}\,(X,Z)$. La covariance est donc dite **bilinéaire**.

Propriété 31.64 (Variance d'une somme)

Soient X et Y deux VARD d'un même espace probabilisé admettant chacune un moment d'ordre 2. Alors $X+Y$ admet une variance et une espérance et :

$$\mathrm{E}\,(X+Y) = \mathrm{E}\,(X) + \mathrm{E}\,(Y)\,.$$

$$\mathrm{v}\,(X+Y) = \mathrm{v}\,(X) + \mathrm{v}\,(Y) + 2\mathrm{cov}\,(X,Y)\,.$$

Propriété 31.65 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient X et Y deux VARD d'un même espace probabilisé admettant chacune un moment d'ordre 2. Alors $|\text{cov}\,(X,Y)\,| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$.
Il y a égalité dans cette inégalité si et seulement s'il existe des réels t et t' tel que $tX + t'Y$ est quasi-certaine, c'est à dire s'il existe une constante $a \in \mathbb{R}$, $\text{p}(tX + t'Y = a) = 1$.

✓ Si X et Y sont deux variables aléatoires telles qu'il existe trois réels t, t' et a tels que $tX + t'Y = a$, on dit alors que X et Y sont affinement liés.

preuve:

On considère le polynôme en λ, $\text{v}\,(X + \lambda Y)$ et l'on étudie son signe. □

✓ Interprétation du coefficient de corrélation linéaire :
Le coefficient de corrélation de deux variables aléatoires X et Y appartient toujours à $[-1, 1]$. Plus $\rho(X,Y)$ est de -1 ou de 1, plus les variables sont liées : si $\rho(X,Y)$ est proche de 1, les variables varient en même sens ; si $\rho(X,Y)$ est proche de -1, les variables varient en sens contraire.

6.5.1 Moments de la somme d'un nombre fini de VARD

Propriété 31.66 (Espérance et variance d'une somme de VARD)

$(-)$ Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n VARD admettant chacune une espérance, alors la somme $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ admet aussi une espérance donnée par la formule :

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k).$$

$(-)$ Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n VARD admettant chacune une variance, alors la somme $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ admet aussi une variance donnée par la formule :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}\,(X_i, X_j)\,.$$

Ptitexo: *Retrouver à l'aide de ces formules l'espérance et la variance d'une variable de loi Hypergéométrique.*

7 Indépendance de VARD

7.1 Définition

Définition 31.67 (Variables réelles indépendantes)

On dit que deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un même espace probabilisé sont indépendantes si pour tout couple (A, B) d'intervalles de $\mathbb{R}$, les événements $X^{-1}(A)$ et $Y^{-1}(B)$ sont indépendants.

Exemple : Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes alors pour tous réels x et y, $\mathrm{p}(X \leq x \bigcap Y \leq y) = \mathrm{p}(X \leq x)\mathrm{p}(Y \leq y)$.

Propriété 31.68 (Cas particulier des VARD)

Soient X et Y deux VARD définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. Les VARD X et Y sont indépendantes si et seulement si $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\mathrm{p}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathrm{p}(X = x)\mathrm{p}(Y = y).$$

Preuve :

Exemple : Deux variables aléatoires associées à des lancers de dés différents sont indépendantes.

> Ptitexo: *Une urne contient 3 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 3. On tire successivement deux boules avec remise et on note X_1 et X_2 les numéros obtenus. On pose $X = X_1$ et $Y = min(X_1, X_2)$. X et Y sont-elles indépendantes ?*

7.1.1 Loi de d'une fonction de deux variables discrètes indépendantes

Si l'on considère deux variables aléatoires discrètes indépendantes X et Y, on peut alors facilement retrouver les lois de $X + Y$, $X - Y$, $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$.
Dans le cas général, on peut écrire :

Propriété 31.69 (Cas particuliers)

Si X et Y sont deux VARD indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$. Alors :

(−) $\forall k \in (X + Y)(\Omega)$,

$$\mathrm{p}(X + Y = k) = \sum_{x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega),\ x+y=k} \mathrm{p}(X = x)\mathrm{p}(Y = y)$$

(−) $\forall k \in (X - Y)(\Omega)$

$$\mathrm{p}(X - Y = k) = \sum_{x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega),\ x-y=k} \mathrm{p}(X = x)\mathrm{p}(Y = y)$$

(−) $\forall k \in max(X, Y)(\Omega)$,

$$\mathrm{p}(max(X, Y) = k) = \sum_{x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega),\ \max(x,y)=k} \mathrm{p}(X = x)\mathrm{p}(Y = y)$$

(−) $\forall k \in (XY)(\Omega)$,

$$\mathrm{p}(XY = k) = \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega),\ xy=k} \mathrm{p}(X = x)\mathrm{p}(Y = y)$$

Mais évidemment ce n'est pas cette proposition qui est à connaître mais plutôt la manière de l'utiliser dans quelques cas particuliers.

