

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Научно-исследовательский институт ядерной физики  
имени Д.В. Скobelьцына

На правах рукописи

Лукашенко Анастасия Тарасовна

**Модели магнитного поля  
в околосолнечном пространстве**

Специальность 01.04.08 —  
«Физика плазмы»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., проф.  
Веселовский И.С.

Москва – 2016

# Оглавление

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	6
Глава 1. ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ . . . . .	18
1.1 Векторный и скалярный потенциалы магнитного поля . . . . .	18
1.2 Силовые линии магнитного поля, потоковые трубы, магнитные поверхности . . . . .	19
1.3 Общее и частные представления магнитного поля . . . . .	24
1.4 Гамильтоново описание линий магнитного поля . . . . .	27
1.5 Особые точки магнитного поля . . . . .	30
Глава 2. МОДЕЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ВО ВНУТРЕННЕЙ ГЕЛИОСФЕРЕ С УЧЁТОМ ВЫРАВНИВАНИЯ РАДИАЛЬНОЙ НАПРЯЖЁННОСТИ В КОРОНЕ СОЛНЦА . . . . .	32
2.1 Модели потенциального поля–поверхности источника . . . . .	32
2.2 Постановка задачи . . . . .	35
2.3 Решение уравнения Лапласа в области между фотосферой и поверхностью источника . . . . .	37
2.4 Решение уравнения Лапласа в области между поверхностью источника и поверхностью выравнивания . . . . .	40
2.5 Потенциал и поле аксиального диполя . . . . .	44
2.6 Экваториальный диполь . . . . .	47
2.7 Квадрупольные гармоники . . . . .	49
2.8 Поверхностные токи . . . . .	53
2.9 Визуализация и обсуждение результатов . . . . .	55
Глава 3. НУЛЕВЫЕ ТОЧКИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ . . . . .	59
3.1 Обзор литературы . . . . .	59
3.2 Нулевые точки двумерного потенциального магнитного поля	65

3.3	Нулевые точки потенциального магнитного поля в трёхмерном пространстве . . . . .	74
3.3.1	Введение в базисные функции . . . . .	76
3.4	Нулевые точки 1-го порядка потенциального магнитного поля в трёхмерном пространстве . . . . .	81
3.4.1	Невырожденная нулевая точка . . . . .	84
3.4.2	$D$ -нули . . . . .	88
3.4.3	Дикритическая нулевая точка . . . . .	89
3.5	Нулевые точки 2-го порядка потенциального магнитного поля в трёхмерном пространстве . . . . .	92
3.5.1	Коническая дикритическая нулевая точка . . . . .	94
3.5.2	Нулевая точка с 8-ю “полушапами” . . . . .	96
3.5.3	Нулевые точки, образуемые при парном комбинировании базисных функций . . . . .	97
3.5.4	Эквивалентные записи потенциалов вблизи нулевых точек . . . . .	105
3.5.5	Нули 2-го порядка общего вида . . . . .	107
3.6	Бифуркции нулевых точек потенциального магнитного поля	109
3.6.1	Бифуркции $D$ -нуля или нуля 2-го порядка с распадом на две нулевые точки . . . . .	109
3.6.2	Бифуркции нулевой точки в конфигурации топологического триггера . . . . .	112
3.7	Заключение к Главе 3 . . . . .	115
Глава 4.	РАСЧЁТЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ГЕОМЕТРИИ ЕГО ЛИНИЙ ВБЛИЗИ НЕКОТОРЫХ ТОКОВЫХ СИСТЕМ . . . . .	117
4.1	Упорядоченное и хаотическое поведение линий магнитного поля вблизи простых токовых систем . . . . .	117
4.2	Система из двух сцепленных круговых витков с токами . . . . .	120
4.2.1	Описание системы . . . . .	120

4.2.2	Области упорядоченности и хаотичности . . . . .	122
4.2.3	Подсистемы замкнутых линий . . . . .	124
4.2.4	Магнитные “острова” . . . . .	127
4.2.5	Перспективы применения для моделирования магнитного поля в солнечной короне . . . . .	128
4.3	Моделирование магнитного поля “Магнитного альфа-спектрометра-02” (AMS-02) . . . . .	137
4.3.1	Описание AMS-02 . . . . .	137
4.3.2	Конструкция сверхпроводящих катушек AMS-02 . .	138
4.3.3	Магнитная система для лабораторных экспериментов и численные модели . . . . .	140
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .		146
ЛИТЕРАТУРА . . . . .		148
Приложение А. Использование гармонических коэффициентов Солнечной обсерватории им. Уилкокса (WSO) . . . . .		162
Приложение Б. Списки полиномов и присоединённых функций Лежандра . . . . .		165
B.1	Полиномы Лежандра низших порядков . . . . .	165
B.2	Присоединённые функции Лежандра низших порядков . . .	166
Приложение В. Потенциал и поле вблизи нулевых точек высших порядков в пространстве . . . . .		168
B.1	Поле при задании базисными функциями нулевых точек 2-го порядка . . . . .	168
B.2	Базисные функции для нулевых точек 3-го порядка . . . . .	168

# Список обозначений

В работе используются следующие обозначения:

*A*-нуль — нулевая точка 1-го порядка в пространстве, у которой одно из собственных значений матрицы гессиана потенциала положительно, а два других отрицательны

AMS-02 — Alpha Magnetic Spectrometer-02

*B*-нуль — нулевая точка 1-го порядка в пространстве, у которой два из собственных значений матрицы гессиана потенциала положительны, а одно отрицательно

*D*-нуль — нулевая точка 1-го порядка в пространстве, у которой одно из собственных значений матрицы гессиана потенциала равно нулю

*O*-точка — нулевая точка на плоскости разновидности “центр”

**R** — радиус-вектор

$R_s$  — радиус поверхности источника

$R_L$  — радиус поверхности выравнивания

$R_\odot$  — радиус фотосферы

*X*-точка — нулевая точка на плоскости разновидности “седло”

$\gamma$ -линия — линия поля, приходящий в нулевую точку изолированно (в том смысле, что никакая другая линия поля из малой её окрестности до нуля не доходит)

$\Sigma$ -поверхность — поверхность, состоящая из линий поля с концом в нуле

МКС — Международная космическая станция

# Введение

Исследования по физике плазмы фактически начались в середине XVIII в. с изучения различных электрических явлений, в частности искровых разрядов и молний [1, с. 24]. Отделение физики плазмы от физики разрядов (дугового, тлеющего, искрового и т. п.) обычно связывают с именем американского химика Ирвинга Ленгмюра. Его основные работы в этой области приходятся на 1920-е годы. Термин “плазма” как таковой был введён Ленгмюром и Тонксом предположительно в 1928 г. [2]. Всплеск интереса к физике плазмы произошёл в конце 1940-х–начале 1950-х годов и был связан с началом исследований в области управляемого термоядерного синтеза [3], а также с выходом на рубеже 1950-х годов книги шведского астрофизика Ханнеса Альвена “Космическая электродинамика” [4], в которой показывалась огромная роль электродинамических процессов в космических явлениях и была предложена модель исследований плазмы, получившая название “магнитная гидродинамика” (МГД), которая представляла собой соединение классической электродинамики с гидродинамикой [1, с. 31]. Ещё один импульс развитию физики плазмы дала разработка электрореактивных двигателей (ЭРД), стартовавшая вскоре после начала космической эры в 1957 г.

Процессы в плазменных системах существенно зависят от морфологии (топологии и геометрии) силовых линий магнитного поля. Физически это обусловлено тем, что в достаточно сильном магнитном поле заряженные частицы плазмы движутся по спиралям, навивающимся на линии поля, и малоподвижны в перпендикулярных к этим линиям направлениях [1]. В этой связи интерес вызывают такие элементы структуры магнитных полей, как сами линии поля, трубы поля, магнитные поверхности, сепаратрисы, особые точки и т. д. Так, согласно существующим представлениям [5], магнитное пересоединение, которое представляет собой перестройку

магнитного поля, обусловленную изменением связности его линий, приводит к нагреву вещества и ускорению частиц во время солнечных вспышек и авроральных суббурь. Пересоединение зачастую инициируется вблизи нулевых точек магнитного поля.

При моделировании магнитных полей в короне Солнца часто применяется потенциальное приближение. Оно используется как в моделях коронального поля в целом, так и при моделировании топологических конфигураций отдельных участков короны. К моделям первой категории относятся модели потенциального поля–поверхности источника (англ. potential field–source surface, сокращённо PFSS). Предполагается, что на поверхности источника (впервые введённой Шаттеном и др. [6] и, независимо, Альтшуллером и Ньюкирком [7] в 1969 г.), линии поля становятся радиальными (если не учитывать вызванное вращением Солнца закручивание в спираль Архимеда). Физический смысл поверхности источника основан на предположении, что до неё энергия магнитного поля преобладает над энергией плазмы, а при переходе через неё преобладающей становится кинетическая энергия солнечного ветра. Значение радиуса поверхности источника подбирается так, чтобы вычисляемые результаты соответствовали наблюдаемой форме короны, и составляет, как правило,  $2\text{--}3 R_{\odot}$ . Близкие по структуре модели используются и при моделировании магнитосфер планет. К их числу относятся модели с тонким токовым слоем [8] и [9].

Из исходных моделей с поверхностью источника следовало, что в минимуме солнечной активности на удалении от Солнца зависимость изменения радиального магнитного потока от гелиошироты носит дипольный характер. Однако, как показали измерения космического аппарата “Улисс” [10], радиальная компонента поля, приведённая к одинаковому расстоянию от Солнца  $B_r r^2$ , приблизительно равна константе и от гелиошироты не зависит. В целом поле напоминало поле двух

частей магнитных монополей разных знаков, склеенных вместе по тонкому токовому слою, лежащему в плоскости магнитного экватора. Вместе с полем магнитного диполя Солнца получается картина, напоминающая вид солнечной короны в годы минимума активности. Поэтому актуальным являлось такое усовершенствование модели PFSS, в котором учитывалась бы независимость магнитного потока от гелиошироты в околосолнечном пространстве.

К моделям второй категории можно отнести получившие широкое распространение модели “magnetic charge topology” (МСТ) [11]. Источниками магнитного поля в короне в основном являются выходящие на уровне фотосферы трубы магнитного потока, разбросанные по поверхности Солнца. Эти источники не статичны, а непрерывно движутся. Они могут сливаться, фрагментироваться, взаимно нейтрализовывать друг друга и т. д. В результате магнитное поле в короне Солнца имеет крайне сложную структуру.

Существуют разные способы теоретического моделирования структуры магнитного поля в солнечной короне. Часто используется следующее упрощение: в качестве строительных блоков рассматриваются поля, создаваемые небольшим числом точечных источников. Такие точечные источники являются фиктивными, поскольку магнитных зарядов в природе не существует. В простейшем варианте в моделях МСТ источники с положительными и отрицательными зарядами располагают на поверхности фотосферы. Фотосферная поверхность при этом полагается плоской. Поле от источников убывает по закону обратных квадратов. В результате наложения полей от различных источников могут возникать нулевые точки поля. При этом возможны нули двух сортов: фотосферные, лежащие на фотосферной плоскости, и корональные, т. е. расположенные в пространстве над ней (полупространство под фотосферной плоскостью в моделях не рассматривается).

Не все математически возможные конфигурации, возникающие в МСТ, топологически стабильны, где под стабильностью понимается неизменность конфигурации при малых возмущениях. Устойчивыми являются изолированные нулевые точки 1-го порядка, принадлежащие к разновидности “неправильные радиальные нули” [5]. Однако имеется ряд ситуаций, когда возникает потребность в рассмотрении вырожденных нулевых точек. В первую очередь это относится к бифуркациям нулевых точек, сопровождающим перестройку топологии поля. В частности, распад вырожденного фотосферного нуля на невырожденные с последующим быстрым движением новой нулевой точки в короне имеет место в модели топологического триггера солнечных вспышек [12]– [15].

В точке, где вектор поля обращается в нуль,  $\mathbf{B} = 0$ , единственность решения дифференциального уравнения для линий поля

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} = \frac{ds}{|\mathbf{B}|}, \quad (1)$$

где  $ds$  — элемент длины, может нарушаться, при этом в ней могут оканчиваться либо одномерные многообразия (изолированные линии, называемые  $\gamma$ -линиями), либо двумерные (образуемые силовыми линиями поверхности, называемые  $\Sigma$ -поверхностями) [16].

Классификация нулевых точек 1-го порядка и геометрия линий поля вблизи них описывались в литературе ранее неоднократно в связи с исследованиями магнитных полей в астрофизических условиях (см., например, [17]). Нули потенциального поля одного и того же порядка на плоскости имеют фиксированную геометрию окрестностей с точностью до поворота и масштабного фактора [18]. В диссертации дано их рассмотрение на основе разложения по однородным гармоническим полиномам. Достаточно полное описание нулей порядка выше 1-го ранее отсутствовало; обзор для потенциалов, заданных отдельными сферическими гармониками, был дан в [19], а некоторые частные случаи рассматривались в [20]. В

общем случае, однако, разложение потенциала в ряд вблизи нулевой точки представляет собой линейную комбинацию сферических гармоник, число которых для нуля порядка  $p$  равно  $2p + 3$ . В связи с этим необходим учёт такого комбинирования, поскольку оно даёт нулевые точки с новыми характеристиками. Кроме того, описание нулевых точек порядка выше 1-го усложняется тем, что уравнения линий поля (1) зачастую не удается проинтегрировать аналитически, а также нелинейностью выражений для вектора поля. В связи с рассмотрением бифуркаций, а также учётом нелинейных эффектов в процессах пересоединения возникает потребность в нахождении математических методов их описания, а также систематизации существующих представлений.

В некоторых случаях в МСТ используются модели с зарядами не на поверхности фотосфера, а погруженными под поверхность, или с погруженными под поверхность магнитными диполями [21]– [24], либо усложнённые иными методами [11, 25]. Одним из возможных способов сделать модели МСТ более физически реалистичными было бы моделирование фотосферных потоковых трубок круговыми витками с током. Такая задача является многопараметрической. Возникает вопрос о разумных ограничениях на параметры. Для ответа на него необходимо исследовать возможные варианты поведения линий поля вблизи токовых витков при их различном взаимном расположении в пространстве. Данная задача представляет также и более широкий теоретический интерес. Согласно существующим в настоящее время представлениям, наиболее общим случаем поведения магнитных силовых линий является случай, когда те не замкнуты и не ложатся на какие-либо магнитные поверхности [26]. Как было недавно показано [27]– [30], такого рода поведение силовых линий может создаваться даже очень простыми токовыми системами, в частности, оно возникает в системе из двух сцепленных круговых витков с токами [27]. Публикация [27], наряду с более

ранней работой [28], послужила отправным пунктом для ряда других работ, посвящённых рассмотрению хаотического поведения линий магнитного поля в простых токовых системах, в частности [29, 30].

**Целью** диссертационной работы являлось исследование, с применением как аналитических расчётов, так и методов математического моделирования, топологических и геометрических характеристик магнитного поля в ряде конфигураций на Солнце, во внутренней гелиосфере и в лабораторных условиях.

Для достижения поставленной цели в работе необходимо было решить следующие задачи:

1. В рамках потенциального приближения предложить модель, согласующуюся с измерениями КА “Улисс” (Ulysses), согласно которым радиальное магнитное поле в гелиосфере практически не зависит от широты точки наблюдения в околосолнечном пространстве.
2. Провести классификацию нулевых точек потенциального магнитного поля порядка выше 1-го. Предложить общую методику описания поведения линий магнитного поля (для случая потенциального поля) вблизи нулевых точек порядков 1-го, 2-го и выше.
3. Разработать пакет программ, позволяющих моделировать поведение линий магнитного поля вблизи ряда систем, состоящих из токовых витков, при различных вариантах их взаимного расположения в пространстве. Исследовать поведение линий вблизи простейшей токовой системы из двух сцепленных круговых витков.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Предложена теоретическая модель для расчёта магнитного поля в короне в потенциальном приближении, представляющая собой модификацию модели с поверхностью источника. В этой модели магнитное поле на фотосфере задаётся по результатам наблюдений, а

на удалении от Солнца модуль радиальной составляющей магнитного поля не зависит от гелиошироты, а её знак скачкообразно изменяется при переходе от одной полусферы к другой. В модели учтены экспериментальные результаты, полученные на КА “Улисс”. В рамках данной модели получены общие аналитические формулы для расчёта потенциала и магнитного поля. Проведены расчёты для дипольных и квадрупольных гармоник на фотосфере.

2. Получены общие принципы описания и классификации нулевых точек порядка выше 1-го потенциального магнитного поля в трёхмерном пространстве. Показано, что это описание может быть упрощено за счёт нахождения подходящей системы базисных функций, по которым производится разложение потенциала в ряд Тейлора. Найдено, что для нулевых точек порядка выше 1-го в тех случаях, когда уравнения силовых линий в их окрестности не удаётся проинтегрировать аналитически, можно дать качественное описание геометрии этих линий путём рассмотрения поведения последних вблизи исходящих из нулевой точки лучей, на которых поле радиально или же равно нулю. Сформулирована соответствующая задача на собственные функции. Для 2-го порядка получен ряд аналитических решений общего характера. Результаты непосредственно обобщаются на произвольное векторное поле, потенциал которого удовлетворяет уравнению Лапласа.
3. С использованием методов математического моделирования дано описание поведения силовых линий магнитного поля системы из двух одинаковых сцепленных перпендикулярно токовых колец, в окрестности которой существуют области как упорядоченности, так и хаотичности. Показано, что на малых расстояниях происходит приближённая намотка силовых линий на вложенные друг в друга

магнитные поверхности, охватывающие каждое из токовых колец, а на удалении — на топологически эквивалентные торам вложенные поверхности, охватывающие систему колец как целое, тогда как на промежуточных расстояниях располагается область хаотичности. Найдено взаимное расположение возникающих подсистем замкнутых силовых линий и “магнитных островов”, образующихся вблизи них.

### **Научная новизна:**

1. Впервые в рамках потенциального приближения предложена модель магнитного поля в солнечной короне, в которой магнитное поле на фотосферной поверхности задаётся из результатов наблюдений, а на удалении модуль радиальной его составляющей полагается равным константе, а её знак — скачком изменяющимся при переходе от одной полусфера к другой. Модель согласуется с данными КА “Улисс”.
2. Впервые дан алгоритм описания геометрии и топологии силовых линий магнитного поля вблизи нулевых точек потенциального магнитного поля высших порядков. Показано, как такое описание может быть упрощено посредством подходящего выбора системы базисных функций, по которым производится разложение потенциала в ряд Тейлора. Найдена общая методика получения качественных сведений о поведении линий поля вблизи нулевых точек высших порядков. Впервые дана формулировка соответствующей задачи на собственные функции для случая нулевых точек порядка выше 1-го. Для нулевых точек 2-го порядка впервые найден ряд решений, как частных, так и общего характера.
3. Разработанная методика описания нулевых точек применена для характеристизации бифуркаций в модели топологического триггера солнечных вспышек.
4. Впервые были получены численные характеристики областей упорядоченного и хаотического поведения линий магнитного поля в

окрестности простейшей системы из двух сцепленных колец с токами, а также существующих вблизи них “магнитных островов”.

5. Впервые произведены численные расчёты магнитного поля системы токовых катушек, созданной в ИЛФ СО РАН и моделирующей магнитное поле сверхпроводящего магнита спектрометра AMS-02.

**Научная и практическая значимость** диссертационной работы определяется разработкой новых теоретических подходов к описанию особых точек бездивергентных векторных полей, моделирования магнитных полей в потенциальном приближении в солнечной короне и во внутренней гелиосфере, а также дальнейшего совершенствования модели топологического триггера солнечных вспышек.

**Степень достоверности** изложенных в работе результатов обеспечивается согласованностью с выводами литературных источников по теме диссертации в тех случаях, когда такие результаты имеются. Выполненные численные расчёты были перепроверены путём использования различных методов счёта. Основные положения диссертации опубликованы в ведущих журналах по астрономии и геомагнетизму.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на конференциях:

1. 6-я ежегодная конференция “Физика плазмы в Солнечной системе”. ИКИ РАН, Москва, Россия, 14–18 февраля 2011
2. IAGA-III Symposium: “Heliospheric Physics during and after a deep solar minimum”. Luxor, Egypt, 12–17 November 2011
3. 7-я ежегодная конференция “Физика плазмы в Солнечной системе”. ИКИ РАН, Москва, Россия, 6–10 февраля 2012
4. Научная сессия НИЯУ МИФИ-2012. НИЯУ МИФИ, Москва, Россия, 30 января–4 февраля 2012

5. XVIII всероссийская ежегодная конференция с международным участием “Солнечная и солнечно-земная физика – 2014”. Пулково, Санкт-Петербург, Россия, 20–24 октября 2014
6. 10-я ежегодная конференция “Физика плазмы в Солнечной системе”. ИКИ РАН, Москва, Россия, 16–20 февраля 2015
7. Научная сессия НИЯУ МИФИ-2015. НИЯУ МИФИ, Москва, Россия, 16–21 февраля 2015
8. XII Международная Казанская летняя школа-конференция “Теория функций, её приложения и смежные вопросы”. Республика Татарстан, Россия, 27 июня–3 июля 2015
9. 597<sup>th</sup> WE-Heraeus-Seminar “Stochasticity in Fusion Plasmas”. Physikzentrum Bad Honnef, Germany, 10–12 September 2015
10. XIX Всероссийская ежегодная конференция по физике Солнца “Солнечная и солнечно-земная физика – 2015”. Пулково, Санкт-Петербург, Россия, 5–9 октября 2015
11. Научная сессия НИЯУ МИФИ-2015-2. НИЯУ МИФИ, Москва, Россия, 22–26 декабря 2015
12. 11-я ежегодная конференция “Физика плазмы в Солнечной системе”. ИКИ РАН, Москва, Россия, 15–19 февраля 2016
13. AGU Chapman Conference. Dubrovnik, Croatia, 22–27 May 2016
14. XX Всероссийская ежегодная конференция по физике Солнца “Солнечная и солнечно-земная физика – 2016”. Пулково, Санкт-Петербург, Россия, 10–14 октября 2016

Также материалы по теме диссертации докладывались на научном семинаре “Астрофизика космических лучей и физика космоса” НИИЯФ МГУ, на семинарах в Научно-исследовательском центре “Курчатовский институт” и Институте физики Земли им. О.Ю. Шмидта и на 22-й конференции-школе “Актуальные проблемы физики и технологий” в Институте общей физики РАН им. А.М. Прохорова.

**Личный вклад:** все математические программы и расчётные работы по ним были подготовлены и выполнены лично автором. Постановка задач, аналитическая часть исследования, планирование работ, обсуждение результатов и публикация основных результатов осуществлялись совместно с научным руководителем. Роль автора в получении положений, выносимых на защиту, является определяющей.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 29 печатных изданиях: [31]– [59], 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [31]– [34], 5 – в сборниках трудов конференций [35]– [39], 20 – в тезисах докладов [40]– [59].

**Объём и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и трёх приложений. Полный объём диссертации составляет 169 страниц с 53 рисунками и 19 таблицами. Список литературы содержит 138 наименований.

В **Введении** дано обоснование актуальности темы диссертационной работы, сформулированы её основные задачи, показана научная новизна и практическая значимость результатов, представлена структура диссертации.

В **Главе 1** дан краткий обзор исследований геометрических и топологических характеристик силовых линий магнитного поля.

В **Главе 2** представлено описание модели магнитного поля во внутренней гелиосфере, согласующейся с измерениями КА “Улисс”, согласно которым радиальное магнитное поле в ней практически не зависит от широты точки наблюдения в околосолнечном пространстве.

В **Главе 3** даётся описание нулевых точек потенциального магнитного поля для двух- и трёхмерного случаев. Дан подробный обзор сведений о нулевых точках на плоскости на основе представления через однородные гармонические полиномы. Обсуждаются вопросы описания нулевых точек в трёхмерном пространстве и доказаны утверждения, позволяющие

упростить его за счёт подходящего выбора системы координат и, как следствие, задания системы уже не из  $2p + 3$ , а из  $2p$  базисных функций, линейная комбинация которых даёт потенциал вблизи нулевой точки произвольного порядка  $p$ . Дан их список для низших порядков. Проведён обзор геометрических характеристик линий поля вблизи нулевых точек 1-го порядка в пространстве. Даётся описание нулевых точек 2-го порядка с привлечением ряда частных примеров, а также представлены аналитические результаты общего характера. Рассмотрены бифуркции нулевых точек, в том числе в приложении к модели топологического триггера.

В **Главе 4** даётся характеристика поведения линий магнитного поля вблизи системы из двух сцепленных токовых витков при различных вариантах их расположения в пространстве. Описаны расчёты магнитного поля вблизи системы катушек с током, разработанной в Институте лазерной физики Сибирского отделения РАН (ИЛФ СО РАН) с целью моделирования магнитного поля сверхпроводящего магнита спектрометра AMS-02.

В **Заключении** кратко сформулированы основные результаты работы.

# Глава 1. ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

## 1.1. Векторный и скалярный потенциалы магнитного поля

Уравнения Максвелла в системе СИ имеют вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = q_e, \end{cases} \quad (1.1)$$

где напряжённость электрического поля, электрическое смещение, магнитная индукция и напряжённость магнитного поля обозначены через  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  соответственно, а  $q_e$  и  $\mathbf{j}$  — плотность электрических зарядов и тока соответственно.

Из уравнений Максвелла следует, что вектор  $\mathbf{B}$  может быть представлен как ротор некоторого вектора  $\mathbf{A}$ , называемого вектор-потенциалом [60]. Если же рассматривать магнитное поле  $\mathbf{B}$  в вакууме, а также, во-первых, использовать квазистационарное приближение, в котором  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ , а во-вторых, пренебречь объёмными токами, то система уравнений Максвелла для магнитного поля примет вид

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

При этом магнитное поле представимо как градиент уже скалярного потенциала  $U$ :

$$\mathbf{B} = \nabla U, \quad (1.3)$$

который удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta U = 0. \quad (1.4)$$

## 1.2. Силовые линии магнитного поля, потоковые трубки, магнитные поверхности

Линиями поля называются линии, в каждой точке которых поле направлено касательно к ним. Дифференциальные уравнения силовых линий магнитного поля в декартовой системе координат:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} = \frac{ds}{|\mathbf{B}|}, \quad (1.5)$$

где  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  — элемент длины линии. Если поле в точке конечно, непрерывно и в нуль не обращается, то через такую точку можно провести линию поля и при том единственную.

Понятие о силовых линиях магнитного и электрического полей было впервые введено английским учёным Майклом Фарадеем [61], который обратил особое внимание на то, что железные опилки в поле магнита группируются вдоль определённых линий. В 1831 г. он дал им название “линий магнитной силы”, ставшее впоследствии общеупотребительным.

В течение долгого времени широко обсуждались лишь достаточно простые разновидности магнитных полей: поле прямого проводника с током, поля плоских контуров с током и поля постоянных магнитов. Изучение этих частных случаев приводило к заключению, что в силу равенства нулю дивергенции магнитного поля (т. е. отсутствия источников и стоков поля, а именно зарядов) возможны лишь два варианта поведения его линий: линии либо замыкаются, либо начинаются и заканчиваются в бесконечности. Это представление достаточно распространено и до сих пор (см., например, [62]). В конце 1929-х годов, однако, И.Е. Тамм показал, что

могут также существовать линии магнитного поля, не принадлежащие к этим двум разновидностям. Этот пример был опубликован в написанном им классическом учебнике “Основы теории электричества” [63], первое издание которого состоялось в 1929 г. В примере Тамма [63, с. 241] рассматривается поле двух токов: кругового плоского тока  $J_1$  и бесконечного прямолинейного тока  $J_2$ , текущего по оси тока  $J_1$ . Сложение полей от двух токов приводит к тому, что силовые линии становятся винтовыми и наматываются на поверхности тороидальной формы. При этом линия может либо замкнуться, сделав какое-то число оборотов по тороиду, либо бесконечно навиваться на некоторые поверхности, называемые магнитными, заполняя их всюду плотно. Несколько десятков лет спустя построенный Таммом пример оказался практически актуальным в теории токамаков, стеллараторов и других установок управляемого термоядерного синтеза [3], [64]–[66].

Также Таммом в его учебнике на примере электрического поля было показано, что в некотором смысле является условным и понятие силовых трубок [63, сноска на с. 55]. В свободных от зарядов участках силовые линии электрического поля не могут ни начинаться, ни оканчиваться. Исключение здесь составляют нулевые точки или нулевые линии, в которых направление вектора поля не определено. Такая точка возникает, в частности, на полпути между одинаковыми зарядами одного (например, положительного) знака. При этом силовая трубка сколь угодно малого сечения, которая охватывает линию, соединяющую какой-либо из зарядов и нулевую точку поля, при подходе к последней неограниченно расширяется.

Вопрос о поведении линий магнитного поля связан с имеющим давнюю историю математическим вопросом о формулировке самого определения термина “линия” [67, 68]. Наиболее общее математическое определение линии было дано П.С. Урысоном [69]. Далее в тексте, однако, во избежание двусмысленностей будет предполагаться, что нулевые точки магнитного поля являются точками начала или окончания линий поля.

Линии магнитного поля могут начинаться и заканчиваться на бесконечности, всюду плотно навиваются на поверхности, называемые магнитными, наматываться на предельный цикл и т. д. [18]. В работах [70]–[73] впервые было показано, что при некоторых условиях магнитные поверхности перестают существовать. Первоначальной целью авторов являлось изучение магнитного поля в стеллараторах. Последние представляют собой класс тороидальных магнитных систем, в которых магнитные поверхности создаются не током, возбуждаемым вдоль плазменного шнуря, как это делается в токамаке, а внешним магнитным полем, имеющим винтовую структуру [74]. В классическом стеллараторе в создании магнитного поля участвуют токи, текущие в  $n$  парах винтовых проводников, намотанных на поверхность тора, причём в соседних проводниках ток равен по величине и противоположен по знаку. Число  $n$  называется *заходностью*. Магнитная ловушка такого стелларатора представляет собой магнитное поле винтовой симметрии, свёрнутое в тор.

В цилиндрической системе координат  $\{\rho, \varphi, z\}$  поле с винтовой симметрией  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\rho, \varphi - \gamma z)$  можно представить через скалярный потенциал [75]

$$U_0 = B_0 z + \frac{1}{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} b_n I_n(n\gamma\rho) \sin[n(\varphi - \gamma z)], \quad (1.6)$$

где  $B_0$  — напряжённость “продольного” магнитного поля;  $b_m$  — амплитуды винтового поля;  $\gamma = \frac{2\pi}{L}$ , где  $L$  — шаг обмотки, создающей поле,  $I_m(x)$  — функции Инфельда (функции Бесселя мнимого аргумента):  $I_m(x) = i^{-m} J_m(ix)$  [76]. Производная функции Инфельда вычисляется по формуле  $I'_n(x) = \frac{1}{2} [I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)]$ .

Параметрами, определяющими ход линии магнитного поля, являются отношения  $\frac{b_i}{B_0}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ),  $L$  (или  $\gamma$ ) и точка старта. При условии, что продольное поле  $B_0$  велико по сравнению с поперечным, можно получить, что линия магнитного поля отдельной гармоники представляет собой

спираль с шагом  $\lambda = \frac{L}{n}$  эллиптического сечения [75]. Ось этой спирали в свою очередь является винтовой линией, навитой на круговой цилиндр (рис. 1.1).

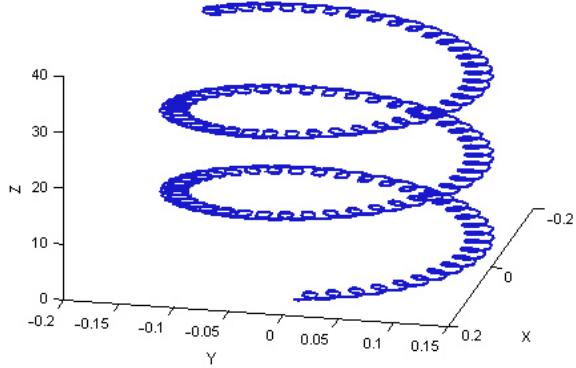


Рис. 1.1. Винтовая линия в случае  $b_3 = 0.1 B_0$ ,  $n = 3$ ,  $L = 1$ . Вектор точки старта в декартовых координатах:  $r_0 = [0.15, 0, 0]$ .

При этом возникают магнитные поверхности двух типов:

1. вложенные друг в друга трубчатые поверхности;
2. не охватывающие оси системы и неопределённо далеко от неё удаляющиеся.

Согласно определению, *сепаратриса* — поверхность, разделяющая поверхности (или линии поля), которые нельзя перевести друг в друга без разрыва структуры поверхностей [1]. Сепаратриса, разделяющая указанные выше группы поверхностей, представляет собой треугольную поверхность, рёбра которой являются винтовыми линиями  $\varphi = \gamma z$ .

В работе [70] при численном расчёте магнитных поверхностей длина шага  $L$  была взята равной  $2\pi$ , а напряжённость продольного поля  $B_0$  принята равной единице. К нему добавлялось поле  $b_3 = 3$ . Для определения формы магнитной поверхности авторами рассчитывалась одна линия поля на интервале  $0 \leq z \leq NL$ , где  $N$  достаточно велико, и затем все отрезки этой линии, лежащие в интервалах  $(k-1) \leq z \leq kL$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,

сдвигались в направлении оси  $Oz$  в интервал  $0 \leq z \leq L$ . Далее строилось сечение магнитной поверхности плоскостью с заданным значением  $z$ .

Далее Гельфандом и др. [70] ставилась задача выяснить характер влияния гофрирования поля, т. е. наложения возмущений вида:

$$\tilde{u} = \frac{b_0}{\gamma} I_0(k\gamma\rho) \sin k\gamma z \quad (1.7)$$

при разных  $b_0$  и  $k$ . При этом суммарный потенциал:

$$U_\Sigma = B_0 z + \frac{b_3}{\gamma} I_3(3\gamma\rho) \sin[3(\varphi - \gamma z)] + \frac{b_0}{\gamma} I_0(k\gamma\rho) \sin k\gamma z. \quad (1.8)$$

Компоненты суммарного поля:

$$\begin{cases} B_\rho = 3b_3 I'_3(3\gamma\rho) \sin[3(\varphi - \gamma z)] + kb_0 I_1(k\gamma\rho) \sin k\gamma z, \\ B_\varphi = \frac{3b_3}{\gamma\rho} I_3(3\gamma\rho) \cos[3(\varphi - \gamma z)], \\ B_z = B_0 - 3b_3 I_3(3\gamma\rho) \cos[3(\varphi - \gamma z)] + kb_0 I_0(k\gamma\rho) \cos k\gamma z, \end{cases} \quad (1.9)$$

где учтено, что  $I'_0(x) = I_1(x)$  [76]. Как и в предыдущих расчётах, бралось  $L = 2\pi$  (т. е.,  $\gamma = 1$ ),  $B_0 = 1$ ,  $b_3 = 3$ . Расчёт проводился для  $k = 1$  и  $k = 3$  при различных значениях  $b_0$ .

Форма магнитных поверхностей при наложении возмущения деформировалась. В некоторых случаях возникала ещё одна сепаратриса, в форме трилистника, лежащая внутри прежней. В процессе численного счёта были получены данные, указывающие на явление разрушения магнитных поверхностей. О поведении линии магнитного поля можно было судить по множеству точек  $(\rho(z_n), \varphi(z_n))$  при  $z_n = n\frac{2\pi}{3}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Такие изображения называются *сечениями Пуанкаре*. Было обнаружено, что при больших возмущениях магнитные поверхности исчезают, и эти изображающие точки ложатся на гладкие незамкнутые кривые, имеющую форму витка спирали.

Так, был проведен расчёт для кривой, вышедшей из точки с цилиндрическими координатами  $\rho = 0.01$ ,  $\varphi = 0$  (эта точка находится

внутри одного из лепестков). 53-я точка пересечения, вновь оказвшаяся вблизи оси  $Ox$ , имеет координаты  $\rho = 0.013061$ ,  $\varphi = 0.028237$  (рис. 1.2). Авторы заключают, что кривая, проведённая через изображающие точки является фиктивной, т. е. она не принадлежит какой-либо магнитной поверхности.

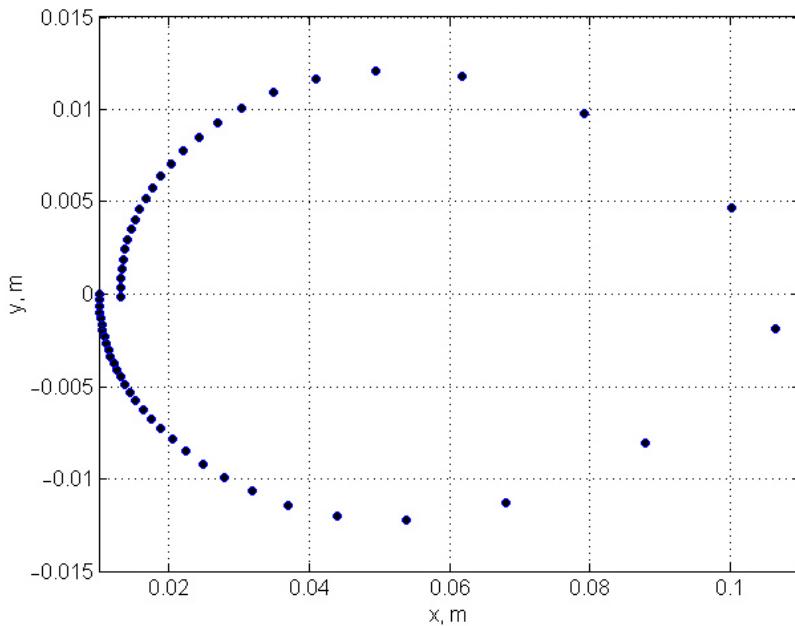


Рис. 1.2. Гофрированное поле,  $b_0 = 0.125$ ,  $k = 3$ . Сечение Пуанкаре кривой, вышедшей из точки с координатами  $\rho = 0.01$ ,  $\varphi = 0$ .

Наиболее чувствительной к возмущениям является сепаратриса. В зоне её разрушения координаты пересечения линий поля с изображающей плоскостью носят как бы случайный характер [1][с. 55]. Это явление называется “динамическим хаосом”. Линии магнитного поля уже не ложатся при этом на магнитные поверхности, а могут эргодически заполнять некоторый объём.

### 1.3. Общее и частные представления магнитного поля

Вопрос о возможном характере поведения линий магнитного поля связан с вопросом о максимально простом представлении магнитного поля,

удовлетворяющем условию  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , что было рассмотрено, в частности, в книге В. Ильгисониса [26]. Выберем направление изменения произвольной, вообще говоря, криволинейной координаты  $\nu$  вдоль направления векторного потенциала  $\mathbf{A}$  и представим последний в виде:

$$\mathbf{A} = \mu \nabla \nu, \quad (1.10)$$

где  $\mu$  — некоторая скалярная величина. Тогда магнитное поле запишется в виде

$$\mathbf{B} = [\nabla \mu, \nabla \nu]. \quad (1.11)$$

Скалярные функции  $\mu$  и  $\nu$  называют потенциалами Клебша. Представление (1.11), справедливое локально для любого вектор-потенциала, может, однако, не иметь места во всём пространстве для магнитного поля произвольной топологии. В самом деле, пусть представление (1.11) справедливо в окрестности некоторой точки с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0$ . Тогда, поскольку  $(\mathbf{B} \cdot \nabla \mu) = (\mathbf{B} \cdot \nabla \nu) = 0$ , линия магнитного поля, проходящая через точку  $\mathbf{r}_0$ , лежит на поверхностях  $\mu(\mathbf{r}) = \text{const} = \mu(\mathbf{r}_0)$ ,  $\nu(\mathbf{r}) = \text{const} = \nu(\mathbf{r}_0)$ , т. е. служит пересечением этих поверхностей. Такое пересечение может являться либо замкнутой линией, либо линией, концы которой лежат на бесконечности. Это означает, что представление (1.11) непригодно для описания магнитных полей, линии которых покрывают некие поверхности или эргодически заполняют объём.

Можно, однако, произвести математическое обобщение (1.11) на поля любой топологии [26]. Введём триаду координат, вообще говоря, криволинейных,  $\{\alpha^i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , и связанный с нею базис, образованный единичными векторами:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{[\nabla \alpha^2, \nabla \alpha^3]}{J}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{[\nabla \alpha^3, \nabla \alpha^1]}{J}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{[\nabla \alpha^1, \nabla \alpha^2]}{J}, \quad (1.12)$$

где  $J = (\nabla\alpha^1 \cdot [\nabla\alpha^2, \nabla\alpha^3])$  — якобиан. Данная триада невырождена при  $J \neq 0$ . Разложив вектор  $\mathbf{B}$  по этому базису в виде

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 A^i J \mathbf{e}_i = A^1 [\nabla\alpha^2, \nabla\alpha^3] + A^2 [\nabla\alpha^3, \nabla\alpha^1] + A^3 [\nabla\alpha^1, \nabla\alpha^2], \quad (1.13)$$

можно получить, что коэффициенты  $A^i$  как функции координат  $\{\alpha^i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  обеспечивают бездивергентность тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A^i}{\partial \alpha^i} = \frac{\partial A^1}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial A^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial A^3}{\partial \alpha^3} = 0. \quad (1.14)$$

Коэффициенты  $A^i$  и соответствующие им компоненты магнитного поля заданы в пространстве однозначно. Представление (1.13) позволяет наглядно проиллюстрировать возможные различия в топологии магнитного поля.

Пусть в разложении (1.13) отлична от нуля только одна из компонент:  $A^1 = 0$ ,  $A^2 = 0$ ,  $A^3 \neq 0$ . С учётом (1.14),

$$\mathbf{B} = A^3(\alpha^1, \alpha^2) [\nabla\alpha^1, \nabla\alpha^2]. \quad (1.15)$$

В качестве  $\mu$  и  $\nu$  можно выбрать, например,

$$\mu = \alpha^1, \quad \nu = \int^{\alpha^2} A^3(\alpha^1, \tilde{\alpha}^2) d\tilde{\alpha}^2. \quad (1.16)$$

Тогда представление (1.15) эквивалентно представлению (1.11) и описывает линии поля, лежащие на пересечении поверхностей  $\mu = const$ ,  $\nu = const$ . При этом линии поля либо замкнуты, либо приходят из бесконечности и уходят на бесконечность.

Пусть в разложении (1.13) отличны от нуля две компоненты:  $A^1 = 0$ ,  $A^2 \neq 0$ ,  $A^3 \neq 0$ , и магнитное поле записывается в виде

$$\mathbf{B} = A^2 [\nabla\alpha^3, \nabla\alpha^1] + A^3 [\nabla\alpha^1, \nabla\alpha^2]. \quad (1.17)$$

Умножая (1.17) скалярно на  $\nabla\alpha^1$ , получим

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla\alpha^1) = 0, \quad (1.18)$$

т. е. линия поля лежит на поверхности  $\alpha^1 = const.$

Для наиболее простых случаев известны аналитические выражения для магнитных поверхностей [77]. При осесимметричной конфигурации (отсутствия зависимости от угла  $\varphi$  цилиндрической системы координат) магнитные поверхности задаются через вектор-потенциал выражением

$$\Psi(\rho, z) = \rho A_\varphi(\rho, z), \quad (1.19)$$

в случае трансляционной симметрии вдоль оси  $Oz$  — выражением

$$\Psi(\rho, \varphi) = A_z(\rho, \varphi), \quad (1.20)$$

а в случае винтовой симметрии, при которой  $\Psi$  является функцией  $r$  и  $\varphi - \gamma z$ , уравнением

$$\Psi(\rho, \varphi - \gamma z) = A_z(\rho, \varphi - \gamma z) + \gamma \rho A_\varphi(\rho, \varphi - \gamma z), \quad (1.21)$$

где  $\gamma$  характеризует шаг винта.

