Anna Lachowska

Analyse I – Série 6

Exercice 1. (Calcul des limites)
Calculer la limite lorsque $n \to \infty$ de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

i) $a_n = \left(\sqrt{n^2 + an + b} - n\right)$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

ii) $a_n = \left(\sqrt{2n^2 - n + 1} - 2n\right)$.

iii) $a_n = \dfrac{(3n + 8)\cos(6n^2 + n + 1)}{n^2 + 2n + 6}$

iv) $a_0 = 1$, et $a_n = \sqrt[n]{n}$, $\quad n \geq 1$. Astuce: Par la définition de la limite. Essayer de trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|a_n - 1| \leq \varepsilon$ pour ε arbitraire. Utiliser l'inégalité $(1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$ pour tout $x \geq 0$.

v) $a_n = \sqrt[n]{P(n)}$, où $P(x)$ est un polynôme avec le coefficient dominant strictement positif. Astuce: Si $P(n) = b_k n^k + \ldots + b_0$ avec $b_k > 0$, considerer la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{b_k n^k}$ et trouver les deux gendarmes pour (a_n).

Exercice 2. (Calcul des limites)

Calculer les limites suivantes :

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\sqrt{n^2 + 2}\right)}{2n + 1}$

ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 \cos\left(\tfrac{1}{n^2}\right) \sin\left(\tfrac{1}{n^3}\right)$

iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n + 1) - \sin(n - 1)}{\cos(n + 1) + \cos(n - 1)}$

iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{n^3 + n^2 + 1}\right)}{n^3 + n^2 + 1}$

v) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 3n + 4}}{2}$

vi) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n^3 + n} - \sqrt{n^3 + 1}\right)$

vii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{7^n} \cos\left(\frac{7^n}{(n + 1)^3}\right)$

viii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\, 3^n e^{-3n}$

Exercice 3. (Limites des suites définies par récurrence)

Soient $a_0 \in \mathbb{R}$ et la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit la suite (a_n) par $a_{n+1} = g(a_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer la convergence et calculer la limite de (a_n) pour

i) $g(x) = \dfrac{1}{4}(3x + 1)$, $\quad a_0 = 0$

ii) $g(x) = \dfrac{1}{4}(x + 4)$, $\quad a_0 = 3$

iii) $g(x) = \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{1 + x}$, $\quad a_0 = 1$

Exercice 4. (Limites des suites définies par récurrence)
Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble, et $g : E \longrightarrow E$ une application. Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $a_0 \in E$ et $a_{n+1} = g(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prouver que

$i)$ S'il existent $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq g(x) \leq M$ pour tout $x \in E$, alors la suite (a_n) est bornée.
$ii)$ Si pour tout $x_1, x_2 \in E$ tels que $x_1 \leq x_2$, on a $g(x_1) \leq g(x_2)$, alors (a_n) est monotone.
$iii)$ Si les deux propriétés $i)$ et $ii)$ sont satisfaites pour $g(x)$, la suite (a_n) est convergente.
$iv)$ Qu'est-ce qu'on peut dire de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $x_1, x_2 \in E$ tels que $x_1 \leq x_2$, on a $g(x_1) \geq g(x_2)$?
$v)$ Utiliser la propriété $iii)$ pour démontrer que la suite

$$a_0 = 2, \qquad a_{n+1} = 7 - \frac{6}{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

est convergente. Trouver sa limite.

Exercice 5. (Limites des suites définies par récurrence)

Soit $b > 0$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{b + a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prouver que la suite converge et calculer sa limite.

Exercice 6. (Convergence d'une suite)

Montrer que la suite (a_n) converge et calculer sa limite :

$$a_1 = \frac{3}{2}\ , \qquad a_n = 1 + \frac{1}{2}a_{n-1}^2 - \frac{1}{2}a_{n-1}\ , \qquad \text{pour } \ n = 2, 3, \dots\ .$$

Exercice 7. (V/F : Suite à valeurs absolues décroissantes)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique telle que $|a_{n+1}| < |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$i)$ Alors $(|a_n|)$ converge.

$ii)$ Alors (a_n) est bornée.

$iii)$ Alors (a_n) converge.

$iv)$ Alors $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ n'est pas bornée.

$v)$ Alors (a_n^2) converge.

$vi)$ Alors $\left(\dfrac{1}{a_n^2}\right)$ diverge.

$vii)$ Alors $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$.

Exercice 8. ($\limsup\limits_{n\to\infty}$ et $\liminf\limits_{n\to\infty}$)

Pour les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, trouver $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Si la suite est convergente, calculer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Finalement, trouver $\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

i) $a_n = \sin\left(2 + \frac{1}{n+1}\right)$

ii) $a_n = \sin\left(2 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$

iii) $a_n = \cos(\pi n) + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 9. (V/F : Séries)

Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques.

i) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

ii) Si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

iii) Si la suite des sommes partielles $(S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n)$ est bornée, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

iv) Si la suite des sommes partielles $(S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_n|)$ est bornée, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

v) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ tel que $|l| < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

vi) Si (a_n) est strictement décroissante, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

vii) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

viii) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

ix) La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.