Ptitexo: *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ et de même loi $\mathcal{G}(p)$. Déterminer les lois des variables suivantes :*

1. $X+Y$, $X-Y$, $|X-Y|$.
2. $min(X,Y)$ et $max(X,Y)$.
3. X sachant $((X+Y)=n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$, et $n \geq 2$.

7.1.2 Cas particuliers très importants

Propriété 31.70 (Sommes de binomiales indépendantes)

Soient n, m des entiers naturels non nuls, et p un réel de $]0,1[$. Si X et Y sont deux VARD indépendantes définies sur un même espace probabilisé . Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$, alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m,p)$.

Preuve :

Propriété 31.71 (Sommes de poissons indépendantes)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Soit $\mu \in \mathbb{R}_*^+$. Si X et Y sont deux VARD indépendantes définies sur un même espace probabilisé . Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Preuve :

Exercice 31.9 Variables non corrélés mais pas indépendantes (M.P.)

Soit $p \in]0,1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$, indépendantes, suivant chacune la loi géométrique de paramètre p. Soient $A = X - Y$ et $B = X + Y$.

1) Calculer $cov(A, B)$.

2) Les variables aléatoires A et B sont-elles indépendantes ?

7.1.3 Moments

Propriété 31.72 (Espérance d'un produit de VARD indépendantes)

Si X et Y sont deux VARD indépendantes définies sur un même espace probabilisé, admettant chacune une espérance, alors la variable XY admet une espérance et $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$.

Propriété 31.73 (Propriétés)

Si X et Y sont deux VARD indépendantes définies sur un même espace probabilisé, admettant chacune un moment d'ordre 2 alors :
$(-)$ $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.
$(-)$ $\mathrm{v}(X+Y) = \mathrm{v}(X) + \mathrm{v}(Y)$.
$(-)$ Si $\sigma(X) \neq 0$ et $\sigma(Y) \neq 0$ alors $\rho(X,Y) = 0$.

✓ Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes,

en général $\mathrm{v}(X-Y) \neq \mathrm{v}(X) - \mathrm{v}(Y)$.
Par contre, on a $\mathrm{v}(X-Y) = \mathrm{v}(X) + \mathrm{v}(Y)$.

Preuve :

✓ **Il n'y a pas de réciproque.** C'est à dire que deux variables peuvent être non corrélées sans être indépendantes.

✓ En statistique deux variables sont dites fortement corrélées si ρ est proche de 1.

Ptitexo: *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$ et de même loi $\mathcal{G}(p)$. Déterminer les espérances et variances des variables suivantes :*

1. $X+Y$, $X-Y$, $|X-Y|$.
2. $\min(X,Y)$ *et* $\max(X,Y)$.
3. X *sachant que* $(X+Y=n)$ *où* $n \in \mathbb{N}^*$, *et* $n \geq 2$.

7.2 indépendance de plus de 2 VARD

Définition 31.74 (Indép d'une famille finie de variables aléatoires)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, \ldots, X_n$, n VARD définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$.
$(-)$ On dit que les n VARD $X_1, \ldots, X_n$ sont **deux à deux indépendantes** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes.
$(-)$ On dit que on que les n VARD $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si quelles que soient les valeurs
$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (X_1(\Omega), \ldots, X_n(\Omega))$, on a :

$$\mathrm{p}((X_1 = \alpha_1) \cap \cdots \cap (X_n = \alpha_n)) = \mathrm{p}(X_1 = \alpha_1) \times \cdots \times \mathrm{p}(X_n = \alpha_n).$$

✓ Si les VARD $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors, toute sous-famille est formée de variables mutuellement indépendantes. Sans précision supplémentaire, indépendantes signifie mutuellement indépendantes.

Définition 31.75 (Suite)

Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de VARD définies sur un même espace probabilisé est constituée de VARD mutuellement indépendantes si toute partie finie de cette suite est constituée de VARD mutuellement indépendantes.

On admettra le théorème très utile suivant :

Théorème 31.76 (Lemme des coalitions)

Soient p et n deux entiers naturels non nuls avec $p < n$. Soient $X_1, \ldots, X_p, \ldots, X_n$ des VARD définies sur le même espace probabilisé. Si les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes alors toute fonction de $X_1, \ldots, X_p$ est indépendante de toute fonction de $X_{p+1}, \ldots, X_n$.

Exemple :

1. Si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $\sum_{i=1}^{p} X_i$ et $\sum_{i=p+1}^{n} X_i$ sont indépendantes.
2. Si l'on réalise une suite (infinie) de lancers de dés. Si pour tout $i \in \mathbb{N}$, X_i est une variable aléatoire qui ne dépend que du lancer numéro i, alors $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Propriété 31.77 (Variance d'une somme de v.a. indep.)

