Pierre Julg

Travaux de N. Higson et G. Kasparov sur la conjecture de Baum-Connes

Séminaire N. Bourbaki, 1997-1998, exp. n^o 841, p. 151-183.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1997-1998__40__151_0>

Séminaire BOURBAKI
50ème année, 1997-98, n° 841

Mars 1998

TRAVAUX DE N. HIGSON ET G. KASPAROV SUR LA CONJECTURE DE BAUM-CONNES

par **Pierre JULG**

Soit X un complexe simplicial fini, connexe et asphérique ($\pi_i(X) = 0$ pour $i \geq 2$) et $G = \pi_1(X)$ son groupe fondamental. Soit $K_*(X)$ la K-homologie de X. On a un homomorphisme d'assemblage

$$\mu_r : K_*(X) \to K_*(C_r^*G)$$

où $K_*(C_r^*G)$ est la K-théorie topologique de la C^*-algèbre réduite de G. Cette dernière est par définition l'adhérence en norme de l'algèbre engendrée par les opérateurs de translation à gauche dans l'espace de Hilbert $\ell^2 G$.

Plus généralement, pour un groupe dénombrable G arbitraire, on considère le groupe de K-homologie équivariante du classifiant $\mathcal{E}G$ des actions propres de G, et l'homomorphisme d'assemblage

$$\mu_r : K_*^G(\mathcal{E}G) \to K_*(C_r^*G).$$

P. Baum et A. Connes ont proposé la conjecture suivante (*cf.* [BC0,1,2], [BCH]).

Conjecture.— *L'homomorphisme μ_r est un isomorphisme.*

On peut définir la K-homologie comme la théorie homologique généralisée associée au spectre de la K-théorie topologique [FRR]. Mais pour attaquer la conjecture de Baum-Connes, on a besoin d'une construction *analytique* d'éléments de la K-homologie. M. Atiyah [At] a montré comment les opérateurs elliptiques fournissent des éléments de K-homologie, et G. Kasparov [K1] en a tiré une définition de la K-homologie d'un espace compact en termes de modules de Fredholm. C'est cette réalisation de $K_*(X)$ que nous utiliserons car elle est adaptée au point de vue de la théorie des C^*-algèbres.

L'*injectivité* de μ_r est maintenant démontrée pour de très vastes classes de groupes. Ces résultats sont à rapprocher de ceux relatifs aux applications d'assemblage à valeurs dans la K-théorie algébrique ou la L-théorie de l'anneau $\mathbf{Z}G$ [FRR]. L'injectivité rationelle de μ_r implique la conjecture de Novikov sur l'invariance par homotopie des hautes signatures et la conjecture de Gromov-Lawson-Rosenberg sur l'obstruction à l'existence de métriques riemanniennes à courbure scalaire positive ou nulle.

La *surjectivité* de μ_r est d'une nature différente. Elle implique par exemple, lorsque G est sans torsion, la conjecture de Kaplansky-Kadison selon laquelle C_r^*G n'admet aucun idempotent autre que 0 et 1. Le problème de la surjectivité de μ_r fait en outre apparaître une difficulté spécifique au cadre des C^*-algèbres. Si on remplace la C^*-algèbre C_r^*G par la C^*-algèbre C^*G obtenue en considérant *toutes* les représentations unitaires de G, l'application d'assemblage $\mu : K_*^G(\mathcal{E}G) \to K_*(C^*G)$ n'est en général pas surjective. Cela se produit par exemple pour les groupes $SL(n, \mathbf{Z})$ dès que $n \geq 3$. Cette difficulté est liée au fait que ces groupes ont la *propriété de Kazhdan* ou *propriété* (T). (*)

Nous nous intéresserons dans cet exposé à des groupes G ayant la propriété suivante :

G admet une action métriquement propre par isométries affines sur un espace de Hilbert.

U. Haagerup a montré en 1978 [Ha] que les groupes libres satisfont cette propriété, que nous appelerons *propriété de Haagerup.* Un groupe dénombrable qui la satisfait n'admet aucun sous-groupe infini ayant la propriété (T). Elle est vérifiée par un certain nombre de groupes intéressants : groupes moyennables ; groupes agissant proprement sur des arbres, des produits d'arbres ou des complexes cubiques $CAT(0)$; groupes de Coxeter ; sous-groupes discrets des groupes de Lie $SO_0(n,1)$ ou $SU(n,1)$; groupe $SL_2(K)$ où K est un corps global...

En 1996, N. Higson et G. Kasparov ont démontré le théorème suivant [HK] :

THÉORÈME.— *Si G a la propriété de Haagerup, alors G satisfait la conjecture de Baum-Connes.*

Nous en donnerons au paragraphe 3.6 un énoncé plus complet et, aux chapitres 4 et 5, une esquisse de démonstration.

Au cours de la préparation de cet exposé, Thomas Delzant et Alain Valette m'ont constamment aidé, conseillé et encouragé. Qu'ils en soient grandement remerciés. Ma gratitude va également à toutes celles et tous ceux qui m'ont apporté leurs

(*) Au moment de l'exposé, on ne savait démontrer la surjectivité pour aucun groupe infini dénombrable ayant la propriété (T). Depuis, Vincent Lafforgue [L1] a démontré la conjecture de Baum-Connes pour certains de ces groupes (*cf.* 3.6 ci-dessous).

éclaircissements ou leurs critiques : Claire Anantharaman-Delaroche, Nigel Higson, Paul Jolissaint, Gennadi Kasparov, Florence Lecomte, Roger Plymen, Jean Renault, Georges Skandalis, Jean-Louis Tu.

1. LA PROPRIÉTÉ DE HAAGERUP

1.1. Action par isométries affines sur un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert affine, c'est-à-dire un espace affine associé à un espace de Hilbert (réel ou complexe). Soit G un groupe dénombrable. On suppose que H est muni d'une action de G par isométries affines, c'est-à-dire un homomorphisme de G dans le groupe des isométries affines de H. Il est utile de noter le fait suivant :

Lemme.— Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *il existe un point de H fixe par G ;*

(ii) *toute orbite est bornée ;*

(iii) *il existe une orbite bornée.*

La seule assertion non triviale est que (iii) implique (i). Voir dans [HV] une jolie démonstration (due à Serre) basée sur le théorème de la médiane.

Les actions de G par isométries affines sur des espaces de Hilbert sont reliées à la 1-cohomologie des représentations unitaires de G. Soit en effet π une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert H_π. La 1-cohomologie de G à valeurs dans cette représentation est par définition le quotient

$$H^1(G,\pi) = Z^1(G,\pi)/B^1(G,\pi)$$

où $Z^1(G,\pi)$ est l'espace vectoriel des applications $b : G \to H_\pi$ vérifiant la relation de cocycle $b(gg') = b(g) + \pi(g)b(g')$, et $B^1(G,\pi)$ le sous-espace vectoriel constitué des $b : G \to H_\pi$ de la forme $b(g) = \pi(g)\xi - \xi$ où $\xi \in H_\pi$.

Si b est un élément de $Z^1(G,\pi)$, on définit une action de G par isométries affines sur l'espace de Hilbert H_π en posant pour $g \in G$ et $\xi \in H_\pi$,

$$g.\xi = \pi(g)\xi + b(g).$$

Cette action admet un point fixe si et seulement si $b \in B^1(G,\pi)$.

Notons que le lemme ci-dessus a la conséquence suivante :

COROLLAIRE.— *Soit $b \in Z^1(G,\pi)$ où π est unitaire. Alors $b \in B^1(G,\pi)$ si et seulement si b est borné, c'est-à-dire* $\sup_g \|b(g)\| < \infty$.

Réciproquement, toute action de G par isométries affines sur un espace de Hilbert donne lieu à une classe de 1-cohomologie, qui est triviale si et seulement si l'action admet un point fixe.

On s'intéressera plutôt par la suite à des actions par isométries affines qui n'ont pas de point fixe.

DÉFINITION.— *On dit qu'une action de G par isométries affines sur un espace de Hilbert est métriquement propre si quelles que soient les parties bornées B_1 et B_2 de H, l'ensemble des $g \in G$ tels que $g(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$ est fini.*

Cela équivaut à dire que, pour tout $x \in H$ (ou pour un $x \in H$), $\|gx - x\| \to \infty$ quand $g \to \infty$. En termes de 1-cocycle, cela se traduit par le fait que $b \in Z^1(G, \pi)$ est *propre* : $\lim_{g \to \infty} \|b(g)\| = \infty$.

Si le groupe G est infini, une telle action n'a pas de point fixe.

Remarque.— On peut caractériser les fonctions sur G qui sont de la forme $g \mapsto \|b(g)\|^2$ pour un certain $b \in Z^1(G, \pi)$ avec π unitaire. Ce sont les fonctions φ à valeurs réelles telles que pour tous $g_1,\ldots,g_n \in G$ et tous $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbf{C}$ vérifiant $\sum \lambda_i = 0$, on a

$$\sum_{i,j} \bar{\lambda}_i \lambda_j \varphi(g_i^{-1} g_j) \leq 0.$$

Ces fonctions sont dites *conditionnellement de type négatif* (*cf.* [HV]).

1.2. Propriétés de Kazhdan et de Haagerup

Soit G un groupe dénombrable.

DÉFINITION.— *On dit que G a la propriété de Kazhdan ou propriété T s'il satisfait les propriétés équivalentes suivantes :*

(i) *toute action de G par isométries affines sur un espace de Hilbert admet un point fixe ;*

(ii) *pour toute représentation unitaire π de G, $H^1(G, \pi) = 0$;*

(ii') *pour toute représentation unitaire π de G, tout 1-cocycle $b \in Z^1(G, \pi)$ est borné ;*

(iii) *toute fonction conditionnellement de type négatif sur G est bornée.*

DÉFINITION.— *On dit que G a la propriété de Haagerup s'il satisfait les propriétés équivalentes suivantes :*

(i) *il existe une action de G par isométries affines sur un espace de Hilbert qui est métriquement propre ;*

(ii) *il existe une représentation unitaire π de G et un 1-cocycle $b \in Z^1(G,\pi)$ qui est propre* ;

(iii) *il existe une fonction conditionnellement de type négatif sur G qui est propre.*

Un groupe infini ne saurait être à la fois de Kazhdan et de Haagerup. Mieux:

PROPOSITION.— *Si G vérifie la propriété de Haagerup, aucun de ses sous-groupes infinis ne possède la propriété de Kazhdan.*

Notons que la propriété de Haagerup est stable par passage aux sous-groupes et par produits directs. Il n'en est pas de même pour les produits semi-directs. Ainsi, le produit semi-direct G de $\mathbf{Z}^2$ par $SL_2(\mathbf{Z})$ n'a pas la propriété de Haagerup car la paire $(G, \mathbf{Z}^2)$ a la propriété (T) relative (*cf.* [HV]). Ce groupe fournit également un contre-exemple à la réciproque de la proposition ci-dessus. Voir [Jo] et [JJV].

