Anna Lachowska
24 octobre 2018

Analyse I – Corrigé de la Série 6

Exercice 1.

$$i)\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+b}-n\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}-1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+1} = \frac{a}{2}$$

Par l'Intermezzo dans la Série 5 on sait que $1 \le \sqrt{1+x} \le 1+\frac{1}{2}x$ pour tout $x \ge 0$, alors la limite $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}} = 1$ d'après le théorème des 2 gendarmes.

$$ii)\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2-n+1}-2n\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-2\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-2n-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+2} = -\infty$$

Par l'Intermezzo dans la Série 5 on sait que $1+x \le \sqrt{1+x} \le 1+\frac{1}{2}x$ pour tout $-1 \le x \le 0$. On a $-1 \le -\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2} \le 0$ pour tout $n \ge 1$, alors la limite $\lim_{n\to\infty}\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}} = \sqrt{2}$ d'après le théorème des 2 gendarmes.

iii) On a $\forall x \in \mathbb{R}\ -1 \le \cos(x) \le 1$.

Ainsi, $-\frac{3+\frac{8}{n}}{n+2+\frac{6}{n}} \le a_n \le \frac{3+\frac{8}{n}}{n+2+\frac{6}{n}}$. Les deux membres bornant a_n ayant pour limite 0 pour $n \to \infty$, on a donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

iv) Démontrons que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. Soit $\varepsilon > 0$. On a très clairement, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \ge 1$. Donc il faut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge n_0$, on a $\sqrt[n]{n} \le (1+\varepsilon)$, ou $(1+\varepsilon)^n \ge n$. Par la formule binomiale on a $(1+\varepsilon)^n \ge 1+n\varepsilon+\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \ge \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$. Alors pour avoir $\varepsilon^2\frac{n(n-1)}{2} \ge n$, il faut prendre n tel que $\frac{n-1}{2} \ge \frac{1}{\varepsilon^2}$, d'où $n \ge 1+\frac{2}{\varepsilon^2}$.

On peut prendre par exemple $n_0 = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon^2}+2 \right\rfloor$.

Une autre méthode : On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$. De plus, $n^{\frac{1}{n}} = (\sqrt{n}\sqrt{n} \cdot 1^{n-2})^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{2\sqrt{n}+n-2}{n}$ d'après l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

pour tout $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ positifs.

Enfin, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\sqrt{n}+n-2}{n} = 1$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

v) Soit $a = b_k > 0$ le coefficient dominant de $P(n)$ et $k \in \mathbb{N}$ le degré de $P(n)$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{an^k} = 1$. Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$,

$$1 - \frac{1}{2} \leq \frac{P(n)}{an^k} \leq 1 + \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{P(n)}{an^k} \leq \frac{3}{2}.$$

Alors pour tout $n \geq n_0$

$$\left(\frac{a}{2}n^k\right)^{\frac{1}{n}} \leq (P(n))^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{3a}{2}n^k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ et que pour tout $s > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{s} = 1$. Alors d'après le théorème des 2 gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to\infty} (P(n))^{\frac{1}{n}} = 1$.

Exercice 2.

i) On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

D'où $-\dfrac{1}{2n+1} \leq \dfrac{\cos\left(\sqrt{n^2+2}\right)}{2n+1} \leq \dfrac{1}{2n+1}$.

D'après le théorème des gendarmes on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos\left(\sqrt{n^2+2}\right)}{2n+1} = 0$.

ii) On a $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\sin(x) \leq x$ et $\cos(x) \leq 1$.

De plus, on montre assez trivialement que $\forall n \geq 1$, $\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \geq 0$ et $\sin\left(\dfrac{1}{n^3}\right) \geq 0$. Ainsi, pour $n \geq 1$, $0 \leq n^2 \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \leq \dfrac{1}{n}$.

Enfin, d'après le théorèmes des gendarmes on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = 0$

iii) Nous allons utiliser les formules de trigonométrie suivantes :

$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$.

Ainsi, $\dfrac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{\cos(n+1) + \cos(n-1)} = \tan(1)$.

On a donc directement $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{\cos(n+1) + \cos(n-1)} = \tan(1)$

iv) Comme pour le cosinus, on a $\forall x \in \mathbb{R} \ -1 \leq \sin(x) \leq 1$.

