**Théorème.** *Soit $A$ une matrice de taille $m \times n$. Les énoncés suivants sont équivalents*

*a)* $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $A\vec{x} = \vec{b}$,

*b)* $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{b} \in \mathrm{Col}(A) = \mathrm{Vect}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$,

*b1)* $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^n$,

*c)* $A\vec{x} = \vec{b}$ *represente un système compatible pour tout* $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$,

*d) La forme échelonnée réduite de $A$ a une position pivot dans chaque ligne,*

*d1) La forme échelonnée de $A$ a une position pivot dans chaque ligne.*

*Preuve.* Nous allons démontrer le circuit d'implications suivant en commençant par la droite et en avançant vers la gauche:

$$a) \implies d) \implies c) \implies b) \implies a).$$

**b)** $\implies$ **a)**. Considerons un vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. En supposant $b)$ vrai, $\vec{b} \in \mathrm{Col}(A)$, ce qui implique

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } \ \vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n,$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont les colonnes de $A$. Soit maintenant

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

alors $\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = A\vec{x} = \vec{b}$ et l'énoncé $a)$ est vrai.

**c)** $\implies$ **b)**. En supposant $c)$ vrai, pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ il existe $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$ tel que $A\vec{s} = \vec{b}$. Comme $A\vec{s} = s_1\vec{a}_1 + \ldots + s_n\vec{a}_s$ est une combinaison linéaire des colonnes de $A$, nous avons $A\vec{s} \in \mathrm{Col}(A)$, et comme $\vec{b} = A\vec{s}$, nous avons $\vec{b} \in \mathrm{Col}(A)$ aussi.

**d)** $\implies$ **c)**. En supposant $d)$ vrai, pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ la forme échelonnée réduite de la matrice augmentée représentante le système $A\vec{x} = \vec{b}$ n'a pas de ligne de la forme $(0, 0, \ldots, 0, \alpha)$ pour $\alpha \neq 0$, ce qui implique $c)$.

**a)** $\implies$ **d)**. Nous allons montrer l'implication équipollente "non" $d)$ $\implies$ "non" $a)$. Si "non" $d)$ est vrai, la forme échelonnée réduite de $A$ a au moins une ligne sans pivot, ou équivalemment la forme échelonnée réduite de $A$ a que des zéros à la dernière ligne. Pour que "non" $a)$ soit vrai, il faut que pour au moins un vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ il n'existe pas un $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $A\vec{x} = \vec{b}$. Appellons $(A \mid \vec{b})$ la matrice augmentée de $A\vec{x} = \vec{b}$, dont la forme échelonnée réduite, obtenue avec les mêmes oprations utilisée pour mettre $A$ sous forme échelonnée réduite, a des zéros sur la dernière ligne, où graphiquement

$$\text{Forme échelonnée réduite de } (A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & c_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_m \end{pmatrix}.$$

Où $c_1, \ldots, c_m$ sont obtenus de $b_1, \ldots, b_m$ avec les opérations sur les lignes nécessaires pour obtenir la forme échelonnée réduite. Choisissons maintenant

$$\vec{c}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquants les opérations sur le lignes "dans le sens enverse", on obtient un vecteur $\vec{b}^*$ qui depend de $\vec{c}^*$ et tel que le problème $A\vec{x} = \vec{b}^*$ n'a pas de solution car la forme échelonnée réduite de la matrice augmentée a une ligne de la forme $(0, 0, \ldots, 0, 1)$, ce qui implique "non" $a)$. $\square$