Remarque.— Le fait que les groupes libres vérifient la propriété de Haagerup apparaît chez U. Haagerup [Ha] en 1978. Cette propriété est définie et étudiée par C. Akeman et M. Walter [AW] en 1981 (propriétés équivalentes 3A et 3B) et M. Choda [Ch] en 1983 (propriété (H)). En 1983 A. Connes a posé la question du lien entre cette propriété et la K-théorie des C^*-algèbres de groupes. Ce lien apparaît dans le calcul de la K-théorie des groupes agissant sur les arbres ([JV],[Pi]). En 1992 M. Gromov [Gro] a popularisé cette propriété sous le nom d'*a-T-menability.* C'est sous le nom de *propriété d'approximation de Haagerup* qu'elle a été étudiée dans les années 90 en liaison avec la théorie des algèbres de von Neumann [A-D][Ro1][Jo].

1.3. Vecteurs presque invariants

DÉFINITION.— *On dit qu'une représentation unitaire π de G a presque des vecteurs invariants si, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute partie finie F de G, il existe un vecteur unitaire $\xi \in H_\pi$ tel que pour tout $g \in F$, $\|\pi(g)\xi - \xi\| \leq \varepsilon$.*

Rappelons les deux faits suivants :

(i) Le groupe G est moyennable si et seulement si la représentation régulière gauche a presque des vecteurs invariants. Voir par exemple [P] ou [Di].

(ii) Le groupe G a la propriété de Kazhdan si et seulement si toute représentation unitaire admettant presque des vecteurs invariants admet un vecteur fixe non nul. Ceci est en fait la définition originale de [Kazh] et [DK]. Pour l'équivalence des deux définitions, due à Guichardet et Delorme, voir [HV].

PROPOSITION (P. Jolissaint [Jo]).— *Le groupe G a la propriété de Haagerup si et seulement s'il admet une représentation unitaire π vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *π a presque des vecteurs invariants ;*

(ii) *les coefficients de π (c'est-à-dire les fonctions $g \mapsto (\pi(g)\xi, \xi)$) tendent vers zéro à l'infini.*

Démontrons que (i) *et* (ii) *impliquent Haagerup.* Soit F_k une famille croissante exhaustive de parties finies de G. Fixons des suites de réels positifs ε_k tendant vers zéro et α_k tendant vers l'infini, avec $\sum_k \alpha_k^2 \varepsilon_k^2 < \infty$. Par l'hypothèse (i) on a une suite de vecteurs unitaires ξ_k de H_π tels que pour tout $g \in F_k$, $\|\pi(g)\xi_k - \xi_k\| \leq \varepsilon_k$. On prend alors la somme d'une infinité dénombrable de copies de π, et on définit le cocycle

$$b(g) = \bigoplus_k \alpha_k(\pi(g)\xi_k - \xi_k).$$

Montrons que l'ensemble des $g \in G$ tels que $\|b(g)\| \leq R$ est fini. Pour un tel g, on a $\alpha_k\|\pi(g)\xi_k - \xi_k\| \leq R$ pour tout k. En choisissant k tel que $\alpha_k \geq R$, on a $\|\pi(g)\xi_k - \xi_k\| \leq 1$. Or ceci ne se produit que pour un nombre fini de $g \in G$ puisque

$$\|\pi(g)\xi_k - \xi_k\|^2 = 2(1 - (\pi(g)\xi_k, \xi_k)) \to 2$$

quand $g \to \infty$, les coefficients de π tendant vers zéro par l'hypothèse (ii).

L'énoncé suivant, dû à B. Bekka, P.-A. Chérix et A. Valette [BChV], répond à une question de Gromov. C'est une conséquence de la partie de la proposition démontrée ci-dessus.

COROLLAIRE.— *Si le groupe G est moyennable, il possède la propriété de Haagerup.*

En effet, la représentation régulière gauche satisfait toujours la condition (ii) de la proposition.

1.4. Exemples de groupes ayant la propriété de Haagerup

Les exemples ci-dessous entrent dans le cadre général suivant.

PROPOSITION.— *Soient X un espace localement compact muni d'une action propre de G et H un espace de Hilbert muni d'une représentation unitaire π de G. On suppose qu'on a une application $c : X \times X \to H$ vérifiant les relations de cocycle et de G-équivariance :*

$$c(x,y) + c(y,z) = c(x,z)$$

$$c(gx,gy) = \pi(g)c(x,y)$$

pour $x,y,z \in X, g \in G$. Alors, pour tout $x_0 \in X$, $b(g) = c(x_0, gx_0)$ est un 1-cocycle sur G à valeur dans (H,π). Si en outre la fonction $\varphi(x,y) = \|c(x,y)\|^2$ vérifie

$\lim_{x\to\infty} \varphi(x,y) = \infty$ *pour tout* $y \in X$, *alors le cocycle* b *est propre et* G *a la propriété de Haagerup.*

Exemple 1.4.1 : *arbres*

Soient G un groupe agissant sur un arbre, S l'ensemble des sommets de l'arbre et A l'ensemble des arêtes orientées. Considérons l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur A qui sont telles que $f(-a) = -f(a)$ pour $a \in A$ où $-a$ est l'arête a munie de l'orientation opposée. Pour $a \in A$, on note δ_a l'élément de H qui vaut 1 sur a, -1 sur $-a$ et 0 ailleurs. H est naturellement muni d'une représentation π de G.

On définit alors pour $x, y \in S$ l'élément

$$c(x,y) = \sum_{[x,y]} \delta_a$$

où la somme est étendue aux arêtes a situées sur l'unique segment joignant x à y, et orientées dans le même sens. Alors $c : S \times S \to H$ vérifie les propriétés de cocycle et d'équivariance. En outre on a $\|c(x,y)\|^2 = d(x,y)$, la distance de x à y, ce qui montre la propreté. Ceci démontre le résultat suivant (*cf.* [Ha][W][Al][JV]).

THÉORÈME.— *Si* G *agit sur un arbre avec des stabilisateurs de sommets et d'arêtes finis, alors* G *possède la propriété de Haagerup.*

Par la théorie de Bass-Serre [Se], ces groupes sont les groupes fondamentaux de graphes de groupes finis. Pour des graphes finis, on obtient exactement les groupes contenant un groupe libre d'indice fini. Les exemples classiques en sont les groupes libres, les produits libres ou amalgamés de groupes finis, les extensions HNN de groupes finis. On peut d'ailleurs montrer [JJV] que si un graphe de groupe a des groupes de sommets ayant la propriété de Haagerup et des groupes d'arêtes *finis*, alors son groupe fondamental a la propriété de Haagerup.

Exemple 1.4.2 : *groupes de Coxeter*

Soit Σ un complexe de Coxeter [T]. On note $\mathrm{Ch}(\Sigma)$ et $\mathrm{Rac}(\Sigma)$ respectivement l'ensemble des chambres et des racines de Σ. Soit $d(C,C')$ la distance entre deux chambres C et C' définie au moyen des galeries. D'après [T], proposition 2.22, $d(C,C')$ est égal au nombre de racines contenant C et non C'. On fait alors la même construction que pour les arbres, en remplaçant sommets de l'arbre par chambres et arêtes par racines. Soit H l'espace de Hilbert des fonctions ℓ^2 sur $\mathrm{Rac}(\Sigma)$ telles que $f(-R) = -f(R)$ où $-R$ est la racine opposée. On définit $\gamma(C,C') = \sum_R \delta_R$ où la somme est étendue aux racines contenant C et non C'. C'est un cocycle à valeurs dans H et l'on a $\|\gamma(C,C')\|^2 = d(C,C')$. D'où le résultat suivant, démontré par Bożejko, Januszkiewicz et Spatzier [BJS] :

THÉORÈME.— *Les groupes de Coxeter vérifient la propriété de Haagerup.*

Exemple 1.4.3 : *complexes cubiques $CAT(0)$*

Il est clair que si les ensembles X_1 et X_2 et les espaces de Hilbert H_1 et H_2 vérifient les hypothèses de la proposition du début de ce paragraphe, alors il en est de même du produit $X_1 \times X_2$ et de l'espace de Hilbert $H_1 \oplus H_2$. On voit ainsi qu'un groupe agissant proprement sur un produit fini d'arbres a la propriété de Haagerup. Ceci s'applique par exemple aux groupes $\Gamma_{m,n}$ construits par Burger et Mozes [BM] qui sont simples, sans torsion et de présentation finie. Ils agissent proprement sur des produits de deux arbres homogènes et ont donc la propriété de Haagerup.

Un produit d'arbres est en fait un cas particulier de complexe cubique satisfaisant la propriété $CAT(0)$. Un complexe cubique est un complexe polyédral dont les cellules sont des cubes unités de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Un tel complexe peut être muni d'une distance géodésique complète. Cet espace métrique vérifie la condition $CAT(0)$ (c.à.d. se comporte comme une variété de Cartan-Hadamard) si et seulement s'il est simplement connexe et satisfait une certaine condition combinatoire locale de courbure négative (*cf.* [Gr]).

THÉORÈME.— *Si G agit proprement sur un complexe cubique vérifiant la propriété $CAT(0)$, alors G a la propriété de Haagerup.*

La démonstration, basée sur la même idée qu'en 1.3.1 ou 1.3.2, est due à Niblo et Reeves [NR]. Ce sont les hyperplans qui jouent ici le rôle des arêtes d'un arbre ou des racines d'un complexe de Coxeter. Les hyperplans d'un complexe cubique sont les sous-complexes obtenus en recollant des hyperplans médians de cubes. Sageev [Sa] a montré que si un complexe cubique X est $CAT(0)$, les hyperplans de X sont totalement géodésiques et séparent X en deux composantes connexes. En outre, le nombre d'hyperplans séparant x et y est égal à la distance de x à y sur le 1-squelette de X. On procède alors exactement comme précédemment pour construire sur l'ensemble des sommets de X un cocycle G-invariant et propre à valeurs dans l'espace ℓ^2 de l'ensemble des hyperplans de X.

Signalons enfin que dans le cas de la dimension 2, Ballmann et Świątkowski [BS] ont généralisé ce résultat à certains complexes polygonaux $CAT(0)$.

Exemple 1.4.4 : *espaces hyperboliques réels et complexes*

Le résultat suivant est dû à Faraut et Harzallah [FH] :

THÉORÈME.— *Si G agit proprement par isométries sur l'espace hyperbolique réel ou complexe, ou sur un produit de tels espaces, alors G a la propriété de Haagerup.*

En revanche, si G agit proprement et cocompactement sur l'espace hyperbolique quaternionien, ou sur le plan hyperbolique sur les octaves de Cayley, G a la propriété de Kazhdan (*cf.* [HV]).

