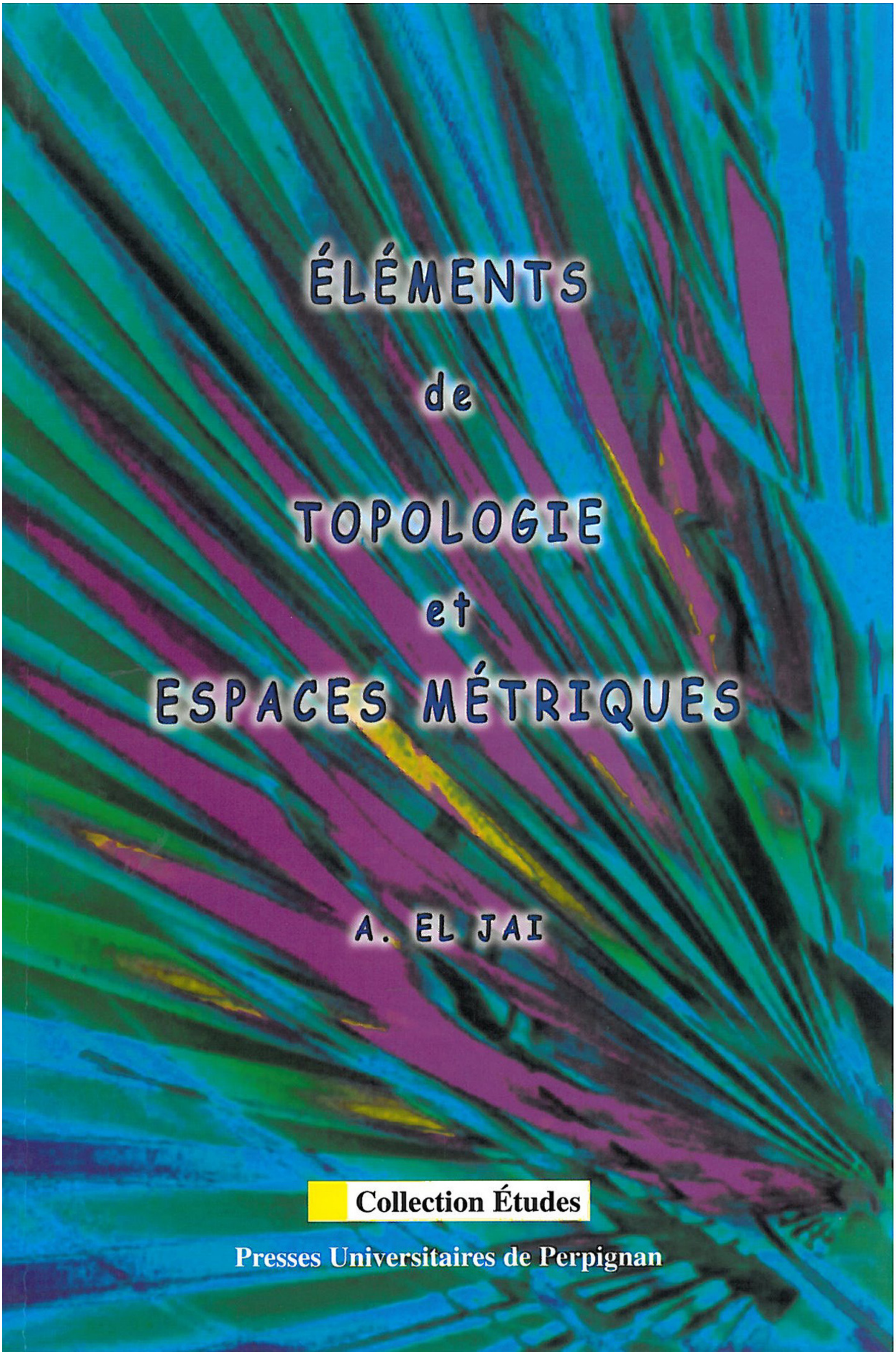
Eléments de topologie et espaces métriques

Abdelhaq El Jai



ÉLÉMENTS de TOPOLOGIE et ESPACES MÉTRIQUES

A. EL JAI

Collection Études

Presses Universitaires de Perpignan

UNIVERSITE DE PERPIGNAN

ELEMENTS

de

TOPOLOGIE
et
ESPACES METRIQUES

A. El Jai

Professeur à l'Université de Perpignan

Mars 2007

Avant-propos

Cet ouvrage est destiné aux étudiants et chercheurs qui souhaitent approfondir leurs connaissances en topologie et sur les espaces métriques et vectoriels normés. Il s'adresse tout particulièrement aux étudiants de licence, master, ainsi qu'aux élèves ingénieurs de diverses disciplines. Il résulte de diverses notes de cours donnés depuis le début des années 80. On retrouve dans de nombreux ouvrages des développements sur les espaces topologiques. Les différentes notions qui sont explorées font partie du domaine des connaissances standard en mathématiques pures mais elles sont utiles dans divers autres directions des mathématiques appliquées, de l'optimisation, de l'analyse numérique, de la théorie des systèmes, etc.

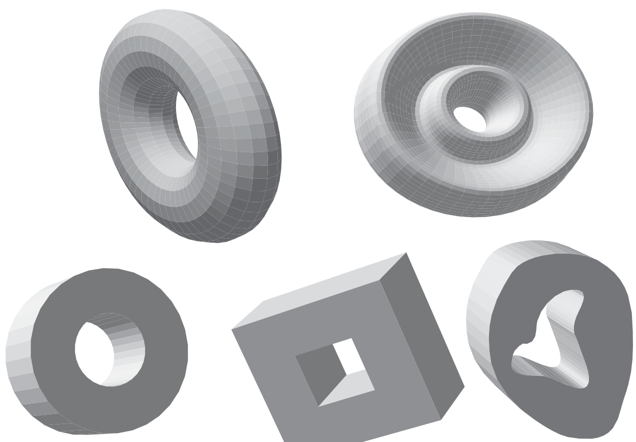


Figure 1

La topologie est la branche des mathématiques qui étudie la notion intuitive de limite et de continuité. A titre d'exemple, considérons les images des figures *1* et *2*. Intuitivement il y a une relation entre toutes les images représentées sur la même figure ; on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue. Par contre il semble évident qu'il n'y a pas de déformation continue qui puisse faire passer de

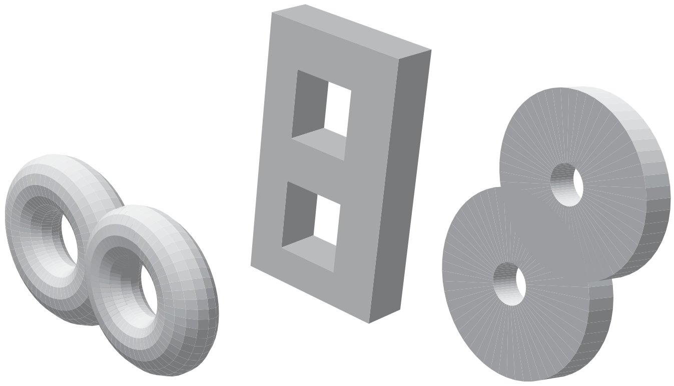


Figure 2

l'une quelconque des images de la figure *1* à une des images de la figure *2*.

Pour définir la notion de limite, il faut se donner un moyen de savoir si deux points sont voisins. Pour cela, il est assez naturel de mesurer la distance entre ces deux points. On peut donc parler facilement de limite pour les applications agissant entre des espaces sur lesquelles une distance a été définie. Seulement il arrive qu'on dispose, par exemple, d'applications dans un espace de fonctions sur lequel il n'y a pas de distance qui rende les fonctions continues. Par conséquent il faut ajouter un moyen, autre que la distance, pour préciser que deux points sont voisins. D'où la notion de voisinage et ce qui en découle. Pour une approche intuitive de cette notion, on renvoie le lecteur à l'ouvrage de Bruter [2].

La notion de limite a été utilisée pour les suites et les fonctions numériques, sans définition axiomatique, au début du 19ème siècle par Abel (1802-1829), Cauchy (1789-1857) et d'autres. Plus tard elle a été axiomatisée par Hilbert (1862-1943) avec la notion de voisinage. Mais c'est Hausdorff (1868-1942) qui donna plus tard à une topologie sa définition actuelle. Les notions de compact (Alexandrov 1896-1982, Tychonov 1906-1993, $\cdots$) et celle de filtre (Cartan) suivirent. Divers développements relatifs aux problèmes géométriques et aux problèmes différentiels furent ensuite explorés. Pour les premiers, l'outil principal vise à définir les invariants algébriques ; cela a conduit à la topologie algébrique. Pour les problèmes relatifs aux variétés différentiables ; cela a conduit à la topologie différentielle.

La notion de métrique a été considérée par Fréchet (1886-1971) et Riesz (1880-1956), celle d'espace métrique résultant directement des propriétés de la distance usuelle. Par ailleurs la donnée d'une norme sur un espace vectoriel permet de faire de l'analyse tout en privilégiant les opérations linéaires. La théorie des espaces de Hilbert trouve son origine dans celle des développements des fonctions en séries de fonctions orthogonales, lesquelles apparaissent le plus souvent comme fonctions propres d'opérateurs différentiels linéaires (séries de Fourier).

Dans cet ouvrage on développe la notion de topologie et on étudie divers types d'espaces topologiques tels que les espaces connexes, séparés et compacts avec toutes les extensions. La notion de métrique et celle d'espace métrique sont également développées. On s'intéresse également aux espaces vectoriels normés, aux espaces de Banach et au prolongement des formes linéaires. Enfin la théorie des espaces de Hilbert est abordée dans un dernier chapitre.
Diverses propriétés sur les ensembles (applications, familles, ensembles ordonnés, notion de dénombrabilité et de puissance d'ensemble) sont utilisées ici ou là. Elles sont rappelées dans une annexe en fin d'ouvrage.
Les diverses notations utilisées sont résumées dans une rubrique "Notations" donnée juste après la table des matières.

Pour la relecture de ce document, mes remerciements vont à Marie, Samira et Yves. Pour la réalisation des divers graphiques, je ne saurais assez remercier Yves pour sa patience. Je tiens à remercier également de nombreux collègues pour leurs encouragements, leurs commentaires et leurs remarques.

Table des matières

Notations

Ensembles

$\mathbb{N}$	:	Entiers naturels
$\mathbb{R}$	:	Nombres réels
$\mathbb{Q}$	:	Nombres rationnels
$\mathbb{C}$	:	Nombres complexes
$\aleph_0$	:	Cardinal de $\mathbb{N}$ (aleph zero)
$\emptyset$	:	Ensemble vide
$\mathcal{P}(X)$	:	Ensemble des parties de X
$\complement A$	:	Complémentaire de A, noté aussi $\complement(A)$
$\complement_X A$	:	Complémentaire de A dans X
$\overline{A}$	:	Adhérence de A
A'	:	Ensemble des points d'accumulation de A appelé encore ensemble dérivé de A
$\overset{\circ}{A}$	:	Intérieur de A, noté encore $Int(A)$
A^*	:	Frontière de A, notée aussi $Fr(A)$
$Ext(A)$	:	Extérieur de A
$Is(A)$	:	Ensemble des points isolés de A
$A^\perp$	:	Orthogonal de A
$supp(f)$	:	Support de la fonction f
$\delta(A)$	:	Diamètre de $A = \sup\limits_{(x_1,x_2)\in A^2} d(x_1,x_2)$ où $d(x_1,x_2)$ est la distance de x_1 à x_2
$(x\|y)$	:	Produit scalaire de x et de y
$\\|x\\|_E$	:	Norme de x dans E

Espaces de fonctions

ℓ^α	:	Espace des suites $x = (x_i) \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{1=0}^{\infty} \lvert x_i\rvert^\alpha < \infty$
$B(X, \Lambda)$	:	Espace des applications bornées $f : X \longrightarrow \Lambda$ muni de la norme $f \longrightarrow \sup_{x\in X} \lvert f(x)\rvert$
ℓ^∞	:	Espace $B(\mathbb{N}, \Lambda)$ des suites bornées $x = (x_n)$ d'éléments de Λ
$\mathcal{C}(X, \Lambda)$	:	Espace des applications continues $X \longrightarrow \Lambda$
$L(E, F)$	:	Espace des applications linéaires $E \longrightarrow F$
$\mathcal{L}(E, F)$	:	Espace des applications linéaires continues $E \longrightarrow F$
$\mathcal{L}(E)$	:	$\mathcal{L}(E, E)$
E'	:	$\mathcal{L}(E, \Lambda)$ est le dual topologique de E
E^*	:	$L(E, \Lambda)$ est le dual algébrique de E
$\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$	:	Espace des applications bilinéaires continues de $E_1 \times E_2 \longrightarrow F$
$\mathcal{H}(E; F)$	:	Espace des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E; F)$
$L^p(0, T; X)$	:	Ensemble des fonctions $f :]0, T[\mapsto X$ telles que $t \mapsto \parallel f(t) \parallel^p$ est intégrable sur $]0, T[$

Chapitre 1

Espaces topologiques Applications continues

1 Topologie - Ouvert

Soit X un ensemble quelconque et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

1-a Définition

Définition 1.1 *On appelle topologie sur X toute partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant les trois propriétés suivantes*
(θ_1) *La réunion de toute famille d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$.*
(θ_2) *L'intersection de toute famille finie d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$.*
(θ_3) *L'ensemble vide $\emptyset$ et X appartiennent à $\mathcal{T}$.*

$(X, \mathcal{T})$ *s'appelle espace topologique de support X. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés ouverts de $(X, \mathcal{T})$ ou de $\mathcal{T}$, souvent notés $\mathcal{O}$.*

Remarque 1.2
1.) La réunion de la famille vide de parties de X étant vide et son intersection égale à X (voir annexe), la propriété (θ_3) se déduit de (θ_1) et (θ_2).
2.) Pour (θ_2) il suffit de montrer, en général, que l'intersection de deux éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$.
3.) $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.
4.) Toute partie de $\mathcal{P}(X)$ n'est pas une topologie.

1-b Exemples de topologies

1.) L'ensemble des parties A de $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in A$, il existe un intervalle ouvert $]a,b[$ tel que $x \in]a,b[\subset A$ est une topologie sur $\mathbb{R}$ appelée topologie euclidienne.

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in A, \exists]a,b[\text{ avec } x \in]a,b[\subset \mathbb{R}\}$$

2.) $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X appelée topologie grossière ou chaotique. C'est celle qui a le moins d'ouverts. (X,$\mathcal{T}$) s'appelle espace topologique grossier.

3.) $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X appelée topologie discrète. C'est celle qui a le plus d'ouverts. $(X, \mathcal{T})$ s'appelle espace topologique discret.

4.) Si $X = \emptyset$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ est la seule topologie sur X.

5.) Si $X = \{a\}$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}\}$ est la seule topologie sur X.

6.) Si X possède au moins deux éléments $X = \{a, b\}$, alors $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ est une topologie sur X dite topologie de Sierpinski [1].

7.) $\mathcal{T} = \{A \subset X \mid \complement A \text{ fini }\} \cup \emptyset$ est une topologie sur X, dite topologie cofinie.

1-c Base d'une topologie

Définition 1.3 *On appelle base d'une topologie $\mathcal{T}$ toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ telle que tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathcal{T}$ soit la réunion d'une famille d'ouverts de $\mathcal{B}$.*

Remarque 1.4 *$\emptyset$ étant la réunion de la famille vide, il n'est pas nécessaire que $\emptyset \in \mathcal{B}$.*

Exemple 1.5 *Exemples de bases de topologies.*
1.) $\mathcal{T}$ est une base de $\mathcal{T}$.

2.) $\{\{x\} \mid x \in X\}$ est une base de la topologie discrète.

1. Waclaw Sierpinski, Mathématicien polonais, 1892-1969

3.) L'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ *est une base de la topologie euclidienne de* $\mathbb{R}$.

Proposition 1.6 *Une partie* $\mathcal{B}$ *est une base de* $\mathcal{T}$ *si et seulement si pour tout* $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ *et pour tout* $x \in \mathcal{O}$, *il existe* $\omega \in \mathcal{B}$ *tel que* $x \in \omega \subset \mathcal{O}$.

> *Démonstration.*
> La condition nécessaire est évidente. Pour la condition suffisante, soit $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$, pour tout $x \in \mathcal{O}$, il existe $\omega_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in \omega_x \subset \mathcal{O}$. Et on a $\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} \omega_x$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$. ∎

2 Voisinage

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, qu'on notera pour simplifier X.

2-a Définition

Définition 2.1
(1) On appelle voisinage d'un point $x \in X$, *toute partie de* X *qui contient un ouvert contenant* $\{x\}$.
(2) Plus généralement on appelle voisinage d'une partie A *de* X, *toute partie de* X *qui contient un ouvert contenant* A.

On note :
$v(x)$ l'ensemble des voisinages de x.
$v(A)$ l'ensemble des voisinages de A.

Exemple 2.2 *Exemples de voisinages.*
1.) Dans X *grossier, le seul voisinage d'un point* x *est* X.

2.) Dans X *discret, toute partie contenant* $\{x\}$ *est un voisinage de* x, *en particulier* $\{x\} \in v(x)$.

Proposition 2.3 *Pour que* V *soit un voisinage d'une partie* A *de* X, *il faut et il suffit que* V *soit voisinage de tous les points de* A.

> *Démonstration.*
> La condition nécessaire est évidente. Pour la condition suffisante, pour tout $x \in A$, $V \in v(x)$ et donc il existe $\mathcal{O}_x$ tel que $x \in \mathcal{O}_x \subset V$. Ainsi $\bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_x$ est un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $A \subset \mathcal{O} \subset V$, donc $V \in v(A)$. ∎

2-b Caractérisation des ouverts

Proposition 2.4 *Pour qu'une partie A de X soit ouverte, il faut et il suffit que A soit voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration.
En effet, pour que A soit voisinage de chacun de ses points il faut et il suffit, d'après la proposition précédente, que $A \in v(A)$ c'est-à-dire qu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $A \subset \mathcal{O} \subset A$, donc que A soit ouvert. ∎

2-c Caractérisations des voisinages

Proposition 2.5 *Soit $x \in X$, on a les propriétés suivantes.*

(V_1) *Tout ensemble contenant un voisinage de x est un voisinage de x.*
(V_2) *L'intersection de toute famille finie de voisinages de x est un voisinage de x.*
(V_3) *Tout voisinage de x contient $\{x\}$.*
(V_4) *Pour tout $V \in v(x)$, il existe $U \in v(x)$ tel que pour tout $y \in U$, on ait $V \in v(y)$ (c'est-à-dire $V \in v(U)$).*

Démonstration.
(V_1) et (V_3) sont évidentes.
(V_2) résulte de la définition d'un voisinage et de (θ_2).
(V_4) : il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset V$, on a bien $U \in v(x)$ et aussi $V \in v(U)$, d'après la définition d'un voisinage de U. ∎

Proposition 2.6 *: Réciproque*
Soit X un ensemble quelconque et soit, pour tout $x \in X$, un ensemble $w(x)$ de parties de X satisfaisant les quatre points suivants.

(1) Toute partie de X contenant $W \in w(x)$, appartient à $w(x)$.
(2) L'intersection de toute famille finie d'ensembles de $w(x)$ appartient à $w(x)$.
(3) Tout $W \in w(x)$ contient $\{x\}$.
(4) Pour tout $W \in w(x)$, il existe $U \in w(x)$ tel que pour tout $y \in U$, on ait : $W \in w(y)$.

Alors il existe une topologie $\mathcal{T}$ unique sur X telle que, pour tout $x \in X$, on a $v(x) = w(x)$.

<u>*Démonstration.*</u>
• *Unicité.* Si une telle topologie existe, ses ouverts sont les parties A de X qui sont voisinages de chacun de leurs points. C'est-à-dire pour tout $x \in A$, $A \in v(x) = w(x)$. Cette topologie ne peut donc être que :

$$\mathcal{T} = \{A \subset X \mid \text{ pour tout } x \in A,\ A \in w(x)\}$$

d'où son unicité.
• *$\mathcal{T}$ est une topologie.* En effet $\mathcal{T}$ est l'ensemble des parties $A \subset X$ telles que, pour tout $x \in A$, $A \in w(x)$ et $\emptyset \in \mathcal{T}$. Vérifions les propriétés de la définition d'une topologie.

(θ_1) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$ et

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i$$

Si $x \in A$, alors il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ donc il existe $i \in I$, tel que $A_i \in w(x)$ or $A \supset A_i$ donc d'après (1) $A \in w(x) \Longrightarrow A \in \mathcal{T}$.

(θ_2) Soit $(A_i)_{i\in J}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{T}$ et

$$A = \bigcap_{j\in J} A_j$$

Si $x \in A$, alors pour tout $i \in J$, $x \in A_i$ et donc pour tout $i \in J$, $A_i \in w(x)$ et la propriété (2) donne $A \in w(x)$.

(θ_3) $\emptyset \in \mathcal{T}$ par définition de $\mathcal{T}$.
$X \in \mathcal{T}$. En effet, soit $x \in X$, il existe $W \in w(x)$ or $X \supset W$ donc la propriété (1) donne $X \in w(x)$.

• *Montrons que* $v(x) = w(x)$. Soit $v(x)$ l'ensemble des voisinages de x pour $\mathcal{T}$, montrons que, pour tout $x \in X$, $v(x) = w(x)$, par double inclusion.

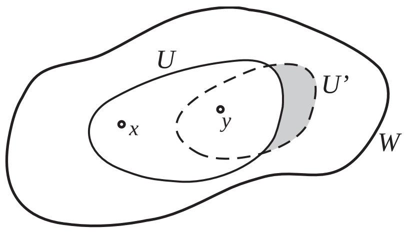
1. $v(x) \subset w(x)$. Soit $V \in v(x)$, il existe A ouvert $\subset V$ tel que ($A \in \mathcal{T}$ et $x \in A$) donne $A \in w(x)$ (par définition de $\mathcal{T}$). Or

$V \supset A$ implique $V \in w(x)$ (d'après (1)), donc $v(x) \subset w(x)$.

2. $w(x) \subset v(x)$. Soit $W \in w(x)$. Montrons que $W \supset$ ouvert de $\mathcal{T}$ qui contient x. On définit cet ouvert comme suit

$$\mathcal{U} = \{y \in X, \;\; W \in w(y)\}$$

$\star$ $x \in \mathcal{U}$ car $W \in w(x)$
$\star$ $\mathcal{U} \subset W$. Si $y \in \mathcal{U}$, on a $W \in w(y)$ or la propriété (3) donne $y \in W$ et donc $\mathcal{U} \subset W$.
$\star$ $\mathcal{U}$ ouvert (pour $\mathcal{T}$), c'est à dire, pour tout $y \in \mathcal{U}$, on a $\mathcal{U} \in w(y)$. On a $W \in w(y)$, d'après la propriété (4) , il existe $\mathcal{U}' \in w(y)$ tel que, pour tout $z \in \mathcal{U}'$, $W \in w(z)$. Montrons que $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$.
Si $z \in \mathcal{U}'$, alors $W \in w(z)$ et donc $z \in \mathcal{U}$. On a donc : ($\mathcal{U}' \in w(y)$ et $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$), cela donne $\mathcal{U} \in w(y)$ (propriété (1)) et par conséquent $\mathcal{U}$ est ouvert.



Enfin $W \supset \mathcal{U}$ ouvert contenant x implique $W \in v(x)$ et donc $w(x) \subset v(x)$.
Finalement $w(x)$ est l'ensemble des voisinages de x et est égal à $v(x)$. Ceci achève la démonstration. ■

Remarque 2.7 *Cette réciproque montre qu'une topologie sur X peut également être définie par l'ensemble $\{w(x) \mid x \in X\}$ où $w(x)$ vérifie (1) - (2) - (3) - (4), c'est-à-dire par les voisinages des points de X.*

2-d Bases de voisinages

Définition 2.8 *On appelle base de voisinage (ou système fondamental de voisinages) de x toute partie $s(x)$ de $v(x)$ telle que, pour tout $V \in v(x)$, V contient un voisinage W de $s(x)$.*

Exemple 2.9
1.) $s(x) = v(x)$ *est une base des voisinages.*

2.) $s(x) = \{\mathcal{O} \in \mathcal{T} \mid x \in \mathcal{O}\}$ *est une base de voisinages.*

3.) Dans $\mathbb{R}$, $s(x) = \left\{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ *est une base de voisinages de* x.

4.) Dans X *discret,* $s(x) = \{\{x\} \mid x \in X\}$ *est une base de voisinages de* x.

3 Fermé

Soit X un espace topologique. Introduisons la définition suivante.

Définition 3.1 *On dit qu'une partie* A *de* X *est fermée si son complémentaire par rapport à* X*, noté* $\complement_X A$*, est ouvert.*

Remarque 3.2 *La définition ci-dessus ne signifie pas qu'un ensemble fermé est un ensemble non ouvert.*

Exemple 3.3
1.) $\{a\}, [a, b]$ *et* $[a, +\infty[$ *sont fermés dans* $\mathbb{R}$.

2.) X *et* $\emptyset$ *sont fermés. Il existe des ensembles ouverts et fermés appelés* "ofs" *. Par exemple dans* X *discret, toute partie de* X *est un of.*

3.) $[a\ ,\ b[$ *et* Q *ne sont ni ouverts ni fermés dans* $\mathbb{R}$.

3-a Propriétés

Propriété 3.4 *Nous avons les propriétés immédiates suivantes.*
(F_1) *L'intersection de toute famille de fermés est fermée.*
(F_2) *La réunion de toute famille finie de fermés est fermée.*
(F_3) X *et* $\emptyset$ *sont fermés.*

Démonstration.
Immédiate à partir de (θ_1), (θ_2) et (θ_3) et par passage aux complémentaires. ■

Remarque 3.5 *La réunion d'une famille quelconque (et même dénombrable) de fermés n'est pas toujours fermée. Par exemple dans* $\mathbb{R}$*, l'ensemble*

$$\mathbb{Q} = \{r_0, r_1, \cdots, r_n, \cdots\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} r_n$$

est non fermé.

Si on note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés, on a le diagramme suivant (1.3.1).

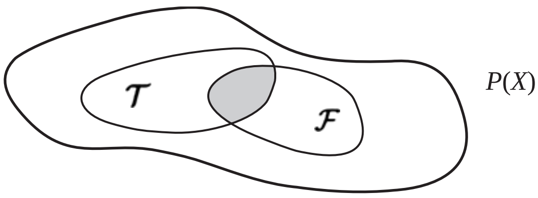


FIGURE 1.3.1 – *Ensembles* $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{F}$.

3-b Ensembles de type F_σ et G_δ

Commençons par une remarque. Dans $\mathbb{R}$, considérons, pour $n \geq 2$,

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] =]0, 1[$$

On a une réunion dénombrable des fermés qui est un ouvert. On montre également que l'intersection infinie d'ouverts n'est pas toujours un ouvert.

Définition 3.6 *Soit* A *une partie d'un espace topologique* X*.*
(1) On dit que A *est de type* F_σ *si* A *est réunion d'une famille dénombrable de fermés*

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \quad \text{où} \quad F_n \text{ est fermé}$$

(2) On dit que A *est de type* G_δ *si* A *est intersection d'une famille dénombrable d'ouverts*

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n \quad \text{où} \quad \mathcal{O}_n \text{ est ouvert}$$

Remarque 3.7
1.) A de type $F_\sigma \Longleftrightarrow \complement_X A$ *est de type* G_δ*. En effet,*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \Longrightarrow \complement_X A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \complement_X F_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$$

2.) Tout fermé est de type F_σ *(*$F = \bigcup_n F_n$ *où, pour tout* n*,* $F_n = F$*) et tout ouvert est de type* G_δ*.*
3.) Il existe des parties de X *qui ne sont ni de type* F_σ *ni* G_δ*. A titre d'exemple, dans* X *grossier considérons* $A \neq X$ *et* $A \neq \emptyset$*, alors toute réunion de fermés =* $\emptyset$ *ou* X *et donc n'est jamais égale à* A*, par conséquent* A *n'est pas de type* F_σ*. De même, toute intersection d'ouverts =* $\emptyset$ *ou* X *et donc n'est jamais égale à* A*, et donc* A *n'est pas de type* G_δ*.*

Exemple 3.8
1.) Dans $\mathbb{R}$ *muni de la topologie usuelle,* $[a, b[$ *est de type* F_σ *et* G_δ*.*

- *En effet, il est de type* F_σ *car* $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}] = [a, b[$*.*
- *Il est de type* G_δ *car* $\bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b[= [a, b[$*.*

2.) $\mathbb{Q}$ *est de type* F_σ *car (voir annexe)* $\mathbb{Q}$ *est dénombrable et peut s'écrire sous la forme* $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{r_n\}$*, mais* $\mathbb{Q}$ *n'est pas de type* G_δ*.*

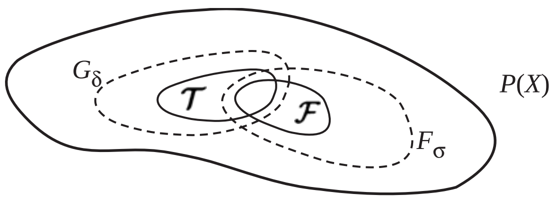


FIGURE 1.3.2 – *Ensembles* G_δ *et* F_σ*.*

Remarque 3.9
1.) L'intersection d'une famille d'ensembles de type F_σ *est de type* F_σ*.*
2.) La réunion d'une famille d'ensembles de type G_δ *est de type* G_δ *(au delà, on arrive aux ensembles, dits de Borel, qui sont plus importants).*

4 Intérieur - Adhérence - Frontière - Point d'accumulation

Soient A et B deux parties d'un espace topologique X.

4-a Intérieur

Définition 4.1
(1) Un point $x \in X$ est dit intérieur à A si A est voisinage de x ($A \in v(x)$).
(2) L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et est noté $\overset{\circ}{A}$ ou $Int(A)$.

Exemple 4.2
Dans $\mathbb{R}$, pour tout intervalle de la forme $A = |a, b|$, on a $\overset{\circ}{A}=]a, b[$.

Proposition 4.3 *L'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A est la réunion de la famille $(\theta_i)_{i\in I}$ de tous les ouverts inclus dans A.*

<u>*Démonstration.*</u>

$$\begin{aligned} x \in \overset{\circ}{A} &\iff A \in v(x) \\ &\iff \text{il existe } \ i \in I \ \text{ tel que } \ x \in \theta_i \subset A \\ &\iff x \in \bigcup_{i\in I} \theta_i \end{aligned}$$

■

Corollaire 4.4
(1) $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.
(2) A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.
(3) Si $A \subset B$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

<u>*Démonstration.*</u>
Elles sont simples. Considérons la propriété (3). En effet, $\overset{\circ}{A} \subset A \subset B$ et donc $\overset{\circ}{A}$ est contenu dans le plus grand ouvert contenu dans B, c'est-à-dire $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$. ■

Remarque 4.5 *On déduit de (2) que*

$$\mathring{\emptyset}= \emptyset \ , \ \mathring{X}= X \ , \ \mathring{\mathring{A}}=\mathring{A}$$

Propriété 4.6

(1) $\mathring{A} \cap \mathring{B}=\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$.

(2) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.

> *Démonstration.*
> Par double inclusion.
> (1) D'une part, $\mathring{A}$ et $\mathring{B}$ sont des ouverts, donc $\mathring{A}\subset A$ et $\mathring{B}\subset B$. Par conséquent $\mathring{A} \cap \mathring{B}\subset A \cap B$ et donc $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est contenu dans le plus grand ouvert de $A \cap B$, c'est-à-dire $\mathring{A} \cap \mathring{B}\subset\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$.
> D'autre part, $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B \Longrightarrow\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}\subset\mathring{A}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}\subset\mathring{B}$ donc $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}\subset\mathring{A} \cap \mathring{B}$.
>
> (2) $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ est un ouvert inclus dans $A \cup B$, donc contenu dans le plus grand ouvert contenu dans $A \cup B$. ■

Remarque 4.7 *En général, on n'a pas* $\mathring{A} \cup \mathring{B}=\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$. *A titre de contre-exemple, considérons dans* $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$ *et* $B = [1, 2]$. *Nous avons* $\mathring{A}=]0, 1[$ *et* $\mathring{B}=]1, 2[$. *Ainsi* $A\cup B = [1, 2]$ *et* $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}=]0, 2[$ *qui est différent de* $\mathring{A} \cup \mathring{B}=]0, 2[-\{1\}$. ■

4-b Extérieur

Définition 4.8 *Un point* $x \in X$ *est dit extérieur à* A *s'il est intérieur au complémentaire* $\complement_X A$ *de* A *(*$x \in\overset{\circ}{\overbrace{\complement_X A}}$*).*

L'ensemble des points extérieurs à A s'appelle l'extérieur de A et est noté $Ext(A)$.

Remarque 4.9 *Nous avons évidemment*

$$Ext(A) = \overset{\circ}{\overbrace{\complement A}}$$

4-c Adhérence

Définition 4.10 *Un point $x \in X$ est adhérent à A si tout voisinage de x rencontre A. L'ensemble des points adhérents s'appelle l'adhérence (ou fermeture) de A et est noté $\overline{A}$.*

Exemple 4.11
1.) Dans $\mathbb{R}$, $\overline{Q} = \mathbb{R}$.

2.) Si A est borné dans $\mathbb{R}$, *alors* $\inf A$ *et* $\sup A \in \overline{A}$.

Propriété 4.12 *: Relation avec l'intérieur*
Nous avons

$$\complement(\overline{A}) = \overset{\circ}{\overbrace{\complement A}} = Ext(A)$$

<u>*Démonstration.*</u>

$$\begin{aligned} x \in \complement(\overline{A}) &\iff \text{il existe } V \in v(x) \text{ tel que } V \cap A = \emptyset \\ &\iff \text{il existe } V \in v(x) \text{ tel que } V \subset \complement A \\ &\iff \complement A \in v(x) \\ &\iff x \in \overset{\circ}{\overbrace{\complement A}} \end{aligned}$$

■

Proposition 4.13 *$\overline{A}$ est l' intersection de la famille $(F_i)_{i\in I}$ de tous les fermés qui contiennent A.*

<u>*Démonstration.*</u>
$(\complement F_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts $\subset \complement A$, on a donc

$$\complement\overline{A} = \overset{\circ}{\complement A} = \bigcup_{i\in I} \complement F_i \text{ d'où } \overline{A} = \bigcap_{i\in I} F_i$$

Finalement $\complement\overline{A} = \complement \bigcap_{i\in I} F_i$, d'où le résultat. ■

Corollaire 4.14
(1) $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
(2) A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.
(3) Si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Remarque 4.15 *On déduit immédiatement de (2) que :*

$$\overline{\emptyset} = \emptyset \ , \ \overline{X} = X \ , \ \overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

Propriété 4.16
(1) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
(2) $\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}$.

Démonstration.
(1) Par passage aux complémentaires, nous avons

$$\begin{aligned} \complement(\overline{A \cup B}) &= \overbrace{\complement(A \cup B)}^{\circ} = \overbrace{\complement A \cap \complement B}^{\circ} = \overset{\circ}{\complement A} \cap \overset{\circ}{\complement B} \\ &= \complement\overline{A} \cap \complement\overline{B} = \complement(\overline{A} \cup \overline{B}) \end{aligned}$$

(2) Nous avons, évidemment, $A \cap B \subset A$ et B. D'où $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$. Ce qui donne finalement $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. ∎

Remarque 4.17 *En général, on n'a pas d'égalité, comme le montre le contre-exemple suivant.*
Dans $\mathbb{R}$ avec $A =]0,1[$ et $B =]1,2[$, on a $\overline{A} = [0,1]$, $\overline{B} = [1,2]$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$. Or $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \overline{A \cap B} = \emptyset$.
(Si on considère l'application $f : A \longrightarrow \overline{A}$, alors $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \Longleftrightarrow \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, mais avec l'application $f : A \longrightarrow \overset{\circ}{A}$ on a $f(A \cup B) \neq f(A) \cup f(B)$).

4-d Frontière

Soit A une partie d'un espace topologique X.

Définition 4.18 *Un point $x \in X$ est un point frontière de A si x est adhérent à la fois à A et au complémentaire $\complement A$ de A. L'ensemble des points frontières s'appelle la frontière de A et noté $Fr(A)$ ou A^*.*

Exemple 4.19
1.) Dans $\mathbb{R}$*, soit un intervalle* $A = \mid a, b \mid$ *quelconque mais borné, alors* $A^* = \{a, b\}$.

2.) Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{R}$.

Propriété 4.20
(1) $A^* = \overline{A} \cap \overline{\complement A}$ *(par définition).*
(2) A^* *fermé.*
(3) $(\complement A)^* = A^*$.

Démonstration.
Ces propriétés résultent de la définition. Pour la propriété (3), comme $A^* = \overline{A} \cap \overline{\complement A}$ alors

$$(\complement A)^* = \overline{\complement A} \cap \overline{\complement \complement A} = \overline{\complement A} \cap \overline{A} = A^*$$

■

Proposition 4.21 $A^*, \overset{\circ}{A}$ *et* $Ext(A)$ *forment une partition de* X *(s'ils sont tous non vides).*

Démonstration.
Comme $X = \overline{A} \cup \overline{\complement_A}$ alors trois cas sont possibles.
1er cas : $x \in \overline{A}$ et $\overline{\complement A}$, alors $x \in A^*$.
2ème cas : $x \in \overline{A}$ et $x \notin \overline{\complement A}$, alors $x \in \complement(\overline{\complement A}) = \overset{\circ}{A}$.
3ème cas : $x \notin \overline{A}$ et $x \in \overline{\complement A}$, alors $x \in \complement \overline{A} = Ext(A)$. ■

Remarque 4.22 *On déduit de ce qui précède*

$$\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup A^*$$

car $X = \overline{A} \cup \overline{\complement A} = A^* \cup \overset{\circ}{A} \cup Ext(A)$.

Corollaire 4.23 *Pour que* A^* *soit vide il faut et il suffit que* A *soit un of.*

Démonstration.
$(A^* = \emptyset) \Longleftrightarrow (\overline{A} = \overset{\circ}{A})$ d'après ce qui précède, et par conséquent A est un of. ■

4-e Point d'accumulation

Soit A une partie d'un espace topologique X.

Définition 4.24 *Un point x est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x contient un point de A autre que x. L'ensemble des points d'accumulation est appelé dérivé de A et noté A'.*

Exemple 4.25 *Dans $\mathbb{R}$, l'élément 0 est le seul point d'accumulation de l'ensemble*

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$$

Remarque 4.26
1.) Il est évident que $A' \subset \overline{A}$
2.) Nous avons $\overline{A} - A \subset A'$. En effet, si $x \in \overline{A} - A$ (i.e. $x \in \overline{A}$ et $x \notin A$), alors soit $V \in v(x), V \cap A \neq \emptyset$ et donc il existe $a \in V \cap A$ et a non égal à x car sinon $x \in A$ (ce qui est en contradiction avec $x \in \overline{A} - A$). Par conséquent $x \in A'$.

Proposition 4.27 *Une partie A est fermée si et seulement si $A \supset A'$.*

<u>*Démonstration.*</u>
Condition nécessaire. Si A est fermée, alors $A = \overline{A}$ or $\overline{A} \supset A'$ donc $A \supset A'$.
Condition suffisante. Si $A' \subset A$ on a aussi $\overline{A} - A \subset A' \subset A$. Or si $x \in \overline{A} - A$, alors $x \in A$ si et seulement si $\overline{A} \subset A$ c'est-à-dire $A = \overline{A}$, donc A est fermé. ∎

4-f Point isolé

Définition 4.28 *Un point $a \in A$ est un point isolé de A, s'il existe un voisinage V de a tel que $V \cap A = \{a\}$. On note Is(A) l'ensemble des points isolés de A.*

Exemple 4.29
1.) Dans $\mathbb{R}$, tous les points de $\mathbb{N}$ sont isolés.

2.) Dans X discret, tous les points sont isolés.

Remarque 4.30 *Tout point adhérent à A est soit un point d'accumulation de A, soit un point isolé de A (d'après les définitions). On a donc*

$$\overline{A} = A' \cup Is(A) \quad et \quad A' \cap Is(A) = \emptyset$$

5 Densité topologique

Soit A une partie d'un espace topologique X.

5-a Ensemble partout dense

Définition 5.1 *A est dit partout dense sur X si $\overline{A} = X$ (on dit aussi partout dense dans X).*

Proposition 5.2 *Pour que A soit partout dense sur X il faut et il suffit que tout ouvert $\mathcal{O}$ non vide de X rencontre A ($\mathcal{O} \cap A \neq \emptyset$).*

> *Démonstration.*
> *Condition nécessaire.* Supposons que $\overline{A} = X$. Soit $\mathcal{O}$ ouvert de X et $x \in \mathcal{O}$, donc $x \in \overline{A}$ par conséquent il existe $a \in A \cap \mathcal{O}$ tel que $A \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$.
> *Condition suffisante.* Soit $x \in X$, et soit V un voisinage de x, c'est-à-dire qu'il existe $\mathcal{O} \subset V$ tel que $x \in \mathcal{O}$ or $\mathcal{O} \cap A \neq \emptyset$ donc $V \cap A \neq \emptyset$ et donc $x \in \overline{A}$. ■

Exemple 5.3
1.) $\mathbb{Q}$ est partout dense dans $\mathbb{R}$.

2.) Dans X grossier, toute partie non vide est partout dense.

3.) Dans X discret, X est la seule partie partout dense.

Propriété 5.4 *L'intersection de toute famille finie d'ouverts partout denses dans X est partout dense dans X.*

> *Démonstration.*
> Soit ω un ouvert non vide de X. $\mathcal{O}_1$ partout dense implique $\omega \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$; comme $\omega \cap \mathcal{O}_1$ est ouvert et $\mathcal{O}_2$ partout dense, alors $(\omega \cap \mathcal{O}_1) \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ donc ω rencontre $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ et par conséquent $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ est partout dense. ■

Remarque 5.5
1.) L'intersection de deux ensembles non ouverts et partout denses n'est pas, en général, partout dense. A titre de contre-exemple, considérer dans $X = \mathbb{R}$, $A_1 = \mathbb{Q}$ et $A_2 = \complement\mathbb{Q}$.

2.) Toute partie qui contient une partie partout dense est partout dense.

5-b Ensemble rare

Définition 5.6 *Un ensemble A est dit rare (ou non dense) dans X si*

$$\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$$

Exemple 5.7
1.) Dans $\mathbb{R}$, les ensembles $\{x\}$ et $\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$ sont rares.

2.) $\mathbb{Q}$ n'est pas rare.

Propriété 5.8
(1) Si A est rare, alors toute partie de A est rare.
(2) A est rare si et seulement si $\overline{A}$ est rare.
(3) A est rare si et seulement si $\complement(\overline{A})$ est partout dense, ce qui implique que $\complement A$ est partout dense.

<u>*Démonstration.*</u>
Pour la troisième propriété, A est rare si et seulement si $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$ ce qui équivaut à $\complement \overset{\circ}{\overline{A}} = X$, soit encore $\overline{\complement\overline{A}} = X$, c'est-à-dire encore $\complement\overline{A}$ partout dense (la dernière implication résulte du fait que $\complement A \supset \complement\overline{A}$). ■

Remarque 5.9 *Si $\complement A$ est partout dense $\not\Longrightarrow$ A est rare. A titre de contre-exemple, considérer $X = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{Q}$. Alors nous savons que $\complement\mathbb{Q}$ est partout dense dans $\mathbb{R}$ mais $\mathbb{Q}$ est non rare.*

Propriété 5.10 *La réunion d'une famille finie d'ensembles rares est rare.*

<u>*Démonstration.*</u>
Soient A_1 et A_2 deux ensembles rares.
Premier cas. Si A_1 et A_2 sont fermés alors $\complement A_1$ et $\complement A_2$ sont ouverts et partout denses donc : $\complement A_1 \cap \complement A_2 = \complement(A_1 \cup A_2) = \complement\overline{A_1 \cup A_2}$ l'est aussi donc $A_1 \cup A_2$ est rare.
Deuxième cas. Si A_1 et A_2 ne sont pas fermés alors $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ sont fermés et rares donc $\overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ est rare et $A_1 \cup A_2 \subset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ est également rare. ■

Remarque 5.11 *La réunion d'une famille infinie dénombrable d'ensembles rares n'est pas, en général, rare. En voici un contre-exemple. Considérons $X = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{Q}$. Nous avons*

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{r_n\} = \{r_0, r_1, \cdots, r_n, \cdots\}$$

5-c Ensemble maigre

Définition 5.12 *Un ensemble A est dit maigre si A est réunion infinie dénombrable d'ensembles rares.*

Exemple 5.13 *Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ est maigre (mais non rare).*

Propriété 5.14
(1) Tout ensemble rare est maigre.
(2) Toute partie d'un ensemble maigre est maigre.

Proposition 5.15 *La réunion de toute famille dénombrable $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles maigres est maigre.*

Démonstration.
Notons $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Pour tout n, on a $M_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_{n,p}$ où $A_{n,p}$ est rare. D'où

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_{n,p} = \bigcup_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} A_{n,p}$$

Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, M est maigre. ∎

6 Applications continues

Soient X et X' deux espaces topologiques et soit f une application : $X \longrightarrow X'$. Pour $x_0 \in X$, notons $y_0 = f(x_0) \in X'$.

Définition 6.1 *f est continue en x_0 si, pour tout voisinage $V' \in v(y_0)$, il existe un voisinage $V \in v(x_0)$ tel que $f(V) \subset V'$.*

6-a Caractérisation

Proposition 6.2 *f est continue en x_0 si et seulement si pour tout $V' \in v(y_0)$, alors $f^{-1}(V') \in v(x_0)$.*

<u>*Démonstration.*</u>
• Supposons que f soit continue en x_0 et soit $V' \in v(y_0)$, alors il existe $V \in v(x_0)$ tel que $f(V) \subset V'$. On a alors $f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(V')$ or $f^{-1}(f(V)) \supset V$ donc $V \subset f^{-1}(V')$. Par conséquent $f^{-1}(V')$ est un voisinage de x_0.
• Soit $V' \in v(y_0)$; par hypothèse $f^{-1}(V') \in v(x_0)$. Notons $V = f^{-1}(V') \in v(x_0)$, ainsi $f(V) = f\left[f^{-1}(V')\right] \subset V'$ et donc f est continue en x_0. ■

6-b Image d'un point adhérent

Proposition 6.3 *Si f est continue en un point x_0 adhérent à $A \subset X$, alors $f(x_0) = y_0$ est adhérent à $f(A)$.*

<u>*Démonstration.*</u>
Soit $V' \in v(y_0)$, si f est continue en x_0, alors $f^{-1}(V') \in v(x_0)$. Comme $x_0 \in \overline{A}$ on a : $A \cap f^{-1}(V') \neq \emptyset$, d'où $f(A) \cap V' \neq \emptyset$, c'est-à-dire y_0 adhérent à $f(A)$. ■

6-c Composée d'applications continues

Soient X, X' et X'' trois espaces topologiques. Considérons deux applications $f : X \longrightarrow X'$ et $g : X' \longrightarrow X''$.

Proposition 6.4 *Si f est continue en x_0 et g est continue en $y_0 = f(x_0)$, alors $h = g \circ f$ est continue en x_0.*

<u>*Démonstration.*</u>
Notons $z_0 = g(y_0) = h(x_0)$ et soit $V'' \in v(z_0)$. Comme g est continue en y_0, alors $g^{-1}(V'') \in v(y_0)$. De la même manière si f est continue en x_0, alors $f^{-1}\left(g^{-1}(V'')\right) = h^{-1}(V'') \in v(x_0)$. Donc h est continue en x_0. ■

6-d Applications continues dans X

Définition 6.5 *L'application f est dite continue dans X (ou sur X) si elle est continue en tout point de X.*

Proposition 6.6 *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) f est continue dans X.
(2) Pour toute partie $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(3) L'image réciproque par f de tout fermé F' de X' est un fermé de X.
(4) L'image réciproque par f de tout ouvert $\mathcal{O}'$ de X' est un ouvert de X.

Démonstration.
(1) $\Longrightarrow$ (2) : immédiat à partir de ce qui précède,
(2) $\Longrightarrow$ (3) : Soit F' fermé de X' et $A = f^{-1}(F')$, on a : $f(A) \subset F'$ fermé donc $\overline{f(A)} \subset F'$, or d'après (2) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ et donc $f(\overline{A}) \subset F'$, d'où $\overline{A} \subset f^{-1}(F') = A$, donc A est fermé.
(3) $\Longrightarrow$ (4) : Soit $\mathcal{O}'$ ouvert de X'. $\complement_{X'}\mathcal{O}'$ est un fermé de X' ; d'après (3), $f^{-1}\left(\complement_{X'}\mathcal{O}'\right)$ est un fermé dans X, or $f^{-1}\left(\complement_{X'}\mathcal{O}'\right) = \complement_X f^{-1}(\mathcal{O}')$ et donc $f^{-1}(\mathcal{O}')$ est ouvert dans X.
(4) $\Longrightarrow$ (1) : Soit $x_0 \in X$ et $y_0 = f(x_0)$ et $V' \in v(y_0)$. Il existe un ouvert $\mathcal{O}'$ tel que $y_0 \in \mathcal{O}' \subset V'$. D'après (4) $f^{-1}(\mathcal{O}')$ est ouvert et comme il contient $\{x_0\}$ c'est un voisinage de x_0 ; comme $f^{-1}(V') \supset f^{-1}(\mathcal{O}')$ on a $f^{-1}(V') \in v(x_0)$ et donc f est continue en x_0. ■

Remarque 6.7 *Pour que f soit continue il faut et il suffit que $f^{-1} : \mathcal{P}(X') \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ applique la topologie $\mathcal{T}$' dans $\mathcal{T}$.*

Exemple 6.8
1.) Toute application constante f est continue.
En effet, soit y_0 la valeur constante de f, $y_0 \in X'$. Soit alors $\mathcal{O}'$ un ouvert dans X' alors :
i) Si $y_0 \in \mathcal{O}'$, $f^{-1}(\mathcal{O}') = X$,
ii) Si $y_0 \notin \mathcal{O}'$, $f^{-1}(\mathcal{O}') = \emptyset$.
Dans les deux cas, l'image réciproque est un ouvert.

2.) Soit $f : x \in X \longrightarrow x \in X$ est continue.
Si $\mathcal{O}$' est un ouvert de X, $f^{-1}(\mathcal{O}') = \mathcal{O}'$ est un ouvert de X.

3.) L'application $f : X \longrightarrow X'$ est continue si X est discret car toute partie de X est ouverte.

4.) L'application $f : X \longrightarrow X'$ est continue si X' est grossier.
En effet, soit $\mathcal{O}$' ouvert de X', on a $\mathcal{O}' = \emptyset$ ou X'.
i) $f^{-1}(\mathcal{O}') = \emptyset$ si $\mathcal{O}' = \emptyset$,
ii) $f^{-1}(\mathcal{O}') = X$ si $\mathcal{O}' = X$.
Dans les deux cas, l'image réciproque est un ouvert.

Proposition 6.9 *si f est continue de X dans X' et g est continue de X' dans X'' alors $h = g \circ f$ est continue dans X.*

La démonstration se déduit de la proposition (6.4) sur la continuité en un point.

6-e Homéomorphisme

Définition 6.10
(1) Une application $f : X \longrightarrow X'$ est un homéomorphisme si f est une bijection bicontinue (f et f^{-1} continues).

(2) Les ensembles X et X' sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de X dans X'.

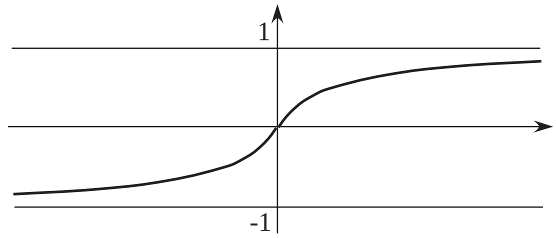
On déduit de ce qui précède que si X et X' sont homéomorphes, alors ils ont le même cardinal. Réciproquement deux ensembles non équipotents (voir annexe) ne peuvent pas être homéomorphes.

Exemple 6.11
1.) Les ensembles $\mathbb{R}$ et]-1,1[sont homéomorphes. Il suffit de considérer l'application

$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \frac{x}{1+ \mid x \mid} \in]-1,1[$$

(on peut voir que $f^{-1} : y \longrightarrow \dfrac{y}{1- \mid y \mid}$).
• *Les ensembles $\mathbb{C}$ et le disque unité ouvert $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1\}$ sont homéomorphes. Considérer l'application*

$$f : z \longrightarrow \frac{z}{1+|z|} = z'$$



(on a encore $f^{-1} : z' \longrightarrow \dfrac{z'}{1-|z'|}$*).*

Proposition 6.12 *Soit f une bijection de X sur X'. Pour que f soit un homéomorphisme, il faut et il suffit que l'image directe et l'image réciproque de tout ouvert soient ouvertes.*

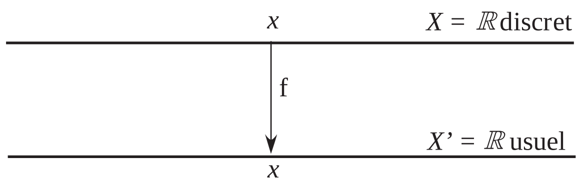
La démonstration est immédiate.

Remarque 6.13 *Si f est un homéomorphisme, alors f est une bijection de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}$' (et il y a autant d'éléments dans $\mathcal{T}$ que dans $\mathcal{T}$'). f est, par abus, étendue aux parties de X.*

Démonstration.
Comme f est une bijection $X \longrightarrow X'$, alors f est une bijection de $\mathcal{P}(X)$ sur $\mathcal{P}(X')$, ceci implique, en particulier, que f est injective dans $\mathcal{T}$.
De plus, si $\mathcal{O}' \in \mathcal{T}$' comme f est continue $f^{-1}(\mathcal{O}')$ est un ouvert de $\mathcal{T}$; donc $f^{-1}(\mathcal{O}') \in \mathcal{T}$ et donc f est une bijection de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}'$. ■

Remarque 6.14 *Si f est une bijection continue $\not\Longrightarrow$ f^{-1} continue (il n'y a pas d'hypothèse superflue). Un contre-exemple est donné ci-dessous.*

Contre-exemple. Considérons $X = \mathbb{R}$ discret, $X' = \mathbb{R}$ usuel et soit $f : x \in X \longrightarrow x \in X'$.



Alors nous avons :
• f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$,
• f est continue car X est discret,
• f^{-1} est non continue. En effet, si elle l'était, l'image réciproque par f^{-1} (c'est-à-dire directe par f) d'un ouvert serait un ouvert. Or $\{x\}$ est ouvert dans X discret et $f(\{x\}) = \{x\} \subset X'$ est non ouvert car un point est non ouvert. ■

7 Applications ouvertes - Applications fermées

Définition 7.1 *Soit f une application de $X \longrightarrow X'$.*
(1) f est dite ouverte si l'image par f de tout ouvert de X est ouverte dans X'.
(2) f est dite fermée si l'image par f de tout fermé de X est fermée dans X'.

Remarque 7.2 *Les notions d'application continue, d'application ouverte et d'application fermée sont indépendantes, comme le montre l'exemple qui suit.*
<u>*Contre-exemple.*</u> *Considérons $X = X' = \mathbb{R}$. Alors nous avons*
i) L'application $x \longrightarrow \dfrac{1}{1+x^2}$ est continue mais non ouverte et non fermée. En effet,
• *Si on considère l'ouvert $\mathcal{O} = \mathbb{R}$, alors $f(\mathcal{O}) = f(\mathbb{R}) =]0,1]$ est non ouvert.*
• *Si on considère le fermé $F = \mathbb{R}$, alors $f(F) = f(\mathbb{R}) =]0,1]$ est non fermé.*
ii) L'application $x \longrightarrow \arctan x$ est ouverte et non fermée.
iii) Si $A =]0, \infty[$, alors $f = \chi_A$ est fermée mais non ouverte ni continue.

Proposition 7.3 *Si f est une bijection $X \longrightarrow X'$, il y a équivalence entre*
(1) f est une application ouverte,
(2) f est une application fermée,
(3) f^{-1} est une application continue.

<u>*Démonstration.*</u>
L'équivalence entre (1) et (2) résulte de l'égalité

$$f\left(\complement_X A\right) = \complement_{X'}(f(A))$$

L'équivalence entre (2) et (3) résulte de la relation $\left(f^{-1}\right)^{-1}(A) = f(A)$ et de la caractérisation de la continuité par image réciproque de fermés. ■

8 Comparaison de topologies

On considère un même ensemble muni des topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ et on note $X_1 = (X, \mathcal{T}_1)$ et $X_2 = (X, \mathcal{T}_2)$.

Définition 8.1
(1) $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont comparables si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ ou $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.
(2) $\mathcal{T}_1$ est moins fine que $\mathcal{T}_2$ (ou $\mathcal{T}_2$ plus fine que $\mathcal{T}_1$) si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.
(3) $\mathcal{T}_1$ est strictement moins fine que $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$.

Exemple 8.2
1.) La topologie grossière est moins fine que toute autre topologie.

2.) La topologie discrète est plus fine que toute autre topologie.

Remarque 8.3 *La relation "$\mathcal{T}_1$ moins fine que $\mathcal{T}_2$" est une relation d'ordre dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ mais l'ordre n'est pas total car deux topologies ne sont pas toujours comparables comme le montre le contre-exemple qui suit.*
Contre-exemple. *Considérons $X = \{a, b\}$ et les topologies*

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\} \quad et \quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$$

Les topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ ne sont pas comparables, car on n'a ni $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ ni $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.

Proposition 8.4 *: Caractérisation*
Pour que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ il faut et il suffit que l'application $f : x \longrightarrow x$ soit continue de X_2 dans X_1.

Démonstration.
Dire que f est continue se traduit par l'image réciproque de tout ouvert de $\mathcal{T}_1$ est un ouvert de $\mathcal{T}_2$, soit encore tout ouvert de $\mathcal{T}_1$ est un ouvert de $\mathcal{T}_2$ (par définition de f), soit encore $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. ■

Remarque 8.5 *Une application continue $X \longrightarrow X'$ reste continue si on remplace la topologie de X par une topologie plus fine et celle de X' par une topologie moins fine.*
Plus la topologie de X est "plus fine", plus il y a d'applications continues ; (à la limite on arrive à X discret et X' grossier).

Proposition 8.6 *Supposons que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ et soit $A \subset X$, alors*
(1) Tout fermé pour $\mathcal{T}_1$ est fermé pour $\mathcal{T}_2$,
(2) $\overset{\circ}{A}{}^1$ (l'intérieur de A pour $\mathcal{T}_1$) $\subset \overset{\circ}{A}{}^2$,
(3) $\overline{A}^1$ (l'adhérence de A pour $\mathcal{T}_1$) $\supset \overline{A}^2$,
(4) A^{*1} (la frontière de A pour $\mathcal{T}_1$) $\supset A^{*2}$.

