Warmest regards.
Haïm

CHAPITRE I

LES THÉORÈMES DE HAHN-BANACH. INTRODUCTION À LA THÉORIE DES FONCTIONS CONVEXES CONJUGUÉES.

I.1 *Propriétés de l'application de dualité.*

Soit E un espace vectoriel normé (= e.v.n.). Pour tout $x \in E$ on définit *l'application de dualité* par

$$F(x) = \{f \in E' \; ; \; \|f\| = \|x\| \text{ et } \langle f,x \rangle = \|x\|^2\}.$$

1) Montrer que l'on a

$$F(x) = \{f \in E' \; ; \; \|f\| \leq \|x\| \text{ et } \langle f,x \rangle = \|x\|^2\} \, ;$$

en déduire que $F(x)$ est non vide, convexe et fermé.

2) Montrer que si E' est strictement convexe, alors $F(x)$ est réduit à un élément.

(On rappelle qu'un e.v.n. est *strictement convexe* si pour tout couple f,g de cet espace tel que $\|f\| = \|g\| = 1$ et $f \neq g$ on a $\|tf + (1-t)g\| < 1 \quad \forall t \in]0,1[$).

3) Montrer que l'on a également

$$F(x) = \{f \in E' \; ; \; \tfrac{1}{2}\|y\|^2 - \tfrac{1}{2}\|x\|^2 \geq \langle f, y-x \rangle \quad \forall y \in E\}.$$

4) En déduire que

$$\langle F(x)-F(y), \, x-y \rangle \geq 0 \quad \forall x,y \in E,$$

c'est-à-dire, plus précisément

$$\langle f-g, \, x-y \rangle \geq 0 \quad \forall x,y \in E, \quad \forall f \in F(x), \quad \forall g \in F(y).$$

Montrer que l'on a en fait

$$<f-g, x-y> \geq (\|x\|-\|y\|)^2 \quad \forall x,y \in E, \quad \forall f \in F(x), \quad \forall g \in F(y).$$

5) On suppose à nouveau que E' est strictement convexe. Soient $x,y \in E$ tels que

$$<F(x)-F(y), x-y> = 0.$$

Montrer que $F(x) = F(y)$.

I.2 Soit E un espace vectoriel de dimension n ; on considère une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E. Pour $x \in E$ on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec $x_i \in \mathbb{R}$ et pour $f \in E'$ on pose $f_i = <f, e_i>$.

1) On munit E de la norme

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

a) Déterminer explicitement (en fonction des f_i) la norme duale $\|f\|_{E'}$ d'un élément $f \in E'$.

b) Déterminer explicitement l'ensemble F(x) (application de dualité) pour tout $x \in E$.

2) Reprendre les questions a) et b) si E est muni de la norme

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

3) Reprendre les questions a) et b) si E est muni de la norme

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

et plus généralement de la norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{avec } p \in]1,\infty[.$$

I.3 Soit $C([0,1]) = C([0,1]; \mathbb{R})$ muni de la norme usuelle

$$\|u\| = \max_{t \in [0,1]} |u(t)|.$$

On considère $E = \{u \in C([0,1])\ ;\ u(0) = 0\}$, de sorte que E est un sous-espace fermé de $C([0,1])$. On considère la forme linéaire

$$f : u \in E \longmapsto f(u) = \int_0^1 u(t)\,dt.$$

1) Montrer que $f \in E'$ et calculer $\|f\|_{E'}$.

2) Peut-on trouver $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $f(u) = \|f\|_{E'}$?

$\boxed{\text{I.4}}$ On considère l'espace $E = c_0$ (espace des suites qui tendent vers 0, voir exercices du Chapitre XI).

A tout élément de c_0, $u = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ on associe

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n .$$

1) Vérifier que f est une forme linéaire continue sur E et calculer $\|f\|_{E'}$.

2) Peut-on trouver un élément $u \in E$ tel que

$$\|u\| = 1 \quad \text{et} \quad f(u) = \|f\|_{E'} \ ?$$

$\boxed{\text{I.5}}$ Soit E un e.v.n. de dimension infinie.

1) Montrer qu'il existe une *base algébrique* $(e_i)_{i\in I}$ de E telle que $\|e_i\| = 1 \quad \forall i \in I$.

On rappelle qu'une base algébrique, ou base de Hamel, est un sous-ensemble $(e_i)_{i\in I}$ de E tel que tout $x \in E$ s'écrive de manière unique sous la forme :

$$x = \sum_{i\in J} x_i e_i \quad \text{avec} \quad J \subset I,\ J \textit{ fini}.$$

(Utiliser le lemme de Zorn).

2) Construire une forme linéaire sur E qui n'est pas continue.

3) On suppose de plus que E est un Banach. Prouver que I est non dénombrable. (Utiliser le lemme de Baire, voir lemme II.1 du cours).

$\boxed{\text{I.6}}$ Soit E un e.v.n. Montrer que tout hyperplan de E est soit fermé, soit dense dans E. (Si f est une forme linéaire sur E qui n'est pas continue on pourra montrer que $f\Big(B(x_0,r)\Big) = \mathbb{R} \quad \forall x_0 \in E, \quad \forall r > 0$).

$\boxed{\text{I.7}}$ Soit E un e.v.n. et soit $C \subset E$ convexe.

1) Montrer que $\overline{C}$ et $\operatorname{Int} C$ sont convexes.

2) Soient $x \in C$ et $y \in \operatorname{Int} C$; montrer que

$$tx + (1-t)y \in \operatorname{Int} C \quad \forall t \in [0,1[.$$

3) En déduire que si $\operatorname{Int} C \neq \phi$, alors $\overline{C} = \overline{\operatorname{Int} C}$.

$\boxed{\text{I.8}}$ Soit E un e.v.n. de norme $\| \ \|$. Soit $C \subset E$ un convexe ouvert tel que $0 \in C$. On désigne par p la *jauge* de C (voir lemme I.2 du cours).

1) On suppose que C est symétrique (i.e. $-C = C$) et que C est borné. Montrer que p est une norme sur E et que p est équivalente à $\| \ \|$.

2) On considère maintenant $E = C([0,1])$ muni de la norme $\|u\| = \underset{t \in [0,1]}{\operatorname{Max}} |u(t)|$. Soit

$$C = \left\{ u \in E \ ; \ \int_0^1 |u(t)|^2 dt < 1 \right\}.$$

Vérifier que C est convexe, ouvert, symétrique et que $0 \in C$. C est-il borné ? Déterminer la jauge p de C. Montrer que p est une norme sur E ; est-elle équivalente à $\| \ \|$?

$\boxed{\text{I.9}}$ *Hahn-Banach en dimension finie.*

Soit E un e.v.n. de *dimension finie*. Soit $C \subset E$ un convexe, non vide, tel que $0 \notin C$.

On se propose de montrer qu'il existe *toujours* un hyperplan qui sépare C et $\{0\}$ au sens large.

[Noter que :

i) On ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur C.

ii) Tout hyperplan est fermé (pourquoi ?)].

1) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ un sous-ensemble dénombrable de C, dense dans C. Pour chaque n on pose

$$C_n = \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

(i.e. l'enveloppe convexe des points $x_1, x_2, \dots, x_n$). Vérifier que C_n est compact et que $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ est dense dans C.

2) Montrer qu'il existe $f_n \in E'$ tel que

$$\|f_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \langle f_n, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in C_n.$$

3) En déduire qu'il existe $f \in E'$ tel que

$$\|f\| = 1 \quad \text{et} \quad \langle f, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Conclure.

4) Soient A et B deux sous-ensembles de E, convexes, non vides et disjoints. Montrer qu'il existe un hyperplan H qui sépare A et B au sens large.

I.10 Soit E un e.v.n. et soit I un ensemble d'indices. On se donne un sous-ensemble $(x_i)_{i\in I}$ de E et un sous-ensemble $(\alpha_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) Il existe $f \in E'$ tel que $\langle f, x_i\rangle = \alpha_i \quad \forall i \in I$.

(B) Il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour toute partie finie $J \subset I$ et toute famille de réels $(\beta_i)_{i\in J}$ on a

$$\left|\sum_{i\in J} \beta_i \alpha_i\right| \leq M \left\|\sum_{i\in J} \beta_i x_i\right\|.$$

Montrer que l'on peut choisir $f \in E'$ avec $\|f\|_{E'} \leq M$ dans l'implication (B) $\Rightarrow$ (A).

(Pour prouver que (B) $\Rightarrow$ (A), on pourra commencer par définir f sur l'espace vectoriel engendré par les $(x_i)_{i\in I}$).

I.11 Soient E un e.v.n. et $M > 0$. Soient $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ n éléments de E' et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ n réels fixés. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_\varepsilon \in E$ tel que $\|x_\varepsilon\| \leq M + \varepsilon$ et $\langle f_i, x_\varepsilon\rangle = \alpha_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$.

(B) $\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\| \quad \forall \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ réels.

(Pour prouver que (B) $\Rightarrow$ (A) on pourra commencer par supposer que les (f_i) sont linéairement indépendants et s'inspirer de la démonstration du lemme III.3).
Comparer les exercices I.10, I.11 et le lemme III.3.

$\boxed{\text{I.12}}$ Soient E un espace vectoriel, $f_1, f_2, \dots, f_n$ n formes linéaires sur E et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ fixés. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) Il existe $x \in E$ tel que $f_i(x) = \alpha_i \quad \forall i = 1,2,\dots,n$.

(B) $\begin{cases} \text{Pour toute suite } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \text{ de } \mathbb{R} \text{ telle que } \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i = 0 \\ \text{on a aussi } \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i = 0. \end{cases}$

$\boxed{\text{I.13}}$ Soit $E = \mathbb{R}^n$; on pose

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_i \geq 0 \quad \forall i = 1,2,\dots,n\}.$$

Soit M un sous-espace vectoriel de E tel que

$$M \cap P = \{0\}.$$

Montrer qu'il existe un hyperplan H de E tel que

$$M \subset H \quad \text{et} \quad H \cap P = \{0\}.$$

(On pourra commencer par prouver que $M^{\perp} \cap \operatorname{Int} P \neq \emptyset$).

$\boxed{\text{I.14}}$ Soit $E = \ell^1$ (espace des suites sommables ; voir exercices du Chapitre XI). On considère les deux ensembles :

$$X = \{x = (x_n)_{n \geq 1} \in E \ ; \ x_{2n} = 0, \quad \forall n \geq 1\}$$

et

$$Y = \{y = (y_n)_{n \geq 1} \in E \ ; \ y_{2n} = \frac{1}{2^n} y_{2n-1}, \quad \forall n \geq 1\}.$$

1) Vérifier que X et Y sont des sous-espaces fermés et montrer que

$$\overline{X + Y} = E.$$

2) Soit $c \in E$ défini par

$$\begin{cases} c_{2n-1} = 0 & \forall n \geq 1, \\ c_{2n} = \dfrac{1}{2^n} & \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Vérifier que $c \notin X + Y$.

3) On pose $Z = X - c$. Noter que $Y \cap Z = \phi$. Existe-t-il un hyperplan fermé de E qui sépare Y et Z au sens large ?