La démonstration de Faraut et Harzallah (*cf.* [FH] ou [HV]) repose sur l'analyse des noyaux conditionnellement de type négatif. Robertson [Ro2] a donné une construction plus géométrique, utilisant les hyperplans de l'espace hyperbolique réel, dans l'esprit des exemples précédents. Elle ne marche cependant pas pour l'espace hyperbolique complexe. Nous donnons ci-dessous une autre démonstration, inspirée de la théorie des représentations des groupes de Lie simples de rang 1.

Soit X un espace riemannien symétrique non compact de rang 1, et G un groupe agissant proprement par isométries sur X. L'action de G se prolonge en une action par difféomorphismes sur la sphère ∂X, le bord de X.

On considère la représentation π de G dans l'espace vectoriel E des formes différentielles sur ∂X de degré maximal et d'intégrale nulle. On a un 1-cocycle G-invariant $c : X \times X \to E$ défini par $c(x, y) = \mu_y - \mu_x$ où pour $x \in X$ on désigne par μ_x la mesure de masse 1 obtenue en transportant sur ∂X la forme volume sur la sphère unité en x par l'application visuelle.

Fixons $x_0 \in X$. On définit le noyau f_{x_0} sur $\partial X \times \partial X$ privé de la diagonale par le produit scalaire de Gromov:

$$f_x(z, w) = \lim(d(z', w') - d(z', x) - d(w', x))$$

où $z' \in X$ tend vers $z \in \partial X$, et $w' \in X$ tend vers $w \in \partial X$.

PROPOSITION.— *Pour $\nu \in E$ l'intégrale*

$$q(\nu) = \int_{\partial X \times \partial X} f_{x_0}(z, w)\nu(z)\nu(w)$$

existe et est indépendante du choix de x_0. Elle définit une forme quadratique G-invariante sur E. En outre,

$$q(c(x, y)) = \varphi(d(x, y))$$

où φ est une application propre de $[0, +\infty[$ dans lui-même.

La spécificité des cas réel et complexe apparaît dans le fait suivant :

Lemme.— Si X est un espace hyperbolique réel ou complexe, la forme quadratique q est positive.

Démonstration.— Dans le modèle de la boule unité de K^n ($K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) avec $x = 0$, on a (avec $(z,w) = \sum \bar{z}_i w_i$)

$$f_x(z,w) = \log|1-(z,w)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \Re(z,w)^k$$

où les noyaux $\Re(z,w)^k$ sont de type positif.

On considère l'espace de Hilbert H séparé complété de E pour q. On note encore π la représentation unitaire de G dans H et c le cocycle $X \times X \to H$. La proposition qui ouvre le paragraphe 1.4 montre alors que G a la propriété de Haagerup.

Exemple 1.4.5 : *SL_2 sur un corps global*

Pour ne pas alourdir les notations, considérons le groupe $G = SL_2(\mathbf{Q})$. On peut envoyer G d'une part dans $SL_2(\mathbf{R})$ qui agit dans le plan hyperbolique, d'autre part pour chaque nombre premier p, dans $SL_2(\mathbf{Q}_p)$ qui agit sur un arbre. On obtient ainsi en combinant les exemples 1.4.4 et 1.4.1 des représentations unitaires dans des espaces de Hilbert H_∞ et H_p, et des 1-cocycles b_∞ et b_p. La fonction définie sur $SL_2(\mathbf{Q}_p)$ par $g \mapsto \|b_p(g)\|^2$ est à valeurs entières et s'annule exactement sur le sous-groupe $SL_2(\mathbf{Z}_p)$. On en déduit facilement que le 1-cocycle $b_\infty \oplus \bigoplus_p pb_p$ à valeurs dans $H_\infty \oplus \bigoplus_p H_p$ est propre. Plus généralement,

PROPOSITION.— *Soit K un corps global, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbf{Q}$ ou de $\mathbf{F}_p(X)$. Alors $SL_2(K)$ a la propriété de Haagerup.*

2. LES C^*-ALGÈBRES DE GROUPES ET LEUR K-THÉORIE

2.1 C^*-algèbres

On appelle *algèbre involutive* une $\mathbf{C}$-algèbre munie d'un anti-automorphisme anti-linéaire et involutif, que l'on note $x \to x^*$.

PROPOSITION.— *Soit A une algèbre involutive. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est isomorphe (comme algèbre involutive) à une sous-algèbre fermée involutive de $\mathcal{B}(H)$;*

(ii) *il existe une norme sur A qui fait de la $\mathbf{C}$-algèbre A une algèbre de Banach, et qui est liée à l'involution par la relation $\|xx^*\| = \|x\|^2$ pour tout $x \in A$.*

Une telle algèbre involutive est appelée *C^*-algèbre* [Di][P] ou, chez certains auteurs, *algèbre stellaire* (voir par exemple [Bo]). Remarquons que la norme de la condition (ii) est alors unique. Elle est en effet donnée par la formule $\|x\| = \rho(xx^*)^{1/2}$ où ρ est le rayon spectral.

Exemples

(i) Si X est un espace localement compact, on note $C_0(X)$ la C^*-algèbre des fonctions continues nulles à l'infini sur X. La norme est celle de la convergence uniforme. Quand X est compact, on note plus simplement cette algèbre $C(X)$.

(ii) Soit G un groupe dénombrable. Soit $\mathbf{C}G$ l'algèbre du groupe G sur le corps des complexes. C'est une algèbre involutive. Toute représentation *unitaire* π de G dans un espace de Hilbert H_π s'étend en un homomorphisme d'algèbre involutive $\mathbf{C}G \to \mathcal{B}(H_\pi)$, encore noté π.

DÉFINITION.— *La C^*-algèbre de G, notée C^*G (ou encore $C^*_{\max}G$) est la complétée de $\mathbf{C}G$ pour la norme*

$$\|a\| = \sup_\pi \|\pi(a)\|_{\mathcal{B}(H_\pi)}$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les représentations unitaires π de G.

DÉFINITION.— *La C^*-algèbre réduite de G, notée C^*_rG (ou encore $C^*_{\text{red}}G$), est la complétée de $\mathbf{C}G$ pour la norme $\|a\|_r = \|\lambda(a)\|_{\mathcal{B}(\ell^2G)}$ où λ est la représentation régulière gauche de G dans ℓ^2G.*

On a un morphisme canonique $\lambda : C^*G \to C^*_rG$.

(iii) Soit A une C^*-algèbre munie d'une action α du groupe G par automorphismes. On considère l'algèbre involutive AG, où le produit est "tordu" par l'action de G dans A : c'est le *produit croisé algébrique* de A par G. On définit comme en (ii) par complétion de AG le produit croisé $C^*(G, A)$ et le produit croisé réduit $C^*_r(G, A)$, ainsi qu'un morphisme $\lambda_A : C^*(G, A) \to C^*_r(G, A)$. Voir [Pe] pour plus de détails.

(iv) Soient B une C^*-algèbre et E un C^*-module sur B (voir [Bl]). L'algèbre $k(E)$ des opérateurs B-compacts de E est une C^*-algèbre, dont la C^*-algèbre des multiplicateurs (*cf.* [P]) est l'algèbre $\mathcal{B}(E)$ des opérateurs de E possédant un adjoint (opérateurs dits B-bornés).

2.2. K-théorie topologique des C^*-algèbres

Soit A une C^*-algèbre. On note $K_i(A)$ le i-ième groupe de K-théorie topologique de A. Rappelons que si A est muni d'une unité, $K_0(A)$ est le K_0 algébrique de l'anneau A, c'est-à-dire le groupe de Grothendieck du monoïde des A-modules projectifs de type fini, et que, pour $i \geq 1$, $K_i(A) = \pi_{i-1}(GL_\infty(A))$ où $GL_\infty(A)$ est le groupe topologique $\varinjlim GL_n(A)$. Si A n'a pas d'unité, $K_i(A) = \ker \varepsilon_*$ où $\tilde{A}$ est l'algèbre obtenue en adjoignant une unité à A, et ε le morphisme d'augmentation $\tilde{A} \to \mathbf{C}$.

Pour chaque i, K_i définit un foncteur covariant de la catégorie des C^*-algèbres vers celle des groupes abéliens. On a en fait la *périodicité de Bott* : $K_{i+2}(A)$ est canoniquement isomorphe à $K_i(A)$. On désigne par $K_*(A)$ le groupe abélien $\mathbf{Z}/2$-gradué $K_0(A) \oplus K_1(A)$.

La K-théorie topologique des C^*-algèbres vérifie les propriétés d'excision, d'invariance par homotopie et de stabilité (*cf.* par exemple [Bl] ou [WO]).

La K-théorie des C^*-algèbres permet de généraliser la théorie de l'indice des opérateurs de Fredholm. Rappelons qu'un opérateur borné T d'un espace de Hilbert dans un autre est de Fredholm s'il est inversible modulo les opérateurs compacts, et que son indice est ind $T = \dim\ker T - \dim \operatorname{coker} T$. Si B est une C^*-algèbre, soit T un opérateur B-borné d'un C^*-module E_0 vers un C^*-module E_1. On dit que T est B-Fredholm s'il est inversible modulo les opérateurs B-compacts. Quitte à perturber T par un opérateur B-compact, on peut supposer que le noyau et le conoyau de T sont des modules projectifs de type fini sur B (*cf.* [WO]). On définit l'indice de T comme l'élément de $K_0(B)$

$$\operatorname{ind} T = [\ker T] - [\operatorname{coker} T].$$

Si T est un opérateur B-borné d'un C^*-module dans lui-même, qui est de carré un modulo les opérateurs B-compacts, on définit de même l'*indice impair* de T, qui est un élément de $K_1(B)$.

2.3. K-théorie et représentation régulière gauche

Soit λ le morphisme de C^*G dans C_r^*G défini par la représentation régulière gauche. Rappelons d'abord un résultat classique [P].

PROPOSITION.— *Le groupe G est moyennable si et seulement si λ est un isomorphisme.*

En revanche, si G a la propriété (T), la représentation triviale est un point isolé du dual de G pour la topologie de Fell. La C^*-algèbre de G s'écrit alors comme somme directe $C^*G = \mathbf{C}e \oplus J$ où e est un idempotent autoadjoint et J le noyau de l'homomorphisme $C^*G \to \mathbf{C}$ donné par la représentation triviale. Si en outre G est infini, alors G n'est pas moyennable et $\lambda(e) = 0$. On en déduit :

PROPOSITION.— *Si G est un groupe de Kazhdan infini, l'homomorphisme*

$$\lambda_* : K_0(C^*G) \to K_0(C_r^*G)$$

n'est pas injectif. Plus précisément son noyau contient un facteur direct isomorphe à $\mathbf{Z}$.

J. Cuntz [Cu] a montré que si G est un groupe libre, $\lambda_* : K_*(C^*G) \to K_*(C_r^*G)$ est un isomorphisme. Plus généralement, on a le résultat suivant, contenu dans le théorème de Higson et Kasparov :

THÉORÈME.— *Si G possède la propriété de Haagerup, alors*

$$\lambda_* : K_*(C^*G) \to K_*(C_r^*G)$$

est un isomorphisme.