D'où $-\dfrac{1}{1+n^2+n^3} \leq \dfrac{\sin\left(\sqrt{n^3+n^2+1}\right)}{n^3+n^2+1} \leq \dfrac{1}{1+n^2+n^3}$.

D'après le théorème des gendarmes on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left(\sqrt{n^3+n^2+1}\right)}{n^3+n^2+1} = 0$.

v) $\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+3n+4}}{2} = \dfrac{(n^2+n+1)-(n^2+3n+4)}{2\left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+3n+4}\right)}$

$$= \frac{-2-\dfrac{3}{n}}{2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n^2}}\right)}.$$

Par opérations élémentaires sur les limites et l'argument comme dans l'Exercice 1(*i*), on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+3n+4}}{2} = -\dfrac{1}{2}$

vi) $\sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3+1}\right) = \dfrac{\sqrt{n}\,(n-1)}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3+1}} = \dfrac{1-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^3}}}$

Par opérations élémentaires sur les limites et l'argument comme dans l'Exercice 1(*i*), on a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3+1}\right) = \dfrac{1}{2}$

vii) $-\dfrac{n^3}{7^n} \leq \dfrac{n^3}{7^n}\cos\left(\dfrac{7^n}{(n+1)^3}\right) \leq \dfrac{n^3}{7^n}$

La suite $\left(\dfrac{n^3}{7^n}\right)$ converge vers 0 par le critère de d'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3}{7^{n+1}}\frac{7^n}{n^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\frac{1}{7} = \frac{1}{7} < 1.$$

D'après le théorème des gendarmes on trouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{7^n}\cos\left(\dfrac{7^n}{(n+1)^3}\right) = 0$

viii) La suite $n^2\,3^n e^{-3n} = n^2\left(\dfrac{3}{e^3}\right)^n$ converge vers 0 par le critère de d'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2 3^{n+1}}{(e^3)^{n+1}}\frac{(e^3)^n}{n^2 3^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\frac{3}{e^3} = \frac{3}{e^3} < 1$$

Alors on a $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\,3^n e^{-3n} = 0$

Exercice 3.

i) La suite $a_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n+1)$, $a_0 = 0$ est un exemple d'une récurrence linéaire de la forme $a_{n+1} = qa_n + b$, où $q = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{1}{4}$. Par la proposition vue dans le cours (voir Notes du Cours 9), puisque $|q| < 1$, la suite converge vers la limite $\frac{b}{1-q} = \frac{1/4}{1-3/4} = 1$. Donc on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

ii) La suite $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 4)$, $a_0 = 3$ est encore un exemple d'une récurrence linéaire de la forme $a_{n+1} = qa_n + b$, où $q = \frac{1}{4}$ et $b = 1$. Par la proposition vue dans le cours (voir Notes du Cours 9), puisque $|q| < 1$, la suite converge vers la limite $\frac{b}{1-q} = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3}$. Donc on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}.$$

iii) Si la limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ existe, elle satisfait l'équation (utiliser les propriétés algébriques comme précédemment)

$$a = \frac{7}{3} - \frac{1}{1+a} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \left(\frac{7}{3} - a\right)\left(1+a\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3}a - a^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$3a^2 - 4a - 4 = (3a+2)(a-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2 \text{ ou } a = -\frac{2}{3}.$$

On montre par récurrence que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a $a_1 = 1 \geq 0$. Si $a_{n-1} \geq 0$, alors

$$a_n = \frac{7}{3} - \frac{1}{1+a_{n-1}} \geq \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3} \geq 0.$$

Ainsi la seule limite possible est $a = 2$.
On montre alors (encore par récurrence) que (a_n) est majorée par $a = 2$. On a $a_1 = 1 \leq a$. Si $0 \leq a_{n-1} \leq a$, on a alors

$$a_n = \frac{7}{3} - \frac{1}{1+a_{n-1}} \leq \frac{7}{3} - \frac{1}{1+a} = 2 = a\,.$$

Montrons que (a_n) est croissante. On a $a_0 = 1 < a_1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{2}$. Pour $n = 1, 2, \ldots$ on a

$$a_{n+1} - a_n = \frac{7}{3} - \frac{1}{1+a_n} - \frac{7}{3} + \frac{1}{1+a_{n-1}} = \frac{a_n - a_{n-1}}{(1+a_n)(1+a_{n-1})},$$

donc $a_n - a_{n-1} > 0$ implique $a_{n+1} - a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$. En étant croissante et majorée, la suite (a_n) est donc convergente avec limite $a = 2$.