<u>*Démonstration.*</u>
(1) F fermé pour $\mathcal{T}_1 \Longleftrightarrow \complement F$ ouvert pour $\mathcal{T}_1 \Longrightarrow \complement F$ ouvert pour $\mathcal{T}_2 \Longrightarrow F$ fermé pour $\mathcal{T}_2$.
(2) $\overset{\circ}{A}{}^1$ est un ouvert $\in \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \Longrightarrow \overset{\circ}{A}{}^1$ est ouvert pour $\mathcal{T}_2$.
$\overset{\circ}{A}{}^1 \subset A \Longrightarrow \overset{\circ}{A}{}^1$ ouvert de $\mathcal{T}_2 \subset A \Longrightarrow \overset{\circ}{A}{}^1 \subset \overset{\circ}{A}{}^2$ (car c'est le plus grand des ouverts pour $\mathcal{T}_2$ qui est $\subset A$).
(3) Se déduit de (2) par passage aux complémentaires.

$$\complement\overline{A}^1 = \overbrace{\complement A}^{\circ\ 1} \subset \overbrace{\complement A}^{\circ\ 2} = \complement\overline{A}^2 \Longrightarrow \overline{A}^1 \supset \overline{A}^2$$

(4) $A^{*\,1} = \overline{A}^1 \cap \overline{\complement A}^1$ et $A^{*\,2} = \overline{A}^2 \cap \overline{\complement A}^2$.
Or $\overline{A}^1 \supset \overline{A}^2$ et $\overline{\complement A}^1 \supset \overline{\complement A}^2 \Longrightarrow \overline{A}^1 \cap \overline{\complement A}^1 \supset \overline{A}^2 \cap \overline{\complement A}^2$ ce qui équivaut à $A^{*\,1} \supset A^{*\,2}$. ∎

Chapitre 2

Sous-espaces topologiques Produits d'espaces topologiques

1 Topologie induite sur une partie A

Soit un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ qu'on notera X, A une partie de X, $A \subset X$, et i l'injection canonique : $x \in A \longrightarrow x \in X$.

1-a Définition

Définition 1.1 *On appelle topologie induite par $\mathcal{T}$ sur A, l'ensemble τ des traces $\omega = \mathcal{O} \cap A$ des ouverts $\mathcal{O}$ de $\mathcal{T}$ sur A.*
(A, τ) est un sous-espace topologique de $(X, \mathcal{T})$.

On supposera toujours que A est muni de la topologie induite par celle de X.

Remarque 1.2 *La topologie induite τ est la moins fine des topologies sur A telles que l'injection : $x \in A \longrightarrow x \in X$ soit continue dans A.*

1-b Ouverts de A

Tout ouvert de X inclus dans A est ouvert dans A, mais tout ouvert de A n'est pas en général ouvert de X.

Contre-exemple. Considérons le cas où $X = \mathbb{R}$ et $A = [-1, 1]$. Nous avons :
• D'une part, $\omega = [0, 1[\subset A$ et ω est ouvert dans A, car trace sur A d'un ouvert de $\mathbb{R}$: $\omega = A \cap]0, \infty[$.
• Mais d'autre part, ω n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.3 *Pour que tout ouvert de A soit ouvert dans X il faut et il suffit que A soit ouvert dans X.*

Démonstration.
D'une part A est ouvert dans A, donc ouvert dans X. D'autre part soit $\omega = \mathcal{O} \cap A \in \tau$, comme $\mathcal{O}$ et $A \in \mathcal{T}$ alors $\omega \in \mathcal{T}$. ■

1-c Transitivité des sous-espaces

Soit A et B deux parties de X avec $B \subset A$.

Proposition 1.4 *Les topologies induites sur B par les topologies de A et de X sont identiques.*

Démonstration.
• Les ouverts de A sont les traces sur A des ouverts de X, c'est-à-dire

$$\{\mathcal{O} \cap A \mid \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$$

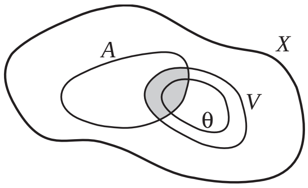
• Les traces sur B des ouverts de A sont les ensembles de la forme $(\mathcal{O} \cap A) \cap B$ or $B \subset A \Longrightarrow (\mathcal{O} \cap A) \cap B = \mathcal{O} \cap (A \cap B) = \mathcal{O} \cap B$. Et par conséquent les traces sur B des ouverts de A sont les traces sur B des ouverts de X. ■

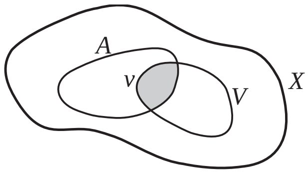
Remarque 1.5 *Ceci revient à dire que si A est un sous-espace topologique de X et B est un sous-espace topologique de A, alors B est un sous-espace topologique de X.*

1-d Voisinages dans A

Soient $x \in A$ et $v(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans X et $v_A(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans A.

Proposition 1.6 *Les voisinages de x dans A sont les traces sur A des voisinages de x dans X.*





<u>*Démonstration.*</u>
• Soit $v \in v_A(x)$, il existe ω ouvert dans A tel que $x \in \omega \subset v$ or $\omega = \mathcal{O} \cap A$ où $\mathcal{O}$ est ouvert dans X. Posons $V = v \cup \mathcal{O}$ alors $V \in v_X(x)$ puisque $V \supset \mathcal{O} \ni x$, donc $V \cap A = v$ d'où le résultat.
• Réciproquement soit $v = V \cap A$ où $V \in v_X(x)$, $\exists\ \mathcal{O}$ ouvert dans X tel que $x \in \mathcal{O} \subset V$ et donc $v \supset \mathcal{O} \cap A$ qui est un ouvert de A contenant x, d'où $v \in v_A(x)$. ■

Proposition 1.7 *$v_A(x) \subset v_X(x)$ si et seulement si $A \in v_X(x)$. Autrement dit, pour que tout voisinage de x dans A soit voisinage de x dans X il faut et il suffit que A soit voisinage de x dans X.*

<u>*Démonstration.*</u>
D'une part $A \in v_A(x)$ (car A ouvert dans A) et donc $A \in v_X(x)$. D'autre part soit $v \in v_A(x)$ on a : $v = V \cap A$ et comme A et $V \in v_X(x)$, alors $v \in v_X(x)$, donc $v_A(x) \subset v_X(x)$. ■

1-e Fermés et adhérence dans A

Proposition 1.8 *Les fermés dans A sont les traces sur A des fermés dans X.*

<u>*Démonstration.*</u>
Soient Φ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés dans A et dans X.

$$\begin{aligned}
(\varphi \in \Phi) &\iff (\complement_A \varphi \in \mathcal{T}) \\
&\iff \big(\exists \mathcal{O} \in \mathcal{T} \mid \complement_A \varphi = \mathcal{O} \cap A\big) \\
&\iff \exists \mathcal{O} \in \mathcal{T} \mid \varphi = \complement_A(\mathcal{O} \cap A) = \big(\complement_X \mathcal{O}\big) \cap A \\
&\iff \exists F \in \mathcal{F} \mid \varphi = F \cap A
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.9 *Tout fermé de X qui est contenu dans A, est fermé dans A mais tout fermé de A n'est pas en général fermé dans X.*

Proposition 1.10 *Tout fermé de A est fermé dans X si et seulement si A fermé dans X.*

> <u>*Démonstration.*</u>
> La condition nécessaire est évidente car A est fermé dans A.
> Pour la condition suffisante, soit φ fermé dans A, alors $\varphi = F \cap A$, comme F et A sont fermés dans X, φ est fermé dans X. ■

Exemple 1.11 *: Exemple d'application ouverte non fermée.*
Considérons $X = \mathbb{R}$, $A =]0, 1[$ et soit $f : x \in A \longrightarrow x \in \mathbb{R}$.
• *f est ouverte car tout ouvert dans A est ouvert dans X (A est ouvert dans X et f = identité),*
• *f est non fermée car A est fermé dans A et $f(A) =]0, 1[$ non fermé dans X.*
Pour un exemple d'application fermée non ouverte, prendre $A = [0, 1]$.

Proposition 1.12 *Soit $B \subset A \subset X$. L'adhérence de B par rapport à A est donnée par*

$$\overline{B}^A = \overline{B}^X \cap A$$

> <u>*Démonstration.*</u>
> Soit $(F_i)_{i \in I}$la famille des fermés de X ⊃ B.
> $(F_i \cap A)_{i \in I} = (\varphi_i)_{i \in I}$ est la famille de fermés de A contenant B.
> $\bigcap\limits_{i \in I} \varphi_i = \overline{B}^A = \bigcap\limits_{i \in I} (F_i \cap A) = \left(\bigcap\limits_{i \in I} F_i\right) \cap A = \overline{B}^X \cap A.$ ■

Remarque 1.13 *Si on note $\overset{\circ}{B}{}^A$ l'intérieur de B relativement à A, alors en général $\overset{\circ}{B}{}^A \neq \overset{\circ}{B}{}^X \cap A$. De façon identique si on note B^{*A} la frontière de B relativement à A, alors en général $B^{*A} \neq B^{*X} \cap A$. A titre de contre-exemple, considérer dans $X = \mathbb{R}$, les parties $A = B = [0, 1]$.*

Corollaire 1.14 *Si B est partout dense dans A et A est partout dense dans X, alors B est partout dense dans X.*

> <u>*Démonstration.*</u>
> B est partout dense dans A : $\overline{B}^A = A$ et A partout dense dans X : $\overline{A}^X = X$. Or $\overline{B}^A = \overline{B}^X \cap A = A$, d'où $\overline{B}^X \supset A$, comme $\overline{B}^X \supset \overline{A}^X = X$, $\overline{B}^X = X$ (la démonstration peut se faire en prenant la famille des fermés ⊃ B). ■

1-f Continuité par rapport à un sous-espace

Soient X et X' deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow X'$. Nous allons d'abord étudier le cas où la fonction f prend ses valeurs dans un sous-espace A' de X', ensuite nous examinerons le cas général.

Proposition 1.15 *Soit A' une partie de X' telle que $f(X) \subset A' \subset X'$. Considérons l'application $g : X \longrightarrow A'$ définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$. Alors g est continue en x_0 si et seulement si f est continue en x_0.*

> *Démonstration.*
> Notons $y_0 = f(x_0)$. Si g est continue en x_0, alors pour tout $v' \in v_{A'}(y_0)$, $g^{-1}(v') \in v(x_0)$. Or $v_{A'}(y_0) = \{v' = V' \cap A'$ où $V' \in v_{X'}(y_0)\}$ et pour $v' \in v_{A'}(y_0)$ on a : $g^{-1}(v') = f^{-1}(V')$ d'où (g continue en x_0) pour tout $V' \in v(y_0)$, $f^{-1}(V') \in v(x_0)$, c'est-à-dire f continue en x_0. ■

Remarque 1.16 *On peut donc, du point de vue de la continuité, considérer f comme application dans A' ou dans X'.*

Proposition 1.17 *: Restriction de f à un sous-espace de X.*
Soit $A \subset X$ et $x_0 \in A$, alors si f est continue en x_0 la restriction $g = f/A$ est continue en x_0.

> *Démonstration.*
> C'est immédiat car on a : $g = f \circ i$ où $i : x \in A \longrightarrow x \in X$ qui est continue dans A. ■

Remarque 1.18 *La réciproque est fausse*
Contre-exemple. Si $X = X' = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ et $f = \chi_A$ alors f est discontinue en tout point mais sa restriction à $\mathbb{Q}$ est constante donc continue sur $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.19 *: Cas général.*
Soit $A \subset X$ et $x_0 \in A$. Supposons que $A \in v(x_0)$, alors f est continue en x_0 si et seulement si $g = f/A$ est continue en x_0.

> *Démonstration.*
> D'après la proposition précédente, la condition est nécessaire.
> Soit maintenant $V' \in v(y_0)$ ($y_0 = f(x_0)$), si g continue en x_0 alors $V = g^{-1}(V') \in v_A(x_0)$ et comme $A \in v(x_0)$ on a aussi $V = g^{-1}(V') \in v(x_0)$; d'où $f(V) = g\left[g^{-1}(V')\right] \subset V'$ et ainsi f est bien continue en x_0. ■

2 Topologie initiale

Le but de cette section est d'étudier deux procédés qui permettent de définir de nombreux espaces topologiques nouveaux à partir d'espaces topologiques connus.

2-a Intersection de topologies

Proposition 2.1 *Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille de topologies sur un ensemble X. Alors $\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une topologie sur X.*

<u>*Démonstration.*</u>
• Si $I = \emptyset$, $\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i = \mathcal{P}(X)$ qui est bien une topologie (la topologie discrète).
• Vérifions (θ_1), (θ_2) et (θ_3).
(θ_3) X et $\emptyset \in \mathcal{T}$ car $\forall i \in I, X$ et $\emptyset \in \mathcal{T}_i$ (qui est une topologie sur X).
(θ_1) Soit $\mathcal{O} = \bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j$ où $\mathcal{O}_j \in \mathcal{T}\ \forall j \in J$.
Soit $i \in I$, $\forall j \in J$, $\mathcal{O}_j \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i \Longrightarrow \forall j \in J$, $\mathcal{O}_j \in \mathcal{T}_i$ or $\mathcal{T}_i$ est une topologie $\Longrightarrow \bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j \in \mathcal{T}_i \quad \forall i \in I$ et par conséquent $\bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i = \mathcal{T}$ c'est-à-dire encore $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$.
(θ_2) Soit $\mathcal{O} = \bigcap_{j\in J fini} \mathcal{O}_j$ où $\forall j \in J$ fini $\mathcal{O}_j \in \mathcal{T}$.
Soit $i \in I$, $\forall j \in J$, $\mathcal{O}_j \in \mathcal{T}_i$ qui est une topologie $\Longrightarrow \bigcap_{J\ fini} \mathcal{O}_j \in \mathcal{T}_i\ \ \forall i \in I$. Par conséquent $\mathcal{O} = \bigcap_{j\in J} \mathcal{O}_j \in \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i = \mathcal{T}$. ∎

Remarque 2.2
1.) $\mathcal{T}$ est la plus fine (plus grande au sens de l'inclusion) de toutes les topologies moins fines que toutes les $\mathcal{T}_i$.
$\mathcal{T}$ est la borne inférieure de $\{\mathcal{T}_i,\ i \in I\}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.
2.) La réunion de topologies n'est pas une topologie. A titre de contre-exemples :

• *Considérons* $X = \{a, b\}$ *alors* $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ *et* $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ *sont des topologies non comparables ; leur réunion est non définie.*

• *Soit* X *un ensemble de cardinal* > 2 *et* $a, b \in X$. $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$ *sont des topologies. Nous avons* $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ *mais* $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ *n'est pas une topologie car* $\{a\} \cup \{b\}$ *est un élément n'appartenant pas à* X.

2-b Topologie engendrée par $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$. $\mathcal{A}$ n'a aucune raison d'être une topologie, mais il y a au moins une topologie qui la contient, c'est $\mathcal{P}$(X). On va définir dans ce paragraphe la plus petite des topologies contenant $\mathcal{A}$.

Proposition 2.3 *L'ensemble des topologies contenant* $\mathcal{A}$ *possède un plus petit élément (au sens de l'inclusion), c'est* $\mathcal{T} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{T}_i$.

<ins>*Démonstration.*</ins>
Soit $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ la famille des topologies contenant $\mathcal{A}$. $\mathcal{T} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{T}_i$ est une topologie $\supset \mathcal{A}$ et c'est la plus petite des topologies $\supset \mathcal{A}$. ■

Définition 2.4 *Ce plus petit élément* $\mathcal{T}$ *est la topologie engendrée par* $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ *s'appelle système générateur de* $\mathcal{T}$.

Proposition 2.5 *Soit* $\mathcal{B}$ *l'ensemble des intersections finies d'éléments de* $\mathcal{A}$*, alors* $\mathcal{B}$ *est une base pour* $\mathcal{T}$.

<ins>*Démonstration.*</ins>
Soit $\mathcal{T}$' l'ensemble des unions quelconques d'éléments de $\mathcal{B}$. Montrons que $\mathcal{T}$' est une topologie et que $\mathcal{T} = \mathcal{T}$'.
• $\mathcal{T}$' est une topologie
(θ_1) Considérons $\bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{O}_i$ où pour tout $i \in I$, $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}'$.
$\mathcal{O}_i$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{O}_i$ également, donc $\in \mathcal{T}'$.
(θ_2) Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}'$ alors $\mathcal{O}_1 = \bigcup\limits_{i \in I} \omega_i$ et $\mathcal{O}_2 = \bigcup\limits_{j \in J} \omega_j$ où ω_i et $\omega_j \in \mathcal{B}$. $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \bigcup\limits_{(i,j) \in I \times J} (\omega_i \cap \omega_j) \in \mathcal{T}'$ car $\omega_i \cap \omega_j \in \mathcal{B}$.

(θ_3) On a $\emptyset = \bigcup_{I=\emptyset}$ et $X = \bigcap_{I=\emptyset}$ sont des éléments de $\mathcal{T}'$.

• $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}$'

$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$' $\Longrightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{T}'$ donc (par définition de $\mathcal{T}$) $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

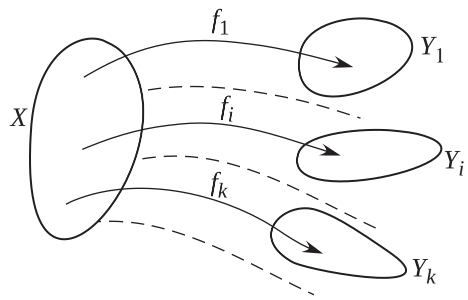
• $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$

Si $\mathcal{O}' \in \mathcal{T}'$, $\mathcal{O}' = \bigcup_{i\in I} \left[\bigcap_{j\in J\ fini} \omega_i \right]$ où $\omega_i \in \mathcal{A}$ (donc $\in \mathcal{T}$). Ainsi $\mathcal{O}' \in \mathcal{T}$ et donc $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

Par conséquent, on a bien $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. ∎

2-c Topologie initiale

Soit X un ensemble et (Y_i) une famille d'espaces topologiques $(Y_i, \mathcal{T}_i)$. Considérons, pour tout $i \in I$, une famille d'applications $f_i : X \longrightarrow Y_i$. On se propose de définir sur X une topologie rendant toutes les f_i continues (évidemment la topologie discrète sur X est triviale).



Définition 2.6 *On appelle topologie initiale sur X pour la famille $(f_i)_{i\in I}$ la topologie $\mathcal{T}$ engendrée par l'ensemble $\mathcal{A}$ des images réciproques par les f_i des espaces Y_i.*

Exemple 2.7 *Si les f_i sont constantes pour tout $i \in I$, alors $f_i^{-1}(\mathcal{O}_i) = \emptyset$ ou X, donc $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$. La topologie engendrée par $\mathcal{A}$ est la topologie grossière $\mathcal{T}$ qui est donc la topologie initiale pour les (f_i).*

Remarque 2.8 *On a vu que $\mathcal{B}$ est une base pour $\mathcal{T}$ où $\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{j\in J fini} f_i^{-1}\left(\mathcal{O}_i^j\right) \right\}$, pour i fixé. Or*

$$\bigcap_{j \in J fini} f_i^{-1}\left(\mathcal{O}_i^j\right) = f_i^{-1}\left(\bigcap_{j \in J fini} \mathcal{O}_i^j\right) = f_i^{-1}\left(\mathcal{O}_i\right)$$

Il en résulte que $\mathcal{B}$ est l'ensemble des parties ω de la forme :

$$\bigcap_{i \in J fini} f_i^{-1}\left(\mathcal{O}_i\right)$$

Proposition 2.9 *La topologie initiale $\mathcal{T}$ est la moins fine des topologies τ rendant toutes les fonctions (f_i) continues.*

Démonstration.
Si, pour tout $i \in I$, f_i est continue alors l'image réciproque des ouverts sont des ouverts. Soit $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}_i$ (topologie de Y_i), alors $f_i^{-1}(\mathcal{O}_i) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{T}$. Si τ est une topologie sur X rendant les f_i continues alors $\mathcal{A} \subset \tau$ or $\mathcal{T}$ est la plus petite topologie $\supset \mathcal{A}$ donc $\mathcal{T} \subset \tau$. ■

Continuité d'une application à valeur dans un espace muni d'une topologie initiale

Nous considérons les mêmes hypothèses en supposant, en plus, que X est muni de la topologie initiale.
Soit Z un espace topologique et $g : z_0 \in Z \longrightarrow g(z_0) = x_0 \in X$.

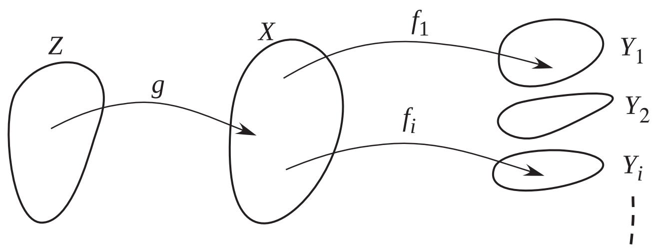
Proposition 2.10 *g est continue en z_0 si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g$ est continue en z_0.*

Démonstration.
Condition nécessaire. Supposons que g soit continue en z_0. Soit $i \in I$, f_i est continue sur X donc continue en $x_0 = g(z_0)$ et par définition de la topologie initiale $f_i \circ g$ est continue en z_0.

Condition suffisante. Soit $V \in v(x_0)$ dans X avec sa topologie initiale $\mathcal{T}$; alors il existe $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ tel que $x_0 \in \mathcal{O} \subset V$. Comme $\mathcal{B}$ est une base, $\mathcal{O}$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$ donc $x \in \omega \subset \mathcal{O}$ avec $\omega \in \mathcal{B}$ donc de la forme $\omega = \bigcap_{i \in J fini} f_i^{-1}(\mathcal{O}_i)$ et $\mathcal{O}_i$ ouvert de Y_i. Nous avons $V \supset \mathcal{O} \supset \bigcap_{i \in J fini} f_i^{-1}(\mathcal{O}_i)$ donc

$$g^{-1}(V) \supset \bigcap_{i \in J \text{ fini}} g^{-1}\left[f_i^{-1}(\mathcal{O}_i)\right] = \bigcap_{i \in J \text{ fini}} (f_i \circ g)^{-1}(\mathcal{O}_i)$$

Comme les $f_i \circ g$ sont continues, alors $(f_i \circ g)^{-1}(\mathcal{O}_i)$ est ouvert et l'intersection finie également. Finalement $g^{-1}(V) \supset$ ouvert contenant z_0 est un voisinage de z_0 et donc g est continue. ■



2-d Exemples

Image réciproque d'une topologie. Considérons le cas particulier où $f : X \longrightarrow Y$. La topologie initiale sur X pour f est $\mathcal{T}$. Elle est égale à la réunion d'éléments de $\mathcal{B}$ où $\mathcal{B}$ est l'ensemble des images réciproques par f des ouverts de Y. Si $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est la famille des ouverts de Y

$$\mathcal{B} = \left\{f^{-1}(\mathcal{O}_i), i \in I\right\}$$

les éléments de $\mathcal{T}$ sont de la forme

$$\bigcup_{i \in J \subset I} f^{-1}(\mathcal{O}_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in J} \mathcal{O}_i\right) = f^{-1}(\mathcal{O})$$

Donc $\mathcal{T} = \left\{f^{-1}(\mathcal{O}_i), i \in I\right\} = \mathcal{B}$.

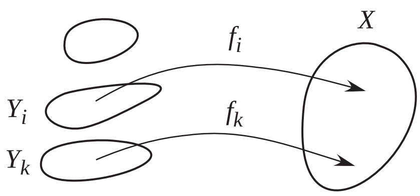
Remarque 2.11 *Si X est inclus dans Y et $f : x \in X \longrightarrow x \in Y$ on a, $\forall\ \mathcal{O}' \in \mathcal{T}'$, $f^{-1}(\mathcal{O}') = \mathcal{O}' \cap X$. $\mathcal{T}$ est donc la topologie induite sur X par $\mathcal{T}$'.*

On dit que $\mathcal{T}$ est la topologie image réciproque par f de la topologie de Y.

Borne supérieure d'un ensemble de topologies sur X. Supposons que $Y_i = (X, \mathcal{T}_i)$ et $f_i \ : \ x \in X \longrightarrow x \in Y_i$. Soit $\mathcal{T}$ la topologie initiale pour $(f_i)_{i \in I}$. On sait que c'est la moins fine des topologies $\mathcal{T}$ sur X rendant les f_i continues. Or $[f_i$ continue $(X, \tau) \longrightarrow Y_i = (X, \mathcal{T}_i)] \Longleftrightarrow \mathcal{T}_i \subset \tau \Longrightarrow \mathcal{T}$ est la moins fine des topologies telles que $\forall i \in I \ \ \mathcal{T}_i \subset \tau$. ($\mathcal{T}$ est la moins fine, c'est-à-dire la plus petite des topologies τ qui sont plus grande que toutes les $\mathcal{T}_i$; $\mathcal{T}$ est donc le plus petit majorant de $\{\mathcal{T}_i \mid i \in I\}$).
Cette topologie initiale $\mathcal{T}$ est appelée la borne supérieure de $\{\mathcal{T}_i, i \in I\}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

3 Topologie finale

Soit X un ensemble et $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques $(Y_i, \mathcal{T}_i)$. Considérons, pour tout $i \in I$, des applications $f_i : Y_i \longrightarrow X$.



On veut trouver sur X une topologie non triviale (autre que la topologie grossière) qui rende les (f_i) continues.

3-a Proposition

Proposition 3.1 *L'ensemble de parties*

$$\mathcal{T} = \left\{ \mathcal{O} \subset X \ \textit{tel que} \ \ \forall i \in I, f_i^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}_i \right\}$$

est une topologie sur X qui est la plus fine des topologies rendant les (f_i) continues.

Démonstration.
Montrons d'abord que $\mathcal{T}$ est une topologie.
• $X \in \mathcal{T}$. En effet pour tout $i \in I$, $f_i^{-1}(X) = Y_i \in \mathcal{T}_i \Longrightarrow X \in \mathcal{T}$.
• $\emptyset \in \mathcal{T}$. En effet, pour tout $i \in I, f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_i \Longrightarrow \emptyset \in \mathcal{T}$.
• Soit $(\mathcal{O}_j)_{j \in J}$ une famille d'ouverts de X et $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{j \in J} (\mathcal{O}_j)$.

Pour $i \in J$, $f_i^{-1}(\mathcal{O}) = f_i^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j\right) = \bigcup_{j\in J} f_i^{-1}(\mathcal{O}_j)$. Or $\mathcal{O}_j \in \mathcal{T} \Longrightarrow f_i^{-1}(\mathcal{O}_j) \in \mathcal{T}_i$ et $\bigcup_{j\in J} f_i^{-1}(\mathcal{O}_j) \in \mathcal{T}_i$. Donc $\forall i \in I, f_i^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}_i \Longrightarrow \mathcal{O} \in \mathcal{T}$.

• Soit $(\mathcal{O}_j)_{j\in J fini}$ une famille finie d'ouverts et $\mathcal{O} = \bigcap_{j\in J fini} \mathcal{O}_j$.

Pour $i \in I$, $f_i^{-1}(\mathcal{O}) = f_i^{-1}\left(\bigcap_{j\in J fini} \mathcal{O}_j\right) = \bigcap_{j\in J fini} f_i^{-1}(\mathcal{O}_j)$. Or $f_i^{-1}(\mathcal{O}_j) \in \mathcal{T}_i \Longrightarrow \bigcap_{j\in J fini} f_i^{-1}(\mathcal{O}_j) \in \mathcal{T}_i$. Donc pour tout $i \in I$, $f_i^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T} \Longrightarrow \mathcal{O} \in \mathcal{T}$.

Montrons que $\forall i \in I, f_i$ est continue de $Y_i \longrightarrow (X, \mathcal{T})$.

f_i est continue si l'image réciproque d'un ouvert est ouverte, ce qui est évident par construction de $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ est la plus fine. Soit $\mathcal{T}'$ une autre topologie sur X rendant les (f_i) continues, alors $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. En effet, soit $\mathcal{O}' \in \mathcal{T}'$, f_i continue $\forall i \in I \Longrightarrow f_i^{-1}(\mathcal{O}') \in \mathcal{T}_i \Longrightarrow \mathcal{O}' \in \mathcal{T}$ et donc $\mathcal{T}' \in \mathcal{T}$. ■

3-b Définition

Définition 3.2 *La topologie définie ci-dessus s'appelle topologie finale sur X pour la famille de $(f_i)_{i\in I}$.*

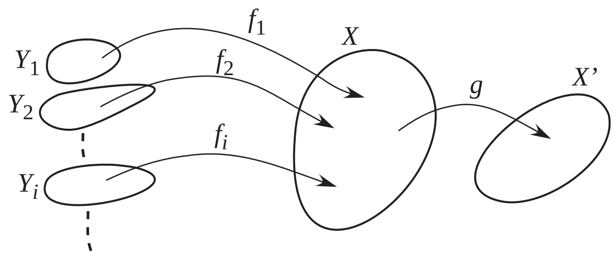
Exemple 3.3 *Prenons le cas où, pour tout $i \in I$, f_i est constante.*
Soit $A \subset X$ et $i \in I$. $f_i^{-1}(A) = \emptyset$ ou Y_i (selon que la constante appartient ou n'appartient pas à A) et donc $f_i^{-1}(A) \in \mathcal{T}_i$ ce qui donne $A \in \mathcal{T}$. La topologie finale est donc la topologie discrète.

3-c Continuité d'une application définie dans un espace muni d'une topologie finale

Proposition 3.4 *Soit $g : X \longrightarrow X'$. Alors g est continue dans X si et seulement si pour tout $i \in I$, $g \circ f_i$ est continue dans Y_i.*

<u>*Démonstration.*</u>

• La condition est nécessaire car g est continue et f_i est continue $\Longrightarrow g \circ f_i$ continue.



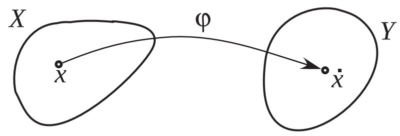
• Pour la condition suffisante, considérons $\mathcal{O}'$ ouvert dans X'. $g \circ f_i$ continue $\Longrightarrow$ $(g \circ f_i)^{-1}(\mathcal{O}')$ ouvert dans Y_i (c'est-à-dire $\in \mathcal{T}_i$). Or

$$(g \circ f_i)^{-1}(\mathcal{O}') = f_i^{-1} \circ g^{-1}(\mathcal{O}') = f_i^{-1}(A) \in \mathcal{T}_i$$

où $A = g^{-1}(\mathcal{O}')$. Donc $A \in \mathcal{T}$, c'est-à-dire encore $g^{-1}(\mathcal{O}') \in \mathcal{T}$, finalement g est continue. ∎

3-d Espace topologique quotient

Soient X un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X et $Y = X/\mathcal{R}$. Pour $x \in X$, on note $\dot{x} = \{x' \in X \mid x'\mathcal{R}x\}$ la classe d'équivalence de x.



Pour définir une topologie sur Y, considérons l'application canonique

$$\varphi : x \in X \longrightarrow \dot{x} \in Y$$

alors, nous avons la définition suivante.

Définition 3.5 *On appelle topologie quotient la topologie finale pour* φ.

4 Topologie produit

Pour diverses propriétés utilisées dans ce paragraphe, on renvoie à l'annexe. On considère, pour tout $i \in I$, où $I \neq \emptyset$, une famille d'espaces topologiques X_i, où chaque X_i est muni de la topologie $\mathcal{T}_i$. Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ le produit des ensembles X_i. On désigne toujours par pr_i, $i \in I$, l'application coordonnée d'indice i, $x \in X \longrightarrow x_i \in X_i$ et on va définir une topologie sur X rendant toutes les pr_i continues et qui se réduit à la topologie euclidienne dans le cas où $X = \mathbb{R}^n$.

4-a Définition

Définition 4.1 *On appelle topologie produit $\mathcal{T}$ des topologies $\mathcal{T}_i$ la topologie initiale sur X pour la famille $(pr_i)_{i \in I}$.*

X muni de $\mathcal{T}$ est l'espace topologique produit, noté (X,$\mathcal{T}$).
$\mathcal{T}$ est la moins fine des topologies rendant les (pr_i) continues.

4-b Ouverts élémentaires

On a vu qu'une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ est formée des parties ω de X de la forme

$$\omega = \bigcap_{i \in J fini} pr_i^{-1}(\mathcal{O}_i) \quad \text{où} \quad \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}_i$$

Alors nous avons le résultat suivant.

Proposition 4.2 *$\omega \in \mathcal{B}$ si et seulement si*

$$\omega = \prod_{i \in I} \mathcal{O}_i \quad \textit{où} \quad \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}_i \quad \textit{et} \quad \{i \in I; \mathcal{O}_i \neq X_i\} \quad \textit{est fini}$$

Démonstration.
On va montrer que $A = \bigcap_{i \in J fini} pr_i^{-1}(\mathcal{O}_i) = \prod_{i \in I} \mathcal{O}_i = B$ où $\mathcal{O}_i = X_i$ si $i \in I - J$.

• $A \subset B$: Si $x \in A$, $\forall i \in J$, $x \in pr_i^{-1}(\mathcal{O}_i) \Longrightarrow \forall i \in J, x_i \in \mathcal{O}_i$; $\forall i \in I - J$, $x_i \in X_i = \mathcal{O}_i$. Donc $\forall i \in I$, $x_i \in \mathcal{O}_i$ ce qui prouve que $x \in B$.

• $B \subset A$: Soit $x \in B$, $\forall i \in I$, $x_i \in \mathcal{O}_i$ c'est donc vrai pour $i \in J$ $(x_i \in \mathcal{O}_i)$, c'est-à-dire $\forall i \in J$, $x_i = pr_i(x) \in \mathcal{O}_i$ et finalement pour tout $i \in J$, $x \in pr_i^{-1}(\mathcal{O}_i)$ et par conséquent $x \in A$. ■

Définition 4.3 *On appelle ouvert élémentaire de X, toute partie ω de X telle que $\omega = \prod_{i\in I} \mathcal{O}_i$ où $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}_i$ et où $\{i \in I \mid \mathcal{O}_i \neq X_i\}$ est fini.*

Remarque 4.4
1.) Tout ouvert de X est réunion d'ouverts élémentaires (par définition de la base $\mathcal{B}$).

2.) Tout produit d'ouverts n'est pas un ouvert (ceci n'est vrai que pour les ouverts élémentaires).
Contre-exemple
Considérons $A = \prod_{i\in I} \mathcal{O}_i$ avec $A \neq \emptyset$ et $\{i \in I \mid \mathcal{O}_i \neq X_i\}$ infini.

- *A n'est pas ouvert dans X. Sinon il serait réunion d'ouverts élémentaires, donc il existerait ω ouvert élémentaire non vide tel que $\omega \subset A$. or $\omega = \prod_{i\in I} \mathcal{O}'_i$ et où $J = \{i \in I \mid \mathcal{O}'_i \neq X_i\}$ fini.*
  $\emptyset = \prod_{i\in I} \mathcal{O}'_i \subset \prod_{i\in I} \mathcal{O}_i \Longrightarrow \mathcal{O}'_i \subset \mathcal{O}_i, \forall i.$
- *Si $i \in I - J$, alors $\mathcal{O}'_i = X_i$. Comme $\mathcal{O}'_i \subset \mathcal{O}_i \subset X_i$, on a $\mathcal{O}_i = X_i$. Donc $\{i \in I \mid \mathcal{O}_i \neq X_i\}$ est fini, d'où la contradiction avec l'hypothèse et donc un produit d'ouverts n'est pas ouvert.*

3.) Dans le cas particulier où I fini, les ouverts élémentaires sont les produits d'ouverts. Car alors tout produit d'ouverts est ouvert (mais tout ouvert n'est pas produit d'ouverts car n'est pas ouvert élémentaire).
Dans $X = \mathbb{R}^2$, si $\mathcal{O}$ est le disque ouvert, $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, voir figure (2.4.1).

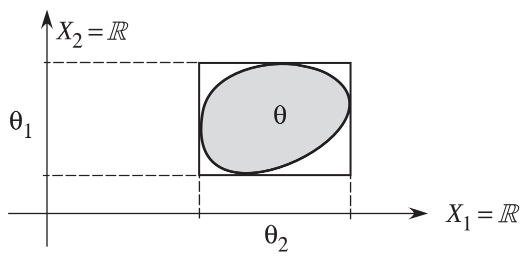


FIGURE 2.4.1 – *Contre-exemple dans* $\mathbb{R}^2$

4.) Pour tout $j \in I$, pr_j est une application ouverte mais non fermée, en général.

• *Elle est ouverte car la projection de tout ouvert élémentaire* $\omega = \prod \mathcal{O}_i$ *est ouverte ; ceci résulte de la relation* $pr_i(\omega) = \mathcal{O}_i$.
• *Elle est non fermée. Pour cela, il suffit de considérer l'exemple où*

$$X = \mathbb{R}^2 \quad et \quad A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 1\}$$

Alors A *est fermé dans* $\mathbb{R}^2$ *(car* $A = f^{-1}(1)$*), mais*

$$pr_1(A) =]-\infty, 0[\, \cup\,]0, \infty[$$

est non fermé dans $\mathbb{R}$, *car* $\complement A = \{0\}$ *est non ouvert.*

4-c Voisinages élémentaires

Soient $X = \prod_{i \in I} X_i$ un produit d'espaces topologiques et $x = (x_i)_{i \in I} \in X$.

Définition 4.5 *On appelle voisinage élémentaire de* x, *l'ensemble* $V = \prod_{i \in I} V_i$ *où chaque* $V_i \in v(x_i)$ *et* $V_i = X_i$ *sauf pour un nombre fini d'indices* i.

C'est assez intuitif car $x \in \prod \overset{\circ}{V}_i$ qui est un ouvert élémentaire $\subset V$.

Remarque 4.6 *Tout ouvert élémentaire contenant* $\{x\}$ *est un voisinage élémentaire de* x.

Proposition 4.7 *L'ensemble des voisinages élémentaires de* x *est une base de voisinages de* x.

> *Démonstration.*
> Soit $V \in v(x)$, V contient un ouvert qui contient $\{x\}$, et donc V contient un ouvert élémentaire qui contient $\{x\}$ (car tout ouvert est réunion d'ouverts élémentaires). D'où l'ensemble des voisinages élémentaires est une base de voisinage de x. ■

5 Adhérence - Intérieur - Frontière

Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ un produit d'espaces topologiques. Considérons, pour tout $i \in I$, $A_i \subset X_i$ et $A = \prod_{i \in I} A_i$.

5-a Adhérence d'un produit

Proposition 5.1 *Nous avons*

$$\overline{A} = \overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$$

Démonstration.
Par double inclusion.
• Soit $x \in \overline{A}$, pr_i étant continue on a $pr_i(x) \in \overline{pr_i(A)}$ c'est-à-dire $x_i \in \overline{A_i}$ d'où $x \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.
• Soit $x \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$ et $\omega = \prod_{i\in I} \mathcal{O}_i$ un ouvert élémentaire contenant $\{x\}$. Comme pour tout $i \in I$, $x_i \in \overline{A_i}$ et $\mathcal{O}_i \in v(x_i)$, on a : $\mathcal{O}_i \cap A \neq \emptyset$. Il en résulte que $\prod_{i\in I} (\mathcal{O}_i \cap A_i) \neq \emptyset$ c'est-à-dire encore $\omega \cap A \neq \emptyset$, d'où $x \in \overline{A}$. ■

Corollaire 5.2 *Tout produit de fermés est fermé*

Démonstration.
En effet $\overline{\prod_{i\in I} F_i} = \prod_{i\in I} \overline{F_i} = \prod_{i\in I} F_i$. ■

5-b Intérieur d'un produit

Proposition 5.3

$$\overset{\circ}{\overbrace{\prod_{i\in I} A_i}} \subset \prod_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$$

Démonstration.
En effet si $x \in \overset{\circ}{\overbrace{\prod_{i\in I} A_i}} = \overset{\circ}{A}$, $pr_i(x) = x_i \in pr_i(\overset{\circ}{A})$. Comme pr_i est une application ouverte $pr_i(\overset{\circ}{A})$ est ouvert et donc $x_i \in \overset{\circ}{A_i}$ $\forall i \in I$, c'est-à-dire $x \in \prod_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$. ■

Remarque 5.4 *Il n'y a pas égalité, en général, car si A_i est ouvert $A_i = \overset{\circ}{A_i}$ et si les $X_i \neq A_i$ alors $\prod_{i \in I} \overset{\circ}{A_i}$ n'est pas ouvert donc ne peut pas être égal à $\overset{\circ}{A}$.*

Corollaire 5.5 *Si I est fini, on a*

$$\overset{\circ}{\overbrace{\prod_{i \in I} A_i}} = \prod_{i \in I} \overset{\circ}{A_i}$$

<u>*Démonstration.*</u>

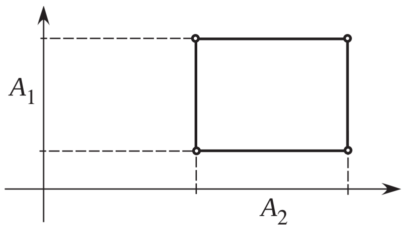
Quand I est fini, $\prod_{i \in I} \overset{\circ}{A_i}$ est un ouvert. Comme $\overset{\circ}{A_i} \subset A_i$, alors $\prod_{i \in I} \overset{\circ}{A_i} \subset \prod_{i \in I} A_i$ et donc $\prod_{i \in I} \overset{\circ}{A_i} \subset \overset{\circ}{\prod_{i \in I}} A_i$, c'est-à-dire l'inclusion dans l'autre sens , d'où l'égalité. ■

5-c Frontière d'un produit

Notons d'abord qu'en général $\prod_{i \in I} A_i^* \neq \left(\prod_{i \in I} A_i \right)^*$.

<u>*Contre-exemple*</u>

Prenons $X = \mathbb{R}^2$ et $A = A_1 \times A_2$.



D'une part, $(A_1 \times A_2)^*$ est la réunion des côtés du rectangle.
D'autre part, $(A_1)^* \times (A_2)^*$ est la réunion des sommets du rectangle.
Mais nous avons le résultat suivant.

Proposition 5.6 *Nous avons toujours*

$$\prod_{i \in I} A_i^* \subset \left(\prod_{i \in I} A_i \right)^*$$

<u>*Démonstration.*</u>

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I}(A_i^*) &= \prod_{i\in I}\left(\overline{A_i}\cap\overline{\complement A_i}\right) = \left(\prod_{i\in I}\overline{A_i}\right)\cap\left(\prod_{i\in I}\overline{\complement A_i}\right)\\ &= \overline{\prod_{i\in I}A_i}\cap\overline{\prod_{i\in I}\complement A_i}\end{aligned}$$

Or I étant non vide $\prod_{i\in I}\complement A_i \subset \complement\left(\prod_{i\in I}A_i\right)$, et donc

$$\prod_{i\in I}A_i^* \subset \overline{\prod_{i\in I}A_i}\cap\overline{\complement\left(\prod_{i\in I}A_i\right)} = \overline{A}\cap\overline{\complement A} = A^*$$

. ■

6 Application dans les produits topologiques

6-a Produit de sous-espaces topologiques

Supposons que, pour tout $i\in I$, $A_i\subset X_i$ et soit

$$A=\prod_{i\in I}A_i\subset X=\prod_{i\in I}X_i$$

Proposition 6.1 *Considérons les topologies suivantes :*
$\mathcal{T}_i$ *la topologie de* X_i *et* $\mathcal{T}$ *la topologie de* X
t_i *la topologie de* A_i *et* t *le produit des topologies* t_i.

Alors si t' *désigne la topologie induite par la topologie* $\mathcal{T}$ *sur* A*, nous avons*

$$t=t'$$

<u>*Démonstration.*</u>
La démonstration s'appuie sur le lemme suivant.
Si X *est muni de la topologie initiale* $\mathcal{T}$ *pour* (f_i) *alors la topologie* t' *induite sur* A *par* $\mathcal{T}$ *est la topologie initiale pour la famille des restrictions* $(f_i\,|_A)_{i\in I}$.

Démonstration du lemme. En effet, t' est la moins fine des topologies sur A telle que l'application $\varphi : x\in A\longrightarrow x\in X$

soit continue. Or on a vu que φ est continue si et seulement si $f_i \circ \varphi = f_i\,|_A$ continue dans A. Donc t' est la moins fine des topologies sur A telle que $(f_i\,|_A)$ est continue c'est-à-dire la topologie initiale pour les $(f_i\,|_A)$.
Démonstration de la proposition. Elle est immédiate car t' n'est autre que la topologie initiale sur A pour la famille des restrictions des pr_i à A, $(pr_i\,|_A)$, c'est-à-dire t. ■

6-b Application dans un produit topologique

Soit f une application $X \longrightarrow Y = \prod_{i\in I} Y_i$ muni de la topologie produit.

Proposition 6.2 *L'application f est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si, pour tout $i \in I$, les applications coordonnées f_i sont continues en x_0.*

Démonstration.
Rappelons que $f_i = pr_i \circ f$. L'application f est à valeur dans un espace à topologie initiale. La continuité de f en x_0 équivaut à la continuité de $pr_i \circ f = f_i$ (d'après ce qui a été vu sur la continuité des applications à valeur dans un espace muni d'une topologie initiale). ■

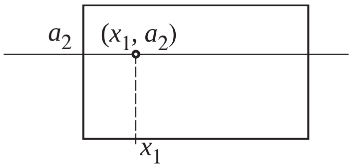
Corollaire 6.3 *Pour tout $J \subset I$, l'application pr_J est continue de $X \longrightarrow \prod_{i\in J} X_i$.*

6-c Section - Coupe

On considère ici le cas particulier où $X = X_1 \times X_2$ mais les résultats sont généralisables à un produit quelconque.

Sections S_1 et S_2

Définition 6.4
(1) Soit $a_2 \in X_2$, on appelle section S_1, l'application $X_1 \longrightarrow X$ définie par $S_1(x_1) = (x_1, a_2)$.
(2) Soit $a_1 \in X_1$, on appelle section S_2, l'application $X_2 \longrightarrow X$ définie par $S_2(x_2) = (a_1, x_2)$.



Proposition 6.5 *Les sections S_1 et S_2 sont continues, respectivement dans X_1 et X_2.*

Démonstration.
S_1 est continue si les applications coordonnées le sont.
$x_1 \longrightarrow x_1$ est continue (identité) et $x_1 \longrightarrow a_2$ l'est aussi (c'est une application constante).
Démarche analogue pour S_2. ∎

Remarque 6.6 *L'application S_i est même un homéomorphisme de $X_i \longrightarrow X_i \times \{a_j\}$.*

Coupe d'une partie $A \subset X$

Définition 6.7 *On appelle coupe A_1 l'ensemble défini par :*

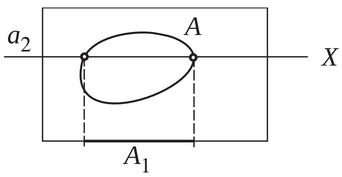
$$A_1 = \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, a_2) \in A\}$$

A_1 est également défini par :

$$A_1 = \{x_1 \in X_1, S_1(x_1) \in A\} = S_1^{-1}(A)$$

Pareillement nous avons

$$\begin{aligned} A_2 &= \{x_2 \in X_2 \mid (a_1, x_2) \in A\} \\ &= \{x_2 \in X_2 \mid S_2(x_2) \in A\} = S_2^{-1}(A) \end{aligned}$$



Proposition 6.8 *Si A est ouvert (respectivement fermé) alors A_1 est ouvert (respectivement fermé).*

Démonstration.
Si A est ouvert alors $A_1 = S_1^{-1}(A)$ est ouvert car S_1 est continue. ■

Remarque 6.9 *Tous ces résultats se généralisent sans difficulté.*

6-d Continuité globale et continuité partielle

Soient $a = (a_i)_{i\in I} \in X = \prod_{i\in I} X_i$ et $f : X \longrightarrow Y$.

Applications partielles

Définition 6.10 *Soit $j \in I$, l'application partielle f_j au point a est l'application définie par :*

$$x_j \in X_j \longrightarrow f(x) \in Y$$

où $x = (x_i)_{i\in I}$ est tel que $x_i = a_i$ si $i \neq j$.

Exemple 6.11 *Si $I = \{1, 2\}$ et $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ alors les applications*

$$f_1 : x_1 \longrightarrow f(x_1, a_2) \text{ et } f_2 : x_2 \longrightarrow f(a_1, x_2)$$

sont des applications partielles.

Proposition 6.12 *Si f est continue en a, alors pour tout $j \in I$, l'application partielle f_j est continue en a_j.*

Démonstration.
En effet, $f_j = f \circ S_j$ (où S_j est la section de X au point a_j). Comme S_j est continue en a_j et f est continue en $S(a_j) = a$, on a le résultat. ■

Remarque 6.13 *La continuité de toutes les applications partielles n'implique pas celle de f.*
Contre-exemple

Considérons le cas où $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ et f l'application définie par :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Les applications partielles f_1 et f_2 sont continues en $(0,0)$ mais f ne l'est pas. Il suffit de voir que, pour $x_1 = x_2$, $f(x_1, x_2) = 1/2 \not\to 0$.

7 Associativité et commutativité des produits topologiques

7-a Associativité

Soit $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ une partition quelconque de I. Nous avons le résultat d'associativité suivant.

Proposition 7.1

$X = \prod_{i \in I} X_i$ *est homéomorphe à* $X' = \prod_{\lambda \in L} \left(\prod_{i \in I_\lambda} X_i \right)$.

<u>*Démonstration.*</u>
Posons, pour tout $\lambda \in L$, $X'_\lambda = \prod_{i \in I_\lambda} X_i$, et soit f l'application canonique : $x \in X \longrightarrow pr_{I_\lambda}(x) \in X' = \prod_{\lambda \in L} X'_\lambda$, pour $\lambda \in L$.

- f est une bijection de $X \longrightarrow X'$,
- f est continue car les applications coordonnées le sont,
- f est ouverte (on vérifie aisément que l'image d'un ouvert élémentaire est un ouvert élémentaire). ■

Remarque 7.2 *Ainsi* $\prod_{i=1}^{n} X_i$ *est homéomorphe à* $\left(\prod_{i=1}^{n-1} X_i \right) \times X_n$. *On peut donc ramener l'étude de produits finis d'espaces topologiques à celle du produit de deux espaces topologiques.*

7-b Commutativité

Proposition 7.3 *Si σ est une permutation de I alors $X = \prod_{i \in I} X_i$ est homéomorphe à $\prod_{i \in I} X_{\sigma(i)}$.*

Démonstration.
Il suffit d'appliquer la proposition du paragraphe précédent en prenant $L = I$ et $I_\lambda = \{\sigma(\lambda)\}$. ■

Chapitre 3

Espaces topologiques connexes

1 Notion de connexité

Concrètement la connexité d'un ensemble traduit le fait que cet ensemble est d'un seul tenant. Le fait qu'une fonction f continue sur $[a, b]$ prend toute valeur entre $\inf f$ et $\sup f$ traduit la connexité de $f(a, b)$.

1-a Définitions

Soit X un espace topologique.

Définition 1.1
(1) X est dit connexe si X n'admet pas de partition formée de deux ouverts. C'est-à-dire qu'il n'existe pas $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ ouverts non vides tels que

$$\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset \quad \textit{et} \quad X = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$$

(2) Soit $A \subset X$, A est connexe si le sous espace topologique A est connexe.

(3) Soit $D \subset X$, D est un domaine si D est un ouvert connexe.

Exemples d'espaces topologiques connexes.

1.) L'ensemble vide $\emptyset$ est connexe.
2.) L'ensemble $\{x\}$ est connexe.

3.) X grossier est connexe.
4.) L'espace de Sierpinski $X = \{a, b\}$ avec la topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ est connexe. La seule partition de X est $\{a\}$ et $\{b\}$ donc il est connexe.
5.) $\mathbb{R}$ est connexe.

Exemples d'espaces topologiques non connexes.

1.) X discret avec $CardX \geq 2$ est non connexe.
2.) $\mathbb{Q}$ est non connexe. En effet, nous savons que, par exemple, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, et nous avons

$$\mathbb{Q} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$$

où

$$\mathcal{O}_1 = \left]-\infty, \sqrt{2}\right[\cap \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_2 = \left]\sqrt{2}, +\infty\right[\cap \mathbb{Q}$$

et nous avons bien $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$.

1-b Premier résultat

Proposition 1.2 *Soit X un espace topologique connexe et soit A une partie propre contenue dans X (i.e. A est non vide et non égale à X, $A \subset X$), alors $A^* \neq \emptyset$.*

> *Démonstration.*
> $\overset{\circ}{A}$, A^* et $Ext(A)$ forment une partition de X. Ainsi si $A^* = \emptyset$ alors on aurait $X = \overset{\circ}{A} \cup Ext(A)$ et donc X ne serait pas connexe. ■

Ce résultat peut également s'énoncer sous la forme :
Dans X connexe, soit $A \subset X$. Si $A^* = \emptyset$ alors $A = \emptyset$ ou $A = X$.

1-c Propriétés équivalentes

Proposition 1.3 *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) X est connexe,
(2) X n'admet pas de partition formée de deux fermés,
(3) Les seuls ofs de X sont $\emptyset$ et X,
(4) Toute application f continue de X dans $\{0, 1\}$ muni de la topologie discrète est constante.

<u>*Démonstration.*</u>

• (1) $\Longrightarrow$ (2) Si $X = F_1 \cup F_2$ avec F_1 et F_2 fermés non vides disjoints $\mathcal{O}_1 = F_1$ et $\mathcal{O}_2 = F_2$ sont ouverts.
$\emptyset = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \Longrightarrow X = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ non vides (si, par exemple, $\mathcal{O}_1 = \emptyset \Longrightarrow \mathcal{O}_2 = X$ contradiction) et donc X est non connexe.

• (2) $\Longrightarrow$ (3) Si F est un of non vide et $F \neq X$ alors F et $\complement F$ forment une partition de X en deux fermés c'est-à-dire non (2).

• (3) $\Longrightarrow$ (4) Si (4) était fausse, il existerait f continue $X \longrightarrow \{0,1\}$ discret, alors $f^{-1}(\{0\})$ serait un of distinction de X et $\emptyset$, c'est-à-dire non (3).

• (4) $\Longrightarrow$ (1) Si X est non connexe alors $X = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ ouverts non vides disjoints. Prenons pour f, la fonction caractéristique de $\mathcal{O}_1$, donnée par

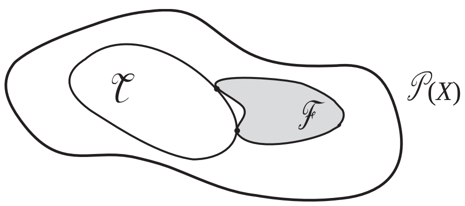
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin \mathcal{O}_1 \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathcal{O}_1 \end{cases}$$

$f : X \longrightarrow \{0,1\}$ est continue car l'image réciproque de tout ouvert de $\{0,1\}$ est ouverte et f est non constante, donc (4) est fausse. ■

Remarque 1.4 *Dans X connexe, si $A \neq \emptyset$ et $A \neq X$, alors on a*

$$A \text{ ouvert } \Longrightarrow A \text{ non fermé}$$

On a aussi : A fermé $\Longrightarrow$ A non ouvert.



1-d Parties connexes de $\mathbb{R}$

On rappelle qu'un intervalle A est, par définition, une partie telle que pour tout a et $b \in A$, l'intervalle $[a,b] \subset A$. On admet que $\emptyset$ et $\{a\}$ sont des intervalles.

Proposition 1.5 *Une partie A est connexe dans* $\mathbb{R}$ *si et seulement si A est un intervalle.*

Démonstration.
Condition nécessaire. Soient $a, b \in A$, avec $a < b$ par exemple. Si $\exists c \in]a, b[|\ c \notin A$ alors]- ∞,c[$\cap$ A et]c, + ∞[$\cap$ A sont deux ouverts de A qui forment une partition de $A \Longrightarrow A$ non connexe.
Condition suffisante. Montrons d'abord le lemme :
"*toute application continue* φ *de X dans X' discret est constante*".
Soient $x \in X$ et $x' = \varphi(x)$, $V = \varphi^{-1}(\{x'\})$ est un voisinage de x et φ est constante dans V.
Soit $A = (\alpha, \beta)$ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On peut supposer $\alpha < \beta$ car si $\alpha = \beta$, A est vide ou réduit à un point donc connexe. Soit alors φ une application continue $A \longrightarrow \{0, 1\}$ discret. Montrons que φ est constante dans A. Soient $a, b \in A$ tel que $a < b$ et soit

$$E = \{x \in [a, b] \subset A \mid \varphi(x) = \varphi(a)\}$$

E est l'image réciproque par φ des fermés $\{\varphi(a)\}$ de $\{0, 1\}$ donc E est fermé. Il en résulte que $c = \sup E \in E$. Comme φ est constante dans un voisinage de c (d'après le lemme), alors nécessairement $c = b$ d'où $b \in E$ et $\varphi(b) = \varphi(a)$. ■

Remarque 1.6 *Par application de ce qui précède, on a*

1.) En particulier, $\mathbb{R}$ *est connexe.*
2.) $\mathbb{Q}$ *n'est pas un intervalle de* $\mathbb{R}$*, donc* $\mathbb{Q}$ *est non connexe.*

2 Propriétés des espaces connexes

2-a Image continue d'un espace connexe

Proposition 2.1
Si $f : X \longrightarrow X'$ *est continue et si* X *est connexe, alors* $f(X)$ *est connexe.*

Démonstration.
On utilise la propriété équivalente (4) de la proposition (1.3). Soit

g continue : $f(X) \subset X' \longrightarrow \{0,1\}$ discret,
f continue : $X \longrightarrow f(X)$.
On en déduit que $g \circ f$ est continue de $X \longrightarrow \{0,1\}$ discret ; or X est connexe donc $g \circ f$ est constante. Ainsi si y_1 et y_2 sont deux points quelconque de $f(X)$,

$$y_1 = f(x_1) \in f(X) \text{ et } y_2 = f(x_2) \in f(X)$$

alors $g(y_1) = g(y_2)$ donc g est constante dans $f(X)$ et par conséquent $f(X)$ est connexe. ∎

Corollaire 2.2 *Si f est un homéomorphisme $X \longrightarrow X'$ et si X est connexe, alors X' connexe.*

La démonstration est immédiate.