3. LA CONJECTURE DE BAUM-CONNES

Soit G un groupe dénombrable.

3.1. Actions propres

Soit X un espace topologique localement compact muni d'une action de G par homéomorphismes. On dit que cette action est propre, ou encore que X est un G-espace propre si quelles que soient les parties compactes C_1 et C_2 de X, l'ensemble des $g \in G$ tels que $g(C_1) \cap C_2$ soit non vide est fini. Plus généralement :

DÉFINITION.— *Soit X un G-espace topologique métrisable. On dit que X est propre si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert G-invariant U de x, un sous-groupe fini H de G et une application continue G-équivariante $\varphi : U \to G/H$.*

Lorsque X est localement compact, cette définition est équivalente à la précédente. Si X est un G-espace propre, les stabilisateurs des points sont des sous-groupes finis de G, et le quotient X/G est séparé.

3.2. Classifiant des actions propres

On dit qu'un G-espace propre Z est *universel* si pour tout G-espace propre X, il existe une application continue G-équivariante de X dans Z, unique à homotopie G-équivariante près.

PROPOSITION.— *Il existe un G-espace propre universel, unique à équivalence d'homotopie G-équivariante près.*

Démonstration.— L'unicité résulte formellement de la définition ; l'existence s'obtient en construisant un polyèdre de Rips infini, c'est-à-dire l'ensemble $P_\infty(G)$ des barycentres d'un nombre fini d'éléments de G à coefficients positifs.

On appelle *classifiant des actions propres de G*, et on note $\mathcal{E}G$, un G-espace propre universel à équivalence d'homotopie G-équivariante près. Remarquons que si G est fini, on peut prendre pour $\mathcal{E}G$ un point. A l'opposé, si G est sans torsion, on peut prendre $\mathcal{E}G = EG$ le revêtement universel du classifiant BG de G (lui-même défini à équivalence d'homotopie près).

Notons que dès que G est infini, la réalisation $P_\infty(G)$ de $\mathcal{E}G$ n'est pas localement compacte. Mais pour de nombreux groupes que l'on rencontre en géométrie et en topologie, on peut remplacer $P_\infty(G)$ par un complexe de Rips de dimension finie $P_d(G)$ où l'on ne retient que les simplexes construits sur les parties de G de diamètre borné par un nombre d (pour la métrique définie par un système de générateurs). C'est possible par exemple lorsque G est hyperbolique au sens de Gromov (*cf.* [CDP]).

Dans beaucoup de situations classiques, on sait fabriquer directement un représentant de dimension finie de $\mathcal{E}G$. Si G agit proprement par isométries sur une variété riemannienne M, simplement connexe, à courbure sectionnelle négative ou nulle, on peut prendre $\mathcal{E}G = M$. En particulier, si G est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie semi-simple connexe, $\mathcal{E}G$ est l'espace riemannien symétrique correspondant. Si G est un sous-groupe discret d'un groupe algébrique semi-simple défini sur un corps local non archimédien, l'immeuble de type affine correspondant est un classifiant des actions propres.

On verra au chapitre 4 une réalisation localement compacte (de dimension infinie) de $\mathcal{E}G$ lorsque G a la propriété de Haagerup.

3.3. Théorie de l'indice G-équivariant

Un opérateur elliptique sur une variété compacte est un opérateur de Fredholm. S'il est invariant par un groupe fini G agissant sur la variété, il a un indice G-équivariant qui est un élément du groupe $R(G)$ des différences formelles de représentations de dimensions finies de G. Supposons maintenant la variété non compacte, munie d'une action propre à quotient compact d'un groupe dénombrable G. Un opérateur elliptique G-invariant a un G-indice qui est un élément de $K_0(C^*G)$ (*cf.* [K0][K4]). Selon l'idée d'Atiyah [At], on va maintenant définir une notion d'opérateur elliptique G-invariant abstrait (*cf.* [K3][K6]).

On appelle G-espace de Hilbert un espace de Hilbert H muni d'une représentation unitaire de G, et $G - C^*$-algèbre une C^*-algèbre munie d'une action de G par automorphismes. Une représentation covariante d'une $G - C^*$-algèbre A est un homomorphisme G-équivariant π de A dans $\mathcal{B}(H)$ où H est un G-espace de Hilbert.

DÉFINITION.— *Étant données deux représentations covariantes (H_0, π_0) et (H_1, π_1) de $C_0(X)$, on appelle G-opérateur elliptique de H_0 dans H_1 un opérateur borné G-équivariant de H_0 dans H_1 vérifiant :*

(i) *pour tout $f \in C_0(X)$, les opérateurs $F\pi_0(f) - \pi_1(f)F$, $\pi_0(f)(1 - F^*F)$ et $\pi_1(f)(1 - FF^*)$ sont compacts ;*

(ii) *F envoie le sous-espace $\pi_0(C_c(X))H_0$ dans $\pi_1(C_c(X))H_1$.*

Soit X un G-espace propre tel que le quotient X/G soit compact.

DÉFINITION.— *Un cycle pair de K-homologie G-équivariante de X est la donnée de deux représentations covariantes de $C_0(X)$ et d'un G-opérateur elliptique de l'un dans l'autre. Un cycle impair de K-homologie G-équivariante de X est la donnée d'une représentation covariante de $C_0(X)$ et d'un G-opérateur elliptique autoadjoint de cette représentation dans elle-même.*

En utilisant la notion de champ continu d'espaces de Hilbert, G. Kasparov définit une notion d'homotopie de cycle pair (resp. impair) de K-homologie. L'ensemble des classes d'homotopie est noté $K_0^G(X)$ (resp. $K_1^G(X)$), c'est un groupe pour l'addition obtenue en faisant la somme directe des cycles.

On va associer à toute représentation covariante (H, π) de $C_0(X)$ un C^*-module E sur C^*G. Pour cela on considère sur l'espace $\pi(C_c(X))H$ le produit scalaire suivant à valeurs dans $\mathbf{C}G$:

$$< \xi, \eta >= \sum_{g \in G} (\xi, g\eta).g$$

où la somme est finie parce que l'action est propre.

PROPOSITION.— *Ce produit scalaire ainsi défini est positif à valeurs dans C^*G et le complété E de $\pi(C_c(X))H$ est un C^*-module sur C^*G. Si F est un G-opérateur elliptique de (H_0, π_0) dans (H_1, π_1), alors F définit un opérateur borné $\mathcal{F}$ de E_0 dans E_1 et les opérateurs $1 - \mathcal{F}^*\mathcal{F}$ et $1 - \mathcal{F}\mathcal{F}^*$ sont C^*G-compacts.*

En particulier, un cycle pair (resp. impair) de K-homologie a un indice qui est un élément de $K_0(C^*G)$ (resp. $K_1(C^*G)$). Ceci définit une application $\mathrm{ind}_{G,X}$: $K_*^G(X) \to K_*(C^*G)$.

3.4. Interprétation en KK- ou E-théories

Donnons maintenant une autre description de l'application $\mathrm{ind}_{G,X}$, en termes des foncteurs bivariants KK (*cf.* [K2][K3]) et E (*cf.* [CH][GHT]). La K-homologie G-équivariante d'un G-espace propre à quotient compact X peut encore s'écrire

$$K_*^G(X) = KK_G^*(C_0(X), \mathbf{C}) = E_G^*(C_0(X), \mathbf{C}).$$

En utilisant (au choix) l'un des foncteurs de descente

$$KK_G(A, B) \to KK(C^*(G, A), C^*(G, B))$$

$$E_G(A, B) \to E(C^*(G, A), C^*(G, B)),$$

on voit qu'un élément de $K_*^G(X)$ définit un homorphisme de groupes

$$K_*(C^*(G, C_0(X)) \to K_*(C^*G).$$

Si G est sans torsion, l'algèbre $C^*(G, C_0(X))$ est équivalente au sens de Morita à l'algèbre commutative $C(X/G)$ dont le K_0 est muni d'un élément particulier correspondant au fibré trivial. En général, pour un G-espace propre X à quotient compact, on définit un élément $\mu_X \in K_0(C^*(G, C_0(X)))$ de la façon suivante. Considérons l'algèbre $C_c(X)$ des fonctions à support compact sur X, et soit $\mathcal{A} = C_c(X)G$ son produit croisé algébrique par G. On munit naturellement $C_c(X)$ d'une structure de $\mathcal{A}$-module à droite, noté $\mathcal{M}$.

Lemme.— Le module $\mathcal{M}$ est un module projectif de type fini sur $\tilde{\mathcal{A}}$ qui définit un élément de $K_0(\mathcal{A})$.

Notons μ_X l'image de ce dernier dans $K_0(C^*(G, C_0(X)))$.

Si α est un élément de $K_i^G(X)$, l'homomorphisme $K_0(C^*(G, C_0(X))) \to K_i(C^*G)$ qu'il définit envoie l'élément μ_X sur un élément de $K_i(C^*G)$ qui n'est autre que l'élément $\mathrm{ind}_{G,X}(\alpha)$ de la proposition du paragraphe 3.3.

3.5. Application de Baum-Connes

Les applications $\mathrm{ind}_{G,X} : K_*^G(X) \to K_*(C^*G)$ sont définies pour tout G-espace propre X à quotient compact. Pour généraliser à des G-espaces propres arbitraires, on note que $X \to K_*^G(X)$ est un foncteur pour les applications propres G-invariantes, compatible avec les applications $\mathrm{ind}_{G,X}$. Si Y est un G-espace propre, on définit $K_*^G(Y)$ comme la limite inductive des $K_*^G(X)$ pour les parties X de Y telles que X/G soit compacte. On a alors une application :

$$\mathrm{ind}_{G,Y} : K_*^G(Y) \to K_*(C^*G).$$

Les applications $\mathrm{ind}_{G,Y}$ se factorisent à travers celle associée au classifiant des actions propres $\mathcal{E}G$, dite *application de Baum-Connes*,

$$\mu : K_*^G(\mathcal{E}G) \to K_*(C^*G).$$

Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, Baum et Connes introduisent sa composée $\mu_r = \lambda_* \circ \mu$ avec l'homomorphisme $\lambda : C^*G \to C_r^*G$. On considère donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & K_*(C^*G) \arrow[d] \\ K_*^G(\mathcal{E}G) \arrow[ur] \arrow[r] & K_*(C_r^*G) \end{tikzcd}$$

Baum et Connes ont proposé la conjecture suivante (*cf.* [BC0,1,2][BCH]) :

Conjecture.— *L'application*

$$\mu_r : K_*^G(\mathcal{E}G) \to K_*(C_r^*G)$$

est un isomorphisme.