Comparer le résultat obtenu à celui du théorème I.7 et à celui de l'exercice I.9.

Reprendre les mêmes questions dans $E = \ell^p$, $1 < p < \infty$, et dans $E = c_0$.

$\boxed{\text{I.15}}$ Soit E un e.v.n. et soit $C \subset E$ un convexe tel que $0 \in C$. On pose

$$C^\star = \{f \in E' \ ; \ \langle f,x \rangle \leq 1 \quad \forall x \in C\},$$
$$C^{\star\star} = \{x \in E \ ; \ \langle f,x \rangle \leq 1 \quad \forall f \in C^\star\}.$$

1) Montrer que $C^{\star\star} = \overline{C}$.

2) Que peut-on dire de $C^\star$ lorsque C est un sous-espace vectoriel de E ?

$\boxed{\text{I.16}}$ Soient E un e.v.n. et $f \in E'$ avec $f \neq 0$. On considère l'hyperplan H d'équation $[f = 0]$. On se propose de montrer que pour tout $x \in E$ on a

$$(\star) \qquad \operatorname{dist}(x,H) = \operatorname*{Inf}_{y \in H} \|x-y\| = \frac{|\langle f,x \rangle|}{\|f\|}.$$

1) Vérifier que $|\langle f,x \rangle| \leq \|f\| \operatorname{dist}(x,H) \quad \forall x \in E$.

2) Soit $u \in E$, $u \notin H$; en notant que $y = x - \dfrac{\langle f,x \rangle}{\langle f,u \rangle} u \in H$, montrer que

$$\operatorname{dist}(x,H) \leq \left| \frac{\langle f,x \rangle}{\langle f,u \rangle} \right| \|u\| \quad \forall x \in E.$$

3) Prouver $(\star)$.

4) Déterminer $I_H^\star$ et retrouver $(\star)$ à l'aide de la formule (17) du Chapitre I.

5) On prend maintenant $E = \{u \in C([0,1]) \ ; \ u(0) = 0\}$ et $\langle f,u \rangle = \displaystyle\int_0^1 u(t)dt$. Montrer que $\operatorname{dist}(u,H) = \left| \displaystyle\int_0^1 u(t)dt \right|$, $\forall u \in E$.

En déduire que si $u \in E$ et $u \notin H$, alors $\operatorname*{Inf}_{v \in H} \|u-v\|$ n'est pas atteint.

$\boxed{\text{I.17}}$ Vérifier que les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \longmapsto]-\infty,+\infty]$ définies ci-dessous sont convexes s.c.i. et déterminer les fonctions conjuguées (On pourra aussi tracer les graphes et hachurer les épigraphes).

a) $\varphi(x) = ax + b$ avec $a,b \in \mathbb{R}$.

b) $\varphi(x) = e^x$.

c) $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$

d) $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$

e) $\varphi(x) = \begin{cases} -\log x & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

f) $\varphi(x) = \begin{cases} -(1-x^2)^{1/2} & \text{si } |x| \leq 1 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$

g) $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x|^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ |x| - \frac{1}{2} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$

h) $\varphi(x) = \frac{1}{p}|x|^p$ où $1 < p < \infty$.

i) $\varphi(x) = x^+ = \max\{x,0\}$.

j) $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}x^p & \text{si } x \geq 0 \quad \text{où } 1 < p < +\infty \\ +\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$

k) $\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{p}x^p & \text{si } x \geq 0 \quad \text{où } 0 < p < 1 \\ +\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$

ℓ) $\varphi(x) = \frac{1}{p}[(|x|-1)^+]^p$ où $1 < p < \infty$.

$\boxed{\text{I.18}}$ Soit E un e.v.n.

1) Soient $\varphi,\psi : E \to]-\infty,+\infty]$ des fonctions telles que $\varphi \leq \psi$. Montrer que $\psi^* \leq \varphi^*$.

2) Soit $F : \mathbb{R} \to]-\infty,+\infty]$ une fonction convexe s.c.i. telle que $F(0) = 0$ et $F(t) \geq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi(x) = F(\|x\|)$.

Montrer que φ est convexe s.c.i. et que $\varphi^\star(f) = F^\star(\|f\|)$.

$\boxed{\text{I.19}}$ Soit $E = \ell^p$ avec $1 < p < \infty$ (voir exercices du Chapitre XI). Montrer que les fonctions $\varphi : E \to]-\infty,+\infty]$ définies ci-dessous sont convexes s.c.i. et déterminer les fonctions conjuguées.

On note $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$.

a) $$\varphi(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} k|x_k|^2 & \text{si } \sum_{k=1}^{\infty} k|x_k|^2 < +\infty \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) $$\varphi(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} |x_k|^k$$

(vérifier que cette série est convergente pour tout $x \in E$).

c) $$\varphi(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| & \text{si } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\boxed{\text{I.20}}$ Soient $E = E' = \mathbb{R}^2$ et $C = \{[x_1, x_2] \ ; \ x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$.

On définit sur E la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\sqrt{x_1 x_2} & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

1) Montrer que φ est convexe s.c.i. sur E.

2) Déterminer $\varphi^\star$.

3) On introduit l'ensemble $D = \{[x_1, x_2] \ ; \ x_1 = 0\}$ et la fonction $\psi = I_D$; calculer les quantités

$$\operatorname*{Inf}_{x \in E}\{\varphi(x) + \psi(x)\} \quad \text{et} \quad \operatorname*{Sup}_{f \in E'} \{-\varphi^\star(-f) - \psi^\star(f)\}.$$

4) Comparer à la conclusion du théorème I.11 et expliquer la différence.

$\boxed{\text{I.21}}$ Soient E un e.v.n. et $A \subset E$ un fermé non vide. On pose

$$\varphi(x) = \operatorname{dist}(x,A) = \operatorname*{Inf}_{a \in A} \|x-a\| .$$

1) Vérifier que $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq \|x-y\| \quad \forall x,y \in E$.

2) On suppose que A est convexe. Montrer que φ est convexe.

3) Inversement prouver que si φ est convexe, alors A est convexe.

4) Montrer que $\varphi^{\star} = (I_A)^{\star} + I_{B_{E'}}$

(pour tout A, non nécessairement convexe).

$\boxed{\text{I.22}}$ *Inf-convolution* .

Soit E un e.v.n. Etant données deux fonctions $\varphi, \psi : E \to]-\infty,+\infty]$ on définit l'*inf-convolution* de φ et ψ de la manière suivante : pour tout $x \in E$ on pose

$$(\varphi \nabla \psi)(x) = \operatorname*{Inf}_{y \in E} \{\varphi(x-y) + \psi(y)\} .$$

On remarquera que

i) $(\varphi \nabla \psi)(x)$ peut prendre les valeurs $\pm\infty$,

ii) $(\varphi \nabla \psi)(x) < +\infty$ si et seulement si $x \in D(\varphi) + D(\psi)$.

1) On suppose que $D(\varphi^{\star}) \cap D(\psi^{\star}) \neq \phi$. Vérifier que $(\varphi \nabla \psi)$ ne prend jamais la valeur $-\infty$ et montrer que

$$(\varphi \nabla \psi)^{\star} = \varphi^{\star} + \psi^{\star} .$$

2) On suppose que $D(\varphi) \cap D(\psi) \neq \phi$. Montrer que

$$(\varphi + \psi)^{\star} \leq (\varphi^{\star} \nabla \psi^{\star}) \text{ sur } E' .$$

3) On suppose que φ et ψ sont convexes et qu'il existe $x_0 \in D(\varphi) \cap D(\psi)$ tel que φ soit continue en x_0. Montrer que

$$(\varphi + \psi)^{\star} = (\varphi^{\star} \nabla \psi^{\star}) \text{ sur } E' .$$

4) On suppose que φ et ψ sont convexes s.c.i. et que $D(\varphi) \cap D(\psi) \neq \phi$. Montrer que

$$(\varphi^{\star} \nabla \psi^{\star})^{\star} = (\varphi + \psi) \text{ sur } E.$$

Etant donnée une fonction $\varphi : E \to]-\infty,+\infty]$, on pose

$$\text{epist}\,\varphi = \{[x,\lambda] \in E\times\mathbb{R}\ ;\ \varphi(x) < \lambda\}.$$

5) Vérifier que φ est convexe si et seulement si $\text{epist}\,\varphi$ est un sous-ensemble convexe de $E\times\mathbb{R}$.

6) Soient $\varphi,\psi : E \to\ ]-\infty,+\infty]$ des fonctions telles que $D(\varphi^*)\cap D(\psi^*) \neq \phi$. Montrer que

$$\text{epist}(\varphi \nabla \psi) = (\text{epist}\,\varphi) + (\text{epist}\,\psi)$$

(cette égalité s'entend au sens de l'addition algébrique de sous-ensembles de $E\times\mathbb{R}$).

7) En déduire que si $\varphi,\psi : E \to]-\infty,+\infty]$ sont des fonctions convexes telles que $D(\varphi^*)\cap D(\psi^*) \neq \phi$, alors $(\varphi \nabla \psi)$ est une fonction convexe.

I.23 *Régularisation par inf-convolution.*

Soit E un e.v.n. et soit $\varphi : E \to\ ]-\infty,+\infty]$ une function convexe s.c.i. telle que $\varphi \not\equiv +\infty$. On se propose de construire une suite de fonctions (φ_n) telle que :

(i) Pour tout n, $\varphi_n : E \to\ ]-\infty,+\infty[$ est convexe et continue,

(ii) Pour tout $x \in E$, $\varphi_n(x)$ converge en croissant vers $\varphi(x)$.

A cet effet, on pose

$$\varphi_n(x) = \operatorname*{Inf}_{y\in E}\{n\,\|x-y\| + \varphi(y)\}.$$

1) Montrer que l'on peut trouver N assez grand tel que si $n > N$, alors $\varphi_n : E \to\ ]-\infty,+\infty[$. Dans toute la suite on prendra $n > N$.

2) Montrer que φ_n est convexe (voir l'exercice I.22) et que

$$|\varphi_n(x_1)-\varphi_n(x_2)| \leq n\,\|x_1-x_2\| \quad \forall x_1,x_2 \in E.$$

3) Déterminer $(\varphi_n)^*$.

4) Vérifier que $\varphi_n(x) \leq \varphi(x)$ $\forall x\in E$, $\forall n$. Montrer que pour tout $x\in E$ la suite $(\varphi_n(x))_n$ est croissante.

5) Soit $x\in D(\varphi)$; on choisit $y_n \in E$ tel que

$$\varphi_n(x) \leq n\,\|x-y_n\| + \varphi(y_n) \leq \varphi_n(x) + \frac{1}{n}\ .$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} y_n = x$ et en déduire que $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$.

6) Pour $x \notin D(\varphi)$, montrer que $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = +\infty$ (on pourra raisonner par l'absurde).

I.24 *Semi-produit scalaire.*

Soit E un e.v.n.