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une liste de n variables aléatoires deux à deux indépendantes définies sur un même espace probabilisé et admettant chacune un moment d'ordre 2, alors on a :

$$\mathrm{v}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}\left(X_i\right).$$

Propriété 31.78 (Bernoulli)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé qui suivent chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Preuve :

Propriété 31.79 (Poisson)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé qui suivent chacune la même loi de Poisson de paramètre λ, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$.

Preuve :

Ptitexo: *Soit $X_1, \dots, X_n$ une famille de n VARD indépendantes définies sur un même espace probabilisé, qui admettent chacune la même espérance m et la même variance σ. Soit $Y = \sum_{1=1}^{n-1} X_i X_{i+1}$.*

1. *On suppose que pour tout $i \in \{1 \dots n\}$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$. Montrer que Y admet une espérance et une variance, calculer ces quantités.*
2. *Retour au cas général : Montrer que Y admet une espérance et une variance, calculer ces quantités.*

Exercice 31.10

Soit $p \in]0,1[$. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$. Dans ce contexte, la réalisation de l'événement $(X_i = 1)$ est appelé « succès au rang i ». On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$

1) a) Que représente la variable S_k ?

b) Quelle est la loi de S_k ?

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité qu'il y ait strictement moins de n succès au cours de l'expérience.

2) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_n = \min\left\{ i \in \mathbb{N} \;\middle|\; S_i \geq n \right\}$. On admet qu'il découle de **1)c)** que N_n est bien une variable aléatoire.

a) Que représente N_n ?

b) Pour $j \geq n$, Exprimer $(N_n = j)$ à l'aide de S_{j-1} et de X_j puis déterminer la loi de N_n.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{j=n}^{+\infty} \begin{pmatrix} j-1 \\ \\ n-1 \end{pmatrix} p^n q^{n-j}$.

d) En déduire que N_n admet une espérance et une variance qu'on calculera. Pourquoi pouvait-on facilement prévoir la valeur de cette espérance ?

e) Montrer que, pour $n \geq 2$, la variable $\dfrac{1}{N_n - 1}$ admet une espérance que l'on calculera.

---

8 Fonctions de répartitions

Définition 31.80 (Fonction de répartition)

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$, on appelle **fonction de répartition** la fonction, usuellement notée F_X, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = p(X \leq x).$$

Exemples :

1. Quelle est la fonction de répartition d'une variable X de loi $\mathcal{B}(4, \frac{1}{2})$? Dessiner sa courbe représentative. Comment lire sur cette courbe les probabilités $p(X = 4)$, $p(X = 3)$, ...,$p(X = 0)$?

2. Même question pour une variable Y de loi $\mathcal{U}(\{1 \dots 6\})$ puis Z de loi $\mathcal{G}(\frac{1}{2})$.

3. Si X est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $F_X(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_X(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} p(X = k)$.

Propriété 31.81 (Propriétés)

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, τ, p). On note F_X sa fonction de répartition. On a :

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \in [0,1]$.
2. F_X *est croissante.*
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
5. F_X *est continue à droite en tout point de* $\mathbb{R}$.
6. *On a pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $p(X = x) = F_X(x) - \lim\limits_{t \to x^-} F_X(t)$.

✓ Il découle donc de la dernière de ces propriétés que s'il existe un $x \in \mathbb{R}$, tel que $p(X = x) \neq 0$ alors F_X n'est pas continue à gauche en x.

preuve:

1. Évident ! Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{p}(X \leq x) \in [0,1]}$ par définition d'une probabilité.
2. Si x et y sont deux réels avec $x \leq y$, alors $(X \leq x) \subset (X \leq y)$, donc $\mathrm{p}(X \leq x) \leq \mathrm{p}(X \leq y)$. Ainsi, on a prouvé que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y, \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } F_X \text{ est croissante}}$.
3. Considérons la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = (X \leq -n)$. Il est clair que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements. Donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\mathrm{p}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} I_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} p(I_n)$. C'est à dire $\mathrm{p}(\emptyset) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X(-n)$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_X(n) = 0$. En utilisant la croissance déjà prouvée de F_X, et la minoration de F_X par 0, on sait, par le théorème de la limite monotone pour les fonctions, que F_X admet une limite finie en $-\infty$, cette limite ne peut donc être que 0. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 0}$.
4. On procède de façon analogue à la preuve précédente, en utilisant cette fois la suite croissante d' événements $(X \leq n)_{n\in\mathbb{N}}$. On conclut, en utilisant le théorème de la limite monotone et le fait que $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} (X \leq n) = \Omega$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que F_X est continue à droite en x. On sait que F_X est croissante donc d'après un théorème d'analyse qu'on admettra ici, F_X admet une limite finie à gauche et à droite en x. Considérons la suite d'événements $\left(X \leq x + \dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite est décroissante, donc par théorème de coninuité monotone,
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{p}\left(X \leq x + \frac{1}{n+1}\right) = \mathrm{p}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(X \leq x + \frac{1}{n+1}\right)\right).$$
C'est à dire $\lim\limits_{t\to x^+} F_X(t) = F_X(x)$. C'est à dire que
$$\boxed{F_X \text{ est continue à droite en } x}$$
.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que F_X admet une limite finie à gauche en x. La suite $\left(X \leq x - \dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements ; et