Remarque 2.3 *Si X est connexe et X' non connexe, alors X et X' ne sont pas homéomorphes. On va utiliser cela pour montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ ne sont pas homéomorphes.*

Corollaire 2.4 *Si f est continue $X \longrightarrow \mathbb{R}$ et si X est connexe, alors $f(X)$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires)*

2-b Réunion de parties connexes

Soit, pour tout $i \in I$, A_i une partie connexe d'un espace topologique X. Et soit $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Alors A n'est pas toujours connexe. Mais nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.5 *Si les A_i sont deux à deux non disjoints, alors $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.*

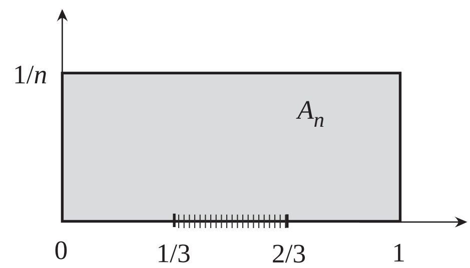
Démonstration.
Soit f continue : $A \longrightarrow \{0,1\}$ discret.
• Si f est continue sur chaque A_i, alors f/A_i est continue dans A_i connexe, donc f/A_i constante. Finalement pour tout $x \in A_i$, $f(x) = c_i$.
• Soient i et $j \in I$. Montrons que $c_i = c_j$. Par hypothèse $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, soit $x \in A_i \cap A_j$, alors $f(x) = c_i$ et $f(x) = c_j$ donnent $c_i = c_j$ et ainsi f est constante dans A, et donc A est connexe. ∎

Corollaire 2.6 *Si* $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$*, alors* A *est connexe.*

Proposition 2.7 *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dénombrable de parties connexes de* X *telle que, pour tout* n*,* $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$*. Alors* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *est connexe.*

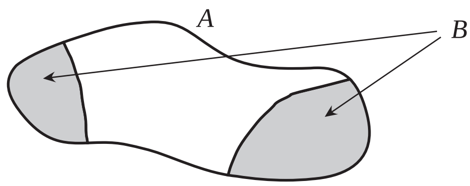
<u>*Démonstration.*</u>
Posons $B_n = A_0 \cup A_1 \cdots \cup A_n$. Alors (B_n) est une suite croissante.
• B_n est connexe.
- Pour $n = 0$, $B_0 = A_0$ est connexe.
- Supposons que B_n est connexe.
- Alors $B_{n+1} = B_n \cup A_{n+1}$, or B_n et A_{n+1} sont connexes et $B_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ (car contient $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$) et donc B_{n+1} est connexe.
• A est connexe.
$A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est une réunion de parties connexes telle que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = B_0 \neq \emptyset$. Et ainsi le corollaire donne A connexe. ■

Remarque 2.8 *Si* (A_n) *est une suite décroissante d'ensembles connexes* $\not\Longrightarrow \bigcap\limits_{n\in N} A_n$ *est connexe.*
<u>*Contre-exemple*</u> *: Dans* $\mathbb{R}^2$*, on considère les parties* A_n *ci-dessous.*



On enlève à $[0,1]$ *l'intervalle* $]1/3,2/3[$*. Cela donne* $\bigcap\limits_{n} A = [0,1/3] \cup [2/3,1]$ *qui est non connexe.*

Remarque 2.9 *Un sous espace d'un espace connexe n'est pas connexe.*



2-c Adhérence d'une partie connexe

Lemme 2.10 *Si φ est une application continue $X \longrightarrow X'$ discret est constante dans A partout dense dans X, Alors φ est constante dans X.*

Démonstration.
En effet si x'_0 est la valeur constante de φ dans A, $\varphi(A) = \{x'_0\}$, ceci implique $\overline{\varphi(A)} = \{x'_0\}$. Or $\varphi\left(\overline{A}\right) \subset \overline{\varphi(A)} \Longrightarrow \varphi\left(\overline{A}\right) = \varphi(X) \subset \{x'_0\}$, c'est-à-dire φ est constante dans X. ■

Remarque 2.11 *Le lemme est vrai si φ est une application continue X dans un espace topologique X' dans lequel tout ensemble réduit à un point est fermé.*

Proposition 2.12 *Soit A connexe dans X et B une partie de X telle que : $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.*

Démonstration
Soit f continue $B \longrightarrow \{0,1\}$ discret. Alors f/A est aussi continue car $A \subset B$ et A connexe donne f constante sur A.
$A \subset B \subset \overline{A}$ implique A est partout dense sur B, ce qui donne par application du lemme que f est constante dans B connexe $\left(\overline{A^B} = \overline{A^X} \cap B = B\right)$. ■

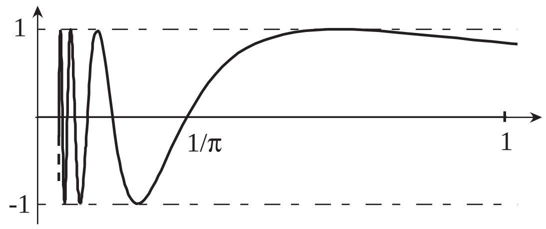
Cas particulier :

Si A est connexe, alors $\overline{A}$ est connexe (c'est la cas où $B = \overline{A}$).

Exemple 2.13
1.) L'ensemble

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y = \sin\frac{1}{x} \quad \textit{pour} \;\; 0 < x \leq 1\right\}$$

est connexe car $f : x \longrightarrow \left(x, sin\frac{1}{x}\right)$ *est continue sur* $]0,1]$ *puisque les applications coordonnées le sont.*
• *D'une part* $A = f(]0,1])$ *est connexe.*
• *D'autre part* $\overline{A} = A \cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$ *est connexe et toute partie* $B = A\cup$ { *partie du segment* $[-1,1]$ *sur l'axe des* y} *est connexe car* $A \subset B \subset \overline{A}$. *2.) On considère les segments*

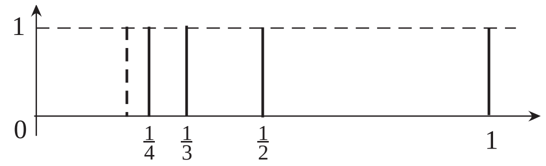


$$A = \{(x,0)/0 < x < 1\} \bigcup \left(\left\{ 1, \frac{1}{2}, \cdots \frac{1}{n}, \cdots \right\} \times \{(0,y) : 0 \leq y \leq 1\} \right)$$

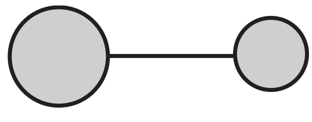
qui sont connexes. Par ailleurs,

$$\overline{A} = A \bigcup \{(0,y)/0 \leq y \leq 1\}$$

est aussi connexe (appelé peigne).



Remarque 2.14
1.) Si A est connexe, alors $\not\Longrightarrow \overset{\circ}{A}$ *est connexe ; voir figure ci-dessous.*



2.) Si A est connexe, alors $\not\Longrightarrow A^*$ *connexe. Il suffit de considérer* $A = [a,b]$, *ce qui donne* $A^* = \{a,b\}$.

2-d Produit d'espaces connexes

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $X = \prod_{i\in I} X_i$. Nous allons voir sous quelle condition X est connexe.

Lemme 2.15 *Soit $a = (a_i)_{i\in I} \in X$ et*

$$A = \{x = (x_i)_{i\in I} \text{ tel que l'ensemble } \{i \in I, x_i \neq a_i\} \text{ est fini } \}$$

alors A est partout dense sur X.

<u>*Démonstration.*</u>
Soit ω un ouvert élémentaire égal à $\prod_{i\in I} \delta_i \neq \emptyset$ où $\delta_i = X_i$ si $i \notin J$ fini. Montrons que $\omega \cap A \neq \emptyset$. L'élément $x = (x_i)_{i\in I}$ tel que :

$$\begin{cases} x_i = a_i & \text{si} \quad i \in I - J \\ x_i \in \delta_i & \text{si} \quad i \in J \end{cases}$$

appartient à A par définition et à ω (car si $i \in J$, $x_i \in \delta_i$ et si $i \notin J$, $x_i = a_i \in X_i = \delta_i$ et donc $x_i \in \delta_i$). ■

Proposition 2.16 *Le produit $X = \prod_{i\in I} X_i$ est connexe si et seulement si, pour tout $i \in I$, X_i est connexe.*

<u>*Démonstration.*</u>
Condition nécessaire. Supposons que X est connexe. Pour tout $i \in I$, $X_i = pr_i(X)$ or pr_i étant continue et X connexe $\Longrightarrow X_i$ connexe pour tout i.
Condition suffisante. Supposons que, pour tout $i \in I$, X_i est connexe. Soit f continue de $X \longrightarrow \{0,1\}$ discret. Montrons que f est constante sur un sous-ensemble A partout dense dans X. Pour cela, nous considérons l'ensemble A défini au lemme précédent.
Soit $x \in A$, montrons que $f(x) = f(a)$
Supposons que l'ensemble $\{i \in I / x_i \neq a_i\} = \{j\}$ soit réduit à un seul élément.
Si f est continue $\Longrightarrow$ les applications partielles f_j au point a sont continues dans X_j. Comme f_j est continue dans X_j connexe $\Longrightarrow$

f_j constante dans X_j, en particulier $f_j\,(x_j) = f_j\,(a_j) = f(x) = f(a)$.
Par conséquent, en changeant une coordonnée de a, on ne change pas la valeur de $f(a)$; il en résulte évidemment qu'en modifiant un nombre fini de coordonnées de a, on ne modifie pas $f(a)$; comme on obtient ainsi un point quelconque de A, f est constante dans A. Finalement f est constante dans X, ce qui implique (d'après le lemme (2.10)) que X est connexe. ■

Corollaire 2.17 *Tout pavé (produit d'intervalles quelconques) de $\mathbb{R}^n$ est connexe. En particulier $\mathbb{R}^n$ est connexe.*

3 Composantes connexes

L'objet de cette partie est de montrer que tout espace topologique admet une partition formée de parties connexes.

3-a Points connectés

Définition 3.1 *On dira que deux points x et y d'un espace topologique X, sont connectés dans X s'il existe une partie connexe de X qui les contient.*

Exemple 3.2 *Si X connexe, alors deux points quelconques de X sont connectés.*

Proposition 3.3 *La relation $x \sim y$ définie par x et y sont connectés est une relation d'équivalence.*

Démonstration.
• $x \sim x$ est vrai car $\{x\}$ est connexe et contient x.
• Si $x \sim y$, alors $y \sim x$, car si A connexe contient x et y, alors A connexe contient y et x.
• Si $x \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x \sim z$. En effet s'il existe A_1 connexe contenant x et y et A_2 connexe contenant y et z, alors $A_1 \cup A_2$ est connexe (car $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, car contient y) et contient x et z. ■

Notation
La classe d'équivalence de x, notée $\mathcal{C}(x)$, est donnée par

$$\mathcal{C}(x) = \{y \in X \quad | \quad x \sim y\}$$

Proposition 3.4 *$\mathcal{C}(x)$ est la plus grande partie connexe contenant x.*

Démonstration.
Soit $(A_i)_{i\in I}$ la famille des parties connexes de X qui contiennent $\{x\}$.
• $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe et contient $\{x\}$, donc tous les points de A sont connectés à x et on a : $A \subset \mathcal{C}(x)$.
• Si $x' \in \mathcal{C}(x)$, alors x' appartient à une partie connexe contenant x, c'est-à-dire à l'une des A_i et par suite $\mathcal{C}(x) \subset A$.
Finalement on a $\mathcal{C}(x) = A$ est bien la plus grande partie connexe contenant x. ■

Définition 3.5
(1) On appelle composantes connexes de X, les classes $\mathcal{C}(x)$ où $x \in X$.
(2) On appelle composantes connexes de x, la classe $\mathcal{C}(x)$.
(3) On dit que X est totalement discontinu si, pour tout $x \in X$,

$$\mathcal{C}(x) = \{x\}$$

Remarque 3.6 *X est connexe si et seulement si X admet une seule composante connexe X.*

Exemple 3.7
1.) Si X est discret, alors X est totalement discontinu.
2.) $\mathbb{Q}$, sous espace de $\mathbb{R}$, est totalement discontinu.

3-b Propriétés

Propriété 3.8 *Si l'application f est continue $X \longrightarrow X'$, alors $f(\mathcal{C}(x)) \subset \mathcal{C}f(x)$.*

Démonstration.
$\mathcal{C}(x)$ connexe et f continue $\Longrightarrow f(\mathcal{C}(x))$ est connexe et contient $f(x)$. Par conséquent $f(\mathcal{C}(x))$ est contenu dans la plus grande composante connexe contenant $f(x)$, c'est-à-dire $\mathcal{C}(f(x))$. ■

Propriété 3.9 *Si h est un homéomorphisme $X \longrightarrow X'$, alors $h(\mathcal{C}(x)) = \mathcal{C}(h(x))$.*

Démonstration.
D'après la propriété précédente, on a $h\left(\mathcal{C}(x)\right) \subset \mathcal{C}(h(x))$.
Comme h^{-1} est continue, alors $h^{-1}\left[\mathcal{C}(h(x))\right] \subset \mathcal{C}(x)$. Et donc $\mathcal{C}(h(x)) \subset h\left(\mathcal{C}(x)\right)$. Par conséquent, il y a bien égalité. ■

Remarque 3.10 *h est une bijection de l'ensemble des composantes connexes de X sur celles de X', c'est-à-dire encore le nombre de composantes connexes est invariant par homéomorphisme.*

Propriété 3.11 *Toute composante connexe de X est fermée.*

Démonstration.
soit $A = \mathcal{C}(x)$. Ainsi $\overline{A}$ est connexe et contient A. Or A est la plus grande partie connexe contenant x, donc A contient $\overline{A}$ et par conséquent $A = \overline{A}$, c'est-à-dire A fermé. ■

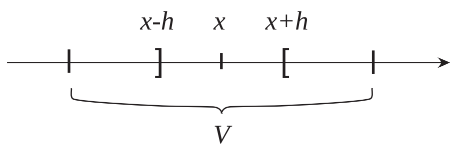
Remarque 3.12 *Soit $r \in \mathbb{Q}$, sous espace de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{C}(r) = \{r\}$ est non ouvert.*

4 Espaces localement connexes

Définition 4.1 *Un espace X est localement connexe si tout point de X admet un système fondamental de voisinages connexes.*

La définition veut dire que, pour tout $x \in X$ et pour tout $V \in v(x)$, alors V contient un voisinage $\mathcal{U}$ de x qui est connexe.

Exemples d'espaces localement connexes.
1.) $\mathbb{R}$ est localement connexe, car tout voisinage V de x contient, pour h convenable, $]x-h, x+h[$ qui est connexe.



2.) Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est localement connexe.
3.) X discret est localement connexe, car tout voisinage $V \in v(x)$, contient $\{x\}$ qui est connexe.

Exemples d'espaces non localement connexes.
Soit l'ensemble A donné par

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\} \subset \mathbb{R}$$

est discret, donc localement connexe. Mais

$$\overline{A} = \left\{0, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$$

n'est pas localement connexe, car aucun voisinage v de 0 dans $\overline{A}$ n'est connexe ; en effet pour n assez grand $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ est un of non vide et distinct de v.

Remarque 4.2
1.) Si X est localement connexe $\not\Longrightarrow$ X connexe.
<u>*Contre-exemple*</u> *: $\{0,1\}$ discret est localement connexe mais non connexe.*

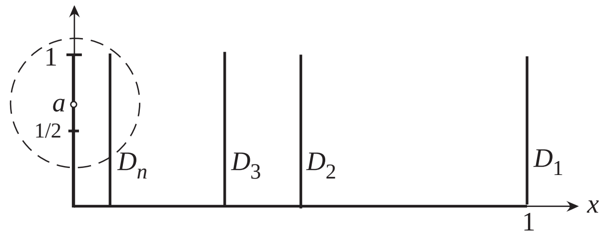
2.) Si X est connexe $\not\Longrightarrow$ X localement connexe
<u>*Contre-exemple*</u> *: Considérons le graphe du peigne, vu précédemment. On a un ensemble connexe. On y adjoint le segment $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ sur l'axe des y.*

$$\begin{aligned} X &= \left(\left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\} \times \{(0,y) \mid 0 \leq y \leq 1\}\right) \\ &\qquad \bigcup \{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 1\} \bigcup \left\{(0,y) \mid \frac{1}{2} \leq y \leq 1\right\} \end{aligned}$$

X est également connexe car compris entre l'ensemble et son adhérence. Mais X est non localement connexe car $a = \left(0, \frac{3}{4}\right) \in X$ et n'a pas de système fondamental de voisinage car

$$V = X \cap B\left(a, \frac{1}{4}\right) \in v_X(a)$$

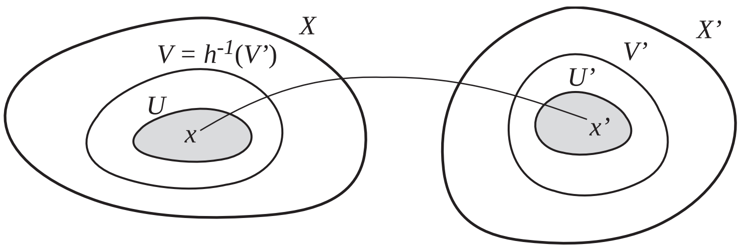
Soit alors $v \in v_X(a)$ tel que $v \subset V$ alors v est non connexe car $v \cap D_n \neq \emptyset$ (pour n assez grand) et est ouvert et fermé dans v. Aucun voisinage v de a inclus dans le disque de centre a et de rayon $1/4$ n'est connexe ; car pour n assez grand $D_n \cap V$ est un of non vide et distinct de V.



4-a Propriétés

Propriété 4.3 *Si h est un homéomorphisme $X \longrightarrow X'$ et si X est localement connexe, alors X' est localement connexe.*

> *Démonstration.*
> Soit $x' \in X'$, $x' = h(x)$ avec $x \in X$. Soit $V' \in v(x')$, $V = h^{-1}(V')$ est un voisinage de x. X étant localement connexe, alors il existe $\mathcal{U} \subset V$, $\mathcal{U}$ connexe $\in v(x)$. $\mathcal{U}' = h(\mathcal{U}) \subset V'$ est connexe et $\mathcal{U}' \subset V'$, donc X' est localement connexe. ■



Remarque 4.4 *Si f est continue $X \longrightarrow X'$ et si X est localement connexe, alors $\not\Longrightarrow$ X' est localement connexe.*
Contre-exemple *: Considérons $X = \mathbb{N}$ discret et X' un espace non localement connexe, par exemple*

$$X' = \left\{0, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$$

avec, par exemple,

$$f(0) = 0 \quad et \quad f(n) = \frac{1}{n}$$

Ainsi $f : X \longrightarrow X'$. Comme X est discret $\Longrightarrow$ f est continue. Par ailleurs, X discret $\Longrightarrow$ X localement connexe. Mais $f(X) = X'$ ne l'est pas.

Proposition 4.5 *X est localement connexe si et seulement si les composantes connexes de tout ouvert $\mathcal{O}$ sont ouvertes.*

<u>*Démonstration.*</u>
Condition nécessaire. Soit $\mathcal{O}$ ouvert quelconque de X et A une composante connexe de $\mathcal{O}$, alors A est ouvert. Soit $a \in A$, $\mathcal{O}$ est un voisinage de a dans X localement connexe, donc $\mathcal{O}$ contient un voisinage connexe U de a. U est également connexe dans $\mathcal{O}$ et comme $a \in U$, alors $U \subset A$ (car A est le plus grand connexe contenant a). Par conséquent $A \in v(a)$, A est donc voisinage de ses points, donc ouvert.

Condition suffisante. Soit $V \in v(x)$ $(x \in X)$ et soit A la composante connexe de $\overset{\circ}{V}$ qui contient $\{x\}$. Par hypothèse A est ouvert donc A est un voisinage connexe de x inclus dans V, donc X est localement connexe. ∎

4-b Ouverts de $\mathbb{R}$

Proposition 4.6 *Tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ est la réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts 2 à 2 disjoints.*

<u>*Démonstration.*</u>
Soit $(\mathcal{C}i)_{i\in I}$ la famille de composantes connexes de $\mathcal{O}$. Ainsi $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{C}_i$, or $\mathcal{C}_i$ est un connexe de $\mathbb{R}$, ce qui implique $\mathcal{C}_i = (a_i, b_i)$.
Comme $\mathbb{R}$ est localement connexe, alors $\mathcal{C}_i =]a_i, b_i[$ et $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{i\in I}]a_i, b_i[$ (les $\mathcal{C}_i$ sont deux à deux disjoints).
Montrons que I est au plus dénombrable. Chaque $]a_i, b_i[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, il existe d'après l'axiome du choix une application f de $I \longrightarrow \mathbb{Q}$ telle que, pour tout $i \in I$, $f(i) \in]a_i, b_i[$. Les $(]a_i, b_i[)$ étant disjoints, f est injective. Par conséquent $CardI \leq Card\mathbb{Q} = \aleph_0$. ∎

5 Espaces connexes par arcs

5-a Notion de chemin

Définition 5.1
(1) On appelle arc (ou chemin) dans X, toute application continue γ :

$[0,1] \longrightarrow X$.

• $\gamma(0)$ *s'appelle l'origine du chemin et* $\gamma(1)$ *s'appelle l'extrémité du chemin.*

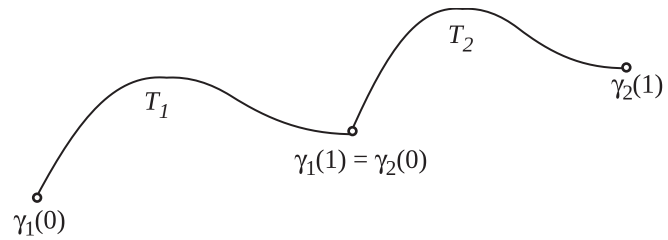
• $\gamma([0,1]) = \Gamma$ *est l'image de* γ *et est connexe (le segment* $[a,b]$ *est l'image de* $\gamma(t) = a + (b-a)t$*).*

(2) On appelle chemin opposé à γ*, noté* γ^0*, l'application* $\gamma^0(t) = \gamma(1-t)$*. Nous avons alors* $\gamma^0(0) = \gamma(1)$ *et* $\gamma^0(1) = \gamma(0)$*.*

(3) On appelle juxtaposition des deux chemins γ_1 *et* γ_2 *(où on suppose* $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ *), le chemin* γ *défini par*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & si \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \\ \gamma_2(2t-1) & si \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

On note $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ *et on a* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$*.*



5-b Définition

Définition 5.2

(1) X *est dit connexe par arcs si, pour tout* x *et* $y \in X$*, il existe un chemin d'origine* x *et d'extrémité* y*.*

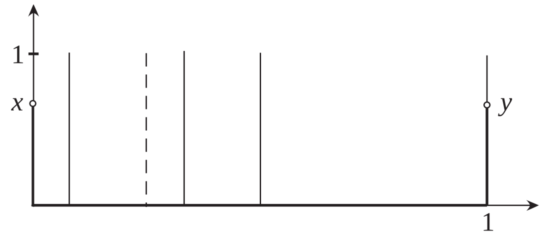
(2) X *est dit localement connexe par arcs si chacun de ses points admet une base de voisinages connexes par arcs.*

Exemples d'espaces connexes par arcs.

1.) Tout espace vectoriel normé (et donc $\mathbb{R}^n$) est connexe par arcs. Dans ce cas, si a et $b \in X$, alors $\gamma(t) = a + (b-a)t$.

2.) Toute partie A convexe d'un espace vectoriel normé X est connexe par arcs. En particulier toute boule d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

3.) Le graphe du peigne, déjà vu, est connexe par arcs.



4.) L'espace X grossier est connexe par arcs. Dans ce cas, $\gamma(t) = x$ si $0 \leq t \leq 1$ et $\gamma(1) = y$.

5-c Propriétés

Propriété 5.3 *Si l'application f est continue : $X \longrightarrow X'$ et si X est connexe par arcs, alors $f(X)$ est connexe par arcs.*

> *Démonstration.*
> Soient $x' = f(x) \in f(X)$ et $y' = f(y) \in f(X)$. Comme $x, y \in X$ connexe par arcs, cela implique qu'il existe un chemin γ d'origine x et d'extrémité y ($\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$). Ainsi $f \circ \gamma$ est continue : $[0,1] \longrightarrow X'$ avec $f \circ \gamma(0) = x'$ et $f \circ \gamma(1) = y'$. Par conséquent, $f(X)$ est connexe par arcs. ■

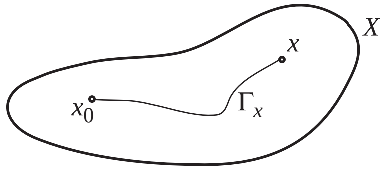
Cas particulier : Si X et X' sont homéomorphes et X connexe par arcs, alors X' est également connexe par arcs.

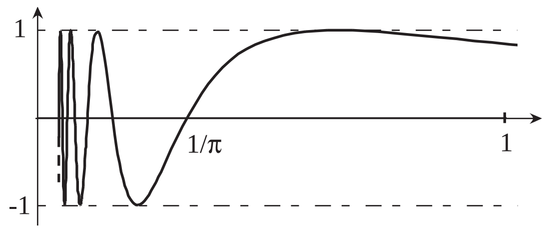
Propriété 5.4 *Si X est connexe par arcs, alors X est connexe.*

> *Démonstration.*
> Soit $x_0 \in X$, pour tout $x \in X$, il existe un chemin γ d'origine x_0 et d'extrémité x. Son image Γ_x est connexe (car image continue d'un intervalle), donc x_0 et x sont connectés. Par conséquent $\mathcal{C}(x_0) = X$ et donc X est connexe. ■.

Remarque 5.5 *La réciproque est fausse. A titre de contre-exemple, considérons le graphe de*

$$X = \sin\frac{1}{x} \cup \{0\} \times [-1,1]$$



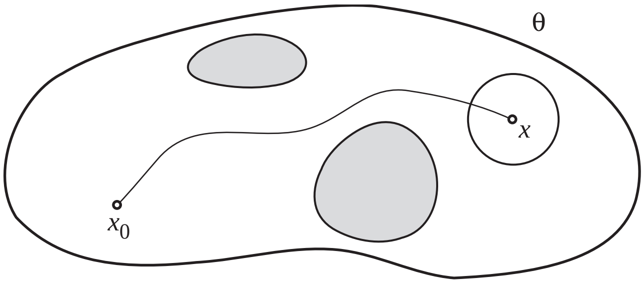


X est connexe (car compris entre un ensemble et son adhérence), mais X est non connexe par arcs. Montrons qu'il n'existe pas de chemin reliant $a = (0,0)$ à $b = \left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$. Par l'absurde, s'il existe un chemin γ d'origine a et d'extrémité b alors $pr_1 \circ \gamma$ et $pr_2 \circ \gamma$ seraient continues, d'où la contradiction car $pr_2 \circ \gamma$ prend les valeurs -1 et $+1$ dans tout voisinage de 0 et $\lim\limits_{t \to 0} pr_2 \circ \gamma(t) \not\longrightarrow 0$ (car non continue).

5-d Cas particulier d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Proposition 5.6 *Tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si et seulement si $\mathcal{O}$ est connexe.*

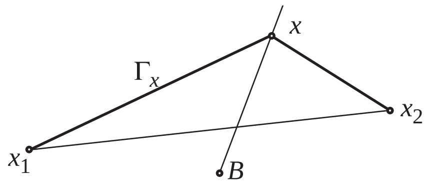
Démonstration.
Condition nécessaire : déjà vu.
Condition suffisante : Soit $x_0 \in \mathcal{O}$, on introduit l'ensemble A de tous les points $x \in \mathcal{O}$ tels qu'il existe un chemin d'origine x_0 et d'extrémité x.
Montrons alors que $A = \mathcal{O}$. Pour cela il suffit que A soit un of non vide.
• $A \neq \emptyset$ car $x_0 \in A$.
• A est ouvert. Soit $x \in A$, $x \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, donc il existe une boule $B(x, r) \subset \mathcal{O}$ et soit $y \in B(x, r)$. Il existe un chemin d'origine x_0 et d'extrémité x et un chemin d'origine x et d'extrémité y, ainsi par juxtaposition $y \in A$ et $B(x, r) \subset A$ implique que A est ouvert.



• A est fermé. Montrons que $A \supset \overline{A}$.
Soit α adhérent à A, $\alpha \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$. Il existe $B(\alpha, r) \subset \mathcal{O}$, telle que $A \cap B(\alpha, r) \neq \emptyset$. Ainsi il existe $a \in A \cap B(\alpha, r)$, et donc $a \in A$, c'est-à-dire qu'il existe un chemin d'origine x_0 et d'extrémité α (obtenu par juxtaposition). Finalement $\alpha \in A$, c'est-à-dire A est fermé. Comme $\mathcal{O}$ est connexe, alors $A = \mathcal{O}$. ■

Proposition 5.7 *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$, qu'on suppose au plus dénombrable et $X = \mathbb{R}^n - A$ (avec $n \geq 2$), alors X est connexe par arcs.*

Démonstration.
Soient x_1 et $x_2 \in X$. Considérons un segment quelconque B rencontrant $[x_1, x_2]$ en un point distinct de x_1 et x_2.



Pour $x \in B$, considérons le chemin polygonal $\Gamma_x : x_1\ x\ x_2$. Si, pour tout $x \in B$, $\Gamma_x \cap A \neq \emptyset$, alors il existerait $f : B \longrightarrow A$, avec $f(x) = a \in A \cap \Gamma_x$. Comme f est injective, alors B est au plus dénombrable ce qui est faux, car tout segment a la puissance du continu. ■

Proposition 5.8 *Si $n \geq 2$, alors $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes.*

Démonstration.
Par l'absurde, s'ils l'étaient par $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $X = \mathbb{R}^n - \{a\}$ et posons $X' = \mathbb{R} - \{h(a)\}$. On vérifie que h est encore un

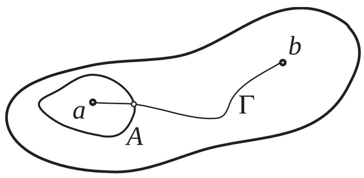
homéomorphisme entre X et X', or X est connexe (car connexe par arcs) mais X' ne l'est pas, d'où la contradiction. ■

Remarque 5.9 *On montre aussi que* $\mathbb{R}^m$ *et* $\mathbb{R}^n$ *ne sont pas homéomorphes si* $m \neq n$*, mais c'est plus difficile.*

5-e Théorème de passages de douane

Proposition 5.10 *Soit* A *une partie d'un espace topologique* X. *Si* $a \in \overset{\circ}{A}$, $b \in Ext(A)$ *et* γ *un chemin d'origine* a *et d'extrémité* b*, alors*

$$\Gamma \cap A^* \neq \emptyset$$



Démonstration.
Par l'absurde. Sinon $\Gamma \cap A^* = \emptyset$, ainsi Γ s'écrirait

$$\Gamma = \left(\Gamma \cap \overset{\circ}{A}\right) \bigcup (\Gamma \cap Ext(A))$$

c'est-à-dire une partition de Γ en deux ouverts (non vides disjoints) et ainsi Γ serait non connexe, d'où la contradiction. ■

Chapitre 4

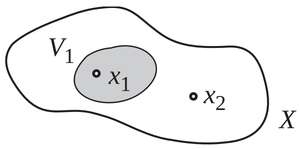
Espaces topologiques séparés

1 Notion d'espace séparé

Soit X un espace topologique.

1-a Espace de type T_0 ou de Kolmogorov

Définition 1.1 *On dit que X est de type T_0 ou de Kolmogorov*[1] *si, pour tout $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, alors l'un au moins de ces deux points admet un voisinage qui ne contient pas l'autre.*
Autrement dit, il existe $i \in \{1,2\}$ et $V_i \in v(x_i)$ tel que $j \neq i$ $x_j \notin V_i$.



Exemple 1.2 *: Exemples d'espaces de type T_0.*

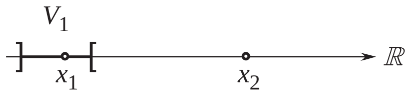
1.) X discret est de type T_0, il suffit de prendre $\{x_1\}$ comme voisinage de x_1. On a bien $\{x_1\} \in v(x_1)$ et $x_2 \notin \{x_1\} = V_1$.

2.) L'espace de Sierpinski est de type T_0, en effet, si $X = \{a,b\}$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$, alors $v(a) = \{\{a\}, X\}$ et $v(b) = X$. On a bien

1. Andreï Kolmogorov, Mathématicien russe, 1903-1987

$\{a\} \in v(a)$ *et* $b \notin \{a\}$.

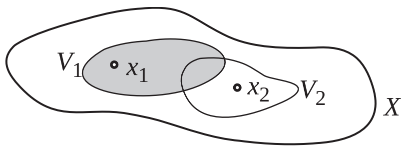
3.) $\mathbb{R}$ *est de type* T_0.



4.) X *grossier n'est pas de type* T_0.

1-b Espace de type T_1 ou accessible (ou de Fréchet)

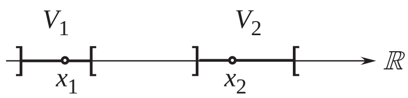
Définition 1.3 *On dit que* X *est de type* T_1 *ou de Fréchet*[2] *si, pour tout* x_1 *et* $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, *alors chacun de ces deux points admet un voisinage qui ne contient pas l'autre.*
Autrement dit, pour tout $i \in \{1,2\}$, *il existe* $V_i \in v(x_i)$ *tel que,* $j \neq i$, *et* $x_j \notin V_i$.



Exemple 1.4 *: Exemples d'espaces de type* T_1.

1.) L'espace X *discret est de type* T_1. *En effet, il suffit de prendre* $V_1 = \{x_1\}$ *et* $V_2 = \{x_2\}$. *Ainsi* $x_2 \notin V_1$ *et* $x_1 \notin V_2$.

2.) $\mathbb{R}$ *usuel est de type* T_1.



3.) $\mathbb{R}$ *muni de la topologie cofinie* $\mathcal{T}$ *est de type* T_1. *En effet, on a*

$$\mathcal{T} = \emptyset \cup \{A \subset \mathbb{R} / \complement_{\mathbb{R}} A \text{ fini }\}$$

2. Maurice Fréchet, Mathématicien français, 1878-1973

$\complement\{x_2\}$ *est un ouvert* $V_1 \in v(x_1)$ *et* $x_1 \in V_1$.
$\complement\{x_1\}$ *est un ouvert* $V_2 \in v(x_2)$ *et* $x_2 \in V_2$.
Et ainsi on a bien $x_2 \notin V_1$ *et* $x_1 \notin V_2$*, donc* $\mathbb{R}$ *muni de la topologie cofinie est de type* T_1.

4.) X grossier n'est pas de type T_1.

Propriété 1.5 *Si X est de type* T_1*, alors X est de type* T_0.

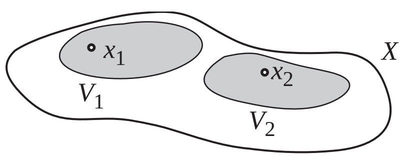
Remarque 1.6 *La réciproque est fausse.* Contre-exemple. *Considérer X de Sierpinski qui est de type* T_0 *mais non de type* T_1 *car* $\{b\}$ *n'admet pas de voisinage qui ne contient pas a (il n'a que X comme voisinage).*

Propriété 1.7 *X est de type* T_1 *si et seulement si pour tout* $x \in X$, $\{x\}$ *est fermé.*

> *Démonstration.*
> *Condition nécessaire.* Soit $x \in X$, montrons que $\complement\{x\}$ est ouvert. Soit $x' \in \complement\{x\}$. X étant de type T_1, il existe $V' \in v(x')$ tel que $x \notin V'$ et $V' \subset \complement\{x\}$. Et donc $\complement\{x\}$ est voisinage de chacun de ses points, il est donc ouvert.
>
> *Condition suffisante.* Soient x_1 et $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Si $\{x_2\}$ fermé, alors $\complement\{x_2\}$ est ouvert égal à V_1, avec $x_1 \in V_1$, donc $V_1 \in v(x_1)$. Posons alors $V_2 = \complement\{x_1\}$. V_2 est un ouvert contenant x_2 et $x_1 \notin V_2$ et $x_2 \notin V_1$, par conséquent X est de type T_1. ■

1-c Espaces de type T_2 ou séparés (ou de Hausdorff)

Définition 1.8 *On dit que X est séparé ou de Hausdorff*[3] *si, pour tout* $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$*, il existe* $V_1 \in v(x_1)$ *et* $V_2 \in v(x_2)$ *tels que* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

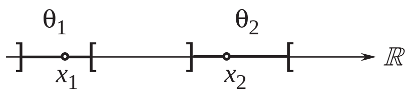


3. Felix Hausdorff, Mathématicien allemand, 1868-1942

Exemple 1.9
1.) L'espace X discret est séparé.

2.) $\mathbb{R}$ usuel est séparé.

Remarque 1.10 *Si X est séparé, alors X est de type T_1. Mais la réciproque est fausse.*
Contre-exemple. *$\mathbb{R}$ muni de la topologie cofinie $\mathcal{T}$ est de type T_1, mais $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est non séparé. Sinon pour $x_1 \neq x_2$ et θ_1 et θ_2 ouverts contenant x_1 et x_2 (respectivement), on a*



θ_1 ouvert, donc $\complement\theta_1$ fini, et θ_2 ouvert, donc $\complement\theta_2$ fini, ceci impliquerait que $\mathbb{R}$ est fini, d'où la contradiction.

Propriété 1.11 *il y a équivalence entre :*

(1) X est séparé.
(2) L'intersection des voisinages fermés de x est égale à $\{x\}$, pour tout $x \in X$.
(3) La diagonale Δ de $X \times X$, définie par

$$\Delta = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 / x_1 = x_2\}$$

est fermée.

Démonstration.
Nous allons utiliser le lemme :
"*Si A et $B \subset X$ alors $A \cap B = \emptyset$, $\Longleftrightarrow (A \times B) \cap \Delta = \emptyset$.*"
Démontrons ce lemme. Pour cela, montrons l'équivalence suivante

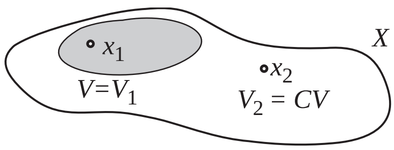
$$A \cap B \neq \emptyset \Longleftrightarrow (A \times B) \cap \Delta \neq \emptyset$$

• $\Longrightarrow$ Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors il existe $x \in A \cap B$, et donc $(x, x) \in A \times B \Longrightarrow (x, x) \in \Delta$, et donc $(x, x) \in (A \times B) \cap \Delta \neq \emptyset$.
• $\Longleftarrow$ Si $y \in (A \times B) \cap \Delta$, avec $y = (x_1, x_2)$, alors $y \in \Delta \Longrightarrow x_1 = x_2$ et donc $A \cap B \neq \emptyset$.

Démonstrations des équivalences de la propriété.

(1) $\Longrightarrow$ (2)
Soit $x \in X$ et $(V_i)_{i\in I}$ la famille des voisinages fermés de x et $A = \bigcap_{i\in I} V_i$.
$\star$ A contient $\{x\}$ car pour tout $i \in I$ $x \in V_i$.
$\star$ Si $x' \neq x$ montrons que $x' \notin A$. Comme X est séparé, alors il existe $V \in v(x)$ et $V' \in v(x')$ tels que $V \cap V' = \emptyset$. Et donc x' n'est pas adhérent à V, $x' \notin \overline{V}$ ($\overline{V}$ est un voisinage fermé de x). Par conséquent, il existe V_i tel que $x' \notin V_i$ et donc $x' \notin A$, donc A $=\{x\}$.

(2) $\Longrightarrow$ (3)
Montrons que $\complement\Delta$ est ouvert. Soit $(x_1, x_2) \in \complement\Delta$, $x_1 \neq x_2$, d'après (2), il existe V un voisinage fermé de x_1 tel que $x_2 \notin V = \overline{V}$. Posons $V_1 = V$ et $V_2 = \complement\overline{V}$(qui est un voisinage de x_2) $V_1 \in v(x_1)$.
$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ donne $(V_1 \times V_2) \cap \Delta = \emptyset$, et donc $(V_1 \times V_2) \subset \complement\Delta$ et $V_1 \times V_2 \in v(x_1, x_2)$. Finalement $\complement\Delta$ est voisinage de (x_1, x_2), et donc $\complement\Delta$ est ouvert $\Longleftrightarrow$ $\complement\Delta$ fermé.



(3) $\Longrightarrow$ (1)
Soient $x_1 \neq x_2$, alors $(x_1, x_2) \notin \Delta$, ce qui donne $(x_1, x_2) \in \complement\Delta$ qui est ouvert. Ainsi (x_1, x_2) est dans un ouvert élémentaire $((x_1, x_2) \in \theta_1 \times \theta_2 \subset \complement\Delta)$, soit encore $(\theta_1 \times \theta_2) \cap \Delta = \emptyset$, ce qui implique (d'après le lemme) que $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$ et comme θ_1 est un voisinage de x_1 et θ_2 est un voisinage de x_2, alors X est séparé. ■

1-d Parties finies d'un espace séparé

On considère un espace topologique séparé X.

Propriété 1.12 *Si $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ est fini $\subset$ dans X séparé, alors A est fermé.*

Démonstration.
Si X est séparé, alors X est de type T_1. Et donc pour tout $i = 1, \cdots, n$ l'ensemble réduit à $\{a_i\}$ est fermé. Ce qui implique que $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\}$ est fermé. ■

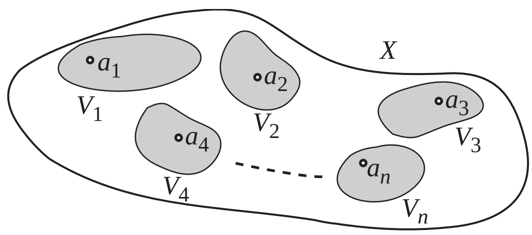
Proposition 1.13 *Soit A une partie d'une espace X séparé. Alors un point $\alpha \in A'$ si et seulement si pour tout $V \in v(\alpha)$, $V \cap A$ est infini (A' est l'ensemble dérivé de A).*

Démonstration.
Condition nécessaire. si $V \cap A$ était fini alors $V \cap (A - \{\alpha\})$ serait aussi fini, c'est-à-dire $V \cap (A - \{\alpha\}) = \{a_1, \cdots, a_n\}$ est un fermé F, et donc $\complement F$ est un ouvert contenant α, soit $W = \complement F$. On a $V \cap W = \mathcal{U}$ est un voisinage de α et $\mathcal{U} \cap (A - \{\alpha\}) = \emptyset$, c'est-à-dire α n'est pas un point d'accumulation, d'où la contradiction.

Condition suffisante. Il existe au moins un élément a, $a \neq \alpha$ dans $V \cap A$, et donc $\alpha \in A'$. ■

Proposition 1.14 *Soit A un ensemble de n points distincts $A = \{a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n\}$ contenu dans X séparé. Alors pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, il existe un voisinage $V_i \in v(a_i)$ tel que les V_i soient deux à deux disjoints ($i \neq j \Longrightarrow V_i \cap V_j = \emptyset$).*

Ceci généralise en quelque sorte la définition. La démonstration se fait par récurrence.



2 Propriétés des espaces séparés

2-a Images

Soit X un espace topologique séparé.

Proposition 2.1 *Soient $x_1 \neq x_2 \in X$. S'il existe une application f continue de X dans Y séparé (f et Y pouvant dépendre de x_1 et x_2) telle que $f(x_1) \neq f(x_2)$ alors X est séparé.*

<u>*Démonstration.*</u>
Comme Y est séparé, il existe $V_1' \in v(f(x_1))$ et $V_2' \in v(f(x_2))$ avec $V_1' \cap V_2' = \emptyset$. Considérons alors
$f^{-1}(V_1') = V_1$ qui est un voisinage de $x_1 \in v(x_1)$ et
$f^{-1}(V_2') = V_2$ qui est un voisinage de $x_2 \in v(x_2)$
avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (sinon V_1' et V_2' ne le seraient pas) et donc X est séparé. ■

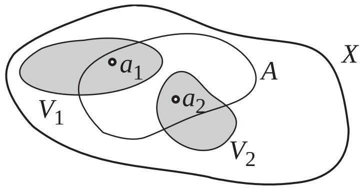
Corollaire 2.2
(1) S'il existe une injection f continue $X \longrightarrow X'$ séparé, alors X est séparé.
(2) Si X et X' sont homéomorphes et si X' est séparé, alors X est séparé.

Remarque 2.3 *L'image continue de X séparé n'est pas toujours séparée.*
<u>Contre-exemple.</u> *Considérons $X = \mathbb{R}$ usuel et $X' = \mathbb{R}$ grossier. Soit l'application $f : x \in X \longrightarrow x \in X'$. Nous avons X séparé, mais X' est non séparé.*

2-b Sous-espaces

Proposition 2.4 *Si A est une partie d'un espace séparé X, alors A est séparée.*

<u>*Démonstration.*</u>
Considérons l'injection continue $f : x \in A \longrightarrow x \in X$. Comme X est séparé, alors A est séparée. ■



2-c Produit

Proposition 2.5 *Considérons le produit* $X = \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$. *Alors* X *est séparé si et seulement pour tout* $i \in I$, X_i *est séparé.*

<u>*Démonstration.*</u>
Condition nécessaire. Soit j fixé $\in I$, montrons que X_j est séparé. Soit $a = (a_i)_{i \in I} \in X$. La section $S_j : x_j \in X_j \longrightarrow (x_i)_{i \in I} \in X$ (où $x_i = a_i$ si $i \neq j$). S_j est injective continue de X_j dans X séparé, donc X_j est séparé.

Condition suffisante. Si pour tout $i \in I$, X_i est séparé, soit alors $x = (x_i)_{i \in I} \neq x' = (x'_i)_{i \in I}$. Ainsi il existe au moins deux coordonnées de même indice qui sont distinctes, c'est-à-dire qu'il existe $i \in I$ tel que $x_i \neq x'_i$, c'est-à-dire $pr_i(x) \neq pr_i(x')$. Or pr_i continue $X \longrightarrow X_i$ séparé, et donc X est séparé d'après la première proposition de cette section. ■

Comme application immédiate de ce résultat, nous avons $\mathbb{R}^n$ est séparé, pour tout n, car $\mathbb{R}$ est séparé.

3 Applications à valeur dans un espace séparé

Soient f et g deux applications continues d'un espace topologique X dans Y séparé.

Proposition 3.1 *L'ensemble*

$$A = \{x \in X \text{ tel que } f(x) = g(x)\}$$

est fermé dans X.

<u>*Démonstration.*</u>
Considérons l'application $\varphi : x \in X \longrightarrow (f(x), g(x)) \in Y \times Y$.

On a φ est continue car f et g le sont. Soit alors Δ' la diagonale de $Y \times Y$. On a $A = \varphi^{-1}(\Delta') = \Delta$. Comme Y est séparé, alors Δ' est fermé et comme φ est continue, alors $\varphi^{-1}(\Delta')$ est fermé. ■

Cas particulier. Soit $x'_0 \in Y$ alors l'ensemble $\{x \in X \text{ tel que } f(x) = x'_0\}$ est fermé. Pour montrer cela, il suffit de considérer $g(x) = x'_0$.

3-a Prolongement des identités

Proposition 3.2 *Si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$ avec A partout dense dans X alors $f = g$.*

Démonstration.
Considérons l'ensemble $\{x \in X \ / \ f(x) = g(x)\}$ qui est fermé et contient A et donc contient $\overline{A} = X$, et finalement contient X, c'est-à-dire que, pour tout $x \in X$, on a $f(x) = g(x)$. ■

Corollaire 3.3 *Si f est constante dans A partout dense dans X, alors f est constante dans X.*

3-b Graphe de fonction continue

Proposition 3.4 *Si f est continue : $X \longrightarrow Y$ séparé, alors le graphe G de f, défini par*

$$G = \{(x, x') \ \ \textit{tel que} \ \ x' = f(x)\}$$

est fermé dans $X \times Y$.

Démonstration.
Soit $\varphi : (x, x') \in X \times Y \longrightarrow x' \in Y$ séparé. L'application φ est continue car c'est la deuxième projection. Ainsi l'application ψ donnée par

$$\psi : (x, x') \in X \times Y \longrightarrow f(x) \in Y$$

est continue car ψ est la composée des applications $(x, x') \longrightarrow x$ qui est continue et de $x \longrightarrow f(x)$ qui est aussi continue. Finalement

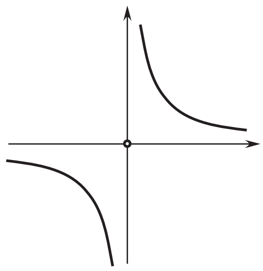
$$G = \{y \in X \times Y \text{ tel que } \varphi(y) = \psi(y)\}$$

est fermé d'après ce qui précède. ∎

Remarque 3.5 *La réciproque est fausse. Si le graphe G est fermé, cela $\not\Rightarrow f$ est continue.*

Contre-exemple
On considère $X = X' = \mathbb{R}$, et

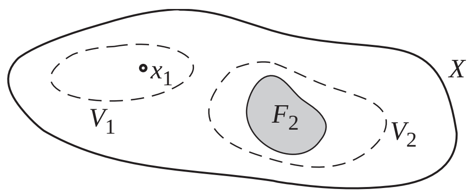
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$



Dans ce cas, le graphe G est fermé (car réunion de 2 fermés) et f est non continue à l'origine.

4 Espace de type T_3 ou régulier

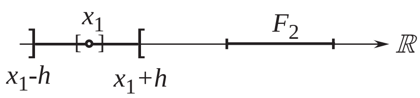
Définition 4.1 *On dit que l'espace topologique X est régulier (ou de type T_3) si :*
(1) X est séparé
(2) Quel que soit le fermé F_2 ($F_2 \subset X$) et pour tout $x_1 \notin F_2$, il existe $V_1 \in v(x_1)$ et il existe $V_2 \in v(F_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.



Remarque 4.2
1.) Si X est régulier, alors X est séparé. Mais la réciproque est fausse.
Contre-exemple. Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie $\mathcal{T}$ admettant pour base l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et les traces sur Q de ces intervalles ouverts (on peut vérifier qu'on a bien une base de $\mathcal{T}$). Alors nous avons
- *$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est séparé, car $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie euclidienne.*
- *$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est non régulier car, par exemple, le point 1 et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ (qui est fermé) sont disjoints mais il n'existe pas de voisinage de 1 disjoint de $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$. Ceci montre, par ailleurs, qu'une topologie plus finie qu'une topologie régulière n'est pas toujours une topologie régulière.*

2.) Si dans la définition on enlève (1) (c'est-à-dire X séparé), alors la propriété (2) n'entraîne pas que X soit séparé, car tout ensemble réduit à un point n'est pas fermé, mais $(2) \cup T_1 \Longrightarrow T_2$.

Exemple d'espaces réguliers.
1.) X discret est régulier. Il suffit de considérer $V_1 = \{x_1\}$ et $V_2 = F_2$.
2.) $\mathbb{R}$ est régulier.



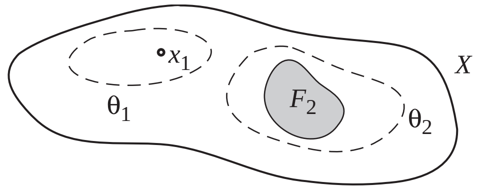
$]x_1 - h, x_1 + h[\subset F_2$ et donc $[x_1 - \frac{h}{2}, x_1 + \frac{h}{2}] \cap F_2 = \emptyset$.

3.) Tout espace métrique est régulier.

Propriété 4.3 *Il y a équivalence entre :*

(1) La propriété (2) de la définition (4.1)*,*
(2) Pour tout fermé F_2 et pour tout $x_1 \notin F_2$, il existe $\overline{V_1} \in v(x_1)$ tel que $\overline{V_1} \cap F_2 = \emptyset$ ($\overline{V_1}$ pour indiquer voisinage fermé).
(3) Pour tout $x \in X$, les voisinages fermés de x forment un système fondamental de voisinages de x.

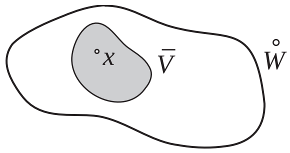
Démonstration.
(1) $\Longrightarrow$ (2)
Il existe $\theta_1 \in v(x_1)$ et $\theta_2 \in v(F_2)$ tels que $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$. Nous avons



$\overline{\theta_1}$ est un voisinage de x_1 et $\theta_1 \subset \complement\theta_2$ fermé. D'où $\overline{\theta_1} \subset \overline{\complement\theta_2} = \complement\theta_2$. Donc $\overline{\theta_1} \cap F_2 = \emptyset$.

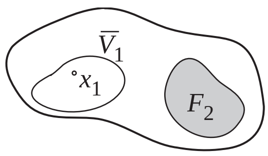
(2) $\Longrightarrow$ (3)

Soit $x \in X$ et $W \in v(x)$. Considérons $\overset{\circ}{W}$, alors $\overset{\circ}{W}$ est un fermé disjoint de $\{x\}$. D'après (2), il existe $\overline{V} \in v(x)$ tel que $\overline{V} \cap \complement \overset{\circ}{W} = \emptyset$ et donc $\overline{V} \subset \overset{\circ}{W} \subset W$.



(3) $\Longrightarrow$ (1)

Soit $x_1 \notin F_2$ fermé. $\complement F_2 \in v(x_1)$ et donc, d'après (3), il existe $\overline{V_1} \in v(x_1)$, $\overline{V_1} \subset \complement F_2$, ainsi $\complement\overline{V_1} \in v(F_2)$ et $\overline{V_1} \cap \complement\overline{V_1} = \emptyset$ c'est-à-dire (1). ■



Propriété 4.4 *Si X est homéomorphe à X' régulier, alors X est régulier.*

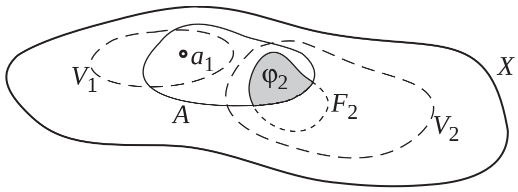
Démonstration.

• X est séparé (d'après ce qui précède).

• Soit $x_1 \notin F_2$ dans X et soit h homéomorphisme de $X \longrightarrow X'$. On a $h(x_1) \notin h(F_2)$ fermé implique qu'il existe $V_1' \in v(h(x_1))$ et $V_2' \in v(h(F_2))$ tels que $V_1' \cap V_2' = \emptyset$. Ainsi par images réciproques, $V_1 = h^{-1}(V_1') \in v(x_1)$ et $V_2 = h^{-1}(V_2') \in v(F_2)$, avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. ■

Propriété 4.5 *Tout sous-espace A de X régulier est régulier.*

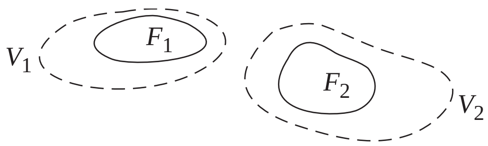
Démonstration.
• On sait que A est séparé.
• Soit $a_1 \notin \varphi_2$ fermé, donc $a_1 \notin F_2$ et donc il existe $V_1 \in v(a_1)$ et $V_2 \in v(F_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Les traces sont disjointes et donc A est régulier. ■



5 Espace de type T_4 ou normal

On se donne un espace topologique X.

Définition 5.1 *L'espace topologique X est dit normal (ou de type T_4) si*
(1) X est séparé,
(2) Pour tous fermés disjoints F_1 et F_2 de X alors, il existe $V_1 \in v(F_1)$ et $V_2 \in v(F_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.



Remarque 5.2
1.) Dans la définition, on peut remplacer V_1 et V_2 par deux ouverts θ_1 et θ_2.
2.) Si X est normal, alors X est régulier (car tout ensemble réduit à un point est fermé) mais la réciproque est fausse.

Exemples d'espaces de type T_4.
1.) X discret est normal ; il suffit de considérer $V_1 = F_1$ et $V_2 = F_2$.
2.) $\mathbb{R}$ usuel est normal.
3.) Tout espace métrique est normal.

Démonstration.
La démonstration découle du résultat suivant (voir chapitre sur les espaces métriques) : *Soit A non vide dans un espace métrique X. Alors l'application $\varphi : x \in X \longrightarrow d(x, A) \in \mathbb{R}$ est continue sur X.*
Soient F_1 et F_2 fermés tels que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ et soit l'application $f : x \in X \longrightarrow f(x) = d(x, F_1) - d(x, F_2) \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{array}{ll} f(x) < 0 & \text{si } x \in F_1 \\ f(x) > 0 & \text{si } x \in F_2 \end{array}$$

Par conséquent $f(F_1) \subset]-\infty, 0[= \theta'_1$ et $f(F_2) \subset]0, +\infty[= \theta'_2$. Et nous avons $\theta_1 = f^{-1}(\theta'_1)$ ouvert $\supset F_1$ et $\theta_2 = f^{-1}(\theta'_2)$ ouvert $\supset F_2$, avec $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$ (car $\theta'_1 \cap \theta'_2 = \emptyset$), par conséquent X est normal. ∎

Propriété 5.3 *Soit X un espace topologique séparé. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes.*
(1) X normal.
(2) Pour tout θ ouvert $\subset X$ et pour tout F fermé $\subset \theta$, il existe θ' ouvert tel que $F \subset \theta' \subset \overline{\theta'} \subset \theta$.
(3) Pour tous fermés F_1 et F_2 disjoints, il existe θ_1 ouvert $\supset F_1$ tel que $\overline{\theta_1} \cap F_2 = \emptyset$.
(4) Pour tous fermés F_1 et F_2 disjoints, il existe $V_1 \in v(F_1)$ et $V_2 \in v(F_2)$ tels que $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$.

Démonstration.
La démonstration est similaire à ce qui a précédé. ∎

Propriété 5.4 *Si X est homéomorphe à X' normal, alors X est normal.*

Démonstration.
X est séparé. Pour le reste, voir la figure (4.5.1) ci-dessous. ∎

Remarque 5.5 *On démontre également les résultats suivants.*
1.) Tout sous-espace d'un espace normal n'est pas toujours normal.
2.) Le produit d'une famille (même finie) d'espaces normaux n'est pas toujours normal.

