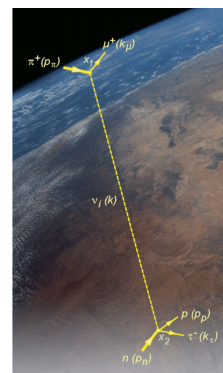


УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ДИАГРАММЫ ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТАТОРОВ

Электрослабая модель в примерах



Дмитрий В. Наумов,
Лаборатория Ядерных Проблем ОИЯИ

Дубна

Д.В.Наумов

-- *Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов* --

Книга представляет собой введение в практические вычисления Фейнмановских диаграмм для различных электрослабых процессов. На древесном уровне мы вычисляем ширины слабых распадов мюона, пиона, тау-лептона, нейтрона и других частиц, сечения рассеяния нейтрино и анти-нейтрино на лептоне и на нуклоне. Также в книгу вошли некоторые избранные вопросы из спиновой физики и физики нейтрино.

Contents

1	Введение. Краткий обзор физики частиц	5
1.1	Четыре взаимодействия.	5
1.1.1	Гравитация	5
1.1.2	Электромагнитное взаимодействие.	8
1.1.3	Слабое взаимодействие.	9
1.1.4	Сильное взаимодействие.	9
1.2	Лептоны и кварки.	10
1.2.1	3 семейства лептонов.	10
1.2.2	$SU(6)$ кварковая модель	11
1.3	Уравнение Дирака и γ -матрицы.	13
1.3.1	Релятивистские обозначения	13
1.3.2	Уравнение Клейна-Гордона	14
1.3.3	Уравнение Дирака	15
1.3.4	γ матрицы и их алгебра	20
1.3.5	Решения уравнения Дирака для свободной частицы.	21
1.4	Лагранжиан взаимодействия и правила Фейнмана.	25
1.5	Вероятность взаимодействия.	29
1.5.1	Ширины и сечения.	29
1.5.2	Квадрат матричного элемента	30
1.5.3	Преобразования Фирца	31
1.5.4	Замечание о δ функции	33
2	Распады	35
2.1	Распад мюона	35
2.1.1	Вычисление ширины распада мюона в лабораторной системе	38
2.2	Распад $\pi \rightarrow l\nu$	40
2.2.1	Подавление распада $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$ по сравнению с $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$	42
2.3	β распад нейтрона	44
2.4	Распады τ лептона	47
2.4.1	Оценка времени жизни τ лептона	47
2.4.2	Распад $\tau \rightarrow \nu_\tau \pi$	48
2.4.3	Распад $\tau \rightarrow \nu_\tau K$	50
2.4.4	Основные моды распада тау лептона	51
3	Лептон-лептонное взаимодействие	53
3.1	Кинематика реакций	53
3.2	Заряженные токи	54
3.3	Нейтральные токи	56
3.4	Интерференция заряженного и нейтрального токов	58
3.5	Аннигиляция $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$	59

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

страница 2/130

4	Структура нуклона из лептон-нуклонных взаимодействий	61
4.1	Кварк-партонная модель	61
4.1.1	Правила сумм	63
4.2	Кинематика и сечение	63
4.2.1	Кинематика	63
4.2.2	Сечение	65
4.3	Глубоконеупругое рассеяние нейтрино и антинейтрино на нуклоне	67
4.3.1	Сечение	68
4.3.2	Структурные функции и правила сумм	70
4.4	Глубоконеупругое рассеяние заряженных лептонов на нуклоне	71
4.4.1	Сечение	71
4.4.2	Структурные функции и правила сумм	74
4.5	Упругое взаимодействие нейтрино.	78
4.6	Резонансное взаимодействие.	78
5	Физика нейтрино	79
5.1	Как измерить сечение νN	79
5.1.1	Определение потока	79
5.1.2	Глубоконеупругое взаимодействие	82
5.1.3	Упругое и квази-упругое взаимодействие	82
5.2	Нейтринные эксперименты	82
5.2.1	Эксперименты off-axes	82
6	Нейтринные осцилляции	85
6.1	Вакуумные осцилляции	86
6.1.1	Квантовомеханический вывод	86
6.1.2	Реалистичность квантовомеханического вывода	87
6.1.3	Квантово-полевой вывод	88
6.2	Осцилляции в веществе	91
6.3	*Нейтринные осцилляции в вакууме и веществе. КТП и волновые пакеты.	91
6.3.1	Осцилляции в вакууме	93
6.3.2	Осцилляции в веществе	102
6.3.3	Уравнение и полюса функции Грина	110
7	Как обнаружить реликтовые нейтрино?	117
7.1	Рассеяние $\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \pi^-$	117
7.2	Рассеяние $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$	119
8	Стандартная Модель	121
9	Элементы классической теории поля	123
9.1	Принцип наименьшего действия	123
9.2	Свободные поля	123
9.2.1	Скалярное поле	123
9.2.2	Векторное поле	123
9.2.3	Спинорное поле	123
9.3	Симметрии	123
9.3.1	Теорема Нётер	123
9.3.2	Глобальные симметрии	123
9.3.3	Калибровочные абелевы симметрии.	123
9.3.4	Калибровочные неабелевы симметрии.	123
9.4	Нарушение симметрии	123
9.4.1	Глобальная симметрия и теорема Голдстоуна	124
9.4.2	$U(1)$ калибровочная симметрия	124
9.4.3	$SU(2)$ калибровочная симметрия	124

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

страница 3/130

9.5	Квантовая теория поля	124
9.6	Стандартная Модель	124
9.6.1	Вид слабого взаимодействия. Исторический обзор	124
9.6.2	Лагранжиан Стандартной Модели для одного поколения лептонов	124
9.6.3	Нарушение симметрии	124
9.6.4	Массы лептона и нейтрино	124
9.6.5	Массы векторных бозонов	124
9.6.6	Масса бозона Хиггса	124
9.6.7	Лагранжиан после нарушения симметрии	124
9.6.8	Лагранжиан Стандартной Модели для трех поколений лептонов и кварков	124
9.6.9	Случайные симметрии и сохраняющиеся квантовые числа	124
9.6.10	Флэйворная Физика	124
Приложения		125
.1	Гауссовы интегралы	125
.2	General formulas for block matrices	126
.2.1	Inverse matrices	126
.2.2	Determinants	126
.2.3	Transformation v	126
Литература		126

Предисловие

Эта книга родилась на основе курса лекций и практических занятий по электрослабой модели и правилам Фейнмана, читаемого на протяжении последних лет автором для студентов -- экспериментаторов филиала МГУ (г.Дубна). Спецификой данного учебного заведения является то, что в нем также учатся студенты и аспиранты из других ВУЗов России и стран участниц ОИЯИ, сотрудничающих с дубненскими учеными, что делает преподавание и обучение в целом более интересным и полезным. В своем курсе я всегда стремился преследовать очень простую цель - дать студентам реальный инструмент для вычислений в рамках стандартной модели. При этом, я, как правило, опускал теоретические вопросы обоснования правил Фейнмана, их вывод из квантовой теории поля, как собственно и саму квантовую теорию поля. Вместо этого усилия концентрировались на *практическом применении правил игры*. Есть ряд замечательных книг [1, 2, 3], прочтя которые с карандашиком в руках, читатель сам сможет проверить некоторые из наших утверждений. В своем изложении я очень близко следую духу книги Л.Б.Окуня [4].

Я уверен, что большая часть кажущихся сложными вопросов, на деле не так уж сложна и может быть понята и "просчитана" при помощи достаточно простого математического аппарата. Для этих целей вполне достаточно знания специальной теории относительности, и азов квантовой механики. Разумеется, если читатель захочет научиться профессиональному теоретическому расчету в рамках стандартной модели, ему придется изучить эти вопросы углубленнее. Можно порекомендовать для этой цели прекрасную книгу Д.Бардина и Дж.Пасарино [5]. Надеюсь, что эта книга будет полезна как экспериментаторам, так и теоретикам.

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

страница 4/130

Первые научатся практическим вычислениям, которые необходимы для успешной экспериментальной работы в области ускорительной физики, физики частиц и астрофизики. Вторые, возможно, обратят свое внимание на подчеркиваемую на протяжении книги взаимосвязь аксиом электрослабой теории с экспериментальными проверками.

Дмитрий Вадимович Наумов naumov@nusun.jinr.ru

©Дубна 2004 - 2010

Chapter 1

Введение. Краткий обзор физики частиц

В этой главе мы попытаемся с "высоты птичьего полета" рассмотреть современные представления об элементарных частицах, стабильных и не очень, о том, как они взаимодействуют друг с другом (на языке квантовой теории поля это означает, что частицы "обмениваются квантом поля"), и какие силы при этом участвуют. Мы кратко рассмотрим "зоопарк" элементарных частиц и их классификацию. В попытке теоретического описания релятивистских процессов с участием элементарных частиц мы проследуем историческому пути от уравнения Клейна-Гордона до уравнения Дирака, в котором появятся γ -матрицы. Убедившись, что уравнение Дирака в нерелятивистском пределе переходит в хорошо известное уравнение Паули, мы выпишем лагранжиан, из которого можно получить уравнение Дирака. Этот лагранжиан служит отправной точкой для построения правил Фейнмана, которые мы и сформулируем. Наконец, введя понятие амплитуды взаимодействия, которая другими словами есть не что иное, как соответствующая диаграмма Фейнмана, мы выпишем простые правила расчета вероятности взаимодействия, и как следствие: ширины распада и сечения реакции рассеяния двух частиц.

1.1 Четыре взаимодействия.

1.1.1 Гравитация

Более трех столетий назад Ньютон нашел закон, согласно которому два массивных тела с массами m_1 и m_2 действуют друг на друга. Сила гравитационного взаимодействия пропорциональна произведению масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = \frac{G_N m_1 m_2}{r^2}, \quad G_N = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{см}^3 \text{г}^{-1} \text{с}^{-2}. \quad (1.1)$$

Эта сила очень мала, если ее сравнить, например с электрической силой взаимодействия двух электронов:

$$F_{\text{грав.}}/F_{\text{элек.}} = 1/(4.17 \cdot 10^{42}). \quad (1.2)$$

Было бы, тем не менее, ошибкой решить, что гравитационным взаимодействием можно и вовсе пренебречь. Очевидно, что в электро-нейтральных массивных системах, таких как, например, звезды или другие космические объекты, именно гравитация является основной силой.

Эйнштейн построил Общую Теорию Относительности (ОТО) исходя из требования инвариантности своих уравнений относительно произвольных преобразований координат в различных точках четырех-мерного пространства-времени. ОТО включает в себя теорию Ньютона как частный случай и предсказывает качественно и количественно ряд неочевидных эффектов:

1. Отклонение луча света в гравитационном поле массивного объекта

Этот эффект блестяще подтвердился для луча света в поле Солнца. В современной астрофизике этот эффект уже используется рутинным образом для детектирования темной материи. Суть метода заключается в том, что если некий темный (несветящийся) массивный объект окажется на линии между звездой и наблюдателем, то яркость наблюдаемой звезды возрастет на время пребывания темного объекта на линии зрения, и вернется к исходной после того, как темная объект покинет эту область. Эффект возрастания яркости связан именно с тем, что за счет искривления пространства данным массивным объектом дополнительная порция лучей света далекой звезды попадает в поле зрения наблюдателя. Этот эффект называется гравитационным линзированием.