Remarque : Ici $a_{n+1} = g(a_n)$ avec $g(x)$ une fonction croissante. Donc la suite (a_n) est monotone par la méthode d'Exercice 4 ci-dessous. Elle est nécessairement croissante parce que $a_0 < a_1$.

Exercice 4.

i) On a par définition de la fonction g, $\forall n \geq 1$, $m < a_n < M$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > \min(a_0, m)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < \max(a_0, M)$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien bornée.

ii) Nous avons donc g fonction croissante. Ainsi, $x \leq y \Leftrightarrow g(x) \leq g(y)$.

Afin de montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est mononotone, raisonnons par disjonction de cas :
Si $a_1 \geq a_0$, alors montrons par récurrence que $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : $a_1 \geq a_0$
Hérédité : Supposons que $a_n \geq a_{n-1}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Alors parce que g est croissante, $a_{n+1} = g(a_n) \geq g(a_{n-1}) = a_n$. Donc (a_n) est croissante.
Si $a_1 \leq a_0$, alors montrons par récurrence que $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : $a_1 \leq a_0$
Hérédité : Supposons que $a_n \leq a_{n-1}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Alors parce que g est croissante, $a_{n+1} = g(a_n) \leq g(a_{n-1}) = a_n$. Donc (a_n) est décroissante.

iii) Par propriété, toute suite monotone et bornée est convergente.

iv) Si la fonction $g(x)$ est décroissante, alors la suite définie par la formule $a_0 \in E$, $a_{n+1} = g(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, n'est pas monotone en général. En effet, supposons que $a_0 \leq a_1$. Alors puisque g est décroissante, on obtient $g(a_0) \geq g(a_1)$, ce qui donne $a_1 \geq a_2$. Supposons maintenant que $a_0 \geq a_1$. Alors on a $g(a_0) \leq g(a_1)$, ce qui donne $a_1 \leq a_2$. Dans les deux cas, la suite obtenue n'est pas monotone sauf si $a_0 = a_1 = \ldots$.

Par contre, on peut conclure que les deux sous-suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) sont monotones : Nous voulons montrer que les sous-suites $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de croissance opposée (si $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante).
Si la fonction $g(x)$ est décroissante, alors la fonction $g \circ g(x) = g(g(x))$ est croissante : pour tout $x_1 \leq x_2$, on a $g(x_1) \geq g(x_2)$ et $g(g(x_1)) \leq g(g(x_2))$. Puisque $a_{n+2} = g \circ g(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait d'après *ii*) que les suites $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. Pour démontrer qu'elles sont de croissance opposée, il suffit de constater que la relation d'ordre entre a_0 et a_2, est opposée à celle entre $g(a_0) = a_1$ et $g(a_2) = a_3$.

v) Posons $\forall x \in [1, +\infty[$, $g(x) = 7 - \dfrac{6}{x}$.
Il est facile à voir que g est strictement croissante, minorée par 1 et majorée par 7.
D'après *iii*), nous avons donc que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est donc solution de l'équation $l = 7 - \dfrac{6}{l}$ et donc de l'équation $l^2 - 7l + 6 = 0$. On trouve alors $l_{1,2} = \dfrac{7 \pm 5}{2}$.
De plus, $a_1 = 4 > a_0$ donc d'après *ii*), $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. La solution $l = 1$ ne convient donc pas. Ainsi, $l = 6$.

Exercice 5.

Supposons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. Alors l est solution de l'équation $l = \sqrt{b + l}$. Cela revient à résoudre le trinôme $l^2 - l - b = 0$ ce qui conduit à $l_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4b}}{2}$. Cependant, l'équation $l = \sqrt{b + l}$ impose $l \geq 0$. Ainsi, on a $l = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$.