1) Soit $\varphi : E \to]-\infty,+\infty[$ convexe. Etant donnés $x,y \in E$, on considère la fonction

$$h(t) = \frac{\varphi(x+ty) - \varphi(x)}{t}, \quad t > 0.$$

Vérifier que h est croissante sur $]0,+\infty[$ et en déduire que

$$\lim_{t\downarrow 0} h(t) = \operatorname*{Inf}_{t>0} h(t) \text{ existe dans } [-\infty,+\infty[.$$

On définit le *semi-produit scalaire* $[x,y]$ par

$$[x,y] = \operatorname*{Inf}_{t>0} \frac{1}{2t}[\|x+ty\|^2 - \|x\|^2].$$

2) Montrer que $|[x,y]| \leq \|x\| \, \|y\| \quad \forall x,y \in E$.

3) Montrer que

$$[x,\lambda x+\mu y] = \lambda\|x\|^2 + \mu[x,y] \quad \forall x,y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \mu > 0$$

et

$$[\lambda x,\mu y] = \lambda\mu[x,y] \quad \forall x,y \in E, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall \mu > 0.$$

4) Montrer que pour tout $x \in E$, la fonction $y \mapsto [x,y]$ est convexe.

Montrer que la fonction $G(x,y) = -[x,y]$ est s.c.i. sur $E \times E$.

5) Montrer que

$$[x,y] = \operatorname*{Max}_{f \in F(x)} \langle f,y\rangle \quad \forall x,y \in E$$

où F désigne l'application de dualité (voir corollaire I.3 du cours et exercice I.1). On pourra poser $\alpha = [x,y]$ et appliquer le théorème I.11 aux fonctions φ et ψ définies par

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\|x+z\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad z \in E$$

et

$$\psi(z) = \begin{cases} -t\alpha & \text{pour } z = ty \text{ et } t > 0 \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

6) Déterminer $[x,y]$ lorsque $E = \mathbb{R}^n$ est muni de la norme $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ avec $1 < p < \infty$ ou bien $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$.

(on pourra s'aider des résultats de l'exercice I.2).

$\boxed{\text{I.25}}$ *Normes et fonctions strictement convexes.*

Soit E un e.v.n. On dit que la *norme* $\| \ \|$ est strictement convexe[1] si

$$\|tx + (1-t)y\| < 1, \quad \forall x,y \in E \text{ avec } x \neq y, \ \|x\| = \|y\| = 1, \quad \forall t \in]0,1[.$$

On dit qu'une *fonction* $\varphi : E \longrightarrow]-\infty,+\infty]$ est strictement convexe si

$$\varphi\big(tx + (1-t)y\big) < t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \quad \forall x,y \in E \text{ avec } x \neq y, \quad \forall t \in]0,1[.$$

1) Montrer que la *norme* $\| \ \|$ est strictement convexe si et seulement si la *fonction* $\varphi(x) = \|x\|^2$ est strictement convexe.

2) Même question avec $\varphi(x) = \|x\|^p$ et $1 < p < \infty$.

$\boxed{\text{I.26}}$ Soient E et F deux espaces de Banach et soit $G \subset E$ un sous-espace fermé. Soit $T : G \longrightarrow F$ une application linéaire continue.

On se propose de montrer qu'il n'existe pas toujours de prolongement $\tilde{T} : E \longrightarrow F$ linéaire continu. A cet effet on considère un espace de Banach E et un sous-espace fermé $G \subset E$ sans supplémentaire topologique (voir la remarque 8 du Chapitre II). On prend $F = G$ et $T = I$. Montrer que T n'admet aucun prolongement $\tilde{T} : E \longrightarrow F$ linéaire continu. (On pourra raisonner par l'absurde).

C Comparer à la conclusion du ~~c~~orollaire I.2.

[1] Dans ce cas on dit aussi que E est strictement convexe.

CHAPITRE II

LES THÉORÈMES DE BANACH-STEINHAUS ET DU GRAPHE FERMÉ. RELATIONS D'ORTHOGONALITÉ. OPÉRATEURS NON-BORNÉS. NOTION D'ADJOINT. CARACTÉRISATION DES OPÉRATEURS SURJECTIFS.

II.1 *Continuité des fonctions convexes.*

Soit E un espace de Banach et soit $\varphi : E \to]-\infty,+\infty]$ une fonction convexe s.c.i. Soit $x_0 \in \operatorname{Int} D(\varphi)$.

1) Montrer qu'il existe deux constantes $R>0$ et M telles que

$$\varphi(x) \leq M \quad \forall x \in E \quad \text{avec} \quad \|x-x_0\| \leq R.$$

[On pourra introduire les ensembles

$$F_n = \{x \in E \; ; \; \|x-x_0\| \leq \rho \quad \text{et} \quad \varphi(x) \leq n\}].$$

2) Montrer que $\forall r<R$, $\exists L \geq 0$ tel que

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \leq L\|x_1-x_2\|, \; \forall x_1,x_2 \in E \quad \text{avec} \quad \|x_i-x_0\| \leq r, \; i=1,2.$$

Plus précisément, on peut choisir $L = \dfrac{2[M-\varphi(x_0)]}{R-r}$.

II.2 Soit E un espace vectoriel et soit $p : E \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x,y \in E$,

ii) pour tout $x \in E$ fixé la fonction $\lambda \mapsto p(\lambda x)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

iii) si une suite (x_n) de E vérifie $p(x_n) \to 0$, alors $p(\lambda x_n) \to 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que si une suite (x_n) de E vérifie $p(x_n) \to 0$ et si une suite (α_n) de $\mathbb{R}$ vérifie $\alpha_n \to \alpha$, alors

$$p(\alpha_n x_n) \to 0.$$

[Etant donné $\varepsilon > 0$ on pourra introduire les ensembles

$$F_n = \{\lambda \in \mathbb{R} \; ; \; |p(\lambda x_k)| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq n\}].$$

$\boxed{\text{II.3}}$ Soient E et F deux espaces de Banach et soit (T_n) une suite de $\mathcal{L}(E,F)$. On suppose que pour chaque $x \in E$, $T_n x$ converge quand $n \to \infty$ vers une une limite notée Tx.

Montrer que si $x_n \to x$ dans E, alors $T_n x_n \to Tx$ dans F.

$\boxed{\text{II.4}}$ Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $a(x,y) : E \times F \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire telle que :

i) pour tout $x \in E$ fixé, l'application $y \mapsto a(x,y)$ est continue,

ii) pour tout $y \in F$ fixé, l'application $x \mapsto a(x,y)$ est continue.

Montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$|a(x,y)| \leq C \|x\| \|y\| \quad \forall x \in E, \quad \forall y \in F.$$

[On pourra introduire un opérateur linéaire $T : E \to F'$ et prouver que T est un opérateur borné grâce au corollaire II.4].

$\boxed{\text{II.5}}$ Soit E un espace de Banach et soit (ε_n) une suite de réels positifs telle que $\lim \varepsilon_n = 0$.

Soit (f_n) une suite de E' vérifiant la propriété :

$$\begin{cases} \exists r > 0, \quad \forall x \in E \quad \text{avec } \|x\| < r, \quad \exists C(x) \in \mathbb{R} \text{ tel que} \\ \qquad <f_n, x> \leq \varepsilon_n \|f_n\| + C(x) \text{ pour tout } n. \end{cases}$$

Montrer que la suite (f_n) est bornée.

[On pourra introduire $g_n = \dfrac{f_n}{1 + \varepsilon_n \|f_n\|}$] .

$\boxed{\text{II.6}}$ *Opérateurs monotones localement bornés.*

Soient E un espace de Banach et D(A) un sous-ensemble de E. On dit qu'une application $A : D(A) \subset E \to E'$ est *monotone* si elle vérifie

$$<Ax-Ay,x-y> \geq 0 \quad \forall x,y \in D(A).$$

1) Soit $x_0 \in \mathrm{Int}\, D(A)$. Montrer qu'il existe deux constantes $R>0$ et C telles que

$$\|Ax\| \leq C \quad \forall x \in D(A) \text{ avec } \|x-x_0\| < R.$$

[On pourra raisonner par l'absurde et construire une suite (x_n) de $D(A)$ telle que $x_n \to x_0$ et $\|Ax_n\| \to \infty$. Choisir $r>0$ tel que $B(x_0,r) \subset D(A)$. Utiliser la monotonie de A aux points x_n et x_0+x avec $\|x\| < r$ et appliquer l'exercice II.5].

2) Généraliser le résultat de la question précédente à $x_0 \in \mathrm{Int}[\mathrm{conv}\, D(A)]$.

3) Généraliser le résultat de la question 1) au cas <u>multivoque</u>, c'est-à-dire que pour tout $x \in D(A)$, Ax est un sous-ensemble non vide de E' ; la monotonie s'exprime alors par l'inégalité

$$<f-g,x-y> \geq 0 \quad \forall x,y \in D(A), \quad \forall f \in Ax, \quad \forall g \in Ay.$$

$\boxed{\text{II.7}}$ Soit $\alpha = (\alpha_n)$ une suite de réels et soit $1 \leq p \leq \infty$. On suppose que pou: tout élément $x = (x_n)$ de ℓ^p, alors on a $\sum |\alpha_n||x_n| < \infty$.

Montrer que $\alpha \in \ell^{p'}$.

(Pour la définition de ℓ^p voir exercices du Chapitre XI).

$\boxed{\text{II.8}}$ Soit E un espace de Banach et soit $T : E \to E'$ un opérateur linéaire tel que

$$<Tx,x> \geq 0 \quad \forall x \in E.$$

Montrer que T est continu.

[On établira ce résultat par deux méthodes :

(i) Utiliser l'exercice II.6.

(ii) Appliquer le théorème du graphe fermé].

$\boxed{\text{II.9}}$ Soit E un espace de Banach et soit $T = E \to E'$ un opérateur linéaire tel que

$$\langle Tx,y\rangle = \langle Ty,x\rangle \quad \forall x,y \in E.$$

Montrer que T est continu.

$\boxed{\text{II.10}}$ Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que T est surjectif.

1) Soit M un sous-ensemble de E. Montrer que T(M) est fermé dans F si et seulement si $M + N(T)$ est fermé dans E. .

2) En déduire que si M est un sous-espace vectoriel fermé de E et si $\dim N(T) < \infty$, alors T(M) est fermé.

$\boxed{\text{II.11}}$ Soient E un espace de Banach, $F = \ell^1$ et $T \in \mathcal{L}(R,F)$. On suppose que T est surjectif.

Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $T \circ S = I_F$; autrement dit T est inversible à droite.

[Ne pas appliquer le théorème II.10, mais chercher à définir explicitement S en introduisant la base canonique de ℓ^1].

$\boxed{\text{II.12}}$ Soient E et F deux espaces de Banach munis des normes $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que R(T) est fermé et que $\dim N(T) < \infty$. On considère sur E une autre norme $| \ |$, plus faible que la norme $\| \ \|_E$, i.e. $|x| \leq M\|x\|_E$ $\forall x \in E$. Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\|x\|_E \leq C\left(\|Tx\|_F + |x|\right) \quad \forall x \in E.$$

[On pourra raisonner par l'absurde].

$\boxed{\text{II.13}}$ Soient E et F deux espaces de Banach. Montrer que l'ensemble

$$\Omega = \{T \in \mathcal{L}(E;F) \ ; \ T \text{ est inversible à gauche}\}$$

est ouvert dans $\mathcal{L}(E,F)$.