2. Прецессия перигелия Меркурия

Как известно из классической механики, траектория движения массивного тела в гравитационном поле тяготения другого массивного тела - это эллипс. Перигелием планеты в небесной механике называется точка орбиты планеты, ближайшая к Солнцу. Если бы в солнечной системе не было других планет, комет и прочих возмущающих факторов, то перигелий Меркурия не менялся бы со временем. В присутствии же остальных планет солнечной системы перигелий Меркурия смещается-прецессирует примерно на 5599.7 арк-секунд в столетие. Всего лишь около 43 арк-секунд в столетие невозможно было объяснить в рамках Ньютоновской механики за счет влияния остальных небесных тел. Именно эти дополнительные 42.980 ± 0.002 арк-секунды объяснил Альберт Эйнштейн [6] в рамках ОТО.

3. Существование черных дыр

ОТО предсказывает, что если масса m некоторого объекта заключена в области радиусом, меньшим $R_g = 2G_N m/c^2$, то свет, рожденный таким объектом (например, в результате ядерных реакций) не сможет выбраться наружу и такой объект не будет светиться. Поэтому таким системам дано название

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

страница 7/130

"черная дыра". Разумеется, ничего мистического в этом названии нет. Более того, "черные дыры" на самом деле теряют свою массу за счет "испарения" (вакуумного рождения пар нейтрино, фотонов и даже гравитонов). Этот эффект был теоретически обнаружен Хоукингом. Сегодня астрономами считается, что существование "черных дыр" надежно установлено, и можно даже утверждать, что в центре почти каждой галактики находится по сверх-массивной "черной дыре".

Упражнение 1

Оцените, чему должен равняться радиус Солнца для того, чтобы оно стало "черной дырой".

4. Излучение гравитационных волн

Быстро меняющееся гравитационное поле, например, во вращающихся двойных звездных системах, или при взрыве сверх-новой, излучает гравитационные волны. Астрономы наблюдают более двух десятков лет за бинарной системой Халса-Тейлора (Рассел Халс (Russell A. Hulse) и Джозеф Тэйлор (Joseph H. Taylor), оба из Университета Принстона, получили Нобелевскую Премию за открытие нового типа пульсаров, открытие новых возможностей для исследования гравитации), состоящей из быстро вращающихся друг относительно друга нейтронных звезд с массами $1.4M_{\odot}$. Период вращения 7.5 часов. Скорости звезд в этой системе порядка одной тысячной от скорости света! Согласно теории гравитации Эйнштейна эта система должна излучать гравитационные волны, тем самым, теряя энергию. Как следствие, звезды устремляются друг к другу, при этом период вращения звезд уменьшается каждый год на 10 микросекунд. В конечном итоге, звезды упадут друг на друга, излучив мощный импульс гравитационных волн. Произойдет это, согласно теории гравитации Эйнштейна, через 100 миллионов лет, когда ни нас, ни памяти об этом предсказании уже не будет. Тем не менее, сегодня уменьшение периода вращения бинарной системы Халса-Тейлора экспериментально наблюдается и находится в прекрасном согласии с теорией гравитации Эйнштейна (Рис. 1.1).

В настоящий момент готовятся эксперименты по *прямому* детектированию гравитационных волн при помощи лазерных интерферометров с огромной базой. Рис. 1.2 иллюстрирует эту идею.

Гравитация до сих пор не вписана в стандартную квантовую теорию поля. В первую это связано с математическими трудностями квантования объекта со спином 2. Важно, однако, заметить, что в суперсимметричных теориях, которые мы не имеем возможности здесь обсуждать, можно сформулировать непротиворечивое квантование гравитационного поля. Право на существование

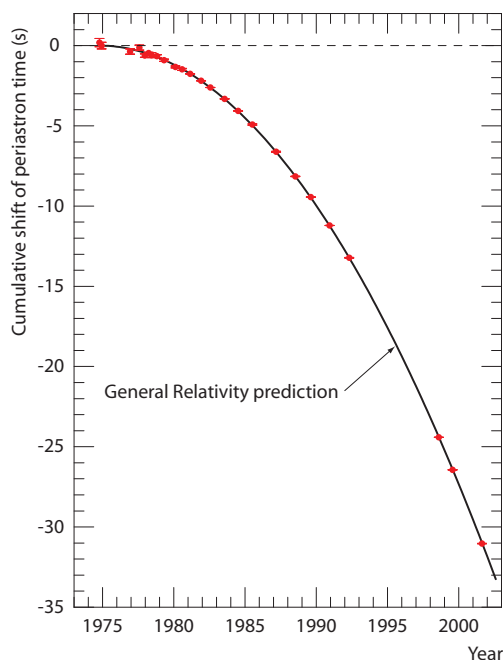


Figure 1.1: Сдвиг фазы вращения в гравитационных волн при помощи бинарной системы Халса-Тейлора как функций времени.

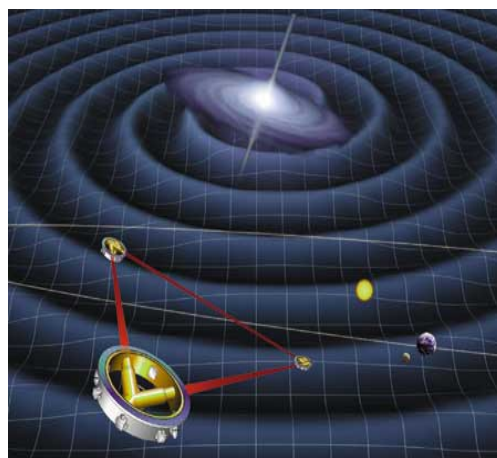


Figure 1.2: Идея детектирования

самой суперсимметричной теории возможно будет проверено в ближайшем будущем в экспериментах LHC (ЦЕРН).

В этой книге мы не будем рассматривать гравитационное взаимодействие в физике частиц.

1.1.2 Электромагнитное взаимодействие.

Электромагнитное взаимодействие - взаимодействие электрических зарядов с электромагнитным полем. Это взаимодействие изучено очень хорошо, что не удивительно, так как им мы регулярно пользуемся, в том числе и в быту. В квантовом описании электромагнитных процессов переносчиком взаимодействия считается квант света - фотон. Квантовая электродинамика, созданная 20х-50х годах XX века, в основном благодаря работам Дирака, Фейнмана, Швингера, Томонаги, Дайсона и др., чрезвычайно успешно описывает все наблюдаемые проявления электромагнетизма в физике элементарных частиц. Например, экспериментальное и теоретическое значения магнитного момента электрона совпадают с точностью до двенадцати знаков после запятой!

1.1.3 Слабое взаимодействие.

Переносчиками слабого взаимодействия являются W^\pm и Z^0 бозоны, открытые в конце восьмидесятых годов XX века в ЦЕРНе. Эти бозоны обладают массой от 80 до 90 раз большей массы протона, поэтому при низких энергиях (таких как энергии распадов частиц, или десятки ГэВ в ускорительных экспериментах) эти процессы протекают гораздо медленнее, чем электромагнитные. Из-за этого, они и были в свое время названы *слабыми*. Самым известным примером слабого взаимодействия является распад нейтрона: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. Время жизни нейтрона по меркам других нестабильных частиц прямо таки макроскопическое - 14.7 минут. Любопытно, что вся история и эволюция Вселенной, возникшей в результате Большого Взрыва, довольно сильно зависит от этого числа - времени жизни нейтрона, а также скорости обратной реакции: $\nu_e + p \rightarrow n + e^-$. В этой книге мы постараемся научиться вычислять соответствующие величины. Слабое взаимодействие, кроме своей слабости, обладает еще одним свойством, которое в свое время было как "гром среди ясного неба" для физиков той поры. Речь идет о нарушении пространственной четности этого взаимодействия (Р - четность). Другими словами, скорость реакций, вызванных слабым взаимодействием, разная в нашем мире и в зеркально отраженном! Первыми предположили это физики-теоретики Ли и Янг, пытаясь понять результаты экспериментов с К-мезонами, распадающихся на два и три пиона. Буквально через несколько месяцев десятки экспериментов подтвердили, что пространственная четность нарушается в слабых взаимодействиях, просто на это никто не обращал внимание. Первой была соотечественница Ли и Янга - мадам Ву, которая поставила простой и остроумный эксперимент: она поместила радиоактивные ядра кобальта в магнитное поле, тем самым выстроив их спины по полю. Для того, чтобы уменьшить термическое "дрожание" спинов, установка была сильно охлаждена. После этого осталось только подсчитать числа электронов, вылетающих в результате радиоактивных распадов "вверх" (по полю) и "вниз" (против поля), чтобы сказать, есть ли асимметрия в зеркальном мире или нет (при зеркальном отражении псевдо-вектор спина не меняет направления, а вектор вылета электрона меняет на обратное). Оказалось, что действительно: $N^\uparrow \neq N^\downarrow$. Впоследствии выяснилось, что слабое взаимодействие нарушает и еще одну симметрию в которую очень верили - замену частицы на анти-частицу (так называемая, С - четность). Некоторое время после этого была популярна точка зрения, что слабые взаимодействия сохраняют хотя бы совместное действие пространственного отражения и замены частицы на анти-частицу (РС четность), но в распадах K_S^0 и K_L^0 мезонов и эта симметрия оказалась несохраняющейся в слабых процессах.

1.1.4 Сильное взаимодействие.

Сильные взаимодействия действуют между кварками и переносчиками этого взаимодействия - глюонами. Как остаточные (ван дер Ваальсовы) эффекты от

межкварковых взаимодействий проявляют себя ядерные силы, действующие между нуклонами (протонами и нейтронами) в ядрах. Современная квантовая теория, описывающая сильные взаимодействия это квантовая хромодинамика (КХД). Такое название она получила из-за того, что кваркам и глюонам был присан цвет: красный, синий или зеленый. Глюоны же обладают цветом-антицветом. Например, взаимодействие синего и красного кварков описывается в первом приближении как обмен сине-антикрасным глюоном, превращающим синий кварк в красный, а красный в синий. Интенсивность сильного взаимодействия характеризуется константой α_s , которая на самом деле вовсе и не константа, а функция квадрата переданного четырех - импульса Q^2 (мы определим далее, что это такое). $\alpha_s(Q^2)$ становится меньше единицы при больших $Q^2 \gg 1$ (ГэВ/с)², что делает возможным использование методов теории возмущений (разложение в ряд по α_s). К сожалению, этот трюк не проходит при малых Q^2 , при которых α_s становится сравнима и даже больше единицы. Мало кто сомневается в том, что КХД - это правильная теория сильных взаимодействий. Однако, вычислительные сложности при малых передачах импульса делают проблематичным возможности КХД предсказаний. Тем не менее, электромагнитные, слабые и сильные взаимодействия составляют основу так называемой *Стандартной Модели*, которая чрезвычайно успешно описывает подавляющее большинство экспериментальных данных.

1.2 Лептоны и кварки.

1.2.1 3 семейства лептонов.

Существуют три семейства лептонов (электронное, мюонное и тау) с соответствующими анти-частицами:

$$\begin{pmatrix} \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \\ e & \mu & \tau \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Аналогично, известно три семейства кварков (up, down, charm, strange, top, bottom) с соответствующими анти-кварками:

$$\begin{pmatrix} u & c & t \\ d & s & b \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

В настоящее время все частицы (1.3, 1.4) экспериментально обнаружены. Каждое семейство лептонов обладает своим лептонным числом, которое сохраняется при взаимодействии. Например, при упругом рассеянии электрона на протоне может родиться нейтрон и частица с нулевым зарядом - нейтрино. Сохранение электронного лептонного числа означает, что рождается электронное нейтрино, но никак не мюонное или тау нейтрино:

$$e + p \rightarrow n + \nu_e \quad e + p \nrightarrow n + \nu_\mu \quad e + p \nrightarrow n + \nu_\tau$$

Анти-частицы обладает лептонным числом -1, что например не запрещает такую реакцию:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu.$$

Действительно, в этой реакции мюонное лептонное число равно +1 в левой и в правой частях реакции, при этом электронное лептонное число компенсируется $+1(e) + (-1)(\bar{\nu}_e) = 0$. Забегая немного вперед, заметим, что **нейтринные осцилляции** - превращение нейтрино одного сорта в нейтрино другого сорта нарушают сохранение лептонных чисел.