$\bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(X \leq x - \frac{1}{n+1} \right) = (X < x)$. Comme précédemment et à l'aide du théorème de continuité monotone, on en déduit que $\lim_{t \to x^-} F_X(t) = \mathrm{p}(X < x)$, c'est à dire :

$$\lim_{t \to x^-} F_X(t) = F_X(x) - \mathrm{p}(X = x).$$

□

Exercice 31.11

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Soit F_X sa fonction de répartition.

1) Montrer que le graphe de F_X est un « faux escalier » qui comporte éventuellement un nombre infini de marches.

2) Montrer que les marches ont pour abscisses des points x tels que $\mathrm{p}(X = x) \neq 0$, c'est à dire des valeurs possibles de x.

3) Montrer que la hauteur de la marche d'abscisse x est $\mathrm{p}(X = x)$.

9 Convergences

9.1 Markov and co

Dans tout ce paragraphe, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$.

Propriété 31.82 (Inégalité de Markov)

Soient X une variable aléatoire réelle discrète et $a \in \mathbb{R}_*^+$. Si la variable aléatoire X admet une espérance et si $X \geq 0$ alors :

$$\forall a > 0, \ \ \mathrm{p}(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{a}.$$

Preuve :

Propriété 31.83 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète qui admet un moment d'ordre 2.

$$\forall \epsilon > 0, \ \ \mathrm{p}(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{(\sigma(X))^2}{\epsilon^2}$$

✓ En reprenant les mêmes notations que précédemment, comme l'inégalité de BAT est vraie,et que l'on remarque l'inclusion : $(|X - E(X)| > \epsilon) \subset (|X - E(X)| \geq \epsilon)$, l'inégalité

$$\mathrm{p}(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{(\sigma(X))^2}{\epsilon^2}$$

est encore vraie pourvu que X admette un moment d'ordre 2.

Ptitexo: *Un parti politique fait un sondage pour évaluer son image dans l'opinion. La population qui lui est favorable est $p \in]0; 1]$. On interroge un* *échantillon de n personnes. La i-ième réponse est une variable aléatoire X_i qui suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On considère que les variables $X_i, \cdots, X_n$ sont indépendantes et on pose $S = X_1 + \cdots + X_n$*

1) *Que représente S_n ?*

2) *Déterminer l'espérance et la variance de $\dfrac{S_n}{n}$.*

3) *Soit $\epsilon > 0$. Montrer que : $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geq\right) \leq \dfrac{1}{4n\epsilon^2}$*

4) *Soit $\alpha \in]0;1[$. Combien de personnes doit-on interroger pour obtenir une approximation de p à ϵ près avec une probabilité supérieure ou égale à $1-\alpha$? Application numérique : $\epsilon = 0,05$ et $\alpha = 0,05$*

<u>Ptitexo:</u>

1. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $\lambda > 0$. Soit X une VARD qui admet un moment d'ordre r. Montrer que $p(|X| \geq \lambda) \leq \dfrac{E(|X|^r)}{\lambda^r}$.*
2. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit X une VARD. Montrer que si f est une fonction croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_*^+$, si $E(f(X))$ existe,alors*
$$p(X \geq a) \leq \frac{E(f(X))}{f(a)}.$$

9.2 Loi faible des grands nombres

Définition 31.84 (Convergence en probabilités)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathrm{p})$, et Z une autre variable aléatoire réelle définie sur ce même espace probabilisé . On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en probabilité** vers Z si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} p(|X_n - Z| \geq \epsilon) = 0.$$

Exemple : Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\dfrac{1}{n})$ alors la suite de va $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 0.

Théorème 31.85 (Loi faible des grands nombres)

Pour toute suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variable aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé, de même loi , admettant une espérance m et une variance σ^2, la suite de VARD $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à m, plus précisément :

$$\forall \epsilon > 0, \;\; \mathrm{p}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

✓ Comme le montre la preuve qui suit, il suffit, en fait, pour utiliser ce théorème que les va $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient 2 à 2 non corrélées, c'est à dire que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \; (i \neq j), \;\; \mathrm{cov}\, X_i, X_j = 0$.