[On pourra commencer par prouver que l'ensemble

$$\mathcal{O} = \{T \in \mathcal{L}(E,F) \ ; \ T \text{ est bijectif}\}$$

est ouvert dans $\mathcal{L}(E,F)$].

[II.14] Soient E et F deux espaces de Banach.

1) Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $R(T)$ est fermé si et seulement s'il existe une constante C telle que

$$\operatorname{dist}\big(x,N(T)\big) \leq C\|Tx\| \quad \forall x \in E.$$

[On pourra utiliser l'espace quotient $E/N(T)$; voir exercice XI.

2) Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur non-borné et fermé. Montrer que $R(A)$ est fermé si et seulement s'il existe une constante C telle que

$$\operatorname{dist}\big(u,N(A)\big) \leq C\|Au\| \quad \forall u \in D(A).$$

[On pourra introduire l'opérateur $T : E_0 \longrightarrow F$ avec $E_0 = D(A)$ muni de la norme du graphe, $T = A$ et appliquer la question 1)].

[II.15] Soient E_1, E_2 et F trois espaces de Banach. Soient $T_1 \in \mathcal{L}(E_1,F)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(E_2,F)$. On suppose que

$$R(T_1) \cap R(T_2) = \{0\} \quad \text{et} \quad R(T_1) + R(T_2) = F.$$

Montrer que $R(T_1)$ et $R(T_2)$ sont fermés.
[Il est utile d'introduire l'application $T : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ définie par

$$T[x_1,x_2] = T_1x_1 + T_2x_2].$$

[II.16] Soit E un espace de Banach. Soient G et L deux sous-espaces fermés de E. On suppose qu'il existe une constante C telle que

$$\operatorname{dist}(x,G \cap L) \leq C \operatorname{dist}(x,L) \quad \forall x \in G.$$

Montrer que G + L est fermé.

[II.17] Soit $E = \ell^1$, de sorte que $E' = \ell^\infty$ (voir exercices du Chapitre XI). On considère $N = c_0$ comme un sous-espace fermé de E'.

Déterminer

$$N^\perp = \{x \in E \ ; \ \langle f,x \rangle = 0 \quad \forall f \in N\}$$

et

$$N^{\perp\perp} = \{f \in E' \ ; \ \langle f,x \rangle = 0 \quad \forall x \in N^\perp\};$$

vérifier que $N^{\perp\perp} \neq N$.

$\boxed{\text{II.18}}$ Soit $E = C([0,1])$ muni de sa norme usuelle. On considère l'opérateur $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ défini par

$$D(A) = C^1([0,1]) \quad \text{et} \quad Au = u'.$$

1) Vérifier que $\overline{D(A)} = E$.

2) A est-il borné ?

3) A est-il fermé ?

4) On considère l'opérateur $B : D(B) \subset E \longrightarrow E$ défini par

$$D(B) = C^2([0,1]) \quad \text{et} \quad Bu = u'.$$

B est-il fermé ?

$\boxed{\text{II.19}}$ Soient E et F deux espaces de Banach et soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur non-borné avec $\overline{D(A)} = E$.

1) Montrer que

$$N(A^\star) = R(A)^\perp$$
et
$$N(A) \subset R(A^\star)^\perp .$$

2) On suppose de plus que A est fermé ; montrer que

$$N(A) = R(A^\star)^\perp .$$

On abordera directement ces questions sans chercher à reproduire la démonstration du corollaire II.17. Pour la question 2) on pourra raisonner par l'absurde, considérer $u \in R(A^\star)^\perp$ tel que $[u,0] \notin G(A)$ et appliquer Hahn-Banach.

$\boxed{\text{II.20}}$ Soient E un espace de Banach et $A : D(A) \subset E \longrightarrow E'$ un opérateur non-borné avec $\overline{D(A)} = E$.

1) On suppose qu'il existe une constante C telle que

$$\text{(P)} \qquad \langle Au,u \rangle \geq -C \|Au\|^2 \quad \forall u \in D(A).$$

Montrer que $N(A) \subset N(A^\star)$.

2) Inversement on suppose que $N(A) \subset N(A^\star)$. Montrer que si A est fermé et si $R(A)$ est fermé, alors il existe une constante C telle que l'on ait (P).

$\boxed{\text{II.21}}$ Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = E$.

On considère l'opérateur $B : D(B) \subset E \to F$ défini par

$$D(B) = D(A), \quad B = A + T.$$

1) Montrer que B est fermé.

2) Montrer que $D(B^\star) = D(A^\star)$ et $B^\star = A^\star + T^\star$.

$\boxed{\text{II.22}}$ Soit E un espace de Banach de dimension infinie. On fixe un élément $a \in E$, $a \neq 0$, ainsi qu'une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ non continue (de telles formes existent, voir exercice I.5). On considère l'opérateur $A : E \to E$ défini par

$$Ax = x - f(x)a, \quad x \in E.$$

1) Déterminer $N(A)$ et $R(A)$.

2) $G(A)$ est-il fermé ?

3) Déterminer $A^\star$ (préciser avec soin $D(A^\star)$)

4) Déterminer $N(A^\star)$ et $R(A^\star)$.

5) Comparer $N(A)$ et $R(A^\star)^\perp$ ainsi que $N(A^\star)$ et $R(A)^\perp$.

6) Confronter les résultats obtenus avec ceux de l'exercice II.19.

$\boxed{\text{II.23}}$ On se propose ici de donner un exemple d'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ non-borné, fermé avec $\overline{D(A)} = E$ tel que $\overline{D(A^\star)} \neq E'$.

Soit $E = \ell^1$, de sorte que $E' = \ell^\infty$. On considère l'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ défini par

$$D(A) = \{u = (u_n) \in \ell^1 \ ; \ (n\,u_n) \in \ell^1\}$$

$$\text{et} \qquad Au = (n\,u_n).$$

1) Vérifier que $\overline{D(A)} = E$ et que A est fermé.

2) Déterminer $D(A^\star)$, $A^\star$ et $\overline{D(A^\star)}$.

$\boxed{\text{II.24}}$ Soit E un espace de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On rappelle - voir corollaire II.17 - que

$$N(T)^{\perp} \supset \overline{R(T^{*})}.$$

On se propose de donner un exemple où cette inclusion est stricte.

Soit $E = \ell^1$ de sorte que $E' = \ell^{\infty}$. On considère l'opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$Tu = \left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1} \quad \text{où} \quad u = (u_n)_{n \geq 1}.$$

Déterminer $N(T)$, $N(T)^{\perp}$, T^{*}, $R(T^{*})$ et $\overline{R(T^{*})}$.

$\boxed{\text{II.25}}$ Soient E, F et G trois espaces de Banach. Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur non-borné avec $\overline{D(A)} = E$. Soit $T \in \mathcal{L}(F,G)$. On considère l'opérateur $B : D(B) \subset E \longrightarrow G$ défini par $D(B) = D(A)$ et $B = T \circ A$.

1) Déterminer B^{*}.

2) Montrer que B n'est pas nécessairement fermé même si A est fermé.

$\boxed{\text{II.26}}$ Soient E, F et G trois espaces de Banach.

1) Soient $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $S \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que $(S \circ T)^{*} = T^{*} \circ S^{*}$.

2) On suppose que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijectif. Montrer que T^{*} est bijectif et que $(T^{*})^{-1} = (T^{-1})^{*}$.

$\boxed{\text{II.27}}$ Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\psi : F \longrightarrow]-\infty,+\infty]$ une fonction convexe. On suppose qu'il existe un point de $R(T)$ où ψ est finie et continue.

On pose

$$\varphi(x) = \psi(Tx), \ x \in E.$$

Montrer que pour tout $f \in F'$ on a

$$\varphi^{*}(T^{*}f) = \inf_{g \in N(T^{*})} \psi^{*}(f-g) = \min_{g \in N(T^{*})} \psi^{*}(f-g).$$

CHAPITRE III

TOPOLOGIES FAIBLES. ESPACES RÉFLEXIFS. ESPACES SÉPARABLES. ESPACES UNIFORMÉMENT CONVEXES.

III.1 Soit E un espace de Banach et soit $A \subset E$ un sous-ensemble de E, compact pour la topologie faible $\sigma(E,E')$. Montrer que A est borné.

III.2 Soit E un espace de Banach et soit (x_n) une suite de E telle que $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\sigma(E,E')$. On pose

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Montrer que $\sigma_n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

III.3 Soit E un espace de Banach. Soit $A \subset E$ un sous-ensemble convexe. Montrer que la fermeture de A pour la topologie forte et pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ coïncident.

III.4 Soit E un espace de Banach et soit (x_n) une suite de E telle que $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

1) Montrer qu'il existe une suite (y_n) de E telle que :

(a) $y_n \in \operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x_i\}\right) \quad \forall n$

et

(b) $y_n \to x$ fortement.

2) Montrer qu'il existe une suite (z_n) de E telle que :

(a) $z_n \in \operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}\right) \quad \forall n$

et

(b) $z_n \to x$ fortement.

$\boxed{\text{III.5}}$ Soit E un espace de Banach et soit $K \subset E$ un sous-ensemble de E, compact pour la topologie forte. Soit (x_n) une suite de K telle que $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E,E')$. Montrer que $x_n \to x$ fortement.
[On pourra raisonner par l'absurde].

$\boxed{\text{III.6}}$ Soit X un espace topologique et soit E un espace de Banach. Soient $u,v : X \to E$ deux applications continues de X à valeurs dans E muni de la topologie faible $\sigma(E,E')$.

1) Montrer que l'application $x \mapsto u(x) + v(x)$ est continue de X à valeurs dans E muni de la topologie faible $\sigma(E,E')$.

2) Soit $a : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'application $x \mapsto a(x)u(x)$ est continue de X à valeurs dans E muni de la topologie faible $\sigma(E,E')$.

$\boxed{\text{III.7}}$ Soit E un espace de Banach. Soit $A \subset E$ un sous-ensemble fermé pour la topologie faible $\sigma(E,E')$. Soit $B \subset E$ un sous-ensemble compact pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

1) Montrer que $A + B$ est fermé pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

2) On suppose de plus que A et B sont convexes, non vides et disjoints. Montrer qu'il existe un hyperplan fermé séparant A et B au sens strict.

$\boxed{\text{III.8}}$ Soit E un espace de Banach de dimension infinie. On se propose de montrer que la topologie faible $\sigma(E,E')$ n'est pas métrisable. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une métrique $d(x,y)$ sur E telle que la topologie associée coïncide avec la topologie faible $\sigma(E,E')$.

1) Pour tout entier $k \geq 1$ on désigne par V_k un voisinage de 0 pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ tel que

$$V_k \subset \{x \in E \ ; \ d(x,0) < \tfrac{1}{k}\}.$$

Montrer qu'il existe une suite (f_n) de E' telle que tout $g \in E'$ s'écrive sous

forme d'une combinaison linéaire finie des f_n.
[On pourra utiliser le lemme III.2].

2) En déduire que E' est de dimension finie.
[On pourra appliquer le lemme de Baire comme à l'exercice I.5].

3) Conclure.