Из физики частиц...

Мюонное нейтрино было открыто в 1962 году Леоном Ледерманом (Leon Lederman), Мелвином Шварцем (Melvin Schwartz) и Джеком Стейнбергером (Jack Steinberger) в Брукхэвенской Национальной Лаборатории (США). Нобелевский комитет в 1988 году присудил этим физикам Нобелевскую Премию за метод создания нейтринного пучка и демонстрацию дублетной структуры лептонов через открытие мюонного нейтрино.

1.2.2 SU(6) кварковая модель

Рассмотрим популярную в шестидесятых годах ушедшего столетия SU(6) кварковую модель, описывающую барионы как связанные состояния трех кварков: u , d , s с двумя возможными проекциями спина ("вверх" и "вниз"), и образующими таким образом, фундаментальное представление группы $SU(6) = SU(3)_F \times SU(2)_S$. В рамках этой модели оказалось возможным классифицировать октет барионов в состоянии $J^P = 1/2^+$:

$$p(uud), n(udd), \Sigma^+(uus), \Sigma^0(uds), \Sigma^-(dds), \Lambda^0(uds), \Xi^0(uss), \Xi^-(dss),$$

а также декуплет возбужденных барионов в состоянии $J^P = 3/2^+$:

$$\Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega^-.$$

Все эти состояния прекрасно укладываются в 56-мерное представление группы SU(6) [7]. В рамках SU(6) кварковой модели можно в явном виде написать спиновые волновые функции барионов, вычислить физические характеристики (магнитный момент, поляризация кварков и др.), которые затем можно сравнить с экспериментальными значениями.

Спиновые волновые функции барионов

Следуя формализму, приведенному, например, в [7], можно вычислить явный вид спиновых волновых функций мезонов и барионов. Обозначим через u, d, s - соответствующие волновые функции кварков, стрелки $\uparrow\downarrow$ будут указывать

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

направление спина частицы (вверх или вниз). Тогда спиновые волновые функции барионов в рамках SU(6) кварковой модели имеют вид:

$$p^{\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{18}} (2u^{\uparrow}u^{\uparrow}d^{\downarrow} - u^{\uparrow}u^{\downarrow}d^{\uparrow} - u^{\downarrow}u^{\uparrow}d^{\uparrow} + \text{цикл. перестановки}) \quad (1.5)$$

$$n^{\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{18}} (2d^{\uparrow}d^{\uparrow}u^{\downarrow} - d^{\uparrow}d^{\downarrow}u^{\uparrow} - d^{\downarrow}d^{\uparrow}u^{\uparrow} + \dots) \quad (1.6)$$

$$\Sigma^{+\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{18}} (2u^{\uparrow}u^{\uparrow}s^{\downarrow} - u^{\uparrow}u^{\downarrow}s^{\uparrow} - u^{\downarrow}u^{\uparrow}s^{\uparrow} + \dots) \quad (1.7)$$

$$\Sigma^{0\uparrow} = \frac{1}{6} (2(u^{\uparrow}d^{\uparrow} + d^{\uparrow}u^{\uparrow})s^{\downarrow} - s^{\uparrow}(u^{\downarrow}d^{\uparrow} + d^{\downarrow}u^{\uparrow}) - d^{\downarrow}s^{\uparrow}u^{\uparrow} - u^{\downarrow}s^{\uparrow}d^{\uparrow} + \dots) \quad (1.8)$$

$$\Sigma^{-\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{18}} (2d^{\uparrow}d^{\uparrow}s^{\downarrow} - d^{\uparrow}d^{\downarrow}s^{\uparrow} - d^{\downarrow}d^{\uparrow}s^{\uparrow} + \dots) \quad (1.9)$$

$$\Lambda^{0\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{12}} (u^{\uparrow}d^{\downarrow}s^{\uparrow} - u^{\downarrow}d^{\uparrow}s^{\uparrow} - d^{\uparrow}u^{\downarrow}s^{\uparrow} + d^{\downarrow}u^{\uparrow}s^{\uparrow} + \dots) \quad (1.10)$$

$$\Xi^{0\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{18}} (2s^{\uparrow}s^{\uparrow}u^{\downarrow} - s^{\uparrow}s^{\downarrow}u^{\uparrow} - s^{\downarrow}s^{\uparrow}u^{\uparrow} + \dots) \quad (1.11)$$

$$\Xi^{-\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{18}} (2s^{\uparrow}s^{\uparrow}d^{\downarrow} - s^{\uparrow}s^{\downarrow}d^{\uparrow} - s^{\downarrow}s^{\uparrow}d^{\uparrow} + \dots) \quad (1.12)$$

Магнитные моменты барионов

Статические магнитно-дипольные моменты барионов даются оператором:

$$\boldsymbol{\mu}_B = \sum_q \mu_q \boldsymbol{\sigma}_q,$$

где $\mu_q = e_q/2m_q$ --- магнитный дипольный момент кварка q . Магнитный момент бариона B , описываемого кет-вектором $|B\rangle$, вычисляется согласно:

$$\mu(B) = \langle B | \boldsymbol{\mu}_B | B \rangle.$$

Например, используя волновые функции протона и нейтрона, легко получить следующие выражения для их магнитных моментов:

$$\mu(p) = \frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d \quad (1.13)$$

$$\mu(n) = \frac{4}{3}\mu_d - \frac{1}{3}\mu_u. \quad (1.14)$$

Откуда, в предположении одинаковых масс u и d кварков, приходим к следующему предсказанию:

$$\mu(p)/\mu(n) = -3/2,$$

что неплохо согласуется с экспериментальным значением -1.46 [8]. Магнитный момент Λ^0 гиперона целиком определяется магнитным моментом s -кварка: $\mu(\Lambda^0) =$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

μ_s . Сравнение с экспериментальными значениями для $\mu(p), \mu(n), \mu(\Lambda^0)$ приводит к следующим оценкам конstituентных масс u, d, s кварков:

$$m_u \approx m_d = 336 \text{ МэВ}, \quad m_s = 510 \text{ МэВ}.$$

Если пренебречь разницей в конstituентных массах u и d кварков, то магнитные моменты всех барионов (включая принадлежащие декуплету) можно выразить через два независимых входных параметра, скажем, $\mu(p)$ и $\mu(\Lambda^0)$. В таб. 1.1 приведено сравнение SU(6) предсказаний для магнитных моментов барионов (в единицах магнитного момента Бора μ_N) с экспериментальными значениями [8].

Несмотря на весьма упрощенное описание структуры барионов в терминах нерелятивистских волновых функций, экспериментальные данные довольно хорошо описываются SU(6) кварковой моделью.

Table 1.1: Магнитные моменты барионов

Предсказание SU(6)			Экспериментальное значение (в μ_N)
Магнитный момент	формула	величина (в μ_N)	
$\mu(p)$	$\frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d$	(input)	2.793
$\mu(n)$	$\frac{4}{3}\mu_d - \frac{1}{3}\mu_u$	-1.86	-1.913
$\mu(\Lambda^0)$	μ_s	(input)	-0.613 ± 0.004
$\mu(\Sigma^+)$	$\frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_s$	2.69	2.458 ± 0.010
$\mu(\Sigma^-)$	$\frac{4}{3}\mu_d - \frac{1}{3}\mu_s$	-1.04	-1.16 ± 0.025
$\mu(\Xi^0)$	$\frac{4}{3}\mu_s - \frac{1}{3}\mu_u$	-1.44	-1.25 ± 0.014
$\mu(\Xi^-)$	$\frac{4}{3}\mu_s - \frac{1}{3}\mu_d$	-0.51	-0.679 ± 0.031
$\mu(\Omega^-)$	$3\mu_s$	-1.84	-1.94 ± 0.22

1.3 Уравнение Дирака и γ -матрицы.

1.3.1 Релятивистские обозначения

Введем релятивистские обозначения для 4-вектора (время, координата): $x^\mu = (ct, x, y, z)$, если же индекс μ опустить, то изменяется знак у пространственных координат: $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$. В дальнейшем нам будет удобно использовать метрический тензор $g^{\mu\nu}$, устанавливающий связь между x^μ и x_μ : $x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$. Легко сообразить, что этот тензор имеет такой вид:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

4-вектор производных определяется таким образом:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right),$$

легко определить также: $\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu$, что дает лоренц-инвариантный оператор Даламбера:

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right).$$

Обращаем внимание читателя, что скалярное произведение двух 4-векторов немного отличается от привычного трехмерного знаком в пространственной части: $a \cdot b = a_0 b_0 - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$. Теперь мы можем легко построить 4-вектор энергии-импульса:

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p}), \quad p_\mu = (E/c, -\mathbf{p}),$$

так что квадрат этого вектора есть:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = (mc)^2. \quad (1.16)$$

1.3.2 Уравнение Клейна-Гордона

Попробуем совершить прямолинейный переход от нерелятивистского уравнения Шредингера к некоторому новому, но релятивистскому. Для этого вспомним, как получается уравнение Шредингера: уравнение для кинетической энергии $E = p^2/2m$ записывается в операторной форме, ставя в соответствие энергии и импульсу операторы:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla,$$

действующие на волновую функцию ψ . В результате мы имеем:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi.$$

Действуя аналогичным образом, мы получаем из (1.16) уравнение Клейна-Гордона:

$$\left(\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \phi = 0. \quad (1.17)$$

Хотелось бы, чтобы волновой функции ϕ из уравнения (1.17) можно было придать какую-то вероятностную интерпретацию, как это делается для уравнения Шредингера. Попробуем для исследования возможности этого проделать аналогичный прием, который делается для уравнения Шредингера: умножим слева (1.17) на ϕ^* , затем комплексно сопряженное уравнение (1.17) тоже умножим слева, но на ϕ и результат вычтем один из другого:

$$\nabla_\mu (\phi^* \nabla^\mu \phi - \phi \nabla^\mu \phi^*) = 0 \text{ или } \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \right] + \text{div} \left[\frac{\hbar}{2im} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \right] = 0. \quad (1.18)$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

По аналогии с уравнением непрерывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0$, в котором ρ и \mathbf{j} плотность и ток соответственно (электрического заряда, вероятности и т.д.), хотелось бы придать величине $\frac{i\hbar}{2mc^2} (\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t})$ смысл плотности вероятности. Решение

$$\phi = N e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$$

удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона, тогда

$$\rho = \frac{\hbar}{mc^2} |N|^2 E.$$

Однако, из-за того, что энергия в уравнении Клейна-Гордона может быть как положительной, так и отрицательной, это приводит к трудности в интерпретации ρ как плотности вероятности. Любопытно, что именно эта трудность заставила Дирака искать другое уравнение, в котором бы не возникала вторая производная по времени. Сейчас мы перейдем непосредственно к уравнению Дирака, а пока заметим, что уравнение Клейна-Гордона не пропало из физики, ему просто придалась несколько другая интерпретация как *многочастичного полевого квантового уравнения*, описывающего бесспиновые частицы.