В наиболее общем случае в представлении (1.13) от нуля отличны все три коэффициента:  $A^1 \neq 0$ ,  $A^2 \neq 0$ ,  $A^3 \neq 0$ . Линия такого магнитного поля может эргодически плотно заполнить пространственный объём. Таким образом, наиболее общим является магнитное поле, линии которого не замкнуты и не ложатся на какие-либо поверхности: разложение по трём независимым векторам — общий случай, тогда как по двум или одному — вырожденный. При этом конструкция из замкнутых линий магнитного поля наиболее топологически неустойчива по отношению к малым возмущениям.

## 1.4. Гамильтоново описание линий магнитного поля

Уравнение линии магнитного поля в криволинейных координатах  $\{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\}$  имеет вид:

$$\frac{d\alpha^1}{\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha^1} = \frac{d\alpha^2}{\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha^2} = \frac{d\alpha^3}{\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha^3}. \quad (1.22)$$

Выбор в качестве координаты  $\alpha^1$  магнитной поверхности (см. (1.18)) сокращает количество уравнений на единицу. В роли “радиальной” координаты  $\alpha^1$ , отвечающей магнитным поверхностям, может выступать любая величина (метка), “привязанная” к этим поверхностям. В качестве метки могут выступать тороидальный  $\Phi$  или полоидальный  $\Psi$  магнитный поток; объём  $V$ , заключённый внутри магнитной поверхности; расстояние от магнитной оси до магнитной поверхности в каком-либо сечении и направлении и т. п.

Векторный потенциал магнитного поля, как и любой вектор, можно разложить в данном криволинейном базисе:

$$2\pi \mathbf{A} = A_1 \nabla \alpha^1 + A_2 \nabla \alpha^2 + A_3 \nabla \alpha^3 \quad (1.23)$$

(принято вводить множитель  $2\pi$ ). Обозначим  $\alpha^2 \equiv \theta$ ,  $\alpha^3 \equiv \zeta$ . Введём новые функции

$$\begin{aligned} \nu &= \int^{\alpha^1} A_1(\tilde{\alpha}^1, \theta, \zeta) d\tilde{\alpha}^1, \\ \phi &= A_2 - \frac{\partial \nu}{\partial \theta}, \\ \psi &= A_3 - \frac{\partial \nu}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Тогда

$$2\pi \mathbf{A} = \phi \nabla \theta + \psi \nabla \zeta + \nabla \nu, \quad (1.25)$$

$$2\pi \mathbf{B} = [\nabla \phi, \nabla \theta] + [\nabla \psi, \nabla \zeta]. \quad (1.26)$$

Полученное представление вектора магнитной индукции называется *каноническим* [78]. Оно описывает в том числе и поля, не образующие магнитных поверхностей.

Если магнитное поле обладает магнитными поверхностями (1.18), то

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad (1.27)$$

и общее решение полученного дифференциального уравнения:

$$\phi = \Phi(\alpha^1) + \frac{\partial \xi}{\partial \theta}, \quad \Psi(\alpha^1) + \frac{\partial \xi}{\partial \zeta}, \quad (1.28)$$

где  $\xi(\alpha^1, \theta, \zeta)$  — периодическая по  $\theta$  и  $\zeta$  функция с нулевым средним значением [64]. В т. н. “потоковом” представлении [64] функциям  $\Phi$  и  $\Psi$  придаётся физический смысл магнитных потоков.

Векторное поле в  $2n$ -мерном пространстве с координатами  $q_i, p_i, i = 1, \dots, n$ , называется гамильтоновым, если существует функция  $H = (q, p)$ , представляющая линии поля в виде уравнений Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (1.29)$$

Магнитное поле гамильтоново. Для того, чтобы представить уравнения линий магнитного поля в виде уравнений Гамильтона, надо выразить функцию  $\psi$  через функцию  $\phi$  и угловые координаты:  $\psi = \psi(\phi, \theta, \zeta)$ . Уравнения для линий магнитного поля в форме уравнений Гамильтона имеют вид [26]:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\zeta} &= \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \theta}{\mathbf{B} \cdot \nabla \zeta} = -\left(\frac{\partial \psi(\phi, \theta, \zeta)}{\partial \phi}\right)_{\theta, \zeta=const}, \\ \frac{d\phi}{d\zeta} &= \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \phi}{\mathbf{B} \cdot \nabla \zeta} = \left(\frac{\partial \psi(\phi, \theta, \zeta)}{\partial \theta}\right)_{\phi, \zeta=const}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

В формулах (1.30)

- гамильтониан — функция  $(-\psi)$ ,
- “время” — “продольная” (тороидальная) координата  $\zeta$ ,
- “координата” — азимутальная (полоидальная) координата  $\theta$ ,
- “импульс” — функция  $\phi$ .

Таким образом имеется полная аналогия между описанием статического магнитного поля и теорией динамических систем, оперирующей уравнениями Гамильтона (1.29). Этот факт позволяет использовать теорию динамических систем [79]–[84] для изучения поведения линий магнитного поля [85].

## 1.5. Особые точки магнитного поля

Одним из направлений исследований, где учёт морфологии магнитного поля играет важнейшую роль, является изучение магнитного пересоединения. Магнитное пересоединение представляет собой перестройку магнитного поля, обусловленную изменением связности его линий. Начало исследованиям процессов магнитного пересоединения было положено в работах Р. Джованелли и Ф. Хойла в 1940-х годах [5]. Они высказали предположение, что нулевые точки магнитного поля, т. е. точки, в которых все три компоненты вектора поля обращаются в нуль,

$$\mathbf{B} = 0, \quad (1.31)$$

могут служить местами нагрева и ускорения плазмы в солнечных вспышках и авроральных суббурях. Речь идёт о магнитных полях, погруженных плазму с высокой (но конечной) проводимостью и, следовательно, “вмороженных” в неё. Взаимодействие магнитных полей при наличии вмороженности сопровождается образованием диссипативных токовых слоёв в зоне контакта полей разной направленности. При этом имеет место частичный переход энергии магнитного поля в тепловую, а также, при соответствующих условиях, в кинетическую энергию плазмы и ускоренных частиц. В 1966 г. С.И. Сыроватский рассмотрел общую нестационарную задачу о течениях сжимаемой плазмы в неоднородном плоском магнитном поле с нулевой линией. Им был получен вывод о развитии токового слоя, разделяющего магнитные поля противоположной направленности, при этом высвобождение энергии, сосредоточенной в окрестности слоя, может приводить к генерации сильных электрических полей, ускоряющих заряженные частицы. Первые эксперименты по изучению динамики плазмы в двумерных (2D) магнитных полях с нулевыми линиями, которые были инициированы работами Сыроватского, были поставлены в начале 1970-х годов в США, Японии и в СССР, в ФИАН им. П.Н. Лебедева.

Экспериментальное исследование процессов магнитного пересоединения в трёхмерных (3D) магнитных полях началось в 1990-е годы в различных лабораториях мира, в том числе в ИОФ РАН им. А.М. Прохорова [86–88].

В связи с исследованиями различных нелинейных процессов в плазме [89] и перестроек топологии магнитного поля интерес в настоящее время также представляет изучение вкладов нелинейных слагаемых в разложении магнитного поля вблизи его нулевых точек [90], а также нулевых точек высших порядков.

# Глава 2. МОДЕЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ВО ВНУТРЕННЕЙ ГЕЛИОСФЕРЕ С УЧЁТОМ ВЫРАВНИВАНИЯ РАДИАЛЬНОЙ НАПРЯЖЁННОСТИ В КОРОНЕ СОЛНЦА

## 2.1. Модели потенциального поля–поверхности источника

Магнитное поле на поверхности Солнца и в его короне является одним из определяющих факторов, влияющих на процессы генерации солнечного ветра, вспышечной активности, динамики корональных выбросов массы и других явлений в гелиосфере. В настоящее время сравнительно надёжно измеряется составляющая магнитного поля вдоль луча зрения на уровне фотосферы, поле же во внешних слоях атмосферы Солнца измерить трудно. Недостаток информации о нём пытаются в какой-то мере компенсировать путем расчётов. Существует большое количество моделей для вычисления вектора магнитного поля в короне и в околосолнечном пространстве, исходя из его фотосферных наблюдений.

Одной из наиболее часто используемых является модель потенциального поля–поверхности источника [6, 7]. Предполагается, что на поверхности источника (впервые введённой Шаттеном и, независимо, Альтшуллером и Ньюкирком в 1969 г.), линии поля становятся радиальными (если не учитывать вызванное вращением Солнца закручивание в спираль Архимеда [91]). Физический смысл поверхности источника базируется на предположении, что до неё энергия магнитного поля преобладает над энергией плазмы, а при переходе через неё преобладающей становится кинетическая энергия солнечного ветра. Такое предположение не является физически строгим, т. к. ясно, что этот переход должен совершаться не скачком, а в достаточно протяжённой области [92]. Самосогласованного

описания этой области ввиду его сложности в настоящее время не существует. Значение радиуса поверхности источника подбирается так, чтобы вычисляемые результаты соответствовали наблюдаемой форме короны, и составляет, как правило,  $2\text{--}3 R_{\odot}$ . Помимо модели потенциального поля также находят применение модели, основанные на бессиловом приближении, в которых существование электрических токов допускается, но только текущих вдоль магнитного поля. Существуют также более полные и сложные самосогласованные схемы, совместно описывающие поле и плазму на основе уравнений МГД [93].

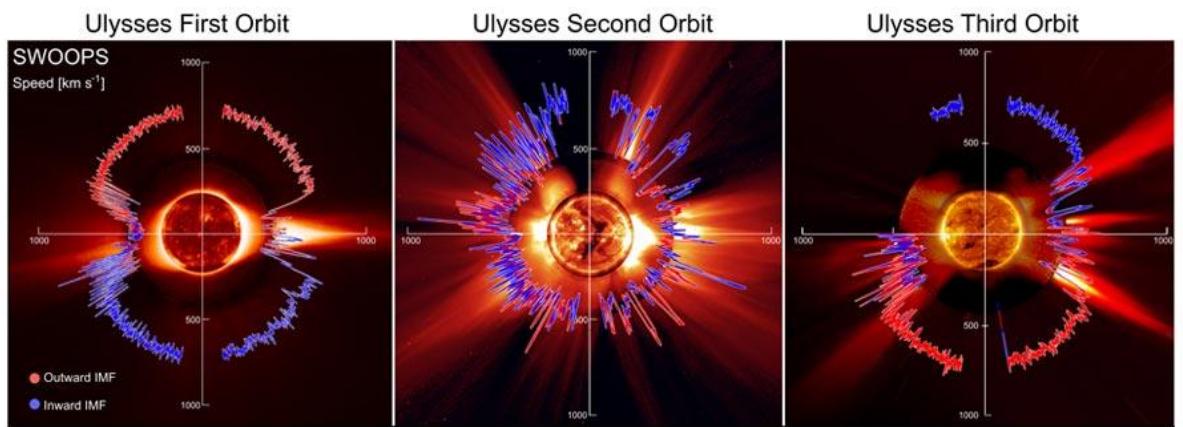


Рис. 2.1. Магнитное поле Солнца и скорость солнечного ветра по данным КА “Улисс”. Источник: <http://sci.esa.int/ulysses/43458-ulysses-spacecraft-data-indicate-solar-wind-at-a-50-year-low/>

В октябре 1990 г. был запущен КА “Улисс” (Ulysses) ESA–NASA, основные научные задачи которого были связаны с проведением измерений характеристик космического пространства над приполярными областями Солнца. С целью выхода из плоскости эклиптики и перехода на околополярную орбиту аппарат совершил в феврале 1992 г. гравитационный манёвр около Юпитера. В итоге он вышел на гелиоцентрическую орбиту с периодом обращения 6.2 года. Миссия была официально завершена к 1 июля 2008 г. из-за нарастающих проблем с бортовым электроснабжением.

Официально станция проработала более 17 лет, успев по три раза пройти над северным и южным полюсами Солнца. Визитной карточкой проекта “Улисс” стали магнитные и плазменные разрезы гелиосферы по широте в минимуме и в максимуме солнечной активности, показывающие результаты измерений скорости солнечного ветра (в км/с) и направления межпланетного магнитного поля (рис. 2.1). Полученные “Улисс” данные имеют большое значение с точки зрения понимания строения и динамики межпланетного магнитного поля и солнечного ветра в годы высокой и низкой солнечной активности.

Одним из главных результатов измерений, выполненных “Улиссом”, стало установление того факта, что радиальное магнитное поле в гелиосфере практически не зависит от широты точки наблюдения в околосолнечном пространстве. Измеряемая аппаратом радиальная компонента поля  $B_r$ , приведённая к одинаковому расстоянию от Солнца (1 а. е.), была приблизительно равна константе. В целом поле напоминало поле двух частей магнитного монополя, склеенных вместе по тонкому токовому слою, лежащему в плоскости магнитного экватора (рис. 2.2). Вместе с полем магнитного диполя Солнца получается картина, напоминающая вид солнечной короны в годы минимума активности.

На основе этих экспериментальных данных и приведённых ранее соображений нами в рамках потенциального приближения предложена модель, содержащая помимо фотосферной поверхности и поверхности источника (source surface) ещё одну, внешнюю по отношению к ним сферическую поверхность раздела, на которой модуль радиальной составляющей магнитного поля полагается равным константе, а её знак — скачком изменяющимся при переходе от одной полусфера к другой. Эту поверхность можно назвать “поверхностью выравнивания” плотности магнитного потока (leveling surface).

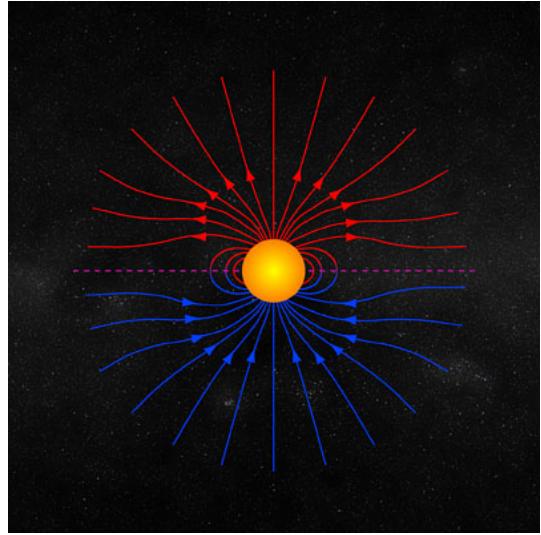


Рис. 2.2. Схематическое изображение магнитного поля Солнца согласно данным КА “Улисс”. Источник: [http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2008/06/Sketch\\_of\\_the\\_heliospheric\\_magnetic\\_field](http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2008/06/Sketch_of_the_heliospheric_magnetic_field)

Далее в подразделе 2.2 описана постановка соответствующей задачи математической физики, в подразделах 2.3–2.4 приводятся общие её решения для потенциала и вектора магнитного поля. В подразделах 2.5–2.7 подробно рассмотрено проведение расчётов для дипольного и квадрупольного поля. В подразделе 2.8 приведены формулы для возникающих в данной модели поверхностных токов. В подразделе 2.9 на примере поля аксиального диполя обсуждаются вопросы визуализации линий поля и её результаты.

## 2.2. Постановка задачи

Магнитное поле  $\mathbf{B}$  в вакууме подчиняется уравнениям Максвелла (1.1). Первым делом перейдем к квазистационарному приближению, в котором  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ . Вторым важным приближением будет пренебрежение объёмными токами, текущими вне Солнца. Тогда система уравнений Максвелла для магнитного поля примет вид (1.2).

Введём потенциал магнитного поля  $U$ . Он удовлетворяет уравнению Лапласа (1.4).

Зная потенциал, компоненты вектора магнитного поля  $\mathbf{B}$  в сферической системе координат можно вычислить по формуле

$$\begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Переход от сферической системы координат к прямоугольной декартовой может быть осуществлён в соответствии с формулой [94]

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_\varphi \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

В построенной модели пространство вне Солнца разделяется на ряд областей. Первая из них, обозначаемая в дальнейшем римской цифрой I, представляет собой шаровой слой между фотосферой  $r = R_\odot$  и поверхностью источника  $r = R_s$ . Внешним по отношению к ней является шаровой слой между поверхностью источника  $R_s$  и поверхностью выравнивания  $R_L$ , на которой модуль радиальной составляющей магнитного поля положен равным константе, а её знак — изменяющимся на противоположный при переходе через экватор. В этом шаровом слое проведём разрез в экваториальной плоскости, который разделит его на две симметричные части. Из соображений симметрии достаточно рассмотреть только “северную” половину шарового слоя ( $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ ), для обозначения которой в дальнейшем будем использовать римскую цифру II. Наконец, область, представляющую собой внешнюю по отношению к полусфере  $r = R_L, \theta \leq \frac{\pi}{2}$  часть полупространства, будем обозначать цифрой III (см. схему на рис. 2.3).

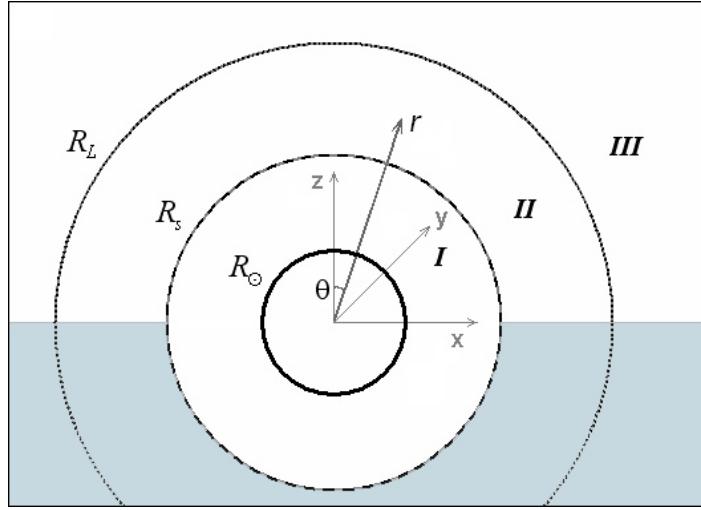


Рис. 2.3. Схематическое изображение разбиения пространства в модели на области I, II и III.

## 2.3. Решение уравнения Лапласа в области между фотосферой и поверхностью источника

Будем считать известной из наблюдений радиальную компоненту магнитного поля на фотосфере:

$$B_r(R_\odot, \theta, \varphi) = F(\theta, \varphi). \quad (2.3)$$

Поле на фотосфере предполагается потенциальным, и в таком случае его можно записать в виде разложения по сферическим гармоникам:

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^{(m)}(\cos \theta) [g_{nm} \cos m\varphi + h_{nm} \sin m\varphi]. \quad (2.4)$$

Поверхность источника эквипотенциальна, и удобно полагать потенциал на ней равным нулю. Тогда краевая задача для потенциала в области I (рис. 2.4) имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta U_I = 0, & R_\odot < r < R_s, \\ \frac{\partial U_I}{\partial r} \Big|_{r=R_\odot} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^{(m)}(\cos \theta) [g_{nm} \cos m\varphi + h_{nm} \sin m\varphi], \\ U_I \Big|_{r=R_s} = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

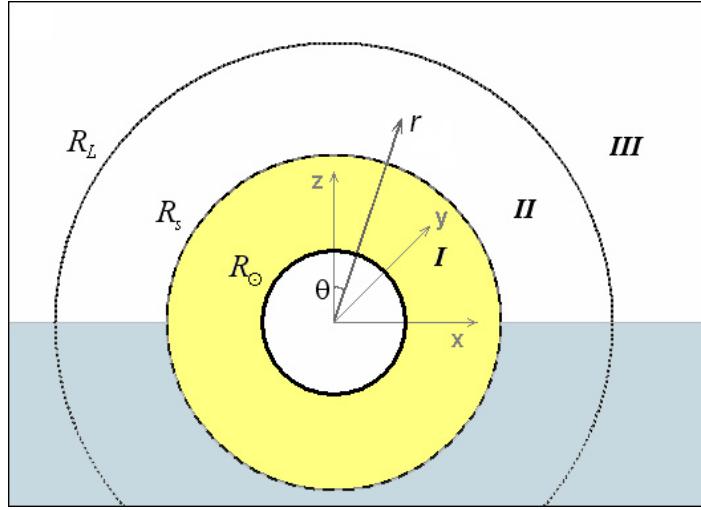


Рис. 2.4. Схематическое изображение разбиения пространства в модели. Область I обозначена заливкой.

где оператор Лапласа в сферической системе координат

$$\Delta \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (2.6)$$

Частными решениями краевой задачи для уравнения Лапласа в шаровом слое являются шаровые функции  $r^n Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$  и  $\frac{1}{r^{n+1}} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$ , где сферические функции

$$Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_n^{(m)}(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases} \quad (2.7)$$

$P_n^{(m)}(\cos \theta)$  — присоединённые функции Лежандра [76, 95], квадрат нормы которых

$$\left\| P_n^{(m)}(\cos \theta) \right\|_{[0, \pi]}^2 = \int_0^\pi \left( P_n^{(m)}(\cos \theta) \right)^2 \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (2.8)$$

Заметим, что нормировка коэффициентов в руководстве [96] отличается от указанной. Сведения по нормировке при использовании гармонических коэффициентов Солнечной обсерватории им. Уилкокса (Wilcox Solar Observatory (WSO)) приведены в Приложении А.

Решение для потенциала представляет собой сумму частных решений, взятых с коэффициентами, определяемыми из граничных условий [96]. Для дальнейших расчётов это решение удобно записать в следующем виде:

$$U_I = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(r) \sum_{m=0}^n P_n^{(m)}(\cos \theta) [g_{nm} \cos m\varphi + h_{nm} \sin m\varphi], \quad (2.9)$$

где как  $\nu_n(r)$  обозначены общие для гармоник одной мультипольности множители:

$$\nu_n(r) = R_{\odot} \frac{\left(\frac{R_{\odot}}{R_s}\right)^{n+1} \left(\frac{r}{R_s}\right)^n - \left(\frac{R_{\odot}}{r}\right)^{n+1}}{n + 1 + n \left(\frac{R_{\odot}}{R_s}\right)^{2n+1}}, \quad (2.10)$$

при этом  $\nu_n(R_s) = 0$ .

Зная потенциал, находим в области I компоненты вектора поля:

$$\begin{cases} B_r = \sum_{n=1}^{\infty} \nu'_n(r) \sum_{m=0}^n P_n^{(m)}(\cos \theta) [g_{nm} \cos m\varphi + h_{nm} \sin m\varphi], \\ B_{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n(r)}{r} \sum_{m=0}^n \frac{dP_n^{(m)}(\cos \theta)}{d\theta} [g_{nm} \cos m\varphi + h_{nm} \sin m\varphi], \\ B_{\varphi} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n(r)}{r} \sum_{m=1}^n m \frac{P_n^{(m)}(\cos \theta)}{\sin \theta} [g_{nm} \sin m\varphi - h_{nm} \cos m\varphi], \end{cases} \quad (2.11)$$

где

$$\nu'_n(r) = \frac{(n+1) \left(\frac{R_{\odot}}{r}\right)^{n+2} + n \left(\frac{R_{\odot}}{R_s}\right)^{n+2} \left(\frac{r}{R_s}\right)^{n-1}}{n + 1 + n \left(\frac{R_{\odot}}{R_s}\right)^{2n+1}}, \quad (2.12)$$

так что  $\nu'_n(R_{\odot}) = 1$ .

Отсюда можно получить выражение для вектора магнитного поля на поверхности  $r = R_s$ , на которой он имеет только радиальную составляющую, дающее краевое условие на внутренней полусферической поверхности половины шарового слоя, представляющей собой область II:

$$f(\theta, \varphi) = B_r(R_s, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \sum_{m=0}^n P_n^{(m)}(\cos \theta) [g_{nm} \cos m\varphi + h_{nm} \sin m\varphi], \quad (2.13)$$

где использовано обозначение

$$V_n \equiv \nu'_n(R_s) = \frac{(2n+1) \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^{n+2}}{n+1+n \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^{2n+1}}. \quad (2.14)$$

## 2.4. Решение уравнения Лапласа в области между поверхностью источника и поверхностью выравнивания

Будем предполагать, что линии поля не пересекают границу области II, лежащую при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , по которой был проведён разрез исходного шарового слоя на две части (рис. 2.5). В этом случае постановка краевой задачи для уравнения Лапласа в области II приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta U = 0, & R_s < r < R_L, \quad \theta < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_s} = f(\theta, \varphi), \\ \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_L} \equiv const, \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

где для компактности записи обозначено  $U \equiv U_{II}$ .

Значение входящей в постановку константы на полусферической поверхности  $r = R_L, \theta \leq \frac{\pi}{2}$  определяется из необходимого условия разрешимости внутренней задачи Неймана [76, 95], которое в данном случае принимает вид равенства потоков магнитного поля через внутреннюю и внешнюю полусферические поверхности, ограничивающие область II. Поток через внутреннюю полусферу

$$\Phi = R_s^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta, \quad (2.16)$$

и  $\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R_L} = \frac{\Phi}{S}$ , где  $S = 2\pi R_L^2$  — площадь внешней полусферы.

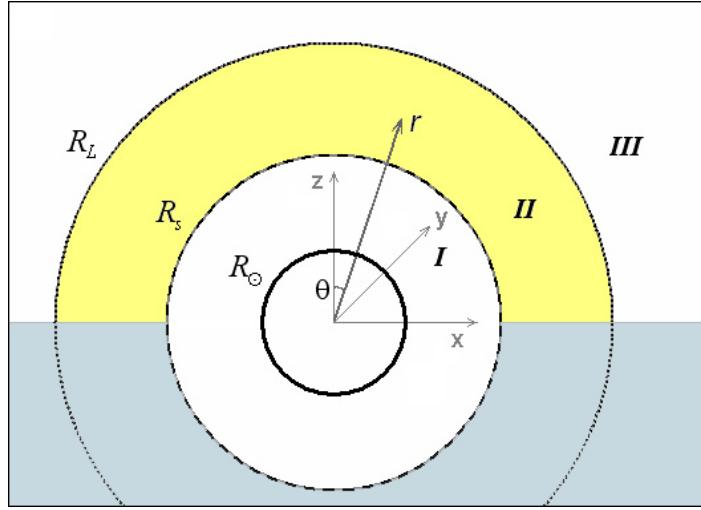


Рис. 2.5. Схематическое изображение разбиения пространства в модели. Область II обозначена заливкой.

Присоединённые функции Лежандра обладают следующим свойством чётности:

$$P_n^{(m)}(x) = (-1)^{n-m} P_n^{(m)}(-x), \quad (2.17)$$

в частности, для полиномов Лежандра верно равенство  $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$ . Граничному условию при  $\theta = \frac{\pi}{2}$  будут удовлетворять чётные присоединённые функции Лежандра, т. е. те, для которых разность  $n - m$  — чётное число, т. к.  $\frac{dP_n^{(m)}(\cos \theta)}{d\theta} = - \left( P_n^{(m)}(\cos \theta) \right)' \sin \theta$ , производная чётной функции является нечётной и наоборот, и нечётные функции в нуле принимают нулевое значение.

Из указанного свойства чётности также следует, что различные присоединённые функции Лежандра, обладающие одинаковой чётностью, на рассматриваемом отрезке  $[0, 1]$  будут ортогональны. Квадрат нормы присоединённых функций Лежандра на этом отрезке будет равен половине квадрата нормы, рассчитанного на  $[-1, 1]$ . Однако свойство ортогональности присоединённых функций Лежандра разной чётности на интересующем отрезке выполняться уже не будет.

Общее решение для потенциала в области II представимо в следующем виде:

$$\begin{aligned}
U = & \frac{A_0}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} w_{2k}(r) \sum_{l=0}^k P_{2k}^{(2l)}(\cos \theta) \{ A_{kl} \cos 2l\varphi + B_{kl} \sin 2l\varphi \} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} w_{2k-1}(r) \sum_{l=1}^k P_{2k-1}^{(2l-1)}(\cos \theta) \{ C_{kl} \cos[(2l-1)\varphi] + D_{kl} \sin[(2l-1)\varphi] \} + \\
& + const, \quad (2.18)
\end{aligned}$$

где общие для гармоник одной мультипольности множители

$$w_{2k}(r) = -\frac{R_s^{2k+2}}{R_L^{4k+1} - R_s^{4k+1}} \frac{(2k+1)r^{4k+1} + 2kR_L^{4k+1}}{2k(2k+1)r^{2k+1}}, \quad (2.19)$$

$$w_{2k-1}(r) = -\frac{R_s^{2k+1}}{R_L^{4k-1} - R_s^{4k-1}} \frac{2kr^{4k-1} + (2k-1)R_L^{4k-1}}{2k(2k-1)r^{2k}}. \quad (2.20)$$

В отличие от решения в области I, в данном случае в формуле для  $U$  появляется монопольная составляющая, знак коэффициента перед которой изменяется при переходе через границу между областью II и областью, симметричной ей относительно плоскости  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (как упоминалось ранее, на достаточно большом расстоянии от Солнца его поле напоминает поле двух половинок монополей разного знака, склеенных между собой). В записи учтено, что решение внутренней задачи Неймана не единственno и определяется с точностью до произвольной константы. Входящие в формулу коэффициенты вычисляются из условия на внутренней полусфере. Коэффициент  $A_0$  перед монопольной составляющей определяется потоком магнитного поля через полусферические поверхности:

$$A_0 = -\frac{R_s^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta. \quad (2.21)$$

Компоненты вектора магнитного поля равны:

$$\begin{aligned}
B_r = & -\frac{A_0}{r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} w'_{2k}(r) \sum_{l=0}^k P_{2k}^{(2l)}(\cos \theta) \{ A_{kl} \cos 2l\varphi + B_{kl} \sin 2l\varphi \} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} w'_{2k-1}(r) \sum_{l=1}^k P_{2k-1}^{(2l-1)}(\cos \theta) \times \\
& \times \{ C_{kl} \cos[(2l-1)\varphi] + D_{kl} \sin[(2l-1)\varphi] \}, \quad (2.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_\theta = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_{2k}(r)}{r} \sum_{l=0}^k \frac{dP_{2k}^{(2l)}(\cos \theta)}{d\theta} \{ A_{kl} \cos 2l\varphi + B_{kl} \sin 2l\varphi \} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_{2k-1}(r)}{r} \sum_{l=1}^k \frac{dP_{2k-1}^{(2l-1)}(\cos \theta)}{d\theta} \times \\
& \times \{ C_{kl} \cos[(2l-1)\varphi] + D_{kl} \sin[(2l-1)\varphi] \}, \quad (2.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_\varphi = & -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_{2k}(r)}{r} \sum_{l=1}^k 2l \frac{P_{2k}^{(2l)}(\cos \theta)}{\sin \theta} \{ A_{kl} \sin 2l\varphi - B_{kl} \cos 2l\varphi \} - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_{2k-1}(r)}{r} \sum_{l=1}^k (2l-1) \frac{P_{2k-1}^{(2l-1)}(\cos \theta)}{\sin \theta} \times \\
& \times \{ C_{kl} \sin[(2l-1)\varphi] - D_{kl} \cos[(2l-1)\varphi] \}, \quad (2.24)
\end{aligned}$$

где

$$w'_{2k}(r) = \frac{R_s^{2k+2}}{R_L^{4k+1} - R_s^{4k+1}} \frac{R_L^{4k+1} - r^{4k+1}}{r^{2k+2}}, \quad (2.25)$$

$$w'_{2k-1}(r) = \frac{R_s^{2k+1}}{R_L^{4k-1} - R_s^{4k-1}} \frac{R_L^{4k-1} - r^{4k-1}}{r^{2k+1}}. \quad (2.26)$$

На граничных полусферах выполняются равенства  $w'_{2k}(R_s) = w'_{2k-1}(R_s) = 1$ ,  $w'_{2k}(R_L) = w'_{2k-1}(R_L) = 0$ .

## 2.5. Потенциал и поле аксиального диполя

В случае аксиального диполя, задаваемого граничным условием на фотосфере

$$B_r|_{r=R_\odot} = \cos \theta, \quad (2.27)$$

зависимость от угла  $\varphi$  отсутствует и всюду  $B_\varphi \equiv 0$ . Потенциал аксиального диполя в области I ( $R_\odot < r < R_s$ ):

$$U_I = R_\odot \frac{\left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^2 \frac{r}{R_s} - \left(\frac{R_\odot}{r}\right)^2}{2 + \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^3} \cos \theta. \quad (2.28)$$

Ненулевые компоненты вектора магнитного поля в этой области:

$$B_r = \frac{2 \left(\frac{R_\odot}{r}\right)^3 + \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^3}{2 + \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^3} \cos \theta, \quad (2.29)$$

$$B_\theta = \frac{\left(\frac{R_\odot}{r}\right)^3 - \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^3}{2 + \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^3} \sin \theta. \quad (2.30)$$

Поле на поверхности источника:

$$B_r|_{r=R_s} = \frac{3 \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^3}{2 + \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^3} \cos \theta \equiv V_1 \cos \theta, \quad (2.31)$$

где обозначено

$$V_1 \equiv \nu'_1(R_s) = \frac{3R_\odot^3}{2R_s^3 + R_\odot^3}. \quad (2.32)$$

Отсюда вычисляется радиальная составляющая магнитного поля на полусфере  $r = R_L$ ,  $\theta < \frac{\pi}{2}$ :

$$B_r|_{r=R_L} = \frac{R_s^2}{2R_L^2} V_1. \quad (2.33)$$

(Соответственно на полусфере  $r = R_L$ ,  $\theta > \frac{\pi}{2}$  будет выполнено равенство  $B_r|_{r=R_L} = -\frac{R_s^2}{2R_L^2} V_1$ ).

Рассмотрим теперь область II. По формуле (2.21) для коэффициента  $A_0$  находим, что

$$A_0 = -\frac{R_s^2 V_1}{2}. \quad (2.34)$$

Из общего выражения для радиальной компоненты вектора магнитного поля (2.22) следует, что на поверхности источника должно выполняться равенство:

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^k P_{2k}^{(2l)}(\cos \theta) \{ A_{kl} \cos 2l\varphi + B_{kl} \sin 2l\varphi \} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k P_{2k-1}^{(2l-1)}(\cos \theta) \{ C_{kl} \cos[(2l-1)\varphi] + D_{kl} \sin[(2l-1)\varphi] \} = \\ = V_1 \cos \theta. \quad (2.35) \end{aligned}$$

Последовательно умножая данное выражение на  $\cos m\varphi$  и  $\sin m\varphi$ , где  $m = 2l$  и  $m = 2l - 1$ , и интегрируя по углу  $\varphi$  от нуля до  $2\pi$ , найдём, что все входящие в двойные суммы коэффициенты за исключением  $A_{k0}$ , которые в дальнейшем будем обозначать просто как  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), обращаются в нуль. Равенство (2.35) принимает вид:

$$\frac{V_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_{2k}(\cos \theta) = V_1 \cos \theta. \quad (2.36)$$

Найдём теперь коэффициенты  $A_k$  путём последовательного домножения обеих частей полученного уравнения на полиномы Лежандра чётного порядка и последующего интегрирования:

$$\frac{V_1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j P_{2j}(\cos \theta) = V_1 \cos \theta \quad | \times P_{2k}(\cos \theta), \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta. \quad (2.37)$$

Получим, что

$$A_k = \frac{V_1}{\|P_{2k}(\cos \theta)\|_{[0, \frac{\pi}{2}]}^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{2k}(\cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta, \quad (2.38)$$

где индекс  $[0, \frac{\pi}{2}]$  указывает, что норма рассчитывается на соответствующем интервале. Делая замену  $x = \cos \theta$  и учитывая, что квадрат нормы  $\|P_n(x)\|_{[0,1]}^2 = \frac{1}{2n+1}$ , получим:

$$A_k = (4k+1)V_1 \int_0^1 x P_{2k}(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

(см. табл. 2.1). Для вычисления входящего в выражение интеграла можно воспользоваться формулой

$$I_{2k} = \int_0^1 x P_{2k}(x) dx = \sum_{i=0}^k \frac{a_{2i}}{2i+2}, \quad (2.40)$$

где  $a_{2i}$  — взятые с учётом знака коэффициенты при степенях полинома Лежандра  $2k$ -го порядка,  $P_{2k}(x) = \sum_{i=0}^k a_{2i} x^{2i}$ .

В итоге получаем следующее выражение для потенциала аксиального диполя в области II:

$$U = \frac{A_0}{r} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_{2k}(\cos \theta) \frac{R_s^{2k+2}}{R_L^{4k+1} - R_s^{4k+1}} \frac{(2k+1)r^{4k+1} + 2kR_L^{4k+1}}{2k(2k+1)r^{2k+1}} + const, \quad (2.41)$$

где коэффициенты разложения  $A_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) определяются по формулам (2.34) и (2.39). Входящие в сумму полиномы Лежандра можно взять из специальных таблиц или найти, воспользовавшись рекуррентным соотношением [76, 95]

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x). \quad (2.42)$$

Полиномы и присоединённые функции Лежандра низших порядков приведены соответственно в Приложениях Б.1 и Б.2.

Отличные от нуля компоненты вектора магнитного поля аксиального диполя в области II:

$$\begin{cases} B_r = -\frac{A_0}{r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_{2k}(\cos \theta) \frac{R_s^{2k+2}}{R_L^{4k+1} - R_s^{4k+1}} \frac{R_L^{4k+1} - r^{4k+1}}{r^{2k+2}}, \\ B_\theta = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{dP_{2k}(\cos \theta)}{d\theta} \frac{R_s^{2k+2}}{R_L^{4k+1} - R_s^{4k+1}} \frac{(2k+1)r^{4k+1} + 2kR_L^{4k+1}}{2k(2k+1)r^{2k+2}}. \end{cases} \quad (2.43)$$

Определим теперь потенциал и вектор поля в области III. Внешняя краевая задача, содержащая стандартное требование равномерного стремления потенциала к нулю на бесконечности [76, 95], имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta U_{III} = 0, & r > R_L, \quad \theta < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial U_{III}}{\partial r} \Big|_{r=R_L} = \frac{R_s^2}{2R_L^2} V_1 \equiv const, \\ U_{III} \rightarrow 0, & r \rightarrow \infty, \\ \frac{\partial U_{III}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Как известно, внешняя краевая задача Неймана имеет единственное решение [76, 95]. Как можно видеть, уравнению Лапласа и заданным граничным условиям удовлетворяет потенциал, определяемый формулой

$$U_{III} = -\frac{R_s^2 V_1}{2} \frac{1}{r}. \quad (2.45)$$

Поле в области III является чисто радиальным и не зависящим от углов:

$$B_r = \frac{R_s^2 V_1}{2} \frac{1}{r^2}, \quad B_\theta = B_\varphi = 0. \quad (2.46)$$

В области, симметричной области III относительно плоскости  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , радиальная компонента поля имеет противоположный знак.

В поле в области III (рис. 2.6) могут вносить вклад только гармоники с нечётным  $n$  и  $m = 0$ , для остальных гармоник поток  $\Phi$ , рассчитываемый по формуле (2.16), обращается в нуль. В частности, для чётных  $n$  и  $m = 0$  равенство потока нулю выводится из свойства ортогональности на отрезке  $[0, 1]$  полиномов Лежандра одной чётности и того, что  $P_0(x) = 1$ .

## 2.6. Экваториальный диполь

Поле гармоники  $n = 1, m = 1$  на фотосфере имеет вид:

$$B_r|_{r=R_\odot} = \sin \theta (g_{11} \cos \varphi + h_{11} \sin \varphi). \quad (2.47)$$

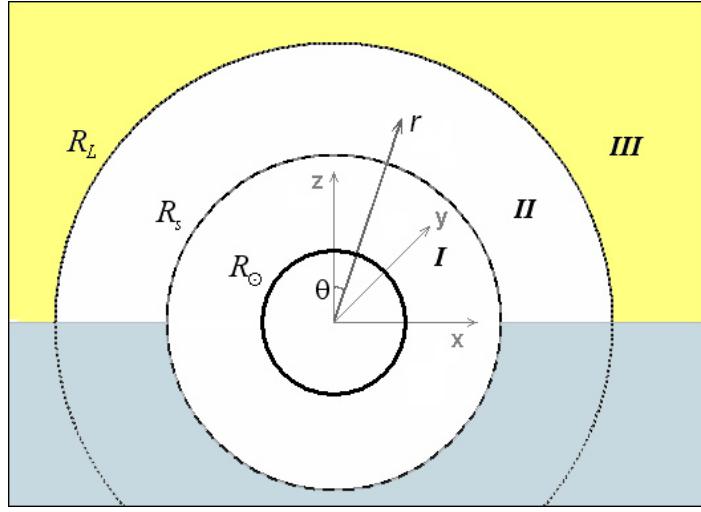


Рис. 2.6. Схематическое изображение разбиения пространства в модели. Область III обозначена заливкой.

Потенциал в области I:

$$U_I = R_{\odot} \frac{\left(\frac{R_{\odot}}{R_s}\right)^2 \frac{r}{R_s} - \left(\frac{R_{\odot}}{r}\right)^2}{2 + \left(\frac{R_{\odot}}{R_s}\right)^3} \sin \theta (g_{11} \cos \varphi + h_{11} \sin \varphi). \quad (2.48)$$

Границочное условие для области II:

$$f(\theta, \varphi) = V_1 \sin \theta (g_{11} \cos \varphi + h_{11} \sin \varphi), \quad (2.49)$$

где  $V_1$  даётся формулой (2.32).

Из общего выражения для потенциала (2.18) видно, что когда  $n = m$  — число чётное, как, например, в рассматриваемом случае ( $n = 1$ ,  $m = 1$ ), потенциал в области II записывается в виде конечного выражения. В данном случае оно имеет вид:

$$U_{II} = -V_1 \frac{R_s^3}{R_s^3 - R_L^3} \left( \frac{R_L^3}{2r^2} + r \right) \sin \theta (g_{11} \cos \varphi + h_{11} \sin \varphi) + const. \quad (2.50)$$

В поле в области III, как уже было отмечено, экваториальный диполь вклада не вносит.