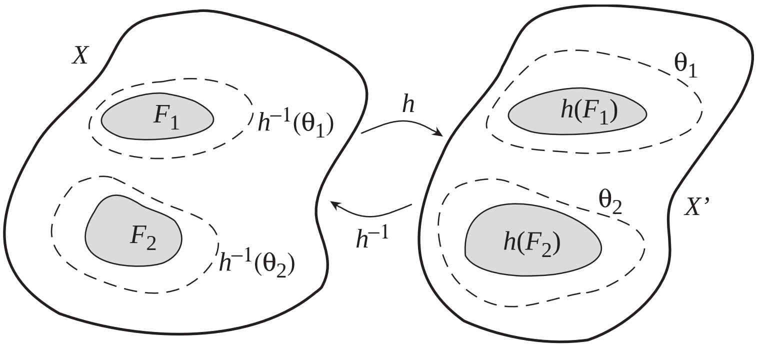


Figure 4.5.1 – X *et* X' *sont homéomorphes*

.

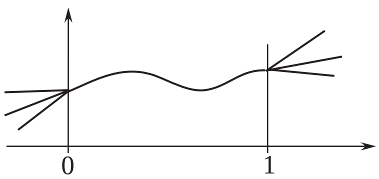
6 Prolongement des fonctions continues

Soient X et X' deux espaces topologiques et A un sous-espace de X.

Définition 6.1 *On dit qu'une application continue f de A dans X' est prolongeable continûment dans X, s'il existe une application continue f^* de X dans X' dont la restriction à A est égale à f.*

Remarque 6.2
1.) La fonction prolongée f^* peut ne pas exister. C'est le cas, par exemple, où $X = \mathbb{R}$, $A =]0, +\infty[$ et $f : x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$.
L'application f est continue sur A, mais non prolongeable car f^* serait continue en 0 (et donc f serait, en particulier, continue à droite en 0 ce qui est contraire à l'hypothèse). par conséquent f est non prolongeable.

2.) Le prolongement f^* n'est évidemment pas unique.



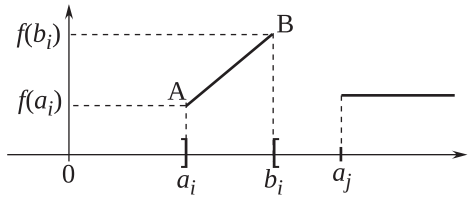
Proposition 6.3 *Cas particulier où A est fermé dans $X = \mathbb{R}$.*
Si A est fermé non vide de $\mathbb{R}$ et f continue $A \longrightarrow \mathbb{R}$ alors :

(1) Il existe f^* continue : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dont la restriction à A est f ($f^*/A = f$).
(2) Si $m < f(x) < M$, alors f^* vérifie aussi : $m < f^*(x) < M$.

Démonstration.
$\complement A$ est ouvert donc est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

$$\complement A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}}]a_i, b_i[$$

a_i et $b_i \in A$ (où $a_i = -\infty$, $b_i = +\infty$), ce qui implique que f est définie en a_i et b_i.



• *Prolongement de f.* On prolonge f en prenant les segments $[AB]$ ou bien les constantes. D'une manière générale, on pose

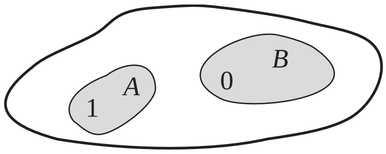
$f^*(x) = f(x)$ si $x \in A$,
f^* est affine sur $[a_i, b_i]$, en particulier f^* est constante si $]a_i, b_i[$ est non borné. Ainsi finalement $f^* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f^*/A = f$.

• *f^* est continue.* Nous avons
$f^*/A = f$ continue et $f^*|_{\complement A}$ continue $\not\Longrightarrow$ f^* continue.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f^* est continue en x. En effet,
Si $x \in \complement A$: f^* est continue,
Si $x \in A$, on montre que f^* est continue à droite en distinguant les deux cas où x est isolé à droite et x est non isolé à droite. ■

Théorème 6.4 *: Théorème de Tietze - Urysohn*
Soit X un espace topologique séparé. Pour que X soit normal, il faut et il suffit que, pour tout fermé F de X et pour toute application continue $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$, f soit prolongeable continûment dans X.

Le théorème se traduit par : X normal si et seulement si pour tout $F \subset X$ et f continue : $F \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe f^* continue : $X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f^*/F = f$.

<u>*Démonstration.*</u>
Condition nécessaire. Elle est élémentaire mais longue et délicate ; à admettre. Dans le cas particulier où X est un espace métrique, c'est relativement facile). La difficulté vient de la définition de $f = 0$ sur A fermé et $f = 1$ sur B fermé.



Condition suffisante. Soient F_1 et F_2 fermés disjoints dans X, alors $F = F_1 \cup F_2$ est fermé. Soit alors la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} y_1 & \text{si} \quad x \in F_1 \\ \\ y_2 & \text{si} \quad x \in F_2 \end{cases}$$

avec $y_1 \neq y_2$. L'application f est continue sur $F_1 \cup F_2 = F \longrightarrow \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est séparé, il existe V_1' ouvert $\in v(y_1)$ et V_2' ouvert $\in v(y_2)$ tels que $V_1' \cap V_2' = \emptyset$. Et nous avons :
$f^{-1}(V_1') = V_1$ et $f^{-1}(V_2') = V_2$ sont ouverts avec $V_1 \supset F_1$, $V_2 \supset F_2$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Par conséquent X est normal. ∎

Remarque 6.5 *Si l'application f satisfait : $m < f(x) < M$, on peut choisir f^* telle que : $m < f^*(x) < M$, et même lui donner des bornes égales à celles de f (qu'elles soient finies ou infinies).*

Chapitre 5

Espaces topologiques compacts

1 Notion d'espace compact

Commençons par un premier résultat utile pour introduire les espaces topologiques compactes.

Proposition 1.1 *Soit X un espace topologique non vide, alors il y a équivalence entre*
(1) Tout recouvrement ouvert de X contient un sous recouvrement fini.
(2) Toute famille de fermés dont l'intersection est vide contient une sous famille finie dont l'intersection est vide.

<u>*Démonstration.*</u>
(1) $\Longrightarrow$ (2)
Soit $(\theta_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts tels que $X = \bigcup_{i \in I} \theta_i$, alors il existe J fini $\subset I$ tel que $X = \bigcup_{i \in J} \theta_i$.
Soit (F_i) une famille de fermés tels que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Soit alors $\complement F_i = \theta_i$ qui est ouvert. Nous avons

$$\complement \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \bigcup_{i \in I} \complement F_i = \bigcup_{i \in I} \theta_i = X$$

Ainsi il existe J fini $\subset I$ tel que $\bigcup_{i\in J} \theta_i = X$. Donc

$$\complement\left(\bigcup_{i\in J} \theta_i\right) = \bigcap_{i\in J} (\complement\theta_i) = \bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$$

Pour l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1), la démarche est identique. ■

Définition 1.2
(1) Un espace topologique X est dit quasi compact s'il possède une des propriétés ci-dessus.
(2) Un espace topologique X est dit compact s'il est séparé et quasi compact.

Exemples d'espaces compacts.
1.) Tout espace topologique X fini discret est compact.
Mais si X est infini discret $\not\Longrightarrow$ X compact, car on peut prendre les singletons comme recouvrement de X par des ouverts.
2.) Tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est compact (voir plus loin).
3.) $\mathbb{R}$ usuel n'est pas compact (considérer $\theta_n =]-n, n[$).

Remarque 1.3
1.) Si X est muni d'une topologie $\mathcal{T}$ finie, alors X est quasi compact. En particulier si X est fini, alors $\mathcal{P}(X)$ est fini et donc $\mathcal{T}$ est fini pour tout $\mathcal{T}$, et donc X est quasi compact.
2.) Si X est fini alors X compact $\Longleftrightarrow$ X discret.

Démonstration.
Condition suffisante. C'est évident car X discret $\Longrightarrow$ X séparé. Condition nécessaire. X compact $\Longrightarrow$ X séparé. Si X est fini, alors $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ et comme X est séparé, pour tout $i = 1, \cdots, n$ il existe $V_i \in v(x_i)$ tel que, pour tout $i \neq j$, on a $V_i \cap V_j = \emptyset$. Par conséquent $V_i = \{x_i\}$ et donc $\{x_i\}$ est ouvert, donc X est discret. ■

2 Suites dans un compact

Proposition 2.1 *Dans un espace topologique compact X, toute suite décroissante de fermés non vides $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une intersection non vide.*

<u>*Démonstration.*</u>
Sinon $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$ d'après la propriété (2), il existe J fini $\subset \mathbb{N}$ tel que $\bigcap_{n\in J} F_n = \emptyset$. Soit alors $p = \max(J)$. Puisque (F_n) est décroissante, alors $\bigcap_{n\in J} F_n = F_p = \emptyset$ ce qui est contraire à l'hypothèse. ■

Le résultat vrai, en fait, pour toute famille totalement ordonnée par inclusion de fermés non vide.

Proposition 2.2 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points dans X compact alors :*

(1) La suite (x_n) possède au moins une valeur d'adhérence (Bolzano[1]-Weierstrass[2]).

(2) Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une seule valeur d'adhérence a, alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = a$$

<u>*Démonstration.*</u>
(1) Soit $A_n = \{x_i \ / \ i \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$. Alors a est une valeur d'adhérence de (x_n) si, pour tout n, $a \in \overline{A_n}$. L'ensemble des valeurs d'adhérence est $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. A est donc l'intersection de la suite décroissante des fermés non vides $F_n = \overline{A_n}$, donc A possède au moins un élément.
(2) Soit a l'élément unique de $A = \bigcap \overline{A_n}$. Pour tout voisinage ouvert V de a et $F = \complement V$, on a $\varphi_n = \overline{A_n} \cap F$ est fermé. Les φ_n ont une intersection vide donc, puisque (φ_n) est décroissante, il existe n_0 tel que $\varphi_n = \emptyset$ pour tout $n \geq n_0$, c'est-à-dire $\overline{A_n} \subset \complement F = V$ et à fortiori $a_n \subset V$. ■

Corollaire 2.3 *Toute partie infinie A de X compact admet au moins un point d'accumulation (Bolzano-Weierstrass).*

1. Bernard Bolzano, Mathématicien tchèque, 1781-1848
2. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, Mathématicien allemand, 1815-1897

Démonstration.
A contient une suite indexée dans $\mathbb{N}$ de points x_n distincts, d'où (x_n) admet une valeur d'adhérence a. Montrons que a est un point d'accumulation. Soit $V \in v(a)$, on sait que $V \cap A$ est infini (propriété des espaces séparés), c'est-à-dire contient un élément de (x_n) distinct, d'où le résultat. ∎

Remarque 2.4
1.) Dans X compact, si $A = \{(x_n)\}$, alors A n'admet pas nécessairement un point d'accumulation, car A peut être fini ou réduit à un point (cas de suite constante).
2.) Si X est séparé et toute partie A infinie de X a au moins un point d'accumulation, alors X est compact. Nous verrons que ceci est vrai dans le cas où X est métrique.

3 Parties compactes

Définition 3.1 *Soit A une partie d'un espace topologique X. On dit que A est compacte si le sous espace topologique A de X est compact.*

Proposition 3.2 *Soit A une partie d'un espace topologique compact X. Alors A est quasi compacte si et seulement si pour toute famille $(\theta_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X telle que $\bigcup_{i\in I} \theta_i \supset A$, il existe J fini $\subset I$, tel que $\bigcup_{i\in J} \theta_i \supset A$.*

Démonstration.
Condition nécessaire. Soit $(\theta_i)_{i\in I}$ la famille d'ouverts recouvrant A. Les $\theta_i \cap A$ sont des ouverts de A. Si A est quasi compact, alors on peut extraire un sous recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe J fini $\subset I$ tel que $\bigcup_{i\in J}(\theta_i \cap A) = A$. Et par conséquent $\bigcup_{i\in J} \theta_i \supset A$.

Condition suffisante. Soit $(\omega_i)_{i\in I}$ la famille d'ouverts de A telle que $\bigcup_{i\in I} \omega_i = A$. Pour tout $i \in I$, $\omega_i = \theta_i \cap A$ et donc $\bigcup_{i\in I}(\theta_i \cap A) = A$, soit encore $\bigcup_{i\in I} \theta_i \supset A$. Par hypothèse, il existe J fini $\subset I$ tel que $\bigcup_{i\in J}\theta_i \supset A$, ce qui donne $\bigcup_{i\in J}(\theta_i \cap A) = \bigcup_{i\in J}\omega_i = A$, et par conséquent A est quasi compact. ■

Remarque 3.3 *Si A est compacte dans X et $X \subset Y$, alors A est compacte dans Y. La démonstration est immédiate par transitivité des sous espaces topologiques.*

Exemple 3.4
1.) Toute partie finie de X séparé est compacte.

2.) Dans X séparé, soit (x_n) une suite convergente vers a, alors $A = \{a, x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ est compacte.
• A est séparé car $A \subset X$ séparé.
• A est quasi compacte car si $a \in \theta$ avec $\theta \in v(a)$, alors θ contient tous le éléments de la suite sauf un nombre fini, ce qui montre qu'un nombre fini d'ouverts recouvrira les autres points, et donc A est quasi compacte.

5.) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est compacte.

3-a Parties compactes et parties fermées

Proposition 3.5 *Si A est fermée dans X compact, alors A est compacte.*

Démonstration.
• A est séparé car X est séparé.
• Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de A telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$.
Comme A est fermé, les F_i sont fermés dans X compact donc il existe J fini $\subset I$ tel que $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$, et donc A est quasi compacte. ■

Proposition 3.6 *Si A est compacte dans X séparé, alors A est fermée.*

Démonstration.
Montrons que $\complement A$ est ouvert, c'est-à-dire voisinage de chacun de ses points. Soit $x \in \complement A$ et $a \in A$. Comme X est séparé, alors il existe θ_a ouvert $\in v(a)$ et il existe $V_a \in v(x)$ tels que $\theta_a \cap V_a = \emptyset$. Maintenant $\bigcup_{a\in A}\theta_a \supset A$ compacte, donc il existe B fini $\subset A$ tel

que $\bigcup_{a\in B} \theta_a \supset A$. Soit alors $V = \bigcap_{a\in B} V_a \in v(x)$ (car intersection finie). Comme $V \cap A = \emptyset$, alors $V \subset \complement A$, soit encore $\complement A \in v(x)$ et donc $\complement A$ est ouvert, c'est-à-dire A fermé. ■

Corollaire 3.7 *Dans un espace X compact, on a l'équivalence : A est fermée si et seulement si A est compacte.*

La démonstration est immédiate.

3-b Compacts de $\mathbb{R}$

Proposition 3.8 *A est compacte dans $\mathbb{R}$ si et seulement si A est fermée bornée.*

Démonstration.
Condition nécessaire. D'après ce qui précède, A est fermé. A partir de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n,n[\supset A$ on peut extraire un sous recouvrement fini, il existe n tel que, pour tout $x \in A$, $|x| < n$ et donc A est borné.
Condition suffisante. Si A est borné alors $A \subset [a,b]$ et donc A est compact car $[a,b]$ est compact. ■

3-c Union - Intersection

Proposition 3.9
(1) Dans X séparé, la réunion d'une famille finie de compacts est compacte.
(2) Dans X séparé, l'intersection d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de compacts est compacte si $I \neq \emptyset$.

Démonstration.
Pour *(1)* c'est immédiat, par récurrence.
Pour *(2)* c'est évident, car A_i fermé donne $A = \cap A_i$ est fermé, et donc A est compact car contenu dans A_i compact. ■

3-d Espace compact - Espace normal

Par définition X compact séparé, en fait il possède une propriété plus forte.

Proposition 3.10 *Tout espace compact est normal.*

Démonstration.
• Soit un point x et F un fermé, avec $x \notin F$. Pour tout $y \in F$, il existe deux ouverts disjoints U_y et V_y contenant respectivement x et y et tels que $U_y \cap V_y = \emptyset$ ($U_y \in v(x)$ et $V_y \in v(y)$).
Maintenant quand y décrit F, V_y décrit un recouvrement ouvert de F. Dans X compact, F fermé donne F compact, et donc on peut extraire un sous recouvrement fini par $V_{y_1}, \cdots, V_{y_n}$. Ainsi $V_x = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ est un ouvert $\supset F$ et $W_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ est un ouvert qui contient x. Puisque $V_{y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset$ alors $V_x \cap W_x = \emptyset$.

• Soit F et φ deux fermés disjoints. Pour tout $x \in \varphi$, on peut trouver deux voisinages ouverts disjoints W_x de x et V_x de F. En faisant décrire φ par x et en recommençant le raisonnement précédent, on trouve un ouvert U contenant φ disjoint d'un ouvert V contenant F. ■

4 Image continue - Produit

4-a Image continue d'un espace compact

Théorème 4.1 *Soit f une application continue de X compact dans X' séparé, alors $f(X)$ est compact.*

Démonstration.
• $f(X)$ est séparé car X' est séparé.
• $f(X)$ est quasi compact. Pour cela, soit $(\omega'_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $f(X)$, c'est-à-dire $\bigcup_{i\in I} \omega'_i = f(X)$, ce qui donne $\bigcup_{i\in I} f^{-1}\{\omega'_i\} = X$. Maintenant comme f est continue, $f^{-1}\{\omega'_i\}$ est ouvert et donc il existe J fini $\subset I$ tel que $\bigcup_{i\in J} f^{-1}\{\omega'_i\} = X$ et donc $\bigcup_{i\in J} \omega'_i = f(X)$ (par image directe), c'est-à-dire $f(X)$ est quasi compact. ■

Corollaire 4.2
(1) Si X est homéomorphe à X' et si X est compact, alors X' est compact.
(2) Si f est une bijection continue de X compact dans X' séparé, alors f est un homéomorphisme $X \longrightarrow X'$.
(3) Si f est continue de X compact dans $\mathbb{R}$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration.
(1) Démonstration évidente.
(2) Il suffit de montrer que f^{-1} est continue. Montrons que f est une application fermée. Soit A fermé de X, alors A est compacte, et donc $f(A)$ est compacte dans X' séparé, ce qui donne $f(A)$ fermé. Par conséquent f^{-1} est continue.
(3) On a $f(X)$ compact dans $\mathbb{R}$, donc $f(X)$ bornée et donc f est bornée. $f(X)$ fermée donc $f(X)$ contient ses bornes, f étant continue $f(X)$ atteint ses bornes. ■

4-b Produit d'espaces compacts

Soit $X = \prod_{i \in J \; fini} X_i$ où, pour tout $i \in J$, X_i est un espace topologique.

Proposition 4.3 *X est compact si et seulement si pour tout $i \in J$ fini, X_i est compact.*

Démonstration.
Condition nécessaire. $X_i = pr_i(X)$ et pr_i étant continue, X_i est séparé car X séparé, et X compact donne X_i compact.

Condition suffisante. Montrons ce résultat dans le cas de deux espaces (le cas fini quelconque s'en déduit soit par récurrence, soit par associativité du produit topologique).
Soit $X = X_1 \times X_2$ avec X_1 et X_2 compacts. Soit (ω_i) est un recouvrement ouvert de X. Tout ω_i est réunion d'ouverts élémentaires de la forme $\theta \times \theta'$ (θ ouvert de X_1 et θ' ouvert de X_2). Il existe donc une famille d'ouverts de cette forme qui constitue un recouvrement de $X_1 \times X_2$, et telle que tout élément du type $\theta \times \theta'$ est inclus dans au moins un des ω_i. Donc il suffit de montrer qu'on peut extraire un sous recouvrement fini pour les ouverts de la forme $\theta \times \theta'$.

Soit donc $(\theta \times \theta')$ un recouvrement de $X_1 \times X_2$. La coupe de $X_1 \times X_2$ correspondant à l'élément $x \in X_1$ est homéomorphe à X_2 (qui est compact) est donc compacte, ainsi on peut donc la recouvrir par un nombre fini d'ouverts de la forme

$$(\theta_x^1 \times \theta'^1), (\theta_x^2 \times \theta'^2), \cdots, (\theta_x^n \times \theta'^n)$$

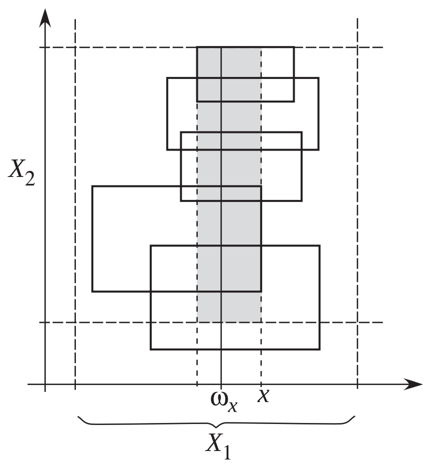
θ_x^1, θ_x^2, $\cdots$, θ_x^n sont des ouverts qui $\supset x$. Considérons alors

$$\omega_x = \theta_x^1 \cap \theta_x^2 \cap \cdots \cap \theta_x^n$$

C'est un ouvert qui contient x et il est tel que $\omega_x \times X_2$ est recouvert par la famille finie $(\theta_x^i \times \theta'^i)_{1 \leq i \leq n}$.
Quand x décrit X_1, les ω_x constituent un recouvrement de X_1 compact, dont on peut extraire un sous recouvrement fini de la forme

$$\omega_{x_1}, \cdots, \omega_{x_p}$$

Ainsi l'ensemble $\{\omega_{x_1} \times X_2, \omega_{x_2} \times X_2, \cdots, \omega_{x_p} \times X_2\}$ constitue un recouvrement fini de $X_1 \times X_2 = X$. Chaque élément de ce recouvrement admettant lui même un recouvrement fini de type $(\theta_x^i \times \theta'^i)$, la réunion de ces recouvrements est un recouvrement fini de $X_1 \times X_2$. ■



Remarque 4.4 *Le résultat est vrai même si J est infini (théorème de Tychonov*[3]*) à admettre.*

3. Andrey Nikolayevich Tychonov, Mathématicien russe, 1906-1993

Corollaire 4.5 *A est compacte dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si A est fermée bornée.*

Démonstration.
Condition nécessaire.
• A compacte dans $\mathbb{R}^n$ séparé est fermée.
• $pr_i(A)$ est l'image continue d'un compact est compact dans $\mathbb{R}$ et est borné, donc $pr_i(A)$ est borné dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $pr_i(A) \subset [a_i, b_i]$ et ceci pour tout $i = 1, \cdots, n$, donc $A \subset \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] \Longrightarrow A$ borné.
Condition suffisante. A est borné dans $\mathbb{R}^n$ donne A inclus dans un pavé de la forme $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$, or A est fermé dans $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ qui est compact (d'après la proposition précédente) est compact. ■

5 Notion d'espace localement compact

Soit X un espace topologique.

5-a Définition des espaces localement compacts

Définition 5.1 *On dit que X est localement compact si :*
(1) X est séparé.
(2) Tout point de X admet un voisinage compact.

Exemples d'espaces localement compacts.

1.) Tout espace X compact est localement compact. En effet, il suffit de considérer comme voisinage X car, pour tout $x \in X$, X est compact et $X \in v(x)$. La réciproque est fausse, considérer $\mathbb{R}$.

2.) X discret est localement compact. En effet, X est séparé et, pour tout $x \in X$, $\{x\} \in v(x)$ et $\{x\}$ est compact.
Remarquons que si X discret est infini, alors X est localement compact mais non compact.

3.) $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle est localement compact. En effet, il suffit de considérer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \in v(x)$ et qui est compact.

Exemples d'espaces non localement compacts.

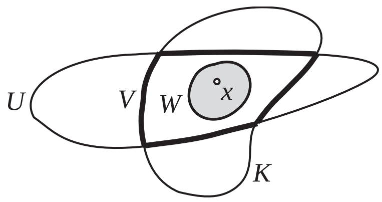
1.) Les espaces X grossier et de Sierpinski ne sont pas localement compacts, car non séparés.

2.) $\mathbb{Q}$, sous-espace de $\mathbb{R}$, n'est pas localement compact.
Si $\mathbb{Q}$ était localement compact, il existerait K compact $\in v_{\mathbb{Q}}(0)$ et $K \supset [-\varepsilon, \varepsilon] \cap \mathbb{Q} = K'$. K' est compact et $\in v_{\mathbb{Q}}(0)$ or il existe x irrationnel dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$ et $F_n = [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \cap \mathbb{Q} \subset K'$, pour $n \geq n_0$. Ainsi (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides de K' et $\cap F_n = \emptyset$ car $\cap F_n = x \notin \mathbb{Q}$. Finalement K' est non compact, d'où la contradiction.

5-b Régularité des espaces localement compacts

Proposition 5.2 *Si X est localement compact, alors tout point de X admet un système fondamental de voisinages compacts.*

<u>*Démonstration.*</u>
Soit $x \in X$ et $U \in v(x)$. Par hypothèse X étant localement compact, il existe K compact, $K \in v(x)$.



Soit $V = U \cap K$, $V \in v_K(x)$ et K compact donne qu'il existe W fermé dans K tel que $W \in v_K(x)$ et $W \subset V$ (car K compact est régulier). On a donc $W \subset V \subset U$.
D'une part, W est compact car fermé contenu dans K compact.
D'autre part, $W \in v_X(x)$ car $W \in v_K(x)$ et $K \in v_X(x)$. ■

Corollaire 5.3 *Si X est localement compact, alors X est régulier.*

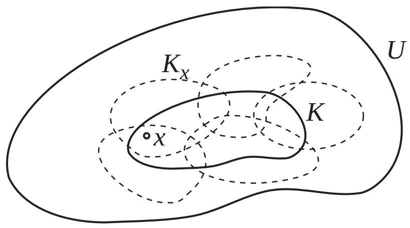
<u>*Démonstration.*</u>
• X est séparé.
• Tout point admet une base de voisinages fermés ; cela résulte de la proposition précédente et du fait qu'un compact dans X séparé est fermé. ■

Remarque 5.4 *La réciproque est fausse.*
contre-exemple. *$\mathbb{Q}$ est régulier, car tout sous-espace d'un espace régulier est régulier, et est non localement compact.*

Mais nous avons la généralisation suivante.

Proposition 5.5 *Dans X localement compact, tout compact K admet une base de voisinages compacts.*

Démonstration.
Soit $U \in v(K)$. Si $x \in K$ alors $U \in v(K)$ et donc $U \in v(x)$.
Maintenant X étant localement compact, nous avons d'après la proposition précédente : il existe K_x compact $\in v(x)$ tel que $K_x \subset U$. Considérons alors $\bigcup_{x \in K} \overset{\circ}{K}_x \supset K$ (car $x \in \overset{\circ}{K}_x$).
K étant compact, il existe un recouvrement fini, c'est-à-dire $x_1, x_2, \cdots, x_n \in K$ tels que $\bigcup_{i=1}^{n} \overset{\circ}{K}_{x_i} \supset K$. Posons $K' = \bigcup_{i=1}^{n} K_{x_i}$.
On a K' compact (car réunion finie de compacts) et $K' \subset U$ (car chaque $K_{x_i} \subset U$) et $K' \supset \overset{\circ}{K}_{x_i}$ ouvert $\supset K$, et donc $K' \in v(K)$.■



5-c Image continue d'espace localement compact

Remarque 5.6 *Si f est continue : $X \longrightarrow X'$, avec X localement compact et X' séparé, alors $f(X)$ n'est pas nécessairement localement compact.*
Contre-exemple. *Considérons $X = \mathbb{N}$ discret et $X' = \mathbb{Q}$ (sous-espace de $\mathbb{R}$). Alors X est localement compact et X' est non localement compact. On sait qu'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ qui est donc continue puisque X est discret.*

Proposition 5.7 *Si f est un homéomorphisme $X \longrightarrow X'$ et si X est localement compact, alors X' est localement compact.*

(car un homéomorphisme échange les voisinages et les parties compactes).

<u>*Démonstration.*</u>

- X' est séparé car f est un homéomorphisme.
- Soit $x' \in X'$, alors $x' = f(x)$ où $x \in X$. Comme X est localement compact, il existe K compact $\in v(x)$. Par conséquent $f(K)$ est compact et $f(K) = K' \in v(x')$. ∎

5-d Produit d'espaces localement compacts

Proposition 5.8 *soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ où I est fini, alors X est localement compact si et seulement si, pour tout $i \in I$, X_i est localement compact.*

<u>*Démonstration.*</u>

$\Longrightarrow$ On sait que chaque facteur X_i est homéomorphe à un sous-espace fermé de l'espace localement compact X, donc est localement compact.

$\Longleftarrow$ Supposons que $X = \prod_{i \in I} X_i$, avec X_i localement compact.

- X est séparé.
- Soit $x = (x_i) \in X$, on a $x_i \in X_i$ localement compact donne : il existe K_i compact $\in v(x_i)$. Ainsi $\prod_{i \in I} K_i$ est un compact $K \in v(x)$ (théorème de Tychonov). ∎

Remarque 5.9

1.) On a la même propriété si I est infini mais si, de plus, presque tous les X_i sont compacts sauf un nombre fini.

2.) Si I est infini, le résultat est faux en général.

<u>*Contre-exemple.*</u> *Considérons $X_i = \mathbb{R}$ usuel et $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ est non localement compact. Sinon, soit $x = (x_i) \in X$, il existe $K \in v(x)$ et K contient un ouvert de la forme $\omega = \prod_{i=1}^{\infty} \theta_i$ où $\theta_i = X_i$ si $i \notin J$ fini, donc $pr_i(K) = X_i$ pour tout $i \notin J$. Or, par ailleurs, K est compact et pr_i continue, donc $pr_i(K) = X_i$ $(= \mathbb{R})$ compact pour tout $i \notin J$. D'où la contradiction.*

3.) La réciproque est non évidente (car $X_i = pr_i(X)$ est insuffisant).

Exemple 5.10 $\mathbb{R}^n$ *est localement compact.*

5-e Sous-espaces localement compacts

Remarque 5.11 *Un sous-espace d'un espace localement compact n'est pas localement compact. A titre de contre-exemple, considérer $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 5.12 *Si $A = \theta \cap F$ (θ ouvert et F fermé) dans X localement compact alors A est localement compact.*

Démonstration.
• A est séparé.
• Soit $a \in A$, $a \in \theta$. Ainsi $\theta \in v_X(a)$ et X localement compact donnent : il existe K compact $\in v_X(a)$ tel que $K \subset \theta$. Considérons $K \cap F = K'$, alors

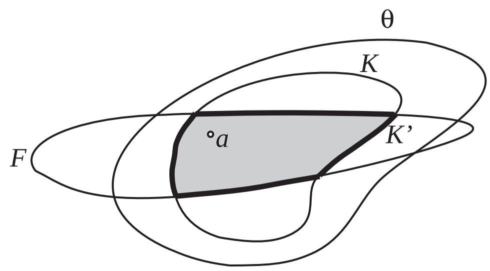


FIGURE 5.5.1 – $A = \theta \cap F$.

(i) d'une part, $K' \subset A$,
(ii) d'autre part, K' est compact car $K \cap F$ est fermé dans K compact, et $K' \in v_A(a)$ car $K' = K \cap A$. D'où $K' = K \cap (\theta \cap F) = (K \cap \theta) \cap F$, c'est-à-dire $K' = K \cap F$ (car $K \subset \theta$), or $K \in v_X(a)$ et donc $K' \in v_{A(a)}$, c'est-à-dire A localement compact. Voir figure (5.5.1). ■

La réciproque est vraie. Nous avons le résultat suivant.

Proposition 5.13 *Tout sous-espace A localement compact dans X séparé est égal à l'intersection d'un fermé et d'un ouvert : $A = \theta \cap F$.*

<u>*Démonstration.*</u>
Pour tout $a \in A$, il existe K_a compact $\in v_A(a)$, $K_a \supset \theta_a \cap A$ (θ_a ouvert de X).
$\theta = \bigcup_{a\in A} \theta_a$ ouvert dans X, et $\theta - A = \bigcup_{a\in A} (\theta_a - K_a)$. Chaque K_a étant compact dans X séparé est fermé, par conséquent $(\theta_a - K_a)$ est ouvert dans X, et donc $\theta - A$ est ouvert dans X. Posons alors $F = \complement(\theta - A)$, F est fermé et on a bien $A = \theta \cap F$. ∎

Corollaire 5.14 *Dans un espace X localement compact, tout ouvert et tout fermé est localement compact.*

<u>*Démonstration.*</u>
Tout ouvert θ s'écrit $\theta = \theta \cap X$, X fermé.
Tout fermé F s'écrit $F = F \cap X$, X ouvert. ∎

Exemple 5.15
1.) Dans $\mathbb{R}^n$, tout ouvert et tout fermé est localement compact.
2.) Dans $\mathbb{R}$, tout intervalle est localement compact.
• *Si l'intervalle est fermé ou ouvert, c'est évident d'après le corollaire.*
• *Si l'intervalle est donné par $[a, b[$, alors on peut écrire*

$$[a, b[=]-\infty, b[\cap [a, +\infty[= \theta \cap F$$

5-f Intersection de sous-espaces localement compacts

Proposition 5.16 *Si A_1 et A_2 sont deux sous-espaces localement compacts dans X séparé, alors $A = A_1 \bigcap A_2$ est localement compact.*

<u>*Démonstration.*</u>
• A est séparé (car sous-espace de X séparé).
• Soit $a \in A$. Comme $a \in A_1$ localement compact, alors il existe $K_1 \in v(a)$, K_1 compact $\subset A_1$. Comme $a \in A_2$ localement compact, alors il existe $K_2 \in v(a)$, K_2 compact $\subset A_2$.
Ainsi nous avons $K_1 \cap A \in v_A(a)$ et $K_2 \cap A \in v_A(a)$. Soit alors $K = K_1 \cap K_2$ est un compact (car intersection de compacts) et $K = (K_1 \cap A) \cap (K_2 \cap A) \in v_A(a)$. Et donc A est localement compact.

∎

Ce résultat se généralise à une intersection finie.

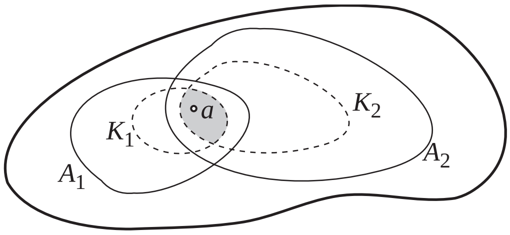
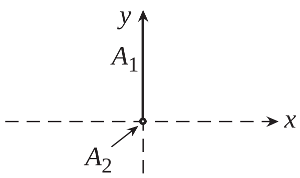


FIGURE 5.5.2 – *Intersection d'espaces localement compacts.*

Remarque 5.17 *Si A_1 et A_2 sont localement compact dans X séparé, alors $A = A_1 \cup A_2$ n'est pas nécessairement localement compact.*
Contre-exemple. Considérer $X = \mathbb{R}^2$ et $A_1 = \{(0, y)\ ,\ y > 0\}$ et $A_2 = \{0\}$. A_1 et A_2 sont localement compacts et $A_1 \cup A_2$ est non localement compacts car 0 n'admet pas de voisinage compact.



1

6 Compactification

On peut toujours transformer un espace localement compact en un compact en y adjoignant un point.

Théorème 6.1 *Théorème d'Alexandrov*[4]
Soit X un espace localement compact. Alors
(1) Il existe un espace $\tilde{X}$ compact tel que

$$\tilde{X} = X \cup \{\infty\} \quad \text{et} \quad X \text{ est un sous-espace de } \tilde{X}$$

(2) Si X est homéomorphe à X', alors $\tilde{X}$ est homéomorphe à $\tilde{X}'$.

Démonstration.
(1) Soit un point n'appartenant pas à X, noté ∞, et posons $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$. On va définir sur $\tilde{X}$ une topologie $\mathcal{T}$ et

4. Pavel Sergeevitch Alexandrov, Mathématicien russe, 1896-1982

on va montrer que $(\tilde{X}, \mathcal{T})$ vérifie les propriétés du théorème d'Alexandrov. Soit alors
• $\mathcal{T}_1 = \{\omega_i$ ouvert de X, $i \in I_1\}$ la topologie de X,
• $(K_i)_{i \in I_2}$ la famille des compacts de X,
• $\mathcal{T}_2 = \{\complement_{\tilde{X}} K_i, i \in I_2\} \cup \{\emptyset\}$.

a) $\mathcal{T}_2$ **est une topologie sur** $\tilde{X}$.

• $\tilde{X}$ et $\emptyset \in \mathcal{T}_2$ ($\emptyset$ par hypothèse et $\tilde{X}$ si $I_2 = \emptyset$).
• $\displaystyle\bigcup_{i \in J} \complement_{\tilde{X}} K_i = \complement_{\tilde{X}} \left(\bigcap_{i \in J} K_i \right) \in \mathcal{T}_2$ car c'est le complémentaire d'un compact (l'intersection de compacts est compacte).
• Pour J fini, nous avons

$$\bigcap_{i \in J} \complement_{\tilde{X}} K_i = \complement_{\tilde{X}} \bigcup_{i \in J} K_i$$

est le complémentaire d'un compact (car la réunion finie de compacts est compacte).
b) Montrons que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ est une topologie sur $\tilde{X}$.
• $\tilde{X}$ et $\emptyset \in \mathcal{T}$ car $\emptyset$ et $\tilde{X} \in \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}$.
• Soit $A = \displaystyle\bigcup_{i \in J} \theta_i$ où $\theta_i \in \mathcal{T}$. Il y a plusieurs cas :
<u>1er cas</u> : Si tous les $(\theta_i) \in \mathcal{T}_1$, alors $A \in \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$.
<u>2ème cas</u> : Si tous les $\theta_i \in \mathcal{T}_2$, alors $A \in \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}$.
<u>3ème cas</u> : $A = \omega \cup \complement_{\tilde{X}} K$ où $\omega \in \mathcal{T}_1$ et $\complement_{\tilde{x}} K \in \mathcal{T}_2$. On a

$$\complement_{\tilde{X}} A = (\complement_{\tilde{X}} \omega) \bigcap K = (\complement_X \omega) \bigcap K$$

alors $\complement_X \omega$ est un fermé de X et donc $\complement_{\tilde{X}} A$ est un compact K' car c'est la trace sur un compact d'un fermé, et donc $A = \complement_{\tilde{X}} K' \in \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}$.
• $A = \displaystyle\bigcap_{i \in J} \theta_i$ où J est fini et $\theta_i \in \mathcal{T}$. On a encore trois cas :
<u>1er cas</u> : Si tous les $\theta_i \in \mathcal{T}_1$ alors $A \in \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$.
<u>2ème cas</u> : Si tous les $\theta_i \in \mathcal{T}_2$ alors $A \in \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}$.
<u>3ème cas</u> : $A = \omega \cap \complement_{\tilde{X}} K$ où $\omega \in \mathcal{T}_1$ et $\complement_{\tilde{X}} K \in \mathcal{T}_2$. Alors $A = \omega \cap \complement_X K$, avec K compact dans X séparé donc K fermé, et donc $\complement_X K$ est un ouvert de $\mathcal{T}_1$, ce qui donne $\omega \cap \complement_X K \in \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$.
Par conséquent $\mathcal{T}$ est une topologie.

c) X est un sous-espace topologique de $\tilde{X}$.

Si $\theta \in \mathcal{T}$, montrons que $\theta \cap X \in \mathcal{T}_1$. Deux cas possibles.

<u>1er cas</u> : Si $\theta \in \mathcal{T}_1$, alors $\theta \cap X = \theta \in \mathcal{T}_1$.
<u>2ème cas</u> : Si $\theta \in \mathcal{T}_2 - \{\emptyset\}$ $(\theta \neq \emptyset)$, alors $\theta = \complement_{\tilde{X}} K$ et ainsi

$$\theta \cap X = (\complement_{\tilde{X}} K) \cap X = \big(\complement_X K\big) \cap X = \complement_X K \in \mathcal{T}_1$$

car K est fermé.

d) $\tilde{X}$ est compact.

• $\tilde{X}$ est séparé. Soient x et $x' \in \tilde{X}$ avec $x \neq x'$.
<u>1er cas</u> : x et $x' \in X$, comme X est localement compact, il est séparé et donc il existe $\omega \in v_X(x)$ et $\omega' \in v_X(x')$ tels que $\omega \cap \omega' = \emptyset$. Mais ω appartient aussi à $v_{\tilde{X}}(x)$ et ω' appartient aussi à $V_{\tilde{X}}(x')$ et donc $\omega \cap \omega' = \emptyset$.
<u>2ème cas</u> : x ou $x' = \infty$, soit par exemple $x \in X$ et $x' = \infty$. Comme $x \in X$ localement compact, alors il existe un voisinage compact K de X, $K \in v_X(x)$ et aussi $K \in v_{\tilde{X}}(x)$. Ainsi $\complement_{\tilde{X}} K \in v_{\tilde{X}}(\infty)$ et on a bien $K \cap \complement_{\tilde{X}} K = \emptyset$, et donc $\tilde{X}$ est séparé.

• $\tilde{X}$ est quasi compact. Soit $\tilde{X} = \bigcup_{i \in I} \theta_i$ avec $\theta_i \in \mathcal{T}$, alors il existe $j \in I$ tel que $\infty \in \theta_j$ et on a nécessairement $\theta_j = \complement_{\tilde{X}} K$ (K étant compact dans X). Considérons $\bigcup_{i \in I - \{j\}} \theta_i \supset K$ compact dans X donc compact dans $\tilde{X}$. Il existe alors J fini $\subset I - \{j\}$ tel que $\bigcup_{i \in J} \theta_i \supset K$. Ainsi $\bigcup_{i \in J \cup \{j\}} \theta_i = \tilde{X} = K \cup \complement_{\tilde{X}} K$ ($J \cup \{j\}$ étant fini). Donc $\tilde{X}$ est quasi compact.

(2)) Soit h un homéomorphisme X sur X'. Posons

$$\tilde{X} = X \cup \{\infty\} \quad \text{et} \quad \tilde{X}' = X' \cup \{\infty'\}$$

On va prolonger h de la facon suivante, en posant

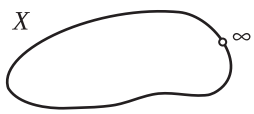
$$\begin{cases} f(x) & = & h(x) & \text{si} & x \in X \\ f(\infty) & = & \infty' \end{cases}$$

• $f : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}'$ est une bijection.
• f est ouverte. Soit θ ouvert de $\tilde{X}$ ($\theta \in \mathcal{T}$), alors deux cas possibles.
<u>1er cas</u> : $\theta \in \mathcal{T}_1$ donne $f(\theta) = h(\theta)$ ouvert, donc $h(\theta) \in \mathcal{T}'_1 \subset \mathcal{T}$
<u>2ème cas</u> : $\theta \in \mathcal{T}_2 - \{\emptyset\}$, alors $\theta = \complement_{\tilde{X}}(K)$ et ainsi $f(\theta) = \complement_{\tilde{X}} f(K)$ (K compact de X) $= \complement_{\tilde{X}} h(K)$ ($h(K)$ compact de X') et $\complement_{\tilde{X}'} h(K) \in \mathcal{T}'_2 \subset \mathcal{T}'$.
• f^{-1} est ouverte. Même démarche car f et f^{-1} jouent le même rôle. Donc f est un homéomorphisme, $\tilde{X}$ est homéomorphe à $\tilde{X}'$. ■

Remarque 6.2
1.) $\tilde{X}$ est unique à un homéomorphisme près. Si $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ et $\tilde{X}' = X \cup \{\infty'\}$, alors $\tilde{X}$ et $\tilde{X}$' sont homéomorphes (résulte immédiatement de la partie (2) du théorème d'Alexandrov).

2.) Si X est compact le théorème s'applique mais n'est pas intéressant. Dans ce cas, avec $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ alors ∞ est isolé dans $\tilde{X}$ car $\{\infty\} = \complement_{\tilde{X}} X$ or X compact donne $\complement_{\tilde{X}} X$ est un ouvert $\in \mathcal{T}$, ce qui donne $\{\infty\} \in v_{\tilde{X}}(\infty)$, soit encore ∞ est isolé.

3.) Si X est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.



alors $\tilde{X}$ n'est pas un sous-espace compact de $\mathbb{R}^2$.

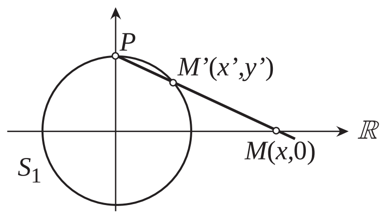
4.) Il y a d'autres procédés de compactification.

Définition 6.3 *L'espace topologique $\tilde{X}$ s'appelle le compactifié d'Alexandrov.*

Exemple 6.4
1.) Considérons $X = [a, b[\subset \mathbb{R}$. Alors X est localement compact car

$X =]-\infty, b[\cap [a, +\infty[$ (intersection d'un ouvert et d'un fermé), le théorème donne alors $\tilde{X} = [a, b]$ est compact.

2.) $X = \mathbb{R}$ est localement compact. Soit $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Alors $\tilde{\mathbb{R}}$ est homéomorphe au cercle unité S_1 de $\mathbb{R}^2$ ($x^2 + y^2 = 1$).



L'application $M \longrightarrow M'$ est l'inversion de centre P et de puissance 2 ($Inv(P, 2)$) et $f : M(x, 0) \longrightarrow M'$ est une bijection de $\mathbb{R} \longrightarrow S_1 - \{P\}$ et est bicontinue donc un homéomorphisme de $\mathbb{R} \longrightarrow S_1 - \{P\}$. $\tilde{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à $\widetilde{\overline{S_1 - \{P\}}} = S_1$.

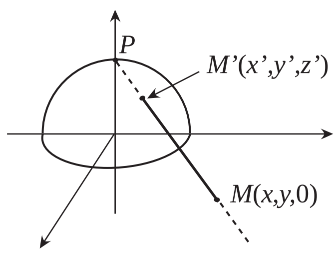
$$f : x \longrightarrow \left(\frac{2x}{x^2 + 1}, \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$$

Plus généralement le compactifié d'Alexandrov $\tilde{\mathbb{R}}^n$ de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.

3.) Le plan complexe compactifié $\tilde{\mathbb{C}}$. On sait que $\mathbb{C}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ par

$$z = x_1 + ix_2 \longrightarrow (x_1, x_2)$$

Dans $\mathbb{C}$, $d(z, z') = |z - z'|$. $\mathbb{C}$ est localement compact, il admet un compactifié $\tilde{\mathbb{C}}$ et $\tilde{\mathbb{C}}$ est homéomorphe à la sphère unité S_2 de $\mathbb{R}^3$.



Pour tout M de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(x_1, x_2, 0)$ on associe $M' \in S_2 \cap PM$, *par l'application*

$$f : (x_1, x_2) \longrightarrow \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right)$$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S_2 - \{P\}$ *est une inversion* $Inv(P, 2)$. *Ainsi* f *est homéomorphe de* $\mathbb{R}^2 \longrightarrow S_2 - \{P\}$ *et donc* $\tilde{\mathbb{R}^2} = \tilde{C}$ *est homéomorphe à* $\widetilde{S_2 - \{P\}} = S_2$. *Notons que la fonction* f *ci-dessus peut également être définie par*

$$z = x_1 + ix_2 \longrightarrow \left(\frac{2x_1}{|z|^2 + 1}, \frac{2x_2}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

Remarque 6.5
1.) Ceci se généralise à $\tilde{\mathbb{R}^n}$ *qui est homéomorphe à la sphère unité* S_n *de* $\mathbb{R}^{n+1}$.
2.) A est compact dans $\mathbb{C}$ *si et seulement si* A *est fermé dans* $\tilde{\mathbb{C}}$ *et* $\infty \notin A$.

<u>Démonstration.</u>

$\Longrightarrow$.

A compact dans $\mathbb{C}$ *donne* $\infty \notin A$ *et donc* $\complement_{\tilde{\mathbb{C}}} A$ *est un ouvert de* $\tilde{\mathbb{C}}$ *et donc* A *est fermé dans* $\tilde{\mathbb{C}}$.

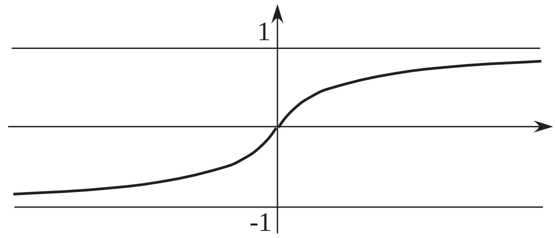
$\Longleftarrow$

Soit A *fermé dans* $\tilde{\mathbb{C}}$ *ne contenant pas* ∞. *Alors* $\complement_{\tilde{\mathbb{C}}} A$ *contient* ∞ *et est ouvert dans* $\tilde{\mathbb{C}}$, *donc est de la forme* $\complement_{\tilde{\mathbb{C}}} K$ *et finalement* A *est compact dans* $\mathbb{C}$. ■

3.) Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$. *Considérons* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *avec, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$. *Pour définir une topologie sur* $\overline{\mathbb{R}}$, *considérons l'application* f *donnée par*

$$f : x \longrightarrow \frac{x}{1 + |x|}$$

- f *est un homéomorphisme de* $\mathbb{R}$ *sur* $]-1, +1[$ *de* $\mathbb{R}$. *Posons* $f(+\infty) = 1$ *et* $f(-\infty) = -1$. *Ainsi* f *est une bijection de* $\overline{\mathbb{R}}$ *sur* $[-1, +1]$.
- $\mathcal{T}$ *est l'image réciproque par* f *de la topologie de* $[-1, +1]$.
- f *est un homéomorphisme de* $\overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1, +1]$. *Comme* $[-1, +1]$ *est compact et* f *est un homéomorphisme, alors* $\overline{\mathbb{R}}$ *est compact.*
- $\mathbb{R}$ *est un sous-espace de* $\overline{\mathbb{R}}$. $\overline{\mathbb{R}}$ *est connexe comme* $\mathbb{R}$ *et il est localement connexe car* $[-1, +1]$ *l'est et* f *est un homéomorphisme.*



• *Si A est une partie non vide $\subset \overline{\mathbb{R}}$ alors* $\sup A$ *et* $\inf A$ *existent.*

7 Espaces localement compacts dénombrables à l'infini

Définition 7.1 *Un espace X est dit localement compact dénombrable à l'infini si X est une réunion dénombrable de compacts.*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

où K_n est un compact de X.

Exemple 7.2
1.) $\mathbb{R}$ est localement compact dénombrable à l'infini. En effet, on a

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, +n]$$

2.) $\mathbb{R}^n$ est localement compact dénombrable à l'infini. Dans ce cas, on a encore

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B^f(0, k)$$

où $B^f(0, k)$ est la boule fermée de centre 0, de rayon k.

Proposition 7.3 *Tout ouvert θ de $\mathbb{R}^n$ est localement compact dénombrable à l'infini.*

Démonstration.
• θ est localement compact.
• Considérons la boule rationnelle $B^f(a, r)$ où $a \in \mathbb{Q}^n$ et

$r \in \mathbb{Q}_+^*$. L'ensemble de ces boules fermées est dénombrable, et donc l'ensemble de ces boules comprises dans θ est également dénombrable. Soit (K_n) l'ensemble de ces boules et montrons que $\theta = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

D'une part, on a, pour tout n, $K_n \subset \theta$ et donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset \theta$.

D'autre part, $\theta \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Soit $x \in \theta$, il existe une boule de centre x et de rayon $2r$ telle que $B(x, 2r) \subset \theta$ avec $r \in \mathbb{Q}_+^*$. Considérons alors $B(x, r)$. Dans $B(x, r)$, il existe a rationnel de $\mathbb{Q}^n$ (car $\mathbb{Q}^n$ est partout dense sur $\mathbb{R}^n$). Il existe $a \in \mathbb{Q}^n \cap B^f(x, r)$ et $B^f(a, r) \subset B(x, 2r) \subset \theta$ et $x \in B^f(x, r)$, donc il existe p tel que $B^f(a, r) = K_p$ et $x \in K_p$, donc $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Finalement on a bien $\theta = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. ■

Soit X un espace topologique.

Définition 7.4 *On dit que (K_n) est une suite exhaustive de compacts dans X si*
(1) La suite (K_n) est croissante,
(2) Pour tout $K \subset X$, il existe $K_n \supset K$.

Exemple 7.5 *Considérons $X = \mathbb{R}$ et soit la suite $K_n = [-n, +n]$. Alors (K_n) est une suite exhaustive de compacts de $\mathbb{R}$.*

Proposition 7.6 *Tout espace X localement compact dénombrable à l'infini admet une suite exhaustive de compacts.*

Démonstration.

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ (il n'y a pas de raison pour que (K_n) soit croissante). Considérons alors la suite

$$K_1' \supset K_1 \quad \text{et} \quad K_2' = K_1' \cup K_2 \;\; , \;\; K_3' = K_2' \cup K_3 \;\; , \;\; \cdots$$

• Pour tout $n \geq 1$ il existe $K'_n \in v(K_n \cup K'_{n-1})$ (avec $K'_0 = \emptyset$).
Pour $n = 1$, K_1 est compact dans X localement compact admet un voisinage compact K'_1.
Supposons cela vrai pour tout $p \leq n$.
Alors $K_{n+1} \cup K'_n$ est compact dans X localement compact, donc admet un voisinage compact K'_{n+1} qui $\in v(K_{n+1} \cup K'_n)$.
• (K'_n) est croissante, par construction.
• Pour tout $K \subset X$, il existe $K'_n \supset K$(K est un compact de X). On a $\overset{\circ}{K'_n} \supset K_n$ et donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{K'_n} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X$. Et donc $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{K'_n}$. Or comme $K \subset X$, alors $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{K'_n}$. Par ailleurs comme K est compact, il existe un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe p tel que $K \subset \bigcup_{n=1}^{p} \overset{\circ}{K'_n}$, et comme (K'_n) est croissante, alors $\bigcup_{n=1}^{p} \overset{\circ}{K'_n} = \overset{\circ}{K'_p} \subset K'_p$. ■

Remarque 7.7 *Tout ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *admet une suite exhaustive de compacts.*

8 Résumé des relations entre espaces

Les relations évidentes entre certains espaces étudiés dans les chapitres 4 et 5 peuvent être résumées dans le tableau suivant.

$$\begin{array}{lcl}
\text{Espace compact (chap. 5)} & \searrow & \\
\Downarrow & & \\
\text{Espace normal (chap. 4)} & & \text{Espace localement compact (chap. 5)} \\
\Downarrow & \swarrow & \\
\text{Espace régulier (chap. 4)} & & \\
\Downarrow & & \\
\text{Espace séparé (chap. 4)} & & \\
\Downarrow & & \\
\text{Espace accessible (chap. 4)} & & \\
\Downarrow & & \\
\text{Espace de Kolmogorov (chap. 4)} & &
\end{array}$$

Chapitre 6

Espaces métriques

Nous allons introduire la notion de distance et d'espace métrique. Quand on s'intéresse à la continuité, ce qui importe ce n'est pas la distance elle-même mais les ouverts définis à partir de la distance (des distances différentes peuvent conduire aux mêmes ouverts).
Si une topologie est définie par une distance, la structure topologique n'utilise qu'une partie des informations fournies par la distance.

1 Distance

1-a Distance - Espace métrique

Définition 1.1 *Soit X un ensemble. On appelle métrique ou distance toute application*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

telle que, pour tout x, y et $z \in X$, on ait

$$\begin{array}{lll} (D_1) & d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y & \\ (D_2) & d(x,y) = d(y,x) & \textit{(symétrie)} \\ (D_3) & d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) & \textit{(inégalité triangulaire)} \end{array}$$

(X, d) s'appelle espace métrique.

Remarque 1.2 *Si $A \subset X$ alors la restriction de d à $A \times A$, notée d_A, possède les propriétés (D_1), (D_2) et (D_3) ci-dessus. (A, d_A) est un sous-espace métrique de (X, d).*

Exemples de métriques.
1.) Métrique discrète. Elle est définie par

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases} \tag{1.1}$$

2.) Dans $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a une métrique définie, pour tous x et $y \in X$ par

$$d(x,y) = |x - y| \tag{1.2}$$

où $| \, . \, |$ représente la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$.

3.) Soit $X = \Lambda^n$ ($\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour tous $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de Λ^n, l'application définie par

$$d(x,y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \tag{1.3}$$

est une métrique.

Si α est réel ≥ 1, on a une métrique définie par

$$d_\alpha(x,y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \tag{1.4}$$

<u>*Démonstration.*</u>
La démonstration de (D_1) et (D_2) est évidente. Pour l'inégalité triangulaire, elle résulte de l'inégalité de Minkowski [1]. En effet, si $a = (a_i)$ et $b = (b_i) \in \Lambda^n$, on a

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_i|^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}} + \left\{ \sum_{i=1}^{n} |b_i|^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

L'application $x \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow x^\alpha \in \mathbb{R}$ est convexe. Ainsi pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$(tx + (1-t)y)^\alpha \leq tx^\alpha + (1-t)y^\alpha$$

1. Hermann Minkowski, mathématicien russe, 1864-1909

Il suffit alors de poser dans l'inégalité ci-dessus,

$$x = \frac{|a_i|}{A} \quad y = \frac{|b_i|}{B} \quad \text{et} \quad t = \frac{A}{A+B}$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$, avec

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{et} \quad B = \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

On peut supposer que A et B sont strictement positifs, (car si A ou B est nul, l'inégalité est évidente) et ensuite on fait la somme des n inégalités obtenues. ■

4.) Lorsque dans (1.4), on prend $\alpha = 2$, on obtient la métrique euclidienne d_2 sur Λ^n.
5.) Dans un ensemble X, soit l'application définie par

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

pour toutes fonctions f et $g \in E = \mathcal{B}(X, \Lambda) = \{$ applications bornées de X dans $\Lambda\}$. Alors d est une distance.

Remarque 1.3 *Considérons les métriques d_α définie par* (1.4) *et d définie par* (1.3). *Alors on a*

$$\lim_{\alpha \to \infty} d_\alpha(x, y) = d(x, y)$$

En effet

$$d_\alpha(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} d(x, y)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq n^{\frac{1}{\alpha}} d(x, y)$$

et on a $d_\alpha(x, y) \geq d(x, y)$, donc

$$d(.,.) \leq d_\alpha(.,.) \leq n^{\frac{1}{\alpha}} d(.,.)$$

Propriété 1.4 *Nous avons les propriétés suivantes.*
(1) Pour $x_1, \cdots, x_n$ des points de X on a

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \tag{1.5}$$

(2) Pour tout x, y et z dans X on a

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z) \tag{1.6}$$

(3) Pour x, x' et y, y' dans X on a

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leq d\left(x,y'\right) + d\left(y,y'\right) \tag{1.7}$$

(4) Si d est une distance sur X alors

$$d' = \frac{d}{1+d} \ , \ \ (0 \leq d' \leq 1) \tag{1.8}$$

l'est aussi.

(5) Si d est une métrique sur X alors

$$d'' = inf(1,d) \ , \ \ (0 \leq d'' \leq 1) \tag{1.9}$$

l'est aussi.