1.3.3 Уравнение Дирака

Дирак предложил искать уравнение в виде:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \sum_k \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \beta mc^2 \psi \equiv \hat{H} \psi, \quad (1.19)$$

в котором $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и β (пока) неизвестные параметры (и даже неизвестно - числа ли это). Найти их можно потребовав, чтобы "квадрат" этого уравнения переходил в уравнение Клейна-Гордона, в котором правильно учитывается релятивистское соотношение между энергией и импульсом частицы (1.16). Операторы в левой и правой частях уравнения (1.19) коммутируют друг с другом, поэтому квадратируя это уравнение получим:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -(\hbar c)^2 \sum_{i,k=1,3} \frac{\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^k} - i\hbar mc^3 \sum_{i=1,3} (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + (\beta mc^2)^2 \psi. \quad (1.20)$$

Таким образом, для того чтобы уравнение (1.20) совпало с уравнением Клейна-Гордона (1.17) необходимо, чтобы удовлетворялись следующие условия:

$$\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 2\delta_{ik}, \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad \alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \quad (1.21)$$

Что можно сказать о коэффициентах $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и β ? Очевидно, что это не числа, иначе невозможно выполнение условий (1.21). Если это матрицы, то какова их размерность? Из условий $\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$ следует, что собственные значения матриц

α_i, β равны ± 1 .¹ Также, используя соотношение $\alpha_i = -\beta\alpha_i\beta$ легко получить, что след матриц α_i, β равен нулю²:

$$\text{Tr}(\alpha_i) = -\text{Tr}(\beta\alpha_i\beta) = -\text{Tr}(\alpha_i) = 0.$$

Мы знаем, что любую матрицу можно представить в виде, когда на ее диагонали стоят ее собственные значения. В нашем случае, это ± 1 , при этом их сумма обязана быть равна нулю из-за того, что след матрицы равен нулю. Это означает, что размерность у матриц $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и β должна быть четной. Размерность 2 не подходит, так как там есть только три линейно независимые матрицы - это матрицы Паули, следовательно, следующая минимально возможная размерность равна четырем. Одно из возможных представлений для матриц α_i, β такое:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

где σ_i - это три матрицы Паули, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}, \quad \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (1.23)$$

и могут быть представлены в виде:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

δ_{ij} и ϵ_{ijk} это дельта символ Кронекера (единица, когда индексы совпадают и ноль в обратном случае) и полностью антисимметричный тензор (меняет знак при перестановке двух соседних индексов и не меняет при циклической перестановке индексов). Итак, мы нашли, что α_i, β это матрицы 4×4 , откуда следует, что волновая функция ψ это тоже не число, а вектор-столбец:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

где $u = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, и $v = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$.

¹напоминаем читателю, что собственные числа (λ) матрицы A определяются из уравнения $Ax = \lambda x$, где x - это собственный вектор.

²мы воспользовались тем, что под знаком следа можно циклически переставлять матрицы, а также $\beta^2 = 1$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Что-же можно сказать о потоке и плотности вероятности в уравнении Дирака? Действуя аналогично тому, как мы действовали в параграфе про уравнение Клейна-Гордона, запишем:

$$\begin{aligned} i\hbar\psi^+\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{\hbar c}{i}\sum_k\psi^+\alpha_k\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + mc^2\psi^+\beta\psi \\ -i\hbar\frac{\partial\psi^+}{\partial t}\psi &= -\frac{\hbar c}{i}\sum_k\frac{\partial\psi^+}{\partial x^k}\alpha_k\psi + mc^2\psi^+\beta\psi. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Вычитая из первого уравнение второе, получим:

$$i\hbar\frac{\partial\psi^+\psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\sum_k\frac{\partial}{\partial x^k}(\psi^+\alpha_k\psi) \text{ или } \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\mathbf{j} = 0, \text{ где } \left. \begin{aligned} \rho &= \psi^+\psi \\ \mathbf{j} &= c\psi^+\boldsymbol{\alpha}\psi \end{aligned} \right\}. \quad (1.26)$$

Как видим, в уравнении Дирака можно интерпретировать ρ как плотность вероятности, всюду положительно определенную величину.

Прежде чем двигаться дальше, попытаемся понять насколько адекватно полученное уравнение Дирака реальности. Например, может ли это уравнение дать правильное значение гиромагнитного отношения g ? Напомним суть вопроса: классический электрон с зарядом e , вращающийся по замкнутому контуру с орбитальным моментом L , взаимодействует с внешним магнитным полем и характеризуется магнитным моментом равным:

$$\mu = \frac{e}{2m}L.$$

Если предположить, что связь между внутренним магнитным моментом электрона и его спином тоже дается коэффициентом пропорциональности $e/2m$, то это приводило бы к сдвигу атомных уровней в магнитном поле, так называемому "нормальному" эффекту Зеемана. На практике же наблюдается "аномальный" эффект Зеемана, соответствующий в 2 раза большему значению магнитного момента электрона. Это отношение "аномальный магнитный момент"/"нормальный магнитный момент" и называется гиромагнитным отношением g . Нерелятивистская квантовая механика не способна правильно предсказать значение g . Посмотрим теперь, что может нам дать уравнение Дирака. Для этого нам нужно будет включить в уравнение электромагнитное поле. Это можно сделать воспользовавшись стандартным рецептом из классической электродинамики - "удлинение производной":

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu, \quad A^\mu = (\phi, \mathbf{A}), \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}.$$

Тогда уравнение (1.19) становится:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi} + \beta mc^2 + e\phi)\psi. \quad (1.27)$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Воспользуемся теперь явным видом матриц α, β и запишем уравнение (1.27) в виде системы из двух уравнений на верхнюю и нижнюю компоненты u и v :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Интуитивно мы ожидаем, что если уравнение Дирака правильное, в нерелятивистском пределе временная компонента решения этого уравнения должна описываться зависимостью $e^{-imc^2t/\hbar}$, поэтому разумно искать решение системы (1.28) в виде:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

где мы не стали менять обозначения для спиноров u, v , но будем теперь подразумевать, что они зависят от времени медленнее, чем $e^{-imc^2t/\hbar}$. Прделав такую подстановку, мы приходим к системе:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Нижнее уравнение теперь легко решить, если сделать следующие предположения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \sim 0, \quad e\phi \ll mc^2.$$

Тогда:

$$v = \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{2mc^2} u. \quad (1.30)$$

Подставив теперь v из (1.30) в верхнее из уравнений (1.29), получим:

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{2m} + e\phi \right) u. \quad (1.31)$$

Для того, чтобы упростить $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}$, воспользуемся следующим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} &= \sigma_i \sigma_j \pi_i \pi_j = (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k) \pi_i \pi_j = \\ \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}) &= \boldsymbol{\pi}^2 - i\frac{e}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (1.32)$$

В уравнении (1.32) комбинация $\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}$ не равна нулю, как можно было бы наивно подумать исходя из векторного произведения векторов, поскольку \mathbf{p} - это оператор, который действует не только на \mathbf{A} , но и на волновую функцию u . Именно так и раскроем эту комбинацию:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}) u &= -i\hbar \epsilon_{ijk} (\partial_j A_k u + A_j \partial_k u) = \\ -i\hbar \epsilon_{ijk} u (\partial_j A_k) &= -i\hbar \mathbf{rot} \mathbf{A} u = -i\hbar \mathbf{B} u \end{aligned} \quad (1.33)$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Таким образом, можно переписать уравнение (1.31) в виде:

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{(\mathbf{p} - e/c\mathbf{A})^2}{2m} + e\phi - \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right) u. \quad (1.34)$$

Полученное уравнение известно как нерелятивистское квантово-механическое уравнение Паули для биспинора u . То, что нам удалось из уравнения Дирака получить правильный нерелятивистский предел очень вдохновляет и позволяет надеяться на то, что уравнение Дирака правильное. Хотя из полученного уравнения уже видно, что гиромагнитное отношение равно двум, как и наблюдается экспериментально, можно все же представить этот факт в еще более прозрачном виде. Для этого, мы представим поле \mathbf{A} в виде: $\mathbf{A} = 1/2 \mathbf{B} \times \mathbf{r}$.

Упражнение 2

Убедитесь в том, что $\text{rot}(1/2 \mathbf{B} \times \mathbf{r}) = \mathbf{B}$.

Распишем, чему равен член:

$$(\mathbf{p} - e/c\mathbf{A})^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{e}{c}(\mathbf{p}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{p}) + \frac{e^2}{c^2}\mathbf{A}^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{e}{c}(-i\hbar)((\nabla \cdot \mathbf{A}) + 2\mathbf{A} \cdot \nabla) + \dots =$$

$$\mathbf{p}^2 - \frac{e}{c}(-i\hbar)(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla + \dots = \mathbf{p}^2 - \frac{e}{c}\mathbf{B} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + \dots = \mathbf{p}^2 - \frac{e}{c}\mathbf{B} \cdot \mathbf{L} + \dots,$$

где $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ - это угловой момент частицы. Окончательно, уравнение (1.34) запишется в виде:

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\phi - \frac{e\hbar}{2mc} (2\mathbf{S} + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{B} \right) u. \quad (1.35)$$

В этом уравнении $\mathbf{S} = 1/2\hbar\boldsymbol{\sigma}$ - это оператор спина частицы. Как видим, перед этим оператором в явном виде стоит множитель 2, который и является гиромагнитным отношением. Таким образом, правильное гиромагнитное отношение может быть предсказано только из релятивистской теории.

При выводе последнего уравнения мы пренебрегли множителем, пропорциональным \mathbf{A}^2 , что разумное приближение для слабого магнитного поля.

Упражнение 3

Попробуйте оценить, магнитное поле какой величины не удовлетворяет условию слабого поля.

Убедиться в том, что квадратичный по магнитному полю член действительно мал можно, например, так. Рассмотрим электрон в атоме. Пусть величина магнитного поля будет сравнима с электрическим полем, которое чувствует электрон со стороны протона-ядра: $B \sim E = e/a_0^2$, где $a_0 = \hbar^2/me^2$ - радиус Бора. Постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c$. Характерная энергия электрона в атоме водорода это Ридберг $1Ry = 13.6eV = mc^2\alpha^2/2 = me^4/2\hbar^2 = e^2/2a_0$. Оценим теперь отброшенное слагаемое:

$$\frac{1}{8m} \frac{e^2}{c^2} B^2 r^2 \sim \frac{1}{8m} \frac{e^2}{c^2} \frac{e^2}{a_0^4} a_0^2 = \frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2 a_0^2} = 1Ry \frac{\alpha^2}{4} \ll 1Ry$$

Упражнение 4

- Проверьте все свойства для явного вида матриц α, β
- Проверьте соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \mathbf{r}] = c\boldsymbol{\alpha} \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \mathbf{p}] - \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = e[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}], \text{ где} \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}.\end{aligned}$$

- Вычислите явный вид γ_5

1.3.4 γ матрицы и их алгебра

Уравнение Дирака в форме (1.19) содержит выделенную временную компоненту по сравнению с остальными тремя. С точки зрения релятивистской теории - это не совсем удобно. Можно записать уравнение Дирака в релятивистски ковариантной форме. Для это умножим слева обе части уравнения на матрицу β и будем называть теперь:

$$\beta = \gamma_0, \quad \beta \alpha_i = \gamma_i.$$

Будем также использовать единицы, принятые в физике высоких энергий:

$$\hbar = c = 1.$$

В этом случае: [Энергия] = [Масса] = [Импульс] = [Длина]⁻¹ = [Время]⁻¹.

