§2.6. Le nombre e.

Proposition. Soit (x_n) : $x_0 = 1$, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\forall n \geq 1$; (y_n) : $y_0 = 1$, $y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ $\forall n \geq 1$.

Alors : (1) $x_n \leq y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(2) $y_n \leq 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(3) $(y_n)\uparrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(4) $(x_n)\uparrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(2), (3) $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell \leq 3$; (1)–(4) $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell' \leq 3$

Dém: (1) $x_0 \leq y_0$; $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$

$$\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1}\,\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1}\,\underbrace{\frac{n-2}{n}}_{\leq 1}\cdots\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k!}$$

$$x_n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = y_n \quad \forall n \geq 1$$

(2) $\forall k \geq 2$: par recurrence : $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$: base: $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ vrai. ✓

hérédité : $\frac{1}{k!} = \underbrace{\frac{1}{(k-1)!}}_{\leq \frac{1}{2^{k-2}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{k}}_{\leq \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^{k-2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{k-1}}$ ✓ $\Rightarrow$ par recurrence on a:

supposition $\rightarrow$

$$y_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La formule: $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$ $\forall x \neq 1$; Soit $x = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow y_n \underset{x=\frac{1}{2}}{\leq} 1 + \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{1 + x + \ldots + x^{n-1}} = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3. \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(3) $y_{n+1} = \underbrace{1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}}_{y_n} + \frac{1}{(n+1)!} = y_n + \frac{1}{(n+1)!} > y_n \Rightarrow (y_n) \uparrow$.

(4) $(x_n) \uparrow$ Voir [DZ §2.4.2] $\blacksquare$

Déf

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{déf}}{=} e}$$

Proposition. $\lim_{n\to\infty} y_n = e$ [DZ §2.4.4]

$$e = 2.71828182845904523536\ldots\ldots$$

Calcul des limites.

Cours du 10 octobre

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ pour tout $p > 0$.
2. Soient $x_n = a_p n^p + \ldots + a_0$ et $y_n = b_q n^q + \ldots + b_0$ deux suite polynômiales telles que $a_p > 0, b_q > 0$. Alors:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) &= 0, && \text{si} \quad p < q \\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) &= \frac{a_p}{b_q}, && \text{si} \quad p = q \\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) &= \infty, && \text{si} \quad p > q \end{aligned}$$

Cours du 15 oct.

3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pour tout $a > 0$.
4. La suite géométrique $(a_0 r^n)$, $a_0, r \in \mathbb{R}$, converge vers la limite $\lim_{n\to\infty} a_0 r^n = 0$, si $|r| < 1$, et diverge si $|r| > 1$.
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{n!} = 0$ pour tout $p > 0$.
6. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. ← Cours du 17 octobre

Série 5

7. $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.
8. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.
9. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$.
10. $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

§2.7. Suites définies par récurrence.

Soit $x_0 = a \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.

Questions : convergence ; si la suite converge, calculer sa limite

Ex 1 $x_0 = 1$; $x_{n+1} = 5 + \frac{6}{x_n}$ $\left(\Rightarrow x_1 = 5 + \frac{6}{1} = 11,\ x_2 = 5 + \frac{6}{11}, \dots \right)$

(1) Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell \neq 0$. Alors $\frac{1}{x_n}$ est convergente vers $\frac{1}{\ell}$.

$\Rightarrow$ on obtient l'équation sur ℓ : $\ell = 5 + \frac{6}{\ell} \Rightarrow \ell^2 - 5\ell - 6 = 0$

$$\Rightarrow \ell = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow \ell = 6 \ ; \ \ell = -1.$$

(2) $x_n > 0 \ \forall n$ (par récurrence : $x_0 = 1 > 0 \Rightarrow x_{n+1} = 5 + \underbrace{\frac{6}{x_n}}_{\substack{>0 \\ \text{Supposition}}} > 5 > 0 \ \forall n \geq 1$.)

Alors si la limite existe, elle est 6.