La fonction $g(x) = \sqrt{b + x}$ est croissante pour tout $b > 0$ et $x > 0$. De plus, on a $a_1 = \sqrt{b + 1} > 1 = a_0$. Alors par Exercice 4(ii), la suite (a_n) est croissante.
Il nous reste à démontrer que la suite (a_n) est majorée. D'abord, par définition de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$. Ensuite, montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < l$.
Initialisation : $a_0 = 1 < \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$ car $b > 0$.
Hérédité : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n < l$. Alors

$$a_{n+1} = \sqrt{b + a_n} \overset{b=l^2-l}{=} \sqrt{l^2 - l + a_n} < \sqrt{l^2 - l + l} = l.$$

Donc (a_n) est majorée par $l = \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$. Alors (a_n) est une suite croissante et majorée, donc convergente, et on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}.$$

Remarque : Nous pouvons aussi utiliser le résultat de l'Exercice 7 de la Série 5 :

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, et $0 < b_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$a_{n+1} - l = b_n(a_n - l) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors la suite (a_n) est convergente.
Ici $b_n = \dfrac{a_{n+1}-l}{a_n-l}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $a_{n+1} > a_n$ et $0 < a_n < l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $0 < b_n < 1$. Cela démontre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 6.

Si la limite $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe, elle satisfait l'équation

$$a = 1 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2) = 0\,, \tag{1}$$

et donc $a = 1$ ou $a = 2$.
On a

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = 1 + \frac{9}{8} - \frac{3}{4} = \frac{11}{8} < \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = a_1\,.$$

Montrons par récurrence que la suite est minorée par 1. On a

$$a_1 = \frac{3}{2} \geq 1\,,$$

et si $a_{n-1} \geq 1$, il suit que

$$a_n = 1 + \frac{1}{2}a_{n-1}^2 - \frac{1}{2}a_{n-1} = 1 + \frac{1}{2}a_{n-1}\left(a_{n-1} - 1\right) \geq 1\,.$$

De plus, la fonction $g(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ est croissante pour tout $x > 1$: si $x > y > 1$, on a $2(g(x) - g(y)) = x^2 - x - y^2 + y = (x-y)(x+y) - (x-y) = (x-y)(x+y-1) > 0$. Alors en remarquant que $1 < (a_n) \leq \frac{3}{2}$, par Ex. 4(ii) et (iii) la suite (a_n) est décroissante et bornée, donc convergente, et sa lilmite est $a = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Exercice 7.

i) VRAI. $(|a_n|)_{n\geq 1}$ est clairement minorée par 0 et toute suite décroissante et minorée converge.

ii) VRAI. On a $|a_n| \leq |a_1|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

iii) FAUX. Contre-exemple : Prendre $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

iv) FAUX. Contre-exemple : Prendre $a_n = 1 + \dfrac{1}{n} = \dfrac{n+1}{n}$. Alors $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{n}{n+1}$ qui est convergente et donc bornée.

v) VRAI. On a $|a_{n+1}| < |a_n| \Leftrightarrow a_{n+1}^2 < a_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $(a_n^2)_{n\,\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, $(a_n^2)_{n\,\in\mathbb{N}}$ est clairement minorée par 0. Toute suite décroissante et minorée converge.

vi) FAUX. Contre-exemple : Prendre $a_n = \dfrac{n+1}{n}$. Alors $\dfrac{1}{a_n^2} = \dfrac{n^2}{(n+1)^2}$ qui converge vers 1.

vii) FAUX. Contre-exemple : Prendre $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. Alors $|a_{n+1} - a_n| > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8.

i) On a $a_n = \sin\left(2+\frac{1}{n+1}\right) = (\sin 3,\ \sin(2+\frac{1}{2}),\ \sin(2+\frac{1}{3}),\ \sin(2+\frac{1}{4}),\ldots)$. Puisque $\sin(x)$ est décroissante sur $[2,3]\subset[\pi/2,\pi]$, on a $x_n = \sup\{a_k, k\geq n\} = (\sin(2),\ \sin(2),\ \sin(2),\ldots)$ et $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sin(2)$. On a aussi $z_n = \inf\{a_k, k\geq n\} = a_n$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n = \sin(2)$. Alors la suite est convergente et $\lim_{n\to\infty} a_n = \sin(2)$. On trouve facilement $\sup\{a_n\}_{n\in N} = \sin(2)$ et $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \sin(3)$.