Démonstration.
(1) La démonstration de (1.5) est immédiate par récurrence sur n.
(2) Pour (1.6), nous avons, en effet,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \text{ (inégalité triangulaire)}$$

ce qui donne

$$d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)$$

En permutant x et z, on a de la même manière

$$d(z,y) - d(y,x) \leq d(x,z)$$

ce qui donne finalement

$$-d(x,z) \leq d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)$$

(3) Pour x, x' et y, y' dans X on a

$$d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y)$$

d'où

$$d(x,y) - d(x',y') \leq d(x,x') + d(y,y')$$

En permutant les couples (x,y) et (x',y') on a

$$d(x',y') - d(x,y) \leq d(x',x) + d(y',y)$$

(4) Pour (1.8), notons que $0 \leq d' < 1$. Ensuite les propriétés (D_1) et (D_2) de la définition d'une métrique sont évidentes. Pour la (D_3), elle résulte du fait que l'application $x \longrightarrow \dfrac{x}{1+x}$ est croissante.
(5) Pour (1.9), notons d'abord que $0 \leq d" \leq 1$. Ensuite les propriétés (D_1) et (D_2) de la définition d'une métrique sont évidentes. Pour la (D_3), elle découle du résultat suivant.

$$\text{Si } b,c \geq 0 \quad \text{alors} \quad \inf(1,b+c) \leq \inf(1,b) + \inf(1,c)$$

Pour vérifier cette inégalité, supposons que $b \leq c$. Alors
- Si $c \leq 1$, alors $b \leq 1$ et on a

$$\inf(1,b) = b \;\text{ et }\; \inf(1,c) = c$$

donc $\inf(1,b+c) \leq b + c = \inf(1,b) + \inf(1,c)$
- Si $c > 1$ on a

$$\inf(1,b+c) = 1 \leq \inf(1,b) + 1$$

■

1-b Boules et sphères

Soient a un élément de X et r un réel positif.

Définition 1.5
(1) On appelle boule ouverte (respectivement boule fermée) de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a,r)$ (respectivement $B_f(a,r)$) défini dans X par

$$B(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) < r\}$$

(respectivement par $B_f(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$*).*

(2) On appelle sphère de centre a *et de rayon* r *l'ensemble noté* $S(a, r)$ *défini dans* X *par*

$$S(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) = r\}$$

Exemple 1.6
1.) Si $X = \mathbb{R}$ *muni de la métrique euclidienne, alors on a*

$$B(a, r) =]a - r, a + r[$$

2.) Si $X = \mathbb{R}^2$ *muni de la métrique euclidienne* $B(a, r)$ *est le disque de centre* a *et de rayon* r *et* $S(a, r)$ *est le cercle de centre* a *et de rayon* r.
3.) Si X *est muni de la métrique discrète, alors*

$$B(a, \frac{1}{2}) = \{a\} \ , \ B_f(a, \frac{1}{2}) = \{a\} \ \text{ et } \ S(a, \frac{1}{2}) = \emptyset$$

Remarque 1.7
1.) On a $B_f(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$.
2.) Toute boule contient son centre et par conséquent est non vide.
3.) En général une boule ne possède pas les propriétés géométriques des boules de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$*. Par exemple, si* X *est un sous-espace métrique de l'espace euclidien* $\mathbb{R}^3$*, la trace sur* X *d'une boule centrée en un point de* X *est une boule de* X.

Définition 1.8 *Parties bornées*
Soient (X, d) *un espace métrique et* A *une partie de* X $(A \subset X)$. A *est une partie bornée de* X *s'il existe une boule* $B(a, r)$ *de* X *contenant* A.
X *est borné s'il est égal à une boule ou si* d *est bornée.*

2 Topologie d'un espace métrique

2-a Définitions et propriétés

Proposition 2.1 *L'ensemble de parties* $\mathcal{T}_d$ *défini par*

$$\mathcal{T}_d = \{\mathcal{O} \subset X \mid \forall x \in \mathcal{O}, \exists\, B(x, r_x) \subset \mathcal{O}\}$$

est une topologie sur X.

La démonstration est immédiate.

Définition 2.2 *$\mathcal{T}_d$ est une topologie associée à la métrique d. On supposera toujours que l'espace métrique (X,d) est muni de $\mathcal{T}_d$.*

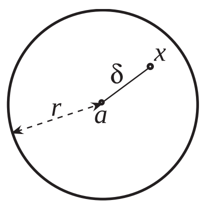
Exemple 2.3 *A titre d'exemple si d est la métrique discrète, $\mathcal{T}_d$ est la topologie discrète. En effet, pour x dans X on a*

$$B(x,r) = \{x\} \subset \{x\} \quad avec \quad r < 1 \quad et \quad \{x\} \in \mathcal{T}_d$$

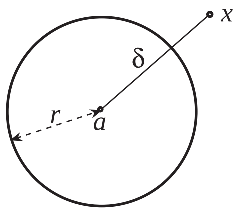
Des définitions ci-dessus résultent les propriétés suivantes.

Propriété 2.4
(1) La boule $B(a,r)$ est un ouvert.
(2) Les ensembles $B_f(a,r)$ et $S(a,r)$ sont des fermés.

<u>*Démonstration.*</u>
(1) En effet, pour tout x dans $B(a,r)$ on a $x \in B(x, r-\delta)$ ouvert $\subset B(a,r)$ où $\delta = d(x,a)$. Et donc toute boule ouverte est un ouvert.



(2) Les ensembles $B_f(a,r)$ et $S(a,r)$ sont des fermés.
Pour $B_f(a,r)$, soit $x \in \complement B_f(a,r)$, on a $B(x,\delta - r)$ ouvert $\subset \complement B_f(a,r)$ avec $\delta = d(x,a) > r$.



Pour $S(a,r)$, il suffit de noter que

$$S(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) \leq r\} \bigcap \{x \in X \mid d(x,a) \geq r\}$$

les deux ensembles étant fermés, $S(a,r)$ est fermé. ∎

Proposition 2.5 *Les boules ouvertes constituent une base pour la topologie $\mathcal{T}_d$.*

$$\{B(x,r) \mid x \in X \text{ et } r > 0\} \quad \textit{est une base de } \mathcal{T}_d \tag{2.1}$$

Démonstration.
• $B(x,r) \in \mathcal{T}_d$.
• Soit $\theta \in \mathcal{T}_d$, si $\theta \neq \emptyset$, pour tout $x \in \theta$, il existe $B(x,r_x) \subset \theta$. Par conséquent $\bigcup_{x\in\theta} B(x,r_x) \supset \theta$ et d'où le résultat.
Si $\theta = \emptyset$, c'est évident car c'est une réunion d'une famille vide ($I = \emptyset$). ■

2-b Bases de voisinages

Nous avons les propositions suivantes qui donnent des bases de voisinage.

Proposition 2.6 *Les ensembles*

$$v_1(x) = \{B(x,r) \mid r > 0\} \tag{2.2}$$

et

$$v_2(x) = \{B_f(x,r) \mid r > 0\} \tag{2.3}$$

sont des bases de voisinage de x.

Démonstration.
• Soit $V \in v_1(x)$, alors il existe $\theta \in \mathcal{T}_d$ tel que $x \in \theta \subset V$. Et donc il existe $r > 0$ tel que $x \in B(x,r) \subset \theta \subset V$.
• De même il existe $r > 0$ tel que $x \in B_f(x, \frac{r}{2}) \subset B(x,r) \subset \theta \subset V$. ■

Proposition 2.7 *Les ensembles*

$$v_1(x) = \{B(x, \frac{1}{n}) \mid n > 0\} \tag{2.4}$$

et

$$v_2(x) = \{B_f(x, \frac{1}{n}) \mid n > 0\} \tag{2.5}$$

sont des bases de voisinage de x.

Démonstration.
Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $B(x, \frac{1}{n}) \subset B(x, r)$ si $\frac{1}{n} < r$. Il en est de même pour les boules $B_f(x, \frac{1}{n})$. ■

Remarque 2.8
1.) Dans tout espace métrique, tout point admet une base dénombrable de voisinages.

2.) $\overline{B(a,r)} \subset B_f(a,r)$. *Les deux ensembles peuvent être différents, comme le montre le contre-exemple suivant. Soit* X *muni de la distance discrète* $B(a,1) = \{a\} = \overline{B(a,1)}$, *et* $B_f(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) \leq 1\} = X \neq \{a\}$.

3.) $B(a,r)^* \subset S(a,r)$. *Les deux ensembles peuvent être différents.*

$$B(a,r)^* = \overline{B(a,r)} \cap \overline{\complement B(a,r)} \subset B_f(a,r) \cap \complement B(a,r) = S(a,r)$$

A titre de contre-exemple, considérons X *muni de la distance discrète. On a* $B(a,1)^* = \{a\}^* = \emptyset$ *(car* a *est adhérent à* $\complement\{a\}$ *et* $S(a,r) = X_{\{a\}}$.

4.) $B(a,r) \subset \overset{\circ}{B_f}(a,r)$, *les deux ensembles peuvent être differents.*

5.) $B_f(a,r)^* \subset S(a,r)$, *les deux ensembles peuvent être différents.*

3 Continuité - Isométrie

3-a Continuité - Continuité uniforme

Lemme 3.1 *soient* X *et* X' *deux espaces topologiques,* f *une application de* X *dans* X', x_0 *un élément de* X *et* $y_0 = f(x_0)$.
On note $S(x_0)$ *une base de voisinage de* x_0 *et* $S(y_0)$ *une base de voisinage de* y_0. *Alors pour que* f *soit continue en* x_0, *il faut et il suffit que*

$$\forall U' \in S(y_0),\ \exists U \in S(x_0) \ \text{ tel que } \ F(U) \subset U'$$

Démonstration.
Condition nécessaire. Soit $U' \in S(y_0) \subset v(y_0)$, f continue donne $\exists V \in v(x_0)$ tel que $F(V) \subset U'$. $S(x_0)$ est une base de voisinage de x_0, ainsi il existe $U \in S(x_0)$ tel que $U \subset V$ et donc $f(U) \subset f(V) \subset U'$.
Condition suffisante. Démarche analogue. ■

Proposition 3.2 *Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques, et f une application $X \longrightarrow X'$, $x_0 \in X$ et $y_0 = f(x_0) \in X'$. Alors, il y a équivalence entre*
(1) f est continue en x_0.
(2) Pour tout $B'(y_0, \varepsilon)$, il existe $B(x_0, \eta)$ telle que $f(B(x_0, \eta)) \subset B'(y_0, \varepsilon)$.
(3) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $d(x, x_0) < \eta \Longrightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Démonstration.
(1) $\Longleftrightarrow$ (2). Cela se ramène au lemme précédent avec

$$s(x_0) = \{B(x_0, r)\ ,\ r > 0\} \quad \text{et } s(y_0) = \{B(y_0, r)\ ,\ r > 0\}$$

L'équivalence entre (2) et (3) est évidente. ■

Proposition 3.3 *Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques, et f une application $X \longrightarrow X'$, $x_0 \in X$ et $y_0 = f(x_0) \in X'$. Alors, il y a équivalence entre*
(1) f continu en x_0.
(2) Pour tout $B'^f(y_0, \varepsilon)$, il existe $B^f(x_0, \varepsilon)$ tel que $f(B^f) \subset B'^f$.
(3) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que $d(x, x_0) \leq \eta \Longrightarrow d'(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$.

La démonstration est identique à la précédente avec les boules fermées.

Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques.

Définition 3.4 *L'application $f : (X, d) \longrightarrow (X', d')$ est uniformément continue sur X si*
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ (η ne dépend que de ε) tel que

$$d(x_1, x_2) \leq \eta \Longrightarrow d'(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon$$

Remarque 3.5
1.) Si f est uniformément continue sur X, alors f est continue sur X. La réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple suivant. $X = X' = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$ (ou $f(x) = x^3$).

2.) Les seuls polynômes uniformément continus sont les polynômes du 1er degré.

Propriété 3.6 *Si f est uniformément continue $X \longrightarrow X'$ et si g est uniformément continue $X' \longrightarrow X''$, alors $g \circ f$ est uniformément continue sur X.*

3-b Isométrie

Définition 3.7 *Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques, et $f : X \longrightarrow X'$. Alors f est une isométrie si*

$$\forall x, y \in X : d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

Une isométrie conserve les distances.

Remarque 3.8
1.) Si f est une isométrie, alors f est une bijection.
En effet, d'une part f est surjective par hypothèse. D'autre part f est injective car $f(x) = f(y) \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) = 0$ et donc $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$.

2.) Si f est une isométrie, alors f est une bijection et donc f^{-1} est aussi une isométrie de $(X', d') \longrightarrow (X, d)$.

Proposition 3.9 *Si f est une isométrie de (X, d) sur (X', d') alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration.
- f est une bijection.
- f est continue, c'est immédiat car $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta = \varepsilon$ qui convient.
- f^{-1} est aussi une isométrie, donc continue. ∎

Remarque 3.10 *La réciproque est fausse. A titre de contre-exemple, considérer $X = X' = \mathbb{R}$ et $f(x) = 2x$. C'est un homéomorphe mais non une isométrie.*

3-c Métriques équivalentes

Définition 3.11 *Deux métriques d et d' sur X sont équivalentes si $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$ (on dit aussi que les métriques sont topologiquement équivalentes).*

Remarque 3.12 *Il faut noter que c'est une relation d'équivalence.*

Propriété 3.13 *Il y a équivalence entre*

(1) Les métriques d et d' sont équivalentes.
(2) L'application $x \in (X,d) \longrightarrow x \in (X,d')$ est bicontinue.
(3) Pour toute boule $B'(x,r')$, il existe $B(x,r_x) \subset B'(x,r')$ et pour toute boule $B(x,r)$, il existe $B'(x,r'_x) \subset B(x,r)$.
(4) Pour tout $x_0 \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\exists \eta_1(x_0,\varepsilon) > 0 \text{ tel que } d(x,x_0) \leq \eta_1 \implies d'(x,x_0) \leq \varepsilon$$

et

$$\exists \eta_2(x_0,\varepsilon) > 0 \text{ tel que } d'(x,x_0) \leq \eta_2 \implies d(x,x_0) \leq \varepsilon$$

Démonstration.
(1) $\iff$ (2) : Nous avons $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'} \iff \mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{d'}$ et $\mathcal{T}_{d'} \subset \mathcal{T}_d$.
$\mathcal{T}_{d'} \subset \mathcal{T}_d \iff x \in (X,d) \longrightarrow x \in (X,d')$ continue.
$\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{d'} \iff x \in (X,d') \longrightarrow x \in (X,d)$ continue.
(3) $\iff$ (2) : (3) exprime la continuité à l'aide des boules.
(4) $\iff$ (3) : Evident. ∎

Exemple 3.14 *Dans $X = \mathbb{R}$, considérons*

$$d(x,y) = |x-y| \quad et \quad d'(x,y) = \left|x^3 - y^3\right|$$

Alors d et d' sont des métriques sur X. Par ailleurs on a $d \sim d'$ d'après (4) de la propriété précédente.
La première équivaut à la continuité $x \longrightarrow x^3$.
La deuxième équivaut à la continuité $x \longrightarrow x^{1/3}$.

Remarque 3.15 *Dans l'exemple précédent, on n'aurait pas pu prendre $d'(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|$ car $\left|x^2 - y^2\right| = 0 \iff x = \pm y$ donc ce n'est pas une métrique.*

Définition 3.16 *Deux métriques d et d' sur X sont uniformément équivalentes si l'application $i : x \in (X,d) \longrightarrow x \in (X,d')$ est bi-uniformément continue.*

Proposition 3.17 *Une condition nécessaire et suffisante.*
Deux métriques d et d' sont uniformément équivalentes si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$,

(1) $\exists \eta_1 > 0$ *tel que* $d(x_1, x_2) \leq \eta_1 \Longrightarrow d'(x_1, x_2) \leq \varepsilon$
(2) $\exists \eta_2 > 0$ *tel que* $d'(x_1, x_2) \leq \eta_2 \Longrightarrow d(x_1, x_2) \leq \varepsilon$.
(η_1 *et* η_2 *dépendent seulement de* ε*)*

Démonstration.
(1) exprime la continuité uniforme de i et (2) la continuité uniforme de i^{-1}. ∎

Proposition 3.18 *Une condition suffisante.*
S'il existe a *et* $b > 0$ *tels que*

$$ad \leq d' \leq bd$$

alors d *et* d' *sont uniformément équivalentes.*

Démonstration.
• $d \leq \varepsilon/b \Longrightarrow d' \leq \varepsilon \Longrightarrow \eta_1 = \dfrac{\varepsilon}{b}$ convient.
• $d' \leq a\varepsilon \Longrightarrow d \leq \varepsilon \Longrightarrow \eta_2 = a\varepsilon$ convient. ∎

Exemple 3.19
1.) Dans $X = \Lambda^n$, d *et* d_α *sont uniformément équivalentes ; on a vu que* $d \leq d_\alpha \leq n^{1/\alpha} d$.

2.) Dans X *quelconque, les métriques* d *et* $d' = \dfrac{d}{1+d}$ *sont uniformément équivalentes.*

Démonstration.
En effet, soit $\varepsilon > 0$ *qu'on peut supposer tel que* $0 < \varepsilon < 1$.
• *D'une part, remarquons que* $d' < \varepsilon \Longleftrightarrow d \leq \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, *donc en prenant* $\eta_1 = \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \Longrightarrow (1)$ *est vraie.*
• *D'autre part, la deuxième propriété donne* $d \leq \varepsilon \Longleftrightarrow d' \leq \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \Longrightarrow$ *(2) vraie avec* $\eta_2 = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ *et la condition nécessaire et suffisante donne l'uniforme équivalence de* d *et* d'. ∎

3.) Dans X *quelconque,* d *et* $d'' = \inf(1, d)$ *sont uniformément équivalentes.*

Démonstration.
Pour $0 < \varepsilon < 1$, *on a* $d'' \leq \varepsilon \Longrightarrow d \leq \varepsilon$.
Si $d \leq \varepsilon$, *alors* $\Longrightarrow d'' \leq \varepsilon$ *donc il suffit que* $\eta_1 = \eta_2 = \varepsilon$. ∎

Remarquons que d et $d' = \dfrac{d}{1+d}$ ne sont pas caractérisées par la condition nécessaire et suffisante car $\dfrac{d'}{d} = \dfrac{1}{1+d} \geq a > 0$ impossible.

4.) Exemple de métriques équivalentes mais non uniformément équivalentes. Dans $X = \mathbb{R}$, soient $d(x,y) = |x-y|$ et $d'(x,y) = \left|x^3 - y^3\right|$. Alors d et d' sont équivalentes mais non uniformément car sinon la proposition précédente donnerait que la fonction $x \longrightarrow x^3$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, ce qui est faux.

Proposition 3.20 *Soit f uniformément continue de (X,d) dans (Y,δ). Si d' est uniformément équivalente à d et δ ' est uniformément équivalente à δ, alors f est uniformément continue (X,d') dans (Y,δ').*

<u>*Démonstration.*</u>
L'application : $x \in (X,d') \longrightarrow x \in (X,d)$ est uniformément continue.
L'application : $x \in (X,d) \longrightarrow f(x) \in (Y,\delta)$ est uniformément continue
et $y \in (Y,\delta) \longrightarrow y \in (Y,\delta)$ est uniformément continue. Ceci implique que l'application : $x \in (X,d') \longrightarrow f(x) \in (Y,\delta')$ est uniformément continue comme composée de trois applications uniformément continues. ∎

Remarque 3.21 *La propriété d'uniforme continuité n'est pas une propriété topologique, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas que des topologies de X et X' (En fait elle dépend des topologies et des métriques auxquelles elles sont associées). En effet, si on considère*

$$X = \mathbb{R} \ \ , \ \ d(x,y) = |x-y| \ \ \text{et} \ \ d'(x,y) = |x^3 - y^3|$$

alors l'application

$$f : x \in (\mathbb{R}, d') \longrightarrow x^3 \in (\mathbb{R}, d)$$

est uniformément continue puisque $d(f(x), f(y)) = d'(x,y)$, donc $\eta = \varepsilon$ convient. Mais l'application $x \in (\mathbb{R}, d) \longrightarrow x^3 \in (\mathbb{R}, d)$ est non uniformément continue bien que d et d' soient équivalentes.

4 Propriétés des espaces topologiques métrisables

Définition 4.1 *Un espace topologique* $(X, \mathcal{T})$ *est dit métrisables s'il existe une métrique* d *sur* X *telle que* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Exemple 4.2 *L'espace topologique* X *discret est métrisable par la métrique discrète.*

Proposition 4.3 *Si deux espaces topologiques* X *et* X' *sont homéomorphes, alors si* X' *est métrisable,* X *est métrisable.*

Démonstration.
Notons h l'homéomorphisme entre X et X'.
• Définissons une métrique sur X par $d(x, y) = d'(h(x), h(y))$ où d' est la métrique sur X'. Alors on a
(1.) $d(x, y) = 0 \iff d'(h(x), h(y)) = 0 \iff h(x) = h(y) \iff x = y$ (car h est injective).
(2.) $d(x, y) = d(y, x)$ évident.
(3.) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \iff d'(h(x), h(z)) \leq d'(h(x), h(y)) + d'(h(y), h(z))$ qui est vrai pour d', donc d est une métrique.
• $\mathcal{T}_d$ est la topologie de X ($\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$).
D'après la définition de d, h est une isométrie de (X, d) sur (X', d'), donc h est un homéomorphisme de (X, d) sur X', et donc h^{-1} est un homéomorphisme de X' sur X. Et finalement la composée (c'est-à-dire l'identité) est un homéomorphisme de (X, d) sur X. ■

4-a Sous-espace d'un espace métrisable

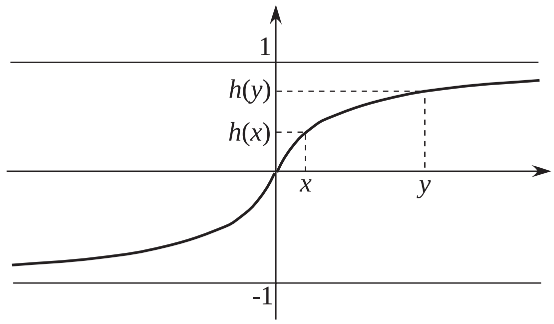
Proposition 4.4 *Si* A *est un sous-espace de* X *métrisable, alors* A *est métrisable.*

Démonstration.
• Soit d la métrique sur X et δ la restriction de d à A^2. Alors $\delta = d|_{A^2}$ est une métrique sur A puisque les boules associées à δ sont $B_\delta(a, r) = B_d(a, r) \cap A$.
• Soit $\mathcal{T}_\delta$ la topologie associée à δ et $\mathcal{T}$ la topologie associée au sous-espace A (induite par celle de X), alors $\mathcal{T}_\delta = \mathcal{T}$, car si $\theta \in \mathcal{T}_\delta$, alors $\theta \in \mathcal{T}$ et réciproquement. ■

Exemple 4.5 $\overline{\mathbb{R}}$ *est métrisable.*
On a vu que $\overline{\mathbb{R}}$ *est homéomorphe à* $[-1,+1] \subset \mathbb{R}$ *par l'application* h *donnée par*

$$\begin{cases} h(x) & = & \dfrac{x}{1+|x|} \\ h(+\infty) & = & +1 \\ h(-\infty) & = & -1 \end{cases}$$

$[-1,+1]$ *est métrisable car sous-espace de* $\mathbb{R}$ *et comme* $\overline{\mathbb{R}}$ *est homéomorphe à* $[-1,+1]$*, il est métrisable. Dans* $\overline{\mathbb{R}}$*, on a* $d(x,y) = |h(x) - h(y)| = a$ *(*$d(x,y) \leq 2$*).*



Remarque 4.6 *La restriction* $d/\mathbb{R}^2$ *est une métrique sur* $\mathbb{R}$ *équivalente à la métrique usuelle car* $\mathbb{R}$ *est un sous-espace de* $\overline{\mathbb{R}}$*. Et on a* $d/\mathbb{R}^2 = \delta$ *avec*

$$\delta(x,y) = |h(x) - h(y)| = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$$

4-b Produits finis d'espaces métrisables

Pour tout $i \in I$, où I est fini, on considère les espaces métriques (X_i, d_i). Soit $X = \prod_{i \in I fini} X_i$ supposé non vide.

Proposition 4.7 *Métrique produit*
Soit $x = (x_i)_{i \in I}$ *et* $y = (y_i)_{i \in I}$*, alors*

$$d(x,y) = \sup_{i \in I} \{d_i(x_i, y_i)\}$$

est une métrique sur l'espace produit X.

<u>*Démonstration.*</u>
- d est une application $X^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$.
- $d(x,y) = 0 \iff \sup_{i\in I} \{d_i(x_i,y_i)\} = 0 \iff$ pour tout $i \in I$ $d_i(x_i,y_i) = 0 \iff x_i = y_i$ pour tout $i \in I \iff x = y$.
- $d(x,y) = d(y,z)$ est évident.
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Comme d_i est une métrique on a : $d_i(x_i,z_i) \leq d_i(x_i,y_i) + d_i(y_i,z_i) \leq d(x,y) + d(y,z)$ et ceci pour tout $i \in I$. Par passage au sup on obtient $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Finalement d est une métrique sur X. ■

Remarque 4.8 *On peut définir d'autres métriques sur X. C'est le cas, par exemple où, pour $\alpha \geq 1$, on considère*

$$d_\alpha(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} d_i\left(x_i,y_i\right)^\alpha\right]^{1/\alpha}$$

qui est une métrique sur X et on a

$$d \leq d_\alpha \leq n^{1/\alpha} d$$

Alors d et d' sont uniformément équivalentes. La distance d reste la plus souvent utilisée.

Proposition 4.9 *(X,d) est le produit topologique des (X_i,d_i).*

<u>*Démonstration.*</u>
Désignons par B les boules relatives à d et par B_i les boules relatives à d_i. On vérifie immédiatement, à partir de la définition de d, que pour tout $a = (a_i) \in X$ et $r > 0$ on a

$$B(a,r) = \prod_{i}^{n} B_i(a_i,r)$$

Comme les B_i forment une base de $\mathcal{T}_i$, il résulte que l'ensemble des $\left(\prod_{i=1}^{n} B_i\right)$, c'est-à-dire (d'après ce qui précède) l'ensemble

$$\mathcal{B} = \{B(a,r) \mid a \in X \ , \ r > 0\}$$

est une base de $\mathcal{T}$, or $\mathcal{B}$ est aussi une base de $\mathcal{T}$, donc $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.■

Corollaire 4.10 *Tout produit fini d'espaces métrisables est métrisable. La réciproque est également vraie.*

Remarque 4.11 *On montre que c'est vrai même si le produit est infini dénombrable mais dans le cas général (non dénombrable) c'est faux.*

Proposition 4.12 *Tout espace métrique est séparé.*

Démonstration.
Si $x \neq y$, alors $\delta(x,y) = d(x,y) > 0$ et $B(x, \frac{\delta}{2}) \cap B(y, \frac{\delta}{2}) = \emptyset$. ■

4-c Espace métrique - Espace normal

Définition 4.13 *Soit $A \subset X$ métrique ($A \neq \emptyset$) et soit $x \in X$. On appelle distance de x à A, le réel défini par*

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} \{d(x,a)\} \geq 0$$

Remarque 4.14 *Si $A = \emptyset$, $\{d(x,a)\} = \emptyset$ et donc $d(x,A) = inf\{\emptyset\}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $m \in \mathbb{R}$, m est un minorant de $\emptyset$ si pour tout $x \in \emptyset$, $m \leq x$, et donc $d(x,\emptyset) = +\infty$.*

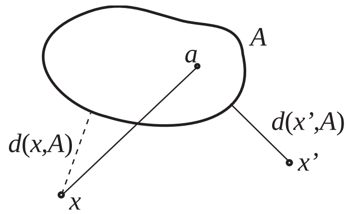
Proposition 4.15 *Nous avons*

$$d(x,A) = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad x \in \overline{A}$$

Démonstration.
Dire que $d(x,A) = 0 \Longrightarrow$ pour tout $r > 0$, il existe $a \in A$ tel que $d(x,a) < r$. Et donc $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$, puisque les boules forment un système fondamental de voisinages, par conséquent $x \in \overline{A}$. ■

Lemme 4.16 *Soit $A \neq \emptyset$ dans un espace métrique X, alors l'application $\varphi : x \in X \longrightarrow d(x,A) \in \mathbb{R}^+$ est uniformément continue sur X.*

Démonstration.
Pour tout $a \in A$, on a $d(x,a) \leq d(x,x') + d(x',a)$, et donc $d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,x') + d(x',a)$.
D'où $d(x,A) - d(x,x') \leq d(x',a)$. Le premier membre est indépendant de a est donc un minorant de $d(x',a)$, ce qui donne



$d(x, A) - d(x', A) \leq d(x, x')$ et (en inversant les rôles de x et x'), $d(x', A) - d(x, A) \leq d(x, x')$. Finalement on a

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq d(x, x')$$

ce qui montre que φ est uniformément continue. ■

Proposition 4.17 *Tout espace métrique est normal.*

<u>*Démonstration.*</u>
• On a vu qu'il est séparé.
• Soient A et B fermés disjoints de X, et f l'application définie par

$$f(x) = d(x, A) - d(x, B)$$

f est continue de $X \longrightarrow \mathbb{R}$. Et
-) Si $x \in A$, alors $d(x, A) = 0$ et donc $f(x) < 0$.
-) Si $x \in B$, alors $d(x, B) = 0$ et donc $f(x) > 0$.
C'est-à-dire encore
$f(A) \subset]-\infty, 0[= \omega_1$ et $f(B) \subset]0, +\infty[= \omega_2$. Il en résulte que $A \subset f^{-1}(\omega_1)$ est un ouvert θ_1 de X et $B \subset f^{-1}(\omega_2)$ est un ouvert θ_2 de X (car f est continue), avec $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$ (car $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$). ■

Remarque 4.18 *Un espace topologique qui n'est pas normal n'est pas métrisable.*

5 Continuité des métriques

Proposition 5.1 *L'application $d : (x_1, x_2) \in X^2 \longrightarrow d(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+$ est uniformément continue sur X^2, muni de la topologie produit.*

<u>*Démonstration.*</u>
Soit $x = (x_1, x_2) \in X^2$ et $x' = (x'_1, x'_2) \in X^2$, nous savons que

$\delta(x, x') = sup[d(x_1, x'_1), d(x_2, x'_2)]$ est la métrique produit sur X^2. Ainsi

$$\begin{aligned} |d(x) - d(x')| &= |d(x_1, x_2) - d(x'_1, x'_2)| \\ &\leq d(x_1, x'_1) + d(x_2, x'_2) \\ &\leq 2\delta(x, x') \end{aligned}$$

d'où la continuité uniforme car $\forall \varepsilon > 0, \exists_\eta(\varepsilon) = \varepsilon/2$, tel que $\delta(x, x') \leq \eta \Longrightarrow |d(x) - d(x')| \leq \varepsilon$. ■

5-a Distance de deux parties non vides de X

Définition 5.2 *Soient A_1 et A_2 deux parties d'un espace métrique X, alors on appelle distance de A_1 à A_2, le nombre réel*

$$d(A_1, A_2) = \inf_{(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2} d(x_1, x_2)$$

La définition donne évidemment $0 \leq d(A_1, A_2) < \infty$.

Remarque 5.3
1.) Si $A_1 = \{a_1\}$, alors $d(\{a_1\}, A_2) = d(a_1, A_2)$.

2.) Si A_1 ou $A_2 = \emptyset$, alors $d(A_1, A_2) = +\infty$.

3.) d n'est pas une métrique sur $\mathcal{P}(X)$. Le premier et le troisième axiome ne sont pas vérifiés, en effet, $d(A_1, A_2) = 0 \not\Longrightarrow A_1 = A_2$.

4.) Si $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, alors $d(A_1, A_2) = 0$.
Mais la réciproque est fausse. Il suffit, pour le voir, de considérer le contre-exemple suivant. Dans $X = \mathbb{R}$, considérons $A_1 =]0, 1[$ et $A_2 =]1, 2[$. Alors $d(A_1, A_2) = 0$ et $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

5.) Généralement pour A_1 et A_2 données, il n'existe pas toujours $a_1 \in A_1$ et $a_2 \in A_2$ tels que $d(a_1, a_2) = d(A_1, A_2)$. Mais on a la proposition suivante.

Proposition 5.4 *Si A_1 et A_2 sont deux parties compactes d'un espace métrique X, alors*

$$\exists a_1 \in A_1 \quad \textit{et} \quad a_2 \in A_2 \quad \textit{tels que} \quad d(a_1, a_2) = d(A_1, A_2)$$

<u>*Démonstration.*</u>
L'application $f : (x_1, x_2) \in A_1 \times A_2 \longrightarrow d(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ est continue sur $A_1 \times A_2$. Or A_1 et A_2 sont compactes, donc $A_1 \times A_2$ est compact, et par conséquent f atteint sa borne inférieure dans $A_1 \times A_2$ qui est $d(A_1, A_2)$. ■

Corollaire 5.5 *Si A_1 et A_2 sont deux parties compactes d'un espace métrique X, alors $d(A_1, A_2) = 0$ si et seulement si $A_1 \cap A_2$ n'est pas vide.*

<u>*Démonstration.*</u>
Immédiate avec la proposition précédente. ■

5-b Diamètre d'une partie non vide de X

Définition 5.6 *Le diamètre d'une partie A non vide de X est défini par*

$$\delta(A) = \sup_{(x_1,x_2)\in A^2} d(x_1, x_2)$$

Évidemment, nous avons $\delta(A) \geq 0$; et si A est non borné, alors $\delta(A) = +\infty$.

Exemple 5.7 *Nous avons*

$$\delta(B(a, r)) \leq 2r \quad et \quad \delta(B^f(a, r)) \leq 2r$$

Propriété 5.8 *A est borné si et seulement si $\delta(A)$ est fini.*

<u>*Démonstration.*</u>
Si A est borné, alors A est contenu dans une boule de rayon r fini. ■

Proposition 5.9 *Si A est compacte, alors il existe a_1 et $a_2 \in A$ tels que $d(a_1, a_2) = \delta(A)$.*

<u>*Démonstration.*</u>
L'application $f : d/A^2$ est continue sur A^2 compacte. Donc f atteint sa borne supérieure c'est-à-dire qu'il existe a_1 et $a_2 \in A^2$ tels que

$$d(a_1, a_2) = \sup_{(x_1,x_2)\in A^2} d(x_1, x_2) = \delta(A)$$

■

Remarque 5.10
1.) Si $A = \emptyset$, alors $\delta(A) = \sup(\emptyset)$ (on sait que $\inf(\emptyset) = +\infty$). Tout x de $\mathbb{R}$ est un majorant de $\emptyset$, et donc $\mathbb{R}$ est l'ensemble des majorants de $\emptyset$; on pose alors $\delta(\emptyset)$ = - ∞. Parfois on considère, quand on est dans $\mathbb{R}^+$, que $\delta(\emptyset) = 0$.

2.) Ce résultat ne s'étend pas au cas où A_1 et A_2 sont supposés seulement fermés. Considérer, à titre de contre-exemple, $X = \mathbb{R}$ et

$$A_1 = \{(x, y)\ /\ xy = 1\} \quad et \quad A_2 = \{(x, y)\ /\ y = 0\}$$

Ce résultat ne s'étend pas même au cas d'un point et d'un fermé (voir théorème de projection dans les espace de Hilbert).

6 Limites dans les espaces métriques

Soit (X, d) un espace métrique.

6-a Adhérence d'une partie de X

Proposition 6.1 *Soit A une partie de l'espace métrique X, alors*

$$\overline{A} = \{\lim(x_n) \mid (x_n) \text{ suite de points de } A\}$$

Démonstration.
Soit E l'ensemble des limites des suites de points de A,
$E = \{\lim(x_n) \mid (x_n) \text{ suite de points de } A\}$.
• D'une part, on sait que dans tout espace topologique, $E \subset \overline{A}$,
• D'autre part, soit $\alpha \in \overline{A}$, alors pour tout n, il existe $a_n \in A \cap B(\alpha, \frac{1}{n})$ non vide. Comme $d(a_n, \alpha) \leq \frac{1}{n}$, on a $\alpha = \lim a_n$ et donc $\alpha \in E$, c'est-à-dire $\overline{A} \subset E$. D'où l'égalité. ■

Remarque 6.2 *Si la limite de toute suite de points de A appartient à A, alors A est fermé (car $\overline{A} \subset A$) .*

6-b Valeur d'adhérence d'une suite de points de X

Proposition 6.3 *α est valeur d'adhérence de la suite (x_n) si et seulement si il existe une sous-suite (x_{n_i}) de la suite (x_n), telle que $\lim\limits_{n_i \to \infty} x_{n_i} = \alpha$.*

Le résultat traduit le fait que l'ensemble des valeurs d'adhérence, c'est l'ensemble des limites des sous-suites.

<u>*Démonstration.*</u>
Condition nécessaire. Soit α valeurs d'adhérence de (x_n) alors α est adhérent à tous les points de la suite, c'est-à-dire α adhérent à

$$\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$$

donc $\alpha = \lim\limits_{i \longrightarrow \infty} x_{n_i}$ d'après la proposition précédente.

Condition suffisante. Elle est valable dans tout espace topologique. Soit $\alpha = \lim\limits_{i \longrightarrow \infty} x_{n_i}$. Alors pour tout voisinage $V \in v(x)$, il existe p tel que pour tout $n_i \geq p$, on a : $x_{n_i} \in V$. Il existe donc une infinité d'entiers n tel que $x_n \in V$ et par conséquent α est bien une valeur d'adhérence de (x_n). ∎

6-c Limite d'une fonction en un point

Proposition 6.4 *Soient A une partie d'un espace métrique X, Y un espace topologique et $f : A \longrightarrow Y$. Soient $a \in \overline{A}$ et $b \in Y$. Alors on a :*

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = b$$

si et seulement si pour toute suite (x_n) telle que $x_n \in A$ et $x_n \longrightarrow a$, alors $\lim f(x_n) = b$.

<u>*Démonstration.*</u>
Condition nécessaire. Elle est vrai pour X topologique.
Soit $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \longrightarrow a$. Soit $W \in v(b)$, on a par hypothèse : il existe $V \in v(a)$ tel que $f(V \cap A) \subset W$ et il existe n_0 tel que $n \geq n_0$, $x_n \in V \Longrightarrow x_n \in V \cap A$ et donc pour tout $n \geq n_0$, $f(x_n) \in W$ et $f(x_n) \longrightarrow b$.

Condition suffisante. Il faut montrer que, pour tout $W \in v(b)$, il existe $V \in v(a)$ tel que $f(V \cap A) \subset W$. Par l'absurde, sinon il existe $W \in v(b)$, pour tout $V \in v(a)$, $f(V \cap A) \not\subset W$, en particulier pour tout $n \geq 1$, et pour tout $V = B(a, \frac{1}{n}) = B_n$ et $f(B_n \cap A) \not\subset W$. Soit alors pour tout $n \geq 1$, $x_n \in B_n \cap A$ et $f(x_n) \notin W$ mais (x_n) est une suite de points de A, de plus

$d(x_n, a) < \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$, donc $x_n \longrightarrow a$ et $f(x_n) \not\to b$. D'où la contradiction. Donc on a bien $f(x) = b$. ■

6-d Continuité

Proposition 6.5 *Soit f une application d'un espace métrique X dans un espace topologique Y et soit $a \in X$. Pour que f soit continue en a il faut et il suffit que pour toute suite (x_n) telle que $x_n \longrightarrow a$, alors $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.*

Démonstration.
On sait que f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$. Il suffit alors d'appliquer la proposition précédente avec $A = X$. ■

Proposition 6.6 *Soit f une application d'un espace métrique X dans un espace topologique Y. Si pour tout compact K, $K \subset X$, la restriction de f à K est continue, alors f est continue sur X.*

Remarquons que, en général, si la restriction f/K est continue, alors cela n'implique pas que f est continue de $X \longrightarrow Y$.

Démonstration.
Soit $a \in X$ et (x_n) une suite telle $x_n \longrightarrow a$ dans X. Considérons l'ensemble $\{a, x_0, \cdots, x_n, \cdots\}$ qui est un compact K dans X. Donc $(x_n) \longrightarrow a$ dans K or f/K est continue en a donc (d'après la condition nécessaire de la proposition précédente) $f/K(x_n) \longrightarrow f/K(a)$, soit encore $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ dans X. Finalement f est continue en tout point de X. ■

7 Espaces métriques compacts

7-a Caractérisation par les suites

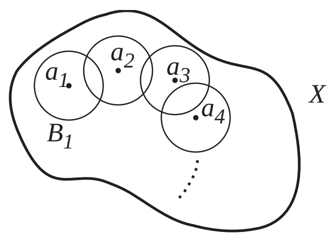
Lemme 7.1 *Soit X un espace métrique tel que toute suite de points de X admet au moins une valeur d'adhérence, alors pour tout recouvrement $(\theta_i)_{i \in I}$ de X, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, r) \subset \theta_i$.*

Démonstration.
Si c'est faux, alors pour tout $r > 0$ il existe $x \in X$, pour tout $i \in I$, $B(x, r) \not\subset \theta_i$, en particulier pour tout $r = \frac{1}{n}$, il existe x_n tel que, pour tout $i \in I$, $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset \theta_i$.
La suite (x_n) admet une valeur d'adhérence α (par hypothèse), il existe donc $j \in I$ tel que $\alpha \in \theta_j$ et il existe $p > 0$ tel que $B(\alpha, p) \subset \theta_j$. Il existe une sous-suite $x_{n_i} \longrightarrow \alpha$ et comme $\lim \frac{1}{n_i} = 0$, à partir d'un certain rang on a $B(x_{n_i}, \frac{1}{n_i}) \subset \theta_j$ d'où la contradiction. ∎

Théorème 7.2 *Bolzano-Weierstrass*
Soit X un espace métrique. Alors X est compact si et seulement si toute suite infinie admet au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration.
Condition nécessaire. Cela est vraie dans un espace X topologique compact (voir chapitre (5)).

Condition suffisante. X étant séparé, il suffit de prouver que de tout recouvrement ouvert $(\theta_i)_{i \in I}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini. D'après le lemme précédent, il existe $r > 0$, pour tout $x \in X$, tel que $B(x, r) \subset \theta_i$, il suffit donc de démontrer qu'on peut extraire un sous-recouvrement $(B(x, r))_{x \in X}$.
Montrons cela par l'absurde. Sinon, soit alors $a_1 \in X$ et $B_1 = B(a_1, r)$, alors $B_1 \neq X$ donc il existe $a_2 \in X - B_1$.
Soit alors $B_2 = B(a_2, r)$, $B_1 \cup B_2 \neq X$ et donc il existe $a_3 \in X - (B_1 \cup B_2)$
Etc.



On définit ainsi une suite (a_n) de points de X tels que : pour tout n et m, $n \neq m$, $d(a_n, a_m) \geq r$. Cette suite n'a pas de valeurs d'adhérence, sinon, soit α cette valeur d'adhérence et considérons la boule $B(\alpha, \frac{r}{2})$. On a $a_n \in B(\alpha, \frac{r}{2})$ pour une infinité de

n, cela implique que ces a_n sont tels que leur distance est $< r$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc il n'existe pas de valeur d'adhérence, et ainsi on peut trouver un sous-recouvrement fini. ■

Remarque 7.3 *On montre le corollaire suivant.*
Soit X un espace métrique, alors X est compact si et seulement si toute partie infinie admet au moins un point d'accumulation.

7-b Autres propriétés

Précompacité

Définition 7.4 *Un espace métrique X est dit précompact si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $(A_i)_{i \in I}$ fini par des ensembles de diamètre $< \varepsilon$.*

Le diamètre, noté $\delta(A_i)$, satisfait donc $\delta(A_i) < \varepsilon$, pour tout $i \in I$.

Un espace métrique X est précompact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A_ε fini tel que pour tout $x \in X$, alors $d(x, A_\varepsilon) < \varepsilon$.

Exemple 7.5 $X = [a, b]$ *est précompact.*

Remarque 7.6 *Notons que si l'espace métrique X est précompact, alors X est borné.*
$\mathbb{R}$ *est donc non précompact pour la métrique usuelle $|x-y|$. Mais on peut vérifier que $\mathbb{R}$ muni de la métrique d' définie par*

$$d'(x, y) = |\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}|$$

est précompact (bien que d et d' soient équivalentes). Ceci montre que la précompacité n'est pas une propriété topologique.

Proposition 7.7 *Si X est un espace métrique compact, alors X est précompact.*

La réciproque est fausse.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$ et considérons la boule $B(x, \varepsilon/2)$. Alors

$\bigcup_{x_i} B(x_i, \varepsilon/2) \supset X$. Comme X est compact, alors il existe un sous-recouvrement fini de la forme $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon/2) = X$, il suffit donc de prendre $A_i = B(x_i, \varepsilon/2)$. ■

Séparabilité

Définition 7.8 *Un espace topologique X est dit séparable s'il existe une partie A au plus dénombrable partout dense sur X.*

Exemple 7.9
1.) $\mathbb{R}^n$ est séparable, car $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable et partout dense dans $\mathbb{R}^n$.
2.) $\mathbb{R}$ grossier est séparable ($A = \{0\}$) et non séparé. Attention ce sont des notions distinctes.
3.) $\mathbb{R}$ discret est non séparable mais séparé.
4.) Un espace métrique X est séparable si et seulement si sa topologie $\mathcal{T}$ admet une base dénombrable.

Proposition 7.10 *Si un espace métrique X est précompact, alors X est séparable.*

Démonstration.
Pour tout $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = \frac{1}{n}$), il existe A_n fini ($A_n \subset X$), tel que $\forall x \in X \; d(x, A_n) < \frac{1}{n}$. Maintenant $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$ est partout dense (A est au plus dénombrable). En effet, si $x \in X$, alors $d(x, A) \leq d(x, A_n) < \frac{1}{n}$. Quand $n \longrightarrow \infty$, alors $d(x, A) \longrightarrow 0$ et donc $x \in \overline{A}$. Finalement $\overline{A} = X$ c'est-à-dire que X est séparable. ■

Proposition 7.11 *Si un espace métrique X est compact, alors X est séparable.*

Démonstration.
Si X est compact, alors X est précompact et donc, d'après le résultat précédent, X est séparable. ■

Remarque 7.12 *Si X est un espace métrique localement compact, alors on n'a pas nécessairement X séparable. A titre de contre-exemple, considérer $\mathbb{R}$ discret.*

Théorème 7.13 *: Continuité Uniforme*
Toute application continue f d'un espace métrique compact (X,d) dans un espace métrique (Y,δ) est uniformément continue sur (X,d).

<u>*Démonstration.*</u>
La continuité uniforme est caractérisée par : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout x, $x' \in X$, $d(x,x') \leq \eta$ implique $\delta(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$. Sinon, il existe $\varepsilon > 0$, pour tout $\eta = \frac{1}{n} > 0$ il existe x_n et $x'_n \in X$ tel que $d(x_n, x'_n) \leq \frac{1}{n} \Longrightarrow \delta(f(x_n), f(x'_n)) > \varepsilon$.
Comme X est compact, alors toute suite infinie (x_n) admet une valeur d'adhérence ξ et il existe une sous-suite (x_{n_i}) telle que $\lim\limits_{i\longrightarrow\infty} x_{n_i} = \xi$. Or

$$\begin{aligned} d(x'_{n_i}, \xi) &\leq d(x'_{n_i}, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, \xi) \\ &\leq \frac{1}{n_i} + d(x_{n_i}, \xi) \end{aligned}$$

Quand $n_i \longrightarrow \infty$, alors $d(x_{n_i}, \xi) \longrightarrow 0$ et donc $d(x'_{n_i}, \xi) \longrightarrow 0$. On a donc $\delta(f(x_{n_i}), f(x'_{n_i}) > \varepsilon$ pour tout i, d'une part et si $n_i \longrightarrow \infty$ alors $f(x_{n_i}) \longrightarrow f(\xi)$ car f est continue. Donc $\delta(f(x_{n_i}), f(x'_{n_i})) \longrightarrow \delta(f(\xi), f(\xi)) = 0$ car δ est continue. A la limite, pour n_i assez grand, $\delta(f(x_{n_i}), f(x'_{n_i})) \leq \varepsilon$, d'où la contradiction. ■

8 Espaces métriques complets

8-a Suite de Cauchy

Définition 8.1 *Soit (X,d) un espace métrique.*
On dit que la suite (x_n) de points de X est une suite de Cauchy[2] *dans (X,d) si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \ \textit{ tel que } \ \forall n,m \geq n_0 \ \ d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$$

Remarque 8.2
1.) La définition est équivalente à

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \ \textit{ tel que } \ \forall n \geq n_0, \forall p \geq 0 \ \ d(x_{n+p}, x_n) \leq \varepsilon$$

2. Augustin Louis Cauchy, Mathématicien français, 1789-1857

2.) C'est aussi équivalent à

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \delta(S_n) = 0$$

où $S_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+p}, \cdots\}$ *et* $\delta(S_n)$ *est le diamètre de* S_n.

3.) Toute suite de Cauchy est bornée. Ceci résulte essentiellement du fait que, pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in B^f(x_{n_0}, \varepsilon)$.

Exemple 8.3
1.) dans $\mathbb{R}$, *la suite* $(\dfrac{1}{n})$ *est de Cauchy. Ce n'est pas le cas de la suite* $(x_n = n)$.
2.) Si X *est discret, les suites de Cauchy dans* (X, d) *sont les suites stationnaires.*
3.) Toute suite convergente est de Cauchy. En effet, si $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = a$, *alors* $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_a) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Remarque 8.4 *Changement de métriques.*
Si d *et* d' *sont deux métriques équivalentes sur* X *et si* (x_n) *est de Cauchy pour* d, *alors* $\not\Longrightarrow$ (x_n) *de Cauchy pour* d'.
<u>*Contre-exemple.*</u> *Dans* $X = \mathbb{R}$, *considérons les métriques*

$$d(x, y) = |x - y| \quad et \quad d'(x, y) = \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|}$$

Considérons alors la suite (x_n) *donnée par* $x_n = n$. *Alors*
- *La suite* (x_n) *de Cauchy pour* d'. *En effet,*

$$d'(x_m, x_n) = \lim_{m,n \longrightarrow \infty} \left| \frac{m}{1 + m} - \frac{n}{1 + n} \right| = 0$$

- *La suite* (x_n) *n'est pas de Cauchy pour* d, *car*

$$d(x_n, x_m) = |m - n|$$

qui ne peut être $< \varepsilon$.

Proposition 8.5 *Si les métriques* d *et* d' *sont uniformément équivalentes sur* X, *alors toute suite de Cauchy pour* d *est une suite de Cauchy pour* d'.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$, si d est uniformément équivalente à d', alors il existe $\eta > 0$ tel que $d(x, y) < \eta \Longrightarrow d'(x, y) \leq \varepsilon$.
La suite (x_n) étant de Cauchy, pour cet $\eta > 0$, il existe n_0, tel que pour tout $m, n \geq n_0$, alors $d(x_m, x_n) < \eta$, et donc $\Longrightarrow$ $\forall m, n \geq n_0 \; d'(x_m, x_n) \leq \varepsilon$. ■

Donc si on remplace une métrique par une métrique uniformément équivalente, on ne change pas les suites de Cauchy.

Propriété 8.6 *Soit (x_n) une suite de Cauchy, alors (x_n) converge si et seulement si (x_n) admet (au moins) une valeur d'adhérence.*

Démonstration.
La condition nécessaire est évidente. Pour la condition suffisante, soit (x_n) une suite qui admet une valeur d'adhérence ξ.
Il existe alors une sous-suite (x_{n_i}) convergente vers ξ et on a

$$d(x_n, \xi) \leq d(x_n, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, \xi)$$

La suite (x_n) étant de Cauchy, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p_1$, pour $n, n_i \geq p_1$, alors $d(x_n, x_{n_i}) \leq \varepsilon/2$. Par ailleurs (x_{n_i}) étant convergente vers ξ, $\exists p_2$ tel que, pour tout $n_i \geq p_2$, $d(x_{n_i}, \xi) \leq \varepsilon/2$. Donc $\forall n \geq p$,

$$d(x_n, \xi) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

et ainsi $\lim x_n = \xi$ et donc la suite est convergente. ■

8-b Notion d'espace complet

Définition 8.7
(1) Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente.
$(X, \mathcal{T})$ un espace topologique métrisable.

(2)On dit que $(X, \mathcal{T})$ est topologiquement complet s'il existe sur X une métrique d, telle que (X, d) soit complet et $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.

Exemple d'espace métrique complet.
1.) $\mathbb{R}$ est complet. En effet, si (x_n) est une suite de Cauchy, alors (x_n) est bornée et donc ses éléments sont dans un intervalle compact $[a, b]$,

(x_n) admet donc une valeur d'adhérence et donc elle est convergente.

2.) $\mathbb{C}$ est complet.

3.) X muni de la méthode discrète est complet. En effet, toute suite de Cauchy est stationnaire donc convergente.

4.) L'intervalle $]0,1[$, sous-espace de $\mathbb{R}$, n'est pas complet. Il suffit de considérer $x_n = \frac{1}{n}$.

8-c Changement de métrique

Commençons par remarquer que si (X,d) est un espace métrique complet et si δ est équivalente à d alors (X,δ) n'est pas nécessairement complet. A titre de contre-exemple, considérer, dans $X = \mathbb{R}$,

$$d(x,y) = |x-y| \quad \text{et} \quad \delta(x,y) = |\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}|$$

$(\mathbb{R},d)$ complet, mais $(\mathbb{R},\delta)$ n'est pas complet car la suite $x_n = n$ est de Cauchy pour δ mais non convergente (sinon elle convergerait dans $(\mathbb{R},d)$ qui est identique à $(\mathbb{R},\delta)$ en tant qu'espace topologique.

Proposition 8.8 *Si (X,d) est un espace métrique complet et si f est une bijection biuniformément continue de (X,d) sur (X',d'), alors (X',d') est complet.*

La proposition est vraie, en particulier, si f est une isométrie.

<u>*Démonstration.*</u>
Soit (x'_n) une suite de Cauchy dans (X',d'). Comme f^{-1} est uniformément continue, alors $(f^{-1}(x'_n))$ est une suite de Cauchy dans (X,d). Or (X,d) est complet, donc la suite $(f^{-1}(x'_n))$ converge vers a. Par ailleurs f étant continue $f(f^{-1}(x'_n)) = (x'_n)$ converge vers $f(a)$, donc (X',d') est complet. ■

Corollaire 8.9 *Si (X,d) est un espace métrique complet et δ est une métrique uniformément équivalente à d, alors (X,δ) est complet.*

<u>*Démonstration.*</u>
On applique la proposition à $f : x \in (X,d) \longrightarrow x \in (X,\delta)$. ■

8-d Propriétés

Relation entre espace compact et espace complet

Proposition 8.10 *Tout espace métrique compact X est complet.*

> Démonstration.
> Soit (x_n) une suite de Cauchy d'un espace X compact. Alors (x_n) a une valeur d'adhérence (au moins), et donc (x_n) converge. Par conséquent X est complet. ∎

Remarque 8.11
1.) $\mathbb{R}$ *est complet et non compact.*
2.) Un espace métrique localement compact n'est pas nécessairement complet (considérer $]0,1[\subset \mathbb{R}$*).*
3.) un espace métrique complet n'est pas nécessairement localement compact.

Corollaire 8.12 *Pour qu'un espace métrique X soit complet, il suffit qu'il existe $r > 0$ tel que toutes les boules fermées de rayon r soient compactes.*

> Démonstration.
> Soit (x_n) une suite de Cauchy. Il existe p tel que pour tout $n \geq p$, $x_n \in B^f(x_p, r)$. Cette boule étant compacte, $(x_n)_{n\geq p}$ admet une valeur d'adhérence ; il en est évidemment de même pour la suite (x_n) qui est donc convergente. ∎

Suites décroissantes de fermées

Proposition 8.13 *Dans un espace métrique complet (X, d), toute suite décroissante (F_n) de fermés non vides dont le diamètre tend vers zéro, a une intersection F réduite à un point (donc non vide).*

> Démonstration.
> • Pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in F_n$. La suite (x_n) est de Cauchy, car $\delta(\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}) \leq \delta(F_n)$ or $\delta(F_n) \longrightarrow 0$ donc (x_n) est une suite de Cauchy, et donc (x_n) est convergente vers x.
> • $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Soit $p \geq 1$, pour tout $n \geq p$ $x_n \in F_p$. F_p étant fermé contient la limite de la suite x_n, donc $x \in F_p$ et par conséquent $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_p$. Donc $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_p \neq \emptyset$

• Si $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, alors $\delta(F) \leq \delta(F_n)$. Quand $n \longrightarrow \infty$, alors $\delta(F) = 0$. Il ne peut pas y avoir deux points dans F car alors $\delta(F)$ serait > 0. ■

Remarque 8.14
1.) La proposition est fausse si X est non complet. En effet, il suffit de considérer $X =]0, 1[$ et $F_n =]0, \frac{1}{1+n}]$.
2.) La proposition est fausse si $\delta(F_n) \not\to 0$. En effet, considérer $X = \mathbb{R}$ et $F_n = [n, \infty[$.

Sous-espaces complets

Proposition 8.15 *Si A est un sous-espace complet dans X métrique, alors A est fermé.*

Démonstration.
Montrons que $\overline{A} \subset A$. Soit $a \in \overline{A}$, comme X est un espace métrique, il existe une suite (x_n) de points de A tel que $x_n \longrightarrow a$ dans X. Donc (x_n) est une suite de Cauchy dans X, donc une suite de Cauchy dans A (car tous les $x_n \in A$) et comme A est complet, alors $x_n \longrightarrow a' \in A$. Maintenant (x_n) converge vers a et a' dans X implique $a = a'$ (à cause de l'unicité de la limite). Comme $a' \in A$, on a $a \in A$, et par conséquent A est fermé. ■

Proposition 8.16 *Si A est un sous-espace fermé de X métrique complet alors A est complet.*

Démonstration.
Soit (x_n) une suite de Cauchy dans A, donc (x_n) est de Cauchy dans X complet, donc (x_n) convergente vers a dans X. Par ailleurs comme $x_n \in A$ fermé et $x_n \longrightarrow a$, alors $a \in A$. Finalement $x_n \longrightarrow a$ dans A et donc A est complet. ■

Corollaire 8.17 *Soit X un espace métrique complet. Alors A est un sous-espace complet si et seulement si A est un sous-espace fermé.*

Produit fini d'espace complets

Proposition 8.18 *Tout produit fini d'espace métriques complets est complet.*

Démonstration.