## 2.7. Квадрупольные гармоники

Радиальная компонента квадрупольного поля на фотосфере:

$$B_r|_{r=R_\odot} = g_{20}P_2(\cos\theta) + \sum_{m=1}^2 P_2^{(m)}(\cos\theta) [g_{2m} \cos m\varphi + h_{2m} \sin m\varphi]. \quad (2.51)$$

Потенциал в области I:

$$\begin{aligned} U_I = -R_\odot & \frac{\left(\frac{R_\odot}{r}\right)^3 - \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^3 \left(\frac{r}{R_s}\right)^2}{3 + 2 \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^5} \{ g_{20}P_2(\cos\theta) + \\ & + P_2^{(1)}(\cos\theta) [g_{21} \cos\varphi + h_{21} \sin\varphi] + \\ & + P_2^{(2)}(\cos\theta) [g_{22} \cos 2\varphi + h_{22} \sin 2\varphi] \}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Компоненты вектора магнитного поля в области I:

$$\begin{aligned} B_r = R_\odot & \frac{3\frac{R_\odot^3}{r^4} + 2 \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^3 \frac{r}{R_s^2}}{3 + 2 \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^5} \{ g_{20}P_2(\cos\theta) + \\ & + P_2^{(1)}(\cos\theta) [g_{21} \cos\varphi + h_{21} \sin\varphi] + \\ & + P_2^{(2)}(\cos\theta) [g_{22} \cos 2\varphi + h_{22} \sin 2\varphi] \}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где  $P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$ ,  $P_2^{(1)}(\cos\theta) = 3\sin\theta\cos\theta$ ,  $P_2^{(2)}(\cos\theta) = 3\sin^2\theta$ ;

$$\begin{aligned} B_\theta = -R_\odot & \frac{\frac{R_\odot^3}{r^4} - \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^3 \frac{r}{R_s^2}}{3 + 2 \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^5} \left\{ g_{20} \frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta} + \right. \\ & + \frac{dP_2^{(1)}(\cos\theta)}{d\theta} [g_{21} \cos\varphi + h_{21} \sin\varphi] + \\ & \left. + \frac{dP_2^{(2)}(\cos\theta)}{d\theta} [g_{22} \cos 2\varphi + h_{22} \sin 2\varphi] \right\}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

где  $\frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta} = -3 \sin \theta \cos \theta$ ,  $\frac{dP_2^{(1)}(\cos \theta)}{d\theta} = 3 \cos 2\theta$ ,  $\frac{dP_2^{(2)}(\cos \theta)}{d\theta} = 3 \sin 2\theta$ ;

$$\begin{aligned}
B_\varphi &= R_\odot \frac{\frac{R_\odot^3}{r^4} - \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^3 \frac{r}{R_s^2}}{3 + 2 \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^5} \left\{ \frac{P_2^{(1)}(\cos \theta)}{\sin \theta} [g_{21} \sin \varphi - h_{21} \cos \varphi] + \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{P_2^{(2)}(\cos \theta)}{\sin \theta} [g_{22} \sin 2\varphi - h_{22} \cos 2\varphi] \right\} = \\
&= R_\odot \frac{\frac{R_\odot^3}{r^4} - \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^3 \frac{r}{R_s^2}}{3 + 2 \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^5} \left\{ 3 \cos \theta [g_{21} \sin \varphi - h_{21} \cos \varphi] + \right. \\
&\quad \left. + 6 \sin \theta [g_{22} \sin 2\varphi - h_{22} \cos 2\varphi] \right\}. \quad (2.55)
\end{aligned}$$

Радиальная составляющая поля на поверхности источника

$$\begin{aligned}
B_r|_{r=R_s} &= V_2 \{ g_{20} P_2(\cos \theta) + \\
&\quad + P_2^{(1)}(\cos \theta) [g_{21} \cos \varphi + h_{21} \sin \varphi] + \\
&\quad \left. + P_2^{(2)}(\cos \theta) [g_{22} \cos 2\varphi + h_{22} \sin 2\varphi] \right\}, \quad (2.56)
\end{aligned}$$

где как  $V_2$  обозначен общий множитель

$$V_2 \equiv \nu'_2(R_s) = \frac{5 \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^4}{3 + 2 \left(\frac{R_\odot}{R_s}\right)^5} = \frac{5 R_\odot^4 R_s}{3 R_s^5 + 2 R_\odot^5}. \quad (2.57)$$

Таким образом, мы получили для области II граничное условие  $f(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^2 f^{(m)}(\theta, \varphi)$ , где

$$\begin{aligned}
f^{(0)} &= g_{20} V_2 P_2(\cos \theta), \\
f^{(1)} &= V_2 P_2^{(1)}(\cos \theta) [g_{21} \cos \varphi + h_{21} \sin \varphi], \\
f^{(2)} &= V_2 P_2^{(2)}(\cos \theta) [g_{22} \cos 2\varphi + h_{22} \sin 2\varphi]. \quad (2.58)
\end{aligned}$$

Рассмотрим по отдельности все три квадрупольные гармоники с различными значениями  $m$ .

Для потенциалов гармоник с  $m = 0$  и  $m = 2$  получается конечное выражение. При  $m = 0$ :

$$U^{(0)} = -\frac{1}{2}g_{20}V_2 \frac{R_s^4}{R_L^5 - R_s^5} \frac{3r^5 + 2R_L^5}{6r^3} (3\cos^2\theta - 1), \quad (2.59)$$

при  $m = 2$ :

$$U^{(2)} = -3V_2 \frac{R_s^4}{R_L^5 - R_s^5} \frac{3r^5 + 2R_L^5}{6r^3} \sin^2\theta (g_{22}\cos 2\varphi + h_{22}\sin 2\varphi). \quad (2.60)$$

Теперь рассмотрим квадрупольную гармонику с  $m = 1$ , выражение для потенциала которой будет иметь вид бесконечного ряда. В данном случае от общего выражения для  $B_r|_{r=R_s}$  (2.22) останутся только те слагаемые из второй двойной суммы, для которых  $l = 1$ :

$$\begin{aligned} B_r &= \sum_{k=1}^{\infty} P_{2k-1}^{(1)}(\cos\theta) (C_{kl} \cos\varphi + D_{kl} \sin\varphi) = \\ &= V_2 P_2^{(1)}(\cos\theta) (g_{21} \cos\varphi + h_{21} \sin\varphi), \end{aligned} \quad (2.61)$$

откуда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} C_{j1} P_{2j-1}^{(1)}(\cos\theta) &= g_{21} V_2 P_{2k-1}^{(1)}(\cos\theta) \times P_2^{(1)}(\cos\theta), \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta, \\ \sum_{j=1}^{\infty} D_{j1} P_{2j-1}^{(1)}(\cos\theta) &= h_{21} V_2 P_{2k-1}^{(1)}(\cos\theta) \times P_2^{(1)}(\cos\theta), \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Учитывая, что на отрезке  $[0, 1]$  присоединённые функции Лежандра одинаковой чётности ортогональны, получим:

$$C_{kl} \left\| P_{2k-1}^{(1)}(\cos\theta) \right\|_{[0, \frac{\pi}{2}]}^2 = g_{21} V_2 \int_0^{\pi/2} P_2^{(1)}(\cos\theta) P_{2k-1}^{(1)}(\cos\theta) \cdot \sin\theta d\theta, \quad (2.63)$$

откуда

$$\frac{C_{kl}}{g_{21}} = \frac{V_2}{\left\| P_{2k-1}^{(1)}(x) \right\|_{[0,1]}^2} \int_0^1 P_2^{(1)}(x) P_{2k-1}^{(1)}(x) dx, \quad (2.64)$$

и идентичное выражение получается для  $\frac{D_{kl}}{h_{21}}$ . Здесь

$$\left\| P_{2k-1}^{(1)}(x) \right\|_{[0,1]}^2 = \frac{1}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} = \frac{2k(2k-1)}{4k-1}, \quad (2.65)$$

где учтено, что в данном случае  $n = 2k - 1$ ,  $m = 1$ . В дальнейшем перейдём к обозначениям  $C_k \equiv C_{kl}$ ,  $D_k \equiv D_{kl}$ . Подставляя выражение для квадрата нормы в формулу для коэффициентов разложения и учитывая определение присоединённых функций Лежандра

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad (2.66)$$

а также то, что  $(P_2(x))' = 3x$ , окончательно получим:

$$\frac{C_k}{g_{21}} = \frac{D_k}{h_{21}} = \frac{3(4k-1)}{2k(2k-1)} V_2 \int_0^1 (x-x^3) (P_{2k-1}(x))' dx \quad (2.67)$$

(см. табл. 2.1). Для вычисления входящего в это выражение интеграла можно воспользоваться формулой

$$\begin{aligned} I_{2k-1} &= \int_0^1 (x-x^3) (P_{2k-1}(x))' dx = \sum_{i=1}^k (2i-1) a_{2i-1} \left( \frac{1}{2i} - \frac{1}{2i+2} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{2i-1}{2i(i+1)} a_{2i-1}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

где  $a_{2i-1}$  — взятые с учётом знака коэффициенты при степенях полинома Лежандра  $(2k-1)$ -го порядка  $P_{2k-1}(x) = \sum_{i=1}^k a_{2i-1} x^{2i-1}$ .

В итоге получаем следующее выражение для потенциала квадрупольной гармоники  $m = 1$  в области II:

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= - \sum_{k=1}^{\infty} P_{2k-1}^{(1)}(\cos \theta) [C_k \cos \varphi + D_k \sin \varphi] \times \\ &\times \frac{R_s^{2k+1}}{R_L^{4k-1} - R_s^{4k-1}} \frac{2kr^{4k-1} + (2k-1)R_L^{4k-1}}{2k(2k-1)r^{2k}} + const. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Таблица 2.1

Первые коэффициенты и члены ряда (для квадруполя), входящие в разложения для гармоник  $n = 1, m = 0$  и  $n = 2, m = 1$ .

$k$	$I_{2k}$	$A_k$ (диполь, $n = 1,$ $m = 0)$	$I_{2k-1}$	$\frac{C_k}{g_{21}} = \frac{D_k}{h_{21}}$ (квадруполь, $n = 2,$ $m = 1)$	$P_{2k-1}^{(1)}(\cos \theta)$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}V_1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{8}V_2$	$\sin \theta$
2	$-\frac{1}{48}$	$-\frac{9}{48}V_1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{16}V_2$	$3 \sin \theta \frac{5 \cos^2 \theta - 1}{2}$
3	$\frac{1}{128}$	$\frac{13}{128}V_1$	$-\frac{5}{64}$	$-\frac{11}{128}V_2$	$15 \sin \theta \frac{21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1}{8}$
4	$-\frac{1}{256}$	$-\frac{17}{256}V_1$	$\frac{7}{160}$	$\frac{9}{256}V_2$	$7 \sin \theta \frac{429 \cos^6 \theta - 495 \cos^4 \theta + 135 \cos^2 \theta - 5}{16}$

## 2.8. Поверхностные токи

В рассмотренной модели объёмные токи отсутствуют. Однако на границах, разделяющих соответственно области I и II, II и III, а также области II, III и области, симметричные им относительно плоскости  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , тангенциальные к поверхностям раздела компоненты магнитного поля в общем случае претерпевают разрыв, из чего следует существование на этих поверхностях (рис. 2.7) токов с поверхностью плотностью

$$\mathbf{i} = \frac{c}{4\pi} ([\mathbf{n}, \mathbf{B}_2] - [\mathbf{n}, \mathbf{B}_1]), \quad (2.70)$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль, направленная в ту из областей, которая полагается в этой формуле второй [63].

Отличные от нуля компоненты вектора плотности поверхностного тока:

$$i_\varphi = \frac{c}{2\pi} B_r \left( r, \frac{\pi}{2} - 0, \varphi \right) \delta \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) + \\ + \frac{c}{4\pi} B_\theta (R_s + 0, \theta, \varphi) \delta(r - R_s) - \\ - \frac{c}{4\pi} B_\theta (R_L - 0, \theta, \varphi) \delta(r - R_L), \quad (2.71)$$

$$i_\theta = -\frac{c}{4\pi} [B_\varphi (R_s + 0, \theta, \varphi) \delta(r - R_s) - B_\varphi (R_L - 0, \theta, \varphi) \delta(r - R_L)]. \quad (2.72)$$

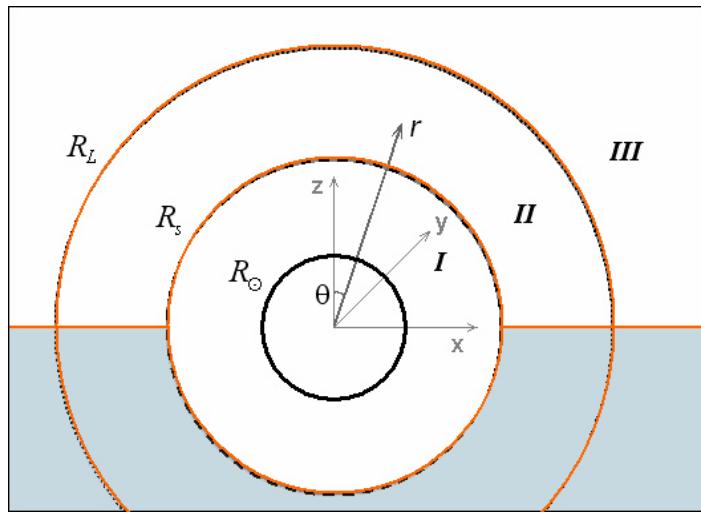


Рис. 2.7. Поверхностные токи на границах раздела.

В частности, в случае поля аксиального диполя поверхностный ток имеет только одну ненулевую компоненту, а именно  $i_\varphi$ . В плоскости  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , что соответствует гелиосферному токовому слою, его плотность будет равна

$$i_\varphi|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \\ = \frac{c}{2\pi} \begin{cases} 0, & R_\odot \leq r \leq R_s, \\ \frac{R_s^2 V_1}{2} \frac{1}{r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_{2k}(0) \frac{R_s^{2k+2}}{R_L^{4k+1} - R_s^{4k+1}} \frac{R_L^{4k+1} - r^{4k+1}}{r^{2k+2}}, & R_s < r \leq R_L, \\ \frac{R_s^2 V_1}{2} \frac{1}{r^2}, & r > R_L, \end{cases} \quad (2.73)$$

на поверхности  $r = R_s$ :

$$i_\varphi|_{r=R_s} = -\frac{c}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{dP_{2k}(\cos\theta)}{d\theta} \frac{(2k+1)R_s^{4k+1} + 2kR_L^{4k+1}}{2k(2k+1)(R_L^{4k+1} - R_s^{4k+1})}, \quad (2.74)$$

на поверхности  $r = R_L$ :

$$i_\varphi|_{r=R_L} = \frac{c}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{dP_{2k}(\cos\theta)}{d\theta} \frac{4k+1}{2k(2k+1)} \frac{R_s^{2k+2}R_L^{2k-1}}{R_L^{4k+1} - R_s^{4k+1}}. \quad (2.75)$$

## 2.9. Визуализация и обсуждение результатов

Зная вектор магнитного поля, линии поля можно построить путём численного интегрирования определяющей их системы обыкновенных дифференциальных уравнений в декартовой (1.5) или в сферической системе координат [97]:

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} = \frac{r \sin \theta d\varphi}{B_\varphi}. \quad (2.76)$$

Для этого можно воспользоваться, например, методом Рунге–Кутта 4-го порядка [98].

Визуализация была выполнена для простейшего случая магнитного поля аксиального диполя (рис. 2.8). Радиус поверхности источника был взят равным  $R_s = 2.5R_\odot$ , радиус поверхности выравнивания модуля радиальной составляющей поля варьировался. При расчётах учитывалось 7 и более членов разложения (2.41).

Видно, что в данном случае существует сепаратрисная поверхность, разделяющая линии, замыкающиеся в области I на себя, и незамкнутые линии, которые проходят сквозь сферы  $r = R_s$  и  $r = R_L$  и затем уходят на бесконечность. Сепаратрисная поверхность начинается при  $r = R_\odot$  и угле

$$\theta_{sep} = \arcsin \sqrt{\frac{3R_\odot R_s^2}{2R_s^3 + R_\odot^3}}, \quad (2.77)$$

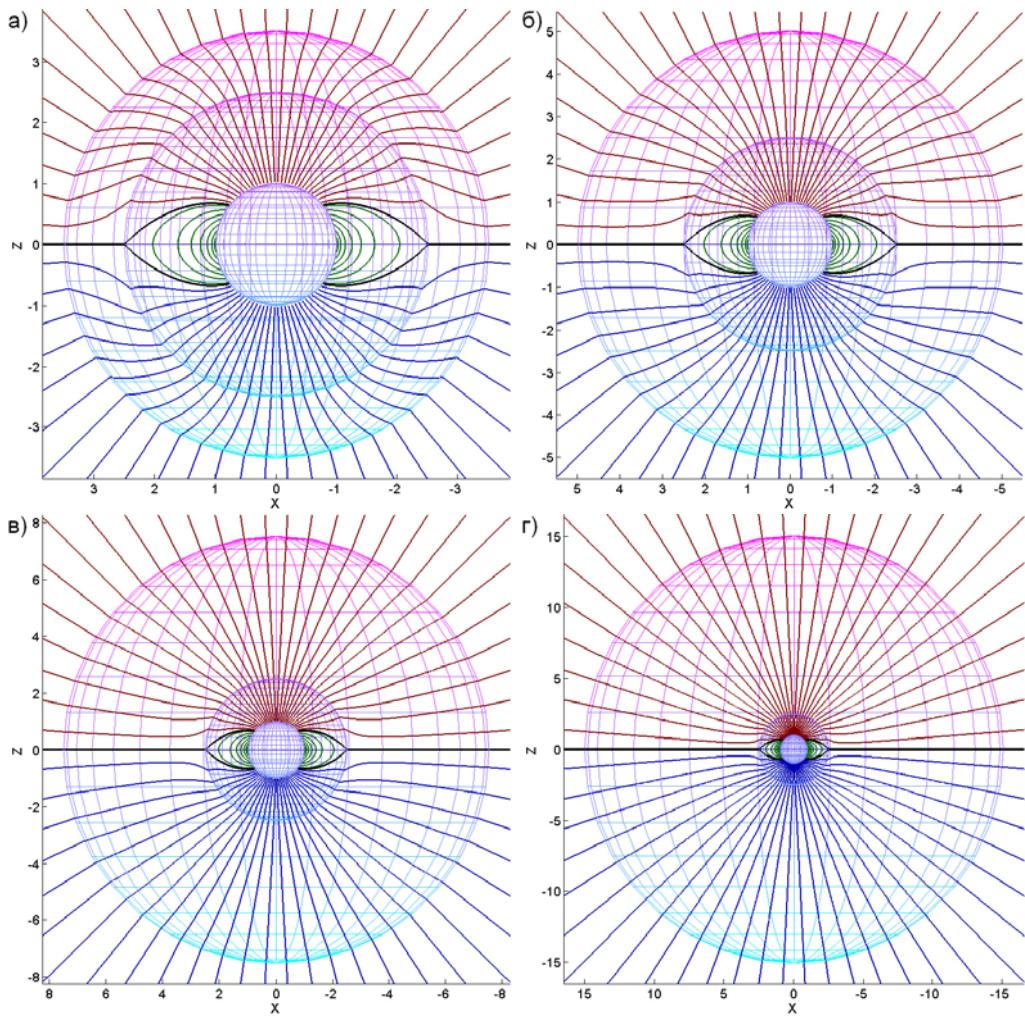


Рис. 2.8. Поле аксиального диполя. Радиус поверхности источника  $R_s = 2.5R_\odot$ , поверхности выравнивания: а)  $R_L = 3.5R_\odot$ , б)  $R_L = 5R_\odot$ , в)  $R_L = 7.5R_\odot$ , г)  $R_L = 15R_\odot$ .

который вычисляется из условия соблюдения равенства

$$\Phi_{out} \equiv \Phi = 2\pi R_s^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} V_1 \cos \theta \sin \theta d\theta = 2\pi R_\odot^2 \int_0^{\theta_{sep}} V_1 \cos \theta \sin \theta d\theta, \quad (2.78)$$

где  $\Phi_{out}$  — магнитный поток, образуемый открытыми линиями поля (рис. 2.9). Отношение потоков, составляемых замкнутыми и открытыми

линиями

$$\frac{\Phi_{in}}{\Phi_{out}} = \operatorname{ctg}^2 \theta_{sep}. \quad (2.79)$$

При выбранном радиусе поверхности источника  $R_s = 2.5R_\odot$  угол  $\theta_{sep} = 49.7^\circ$ . При радиусе  $R_s = 3R_\odot$  угол  $\theta_{sep} = 44.5^\circ$ .

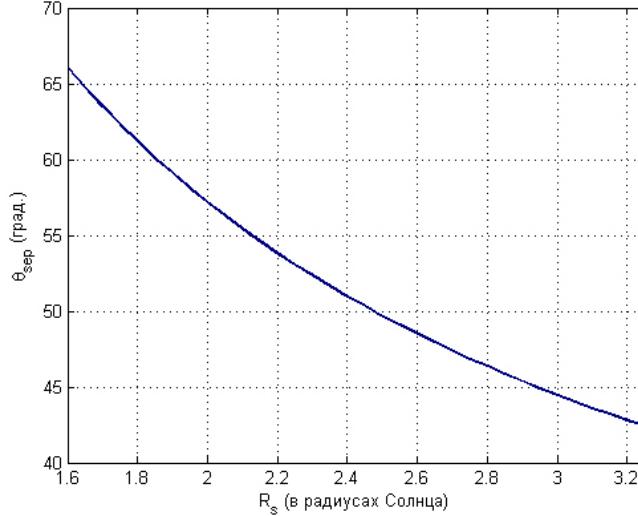


Рис. 2.9. Зависимость положения угла  $\theta_{sep}$  начала сепаратрисной поверхности на фотосфере от радиуса поверхности источника  $R_s$ .

На поверхностях  $R_s$  и  $R_L$  линии поля претерпевают излом, величина которого тем сильнее, чем ближе расположены эти поверхности друг к другу. Непосредственно из выражения для тока  $i_\varphi|_{r=R_L}$  видно, что при возрастании  $R_L$  его величина стремится к нулю. Таким образом, характер влияния введённой поверхности выравнивания модуля радиальной компоненты поля на конфигурацию магнитного поля зависит от расстояния, на котором располагается эта поверхность. Решение о наиболее целесообразном варианте её расположения может быть принято в будущем на основе более детального анализа и сопоставления расчётных и экспериментальных данных.

Таким образом, автором предложена аналитическая модель для расчёта магнитного поля в короне и внутренней гелиосфере в потенциальном приближении. Модель состоит из отдельных блоков и

согласуется с экспериментальными результатами, полученными на КА “Улисс”, в соответствии с которыми модуль радиальной составляющей магнитного поля Солнца практически не зависит от широты точки наблюдения (дополнительное обсуждение см. в [99]).

# Глава 3. НУЛЕВЫЕ ТОЧКИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

## 3.1. Обзор литературы

Согласно существующим в настоящее время представлениям, процессы пересоединения линий магнитного поля составляют физическую основу множества нестационарных и высокоэнергетичных явлений в плазме, как в космической, так и в лабораторной [5]. В их число входят солнечные вспышки, магнитосферные бури и суббури и т. д. В этих процессах определяющую роль играет структура магнитного поля и происходящие в ней изменения. Важной частью этой структуры являются нулевые точки поля.

Нулевой точкой магнитного поля называется точка, в которой все три компоненты вектора поля обращается в нуль (1.31). В квазистационарном приближении и при отсутствии объёмных токов  $\mathbf{j} = 0$  уравнения Maxwella для вектора магнитной индукции имеют вид (1.2), и магнитное поле представимо как градиент скалярного потенциала (1.3), который удовлетворяет уравнению Лапласа (1.4).

Если поле в точке конечно, непрерывно и в нуль не обращается, то через такую точку можно провести линию поля, удовлетворяющую уравнению (1.5), и при том единственную. В нулевых же точках единственность может нарушаться, и в их окрестности возможно сближение линий различной направленности. Изучение нулей магнитного поля, помимо исследования процессов пересоединения, также представляет интерес в связи с общими вопросами топологии поля, в частности, выявления различных возможных вариантов поведения его линий в локальном масштабе.

Нулевые точки могут быть классифицированы по их порядку. Для удобства рассмотрения поместим начало системы координат в такую точку. В её окрестности  $i$ -ю компоненту вектора магнитного поля можно разложить в виде [100]:

$$B_i = \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{R}=0} x_j + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{\mathbf{R}=0} x_j x_k + \dots, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор, обозначено  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ , а по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование. Нулём 1-го порядка будем называть такую нулевую точку, в окрестности которой по крайней мере один из членов разложения (3.1) первого порядка по крайней мере одной из компонент вектора поля не равен нулю. Если все члены разложения первого порядка равны нулю, но ненулевым является какой-либо из членов разложения второго порядка по крайней мере одной из компонент поля, то назовём такой нуль нулём 2-го порядка, и т. д.

Важно подчеркнуть, что условие равенства нулю дивергенции (а в случае потенциального поля — также и условие потенциальности) накладывает определённые ограничения на коэффициенты разложения (3.1) и поведение линий поля в окрестности нулевых точек. Поясним это на частном примере таких нулевых точек на плоскости, в разложении поля вблизи которых присутствуют исключительно члены первого порядка. В общем случае произвольного векторного поля, согласно классификации, берущей своё начало в трудах Пуанкаре [101], при невырожденности матрицы системы

$$\begin{cases} B_x = a_{11}x + a_{12}y, \\ B_y = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (3.2)$$

где  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) — постоянные коэффициенты, возможны следующие типы поведения интегральных кривых в окрестности нуля: “седло”, “узел”, “фокус” и “центр” [102]. Подробное рассмотрение приведено, например, в [103, 104]. Условие бездивергентности исключает существование точек

типа “узел” или “фокус”, и остаются варианты “седло” (в литературе точки такого типа называются также  $X$ -точками) и “центр” (называемые также  $O$ -точками) [17]. Наложение на бездивергентное поле дополнительного условия потенциальности ещё сужает класс возможных нулевых точек, оставляя лишь  $X$ -точки с равными (т. е. с прямыми) углами между асимптотами.

Если магнитное поле потенциально, то в окрестности нулевой точки удобно разлагать в ряд не компоненты вектора поля, как в (3.1), а потенциал:

$$U = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{R}=0} x_i x_j + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \Big|_{\mathbf{R}=0} x_i x_j x_k + \dots \quad (3.3)$$

Как указано в [5], пересоединение представляет собой перестройку магнитного поля, обусловленную изменением связности его линий. Впервые предположение о том, что линии магнитного поля могут разрываться и пересоединяться, было выдвинуто Dungey в [105]. С тех пор опубликовано множество работ, посвящённых различным аспектам магнитного пересоединения. Одним из направлений исследований, получившем, ввиду его сложности по сравнению с двумерным случаем, развитие лишь в последние десятилетия, является изучение разных типов пересоединения в окрестностях нулевых точек 1-го порядка в пространстве трёх измерений (см., например, статью о шиповом, веерном и сепараторном пересоединении [106]).

В числе ранних работ, в которых рассматривались свойства нулевых точек 1-го порядка трёхмерного магнитного поля, можно назвать публикации Cowley [16], Fukao et al. [107], Greene [108] и Горбачёва и др. [12]. Так, Cowley [16] обсуждалась конфигурация, представляющая собой диполь, помещённый в однородное магнитное поле, которая является моделью открытой магнитосферы (этой же модели посвящены работы Dungey [109], Stern [110] и многие другие). В такой конфигурации возникает нулевая линия, если однородное поле направлено строго к югу, или, при

нарушении вырожденности по направлению, две изолированные нулевые точки. Cowley [16] для случая потенциального поля было произведено разложение его компонент в ряд Тейлора (метод, уже упоминавшийся Dungey [105] в связи с двумерным случаем) вблизи нулевой точки 1-го порядка и описана связь между геометрией поля в окрестности нуля и собственными значениями матрицы градиента вектора поля, а также проинтегрированы уравнения линий поля. При этом было указано, что в нуле оканчиваются, во-первых, линии поля, составляющие в совокупности поверхность, а во-вторых, две линии, к этой поверхности перпендикулярные. Нули были подразделены Cowley [16] на два типа:  $A$  — если линии на упомянутой поверхности направлены к нулевой точке,  $B$  — если от неё.

Описание нулевых точек 1-го порядка потенциального поля, а также упомянутых одномерных (линий) и двумерных (поверхностей) многообразий, образуемых линиями поля с концом в нуле, получивших наименование  $\gamma$ -линий и  $\Sigma$ -поверхностей соответственно, было проведено Greene [108]. Также им было введено понятие нуля  $D$ -типа — такого нуля, у которого одно из собственных значений матрицы градиента вектора поля обращается в нуль.

Горбачёвым и др. в [12] была дана классификация нулевых точек поля на три разновидности в зависимости от равенства или неравенства нулю собственных значений матрицы градиента вектора поля. Вследствие условия  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , согласно авторам, возможны три варианта: 1) все собственные значения ненулевые; 2) вырожденный случай, когда нулевым является одно собственное значение, и точка лежит на нулевой линии; 3) вырожденный случай, когда нулевыми являются все три собственных значения, что, в частности, может встречаться при пересечении в точке трёх нулевых линий.

Описание нулей 1-го порядка, как потенциального магнитного поля, так и при наличии токов, было проведено в работах Fukao et al. [107]

и Lau & Finn [111]. По Lau & Finn нули подразделялись на три категории: в первой, вырожденной, одно из собственных значений матрицы градиента вектора поля нулевое, а два других — противоположные по знаку вещественные или чисто мнимые; во второй — три нулевые вещественные; в третьей — одно вещественное, а два комплексно сопряжённые. Также Lau & Finn [111] было рассмотрено возможное расположение  $\gamma$ -линий и  $\Sigma$ -поверхностей в конфигурации из двух нулей, что раньше уже частично обсуждалось Greene [108]. Priest & Titov в [106]  $\gamma$ -линии и  $\Sigma$ -поверхности были присвоены наименования “шипа” и “веерной поверхности” соответственно, а в [112] было введено понятие образуемого ими “скелета”.

Наиболее полный и последовательный обзор нулевых точек 1-го порядка на плоскости и в пространстве, как потенциального магнитного поля, так и с электрическими токами, был дан Parnell et al. [17]. Возможные конфигурации авторами классифицируются, во-первых, на потенциальные и непотенциальные. Непотенциальные подразделяются на три класса, в зависимости от того, меньше ли компонента тока вдоль шипа некоторого порогового значения, равна ему или превышает его. Соответственно, возможные нули — радиальные нули, критические спиральные и спиральные. Компонента тока, перпендикулярная шипу, определяет наклон веерной плоскости относительно последнего. В потенциальном случае реализуются радиальные нули частного вида. Авторами было показано, что число свободных параметров, определяющих расположение линий поля, в общем случае наличия тока произвольного направления, равно четырём (в потенциальном случае достаточно одного параметра).

В ситуации, когда поле в 1-м порядке равно нулю лишь по одному направлению ( $D$ -нуль), нужно учитывать наложение эффектов от 1-го и 2-го порядка, что дополнительно усложняет картину. Такие нули, как и нули 2-го порядка, могут образовываться при слиянии двух невырожденных нулей 1-го порядка, а также возможна обратная

трансформация: возникновение  $D$ -нуля или нуля 2-го порядка и его последующий распад на пару нулей. Этим и другим бифуркациям была посвящена публикация [113]. Такого рода ситуации возникали как при аналитических, так и при численных расчётах магнитных полей на Солнце (см., например, [12], [100], [114]–[116]). В ряде работ рассматривались пары близко расположенных нулей 1-го порядка (в уже упомянутых публикациях [111] и [106], а также, например, в [117] и [118]).

Различные конфигурации топологии магнитного поля применяются в целях уменьшения взаимодействия плазмы со стенкой в установках управляемого термоядерного синтеза. При стандартной конфигурации дивертора полоидальное магнитное поле обращается в нуль в  $X$ -точке. В так называемом snowflake-диверторе создаётся нуль полоидального поля 2-го порядка [119, 120]. Также в литературе рассматривалась возможность создания дивертора с нулём 3-го порядка [121].

Траектории заряженных частиц вблизи нулевых точек 1-го порядка рассматривались в [122].

Обзор нулевых точек, заданных шаровыми функциями 2-го и высших порядков, был дан Ю. Жугждой [19]. Согласно применённому в его статье подходу, каждой шаровой функции соответствует определённый тип нулевой точки, и потенциальное поле вблизи произвольной нулевой точки может быть представлено как сумма таких полей. Частные варианты нулей 2-го порядка рассматривались в статье [20]. Прежде, однако, вопросы классификации и описания нулей 2-го и высших порядков не были изучены достаточно полно и последовательно.

Данная глава посвящена главным образом нулевым точкам потенциального бездивергентного векторного поля, в качестве которого в пространствах двух и трёх измерений рассматривается магнитное поле  $\mathbf{B}$  в отсутствие токов. Тем не менее, ряд утверждений и методических приёмов применим и к нулевым точкам непотенциального поля. В разделе 3.2

рассмотрены нулевые точки на плоскости с применением сравнительно редко используемого, однако дающего определённые преимущества представления через однородные гармонические полиномы. В разделе 3.3 доказан ряд общих утверждений, позволяющих упростить исследование нулевых точек в пространстве трёх измерений за счёт выбора системы координат, что особенно существенно при описании нулей 2-го порядка и выше. В разделе 3.4 на основе обзора литературы дана характеристика нулевых точек 1-го порядка в пространстве. Первоочередное внимание при этом уделено принципам их классификации. В разделе 3.5 на основе сведений из трёх предыдущих разделов охарактеризованы разновидности нулевых точек 2-го порядка в пространстве. В разделе 3.6 дано краткое рассмотрение бифуркаций нулей магнитного поля, в том числе рассмотрены бифуркции в модели топологического триггера солнечных вспышек.

### **3.2. Нулевые точки двумерного потенциального магнитного поля**

Как уже сказано выше, скалярный потенциал  $U$  потенциального магнитного поля  $\mathbf{B}$  удовлетворяет уравнению Лапласа (1.4), иными словами, является гармонической функцией. Согласно известной теореме теории функций комплексной переменной [123], необходимым и достаточным условием аналитичности функции  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , где  $z = x + iy$ , в области является требование, чтобы функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  были гармоническими и удовлетворяли условиям Коши-Римана

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f = 0. \quad (3.4)$$

Аналитическую функцию  $\Psi(z)$  в окрестности произвольной точки можно разложить в ряд Тейлора:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c_n z^n. \quad (3.5)$$

В декартовой системе координат ряд (3.5) можно расписать как

$$\begin{aligned} \Psi = c_0 + c_1(x + iy) + \frac{1}{2}c_2(x + iy)^2 + \frac{1}{6}c_3(x + iy)^3 + \dots = \\ c_0 + c_1(x + iy) + c_2 \left[ \frac{1}{2} (x^2 - y^2) + ixy \right] + \\ + c_3 \left[ \left( \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2 \right) + i \left( \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3 \right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Согласно определению, гармоническим полиномом называется полином, удовлетворяющий уравнению Лапласа (1.4) [95, 123, 125]. Любой гармонический полином представим в виде суммы однородных гармонических полиномов (ОГП). В двумерном случае для каждого порядка  $n$  существует ровно два линейно независимых ОГП, в качестве которых можно взять действительные  $U^{n,1}$  и мнимые  $U^{n,2}$  составляющие ряда (3.6):

$$\Psi = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Psi^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n [U^{n,1}(x, y) + iU^{n,2}(x, y)]. \quad (3.7)$$

Таким образом, в декартовых координатах скалярный потенциал  $U(x, y)$  представим в виде ряда по указанным полиномам:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n U^{n,1}(x, y) + b_n U^{n,2}(x, y)]. \quad (3.8)$$

Потенциал определён с точностью до произвольной константы, которая в формуле (3.8) и далее не учитывается. В дальнейшем для краткости будем называть  $U^{n,1}$  и  $U^{n,2}$ , соответственно, базисными функциями 1-го и 2-го вида порядка  $n$ . Выражения для базисных функций низших порядков приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Базисные функции 1-го и 2-го вида первых пяти порядков.

Порядок, $n$	Вид, $j$	Потенциал, $U^{n,j}$
1	1	$x$
	2	$y$
2	1	$\frac{1}{2} (x^2 - y^2)$
	2	$xy$
3	1	$\frac{1}{6} (x^3 - 3xy^2)$
	2	$\frac{1}{6} (3x^2y - y^3)$
4	1	$\frac{1}{4!} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$
	2	$\frac{1}{6} (x^3y - xy^3)$
5	1	$\frac{1}{5!} (x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4)$
	2	$\frac{1}{5!} (5x^4y - 10x^2y^3 + y^5)$

Составляющие ряда (3.8) связаны друг с другом рекуррентными дифференциальными соотношениями

$$\begin{cases} \frac{\partial U^{n+1,1}}{\partial x} = U^{n,1}, \\ \frac{\partial U^{n+1,1}}{\partial y} = -U^{n,2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial U^{n+1,2}}{\partial x} = U^{n,2}, \\ \frac{\partial U^{n+1,2}}{\partial y} = U^{n,1}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Поясним это. Выражения  $\Psi^n = \frac{z^n}{n!}$  каждого порядка являются аналитическими функциями и должны по отдельности удовлетворять условиям Коши-Римана (3.4). Базисные функции  $U^{n+1,j}$ , где  $j = 1, 2$ , — ОГП порядка  $n+1$ , их частные производные — ОГП порядка  $n$ . Производная может быть выражена, в частности, следующими способами [123]:

$$\frac{d\Psi^{n+1}}{dz} = \frac{\partial U^{n+1,1}}{\partial x} + i \frac{\partial U^{n+1,2}}{\partial x} = \frac{\partial U^{n+1,2}}{\partial y} - i \frac{\partial U^{n+1,1}}{\partial y}, \quad (3.10)$$

откуда и следуют искомые соотношения (3.9). Таким образом, базисные функции высших порядков могут быть получены на основе табл. 3.1 и рекуррентных соотношений (3.9) или непосредственно из разложения (3.6).

При этом, поскольку

$$\begin{cases} \frac{\partial U^{n+1,j}}{\partial x} = B_x^{n+1,j}, \\ \frac{\partial U^{n+1,j}}{\partial y} = B_y^{n+1,j}, \end{cases} \quad (3.11)$$

где  $j = 1, 2$ , из соотношений (3.9) сразу следует взаимная ортогональность полей, заданных базисными функциями одного порядка 1-го и 2-го вида, что означает, что эквипотенциали (линии постоянства потенциала) первого из них являются линиями поля второго и наоборот:

$$\begin{aligned} U^{n,1} = C_1 &\Leftrightarrow L^{n,2} = C_1, \\ U^{n,2} = C_2 &\Leftrightarrow L^{n,1} = C_2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные константы. Уравнения изомагнитных линий (линий, на которых модуль магнитного поля  $|\mathbf{B}|$  постоянен) для полей, заданных базисными функциями одного порядка 1-го и 2-го вида, идентичны:

$$|\mathbf{B}^{n+1,j}| = \sqrt{(U^{n,1})^2 + (U^{n,2})^2} = \tilde{C}, \quad j = 1, 2, \quad (3.13)$$

где  $\tilde{C} \geq 0$  — постоянная.

Из разложения (3.8) и табл. 3.1 следует, что в общем случае компоненты потенциального магнитного поля даются выражениями

$$\begin{cases} B_x = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n U^{n-1,1} + b_n U^{n-1,2}), \\ B_y = b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (b_n U^{n-1,1} - a_n U^{n-1,2}). \end{cases} \quad (3.14)$$

При этом уравнения эквипотенциалей

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n U^{n,1} + b_n U^{n,2}) = C, \quad (3.15)$$

линий поля

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n U^{n,1} - a_n U^{n,2}) = C. \quad (3.16)$$

Рассмотрим линии поля, описываемые уравнениями

$$L^{n,j} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (3.17)$$

где  $n > 1$ , и покажем, что они являются асимптотами для остальных линий.

При  $j = 1$ , как следует из (3.6), уравнение (3.17) эквивалентно уравнению

$$\operatorname{Im} z^n = 0 \quad (3.18)$$

(т. е.,  $z^n$  — произвольное вещественное число), а при  $j = 2$  — уравнению

$$\operatorname{Re} z^n = 0 \quad (3.19)$$

( $z^n$  — произвольное чисто мнимое число). Решением (3.18) являются лучи, проходящие через нулевую точку в начале координат и повёрнутые относительно оси абсцисс на углы  $\alpha_1 = \frac{2\pi m}{n}$  (вектор поля  $\mathbf{B}$  направлен вдоль луча от нулевой точки) и  $\alpha_2 = \frac{(2m+1)\pi}{n}$  (вектор  $\mathbf{B}$  направлен вдоль луча к нулевой точке),  $m = 0, 1, \dots, n-1$ . Решение (3.19) — лучи, проходящие через нулевую точку в начале координат и повёрнутые относительно оси абсцисс на углы  $\beta_1 = \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi m}{n}$  и  $\beta_2 = \frac{\pi}{2n} + \frac{(2m+1)\pi}{n}$  соответственно,  $m = 0, 1, \dots, n-1$ .

Использованное представление в виде разложения в ряд по ОГП эквивалентно разложению потенциала в ряд Тейлора (3.5) в полярной системе координат [18, 95]:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (3.20)$$

при этом

$$\begin{aligned} U^{n,1} &= \frac{r^n}{n!} \cos n\varphi, \\ U^{n,2} &= \frac{r^n}{n!} \sin n\varphi. \end{aligned} \quad (3.21)$$

То, что линии (3.17) — асимптоты линий поля при  $r \rightarrow \infty$ , видно из (3.12) и этих выражений.

Базисные функции 1-го и 2-го вида порядка  $n = 1$  задают однородные поля, параллельные осям  $Ox$  и  $Oy$  соответственно, а их

линейные комбинации — произвольные однородные поля на плоскости. Поля, заданные базисными функциями  $n$ -го порядка  $U^{n,j}$  ( $j = 1, 2$ ), где  $n > 1$ , имеют нулевую точку в начале координат и при том единственную и переводятся друг в друга поворотом вокруг неё. При повороте поля вокруг оси  $Oz$  на угол  $\varphi_0$  против часовой стрелки (или, что равносильно, повороте системы координат на угол  $\varphi_0$  по часовой стрелке) комплексное число  $z = re^{i\varphi}$  переходит в число  $z_1 = re^{i(\varphi+\varphi_0)}$ . При этом  $\Psi^n = \frac{z^n}{n!}$  преобразуется в

$$\Psi_1^n = \frac{r^n}{n!} e^{in(\varphi+\varphi_0)} = \frac{r^n}{n!} (\cos[n(\varphi + \varphi_0)] + i \sin[n(\varphi + \varphi_0)]), \quad (3.22)$$

откуда, а также из (3.11), следуют формулы преобразования при описанном повороте системы координат базисных функций 1-го и 2-го видов:

$$\begin{aligned} U^{n,1} &\rightarrow U^{n,1} \cos n\varphi_0 - U^{n,2} \sin n\varphi_0, \\ U^{n,2} &\rightarrow U^{n,1} \sin n\varphi_0 + U^{n,2} \cos n\varphi_0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Поворот на угол  $\frac{2\pi m}{n}$  ( $m = 0, 1, \dots, n - 1$ ) переводит поле само в себя, а поворот на угол  $\frac{(2m+1)\pi}{n}$  — в его зеркальное отражение относительно какой-либо из биссектрис угла между асимптотами (потенциал в последнем случае меняет знак; картина линий поля не изменяется, но изменяется направление вектора поля). Асимптоты и линии поля в окрестностях нулевых точек, заданных потенциалами 1-го (а, в, д) и 2-го (б, г, е) видов порядков  $n = 2$  (а, б),  $n = 3$  (в, г),  $n = 4$  (д, е), показаны на рис. 3.1.

Таким образом, линейная комбинация базисных функций одного порядка  $U^n = a_n U^{n,1} + b_n U^{n,2}$  в общем случае даёт совмещение преобразования плоскости группы  $O(2)$  [124] и преобразования подобия относительно начала координат (картина линий поля инвариантна относительно последнего):

$$U^n = \frac{r^n}{n!} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) = F_s \frac{r^n}{n!} \cos(n\varphi - \psi_0), \quad (3.24)$$

где масштабный фактор

$$F_s = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (3.25)$$

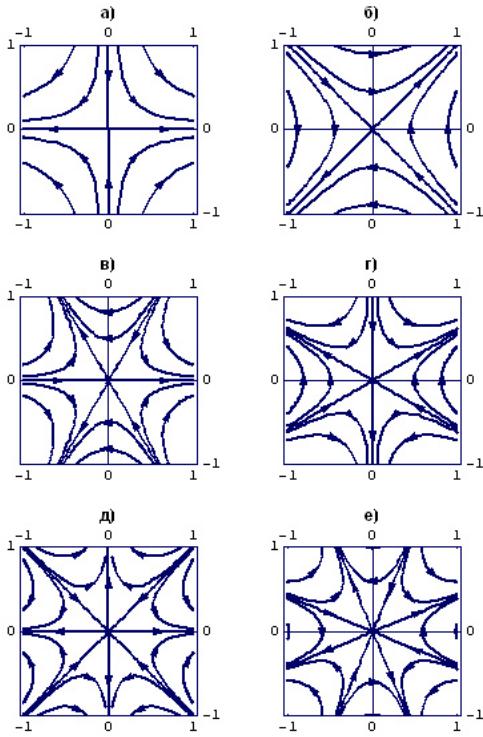


Рис. 3.1. Окрестности нулевых точек 1–3-го порядков на плоскости (порядок нуля  $p = n - 1$ , где  $n$  — порядок в разложении потенциала;  $j$  — вид): а)  $p = 1, j = 1$ ; б)  $p = 1, j = 2$ ; в)  $p = 2, j = 1$ ; г)  $p = 2, j = 2$ ; д)  $p = 3, j = 1$ ; е)  $p = 3, j = 2$ .

характеризует степень быстроты убывания модуля вектора поля в окрестности нулевой точки. Угол  $\psi_0 = -n\varphi_0$ , при этом

$$\cos \psi_0 = \frac{a_n}{F_s}, \quad \sin \psi_0 = \frac{b_n}{F_s}. \quad (3.26)$$

Таким образом, линейное комбинирование базисных функций одного порядка к возникновению новых нулевых точек, помимо расположенной в начале координат, не приводит. Возникновение нулевых точек, отличных от неё, возможно лишь как результат наложения базисных функций разных порядков. Плоское потенциальное бездивергентное векторное поле может иметь лишь изолированные нули (следствие того, что аналитическая функция имеет лишь изолированные нули), порядок которых определяется наименее ненулевыми членами разложения (3.8) в их окрестностях.