ii) On a $a_n = \sin\left(2+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right) = (\sin 3,\ \sin(2-\frac{1}{3}),\ \sin(2+\frac{1}{5}),\ \sin(2-\frac{1}{7}),\ \sin(2+\frac{1}{9}),\ldots)$. Puisque $\sin(x)$ est décroissante sur $[2-\frac{1}{3},3]\subset[\pi/2,\pi]$, on a

$$x_n = \sup\{a_k, k\geq n\} = \left(\sin\left(2-\tfrac{1}{3}\right),\ \sin\left(2-\tfrac{1}{3}\right),\ \sin\left(2-\tfrac{1}{7}\right),\ \sin\left(2-\tfrac{1}{7}\right),\ \ldots\right) =$$

$$= \sin\left(2-\tfrac{1}{2(n+1)+(-1)^n}\right),$$

et $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sin(2)$. On a aussi

$$z_n = \inf\{a_k, k\geq n\} = \left(\sin 3,\ \sin\left(2+\tfrac{1}{5}\right),\ \sin\left(2+\tfrac{1}{5}\right),\ \sin\left(2+\tfrac{1}{9}\right), \sin\left(2+\tfrac{1}{9}\right),\ \ldots\right) =$$

$$= \sin\left(2+\tfrac{1}{2(n+1)+(-1)^{n+1}}\right),$$

et $\liminf_{n\to\infty} a_n = \sin(2)$. Alors la suite est convergente et $\lim_{n\to\infty} a_n = \sin(2)$. On trouve facilement $\sup\{a_n\}_{n\in N} = \sin(2-\frac{1}{3})$ et $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \sin(3)$.

iii) On a $a_n = \cos(\pi n) + \frac{(-1)^n}{n+1} = (2,\ -1-\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ -1-\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{5},\ldots)$. On obtient

$$x_n = \sup\{a_k, k\geq n\} = (2, 1+\tfrac{1}{3},\ 1+\tfrac{1}{3},\ 1+\tfrac{1}{5},\ 1+\tfrac{1}{5},\ \ldots) =$$

$$= 1+\tfrac{1}{n+\frac{3+(-1)^{n+1}}{2}},$$

et $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$. On a aussi

$$z_n = \inf\{a_k, k\geq n\} = (-1-\tfrac{1}{2},\ -1-\tfrac{1}{2},\ -1-\tfrac{1}{4},\ -1-\tfrac{1}{4},\ \ldots) =$$

$$= -1-\tfrac{1}{n+\frac{3+(-1)^n}{2}},$$

et $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$. Puisque $\liminf_{n\to\infty} a_n \neq \limsup_{n\to\infty} a_n$, la suite diverge. On trouve facilement $\sup\{a_n\}_{n\in N} = 2$ et $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = -\frac{3}{2}$.

Exercice 9.

i) VRAI. Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge vers S. On a $a_n = \sum_{n=0}^{n} a_n - \sum_{n=0}^{n-1} a_n$.
Or, $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{n} a_n - \sum_{n=0}^{n-1} a_n\right) = S - S = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} |a_n|$.

ii) FAUX. Contre-exemple : Prendre $a_n = \dfrac{1}{2\,(n+1)}$ et $b_n = \dfrac{1}{n+1}$.

iii) FAUX. Contre-exemple : Prendre $a_n = (-1)^n$.

iv) VRAI. Remarquons tout d'abord que la suite de sommes partielles est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = |a_{n+1}| \geq 0$. De plus, (S_n) est bornée donc majorée. Toute suite croissante et majorée converge. Donc $\exists S \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{n} |a_n| = S$. Ce qui démontre que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument.

v) FAUX. Contre-exemple : $a_n = \dfrac{1}{2}$.

vi) FAUX. Contre-exemple : $a_n = -n$.

vii) VRAI. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge absolument.

viii) VRAI. La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes. $\sum\limits_{n=1}^{n} a_n$ converge absolument. Donc d'après Q1, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|a_n| \leq 1$. Décomposons notre série : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |a_n| = A + B$ car la série converge. En remarquant que $\forall |x| < 1$ on a $x^2 < |x|$, nous pouvons écrire que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{n_0-1} a_n^2 + \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n^2 \leq \sum\limits_{n=1}^{n_0-1} a_n^2 + B$. Le premier terme étant une somme finie, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

ix) FAUX. On a pour tout $n \geq 2$ que $\sqrt{n} \leq n$ et donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme la série harmonique diverge, on conclut par le critère de comparaison que la série en question diverge aussi.