Soit $X = \prod_{i=1}^{p} X_i$ et d_i la métrique sur X_i. Pour tout i, (X_i, d_i) est complet. Considérons, sur X, la métrique

$$d(x,y) = \sup_{1\leq i\leq p} \{d_i(x_i, y_i)\}$$

Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (X, d). Alors

$$d_i(x_i(n), X_i(m)) \leq d(x(n), x(m)) \leq \varepsilon$$

et donc $(x_i(n))$ est de Cauchy dans (X_i, d_i) complet, ce qui donne $x_i(n) \longrightarrow \xi_i$. Par conséquent $x(n) \longrightarrow \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_p)$, c'est-à-dire que (X, d) est complet. ■

Remarque 8.19 *Si un produit d'espaces métriques est complet alors chaque facteur est complet. C'est le cas, à titre d'exemple, de Λ^n qui est complet pour d et d_α.*

8-e Théorèmes du point fixe et de Baire

Théorème du point fixe

Définition 8.20
(1) On dit que $f : (X, d) \longrightarrow (X', d')$ est lipschitzienne et de rapport $k > 0$ si pour tout x et $y \in X$, on a

$$d'(f(x), f(y)) \ \leq \ kd(x, y)$$

(2) On dit que $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ est une contraction si f est lipschitzienne et de rapport $k < 1$ (on dit aussi que f est contractante).
(3) Soit $f : X \longrightarrow X$. On dit que a est un point fixe pour f si $f(a) = a$.

Remarque 8.21 *Si f est lipschitzienne, alors f est uniformément continue sur X.*

Exemple 8.22
1.) Si f est la fonction identité, alors tout point est un point fixe.
2.) Si f est l'application définie par $f(x) = x + 1$, alors f n'a pas de point fixe.

Théorème 8.23 *Toute contraction f d'un espace métrique complet (X, d) admet un point fixe.*

Démonstration.

• *Existence.* Considérons la suite (x_n) définie par

$$x_1 = f(x_0)\ ,\ x_2 = f(x_1)\ ,\ \cdots\ ,\ x_{n+1} = f(x_n)\ ,\ \cdots$$

La suite (x_n) est une suite de Cauchy. En effet, nous avons

$$\begin{array}{rcl} d(x_{n+1}, x_n) & = & d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \\ d(x_n, x_{n-1}) & \leq & kd(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ \vdots & & \vdots \\ d(x_2, x_1) & \leq & kd(x_1, x_0) \end{array}$$

on multiplie membre à membre, on a

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$$

Soit $p \geq 1$, alors

$$\begin{array}{rcl} d(x_{n+p}, x_n) & \leq & d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ & \leq & \left[k^{n+p-1} + \cdots + k^n\right]\ d(x_1, x_0) \end{array}$$

Entre crochets, on a une progression géométrique de raison k, dont on connaît la somme, ce qui donne

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n(1-k^p)}{1-k}\ d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k}\ d(x_1, x_0)$$

Comme $k < 1$, la série est convergente et $d(x_{n+p}, x_n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$, donc la suite est de Cauchy.

La suite (x_n) est de Cauchy dans X complet (x_n) converge vers a et avec $x_n = f(x_{n-1})$, quand $x \longrightarrow a$, on obtient $a = f(a)$ (car f est continue), c'est-à-dire que a est un point fixe pour f.

• *Unicité.* Soit a' un point fixe quelconque de f. On a

$$d(a, a') = d(f(a), f(a')) \leq kd(a, a')$$

(car f est contractante), et donc $(1-k)d(a,a') \leq 0$. Comme $k < 1$, alors $1-k > 0$ et donc $d(a,a') \leq 0$ qui n'est possible que si $a = a'$. ■

Remarque 8.24
1.) Si $k = 1$ le théorème est faux; il n'y a ni existence, ni unicité. A titre d'exemples :
- *Considérer dans $X = \mathbb{R}$ et la fonction $f(x) = x + 1$. Alors*

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |x - y| = d(x, y)$$

et il n'existe pas de point fixe.
- *Si on considère $X = \mathbb{R}$ et la fonction $f(x) = x$, alors tous les points sont fixes.*

2.) Si pour tout x et $y \in X$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, alors il y a unicité mais il n'y a pas existence. A titre de contre-exemple, considérer $f(x) = \log(1 + e^x)$. Alors il n'existe pas de point fixe; sinon on aurait $\log(1+e^x) = x$ ce qui donne $1+e^x = e^x$ c'est-à-dire $1 = 0$.

3.) Le théorème est faux si (X, d) est non complet. A titre de contre-exemple, considérer $X =]0, 1[$ et $f(x) = \frac{x}{2}$.

4.) Il existe d'autres énoncés du théorème du point fixe (sorte de généralisation), donnés ci-dessous.

Théorème 8.25 *Théorème de Brouwer*[3]
Si X est la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ $(X = B^f(0,1))$ et si f est une application continue de X dans X alors f admet un point fixe.

Théorème 8.26 *Théorème Tychonov*[4]
Si X compact est convexe dans E (e.v.t. localement convexe) et si f est continue $X \longrightarrow X$, alors f admet un point fixe (non nécessairement unique).

Le théorème de Brouwer peut être vu comme un cas particulier du théorème de Tychonov (avec $X = B^f(0,1) \subset \mathbb{R}^n$).

3. Luitzen Egbertus Jan Brouwer, Mathématicien néerlandais, 1881-1966
4. Andreï Nikolaïevich Tychonov, Mathématicien russe, 1906-1993

Théorème 8.27 *Théorème de Baire*[5]
Dans un espace métrique complet X, tout ouvert θ non vide est non maigre.

<u>*Démonstration.*</u>

• Remarquons qu'une partie A est rare si $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$ dans X. Alors il existe une boule fermée $B^f \subset \theta$ et disjointe de A (sinon $A \cap B^f \neq \emptyset \Longrightarrow A \cap \theta \neq \emptyset$ c'est-à-dire A partout dense, donc non rare).
• Supposons au contraire qu'il existe un ouvert non vide θ tel que $\theta = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ où les A_n sont rares.
(i) Comme A_0 est rare, alors il existe $B_0^f \subset \theta$ de rayon $r_0 \leq 1$ tel que $B_0^f \cap A = \emptyset$.
(ii) En remplaçant θ par B_0 et A_0 par A_1, on voit qu'il existe une boule fermée $B_1^f \subset B_0 \subset B_0^f$ de rayon $r_1 \leq 1$ et telle que $B_1^f \cap A_1 = \emptyset$.
(iii) Etc. Par récurrence.
(iv) Pour tout $n \geq 0$, il existe une boule fermée $B_n^f \subset B_{n-1} \subset B_{n-1}^f$ de rayon $r_n \leq \frac{1}{n}$ et tel que $B_n^f \cap A_n = \emptyset$.
(B_n^f) est une suite décroissante de fermés non vides dans (X, d) complet, comme $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \delta(B_n^f) = 0$ (car $\delta(B_n^f) \leq \frac{2}{n}$). Son intersection est réduite à un point a de θ. Par ailleurs a n'appartient à aucun A_n, puisque $B_n^f \cap A_n = \emptyset$, d'où la contradiction. ■

Remarque 8.28 *Le théorème reste vrai pour tout espace topologique X (pas forcément métrisable) mais localement compact.*

Corollaire 8.29 *Tout espace métrique complet est non maigre.*

<u>*Démonstration.*</u>
Pour la démonstration, il suffit de prendre $\theta = X$. ■

Exemple 8.30 $\mathbb{R}$ *est non maigre. Par conséquent* $\mathbb{R}$ *est non dénombrable, car sinon il serait réunion d'ensembles rares, c'est-à-dire maigre.*

Corollaire 8.31 *Dans un espace métrique complet X, si M est maigre alors $\complement M$ est non maigre et partout dense.*

5. René Baire, Mathématicien français, 1874-1932

Démonstration.

• Si $\complement M$ était maigre, alors $X = M \cup \complement M$ serait maigre.

• $\complement M$ est partout dense, sinon il existerait un ouvert $\theta \neq \emptyset$ tel que $\complement M \cap \theta = \emptyset$. Par conséquent $\theta \subset M$ donc θ est maigre ; ce qui est en contradiction avec le théorème de Baire. ■

Remarque 8.32

1.) On appelle espace de Baire tout espace topologique dans lequel tout ouvert non vide est maigre.

- Un espace métrique complet est donc un espace de Baire.

- On démontre que tout espace topologique localement compact est un espace de Baire.

2.) Le théorème de Baire permet de montrer parfois l'existence d'éléments d'un espace métrique X complet vérifiant une propriété P apparemment exceptionnelle (par exemple : fonction continue et derivable en aucun point, série de Fourier d'une fonction continue qui diverge en tous les points d'un ensemble dénombrable, $\cdots$)

3.) Les applications les plus importantes sont dans la théorie des espaces vectoriels topologiques (evt).

Chapitre 7

Espaces vectoriels normés Espaces de Banach

1 Notion d'espace normé

E désigne un espace vectoriel sur $\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1-a Norme

Définition 1.1 *On appelle norme sur E, toute application p de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \Lambda$, on ait*

(N_1)	$p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$	*(condition de séparation)*
(N_2)	$p(\lambda x) = \lvert\lambda\rvert p(x)$	*(condition d'homogénéité)*
(N_3)	$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$	*(inégalité du triangle)*

<u>*Notation.*</u> On note $p(x) = \|x\|$ ou encore $p(x) = \|x\|_E$.
$p(x)$ s'appelle norme de x.

(E, p) s'appelle espace vectoriel normé (e.v.n.) de support E.

Remarque 1.2
1.) Si $\lambda = 0$, alors $(N_2) \Longrightarrow p(0) = 0$. Donc $N_1 \cup N_2$ équivaut à

$$p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

2.) Si on n'impose pas (N_1), on dit que p est une semi-norme.

Exemple 1.3
1.) $E = \Lambda$ et $p(x) = |x|$ est une norme.
2.) Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\Lambda)$, l'ensemble des fonctions continues de $[a,b] \longrightarrow \Lambda$ et

$$\|f\|_E = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

est une norme.
Il en est de même, pour $\alpha \geq 1$, avec

$$\|f\|_\alpha = \left\{\int_a^b |f(x)|^\alpha dx\right\}^{1/\alpha}$$

qui est une norme (l'inégalité triangulaire résulte de l'inégalité de Minkowsky[1]). On montre que

$$\lim_{\alpha\longrightarrow\infty} \|f\|_\alpha = \|f\|_E$$

Propriété 1.4
(1) $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$.

(2) Si $E \neq \{0\}$, alors p est non bornée.

Démonstration.
(1) $p(x) = p(x-y+y) \leq p(x-y) + p(y)$, d'où $p(x) - p(y) \leq p(x-y)$. Il suffit alors de permuter x et y.
(2) Si $x \in E - \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}$, $p(nx) = np(x) \longrightarrow \infty$ avec n. ■

1-b Métrique associée à une norme

Proposition 1.5 *L'application $d : (x,y) \longrightarrow \|x-y\|$ est une métrique sur E invariante par translation (c'est-à-dire $d(x+a, y+a) = d(x,y)$). On dit que d est la métrique associée à la norme.*

La démonstration est immédiate.

Remarque 1.6 *On supposera toujours qu'un espace vectoriel normé est muni de cette métrique et de la topologie associée.*

Proposition 1.7 *L'application $x \longrightarrow \|x\|$ est uniformément continue sur E.*

1. Hermann Minkowsky, Mathématicien russe, 1864-1909

<u>*Démonstration.*</u>
Cela résulte de la continuité uniforme de l'application $x \longrightarrow d(x, \{0\}) = \|x\|$. ■

Corollaire 1.8 *Si* $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = a$, *alors* $\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n\| = \|a\|$.

Proposition 1.9 *Toute boule (ouverte ou fermée) est convexe.*

<u>*Démonstration.*</u>
Par translation, on peut toujours se ramener à l'origine. soit $B(0, r)$ la boule de centre 0 et de rayon r. Si x et $y \in B(0, r)$, le segment d'origine x et d'extrémité y est

$$(1-t)x + ty = z \quad \text{avec} \quad t \in [0,1]$$

Vérifions que $z \in B(0, r)$. Nous avons

$$\|z\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\| < (1-t)r + tr = r$$

Ainsi, puisque $\|z\| < r$, alors $z \in B(0, r)$.
Démonstration identique pour $B^f(0, r)$. ■

1-c Espaces de Banach

Définition 1.10 *On appelle espace de Banach*[2]*, un espace vectoriel normé complet.*

Exemple 1.11
1.) $E = \Lambda$ *est un espace de Banach.*
2.) $\mathcal{C}([a, b], \Lambda)$ *pour* $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ *est un espace de Banach.*
3.) $\mathcal{C}([a, b], \Lambda)$ *pour* $\|f\|_\alpha$ *définie précédemment est non complet, donc ce n'est pas un espace de Banach (vérifier pour* $\alpha = 1$*).*

1-d Isomorphisme d'espace vectoriel normé

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le même Λ.

Définition 1.12 *On appelle isomorphisme d'espaces normés, tout isomorphisme algébrique* φ *de* E *sur* F *tel que, pour tout* $x \in E$*, on a*

$$\|\varphi(x)\|_F = \|x\|_E$$

2. Stefan Banach, Mathématicien polonais, 1892-1945

C'est un isomorphisme qui conserve la norme.

Proposition 1.13 *φ est un isomorphisme d'espace vectoriel normé si et seulement si φ est une isométrie linéaire.*

Démonstration.
Condition nécessaire. Nous avons

$$\begin{aligned} d_F(\varphi(x), \varphi(y)) &= \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_F \\ &= \|\varphi(x-y)\|_F = \|x-y\|_E = d_E(x,y) \end{aligned}$$

Condition suffisante. $\|\varphi(x)\|_F = d_F(\varphi(x), 0) = d(x, 0) = \|x\|_E$ et φ est évidemment un isomorphisme algébrique. ■

Corollaire 1.14 *Tout espace vectoriel normé isomorphe à un Banach est un Banach.*

Démonstration.
Cela résulte du fait que tout espace isométrique à un complet est complet. ■

2 Sous-espace et produit fini d'espaces vectoriels normés

2-a Sous-espace

Définition 2.1 *Soit (E, p) un espace vectoriel normé et A un sous-espace vectoriel de E, alors la restriction de p à A, $q = p/A$, est une norme sur A et (A, q) est un sous-espace vectoriel normé de (E, p).*

Proposition 2.2 *(A, q) est un sous-espace topologique de (E, p).*

Démonstration.
Si δ est la métrique associée à q (d est associée à p) sur A, on a

$$\delta(x, y) = q(x-y) = p(x-y) = d(x, y)$$

Et donc $\delta = d/A^2$. ■

2-b Produit fini

Soit $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ où E_i est un espace vectoriel normé de norme p_i (d_i est la métrique associée a p_i).
(1.) La norme sur E la plus usuelle (et simple) est définie, pour tout $x = (x_i)_{i=1,n} \in E$, par

$$p(x) = \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(x_i)$$

On vérifie facilement que c'est une norme sur E.
(2.) Pour $\alpha \geq 1$, on peut considérer aussi

$$p(x) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (p_i(x_i)^{\alpha} \right\}^{1/\alpha}$$

On vérifie également que c'est une norme sur E.

Proposition 2.3 (E, p) *est le produit topologique des* (E_i, p_i)

Démonstration.
Nous avons

$$d(x, y) = p(x - y) = \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(x_i - y_i) = \sup_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$$

et c'est une métrique produit. Par conséquent (E, d) est espace métrique produit des (E_i, d_i). ■

Proposition 2.4 *Tout produit fini d'espaces de Banach est un espace de Banach.*

Démonstration.
Evident car tout produit d'espaces complets est complet. ■

Exemple 2.5 Λ *(*$= \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) est un Banach, donc* Λ^n *également.*

3 Exemples usuels d'espaces vectoriels normés

Dans ce qui suit $\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3-a Espace ℓ^α

Définition 3.1 *Pour $\alpha \geq 1$, on considère*

$$\ell^\alpha = \left\{ x = (x_i) \in \Lambda^{\mathbb{N}} \quad \textit{tels que} \quad \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^\alpha < \infty \right\}$$

ℓ^1 et ℓ^2 sont les espaces les plus importants (et usuels).

Proposition 3.2 *L'espace ℓ^α est un espace vectoriel de dimension infinie.*

Démonstration.
• ℓ^α est inclus dans l'espace vectoriel $\Lambda^{\mathbb{N}}$. Il suffit alors de vérifier
(1) $x \in \ell^\alpha$, $\lambda \in \Lambda \Longrightarrow \lambda x \in \ell^\alpha$, ce qui est évident.
(2) $x, y \in \ell^\alpha \Longrightarrow x + y \in \ell^\alpha$. Cela résulte, par exemple, de l'inégalité évidente

$$|x_i + y_i|^\alpha \leq 2^\alpha (|x_i|^\alpha + |y_i|^\alpha)$$

où le second membre est le terme général d'une série convergente et donc le premier membre aussi.
• ℓ^α est de dimension infinie car les vecteurs $e_n = (\delta_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$ où

$$\delta_{n,i} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq n \\ 1 & \text{si} \quad i = n \end{cases}$$

sont linéairement indépendantes dans ℓ^α. ■

Proposition 3.3 *Pour tout $\alpha \geq 1$, l'espace ℓ^α muni de l'application*

$$x \longrightarrow \|x\| = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^\alpha \right\}^{1/\alpha}$$

est un un espace de Banach.

Démonstration.
• L'application $x \longrightarrow \|x\|$ est une norme sur ℓ^α. En effet, (N_1) et (N_2) sont évidents. Pour (N_3), elle résulte de l'inégalité de

Minkowsky qui donne, pour tout $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} S_k = \left\{ \sum_{i=0}^{k} |x_i + y_i|^\alpha \right\}^{1/\alpha} &\leq \left\{ \sum_{i=0}^{k} |x_i|^\alpha \right\}^{1/\alpha} + \left\{ \sum_{i=0}^{k} |y_i|^\alpha \right\}^{1/\alpha} \\ &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

et donc $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} S_k = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

• L'espace ℓ^α est complet. Soit (x^n) une suite de Cauchy dans ℓ^α. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 0$, $\forall m, n \geq n_0$, on a

$$\|x^m - x^n\| = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |x_i^m - x_i^n|^\alpha \right\}^{1/\alpha} \leq \varepsilon$$

On en déduit que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(x_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Λ. Comme Λ est complet, alors elle converge vers ξ_i. Posons $\xi = (\xi_i)$ et montrons que $\xi \in \ell^\alpha$ et $\lim x^n = \xi$.
Montrons que $\xi \in \ell^\alpha$. Nous avons, pour tout $k \geq 0$ et pour tout $m, n \geq n_0$,

$$\left\{ \sum_{i=0}^{k} |x_i^m - x_i^n|^\alpha \right\}^{1/\alpha} \leq \varepsilon$$

Il en résulte que la série de terme général $|\xi_i - x_i^n|^\alpha$ est convergente puisque les sommes partielles sont majorées par ε^α. Sa somme vérifie $\forall n \geq n_0$

$$\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |\xi_i - x_i^n|^\alpha \right\}^{1/\alpha} \leq \varepsilon$$

On en déduit que $(\xi_i) - (x_i^n) \in \ell^\alpha$, et comme $(x_i^n) \in \ell^\alpha$ alors $\xi = (\xi_i)$ également. Ainsi l'inégalité précédente s'écrit encore $\forall n \geq n_0$, $\|\xi - x^n\| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x^n = \xi$. ■

Remarque 3.4 *Si* $0 < \alpha < 1$, *l'application définie dans la proposition précédente n'est plus une norme, car* (N_3) *est non vérifiée.*

3-b Espace $B(X, \Lambda)$

Soit X un ensemble quelconque.

Proposition 3.5 *L'espace vectoriel $B(X, \Lambda)$ des applications bornées $f : X \longrightarrow \Lambda$ muni de la norme*

$$f \longrightarrow \sup_{x \in X} |f(x)|$$

est un espace de Banach.

Démonstration.
• On vérifie immédiatement que $B(X, \Lambda)$ est un espace vectoriel.
• L'application est bien une norme ; (N_3) résulte de l'inégalité

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

qui est vraie pour tout $x \in X$. Comme la métrique associée a déjà été étudiée précédemment, alors $B(X, \Lambda)$ est complet. ∎

Remarque 3.6 *On peut remplacer Λ par un espace de Banach quelconque.*

3-c Espace ℓ^∞

Définition 3.7 *L'espace ℓ^∞ est l'espace vectoriel $B(\mathbb{N}, \Lambda)$ de dimension infinie des suites bornées $x = (x_n)$ d'éléments de Λ.*
L'espace $B(\mathbb{N}, \Lambda)$ est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme

$$x \longrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

3-d Espace $\mathcal{C}(X, \Lambda)$

Soit X un espace topologique et $\mathcal{C}(X, \Lambda)$ l'espace vectoriel des applications continues $X \longrightarrow \Lambda$.

Proposition 3.8 *L'espace vectoriel E des applications bornées et continues de $X \longrightarrow \Lambda$ est un sous-espace fermé de $B(X, \lambda)$.*

Démonstration.
• Il est immédiat que E est un sous-espace vectoriel de $B(X, \Lambda)$.

• $B(X, \Lambda)$ étant métrisable, il suffit de montrer que si une suite de fonctions $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est convergente dans $B(X, \Lambda)$, alors sa limite $f \in E$ (c'est-à-dire continue). Soit $x_0 \in X$, pour tout $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{array}{rcccl} |f(x) - f(x_0)| & \leq & |f(x) - f_n(x)| & + & |f_n(x) - f_n(x_0)| \\ & & & + & |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ & \leq & 2\|f - f_n\| & + & \|f_n(x) - f_n(x_0)\| \end{array}$$

Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f_n = f$, il existe p tel que $\|f - f_p\| \leq \varepsilon/3$. Comme f_p est continue en x_0, il existe $V \in v(x_0)$ tel que, pour tout $x \in V$, on a $\|f_p(x) - f_p(x_0)\| \leq \varepsilon/3$. Ainsi pour $x \in V$, on a $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire que f est continue en tout point x_0 de X. ■

Corollaire 3.9 *E est un espace de Banach.*

Démonstration.
Ceci résulte du fait que E est fermé dans $B(X, \Lambda)$ complet. ■

Corollaire 3.10 *L'espace $\mathcal{C}(K, \Lambda)$ des applications continues d'un espace topologique compact K dans Λ, muni de la norme*

$$f \longrightarrow \sup_{x \in K} |f(x)|$$

est un espace de Banach.

Démonstration.
On sait que toute application continue d'un compact dans Λ est bornée donc $\mathcal{C}(K, \Lambda) = B(K, \Lambda) \cap \mathcal{C}(K, \Lambda)$. ■

3-e Normes usuelles sur $E = \mathcal{C}([a, b], \Lambda)$

Proposition 3.11 *Pour tout $\alpha \geq 1$, l'application*

$$f \longrightarrow \|f\|_\alpha = \{\int_a^b |f(x)|^\alpha dx\}^{1/\alpha}$$

est une norme sur E.

Démonstration.
(N_1) : Immédiat car si φ est continue et ≥ 0 sur $[a,b]$, alors si $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx = 0$ on a $\varphi \equiv 0$.
(N_2) : C'est immédiat.
(N_3) Soit, pour $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$: $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ et $f, g \in E$. L'inégalité de Minkowski donne

$$\begin{aligned}\left\{\sum_{i=0}^{n} |f(x_i) + g(x_i)|^\alpha\right\}^{1/\alpha} &\leq \left\{\sum_{i=0}^{n} |f(x_i)|^\alpha\right\}^{1/\alpha} \\ &+ \left\{\sum_{i=0}^{n} |g(x_i)|^\alpha\right\}^{1/\alpha}\end{aligned}$$

en multipliant les deux membres par $(\dfrac{b-a}{n})^{1/\alpha}$ et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient l'inégalité de Minkowski pour les intégrales

$$\begin{aligned}\left\{\int_a^b |f(x) + g(x)|^\alpha dx\right\}^{1/\alpha} &\leq \left\{\int_a^b |f(x)|^\alpha dx\right\}^{1/\alpha} \\ &+ \left\{\int_a^b |g(x)|^\alpha dx\right\}^{1/\alpha}\end{aligned}$$

Et par conséquent, c'est bien une norme. ■

Remarque 3.12
1.) quand $\alpha = 2$, on obtient l'inégalité classique de Cauchy-Schwartz[3].
2.) Pour $\alpha < 1$, ce n'est plus une norme.

Proposition 3.13 *E n'est complet pour aucune des normes*

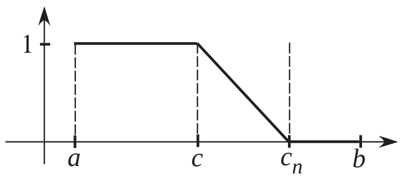
$$f \longrightarrow \|f\|_\alpha$$

Démonstration.
Soit $c \in]a, b[$ et, pour tout n, considérons $c_n = c + \frac{1}{n} \leq b$. Soit

3. Hermann Amandus Schwarz, Mathématicien allemand, 1843-1921

alors la suite de fonctions f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \leq x \leq c \\ \text{affine} & \text{si} \quad c \leq x \leq c_n \\ 0 & \text{si} \quad c_n \leq x \leq b \end{cases}$$



• La suite (f_n) est une suite de Cauchy dans E car
$\|f_{n+p} - f_n\| \leq \left\{ \int_c^{c_n} |f_{n+p}(x) - f_n(x)|^\alpha dx \right\}^{1/\alpha} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{1/\alpha}$
• La suite (f_n) n'est pas convergente dans E, car alors sa limite vérifierait
$\int_a^c |1 - f(x)|^\alpha dx = \int_a^c |f_n(x) - f(x)|^\alpha dx \leq \|f_n - f\|^\alpha$
le dernier terme tend vers 0 quand n tend vers ∞, d'où $f(x) = 1$ pour $x \in [a, c]$.
D'autre part, pour $x \in]c, b]$ et tout n tel que $c_n \leq x$, on a

$$\int_x^b |f(t)|^\alpha dt \leq \int_{c_n}^b |f_n(x) - f(t)|^\alpha dt \leq \|f_n - f\|^\alpha$$

d'où $f(x) = 0$ dans $]c, b]$. Ainsi f ne serait donc pas continue en c d'où la contradiction. ■

Remarque 3.14 *La complétion de E conduit aux espaces L_1^α.*

4 Propriétés des espaces vectoriels normés

4-a Notion d'espace vectoriel topologique

Définition 4.1
(1) Soit E un espace vectoriel sur $\Lambda = \mathbb{R}$ ou C et $\mathcal{T}$ une topologie sur E. Le couple $(E, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique si $\mathcal{T}$ est compatible avec les opérations algébriques de E

• *L'application* $\varphi : (x_1, x_2) \in E^2 \longrightarrow x_1 + x_2 \in E$ *est continue.*
• *L'application* $\psi : (\lambda, x) \in \Lambda \times E \longrightarrow \lambda x \in E$ *continue.*

(2) $(E, \mathcal{T})$ *est un espace vectoriel topologique localement convexe si* $(E, \mathcal{T})$ *est un espace vectoriel topologique et si, de plus, tout point admet une base de voisinages convexes.*

Exemple 4.2
1.) Λ *muni de la topologie usuelle est un e.v.t. localement convexe.*

2.) Si E *est un espace vectoriel quelconque sur* λ *muni de la topologie* $\mathcal{T}$ *grossière, alors* E *est un espace vectoriel topologique localement convexe (car toute application de* E *grossier est continue).*

3.) Si E *un espace vectoriel quelconque sur* Λ*, muni de la topologie* $\mathcal{T}$ *discrète, alors* E *n'est pas un espace vectoriel topologique localement convexe. En effet, on a*
- (1) l'addition est continue.
- (2) la multiplication par λ *ne l'est pas.*

Démonstration.
Si $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ *était continue, alors l'application partielle* $f : \lambda \longrightarrow \lambda x$ *serait continue et ainsi* $f(1) = x$*, or* E *est discret donc* $\{x\} \in v(x)$*. Ceci donnerait alors* $f^{-1}(\{x\}) \in v_\Lambda(1)$ *donc* $\{1\} \in v_\Lambda(1)$ *ce qui est faux.* ■

Proposition 4.3 *Soit* a *un point d'une espace vectoriel topologique* E*, alors*
(1) L'application

$$x \in E \longrightarrow x + a \in E$$

est un homéomorphisme.
(2) Si $\lambda \neq 0$*, alors l'application*

$$x \in E \longrightarrow \lambda x \in E$$

est un homéomorphisme.

Démonstration.
(1) L'application $x \longrightarrow x + a$ est une bijection bicontinue, donc résultat immédiat.

(2) L'application $x \longrightarrow \lambda x$ est également une bijection bicontinue, d'où le résultat. ∎

Remarque 4.4 *La première application est intéressante car pour connaître les voisinages d'un point, il suffit, par translation, de connaître les voisinages de l'origine.*

Proposition 4.5 *Tout espace vectoriel normé est un espace vectoriel topologique localement convexe.*

Démonstration.
Considérons les applications

$$\varphi : (x_1, x_2) \longrightarrow x_1 + x_2$$

et

$$\psi : (\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$$

Sur E^2 on a la norme

$$\|x\|_{E^2} = \sup(\|x_1\|, \|x_2\|)$$

et sur $\Lambda \times E$ on a la norme

$$\|(\lambda, x)\|_{\Lambda \times E} = \sup(|\lambda|, \|x\|)$$

• φ est continue. En effet, soit $x' = (x'_1, x'_2)$ et $x = (x_1, x_2)$, ainsi

$$\varphi(x') - \varphi(x) = x'_1 + x'_2 - x_1 - x_2$$

et on a

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x') - \varphi(x)\|_E &\leq \|x'_1 - x_1\|_E + \|x'_2 - x_2\|_E \\
&\leq \|x - x'\|_{E^2} + \|x - x'\|_{E^2} \\
&\leq 2\|x - x'\|_{E^2}
\end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat.
• ψ est continue. En effet, soit $u_0 = (\lambda_0, x_0)$ et $u = (\lambda, x)$, ainsi

$$\begin{aligned}
\psi(u) - \psi(u_0) &= \lambda x - \lambda_0 x_0 \\
&= (\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + \lambda_0 x + \lambda x_0 - \lambda_0 x_0 - \lambda_0 x_0 \\
&= (\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\|\psi(u)-\psi(u_0)\| &\leq |\lambda-\lambda_0|\|x-x_0\|+|\lambda_0|\|x-x_0\|+|\lambda-\lambda_0|\|x_0\| \\ &\leq \|u-u_0\|^2+\|\lambda_0\|\|u-u_0\|+\|x_0\|\|u-u_0\|\end{aligned}$$

ce qui montre que ψ est continue (mais non uniformément continue).

• E est localement convexe. En effet, si $x_0 \in E$ alors $\{B(x_0,r)\ ,\ r>0\}$ est une base de voisinages convexe de x_0, d'où le résultat. ■

Corollaire 4.6 *Si* $(x_n) \longrightarrow x$ *dans* E*,* $(y_n) \longrightarrow y$ *dans* E*, et* $(\lambda_n) \longrightarrow \lambda$ *dans* Λ*, alors*

$$x_n+y_n \longrightarrow x+y$$

et

$$\lambda_n x_n \longrightarrow \lambda x$$

4-b Adhérence d'un sous-espace vectoriel

Proposition 4.7 *Si* A *est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé* E*, alors* $\overline{A}$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Démonstration.
Soient x et $y \in \overline{A}$ et $\lambda, \mu \in \Lambda$. Montrons que $\lambda x+\mu y \in \overline{A}$. Pour cela,
x est limite d'une suite (x_n) de points de A.
y est limite d'une suite (y_n) de points de A.
Comme $\lambda x_n+\mu y_n \in A$ (sous-espace vectoriel) et $\lambda x_n+\mu y_n \longrightarrow \lambda x+\mu$ (d'après corollaire), alors $\lambda x+\mu y \in \overline{A}$. ■

Remarque 4.8 *On montre que si* A *est une partie convexe d'un espace vectoriel normé* E*, alors* $\overline{A}$ *et* $\overset{\circ}{A}$ *sont convexes.*

4-c Boules et sphères dans un espace vectoriel normé

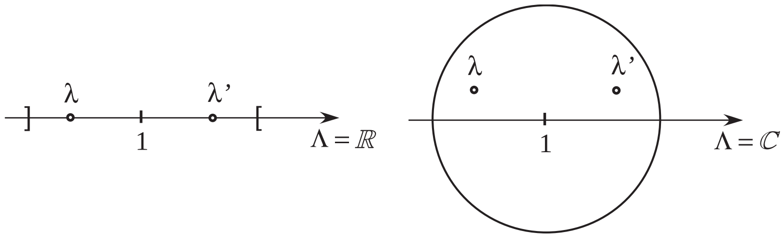
Proposition 4.9 *Dans un espace vectoriel normé, on a*

$$\overline{B(x_0,r)} = B^f(x_0,r) \quad \textit{et} \quad B(x_0,r)^* = S(x_0,r)$$

et

$$\overset{\circ}{\overbrace{B^f(x_0,r)}} = B(x_0,r) \quad \textit{et} \quad B^f(x_0,r)^* = S(x_0,r)$$

<u>*Démonstration.*</u>
Supposons que $x_0 = 0$.
• $B^* = S$. On sait que $B^* \subset S$, montrons que $S \subset B^*$.
Soit $x \in S$. L'application $f : \lambda \in \Lambda \longrightarrow \lambda x \in E$ est continue et même pour $\lambda = 1$, où on a $f(1) = x$. Soit $V \in v(x)$, $f^{-1}(V) \in v(1)$. Donc il existe $\lambda < 1$ et $\lambda' > 1$ dans $f^{-1}(V)$.
$\lambda x \in V \Longrightarrow \lambda x \in V \cap B$.
$\lambda' x \in V \Longrightarrow \lambda' x \in V \cap \complement B$ (car $x \in S$).
Tout voisinage de x rencontre B et $\complement B$ donc $x \in B^*$.



• $B^{f*} = S$. Même demonstration ; à la fin on a $\lambda x \in V \cap \complement B$ et $\lambda' x \in V \cap B$.
• $\overline{B} = B \cup B^* = B \cup S = B^f$.
• $\overset{\circ}{B^f} = B^f - B^{f*} = B^f - S = B$. ■

4-d Séries dans un espace vectoriel normé

Définition 4.10 *Soit E un espace vectoriel normé et (u_n) une suite de points de E. On lui associe la suite (S_n) telle que : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Le couple (u_n, S_n) s'appelle série. Notation usuelle : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.*

La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est dite convergente si la suite (S_n) est convergente.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est dite absolument convergente si $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$ est convergente.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ convergente se note $\sum u_n < +\infty$.

Théorème 4.11 *Dans un espace de Banach E, toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration.

Soit la série convergent $\sum_{n=0}^{\infty} \|U_n\| < \infty$ et $S_n = U_0 + \cdots + U_n$.
Nous avons

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leq \|U_{n+1}\| + \cdots + \|U_{n+p}\|$$

Soit $\forall \varepsilon > 0$, alors pout tout $n \geq n_0$, et pour tout $p \geq 1$, (la convergence absolue de la série suppose l'existence d'un certain n_0), on a

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leq \varepsilon$$

et donc (S_n) est une suite de Cauchy dans E complet, elle est convergente. ■

Remarque 4.12 *L'intérêt de ce résultat réside dans le fait que la série $\|U_n\|$ est à termes positifs. Les règles de convergence usuelles peuvent s'appliquer (règles de Cauchy et de Dalembert).*

Théorème 4.13 *: Réciproque*
Si dans un espace vectoriel normé E, toute série absolument convergente est convergente, alors E est complet (c'est-à-dire E est un espace de Banach).

Démonstration.

Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E. Pour tout $\varepsilon = \frac{1}{2^k} > 0$ il existe n_k tel que pour tout $n \geq n_k$: $\|x_{n_k} - x_n\| \leq \frac{1}{2^k}$.
On peut supposer les n_k strictement croissants, en particulier pour tout $k \geq 1$

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}$$

or $\frac{1}{2^k}$ est le terme général d'une série convergente, donc la série de terme général $(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ est absolument convergente. Si $\sum x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ est absolument convergente, alors elle est convergente. Or

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} \left[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right] &= (x_{n_2} - x_{n_1} + x_{n_3} - x_{n_2} + \cdots) \\ &= x_{n_{p+1}} - x_{n_1} \end{aligned}$$

x_{n_1} étant constante, donc $(x_{n_{p+1}})$ est convergente et donc E est complet. Cela résulte du fait que pour qu'une suite de Cauchy soit convergente, il suffit qu'une sous-suite soit convergente, ou encore une suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence est convergente. ■

Proposition 4.14 *Condition nécessaire et suffisante.*
Pour qu'un espace vectoriel normé soit complet il faut et il suffit que toute série absolument convergente soit convergente.

Remarque 4.15 *Si un espace vectoriel normé E est non complet, alors il existe au moins une série de E absolument convergente et non convergente.*

4-e Normes équivalentes

Définition 4.16 *Soit E un espace vectoriel normé sur Λ.*
(1) Les normes p et p' sont équivalentes si les métriques associées d et d' sont équivalentes.
(2) Les normes p et p' sont uniformément équivalentes si les métriques associées sont uniformément équivalentes.

Proposition 4.17 *Une condition nécessaire et suffisante*
Pour que les normes p et p' soient équivalentes sur E il faut et il suffit que $\exists a$ et $b > 0$ tel que

$$ap \leq p' \leq bp$$

Démonstration.
Condition nécessaire
• Si $p \sim p'$ équivaut à $d \sim d'$ et donc $B_d(0,1) \supset B'_{d'}(0,2r')$.
Soit $x \in E - \{0\}$, alors $y = \dfrac{r'}{p'(x)}\, x \in B'_{d'}(0,2r') \subset B_d$ et donc
$p(y) < 1 \Longleftrightarrow \dfrac{r'}{p'(x)}p(x) \leq 1 \Longrightarrow r'p \leq p'$.
• $p \sim p' \Longleftrightarrow p' \sim p$ ainsi en permutant, il existe $r > 0$ tel que $rp' \leq p$ et donc $p' \leq \dfrac{1}{r}p$. En résumé en prenant $a = r'$ et $b = \frac{1}{r}$, cela convient.

Condition suffisante
Si on a $ap \leq p' \leq bp$, alors $ad \leq d' \leq bd$. Et donc $B_d(x_0, r) \supset B'_{d'}(x_0, ar)$ et

$B'_{d'}(x_0, r') \supset B_d(x_0, \frac{r'}{b})$.
Ce qui donne $d \sim d'$ uniformément et par conséquent $p \sim p'$ uniformément. ■

Corollaire 4.18 *Les normes p et p' sont équivalentes si et seulement si les normes p et p' sont uniformément équivalentes.*

Corollaire 4.19 *Soient p et p' deux normes équivalentes sur E. Alors*
(1) Si (x_n) est une suite de Cauchy dans (E, p), alors (x_n) est une suite de Cauchy dans (E, p') et réciproquement.
(2) Si (E, p) est complet, alors (E, p') est complet et réciproquement.
(3) Si A est borné dans (E, p), alors A borné dans (E, p') et réciproquement.

5 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Soit E un espace vectoriel normé de dimension n et $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E.

5-a Opérations sur les fonctions continues

On considère les fonctions continues de l'espace topologique X dans Λ.

Proposition 5.1 *Soient f et g deux applications d'un espace topologique X dans Λ, continues en $x_0 \in X$, alors*
(1) $f + g$ est continue en x_0
(2) $f.g$ est continue en x_0
(3) f/g est continue en x_0, si $g(x_0) \neq 0$
(4) $|f|$ continue en x_0.

<u>*Démonstration.*</u>
(1) Si on considère

$$x \in X \longrightarrow (f(x), g(x)) \in \Lambda^2 \longrightarrow f(x) + g(x) \in \Lambda$$

On a la composée de deux applications continues et donc $f + g$ est continue.
(2) Si on considère

$$x \in X \longrightarrow (f(x), g(x)) \in \Lambda^2 \longrightarrow f(x)g(x) \in \Lambda$$

On a la composée de deux applications continues et doncfg est continue.
(3) Si on considère

$$x \in X \longrightarrow g(x) \in \Lambda \longrightarrow 1/g(x)$$

On a la composée de deux applications continues. De plus $f\dfrac{1}{g}$ continue donc f/g est continue.
(4) Si on considère

$$x \in X \longrightarrow f(x) \longrightarrow |f(x)|$$

On a la composée de deux applications continues et donc $|f|$ est continue. ■

Remarque 5.2 *L'ensemble $\mathcal{C}(X, \Lambda)$ des fonctions continues $X \longrightarrow \Lambda$ est une algèbre.*

Corollaire 5.3 *Soient f et g deux applications de X topologique dans Λ supposées continues en $x_0 \in X$, alors* $\inf(f, g)$ *et* $\sup(f, g)$ *sont continue en x_0.*

Démonstration.
• Nous avons $\inf(f, g) = \frac{1}{2}[f + g - |f - g|]$. Comme $f + g$ est continue et $|f - g|$ est continue, alors par composition, $\inf(f, g)$ est continue.
• Nous avons $\sup(f, g) = \frac{1}{2}[f + g + |f - g|]$. Comme $f + g$ est continue et $|f - g|$ est continue, alors par composition, $\sup(f, g)$ est continue. ■

Remarque 5.4 *Cela s'étend par récurrence à :* $\inf(f_1, \cdots, f_n)$ *et* $\sup(f_1, \cdots, f_n)$.

5-b Etude de E normé par $p_0(x) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Notons que p_0 est une norme (immédiat). Supposons que Λ^n soit normé par

$$p_0(x) = \|\xi\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |\xi_i|$$

où $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors on a le résultat.

Proposition 5.5 *E muni de p_0 est isomorphe à Λ^n.*

Démonstration.
L'application $f : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \longrightarrow \xi = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \Lambda^n$ est un isomorphisme algébrique de $E \longrightarrow \Lambda^n$. La norme $\|f(x)\| = \|\xi\| = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i| = p_0(x)$ est conservée. ■

Corollaire 5.6 *L'espace vectoriel normé (E, p_0) est complet et toute partie A de (E, p_0) est compacte si et seulement si A est fermée bornée.*
En particulier, $S(0,1)$ est fermée bornée, donc elle est compacte dans (E, p_0).

5-c Etude de E normé par p quelconque

Théorème 5.7 *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration.
Soit p une norme quelconque sur E. Montrons que p et p_0 sont équivalentes.
• Soit $x \in E$, x s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \ell_i x_i$ et on a

$$p(x) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| p(l_i) \leq p_0(x) \sum_{i=1}^{n} p\left(l_i\right) = bp_0(x)$$

ce qui implique $p \leq bp_0$.
• p est continue sur (E, p_0). En effet, pour x et $x_0 \in E$, on a

$$|p(x) - p(x_0)| \leq p(x - x_0) \leq bp_0(x - x_0)$$

ce qui donne pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \dfrac{\varepsilon}{b}$ tel que $p_0(x - x_0) < \varepsilon/b \Longrightarrow |p(x) - p\left(x_0\right)| < \varepsilon$. Par conséquent p est continue.
• p_0/p est définie continue sur $S(0,1)$ de (E, p_0) car comme p_0 est continue et p' est continue, alors p_0/p est continue sur (E', p_0) avec $E' = E - \{0\}$ donc sur $S(0,1)$ de (E, p_0). Or $S(0,1)$ est compacte donc p_0/p est borné c'est-à-dire $p_0/p \leq k$; ce qui

montre que $ap_0 \leq p$ (avec $a = \frac{1}{k}$) et donc on a l'équivalence $p \sim p_0$. ■

Remarque 5.8 *On démontre que sur un espace vectoriel de dimension finie, il existe une seule topologie $\mathcal{T}$ séparée telle que $(E, \mathcal{T})$ soit un espace vectoriel topologique.*
On peut considérer alors, par exemple, la topologie $\mathcal{T}$ définie par p_0.

Corollaire 5.9 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, alors*
(1) E est homéomorphe à Λ^n.
(2) E est complet.
(3) Si $A \subset E$, alors A est compacte si et seulement si A est fermée bornée.

Corollaire 5.10 *Si A est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel normé E quelconque (c'est-à-dire de dimension quelconque), alors A est fermé.*

Démonstration.
Si A est un sous-espace vectoriel de dimension finie, alors A est complet (car homéomorphe à Λ^n complet). Par ailleurs comme A est complet dans E métrique, alors A est fermé. ■

5-d Théorème de Riesz

On a vu que si E est de dimension finie, alors E est homéomorphe à Λ^n, or Λ^n est localement compact, donc E est localement compact. Mais on a également le résultat suivant, connu sous le théorème de Riesz [4].

Théorème 5.11 *Tout espace vectoriel normé E localement compact est de dimension finie.*

Démonstration.
Soit E un espace vectoriel normé localement compact, alors il existe K compact $\in v(0)$ et $B^f(0,r) \subset K$. Et donc $B^f(0,r)$ est compacte (car fermée dans K compact). L'homothétie étant un homéomorphisme, la boule $B = B^f(0,1) (= B^f(0, r.\frac{1}{r}))$ est compacte. Soit alors $\bigcup_{a \in B} B(a, 1/2) \supset B$. Comme B est compacte,

4. Marcel Riesz, Mathématicien hongrois, 1886-1969

il existe un sous-recouvrement fini par des boules centrées en $(a_i)_{i=1,n}$ c'est-à-dire $\bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, 1/2) \supset B$.
Soit alors A l'espace vectoriel engendré par $\{a_1, \cdots, a_n\}$, de dimension finie $\leq n$.
Montrons que $E = A$. Sinon il existerait $x \in E - A$, et puisque la dimension de A est finie dans E qui est un e.v.n. $\Longrightarrow$ A est fermé et $\delta = d(x, A) > 0$. Par conséquent il existe $a \in A$ tel que $\delta \leq d(x, a) = \|x - a\| \leq \frac{3}{2}\delta$. Considérons alors $y = \dfrac{x-a}{\|x-a\|}$.
Nous avons

$$\|y\| = 1 \in B \quad \Longrightarrow \quad y \in \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, 1/2)$$

donc il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $y \in B(a_i, 1/2)$ y s'écrit $y = a_i + z$ avec $\|z\| < 1/2$. Comme $a_i + z = \dfrac{x-a}{\|x-a\|}$, on a

$$x = a + \|x - a\|a_i + \|x - a\|z = a' + \|x - a\|z$$

($a' \in A$ car combinaison d'éléments de A). On a donc

$$\|x - a'\| = \|x - a\|\|z\| \leq \frac{3}{2}\delta\,\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\,\delta < \delta$$

d'où la contradiction car $\|x - a'\| > \delta$. Finalement $E = A$ et E est bien de dimension finie. ■

Ce théorème joue un rôle fondamental dans l'etude des opérateurs compacts.

Théorème 5.12 : *Généralisation*
Tout espace vectoriel topologique localement compact est de dimension finie.

Cette généralisation est admise.

6 Famille totales

Soit E un espace vectoriel normé sur $\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 6.1 *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de points de E est totale dans E si le sous-espace vectoriel X engendré par $(x_i)_{i\in I}$ est partout dense sur E $(\overline{X} = E)$.*

Exemple 6.2
1.) Si (b_i) est une base quelconque de E, alors $X = E$.
2.) Considérons $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ avec $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Alors

$$\left(1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\right)$$

est une famille totale dans E.

D'après le théorème de Weiertrass[5] classique, on a aussi
L'ensemble des polynômes $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, noté $\mathcal{P}([a,b],\mathbb{R})$, est partout dense dans E.

Nous allons voir une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une suite totale (c'est-à-dire d'une famille au plus dénombrable).

Proposition 6.3 *Dans un espace vectoriel normé E, il existe une suite (finie ou infinie) totale dans E si et seulement si E est séparable.*

Démonstration.
Condition nécessaire. Soit $(x_1, \cdots, x_n, \cdots)$ une suite totale dans E, c'est-à-dire que le sous-espace X engendré par $\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ est tel que $\overline{X} = E$.
• Soit $A_n = \{x = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i\}$ où $r_i \in \mathbb{Q}$ (si on est dans $\mathbb{R}$) ou $r_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (si on est dans $\mathbb{C}$).
• Soit $f : x = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i \in A_n \longrightarrow (r_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^n$.
On sait que $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ est dénombrable. Comme f est injective, alors A_n est au plus dénombrable, soit donc $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ qui est au plus dénombrable.
• Vérifions que $\overline{A} = E$. On va vérifier que $\overline{A} = X$ (comme $\overline{X} = E$ alors on aura $\overline{A} = E$). Soit $x \in X$, alors x s'écrit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$

5. Karl Theodor Weierstrass, Mathématicien allemand, 1815-1897

où $\lambda_i \in \Lambda$. Il existe une suite $r_i(p)$ (de rationnels) qui converge, quand $p \longrightarrow \infty$, vers λ_i (car $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$) pour tout $i = 1, \cdots, n$. Alors $a_p = \sum_{i=1}^{n} r_i(p)x_i$ est un point de A et $a_p \longrightarrow x$ car :

$$\begin{aligned} \|x - a_p\| &= \|\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - r_i(p)x_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - r_i(p)|.\|x_i\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quand $p \longrightarrow \infty$. Par conséquent $\overline{A} = X$ et donc $\overline{A} = E$ (car $\overline{X} = E$).

Condition suffisante. Si A est séparable, alors il existe $\{a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$ au plus dénombrable partout dense sur E et $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite totale sur E. Si on note A le sous-espace vectoriel engendré par les $(a_n)_{n\geq 1}$, alors A est évidemment partout dense sur E. ∎

Remarque 6.4 *La condition suffisante de ce résultat peut être améliorée par :*
Si un espace vectoriel normé E est séparable, alors il existe une suite totale algébriquement libre (c'est-à-dire formée de vecteurs linéairement indépendants).

Démonstration.

Soient $\{a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$ partout dense sur E et A le sous-espace vectoriel engendre par $\{a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$. Il existe une base $\subset \{a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$, soit $\{a_{n_1}, \cdots, a_{n_i}, \cdots\} \in A$, et la suite (a_{n_i}) est totale car le sous-espace vectoriel engendré par (a_{n_i}) est A et est partout dense sur E. ∎

7 Bases topologiques

Définition 7.1 *Une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est une base topologique de E si pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($x_n \in \Lambda$) unique telle que*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n b_n$$

Remarque 7.2 *Ne pas confondre avec une base algébrique car ici on a une combinaison linéaire infinie.*

Exemple 7.3
1.) Si la dimension de E est finie $= n$, alors $b_i = 0$ pour tout $i \geq n$.

2.) Soit

$$E = \ell^1 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\; telle\ que \;\; \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty\}$$

Alors ℓ^1 est un espace vectoriel sur Λ (c'est même un Banach) et $\|x\| = \sum^{\infty} |x_n|$. Soit alors la suite (b_n) définie par

$$b_n = \delta_{ni} = \begin{cases} 1 & si\ i = n \\ 0 & si\ i \neq n \end{cases}$$

Autrement dit b_n s'écrit $b_n = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ où on a 1 à la n-ième position. Alors (b_n) est une base topologique. En effet, D'une part $b_n \in \ell^1$ et $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n b_n$. D'autre part

$$x - \sum_{i=0}^{n} x_i b_i = (0, 0, \cdots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)$$

est tel que

$$\|x - \sum_{i=0}^{n} x_i b_i\| = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i| \longrightarrow 0 \;\; quand \;\; q \longrightarrow \infty$$

Proposition 7.4 *: Condition nécessaire d'existence*
S'il existe une base topologique $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, alors E est séparable.

Démonstration.
Dans ce cas $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite totale. Si $x \in E$, alors $x = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i b_i$ et ainsi $\sum_{i=0}^{n} x_i b_i$ appartient à un sous-espace vectoriel engendré par les b_i. ■

Remarque 7.5 *Problème.*
Tout espace de Banach séparable admet-il une base topologique ?

Chapitre 8

Applications linéaires Prolongement de formes linéaires

1 Applications linéaires

1-a Définition - Première caractérisation

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Commençons par rappeler quelques définitions et résultats.

Définition 1.1 *L'application $u : E \longrightarrow F$ est linéaire si*

$$\begin{array}{lcll} u(x+y) & = & u(x)+u(y) & , \ x,y \in E \\ u(\lambda x) & = & \lambda u(x) & , \ \lambda \in \Lambda \end{array}$$

Remarque 1.2 *Dans le cas particulier où $E = \Lambda$, alors pour tout λ, $u(\lambda.1) = \lambda u(1) = \lambda a$ où $a \in F$ et donc $u(x) = xa$ ($x \in E$) et alors u est uniformément continue car :*

$$\|u(x) - u(x')\| = \|(x-x')a\| \leq \|a\||x-x'|$$

Proposition 1.3 *Si u est une application linéaire $E \longrightarrow F$ et si $dimE = n$ fini, alors u est continue (uniformément) sur E.*

<u>*Démonstration.*</u>
Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Pour tout x, $x' \in E$, on a

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{et} \quad x' = \sum_{i=1}^{n} x'_i e_i$$

Prenons $\|x\| = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, alors

$$u(x) - u(x') = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i) u(e_i)$$

d'où

$$\|u(x) - u(x')\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x - x'_i|.\|u(e_i)\| \leq \|x - x'\|$$

$(\sum\limits_{i=1}^{n} \|u(e_i)\| = A.\|x - x'\|)$. Finalement $\eta = \varepsilon / A$ convient pour l'uniforme continuité. ■

Remarque 1.4 *Si E est de dimension infinie, alors il peut exister une application linéaire non continue.*
<u>*Contre-exemple.*</u> *Prenons $E = F = \{$fonctions indéfiniment dérivables : $[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}\}$ avec*

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|$$

Soit $u : f \in E \longrightarrow f' \in F = E$; Alors u est linéaire mais non continue en 0. En effet, soit $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, on a $\|f_n\| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$, donc $f_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$ dans E, mais $f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx$ et $\|f'_n\| = \sqrt{n} \not\rightarrow 0$ c'est-à-dire : $f'_n = u(f_n) \not\rightarrow u(0) = 0$

1-b Critère de continuité

Théorème 1.5 *Soit u une application linéaire : $E \longrightarrow F$. Il y a équivalence entre :*
(1) u est continue à l'origine.
(2) Il existe $M > 0$, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq M\|x\|$.
(3) u est uniformément continue sur E.

Démonstration.
(1) $\Longrightarrow$ (2)
Si u est continue en 0, alors pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|t\| \leq \eta \Longrightarrow \|u(t)\| \leq 1$. Soit $x \neq 0$ quelconque dans E, considérons $t = \dfrac{\eta}{\|x\|}.x$, alors
$\|t\| = \eta \leq \eta \Longrightarrow \|u(t)\| = \|\dfrac{\eta}{\|x\|}u(x)\| \leq 1$, c'est-à-dire $\|u(x)\| \leq \dfrac{1}{\eta}\|x\|$ (si $x = 0$ alors $\|u(0)\| = 0$ est toujours vrai).

(2) $\Longrightarrow$ (3)
Considérons $u(x) - u(x') = u(x - x')$, alors $\|u(x - x')\| \leq M\|x - x'\| \leq \varepsilon$. Si $\|x - x'\| \leq \varepsilon/M$ $(\eta = \varepsilon/M)$ d'où la continuité uniforme.
(3) $\Longrightarrow$ (1) : Evident. ■

Remarque 1.6
1.) Si u est une application linéaire $E \longrightarrow F$, alors u est continue en x_0 si et seulement si u est continue en tout point.
Démonstration.
Condition suffisante. *Evident.*
Condition nécessaire. *Si u est continue en x_0, alors u est continue en 0. On a*
$u(x) = u(x + x_0) - u(x_0) \longrightarrow 0$ *si* $x \longrightarrow 0$.
Donc $u(x) \longrightarrow u(0) = 0$ et d'après le théorème (1) $\Longrightarrow$ (3). ■
2.) Si u est linéaire $E \longrightarrow F$, ou bien u est continue en tout point ou bien u est discontinue en tout point.

Proposition 1.7 *Si p et p' sont deux normes sur E, alors p et p' sont équivalentes si et seulement si il existe a et $b > 0$ tels que*

$$ap \leq p' \leq bp$$

Démonstration.
$p \sim p'$ se traduit par

$$f : x \in (E,p) \longrightarrow x \in (E,p') \text{ continue}$$

et

$$f' : x \in (E,p') \longrightarrow x \in (E,p) \text{ continue}$$

or f et f' sont linéaires, donc
f est continue $\Rightarrow p'(x) \leq Mp(x)$.

f' est continue $\Rightarrow p(x) \leq M'p'(x)$.
D'où le résultat avec $b = M$ et $a = 1/M'$. ∎

2 Espace d'applications linéaires continues

2-a Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

Définition 2.1
(1) $\mathcal{L}(E, F)$ est, par définition, l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.
(2) $L(E, F)$ est, par définition, l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Si $E = F$, alors $\mathcal{L}(E, E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.
Si $F = \Lambda$, alors $\mathcal{L}(E, \Lambda)$ est noté E' et s'appelle dual topologique de E.
Si $F = \Lambda$, alors $L(E, \Lambda)$ est noté E^* et s'appelle dual algébrique de E.

Proposition 2.2 *$\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur Λ.*

Démonstration.
$\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{F}(E, F)$ qui est un espace vectoriel.
• Si f et g sont linéaires continues $E \longrightarrow F$, alors $f+g$ également car composée de :
$x \in E \longrightarrow (f(x), g(x)) \in FxF \longrightarrow f(x) + g(x) \in F$ qui sont continues.
• Démarche analogue pour λf. ∎

2-b Espace normé $\mathcal{L}(E, F)$

Soient

$$\overline{B} = \{x \in E \ / \ \|x\| \leq 1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \{x \in E \ / \ \|x\| = 1\}$$

Proposition 2.3 *L'application*

$$u \in E \longrightarrow \|u\| = \sup_{x \in \overline{B}} \|u(x)\|$$

est une norme (dite norme usuelle) sur $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration.
Soient u et $v \in \mathcal{L}(E,F)$.
(i) Il existe $M > 0$, pour tout $x \in E$: $\|u(x)\| \leq M\|x\|$, il en résulte que $\|u\| \leq M$. On a donc bien $\|u\| \in \mathbb{R}_+$.
(ii) Si $\|u\| = 0$, on a $u(x) = 0\ \forall x \in \overline{B}$ et comme tout élément de E est de la forme λx avec $x \in \overline{B}$, on a aussi $u(x') = 0\ \forall x' \in E$ et donc $u = 0$.
(iii) $\|\lambda u(x)\| = |\lambda|\|u(x)\|$, d'où $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$.
(iv) On a, pour tout $x \in \overline{B}$, $\|u(x)+v(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq \|u\| + \|v\|$. Il en résulte que $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. ■

Remarque 2.4
1.) $\|u\|$ est le plus petit élément de l'ensemble

$$\{M \geq 0 \;/\; \forall x \in E \;:\; \|u(x)\| \leq M\|x\|\}$$

car d'après la définition de la borne supérieure, $\|u\|$est le plus petit élément de $\{M \geq 0 \;/\; \forall x \in \overline{B}\|u(x)\| \leq M\}$ et on vérifie immédiatement que ce dernier ensemble est égal à

$$\{M \geq 0 \;/\; \forall x \in E \;:\; \|u(x)\| \leq M\|u\|\}$$

2.) On a, en particulier, pour tout $x \in E$: $\|u(x)\| \leq \|u\|.\|x\|$. Cette inégalité est la meilleure majoration de $\|u(x)\|$ qui est valable pour tout x.
3.) S'il existe M tel que $\|u(x)\| \leq M\|x\|$, pour tout $x \in E$, alors on a

$$\|u\| \leq M$$

Proposition 2.5 *Si $E \neq \{0\}$, on a :*

$$\|u\| = \sup_{x \in E-\{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathcal{S}} \|u(x)\|$$

Cette proposition fournit une autre expression de $\|u\|$.