(3) $$|x_{n+1} - \ell| = \left|5 + \frac{6}{x_n} - \left(5 + \frac{6}{\ell}\right)\right| = \left|\frac{6}{x_n} - \frac{6}{\ell}\right| = \frac{6|\ell - x_n|}{\underbrace{|x_n|}_{>5} \cdot \underbrace{|\ell|}_{>5}} < \frac{6}{25}\underbrace{|\ell - x_n|}_{< \frac{6}{25}|\ell - x_{n-1}|} < \left(\frac{6}{25}\right)^2 |\ell - x_{n-1}| < \dots$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}{0} \leq |x_{n+1} - \ell| < \underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}{\left(\frac{6}{25}\right)^{n+1} |\ell - x_0|}$$

suite géométrique avec $r = \frac{6}{25} < 1$

$\Rightarrow$ par les 2 gendarmes on a $\lim\limits_{n\to\infty} |x_{n+1} - \ell| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - \ell) = 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell = 6}$

Proposition (Récurrence linéaire).

Soit $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = g(a_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ où $g(x) = qx + b$, $q, b \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$.

Alors (1) si $|q| < 1$ $\Rightarrow$ (a_n) est convergente vers $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{b}{1-q}$.

$a_{n+1} = q a_n + b$

Dém: Supposons que (a_n) converge $\Rightarrow$ l'équation pour la limite est $\ell = q\ell + b$ $\Rightarrow$ $\ell = \frac{b}{1-q}$.

Convergence: $\forall n \geq 1$

$$0 \leq |a_{n+1} - \ell| = |q a_n + \cancel{b} - (q\ell + \cancel{b})| = |q|\underbrace{|a_n - \ell|}_{= |q||a_{n-1}-\ell|} = \cdots = |q|^{n+1}|a_0 - \ell|$$

$|q|^{n+1}|a_0-\ell| \to 0$ suite géométrique avec $r = |q| < 1$.

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - \ell| = 0 \Rightarrow \lim a_n = \ell = \frac{b}{1-q}.$$

$\blacksquare$

Exercice: (2) Si $a_{n+1} = q a_n + b$, $|q| > 1$ et $a_0 \neq \frac{b}{1-q}$ $\Rightarrow$ la suite diverge.

$\ell = q\ell + b$ $\Rightarrow$ $|a_{n+1} - \ell| = |q|^{n+1}\underbrace{|a_0 - \ell|}_{\neq 0}$, $|q| > 1 \Rightarrow |a_{n+1} - \ell|$ n'est pas bornée $\Rightarrow (a_n)$ n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente

(3) Si $q = 1$ $\Rightarrow a_{n+1} = a_n + b \Rightarrow a_n = a_0 + nb$ suite arithmétique, si $b \neq 0 \Rightarrow$ divergente.

(4) Si $q = -1$ $\Rightarrow a_1 = -a_0 + b$, $a_2 = -a_1 + b = a_0 - b + b = a_0$, $a_3 = -a_2 + b = -a_0 + b$, et ainsi de suite ....

$\Rightarrow a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = a_{2k}$; $a_1 = -a_0 + b = a_3 = a_5 = \ldots = a_{2k+1}$

$\Rightarrow (a_n)$ est divergente sauf si $a_0 = -a_0 + b \Leftrightarrow a_0 = \frac{b}{2}$.

Proposition. Si (x_n), (a_n) deux suites, $0 < a_n < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\exists \ell \in \mathbb{R}$: $(x_{n+1} - \ell) = a_n (x_n - \ell)$. Alors (x_n) converge. (Série 5)

Proposition Si $x_0 \in \mathbb{R}$, $g : \overset{\subset \mathbb{R}}{E} \to E \subset \mathbb{R}$ une fonction telle que

(1) $\exists m, M \in \mathbb{R}$: $m \leq g(x) \leq M$ $\forall x \in E$.

(2) g est croissante : $\forall x_1, x_2 \in E \cdot x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$.

Alors la suite définie par $x_0 \in E$, $x_{n+1} = g(x_n)$ est bornée et monotone $\Rightarrow$ convergente. (Série 6).

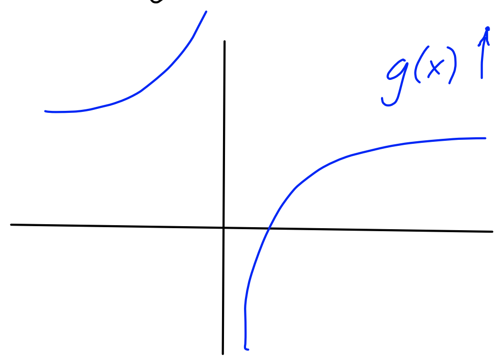
Remarque Si (2) est remplacée par $x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2)$ (g est décroissante).
$\Rightarrow$ alors (x_n) n'est pas monotone (mais elle peut être convergente).