В пространстве размерности выше двух возможно возникновение не только изолированных нулей, но и нулевых линий потенциального бездивергентного векторного поля. Однако в трёхмерном пространстве невозможно существование нулевых поверхностей такого поля [19]. Если поле непотенциально, нулевые поверхности в трёхмерии и нулевые линии на плоскости возникать могут. Так, в первом порядке разложения (3.2) возможно возникновение нулевой прямой как граничного случая между  $X$ -точками и  $O$ -точками, матрица системы при этом вырождена. Однако необходимо различать истинно нулевые линии, вдоль которых поле равно нулю тождественно, и линии, нулевые в данном порядке, которые возникают при обращении в нуль вклада лишь одного или нескольких членов низших порядков разложения (3.1). При наличии линий, нулевых лишь в выбранном приближении, на топологию линий поля оказывает влияние вклад членов разложения высших порядков. Нулевые линии представляют собой неустойчивый элемент геометрии [126].

Разложение по ОГП (3.8) и разложение по тригонометрическим функциям (3.20) взаимозаменяемы, так что предпочтение одного из них определяется соображениями удобства. Так, в полиномиальном представлении для поиска нулевых точек поля, помимо расположенной в начале координат, из (3.14) следует система уже не тригонометрических, а алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n U^{n-1,1} + b_n U^{n-1,2}) = 0, \\ b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (b_n U^{n-1,1} - a_n U^{n-1,2}) = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Ограничимся при суммировании  $N$  первыми членами. Число корней системы двух уравнений порядка  $N - 1$  (т. е., когда наивысший не равный нулю коэффициент разложения (3.8) имеет индекс  $N$  ( $a_N \neq 0$  или  $b_N \neq 0$ ,  $a_{N+l} = b_{N+l} = 0$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ), согласно теореме Безу о числе решений

полиномиальной системы уравнений [127], составляет  $(N - 1)^2$ , некоторые корни при этом могут быть комплексными.

Подведём итог. В двумерном случае нулевые точки одного порядка потенциального бездивергентного векторного поля в малой окрестности имеют строго фиксированную, с точностью до поворота вокруг точки, систему линий поля и асимптот (относительно изменения масштабного фактора картина инвариантна). В случае нуля 1-го порядка будет иметься точка типа “седло” с прямыми углами между асимптотами, см. рис. 3.1а,б. Линии поля (и эквипотенциали) такой  $X$ -точки — равнобочные гиперболы, и, в частности, для потенциала, заданного базисной функцией  $U^{2,1} = \frac{x^2-y^2}{2}$ , их уравнение записывается как

$$y = \frac{C}{x}. \quad (3.28)$$

Изомагнитные линии  $X$ -точек с прямыми углами между асимптотами — окружности.

В случае нуля 2-го порядка будет иметься точка с 6-ю лучами-асимптотами, разделёнными равными углами (далее — “6-лучевая точка”, см. рис. 3.1в,г), 3-го порядка — 8-лучевая точка (рис. 3.1д,е) и т. д.

Нулевые точки порядка выше 1-го неустойчивы относительно изменения параметров поля. Так, если, например, имеется нуль 2-го порядка, то сколь угодно малое возмущение может привести к тому, что совпадающие корни системы (3.27) превратятся в различные вещественные или комплексные числа, что будет означать, соответственно, распад 6-лучевой точки на две  $X$ -точки или её исчезновение, т. е. качественное изменение картины [113]. Таким образом, уже в двумерном случае можно выделить устойчивые и представляющие поэтуому наибольший интерес с физической точки зрения нулевые точки, а именно  $X$ -точки с прямыми углами между асимптотами, которые при малом возмущении, как правило, не исчезают и лишь несколько меняют положение на плоскости, и

вырожденные, неустойчивые, которые легко “разрушаются” возмущениями (6-лучевые нулевые точки, 8-лучевые и т. д.).

### 3.3. Нулевые точки потенциального магнитного поля в трёхмерном пространстве

При переходе от плоскости к трёхмерному пространству ситуация существенно усложняется. Если в двумерном случае все нулевые точки в первом ненулевом порядке разложения имели единообразную геометрию ближайших окрестностей с точностью до поворота, то в трёхмерном пространстве возможны разные варианты геометрии окрестностей точек одного порядка и вырождение не только по порядку нуля, но и геометрическое (возникновение дополнительных симметрий). В связи с этим интерес вызывают следующие вопросы: каких типов нулевые точки могут существовать в пространстве; какие из них являются наиболее простыми — в смысле, наиболее устойчивыми к произвольным малым возмущениям; каковы возможные их вырождения?

Как и в плоском случае, потенциал вблизи нулевой точки можно разложить в ряд Тейлора. Можно воспользоваться разложением по шаровым функциям или по пространственным однородным гармоническим полиномам  $(U^{n,j})_{3D}$ . Частные производные пространственных ОГП порядка  $n + 1$  являются пространственными ОГП порядка  $n$  или их линейной комбинацией. Однако в отличие от плоского случая, когда имелось по два ОГП каждого порядка, в трёхмерном пространстве их число порядка  $n$  составляет уже  $2n + 1$  [95]. Таково же и число шаровых функций каждого порядка. Список пространственных ОГП низших порядков на основе [128], но перенормированных, приведён в табл. 3.2.

Таблица 3.2: Однородные гармонические полиномы низших порядков в случае пространства трёх измерений.

Порядок, $n$	Полиномы, $(U^{n,j})_{3D}$			
	Квазидвумерные		Не имеющие двумерных аналогов	
	Номер, $j$	Полином	Номер, $j$	Полином
1	1	$x$	—	—
	2	$y$		—
	3	$z$		—
2	1	$\frac{1}{2} (x^2 - y^2)$	—	—
	2	$\frac{1}{2} (x^2 - z^2)$		—
	3	$xy$		—
	4	$xz$		—
	5	$yz$		—
3	1	$\frac{1}{6} (x^3 - 3xy^2)$	7	$xyz$
	2	$\frac{1}{6} (3x^2y - y^3)$		
	3	$\frac{1}{6} (x^3 - 3xz^2)$		
	4	$\frac{1}{6} (3x^2z - z^3)$		
	5	$\frac{1}{6} (y^3 - 3yz^2)$		
	6	$\frac{1}{6} (3y^2z - z^3)$		
4	1	$\frac{1}{4!} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$	7	$\frac{1}{6} (3x^2yz - y^3z)$
	2	$\frac{1}{6} (x^3y - xy^3)$	8	$\frac{1}{6} (3xy^2z - xz^3)$
	3	$\frac{1}{4!} (x^4 - 6x^2z^2 + z^4)$	9	$\frac{1}{6} (3xyz^2 - x^3y)$
	4	$\frac{1}{6} (x^3z - xz^3)$		
	5	$\frac{1}{4!} (y^4 - 6y^2z^2 + z^4)$		
	6	$\frac{1}{6} (y^3z - yz^3)$		

Как и на плоскости, в пространстве ОГП первого порядка задают однородные единичные поля, направленные вдоль координатных осей, а их линейными комбинациями даются произвольные однородные поля. Линейно независимых пространственных ОГП второго порядка пять. Их вид в табл. 3.2 с точностью до замены входящих в них переменных совпадает с видом двумерных ОГП того же порядка (ср. с табл. 3.1). Такая редукция к двумерному случаю означает, что в каждой плоскости, перпендикулярной к невошедшему в полином координате, имеется двумерная нулевая точка уже описанного ранее типа, в случае 2-го порядка —  $X$ -точка с прямыми углами между асимптотами, и последовательность таких точек как бы “нанизана” на нулевую прямую. “Недостающий” в списке полином  $\frac{1}{2}(y^2 - z^2)$  не является линейно независимым и даётся разностью  $(U^{2,2})_{3D}$  и  $(U^{2,1})_{3D}$ . Шесть из семи ОГП третьего порядка также квазидвумерные и по отдельности описывают нанизанные на нулевые линии 6-лучевые точки, и лишь последний из них (в табл. 3.2 в правом столбце) даёт потенциал, не

имеющий двумерных аналогов. В четвёртом же порядке в табл. 3.2 таких не имеющих двумерных аналогов потенциалов уже три. До сих пор мы рассматривали ОГП по одиночке. Но прежде, чем перейти к потенциалам общего вида, даваемым их комбинациями, рассмотрим вопрос о выборе системы координат.

### 3.3.1. Введение в базисные функции

В плоском случае поле было направлено по радиусу от нулевой точки или к ней вдоль асимптот. В пространстве исходящие из нулевой точки или приходящие в неё лучи (направления), на которых поле радиально или же обращается в нуль, будем называть реперами. Появление или исчезновение реперов, а также изменение характера поведения линий поля вблизи них связано с изменением топологической структуры окрестностей нуля.

*Утверждение 1* (о двух реперах): В случае поля, заданного линейной комбинацией ОГП произвольного, но одного порядка, всегда существует как минимум одна проходящая через нулевую точку прямая, на которой поле радиально или же обращается в нуль (т. е. два дополняющих друг друга до прямой репера).

Для доказательства этого утверждения рассмотрим сферу с центром в нулевой точке. Согласно т. н. “теореме о причёсывании ежа”, имеется как минимум одна точка сферы, в которой поле к ней ортогонально (в частности, возможно равенство нулю). Поле также будет ортогонально к сфере и в точке, противоположной первой, т. к. выражения для компонент вектора поля, заданного потенциалом нечётной степени, не меняются при замене координат на противоположные, а выражения для компонент вектора поля, заданного потенциалом чётной степени, меняют лишь знак. Учитывая, что картина линий поля, потенциал которого задан ОГП одной степени, инвариантна относительно преобразования подобия с центром в нулевой точке, получим, что вектор поля радиален (или же равен нулю) во всех точках прямой, проходящей через две найденные.

Доказанное утверждение позволяет упростить исследование нулевых точек (что особенно существенно в случае нулей высших порядков),

сразу выбрав систему координат так, чтобы ось  $Oz$  была направлена по указанному выделенному направлению. При разложении потенциала по пространственным ОГП порядка  $n$  (табл. 3.2) можно исключить те полиномы, которые содержат в качестве слагаемых  $xz^{n-1}$  и  $yz^{n-1}$  — на оси  $Oz$  должны выполняться условия  $B_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 0$  и  $B_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 0$  (если, однако, полиномов, содержащих какое-то из указанных слагаемых, более одного, то те их линейные комбинации, в которых это слагаемое уничтожается, должны быть оставлены). В связи с этим удобно перейти от ОГП из табл. 3.2 к ОГП приведённого вида на основе шаровых функций. Каждая из гармоник разложения потенциала по шаровым функциям пропорциональна выражению

$$r^n P_n^{(m)}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} = r^m \sin^m \theta \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \cdot r^{n-m} \frac{d^m}{d \cos^m \theta} P_n(\cos \theta), \quad (3.29)$$

где  $m \neq 1$  в соответствии с произведённым исключением, и присоединённые функции Лежандра даются выражением (2.66). Ненулевые реперы будут направлены по оси  $Oz$  при наличии вклада в потенциал базисной функции с  $m = 0$ , поскольку для базисных функций с  $m \geq 2$  эта ось является нулевой прямой порядка  $m - 1$  [19].

Таблица 3.3: Приведённые однородные гармонические полиномы 2-го порядка в пространственном случае. Запись в различных системах координат, выражения через шаровые функции и перенормированные ОГП по [128] (см. табл. 3.2).

Функция	Запись в декартовых координатах	Запись в цилиндрич. координатах	Выражение через шаровые функции в сферич. координатах	Запись через ОГП
$V_2^0$	$\frac{1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2)$	$\frac{1}{2}(2z^2 - \rho^2)$	$r^2 \cdot P_2^{(0)}(\cos \theta)$	$(U^{2,1})_{3D} - 2(U^{2,2})_{3D}$
$V_2^{1,1}$	$\frac{x^2 - y^2}{2}$	$\frac{\rho^2}{2} \cos 2\varphi$	$\frac{r^2}{6} \cdot P_2^{(2)}(\cos \theta) \cdot \cos 2\varphi$	$(U^{2,1})_{3D}$
$V_2^{1,2}$	$xy$	$\frac{\rho^2}{2} \sin 2\varphi$	$\frac{r^2}{6} \cdot P_2^{(2)}(\cos \theta) \cdot \sin 2\varphi$	$(U^{2,3})_{3D}$

Таким образом, вместо линейной комбинации из  $2n + 1$  базисных функций (шаровых функций, или ОГП, или приведённых ОГП) достаточно рассматривать комбинацию  $2n - 1$  функций. Покажем, что без потери общности их число можно сократить ещё на единицу и ограничиться

$2n - 2$  функциями. Второй из двух сомножителей в выражении (3.29) справа аксиально-симметричен, а первый представляет собой потенциал уже описанной двумерной нулевой точки 1-го или 2-го вида, в зависимости от того, взят ли в качестве входящего в него множителя косинус или синус:

$$U^{m,j} = r^m \sin^m \theta \begin{cases} \cos m\varphi, & \text{если } j = 1, \\ \sin m\varphi, & \text{если } j = 2. \end{cases} \quad (3.30)$$

Таким образом, одну из шаровых функций (или полиномов) с  $m \geq 2$  можно исключить выбором поворота системы координат относительно оси  $Oz$ . Будем называть точки с одинаковым  $m$  точками одного рода. В завершение можно подобрать удобный масштаб.

Базисные функции для потенциалов 2-го и 3-го порядков в форме приведённых ОГП в декартовой системе координат, их записи в сферических координатах, а также выражения через шаровые функции и ОГП (для 2-го порядка) согласно табл. 3.2 даны в табл. 3.3 и 3.4 (соответствующие выражения для вектора поля даны в Приложении B.1). Выражения для потенциалов 4-го порядка приводятся в табл. B.2 Приложения B.2. Использованы следующие обозначения тех пространственных базисных функций, что задают поля, не обладающие аксиальной симметрией:  $V_n^{i,j}$ , где  $i$  — род ( $i = m - 1$ , см. (3.29)),  $j$  — вид,  $n$  — порядок. Значение термина “вид” аналогично использованному в разделе 3.2 и в формуле (3.30). Аксиально-симметричные потенциалы обозначаются как  $V_n^0$ , где  $n$  — порядок. Из соображений удобства используется нормировка, отличающаяся от стандартной нормировки шаровых функций (пояснения даны ниже).

Из (3.29) следует существование для суммы гармоник одного рода  $2m$  полуплоскостей, которые содержат ось  $Oz$  и которые линии поля не покидают, причем данное свойство сохраняется и при добавлении потенциала  $V_n^0$  (в частности, это справедливо для потенциалов  $U_I$  и  $U_{II}$ , рассматриваемых далее).

Для перехода к системе координат, в которой ось  $Oz$  имеет произвольно заданное направление, можно воспользоваться кватернионами [129]. Пусть имеется единичный вектор  $\mathbf{n} = (u \ v \ w)^T$ ,

Таблица 3.4

Базисные функции для потенциалов 3-го порядка.

Функция	Выражение в декартовой системе координат	Запись через присоединённые функции Лежандра
$V_3^0$	$\frac{1}{6} [2z^3 - 3z(x^2 + y^2)]$	$\frac{r^3}{3} P_3^{(0)}(\cos \theta)$
$V_3^{1,1}$	$z \frac{x^2 - y^2}{2}$	$\frac{r^3}{30} P_3^{(2)}(\cos \theta) \cos 2\varphi$
$V_3^{1,2}$	$xyz$	$\frac{r^3}{30} P_3^{(2)}(\cos \theta) \sin 2\varphi$
$V_3^{2,1}$	$\frac{1}{6}(x^3 - 3xy^2)$	$\frac{r^3}{90} P_3^{(3)}(\cos \theta) \cos 3\varphi$
$V_3^{2,2}$	$\frac{1}{6}(3x^2y - y^3)$	$\frac{r^3}{90} P_3^{(3)}(\cos \theta) \sin 3\varphi$

задающий ось, вокруг которой производится поворот системы координат по часовой стрелке на угол  $\psi$ . Кватернион, описывающий данное вращение:

$$q = \cos \frac{\psi}{2} \cdot 1 + \sin \frac{\psi}{2} \cdot u \cdot i + \sin \frac{\psi}{2} \cdot v \cdot j + \sin \frac{\psi}{2} \cdot w \cdot k, \quad (3.31)$$

где  $1, i, j, k$  — базисные единицы, умножение которых производится согласно правилам, приведённым в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Правила умножения базисных единиц  $1, i, j, k$  кватернионов.

$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot i = i$	$1 \cdot j = j$	$1 \cdot k = k$
$i \cdot 1 = i$	$i \cdot i = -1$	$i \cdot j = k$	$i \cdot k = -j$
$j \cdot 1 = j$	$j \cdot i = -k$	$j \cdot j = -1$	$j \cdot k = i$
$k \cdot 1 = k$	$k \cdot i = j$	$k \cdot j = -i$	$k \cdot k = -1$

Коэффициент при  $1$  называется скалярной частью кватерниона (3.31), а совокупность коэффициентов при  $i, j, k$  — векторной. Возьмём радиус-вектор  $\mathbf{R} = (x \ y \ z)^T$  и составим кватернион  $R = 0 \cdot 1 + x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k$ . Векторная часть кватерниона

$$R' = q R q^{-1} \quad (3.32)$$

и будет представлять собой исходный вектор в новой системе координат:  $\mathbf{R}' = (x' \ y' \ z')^T$  (скалярная часть при преобразовании обращается в нуль). Инверсный кватернион, с учётом равенства нормы  $q$  единице, имеет вид

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|} = \cos \frac{\psi}{2} \cdot 1 - \sin \frac{\psi}{2} \cdot u \cdot \mathbf{i} - \sin \frac{\psi}{2} \cdot v \cdot \mathbf{j} - \sin \frac{\psi}{2} \cdot w \cdot \mathbf{k}, \quad (3.33)$$

где звёздочкой обозначено комплексное сопряжение.

Также можно воспользоваться аналогичным преобразованием и выразить новые координаты точки (штрихованные) через старые координаты той же точки (нештрихованные) путём умножения последних на матрицу поворота  $Q$ :

$$\mathbf{R}' = Q\mathbf{R}, \quad (3.34)$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\psi}{2} + (u^2 - v^2 - w^2) \sin^2 \frac{\psi}{2} & 2[uv \sin^2 \frac{\psi}{2} - w \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}] & 2[uw \sin^2 \frac{\psi}{2} + v \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}] \\ 2[uv \sin^2 \frac{\psi}{2} + w \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}] & \cos^2 \frac{\psi}{2} + (v^2 - u^2 - w^2) \sin^2 \frac{\psi}{2} & 2[vw \sin^2 \frac{\psi}{2} - u \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}] \\ 2[uw \sin^2 \frac{\psi}{2} - v \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}] & 2[vw \sin^2 \frac{\psi}{2} + u \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}] & \cos^2 \frac{\psi}{2} + (w^2 - u^2 - v^2) \sin^2 \frac{\psi}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Преобразование, обратное (3.32) и (3.34), даётся изменением знака перед  $\psi$ .

### 3.4. Нулевые точки 1-го порядка потенциального магнитного поля в трёхмерном пространстве

Рассмотрим сперва нулевые точки 1-го порядка потенциального магнитного поля в трёхмерном пространстве. Понятия, используемые при их характеристизации, будут затем обобщены (иногда с дополнительными пояснениями) на нули высших порядков. Наиизшие слагаемые в потенциале имеют 2-ой порядок и, с учётом уравнения Лапласа (1.4), записываются в виде:

$$U = a_{11} \frac{x^2}{2} + a_{22} \frac{y^2}{2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{z^2}{2} + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz. \quad (3.36)$$

*Утверждение 2:* В окрестности нуля 1-го порядка в общем случае будет иметься уже не одна, а три прямых, на которых поле радиально или же равно нулю (т. е. шесть реперов (рис. 3.2)). (Заметим также, что в одном из вырожденных случаев, как будет показано далее, таких прямых бесконечно много).

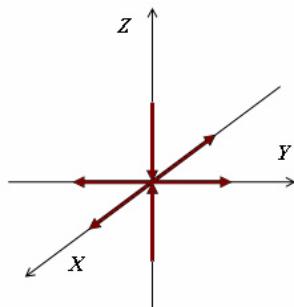


Рис. 3.2. Реперы невырожденной нулевой точки 1-го порядка типа  $B$  в системе координат, в которой матрица  $M$  диагональна. Направления вектора поля указаны стрелками.

Вектор поля, равный градиенту потенциала (3.36),

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{13}x + a_{23}y - (a_{11} + a_{22})z \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

на прямых из утв. 2 должен быть коллинеарен радиус-вектору  $\mathbf{R} = (x \ y \ z)^T$ , что позволяет записать его в виде

$$\mathbf{B} = M\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -(a_{11} + a_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

где матрица постоянных коэффициентов  $M = \text{Grad } \mathbf{B} \equiv \nabla \otimes \mathbf{B} = \text{Hess } U$  — гессиан (матрица вторых производных) потенциала,  $\mathbf{R}$  ( $|\mathbf{R}| \neq 0$ ) — искомый собственный вектор матрицы  $M$ ,  $\lambda$  — собственное значение. Матрица  $M$  — симметричная, с нулевым следом (последнее — прямое следствие равенства нулю дивергенции):

$$M = M^T, \quad (3.39)$$

$$\text{Tr } M = 0. \quad (3.40)$$

Из этих равенств вытекают следующие свойства матрицы  $M$ :

1. Все собственные значения  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) вещественны.
2. Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям  $M$ , взаимно ортогональны.
3. Всегда найдутся три взаимно перпендикулярные прямые, направленные по собственным векторам  $M$  (следствие возможности составить из собственных векторов  $M$  ортонормированный базис).
4. Сумма собственных значений  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 0$ .

Утверждение 2 следует из п. 3.

Для дальнейшего рассмотрения перейдём к такой системе координат, в которой матрица  $M$  диагональна:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

где  $\lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

Классификация нулевых точек 1-го порядка производится по совокупности собственных значений матрицы  $M$ . Эти собственные

значения — набор параметров, который характеризует топологическую структуру окрестностей нуля. Вырожденными (неустойчивыми к малым возмущениям) при этом будут являться случаи, возникающие при равенстве каких-либо из собственных значений нулю или друг другу. С учётом 4-го из перечисленных выше свойств возможны следующие варианты (с точностью до перестановки индексов у собственных значений):

1.  $\lambda_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ : невырожденная нулевая точка. Два собственных значения различны, но имеют один знак, а одно — наибольшее по модулю (здесь и далее предполагается, что это  $\lambda_3$ ) — противоположный двум другим. Типы (введены Cowley [16]):  
 (a)  $\lambda_i < 0$  ( $i = 1, 2$ ),  $\lambda_3 > 0$  — одно собственное значение положительно, сигнатура  $[111] (--) +$ ;  
 (b)  $\lambda_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ),  $\lambda_3 < 0$  — два собственных значения положительны, сигнатура  $(++) -$ .
2.  $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$ ,  $\lambda_3 = 0$ :  $X$ -точки с прямыми углами между асимптотами, нанизанные на нулевую прямую.
3.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $\lambda_3 = -2\lambda$ : точка, которую будем называть “дикритической нулевой точкой”. Линейная оболочка пары линейно независимых собственных векторов, отвечающих совпадающим собственным значениям, образует плоскость, в которой поле радиально на всех направлениях. Типы определяются так же, как и в невырожденном случае:  
 (a)  $\lambda < 0$  — одно собственное значение положительно  $(--) +$ ;  
 (b)  $\lambda > 0$  — два собственных значения положительны  $(++) -$ .

Если же  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , то это означает, что члены первого порядка в выражении для магнитного поля отсутствуют, так что имеет место нуль 2-го порядка или выше.

Рассмотрим теперь каждую из перечисленных разновидностей нулей более подробно.

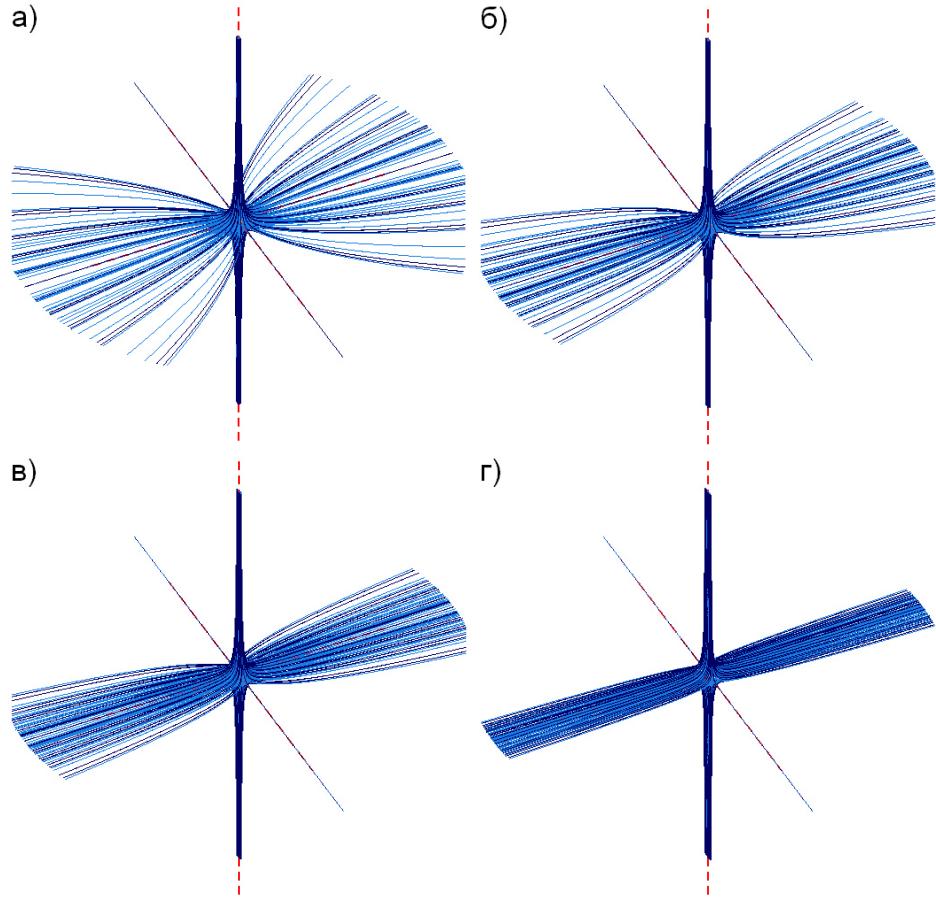


Рис. 3.3. Линии поля вблизи невырожденной нулевой точки 1-го порядка при (см. формулу 3.48) а)  $a = 1.5$ , б)  $a = 2.0$ , в)  $a = 2.5$ , г)  $a = 5.0$ .

### 3.4.1. Невырожденная нулевая точка

Уравнение линий поля вблизи точки данной разновидности (рис. 3.3)

$$\frac{dx}{\lambda_1 x} = \frac{dy}{\lambda_2 y} = \frac{dz}{\lambda_3 z} \quad (3.42)$$

можно проинтегрировать в следующем виде:

$$\begin{cases} y = C_1 |x|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \\ z = C_2 |x|^{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}, \end{cases} \quad (3.43)$$

где  $C_1, C_2$  — коэффициенты интегрирования (плюс линии, для которых

$$x = 0, \quad z = C_2 |y|^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}, \quad (3.44)$$

и полуоси оси  $Oz$ ). Заметим, что это — лишь одна из возможных форм записи. Без потери общности можно предположить, что помимо того что

$\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеют один знак,  $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ . Тогда первым из уравнений (3.43) в плоскости  $xOy$  описывается совокупность соосных обобщённых парабол, оси которых совпадают с положительной (при  $C_1 > 0$ ) и отрицательной (при  $C_1 < 0$ ) полуосями оси  $Oy$ , т. е., с учётом выбора системы координат, с реперами, отвечающими среднему по модулю собственному значению. К нулевой точке ветви этих парабол подходят, касаясь оси  $Ox$ . Реперы, составляющие ось  $Ox$ , отвечают наименьшему по модулю собственному значению. Они указывают в направлениях “просветов” между пучками парабол с  $C_1 > 0$  и  $C_1 < 0$ . Таким образом, все линии поля в плоскости  $xOy$  (полупараболы и реперы) упираются одним из концов в нулевую точку — входят в неё (тип  $A$ ) или выходят (тип  $B$ ). Также в нуле оканчиваются и две перпендикулярные им изолированные линии поля (реперы, отвечающие наибольшему по модулю собственному значению), идущие вдоль оси  $Oz$  (выходят из неё в случае типа  $A$  и входят в случае типа  $B$ ). Изолированными они являются в том смысле, что никакая линия поля из их окрестности до нулевой точки не доходит.

Линиями поля, образующими плоскость  $xOy$  (двумерное многообразие [106]) и лучами, составляющими ось  $Oz$  (одномерное многообразие), список проходящих через нуль линий исчерпывается. Как можно видеть, ненулевые реперы могут представлять собой как изолированные линии, оканчивающиеся или начинающиеся в нуле, так и быть направляющими, лежащими на некоторой двумерной поверхности, образуемой линиями поля с концом в нулевой точке.

Второе из уравнений (3.43) (или (3.44)), которое перепишем в виде

$$z = \frac{C_2}{|x|^{1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} \quad (3.45)$$

(соответственно, в виде  $z = \frac{C_2}{|y|^{1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}}$ ), в проекции на плоскость  $xOz$  (соответственно,  $yOz$ ) представляет собой уравнение совокупности гипербол. Заметим, что речь идёт именно о проекциях линий — собственно гиперболами являются лишь те из них, что лежат в плоскостях  $xOz$  или  $yOz$ , остальные же имеют более сложную пространственную форму. Каждая из этих линий одним концом неограниченно приближается к общей

для их совокупности асимптоте — оси  $Oz$ , а другим — к асимптотической плоскости  $xOy$ . Охватывающие ось  $Oz$  трубы поля, подходя к плоскости  $xOy$ , неограниченно расширяются, а линии их границ расстилаются над ней.

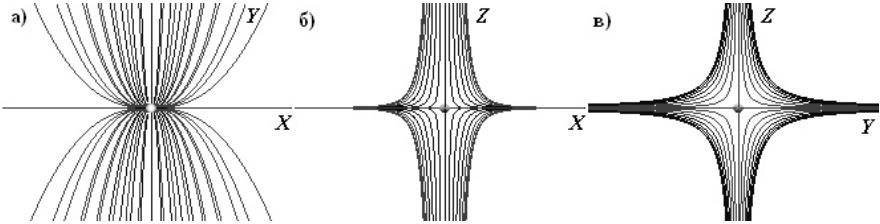


Рис. 3.4. Линии поля невырожденной нулевой точки 1-го порядка при  $a = 2.5$  (см. формулу 3.48). Проекции на плоскости: а)  $xOy$ ; б)  $xOz$ ; в)  $yOz$ .

Итак, в плоскости  $xOy$  линии поля образуют “узел” (устойчивый при  $\lambda_{1,2} < 0$  и неустойчивый при  $\lambda_{1,2} > 0$ ), а в перпендикулярных ей плоскостях  $xOz$  и  $yOz$  — “сёдла” (рис. 3.4). В [106] для обозначения совокупности двух реперов-асимптот, направленных по оси  $Oz$ , было введено наименование “шип” (spine), а для плоскости, содержащей “узел”, — “веерная плоскость” (fan plane) (см. рис. 3.5). Для них также используются, соответственно, ранее введённые Greene [108] термины “ $\gamma$ -линия” и “ $\Sigma$ -поверхность”, при этом к символам  $\gamma$  и  $\Sigma$  могут добавляться индексы  $A$  или  $B$  в зависимости от типа нуля. Далее при описании тех реперов нулей высших порядков, которые являются асимптотами всех линий поля, проходящих вблизи них в перпендикулярном им сечении, будет применяться термин “полушип” (half-spine), а прямую, состоящую из двух таких реперов, в согласии с традицией, будем называть “шипом”.  $\gamma$ -линиями же будем называть те реперы, которые приходят в нулевую точку изолированно (в том смысле, что никакая линия поля из малой окрестности репера до нуля не доходит). Заметим, что в случае нулей высших порядков определённые так понятия “полушип” и “ $\gamma$ -линия” не совпадают: возможно существование как “полушипов”,  $\gamma$ -линиями не являющихся, так и наоборот. В совокупности  $\gamma$ -линий и  $\Sigma$ -поверхности, согласно введённому Priest et al. [112] термину, образуют “скелет” (skeleton) нулевой точки. Отметим, что в нулевую точку могут приходить линии поля, образующие одномерное либо двумерное многообразие, но не трёхмерное —

никакая трубка с конечным магнитным потоком в нуле оканчиваться не может. В литературе для типов  $A$  и  $B$  также применяются введённые Priest & Titov [106] наименования “отрицательные” и “положительные” нули соответственно, однако, поскольку эти термины вызывают ассоциации с наличием зарядов, они не представляются удачными. Далее, однако, будут использоваться обозначения  $\gamma_+$ ,  $\Sigma_+$  ( $\gamma_-$ ,  $\Sigma_-$ ) для тех одномерных и двумерных многообразий, линии которых выходят из нуля (входят в нуль).

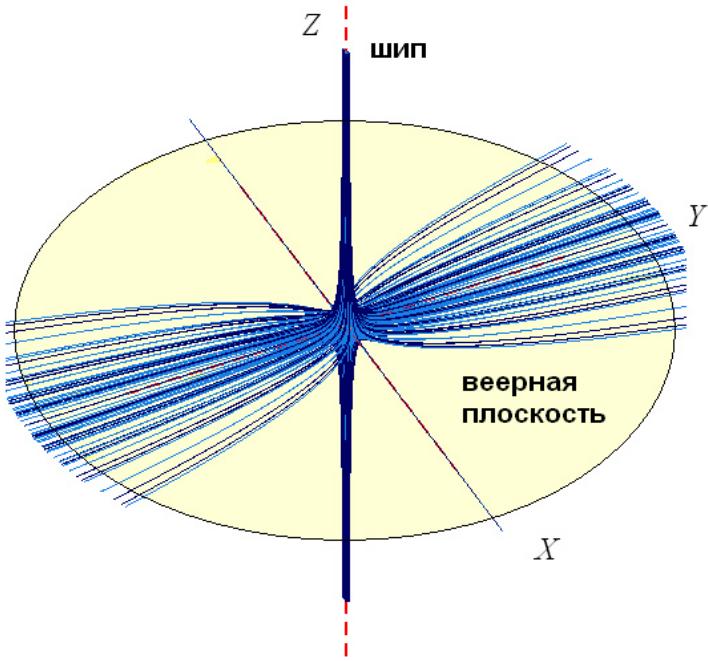


Рис. 3.5. Структура окрестностей нулевой точки 1-го порядка в пространстве (за исключением  $D$ -нулей): “веерная плоскость” и “шип”.

Плотность потока вектора магнитного поля в радиальном направлении

$$\Phi = (\mathbf{B}, \mathbf{R}) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 \quad (3.46)$$

при  $|\mathbf{R}| \equiv R = const$  максимальна по модулю на реперах шипа, равняясь  $\lambda_3 R^2$ , и меняет знак при переходе через содержащий лучи  $|x| = |y| = |z|$  конус

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) z^2 = 0. \quad (3.47)$$

С использованием часто встречающегося в литературе (см., например, [5], [17], [106]) представления собственных значений  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) гессиан

невырожденной нулевой точки записывается в виде

$$M = F_s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -(a+1) \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

где  $a \neq \{-2, -1, \frac{1}{2}, 0, 1\}$ . В дальнейших рассуждениях масштабный фактор  $F_s$  не учитывается. Шип направлен по оси  $Oz$  при  $a > 0$ , при этом фактически достаточно рассматривать  $a > 1$ , т. к. система линий поля при положительном  $a$  та же, что и при  $\frac{1}{a}$ , с точностью до поворота на  $\frac{\pi}{2}$  (с учётом инвариантности относительно изменений масштабного фактора). Заметим, что представлением (3.48) при  $a > 0$  задаются нули  $B$ -типа. В табл. 3.6 перечислено, нулевые точки каких разновидностей и типов имеют место при различных значениях параметра.

Линии поля вблизи невырожденной нулевой точки симметричны относительно отражений в плоскостях  $xOz$ ,  $yOz$  и  $xOy$ . Также, как было уже сказано ранее, имеется симметрия относительно отражения в самой нулевой точке. Заметим, что из доказательства утв. 1, помимо прочего, следует, что число реперов (если оно конечно) всегда чётно.

Невырожденная нулевая точка 1-го порядка в англоязычной литературе именуется “improper radial null point” (см., например, [17] и [113]). В русскоязычной литературе встречаются перевод “неправильная радиальная нулевая точка” [5] и название “6-хвостая точка” [130] — по числу реперов, которые в данном случае все являются ненулевыми.

### 3.4.2. $D$ -нули

Это вырожденный случай (рис. 3.6), который возникает при обращении в нуль одного из собственных значений. Реперов по-прежнему шесть, но ненулевыми из них являются только четыре (асимптоты линий поля, лежащих в плоскости  $xOy$ ). Greene [108] для таких точек был введён термин “нуль  $D$ -типа”.  $X$ -точки с прямыми углами между асимптотами ранее уже рассматривались в разделе 3.2, посвящённом плоскому случаю. В пренебрежении членами разложения потенциала

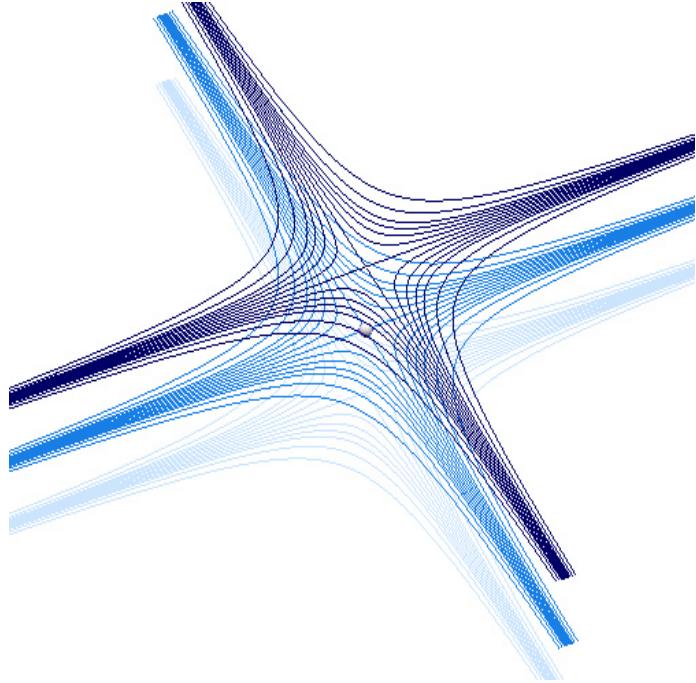


Рис. 3.6. Линии поля  $X$ -точек, нанизанных на нулевую прямую, в трёх параллельных плоскостях.

порядка выше 2-го (а поля, соответственно, выше 1-го) возникает, по сравнению с невырожденным случаем, дополнительная трансляционная симметрия вдоль нулевой прямой. Однако, как уже указывалось ранее, при наличии линии, нулевой в данном порядке, вдоль неё существенен вклад членов разложения высших порядков, и в общем случае (когда поле не равно нулю вдоль прямой тождественно) описанная картина искажается.

### 3.4.3. Дикритическая нулевая точка

Это вырожденный случай (рис. 3.7), возникающий при равенстве двух из собственных значений матрицы  $M$  друг другу:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

К множеству реперов принадлежат два луча, из которых состоит шип, и континuum лучей, которые составляют перпендикулярную ему веерную плоскость, образуя дикритический узел, согласно стандартной

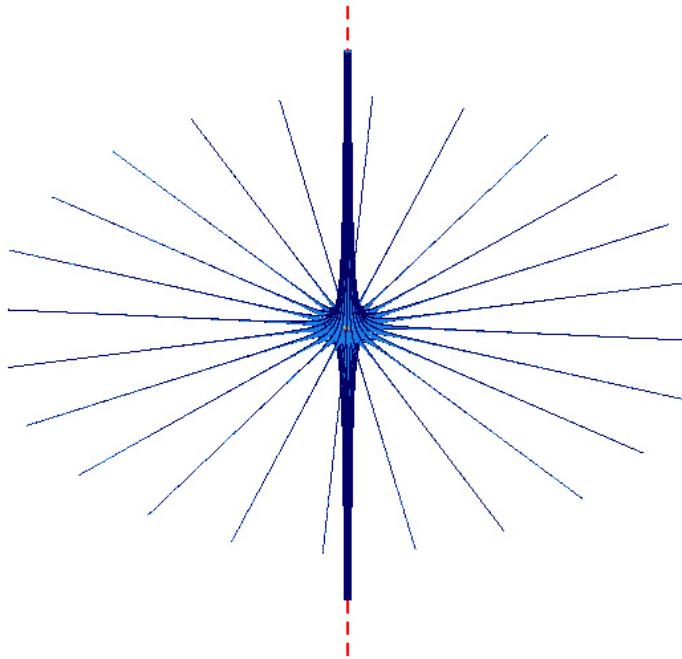


Рис. 3.7. Линии поля в окрестности дикритической радиальной нулевой точки.

номенклатуре для особых точек дифференциальных уравнений [102], чем и обусловлено англоязычное название нуля “proper radial null point” [106]. Остальные линии поля — квадратичные гиперболы, уравнение которых в цилиндрической системе координат  $\{\rho, \varphi, z\}$  имеет вид

$$z = \frac{C}{\rho^2}. \quad (3.50)$$

Дикритическая нулевая точка  $B$ -типа с шипом по оси  $Oz$  в представлении (3.48) даётся значением параметра  $a = 1$  (табл. 3.6 и рис. 3.8).

Таблица 3.6: Нулевые точки 1-го порядка в параметрическом представлении.

Диапазон значений параметра	Положение шипа и веерной плоскости	Поддиапазон значений параметра	Описание
$a < -1$	шип (две $\gamma_-$ ) — ось $Oy$ , веерная плоскость $(\Sigma_+)$ — $xOz$	$a < -2$	ось парабол — ось $Oz$
		$a = -2$	дикритический узел в плоскости $xOz$
		$-2 < a < -1$	ось парабол — ось $Ox$
$a = -1$	$X$ -точки с прямыми углами между асимптотами, нанизанные на ось $Oz$		

$-1 < a < 0$	шип (две $\gamma_+$ ) — ось $Ox$ , веерная плоскость ( $\Sigma_-$ ) — $yOz$	$-1 < a < -\frac{1}{2}$	ось парабол — ось $Oy$
		$a = -\frac{1}{2}$	дикритический узел в плоскости $yOz$
		$-\frac{1}{2} < a < 0$	ось парабол — ось $Oz$
$a = 0$	$X$ -точки с прямыми углами между асимптотами, нанизанные на ось $Oy$		
$a > 0$	шип (две $\gamma_-$ ) — ось $Oz$ , веерная плоскость ( $\Sigma_+$ ) — $xOy$	$0 < a < 1$	ось парабол — ось $Ox$
		$a = 1$	дикритический узел в плоскости $xOy$
		$a > 1$	ось парабол — ось $Oy$

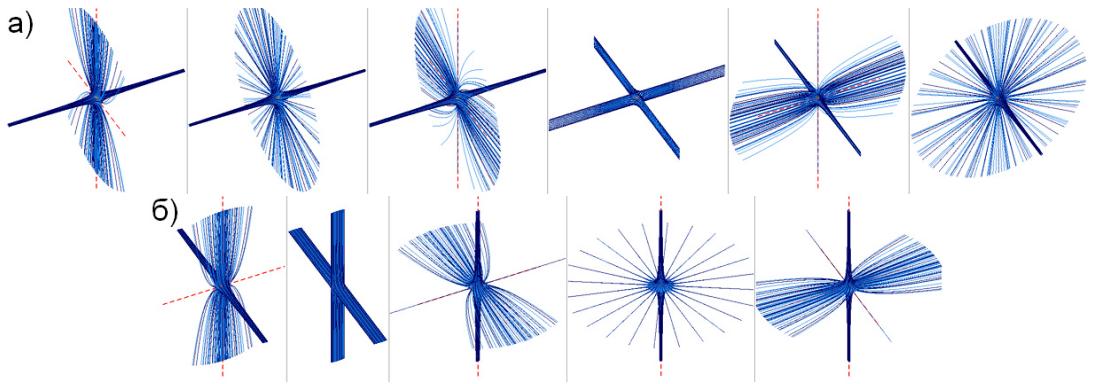


Рис. 3.8. Нулевые точки 1-го порядка при разных значениях параметра  $a$  (см. табл. 3.6). Слева направо: а)  $a = -3, -2, -1.5, -1, -0.75, -0.5$ ; б)  $a = -0.25, 0, 0.5, 1, 2$ .