4) Prouver par une méthode similaire que la topologie faible ★ $\sigma(E',E)$ n'est pas métrisable.

$\boxed{\text{III.9}}$ Soit E un espace de Banach ; soit M un sous-espace vectoriel de E et soit $f_0 \in E'$.

Montrer qu'il existe $g_0 \in M^\perp$ tel que

$$\operatorname*{Inf}_{g \in M^\perp} \|f_0 - g\| = \|f_0 - g_0\| .$$

On établira ce résultat par deux méthodes :

1) en utilisant le théorème I.11,

2) en utilisant la topologie faible ★ $\sigma(E',E)$.

$\boxed{\text{III.10}}$ Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$, de sorte que $T^\star \in \mathcal{L}(F',E')$. Montrer que $T^\star$ est continu de F' muni de la topologie $\sigma(F',F)$ à valeurs dans E' muni de la topologie $\sigma(E',E)$.

$\boxed{\text{III.11}}$ Soit E un espace de Banach et soit $A : E \longrightarrow E'$ une application monotone (voir l'exercice II.6). On suppose que pour tout $x,y \in E$ l'application

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \langle A(x+ty), y \rangle$$

est continue en $t = 0$.

Montrer que A est continu de E fort dans E' muni de la topologie $\sigma(E',E)$.

$\boxed{\text{III.12}}$ Soit E un espace de Banach et soit $x_0 \in E$. Soit $\varphi : E \longrightarrow]-\infty,+\infty]$ une fonction convexe s.c.i., $\varphi \not\equiv +\infty$.

1) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) $\exists R>0$, $\exists M<+\infty$ tels que $\varphi(x)\leq M$ $\forall x\in E$ avec $\|x-x_0\|\leq R$,

(B) $\lim\limits_{\substack{f\in E' \\ \|f\|\to\infty}} \{\varphi^\star(f)-\langle f,x_0\rangle\} = +\infty$.

2) Moyennant l'hypothèse (A) ou (B) prouver que

$$\operatorname*{Inf}_{f\in E'} \{\varphi^\star(f)-\langle f,x_0\rangle\} \text{ est atteint.}$$

[On pourra utiliser la topologie $\sigma(E',E)$, ou bien le théorème I.11].

Quelle est la valeur de cet Inf ?

$\boxed{\text{III.13}}$ Soit E un espace de Banach. Soient (x_n) une suite de E et $x\in E$. On pose

$$K_n = \overline{\operatorname{conv} \bigcup_{i=n}^{\infty}\{x_i\}} \;.$$

1) On suppose que $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie $\sigma(E,E')$. Montrer que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

2) On suppose que E est réflexif. Montrer que, réciproquement, si (x_n) est bornée et si $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$, alors $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie $\sigma(E,E')$.

$\boxed{\text{III.14}}$ Soit E un espace de Banach réflexif et soit I un ensemble d'indices. On se donne un sous-ensemble $(f_i)_{i\in I}$ de E' et un sous-ensemble $(\alpha_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}$. Soit $M>0$.

Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) Il existe $x\in E$ avec $\|x\|\leq M$ tel que $\langle f_i,x\rangle = \alpha_i$ $\forall i\in I$.

(B) $\begin{cases} \text{On a} \qquad \left|\sum\limits_{i\in J}\beta_i\alpha_i\right| \leq M\left\|\sum\limits_{i\in J}\beta_i f_i\right\| \\ \text{pour toute partie finie } J\subset I \text{ et toute famille de réels } (\beta_i)_{i\in J}. \end{cases}$

Comparer aux exercices I.10, I.11 et au lemme III.3.

III.15 *Barycentre d'une mesure sur un ensemble convexe.*

Soit E un espace de Banach réflexif et soit $K \subset E$ convexe, fermé et borné. K est donc compact pour la topologie $\sigma(E,E')$ et on considère l'espace $F = C(K)$ muni de sa norme usuelle.

On fixe $\mu \in F'$ avec $\|\mu\| = 1$. On suppose que $\mu \geq 0$ i.e.

$$\langle \mu, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in C(K),\ u \geq 0 \text{ sur } K.$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in K$ unique telle que

$$(1) \qquad \langle \mu, f_{|K} \rangle = \langle f, x_0 \rangle \quad \forall f \in E'.$$

[On pourra commencer par montrer qu'il existe $x_0 \in E$ vérifiant (1) et prouver ensuite à l'aide de Hahn-Banach que $x_0 \in K$].

III.16 Soit E un espace de Banach.

1) Soit (f_n) une suite de E'. On suppose que pour tout $x \in E$, $\langle f_n, x \rangle$ converge vers une limite.

Montrer qu'il existe $f \in E'$ tel que $f_n \rightharpoonup f$ pour la topologie faible* $\sigma(E',E)$.

2) On suppose maintenant que E est réflexif. Soit (x_n) une suite de E telle que pour tout $f \in E'$ $\langle f, x_n \rangle$ converge vers une limite.

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

3) Construire un exemple d'espace E non réflexif où la conclusion de 2) tombe en défaut.

[On pourra prendre $E = c_0$ (voir exercices du Chapitre XI) et $x_n = (\underbrace{1,1,\dots,1}_{(n)},0,0\dots)$]

III.17

1) Soit (x^n) une suite d'éléments de ℓ^p avec $1 < p < \infty$. On suppose que $x^n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ pour la topologie $\sigma(\ell^p, \ell^{p'})$. Montrer que :

a) (x^n) est borné dans ℓ^p,

b) $x_i^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_i$ pour tout i, où l'on note

$$x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_i^n, \dots)$$

et

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots).$$

2) Réciproquement, soit (x^n) une suite d'éléments de ℓ^p avec $1 < p \leq \infty$.

On suppose que :

a) (x^n) est borné dans ℓ^p,

b) $x_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i$ pour tout i.

Montrer que $x \in \ell^p$ et que $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ pour la topologie $\sigma(\ell^p, \ell^{p'})$.

$\boxed{\text{III.18}}$ Pour chaque entier $n \geq 1$ on pose

$$e^n = (0, 0, \dots, \underset{(n)}{1}, 0 \dots).$$

1) Montrer que $e^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dans ℓ^p pour la topologie $\sigma(\ell^p, \ell^{p'})$ avec $1 < p \leq \infty$.

2) Montrer qu'il n'existe aucune sous-suite extraite (e^{n_k}) qui converge dans ℓ^1 pour la topologie $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$.

3) Donner un exemple d'espace de Banach E et d'une suite (f_n) de E' telle que $\| f_n \| = 1 \;\; \forall n$ et telle que (f_n) ne possède aucune sous-suite convergente pour la topologie faible $\star$ $\sigma(E', E)$. Y-a-t-il contradiction avec la compacité de $B_{E'}$ pour $\sigma(E', E)$?
[On pourra choisir $E = \ell^\infty$] .

$\boxed{\text{III.19}}$ Soient $E = \ell^p$ et $F = \ell^q$ avec $1 < p < \infty$ et $1 < q < \infty$. Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$|a(t)| \leq C |t|^{p/q} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Etant donné

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \in \ell^p$$

on pose

$$Ax = \big(a(x_1), a(x_2), \dots, a(x_i), \dots\big).$$

1) Montrer que $Ax \in \ell^q$ et que l'application $x \mapsto Ax$ est continue de ℓ^p (for dans ℓ^q (fort).

2) Montrer que si (x^n) est une suite de ℓ^p telle que $x^n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\sigma(\ell^p,\ell^{p'})$, alors $Ax^n \rightharpoonup Ax$ pour la topologie faible $\sigma(\ell^q,\ell^{q'})$.

3) En déduire que A est continue de B_E muni de la topologie $\sigma(E,E')$ à valeurs dans F muni de la topologie $\sigma(F,F')$.

$\boxed{\text{III.20}}$ Soit E un espace de Banach.

1) Montrer qu'il existe un espace topologique compact K et une isométrie de E dans C(K) muni de sa norme usuelle.

[On pourra choisir $K = B_{E'}$ muni de la topologie faible $\star$ $\sigma(E',E)$].

2) On suppose de plus E séparable. Montrer qu'il existe une isométrie de E dans ℓ^∞.

$\boxed{\text{III.21}}$ Soit E un espace de Banach séparable. Soit (f_n) une suite bornée de E'. Montrer directement, sans faire appel aux propriétés de métrisabilité de E', qu'il existe une sous-suite (f_{n_k}) qui converge pour la topologie faible $\star$ $\sigma(E',E)$.

[Utiliser un procédé de suite diagonale].

$\boxed{\text{III.22}}$ Soit E un espace de Banach de dimension infinie vérifiant l'*une* des hypothèses suivantes :

a) E' est séparable,

b) E est réflexif.

Montrer qu'il existe une suite (x_n) dans E telle que $\|x_n\| = 1$ $\forall n$ et $x_n \rightharpoonup 0$ pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

$\boxed{\text{III.23}}$ La démonstration du théorème II.15 est considérablement simplifiée si on suppose de plus que X est réflexif. Pourquoi ?

[Examiner l'implication (b) $\Rightarrow$ (a)].

$\boxed{\text{III.24}}$ Soit E un espace de Banach. On se propose de démontrer le théorème III.25', c'est-à-dire que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) E' est séparable.

(B) B_E est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

Pour l'implication (A) ⇒ (B) on pourra s'inspirer de la démonstration du théorème III.25.

Pour l'implication (B) ⇒ (A) on procède comme suit.

Soit $d(x,y)$ une métrique définie sur B_E qui induise la topologie $\sigma(E,E')$. On pose

$$U_n = \{x \in B_E \,;\, d(x,0) < \tfrac{1}{n}\}.$$

Soit V_n un voisinage de 0 pour $\sigma(E,E')$, de la forme

$$V_n = \{x \in E \,;\, |\langle f,x\rangle| < \varepsilon_n \quad \forall f \in \Phi_n\},$$

avec $\varepsilon_n > 0$, $\Phi_n \subset E'$ fini, et tel que $V_n \subset U_n$. Soit $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ et soit F l'espace vectoriel engendré par D. On va montrer que F est dense dans E' pour la topologie forte. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\overline{F} \neq E'$.

1) Montrer qu'il existe $\xi \in E''$ et $f_o \in E'$ tels que

$$\langle \xi, f_o\rangle > 1, \quad \langle \xi, f\rangle = 0 \quad \forall f \in F \quad \text{et} \quad \|\xi\| = 1.$$

2) Soit

$$W = \{x \in B_E \,;\, |\langle f_o, x\rangle| < 1/2\}.$$

Montrer qu'il existe $n_o \geq 1$ tel que $V_{n_o} \subset W$.

3) Prouver qu'il existe $x_1 \in B_E$ tel que

$$\begin{cases} |\langle f,x_1\rangle - \langle \xi,f\rangle| < \varepsilon_{n_o} & \forall f \in \Phi_{n_o} \\ |\langle f_o,x_1\rangle - \langle \xi,f_o\rangle| < 1/2. \end{cases}$$

4) En déduire que $x_1 \in V_{n_o}$ et que $\langle f_o, x_1\rangle > 1/2$.

5) Conclure.

$\boxed{\text{III.25}}$ Soit K un espace métrique compact non réduit à un nombre fini de points.