Ex 2 $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$, $x_0 = 4$ $\Rightarrow g(x) = 5 - \frac{6}{x}$ est croissante

$x_0 = 4$, $x_1 = 5 - \frac{6}{4} = \frac{7}{2} < x_0$ Si $x_{n+1} < x_n \overset{g(x)\uparrow}{\Rightarrow} \underbrace{g(x_{n+1})}_{x_{n+2}} < \underbrace{g(x_n)}_{x_{n+1}}$

$\Rightarrow x_{n+2} \leq x_{n+1}$

$\Rightarrow (x_n) \downarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$



Si $x > 3 \Rightarrow g(x) = 5 - \frac{6}{x} > 5 - \frac{6}{3} = 3 \Rightarrow$ On a $x_0 = 4 > 3 \Rightarrow$ alors $x_1 > 3$, $x_2 > 3$, … $x_n > 3$ $\forall n$

$\Rightarrow x_n > 3$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)$ est minorée par 3; $(x_n) \downarrow \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$

L'équation pour la limite : $\ell = 5 - \frac{6}{\ell} \Rightarrow \ell^2 - 5\ell + 6 = 0 \Rightarrow \ell = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = 3 ; 2$

puisque $(x_n) > 3$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$

Quelques méthodes pour étudier les suites définies par récurrence.

(1) Trouver la limite en supposant qu'elle existe (Si l'équation n'admet pas de solution, la suite diverge)

(2) Étudier la convergence:

(a) Récurrence linéaire. $x_{n+1} = q x_n + b$ =>

Si $|q| < 1$ => $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{1-q}$

Si $|q| > 1$ => (x_n) diverge sauf si $x_0 = \frac{b}{1-q}$, où la suite est constante.

(b) Si $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g(x)$ croissante => la suite est monotone

=> essayer de démontrer que (x_n) est majorée (minorée)

Si $(x_n)\uparrow$ et majorée ou $(x_n)\downarrow$ et minorée => convergente.

(c) $x_{n+1} = g(x_n)$ et $g(x)$ n'est pas croissante

=> essayer de démontrer que $|x_{n+1} - \ell| = a_n |x_n - \ell|$ où $0 < a_n < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

=> (x_n) est convergente ; Si $|x_{n+1} - \ell| \leq b_n |x_n - \ell|$ et $0 < b_n < \rho < 1$

=> $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$ (Ex 1).

(d) Démontrer que (x_n) est une suite de Cauchy (à voir plus tard)

=> (x_n) est convergente [DZ Ex. 2.7.3.]

§ 2.8. Sous-suites. Suites de Cauchy.

Déf Une sous-suite d'une suite (a_n) est une suite $k \to a_{n_k}$, où $k \to n_k$ est une suite strictement croissante d' naturels.

Ex. $a_n = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 1$

$a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = -1$

mais (a_n) est divergente.

Proposition (convergence d'une sous-suite)

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \Rightarrow$ toute sous-suite (a_{n_k}) converge aussi vers ℓ.

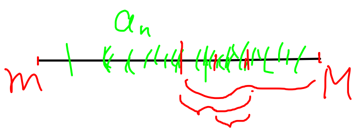
Dém: Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Donc $\forall k \geq n_0 \Rightarrow n_k \geq k \geq n_0 \Rightarrow |a_{n_k} - \ell| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell$. ▨

Théorème Bolzano-Weierstrass. Dans toute suite bornée il existe une sous-suite convergente.

Idée: $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq (a_n) \leq M. \Rightarrow$ On divise l'intervalle $[m, M]$ par 2.

On retient la moitié contenant un nombre infini d'éléments de (a_n)



Puis on recommence. La longueur des intervalles $= \frac{M-m}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

En choisissant un élément dans chaque intervalle, on obtient une sous-suite convergente. ▨

Ex. $a_n = \sin n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow -1 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)$ est bornée.

mais (a_n) est divergente (voir p. 73 du cours)

On va construire une sous-suite convergente.

$\exists$ une suite des rationnels convergente vers π :

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \dots \longrightarrow \pi \qquad \text{Si } \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi \Rightarrow (\pi y_n - x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow (\pi - 3), (7\pi - 22), (106\pi - 333), \dots \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin(3)}_{\text{proche à } \sin(\pi)}, \underbrace{\sin(22)}_{\sin(7\pi)}, \underbrace{\sin(333)}_{\sin(106\pi)}, \dots \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ on obtient une sous-suite convergente:

$$\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = 0.$$