Remarque.— Si A est une $G-C^*$-algèbre, on pose $K_*^G(\mathcal{E}G; A) = \varinjlim KK_G^*(C_0(Z), A)$ et la construction du paragraphe s'étend immédiatement pour définir une application de Baum-Connes à coefficients dans A,

$$\mu_A : K_*^G(\mathcal{E}G; A) \to K_*(C^*(G, A)).$$

Baum et Connes conjecturent que sa composée $\mu_{r,A}$ avec $\lambda_{A*} : K_*(C^*(G,A)) \to K_*(C_r^*(G,A))$ est un isomorphisme.

3.6. Statut de la conjecture de Baum-Connes

La situation est très différente pour l'injectivité, qui est démontrée pour une très grande classe de groupes, et la surjectivité qui n'est jusqu'à présent connue que pour des groupes très particuliers.

1) L'injectivité est vérifiée dès que l'on peut donner une bonne réalisation géométrique du classifiant des actions propres $\mathcal{E}G$. C'est le cas en particulier pour les groupes fondamentaux de variétés riemanniennes compactes à courbure sectionnelle négative ou nulle ; pour les sous-groupes discrets de groupes de Lie connexes ; pour les sous-groupes discrets de groupes semi-simples sur des corps locaux non archimédiens ;

pour les sous-groupes de type fini de groupes semi-simples sur des corps globaux ; pour les groupes hyperboliques au sens de Gromov, ou même boliques au sens de Kasparov et Skandalis (*cf.* [K3][K6][KS1][KS2]).

2) Alors que l'injectivité de μ_r implique celle de μ, il n'en est pas de même pour la surjectivité. Il existe en fait de nombreux groupes pour lesquels μ n'est pas surjectif. Soit par exemple G un réseau (c'est-à-dire un sous-groupe discret, de covolume fini) dans un groupe de Lie semi-simple non compact dont l'algèbre de Lie ne contient aucun facteur $\mathfrak{so}(n,1)$ ou $\mathfrak{su}(n,1)$ $(n \geq 2)$. Alors G satisfait la propriété de Kazhdan ou propriété (T). Comme on l'a vu au paragraphe 2.3, il en résulte que

$$\lambda_* : K_0(C^*G) \to K_0(C^*_rG)$$

n'est pas injective. Comme par ailleurs μ_r est injective, on voit que μ ne saurait être surjective. La difficulté de la question de la surjectivité est donc dans la distinction entre C^*_rG et C^*G : on voudrait montrer que μ_r est surjective, alors que μ ne l'est pas. C'est seulement quelques mois après cet exposé que Vincent Lafforgue [L1][L2][L3] a montré la conjecture de Baum-Connes (sans coefficients) pour certains groupes discrets dénombrables ayant la propriété de Kazhdan : par exemple lorsque G est un réseau cocompact d'un des groupes de Lie simples de rang 1 $Sp(n,1)$ $(n \geq 2)$ ou $F_{4(-20)}$; et de même pour les réseaux cocompacts de $SL(3,\mathbf{R})$ et $SL(3,\mathbf{Q}_p)$ (p premier).

3) Soit maintenant G un réseau dans un groupe de Lie semi-simple dont l'algèbre de Lie est somme directe de facteurs $\mathfrak{so}(n,1)$ ou $\mathfrak{su}(n,1)$ $(n \geq 2)$. Alors on peut montrer [K5] [JK] que non seulement μ_r, mais aussi μ et λ_* sont des isomorphismes. Mais comme G a alors la propriété de Haagerup, cela résulte maintenant du théorème de N. Higson et G. Kasparov [HK] qui va faire l'objet de la suite et qui répond à une question posée par M. Gromov ([FRR], page 67, problèmes 3 et 5).

THÉORÈME.— *Soit G un groupe dénombrable ayant la propriété de Haagerup. Alors dans le triangle commutatif*

$$\begin{tikzcd} & K_*(C^*G) \arrow[d] \\ K^G_*(\mathcal{E}G) \arrow[ur] \arrow[r] & K_*(C^*_rG) \end{tikzcd}$$

les trois flèches sont des isomorphismes.

4. QUELQUES C^*-ALGÈBRES ASSOCIÉES À UN ESPACE DE HILBERT AFFINE RÉEL

Les constructions faites dans ce chapitre sont le point crucial de la démonstration du théorème de N. Higson et G. Kasparov [HK][HKT]. Notre présentation s'inspire souvent plutôt du travail de J.-L. Tu [Tu2].

4.1. Déformation d'un espace affine

Soit k un corps commutatif, V_0 un k-espace vectoriel et V un espace affine sur V_0. On associe canoniquement à V un k-espace vectoriel E et une forme linéaire φ sur E telle que $V = \varphi^{-1}(1)$. On considère la famille d'espaces affines euclidiens $V_t = \varphi^{-1}(t)$, tous de même espace vectoriel associé V_0, paramétrée par $t \in k$. On va étendre cette famille à la valeur du paramètre $t = \infty$ dans $P^1(k) = k \cup \{\infty\}$.

L'action du groupe abélien V_0 par translations sur E se prolonge en une action projective sur le complété projectif $P(E \oplus k)$ de E, triviale sur l'hyperplan $P(E)$. D'autre part, l'application linéaire $E \oplus k \to k^2$, $(x, \lambda) \mapsto (\varphi(x), \lambda)$ induit une application de $X = P(E \oplus k) \setminus P(V_0)$ vers $P^1(k)$. Le groupe V_0 agit sur l'espace X en respectant cette application.

Chaque $t \in P^1(k) = k \cup \{\infty\})$, la fibre X_t est donc un V_0-espace :

(i) si $t \in k$, X_t s'identifie à l'espace affine V_t muni de l'action de son groupe de translation V_0 ;

(ii) si $t = \infty$, X_t s'identifie à V muni de l'action triviale du groupe V_0.

4.2. Champ de C^*-algèbres associé à un espace affine euclidien

Lorsque $k = \mathbf{R}$, l'action du groupe abélien V_0 sur l'espace localement compact X définit une C^*-algèbre $B(V) = C^*(V_0, C_0(X))$. Pour chaque $t \in P^1(\mathbf{R})$, soit de même $B_t(V) = C^*(V_0, C_0(X_t))$ la C^*-algèbre associée à la fibre X_t.

PROPOSITION.— *La C^*-algèbre B est l'algèbre des sections continues d'un champ continu de C^*-algèbres sur l'espace $P^1(\mathbf{R})$ de fibres $B_t(V)$.*

La fibre au-dessus de $t \in \mathbf{R}$ n'est autre que l'algèbre des opérateurs compacts sur $L^2(V_t)$, alors que la fibre au-dessus de $t = \infty$ est l'algèbre commutative $C_0(V) \otimes C^*(V_0) = C_0(V \times V_0^*)$ des fonctions continues nulles à l'infini sur le fibré cotangent de V.

Une section de l'homomorphisme d'évaluation $B(V) \to B_\infty(V)$ est donnée par le calcul pseudo-différentiel de Weyl (voir par exemple [Sh]). À un symbole de Weyl d'ordre négatif $(x, \xi) \mapsto \sigma(x, \xi)$ sur $V \times V_0$, on associe la famille des opérateurs de Weyl sur V_t, de symbole $\sigma(x, \xi)$.

Soit $x_0 \in V$. Considérons l'opérateur différentiel sur V, à coefficient dans le fibré trivial ΛV_0^*

$$d + d^* + \text{ext } (x - x_0) + \text{int } (x - x_0).$$

C'est un opérateur de Weyl d'ordre 1, de symbole $\sigma(x, \xi) = i(\text{ext } (\xi) + \text{int } (\xi)) + \text{ext } (x - x_0) + \text{int } (x - x_0)$. Il est donc elliptique au sens du calcul de Weyl car le carré de son symbole est $\|\xi\|^2 + \|x - x_0\|^2$.

On désignera par $\hat{B}(V)$ la C^*-algèbre graduée $B(V) \otimes \text{End } (\Lambda V_0^*)$ et de même $\hat{B}_t(V) = B_t(V) \otimes \text{End } (\Lambda V_0^*)$ pour $t \in P^1(\mathbf{R})$.

Lemme.— Soit $x_0 \in V$. La famille associée au symbole σ ci-dessus définit un multiplicateur non borné D_{x_0} de $\hat{B}(V)$, qui est impair pour la graduation, autoadjoint, et à résolvante dans $\hat{B}(V)$. En outre si $x_0' \in V$, le multiplicateur $D_{x_0} - D_{x_0'}$ se prolonge en un multiplicateur borné.

COROLLAIRE.— *Pour tout $x_0 \in V$, on a un homomorphisme de C^*-algèbres graduées $C_0(\mathbf{R}) \to \hat{B}(V)$, $f \mapsto f(D_{x_0})$. De plus, la famille des homomorphismes $f \mapsto f(sD_{x_0})$ pour $s \in]0, 1]$ définit un homomorphisme asymptotique indépendant de x_0.*

Vérifions la dernière assertion. On veut montrer que, pour $f \in C_0(\mathbf{R})$, $\|f(sD_{x_0}) - f(sD_{x_0'})\|$ tend vers zéro pour $s \to 0$. Il suffit de le faire pour les fonctions $f(x) = (x \pm i)^{-1}$. On a alors $f(sD_{x_0}) - f(sD_{x_0'}) = sf(sD_{x_0})(D_{x_0'} - D_{x_0})f(sD_{x_0'})$ qui tend en norme vers zéro.

Soient maintenant deux espaces affines euclidiens V et V'. On a les identifications $B(V \times V') = B(V) \otimes B(V')$ et $\hat{B}(V \times V') = \hat{B}(V) \hat{\otimes} \hat{B}(V')$.

PROPOSITION.— *Soient $x_0 \in V$ et $x_0' \in V'$. Le multiplicateur non borné associé au point (x_0, x_0') de $V \times V'$ est $D_{(x_0, x_0')} = D_{x_0} \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} D_{x_0'}$.*

4.3. Passage à la dimension infinie

Soit H un espace de Hilbert affine réel. On considère la famille de tous les sous-espaces affines V de dimension finie de H, ordonnée par l'inclusion. On va définir un système inductif de C^*-algèbres graduées indexé par cette famille. On aura pour cela besoin de l'homomorphisme d'algèbres graduées $C_0(\mathbf{R}) \to C_0(\mathbf{R}) \hat{\otimes} C_0(\mathbf{R})$, $f \mapsto f(X \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} X)$ où X est le multiplicateur non borné de $C_0(\mathbf{R})$ défini par la fonction $x \mapsto x$.

Si $V \subset V'$, soit W l'espace vectoriel orthogonal à V_0 dans V_0'. On considère W comme espace affine pointé par l'élément 0 et on identifie V' à $V \times W$. On définit l'homomorphisme

$$\psi_{V,V'} : C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}(V) \to C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}B(V')$$

par la composition

$$C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}(V) \xrightarrow{\delta\hat{\otimes}1} C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}(V) \xrightarrow{1\hat{\otimes}\psi_W\hat{\otimes}1} C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}(W)\hat{\otimes}\hat{B}(V)$$

où ψ_W est l'homomorphisme $C_0(\mathbf{R}) \to \hat{B}(W)$ associé au multiplicateur non borné D_0 de $\hat{B}(W)$ et où δ désigne l'homomorphisme d'algèbres graduées défini plus haut.