Введем еще обозначение $\hat{A} \equiv A^\mu \gamma_\mu$, тогда уравнение Дирака запишется в такой компактной форме:

$$\begin{aligned}(i\hat{\partial} - m)\psi(x) &= 0, \\ \bar{\psi}(x)(i\hat{\partial} - m) &= 0, \text{ где } \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0\end{aligned}\tag{1.36}$$

Явный вид γ матриц такой:

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\tag{1.37}$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

γ матрицы обладают такой алгеброй и следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
 \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu}. \\
 Tr(\gamma^\mu) &= 0, \quad \gamma^\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma^\mu \\
 \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} &= 2A \cdot B \\
 \gamma^\mu \hat{A} \gamma_\mu &= -2\hat{A} \\
 \gamma^\mu \hat{A}\hat{B} \gamma_\mu &= 2(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}) = 4A \cdot B \\
 \gamma^\mu \hat{A}\hat{B}\hat{C} \gamma_\mu &= -2\hat{C}\hat{B}\hat{A}
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Упражнение 5

Умножив первое из уравнений (1.38) на A_ν , получим: $\gamma^\mu \hat{A} + \hat{A} \gamma^\mu = 2A^\mu$. Умножив полученное уравнение справа на $R\gamma_\mu$, получим: $\gamma^\mu \hat{A} R \gamma_\mu + \hat{A} \gamma^\mu R \gamma_\mu = 2R\hat{A}$. Рассмотрев случаи: $R = 1, R = \hat{B}, R = \hat{B}\hat{C}$, получите последние три из уравнений (1.38)

Упражнение 6

Пользуясь свойствами γ -матриц, вычислить произведения матриц типа $\mathcal{O}^{(\mu)} \Gamma^{(m)} \mathcal{O}_{(\mu)}$. Здесь $\sigma^{\alpha\beta} = i/2 (\gamma^\alpha \gamma^\beta - \gamma^\beta \gamma^\alpha)$ - так называемый матричный тензор спина.

$\Gamma^{(m)}$	$\gamma^5 \Gamma^{(m)} \gamma^5$	$\gamma^\mu \Gamma^{(m)} \gamma_\mu$	$\gamma^5 \gamma^\mu \Gamma^{(m)} \gamma^5 \gamma_\mu$	$\sigma^{\mu\nu} \Gamma^{(m)} \sigma_{\mu\nu}$
I	I	$4I$	$-4I$	$12I$
γ^5	γ^5	$-4\gamma^5$	$4\gamma^5$	$12\gamma^5$
γ^α	$-\gamma^\alpha$	$-2\gamma^\alpha$	$-2\gamma^\alpha$	0
$\gamma_5 \gamma^\alpha$	$-\gamma_5 \gamma^\alpha$	$2\gamma_5 \gamma^\alpha$	$2\gamma_5 \gamma^\alpha$	0
$\sigma^{\alpha\beta}$	$\sigma^{\alpha\beta}$	0	0	$-4\sigma^{\alpha\beta}$

1.3.5 Решения уравнения Дирака для свободной частицы.

Легко убедиться в том, что $\psi(x)$, являющаяся решением уравнения Дирака (1.36), есть также решение уравнения Клейна-Гордона (1.17). Действительно, подействовав на уравнение Дирака оператором $i\hat{\partial} + m$, получим уравнение (1.17):

$$(i\hat{\partial} + m)(i\hat{\partial} - m)\psi(x) = (\square + m^2)\psi(x) = 0.$$

Частное решение уравнения Клейна-Гордона -- это плоская волна. Таким образом, общее решение уравнения Дирака может быть представлено в виде линейной суперпозиции плоских волн e^{ipx} с условием $p^2 = m^2$:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}}{2E_{\mathbf{p}}} [e^{-ipx} u(p, s) + e^{ipx} v(p, s)], \tag{1.39}$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

где $E_p = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Спиноры $u(p, s), v(p, s)$ зависят от 4-векторов импульса p и спина s и удовлетворяют дополнительным уравнениям:

$$(\hat{p} - m)u(p, s) = 0, \quad (\hat{p} + m)v(p, s) = 0 \quad (1.40)$$

Прямым вычислением можно убедиться в том, что решения уравнений (1.40) в выбранном нами базисе γ матриц (1.37) даются:

$$u(p, s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\sqrt{E_p + |\mathbf{p}|} + \sqrt{E_p - |\mathbf{p}|})\xi \\ (\sqrt{E_p + |\mathbf{p}|} - \sqrt{E_p - |\mathbf{p}|})\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \xi \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

$$v(p, s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\sqrt{E_p + |\mathbf{p}|} - \sqrt{E_p - |\mathbf{p}|})\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \eta \\ (\sqrt{E_p + |\mathbf{p}|} + \sqrt{E_p - |\mathbf{p}|})\eta \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ -- единичный вектор вдоль 3-импульса частицы, $\boldsymbol{\sigma}$ вектор из 2×2 матриц Паули. Двухкомпонентные спиноры ξ, η удобно выбрать так, чтобы они были собственными состояниями матрицы σ_3 , и взаимно ортогональными, например: $\xi^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и аналогично для η . Их удобно нормировать на единицу $\xi^\dagger \xi = \eta^\dagger \eta = 1$. Тогда существуют лишь по два линейно независимых решения для u, v , характеризующихся проекцией спина на выделенную ось s : $u_s(p), v_s(p)$. Прямым вычислением можно показать, что эти решения нормированы следующим образом:

$$u_r^\dagger u_s = 2E_p \delta_{rs}, \quad \bar{u}_r u_s = 2m \delta_{rs} \quad (1.43)$$

$$v_r^\dagger v_s = 2E_p \delta_{rs}, \quad \bar{v}_r v_s = -2m \delta_{rs} \quad (1.44)$$

В ультрарелятивистском пределе $|\mathbf{p}| \rightarrow E_p$ решения (1.45) превращаются в

$$u(p, s) = \sqrt{E_p} \begin{pmatrix} \xi \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \xi \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

$$v(p, s) = \sqrt{E_p} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \eta \\ \eta \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

В дальнейшем нам понадобятся различные проекционные операторы. *Киральные проекционные операторы* определены так:

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

Действие этих операторов на решения (1.45) дают левые и правые *киральные* спиноры. В ультрарелятивистском пределе или для безмассовых частиц,

киральность совпадает со спиральностью, что легко увидеть из такого вычисления:

$$P_L u(p, s) = \sqrt{E_p} \begin{pmatrix} \frac{1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \xi \\ -\frac{1+\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \xi \end{pmatrix} = \begin{cases} \sqrt{E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{если } \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & \text{если } \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.49)$$

$$P_R u(p, s) = \sqrt{E_p} \begin{pmatrix} \frac{1+\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \xi \\ -\frac{1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \xi \end{pmatrix} = \begin{cases} \sqrt{E_p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{если } \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{если } \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.50)$$

Таким образом, в ультрарелятивистском пределе или для безмассовых частиц

$$P_L u(p, s) = u(p, s_-), \quad P_R u(p, s) = u(p, s_+)$$

Удобно также определить проекционные операторы, которые выбирают состояния с определенной энергией Λ_{\pm} (больше или меньше нуля) и определенной проекцией спина Σ_{\pm} . Нетрудно убедиться в том, что эти операторы определены так:

$$\Lambda_{\pm} = \frac{\pm \hat{p} + m}{2m}, \quad \Sigma_{\pm} = \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}_{\pm}}{2} \quad (1.51)$$

Действие этих операторов на решения уравнения Дирака (1.40) есть:

$$\begin{aligned} \Lambda_+ u(p, s) &= u(p, s), & \Sigma_{\pm} u(p, s_{\pm}) &= u(p, s_{\pm}) \\ \Lambda_- v(p, s) &= v(p, s), & \Sigma_{\pm} v(p, s_{\pm}) &= v(p, s_{\pm}) \\ \Lambda_- u(p, s) &= 0, & \Sigma_{\pm} u(p, s_{\mp}) &= 0, \\ \Lambda_+ v(p, s) &= 0, & \Sigma_{\pm} v(p, s_{\mp}) &= 0. \end{aligned}$$

Кроме того, проекционные операторы Λ_{\pm} и Σ_{\pm} коммутируют друг с другом, если $s \cdot p = 0$, также эти операторы обладают свойствами:

$$\Lambda_{\pm}^2 = \Lambda_{\pm}, \quad \Lambda_+ \Lambda_- = 0, \quad \Lambda_- \Lambda_+ = 0, \quad \Lambda_+ + \Lambda_- = 1 \quad (1.52)$$

$$\Sigma_{\pm}^2 = \Sigma_{\pm}, \quad \Sigma_+ \Sigma_- = 0, \quad \Sigma_- \Sigma_+ = 0, \quad \Sigma_+ + \Sigma_- = 1. \quad (1.53)$$

Очевидно, что $u\bar{u}, v\bar{v}$ это не числа, а матрицы 4×4 . В общем случае, матрицы $u\bar{u}, v\bar{v}$ могут быть представлены в виде линейной комбинации произведений проекционных операторов:

$$\Lambda_+ \Sigma_+, \Lambda_+ \Sigma_-, \Lambda_- \Sigma_+, \Lambda_- \Sigma_-$$

и, используя нормировки (1.43) легко получить:

$$u(p, s_+) \bar{u}(p, s_+) = 2m \Lambda_+ \Sigma_+ = (\hat{p} + m) \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}_+}{2}, \quad (1.54)$$

$$u(p, s_-) \bar{u}(p, s_-) = 2m \Lambda_+ \Sigma_- = (\hat{p} + m) \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}_-}{2}, \quad (1.55)$$

$$v(p, s_+) \bar{v}(p, s_+) = -2m \Lambda_- \Sigma_+ = (\hat{p} - m) \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}_+}{2}, \quad (1.56)$$

$$v(p, s_-) \bar{v}(p, s_-) = -2m \Lambda_- \Sigma_- = (\hat{p} - m) \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}_-}{2}, \quad (1.57)$$

откуда, в частности, следуют суммы по спину:

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \hat{p} + m, \quad (1.58)$$

$$\sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \hat{p} - m \quad (1.59)$$

Если умножить (??) слева на P_L , а справа на P_R , то в ультрарелятивистском пределе или для безмассовых частиц выживут лишь лево-спиральные спиноры:

$$P_L (\hat{p} + m) P_R = P_L \sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) P_R = P_L u(p, -) \bar{u}(p, -) P_R \quad (1.60)$$

1.4 Лагранжиан взаимодействия лептонов и кварков с векторными бозонами. Амплитуда взаимодействия, правила Фейнмана.

В этом параграфе мы постараемся кратко изложить результаты квантовой теории возмущений. Мы будем предполагать, что частицы в начале и в конце каждого рассматриваемого процесса можно считать *свободными*. Оператор S , связывающий начальное и конечное состояния квантовой системы полностью характеризуется лагранжианом взаимодействия \mathcal{L}_I :³

$$|f\rangle = S|i\rangle, \quad S = T e \left[i \int \mathcal{L}_I(x) dx \right] \quad (1.61)$$

где символ T обозначает хронологическое (упорядоченное по времени) произведение операторов:

$$T[a(x)b(y)] \equiv \begin{cases} a(x)b(y) & x_0 > y_0 \\ b(y)a(x) & x_0 < y_0 \end{cases}$$

Оператор S можно задать совокупностью его матричных элементов:

$$S_{if} = \langle f|S|i\rangle = \delta_{if} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \mathcal{M}_{if} \quad (1.62)$$

где единичная матрица δ_{if} соответствует отсутствию взаимодействия между частицами, δ -функция отражает закон сохранения 4-импульса (p_i и p_f - суммы 4-импульсов всех частиц в начальном и конечном состояниях); величина \mathcal{M}_{if} носит название *амплитуды взаимодействия*.