Montrer que l'espace C(K) muni de sa norme usuelle n'est pas réflexif.

[Introduire une suite (a_n) de points de K telle que $a_n \to a$ et $a_n \neq a$ $\forall n$. Considérer la forme linéaire $f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u(a_n)$, $u \in C(K)$ et s'inspirer de l'exercice I.4].

III.26 Soit F un espace de Banach séparable et soit (a_n) un sous-ensemble dense de B_F.

On considère l'opérateur linéaire $T : \ell^1 \to F$ qui à $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ associe $Tx = \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_i$.

1) Montrer que T est un opérateur borné surjectif.

Dans la suite on suppose de plus que F est de dimension infinie et que F' est séparable.

2) Montrer que T n'admet pas d'inverse à droite.

[On pourra utiliser les résultats ~~du problème~~ de l'exercice III.22 et du problème 8]

3) En déduire que N(T) n'admet pas de supplémentaire topologique dans ℓ^1.

4) Déterminer T^*.

III.27 Soit E un espace de Banach séparable de norme $\| \;\|$. On désigne aussi par $\| \;\|$ la norme duale sur E'. On se propose de construire sur E une norme équivalente à $\| \;\|$, strictement convexe, et dont la norme duale est aussi strictement convexe.

Soit $(a_n) \subset B_E$ un sous-ensemble dense de B_E. Soit $(b_n) \subset B_{E'}$ un sous-ensemble dense dans $B_{E'}$ pour la topologie $\sigma(E',E)$. Pourquoi un tel ensemble existe-t-il ?

Pour $f \in E'$ on pose

$$\|f\|_1 = \left\{ \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f, a_n \rangle|^2 \right\}^{1/2}.$$

1) Montrer que $\| \;\|_1$ est une norme équivalente à $\| \;\|$.

2) Montrer que la norme $\| \;\|_1$ est strictement convexe.

[On pourra utiliser l'exercice I.25].

Pour $x \in E$ on pose

$$\|x\|_2 = \left\{ \|x\|_1^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle b_n, x\rangle|^2 \right\}^{1/2}$$

$\left(\text{où } \|x\|_1 = \sup_{\|f\|_I \leq 1} \langle f, x\rangle \right)$.

3) Montrer que $\| \ \|_2$ est une norme strictement convexe équivalente à $\| \ \|$.

4) Montrer que la norme duale de $\| \ \|_2$ est aussi strictement convexe. [On pourra utiliser un résultat de l'exercice I.22].

5) Proposer une autre approche à l'aide des résultats du problème

$\boxed{\text{III.28}}$ Soit E un espace de Banach uniformément convexe. On désigne par F l'application de dualité (multivoque) de E dans E' ; voir corollaire I.3 et exercice I.1.

Montrer que pour tout $f \in E'$ il existe $x \in E$ unique tel que $f \in F(x)$.

$\boxed{\text{III.29}}$ Soit E un espace de Banach uniformément convexe.

1) Montrer que

$$\forall M > 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \text{ tel que}$$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \delta \quad \forall x, y \in E \text{ avec } \|x\| \leq M, \|y\| \leq M \text{ et } \|x-y\| > \varepsilon.$$

[On pourra raisonner par l'absurde].

2) Même question si l'on remplace $\| \ \|^2$ par $\| \ \|^p$ avec $1 < p < \infty$.

$\boxed{\text{III.30}}$ Soit E un espace de Banach muni de la norme $\| \ \|$. On suppose qu'il existe sur E une norme $| \ |$ uniformément convexe et équivalente à $\| \ \|$.

Montrer que, pour tout $k > 1$, il existe une norme $||| \ |||$ uniformément convexe telle que

$$\|x\| \leq |||x||| \leq k\|x\| \quad \forall x \in E.$$

[On pourra poser $|||x|||^2 = \|x\|^2 + \alpha|x|^2$ avec $\alpha > 0$ assez petit et appliquer l'exercice III.29].

Application : $E = \mathbb{R}^n$.

III.31 Soit E un espace de Banach uniformément convexe. Montrer que

$\forall\varepsilon>0,\ \ \forall\alpha\in\,]0,\frac{1}{2}[,\ \ \exists\delta>0$ tel que

$$\|tx+(1-t)y\|\leq 1-\delta$$

$$\forall t\in[\alpha,1-\alpha],\ \ \forall x,y\in E\ \text{ avec } \|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1 \ \text{ et } \|x-y\|\geq\varepsilon.$$

[Si $\alpha\leq t\leq\frac{1}{2}$ on pourra écrire $tx+(1-t)y=\frac{y+z}{2}$].

III.32 *Projection sur un convexe fermé dans un espace uniformément convexe.*

Soit E un espace de Banach uniformément convexe et soit $C\subset E$ convexe, fermé et non vide.

1) Montrer que pour tout $x\in E$

$$\operatorname*{Inf}_{y\in C}\|x-y\|$$

est atteint en un point unique de C noté $P_C x$.

2) Montrer que toute suite minimisante (y_n) converge fortement vers $P_C x$.

3) Montrer que l'application $x\longmapsto P_C x$ est continue de E fort dans E fort.

4) Plus précisément, montrer que P_C est uniformément continue sur les bornés de E.

[On pourra utiliser l'exercice III.29].

Soit $\varphi: E\longrightarrow\,]-\infty,+\infty]$ une fonction convexe, s.c.i., $\varphi\not\equiv+\infty$.

5) Montrer que pour tout $x\in E$ et tout entier $n\geq 1$

$$\operatorname*{Inf}_{y\in E}\{n\|x-y\|^2+\varphi(y)\}$$

est atteint en un point unique noté y_n.

6) Montrer que $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_C x$ où $C=\overline{D(\varphi)}$.

Kinderlehrer

CHAPITRE IV

LES ESPACES L^p.

Dans tout ce chapitre, et sauf indication supplémentaire, Ω désigne un espace mesuré muni d'une mesure σ-finie.

On note $\| \ \|_p$ au lieu de $\| \ \|_{L^p}$.

$\boxed{\text{IV.1}}$ Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

On pose

$$f(x) = (1+|x|^\alpha)^{-1}\left(1+\big|\log|x|\big|^\beta\right)^{-1},\ x\in\mathbb{R}^N.$$

A quelles conditions $f\in L^p(\mathbb{R}^N)$?

$\boxed{\text{IV.2}}$ Soit $f\in L^p(\Omega)$ avec $1\leq p<\infty$.

1) Pour chaque $r\in\mathbb{R}$ et n entier ≥ 1 on pose

$$T_n r = \begin{cases} r & \text{si } |r|\leq n \\ \dfrac{nr}{|r|} & \text{si } |r|>n. \end{cases}$$

Montrer que $T_n f \longrightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$.

2) Soit (Ω_n) une suite croissante d'ensembles mesurables tels que $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$. Soit χ_n la fonction caractéristique de Ω_n.

Montrer que $\chi_n f \to f$ dans $L^p(\Omega)$.

3) Montrer que $\chi_n T_n f \to f$ dans $L^p(\Omega)$.

$\boxed{\text{IV.3}}$ On suppose que $|\Omega|<\infty$. Soient $1\leq p\leq q\leq\infty$.

Montrer que $L^q(\Omega)\subset L^p(\Omega)$ avec injection continue. Plus précisément on a

$$\|f\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \, \|f\|_q \quad \forall f \in L^q(\Omega).$$

[Utiliser l'inégalité de Hölder].

$\boxed{\text{IV.4}}$

1) Soient $f,g \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Vérifier que $h(x) = \mathrm{Max}\{f(x),g(x)\} \in L^p(\Omega)$.

2) Soient (f_n) et (g_n) deux suites de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, telles que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ et $g_n \to g$ dans $L^p(\Omega)$.

On pose

$$h_n = \mathrm{Max}\{f_n, g_n\}.$$

Montrer que $h_n \to h$ dans $L^p(\Omega)$.

3) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$ et soit (g_n) une suite $L^\infty(\Omega)$.
On suppose que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$, $g_n \to g$ p.p. et $\|g_n\|_\infty \leq C$.
Montrer que $f_n g_n \to fg$ dans $L^p(\Omega)$.

$\boxed{\text{IV.5}}$

1) Soient k fonctions $f_1, f_2, \dots, f_k$ telles que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ $\forall i$, avec $1 \leq p_i \leq \infty$ $\forall i$ et $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \leq 1$.
On pose

$$f(x) = \prod_{i=1}^{k} f_i(x).$$

Montrer que $f \in L^p(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}$ et que

$$\|f\|_p \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{p_i}.$$

[Commencer par le cas $k = 2$; procéder ensuite par récurrence]

2) En déduire que si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout r compris entre p et q.
Plus précisément, si l'on écrit $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$ alors

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \, \|f\|_q^{1-\alpha}.$$

X.

$\boxed{\text{IV.6}}$ Soient $1 \leq p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$.

1) Montrer que $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est un sous-ensemble dense de $L^p(\Omega)$.

2) Montrer que l'ensemble

$$\{f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) \ ; \ \|f\|_q \leq 1\}$$

est fermé dans $L^p(\Omega)$.

3) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ et soit $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que

$$f_n \to f \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ et que } \|f_n\|_q \leq C.$$

Montrer que $f \in L^r(\Omega)$ et que $f_n \to f$ dans $L^r(\Omega)$ pour tout r compris entre p et q, $r \neq q$.

$\boxed{\text{IV.7}}$ On suppose que $|\Omega| < \infty$.

1) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Montrer que $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

2) Soit $f \in \bigcap\limits_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$.

On suppose qu'il existe une constante C telle que

$$\|f\|_p \leq C \quad \forall\, 1 \leq p < \infty.$$

Montrer que $f \in L^\infty(\Omega)$.

3) Construire une fonction $f \in \bigcap\limits_{1 \leq p < \infty} L^p(]0,1[)$ telle que $f \notin L^\infty(]0,1[)$.

X

$\boxed{\text{IV.8}}$ Soient $1 \leq \overset{q \leq p}{\cancel{p} < \cancel{q}} \leq \infty$. Soit $a(x)$ une fonction mesurable définie sur Ω. On suppose que $au \in L^q(\Omega)$ pour tout $u \in L^p(\Omega)$.

Montrer que $a \in L^r(\Omega)$ avec

$$r = \begin{cases} \dfrac{pq}{p-q} & \text{si } p < \infty \\ q & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

[On pourra appliquer le théorème du graphe fermé].

$\boxed{\text{IV.9}}$ Soit $X \subset L^1(\Omega)$ un sous-espace vectoriel fermé. On suppose que

$$X \subset \bigcup_{1 < q \leq \infty} L^q(\Omega).$$

1) Montrer qu'il existe $p > 1$ tel que $X \subset L^p(\Omega)$.

[Pour tout entier $n \geq 1$ on pourra considérer l'ensemble

$$X_n = \{f \in X \cap L^{1+(1/n)}(\Omega) \ ; \ \|f\|_{1+(1/n)} \leq n\}] .$$

2) Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\|f\|_p \leq C\|f\|_1 \quad \forall f \in X.$$

IV.10 *Inégalité de Jensen.*

On suppose que $|\Omega| < \infty$.