PROPOSITION.— *Les homomorphismes $(\psi_{V,V'})_{V\subset V'}$ définissent un système inductif de C^*-algèbres graduées. En outre, si $x_0 \in V \subset V'$, l'homomorphisme $\psi_{V,V'}$ envoie le multiplicateur non borné $X\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}D_{x_0}$ de $C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}(V)$ sur le multiplicateur correspondant de $C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}(V')$.*

On note

$$A(H) = \varinjlim C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}(V).$$

C'est l'algèbre des sections continues d'un champ continu de C^*-algèbres graduées sur $P^1(\mathbf{R})$, de fibres $A_t(H) = \varinjlim C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}_t(V)$.

Lemme.— Si $x_0 \in H$, les multiplicateurs non bornés $X\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}D_{x_0}$ de $C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}(V)$ pour $V \ni x_0$ définissent un multiplicateur non borné de $A(H)$ que nous noterons encore D_{x_0}, et qui est impair pour la graduation, autoadjoint, et à résolvante dans $A(H)$. En outre, si $x_0' \in H$, le multiplicateur $D_{x_0} - D_{x_0'}$ se prolonge en un multiplicateur borné.

COROLLAIRE.— *Pour tout $x_0 \in H$ on a un homomorphisme de C^*-algèbres graduées $C_0(\mathbf{R}) \to A(H)$, $f \mapsto f(D_{x_0})$. De plus, la famille des homomorphismes $f \mapsto f(sD_{x_0})$ pour $s \in]0,1]$ définit un homomorphisme asymptotique indépendant de x_0.*

4.4. Espace de Fock supersymétrique

Soit H un espace de Hilbert affine réel. Pour tout sous-espace V de dimension finie, on note $\mathcal{F}V$ l'espace de Hilbert gradué $L^2(V)\otimes\Lambda V_0^*$ des formes différentielles de carré intégrable sur V. Rappelons qu'avec les notations du 4.2, on a $\hat{B}_1(V) = k(\mathcal{F}V)$ et que le multiplicateur non borné de $\hat{B}_1(V)$ associé au point $x_0 \in V$ s'identifie à l'opérateur non borné

$$D_{x_0} = d + d^* + \text{ext}\,(x - x_0) + \text{int}\,(x - x_0)$$

dans $\mathcal{F}V$. C'est un opérateur de Fredholm d'indice 1, de noyau engendré par la fonction $x \mapsto e^{-\|x-x_0\|^2/2}$ et de conoyau nul.

Pour $V \subset V'$, soit W l'espace vectoriel orthogonal à V dans V'. Les isométries

$$\mathcal{F}V \to \mathcal{F}V' = \mathcal{F}V \hat{\otimes} \mathcal{F}W$$

$$\omega \mapsto \omega \hat{\otimes} \varepsilon_W,$$

où $\varepsilon_W : x \mapsto C_W e^{-\|x\|^2/2}$ est un vecteur de norme 1 dans le noyau de l'opérateur D_W associé au point 0 de W, définissent un système inductif d'espaces de Hilbert.

DÉFINITION.— *On appelle espace de Fock supersymétrique de H l'espace de Hilbert $\mathcal{F}H = \varinjlim \mathcal{F}V$ où la limite inductive est prise selon le système inductif ci-dessus.*

Si G agit par isométries affines sur H, alors il agit dans $\mathcal{F}H$ par une représentation unitaire. L'espace $\mathcal{F}H$ est la version supersymétrique de l'espace de Fock bosonique considéré par A. Guichardet dans [Gui].

Si $x_0 \in H$, les opérateurs D_{x_0} dans $\mathcal{F}V$, $V \ni x_0$ sont compatibles avec ce système inductif et définissent donc un opérateur non borné autoadjoint D_{x_0} dans $\mathcal{F}H$. Cet opérateur est à spectre discret mais n'est pas à résolvante compacte dès que H est de dimension infinie.

Choisissons maintenant, outre l'origine x_0, un opérateur non borné θ dans H_0, autoadjoint et à résolvante compacte. Soient W_i et θ_i les sous-espaces propres et les valeurs propres de θ. L'identification de H à $x_0 + \bigoplus_i W_i$ induit un isomorphisme de $\mathcal{F}H$ avec le produit tensoriel infini $\bigotimes_i (\mathcal{F}W_i, \varepsilon_{W_i})$. On définit alors l'opérateur non borné dans $\mathcal{F}H$:

$$B(x_0, \theta) = \sum_i \theta_i (1 \hat{\otimes} ... \hat{\otimes} D_{W_i} \hat{\otimes} ... \hat{\otimes} 1).$$

PROPOSITION.— *L'opérateur $B(x_0, \theta)$ est autoadjoint à résolvante compacte. En outre, $B(x_0', \theta) - B(x_0, \theta)$ est borné si $x_0' - x_0$ est dans le domaine de θ.*

Le point crucial est la propriété suivante relative à la perturbation de θ par un opérateur borné.

Lemme.— Soit $f \in C_0(\mathbf{R})$. Si θ et θ' sont autoadjoints positifs et à résolvantes compactes, et si $\theta - \theta'$ est borné, alors

$$\lim_{t \to 0} \|f(B(x_0, 1 + t\theta')) - f(B(x_0, 1 + t\theta))\| = 0.$$

Démonstration.— Il suffit de traiter le cas de $f(x) = (x \pm i)^{-1}$. On se ramène alors à montrer que si $A = \theta - \theta'$ est borné, $B(A)(1 + B(\theta)^2)^{-1/2}$ l'est aussi. Mais c'est immédiat puisque $B(\theta)^2 \geq D^2$ et $B(A)^2 \leq \|A\|^2 D^2$.

4.5. Construction d'une extension par les opérateurs compacts

La clef de la démonstration du théorème de Higson-Kasparov réside dans la construction suivante.

Lemme.— Soit H un espace de Hilbert affine réel muni d'une action de G par isométries affines. Il existe une $G-C^*$-algèbre $\mathcal{A}$ et un multiplicateur non borné $\mathcal{D}$ de $\mathcal{A}$, à résolvante dans $\mathcal{A}$, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) *$\mathcal{A}$ est l'algèbre des sections continues d'un champ continu de $G-C^*$-algèbres sur $[0,\infty]$ dont les fibres sont*

$$\mathcal{A}_0 = \mathbf{C} \ ; \ \mathcal{A}_t = k(\mathcal{F}H_t) \ (t \in]0,\infty[) \ ; \ \mathcal{A}_\infty = A_\infty(H).$$

(ii) *Soit $\mathcal{D}(t)$ l'image de $\mathcal{D}$ par l'évaluation en t. On a $\mathcal{D}(0) = 0$ et $\mathcal{D}(\infty) = D_{x_0}(\infty)$ où D_{x_0} est le multiplicateur non borné de $A(H)$ du lemme du 4.3 associé à un point $x_0 \in H$.*

(iii) *Les homomorphismes $C_0(\mathbf{R}) \to \mathcal{A}(t)$, $f \mapsto f(t^{-1}\mathcal{D}(t))$ sont, pour $t \to \infty$, asymptotiquement G-équivariants :*

$$\lim_{t\to\infty} \|f(t^{-1}g(\mathcal{D}(t))) - f(t^{-1}\mathcal{D}(t))\| = 0$$

pour tout $g \in G$.

Démonstration.— (1) Sur l'intervalle ouvert $]0,\infty[$, les $G-C^*$-algèbres $k(\mathcal{F}H_t)$ forment un fibré qui est trivialisé de façon G-équivariante au moyen des isomorphismes d'espaces affines $H \to H_t$, $x \mapsto tx$). On va prolonger ce fibré en un champ continu sur $[0,\infty]$. Soit Q_∞ (resp. Q_0) l'algèbre des sections bornées de ce fibré, modulo celles qui s'annulent en ∞ (resp. en 0).

(2) Pour le prolonger au point ∞ on construit un homomorphisme G-équivariant $\psi : A_\infty(H) \to Q_\infty$ de la façon suivante :

On se fixe un opérateur non borné autoadjoint à résolvante compacte θ. Pour tout sous-espace affine de dimension finie V de H, tel que V_0 soit contenu dans le domaine de θ, on définit un homomorphisme de C^*-algèbres pour $t \in [1,\infty[$

$$C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}(V) \to k(\mathcal{F}H_t) = k(\mathcal{F}V^\perp)\hat{\otimes}k(\mathcal{F}V_t)$$

$$f\hat{\otimes}a \mapsto f(B(x_0, 1 + t^{-1}\theta_{V^\perp})\hat{\otimes}a(t),$$

où $\theta_{V^\perp}$ désigne la compression de θ à l'espace vectoriel $V^\perp$ orthogonal à V_0 et où $a \mapsto a(t)$ est l'homomorphisme d'évaluation $\hat{B}(V) \to \hat{B}_t(V) = k(\mathcal{F}V_t)$. En utilisant le lemme du 4.4, on montre facilement que les homomorphismes $C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}(V) \to Q_\infty$ ainsi définis commutent aux applications $C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}(V) \to C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}(V')$ pour $V \subset V'$ définies au 4.3. Ceci définit un homomorphisme $A(H) \to Q_\infty$ qui se factorise, de façon unique, par A_∞, d'où l'homomorphisme ψ cherché.

Il reste à s'assurer que ce dernier est G-équivariant. En appliquant à nouveau le lemme du 4.4, on vérifie cette propriété pourvu que l'opérateur θ vérifie les propriétés suivantes : pour tout $g \in G$,

(a) le domaine de θ est invariant par g et $g(\theta) - \theta$ est borné ;

(b) le vecteur $gx_0 - x_0$ est dans le domaine de θ.

Lemme.— Il existe un opérateur autoadjoint à résolvante compacte vérifiant les deux propriétés ci-dessus.

(3) Si p_t est le projecteur de $\mathcal{F}H_t$ sur le noyau de D_{tx_0}, alors pour tout $g \in G$, $\|g(p_t) - p_t\|$ tend vers zéro quand $t \to 0$. Ceci définit un projecteur G-équivariant de l'algèbre Q_0, qui permet de prolonger le champ de C^*-algèbres en 0.

(4) Le multiplicateur non borné $\mathcal{D}$ est défini par la famille des opérateurs non bornés $B(tx_0, 1 + t^{-1}\theta)$ dans $\mathcal{F}H_t$.

COROLLAIRE.— *Il existe des éléments $\beta \in E_G(\mathbf{C}, A_\infty(H))$ et $\alpha \in E_G(A_\infty(H), \mathbf{C})$ tels que l'on ait*

$$\beta \circ \alpha = 1$$

dans $E_G(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

Démonstration.— Voir [CH] et [GHT] sur la E-théorie. Par le corollaire du 4.3, on a un morphisme asymptotique $C_0(\mathbf{R}) \to A_\infty(H)$ donné par la famille des $f \mapsto f(sD_{x_0})$ pour $s \to 0$. Comme il est indépendant du choix de x_0, il est G-équivariant. Il définit donc un élément β de $E_G(\mathbf{C}, A_\infty(H))$.