Экспонента в (1.61) может быть представлена в виде формального функционального ряда. Каждому из членов этого разложения ставится в соответствие некоторая диаграмма. Сейчас мы выпишем в явном виде лагранжиан стандартной модели, описывающий взаимодействие фермионов с полями векторных бозонов, а также сформулируем правила построения диаграмм Фейнмана.

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I^{em} + \mathcal{L}_I^{CC} + \mathcal{L}_I^{NC} = -e j_\mu^{em} A^\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}} [j_\mu^{CC} W^\mu + \text{h.c.}] - \frac{g}{2 \cos \theta_W} j_\mu^{NC} Z^\mu \quad (1.63)$$

причем

$$g = \frac{e}{\sin \theta_W} = 2M_W \sqrt{G_F} \quad (1.64)$$

где G_F - константа Ферми, M_W - масса W -бозона. Таким образом, взаимодействие всех калибровочных полей определяется электрическим зарядом e и углом Вайнберга θ_W .

³в результате квантования динамические переменные (такие как лагранжиан, тензор энергии-импульса, вектор тока) приобретают операторный смысл и выражаются через операторы рождения и уничтожения частиц, действующих на общий для всех полей вектор состояния Φ

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Взаимодействие заряженных фермионов с электромагнитным полем A^μ описывается

$$j_\mu^{em} = \sum_f Q_f \bar{f} \gamma_\mu f = \sum_{\ell=e,\mu,\tau} (-1) \bar{\ell} \gamma_\mu \ell + \sum_{q=u,d,\dots} e_q \bar{q} \gamma_\mu q \quad (1.65)$$

где Q_f - электрический заряд частицы в единицах e ; суммирование идет по всем фермионам.

Заряженные токи, определяющие взаимодействие с W -бозоном, имеют вид:

$$\begin{aligned} j_\mu^{CC} &= \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_\ell \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \ell + \sum_{q_u, q_d} \bar{q}_u \gamma_\mu (1 - \gamma^5) q_d V_{q_u q_d} \\ &= 2 \sum_{\ell=e,\mu,\tau} (\bar{\nu}_\ell)_L \gamma_\mu \ell_L + 2 [\bar{u}_L \gamma_\mu d'_L + \bar{c}_L \gamma_\mu s'_L + \bar{t}_L \gamma_\mu b'_L] \end{aligned} \quad (1.66)$$

где $f_L = 1/2 (1 - \gamma^5) f$ ⁴; суммирование идет по лептонному ($\ell = e, \mu, \tau$) и кварковому сектору ($q_u = u, c, t$; $q_d = d, s, b$); величины $V_{q_u q_d}$ образуют матрицу смешивания Кабиббо-Кобаяши-Маскава (СКМ) [9, 10]:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

со следующими значениями $|V_{q_u q_d}|$ [8]:

$$\begin{pmatrix} 0.9742 - 0.9757 & 0.219 - 0.226 & 0.002 - 0.005 \\ 0.219 - 0.225 & 0.9734 - 0.9749 & 0.037 - 0.043 \\ 0.004 - 0.014 & 0.035 - 0.043 & 0.9990 - 0.9993 \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

Взаимодействие с полем нейтрального Z -бозона описывается нейтральным током:

$$\begin{aligned} j_\mu^{NC} &= \sum_f \bar{f} \gamma_\mu \left[I_f^{(3)} (1 - \gamma^5) - 2Q_f \sin^2 \theta_W \right] f \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=e,\mu,\tau} [\bar{\nu}_\ell \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_\ell - \bar{\ell} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \ell] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{q=u,c,t} \bar{q} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) q - \frac{1}{2} \sum_{q=d,s,b} \bar{q} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) q - 2 \sin^2 \theta_W j_\mu^{em} \end{aligned} \quad (1.69)$$

где величина $I_f^{(3)} = 1/2$ для $f = \nu_\ell, q_u$ и $I_f^{(3)} = -1/2$ для $f = \ell, q_d$.

Ниже мы сформулируем правила Фейнмана в импульсном представлении для вычисления матричных элементов. Диаграммная техника сыграла большую роль в развитии квантовой теории поля и представляет собой удобный и наглядный способ вычисления. Итак, диаграммы состоят из:

⁴здесь индекс L указывает на то, что f_L представляет собой так называемую левую компоненту спинора f , более детальное обсуждение приведено при рассмотрении распада пиона

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

- внешних линий, отвечающих свободным частицам в начальном и конечном состоянии
- внутренних линий, которые начинаются и заканчиваются в вершинах и описывают распространение частиц. При этом фермионные внешние и внутренние линии имеют направление, отвечающее движению заряда вдоль линии. Поэтому они являются непрерывными и либо начинаются и заканчиваются внешними концами, либо замыкаются сами на себя внутри диаграммы
- вершин, в которых встречаются три и более линии. Вид вершин определяется типом взаимодействия.

Для нахождения инвариантной амплитуды взаимодействия \mathcal{M}_{if} необходимо изобразить все топологически различные диаграммы (за исключением диаграмм в виде изолированных вакуумных петель и диаграмм, состоящих из частей, не связанных друг с другом). После того, как диаграмма нарисована, следует по правилам сформулированным ниже, сопоставить каждому элементу диаграммы фактор в матричном элементе. Затем следует сложить вклады, соответствующие всем диаграммам данного порядка теории возмущений.

Дополнительные правила таковы:

- в каждой вершине выполняется закон сохранения 4-импульса; по каждому внутреннему импульсу, который не фиксирован законами сохранения в вершинах, следует проинтегрировать
- каждой замкнутой фермионной линии отвечает множитель (-1)
- диаграммы, которые отличаются друг от друга только перестановкой двух внешних тождественных фермионов, имеют противоположный знак
- диаграмму следует выписывать вдоль фермионной линии, начав с выходящего конца и пройдя последовательно до входящего. При этом спинорные индексы выстраиваются в естественном порядке и их можно не выписывать в явном виде. Если спинорных линий несколько, то надо аналогичным образом выписать все фермионные линии и затем добавить недостающие бозонные элементы. Что касается замкнутой фермионной линии, то по спинорным индексам возникает шпур.

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

страница 28/130

Внешние линии:

	$u(p, s)$	электрон с импульсом p и спином s в начальном состоянии
	$\bar{u}(p, s)$	электрон с импульсом p и спином s в конечном состоянии
	$\bar{v}(p, s)$	позитрон с импульсом p и спином s в начальном состоянии
	$v(p, s)$	позитрон с импульсом p и спином s в конечном состоянии
	$\epsilon^\mu(q, \lambda)$	фотон с импульсом q и поляризацией λ в начальном состоянии
	$[\epsilon^\mu(q, \lambda)]^*$	фотон с импульсом q и поляризацией λ в конечном состоянии

Внутренние линии:

	$\frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	распространение электрона (позитрона) с импульсом p между двумя вершинами
	$\frac{g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$	распространение фотона с импульсом q между вершинами μ и ν
	$\frac{g^{\mu\nu}}{p^2 - M_W^2 + i\epsilon}$	распространение W^\pm бозона с импульсом p
	$\frac{g^{\mu\nu}}{p^2 - M_Z^2 + i\epsilon}$	распространение Z^0 бозона с импульсом p

Вершины:

$ieQ_f\gamma^\mu$	$i\frac{g}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma^5)V_{ud}$	$i\frac{g}{2\cos\theta_W}\gamma^\mu\left[I_f^{(3)}(1-\gamma^5)-2Q_f\sin^2\theta_W\right]$

1.5 Вероятность взаимодействия.

Вероятность перехода из начального состояния в конечное равна:

$$w_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(0) (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |\mathcal{M}_{if}|^2,$$

где \mathcal{M}_{if} - это как раз и есть амплитуда взаимодействия, введенная нами в §§1.4.

Здесь мы воспользовались тем, что квадрат $\delta(x)$ функции может быть представлен в виде произведения $\delta(x)^2 = \delta(0)\delta(x)$. Далее, по определению:

$$\delta^4(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dV dt e^{-ipx},$$

значит, $(2\pi)^4 \delta^4(0) = VT$, где объем интегрирования (V) и время (T) оба стремятся к ∞ . Теперь осталось учесть нормировки для начальных и конечных состояний, чтобы получить вероятность процесса в единицу времени:

$$dw_{fi} = \frac{w_{fi}}{T} \frac{d\Phi}{N}, \quad (1.70)$$

где $d\Phi$ - элемент фазового объема n частиц в конечном состоянии

$$d\Phi = \prod_{f=1}^n \frac{d^3 k_f V}{(2\pi)^3},$$

а нормировочный множитель N учитывает, что Дираковские спиноры нормированы как: $u^+ u = v^+ v = 2E$.

$$N = \prod_{i=1}^k (2E_i V) \prod_{f=1}^n (2E_f V).$$

Окончательно, вероятность перехода из начального состояния в конечное записывается в виде:

$$dw_{fi} = \frac{V (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |\mathcal{M}_{if}|^2}{\prod_{i=1}^k (2E_i V)} \prod_{f=1}^n \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3 2E_f}. \quad (1.71)$$

1.5.1 Ширины и сечения.

Для распада ($k = 1$) и без учета спина получаем:

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |\mathcal{M}_{if}|^2}{2E_a} \prod_{f=1}^n \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3 2E_f}. \quad (1.72)$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Учесть спиновые состояния нужно усреднив по начальным частицам, и просуммировав по конечным:

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |\overline{M_{if}}|^2}{2E_a(2I_a + 1)} \prod_{f=1}^n \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2E_f}. \quad (1.73)$$

В случае рассеяния частицы а на частице б в качестве "меры вероятности" используется сечение, т.е. отношение вероятности взаимодействия к потоку начальных частиц. В лабораторной системе, в которой частица а покоится, а частица б на ней рассеивается со скоростью v_b , плотность потока равна $j = v_b/V$, что дает, используя формулу (1.71):

$$d\sigma = \frac{dw_{fi}}{j} = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |M_{if}|^2}{2m_a 2E_b v_b} \prod_{f=1}^n \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2E_f}.$$

Величина $m_a E_b v_b$ может быть записана в произвольной системе отсчета, т.е. в лоренц-инвариантном виде:

$$m_a E_b v_b = \sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}$$

Упражнение 7

Убедитесь, что $m_a E_b v_b = \sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}$

Таким образом, окончательно запишем формулу для сечения (без учета спиновых состояний):

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |\overline{M_{if}}|^2}{4\sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} \prod_{f=1}^n \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2E_f}. \quad (1.74)$$

Аналогичный учет спиновых состояний дает следующую формулу:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |\overline{M_{if}}|^2}{4(2I_a + 1)(2I_b + 1)\sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} \prod_{f=1}^n \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2E_f}. \quad (1.75)$$

Как видим, в окончательный ответ для ширины и сечения объем V не вошел, всюду благополучно сократившись.