Англоязычное название также может переводиться как “правильная радиальная нулевая точка” [5]. Далее слово “радиальная” в наименованиях нулевых точек, как правило, опускается, поскольку возникновение отличных от них спиральных точек (третий вариант по Lau & Finn [111]) возможно лишь при наличии токов. Другое встречающееся в литературе название точки описанной разновидности — “юла” [20].

В литературе для простоты часто рассматривают именно дикритические нулевые точки. Однако необходимо подчеркнуть, как это уже не раз делалось ранее (например, в [131]), что это не точки общего вида, а геометрически вырожденный частный случай.

### 3.5. Нулевые точки 2-го порядка потенциального магнитного поля в трёхмерном пространстве

Перейдём теперь к рассмотрению нулевых точек 2-го порядка. Матрица гессиана потенциала  $M = \text{Hess } U$  вновь симметрична и обладает нулевым следом. Вектор поля выражается через неё следующим образом:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} M \mathbf{R}. \quad (3.51)$$

Однако  $M$  теперь не является матрицей постоянных коэффициентов. Введём тензор, компоненты которого уже будут постоянными — тензор производных третьего порядка:

$$T_{ijk} = \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \quad (3.52)$$

(как и ранее,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ). Гессиан — его свёртка с радиус-вектором:  $M_{ij} = T_{ijk} R_k$  (напоминаем, что по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Свойства тензора  $T_{ijk}$ :

1. симметрия по любым двум индексам:

$$T_{ijk} = T_{jik} = T_{ikj} = T_{kji} = T_{jki} = T_{kij}; \quad (3.53)$$

2. равенство нулю свёртки по любым двум индексам:

$$T_{iik} = T_{kii} = T_{iki} = 0. \quad (3.54)$$

Таким образом, из 27-ми компонент тензора в общем случае независимыми являются только семь.

Выражение для вектора поля с учётом свойства симметрии (3.53) имеет вид:

$$B_i = \frac{1}{2} T_{ijk} R_j R_k. \quad (3.55)$$

Обобщим понятия собственного значения и собственного вектора следующим образом. Поле в направлении собственного вектора или в противоположном ему (т. е. вдоль репера)

$$\mathbf{B} = \Lambda(R) \mathbf{R} = \lambda R \mathbf{R}, \quad (3.56)$$

где  $\Lambda$  уже не число, а функция, которая для нуля 2-го порядка, если не равна нулю тождественно, зависит от модуля радиус-вектора  $R$  (расстояния от нулевой точки), а именно пропорциональна ему.  $\lambda$  — число, которое далее и будет называться обобщённым собственным значением.

Аналогично, в случае нуля порядка  $p$

$$B_i = \frac{1}{p!} T_{ij_1 j_2 \dots j_p} R_{j_1} R_{j_2} \dots R_{j_p}, \quad (3.57)$$

где  $T_{ij_1 j_2 \dots j_p}$  — тензор производных потенциала порядка  $p + 1$ , и поле в направлении репера

$$\mathbf{B} = \Lambda(R) \mathbf{R} = \lambda R^{p-1} \mathbf{R}. \quad (3.58)$$

В согласии с выводами подраздела 3.3.1 при рассмотрении нулевой точки 2-го порядка наиболее общего вида из пяти функций табл. 3.4 достаточно оставить четыре:  $V_3^0$  и какие-либо три из  $V_3^{1,1}$ ,  $V_3^{1,2}$ ,  $V_3^{2,1}$ ,  $V_3^{2,2}$ . Остановимся на следующем их наборе:

$$V_3^0 = \frac{1}{6} [2z^3 - 3z(x^2 + y^2)], \quad (3.59)$$

$$V_3^{1,2} = xyz, \quad (3.60)$$

$$\tilde{V}_3^{2,1} = \frac{1}{3\sqrt{2}} (x^3 - 3xy^2), \quad (3.61)$$

$$\tilde{V}_3^{2,2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} (3x^2y - y^3), \quad (3.62)$$

где функции 2-го рода, отмеченные волнистой чертой сверху, перенормированы с коэффициентом  $\sqrt{2}$  так, чтобы выполнялись следующие свойства эквивалентности (в смысле идентичности системы линий поля с точностью до поворота в пространстве):

$$\begin{aligned} V_3^0 + V_3^{1,j} &\propto 2\tilde{V}_3^{2,k}, \\ V_3^0 + \tilde{V}_3^{2,j} &\propto V_3^{1,k}, \\ V_3^0 + 2V_3^{2,1} + \tilde{V}_3^{2,1} + \tilde{V}_3^{2,2} &\propto \sqrt{5}V_3^0, \end{aligned} \quad (3.63)$$

где  $j, k = 1, 2$ . Этими базисными функциями по отдельности описываются точки трёх разных родов. Первому из них,  $V_3^0$ , соответствует нулевая точка, которую будем называть “конической дикритической точкой” (conical proper null), второму — нулевая точка с 8-ю “полушипами”, а двум последним —

6-лучевые точки на нулевой прямой. Вновь подчеркнём, что, в отличие от “конической дикритической точки”, точки с 8-ю “полушапами” и 6-лучевые точки на нулевой прямой не обладают аксиальной симметрией, и при рассмотрении всех вариантов нулевых точек необходимо учесть возможность их поворотов друг относительно друга. Комбинирование вкладов  $\tilde{V}_3^{2,1}$  и  $\tilde{V}_3^{2,2}$  в потенциал общего вида и осуществляется нужное вращение.

Общее описание нулей даже 2-го порядка, не говоря уже о порядках более высоких, достаточно громоздко и затрудняется тем, что уравнения линий поля во многих случаях не удается проинтегрировать аналитически. Далее будут рассмотрены нулевые точки, задаваемые первыми двумя из потенциалов (3.59) по отдельности (описание 6-лучевых точек на нулевой прямой аналогично описанию  $X$ -точек с прямыми углами между асимптотами на таковой, а сами 6-лучевые точки были рассмотрены в разделе 3.4.1), вслед за ними — парные комбинации потенциалов, а затем — общий случай.

### 3.5.1. Коническая дикритическая нулевая точка

Точка (рис. 3.9), заданная потенциалом  $V_3^0$ , является собой аналог дикритической нулевой точки 1-го порядка. Поле в её окрестности аксиально-симметрично относительно оси  $Oz$ , однако в качестве асимптотических поверхностей выступает уже не веерная плоскость, а два веерных конуса:  $\Sigma_-$  (при  $z \geq 0$ ) и  $\Sigma_+$  (при  $z \leq 0$ ), также представляющие собой континuum реперов. Кроме них имеются два изолированных репера, направленные по оси  $Oz$  —  $\gamma_+$  при  $z \geq 0$  и  $\gamma_-$  при  $z \leq 0$ .

Вектор поля в декартовых координатах имеет вид:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xz \\ -yz \\ z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

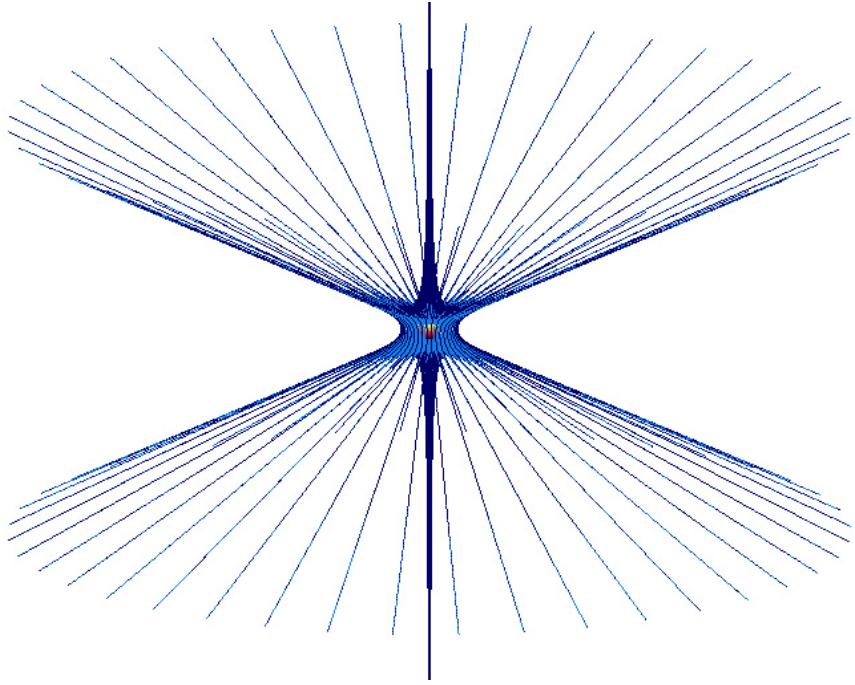


Рис. 3.9. Линии поля в окрестности конической дикритической нулевой точки.

Из-за наличия аксиальной симметрии это выражение удобно переписать в цилиндрических координатах. Записанное в них уравнение линий поля

$$-\frac{d\rho}{\rho z} = \frac{dz}{z^2 - \frac{\rho^2}{2}} \quad (3.65)$$

интегрируется в виде

$$z = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 + \frac{C}{\rho^2}}. \quad (3.66)$$

Выражение (3.66) переходит в уравнение двух веерных конусов при  $C = 0$ :

$$z = \pm \frac{\rho}{2}. \quad (3.67)$$

Выражения для обобщённых собственных значений и реперов в декартовой системе координат для данного случая приведены в табл. 3.7.

Таблица 3.7: Обобщённые собственные значения и реперы нулевой точки 2-го порядка разновидности “коническая дикритическая точка”.  $C > 0$ ,  $\tilde{C}_{1,2} > 0$ ,  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные числа.

Обобщённые собственные значения, $\lambda$	Реперы

$\lambda_2 = 1$	$\mathbf{R}_2 = C(0 \ 0 \ 1)^T$
$\lambda_1 = -1$	$\mathbf{R}_1 = C(0 \ 0 \ -1)^T$
$\lambda_{3,4,5,6} = \frac{1}{\sqrt{5}}$	Любая комбинация $\mathbf{R}_{3,4} = \tilde{C}_1 \begin{pmatrix} \pm 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{R}_{3,4} = \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ вида $\mathbf{R}_- = \begin{pmatrix} 2C_1 \\ 2C_2 \\ -\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \end{pmatrix}$
$\lambda_{7,8,9,10} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$	Любая комбинация $\mathbf{R}_{7,8} = \tilde{C}_1 \begin{pmatrix} \pm 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{R}_{3,4} = \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ вида $\mathbf{R}_+ = \begin{pmatrix} 2C_1 \\ 2C_2 \\ \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \end{pmatrix}$

### 3.5.2. Нулевая точка с 8-ю “полушипами”

Вектор поля, заданного потенциалом  $V_3^{1,2}$  (см. (3.59)):

$$\mathbf{B} = (yz \ xz \ xy)^T. \quad (3.68)$$

Уравнения линий поля

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy} \quad (3.69)$$

интегрируются в виде

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1, \\ x^2 - z^2 = C_2, \end{cases} \quad (3.70)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные константы. Точка данной разновидности обладает 14-ю реперами, из которых восемь ненулевые — одинаковые (рис. 3.10), с точностью до направления вектора поля, “полушипы”  $|x| = |y| = |z|$  (четыре  $\gamma_+$ -линии и столько же  $\gamma_-$ -линий), а шесть нулевых направлены вдоль осей декартовой системы координат.  $\Sigma$ -поверхности в данном случае отсутствуют. Выражения для обобщённых собственных значений и реперов приведены в табл. 3.8.

Таблица 3.8: Обобщённые собственные значения и реперы нулевой точки 2-го порядка с 8-ю “полушипами”. Константа  $C > 0$ .

Обобщённые собственные значения, $\lambda$	Реперы
$\lambda_i = \frac{1}{\sqrt{3}}, i = 1, 2, 3, 4$	$\mathbf{R}_1 = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_2 = C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_3 = C \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_4 = C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\lambda_i = -\frac{1}{\sqrt{3}}, i = 5, 6, 7, 8$	$\mathbf{R}_5 = C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_6 = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_7 = C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_8 = C \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

### 3.5.3. Нулевые точки, образуемые при парном комбинировании базисных функций

Рассмотрим парные линейные комбинации базисных функций (см. табл. 3.9). В этих случаях удаётся получить аналитические выражения для реперных прямых.

Таблица 3.9: Парные комбинации потенциалов различных родов в окрестностях нулевых точек 2-го порядка в пространстве.

Случай	Потенциал	Поле
I	$V_3^0 + KV_3^{1,2}$	$\begin{cases} -z(x - Ky) \\ z(Kx - y) \\ \frac{1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2) + Kxy \end{cases}$
II	$V_3^0 + \frac{K}{\sqrt{2}}(\tilde{V}_3^{2,1} + \tilde{V}_3^{2,2})$	$\begin{cases} -xz + K\left(\frac{x^2-y^2}{2} + xy\right) \\ -yz + K\left(-xy + \frac{x^2-y^2}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2) \end{cases}$
III	$V_3^{1,2} + K\tilde{V}_3^{2,1}$	$\begin{cases} yz + K\frac{x^2-y^2}{\sqrt{2}} \\ xz - K\sqrt{2}xy \\ xy \end{cases}$
IV	$V_3^{1,2} + K\tilde{V}_3^{2,2}$	$\begin{cases} yz + K\sqrt{2}xy \\ xz + K\frac{x^2-y^2}{\sqrt{2}} \\ xy \end{cases}$

I. Потенциал  $U_I = V_3^0 + KV_3^{1,2}$ , где  $K$  — числовой параметр. Нулевые реперы при  $K \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  лежат на прямых

$$\begin{cases} z = 0, \\ x = (K \pm \sqrt{K^2 - 1})y. \end{cases} \quad (3.71)$$

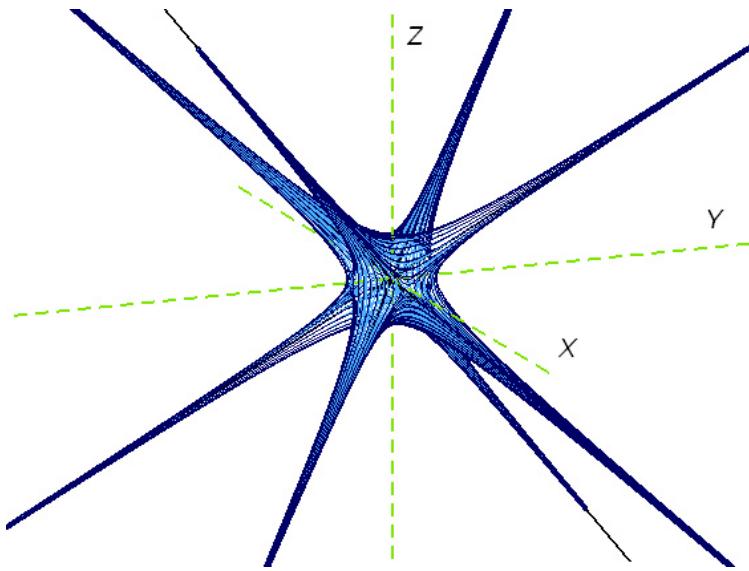


Рис. 3.10. Линии поля в окрестности нулевой точки с 8-ю “полушипами”.

Нормировка базисных функций в табл. 3.4 подобрана так, что при  $K = \pm 1$  две нулевые прямые сливаются в одну нулевую прямую 2-го порядка, а система линий поля вблизи нулевой точки с точностью до поворота и масштабного фактора совпадает с системой, задаваемой  $\tilde{V}_3^{2,j}$  ( $j = 1, 2$ ). При  $K \in (-1, 1)$  нулевые реперы отсутствуют.

Ненулевые реперы (помимо оси  $Oz$ ) при  $K \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$ :

$$x = y = \pm \sqrt{\frac{K-2}{K-1}} z, \quad x = -y = \pm \sqrt{\frac{K+2}{K+1}} z. \quad (3.72)$$

При  $K \in [-2, -1] \cup [1, 2]$  остаются лишь те из них, для которых подкоренные выражения имеют смысл.

II. Вместо потенциалов  $U_1 = V_3^0 + K \tilde{V}_3^{2,1}$  и  $U_2 = V_3^0 + K \tilde{V}_3^{2,2}$  рассмотрим отличающийся от них лишь поворотом системы координат потенциал

$$U_{II} = V_3^0 + \frac{K}{\sqrt{2}} (\tilde{V}_3^{2,1} + \tilde{V}_3^{2,2}) = V_3^0 + K (V_3^{2,1} + V_3^{2,2}). \quad (3.73)$$

Ненулевые реперы (помимо оси  $Oz$ ) при  $K \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ :

$$\begin{cases} x = -y = \frac{K \pm \sqrt{K^2 + 8}}{2} z, \\ x = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 + 8}}{2} \frac{\sqrt{3} + 1}{2} z, \\ y = (2 - \sqrt{3})x, \\ x = \frac{K \pm \sqrt{K^2 + 8}}{2} \frac{\sqrt{3} - 1}{2} z, \\ y = (2 + \sqrt{3})x. \end{cases} \quad (3.74)$$

Нормировка базисных функций в табл. 3.4 подобрана так, что при  $K = \pm 1$  шесть из перечисленных реперов обращаются в нулевые (при остальных значениях параметра  $K$  нулевых реперов нет), а система линий поля вблизи нулевой точки с точностью до поворота совпадает с системой, задаваемой  $V_3^{1,j}$  ( $j = 1, 2$ ).

III. Потенциал  $U_{III} = V_3^{1,2} + K\tilde{V}_3^{2,1}$  (при  $K \neq 0$ ). Нулевые реперы: ось  $Oz$ ,

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{K}z. \end{cases}$$

Ненулевые реперы (помимо оси  $Ox$ ): при  $K < \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{K^2 + 2}}{\sqrt{K^2 + 2} - 2K}} y, \\ y = \frac{-K + \sqrt{K^2 + 2}}{\sqrt{2}} z, \end{cases} \quad (3.75)$$

и при  $K > -\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{K^2 + 2}}{\sqrt{K^2 + 2} + 2K}} y, \\ y = -\frac{K + \sqrt{K^2 + 2}}{\sqrt{2}} z. \end{cases} \quad (3.76)$$

IV. Выражения для реперов при потенциале  $U_{IV} = V_3^{1,2} + K\tilde{V}_3^{2,2}$  можно получить из выражений для  $U_{III}$ , одновременно произведя замену  $x \leftrightarrow y$  и  $K \leftrightarrow -K$ .

Сведения о числе реперов для рассмотренных случаев приведены в табл. 3.10.

В случае парной комбинации I уравнения линий поля удаётся частично проинтегрировать. Так, уравнение их проекций на плоскость  $xOy$

$$\frac{dx}{Ky - x} = \frac{dy}{Kx - y} \quad (3.77)$$

имеет две системы решений:

$$\begin{aligned} |y + x|^{1-K} &= C |y - x|^{1+K}, \\ |y - x|^{1-K} &= C |y + x|^{1+K}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Как уже говорилось, линии поля, которые лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, содержащих ось  $Oz$  и пересекающих плоскость  $xOy$  по прямым  $y = x$  и  $y = -x$  соответственно, не покидают эти плоскости (в первой  $B_x = B_y$ , во второй  $B_x = -B_y$ ), а их уравнения также оказываются интегрируемыми. При этом для первой из этих инвариантных плоскостей

$$\begin{aligned} \left| z^2 - \frac{K-1}{2(K-2)} s^2 \right|^{K-1} &= C s^2 \quad \text{при } K \neq 1, K \neq 2, \\ s &= C \quad \text{при } K = 1, \\ s^2 &= C \exp \left\{ \frac{2z^2}{s^2} \right\} \quad \text{при } K = 2, \end{aligned} \quad (3.79)$$

а для второй

$$\begin{aligned} s^2 \left| z^2 - \frac{K+1}{2(K+2)} s^2 \right|^{K+1} &= C \quad \text{при } K \neq -1, K \neq -2, \\ s &= C \quad \text{при } K = -1, \\ s^2 &= C \exp \left\{ \frac{2z^2}{s^2} \right\} \quad \text{при } K = -2, \end{aligned} \quad (3.80)$$

где  $s = \sqrt{2}x$  — расстояние до оси  $Oz$  в соответствующей плоскости (с учётом знака),  $C$  — константа.

Поскольку ситуации, возникающие при значениях параметра  $K$  и  $-K$  идентичны с точностью до поворота вокруг оси  $Oz$  на угол  $\frac{\pi}{2}$ , достаточно

Таблица 3.10

Количество реперов.

Параметр	Число реперов	
	ненулевых	нулевых
Случай I		
$K = 0$	$\infty$	—
$0 <  K  < 1$	10	—
$ K  = 1$	6	2
$1 <  K  \leq 2$	6	4
$ K  > 2$	10	4
Случай II		
$K = 0$	$\infty$	—
$0 <  K  < 1$	14	—
$ K  = 1$	8	6
$ K  > 1$	14	—
Случай III, IV		
$K = 0$	8	6
$0 <  K  < \sqrt{\frac{2}{3}}$	10	4
$ K  \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$	6	4

рассмотреть топологию и геометрию линий поля в окрестности нулевой точки при  $K \geq 0$ .

В случае  $0 \leq K < 1$  в полупространствах  $z > 0$  и  $z < 0$  имеются две веерные поверхности конической формы и шип, идущий вдоль оси  $Oz$ . Совместно они образуют “скелет” нулевой точки. При  $K > 0$  веерные поверхности уже не аксиально-симметричны, а деформированы, а составляющие их линии поля в проекции на плоскость  $xOy$  образуют четыре пучка обобщённых парабол, осями которых являются четыре ненулевых репера. Ещё четыре ненулевых репера указывают в просветы между пучками (рис. 3.11). При  $K = 1$ , согласно выбранной нормировке, веерные конусы разрываются и нуль превращается в 6-лучевую точку на нулевой прямой (рис. 3.12а). Эта прямая образуется в результате слияния реперов “просветов”. Однако в отличие от случаев, задаваемых 3-й и 4-й базисными функциями из списка (3.59), нулевая прямая лежит в плоскости  $xOy$  (прямая  $y = -x$ ), а не совпадает с осью  $Oz$ .

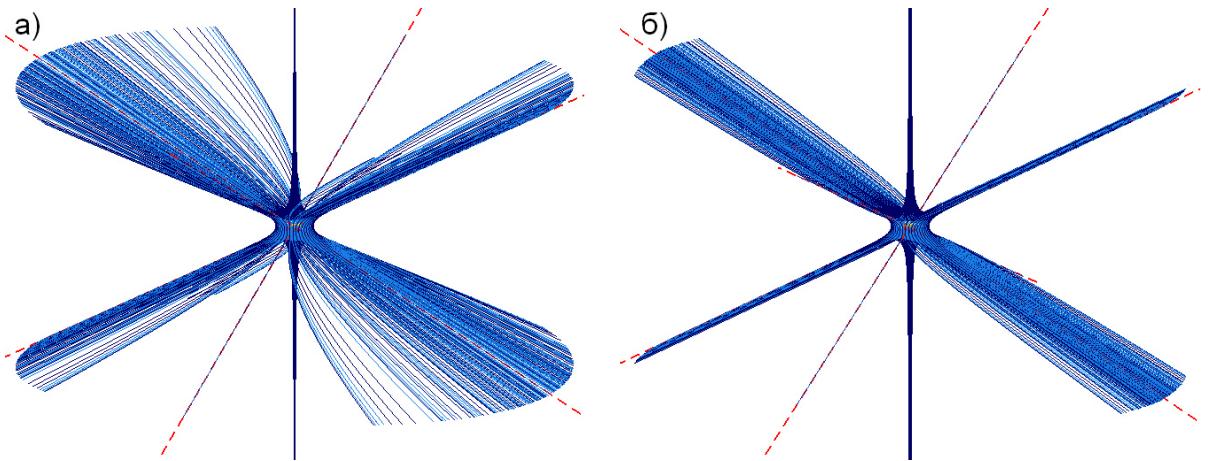


Рис. 3.11. Линии поля в окрестности нулевой точки в случае комбинации потенциалов  $U_I = V_3^0 + KV_3^{1,2}$ : а)  $K = 0.25$ , б)  $K = 0.5$ . Красными штриховыми линиями показаны ненулевые реперы, зелёными — нулевые.

При  $K > 1$  возникшая в плоскости  $xOy$  нулевая линия распадается на две (рис. 3.12б), угол между которыми увеличивается с ростом параметра  $K$  и в пределе стремится к  $\frac{\pi}{2}$ . Что касается оси  $Oz$ , то она при переходе значения параметра через единицу перестаёт быть шипом. Поведение линий поля в её окрестности изменяется — в проекции на плоскость  $xOy$  они

образуют уже не “узел” (как у шипов), а “седло”. Помимо составляющих ось  $Oz$   $\gamma$ -линий при  $1 < K < 2$  в состав “скелета” нулевой точки входят четыре репера-“полушипа”, прежде, при  $0 < K < 1$ , бывшие осями пучков линий поля.

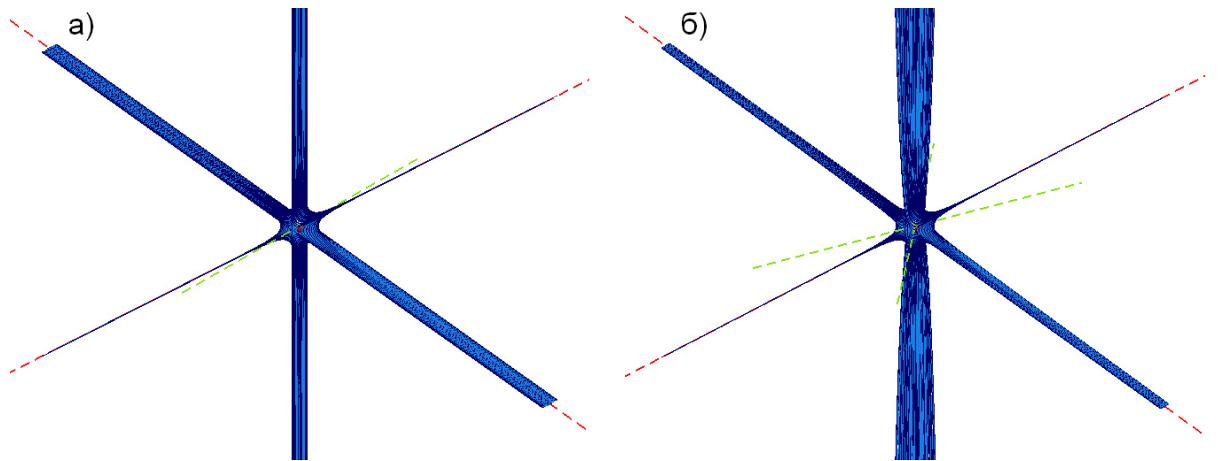


Рис. 3.12. Линии поля в окрестности нулевой точки в случае комбинации потенциалов  $U_I = V_3^0 + KV_3^{1,2}$ : а)  $K = 1.0$ , б)  $K = 1.3$ .

Второе изменение топологической структуры имеет место при значении параметра  $K = 2$  (рис. 3.13а). При  $K > 2$  от каждой из полуосей оси  $Oz$  отделяются по два ненулевых репера (рис. 3.13б). Два сектора плоскости, проходящей через ось  $Oz$  и прямую  $y = -x$ , которые заключены в тех из углов между этими новыми реперами, что содержат полуоси оси  $Oz$ , являются веерными поверхностями. Эти углы с ростом параметра  $K$  расширяются и в пределе также стремятся к  $\frac{\pi}{2}$  (рис. 3.14). Таким образом, при  $K > 2$  “скелет” нулевой точки состоит из тех четырёх “полушипов”, что имелись и при  $1 < K < 2$ , а также двух веерных поверхностей — плоских секторов. Каждый из этих секторов содержит по три репера. Два из них — образующие его границу — при  $K > 3$  превращаются в “полушипы” (при  $2 < K < 3$  (рис. 3.13б) линии поля в проекции на плоскость, им перпендикулярную, образуют “седло”, а при  $K > 3$  (рис. 3.14) — “узел”). Заметим, что эти “полушипы”, хотя и представляют собой асимптоты окрестных линий поля, не изолированы (и, следовательно, согласно данному ранее определению не являются  $\gamma$ -линиями) в том смысле, что сколь угодно близко от них имеются линии поля с концом в нуле.

При этом, однако, подходя к нулю, отличные от “полушипов” линии поля секторов прижимаются к оси  $Oz$ .

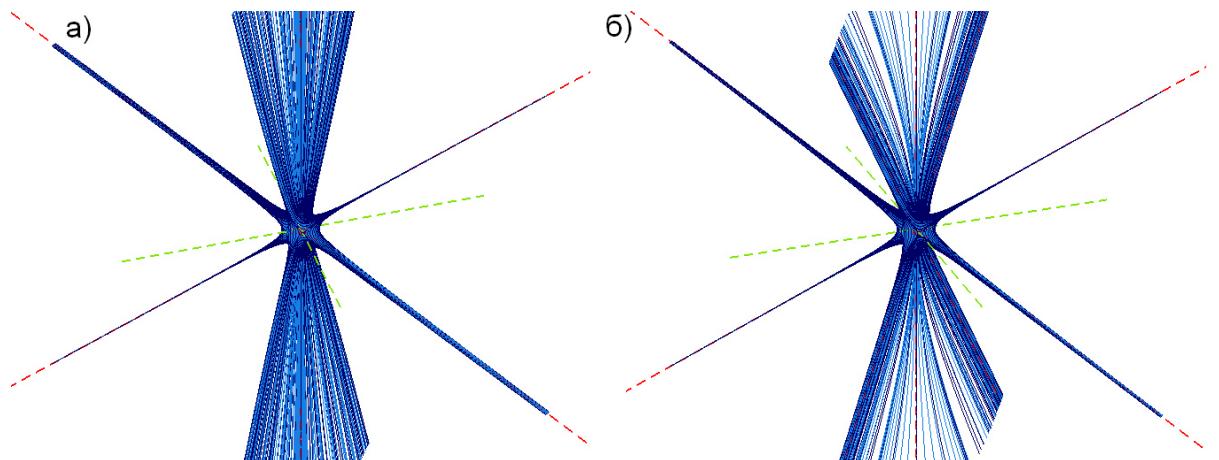


Рис. 3.13. Линии поля в окрестности нулевой точки в случае комбинации потенциалов  $U_I = V_3^0 + KV_3^{1,2}$ : а)  $K = 2.0$ , б)  $K = 2.8$ .

Рассмотрим теперь не комбинацию  $U_I = V_3^0 + KV_3^{1,2}$ , а комбинацию  $\tilde{U}_I = V_3^0 + \tilde{K}V_3^{1,2}$ , где  $\tilde{K} = \frac{1}{K}$ . При  $\tilde{K} \rightarrow 0$ , что соответствует  $K \rightarrow \infty$ , поле на оси  $Oz$  постепенно ослабевает (рис. 3.14). При обращении параметра  $\tilde{K}$  в нуль происходит ещё одно изменение в топологии — веерные плоские сектора перестают существовать, ось  $Oz$  становится нулевой линией, и в пределе возникает нулевая точка с восемью “полушипами”, уже описанная ранее.

Таким образом, уже рассмотрение частных случаев показывает, что нули 2-го порядка демонстрируют большее разнообразие геометрии линий поля в их окрестностях, чем нули 1-го порядка. Если “скелет” (совокупность линий поля с концом в нуле) нулевой точки 1-го порядка в общем случае состоит из шипа и веерной плоскости, то во 2-м порядке возможны нулевые точки, в которые приходят лишь изолированные линии поля,  $\Sigma$ -поверхности в форме конуса или сектора плоскости (рис. 3.15),  $\gamma$ -линии не обязательно являются “полушипами”, и наоборот.

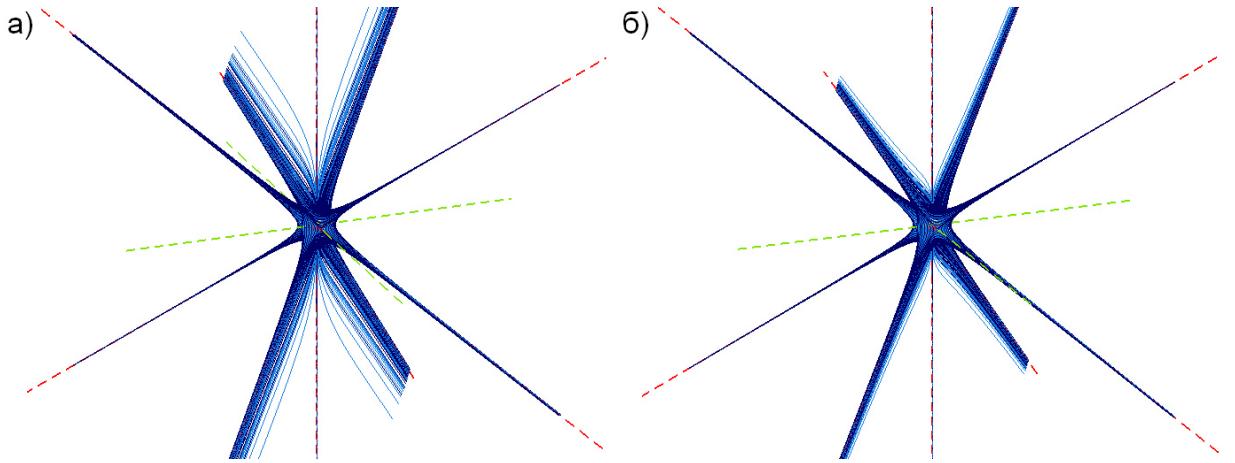


Рис. 3.14. Линии поля в окрестности нулевой точки в случае комбинации потенциалов  $U_I = V_3^0 + KV_3^{1,2}$ : а)  $K = 4.0$ , б)  $K = 5.5$ .

### 3.5.4. Эквивалентные записи потенциалов вблизи нулевых точек

У нуля 1-го порядка число реперов в неосесимметричном случае равно шести [130], так что даже с учётом произведённых упрощений возможно несколько эквивалентных записей одного и того же потенциала. Аналогичные ситуации возникают и в случае нулей 2-го порядка. Эквивалентность здесь понимается как идентичность систем линий поля с точностью до поворота в пространстве.

Поясним это подробнее на примере одной из незадействованных присоединённых функций Лежандра с  $n = 3, m = 1$  (рис. 3.16), задающей нуль 2-го порядка:

$$\begin{aligned} W = r^3 P_3^{(1)}(\cos \theta) \cdot \cos \varphi &= \frac{3}{2} r^3 \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \cdot \cos \varphi = \\ &= 6xz^2 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{2}xy^2. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Можно показать, что в данном случае имеется четыре нулевых репера, а именно лучи, составляющие прямые

$$x = 0, \quad y = \pm 2z, \quad (3.82)$$

и шесть ненулевых — полуоси оси  $Ox$  и лучи прямых

$$y = 0, \quad x = \pm \frac{2}{\sqrt{11}}z. \quad (3.83)$$

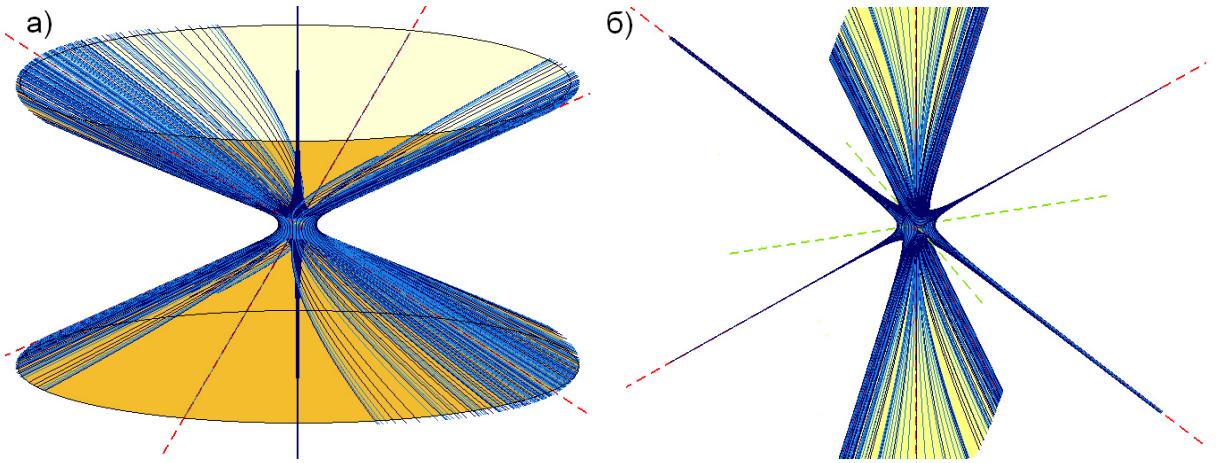


Рис. 3.15.  $\Sigma$ -поверхности вблизи нулевой точки в случае комбинации потенциалов  $U_I = V_3^0 + KV_3^{1,2}$ : а)  $K = 0.25$ , поверхности имеют форму двух конусов, б)  $K = 2.8$ , поверхности представляют собой два сектора плоскости.

Направляя ось  $Oz'$  новой системы координат вдоль положительного направления оси  $Ox$  или же вдоль лучей с  $z > 0$  прямых, заданных уравнениями (3.82) и (3.83) при выборе знака “+”, можно получить, используя (3.34), соответственно следующие эквивалентные потенциалы:

$$W_1 = -\frac{9}{2} \left( V_3^0 - \frac{5}{3} V_3^{1,2} \right), \quad (3.84)$$

$$W_2 = -6 \left( V_3^{1,2} + \frac{3}{2} V_3^{2,1} \right), \quad (3.85)$$

$$W_3 = \frac{24}{\sqrt{15}} \left[ V_3^0 - \frac{3}{4} V_3^{1,2} - \frac{\sqrt{11}}{8\sqrt{2}} (V_3^{2,1} - V_3^{2,2}) \right]. \quad (3.86)$$

Рассмотрим (3.84). Уравнения линий поля частично интегрируются: в проекции на плоскость  $xOy$  при этом  $|y \pm x|(y \mp x)^4 = C$ ,  $C$  — константа. В плоскостях  $x = y$  и  $x = -y$  линии поля плоские, а их уравнения также можно проинтегрировать. Вернёмся к исходной записи (3.81). Ось  $Ox$  является  $\gamma$ -линией, но не шипом, а прямые (3.83) — шипы, что следует из рассмотрения проекций на плоскость  $xOy$  линий, задаваемых  $W_3$ .  $\Sigma$ -поверхностей в данном случае нет.

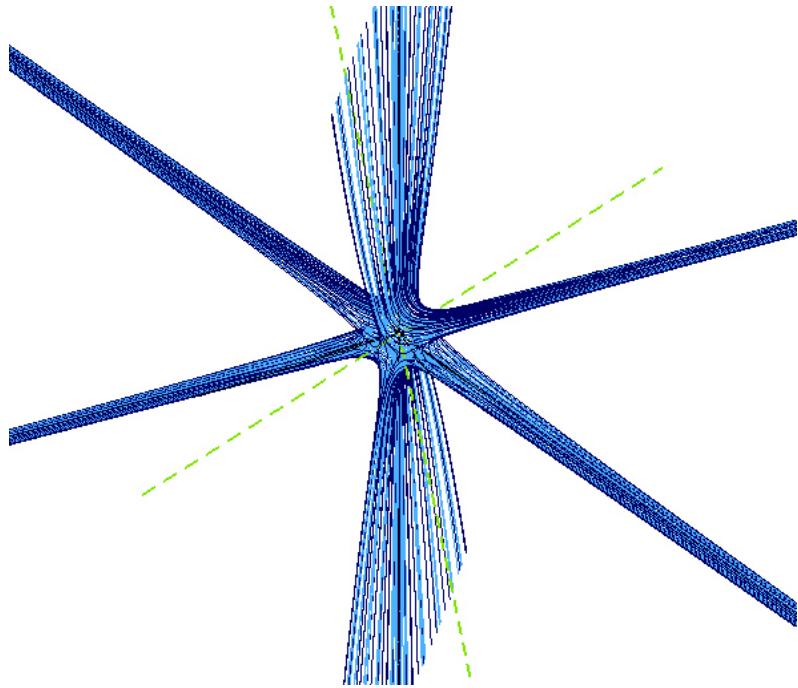


Рис. 3.16. Линии поля вблизи нулевой точки, заданной потенциалом  $W$  (3.81).

### 3.5.5. Нули 2-го порядка общего вида

В общем случае, если коэффициент при  $V_3^0$  не обращается в нуль, задача сводится к рассмотрению линий поля, заданных вблизи нулевой точки потенциалом

$$U = V_3^0 + KV_3^{1,2} + F\tilde{V}_3^{2,1} + G\tilde{V}_3^{2,2}, \quad (3.87)$$

где  $K, F$  и  $G$  — числовые параметры. Уравнение (3.56) при этом приобретает вид

$$\begin{pmatrix} -xz + Kyz + F\frac{x^2-y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}Gxy \\ -yz + Kxz - \sqrt{2}Fxy + G\frac{x^2-y^2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2) + Kxy \end{pmatrix} = \lambda \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Из условия  $[\mathbf{B}, \mathbf{R}] = 0$  найдём, что помимо оси  $Oz$  реперными будут являться прямые, на которых

$$\begin{cases} y = ux, \\ z = vx, \end{cases} \quad (3.89)$$

где значения  $u$  представляют собой корни полиномиального уравнения

$$\begin{aligned}
f(u) = & (2F^2 + KFG - K^2)u^6 + \dots \\
& + (KF^2 - 3KG^2 - 12FG + 2K^3)u^5 + \dots \\
& + (18G^2 - 12F^2 - 5KFG + K^2)u^4 + \dots \\
& + 2(20FG - KF^2 - KG^2 - 2K^3)u^3 + \dots \\
& + (18F^2 - 12G^2 - 5KFG + K^2)u^2 + \dots \\
& + (KG^2 - 3KF^2 - 12FG + 2K^3)u + \dots \\
& + 2G^2 + KFG - K^2 = 0, \quad (3.90)
\end{aligned}$$

а значения  $v$  вычисляются соответственно по формуле

$$v = \frac{Fu(3 - u^2) + G(3u^2 - 1)}{\sqrt{2}K(1 - u^2)}. \quad (3.91)$$

Таким образом, система (3.89) может давать в качестве решений в совокупности с реперами оси  $Oz$  до 14 реперов (ср. с табл. 3.10). Исключительными являются наборы значений параметров  $KFG > 0$ ,  $|K| = 2$ ,  $|F| = |G| = 1$ , при которых функция  $f(u)$  в (3.90) тождественно обращается в нуль. Система линий поля вблизи нулевой точки при этом с точностью до поворота и масштабного фактора совпадает с системой, задаваемой  $V_3^0$ .

Если коэффициент при  $V_3^0$  равен нулю, то запишем потенциал в приведённой форме как

$$U = V_3^{1,2} + F\tilde{V}_3^{2,1} + G\tilde{V}_3^{2,2}. \quad (3.92)$$

Реперные прямые находятся, как и в предыдущем случае, по формулам (3.89), где  $u$  — решения уравнения

$$\begin{aligned}
g(u) = & FGu^6 + (F^2 - 3G^2 + 2)u^5 - \dots \\
& - 5FGu^4 - 2(G^2 + F^2 + 2)u^3 - \dots \\
& - 5FGu^2 + (G^2 - 3F^2 + 2)u + FG = 0, \quad (3.93)
\end{aligned}$$

$$v = \frac{Fu(3 - u^2) + G(3u^2 - 1)}{\sqrt{2}(1 - u^2)}. \quad (3.94)$$

Решения уравнений (3.90) и (3.93) могут быть найдены численными методами [98].

