Anna Lachowska
octobre 2018

Analyse I
Résumé: Séries numériques

Définitions et résultats.

1. Une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ de nombres réels est un couple: la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et la suite des sommes partielles $(S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k)$.
2. On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente si la suite des sommes partielles (S_n) est convergente. La limite de la suite des sommes partielles s'appelle la somme de la série.
$$\lim_{n\in\mathbb{N}} S_n = S \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$
3. Une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente si la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ est convergente.
4. Une série qui est absolument convergente, est convergente.
5. (Condition nécessaire). Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
6. (Critère de Leibniz pour les séries alternées). Soit (a_n) une suite telle que
(i) il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ (suite $(|a_n|)$ est décroissante)
(ii) pour tout $n \geq p$, on a $a_{n+1} \cdot a_n \leq 0$; (suite (a_n) est alternée)
(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente.
7. (Critère de comparaison). Soient (a_n) et (b_n) deux suites telles que il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq k$, on a $0 \leq a_n \leq b_n$ Alors:
- Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est convergente, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est aussi convergente.
- Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est divergente, la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est aussi divergente.
8. Si une série de termes positifs est telle que la suite des sommes partielles est bornée, alors la série est convergente.
9. (Critère de d'Alembert). Soit (a_n) une suite telle que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho.$$
Alors si $\rho < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente, et si $\rho > 1$, elle est divergente. Si $\rho = 1$, pas de conclusion.
10. (Critère de la racine (de Cauchy)). Soit (a_n) une suite telle que
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$
Alors si $\rho < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente, et si $\rho > 1$, elle est divergente. Si $\rho = 1$, pas de conclusion.

Séries numériques remarquables.

1. Série géométrique: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ est convergente vers la somme $\frac{1}{1-r}$ si $|r| < 1$, et divergente si $|r| \geq 1$.

2. Série harmonique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente.

3. Série harmonique alternée $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

4. Série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ est convergente pour tout $p > 1$ et divergente pour tout $p \leq 1$.

5. Série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6. Série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n}$ converge absolument si $|c| < e$ et diverge autrement.

7. Série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}$ diverge.

8. Série $\sum_{n=0}^{\infty} n^p q^n$ où $p > 0$ converge absolument si $|q| < 1$ et diverge autrement.

9. Série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$ converge absolument pour tout $p \in R$.