Soit $j : \mathbb{R} \rightarrow]-\infty,+\infty]$ une fonction convexe, s.c.i., $j \not\equiv +\infty$.

Soit $f \in L^1(\Omega)$ tel que $f(x) \in D(j)$ p.p. et $j(f) \in L^1(\Omega)$.

Montrer que

$$j\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f\right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega j(f).$$

IV.11 *Intégrandes convexes.*

On suppose que $|\Omega| < \infty$. Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue.

On considère la fonction $J : L^p(\Omega) \rightarrow]-\infty,+\infty]$ définie par

$$J(u) = \begin{cases} \int_\Omega j(u(x))dx & \text{si} \quad j(u) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{si} \quad j(u) \notin L^1(\Omega). \end{cases}$$

1) Montrer que J est convexe.

2) Montrer que J est s.c.i.

[On pourra commencer par supposer que $j \geq 0$ et utiliser le lemme de Fatou].

3) Prouver que la fonction conjuguée $J^\star : L^{p'}(\Omega) \rightarrow]-\infty,+\infty]$ est donnée par

$$J^\star(f) = \begin{cases} \int_\Omega j^\star(f(x))dx & \text{si} \quad j^\star(f) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{si} \quad j^\star(f) \notin L^1(\Omega). \end{cases}$$

[Lorsque $1 < p < \infty$ on pourra introduire $J_n(u) = J(u) + \frac{1}{n}\int |u|^p$ et commencer par déterminer $J_n^\star$].

4) On désigne par ∂j (resp. ∂J) le sous-différentiel de j (resp. J) ; voir problème 2

Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $f \in L^{p'}(\Omega)$; montrer que

$$f \in \partial J(u) \Leftrightarrow f(x) \in \partial j\big(u(x)\big) \text{ p.p. sur } \Omega.$$

$\boxed{\text{IV.12}}$ *Espaces* $L^\alpha(\Omega)$ *avec* $0<\alpha<1$.

Soit $0<\alpha<1$. On pose

$$L^\alpha(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ ; } u \text{ mesurable et } |u|^\alpha \in L^1(\Omega)\}$$

et

$$[u]_\alpha = \left(\int |u|^\alpha\right)^{1/\alpha}.$$

1) Vérifier que $L^\alpha(\Omega)$ est un espace vectoriel mais $[\ ]_\alpha$ n'est pas une norme. Plus précisément montrer que si $u,v \in L^\alpha(\Omega)$, $u \geq 0$ p.p. et $v \geq 0$ p.p. alors

$$[u+v]_\alpha \geq [u]_\alpha + [v]_\alpha .$$

2) Montrer que

$$[u+v]_\alpha^\alpha \leq [u]_\alpha^\alpha + [v]_\alpha^\alpha \quad \forall u,v \in L^\alpha(\Omega).$$

$\boxed{\text{IV.13}}$ L^p *est uniformément convexe pour* $1<p\leq 2$ *(méthode de C. Morawetz).*

1) Soit $1<p<\infty$. Montrer qu'il existe une constante C (dépendant seulement de p) telle que

$$|a-b|^p \leq C\big(|a|^p + |b|^p\big)^{1-s}\left(|a|^p + |b|^p - 2\left|\frac{a+b}{2}\right|^p\right)^s \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

où $s = p/2$.

2) En déduire que $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe pour $1<p\leq 2$.

[Utiliser la question précédente et l'inégalité de Hölder].

$\boxed{\text{IV.14}}$ Soit $1 \leq p<\infty$.

1) Montrer que pour tout $\varepsilon>0$ il existe une constante $C_\varepsilon>0$ telle que

$$\Big||a+b|^p - |a|^p - |b|^p\Big| \leq \varepsilon |a|^p + C_\varepsilon |b|^p \quad \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

2) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ telle que :

i) $f_n(x) \to f(x)$ p.p.

ii) la suite (f_n) est bornée dans $L^p(\Omega)$, i.e. $\|f_n\|_p \leq M \quad \forall n$.

Montrer que $f \in L^p(\Omega)$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \{|f_n|^p - |f_n - f|^p\} = \int_\Omega |f|^p.$$

[On pourra appliquer la question 1) avec $a = f_n - f$ et $b = f$. Il est utile d'introduire, pour $\varepsilon > 0$ fixé, la suite $\varphi_n = \Big(\Big||f_n|^p - |f|^p - |f_n - f|^p\Big| - \varepsilon|f_n - f|^p\Big)^+$ où $t^+ = \max(t,0)$].

3) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ et soit $f \in L^p(\Omega)$ tels que :

i) $f_n(x) \to f(x)$ p.p.

ii) $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Montrer que $\|f_n - f\|_p \to 0$.

IV.15 *Théorèmes d'Egorov et de Vitali.*

On suppose que $|\Omega| < \infty$.

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telles que

$$f_n \to f \text{ p.p. } (|f| < \infty \text{ p.p.}).$$

1) Soit $\alpha > 0$ fixé.

Montrer que $\Big|[|f_n - f| > \alpha]\Big| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ [1].

2) Plus précisément, soit

$$S_n(\alpha) = \bigcup_{k\geq n} [|f_k - f| > \alpha].$$

Montrer que $|S_n(\alpha)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3) (Egorov). Montrer que

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \delta > 0 \quad \exists A \subset \Omega \text{ mesurable tel que} \\ |A| < \delta \text{ et } f_n \to f \text{ uniformément sur } \Omega \setminus A. \end{array}\right.$$

[Etant donné $m \geq 1$ entier, prouver en utilisant 2) qu'il existe $\Sigma_m \subset \Omega$ mesurable tel que $|\Sigma_m| < \frac{\delta}{2^m}$ et il existe N_m entier tel que

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \quad \forall k \geq N_m, \quad \forall x \in \Omega \setminus \Sigma_m].$$

4) (Vitali). Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que

---

[1] On rappelle les notations $|A| = \text{mes } A$ et $[g > \alpha] = \{x \in \Omega \ ; \ g(x) > \alpha\}$.

i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que $\int_A |f_n|^p < \varepsilon \quad \forall n$ et $\forall A$ mesurable avec $|A| < \delta$.

ii) $f_n \to f$ p.p.

Montrer que $f \in L^p(\Omega)$ et que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$.

$\boxed{\text{IV.16}}$ Soit $\Omega =]0,1[$.

1) On considère la suite (f_n) de fonctions définies par $f_n(x) = ne^{-nx}$.

Montrer que :

i) $f_n \to 0$ p.p.

ii) (f_n) est bornée dans $L^1(\Omega)$,

iii) $f_n \not\to 0$ dans $L^1(\Omega)$,

iv) $f_n \not\rightharpoonup 0$ pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$.

Montrer qu'il n'existe aucune sous-suite extraite (f_{n_k}) qui converge pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$.

2) Soit $1 < p < \infty$. On considère la suite (g_n) de fonctions définies par $g_n(x) = n^{1/p}\, e^{-nx}$.

Montrer que :

i) $g_n \to 0$ p.p.

ii) (g_n) est bornée dans $L^p(\Omega)$,

iii) $g_n \not\to 0$ dans $L^p(\Omega)$,

iv) $g_n \rightharpoonup 0$ pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$.

$\boxed{\text{IV.17}}$ Soit $1 < p < \infty$. Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ telle que :

i) (f_n) est bornée dans $L^p(\Omega)$,

ii) $f_n \to f$ p.p.

1) Montrer que $f_n \rightharpoonup f$ pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$.

[On pourra commencer par montrer que si $f_n \to \tilde{f}$ pour $\sigma(L^p, L^{p'})$ et $f_n \to f$ p.p. alors $f = \tilde{f}$ p.p. (utiliser l'exercice III.4)].

2) Même conclusion si l'on remplace l'hypothèse ii) par ii') $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

3) On suppose maintenant que $|\Omega| < \infty$ et on fait les hypothèses i) et ii).

Montrer que $\| f_n - f \|_q \to 0$ pour tout q, $1 < q < p$.

[On pourra introduire les fonctions tronquées $T_k f_n$ (voir exercice IV.2) ou bien utiliser Egorov].

IV.18 *Fonctions de Rademacher.*

Soit $1 < p < \infty$ et soit $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$. On suppose que f est T-périodique i.e.

$$f(x+T) = f(x) \text{ p.p.}$$

On pose

$$\overline{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt.$$

On considère la suite (u_n) de $L^p(0,1)$ définie par

$$u_n(x) = f(nx), \ x \in]0,1[.$$

1) Montrer que $u_n \rightharpoonup \overline{f}$ dans $L^p(0,1)$ pour la topologie $\sigma(L^p, L^{p'})$.

2) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_n - \overline{f} \|_p$.

3) Examiner les exemples suivants :

i) $u_n(x) = \sin nx$,

ii) $u_n(x) = f(nx)$ où f est 1-périodique et

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x \in]0,1/2[\\ \beta & \text{si } x \in]1/2,1[. \end{cases}$$

Les fonctions de l'exemple ii) sont les *fonctions de Rademacher*.

IV.19

1) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$ et soit $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que :

i) $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(L^p, L^{p'})$,

ii) $\| f_n \|_p \to \| f \|_p$.

Montrer que $f_n \to f$ fortement dans $L^p(\Omega)$.

2) Construire une suite (f_n) de $L^1(0,1)$, $f_n \geq 0$ telle que :

i) $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(L^1, L^\infty)$,

ii) $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$,

iii) $\|f_n - f\|_1 \not\to 0$.

3) Comparer aux résultats de l'exercice IV.14.

$\boxed{\text{IV.20}}$ On suppose que $|\Omega| < \infty$. Soient $1 < p < \infty$ et $1 \leq q < \infty$.

Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$|a(t)| \leq C\left(|t|^{p/q} + 1\right) \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

On considère l'application $A : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ définie par

$$(Au)(x) = a\big(u(x)\big), \; x \in \Omega.$$

1) Montrer que A est continu de $L^p(\Omega)$ fort dans $L^q(\Omega)$ fort.

2) On prend ici $\Omega = \,]0,1[$. On suppose que pour toute suite (u_n) telle que $u_n \rightharpoonup u$ pour $\sigma(L^p, L^{p'})$ alors $Au_n \rightharpoonup Au$ pour $\sigma(L^q, L^{q'})$.

Montrer que la fonction a est très particulière.

[On pourra utiliser les fonctions de Rademacher ; voir exercice IV.18].

$\boxed{\text{IV.21}}$ Etant donnée une fonction $u_o : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pose $u_n(x) = u_o(x+n)$.

1) On suppose que $u_o \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 < p < \infty$. Montrer que $u_n \rightharpoonup 0$ dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $\sigma(L^p, L^{p'})$.

2) On suppose que $u_o \in L^\infty(\mathbb{R})$ et que $u_o(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$ au sens suivant :

pour tout $\delta > 0$ l'ensemble $[|u_0| > \delta]$ est de mesure finie.

Montrer que $u_n \rightharpoonup 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ pour $\sigma(L^\infty, L^1)$.

3) On prend $u_o = \chi_{]0,1[}$.

Montrer qu'il n'existe aucune sous-suite (u_{n_k}) qui converge dans $L^1(\mathbb{R})$ pour $\sigma(L^1, L^\infty)$.