## 3.6. Бифуркации нулевых точек потенциального магнитного поля

Невырожденные или аксиально-симметричные нулевые точки 1-го порядка, т. е. такие точки, поле в окрестностях которых всюду линейно, могут сливаться, образуя  $D$ -нуль. Также возможно образование нулевой точки 2-го порядка. И обратно, возможно возникновение вырожденной нулевой точки и последующий её распад на невырожденные. Такого рода процессы [113] ведут к изменению топологии магнитного поля, что играет важнейшую роль в происходящих на Солнце явлениях.

В случае  $D$ -нуля вдоль прямой, соответствующей нулевому собственному значению матрицы вторых производных потенциала, в общем случае следует учитывать поле 2-го порядка, однако в некоторых частных случаях, например, при рассмотрении модели топологического триггера, из-за симметрии задачи необходим учёт следующего, 3-го порядка.

### 3.6.1. Бифуркации $D$ -нуля или нуля 2-го порядка с распадом на две нулевые точки

Потенциал наиболее общего вида, в котором учтены 2-й и 3-й порядки:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{23} = & \frac{x^2}{2} + a \frac{y^2}{2} - (a+1) \frac{z^2}{2} + \\ & + K_0 V_3^0 + K_1 V_3^{1,1} + K_2 V_3^{1,2} + K_3 V_3^{2,1} + K_4 V_3^{2,2} + K_5 V_3^{(1),1} + K_6 V_3^{(1),2}, \end{aligned} \quad (3.95)$$

где как  $V_3^{(1),j}$ ,  $j = 1, 2$ , обозначены перенормированные (с множителем  $\frac{1}{6}$ ) шаровые функции с  $m = 1$ :

$$\begin{aligned} V_3^{(1),1} = & \frac{1}{6} r^3 P_3^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi = \frac{1}{4} r^3 \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \cos \varphi = \\ & = x z^2 - \frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{4} x y^2, \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} V_3^{(1),2} = & \frac{1}{6} r^3 P_3^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi = \frac{1}{4} r^3 \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \varphi = \\ & = y z^2 - \frac{1}{4} x^2 y - \frac{1}{4} y^3. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Компоненты вектора магнитного поля на оси  $Oz$ :

$$\begin{cases} B_x = K_5 z^2, \\ B_y = K_6 z^2, \\ B_z = -(a+1)z + K_0 z^2. \end{cases} \quad (3.98)$$

В варианте, когда на оси  $Oz$  при  $z = \epsilon$  находится второй нуль магнитного поля, коэффициенты  $K_5 = K_6 = 0$ , параметр  $\epsilon = \frac{a+1}{K_0}$ , значения остальных коэффициентов произвольны. Потенциал общего вида (3.95), описывающий два нуля, расположенных на оси  $Oz$ , которые сливаются при  $\epsilon \rightarrow 0$ , можно представить в видоизменённой форме:

$$U = \frac{\epsilon + C}{2}x^2 + \frac{a\epsilon - C}{2}y^2 - \epsilon(a+1)\frac{z^2}{2} + (a+1)V_3^0 + K_1 V_3^{1,1} + K_2 V_3^{1,2} + K_3 V_3^{2,1} + K_4 V_3^{2,2}. \quad (3.99)$$

При стремлении параметра  $\epsilon$  к нулю в 1-м порядке образуется  $D$ -нуль с нулевой прямой по оси  $Oz$  и асимптотами вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  (если  $C \neq 0$ , при этом достаточно рассмотреть  $C = 1$ )

$$U|_{\epsilon \rightarrow 0} = C \frac{x^2 - y^2}{2} + \dots \quad (3.100)$$

или нуль 2-го порядка (если  $C = 0$ ). Можно также рассматривать процесс и в обратном направлении — как распад вырожденного нуля. Магнитное поле при этом

$$\begin{cases} B_x = \epsilon x + Cx - (a+1-K_1)xz + K_2yz + K_3 \frac{x^2-y^2}{2} + K_4xy, \\ B_y = a\epsilon y - Cy - (a+1+K_1)yz + K_2xz - K_3xy + K_4 \frac{x^2-y^2}{2}, \\ B_z = -\epsilon(a+1)z + \frac{a+1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2) + K_1 \frac{x^2-y^2}{2} + K_2xy. \end{cases} \quad (3.101)$$

Положим

$$z = z' + \epsilon \quad (3.102)$$

и разложим в 1-м порядке поле в окрестности каждого из нулей,  $N_1$  с координатами  $(0, 0, 0)$  и  $N_2$  с координатами  $(0, 0, \epsilon)$ :

$$\mathbf{B}_{N_1} \simeq \begin{cases} (\epsilon + C)x, \\ (a\epsilon - C)y, \\ -\epsilon(a+1)z, \end{cases} \quad \mathbf{B}_{N_2} \simeq \begin{cases} [(K_1 - a)\epsilon + C]x + K_2\epsilon y, \\ -[(K_1 + 1)\epsilon + C]y + K_2\epsilon x, \\ \epsilon(a+1)z'. \end{cases} \quad (3.103)$$

Для получения графического представления удобнее записать потенциал в симметризованном относительно начала координат виде (см. табл. 3.3 и 3.4):

$$U_{sym} = \frac{a+1}{2}\epsilon^2 z + \left( C - \epsilon \frac{a-1}{2} \right) V_2^{1,1} - \frac{a+1}{2} V_3^0 + K_1 V_3^{1,1} + K_2 V_3^{1,2} + K_3 V_3^{2,1} + K_4 V_3^{2,2}. \quad (3.104)$$

Поле:

$$\begin{cases} B_x = \left( C - \epsilon \frac{a-1}{2} \right) x + \left( \frac{a+1}{2} + K_1 \right) xz + K_2 yz + K_3 \frac{x^2 - y^2}{2} + K_4 xy, \\ B_y = -\left( C - \epsilon \frac{a-1}{2} \right) y + \left( \frac{a+1}{2} - K_1 \right) yz + K_2 xz - K_3 xy + K_4 \frac{x^2 - y^2}{2}, \\ B_z = \frac{a+1}{2} \epsilon^2 + \frac{a+1}{4} (x^2 + y^2 - 2z^2) + K_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + K_2 xy. \end{cases} \quad (3.105)$$

Поле в низшем порядке в окрестности каждого из нулей,  $N_1$  с координатами  $(0, 0, -\epsilon)$  и  $N_2$  с координатами  $(0, 0, \epsilon)$ , будет иметь вид

$$\mathbf{B}_{N_1} \simeq \begin{cases} Cx - \epsilon [(a + K_1)x + K_2y], \\ -Cy - \epsilon [(1 - K_1)y + K_2x], \\ \epsilon(a + 1)z', \end{cases} \quad (3.106)$$

$$\mathbf{B}_{N_2} \simeq \begin{cases} Cx + \epsilon [(1 + K_1)x + K_2y], \\ -Cy + \epsilon [(a - K_1)y + K_2x], \\ -\epsilon(a + 1)z'', \end{cases}$$

где обозначено  $z' = z + \epsilon$ ,  $z'' = z - \epsilon$ .

Если  $C \neq 0$ , то при достаточно малых  $\epsilon$  будет реализовываться соединение “веер–веер”, а взаимное направление шипов двух нулевых точек будет близко к ортогональному. При этом один из нулей будет  $A$ -типа, а другой —  $B$ -типа. Если же  $C = 0$ , то возможны различные варианты [113]. Примеры при  $K_i = 0$ , где  $i = 2, 3, 4$  (иллюстрации даны на рис. 3.17):

a)  $a = -2$ ,  $K_1 = 0$ , соединение “веер–веер”:

$$\mathbf{B}_{N_1} \simeq \epsilon \begin{cases} 2x, \\ -y, \\ -z', \end{cases} \quad \mathbf{B}_{N_2} \simeq \epsilon \begin{cases} x, \\ -2y, \\ z''. \end{cases} \quad (3.107)$$

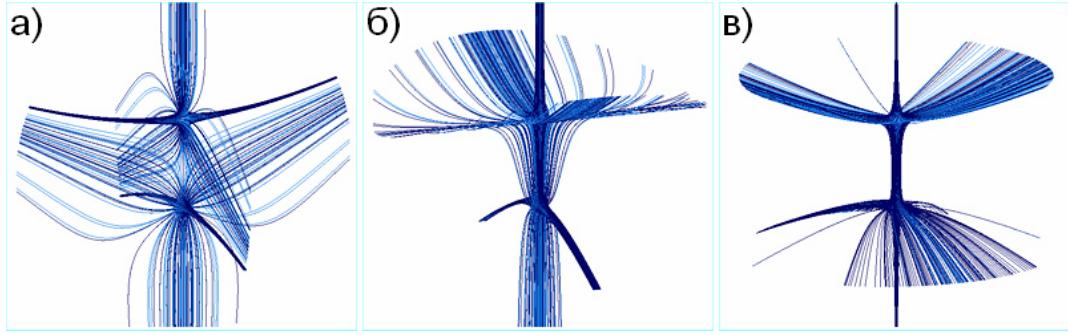


Рис. 3.17. Примеры соединений “веер–веер”, “шип–веер” и “шип–шип” при  $K_i = 0$  ( $i = 2, 3, 4$ ),  $\epsilon = 10$  и следующих значениях параметров в выражении (3.104): а)  $a = -2$ ,  $K_1 = 0$ ; б)  $a = 3$ ,  $K_1 = 2$ ; в)  $a = 1.7$ ,  $K_1 = 0$ .

б)  $a = 3$ ,  $K_1 = 2$ , соединение “шип–веер”:

$$\mathbf{B}_{N_1} \simeq \epsilon \begin{cases} -5x, \\ y, \\ 4z', \end{cases} \quad \mathbf{B}_{N_2} \simeq \epsilon \begin{cases} 3x, \\ y, \\ -4z''. \end{cases} \quad (3.108)$$

в)  $a = 1.7$ ,  $K_1 = 0$ , соединение “шип–шип”:

$$\mathbf{B}_{N_1} \simeq \epsilon \begin{cases} -1.7x, \\ -y, \\ 2.7z', \end{cases} \quad \mathbf{B}_{N_2} \simeq \epsilon \begin{cases} x, \\ 1.7y, \\ -2.7z''. \end{cases} \quad (3.109)$$

Заметим, что, вообще говоря, при соединении “шип–шип” нули могут одновременно соединяться и веерными поверхностями.

### 3.6.2. Бифуркации нулевой точки в конфигурации топологического триггера

Понятие “топологический триггер” ввели Горбачёв и др. [12] в связи с расчётами потенциального поля, в которых демонстрировалось появление нулевой точки на сепараторе (линии пересечения двух сепаратрис) в короне. В рамках простейшей модели было показано, что медленные движения

фотосферных источников поля могут приводить к быстрому движению нулевой точки вдоль сепаратора [12]–[15]. Движущаяся нулевая точка возникает при распаде лежащего на фотосфере  $D$ -нуля. Распад происходит на три нулевые точки, но из них в модели учитываются только те две, что находятся на фотосфере и над ней.

В рассматриваемой конфигурации все создающие поле “заряды” расположены на фотосфере. На ней же лежит и претерпевающий распад  $D$ -нуль. Отсюда следует, что поле симметрично относительно отражений в плоскости  $xOy$ . Симметрия относительно отражений в плоскости  $xOy$  означает, что если

$$z \rightarrow -z, \quad (3.110)$$

то

$$B_x \rightarrow B_x, \quad B_y \rightarrow B_y, \quad B_z \rightarrow -B_z. \quad (3.111)$$

Этим условиям удовлетворяют:

1. во 2-м порядке: все базисные функции из табл. 3.3 (но не шаровые функции 2-го порядка с  $m = 1$ );
2. в 3-м порядке: функции  $V_3^{2,1}$  и  $V_3^{2,2}$  из табл. 3.4 и шаровые функции с  $m = 1$ ;
3. в 4-м порядке: функции  $V_3^0$ ,  $V_3^{1,1}$ ,  $V_3^{1,2}$ ,  $V_3^{3,1}$ ,  $V_3^{3,2}$  из табл. В.2 Приложения В.2.

С учётом симметрии потенциал общего вида в рассматриваемой конфигурации записывается в форме:

$$\begin{aligned} U_{trig} = & (C + \epsilon) \frac{x^2}{2} - (C - \epsilon q) \frac{y^2}{2} - \epsilon(q+1) \frac{z^2}{2} + \\ & + K_3 V_3^{2,1} + K_4 V_3^{2,2} + K_5 V_3^{(1),1} + K_6 V_3^{(1),2} + \\ & + H_0 V_4^0 + H_1 V_4^{1,1} + H_2 V_4^{1,2} + H_5 V_4^{3,1} + H_6 V_4^{3,2}, \quad (3.112) \end{aligned}$$

где  $\epsilon, C, q, K_i$  ( $i = 3-6$ ),  $H_j$  ( $j = 0, 1, 2, 5, 6$ ) — коэффициенты. Выражения для компонент вектора поля:

$$\begin{aligned} B_x = & (C + \epsilon)x + K_3 \frac{x^2 - y^2}{2} + K_4xy + K_5 \left( z^2 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 \right) - \frac{1}{2}K_6xy + \\ & + H_0 \frac{x(x^2 + y^2) - 4xz^2}{8} + H_1 \frac{3xz^2 - x^3}{6} + H_2 \frac{6yz^2 - 3x^2y - y^3}{12} + \\ & + H_5 \frac{x^3 - 3xy^2}{6} + H_6 \frac{3x^2y - y^3}{6}, \quad (3.113) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_y = & -(C - \epsilon q)y - K_3xy + K_4 \frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{1}{2}K_5xy + K_6 \left( z^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}y^2 \right) + \\ & + H_0 \frac{y(x^2 + y^2) - 4yz^2}{8} + H_1 \frac{y^3 - 3yz^2}{6} + H_2 \frac{6xz^2 - 3xy^2 - x^3}{12} + \\ & + H_5 \frac{y^3 - 3x^2y}{6} + H_6 \frac{x^3 - 3xy^2}{6}, \quad (3.114) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_z = & -\epsilon(q + 1)z + 2K_5xz + 2K_6yz + \\ & + H_0 \frac{2z^3 - 3z(x^2 + y^2)}{6} + H_1z \frac{x^2 - y^2}{2} + H_2xyz. \quad (3.115) \end{aligned}$$

Будем считать, что  $x^2 + y^2 \ll z^2$ , что справедливо для описанной конфигурации. Тогда выражения для компонент вектора поля можно упростить:

$$\begin{cases} B_x \simeq (C + \epsilon)x + K_5z^2 + \frac{z^2}{2} [H_2y - (H_0 - H_1)x], \\ B_y \simeq -(C - \epsilon q)y + K_6z^2 + \frac{z^2}{2} [H_2x - (H_0 + H_1)y], \\ B_z \simeq -\epsilon(q + 1)z + 2K_5xz + 2K_6yz + H_0 \frac{z^3}{3}. \end{cases} \quad (3.116)$$

Если, кроме того, с учётом произведённого масштабирования  $x^2 + y^2 \ll 1$ , то можно сделать ещё одно упрощение и написать компоненты вектора поля в следующем виде:

$$\begin{cases} B_x \simeq (C + \epsilon)x + K_5z^2, \\ B_y \simeq -(C - \epsilon q)y + K_6z^2, \\ B_z \simeq -\epsilon(q + 1)z + 2K_5xz + 2K_6yz + H_0 \frac{z^3}{3}, \end{cases} \quad (3.117)$$

откуда из условия  $\mathbf{B} = 0$  находим, что

$$x = -\frac{K_5 z^2}{C + \epsilon}, \quad y = \frac{K_6 z^2}{C - \epsilon q}, \quad (3.118)$$

и получаем следующее уравнение на  $z$ :

$$z^3 \left( \frac{H_0}{3} - \frac{2K_5^2}{C + \epsilon} + \frac{2K_6^2}{C - \epsilon q} \right) = \epsilon(q + 1)z. \quad (3.119)$$

Его решения:

$$\begin{cases} z_1 = 0, \\ z_{2,3} = \pm \sqrt{\epsilon \frac{q+1}{\frac{H_0}{3} - 2 \left( \frac{K_5^2}{C+\epsilon} - \frac{K_6^2}{C-\epsilon q} \right)}}. \end{cases} \quad (3.120)$$

Выражения (3.118) и (3.120) и дают координаты искомых точек.

### 3.7. Заключение к Главе 3

Потенциал произвольной нулевой точки 2-го порядка может быть приведён к виду (3.87), (3.92), случаям I–IV или базисным функциям поворотом, масштабированием и, если необходимо, изменением знака перед всем выражением.

У наиболее типичной (невырожденной) нулевой точки 1-го порядка имеется шесть ненулевых реперов, составляющих три взаимно перпендикулярные прямые [17]. У наиболее типичной точки 2-го порядка имеется до 14 реперов, которые являются ненулевыми и могут иметь различное взаимное расположение в пространстве. Наличие нулевых прямых (возможны одна у нуля 1-го порядка и до трёх у 2-го) означает вырождение. В этих случаях возникает необходимость учёта вдоль соответствующих прямых членов разложения (3.1) более высокого порядка. Возможно также чисто геометрическое вырождение (как при возникновении аксиальной симметрии). Иерархию вырожденности нулевых точек можно строить с учётом значимости лишь нелинейности более высокого порядка, либо принимая к тому же во внимание появление дополнительных симметрий.

В целом последовательность действий при изучении поведения линий поля вблизи нулевой точки 2-го или более высокого порядка может быть следующей:

1. Нахождение ненулевых и нулевых (если таковые имеются) реперов, аналитически или численно. В случае нечётных степеней нуля также существенны знаки соответствующих собственных значений  $\text{sign}(\lambda)$ . Для чётных степеней эти знаки различны на дополняющих друг друга полупрямых. Заметим, что для положительной полуоси оси  $Oz$  при потенциале  $V_3^0$  согласно нормировке  $\lambda = 1$ .
2. Нахождение “полушипов” — реперов, для которых точка пересечения их с поверхностью сферы с центром в нуле является особой точкой типа “узел”.
3. Нахождение реперов, для которых указанная точка является особой точкой типа “седло”. Такие реперы могут быть как  $\gamma$ -линиями, так и направляющими некоторой  $\Sigma$ -поверхности. Возможен также переходный вариант между “седлом” и “узлом”, например, ось  $Oz$  при потенциале  $U_I$  и  $K = 2$ .

# Глава 4. РАСЧЁТЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ГЕОМЕТРИИ ЕГО ЛИНИЙ ВБЛИЗИ НЕКОТОРЫХ ТОКОВЫХ СИСТЕМ

## 4.1. Упорядоченное и хаотическое поведение линий магнитного поля вблизи простых токовых систем

Зачастую на основании таких известных простых примеров как поле прямого проводника, кругового витка с током и т. д., представляется, что линии магнитного поля, не имеющие нулевых точек, либо замкнуты, либо приходят из бесконечности и уходят на бесконечность. Заметим, однако, что уже в системе, рассмотренной И.Е. Таммом в 1929 г. [63] и состоящей из кругового витка с током и идущего по его оси прямого тока, линии поля ложатся на охватывающие виток тороидальные поверхности, при этом, в зависимости от соотношения токов и точки начала расчёта линии, последняя может оказаться либо замкнутой (соответствующая обмотка тора называется рациональной (рис. 4.1)), либо навиваться на тороид всюду плотно (иррациональная обмотка) [1, с. 47]. Поверхности, обмотка которых рациональна, можно охарактеризовать отношением  $m:n$ , где  $m$  — число обходов до замыкания в тороидальном (иначе говоря, азимутальном) направлении, а  $n$  — в полоидальном. Как на поверхность с рациональной обмоткой (число таких поверхностей счётно), так и с иррациональной (их континуум) можно навить континуум различных линий, параллельных друг другу (рис. 4.2)).

В последующем магнитные поля, дающие системы вложенных магнитных поверхностей, т. е. поверхностей, в каждой точке которых направление поля касательно к ним, подробно изучались в связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза [65]. В работах И.М. Гельфанд и соавторов [70]–[73] впервые было показано, что при некоторых условиях магнитные поверхности перестают существовать.

В дальнейшем проявлениям стохастичности в поведении силовых линий магнитного поля было посвящено множество работ. Зачастую при

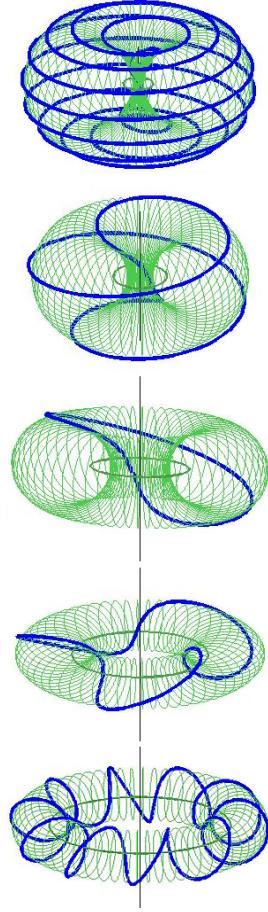


Рис. 4.1. Примеры намоток линий поля в случае рационального отношения  $m$  к  $n$  (сверху вниз): 10:1, 3:1, 1:1, 1:3, 1:10. Масштаб возрастает сверху вниз.

Этом в них рассматривалось магнитное поле, создаваемое достаточно сложными токовыми системами в токамаках и стеллараторах. Недавние исследования [27]–[30], однако, показали, что хаотическое поведение линий магнитного поля наблюдается уже в простейших токовых системах. В опубликованной в 2007 г. статье Aguirre & Peralta-Salas [28] была рассмотрена конфигурация токов, схожая с системой Тамма, но с заменой плоского кругового витка на синусоидально искривлённый. В публикации 2009 г. Hosoda et al. [27] были рассмотрены: система из двух сцепленных колец с током; система из двух токовых колец с центрами на оси  $Oz$ , расположенных в перпендикулярных ей плоскостях, и тока по самой оси с добавлением возмущения в виде однородного поля, направленного вдоль оси  $Ox$ ; двух разделённых расстоянием колец,

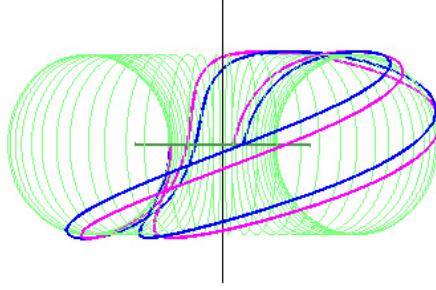


Рис. 4.2. Отрезки параллельных (т. е., непересекающихся) линий на тороиде.

лежащих в перпендикулярных плоскостях, и т. д. Дальнейший анализ проводился теми же авторами в публикации [132]. Ram & Dasgupta [29] рассматривалась другая модификация таммовской системы — со сдвигом центра токового витка относительно линейного тока. Ряд систем, например, система из двух перпендикулярных прямых проводников с током при наложении возмущения в виде слабого, равного константе фонового поля, был также рассмотрен в [30].

Настоящая глава посвящена описанию исследования одной из такого рода простейших токовых систем, а именно системы, состоящей из двух одинаковых, расположенных в перпендикулярных плоскостях, сцепленных между собой колец. Вблизи неё существуют области хаотического и упорядоченного поведения линий, что ранее было указано в [27], включая магнитные “острова”. В настоящей главе даётся описание структуры этих областей упорядоченности и хаотичности, а также достаточно сложной наблюдаемой конфигурации из подсистем замкнутых силовых линий.

При вычислениях использовались аналитические формулы, приведённые в [133, 134], согласно которым в цилиндрической системе координат  $\{\rho, \varphi, z\}$  выражения для компонент вектора магнитного поля кругового витка с током имеют вид:

$$\begin{aligned} B_\rho &= \frac{\mu_0 J k z}{4\pi\rho\sqrt{a\rho}} [-K(k) + \Psi E(k)], \\ B_\varphi &= 0, \\ B_z &= \frac{\mu_0 J k}{4\pi\sqrt{a\rho}} [K(k) + \psi E(k)], \end{aligned} \tag{4.1}$$

где  $a$  — радиус витка,  $J$  — сила тока,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  — магнитная постоянная,

$$\begin{aligned} k &= 2\sqrt{\frac{a\rho}{(a+\rho)^2+z^2}} \leq 1, \\ \Psi &= \frac{a^2+\rho^2+z^2}{(a-\rho)^2+z^2}, \\ \psi &= \frac{a^2-\rho^2-z^2}{(a-\rho)^2+z^2}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

и полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода:

$$K(k_i) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k_i^2 \sin^2 \phi}}, \quad E(k_i) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k_i^2 \sin^2 \phi} d\phi. \quad (4.3)$$

## 4.2. Система из двух сцепленных круговых витков с токами

### 4.2.1. Описание системы

Наиболее простыми токовыми системами общего вида, составленными из круговых витков, будут те, в которых витки лежат в одной плоскости либо располагаются в параллельных плоскостях так, что система обладает аксиальной симметрией [27]. При этом линии поля замкнуты или приходят из бесконечности и уходят на бесконечность.

Существенно более сложным в общем случае оказывается поведение силовых линий в системах из витков, лежащих в различных плоскостях. Пусть виток № 1 с центром в начале координат, радиусом  $a_1$  и током  $J_1$  располагается в плоскости  $xOy$ , а виток № 2 с центром в точке  $x = d, y = z = 0$ , радиусом  $a_2$  и током  $J_2$  — в плоскости  $xOz$ . В декартовой системе координат суммарное поле витков в соответствии с (4.1):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{cases} \frac{J_1 k_1 xz}{\sqrt{a_1(x^2+y^2)}^{5/4}} [-K(k_1)+\Psi_1 E(k_1)] + \frac{J_2 k_2 y(x-d)}{\sqrt{a_2((x-d)^2+z^2)}^{5/4}} [-K(k_2)+\Psi_2 E(k_2)], \\ \frac{J_1 k_1 yz}{\sqrt{a_1(x^2+y^2)}^{5/4}} [-K(k_1)+\Psi_1 E(k_1)] + \frac{J_2 k_2}{\sqrt{a_2((x-d)^2+z^2)}^{1/4}} [K(k_2)+\psi_2 E(k_2)], \\ \frac{J_1 k_1}{\sqrt{a_1(x^2+y^2)}^{1/4}} [K(k_1)+\psi_1 E(k_1)] + \frac{J_2 k_2 yz}{\sqrt{a_2((x-d)^2+z^2)}^{5/4}} [-K(k_2)+\Psi_2 E(k_2)], \end{cases} \quad (4.4)$$

где

$$k_1 = 2\sqrt{\frac{a_1\sqrt{x^2+y^2}}{\left(a_1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2}}, \quad k_2 = 2\sqrt{\frac{a_2\sqrt{(x-d)^2+z^2}}{\left(a_2+\sqrt{(x-d)^2+z^2}\right)^2+y^2}}, \quad (4.5)$$

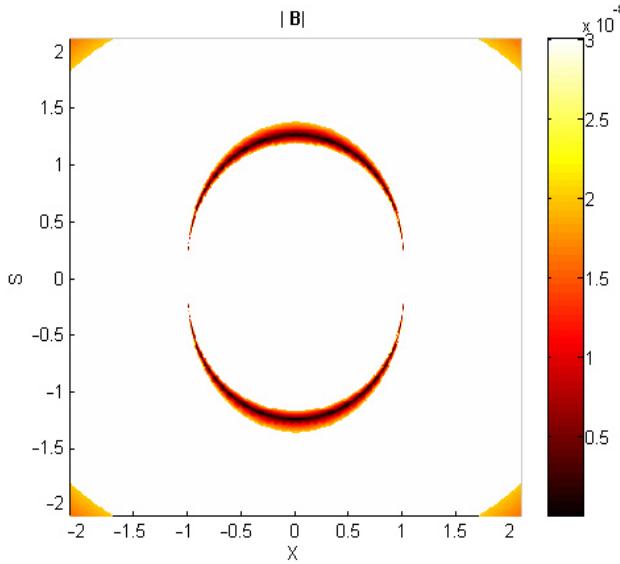


Рис. 4.3. Модуль магнитного поля  $|\mathbf{B}|$  в плоскости  $y - z = 0$  в конфигурации с  $d = 0$ . Белым цветом показана часть области, в которой  $|\mathbf{B}|$  превышает пороговое значение  $3 \cdot 10^{-8}$  нТл.  $s$  — расстояние в плоскости в направлении, перпендикулярном оси  $Ox$ . Тёмные участки соответствуют положению нулевой линии.

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{a_1^2 + r^2}{\left(a_1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2}, & \psi_1 &= \frac{a_1^2 - r^2}{\left(a_1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2}, \\ \Psi_2 &= \frac{a_2^2 + r^2}{\left(a_2 - \sqrt{(x-d)^2 + z^2}\right)^2 + y^2}, & \psi_2 &= \frac{a_2^2 - r^2}{\left(a_2 - \sqrt{(x-d)^2 + z^2}\right)^2 + y^2}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

обозначено  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода:  $K(k_i) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \phi}}$ ,  $E(k_i) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \phi} d\phi$ ,  $k_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2$ .

Как видно из выражений (4.4), при одновременной замене  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow -z$  компонента вектора поля  $B_x \rightarrow -B_x$ , а  $B_y$  и  $B_z$  не изменяются. В данной главе рассмотрен случай витков единичного радиуса,  $a_1 = a_2 = a = 1$  (интерес представляют не конкретные расстояния, а их соотношения, поэтому выражаем их в условных единицах), с одинаковыми, но противоположными по знаку токами,  $J_1 = -J_2 = J = 1$ . На удалении витки в сумме дают поле диполя с моментом  $p = \sqrt{2}\pi a^2 J$ . На расстоянии от центра системы порядка пяти единиц отличие поля от дипольного не

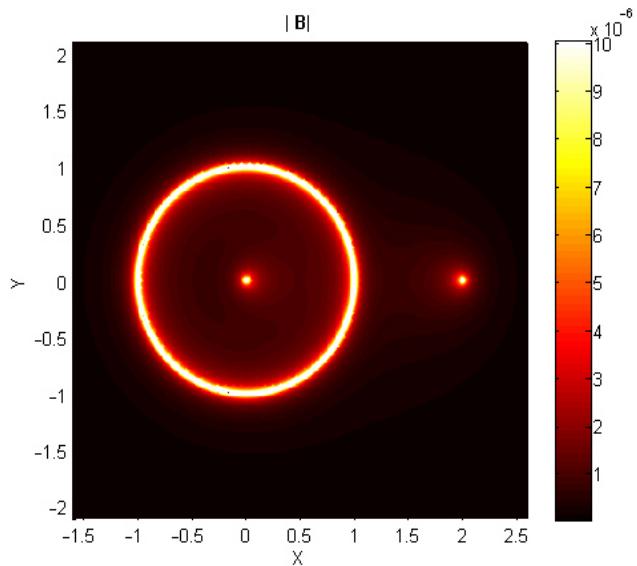


Рис. 4.4. Модуль магнитного поля  $|\mathbf{B}|$  в плоскости  $xOy$  в конфигурации с  $d = 1$ . Белый цвет соответствует участкам, в которых  $|\mathbf{B}|$  превышает пороговое значение  $10^{-5}$  нТл.

превышает 10%. Уравнение силовой линии оси диполя:

$$\begin{cases} x = \frac{d}{2}, \\ y + z = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Интегрирование линий поля проводилось численно методом Рунге-Кутта 4-го порядка с шагом  $5 \cdot 10^{-4}$  или менее. Проверка вычислений осуществлялась расчётами с уменьшенным шагом, а также счётом в обратную сторону. Кроме того, в качестве проверки верности используемых аналитических формул проводились расчёты посредством разбиения колец на токовые элементы и вычисления их поля по формуле Био-Савара.

#### 4.2.2. Области упорядоченности и хаотичности

Для наиболее симметричной конфигурации, когда  $d = 0$ , т. е. токовые витки представляют собой большие круги одной сферы, моделирование показывает, что линии поля замкнуты или приходят из бесконечности и уходят на бесконечность, хотя и могут иметь достаточно сложный вид, а в плоскости, перпендикулярной оси диполя, имеется охватывающая её

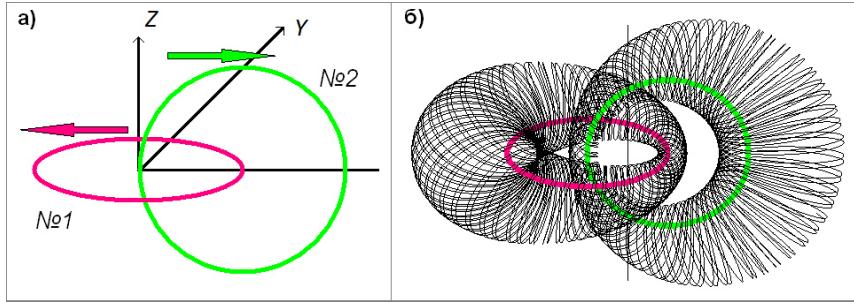


Рис. 4.5. а) Система токовых колец. Виток №1 с центром в начале координат располагается в плоскости  $xOy$ , виток №2 с центром в точке  $x = 1, y = z = 0$  — в плоскости  $xOz$ . Радиус витков единичный. Токи одинаковы по силе, их направления при положительных их знаках показаны стрелками. б) Деформированные тороиды, образуемые линиями поля вблизи колец.

замкнутая нулевая линия (рис. 4.3). Если же центры колец сдвинуты друг относительно друга, то возникшее нарушение симметрии приводит к исчезновению этих вырожденных свойств. График  $|B|$  для данного случая представлен на рис. 4.4.

Далее будем рассматривать конфигурацию, в которой  $d = 1$ , т. е. край кольца №2 проходит через центр кольца №1 (рис. 4.5а). На малых расстояниях от витка ближайший его участок можно аппроксимировать линейным током. Численное моделирование показывает при этом, что возмущение, вызванное воздействием удалённых участков токовой системы, приводит к почти правильному навитию силовых линий на вложенные друг в друга деформированные тороиды, имеющие сужение вблизи центра системы двух токов и утолщение на удалении от него (рис. 4.5б), так что в общих чертах картина вблизи каждого из колец (рис. 4.6) схожа с той, что имеет место в обладающей более высокой симметрией системе Тамма. Сечения этих тороидов в наиболее узкой и широкой части можно приближённо аппроксимировать эллипсами со смещёнными друг относительно друга центрами. При удалении стартовой точки счёта от края кольца поведение линий утрачивает упорядоченность (рис. 4.7 и рис. 1 в [27]). Однако при дальнейшем удалении стартовой точки от центра системы их поведение становится упорядоченным вновь, и они

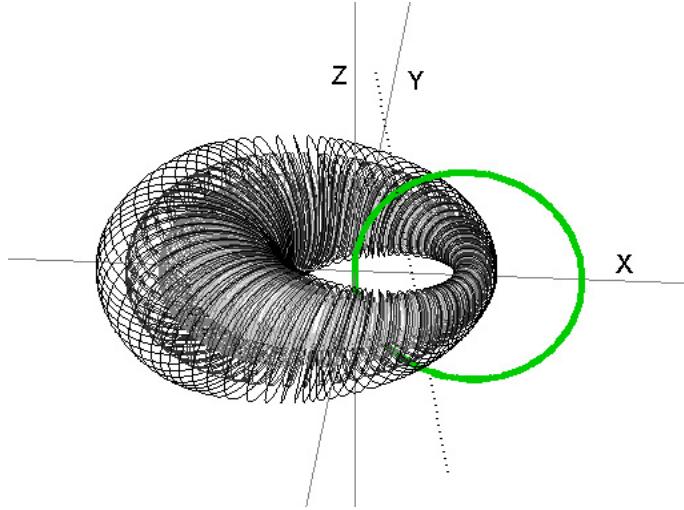


Рис. 4.6. Вложенные магнитные поверхности, топологически эквивалентные торам, вблизи кольца № 1. Стартовые точки расчёта располагались при  $x_0 = 1.25$  (внешняя из поверхностей),  $x_0 = 1.20, 1.15, 1.10, 1.05$ . Штриховой линией показано направление оси суммарного диполя.

навиваются на топологически эквивалентные торам вложенные друг в друга поверхности, охватывающие оба токовых кольца, при этом “дырки” этих внешних топологических торов охватывают ось суммарного диполя.

Таким образом, в окрестности двух токовых колец имеются области, образуемые линиями топологических торов вокруг каждого из колец, которые в свою очередь расположены внутри топологических торов, система которых извне охватывает кольца как целое (рис. 4.8), а промежуток между этими областями упорядоченности занимает область стохастичности. Схематически сечения плоскостью  $z = 0$  областей с различным поведением силовых линий показаны на рис. 4.9.

#### 4.2.3. Подсистемы замкнутых линий

Из соображений симметрии будем рассматривать линии магнитного поля со стартовыми точками, лежащими на оси  $Ox$ . Для замкнутых линий на длинах  $l$  и  $l_0 - l$ , где  $l_0$  — суммарная длина линии до замыкания, координаты  $x$  совпадают, а  $y$  и  $z$  — противоположны по знаку. Аналогичная ситуация со знаками имеет место и при расчёте произвольных линий в

прямую и в обратную стороны. Система замкнутых линий поля в целом обладает зеркально-поворотной симметрией 4-го порядка относительно плоскости, проходящей перпендикулярно оси  $Ox$  через точку пересечения последней с осью диполя при  $x_D = 0.5$ .

Более детальное рассмотрение при этом показывает, что замкнутые линии не лежат на точных магнитных поверхностях. Попытки численно замкнуть линии, которые могли бы лежать в сечении тороидальной поверхности, но не на оси  $Ox$ , а, скажем, над витком № 1 при  $x = 1$  и некотором  $z_0$ , не привели к успеху, хотя невязка быстро уменьшалась при приближении к витку.

Таблица 4.1: Примеры замкнутых силовых линий.

Точка начала счёта, $x_0$	Длина до замыкания, $l_0$	Числа обходов		
		Кольцо № 1	Кольцо № 2	
Край кольца № 2 при $x = 0$				
Окрестность оси диполя. Линии вида $(1:n, 1:n)$ , $n \downarrow$				
0.5989	952.1115	1:7	1:7	
0.6779	255.4885	1:6	1:6	
0.7403	112.6460	1:5	1:5	
0.8055	51.4870	1:4	1:4	
0.84575	30.7985	1:3	1:3	
Область $R_{1_{in}}$ , примыкающая к краю кольца № 1 изнутри. Линии вида $(1:n, 1:1)$ , $n \uparrow$				
0.859751	17.2350	1:3	1:1	
0.862748	20.0575	1:4	1:1	
0.865478	22.1540	1:5	1:1	
0.868198	23.8100	1:6	1:1	
0.871025	25.2430	1:7	1:1	
0.874007	26.5360	1:8	1:1	
0.87710	27.7380	1:9	1:1	
0.88022	28.8755	1:10	1:1	
...	...	...	...	
Край кольца № 1 при $x = 1$				
Область $R_{1_{out}}$ , примыкающая к краю кольца № 1 извне. Линии вида $(1:n, 1:1)$ , $n \downarrow$				
...	...	...	...	
1.21919	28.8820	1:10	1:1	
1.23485	27.7695	1:9	1:1	
1.25458	26.6480	1:8	1:1	
1.276234	25.5335	1:7	1:1	
1.293654	24.3435	1:6	1:1	
1.3060468	22.9695	1:5	1:1	
1.3155935	21.3215	1:4	1:1	
1.3238278	19.1670	1:3	1:1	
1.33192682	16.2755	1:2	1:1	

1.33774010	7.8865	1:1	1:1
Область $R_{2_{out}}$ , примыкающая к краю кольца № 2 извне. Линии вида $(1:1, 1:n)$ , $n \uparrow$			
1.495839	19.1620	1:1	1:3
1.502809	20.0585	1:1	1:4
1.566015	22.9715	1:1	1:5
1.574446	23.8105	1:1	1:6
1.60278	25.5340	1:1	1:7
1.61515	26.5350	1:1	1:8
1.63085	27.7700	1:1	1:9
1.64371	28.8775	1:1	1:10
...	...	...	...
Край кольца № 2 при $x = 2$			

Представления о конфигурации замкнутых линий и их подсистемах даёт табл. 4.1. Линии поля вблизи каждого из витков можно описать условными формулами  $(m:n, m:m)$  для линий, охватывающих виток № 1, и  $(m:m, m:n)$  для охватывающих виток № 2, где в скобках указаны соотношения чисел обхода вокруг каждого из колец в тороидальном и полоидальном направлениях. Помимо них существует подсистема линий (проходящих на своём пути поблизости от оси диполя, см. табл. 4.1), которые одинаковое число раз охватывают каждое из колец, т. е. ведут себя по отношению к обоим виткам как к единому целому и описываются формулой  $(m:n, m:n)$ . Поведение перечисленных подсистем замкнутых линий соответствует упомянутым выше внутренним и внешним топологическим торам, хотя часть входящих в них замкнутых линий располагается уже в области хаотичности. В табл. 4.1 для краткости представлены исключительно линии с  $m = 1$ , примеры показаны на рис. 4.10. Помимо этих линий существуют замкнутые линии с более сложным поведением, которые перечисленным условным формулам не удовлетворяют. Некоторые их примеры даны в табл. 4.2 и на рис. 4.11. Такие сложные линии, обнаруженные при численном счёте, находились вблизи переходов от одной из подсистем к другой.

Так, переход от устойчивости в области расположения внешних топологических торов к неустойчивости при удалении стартовой точки  $x_0$  от оси диполя по оси  $Ox$  происходит на расстоянии от последнего  $x_0 - x_D \simeq \simeq 0.266$ . Линия  $(2:9, 2:9)$  со стартовой точкой  $x_0 = 0.76285$  оказывается при этом лежащей в пределах области устойчивости, а линия  $(1:4, 1:4)$  — уже за

её пределами. Последнюю охватывают наиболее крупные из наблюдаемых в системе магнитных “островов”, внутри которых в свою очередь можно видеть цепочку более мелких “субостровков” (рис. 4.12) [82]. Последние охватывают первую из сложных замкнутых линий из табл. 4.2, а также аналогичную ей линию с  $x_0 = 0.2090121$  (рис. 4.13).

Таблица 4.2: Примеры замкнутых силовых линий со сложным поведением.

№	Точка начала счёта, $x_0$	Длина до замыкания, $l_0$	Числа обходов	
			Кольцо № 1	Кольцо № 2
1	0.7909879	158.3445	3:12	3:12
2	0.85547697	27.8895	2:3	2:5
3	0.85697567	33.5815	2:3	2:7
4	0.8588811	45.3540	2:5	2:4
5	1.3637	26.9590	1:2	1:2
6	1.42049	57.1620	2:4	2:8
7	1.4618	60.5675	2:6	2:5
8	1.48348	28.5860	1:2	1:3
9	1.5945693	74.2575	3:4	3:13

#### 4.2.4. Магнитные “острова”

Вблизи каждого из проводников и оси диполя, а также на удалении от витков поведение линий поля является устойчивым в том смысле, что их траектории не испытывают быстрого расхождения при небольшом сдвиге начальных координат расчёта. В промежуточной же области магнитное поле носит по большей части хаотический характер. Для характеристики степени неупорядоченности использовалась длина расхождения  $L$  на три порядка двух близких линий (рис. 4.14). Расчёт для диапазона значений  $x$ , соответствующих табл. 4.1, показал, что наиболее быстрое расхождение линий наблюдается в районе  $x_{01} = 0.86$  и  $x_{02} = 1.34$ , что соответствует переходам от одной подсистемы замкнутых линий к другой. Участки упорядоченного поведения, заключённые внутри области хаотичности (рис. 4.15) и представляющие собой окрестности некоторых из замкнутых линий, образуют магнитные “острова” в сечениях плоскостью  $z = 0$  (рис. 4.7 и 4.16) и  $y = 0$ . Положения наиболее широких из этих окрестностей соответствуют пикам на рис. 4.14. Непосредственно вблизи

устойчивых тороидов находятся “острова”, формирующиеся вокруг линии (1:1, 1:8) у кольца № 2, а также аналогичной линии у кольца № 1. Наиболее крупные “острова”, как было указано выше, расположены в окрестности замкнутой линии (1:4, 1:4). Также магнитные “острова” наблюдаются около относящейся к числу линий со сложным поведением линии (2:6, 2:5) и аналогичной ей.