1.5.2 Квадрат матричного элемента

На протяжении этой книги нам часто будет встречаться матричный элемент, составленный из произведения двух токов:

$$M = j_1 \cdot j_2 = \bar{u}_1 O_\alpha u_2 \cdot \bar{u}_3 O^\alpha u_4,$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

где u_1, u_2, u_3, u_4 - это спиноры, входящие в задачу (некоторые из них могут относиться к одной и той же частице, в случае распада, например), а O_α - это некоторые матрицы 4×4 . Квадрат такого матричного элемента можно записать в виде:

$$|M|^2 = \bar{u}_1 O_\alpha u_2 \cdot \bar{u}_3 O^\alpha u_4 \cdot \bar{u}_1 O_\beta u_2 \cdot \bar{u}_3 O^\beta u_4. \quad (1.76)$$

Перепишем теперь уравнение (1.76) по-компонентно:

$$\begin{aligned} |M|^2 &= \\ &= (\bar{u}_1)_i (O_\alpha)_{ij} (u_2)_j \cdot (\bar{u}_3)_k (O^\alpha)_{km} (u_4)_m \cdot (\bar{u}_1)_n (O_\beta)_{nl} (u_2)_l \cdot (\bar{u}_3)_r (O^\beta)_{rs} (u_4)_s \\ &= (u_4)_s (\bar{u}_1)_i (O_\alpha)_{ij} (u_2)_j \cdot (\bar{u}_3)_k (O^\alpha)_{km} (u_4)_m \cdot (\bar{u}_1)_n (O_\beta)_{nl} (u_2)_l \cdot (\bar{u}_3)_r (O^\beta)_{rs} \\ &= \text{Tr} [u_4 \bar{u}_1 O_\alpha u_2 \bar{u}_3 O^\alpha u_4 \bar{u}_1 O_\beta u_2 \bar{u}_3 O^\beta]. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Таким образом, выражение для квадрата матричного элемента сводится к следу от произведения некоторых матриц. Для упрощения вычислений, желательно воспользоваться преобразованиями Фирца (§§1.5.3), чтобы заменить матрицу, типа $u_4 \bar{u}_1$ на $u_1 \bar{u}_1$, которая есть не что иное как матрица плотности:

$$\begin{aligned} u(p, s) \bar{u}(p, s) &= \frac{1}{2} (\hat{p} + m) (1 + \gamma_5 \hat{s}), \\ \sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) &= (\hat{p} + m) \end{aligned} \quad (1.78)$$

где \hat{s} - это 4-вектор спина.

1.5.3 Преобразования Фирца

Вначале рассмотрим некоторые вспомогательные соотношения. Разложим произвольную 4×4 матрицу O :

$$O = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{16} c_m \Gamma^{(m)}$$

16 матриц $\Gamma^{(m)}$

$$I, \quad \gamma^5, \quad \gamma^\mu, \quad \gamma^5 \gamma^\mu, \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu); \quad \mu < \nu$$

линейно независимы и образуют базис векторного пространства всех 4×4 матриц. Поскольку $1/4 \text{Tr} \Gamma^{(m)} \Gamma^{(n)} = \pm \delta_{mn}$ (выбор знака зависит от номера m), то коэффициенты разложения c_m :

$$c_m = \Delta_m \text{Tr} O \Gamma^{(m)}, \quad \Delta_m = \frac{1}{4} \text{Tr} \Gamma^{(m)} \Gamma^{(m)} = \pm 1$$

Таким образом,

$$\mathcal{O} = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{16} \Delta_m \text{Tr} \mathcal{O} \Gamma^{(m)} \Gamma^{(m)}$$

$$\mathcal{O}_{il} - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{16} \Delta_m \Gamma_{il}^{(m)} \Gamma_{kj}^{(m)} \mathcal{O}_{jk} = \left[\delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{16} \Delta_m \Gamma_{il}^{(m)} \Gamma_{kj}^{(m)} \right] \mathcal{O}_{jk} = 0 \quad (1.79)$$

Поскольку выражение (1.79) справедливо для произвольной матрицы \mathcal{O} , то:

$$\delta_{ij} \delta_{kl} = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{16} \Delta_m \Gamma_{il}^{(m)} \Gamma_{kj}^{(m)}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\delta_{il} \delta_{kj} + \gamma_{il}^5 \gamma_{kj}^5 + (\gamma^\mu)_{il} (\gamma_\mu)_{kj} - (\gamma^5 \gamma^\mu)_{il} (\gamma^5 \gamma_\mu)_{kj} + \frac{1}{2} (\sigma^{\mu\nu})_{il} (\sigma_{\mu\nu})_{kj} \right]$$

Сделав в этом выражении замену $i \rightarrow i'$, $l \rightarrow l'$ и умножив его на $\mathcal{A}_{ii'} \mathcal{B}_{l'l}$, где \mathcal{A} и \mathcal{B} некоторые матрицы, мы получим основное соотношение, с помощью которого вычисляются коэффициенты матрицы Фирца:

$$\mathcal{A}_{ij} \mathcal{B}_{kl} = \frac{1}{4} \left[(\mathcal{A} \mathcal{B})_{il} \delta_{kj} + (\mathcal{A} \gamma^5 \mathcal{B})_{il} \gamma_{kj}^5 + (\mathcal{A} \gamma^\mu \mathcal{B})_{il} (\gamma_\mu)_{kj} - (\mathcal{A} \gamma^5 \gamma^\mu \mathcal{B})_{il} (\gamma^5 \gamma_\mu)_{kj} + \frac{1}{2} (\mathcal{A} \sigma^{\mu\nu} \mathcal{B})_{il} (\sigma_{\mu\nu})_{kj} \right] \quad (1.80)$$

Теперь выберем $\mathcal{A} = \mathcal{O}^{(\alpha)}$, $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{(\alpha)}$ и рассмотрим полученное выражение в спинорных обкладках \bar{a}_i , b_j , \bar{c}_k , d_l . Мы получили так называемые тождества Фирца, в которых при переходе от левой части равенства к правой спиноры b_j и d_l меняют своих партнеров:

$$(\bar{a} \mathcal{O}_i^{(\alpha)} b) (\bar{c} \mathcal{O}_{(\alpha)}^j d) = \sum_j C_{ij} (\bar{a} \mathcal{O}_j^{(\beta)} d) (\bar{c} \mathcal{O}_{(\beta)}^j b) \quad (1.81)$$

Здесь индексы $(\alpha), (\beta)$ соответствуют возможному *ковариантному* суммированию, в то время как индексы i, j обозначают тип матрицы \mathcal{O} :

$$\mathcal{O}_S = \mathbf{I}, \quad \mathcal{O}_P = \gamma^5, \quad \mathcal{O}_V = \gamma^\mu, \quad \mathcal{O}_A = \gamma^5 \gamma^\mu, \quad \mathcal{O}_T = \sigma^{\mu\nu}$$

Вычисляя произведения γ -матриц типа $\mathcal{O}^{(\mu)} \Gamma^{(m)} \mathcal{O}_{(\mu)}$ (см. упражнение 6), выпишем элементы матрицы Фирца C_{ij} :

C_{ij}	S	V	T	A	P
S	1/4	1/4	1/8	-1/4	1/4
V	1	-1/2	0	-1/2	-1
T	3	0	-1/2	0	3
A	-1	-1/2	0	-1/2	1
P	1/4	-1/4	1/8	1/4	1/4

В качестве примера выпишем в явном виде тождество Фирца для V-варианта:

$$(\bar{a}\gamma^\mu b)(\bar{c}\gamma_\mu d) = (\bar{a}d)(\bar{c}b) - \frac{1}{2}(\bar{a}\gamma^\mu d)(\bar{c}\gamma_\mu b) - \frac{1}{2}(\bar{a}\gamma^5\gamma^\mu d)(\bar{c}\gamma^5\gamma_\mu b) - (\bar{a}\gamma^5 d)(\bar{c}\gamma^5 b)$$

Упражнение 8

Получите следующие соотношения⁵:

$$\bar{a}(1 \pm \gamma^5)\gamma^\mu b \cdot \bar{c}(1 \pm \gamma^5)\gamma_\mu d = -\bar{a}(1 \pm \gamma^5)\gamma^\mu d \cdot \bar{c}(1 \pm \gamma^5)\gamma_\mu b$$

$$\bar{a}(1 \pm \gamma^5)\gamma^\mu b \cdot \bar{c}(1 \mp \gamma^5)\gamma_\mu d = 2\bar{a}(1 \pm \gamma^5)d \cdot \bar{c}(1 \mp \gamma^5)b$$

1.5.4 Замечание о δ функции

При вычислении различных интегралов в этой книге нам будет часто встречаться ситуация, когда под знаком δ функции стоит некоторая функция от переменной интегрирования. Напоминаем читателю как вычислять такие интегралы:

$$\int dx f(x)\delta(g(x)) = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}, \text{ где } x_i \text{ это решения } g(x_i) = 0. \quad (1.82)$$

⁵Указание: сделайте замену $\bar{a} \rightarrow \bar{a}(1 \pm \gamma^5)$, ... ; далее воспользоваться разложением для V-варианта.

Chapter 2

Распады

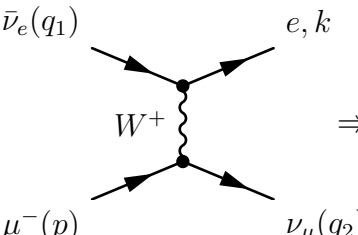
В этой главе мы рассмотрим некоторые важные распады, такие как распад мюона - важнейший чисто лептонный распад, из которого получается самая точная оценка для константы Ферми G_F , двухчастичные распады пионов и каонов на лептон и нейтрино, фундаментальный по важности распад нейтрона и распады τ лептона.

2.1 Распад мюона

Из физики частиц...

Мюон -- это заряженный лептон, спин $1/2$, с массой 105.658357 ± 0.000005 МэВ. Время жизни мюона -- $(2.19703 \pm 0.0004) \times 10^{-6}$ сек. Мюон был открыт в космических лучах в 1937 году Дж. Стритом (J. C. Street) и Е. Стивенсоном (E. C. Stevenson) в пузырьковой камере. Открытие было опубликовано в Phys. Rev. 52, 1003 (1937) под названием "New Evidence for the Existence of a Particle Intermediate Between the Proton and Electron".