D'autre part le lemme ci-dessus définit une suite exacte G-équivariante

$$0 \to \mathcal{A}[0,\infty[\to \mathcal{A} \to \mathcal{A}(\infty) \to 0$$

d'où après stabilisation G-équivariante

$$0 \to C_0([0,\infty[) \otimes k(\mathcal{H}_G) \to \mathcal{A}\hat{\otimes}k(\mathcal{H}_G) \to A_\infty(H)\hat{\otimes}k(\mathcal{H}_G) \to 0$$

dont une section quelconque définit un morphisme asymptotique G-équivariant de $A_\infty(H)\hat{\otimes}k(\mathcal{H}_G)$ vers $k(\mathcal{H}_G)$ où $\mathcal{H}_G$ est la somme d'une infinité de copies de $\ell^2 G$ (*cf.* [GHT]). Ceci définit un élément α de $E_G(A_\infty(H), \mathbf{C})$.

La composée de α par β est l'élément de $E_G(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ provenant du morphisme asymptotique G-équivariant défini par la famille des homomorphismes $C_0(\mathbf{R}) \to \mathcal{A}(t)$, $f \mapsto f(t^{-1}\mathcal{D}(t))$ $(t \to \infty)$.

Mais comme l'évaluation en $t = 0$ donne l'homomorphisme G-équivariant $f \mapsto f(0)$, une homotopie évidente prouve que $\alpha \circ \beta = 1 \in E_G(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

4.6. Espace localement compact associé à un espace de Hilbert affine

DÉFINITION.— *Soit Z un espace localement compact. Une $Z - C^*$-algèbre est une C^*-algèbre A munie d'un homomorphisme de la C^*-algèbre commutative $C_0(Z)$ dans le centre des multiplicateurs de A, tel que si $f_n \to 1$ uniformément sur tout compact de Z alors, pour tout $a \in A$, $f_n a \to a$ en norme dans A. Si Z est un G-espace, on dit que A est une $(Z, G) - C^*$-algèbre si en outre l'homomorphisme de $C_0(Z)$ dans le centre de A est G-équivariant.*

DÉFINITION.— *Une $G - C^*$-algèbre A est propre s'il existe un G-espace propre localement compact Z tel que A soit une $(Z, G) - C^*$-algèbre.*

Lemme.— À tout espace de Hilbert affine réel, on peut associer un espace localement compact Z tel que $A_\infty(H)$ soit une $Z - C^*$-algèbre.

Démonstration.— Pour chaque sous-espace affine de dimension finie V, on a un homomorphisme $C_0(V) \to B_\infty = C_0(T^*V)$ donné par la projection $T^*V \to V$. Ceci définit un homomorphisme μ_V de $C_0(\mathbf{R})^{(0)} \otimes C_0(V)$ dans le centre des multiplicateurs de $C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}_\infty(V)$, où $C_0(\mathbf{R})^{(0)}$ est l'algèbre des fonctions paires sur $\mathbf{R}$.

Pour $V \subset V'$, et W l'orthogonal de V dans V', l'application propre $(t, w) \mapsto \sqrt{t^2 + \|w\|^2}$ définit un homomorphisme $C_0(\mathbf{R})^{(0)} \to C_0(\mathbf{R})^{(0)} \otimes C_0(W)$ d'où l'on déduit selon le procédé habituel un homomorphisme

$$C_0(\mathbf{R})^{(0)} \otimes C_0(V) \to C_0(\mathbf{R})^{(0)} \otimes C_0(V').$$

Ces homomorphismes forment pour $V \subset V'$ un système inductif compatible avec le système inductif $\psi_{V,V'} : C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}(V) \to C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}B(V')$ du 4.3 et avec les homomorphismes μ_V ci-dessus.

Il en résulte que l'algèbre $A(H) = \varinjlim C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}\hat{B}(V)$ est une $Z - C^*$-algèbre où Z est le spectre de Gelfand de la C^*-algèbre commutative $\varinjlim C_0(\mathbf{R})^{(0)} \otimes C_0(V)$.

Soit G agissant par isométries affines sur H. L'espace Z est alors un G-espace.

PROPOSITION.— *Si l'action de G sur H est métriquement propre, alors l'action de G sur Z est propre.*

On le voit facilement en utilisant la réalisation suivante de Z (due à Skandalis, *cf.* [Tu2]) : Z est l'ensemble $H \times [0,\infty[$ muni de la topologie image réciproque de la topologie de $H_w \times [0,\infty[$ par l'application $(\xi, t) \mapsto (\xi, \sqrt{\|\xi\|^2 + t^2})$, où H_w est l'ensemble H muni de la topologie faible. En outre, l'action de G sur Z s'obtient en posant pour $g \in G$: $g.(\xi, t) = (g.\xi, t)$.

COROLLAIRE.— *Si l'action de G sur H est métriquement propre, $A_\infty(H)$ est une $G - C^*$-algèbre propre.*

5. FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

5.1. L'homomorphisme μ est un isomorphisme

Les résultats des paragraphes 4.5 et 4.6 sont résumés dans l'assertion suivante.

Lemme.— Si G a la propriété de Haagerup, alors il existe une $G-C^*$-algèbre graduée A satisfaisant les deux propriétés suivantes :

(i) *A est propre ;*

(ii) *il existe des éléments $\beta \in E_G(\mathbf{C}, A)$ et $\alpha \in E_G(A, \mathbf{C})$ tels que $\alpha \circ \beta = 1 \in E_G(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.*

Il suffit en effet de prendre $A = A_\infty(H)$.

COROLLAIRE.— *Si G a la propriété de Haagerup, il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} K_*^G(\mathcal{E}G) & \rightarrow & K_*^G(\mathcal{E}G; A) & \rightarrow & K_*^G(\mathcal{E}G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K_*(C^*G) & \rightarrow & K_*(C^*(G, A)) & \rightarrow & K_*(C^*G) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des homomorphismes de Baum-Connes et où les composées de flèches horizontales valent l'identité.

Démonstration.— Pour chaque G-espace propre X à quotient compact, les éléments de E_G théorie du lemme donnent par composition à droite des applications

$$E_G(C_0(X), \mathbf{C}) \rightarrow E_G(C_0(X), A) \rightarrow E_G(C_0(X), \mathbf{C})$$

dont la composée est l'identité. En passant à la limite inductive, on obtient des homomorphismes

$$K_*^G(\mathcal{E}G) \rightarrow K_*^G(\mathcal{E}G; A) \rightarrow K_*^G(\mathcal{E}G)$$

de composée l'identité. D'autre part les foncteurs de descente

$$E_G(A,B) \to E(C^*(G,A),C^*(G,B))$$

fournissent les applications

$$K_*(C^*G) \to K_*(C^*(G,A)) \to K_*(C^*G)$$

dont la composée est aussi l'identité. La construction au paragraphe 3.4 des applications de Baum-Connes rend évidente la commutativité du diagramme.

On trouve une démonstration du fait suivant soit dans [HGT], soit dans [Tu1].

PROPOSITION.— *Soient G un groupe dénombrable quelconque et A une $G-C^*$-algèbre propre. Alors l'homomorphisme de Baum-Connes à coefficients dans A:*

$$\mu_A : K_*^G(\mathcal{E}G; A) \to K_*(C^*(G,A))$$

est un isomorphisme.

En combinant cette proposition avec le corollaire ci-dessus, on obtient immédiatement une partie du résultat de Higson et Kasparov :

THÉORÈME.— *Si G a la propriété de Haagerup,*

$$\mu : K_*^G(\mathcal{E}G) \to K_*(C^*G)$$

est un isomorphisme.

5.2. Les homomorphismes μ_r et λ_* sont des isomorphismes

On voudrait reproduire la même démonstration pour μ_r. Mais il y a un problème technique : contrairement à ce qui se passe en KK-théorie, on ne sait pas en général construire des foncteurs $E_G(A,B) \to E(C_r^*(G,A),C_r^*(G,B))$. On va directement montrer que $\lambda_* : K_*(C^*G) \to K_*(C_r^*G)$ est un isomorphisme.

Notons d'abord que l'élément β de $E_G(\mathbf{C},A)$ provient en fait d'un élément de $KK_G(\mathbf{C},A)$ défini par un mutiplicateur non borné de A. Or en KK-théorie on a les foncteurs $KK_G(A,B) \to KK(C_r^*(G,A),C_r^*(G,B))$ d'où un homomorphisme

$$K_*(C_r^*G) \to K_*(C_r^*(G,A)).$$

D'autre part le fait que A soit propre entraîne que $\lambda_A : C^*(G,A) \to C^*_r(G,A)$ est un isomorphisme. Donc α définit une application $K_*(C^*_r(G,A)) \to K_*(C^*G) \to K_*(C^*_r)$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} K_*(C^*G) & \to & K_*(C^*(G,A)) & \to & K_*(C^*G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K_*(C^*_rG) & \to & K_*(C^*_r(G,A)) & \to & K_*(C^*_rG) \end{array}$$

commute.

Il suffit de montrer que dans ce diagramme la composée des deux flèches horizontales du bas est l'identité. Higson et Kasparov [HK] reprennent alors la démonstration du lemme du 4.5, en remarquant qu'un morphisme asymptotique G-équivariant de $C_0(\mathbf{R})$ dans une $G-C^*$-algèbre B définit un morphisme asymptotique de $C_0(\mathbf{R})\hat{\otimes}C^*_rG$ vers $C^*_r(G,B)$.

D'où:

THÉORÈME.— *Si G a la propriété de Haagerup, l'homomorphisme $\lambda : C^*G \to C^*_rG$ induit un isomorphisme en K-théorie.*

La combinaison des théorèmes des paragraphes 5.1 et 5.2 n'est autre que le théorème de Higson et Kasparov tel que nous l'avons énoncé au paragraphe 3.6. Les démonstrations des paragraphes 5.1 et 5.2 s'appliquent aussi au cas des homomorphismes de Baum-Connes à coefficients dans une $G - C^*$-algèbre quelconque.

6. GÉNÉRALISATION AUX GROUPOÏDES LOCALEMENT COMPACTS

Pour simplifier l'exposé, nous avons considéré des groupes dénombrables, munis évidemment de la topologie discrète. En fait, on aurait pu supposer que G est un groupe localement compact (à base dénombrable) : par exemple un groupe de Lie ou un groupe algébrique défini sur un corps local ou un anneau d'adèles. Plus généralement G peut être un groupoïde localement compact à base dénombrable muni d'un système de Haar [Re]. Par exemple, le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage, pourvu qu'il soit séparé.