#### **4.2.5. Перспективы применения для моделирования магнитного поля в солнечной короне**

Таким образом, уже в окрестности простейшей системы из двух сцепленных токовых витков, расположенных в перпендикулярных плоскостях, наблюдаются области как упорядоченного, так и хаотического поведения линий магнитного поля. Вблизи каждого из витков линии поля приближённо навиваются на вложенные друг в друга поверхности, топологически эквивалентные торам. Также существует область, включающая удалённые от колец участки, в которой происходит навитие линий на вложенные друг в друга топологические торы с “дыркой”, охватывающей ось общего диполя системы токов. Переход между этими системами поверхностей осуществляется через область, в которой поведение линий является хаотическим за исключением отдельных участков (“магнитных островов”). При этом замкнутые линии составляют лишь счётный набор и образуют достаточно сложный порядок, частично согласующийся с расположением указанных систем поверхностей. Как правило же линии поля не замкнуты.

Таким образом, поведение линий магнитного поля в окрестности данной системы токов является “хорошим” в том смысле, что они остаются в ограниченной части пространства (исключая линию, совпадающую с осью общего диполя), не приближаясь в то же время сколь угодно близко к кольцам, а область хаотичности имеет ограниченные пространственные размеры.

При моделировании корональных магнитных полей с помощью метода “magnetic charge topology” (МСТ) потоковые трубки солнечного магнитного

поля моделируются распределёнными по фотосфере или на некоторой глубине фиктивными магнитными зарядами, а в короне поле считается потенциальным. Существует ряд модернизаций этого подхода, в частности моделирование коронального поля магнитными диполями. Следующим шагом, хотя и сохраняющим высокую степень условности, была бы замена диполей на круговые витки тока. Можно ожидать, что такая замена приведёт к появлению новых эффектов, которые в изначальной предельно упрощённой модели не учитываются.

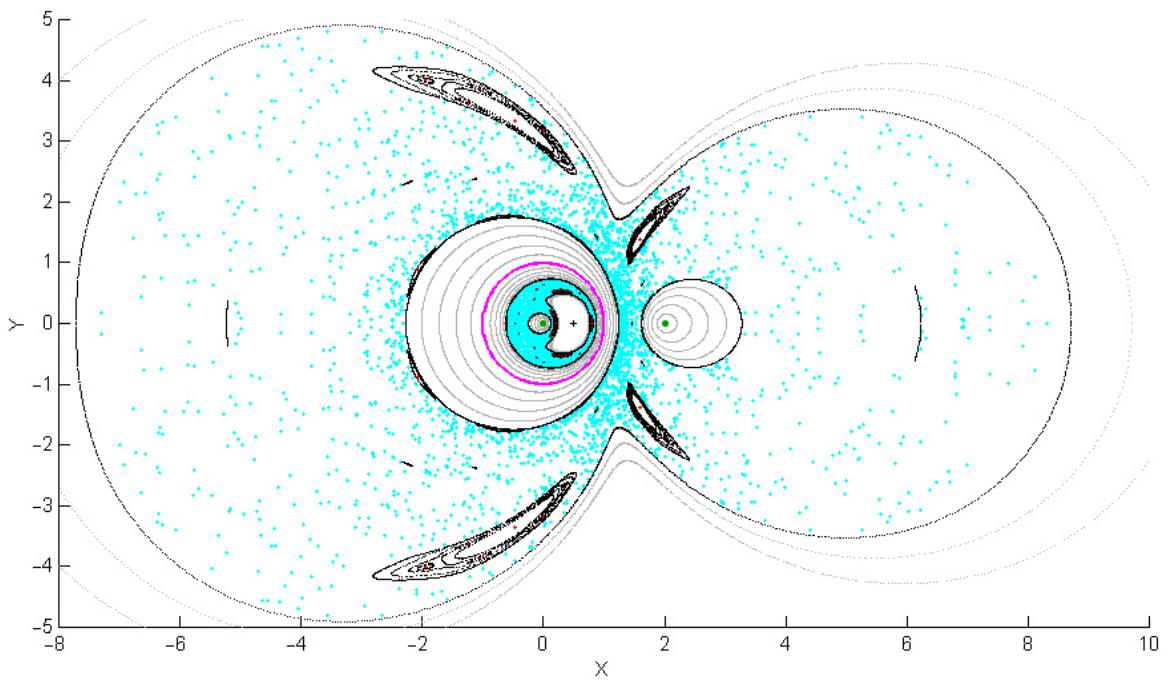


Рис. 4.7. Магнитные “острова” в сечении плоскостью  $z = 0$ . Отмечены проекции токовых колец на плоскость. Крестиком обозначено место пересечения плоскости с осью суммарного диполя. В области расположения деформированных тороидов вблизи колец показаны сечения линий со стартовыми точками  $x_{01} = 1.25$  (чёрный цвет) и  $1.20, 1.15, 1.10, 1.05$  (серый), а также аналогичных им линий вблизи кольца № 2. В области расположения внешних топологических торов показаны линии со стартовыми точками  $x_{02} = 8.7$  (чёрный) и  $9.7, 10.7$  (серый). Показаны магнитные “острова” вблизи линий  $(1:4, 1:4)$ ,  $(1:1, 1:8)$ ,  $(2:6, 2:5)$  и аналогичным последним двум. Точки пересечения плоскости с рациональными линиями обозначены красным, а линиями с хаотическим поведением — голубым.

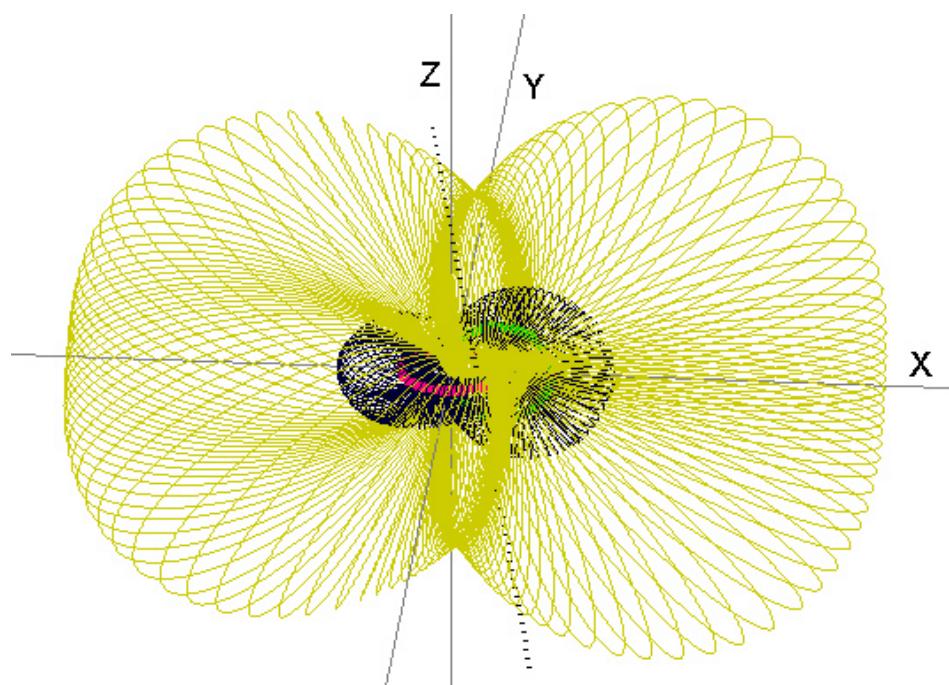


Рис. 4.8. Внешняя топологически эквивалентная тору поверхность, охватывающая оба токовых кольца, и деформированные тороиды вблизи каждого из колец. Штриховой линией показано направление оси суммарного диполя.

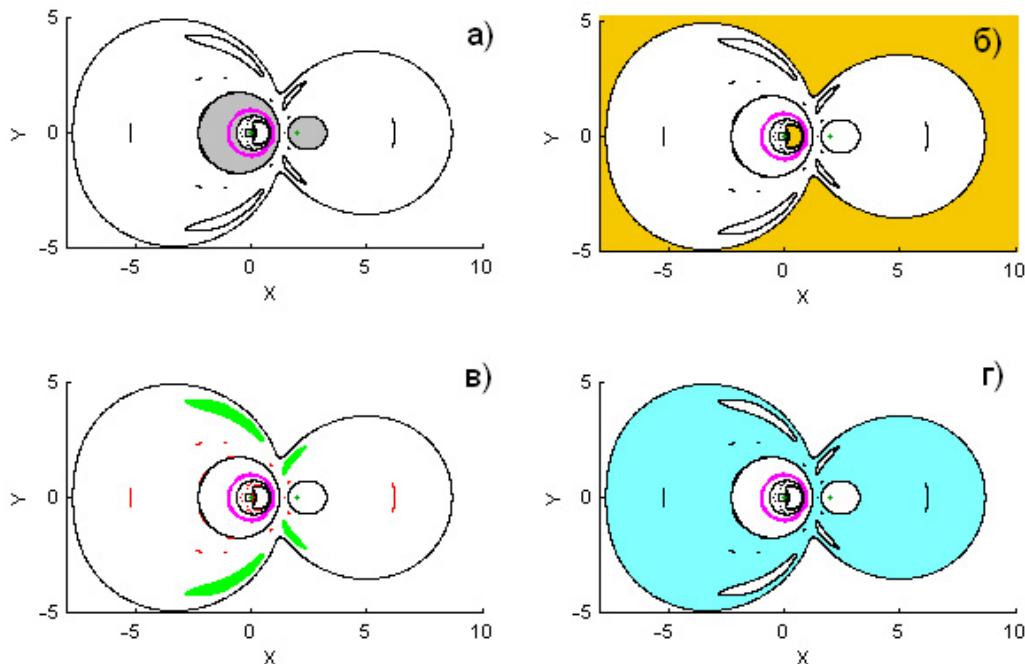


Рис. 4.9. Схематическое изображение областей упорядоченного и хаотического поведения линий магнитного поля в сечении плоскостью  $z = 0$ . Показаны кольцо №1, лежащее в данной плоскости, точки пересечения последней с кольцом №2, а также основные структурные составляющие системы силовых линий. Цветовой заливкой выделены области упорядоченного поведения: а) вблизи каждого из колец, б) охватывающая систему в целом, в) вблизи магнитных “островов”. На схеме г) заливкой отмечена область хаотичности.

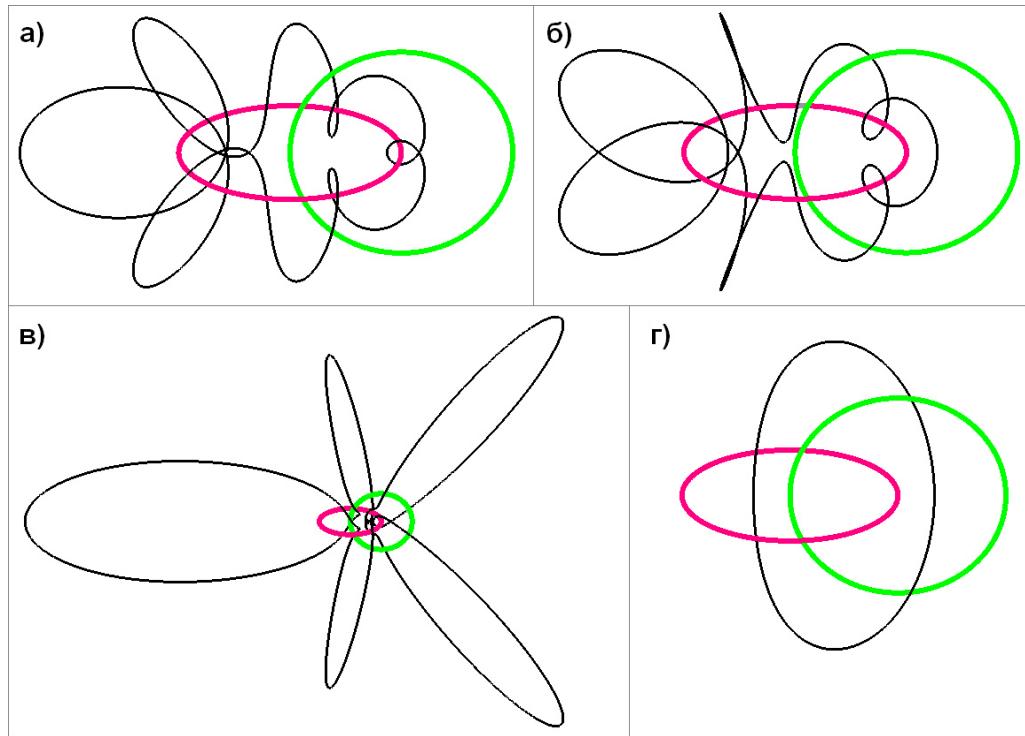


Рис. 4.10. Замкнутые линии: а) (1:7, 1:1) из области  $R1_{in}$  (см. табл. 4.1); б) (1:7, 1:1) из области  $R1_{out}$ ; в) (1:5, 1:5); г) (1:1, 1:1).

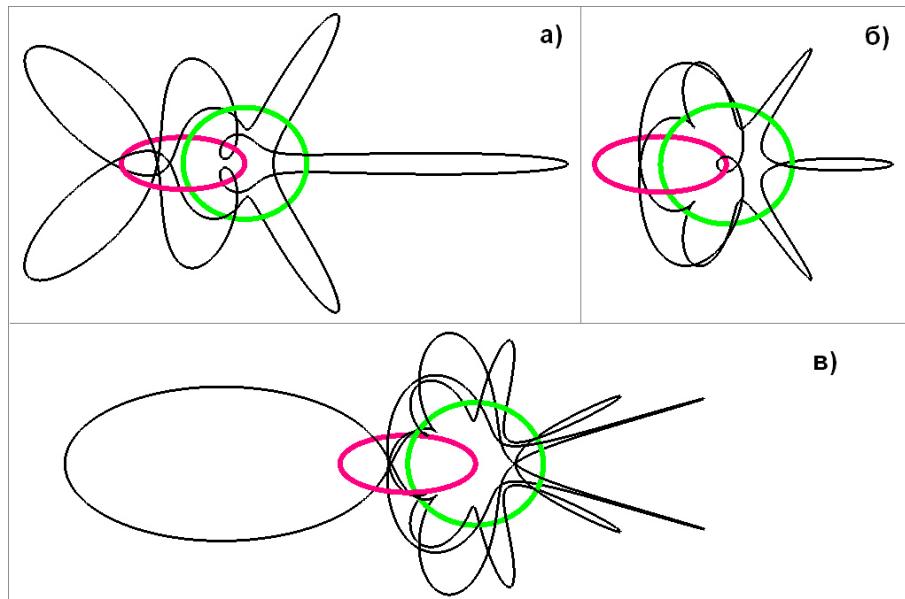


Рис. 4.11. Примеры сложных замкнутых линий (см. табл. 4.2): а) (2:6, 2:5), б) (2:3, 2:7), в) (3:4, 3:13).

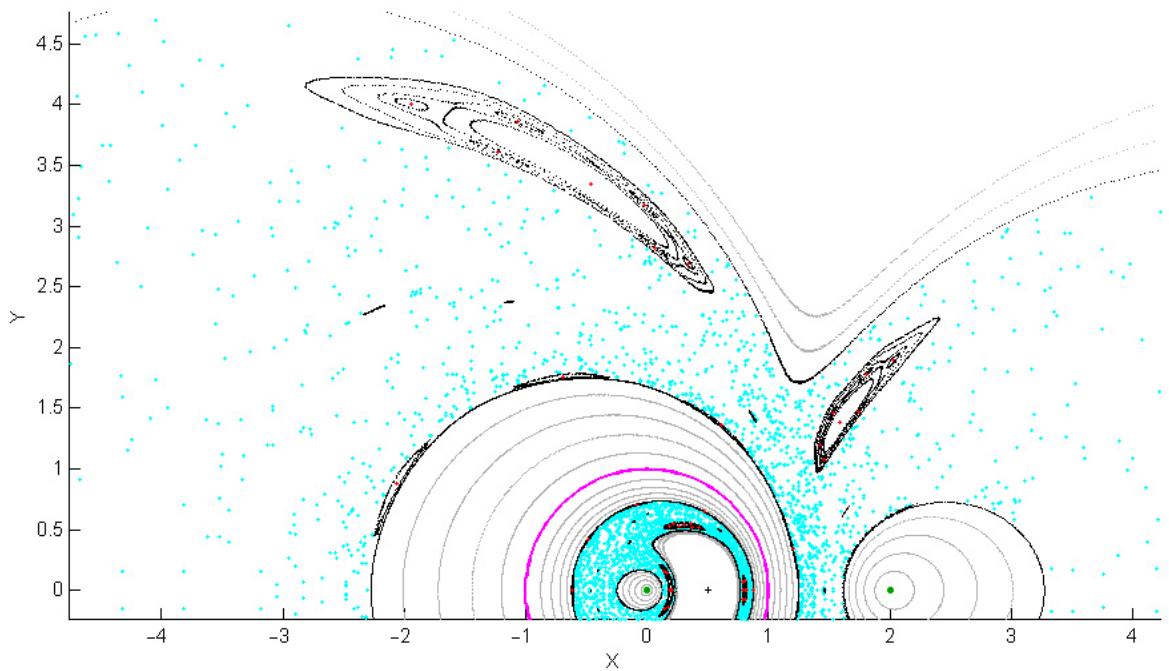


Рис. 4.12. Сечение плоскостью  $z = 0$ . Магнитные “острова” вблизи линии  $(1:4, 1:4)$  (вверху). Для них показаны сечения линий со стартовыми точками  $x_0 = 0.785$  (самая внешняя) и  $0.787, 0.789, 0.7933, 0.790$  и  $0.210$  (“субостровки”),  $0.795$ . Точки пересечения плоскости с рациональными линиями обозначены красным.

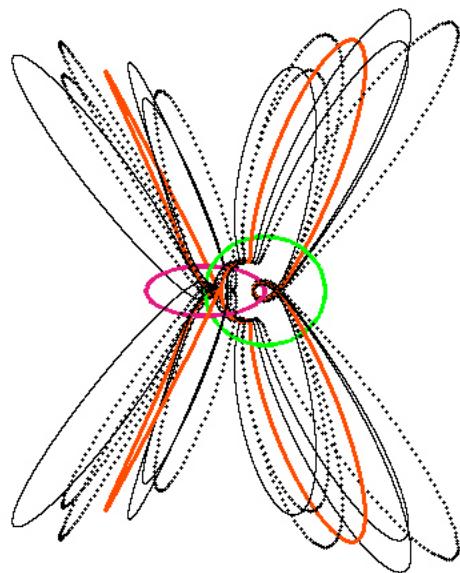


Рис. 4.13. Замкнутая линия  $(1:4, 1:4)$  и сложные линии:  $(3:12, 3:12)$  со стартовой точкой  $x_0 = 0.7909879$  (тонкая сплошная чёрная) и аналогичная ей линия со стартовой точкой  $x_0 = 0.2090121$  (пунктирная чёрная).

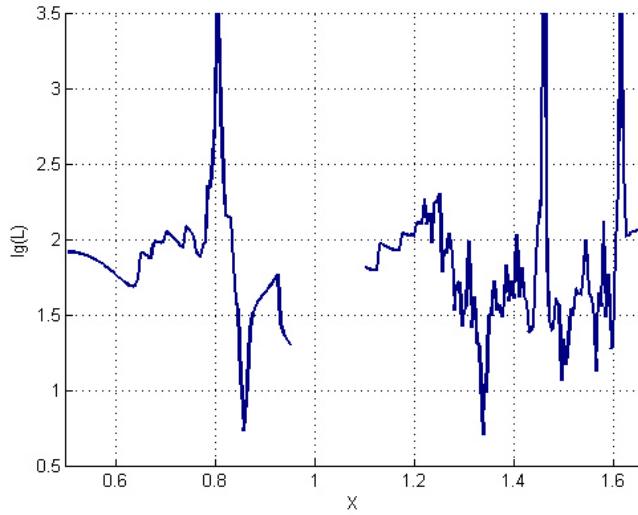


Рис. 4.14. Зависимость длины расхождения  $L$  двух линий с изначальным расстоянием  $10^{-7}$  по оси  $Ox$  на расстояние  $10^{-4}$  от положения стартовой точки счёта  $x_0$ . Пики соответствуют положениям магнитных островов. Из-за вклада в расхождение, вызванного широм, на рис. 4.14 возрастания  $L$  вблизи самих витков не видно.

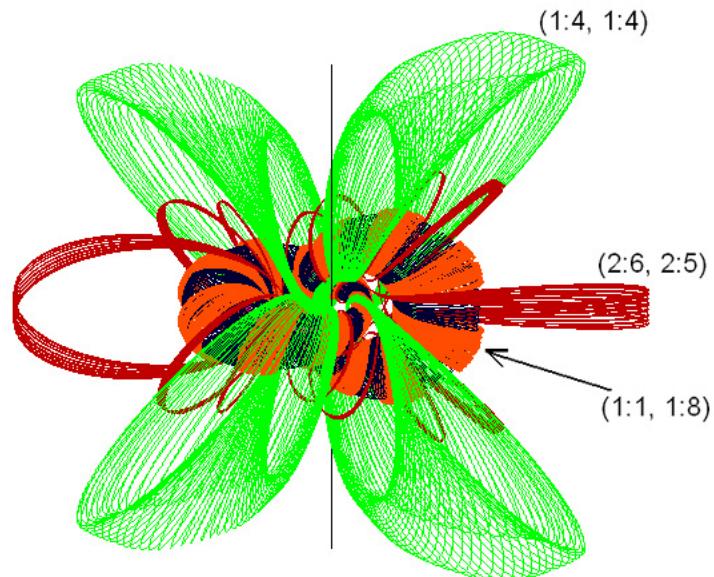


Рис. 4.15. Линии поля в областях упорядоченного поведения вблизи колец (чёрный цвет) и замкнутых линий (1:4, 1:4) (светло-зелёный), (2:6, 2:5) (тёмно-красный) и (1:8, 1:1) (оранжевый), а также аналогичных последним двум.

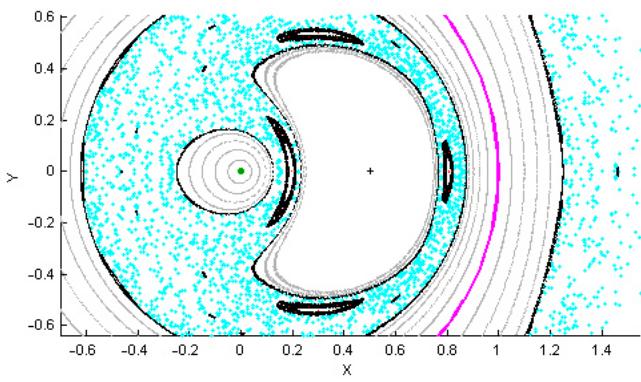


Рис. 4.16. Сечение плоскостью  $z = 0$ . Отмечены проекции токовых колец на плоскость. Крестиком обозначено место пересечения плоскости с осью суммарного диполя. Его охватывают сечения внешних топологических торов (показаны для линий со стартовыми точками  $x_0 = 8.7$  (чёрный) и  $x_0 = 9.7, 10.7$  (серый)). Извне к ним примыкают “магнитные острова” у линии (1:4, 1:4).

## **4.3. Моделирование магнитного поля “Магнитного альфа-спектрометра-02” (AMS-02)**

### **4.3.1. Описание AMS-02**

Магнитный альфа-спектрометр (*англ.* Alpha Magnetic Spectrometer) — детектор элементарных частиц, который был установлен на Международной космической станции (МКС) в 2011 г. (рис. 4.17). Детекторный комплекс AMS-02 (Alpha Magnetic Spectrometer) был создан усилиями международной коллегии из 56 организаций из 16 стран (Германия, Дания, Испания, Италия, Китай, Мексика, Нидерланды, Португалия, Россия, Румыния, США, Тайвань, Финляндия, Франция, Швейцария, Южная Корея). Координатор проекта — С. Тинг (MIT, CERN), его заместитель — Р. Баттистон (Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN)). Прототип данного прибора (AMS-01) был запущен на околоземную орбиту космическим челноком Discovery в июне 1998 г. и устанавливался на орбитальной станции “Мир”. Запуск второй версии (AMS-02) был произведён 16 мая 2011 г. в рамках миссии STS-134, а на МКС он был установлен 19 мая. В состав AMS-02 входят: постоянный магнит, детектор переходного излучения, система времени пролёта, кремниевый трекер, черенковский детектор, электромагнитный калориметр, система антисовпадений, а также GPS и система, позволяющая получать прецизионную информацию об ориентации AMS в пространстве. AMS-02 предназначен для определения свойств заряженных частиц за пределами земной атмосферы с целью поиска антивещества, “тёмной материи”, странной матери и исследования происхождения космических лучей.

Исходно разрабатывалось два варианта детектора спектрометра AMS-02: со сверхпроводящим магнитом и с постоянным магнитом с меньшим полем 0.15 Тл (который и полетел в 2011 г.). В Институте лазерной физики Сибирского отделения РАН (ИЛФ СО РАН) была исследована структура неосесимметричного магнитного поля рассеяния обеих версий спектрометра. Обе версии конструировались с расчётом, помимо создания



Рис. 4.17. AMS-02 на МКС. Источник: <http://ams.nasa.gov/about.html>

квазиоднородного рабочего поля внутри них, на минимизацию их паразитных полей рассеяния снаружи. В варианте AMS-02 с постоянным магнитом, использовавшимся и в прототипе AMS-01, это достигалось за счёт применения системы постоянных NdFeB-магнитов типа “магического” цилиндра Хальбаха, а в варианте со сверхпроводящими катушками — за счёт дополнительных рейстрековых (“race-track”) боковых обмоток.

Идея использовать сверхпроводящий магнит (с моментом  $\mu \sim \sim 10^8 \text{ Гс}\cdot\text{см}^3$ ) на борту космического аппарата в ионосфере для активных геофизических экспериментов и моделирования явлений по типу магнитосферных (“мини-магнитосферы”) была предложена В.П. Шабанским в конце 1980-х годов. В 2000-х она разрабатывалась Европейским космическим агентством (ESA) [39]. При установлении спектрометра AMS-02 на МКС его остаточное магнитное поле должно было привести к формированию “мини-магнитосферы” из-за его взаимодействия с ионосферной плазмой в условиях сверхзвуковой, но субальвеновской скорости МКС.

#### 4.3.2. Конструкция сверхпроводящих катушек AMS-02

Описание конструкции AMS-02 дано в [135]–[137]. Общая схема с указанием расположения сверхпроводящих катушек AMS-02 приведена на рис. 4.18.

Магнитное поле сверхпроводящего магнита AMS-02 создавалось 14-ю сверхпроводящими катушками (см. табл. 4.3):

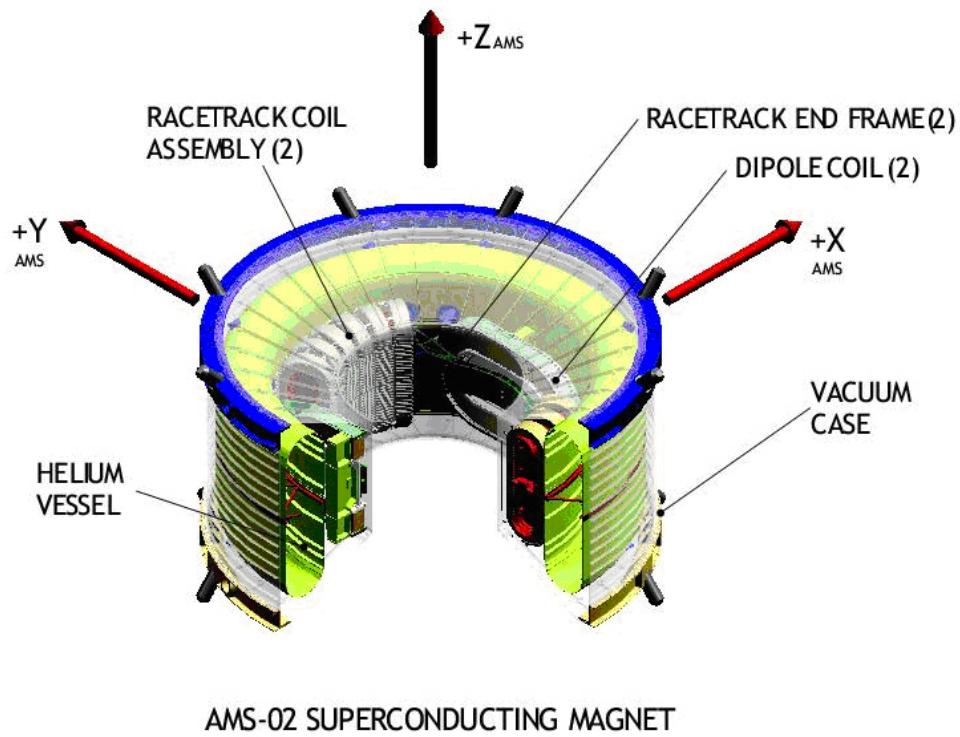


Рис. 4.18. Схема с указанием расположения сверхпроводящих катушек AMS-02. Источник: [http://dpnc.unige.ch/ams/ams\\_beta/Gallery/magnet.html](http://dpnc.unige.ch/ams/ams_beta/Gallery/magnet.html)

1. двумя большими катушками Гельмгольца (дипольные катушки (рис. 4.19));
2. двумя сериями по 6 меньших рейстрековых катушек (рис. 4.20), распределённых между ними на окружности. 12 катушек были расположены при  $\theta = \pm 60^\circ, \pm 72^\circ, \pm 84^\circ, \pm 96^\circ, \pm 108^\circ, \pm 120^\circ$ .

Диаметр центрального отверстия магнита был равен 1115 мм. Протекающий по намотке ток — 459 А.

Рейстрековые катушки предназначались служить следующим целям:

1. увеличение суммарного дипольного поля;
2. уменьшение величины паразитного поля за пределами магнита;
3. уменьшение действующего на МКС механического момента, вызванного взаимодействием между внешним полем магнитной системы и полем Земли.

Согласно проекту, магнитное поле в центре системы должно было составлять 0.87 Тл, а максимальное паразитное поле на расстоянии 3.0 м —

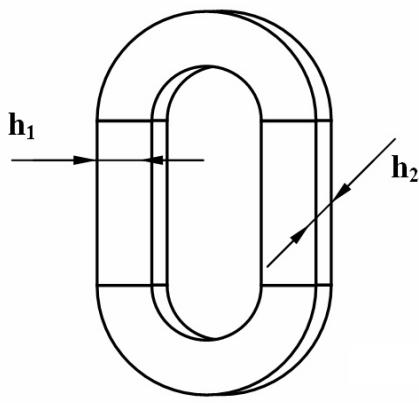


Рис. 4.19. Катушка Гельмгольца:  $h_1 = 146$  мм,  $h_2 = 88$  мм.

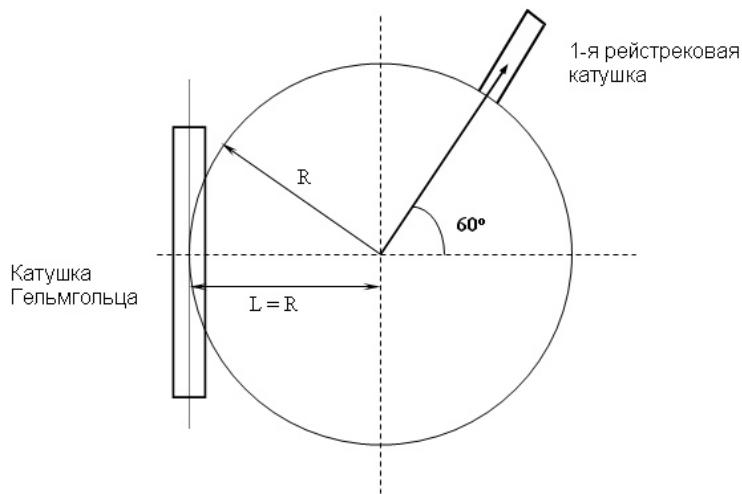


Рис. 4.20. Расположение катушек в плоскости  $xOy$ .

3.9 мТл. Запасённая энергия составляла 5.15 МДж, магнитный момент — 0.27 Н·м.

#### 4.3.3. Магнитная система для лабораторных экспериментов и численные модели

Ведущей задачей проекта ИЛФ СО РАН являлось исследование процессов взаимодействия сверхпроводящего магнита детектора AMS-02 с плазмой окружающей МКС ионосферы [39], в частности, изучение (методами лабораторного и численного моделирования) возможных эффектов влияния рассеянных магнитных полей магнита AMS-02 на плазменное окружение МКС в той её части, где расположен Российский

Таблица 4.3

Параметры катушек магнита AMS-02.

Характеристика	Катушки Гельмгольца	Рейстроковые катушки
высота, мм	1081	826
ширина, мм	681	306
сечение обмотки, мм	88 × 146	54 × 103
число витков провода в обмотке	3360	1457

сегмент. В целях проведения модельных экспериментов в ИЛФ СО РАН была собрана система из трёх магнитных катушек (рис. 4.21), которая должна была создавать поле, подобное полю магнита AMS-02. В НИИЯФ МГУ автором диссертации были разработаны численные модели для расчёта полей катушек упомянутой системы.

Таблица 4.4

Параметры катушек с моментами  $m$  по оси  $x$ .

Номера катушек	1 и 3 (одинаковы)	2 (основная)
Число витков, $N$	35	40
Наружный диаметр, $D_o$ (см)	5	6.5
Внутренний диаметр, $D_i$ (см)	2	3
Средний, $\langle D \rangle$ (см)	3.64	4.9

В модели катушки располагались в плоскости  $yOz$ . Центр катушки 2 был принят за начало координат. Катушки стояли симметрично относительно плоскости  $xOy$ , расстояние между центрами соседних составляло  $d = 6$  см. Толщина каждой из катушек  $a = 1.2$  см. Магнитные моменты катушек 1 и 3 были сонаправлены оси  $Ox$ , момент катушки 2 направлен в противоположную сторону.

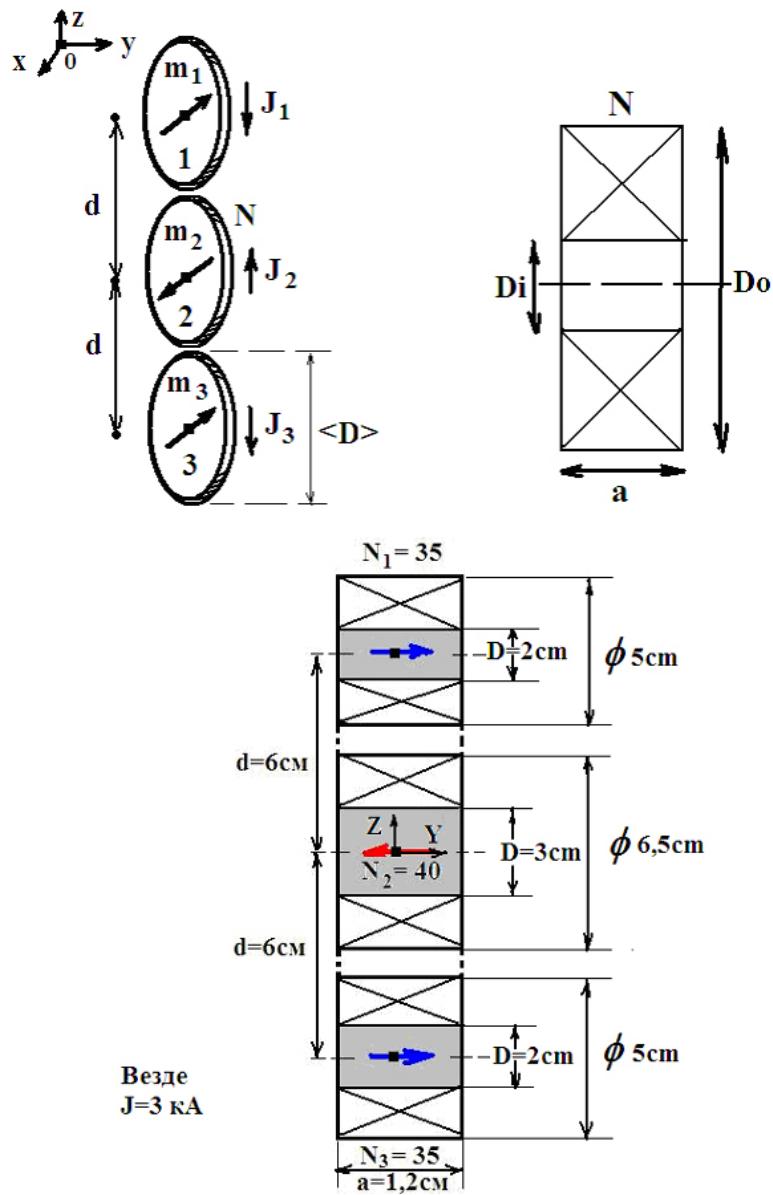


Рис. 4.21. Система трёх катушек ИЛФ СО РАН.

Параметры реальной системы подбирались так, чтобы её полный дипольный магнитный момент равнялся нулю:

$$\mu = m_2 - (m_1 + m_3) = 0 \quad (4.8)$$

с точностью  $\sim 3\%$  при последовательном соединении катушек и общем токе  $J_1 = J_2 = J_3 = J (\simeq 3 \text{ кA})$ .

Все обмотки являлись плотными, диаметр провода составлял 2.2 мм. Каждый слой содержал по 5 витков. Намотка катушек 1 и 3 состояла из 7-ми слоёв, а катушки 2 — соответственно из 8-ми.

В ходе численных расчётов катушки моделировались набором круговых витков тока. Катушки 1 и 3 состояли из 7-ми слоёв по 5 таких витков в слое. Катушка 2 — из 8-ми слоёв по 5 витков. Расстояние между витками было взято равным толщине провода, т. е. 2.2 мм. Радиус внутренних витков брался равным сумме внутреннего радиуса соответствующей катушки, половины толщины провода и корректирующей поправки  $p$ , для которой было принято значение 0.16 мм, вносимой для увеличения магнитных моментов катушек и приближения их к заданным значениям. Каждый виток разбивался на токовые элементы, поле от которых вычислялось непосредственно по формуле Био-Савара:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{[J d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (4.9)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведённый от элемента тока  $J d\mathbf{l}$  к точке, в которой вычисляется индукция  $\mathbf{B}$  магнитного поля. Впоследствии была произведена проверка посредством расчёта по аналитическим формулам (см. (4.1)).

В описываемой численной модели суммарный момент катушек 1 и 3 равнялся  $m_1 + m_3 = 2.2321 \cdot 10^5$  Гс·см<sup>3</sup>. Момент катушки 2 был равен  $m_2 = 2.2600 \cdot 10^5$  Гс·см<sup>3</sup>. Остаточный дипольный момент системы  $\mu = m_2 - (m_1 + m_3) = 2.7887 \cdot 10^3$  Гс·см<sup>3</sup>, т. е. составлял немногим более 1% от момента катушки 2. Параметры катушек сведены в табл. 4.4.

Средний диаметр катушек  $\langle D \rangle$  введён для удобства расчёта их магнитного момента по формуле  $\sim N \langle D \rangle J$ .

Поле считалось вне описанного вокруг системы катушек эллипсоида (рис. 4.22), так как в непосредственной близости к виткам вычисления теряют смысл. Полуоси эллипсоида в направлении осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  брались равными соответственно

- $A = 1.2a = 1.44$  см,
- $B = 1.2 \frac{D_{o(2)}}{2} = 3.9$  см,
- $C = 1.2 \left( d + \frac{D_{o(13)}}{2} \right) = 10.2$  см,

где  $D_{o(2)}$  — внешний диаметр катушки 2,  $D_{o(13)}$  — внешний диаметр катушек 1 и 3,  $d$  — расстояние между центрами соседних катушек.

Построенная модель давала возможность вычислять модуль вектора поля и его компоненты вдоль выбранного направления, а также строить

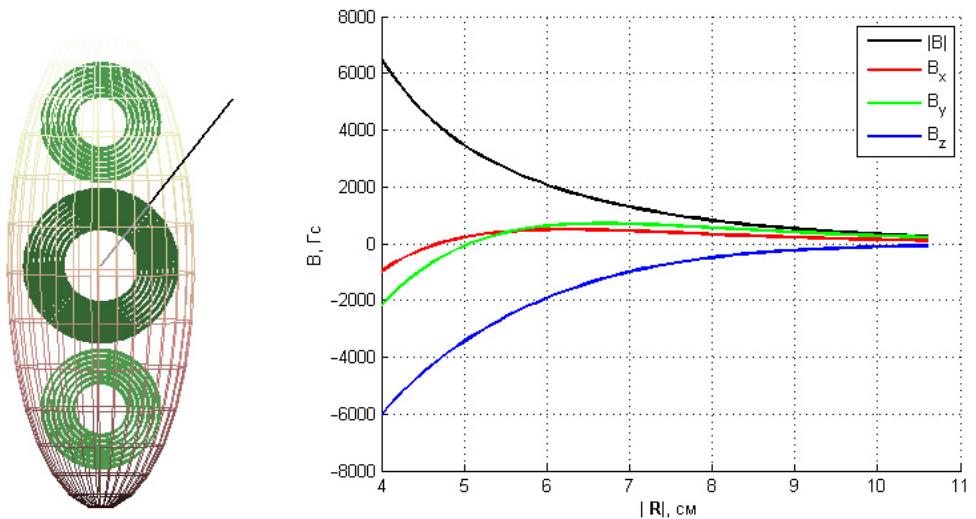


Рис. 4.22. Катушки и описанный около них условный эллипсоид. Показан луч, вдоль которого ведётся расчёт, исходящий из центра системы в направлении  $\theta = 45^\circ$ ,  $\varphi = 50^\circ$  в сферической системе координат, а также рассчитанные модуль и компоненты вектора поля.

изомагнитные линии в заданном сечении. Примеры расчётов показаны на рис. 4.22 и 4.23.

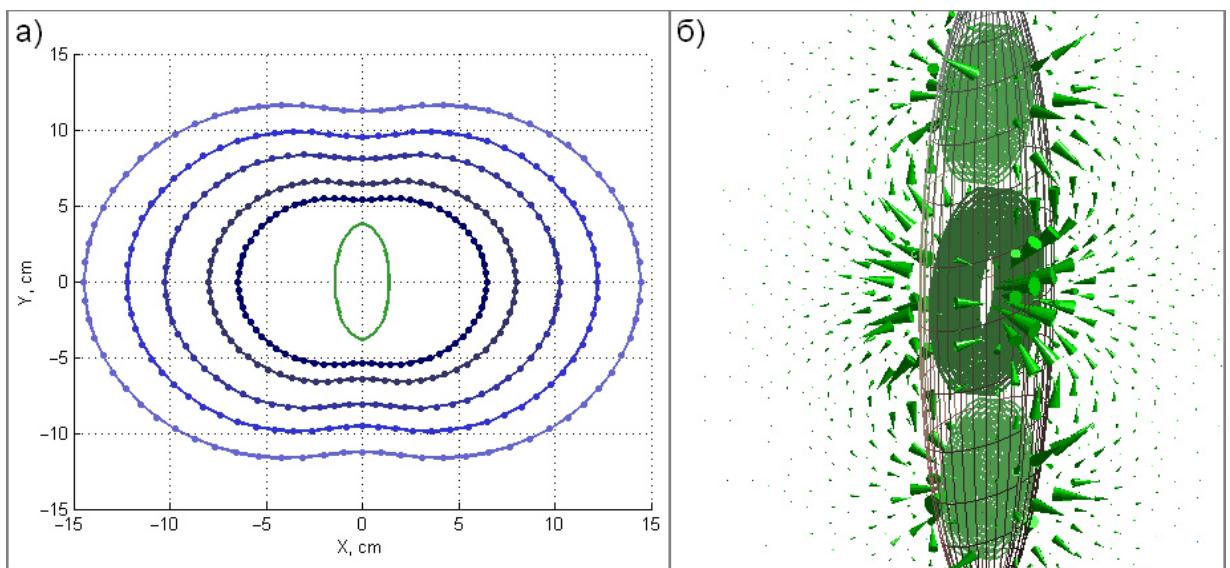


Рис. 4.23. а) Сечение изомагнитных поверхностей  $B = 1000, 500, 200, 100, 50 \text{ Гс}$  плоскостью  $z = 0$ . Изолинии показаны оттенками синего цвета, сечение условного эллипсоида по центру — зелёным. б) Визуализация векторного поля с помощью конусов, длина которых пропорциональна напряжённости магнитного поля в данной точке, а направление совпадает с направлением вектора поля в точке.

# Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Предложена теоретическая модель для расчёта магнитного поля в короне в потенциальном приближении, представляющая собой модификацию модели с поверхностью источника. В дополнение к фотосферной поверхности  $R_\odot$ , на которой магнитное поле задаётся по результатам наблюдений, и поверхности источника  $R_s$  в ней введена новая разграничающая поверхность,  $R_L$ , на которой модуль радиальной составляющей магнитного поля полагается равным константе, а её знак скачкообразно изменяющимся при переходе от одной полусфера к другой. В модели учтены экспериментальные результаты, полученные на КА “Улисс”. В рамках данной модели получены общие аналитические формулы для расчёта потенциала и магнитного поля. Проведены расчёты для дипольных и квадрупольных гармоник на фотосфере. Получены выражения для поверхностных токов.
2. Даны общие принципы описания и классификации нулевых точек 2-го и высших порядков потенциального магнитного поля в трёхмерном пространстве. Показано, что потенциал вблизи нуля порядка  $p$  общего вида можно задать как линейную комбинацию базисных функций, число которых может быть сокращено за счёт подходящего выбора системы координат. Приведены выражения для этих функций для нулей низших порядков. Для нулевых точек порядка 2-го и выше можно дать качественное описание геометрии их окрестностей путём рассмотрения поведения силовых линий вблизи исходящих из нулевой точки лучей, на которых поле радиально или же равно нулю. Сформулирована соответствующая задача на собственные функции. Для 2-го порядка получен ряд аналитических решений общего характера. Результаты непосредственно обобщаются на произвольное векторное поле, потенциал которого удовлетворяет уравнению Лапласа. Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях по магнитному пересоединению в космической плазме.

3. Проведены численные исследования магнитного поля для модели сверхпроводящего магнита спектрометра AMS-02, разработанной в ИЛФ СО РАН.
4. С использованием методов математического моделирования дано описание поведения силовых линий магнитного поля системы из двух одинаковых сцепленных перпендикулярно токовых колец, вблизи которой существуют области как упорядоченности, так и хаотичности. Найдены существующие в ней подсистемы замкнутых линий. Рассчитано взаимное расположение этих подсистем. На малых происходит приближённая намотка силовых линий на топологически эквивалентные торам поверхности, охватывающие каждое из токовых колец. На больших расстояниях поле системы дипольное, и происходит приближённая намотка силовых линий на топологические торы, охватывающие систему как целое. В промежутке между этими системами вложенных торов образуется область хаотичности, включающая “магнитные острова”.

Автор выражает искреннюю признательность и благодарность научному руководителю — профессору Веселовскому Игорю Станиславовичу за помощь на всех этапах выполнения диссертационной работы.

# Литература

1. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: ФИЗМАТЛИТ, 616 с. 2008.
2. Котельников И.А. Генезис плазмы или история одного слова // Вестник НГУ. Серия: Физика. 2008. Т. 3. № 2. С. 108–117.
3. Шафранов В.Д., Бондаренко Б.Д., Гончаров Г.А. К истории исследований по управляемому термоядерному синтезу // УФН. 2001. Т. 171. № 8. С. 877–908.
4. Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика (2-е изд.). М.: Мир, 260 с. 1967.
5. Прист Э., Форбс Т. Магнитное пересоединение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 592 с. 2005.
6. Schatten K.H., Wilcox J.M., Ness N.F. A model of interplanetary and coronal magnetic fields // Solar Phys. 1969. V. 6. № 3. P. 442–455.
7. Altshuler M.D., Newkirk G.Jr. Magnetic fields and the structure of the solar corona. I: methods of calculating coronal fields // Solar Phys. 1969. V. 9. № 1. P. 131–149.
8. Axford W.I., Gleeson L.J. An analytic model illustrating the effects of rotation on a magnetosphere containing low-energy plasma // J. Geophys. Res. 1976. V. 81. № 19. P. 3403–3406.
9. Alexeev I.I., Belenkaya E.S. Modeling of the Jovian magnetosphere // Ann. Geophys. 2005. V. 23. P. 809–826.
10. Smith E.J., Balogh A. Ulysses observations of the radial magnetic field // Geophys. Res. Lett. 1995. V. 22. № 23. P. 3317–3320.
11. Longcope D.W. Topological methods for the analysis of solar magnetic fields // Living Rev. Solar Phys. 2005. V. 2. № 7.
12. Горбачёв В.С., Кельнер С.Р., Сомов Б.Б., Шварц А.С. Новый топологический подход к вопросу о триггере солнечных вспышек // Астрономический журнал. 1988. Т. 65. С. 601–612.

13. Сомов Б.В. О топологическом триггере больших эруптивных вспышек на Солнце // Письма в астрономический журнал. 2008. Т. 34. № 9. С. 702–713.
14. Сомов Б.В., Орешина И.В. Эволюция фотосферного магнитного поля и корональные нулевые точки перед вспышками // Письма в астрономический журнал. 2009. Т. 35. № 3. С. 234–240.
15. Oreshina A. V., Oreshina I. V., Somov B. V. Magnetic-topology evolution in NOAA AR 10501 on 2003 November 18 // A&A. 2012. A138.
16. Cowley S.W.H. A qualitative study of the reconnection between the Earth's magnetic field and an interplanetary field of arbitrary orientation // Radio Science. 1973. V. 8. P. 903–913.
17. Parnell C.E., Smith J.M., Neukirch T., Priest E.R. The structure of three-dimensional magnetic neutral points // Phys. Plasmas. 1996. V. 3. P. 759–770.
18. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтиевича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 3.
19. Жуковская Ю.Д. Нейтральные (нулевые) точки магнитных полей // Геомагнетизм и аэрономия, 1966. Т. 6. № 3. С. 506–511.
20. Костомаров Д.П., Ечкина Е.Ю., Иновенков И.Н., Буланов С.В. Моделирование магнитного перезамыкания в трёхмерной геометрии // Математическое моделирование. 2009. Т. 21. № 11. С. 3–15.
21. Démoulin P., Hénoux J.C., Mandrini C.H. Development of a topological model for solar flares // Solar Phys. 1992. V. 139. P. 105–123.
22. Démoulin P., Mandrini C.H., Rovira M.G., Hénoux J.C. Interpretation of multiwavelength observations of November 5, 1980 solar flares by the magnetic topology of AR 2766 // Solar Phys. 1994. V. 150. P. 221–243.
23. Démoulin P., Hénoux J.C., Priest E.R., Mandrini C.H. Quasi-separatrix layers in solar flares. I. Method // Astron. Astrophys. 1996. V. 308. P. 643–655.
24. Démoulin P., Bagalá L.G., Mandrini C.H., Hénoux J.C., Rovira M.G. Quasi-separatrix layers in solar flares. II. Observed magnetic configurations // Astron. Astrophys. 1997. V. 325. P. 305–317.

25. *Des Jardins A.C.* The topology of magnetic reconnection in solar flares // Proquest Dissertations And Theses 2007. Section 0137, Part 0606 100 pages; [Ph.D. dissertation]. United States – Montana: Montana State University; 2007. Publication Number: AAT 3273488. Source: DAI-B 68/07, Jan 2008
26. *Ильгисонис В.И.* Классические задачи физики горячей плазмы: курс лекций. М.: Издательский дом МЭИ, 326 с. 2015.
27. *Hosoda M., Miyaguchi T., Imagawa K., Nakamura K.* Ubiquity of chaotic magnetic-field lines generated by three-dimensionally crossed wires in modern electric circuits // Phys. Rev. E. 2009. V. 80. 067202.
28. *Aguirre J., Peralta-Salas D.* Realistic examples of chaotic magnetic fields created by wires // EPL, 2007. V. 80. 60007.
29. *Ram A.K., Dasgupta B.* Dynamics of charged particles in spatially chaotic magnetic fields // Phys. Plasmas. 2010. V. 17. 122104.
30. *Lieberherr M.* The magnetic field lines of a helical coil are not simple loops // Am. J. Phys. 2010. V. 78. № 11. P. 1117–1119.
31. *Лукашенко А.Т.* Об описании потенциального векторного поля без источников вблизи нулевых точек высших порядков в пространстве // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, математика, механика. 2016. № 4. С. 18–22.
32. *Lukashenko A.T., Veselovsky I.S.* General principles of describing second- and higher-order null points of a potential magnetic field in 3D // Geomagnetism and Aeronomy. 2015. V. 55, № 8. P. 1152–1158.
33. *Веселовский И.С., Лукашенко А.Т.* Статистика изолированных и сложных геомагнитных бурь по материалам базы данных “APEV” за 23-й цикл солнечной активности // Геомагнетизм и аэрономия. 2013. Т. 53. № 5. С. 635–644.
34. *Веселовский И.С., Лукашенко А.Т.* Модель магнитного поля во внутренней гелиосфере с учётом выравнивания радиальной напряжённости в короне Солнца // Астрономический вестник. 2012. Т. 46, № 2, с. 162–172.

35. Веселовский И.С., Лукашенко А.Т. Хаотическое поведение линий магнитного поля вблизи простейших токовых систем // Тр. XIX Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца “Солнечная и солнечно-земная физика-2015”. СПб, 2015. С. 55–58.
36. Лукашенко А.Т., Веселовский И.С. О принципах описания нулевых точек высших порядков магнитного поля в пространстве // Тр. XIX Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца “Солнечная и солнечно-земная физика-2015”. СПб, 2015. С. 261–264.
37. Лукашенко А.Т., Веселовский И.С. О геометрии потенциального магнитного поля в окрестностях нулевых точек 2-го и высших порядков // Тр. XVIII Всероссийской ежегодной конференции с международным участием “Солнечная и солнечно-земная физика-2014”. СПб, 2014. 263–266.
38. Веселовский И.С., Лукашенко А.Т. О переменном знаке потоков энергии и вещества вблизи Солнца // Тр. XVIII Всероссийской ежегодной конференции с международным участием “Солнечная и солнечно-земная физика-2014”. СПб, 2014. 83–86.
39. Zakharov Yu.P., Antonov V.M., Boyarintsev E.L., Vchivkov K.V., Melekhov A.V., Posukh V.G., Shaikhislamov I.F., Ponomarenko A.G., Veselovsky I.S., Lukashenko A.T. On the interaction effects of ionospheric plasma with dipole magnetic field of the spectrometer ams-02 moving on-board of international space station // 2009 International Conference on Space Science and Communication (IconSpace 2009), 2009. Р. 96–101.
40. Лукашенко А.Т. Магнитные поверхности, упорядоченное и хаотическое поведение линий магнитного поля вблизи системы сцепленных токов // Солнечная и солнечно-земная физика-2016, всероссийская ежегодная конференция по физике Солнца, 10–14 октября 2016, тезисы докладов. СПб, 2016. С. 52.
41. Веселовский И.С., Лукашенко А.Т. Роль электронов и электрических полей в короне и солнечном ветре // Солнечная и солнечно-земная физика-2016, всероссийская ежегодная конференция по физике Солнца, 10–14 октября 2016, тезисы докладов. СПб, 2016. С. 17.

42. *Veselovsky I.S., Lukashenko A.T.* Simple electric currents with tangled magnetic fields // AGU Chapman conference, Dubrovnik, Croatia, 22-27 May 2016. American Geophysical Union [Washington], United States, 2016. P. 37–38.
43. *Лукашенко А.Т.* Геометрия линий потенциального бездивергентного векторного поля в пространстве вблизи нулевых точек высших порядков // XXIV Международная конференция “Математика. Экономика. Образование”. IX симпозиум “Ряды Фурье и их приложения”. Международная конференция по стохастическим методам. Тезисы докладов. 2016. С. 143.
44. *Веселовский И.С., Лукашенко А.Т.* Сложная топология магнитного поля в простой системе электрических токов // Физика плазмы в Солнечной системе. Одиннадцатая ежегодная конференция. 15–19 февраля 2016 года. ИКИ РАН. Сборник тезисов. 2016. С. 140.
45. *Веселовский И.С., Лукашенко А.Т.* Принципы описания геометрии потенциального магнитного поля вблизи нулевых точек 1-го, 2-го и высших порядков // Физика плазмы в Солнечной системе. Одиннадцатая ежегодная конференция. 15–19 февраля 2016 года. ИКИ РАН. Сборник тезисов. 2016. С. 127.
46. *Веселовский И.С., Лукашенко А.Т.* Хаотическое поведение линий магнитного поля вблизи простейших токовых систем // Солнечная и солнечно-земная физика-2015, всероссийская ежегодная конференция по физике Солнца, 5–9 октября 2015, тезисы докладов. СПб, 2015. С. 63.
47. *Лукашенко А.Т., Веселовский И.С.* О принципах описания нулевых точек высших порядков магнитного поля в пространстве // Солнечная и солнечно-земная физика-2015, всероссийская ежегодная конференция по физике Солнца, 5–9 октября 2015, тезисы докладов. СПб, 2015. С. 62.
48. *Lukashenko A.T., Veselovsky I.S.* Geometry and topology of bifurcations of the potential magnetic field lines in the vicinity of 1st, 2nd and higher-order null points // 597th WE-Heraeus-Seminar “Stochasticity in Fusion

Plasmas”, Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung Physikzentrum Bad Honnef, Germany, 2015. P. 69.

49. *Лукашенко А.Т.* Принципы описания нулевых точек потенциального магнитного поля в пространстве // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского, 2015. Т. 51. С. 291–293.
50. *Веселовский И.С., Лукашенко А.Т.* Геометрия и топология потенциального магнитного поля вблизи нулевых точек 2-го и высших порядков // Десятая ежегодная конференция “Физика плазмы в солнечной системе”, 16–20 февраля 2015 г., ИКИ РАН, сборник тезисов. 2015. С. 148–149.
51. *Веселовский И.С., Лукашенко А.Т.* О бифуркациях нулевых точек потенциального магнитного поля // Десятая ежегодная конференция “Физика плазмы в солнечной системе”, 16–20 февраля 2015 г., ИКИ РАН, сборник тезисов. 2015. С. 151.
52. *Веселовский И.С., Лукашенко А.Т.* Источники солнечного ветра // Десятая ежегодная конференция “Физика плазмы в солнечной системе”, 16–20 февраля 2015 г., ИКИ РАН, сборник тезисов. 2015. С. 48.
53. *Лукашенко А.Т., Веселовский И.С.* О геометрии потенциального магнитного поля вблизи нулевых точек 2-го и высших порядков // XVIII всероссийская ежегодная конференция с международным участием Солнечная и солнечно-земная физика-2014. СПб, 2014. С. 123.
54. *Веселовский И.С., Лукашенко А.Т.* О переменном знаке потоков энергии и вещества вблизи Солнца // XVIII всероссийская ежегодная конференция с международным участием Солнечная и солнечно-земная физика-2014. СПб, 2014. С. 122.
55. *Veselovsky I.S., Lukashenko A.T.* Isolated and grouped geomagnetic storms during the 23rd solar cycle // Abstract Volume 12th Scientific Assembly International Association of Geomagnetism and Aeronomy (IAGA-2013 meeting). Merida, Mexico, 2013. P. 270.

56. *Веселовский И.С., Лукашенко А.Т., Яковчук О.С.* Создание и использование базы данных о геомагнитных бурях с немонотонным развитием // Вторая научная конференция “Базы данных, инструменты и информационные основы полярных геофизических исследований” (POLAR-2012), ИЗМИРАН, Троицк, 22–26 мая 2012 г.
57. *Веселовский И.С., Лукашенко А.Т.* Модифицированная модель магнитного поля в гелиосфере // Научная сессия НИЯУ МИФИ–2012. Аннотации докладов, Москва, 2012. Т. 2. С. 114.
58. *Лукашенко А.Т., Веселовский И.С.* Модифицированная модель магнитного поля с поверхностью источника, наклонным токовым слоем и поверхностью выравнивания во внутренней гелиосфере // 7-ая конференция “Физика плазмы в солнечной системе”. 06–10 февраля 2012 Г., ИКИ РАН, Сборник тезисов докладов. Москва, 2012. С. 147.
59. *Лукашенко А.Т., Веселовский И.С.* Модифицированная модель магнитного поля в короне и внутренней гелиосфере на основе данных КА “Улисс” // Конференция “Физика плазмы в солнечной системе”, 14–18 февраля 2011. ИКИ РАН, Москва, 2011. С. 61.
60. *Денисов В.И.* Лекции по электродинамике. Учебное пособие. М.: УНЦ ДО, 272 с. 2005.
61. *Faraday M.* Experimental Researches in Electricity, 3 volumes, London: Bernard Quaritch, 1839 and New York: Dover, 1965.
62. Физика. Большой энциклопедический словарь // Гл. ред. А.М. Прохоров. 4-е изд. М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. 944 с.
63. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: ФИЗМАТЛИТ, 616 с. 2003.
64. *Сковорода А.А.* Магнитные ловушки для удержания плазмы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 216 с. 2009.
65. *Boozer A.H.* Physics of magnetically confined plasmas // Rev. Mod. Phys. 2004. V. 76. № 4. P. 1071–1141.
66. *Wesson J.* Tokamaks. Clarendon Press – Oxford, 755 p. 2004.

67. Пархоменко А.С. Линия // Математическая энциклопедия (под ред. Виноградова И.М.), т. 3. М.: Советская энциклопедия, 1977.
68. Пархоменко А.С. Что такое линия. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 140 с. 1954.
69. Урысон П.С. Труды по топологии и другим областям математики, т. 2. М., Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951.
70. Гельфанд И.М., Граев М.И., Зуева Н.М., Морозов А.И., Соловьев Л.С. Магнитные поверхности трёхзаходного винтового магнитного поля, возмущённого гофрированным полем // ЖТФ. 1961. Т. 31. № 10. С. 1164–1169.
71. Гельфанд И.М., Граев М.И., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И. Пример тороидального магнитного поля, не обладающего магнитными поверхностями // ДАН СССР. 1962. Т. 143. № 1. С. 81–83.
72. Гельфанд И.М., Граев М.И., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И. О структуре магнитного тороидального поля, не обладающего магнитными поверхностями // ДАН СССР. 1963. Т. 148. № 6. С. 1286–1289.
73. Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И. Пример структуры магнитного поля с разрушающимися магнитными поверхностями // ДАН СССР. 1963. Т. 153. № 4. С. 801–803.
74. Пустовитов В.Д., Шафранов В.Д. Равновесие и устойчивость плазмы в стеллараторах // Вопросы теории плазмы. Выпуск 15. / М.: Энергоатомиздат, 1987. С. 146.
75. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Движение частиц в винтовом тороидальном магнитном поле // Журнал технической физики. 1960. Т. 30. Вып. 3. С. 271.
76. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ; Наука, 416 с. 2004.
77. Мијамото К. Основы физики плазмы и управляемого синтеза. М.: ФИЗМАТЛИТ, 424 с. 2007.

78. *D'haeseleer W.D., Hitchon W.N.G., Callen J.D., Shohet J.L.* Flux coordinates and magnetic field structure: a guide to a fundamental tool of plasma theory // Springer series in computational physics. Springer-Verlag. 1991.
79. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. I. Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 224 с. 2002.
80. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 372 с. 1984.
81. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 368 с. 1988.
82. *Заславский Г.М.* Физика хаоса в гамильтоновых системах. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 288 с. 2004.
83. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 528 с. 1984.
84. *Гукенхаймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания динамических систем и бифуркации векторных полей. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 560 с. 2002.
85. *Сковорода А.А.* Гамильтоново описание вакуумного магнитного поля замкнутых конфигураций // Физика плазмы. 2015. Т. 41. № 5. С. 401–412.
86. *Франк А.Г.* Динамика токовых слоёв как основа вспышечных явлений в замагниченной плазме // УФН. 2010. Т. 180. № 9. С. 982–988.
87. *Франк А.Г.* Приложение В. Перезамыкание силовых линий в плазме // *Морозов А.И.* Введение в плазмодинамику. М.: ФИЗМАТЛИТ, 616 с. 2008.
88. *Буланов С.В., Ольшанецкий М.А.* О кумулятивных течениях плазмы вблизи нулевых точек магнитного поля // Физика плазмы. 1985. V. 11. P. 727–738.
89. *Петриашвили В.И., Похотелов О.А.* Уединённые волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 200 с. 1989.
90. *Galsgaard K., Pontin D.I.* Current accumulation at an asymmetric 3D null point caused by generic shearing motions // A&A. 2011. 534, A2.

91. *Веселовский И.С., Кропоткин А.П.* Физика межпланетного и околоземного пространства: учебное пособие. М.: Университетская книга, 116 с. 2010.
92. *Обридко В.Н., Шелътинг Б.Д., Харшиладзе А.Ф.* Расчёты межпланетного магнитного поля по данным о его величине в фотосфере Солнца // Геомагнетизм и аэрономия. 2006. Т. 40. № 3. С. 310–312.
93. *Филиппов Б.П.* Эruptивные процессы на Солнце. М.: ФИЗМАТЛИТ, 216 с. 2007.
94. *Пишкало Н.И.* Расчёт магнитного поля в короне во время полного солнечного затмения 1 августа 2008 г. в потенциальном приближении // Кинематика и физика небесных тел. 2010. Т. 26. № 3.
95. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, Наука, 798 с. 2004.
96. *Sun X.* Notes on PFSS Extrapolation // 2009.  
<http://wso.stanford.edu/words/pfss.pdf>
97. *Веселовский И.С., Иванов А.В.* Визуализация магнитного поля Солнца по известным гармоническим коэффициентам разложения в потенциальном приближении // Астрономический вестник. 2006. Т. 40. № 3. С. 1–6.
98. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. 2-е изд., исправленное. СПб.: БХВ-Петербург, 592 с. 2014.
99. *Khabarova O.V.* The interplanetary magnetic field: radial and latitudinal dependences // Astronomy Reports. 2013. V. 57. № 11. P. 844–859.
100. *Inverarity G.W., Priest E.R.* Magnetic null points due to multiple source of solar photospheric flux // Solar Phys. 1998. V. 186. P. 99–121.
101. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М., Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947.
102. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения (6-е изд.). М.: КомКнига, 2006.

103. *Андронов А.А., Леонтьевич Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 568 с. 1966.
104. *Андронов А.А., Леонтьевич Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 488 с. 1967.
105. *Dungey J.W.* Conditions for the occurrence of electrical discharges in astrophysical systems // Phil. Mag. 1953. V. 44. P. 725–738.
106. *Priest E.R., Titov V.S.* Magnetic reconnection at three-dimensional null points // Phil. Trans. Royal Soc. A. 1996. V. 354, № 1721, P. 2951–2992.
107. *Fukao S., Masayuki U., Takao T.* Topological study of magnetic field near a neutral point // J. Geophys. Res. 1988. V. 93. P. 8583–8590.
108. *Greene J.M.* Geometrical properties of three-dimensional reconnecting magnetic fields with nulls // J. Geophys. Res. 1988. V. 93. P. 8583–8590.
109. *Dungey J.W.* Interplanetary magnetic field and the auroral zones // Phys. Rev. Lett. 1961. V. 6. P. 47–49.
110. *Stern D.P.* A Study of the electric field in an open magnetospheric model // J. Geophys. Res. 1973. V. 78. № 31. P. 7292–7305.
111. *Lau Y.-T., Finn J.M.* Three-dimensional kinematic reconnection in the presence of field nulls and close field lines // Astrophys J. 1990. V. 350. P. 672–691.
112. *Priest E.R., Bungey T.N., Titov V.S.* The 3D topology and interaction of complex magnetic flux systems // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. 1997. V. 84. № 1. P. 127–163.
113. *Priest E.R., Lonie D.P., Titov V.S.* Bifurcation of magnetic topology by the creation or annihilation of null points // J. Plasma Phys. 1996. V. 56. № 3. P. 507–530.
114. *Brown D.S., Priest E.R.* Topological bifurcation in three-dimensional magnetic fields // Proc. R. Soc. Lond., Ser. A. 1999. V. 455. P. 3931–3951.
115. *Brown D.S., Priest E.R.* The topological behaviour of stable magnetic separators // Solar Physics. 1999. V. 190. P. 25–33.

116. Titov V.S., Mikić Z., Linker J.A., Lionello R., Antiochos S.K. Magnetic topology of coronal hole linkage // *Astrophys J.* 2011. V. 731. P. 111–125.
117. Galsgaard K., Rickard J.G., Reddy R.V., Nordlund A. Dynamical properties of single and double 3D null points // *Magnetic Reconnection in the Solar Atmosphere* (Eds. Bentley R.D., Mariska J.T.). ASP Conference Series. V. 111. 1996.
118. Galsgaard K., Rickard J.G., Reddy R.V., Nordlund A. Double null points and magnetic reconnection // *Adv. Space Res.* 1997. V. 19. № 12. P. 1785–1788.
119. Piras F., Bencze A., Coda S., Duval B.P., Furno I., Moret J-M., Pitts R.A., Sauter O., Tal B., Wagner D., Felici F., Labit B., Marki J., Martin Y., Medvedev S., Pitzschke A., Pochebon A., Turri G., Zucca C. and the TCV Team. Snowflake Divertor Plasmas on TCV // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2009. V. 51. 055009. doi: 10.1088/0741-3335/51/5/055009.
120. Ryutov D.D., Makowski M.A., Umansky M.V. Local properties of the magnetic field in a snowflake divertor // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2010. V. 52. 105001.
121. Ryutov D.D., Umansky M.V. Divertor with a third-order null of the poloidal field // *Phys. Plasmas*. 2013. V. 20. 092509.
122. Jaroensutasinee K., Rowlands G. Charged-particle orbits near a magnetic null point // *J. Plasma Physics*. 2000. V. 64. № 3. P. 255–262.
123. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
124. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. Т. 1: Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. М.: УРСС: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 336 с. 2013.
125. Соболев С.Л. Уравнения математической физики (4-е изд.). М.: Наука, 1966.
126. Boozer A.H. Mathematics and Maxwell’s equations // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2010. V. 52. № 12. 124002.

127. Ремесленников В.Н., Воскресенский В.Е. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М., Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947.
128. Gallier J. Notes on spherical harmonics and linear representations of Lie groups. 2014. <http://www.seas.upenn.edu/~jean/diffgeom.pdf>
129. Вильямс Н.Н. Кватернион // Математическая энциклопедия (в 5-ти томах) / Ред. И.М. Виноградов, т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1104 с. 1979.
130. Dumin Yu. V., Somov B. V. What is generic structure of the 3D null-point magnetic reconnection? // 2015. arXiv:1407.6039v2 [physics.plasm-ph].
131. Pontin D.I. Reconnection of magnetic fields / Eds. Birn J., Priest E.R. Cambridge University Press. 2007. P. 62.
132. Miyaguchi T., Hosoda M., Imagawa K., Nakamura K. Topology of magnetic field lines: Chaos and bifurcations emerging from two-action systems // Phys. Rev. E. 2011. V. 83. 016205.
133. Zhao D., Gao L. Spatial distribution of the magnetic field generated by a circular arc current // Adv. Studies Theor. Phys. 2010. V. 4. № 6. P. 275–282.
134. Simpson J.C., Lane J.E., Immer C.D., Youngquist R.C. Simple analytic expressions for the magnetic field of a circular current loop // 2001. [http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20010038494\\_2001057024.pdf](http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20010038494_2001057024.pdf)
135. Blau B., Harrison S.M., Hofer H., Horvath I.L., Milward S.R., Ross J.S.H., Ting S.C.C., Ulbricht J., Viertel G. The Superconducting Magnet System of AMS-02 – A Particle Physics Detector to be Operated on the International Space Station // Nuclear Physics B – Proceedings Supplements. 2002. V. 113. Issues 1–3. P. 125–132.
136. Battiston R. The Anti Matter Spectrometer (AMS-02): a Particle Physics Detector In Space // Journal of Physics: Conference Series. 2008. V. 116. 012001.
137. Battiston R. The Anti Matter Spectrometer (AMS-02): a Particle Physics Detector In Space // J. Phys. Soc. Jpn. 2009. V. 78. Suppl. A. P. 74–77.

138. *Hoeksema J.T.* The Solar Magnetic Field Since 1976 // An Atlas of Photospheric Magnetic Field Observations and Computed Coronal Magnetic Fields from the John M. Wilcox Solar Observatory at Stanford (Minimally revised from UAG-94, WDC-A, 1985).

# Приложение А. Использование гармонических коэффициентов Солнечной обсерватории им. Уилкокса (WSO)

Солнечная обсерватория Уилкокса (Wilcox Solar Observatory (WSO)) начала каждодневные наблюдения глобального магнитного поля Солнца в мае 1975 г., ставя перед собой целью понимание изменений на Солнце и того, как эти изменения влияют на Землю; в настоящее время это называется космической погодой. Начиная с 1976 г. также каждый день создаются карты магнитного поля Солнца с низким разрешением и ведутся наблюдения за движением поверхности Солнца.

При получении гармонических коэффициентов Солнечной обсерватории им. Уилкокса (WSO) используются два метода:

1. Метод “los” (line-of-sight) использовался и публиковался в течение многих лет; в этой модели предполагается, что измеряемое на фотосфере поле может быть нерадиальным.
2. Метод “rad” (radial), предположительно, лучше. В нём предполагается, что фотосферное поле радиально. Наилучший радиус поверхности источника равен 3.25 против 2.5 солнечных радиусов в los-модели.

В случае Potential Field Source Surface Model – Radial (Independent of  $R_s$ ) (метод “rad”) формула разложения радиальной компоненты магнитного поля по мультипольным гармоникам имеет для фотосферы вид [96]:

$$B_r(R_0, \theta, \varphi) = \sum_{lm} P_l^{(m)}(\cos \theta)(g_{lm} \cos m\varphi + h_{lm} \sin m\varphi), \quad (\text{A.1})$$

где коэффициенты  $g_{lm}$  и  $h_{lm}$  представлены на странице <http://wso.stanford.edu/Harmonic.rad/ghlist.html>.

В случае же Classic Line-of-Sight Photospheric Boundary Condition – Classic  $2.5 R_s$  (метод “los”) следует, соответственно, руководствоваться формулой [138]:

$$\begin{aligned} B_r(R_0, \theta, \varphi) &= \\ &= \sum_{lm} P_l^{(m)}(\cos \theta)(g_{lm} \cos m\varphi + h_{lm} \sin m\varphi) \left[ l + 1 + l \left( \frac{R_0}{R_s} \right)^{2l+1} \right], \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

где коэффициенты  $g_{lm}$  и  $h_{lm}$  представлены на странице <http://wso.stanford.edu/Harmonic.los/ghlist.html>,  $R_0$  — радиус фотосферы,  $R_s$  — поверхности источника.

Нормировка коэффициентов в [96] отличается от стандартной нормировки в формуле (2.8), так что нормировочные множители при входящих в выражения присоединённых функциях Лежандра  $P_n^{(m)}$  равны  $\sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}}$  при  $m \neq 0$  и единице при  $m = 0$ .

Таблица A.1: los-коэффициенты  $g_{lm}$  (мкТл) кэррингтоновского оборота CR 2111.

	$m$									
$l$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-3.803									
1	-14.365	5.941								
2	6.158	-5.189	-16.811							
3	-9.056	-1.369	-7.733	11.025						
4	1.169	-3.526	2.146	11.396	-17.635					
5	-13.602	-4.607	6.575	4.870	4.789	7.449				
6	0.702	2.165	0.573	0.911	-1.760	-10.732	-22.075			
7	3.613	0.042	-4.719	2.007	8.587	5.619	-5.492	15.176		
8	-1.213	-3.766	-2.502	-2.402	6.135	1.055	-11.503	15.567	-2.661	
9	-5.665	-1.122	2.055	-0.522	-4.211	-3.368	3.668	6.887	-2.866	7.796

Таблица A.2: los-коэффициенты  $h_{lm}$  (мкТл) кэррингтоновского оборота CR 2111.

	$m$									
$l$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.000									
1	0.000	-16.580								
2	0.000	-1.779	1.082							
3	0.000	-3.283	-26.336	-12.034						
4	0.000	-1.515	-2.213	5.074	6.233					
5	0.000	0.671	2.896	-2.976	-13.677	4.219				
6	0.000	0.807	-1.210	-0.849	5.689	28.288	9.413			
7	0.000	-1.700	-0.612	-3.539	-0.652	2.997	-0.648	-4.562		
8	0.000	1.310	-3.048	-3.613	-0.663	2.076	-1.580	-1.151	11.273	
9	0.000	0.794	-2.260	0.438	1.340	-2.210	-3.271	1.984	19.648	0.623

В табл. A.1 и A.2 в качестве примера приведены los-коэффициенты  $g_{lm}$  и  $h_{lm}$  (мкТл) кэррингтоновского оборота CR 2111. На рис. A.1 и A.2 показаны восстановленные по коэффициентам картины поля на

фотосфере. “Монопольный” коэффициент  $g_{00}$  (монопольные коэффициенты представляет возникающий ввиду различных причин “нулевой сдвиг”) из табл. A.1 при восстановлении не учитывался.

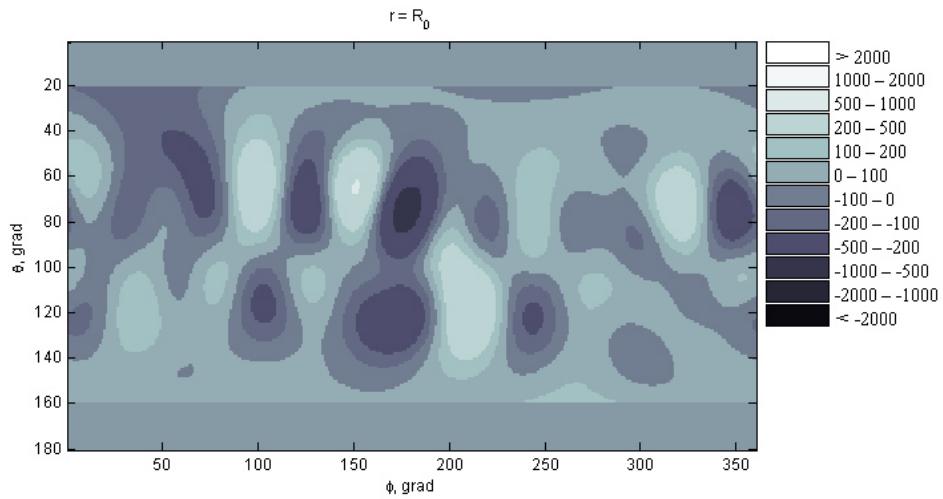


Рис. A.1. CR 2111. Реконструкция  $B_r$  на фотосфере (по los-коэффициентам).

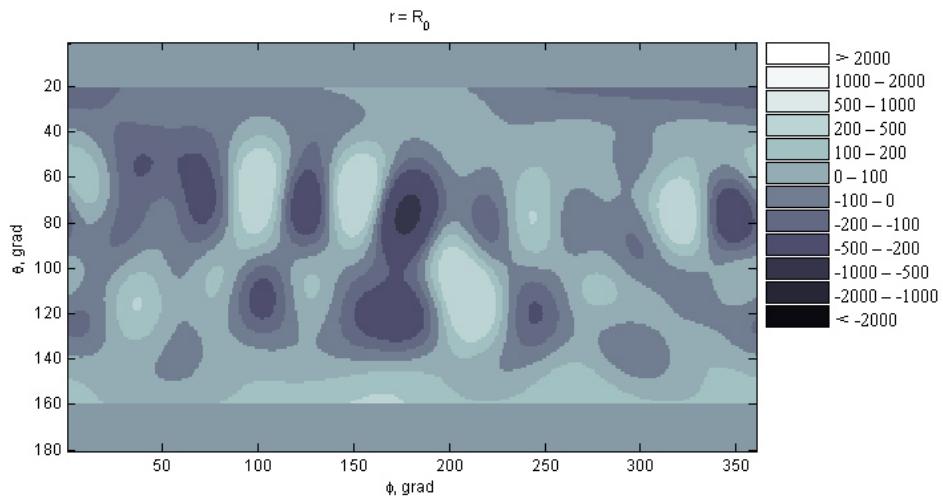


Рис. A.2. CR 2111. Реконструкция  $B_r$  на фотосфере (по rad-коэффициентам).

# Приложение Б. Списки полиномов и присоединённых функций Лежандра

## Б.1. Полиномы Лежандра низших порядков

Рекуррентная формула для полиномов Лежандра:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x). \quad (\text{Б.1})$$

Рекуррентная формула для производных полиномов Лежандра [95]:

$$P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x). \quad (\text{Б.2})$$

Свойство чётности:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \quad (\text{Б.3})$$

*Первые чётные полиномы Лежандра:*

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5), \\ P_8(x) &= \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35), \\ P_{10}(x) &= \frac{1}{256}(46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63), \\ P_{12}(x) &= \frac{1}{1024}(676039x^{12} - 1939938x^{10} + 2078505x^8 - 1021020x^6 + 225225x^4 - 18018x^2 + 231), \\ P_{14}(x) &= \frac{1}{2048}(5014575x^{14} - 16900975x^{12} + 22309287x^{10} - \\ &\quad - 14549535x^8 + 4849845x^6 - 765765x^4 + 45045x^2 - 429). \end{aligned}$$

*Первые нечётные полиномы Лежандра:*

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x, \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \\ P_7(x) &= \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x), \\ P_9(x) &= \frac{1}{128}(12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x), \\ P_{11}(x) &= \frac{1}{256}(88179x^{11} - 230945x^9 + 218790x^7 - 90090x^5 + 15015x^3 - 693x), \\ P_{13}(x) &= \frac{1}{1024}(1300075x^{13} - 4056234x^{11} + 4849845x^9 - 2771340x^7 + 765765x^5 - 90090x^3 + 3003x). \end{aligned}$$

## Б.2. Присоединённые функции Лежандра низших порядков

Присоединённые функции Лежандра:

$$P_n^{(m)}(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x). \quad (\text{Б.4})$$

Их норма:

$$\|P_n^{(m)}(x)\|_{[0,1]} = \frac{1}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (\text{Б.5})$$

Свойство чётности:  $P_n^{(m)}(-x) = (-1)^{n-m} P_n^{(m)}(x)$ .

Список для низших порядков:

$$n = 0: P_0 = 1$$

$$n = 1: P_1 = \cos \theta$$

$$P_1^{(1)} = \sin \theta$$

$$n = 2: P_2 = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_2^{(1)} = 3 \sin \theta \cos \theta$$

$$P_2^{(2)} = 3 \sin^2 \theta$$

$$n = 3: P_3 = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

$$P_3^{(1)} = 3 \sin \theta \frac{5 \cos^2 \theta - 1}{2}$$

$$P_3^{(2)} = 15 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$P_3^{(3)} = 15 \sin^3 \theta$$

$$n = 4: P_4 = \frac{1}{8}(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$$

$$P_4^{(1)} = 5 \sin \theta \frac{7 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}{2}$$

$$P_4^{(2)} = 15 \sin^2 \theta \frac{7 \cos^2 \theta - 1}{2}$$

$$P_4^{(3)} = 105 \sin^3 \theta \cos \theta$$

$$P_4^{(4)} = 105 \sin^4 \theta$$

$$n=5: \; P_5 = \tfrac{1}{8}(63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta)$$

$$P_5^{(1)} = 15\sin\theta \frac{21\cos^4\theta - 14\cos^2\theta + 1}{8}$$

$$P_5^{(2)} = 105\sin^2\theta \frac{3\cos^3\theta - \cos\theta}{2}$$

$$P_5^{(3)} = 105\sin^3\theta \frac{9\cos^2\theta - 1}{2}$$

$$P_5^{(4)} = 945\sin^4\theta \cos\theta$$

$$P_5^{(5)} = 945\sin^5\theta$$

## Приложение В. Потенциал и поле вблизи нулевых точек высших порядков в пространстве

### В.1. Поле при задании базисными функциями нулевых точек 2-го порядка

Выражения для вектора поля, соответствующие базисным функциям 3-го порядка, представлены в табл. В.1.

Таблица В.1: Вектор поля в окрестности нуля 2-го порядка.

Функция	Потенциал	Поле, В
$V_3^0$	$\frac{1}{6} [2z^3 - 3z(x^2 + y^2)]$	$\begin{cases} -xz \\ -yz \\ \frac{1}{2} (2z^2 - x^2 - y^2) \end{cases}$
$V_3^{1,1}$	$z \frac{x^2 - y^2}{2}$	$\begin{cases} xz \\ -yz \\ \frac{x^2 - y^2}{2} \end{cases}$
$V_3^{1,2}$	$xyz$	$\begin{cases} yz \\ xz \\ xy \end{cases}$
$V_3^{2,1}$	$\frac{1}{6} (x^3 - 3xy^2)$	$\begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{2} \\ -xy \\ 0 \end{cases}$
$V_3^{2,2}$	$\frac{1}{6} (3x^2y - y^3)$	$\begin{cases} xy \\ \frac{x^2 - y^2}{2} \\ 0 \end{cases}$

### В.2. Базисные функции для нулевых точек 3-го порядка

Базисные функции, линейная комбинация которых даёт потенциал 4-го порядка, описывающий нуль 3-го порядка, представлены в табл. В.2.

Таблица B.2: Приведённые однородные гармонические полиномы 4-го порядка в пространственном случае. Запись в декартовой и цилиндрической системах координат и выражения через шаровые функции.

Обозн.	Декартовы координаты	Цилиндрич. координаты $\{\rho, \varphi, z\}$	Выражение через шаровые функции в сферич. координатах $\{r, \theta, \varphi\}$
$V_4^0$	$\frac{1}{96} \left[ 3(x^2 + y^2)^2 - 24(x^2 + y^2)z^2 + 8z^4 \right]$	$\frac{1}{96} (3\rho^4 - 24\rho^2 z^2 + 8z^4)$	$\frac{r^4}{12} P_4^{(0)}(\cos \theta)$
$V_4^{1,1}$	$\frac{1}{12} \frac{x^2 - y^2}{2} (6z^2 - x^2 - y^2)$	$\frac{\rho^2}{4!} (6z^2 - r^2) \cos 2\varphi$	$\frac{r^4}{180} P_4^{(2)}(\cos \theta) \cos 2\varphi$
$V_4^{1,2}$	$\frac{1}{12} xy (6z^2 - x^2 - y^2)$	$\frac{\rho^2}{4!} (6z^2 - r^2) \sin 2\varphi$	$\frac{r^4}{180} P_4^{(2)}(\cos \theta) \sin 2\varphi$
$V_4^{2,1}$	$\frac{z}{6} (x^3 - 3xy^2)$	$\frac{\rho^3 z}{3!} \cos 3\varphi$	$\frac{r^4}{630} P_4^{(3)}(\cos \theta) \cos 3\varphi$
$V_4^{2,2}$	$\frac{z}{6} (3x^2 y - y^3)$	$\frac{\rho^3 z}{3!} \sin 3\varphi$	$\frac{r^4}{630} P_4^{(3)}(\cos \theta) \sin 3\varphi$
$V_4^{3,1}$	$\frac{1}{4!} (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)$	$\frac{\rho^4}{4!} \cos 4\varphi$	$\frac{r^4}{2520} P_4^{(4)}(\cos \theta) \cos 4\varphi$
$V_4^{3,2}$	$\frac{1}{6} (x^3 y - x y^3)$	$\frac{\rho^4}{4!} \sin 4\varphi$	$\frac{r^4}{2520} P_4^{(4)}(\cos \theta) \sin 4\varphi$