Démonstration.
• La première égalité résulte immédiatement de la proposition précédente et de la définition de la borne supérieure.
• la deuxième égalité se déduit aisément de l'invariance du rapport $\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ pour toute homothétie de centre 0. ■

Si $E = \{0\}$, le seul élément de $\mathcal{L}(E,F)$ est $u = 0$, donc $E - \{0\}$ et $\mathcal{S}$ sont vides. et on vérifie encore que $\|u\| = 0$ (car $= \sup \emptyset$ dans $\mathbb{R}_+$).

Exemple 2.6
1.) Si $E = \Lambda$, toute application est de la forme $u(x) = ax$ avec $a \in F$. Cela donne $\|u(x)\| = \|a\|.|x|$ et donc $\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \|a\|$ soit encore $\|u\| = \|a\|$.

2.) Si $E = \mathcal{C}([a,b],\Lambda)$ et $F = \Lambda$, alors si on considère l'application

$$u : f \in E \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$$

et $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. L'application u est linéaire continue. En effet,

$$|u(f)| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \|f\|(b-a)$$

d'où u est continue et $\|u\| \leq (b-a)$.

Si $f_0(x) = 1$ dans $[a,b]$, alors $\dfrac{|u(f_0)|}{\|f_0\|} = b-a$, et donc $\|u\| \geq b-a$ (car $\|u\| = \sup \dfrac{\|u(f)\|}{\|f\|}$). Finalement $\|u\| = b-a$.

Proposition 2.7 *: Espace $\mathcal{L}(\Lambda, F)$*

L'espace $\mathcal{L}(\Lambda, F)$ est isomorphe à F.

Démonstration.
Soit l'application $\varphi : u \in \mathcal{L}(\Lambda, F) \longrightarrow a \in F$ $(u(x) = ax)$. Alors φ est surjective et linéaire et on a $\|\varphi(u)\| = \|a\| = \|u\|$, et donc φ est une bijection linéaire de $\mathcal{L}(\Lambda, F) \longrightarrow F$. ■

Propriété 2.8 *Si F est complet, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est complet (même si E ne l'est pas).*

Démonstration.
• Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists p$, $\forall n, m \geq p$: $\|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$. Soit x fixé $\in E$, alors $\forall n, m \geq p$

$$\|u_n(x) - u_m(x)\| \leq \|u_n - u_m\|.\|x\| \leq \varepsilon\|x\|$$

Pour x fixé, $(u_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F complet, et donc $u_n(x)$ converge vers $v(x)$ (avec $v : E \longrightarrow F$).
• v est linéaire. En effet,
$v(x + y) = \lim u_n(x + y) = \lim u_n(x) + \lim u_n(y) = v(x) + v(y)$
$v(\lambda x) = \lim u_n(\lambda x) = \lambda \lim u_n(x) = \lambda v(x)$.
• v est continue. En effet,
$\lim\limits_{m \longrightarrow \infty} \|u_n(x) - u_m(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$. On fait tendre seulement m vers ∞, et pour tout $n \geq p$: $\|v(x) - u_n(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$, soit encore $\|(v - u_n)(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$. Or $(v - u_n)$ est linéaire, donc elle est continue (d'après l'inégalité). Comme u_n continue, alors $(v - u_n) + u_n = v$ est continue, donc $v \in \mathcal{L}(E, F)$.
• $\mathcal{L}(E, F)$ est complet. D'après l'inégalité précédente, on a, pour tout $n \geq p$: $\|v - u_n\| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n = v$. La suite de Cauchy (u_n) étant convergente dans $\mathcal{L}(E, F)$, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet. ■

Proposition 2.9 *Si E, F et G sont 3 espaces vectoriels normés sur Λ avec $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$ et $\|v \circ u\| \leq \|v\|.\|u\|$*

Démonstration.
• On sait que $v \circ u$ est linéaire.
• On a $\|v(u(x))\| \leq \|v\|\|u(x)\| \leq (\|v\|.\|u\|)\|x\| \Longrightarrow v \circ u$ est continue.
• $\|v \circ u\| \leq \|v\|.\|u\|$. ■

Soient E_1, E_2 et F des espaces vectoriels normés sur le même corps Λ. Soit $E = E_1 \times E_2$ et $x = (x_1, x_2) \in E$ avec $\|x\| = \sup\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$.

Proposition 2.10 *Espace $\mathcal{L}(E_1 \times E_2, F)$*
Soit $u \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2, F)$, alors il existe $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$, pour $i = 1, 2$, telle que, pour tout $x = (x_1, x_2)$, on a

$$u(x_1, x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2) \quad \textit{et} \quad \|u_i\| \leq \|u\| \ , \ \forall i = 1, 2$$

Ce résultat donne une décomposition en quelque sorte de l'application u.

Démonstration.
$(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$ donne $u(x_1, x_2) = u(x_1, 0) + u(0, x_2)$.
On pose alors
$u_1(x_1) = u(x_1, 0)$ et $u_2(x_2) = u(0, x_2)$.
Pour tout $i = 1, 2$, u_i est linéaire. D'autre part u_i est continue car $\|u_i(x_1)\| \leq \|u_i\| \|(x_1, 0)\| \leq \|u_i\|.\|x\|$. ■

Proposition 2.11 *Soit $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour $i = 1, 2$ et soit u l'application définie par*

$$u(x_1, x_2) = u_1(x_1) + u(x_2)$$

alors $u \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2, F)$ et $\|u\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|$.

Cette proposition représente une sorte de réciproque de la précédente.

Démonstration.
Il est évident que u est linéaire et continue. Et on a

$$\|u(x_1, x_2)\| \leq \|u_1\|.\|x_1\| + \|u_2\|.\|x_2\|$$

■

3 Dual topologique

Soit $E' = \mathcal{L}(E, \Lambda)$.

Remarque 3.1
1.) E' est toujours complet car Λ l'est (même si E ne l'est pas).
2.) E' est un sous-espace vectoriel de E^*.
3.) Si f est une application non identiquement nulle ($f \in E^* - \{0\}$), alors f est surjective.

Démonstration.
Il existe un $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Soit alors $f(x_0) = \lambda_0$. Si $\lambda \in \Lambda$, alors $f(\frac{\lambda}{\lambda_0} x_0) = \frac{\lambda}{\lambda_0} f(x_0) = \lambda$. ■

Proposition 3.2 *Si $f \in E^*$, alors f est continue si et seulement si $H = Ker f = f^{-1}(\{0\})$ est fermé.*

<u>*Démonstration.*</u>
Condition nécessaire. $\{0\}$ est fermé dans Λ et f est continue $E \longrightarrow \Lambda$, alors $f^{-1}(\{0\})$ est fermé.
Condition suffisante. Si $f \equiv 0$, c'est évident. Sinon soit $\varepsilon > 0$, d'après la 3ème remarque ci-dessus f surjective.
Il existe $a \in E$ tel que $f(a) = \varepsilon \neq 0$ et donc $a \notin H$, c'est-à-dire $a \in E - H$ ouvert (car H fermé par hypothèse) et donc il existe $B^f(a, n) \subset E - H$ (c'est-à-dire disjoint de H).
Vérifions alors que $\|x\| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$ (continuité à l'origine $\Longrightarrow$ continuité partout). Sinon il existe $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| \leq \eta$ et $|f(x_0)| > \varepsilon$. Soit alors $x = a - \dfrac{\varepsilon}{f(x_0)}.x_0$ ce qui donne

$$f(x) = f(a) - \frac{\varepsilon}{f(x_0)}.f(x_0) = \varepsilon - \varepsilon = 0$$

et donc $x \in H$. Or

$$\|x - a\| = \frac{\varepsilon}{|f(x_0)|}\|x_0\| \ \text{ et } \ \frac{\varepsilon}{|f(x_0)|} < 1 \Longrightarrow \|x - a\| \leq n$$

(car $\|x_0\| \leq n$). Par conséquent $x \in B^f(a, n)$, d'où la contradiction car $B^f(a, n) \cap H = \emptyset$. ■

Remarque 3.3 *La proposition est fausse si $\Lambda = F$.*
<u>*Contre-exemple.*</u> *Si $E = F = \{$ application indéfiniment dérivables $[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}\}$, avec $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.*
Soit l'application $u : f \longrightarrow f'$. Alors u est linéaire et $u^{-1}(\{0\}) = \{$fonctions constantes$\}$ est fermé (car c'est un sous-espaces vectoriel de dimension finie dans E) et on sait que u non continue.

4 Applications bilinéaires continues

Soient E_1, E_2 et F trois espaces vectoriels normés sur Λ et $E = E_1 \times E_2$ avec

$$\|x\|_E = \sup\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$$

Rappelons qu'une application $u : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ est dite bilinéaire si, pour tout $(x_1, x_2) \in E \times E$, les applications

$$t \longrightarrow u(t, x_2) \quad \text{et} \quad t \longrightarrow u(x_1, t)$$

sont linéaires.

Si $E_1 = E_2 = \Lambda$, prenons $x_1 = x_2 = 1$, alors

$$u(\lambda, \mu) = \lambda\mu u(1,1) = \lambda\mu a$$

où $a \in F$ et donc les applications bilinéaires sont de la forme $u(x_1, x_2) = ax_1x_2$.

Proposition 4.1 *Critère de continuité*
Soit u une application bilinéaire $E_1 \times E_2 \longrightarrow F$. Il y a équivalence entre
(1) u est continue au point $(0,0)$.
(2) Il existe $M > 0$, tel que $\forall (x_1, x_2) \in E$ $\|u(x_1, x_2)\| \leq M\|x_1\|.\|x_2\|$.
(3) u est continue sur $E = E_1 \times E_2$.

Démonstration.
(1) $\Longrightarrow$ (2) : Si u est continue au point $(0,0)$, alors pour tout ε (qu'on peut prendre égal à 1), il existe $\eta > 0$ tel que $\|t_1\| \leq \eta$ et $\|t_2\| \leq \eta$ alors $\|u(t_1, t_2)\| \leq 1$. Soit $x = (x_1, x_2)$ quelconque dans E, par homothétie on passe à (t_1, t_2) avec $t = (t_1, t_2) = (\frac{\eta}{\|x_1\|}x_1, \frac{\eta}{\|x_2\|}x_2)$. Cela donne

$$\|u(\frac{\eta}{\|x_1\|}x_1, \frac{\eta}{\|x_2\|}x_2)\| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \|u(x_1, x_2)\| \leq \frac{1}{\eta^2}\|x_1\|.\|x_2\|$$

donc (2) est vérifiée avec $M = 1/n^2$.

(2) $\Longrightarrow$(3) : Soit $a = (a_1, a_2) \in E$, on a

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) - u(a_1, a_2) &= u(x_1 - a_1, x_2) + u(a_1, x_2 - a_2) \\ &= u(x_1 - a_1, x_2 - a_2) + u(x_1 - a_1, a_2) \\ &\qquad + u(a_1, x_2 - a_2) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \|u(x_1, x_2) - u(a_1, a_2)\| &\leq \|u(x_1 - a_1, x_2 - a_2)\| \\ &\quad + \|u(x_1 - a_1, a_2)\| + \|u(a_1, x_2 - a_2)\| \end{aligned}$$

$$\leq M\left\{\|x - a\|^2 + \|x - a\|\|x_2\| + \|a_1\|\|x - a\|\right\}$$

Chaque terme tend vers 0 quand $x \to a$, donc u est continue.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : Evident. ■

Remarque 4.2
1.) Si l'application u est bilinéaire continue en un point (a_1, a_2) alors u est continue sur $E_1 \times E_2$ (car u continue en $(a_1, a_2) \Longrightarrow u$ continue en $(0,0)$ et donc en tout point d'après la proposition).
2.) Si l'application u est bilinéaire, alors u est uniformément continue si et seulement si $u \equiv 0$.
Contrairement aux applications linéaires, une application bilinéaire non identiquement nulle n'est jamais uniformément continue.

Démonstration.
Soit $(a_1, a_2) \in E$. Alors pour tout $n > 0$, on a

$$u(na_1 + \frac{a_1}{n}, na_2 + \frac{a_2}{n}) - u(na_1, na_2) = 2u(a_1, a_2) + \frac{1}{n^2}u(a_1, a_2)$$

S'il y avait continuité uniforme de u, alors , quand $n \longrightarrow \infty$, le premier membre tend vers 0 et le deuxième membre tend vers $2u(a_1, a_2)$ donc à la limite on aurait $u(a_1, a_2) = 0$. ■

5 Espaces d'applications bilinéaires continues

Soient E_1, E_2 et F trois espaces vectoriels normés.

5-a Espace vectoriel $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$

Définition 5.1 *On désigne par $\mathcal{L}$ $(E_1, E_2; F)$ l'ensemble des applications bilinéaires continues de $E_1 \times E_2$ dans F.*
On note $\mathcal{L}_2(E_1, F)$ l'ensemble $\mathcal{L}(E_1, E_1; F)$

Proposition 5.2 *$\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E_1, E_2, F)$*

Démonstration.
Il est clair que toute combinaison linéaire d'applications bilinéaires continues est bilinéaire continue. ■

5-b Espace normé $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$

Soit

$$\overline{B} = \{x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \ / \ \|x\| \leq 1\}$$

Proposition 5.3 *L'application* $u \longrightarrow \sup_{x \in \overline{B}} \|u(x)\|$ *est une norme sur* $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$

<u>*Démonstration.*</u>
La démonstration est analogue à celle du cas $\mathcal{L}(E, f)$. ■

Remarque 5.4 *On a, en particulier :* $\|u(x_1, x_2)\| \leq \|u\|.\|x_1\|\|x_2\|$ *et s'il existe* $M > 0$ *tel que* $\|u(x_1, x_2)\| \leq M\|x_1\|\|x_2\|$ *pour tout* $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$*, alors on peut affirmer que* $\|u\| \leq M$*.*

Proposition 5.5 $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ *est isomorphe à* $\mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$

<u>*Démonstration.*</u>
Soit $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ et $(x_1, x_2) \in E = E_1 \times E_2$.
• L'application $u_{x_1} : x_2 \in E_2 \longrightarrow u(x_1, x_2) \in F$ est linéaire continue, et donc $u_{x_1} \in \mathcal{L}(E_2, F)$. De plus, on a

$$\|u_{x_1}(x_2)\| = \|u(x_1, x_2)\| \leq \|u\|\|x_1\|\|x_2\|$$

qui est vraie pour tout x_2 (x_1 fixé). Ainsi

$$\|u_{x_1}\| \leq \|u\|\|x_1\|$$

• L'application $\tilde{u} : x_1 \in E_1 \longrightarrow u_{x_1} \in \mathcal{L}(E_2; F)$ est linéaire continue.
(i) $\tilde{u}(x_1) = u_{x_1}$ donne

$$\|\tilde{u}(x_1)\| = \|u_{x_1}\| \leq \|u\|\|x_1\|$$

donc $\tilde{u}$ est continue et $\|\tilde{u}\| \leq \|u\|$.
(ii) $\|u(x_1, x_2)\| = \|u_{x_1}(x_2)\| = \|\tilde{u}(x_1)(x_2)\| \leq \|\tilde{u}(x_1)\|\|x_2\| \leq \|\tilde{u}\|\|x_1\|\|x_2\|$. D'où $\|u\| \leq \|\tilde{u}\|$.
En résumé : $\|u\| = \|\tilde{u}\|$ et $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2, F))$.
• Soit $\varphi : u \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F) \longrightarrow \tilde{u} \in \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2, F))$.
1) φ est linéaire : immédiat.
2) φ est injective, car $\|\varphi(u)\| = \|\tilde{u}\| = \|u\|$. Donc φ conserve la norme, elle est injective.
3) φ est surjective. Soit $v \in \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$, on a $(\tilde{u}(x_1))(x_2) = u(x_1, x_2)$ donc on est conduit à poser pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $u(x_1, x_2) = (v(x_1))(x_2)$.

Ainsi u est bilinéaire continue car

$$\|u(x_1,x_2)\| \leq \|v(x_1)\|\|x_2\| \leq \|v\|\|x_1\|\|x_2\|$$

et donc $u \in \mathcal{L}(E_1,E_2;F)$. Vérifions que $\varphi(u) = v$.
Comme $\varphi(u) = \tilde{u}$ vérifie $(\tilde{u}(x_1))(x_2) = u(x_1,x_2) = (v(x_1)(x_2))$ pour tout x_1, x_2, on a $\tilde{u} = v$ c'est-à-dire $\varphi(u) = v$.
$u(x_1,x_2) = u_{x_1}(x_2) = (v(x_1))(x_2) \Longrightarrow u_{x_1} = v(x_1)$
or $u_{x_1} = \tilde{u}(x_1) = v(x_1)$ pour tout x_1, donc $\tilde{u} = v$ et ainsi φ est surjective. Donc φ est un isomorphisme. ■

On démontre de même que $\mathcal{L}(E_1,E_2;F)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_2;\mathcal{L}(E_1;F))$

Corollaire 5.6 *Si F complet, alors $\mathcal{L}(E_1,E_2;F)$ est complet.*

Démonstration.
Nous savons que $\mathcal{L}(E_1,E_2;F)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_1;\mathcal{L}(E_2;F)) = \mathcal{L}(E_1;G)$. Or F est complet, donc $G = \mathcal{L}(E_2;F)$ est complet, et donc $\mathcal{L}(E_1;G)$ est complet. $\mathcal{L}(E_1,E_2;F)$ isomorphe à $\mathcal{L}(E_1;G)$ complet est complet. ■

6 Eléments inversibles de $\mathcal{L}(E,F)$

6-a Composition des applications linéaires continues

Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés sur le même Λ.

Proposition 6.1 *Si $u \in \mathcal{L}(E;F)$ et $v \in \mathcal{L}(F;G)$ alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E;G)$ et $\|v \circ u\| \leq \|v\|.\|u\|$.*

Démonstration.
• La composée de deux applications linéaires continues est linéaire continue, c'est immédiat.
• D'après ce qui précède, pour tout $x \in E$, on a

$$\|v(u(x))\| \leq \|v\|.\|u(x)\| \leq \|v\|.\|u\|.\|x\|$$

et donc $\|v \circ u\| \leq \|v\|\|u\|$. ■

Corollaire 6.2 *L'application $f : (u,v) \in \mathcal{L}(E;F) \times \mathcal{L}(F;G) \longrightarrow v \circ u \in \mathcal{L}(E;G)$ est bilinéaire, continue et de norme ≤ 1.*

Démonstration.
Il est évident que f est bilinéaire. Elle est continue et de norme ≤ 1 car d'après la proposition $\|f(u,v)\| \leq \|u\|.\|v\|$, pour tout $u \in \mathcal{L}(E;F)$ et pour tout $v \in \mathcal{L}(F;G)$. ■

6-b Eléments inversibles de $\mathcal{L}(E,F)$

Définition 6.3 *On dit que $u \in \mathcal{L}(E;F)$ est inversible si u est une bijection de E sur F et si l'application réciproque u^{-1} est continue dans F. On dit que u^{-1} est l'inverse de u.*

On note que $\mathcal{H}(E;F)$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E;F)$.

Remarque 6.4
1.) u inversible $\Longleftrightarrow$ u est un homéomorphisme linéaire $E \longrightarrow F$.

2.) $\mathcal{H}(E;F)$ peut être vide.
C'est le cas si E et F sont de dimensions finies et distinctes. En effet, s'il existait $u \in \mathcal{H}(E;F)$, u serait en particulier un isomorphisme algébrique $E \longrightarrow F$ donc $dimF = dimE$.

3.) Si $\mathcal{H}(E;F) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{H}(F;E) \neq \emptyset$. En effet, si $u \in \mathcal{H}(E;F)$, il est évident que $u^{-1} \in \mathcal{H}(F;E)$.

4.) L'application $u \longrightarrow u^{-1}$ est une bijection de $\mathcal{H}(E;F)$ sur $\mathcal{H}(F;E)$. (si $u^{-1} = v \Longleftrightarrow u = v^{-1}$).

6-c Eléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$

On note I_X l'application identique de X.

Lemme 6.5 *Soient X et Y deux ensembles et f une application de X dans Y. S'il existe une application g de Y dans X telle que $f \circ g = I_Y$ et $g \circ f = I_X$, alors f est une bijection de X sur Y et $f^{-1} = g$.*

Démonstration.
La première égalité prouve que f est surjective. La deuxième égalité prouve que f est injective. ■

Lemme 6.6 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et posons, pour tout $n \geq 1$,*

$$u^0 = I_E \ , \ u^2 = u \circ u \ , \ \cdots \ , \ u^n = u^{n-1} \circ u$$

alors pour tout $n \geq 0$, on a

$$\|u^n\| \leq \|u\|^n$$

Démonstration.
- Evident si $n = 0$ car $\|I_E\| = 1$ et $\|I_E\|^0 = 1$.
- Supposons cela vrai jusqu'au rang $n - 1$.
- Alors, d'après ce qui précède, on a

$$\|u^n\| = \|u^{n-1} \circ u\| \leq \|u^{n-1}\|.\|u\| \leq \|u\|^{n-1}.\|u\| = \|u\|^n$$

■

6-d Série géométrique de $\mathcal{L}(E)$

$\mathcal{H}(E;E)$ n'est jamais vide car I est inversible. On va montrer que si E est complet, alors pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$ voisin de I, v est inversible.

Théorème 6.7 *Soit E un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\|u\| < 1$. Alors*

(1) La série géométrique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ est absolument convergente.

(2) $I - u$ est inversible et

$$(I-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$$

Démonstration.

(1) D'après de lemme précédent, $\|u^n\|$ est majoré par $\|u\|^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série (u^n) est absolument convergente, comme E est complet, alors elle est convergente.

(2) Posons $S_n = I + u + \cdots + u^n$

D'après (1), S_n converge dans $\mathcal{L}(E)$ vers S. Un calcul simple (analogue à celui de la somme des termes d'un programme géométrique) donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(I-u) \circ S_n = S_n \circ (I-u) = I - u^{n+1}$$

Puisque $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u^{n+1} = 0$ (évident), on en déduit, par passage à la limite,

$$(I-u)\circ S = S\circ(I-u) = I$$

Il en résulte d'après le premier lemme que $I-u$ est une bijection de E sur E et que

$$(I-u)^{-1} = S = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$$

Comme $(I-u)^{-1} = S$ est continue, alors $(I-u)$ est inversible. ■

Remarque 6.8 *Si $\|u\| = 1$, alors $I-u$ n'est pas nécessairement inversible (prendre $u = I$).*

Corollaire 6.9 *Sous les hypothèses du théorème précédent $I+u$ est inversible et on a*

$$(I+u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^u u^n$$

<u>*Démonstration.*</u>
Il suffit de remplacer u par $(-u)$ dans le théorème précédent. ■

6-e Etude de $\mathcal{H}(E;F)$

Proposition 6.10 *Si E est un espace de Banach, alors $\mathcal{H}(E;F)$ est ouvert. Plus précisément avec chacun de ses points a, $\mathcal{H}(E;F)$ contient la boule ouverte de centre a et de rayon $\dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$.*

<u>*Démonstration.*</u>
Soit $a \in \mathcal{H}(E;F)$ et h tel que $\|h\| < \dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$. Il suffit de prouver que $a+h$ est inversible. On a $a+h = a\circ(I_E + a^{-1}\circ h)$, posons alors $v = I_E + a^{-1}\circ h$. comme E est complet et que $\|a^{-1}\circ h\| \leq \|a^{-1}\|\|h\| < 1$ alors v est inversible d'après le corollaire précédent. Il en résulte que $a\circ v = a+h$ est inversible ; son inverse est $v^{-1}\circ a^{-1}$. ■

Remarque 6.11 *Si E et F sont des espaces de Banach, alors $\mathcal{H}(E;F)$ et $\mathcal{H}(F;E)$ sont tous deux ouverts.*
L'application $u \longrightarrow u^{-1}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{H}(E;F)$ sur $\mathcal{H}(F;E)$.

7 Prolongement de formes linéaires (cas réel)

7-a Préliminaires

Tout d'abord, rappelons que
i) Une semi-norme est une application : $E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions (N_2) et (N_3) d'une norme.
ii) Pour toute application $f \in E^*$, l'application $N : x \longrightarrow |f(x)|$ est une semi-norme.

Lemme 7.1 *Soient E un espace vectoriel réel et p une semi-norme sur E. Soit $F \neq \emptyset$ un sous-espace vectoriel de E et $f \in F^*$ telle que $|f(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in F$.*
Soit $F_1 = F \oplus \mathbb{R}x_1$ ($x_1 \in \complement_E F$), alors il existe $f_1 \in F_1^*$ telle que

$$f_1/F = f \quad et \quad |f_1(y)| \leq p(y) \ , \ \forall y \in F_1$$

<u>*Démonstration.*</u>
1.) Existence de f_1. Tout $y \in F_1$ s'écrit de manière unique sous la forme $y = x + \lambda x_1$ ($x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$).
Posons, pour tout $y \in F_1$, $f_1(y) = f(x) + \lambda\alpha$ où α est fixé quelconque dans $\mathbb{R}$.
• $f_1 \in F_1^*$.
• Si $y \in F$, d'après l'unicité de la décomposition de y, $x = y$ et $\lambda = 0$, ce qui donne $f_1(y) = f(y)$ c'est-à-dire $f_1/F = f$.
• Par contre l'inégalité $|f_1(y)| \leq p(y)$ n'est pas vérifiée pour tout α, puisqu'alors on doit avoir $|f_1(x_1)| \leq p(x_1)$ c'est-à-dire $|x| \leq p(x_1)$.

2.) Choix de α. Pour que $|f_1| \leq p$ soit satisfaite dans F_1 il faut et il suffit que

$$\forall x \in F \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \ |f_1(x + \lambda x_1)| \leq p(x + \lambda x_1)$$

Comme $\lambda x \in F$ $(\lambda \neq 0)$, alors $x/\lambda \in F$, alors cela équivaut à

$$\forall x \in F \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \ |f_1(\lambda x + \lambda x_1)| \leq p(\lambda x + \lambda x_1)$$

c'est-à-dire encore

$$\forall x \in F \ \ |f_1(x + x_1)| = |f(x) + \alpha| \leq p(x + x_1)$$

ou encore, pour tout $x \in F$,

$$-f(x) - p(x + x_1) \leq \alpha \leq -f(x) + p(x + x_1) \tag{7.1}$$

Tout revient donc à montrer qu'il existe α indépendant de x, vérifiant (7.1). Or pour tout x et $x' \in F$, on a $-f(x) - p(x + x_1) \leq -f(x') + p(x' + x_1)$, car d'après les propriétés d'une semi-norme et la majorition $|f| \leq p$ dans F

$$\begin{aligned} f(x' - x) &\leq p(x' - x) = p((x' + x_1) - (x + x_1)) \\ &\leq p(x' + x_1) + p(x + x_1) \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\sup_{x \in F} [-f(x) - p(x + x_1)] \leq \inf_{x' \in F} \left[-f(x') + p(x' + x_1)\right]$$

et donc tout α compris, au sens large, entre ces deux bornes possède la propriété requise. ■

Remarque 7.2
1.) Si $\Lambda = \mathbb{C}$, la deuxième partie concernant le choix de α est fausse ; mais la première partie est correcte.

2.) Si l'inégalité précédente est stricte, il existe une infinité de prolongements de f.

3.) On a montré que f pourrait être prolongée dans un sous-espace vectoriel $F_1 \supset F$ avec la même majoration pour $|f|$. On peut, en remplaçant F par F_1, prolonger de même f dans un sous-espace vectoriel $F_2 \supset F_1$, etc.
Si la dimension de E est infinie et celle de F finie, on n'obtiendra jamais, par ce procédé, une forme linéaire sur E. Pour cela on va utiliser le théorème de Zorn.

7-b Théorème de Hahn - Banach

Théorème 7.3 : *Théorème de Hahn-Banach*[1 2]
Soit E un espace vectoriel réel et p une semi-norme sur E. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $f \in F^*$ telle que, pour tout $x \in F$, on ait

$$|f(x)| \leq p(x)$$

Alors il existe $\hat{f} \in E^*$ telle que

$$\hat{f}/F = f \quad \text{et} \;\; |\hat{f}(x)| \leq p(x) \;\;, \; \forall x \in E$$

Démonstration.
Soit X l'ensemble des couples (G, g) où G est un sous-espace vectoriel de E contenant F et $g \in G^*$ prolonge f et vérifie $|g(x)| < p(x)$ dans G.
Posons $(G, g) \preceq (G', g')$ si $G \subset G'$ et g' prolonge g.
• On a une relation d'ordre sur X. Evident.
• $(X, \preceq)$ est ordonné inductif.

(i) Soit $Y = \{(G_i, g_i) \;/\; i \in I\}$. Y est une partie totalement ordonnée de X, montrons qu'elle est majorée. Soit $G = \bigcup_{i \in I} G_i$.
Si x et $x' \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors il existe i, $i' \in I$ tels que $x \in G_i$ et $x' \in G_{i'}$. Comme Y est totalement ordonné, on a (par exemple) $G_{i'} \subset G_i$ et donc x et $x' \in G_i$, et donc $x + \lambda x' \in G_i \subset G$ donc G est un sous-espace vectoriel de E qui contient F.

(ii) Soit $x \in G$, il existe au moins $i \in I$ tel que $x \in G_i$. Posons $g(x) = g_i(x)$; g est bien définie dans G car si $x \in G_i$ et $G_{i'}$ on a $g_i(x) = g_{i'}(x)$ (puisque l'une de ces deux fonctions prolonge l'autre).

(iii) g est linéaire car si x et $x' \in G$ et $\lambda \in \Lambda$, alors $x + \lambda x' \in G_i$ et donc

$$g(x + \lambda x') = g_i(x + \lambda x') = g_i(x) + \lambda g_i(x') = g(x) + \lambda g(x')$$

1. Hans Hahn, Mathématicien autrichien, 1879-1934
2. Stefan Banach, Mathématicien polonais, 1892-1945

Enfin il est évident que g prolonge f et que $|g(x)| \leq p(x)$, pour tout $x \in G$. (G, g) est le majorant cherché pour Y, qui est donc ordonné inductif.
Maintenant avec le théorème de Zorn, X possède au moins un élément maximal (H, h). Montrons que $(H, h) = (E, \hat{f})$.
. D'une part $H = E$. Sinon, d'après le lemme précédent, h serait prolongeable dans $H_1 \supset H$ avec $|h_1(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in H_1$. On aurait alors (H_1, h_1) et $(H, h) \preceq (H_1, h_1)$, c'est-à-dire que (H, h) ne serait plus maximal de X.
. Enfin $\hat{f} = h$ est le prolongement cherché de f. ∎

Remarque 7.4
1.) En remplaçant x par $-x$, on a
$(\forall x \in F)\ f(x) \leq p(x) \Longleftrightarrow (\forall x \in F) |f(x)| \leq p(x)$.
2.) Il peut exister une infinité de prolongements de f.

8 Théorème de Hahn Banach : Cas $\Lambda = \mathbb{C}$

Le théorème de Hahn - Banach s'étend sans modification aux espaces vectoriels complexes.

Lemme 8.1 *Soit $E_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent à E et soit $\varphi \in E^*_{\mathbb{R}}$, alors il existe une forme linéaire unique f sur E dont la partie réelle est égale à φ.*

Autrement dit une forme linéaire sur un espace vectoriel complexe est déterminée par sa partie réelle.

Démonstration.
• Si $f = \varphi + i\psi \in E^*$, alors pour tout $x \in E$, $f(x) = -if(ix) = \psi(ix) - i\varphi(ix)$ d'où $\psi(x) = -\varphi(ix)$ et donc f est unique.
• Posons alors $f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$, pour tout $x \in E$. φ étant $\mathbb{R}$-linéaire, il en est de même pour f. Comme $f(ix) = \varphi(ix) - i\varphi(-x) = i(\varphi(x) - i\varphi(ix)) = if(x)$. Il en résulte que f est $\mathbb{C}$-linéaire, donc $f \in E^*$. ∎

Théorème 8.2 *: Théorème de Hahn - Banach*
Soit E un espace vectoriel complexe, p une semi-norme sur E et F un sous-espace vectoriel de E et $f \in F^*$ telle que $|f(x)| \leq p(x)$ pour tout

$x \in F$. Alors il existe $\hat{f} \in E^*$ prolongeant f et telle que

$$|\hat{f}(x)| \leq p(x) \ \ , \forall x \in E$$

Démonstration.
Si φ est la partie réelle de f on a $\varphi \in F^*_{\mathbb{R}}$ et

$$|\varphi(x)| \leq |f(x)| \leq p(x) \ \ , \forall x \in F$$

D'après le théorème de Hahn - Banach (cas précédent où $\Lambda = \mathbb{R}$) appliqué à φ, il existe $\hat{\varphi} \in E^*_{\mathbb{R}}$ prolongeant φ et telle que $|\hat{\varphi}(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in E_{\mathbb{R}} = E$.
Le lemme précédent donne l'existence de $\hat{f} \in E^*$, de partie réelle égale à $\hat{\varphi}$.
La restriction à F de $\hat{f}$ et f sont des formes linéaires sur F, de parties réelles égales puisque $\hat{\varphi}/F = \varphi$; il en résulte que (d'après le lemme précédent) $\hat{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in F$.
Maintenant on a $|\hat{f}| \leq p$ dans E. En effet, soit $x \in E$; il existe α complexe, de module égal à 1, tel que $|\hat{f}(x)| = \alpha\hat{f}(x)$, d'où

$$|\hat{f}(x)| = \hat{f}(\alpha x)$$

(puisque $\hat{f}(\alpha x)$ réel). On a donc, pour tout $x \in E$,

$$|\hat{f}(x)| = \hat{f}(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x)$$

■

Remarque 8.3
1.) Si on supprime $|f| \leq p$, on voit aisément dans ce qui précède que toute forme linéaire sur un sous-espace vectoriel F de E est prolongeable dans E.
2.) Ce théorème est fondamental et très utile en analyse fonctionnelle. Il en existe en version géométrique.

9 Applications

Soit E un espace vectoriel sur $\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

9-a Prolongement des formes linéaires continues

Théorème 9.1 *Soit F un sous-espace vectoriel normé de E et $f \in F'$, alors il existe $\hat{f} \in E'$ telle que $\hat{f}/F = f$ et $\|\hat{f}\| = \|f\|$*

Ce résultat montre que l'on peut prolonger une forme linéaire continue en une forme linéaire continue de même norme.

Démonstration.
f étant linéaire et continue, on a

$$|f(x)| \leq \|f\|.\|x\| \ , \ \forall x \in F$$

Posons $p(x) = \|f\|.\|x\|$ pour tout $x \in E$. Alors p est une semi-norme (et même une norme si f est non identiquement nulle). Par le théorème de Hahn - Banach, il existe $\hat{f} \in E^*$ prolongeant f et telle que

$$|\hat{f}(x)| \leq p(x) = \|f\|.\|x\| \quad \text{dans } E$$

Ainsi $\hat{f}$ est donc continue et $\|\hat{f}\| \leq \|f\|$.
Comme $\hat{f}$ prolonge f, on a, d'après la définition de la norme d'une forme linéaire continue, l'inégalité $\|f\| \leq \|\hat{f}\|$. D'où l'égalité. ■

Remarque 9.2
1.) Ce théorème s'étend aux espaces vectoriels topologiques localement compacts en supprimant $\|\hat{f}\| = \|f\|$.

2.) Ce théorème ne se généralise pas, sans hypothèses supplémentaires fortes, au cas des applications linéaires continues ; il existe des contre-exemples.

9-b Séparation de E par des éléments de E'

Proposition 9.3 *Soit $x_0 \in E$ ($x_0 \neq 0$). Alors il existe $f \in E'$ telle que*

$$f(x_0) = \|x_0\| \quad et \quad \|f\| = 1$$

Démonstration.
Soit $F = \Lambda x_0$. Pour tout $x = \lambda x_0 \in F$, posons $\varphi(x) = \lambda\|x_0\|$.

Ainsi il est évident que $\varphi \in F^*$. Comme $|\varphi(x)| = \|x\|$ pour tout $x \in F$, on a $\varphi \in F'$ et $\|\varphi\| = 1$. Le théorème précédent implique l'existence de $f = \hat{\varphi} \in E'$ prolongeant φ et telle que $\|f\| = 1$; et on a $f(x_0) = \varphi(x_0) = \|x_0\|$. ■

Du théorème précédents découlent les corollaires suivants.

Corollaire 9.4
(1) Si $x_0 \in E$ et $x_0 \neq 0$, alors il existe $f \in E'$ telle que $f(x_0) \neq 0$.

(2) Si x_1 et x_2 sont distincts dans E, alors il existe $f \in E'$ telle que $f(x_1) \neq f(x_2)$. On dit que E' sépare les points de E.

(3) Pour que $E' \neq \{0\}$ il faut et il suffit que $E \neq \{0\}$.

Démonstration.
(1) Evident.
(2) Appliquer le 1) à $x_1 - x_2$.
(3) *Condition nécessaire.* Si $E = \{0\}$, il en serait évident de même pour E'.
Condition suffisante. Soit $x_0 \neq 0$ dans E, d'après le 1), il existe $f \in E'$ telle que $f(x_0) \neq 0$ donc E' est non réduit à $\{0\}$. ■

Remarque 9.5 *Il existe des espaces vectoriels topologiques non réduits à $\{0\}$ et dont le dual topologique est réduit à $\{0\}$. On montre que c'est le cas de $E = \mathcal{C}([0,1], \Lambda)$ muni de la distance*

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|^{1/2} dx$$

9-c Bidual de E

Définition 9.6 *On appelle bidual de E, le dual topologique, noté E'', de E'.*

Remarque 9.7 *E" est un espace de Banach.*

Lemme 9.8 *Soit x fixé dans E. L'application $\tilde{x} : x' \in E' \longrightarrow x'(x) \in \Lambda$ est un élément de E'' et on a $\|\tilde{x}\| = \|x\|$.*

Démonstration.
Il est évident que $\tilde{x}$ est linéaire.
Comme $|\tilde{x}(x')| \leq \|x\|.\|x'\|$ pour tout $x' \in E'$, alors $\tilde{x}$ est continue et on a $\|\tilde{x}\| \leq \|x\|$ et donc, en particulier, $\tilde{x} \in E''$.
Montrons que $\|x\| \leq \|\tilde{x}\|$. Si $x = 0$ on a $\tilde{x}(x') = x'(0) = 0$ pour tout $x' \in E'$, ce qui donne $\|\tilde{x}\| = \|x\| = 0$.
Si $x \neq 0$, d'après ce qui précède, il existe $x'_0 \in E'$ tel que $x'_0(x) = \|x\|$ et $\|x'_0\| = 1$. On a donc

$$|\tilde{x}(x'_0)| = |x'_0(x)| = \|x\|.\|x'_0\|$$

et par conséquent l'inégalité $\|\tilde{x}\| \leq \|x\|$. ∎

Théorème 9.9 *L'application $J : x \in E \longrightarrow \tilde{x} \in E$" est une isométrie linéaire de E dans E".*

Démonstration.
J est linéaire : immédiat.
Le lemme précédent donne $\|J(x)\| = \|\tilde{x}\| = \|x\|$ et donc J est une isométrie. ∎

Remarque 9.10
1.) Tout espace normé E est donc isomorphe à un sous-espace normé de E''.
2.) On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$. Alors E et E'' peuvent être identifiés par J en tant qu'espaces normés.
3.) Si la dimension de E est infinie, alors la dimension de E' est infinie.
Démonstration.
Condition nécessaire. Si la dimension E' était finie, alors la dimension de E'' le serait aussi. Comme E est, en particulier, algébriquement isomorphe à un sous-espace vectoriel de E'', on aurait que E est de dimension finie.
Condition suffisante. Evident, car si la dimension de E est finie, alors la dimension de E' serait finie. ∎

9-d Complétion d'un espace vectoriel normé

Définition 9.11 *On appelle complété d'espace normé E, tout couple $(\hat{E}, \varphi)$ où $\hat{E}$ est un espace de Banach et φ une isométrie linéaire de E sur un sous-espace normé de $\hat{E}$ partout dense sur $\hat{E}$*

Remarque 9.12
1.) On dit aussi que $\hat{E}$ est un complété de E.
2.) $\hat{E}$ est, en particulier, un espace métrique complété de E.

Théorème 9.13 *Tout espace normé E admet un complété $(\hat{E}, \varphi)$.*

<u>*Démonstration.*</u>
D'après le théorème précédent, $J(E)$ est linéairement isométrique à E. Comme $\overline{J(E)}$ est fermé dans E'' complet, c'est un espace de Banach et $J(E)$ est partout dense sur $\overline{J(E)}$. Par conséquent $\hat{E} = \overline{J(E)}$ et $\varphi = J$ conviennent comme choix. ■

9-e Approximation des éléments de E

Dans cette section, on va voir comment approcher un élément x_0 de E par les éléments d'un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 9.14 *Soit A un sous-espace vectoriel de E et $x_0 \in E$, alors pour que $x_0 \in \overline{A}$ il faut et il suffit que toute application $f \in E'$ qui est identiquement nulle dans A, s'annule aussi au point x_0.*

<u>*Démonstration.*</u>
Condition nécessaire. f étant continue, $f^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E qui contient A, donc $\overline{A}$ d'où $f(x_0) = 0$.

Condition suffisante. Sinon, soit $x_0 \notin \overline{A}$, alors il existe $B(x_0, r)$ disjointe de A. Soit alors $F = A \oplus \Lambda x_0$. Pour tout $x = a + \lambda x_0 \in F$, posons $\varphi(x) = \lambda$ ($\varphi : F \longrightarrow \Lambda$). On vérifie aussitôt que $\varphi \in F^*$ et que $\varphi(a) = 0$ pour tout $a \in A$.
• Si $x \in \complement_F A$, on a $\lambda \neq 0$ et $-\dfrac{a}{\lambda} \in A$, par conséquent

$$\|x\| = |\lambda|, \|\frac{a}{b} + x_0\| \geq |\lambda| r$$

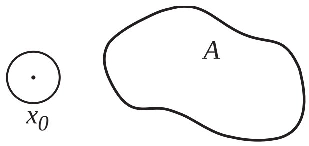
• Si $x \in A$, on a $\lambda = 0$, d'où encore $\|x\| \geq |\lambda| r$. Donc pour tout $x \in F$, on a

$$|\varphi(x)| = |\lambda| \leq \frac{1}{r}\|x\|$$

Il en résulte que $\varphi \in F'$. Le théorème précédent permet de prolonger φ par $\hat{\varphi} \in E'$ et on a

$$\hat{\varphi}(a) = \varphi(a) = 0 \ , \ \forall a \in A$$

mais $\hat{\varphi}(x_0) \neq 0$ car $\hat{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0) = 1$, d'où la contradiction. ■



9-f Application aux familles totales

Proposition 9.15 *Pour qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E soit totale, il faut et il suffit que toute fonction $f \in E'$ qui s'annule en tous les points x_i soit identiquement nulle dans E.*

Démonstration.
Soit X le sous-espace vectoriel engendré par les x_i. Pour que la famille $(x_i)_{i\in I}$ soit totale, il faut et il suffit, par définition, que $\overline{X} = E$, c'est-à-dire d'après la proposition précédente que toute fonction $f \in E'$ identiquement nulle dans X, le soit dans E. Or f étant linéaire, la propriété *f identiquement nulle dans X* est équivalente à $f(x_i) = 0$ *pour tout* $i \in I$. ■

Chapitre 9

Espaces de Hilbert

1 Notion de produit scalaire

Soit E un espace vectoriel sur Λ $(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Définition 1.1 *On appelle produit scalaire sur E, toute application $f : E \times E \longrightarrow \Lambda$ telle que, pour tout x et $y \in E$, on ait*

(1) L'application $x \longrightarrow f(x, y)$ est linéaire.
(2) $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$.
(3) $f(x, x) \geq 0$ (positivité).
(4) $f(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

<u>Notation</u> : $f(x, y)$ se note $(x|y)$ ou encore xy et s'appelle produit scalaire de x et de y.

Remarque 1.2
1.) On dit qu'une application $\varphi : E \longrightarrow F$ (espace vectoriel sur Λ) est semi-linéaire (ou antilinéaire) si, pour tout x et $y \in E$, et pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a

$$\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \overline{\lambda}\varphi(y) \tag{1.1}$$

Si $\Lambda = \mathbb{R}$, cette notion se réduit à celle d'application linéaire. Ainsi (1) et (2) $\Longrightarrow$ f est semi-linéaire par rapport à y.

2.) On appelle forme sesquilinéaire sur E, toute application $E \times E \longrightarrow \Lambda$ qui est linéaire par rapport à la première variable et semi-linéaire par rapport à la deuxième variable.

Si $\Lambda = \mathbb{R}$ alors cela équivaut à bilinéaire.
Par conséquent un produit scalaire est une forme sesquilinéaire sur E.

3.) Si f satisfait (1) et (2), on dit que f est une forme sesquilinéaire hermitienne (ou forme hermitienne).

Exemple 1.3
1.) Dans $E = \Lambda^n$,

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \tag{1.2}$$

définit un produit scalaire.

2.) Dans $E = \mathcal{C}(]a, b[; \Lambda)$,

$$(x|y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt \tag{1.3}$$

définit un produit scalaire.

Propriété 1.4
(1) Pour tout $x \in E$, alors $(x|0) = (0|x) = 0$.
(2) Pour tout x et $y \in E$, on a (Inégalité de Cauchy-Schwarz),

$$(x|y)^2 \leq (x|x)\,(y|y) \tag{1.4}$$

Démonstration.
(1) C'est immédiat, car cela est vrai pour toute application linéaire ou semi-linéaire.
(2) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a

$$0 \leq ((x + \lambda y)|(x + \lambda y)) = (x|x) + \lambda(y|x) + \overline{\lambda}(x|y) + \lambda\overline{\lambda}(y|y)$$

Posons, pour simplifier, $a = (x|x), b = (x|y); c = (y|y)$. On a donc pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$a + \lambda\bar{b} + \overline{\lambda}b + \lambda\overline{\lambda}c \geq 0$$

• Si $c \neq 0$, remplaçons λ par $-\dfrac{b}{c}$ dans l'inégalité, cela donne $a - \dfrac{bb}{c} \geq 0$ soit encore $\|b\|^2 \leq ac$ c'est-à-dire le résultat cherché.

• Si $c = 0$ on a $y = 0$ et donc $b = 0$ et l'inégalité se réduit à $0 \leq 0$. ∎

Remarque 1.5 *Il y a égalité si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.*

Remarque 1.6
1.) Si $E = \Lambda^n$, on retrouve

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \right) \tag{1.5}$$

2.) Si $E = \mathcal{C}(]a,b[,\Lambda)$, on retrouve

$$\left| \int_a^b x(t)\overline{y(t)} dt \right|^2 \leq \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right) \left(\int_a^b |y(t)|^2 dt \right) \tag{1.6}$$

2 Espace préhilbertien et espace hilbertien

Soit E un espace vectoriel sur Λ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Proposition 2.1 *L'application $x \longrightarrow \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E, dite norme associée au produit scalaire.*

Démonstration.
• L'application est définie car $(x|x) \geq 0$.
• (N_1) et (N_2) sont immédiats.
• (N_3) résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, car $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ équivaut à $((x + y)|(x + y)) \leq (x|x) + (y|y) + 2\sqrt{(x|x)(y|y)}$ (en élevant au carré), d'où, en développant le premier membre et en simplifiant,

$$(x|y) + (y|x) = 2\mathcal{R}(x|y) \leq 2\sqrt{(x|x)(y|y)}$$

et cette dernière inégalité est vérifiée car $\mathcal{R}(x|y) \leq |(x|y)|$. ∎

Remarque 2.2 *L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit plus simplement*

$$|(x|y)| \leq \|x\|.\|y\| \tag{2.1}$$

Définition 2.3
(1) On appelle espace préhilbertien, tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de la norme associée.
(2) On appelle espace hilbertien (ou espace de Hilbert[1]*) tout espace préhilbertien complet.*
(3) On appelle isomorphisme de deux espaces préhilbertiens E et F, tout isomorphisme algébrique φ de E sur F qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire, pour tout $x, y \in E$

$$(\varphi(x)|\varphi(y)) = (x|y)$$

Remarque 2.4
1.) un préhilbertien est donc un espace normé particulier (dont la norme peut-être associée à un produit scalaire).
2.) Deux préhilbertiens isomorphes sont, en particulier, deux espaces normés isomorphes, puisque pour tout $x \in E$, on a $\|\varphi(x)\|^2 = \|x\|$ (obtenue en faisant $x = y$).

Exemple 2.5
1.) Tout préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert (c'est le cas de Λ^n avec le produit scalaire usuel).

2.) $\mathcal{C}(]a, b[, \Lambda)$ avec le produit scalaire déjà défini est un préhilbertien mais non un espace de Hilbert (on a vu qu'il n'était pas complet).

3.) Si on considère l'espace

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_n) \in \Lambda^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty \right\}$$

muni du produit scalaire

$$(x|y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

(on a bien $\|x_n \overline{y_n}\| \leq \frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_n\|^2$) et de la norme associée

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2$$

1. David Hilbert, Mathématicien allemand, 1862-1943

alors cet espace est complet. Donc ℓ^2 est un espace de Hilbert.

3 Identités remarquables dans un préhilbertien

3-a Expression du produit scalaire

Nous allons donner l'expression du produit scalaire en fonction de la norme associée.

Proposition 3.1
(1) Si $\Lambda = \mathbb{R}$, alors

$$4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \tag{3.1}$$

(2) Si $\Lambda = \mathbb{C}$, alors on a

$$4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) \tag{3.2}$$

Démonstration.
En effet, il suffit de développer le second membre et d'utiliser la définition de $\|.\|$. ∎

Remarque 3.2 *Ce résultat montre que le produit scalaire est déterminé par la norme.*

3-b Identité du parallélogramme

Proposition 3.3 *Pour tout x et $y \in E$, on a*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{3.3}$$

Démonstration.
En effet, on a $((x+y)|(x+y)) + ((x-y)|(x-y)) = 2(x|x) + 2(y|y)$. ∎

Remarque 3.4
1.) Dans de cas $E = \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$), cette identité exprime que la somme des carrés des longueurs des côtés d'un parallélogramme est égal à la somme des carrés des longueurs des diagonales (résultat de géométrie classique).

2.) Si une norme ne vérifie pas l'identité du parallélogramme, on montre qu'elle n'est associée à aucun produit scalaire. C'est le cas dans Λ^n de $\|x\| = \sup\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Il suffit alors de considérer $x = (1,0,0,\cdots,0)$ et $y = (0,1,0,\cdots,0)$.

3.) Si une norme vérifie l'identité du parallélogramme, on montre qu'elle est associée à un produit scalaire. Il suffit, pour cela, de montrer que les égalités de la proposition définissent un produit scalaire (ce n'est pas très simple).

3-c Identité de la médiane

Proposition 3.5 *Soient a, b et $c \in E$, et $m = \dfrac{1}{2}(b+c)$ et d la métrique associée à la norme, on a alors*

$$d^2(a,b) + d^2(a,c) = \frac{1}{2}d^2(b,c) + 2d^2(a,m) \tag{3.4}$$

<u>*Démonstration.*</u>
Il suffit d'utiliser l'identité du parallélogramme avec $x = b - a$ et $y = c - a$. ■

Remarque 3.6 *Si $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on retrouve l'expression classique de la longueur d'une médiane en fonction des longueurs des côtés.*

3-d Continuité du produit scalaire

Proposition 3.7 *L'application $f : (x_1, x_2) \in E \times E \longrightarrow (x_1|x_2)$ est continue sur $E \times E$.*

<u>*Démonstration.*</u>
L'inégalité de Cauchy - Schwarz donne, pour tout x_1 et $x_2 \in E$, $|f(x_1,x_2)| \leq \|x_1\|.\|x_2\|$. Ceci est une condition suffisante de continuité si f est bilinéaire ($\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cela reste valable). ■

4 Théorème de projection

Soit E un espace préhilbertien.

4-a Notion d'orthogonalité

Définition 4.1
(1) On dit que deux éléments x et y de E sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul ; on écrit alors $x \perp y$.
(2) On dit que l'élément x de E est orthogonal à une partie A de E si x est orthogonal à tous les éléments de A ; on écrit $x \perp A$.
(3) On dit que deux parties A et B de E sont orthogonales si, tout élément de A est orthogonal à tout élément de B ; on écrit $A \perp B$.

Remarque 4.2
1.) Si $(x \perp y)$, alors $(y \perp x)$.
2.) Si $(A \perp B)$, alors $(B \perp A)$.
3.) On a $(x \perp x)$ si et seulement si $x = 0$.

4-b Théorème de Pythagore

Théorème 4.3 *Théorème de Pythagore*[2]
Si $x \perp y$, alors on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \tag{4.1}$$

Démonstration.
Il suffit de développer $((x + y)|(x + y))$ et d'utiliser $(x|y) = (y|x) = 0$. ∎

Remarque 4.4
1.) Dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ on retrouve le théorème de Pythagore exprimant la longueur de l'hypothénuse d'un triangle rectangle en fonction des côtés.
2.) Généralisation. Si les éléments $x_1, \cdots, x_n$ sont orthogonales deux à deux, alors on a

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \tag{4.2}$$

Démonstration.
La démonstration se fait par récurrence sur n. ∎

2. Pythagore, Mathématicien grec, fin du 6è siècle avant J.-C

4-c Théorème de projection

Nous allons montrer un théorème caractérisant la projection d'un élément $x \in E$ sur une partie A de E.

Définition 4.5 *On dit que $\alpha \in A$ est une projection de x sur A si $d(x,\alpha) = d(x,A)$.*
On note $\alpha = P_A(x)$ (projection sur A de x).

Remarque 4.6
1.) On a vu que si A est compact, pour tout $x \in E$, x admet une projection sur A. Il peut en exister plusieurs et même une infinité (car du cercle et son centre).

2.) Si A est seulement fermé, il est possible qu'un point n'ait aucune projection sur A. A titre d'exemple, considérer
$E = \ell_2$, $x = 0$ et $A = \{a_n = (1 + \frac{1}{n})e_n\ ,\ n \geq 1\}$ où $e_n = (\delta_{n,i})_{i \in \mathbb{N}^*}$.
Dans ce cas, A n'a pas de point d'accumulation dans E (car la distance de deux éléments de A est > 1), et donc A est fermé et, pour tout n, on a

$$d(x, a_n) = 1 + \frac{1}{n} \neq d(x, A) = \inf_{n \geq 1} d(x, a_n) = 1$$

Théorème 4.7 *: Théorème de projection*
Soit A une partie non vide convexe et complète d'un espace préhilbertien E. Alors
(1) Tout $x \in E$ admet une projection unique α sur A.
(2) L'application $P_A : x \longrightarrow \alpha$ est continue dans E.

Démonstration.
(1) Soit $\delta = d(x, A)$. Par définition de δ, il existe une suite $(a_n) \subset A$ telle que

$$\delta \leq d(x, a_n) \leq \delta + \frac{1}{n} \quad (n \geq 1)$$

On a $\lim_{n \longrightarrow \infty} d(x, a_n) = \delta$ mais cela ne prouve pas que (a_n) est convergente. L'identité de la médiane donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d^2(a_m, a_n) = 2d^2(x, a_m) + 2d^2(x, a_n) - 4d^2(x, \frac{a_m + a_n}{2})$$

Comme A est convexe alors $(a_n + a_m)/2 \in A$ et donc

$$d^2(a_m, a_n) \leq 2d^2(x, a_m) + 2d^2(x, a_n) - 4\delta^2$$

Le deuxième membre tend vers 0 quand $m, n \longrightarrow \infty$, donc (a_n) est une suite de Cauchy dans A complet, elle est convergente vers $\alpha \in A$.

Montrons que α est une projection sur A. Soit β une projection quelconque de x sur A. Considérons la suite (a'_n) telle que $a'_{2n} = \alpha$ et $a'_{2n+1} = \beta$. Cette suite, comme (a_n), vérifie

$$\delta \leq d(x, a'_n) \leq \delta + \frac{1}{n}$$

puisque $d(x, a'_n) = \delta$ pour tout n. D'après la première partie de la démonstration, (a'_n) est convergente donc

$$\alpha = \lim_{n \longrightarrow \infty} a'_{2n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} a'_{2n+1} = \beta$$

et donc la projection est unique.

(2) Soient x et $x' \in E$ et $\alpha = P_A(x)$, $\alpha' = P_A(x')$. Appliquons l'identité de la médiane au triangle x', α', α $(m = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha'))$. On a

$$\frac{1}{2}d^2(\alpha, \alpha') = d^2(x', \alpha) + d^2(x', \alpha') - 2d^2(x', m)$$

Comme $d(x', m) \geq d(x', A)$ (car $m \in A$ convexe), on a

$$\frac{1}{2}d^2(\alpha, x') \leq d^2(x', \alpha) - d^2(x', A)$$

Or $d(x', \alpha) \leq d(x', x) + d(x, \alpha)$ d'où

$$\frac{1}{2}d^2(\alpha, \alpha') \leq \left[d(x, x') + d(x, A)\right]^2 - d^2(x', A)$$

D'après la continuité de la distance d'un point à A, le deuxième membre tend vers 0 si $x' \longrightarrow x$, donc $d(\alpha, \alpha')$ aussi, c'est-à-dire encore

$$\lim_{x' \longrightarrow x} P_A(x') = P_A(x)$$

et donc P_A est continue en x. ■

Remarque 4.8
1.) Ce théorème s'applique aux cas où
(i) A est une partie convexe fermée d'un espace de Hilbert.
(ii) A est un sous-espace de Banach d'un préhilbetien.
(iii) A est un sous-espace vectoriel fermé d'un hilbertien.