$\boxed{\text{IV.22}}$

1) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$ et soit $f \in L^p(\Omega)$.

Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) $\qquad f_n \rightharpoonup f$ pour la topologie $\sigma(L^p,L^{p'})$.

(B) $\left\{ \begin{array}{l} \|f_n\|_p \leq C \\ \text{et} \quad \int_E f_n \to \int_E f \quad \forall E \subset \Omega, \text{ E mesurable et } |E| < \infty. \end{array} \right.$

2) Si $p=1$ et $|\Omega|<\infty$ vérifier que (A) $\Longleftrightarrow$ (B).

3) On suppose maintenant que $p=1$ et que $|\Omega|=\infty$. Montrer que (A) $\Rightarrow$ (B). Construire un exemple montrant que, en général, (B) $\not\Rightarrow$ (A).
[On pourra utiliser l'exercice IV.21, question 3)].

4) Soit (f_n) une suite de $L^1(\Omega)$ et soit $f \in L^1(\Omega)$ avec $|\Omega|=\infty$. On suppose que :

a) $f_n \geq 0 \quad \forall n \quad$ et $\quad f \geq 0 \quad$ p.p. sur Ω,

b) $\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$,

c) $\int_E f_n \to \int_E f \quad \forall E \subset \Omega$, E mesurable et $|E|<\infty$.

Montrer que $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^1(\Omega)$ pour $\sigma(L^1,L^\infty)$.
[On pourra commencer par prouver que

$$\int_F f_n \to \int_F f \quad \forall F \subset \Omega, \text{ F mesurable et } |F|<\infty].$$

$\boxed{\text{IV.23}}$ Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et soit $1 \leq p \leq \infty$. On se propose de montrer que l'ensemble

$$C = \{u \in L^p(\Omega) \ ; \ u \geq f \text{ p.p.}\}$$

est fermé dans $L^p(\Omega)$ pour la topologie $\sigma(L^p,L^{p'})$.

On considère d'abord le cas $1 \leq p < \infty$.

1) Montrer que C est convexe et fermé dans $L^p(\Omega)$ fort. En déduire que C est fermé pour la topologie $\sigma(L^p,L^{p'})$.

On considère maintenant le cas $p=\infty$.

2) Montrer que

$$C = \{u \in L^\infty(\Omega) \ ; \ \int u\varphi \geq \int f\varphi \quad \forall \varphi \in L^1(\Omega),\ f\varphi \in L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \varphi \geq 0 \text{ p.p.}\}.$$

[On pourra commencer par supposer que $f \in L^\infty(\Omega)$. Dans le cas général on pourra introduire $\omega_n = [|f|<n]$].

3) En déduire que C est fermé dans $L^\infty(\Omega)$ pour la topologie $\sigma(L^\infty,L^1)$.

4) Soient $f_1, f_2 \in L^\infty(\Omega)$ avec $f_1 < f_2$ p.p. Montrer que l'ensemble

$$\{u \in L^\infty(\Omega)\ ;\ f_1 < u < f_2 \text{ p.p.}\}$$

est compact dans $L^\infty(\Omega)$ pour la topologie $\sigma(L^\infty,L^1)$.

$\boxed{\text{IV.24}}$ Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Soit (ρ_n) une suite régularisante. Soit (ξ_n) une suite de $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\|\zeta_n\|_\infty < 1 \quad \forall n \quad \text{et} \quad \zeta_n \to \zeta \quad \text{p.p. sur } \mathbb{R}^N.$$

On pose

$$v_n = \rho_n \star (\zeta_n u) \quad \text{et} \quad v = \zeta u.$$

1) Montrer que $v_n \rightharpoonup v$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour la topologie $\sigma(L^\infty,L^1)$.

2) Montrer que $\int_B |v_n - v| \to 0$ pour toute boule B.

$\boxed{\text{IV.25}}$ *Régularisation des fonctions de* $L^\infty(\Omega)$.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert.

1) Soit $u \in L^\infty(\Omega)$. Montrer qu'il existe une suite (u_n) de $C_c^\infty(\Omega)$ telle que :

a) $\|u_n\|_\infty < \|u\|_\infty$,

b) $u_n \to u$ p.p. sur Ω,

c) $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^\infty(\Omega)$ pour la topologie $\sigma(L^\infty,L^1)$.

2) Si de plus $u > 0$ p.p. montrer que l'on peut prendre en outre

d) $u_n > 0$.

3) Vérifier que $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^\infty(\Omega)$ pour la topologie $\sigma(L^\infty,L^1)$.

$\boxed{\text{IV.26}}$ Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

1) Montrer que $f \in L^1(\Omega)$ si et seulement si

$$A = \operatorname{Sup}\left\{\int f\varphi\ ;\ \varphi \in C_c(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty < 1\right\} < \infty$$

et dans ce cas $A = \|f\|_1$.

2) Montrer que $f^+ \in L^1(\Omega)$ si et seulement si

$$B = \text{Sup}\left\{\int f\varphi \ ;\ \varphi \in C_c(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad \varphi \geq 0\right\} < \infty$$

et dans ce cas $B = \|f^+\|_1$.

3) Mêmes questions si l'on remplace $C_c(\Omega)$ par $C_c^\infty(\Omega)$.

4) En déduire que

$$\left(\int f\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\right) \Rightarrow \left(f = 0 \text{ p.p.}\right)$$

$$\text{et} \quad \left(\int f\varphi \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \varphi \geq 0\right) \Rightarrow \left(f \geq 0 \text{ p.p.}\right).$$

$\boxed{\text{IV.27}}$ Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Soient $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tels que $u \neq 0$ p.p. sur un sous-ensemble de Ω de mesure positive.

On suppose que

$$\left(\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ et } \int u\varphi > 0\right) \Rightarrow \left(\int v\varphi \geq 0\right).$$

Montrer qu'il existe une constante $\lambda \geq 0$ telle que

$$v = \lambda u.$$

$\boxed{\text{IV.28}}$ Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tel que $\int \rho = 1$. On pose $\rho_n(x) = n^N \rho(nx)$.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < \infty$.

Montrer que $\rho_n \star f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

$\boxed{\text{IV.29}}$ Soit $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact.

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ il existe une fonction $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que :

a) $0 \leq u_n \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N$,

b) $u_n = 1$ sur K,

c) $\text{Supp}\, u_n \subset K + B\left(0, \frac{1}{n}\right)$,

d) $|D^\alpha u_n(x)| \leq C_\alpha n^{|\alpha|}$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\forall \alpha$ multi-entier

(où C_α est une constante qui dépend seulement de α).

[Soit χ_n la fonction caractéristique de l'ensemble $K + B\left(0, \frac{1}{2n}\right)$. On pourra pre $u = \rho_{2n} \star \chi_n$].

$\boxed{\text{IV.30}}$ *Inégalité de Young.*

Soient $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq 1$. On pose.

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1 \text{ de sorte que } 1 \leq r \leq \infty.$$

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$.

1) Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ fixé la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$.

[On pourra introduire $\alpha = p/q'$, $\beta = q/p'$ et écrire

$$|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^\alpha |g(y)|^\beta \left(|f(x-y)|^{1-\alpha} |g(y)|^{1-\beta}\right)].$$

2) On pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.$$

Prouver que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ et que $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \ \|g\|_q$.

3) On suppose maintenant que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Montrer que $(f * g) \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et que si $1 < p < \infty$ alors

$$(f * g)(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } |x| \longrightarrow \infty.$$

$\boxed{\text{IV.31}}$ Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < \infty$.

Pour chaque $r > 0$ on pose

$$f_r(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy, \ x \in \mathbb{R}^N.$$

1) Montrer que $f_r \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ et que $f_r(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$ ($r > 0$ étant fixé).

2) Montrer que $f_r \xrightarrow[r \to 0]{} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

[On pourra écrire $f_r = f * \varphi_r$ avec φ_r convenablement choisi].

$\boxed{\text{IV.32}}$

1) Soient $f,g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Vérifier que $f * g = g * f$ et que $(f * g) * h = f * (g * h)$.

2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$; on suppose que $f * \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Montrer que $f = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$. Généraliser au cas où $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

3) Soit $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ une fonction fixée. On considère l'opérateur $T : L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ défini par

$$Tf = g \star f.$$

Vérifier que T est borné. Déterminer $T^\star$, $TT^\star$ et $T^\star T$; que remarque-t-on ? A quelle condition sur g a-t-on $T^\star = T$?

$\boxed{\text{IV.33}}$ On fixe une fonction $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \not\equiv 0$ et on considère la famille de fonctions

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n\}$$

où $\varphi_n(x) = \varphi(x+n)$, $x \in \mathbb{R}^N$.

1) Soit $1 \leq p < \infty$. Montrer que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ tel que

$$\| \tau_h f - f \|_p < \varepsilon \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \text{ avec } |h| < \delta \text{ et } \forall f \in \mathcal{F}.$$

2) Montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas relativement compact dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

$\boxed{\text{IV.34}}$ Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

1) Montrer que $\mathcal{F}$ est borné.

2) Montrer $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ tel que

$$\| \tau_h f - f \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \text{ avec } |h| < \delta \quad \text{et} \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

3) Montrer que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné tel que

$$\| f \|_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Comparer au corollaire IV.26.

$\boxed{\text{IV.35}}$ Soit $G \in L^p(\mathbb{R}^N)$ une fonction fixée avec $1 \leq p < \infty$ et soit

$$\mathcal{F} = G \star \mathcal{B}$$

où $\mathcal{B}$ désigne un borné de $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Montrer que $\mathcal{F}_{|\Omega}$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$ pour tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Comparer au corollaire IV.27.

$\boxed{\text{IV.36}}$ *Famille équi-intégrable.*

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{F}\subset L^1(\Omega)$ est *équi-intégrable* s'il vérifie les propriétés suivantes :

(a) $\mathcal{F}$ est borné dans $L^1(\Omega)$ [1]

(b) $\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \text{tel que} \\ \displaystyle\int_E |f| < \varepsilon \quad \forall E\subset\Omega\,, \ E \text{ mesurable avec } |E|<\delta \text{ et } \forall f\in\mathcal{F}, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists\omega\subset\Omega \text{ mesurable avec } |\omega|<\infty \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_{\Omega\setminus\omega} |f| < \varepsilon \quad \forall f\in\mathcal{F}. \end{cases}$

Soit (Ω_n) une suite croissante d'ensembles mesurables avec $|\Omega_n|<\infty$ $\forall n$, telle que $\Omega=\bigcup_n \Omega_n$.

1) Montrer que $\mathcal{F}$ est équi-intégrable si et seulement si on a :

(d) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{[|f|>t]} |f| = 0$

et

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\Omega\setminus\Omega_n} |f| = 0.$

2) Montrer que si $\mathcal{F}\subset L^1(\Omega)$ est relativement compact dans $L^1(\Omega)$ alors $\mathcal{F}$ est équi-intégrable. La réciproque est-elle vraie ?

---

[1] On peut montrer que (a) est une conséquence de (b) et (c) si la mesure est diffuse (i.e. sans atomes).
Considérer par exemple $\Omega=\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue.