Soient V, W deux espaces vectoriels ayant deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$

$T : V \longrightarrow W$ linéaire

Théorème 2.9 Il existe une unique matrice A, notée aussi $[T]_{CB}$, appelé matrice de T associée aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, telle que

$x \in V$
$$[T(x)]_C = A\,[x]_B = [T]_{CB}\,[x]_B$$

De plus, $A = \left([T(b_1)]_C \cdots [T(b_n)]_C \right)$ où $\mathcal{B} = \{ b_1, .., b_n \}$

Remarque: Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et on choisi les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$,

le théorème nous dit:

$\mathcal{B}$ = base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\{ \vec{e}_1, .., \vec{e}_n \}$,
$\mathcal{C}$ = base -//- de $\mathbb{R}^m$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [\vec{x}]_B$$

$$A = \left([T(e_1)]_C, .., [T(e_n)]_C \right)$$

$$\Rightarrow A = \left(T(e_1) \cdots T(e_n) \right) \qquad T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, $[\vec{a}]_C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \vec{a}$.

A : matrice canonique $\quad m \times n$

Preuve : d'abord : $[T(x)]_C = A[x]_B$? $x \in V$ quelconque. B est une base de V,

x est une combinaison linéaire de $\{b_1, .., b_n\} = B$: $x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$

en particulier $[x]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

T est linéaire, donc $T(x) = \alpha_1 T(b_1) + \dots + \alpha_n T(b_n)$

$$[T(x)]_C = [\alpha_1 T(b_1) + \dots + \alpha_n T(b_n)]_C \overset{[\,]_C \text{ linéaire}}{=} \alpha_1 [T(b_1)]_C + \dots + \alpha_n [T(b_n)]_C$$

$$= \left([T(b_1)]_C \dots [T(b_n)]_C\right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A[x]_B \qquad \text{ok}$$

2) Unicité : Soit D $m \times n$ t.q. $D[x]_B = [T(x)]_C$ $\forall x \in V$

remarque : $[b_k]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{-ème position} = \vec{e}_k$ de $\mathbb{R}^n$

$$A[b_k]_B = A\vec{e}_k = \text{"}\vec{a}_k\text{"} = [T(b_k)]_C = D[b_k]_B = D\vec{e}_k = \text{"}d_k\text{"}$$

Pour $k = 1, \dots, n$, les colonnes de A et D sont pareille, donc $A = D$. $\blacksquare$