2.) On peut montrer, par majoration plus précise, que

$$\|P_A(x') - P_A(x)\| \leq \|x' - x\|$$

3.) On appelle retraction d'un espace topologique X sur $A \subset X$, toute application continue f de X sur A, telle que $f/A = I_A$. Donc P_A est une rétraction de E sur A.

4-d Projection sur un sous-espace de Banach

Théorème 4.9 *Soit A un sous-espace de Banach de E préhilbertien. Alors*
(1) Si $\alpha = P_A(x)$, on a $(x - \alpha) \perp A$.
(2) x s'écrit de manière unique sous la forme $a + y$, où $a \in A$ et $y \perp A$.
(3) P_A est linéaire, continue et de norme ≤ 1 (égale à 1 si $A \neq \{0\}$).

Démonstration.
(1) Soit $a \in A$ et posons $y = x - \alpha$. Montrons que $(y|a) = 0$. A étant un espace vectoriel, $\alpha + \lambda a \in A$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, donc

$$\|x - \alpha - \lambda a\|^2 \geq \|x - \alpha\|^2$$

c'est-à-dire $\|y - \lambda a\|^2 \geq \|y\|^2$. En développant et en simplifiant le premier membre, on a

$$-\lambda\overline{(y|a)} - \overline{\lambda}(y|a) + \lambda^2\|a\|^2 \geq 0$$

Posons $\lambda = t(y|a)$ où $t > 0$, on a alors pour tout $t > 0$

$$-2t|(y|a)|^2 + t^2|(y|a)|^2 \; \|a\|^2 \geq 0$$

En simplifiant par t et en faisant tendre t vers 0, on a

$$-2|(y|a)|^2 \geq 0 \;\text{ d'où }\; (y|a) = 0$$

(2) On a : $x = \alpha + (x - \alpha)$ où $\alpha \in A$ et $(x - \alpha) \perp A$. Il suffit donc de poser $a = \alpha$ et $y = x - \alpha$.
La décomposition est unique. En effet, soit $a' \in A$ et $y' \perp A$ tels que $x = a' + y'$, on a alors $a + y = a' + y'$ et donc $a - a' = y' - y$ or $y \perp A$ et $y' \perp A \Longrightarrow (y' - y) \perp A$, en particulier $(y' - y) \perp (a - a')$, soit encore $(y' - y) \perp (y' - y)$, par conséquent $y' = y$ et donc $a = a'$.

(3) La linéarité de P_A résulte de (2). On a $(x - \alpha) \perp \alpha$, et par application du théorème de Pythagore, on a

$$\|x - \alpha\|^2 + \|\alpha\|^2 = \|x\|^2$$

d'où $\|\alpha\| \leq \|x\|$, c'est-à-dire $\|P_A(x)\| \leq \|x\|$ donc P_A est continue et de norme ≤ 1.
Si $A \neq \{0\}$, alors il existe $a \neq 0$ dans A et on a $\|P_A(a)\| = \|a\|$ ce qui donne $\|P_A\| \geq 1$. Par conséquent si $A \neq \{0\}$ on a $\|P_A\| = 1$. ■

Remarque 4.10 *L'ensemble des éléments orthogonaux à A ($\subset E$) est un sous-espace vectoriel de E, appelé orthogonal de A et noté $A^\perp$. La propriété (2) du théorème s'écrit alors*

$$E = A \oplus A^\perp$$

Corollaire 4.11 *Si A et un sous-espace de Banach de E préhilbertien avec $A \neq E$, alors il existe un élément x_0 non nul de E orthogonal à A.*

Démonstration.
Soient $x \in \complement_E A$ et $\alpha = P_A(x)$. Posons $x_0 = x - \alpha$, on a bien $x_0 \neq 0$ sinon $x = \alpha \in A$ et x_0 est orthogonal à A, d'après le théorème précédent. ■

5 Dual topologique d'un Hilbert

Remarque 5.1 *Si $H = \mathbb{R}^n$, on sait que toute fonction $f \in H'$ est telle que*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = (x|a)$$

On va montrer que ce résultat est valable dans le cas d'un espace de Hilbert H quelconque.

Proposition 5.2 *Soit H un espace de Hilbert et soit $a \in H$. L'application $f_a : x \longrightarrow f_a(x) = (x|a)$ est une forme linéaire continue dont la norme est égale à $\|a\|$.*

<u>*Démonstration.*</u>
• Il est évident que f_a est linéaire.
• L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, pour tout $x \in H$,

$$|f_a(x)| \leq \|a\|.\|x\|$$

donc $f_a \in H'$ et $\|f_a\| \leq \|a\|$. Comme $|f_a(a)| = (a|a) = \|a\|.\|a\|$ on a aussi $\|f_a\| \geq \|a\|$ et donc $\|f_a\| = \|a\|$. ∎

Remarque 5.3
1.) Ce résultat reste vrai si H est seulement un espace préhilbertien.
2.) Ce résultat admet une sorte de réciproque donnée dans la proposition qui suit.

Proposition 5.4 *Soit $f \in H$, alors il existe $a \in H$ tel que $f = f_a$.*

<u>*Démonstration.*</u>
• Si f est identiquement nulle, il suffit de prendre $a = 0$, cela convient.
• Si f est non identiquement nulle, alors $kerf = A$ est $\neq H$; comme f est continue ,A est fermé dans H complet et donc A est un sous-espace de Banach de H. D'après le corollaire précédent, il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \neq 0$ et $x_0 \perp A$. Comme $x_0 \notin A$, $f(x_0) \neq 0$ et on peut écrire

$$x = \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 + \left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 \right) = \lambda x_0 + y$$

où $y \in A$ et $\lambda \in \Lambda$. On en déduit que $f(x) = \lambda f(x_0)$ et $(x|x_0) = \lambda \|x_0\|^2$, d'où

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{\|x_0\|^2}(x|x_0) = (x|a)$$

avec $a = \dfrac{f(x_0)}{\|x_0\|^2} x_0$. ∎

Proposition 5.5 *Si H est un préhilbertien alors l'application $\varphi : a \in H \longrightarrow f_a \in H'$ est une isométrie semi-linéaire de H sur H'.*

Démonstration.
φ est évidemment semi-linéaire. Elle est surjective d'après la réciproque précédente. Et on a $\|\varphi(a)\| = \|f_a\| = \|a\|$, d'après la proposition précédente. ■

Remarque 5.6
1.) Si $\Lambda = \mathbb{R}$, alors H et H' sont des espaces normés isomorphes.

2.) φ étant injective, l'élément a de la réciproque est unique.

3.) Si E est un préhilbertien non complet, il existe des formes linéaires continues qui ne sont pas de la forme $x \longrightarrow (x|a)$. Car sinon la proposition resterait valable et E, isométrique à E' complet, serait complet.

6 Familles orthogonales

Soit E un espace préhilbetien.

6-a Généralités

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.

Définition 6.1
(1) On dit que $(a_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale (ou un système orthogonal) si les (a_i) sont tous non nuls et deux à deux orthogonaux.
(2) On dit que (a_i) est une famille orthonormale (ou un système orthonormal) si elle est orthogonale et si, pour tout $i \in I$, on a $\|a_i\| = 1$.

Remarque 6.2
1.) On peut normaliser une famille orthogonale en divisant chaque a_i par sa norme.
2.) Toute famille orthogonale $(a_i)_{i\in I}$ est algébriquement libre.
Démonstration.
Soit $\sum_{i\in J} \lambda_i a_i = 0$ où J est fini $\subset I$. En effectuant le produit scalaire du premier membre par a_j, $j \in J$, on obtient $\lambda_j(a_j|a_j) = 0$ et donc $\lambda_j = 0$. ■

Exemple 6.3
1.) Dans $E = \ell^2$*, soit* $e_n = (\delta n, i)_{i \in \mathbb{N}}$*, alors* (e_n) *est une famille orthogonale.*

2.) Soit $E = \mathcal{C}([-\pi, +\pi], \mathbb{C})$ *muni du produit scalaire*

$$(x|y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x(t)\overline{y(t)}dt$$

La famille $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ *est orthonormale.*

3.) Soit $E = \mathcal{C}([-\pi, +\pi], \mathbb{R})$ *muni du produit scalaire*

$$(x|y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x(t)y(t)dt \tag{6.1}$$

Alors la famille $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \cdots, \cos nt, \sin nt, \cdots)$ *est orthonormale.*

6-b Séries de Fourier d'un élément de E

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale d'un espace préhilbertien E.

Définition 6.4 *On appelle série de Fourier*[3] *de* $x \in E$*, relativement à* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$*, la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x|a_n)a_n \tag{6.2}$$

Les nombres $(x|a_n)$ *sont appelés coefficients de Fourier de* x*.*

Remarque 6.5 *Rien ne prouve que la série de Fourier de* x *est convergente, ni même, quand elle est convergente, que sa somme est* x*.*

Exemple 6.6 *Si* E *est l'espace vectoriel des applications continues* 2π*-périodiques* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, avec le produit scalaire defini en* (6.1) *ci-dessus, alors la série de Fourier de* x *peut s'écrire*

$$\frac{\alpha_0}{2} + \{\alpha_1 \cos t + \beta_1 \sin t\} + \cdots + \{\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt\} + \cdots$$

3. Jean-Baptiste Fourier, dit Joseph Fourier, Mathématicien français, 1768-1830

où

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x(t)\cos ntdt \quad , \quad n \geq 0$$

et

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x(t)\sin ntdt \quad , \quad n \geq 1$$

6-c Inégalité de Bessel

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite orthonormale d'un espace préhilbertien E.

Lemme 6.7 *Si J est fini $\subset \mathbb{N}$, on a*

$$\left(\left\{\sum_{i\in J}\lambda_i a_i\right\} \mid \left\{\sum_{i\in J}\mu_i a_i\right\}\right) = \sum_{i\in J}\lambda_i\overline{\mu_i}$$

Démonstration.
Il suffit de développer. ∎

Proposition 6.8 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans E préhilbertien, alors on a, pour tout $x \in E$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(x|a_n)|^2 \leq \|x\|^2 \tag{6.3}$$

C'est l'inégalité de Bessel[4].

Démonstration.
D'après le lemme précédent, on a

$$\left((x - \sum_{n=0}^{p}(x|a_n)a_n)|(x - \sum_{n=0}^{p}(x|a_n)a_n)\right) = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{p}|(x|a_n)|^2$$

Le premier membre étant ≥ 0, on en déduit pour tout $p \geq 0$ $\sum_{0}^{P}|(x|a_n)|^2 \leq \|x\|^2$ d'où la convergence de la série de terme général $|(x|a_n)|^2$ et l'inégalité de Bessel. ∎

4. Friedrich Wilhelm Bessel, Mathématicien allemand, 1784-1846

Remarque 6.9 *On en déduit, en particulier, que* $\lim_{n\longrightarrow 0}(x|a_n) = 0$ *(les coefficients de Fourier tendent vers* 0 *quand* $n \longrightarrow \infty$*).*
C'est le cas donc de $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} x(t)\cos ntdt$ *et de* $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} x(t)\sin ntdt$

6-d Cas d'un Hilbert

Proposition 6.10 *Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est orthonormale dans un espace de Hilbert* H*, alors pour tout* $x \in H$*, la série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x|a_n)a_n$ *est convergente.*

Démonstration.
Posons $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(x|a_i)a_i$. Alors pour tout $p \geq 1$, on a

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+p} |(x|a_i)|^2$$

Soit $\varepsilon > 0$, la série de terme général $|(x|a_i)|^2$ est convergente, donc il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $p \geq 1$, on ait

$\displaystyle\sum_{i=n+1}^{n+p} |(x|a_i)|^2 \leq \varepsilon^2 \Longrightarrow \|S_{n+p} - S_n\| \leq \varepsilon$. Donc (S_n) est une suite de Cauchy dans H complet, elle est convergent. ■

7 Bases orthonormales

Définition 7.1 *On dit que la famille* $(a_i)_{i\in I}$ *d'éléments d'un espace pré-hilbertiens* E *est une base orthonormale de* E*, si elle est orthonormale et totale.*

Exemple 7.2 *La suite* (e_n) *définie précédemment est une base orthonormale de* ℓ_2*. On sait déjà qu'elle est orthonormale. Elle est également totale (chapitre e.v.n.).*

Remarque 7.3 *Une base orthonormale n'est pas nécessairement une base algébrique.*

7-a Orthonormalisation de Schmidt

Proposition 7.4 *Soient (a_n) une suite (finie ou infinie) algébriquement libre d'éléments de E préhilbertien, A le sous-espace vectoriel engendré par les (a_n) et pour tout n soit A_n le sous-espace vectoriel engendré par $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$.*
Alors il existe une suite orthonormale $\{b_n\}$ telle que, pour tout n, $b_n \in A_n$ et dont le sous-espace vectoriel engendré est égal à A.

Démonstration.
Posons $b'_0 = a_0$ et pour tout $n \geq 1$, $b'_n = a_n - P_{A_{n-1}}(a_n)$; A_{n-1} étant de dimension finie, est un sous-espace de Banach de E, donc la projection de a_n sur A_{n-1} est bien définie.
On a évidemment $b'_n \in A_n$ et pour tout n, $b'_n \neq 0$ (sinon $a_n \in A_{n-1}$). D'après le théorème de projection sur un Banach, b'_n est orthogonale à A_{n-1} donc à $b'_0, \cdots, b'_{n-1}$ qui sont des éléments de A_{n-1}. Cela est vrai pour tout $n \geq 1$, il en résulte que (b'_n) est orthogonale.
Posons $b_n = \dfrac{b'_n}{\|b'_n\|}$, pour tout n. Alors (b_n) est orthonormale et, pour tout n, $b_n \in A_n$. Comme $b_0, \cdots, b_n$ sont $(n+1)$ éléments linéairement indépendants de A_n dont la dimension est $(n+1)$, alors $(b_0, \cdots, b_n)$ est une base algébrique de A_n et donc le sous-espace vectoriel engendré par (b_n) est bien A. ∎

7-b Existence d'une base orthonormale

Proposition 7.5 *Tout espace préhilbertien E séparable admet une base orthonormale dénombrable.*

Démonstration.
E étant normé séparable (chapitre (7)), il existe une suite (a_n) totale algébriquement libre dans E ; le sous-espace vectoriel A engendré par les (a_n) est partout dense sur E.
D'après la proposition précédente, E admet une suite orthonormale (b_n) engendrant A, or $\overline{A} = E$ donc (b_n) est totale, et donc est une base orthonormale de E. ∎

Remarque 7.6
1.) Si E de dimension infinie, (b_n) est infinie et si E est de dimension p fini, alors (b_n) est formée de p éléments.

2.) on démontre à l'aide du théorème de Zorn que "Tout espace de Hilbert admet une base orthonormale".

7-c Série de Fourier relativement à une base orthonormale

Proposition 7.7 *Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale dans un espace de Hilbert H. Alors*

(1) Pour tout $x \in H$, on a : $x = \sum_{n=0}^{\infty}(x|b_n)b_n$

(2) Pour tout x et $y \in H$, on a : $(x|y) = \sum_{n=0}^{\infty}(x|b_n)\overline{(y|b_n)}$

(3) Pour tout $x \in H$, on a : $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\|(x|b_n)\|^2$ *(formule de Parseval[5]).*

<u>*Démonstration.*</u>
(1) On sait, d'après ce qui précède, que la série considérée est convergente, soit x' sa somme, et soit $n > 0$ fixé. pour tout $p \geq n$, on a

$$\left(\sum_{i=0}^{p}(x|b_i)b_i|b_n\right) = (x|b_n)$$

Si $p \longrightarrow \infty$, la continuité du produit scalaire donne $(x'|b_n) = (x|b_n)$, c'est-à-dire $(x' - x|b_n) = 0$. Il en résulte que $(x' - x|y) = 0$ pour tout y dans un sous-espace vectoriel B engendré par (b_n) ; or $\overline{B} = H$ et, à nouveau la continuité du produit scalaire, donne $(x' - x|z) = 0$, pour tout $z \in H$. D'où $((x' - x)|(x' - x)) = 0$ et donc $x = x'$.

(2) D'après ce qui précède (lemme avant Bessel), pour tout $p \geq 0$, on a

$$\left((\sum_{n=0}^{p}(x|b_n)b_n)|(\sum_{n=0}^{p}(y|b_n)b_n)\right) = \sum_{n=0}^{p}(x|b_n)\overline{(y|b_n)}$$

5. Marc-Antoine de Parseval, Mathématicien français, 1755-1836

D'après (1) et la continuité du produit scalaire, le premier membre tend vers $(x|y)$ quand $p \longrightarrow \infty$ et donc la série considérée dans (2) est convergente et a pour somme $(x|y)$.

(3) Il suffit de poser $x = y$ dans (2). ■

Remarque 7.8 *Sous les hypothèses de la proposition précédente, la série de Fourier de $x \in H$ est donc convergente et a pour somme x.*

Corollaire 7.9 *Toute base orthonormale $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace de Hilbert H et une base topologique.*

Démonstration.

D'après (1), tout $x \in H$ est développable en série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n b_n$ avec $\lambda_n = (x|b_n)$. Ce développement est unique car si $x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda'_n (x|b_n)$, on en déduit, par linéarité et continuité du produit scalaire, que $\lambda'_n = (x|b_n)$, pour tout n. ■

Théorème 7.10 *Tout espace de Hilbert H séparable et de dimension infinie est isomorphe à ℓ^2.*

Démonstration.

On sait que H admet une base orthonormale $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la proposition précédente donne, pour tout $x \in H$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n b_n \quad \text{où} \quad \xi_n = (x|b_n)$$

Soit alors l'application $\varphi : x \longrightarrow (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- φ est une application de H dans ℓ^2 d'après l'inégalité de Bessel.
- Il est évident que φ est linéaire.
- φ conserve la norme (donc aussi le produit scalaire). Ainsi Parseval donne

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^2 = \|\varphi(x)\|^2$$

Donc $\varphi(H)$ est un espace normé isomorphe à H. Comme H est complet, $\varphi(H)$ également et donc $\varphi(H)$ est fermé dans ℓ^2. Montrons que $\varphi(H) = \ell^2$.
• $\varphi(H) = \ell^2$. En effet, $\varphi(H)$ contient chaque $e_n = \varphi(b_n)$, donc aussi le sous-espace vectoriel E engendré par les (e_n). Comme (e_n) est une base topologique de ℓ^2, alors E est partout dense sur ℓ^2, à fortiori $\varphi(H)$ est partout dense sur ℓ^2 ; comme il est fermé $\varphi(H) = \ell^2$. ■

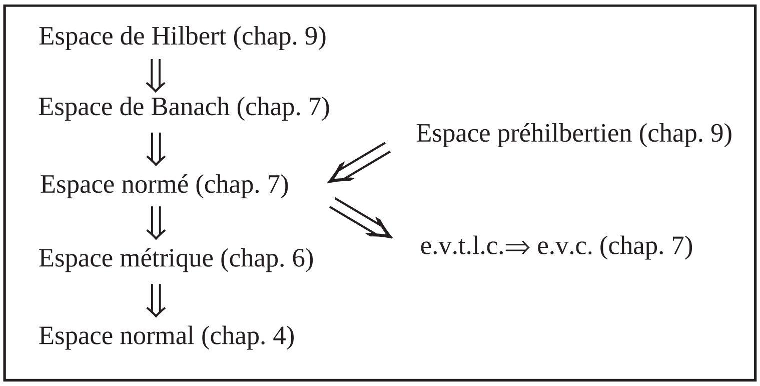
Remarque 7.11 *Tout espace de Hilbert H de dimension finie n sur Λ est isomorphe à Λ^n muni du produit scalaire usuel.*
Démonstration.
En effet si $(b_1, \cdots, b_n)$ est une base orthonormale de H, on vérifie immédiatement que l'application

$$\varphi : x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i b_i \longrightarrow (\xi_i)$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert. ■

8 Résumé des relations entre espaces

Les relations évidentes entre certains espaces étudiés dans les chapitres 4 à 9 peuvent être résumées dans le tableau suivant.



(e.v.t.l.c. : espace vectoriel topologique localement convexe).

Chapitre 10

Annexe :
Théorie des ensembles

1 Applications - Familles

Dans ce qui suit X, Y, I, J désignent des ensembles quelconques. $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X.

1-a Produit cartésien de deux ensembles

Définition 1.1 *Le produit cartésien des ensembles X et Y, noté $X \times Y$, est l'ensemble des couples ordonnés (x, y) tel que $x \in X$ et $y \in Y$.*

Il en résulte immédiatement que :

(i) Deux couples (x, y) et (x', y') de $X \times Y$ sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

(ii) (x, y) est un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$.
En effet, (x, y) peut être défini par l'égalité : $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

(iii) Si on note $X_1 = X$ et $X_2 = Y$, alors les éléments de $X_1 \times X_2$ peuvent être considérés comme les applications de $\{1, 2\} \longrightarrow X_1 \cup X_2$ telles que $f(1) \in X_1$ et $f(2) \in X_2$.

On a également la propriété immédiate suivante.

Propriété 1.2 *Si l'on a $X \times Y = \emptyset$, alors*

$$X \text{ ou } Y = \emptyset \tag{1.1}$$

Démonstration.
En effet,
• D'une part si $X \times Y \neq \emptyset$, soit $(x,y) \in X \times Y$;
$x \in X$ et $y \in Y$ montre que $X \neq \emptyset$ et $Y \neq \emptyset$
• Réciproquement si $X \neq \emptyset$ et $Y \neq \emptyset$, soit $x \in X$ et $y \in Y$ $\Longrightarrow (x,y) \in X \times Y \Longrightarrow X \times Y \neq \emptyset$. ■

1-b Applications

Définition 1.3 *On appelle application de X dans Y (ou fonction définie dans X à valeurs dans Y), toute partie f de $X \times Y$ telle que*

$$\forall x \in X, \exists!\ y \in Y \quad \textit{tel que} \quad (x,y) \in f \tag{1.2}$$

L'élément y ainsi associé à x s'appelle valeur de f au point x et noté $f(x)$.

Notation :

L'application f de X dans Y est notée :

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{ou} \quad X \stackrel{f}{\longrightarrow} Y$$

ou encore

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

Remarque 1.4 *On ne distingue donc pas une application de son graphe. Il faut s'habituer à traiter les fonctions comme des objets.*

On a alors le résultat suivant.

Proposition 1.5 *Il existe une seule application (appelée application vide) de $X = \emptyset$ dans Y (même vide) et il n'existe pas d'application de $X \neq \emptyset$ dans $Y = \emptyset$.*

Démonstration.
Rappelons que si P est une propriété quelconque, alors on a : $\forall x \in \emptyset$, $P(x)$ (sinon il existerait $x \in \emptyset$ ne vérifiant pas P, ce qui est impossible).

Si X ou $Y = \emptyset$, alors $X \times Y = \emptyset$, la seule application possible de X dans Y est donc $f = \emptyset$ (car f est une partie de $X \times Y$ qui est vide).

<u>1^{er} cas</u> : $X = \emptyset$
alors f est bien une application de $X \longrightarrow Y$ car $\forall x \in \emptyset$, x vérifie la propriété : $(\exists !\ y \in Y) \ / \ (x, y) \in f$.

<u>2^{eme} cas</u> : si $X \neq \emptyset$ et $Y = \emptyset$
f n'est pas une application de $X \longrightarrow Y$ sinon $\forall x \in X \neq \emptyset$, il existerait $y \in \emptyset$ tel que $(x, y) \in f$. ■

Définition 1.6 *: Fonction caractéristique d'une partie $A \subset X$*
On appelle fonction caractéristique d'une partie A, $A \subset X$, l'application notée χ_A de X dans $\{0,1\}$ définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathcal{C}_X A \end{cases} \tag{1.3}$$

où $\mathcal{C}_X A$ désigne le complémentaire de A par rapport à X.

1-c Familles

Définition 1.7 *On appelle famille d'éléments de X, dont l'ensemble des indices est I, toute application $x\ : i \in I \longrightarrow x(i) \in X$.*

(i) *La famille est dite finie si I fini.*

(ii) La famille est dite vide si I vide.

(iii) La famille prend le nom de suite si $I \subset \mathbb{N}$.

(iv) Si $J \subset I$, la restriction $x|_J$ de x à J est appelée sous-famille de la famille x.

<u>*Notations*</u> :

- On note généralement x_i l'image $x(i)$, car cet élément est souvent fonction d'une autre variable t et sera noté $x_i(t)$.
- La famille est notée $(x_i)_{i \in I}$ ou (x_i).
- La sous-famille est notée $(x_i)_{i \in J}$.
- Toute partie A de X peut être considérée comme l'ensemble des

valeurs d'une famille d'éléments de X ; par exemple on peut prendre pour x l'application canonique : $a \in I = A \longrightarrow a \in X$. On dit que les éléments de A sont auto-indexés.

1-d Opérations élémentaires sur les familles de parties d'un ensemble

Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux familles de parties de X, c'est-à-dire d'éléments de $\mathcal{P}(X)$.

Définition 1.8
(1) On appelle réunion de la famille (A_i) :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in X \mid (\exists i \in I)\ ,\ x \in A_i\} \tag{1.4}$$

(2) On appelle intersection de la famille (A_i) :

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in X \mid (\forall i \in I)\ ,\ x \in A_i\} \tag{1.5}$$

(3) La famille $(A)_{i\in I}$ est un recouvrement de X si $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = X$

(4) La famille $(A)_{i\in I}$ est une partition de X si c'est un recouvrement et si, en plus, les A_i sont non vides et deux à deux disjoints.

Remarque 1.9
1.) Si $I = \emptyset$, alors

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset \quad et \quad \bigcap_{i\in I} A_i = X \tag{1.6}$$

2.) $E = \bigcup A_i$ et $F = \bigcap A_i$ ne dépendent que de l'ensemble $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ des valeurs de la famille et non de la façon dont les ensembles de $\mathcal{A}$ sont indexés. En particulier on peut autoindexer ces ensembles et on écrit

$$E = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \quad et \quad F = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \tag{1.7}$$

Propriété 1.10 *On a les relations suivantes*

- $$\complement\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \complement A_i$$
- $$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}\left(A_i \bigcap B_j\right) \tag{1.8}$$
- $$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\cup\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}\left(A_i \bigcup B_j\right)$$

1-e Images directes et réciproques

Soient X et Y deux ensembles, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X, $(B_j)_{j\in J}$ une famille de parties de Y. Soit f une application $X \longrightarrow Y$.

Définitions

Définition 1.11
(1) Soit $A \subset X$, on appelle image de A par f, l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \tag{1.9}$$

(2) Soit $B \subset Y$, on appelle image réciproque de B par f, l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \tag{1.10}$$

Remarque 1.12
1.) On définit ainsi une application de $A \in \mathcal{P}(X) \longrightarrow f(A) \in \mathcal{P}(Y)$ appelée extension de f aux ensembles de parties et notée, par abus, f.

2.) L'application $B \in \mathcal{P}(Y) \longrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(X)$ est appelée extension réciproque de f aux ensembles de parties et notée encore, par abus, f^{-1}.

Propriétés

Propriété 1.13 *: Propriétés relatives à f*
Nous avons les relations suivantes.

$$
\begin{aligned}
&\bullet\ f(A)=\emptyset \Longleftrightarrow A=\emptyset \\
&\bullet\ A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2) \\
&\bullet\ f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \\
&\bullet\ f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i) \\
&\quad \textit{(Il y a égalité si } f \textit{ est injective)} \\
&\bullet\ \textit{Si } f \textit{ est bijective } : f\left(\complement_X A\right) = \complement_Y f(A) \\
&\quad \textit{(dans le cas général, il n'existe pas de relation)}
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Propriété 1.14 : *Propriétés relatives à f^{-1}*
Nous avons les relations suivantes.

$$
\begin{aligned}
&\bullet\ f^{-1}(\emptyset)=\emptyset \\
&\quad \textit{mais } \left(f^{-1}(B)=\emptyset\right) \not\Longrightarrow B=\emptyset \\
&\bullet\ B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \\
&\bullet\ f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \\
&\bullet\ f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j) \\
&\bullet\ f^{-1}\left(\complement_Y B\right) = \complement_X f^{-1}(B)
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

<u>*Démonstration.*</u>
Toutes les démonstrations sont simples. Montrons, par exemple, l'avant dernière relation.

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}\left(B_j\right) &\iff \forall j \in J\ ,\ x \in f^{-1}\left(B_j\right) \\
&\iff \forall j \in J, f(x) \in B_j \\
&\iff f(x) \in \bigcap_{i\in J} B_j \\
&\iff x \in f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)
\end{aligned}
$$

■

Propriété 1.15 *: Propriétés relatives à $f \circ f^{-1}$*
Nous avons les relations suivantes.

$$
\begin{array}{l}
\bullet \quad \textit{Si } A \subset X \ : \ f^{-1}(f(A)) \supset A \\
\textit{(Il y a égalité si } f \textit{ est injective)} \\
\\
\bullet \quad \textit{Si } B \subset Y \ : \ f\left(f^{-1}(B)\right) = B \cap f(X) \subset B \\
\textit{(Il y a égalité si } f \textit{ est surjective)}
\end{array}
\tag{1.13}
$$

2 Produit d'une famille

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties de Y. Nous introduisons la définition suivante.

2-a Définition

Définition 2.1 *On appelle produit de la famille $(X_i)_{i\in I}$ l'ensemble, noté $\prod\limits_{i\in I} X_i$, ou simplement $\prod X_i$, des familles $x = (x_i)_{i\in I}$ d'éléments de Y tel que $\forall i \in I$, $x_i \in X_i$.*

X_i est le facteur d'indice i du produit.

Le produit de la famille $(X_i)_{i\in I}$, c'est aussi l'ensemble des applications f de
$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i$$
telles que, pour tout $i \in I$, on a $f(i) \in X_i$.

Remarque 2.2
1.) Si $I = \emptyset$, le produit a un seul élément constitué par l'ensemble vide.
$$I = \emptyset \Longrightarrow \prod_{i\in I} X_i = \{\emptyset\} \tag{2.1}$$
On peut noter que le produit n'est pas vide même si les X_i sont vides. Mais si un des X_i est vide avec $I \neq \emptyset$ alors $\prod X_i = \emptyset$.

2.) Si tous les X_i sont égaux à une partie de A de Y, leur produit est l'ensemble de toutes les applications de I dans A noté $\mathcal{F}(I; A)$ ou A^I.

2-b Produits non vides

Axiome de choix

Axiome 2.3 *Pour toute famille $(X_i)_{i\in I}$ de parties non vides d'un ensemble Y, il existe une application f de I dans Y telle que pour tout $i \in I$, $f(i) \in X_i$.*

Autre version de l'axiome du choix, [6].

Pour toute famille $(X_i)_{i\in I}$ d'ensembles non vides deux à deux disjoints, il existe un ensemble S qui contient exactement un élément de chaque X_i.
(C'est un axiome d'existence, S n'est pas unique).

Proposition 2.4 *Supposons que $I \neq \emptyset$, pour que le produit $X = \prod_{i\in I} X_i$ soit non vide il faut et il suffit que les facteurs X_i soient non vides.*

> *Démonstration.*
> *Condition nécessaire* : X possède au moins un élément x (distinct de l'application vide), pour tout $i \in I$, on a $x_i \in X_i$ donc $X_i \neq \emptyset$.

Condition suffisante : résulte de l'axiome du choix (la démonstration faite dans le cas du simple produit cartésien ne marche pas car I est infini). ∎

Remarque 2.5 *la condition nécessaire est fausse si $I = \emptyset$.*

2-c Projections

Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$. Tout élément x de X est noté $x = (x_i)_{i \in I}$. Considérons les définitions suivantes.

Définition 2.6
(1) Soit $i \in I$, on appelle projection d'indice i, l'application

$$pr_i \ : \ x \in X \longrightarrow x_i \in X_i \tag{2.2}$$

(2) Plus généralement si J est non vide $\subset I$, on désigne par pr_J l'application

$$pr_J \ : \ x \in X \longrightarrow (x_i)_{i \in J} = x|_J \in \prod_{i \in J} X_i \tag{2.3}$$

Remarque 2.7 *Si $J = \{i\}$, alors pr_J devient pr_i.*

Proposition 2.8 *Si le produit X est non vide, l'application pr_J est surjective.*

<u>*Démonstration.*</u>
Soit $a = (a_i)_{i \in J}$ un élément de $\prod_{i \in J} X_i$ qui est non vide d'après la proposition précédente. Posons

$$X_i' = \begin{cases} X_i & \text{si} \quad i \in I - J \\ a_i & \text{si} \quad i \in J \end{cases}$$

Tous les X_i' étant non vides, il existe d'après l'axiome du choix, une application $x \ : I \longrightarrow Y$ telle que $\forall i \in I$, $x_i \in X_i'$; et on a $pr_J(x) = x/J = a$, donc pr_J est surjective. ∎

Il en résulte que les pr_i sont surjectives et donc $pr_i(X) = X_i$.

2-d Propriétés élémentaires

Des définitions précédentes, on peut déduire diverses propriétés. Considérons, pour tout $i \in I$, des parties A_i et $B_i \subset X_i$, alors on a les relations suivantes.

Propriété 2.9

(1)

$$(\forall i \in I,\ A_i \subset B_i) \Longrightarrow \prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} B_i \tag{2.4}$$

(réciproque vraie si $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ *; pour cela, utiliser la surjectivité de* pr_i*).*

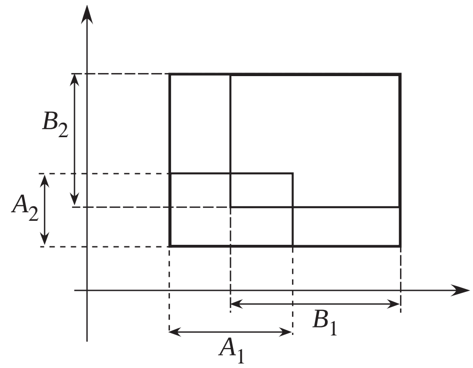
(2)

$$\left(\prod_{i \in I} A_i\right) \bigcap \left(\prod_{i \in I} B_i\right) = \prod_{i \in I} \left(A_i \bigcap B_i\right) \tag{2.5}$$

(3)

$$\left(\prod_{i \in I} A_i\right) \bigcup \left(\prod_{i \in I} B_i\right) \subset \prod_{i \in I} \left(A_i \bigcup B_i\right) \tag{2.6}$$

L'inclusion en sens contraire est fausse en général ; pour l'illustrer, considérer deux pavés de $\mathbb{R}^n$*.*

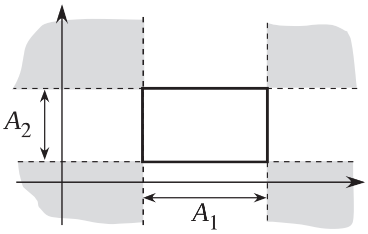


(4) Si $I \neq \emptyset$ *:*

$$\prod_{i \in I} (\complement_{X_i} A_i) \subset \complement_X \left(\prod_{i \in I} A_i\right) \tag{2.7}$$

- Il n'y a pas d'égalité en général ; considérer un pavé de $\mathbb{R}^2$*.*
- L'inclusion est fausse si $I = \emptyset$ *car alors on aurait :*

$\{\emptyset\} \subset \complement_X(\{\emptyset\})$ *d'où* $\emptyset \in \complement_X(\{\emptyset\}) = \emptyset$ *car* $X = \{\emptyset\} = \prod_{i \in I = \emptyset} X_i$.



(5)

$$\prod_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in J} pr_i^{-1}(A_i) \quad \textit{avec } J = \{i \in I \mid A_i \neq X_i\} \tag{2.8}$$

Démonstration.
Démontrons, par exemple, la relation (2.5).

$$\begin{aligned}
&\forall x \in (\textstyle\prod A_i) \cap (\prod B_i) && \Leftrightarrow \quad x \in \textstyle\prod A_i \text{ et } x \in \prod B_i \Leftrightarrow \\
&\forall i \in I,\ \ x_i \in A_i \text{ et } x_i \in B_i && \Leftrightarrow \quad \forall i \in I,\ x_i \in A_i \cap B_i \Leftrightarrow \\
&x \in \textstyle\prod (A_i \cap B_i)
\end{aligned}$$

■

2-e Applications à valeur dans un produit

Soit f une application : $X \longrightarrow Y = \prod_{i \in I} Y_i$.

Définition 2.10 *On appelle application coordonnée d'indice i associée à f, l'application $f_i \ : x \in X \longrightarrow y_i \in Y_i$ où y_i est la coordonnée d'indice i de $f(x)$.*

On note $f = (f_i)_{i \in I}$.

Remarque 2.11
1.) On peut noter que $f_i = pr_i \circ f$.
2.) f est déterminée par la famille $(f_i)_{i \in I}$ de ses applications coordonnées.
3.) En fait $f \longrightarrow (f_i)_{i \in I}$ est une bijection de

$$Y^X \longrightarrow \prod_{i \in I} Y_i^X$$

3 Ensembles ordonnés

3-a Rappels

Soit X un ensemble quelconque.

Définition 3.1 *: Relation d'ordre*
(1) On dit que ω est une relation d'ordre sur X, c'est-à-dire une partie ω de $X \times X$, si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
(2) On dit que X est totalement ordonné si deux éléments quelconques de X sont comparables (avec la relation d'ordre ω).

Notation
1.) On note $(x, y) \in \omega$ par $\omega(x, y)$ ou encore $x\omega y$ ou encore $x \leq y$ ou $x \preceq y$.
2.) L'ensemble X ordonné par ω se note (X, ω).

Définition 3.2 *: Elément maximal*
On dit que $\mu \in X$ est un élément maximal (respectivement minimal) de X s'il n'existe pas d'éléments de X qui soit strictement supérieur (respectivement inférieur) à μ.

Notons que dans la définition ci-dessus, on n'impose pas à μ d'être comparable à tous les éléments de X.

Exemple 3.3 *L'ensemble*

$$A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que : } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ et } x_1 + x_2 \leq 1\right\}$$

muni de l'ordre induit admet pour éléments minimaux l'ensemble

$$\left\{(x_1, x_2)\, \mathbb{R}^2 \text{ tels que : } x_1 + x_2 = 1\right\}$$

Il existe au plus un élément M de X tel que pour tout $x \in X$ on a $x \leq M$ (pour voir cela, utiliser l'antisymétrie) d'où la définition suivante.

Définition 3.4 *: Plus grand élément*
L'élément M de X est le plus grand (respectivement plus petit) élément de X si, pour tout $x \in X$, $x \leq M$ (respectivement $M \leq x$).

Dans ce cas, on impose à tous les éléments de X d'être comparables à M.

Définition 3.5 *: Ensemble bien ordonné*
On dit que X est un ensemble bien ordonné si toute partie non vide de X possède un plus petit élément.

Remarque 3.6
1.) On impose à tous les éléments de X d'être comparables à M (contrairement à l'élément maximal).
2.) S'il existe, le plus grand élément M de X est l'unique élément maximal de X. (si μ est maximal, on a $M \leq \mu$ et par définition de M, $\mu \leq M \Longrightarrow \mu = M$).
3.) Tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné.

Proposition 3.7 *Toute partie finie non vide A d'un ensemble ordonné possède un plus grand et un plus petit élément.*

la démonstration se fait par récurrence sur le nombre d'éléments de A.

Définition 3.8 *: Majorant - Borne supérieure*
(1) Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné et $A \subset X$. on dit que $x_0 \in X$ est majorant de A si, pour tout $a \in A$, $a \leq x_0$.
(2) Soit A une partie d'un ensemble ordonné $(X, \leq)$. On appelle borne supérieure (respectivement borne inférieure) de A, le plus petit des majorants (respectivement le plus grand des minorants) de A (s'il existe), noté $\sup A$ (respectivement $\inf A$).

Remarque 3.9 *Les éléments $\sup A$ et $\inf A$ n'appartiennent pas nécessairement à A. Il suffit de considérer l'exemple où $A =]0, 1[\subset \mathbb{R}$.*

Définition 3.10 *On dit que l'ensemble X est ordonné inductif si toute partie totalement ordonnée A de X est majorée dans X.*

Exemple 3.11 *Soit $X = \mathcal{P}(E)$ où E est un ensemble quelconque et ω la relation définie par $A \omega B \Longleftrightarrow A \subset B$. Alors toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{P}(E)$ est majorée dans $\mathcal{P}(E)$ par E.*

Proposition 3.12 *Si X est ordonné inductif, l'ensemble*

$$X_0 = \{x \in X \text{ tel que : } x \geq x_0\} \tag{3.1}$$

où $x_0 \in X$, est aussi ordonné inductif.

Démonstration.
Soit A totalement ordonné dans X_0, A est évidemment totalement ordonné dans X ordonné inductif, donc A est majoré par un élément $x_1 \in X$. Comme $A \subset X_0$ on a $\forall a \in A : x_0 \leq a \leq x_1$, il en résulte que $x_1 \in X_0$ (par définition de X_0) et que A est majoré dans X_0. ■

3-b Théorème de Zorn

Nous admettons le résultat suivant.

Théorème 3.13 *: Théorème de Zorn* [1]
Tout ensemble ordonné inductif X possède au moins un élément maximal.

Pour la démonstration, voir Bourbaki (chapitre sur la théorie des ensembles [1]). On démontre qu'il y a équivalence entre l'axiome du choix, le théorème de Zorn et le théorème de Zermelo, rappelé ci-dessus.

Théorème 3.14 *: Théorème de Zermelo* [2]
Sur tout ensemble X, il existe une relation d'ordre $\leq$ telle que $(X, \leq)$ soit bien ordonné.

Le théorème de Zermelo prouve notamment qu'il existe une relation de bon ordre sur $\mathbb{R}$; mais on ne connaît aucun procédé de construction d'une telle relation.
En appliquant le théorème de Zorn à X muni de la relation d'ordre opposée, on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.15 *Si toute partie totalement ordonnée dans X est minorée dans X, alors X possède au moins un élément minimal.*

4 Puissance des ensembles

On rappelle que, par définition, un ensemble X est fini s'il est vide ou s'il existe une bijection entre X et un intervalle $[1, n]$ de $\mathbb{N}$.

1. Max Zorn, Mathématicien allemand, 1906-1993
2. Ernst Zermelo, Mathématicien allemand, 1871-1953

4-a Ensembles équipotents

Définition 4.1 *On dit que X est équipotent à Y (ou que X et Y sont équipotents ou encore que X et Y sont de même puissance) s'il existe une bijection de X sur Y.*

On écrit alors $CardX = CardY$.

Remarque 4.2
1.) Dans le cas où les ensembles considérés X et Y sont des parties d'un même ensemble E, la relation "$CardX = CardY$" est une relation d'équivalence dans $\mathcal{P}(E)$. La classe d'équivalence de X est appelée puissance de X.

2.) Dans le cas où X et Y sont finis, par abus on écrit : $Card\ X = n$.

Exemple 4.3 *Tout intervalle $]a,b[$ non vide de $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathbb{R}$. En effet, d'une part $]a,b[$ est équipotent à $]-1,1[$ par la bijection*

$$x \in]-1,+1[\longrightarrow \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} \in]a,b[$$

et d'autre part $]-1,1[$ est équipotent à $\mathbb{R}$ par la bijection

$$x \in]-\infty,+\infty[\longrightarrow \frac{x}{1-\mid x \mid} \in]-1,+1[$$

D'où le résultat.

Proposition 4.4 *Toute partie infinie X de $\mathbb{N}$ est équipotente à $\mathbb{N}$.*

> <u>*Démonstration.*</u>
> $\mathbb{N}$ étant bien ordonné, X possède un plus petit élément x_0. Soit, par récurrence, $x_n = \inf(X - \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\})$. L'application $n \longrightarrow x_n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur X. ∎

4-b Comparaison de puissances

Définition 4.5 *On dit que X a une puissance inférieure (strictement inférieure) à celle de Y et on note $CardX \leq CardY$ s'il existe une injection de X dans Y (avec en plus $CardX \neq CardY$).*

Remarque 4.6 *Si X et Y sont des parties d'un même ensemble E dans $\mathcal{P}(E)$ la relation "$CardX \leq CardY$" est une relation d'ordre. En effet, elle est réflexive et transitive (immédiat). L'antisymétrique est plus difficile à montrer et résulte du théorème de Cantor-Bernstein*[3] *suivant : "S'il existe une injection de X dans Y et une injection de Y dans X alors il existe une bijection de X sur Y".*

Voyons quelques résultats immédiats.

Propriété 4.7 *Nous avons*

$$A \subset X \Longrightarrow CardA \leq CardX \tag{4.1}$$

La démonstration est immédiate car $x \in A \longrightarrow x \in X$ est injective.

Proposition 4.8 *Soit $X \neq \emptyset$, alors pour que $CardX \leq CardY$, il faut et il suffit qu'il existe une application de Y sur X.*

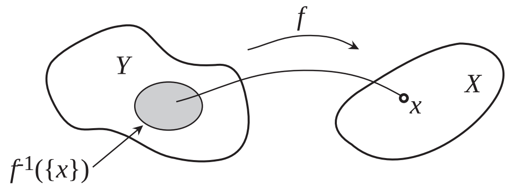
Démonstration.

• *Condition nécessaire.*

Si f est une injection $X \longrightarrow Y$, f est une bijection $X \longrightarrow f(X)$ et donc g défini par :

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{si } y \in f(X) \\ x_0 \in X & \text{si } y \in Y - f(X) \end{cases}$$

est une application de Y sur X.



• *Condition suffisante.*

Si f est une application de Y sur X, alors $\forall x \in X,\ f^{-1}(\{x\})$ est non vide ; d'après l'axiome du choix, il existe une application g de X dans Y telle que $\forall x \in X,\ g(x) \in f^{-1}(\{x\})$. Comme les $f^{-1}(\{x\})$ sont deux à deux disjoints, g est injective et on a bien $CardX \leq CardY$. ■

3. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, Mathématicien allemand, 1845-1918

Proposition 4.9 *Nous avons toujours*

$$CardX \leq Card\mathcal{P}(X) \ , \ (Card\mathcal{P}(X) = Card2^X) \tag{4.2}$$

Démonstration.
L'application $x \longrightarrow \{x\}$ est une injection de X dans $\mathcal{P}(X)$ et donc $CardX \leq Card\mathcal{P}(X)$. Montrons qu'il n'existe pas d'injection de $\mathcal{P}(X)$ sur X. Car si tel était le cas, alors il existerait (théorème de Cantor-Bernstein) une bijection φ de X sur $\mathcal{P}(X)$, ce qui serait absurde.
Soit alors l'ensemble

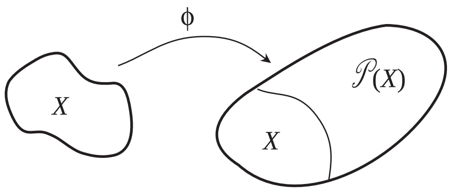
$$A = \{x \in X \mid x \notin \varphi(X)\}$$

• Suppossons $A \neq \emptyset$, alors $A \subset X$ et $A \notin \varphi(X)$ sinon il existerait $x_0 \in X$ tel que $\varphi(x_0) = A$. On a donc une contradiction car :

si $x_0 \in A$ on a $x_0 \notin \varphi(x_0) = A$

si $x_0 \notin A$ on a $x_0 \in \varphi(x_0) = A$

• Supposons maintenant que $A = \emptyset$, alors pour tout $x \in X$, $x \in \varphi(x)$ et donc $X \subset \varphi(x)$ d'où la contradiction car si $x_1 \neq x_2$, alors $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ (car chacun contient X) et donc φ est non injective. ■



Proposition 4.10 *Nous avons*

$$Card\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq Card\mathbb{R} \tag{4.3}$$

Démonstration.
Il suffit de définir une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $A \subset \mathbb{N}$ et χ_A sa fonction caractéristique. Posons :

$$f(A) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_A(n)}{2^n} & \text{si } A \text{ est infini} \\ \\ \displaystyle 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_A(n)}{2^n} & \text{si } A \text{ est fini} \end{cases}$$

Soient A et A' tels que $f(A) = f(A')$.
• Il n'est pas possible que l'un des ensembles A et A' soit fini et l'autre infini. Si par exemple :
A fini, on a : $f(A) \in [2,3]$
et A' infini, on a : $f(A') \in [0,1]$
• Si A et A' sont tous deux finis ou infinis on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_A(n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{A'}(n)}{2^n}$$

Il en résulte d'après certaines propriétés d'unicité des séries dyadiques que, pour tout n, $\chi_A(n) = \chi_{A'}(n)$, c'est-à-dire encore $A = A'$. Cela peut se voir encore de la façon suivante :

$$\sum_{n \in A - A'} \frac{1}{2^n} = \sum_{n \in A' - A} \frac{1}{2^n}$$

si $A - A'$ et $A' - A$ sont non vides. En posant $\alpha = \inf(A - A')$ et $\alpha' = \inf(A' - A)$ on aurait, en supposant par exemple $\alpha < \alpha'$:

$$\sum_{n \in A - A'} \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^\alpha}$$

et

$$\sum_{n \in A' - A} \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{\alpha'}} + \frac{1}{2^{\alpha'+1}} + \cdots = \frac{1}{2^{\alpha'-1}} \leq \frac{1}{2^\alpha}$$

d'où la contradiction $\left(\dfrac{1}{2^\alpha} < \cdots \leq \dfrac{1}{2^\alpha}\right)$. ■

Remarque 4.11
1.) On montre que $Card\mathcal{P}(\mathbb{N}) = Card\mathbb{R}$.

2.) En corollaire de ce qui précède, on a : $Card\mathbb{N} < Card\mathbb{R}$.

4-c Ensembles dénombrables

Définition

Définition 4.12 *On dit qu'un ensemble X est dénombrable (ou au plus dénombrable ou fini ou dénombrable) si*

$$CardX \leq Card\mathbb{N} \tag{4.4}$$

et que X est infini dénombrable si

$$CardX = Card\mathbb{N} \tag{4.5}$$

Remarque 4.13
1.) Si X infini est un ensemble dénombrable, alors X est équipotent à $A \subset \mathbb{N}$.
En effet, A ne peut pas être fini sinon X le serait ; donc X est équipotent à $\mathbb{N}$ (car A est équipotent à $\mathbb{N}$). Réciproquement (X équipotent à $\mathbb{N}$) $\Longrightarrow$ (X infini dénombrable).

2.) Intuitivement cela veut dire que les éléments de X peuvent se ranger en une suite finie ou infinie $(x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots,)$.

3.) $Card\mathbb{N}$ est noté $\aleph_0$ (aleph zero).

4.) On s'est longtemps demandé si l'hypothèse du continu (dite propriété ($\wp$) est vraie ou non. C'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ensemble X tel que

$$Card\mathbb{N} < CardX < Card\mathbb{R}$$

Paul Cohen[4] *a démontré qu'aucune des propriétés ($\wp$) ou (non $\wp$) ne pouvait se déduire des axiomes de la théorie des ensembles.*

Exemple 4.14
1.) Tout ensemble fini, et en particulier $\emptyset$, est dénombrable.

2.) Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est infinie dénombrable.

3.) $\mathbb{Z}$ est infini dénombrable.

4.) $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : on dit que $\mathbb{R}$ a la puissance du continu.

4. Paul Joseph Cohen, Mathématicien américain, né en 1934

Propriétés

Propriété 4.15 *Tout ensemble infini X contient un ensemble infini dénombrable.*

<u>*Démonstration.*</u>
Soit $x_0 \in X$, on définit par récurrence $x_n \in X - \{x_0, \cdots, x_{n-1}\}$ (non vide car X infini). L'application $n \longrightarrow x_n$ est bijective de $\mathbb{N}$ sur $A = \{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$. $A \subset X$ est donc infini dénombrable. ∎

Propriété 4.16 *Pour tout entier $k \geq 1$, on a*

$$Card\ \mathbb{N}^k = Card\ \mathbb{N} \tag{4.6}$$

<u>*Démonstration.*</u>
$\mathbb{N}^k$ est évidemment infini.
Soit $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers avec $p_1 = 2$.
L'application : $(n_1, \cdots, n_i, \cdots, n_k) \longrightarrow 2^{n_1} 3^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ est une injection de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$, d'après la propriété de l'unicité de décomposition d'un entier en facteurs premiers. Donc $\mathbb{N}^k$ est dénombrable. ∎

Corollaire 4.17 *Si, pour tout entier k, les ensembles $A_1, \cdots, A_k$ sont dénombrables, alors l'ensemble*

$$\prod_{i=1}^{k} A_i$$

est dénombrable.

<u>*Démonstration.*</u>
Il existe pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ une injection $\varphi_i : A_i \longrightarrow \mathbb{N}$.
L'application :

$$f\ : (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_k) \longrightarrow (\varphi_1(x_1), \cdots, \varphi_i(x_i), \cdots, \varphi_k(x_k))$$

est injective de A dans $\mathbb{N}^k$, donc $Card\ A \leq Card\ \mathbb{N}^k = Card\ \mathbb{N}$. ∎

Propriété 4.18 *La réunion X d'une famille dénombrable $(D_i)_{i \in I}$ d'ensembles D_i dénombrables est dénombrable.*

<u>*Démonstration.*</u>
Supposons les D_i non vides. Alors pour tout $i \in I$, on a $CardD_i \leq Card\mathbb{N}$, et donc il existe une application f_i de $\mathbb{N}$ sur D ; de même I étant dénombrable, il existe une application $n \longrightarrow i_n$ de $\mathbb{N}$ sur I.
Soit alors $\varphi \ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X$ définie par $\varphi(m, n) = f_{i_n}(m)$. On vérifie immédiatement que φ est surjective et donc $CardX \leq Card(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = Card\mathbb{N}$. ■

Propriété 4.19 *Si X est infini et D dénombrable alors $Card(X \cup D) = CardX$.*

<u>*Démonstration.*</u>
X étant infini contient un ensemble infini dénombrable D'. D'après la propriété précédente $D' \cup D$ est infini dénombrable donc il existe une bijection $\varphi \ : D' \longrightarrow D' \cup D$. Soit alors f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si} \quad x \in D' \\ x & \text{si} \quad x \subset X - D' \end{cases}$$

f est une bijection de X sur $X \cup D$, donc $Card(X \cup D) = CardX$. ■

Propriété 4.20 *Pour tout ensemble X, nous avons*

$$CardX < Card\mathcal{P}(X) \tag{4.7}$$

<u>*Démonstration.*</u>
En effet, l'application $x \in X \Longrightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ est une injection, donc $CardX \leq Card\mathcal{P}(X)$.
Par ailleurs il n'existe pas d'injection de $\mathcal{P}(X) \longrightarrow X$ sinon d'après Cantor-Bernstein il existe φ bijection $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.
Soit alors :

$$A = \{x \in X \mid x \notin \varphi(X)\}$$

<u>cas 1</u> $A \neq \emptyset$
A est une partie de X qui n'appartient pas à φ(X). Sinon il existerait $x_0 \in X \mid \varphi\,(x_0) = A$. Contradiction car :
Si $x_0 \in A \Longrightarrow x_0 \notin \varphi\,(x_0) = A$

Si $x_0 \notin A \Longrightarrow x_0 \in \varphi(x_0) = A$
cas 2 $A = \emptyset$
Dans ce cas : $\{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\} = \emptyset$
$\forall x \in X, x \in \varphi(x) \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in X, X \subset \varphi(x)$
Contradiction car si $x_1 \neq x_2 \in X \Longrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$
(car chacun $\supset X$) donc φ non injective. ■

Nombres algébriques et nombres transcendants

Définition 4.21 *Les nombres algébriques sont les racines réelles ou complexes de polynômes à coefficient dans* $\mathbb{Z}$.

Proposition 4.22 *L'ensemble des nombres algébriques est infini dénombrable.*

Démonstration.
Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ et A_n l'ensemble des racines de ces polynômes. L'application :

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathcal{P}_n \longrightarrow (a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$$

est injective $\Longrightarrow \mathcal{P}_n$ est dénombrable comme $\mathbb{Z}^{n+1}$. Chacun des polynômes P de $\mathcal{P}_n$ admet au plus n racines, donc A_n est dénombrable. Finalement

$$A = \bigcup_{n-1}^{\infty} A_n$$

est dénombrable. ■

Corollaire 4.23
(1) Pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble $\mathbb{Q}^n$ est infini dénombrable.
(2) Tout intervalle $]a,b[$ non vide contient un ensemble non dénombrable d'irrationnels.

Démonstration.
Pour la démonstration du point (2), elle se fait par l'absurde. Sinon]a,b[serait dénombrable comme réunion de deux ensembles dénombrables. ■

Définition 4.24 *Les nombres trancendants sont tous les nombres complexes non algébriques.*

Remarque 4.25
1.) A partir de ce qui précède, dans tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$*, il existe un nombre infini non dénombrable de nombres transcendants.*
2.) La plupart des nombres réels sont transcendants. On a notamment démontré très difficilement, que e *et* π *sont transcendants.*
3.) Les ordinaux sont associés à l'idée de compter les éléments d'un ensemble ; et donc implicitement cela suppose un certain ordre sur l'ensemble.
4.) Les cardinaux sont associés à l'idée de la "taille" d'un ensemble. On cherche à savoir si un des deux ensembles a plus d'éléments qu'un autre, sans avoir à compter. On attache ainsi à chaque ensemble un symbole appelé son nombre cardinal.

Bibliographie

[1] N. Bourbaki.
Théorie des ensembles. Eléments de Mathématiques. Masson. Diverses Eds.

[2] C. P. Bruter.
Topologie et perception. Tome 1. Recherches interdisciplinaires. Maloine-Doin editeurs. Paris. 1974.

[3] R. Courant and D. Hilbert.
Methods of mathematical physics. Vol. 2. Interscience. New York. 1962.

[4] G. Choquet.
Cours d'analyse. Vol. 2. Masson. Paris. 1969.

[5] R. Dautray and J. L. Lions.
Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Série scientifique, 3,6, Masson. 1988.

[6] J. Dugundji.
Topology. Allyn and Bacon inc. 1966.

[7] A. El Jai
Elements d'analyse numérique. PUP. 2003.

[8] P. J. Laurent
Approximation et optimisation. Hermann. Paris. 1972.

[9] W. Rudin.
Functional analysis. Mc Graw Hill. 1973.

[10] W. Rudin.
Analyse réelle et complexe. Masson. 6ème édition. 1992.

[11] L. Schwartz.
Topologie et analyse fonctionnelle. Cours Ecole Polytechnique.

Index

ACHEVÉ D'IMPRIMER
EN AVRIL 2007
DANS LES ATELIERS
DES PRESSES LITTÉRAIRES
À SAINT-ESTÈVE - 66240

D. L. : 2e TRIMESTRE 2007
N° D'IMPRIMEUR : 20845

Imprimé en France

ISBN : 978-2-35412-007-8

9 782354 120078

25 €