Pour un tel groupoïde G, on définit les C^*-algèbres réduites et maximales (*cf.* [Re]), ainsi que le classifiant des actions propres. La KK-théorie G-équivariante a été définie dans ce cadre par P.-Y. Le Gall [LG]. On définit les applications de Baum-Connes μ et μ_r.

J.-L. Tu [Tu2] a démontré le résultat suivant :

THÉORÈME.— *Soit G un groupoïde localement compact à base dénombrable muni d'un système de Haar et agissant par isométries affines sur un champ continu d'espaces de Hilbert affines ; alors les applications μ, μ_r et λ_* sont des isomorphismes.*

La même conclusion est valable avec coefficients dans une $G-C^*$-algèbre A. La preuve de J.-L. Tu utilise la KK-théorie au lieu de la E-théorie utilisée par Higson et Kasparov et donne ainsi des résultats plus forts. Tu obtient par exemple le résultat suivant (également annoncé par Kasparov) qui répond à une question posée par Connes en 1983 :

THÉORÈME.— *Soit G un groupe localement compact ayant la propriété de Haagerup ; alors G est moyennable en K-théorie.*

Voir [Cu] ou [JV] pour la définition de la K-moyennabilité. Tu a aussi un énoncé analogue pour les groupoïdes.

BIBLIOGRAPHIE

[AW] C. AKEMANN, M. WALTER - *Unbounded negative definite functions*, Canadian J. Math. **33** (1981), 862-871.

[Al] R. ALPERIN - *Locally compact groups acting on trees and property* (T), Monatsh. **93** (1982), 261-265.

[A-D] C. ANANTHARAMAN-DELAROCHE - *Amenable correspondences and approximation properties for von Neumann algebras*, Pacific J. Math. **171** (1995), 309-341.

[At] M. ATIYAH - *Global theory of elliptic operators*, in : Proc. Internat. Conf. on functional analysis and related topics, Univ. Tokyo Press, 1970, 21-29.

[BS] W. BALLMANN, J. ŚWIĄTKOWSKI - *On L^2-cohomology and property (T) for automorphism groups of polyhedral cell complexes*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 615-645.

[BC0] P. BAUM, A. CONNES - *Geometric K-theory for Lie groups and foliations*, preprint 1982.

[BC1] P. BAUM, A. CONNES - *K-theory for discrete groups*, in : Operator algebras and applications, Vol. 1, 1-20, London Math. Soc. Lecture Notes series, **135**, Cambridge Univ. Press, 1988.

[BC2] P. BAUM, A. CONNES - *Chern character for discrete groups*, in : A fête of topology, North Holland, 1987, 163-232.

[BCH] P. BAUM, A. CONNES, N. HIGSON - *Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras*, in : C^*-algebras : 1943-1993 (San Antonio, 1993), Contemp. Math. **167**, Amer. Math. Soc., 1994, 240-291.

[BChV] M. BEKKA, P.-A. CHÉRIX, A. VALETTE - *Proper affine isometric actions of amenable groups*, in : Novikov conjecture, index theorems and rigidity, London Math. Soc. Lecture Notes series **227**, Cambridge Univ. Press, 1995, vol. 2, 1-4.

[Bla] B. BLACKADAR - *K-theory for operator algebras*, M.S.R.I. publications **5**, Springer, 1986.

[Bo] N. BOURBAKI - *Théories spectrales*, ch. 1 et 2, Hermann, 1967.

[BJS] M. BOŻEJKO, T. JANUSZKIEWICZ, R. SPATZIER - *Infinite Coxeter groups do not have Kazhdan's property (T)*, J. Operator Theory **19** (1988), 63-67.

[BM] M. BURGER, S. MOZES - *Finitely presented simple groups and products of trees*, C.R.A.S. **324** (1997), 747-752.

[Cho] M. CHODA - *Group factors of the Haagerup type*, Proc. Japan Acad. **59** (1983), 174-209.

[CH] A. CONNES, N. HIGSON - *Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante*, C.R.A.S. **311** (1990), 101-106.

[CDP] M. COORNAERT, T. DELZANT, A. PAPADOPOULOS - *Géométrie et théorie des groupes*, Lecture Notes in Math. **1441**, Springer, 1990.

[Cu] J. CUNTZ - *K-theoretic amenability for discrete groups*, J. Reine Angew. Math. **344** (1983), 180-195.

[DK] C. DELAROCHE, A. KIRILLOV - *Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés*, Sém. Bourbaki, exp. n° 343, juin 1968, Astérisque, Vol. 10 de la collection hors série du Sém. Bourbaki 1948-1968, 507-528.

[Di] J. DIXMIER - *Les C^*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, 1967.

[FH] J. FARAUT, K. HARZALLAH - *Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène*, Ann. Inst. Fourier **24** (1974), 171-217.

[FRR] S. FERRY, A. RANICKI, J. ROSENBERG - *A history and survey of the Novikov conjecture*, in : Novikov conjecture, index theorems and rigidity, London Math. Soc. Lecture Notes series 226, Cambridge Univ. Press, 1995, vol. 1, 7-66.

[Gr] M. GROMOV - *Asymptotic invariants of infinite groups*, in : Geometric Group Theory (ed. Niblo and Roller), London Math. Soc. Lect. Notes **182**, Cambridge Univ. Press, 1993.

[GHT] E. GUENTNER, N. HIGSON, J. TROUT - *Equivariant E-theory for C^*-algebras*, preprint 1997.

[Gui] A. GUICHARDET - *Symmetric Hilbert spaces and related topics*, Lecture Notes in Math. **261**, Springer-Verlag, 1972.

[Ha] U. HAAGERUP - *An example of a non-nuclear C^*-algebra which has the metric approximation property*, Invent. Math. **50** (1979), 279-293.

[HV] P. de la HARPE, A. VALETTE - *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque **175**, Soc. Math. France, 1989.

[HK] N. HIGSON, G. KASPAROV - *Operator K-theory for groups which act properly and isometrically on Euclidean space*, preprint 1997.

[HKT] N. HIGSON, G. KASPAROV, J. TROUT - *A Bott periodicity theorem for infinite dimensional Euclidean space*, preprint 1997.

[Jo] P. JOLISSAINT - *Borel cocycles, approximation properties and relative property (T)*, preprint 1997.

[JJV] P. JOLISSAINT, P. JULG, A. VALETTE - *Nouveaux exemples de groupes avec la propriété de Haagerup*, preprint 1998.

[J1] P. JULG - *K-théorie équivariante et produits croisés*, C.R.A.S. **292** (1981), 629-632.

[J2] P. JULG - *Remarks on the Baum-Connes conjecture and Kazhdan's property T*, Operator algebras and their applications (Waterloo 1994/1995), 145-153, Fields Inst. Commun. **13**, Amer. Math. Soc., 1997.

[JK] P. JULG, G. KASPAROV - *Operator K-theory for the group* $\mathrm{SU}(n,1)$, J. Reine Angew. Math. **463** (1995), 99-152.

[JV] P. JULG, A. VALETTE - *K-theoretic amenability for $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$, and the action on the associated tree*, J. Funct. Anal. **58** (1984), no. 2, 194-215.

[K0] G. KASPAROV - *A generalized index for elliptic operators*, Funct. Anal. and Appl. **7** (1973), no. 3, 238-240.

[[K1] G. KASPAROV - *Topological invariants of elliptic operators*, I. *K-homology*, Math. USSR-Izv. **9** (1975), no. 4, 751-792.

[K2] G. KASPAROV - *The operator K-functor and extensions of C^*-algebras*, Math. U.S.S.R.-Izv. **16** (1981),513-572.

[K3] G. KASPAROV - *K-theory, group C^*-algebras, and higher signatures (conspectus)*, Novikov conjectures, index theorems and rigidity, London Math. Soc. Lecture Notes series **226**, Cambridge Univ. Press, 1995, vol. 1, 101-146, Cet article reproduit un preprint de 1981.

[K4] G. KASPAROV - *Index of invariant elliptic operators, K-theory and representations of Lie groups*, Soviet. Math. Dokl. **27** (1983), n. 1, 105-109.

[K5] G. KASPAROV - *Lorentz groups : K-theory of unitary representations and crossed products*, Soviet. Math. Dokl. **29** (1984), n. 2, 256-260.

[K6] G. KASPAROV - *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*, Invent. Math. **91** (1988), n. 1, 147-201.

[KS1] G. KASPAROV, G. SKANDALIS - *Groups acting on buildings, operator K-theory, and Novikov's conjecture*, K-Theory **4** (1991), n. 4, 303-337.

[KS2] G. KASPAROV, G. SKANDALIS - *Groupes "boliques" et conjecture de Novikov*, C.R.A.S., **319** (1994), 815-820.

[Kazh] D. A. KAZHDAN - *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Funct. Anal. and its Appl. **1** (1967), 63-65.

[L1] V. LAFFORGUE - *Une démonstration de la conjecture de Baum-Connes pour les groupes réductifs sur un corps p-adique et pour certains groupes discrets possédant la propriété (T)*, C.R.A.S., à paraître.

[L2] V. LAFFORGUE - *Une version naïve de la K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach.* Prépublication.

[L3] V. LAFFORGUE - *Groupes boliques et K-théorie bivariante banachique.* Prépublication.

[LG] P.-Y. LE GALL - *Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes*, thèse de doctorat Paris 7, 1994.

[NR] G. NIBLO, L. REEVES - *Groups acting on $CAT(0)$ cube complexes*, Geometry and Topology **1** (1997), 1-7.

[P] G. PEDERSEN - *C^*-algebras and their automorphisms groups*, Academic Press, 1979.

[Re] J. RENAULT - *A groupoid approach to C^*-algebras*, Lecture Notes in Math. **793**, Springer, 1980.

[Ro1] A.G. ROBERTSON - *Property (T) for II_1 factors and unitary representations of Kazhdan groups*, Math. Ann. **296** (1993), 547-555.

[Ro2] A.G. ROBERTSON - *Crofton formulæ and geodesic distance in hyperbolic space*, preprint 1997.

[Se] J.-P. SERRE - *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque **46**, Soc. Math. France, 1977.

[Sh] M. SHUBIN - *Pseudodifferential operators and spectral theory*, Springer, 1987.

[Ti] J. TITS - *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lecture Notes in Math. **386**, Springer, 1974.

[Tu1] J.-L. TU - *La conjecture de Baum-Connes pour les feuilletages hyperboliques*, thèse doctorat Paris 7, 1996.

[Tu2] J.-L. TU - *La conjecture de Baum-Connes pour les feuilletages moyennables*, preprint 1997.

[W] Y. WATATANI - *Property (T) of Kazhdan implies property (FA) of Serre*, Math. Japon. **27** (1981), 97-103.

[WO] N. WEGGE-OLSEN - *K-theory and C^*-algebras*, Oxford Univ. press, 1993.

Pierre JULG

Institut de Recherches Mathématiques Avancées
Université Louis Pasteur et C. N. R. S.
7, rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
adresse électronique : julg@math.u-strasbg.fr