Амплитуда распада $\mu^-(p) \rightarrow e(k) + \bar{\nu}_e(q_1) + \nu_\mu(q_2)$, дается уравнением:


$$\Rightarrow M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu(q_2) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \mu(p) \cdot \bar{e}(k) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \nu_e(q_1) \quad (2.1)$$

Теперь, согласно нашему рецепту, мы должны были бы вычислить квадрат амплитуды (2.1). Однако, если действовать прямолинейно, это привело бы нас к довольно длинным вычислениям (см. §§1.5.2). Для упрощения вычислений мы

воспользуемся преобразованием Фирца (§§1.5.3):

$$\begin{aligned} & \bar{\nu}_\mu(q_2)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\mu(p) \cdot \bar{e}(k)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\nu_e(q_1) \\ &= -\bar{\nu}_\mu(q_2)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\nu_e(q_1) \cdot \bar{e}(k)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\mu(p) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Комплексно сопряженное выражение для M удобно вычислить, воспользовавшись операцией эрмитова сопряжения (комплексное сопряжение + транспонирование), которая даст тот же самый результат, поскольку M - это число, а не матрица:

$$M^* = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_e(q_1)\gamma_\beta(1-\gamma_5)\nu_\mu(q_2) \cdot \bar{\mu}(p)\gamma^\beta(1-\gamma_5)e(k),$$

где мы воспользовались тем, что $(\bar{a}\gamma_\alpha(1-\gamma_5)b)^+ = b^+(\gamma_\alpha(1-\gamma_5))^+(\bar{a})^+ = \bar{b}\gamma_0(\gamma_\alpha(1-\gamma_5))^+\gamma_0a = \bar{b}\gamma_\alpha(1-\gamma_5)a$. Последнее равенство мы получили, воспользовавшись явным видом γ матриц.

$$\begin{aligned} MM^* &= \\ &= -\frac{G_F^2}{2}\bar{\nu}_\mu\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\mu \cdot \bar{e}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\nu_e\bar{\nu}_e\gamma_\beta(1-\gamma_5)\nu_\mu \cdot \bar{\mu}\gamma^\beta(1-\gamma_5)e \\ &= -\frac{G_F^2}{2}\bar{\nu}_\mu\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\mu\bar{\mu}\gamma^\beta(1-\gamma_5)e\bar{e}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\nu_e\bar{\nu}_e\gamma_\beta(1-\gamma_5)\nu_\mu \\ &= -\frac{G_F^2}{2}Tr [\nu_\mu\bar{\nu}_\mu\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\mu\bar{\mu}\gamma^\beta(1-\gamma_5)e\bar{e}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\nu_e\bar{\nu}_e\gamma_\beta(1-\gamma_5)] \end{aligned}$$

воспользовавшись уравнением (1.78) и просуммировав по спину электрона \Rightarrow

$$-\frac{G_F^2}{4}Tr \left[\hat{q}_2\gamma_\alpha(1-\gamma_5)(\hat{p}+m_\mu)(1+\gamma_5\hat{s})\gamma^\beta(1-\gamma_5)(\hat{k}+m_e)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\hat{q}_1\gamma_\beta(1-\gamma_5) \right]. \quad (2.3)$$

Прежде чем, вычислить след в уравнении (2.3), заметим, что комбинацию матриц $(1-\gamma_5)\frac{1}{2}(\hat{p}+m)(1+\gamma_5\hat{s})\gamma^\beta(1-\gamma_5)$ можно упростить:

$$\begin{aligned} (1-\gamma_5)(\hat{p}+m_\mu)(1+\gamma_5\hat{s})\gamma^\beta(1-\gamma_5) &= (1-\gamma_5)(\hat{p}+m_\mu+\hat{p}\gamma_5\hat{s}+m_\mu\gamma_5\hat{s})\gamma^\beta(1-\gamma_5) = \\ &= (1-\gamma_5)(\hat{p}+m_\mu\gamma_5\hat{s})\gamma^\beta(1-\gamma_5)+m_\mu\gamma^\beta(1+\gamma_5)(1-\gamma_5)+\hat{p}\gamma_5\hat{s}\gamma^\beta(1+\gamma_5)(1-\gamma_5) \end{aligned}$$

Последние два слагаемые равны нулю, т.к. $(1+\gamma_5)(1-\gamma_5) = 1-\gamma_5^2 = 1-1 = 0$. Первое слагаемое можно еще больше упростить, заметив, что $(1-\gamma_5)m\gamma_5\hat{s} = -(1-\gamma_5)m\hat{s}$, т.е. $(1-\gamma_5)(\hat{p}+m_\mu\gamma_5\hat{s}) = (1-\gamma_5)(\hat{p}-m_\mu\hat{s})$. Тогда, уравнение (2.3) можно записать в

виде:

$$\begin{aligned}
 |M|^2 &= -\frac{G_F^2}{4} \text{Tr} \left[\hat{q}_2 \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (\hat{p} - m_\mu \hat{s}) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) (\hat{k} + m_e) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \hat{q}_1 \gamma_\beta (1 - \gamma_5) \right] \\
 &= -\frac{G_F^2}{4} \text{Tr} \left[\hat{q}_2 \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \hat{p}' \gamma^\beta (1 - \gamma_5) \hat{k} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \hat{q}_1 \gamma_\beta (1 - \gamma_5) \right] \\
 &\quad \text{где } p' = p - ms \\
 &= -8 \frac{G_F^2}{4} \text{Tr} \left[\hat{q}_2 \gamma_\alpha \hat{p}' \gamma^\beta \hat{k} \gamma^\alpha \hat{q}_1 \gamma_\beta (1 - \gamma_5) \right], \text{ и воспользовавшись (1.38)} \\
 &= 4G_F^2 \text{Tr} \left[\hat{q}_2 \gamma_\alpha \hat{p}' \hat{q}_1 \gamma^\alpha \hat{k} (1 - \gamma_5) \right] \\
 &= 16G_F^2 (p' \cdot q_1) \text{Tr} \left[\hat{q}_2 \hat{k} (1 - \gamma_5) \right] \\
 &= 64G_F^2 ((p - ms) \cdot q_1) (q_2 \cdot k)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Теперь мы готовы вычислить вероятность распада мюона, характеризуемую шириной (§§1.5.1):

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) 64G_F^2 ((p - ms) \cdot q_1) (q_2 \cdot k)}{2m_\mu} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3 2w_1} \frac{d^3q_2}{(2\pi)^3 2w_2}. \tag{2.5}$$

При интегрировании полученного выражения по $d^3q_1 d^3q_2$ нам понадобится вычислить интеграл:

$$I_{\alpha\beta} = \int q_{1\alpha} q_{2\beta} \frac{d\mathbf{q}_1}{w_1} \frac{d\mathbf{q}_2}{w_2} \delta^4(q_1 + q_2 - q),$$

где $q = p - k$. $I_{\alpha\beta}$ можно представить в виде суммы двух ортогональных комбинаций:

$$I_{\alpha\beta} = A(q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta) + B(q^2 g_{\alpha\beta} - 2q_\alpha q_\beta).$$

Легко убедиться, в том, что $(q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta)(q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta) = 12q^4$, $(q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta)(q^2 g_{\alpha\beta} - 2q_\alpha q_\beta) = 0$. Умножим $I_{\alpha\beta}$ на $(q^2 g_{\alpha\beta} - 2q_\alpha q_\beta)$:

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{d\mathbf{q}_1}{w_1} \frac{d\mathbf{q}_2}{w_2} \delta^4(q_1 + q_2 - q) (q^2 (q_1 \cdot q_2) - 2(q_1 \cdot q)(q_2 \cdot q)) = \\
 &\int \frac{d\mathbf{q}_1}{w_1} \frac{d\mathbf{q}_2}{w_2} \delta^4(q_1 + q_2 - q) (2(q_1 \cdot q_2)^2 - 2(q_1 \cdot q_2)^2) = 0 \\
 &\Rightarrow B = 0
 \end{aligned}$$

Умножим $I_{\alpha\beta}$ на $(q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta)$:

$$\begin{aligned}
 12Aq^4 &= q^4 \int \frac{d\mathbf{q}_1}{w_1} \frac{d\mathbf{q}_2}{w_2} \delta^4(q_1 + q_2 - q) = q^4 \int \frac{d\mathbf{q}_1}{w_1^2} d(2w_1 - w) \\
 &= q^4 4\pi \int dw_1 d(2w_1 - w) = q^4 2\pi
 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$A = \pi/6, \quad I_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{6}(q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta)$$

Теперь вычислим ширину:

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{G_F^2 (p - ms)_\alpha k_\beta \pi / 6 (q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta)}{8\pi^5 m_\mu} \frac{d^3 k}{E} = \\ &= \frac{G_F^2}{48\pi^4 m_\mu} [q^2 (p - ms, k) + 2(q, p - ms)(qk)] \frac{d^3 k}{E} \\ &= \frac{G_F^2}{48\pi^4 m_\mu} [(m_\mu^2 - 2mE)m_\mu E + 2(m_\mu^2 - m_\mu E) - m_\mu(m_\mu^2 - 2m_\mu E)E\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n} - \\ &2E\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n}m_\mu E] \frac{d^3 k}{E} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \epsilon^2 d\epsilon [(3 - 2\epsilon) - \cos \Theta (1 - 2\epsilon)] d\cos \Theta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При выводе этих уравнений мы использовали следующие соотношения и определения: $q \cdot k = (p - k, k) = p \cdot k = m_\mu E$; $q^2 = (p - k)^2 = m_\mu^2 - 2p \cdot k = m_\mu^2 - 2m_\mu E$; $q \cdot p = (p - k, p) = m_\mu^2 - m_\mu E$; $s \cdot k = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{k} = E\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n} = E \cos \Theta$; $q \cdot s = p \cdot s - k \cdot s = -E \cos \Theta$, поскольку $p \cdot s = 0$; $\epsilon = E/E_{max} = 2E/m_\mu$. Полная ширина дается интегралом:

$$\Gamma = \int (d\Gamma_+ + d\Gamma_-) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}. \quad (2.7)$$

Константа G_F может быть вычислена, используя измеренное на опыте значение времени жизни мюона¹, мы же пойдем несколько в обратную сторону: зная, что $G_F = 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$, оценим

$$\tau_\mu = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.582 \cdot 10^{-22} \text{ МэВ сек } 192\pi^3}{(1.166 \cdot 10^{-11} \text{ МэВ}^{-2})^2 (105.66 \text{ МэВ})^5} = 2.189 \cdot 10^{-6} \text{ сек},$$

что с 4% точностью совпадает с экспериментальным значением:

$$\tau_{exp} = 2.197 \cdot 10^{-6} \text{ сек [8]}.$$

Угловое распределение вылетевших электронов в случае распада поляризованного мюона дается формулой:

$$\frac{d\Gamma(\cos \Theta)}{\Gamma} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos \Theta \right). \quad (2.8)$$

2.1.1 Вычисление ширины распада мюона в лабораторной системе

В качестве упражнения проведем некоторые вычисления распада мюона в лабораторной системе. В уравнениях 2.6 переход к системе покоя произошел во второй строке. Для перехода в лабораторную систему достаточно заметить

¹точное вычисление времени жизни мюона учитывает еще радиационные поправки

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

следующее: массу мюона в знаменателе нужно заменить на его энергию в лабораторной системе E_μ , а фазовый объем и матричный элемент являются Лоренц-инвариантами. Для того, чтобы убедиться в последнем сделаем явное вычисление, имея в виду его практическую ценность для учета нетривиальной трех-частичной кинематики.

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos \Theta \leq 1 \text{ если } E_\mu E - m_\mu E_{max}^* \leq -P_\mu P \\ \frac{1}{\beta} - \frac{m_\mu^2}{2P_\mu P} \leq \cos \Theta \leq 1 \text{ если } 0 \leq P \leq \frac{E_\mu P_{max}^* - P_\mu E_{max}^*}{m_\mu} \end{aligned} \quad (2.9)$$

где E_μ, P_μ и E, P - это энергия и модуль трехмерного импульса мюона и электрона соответственно, E_{max}^*, P_{max}^* - максимально возможные энергия и импульс электрона в системе покоя мюона, и $\beta = P_\mu/E_\mu$ - скорость мюона в лабораторной системе. Пренебрегая массой электрона ($E \approx P$), и учитывая, что $E_{max}^* = m_\mu/2$, условия (2.9) запишутся:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos \Theta \leq 1 \text{ если } 0 \leq E \leq \frac{E_\mu - P_\mu}{2} \\ \frac{1}{\beta} - \frac{m_\mu^2}{2P_\mu E} \leq \cos \Theta \leq 1 \text{ если } \frac{E_\mu - P_\mu}{2} \leq E \leq \frac{E_\mu + P_\mu}{2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Запишем еще раз уравнение для ширины:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{G_F^2}{48\pi^4 E_\mu} \int [q^2(p - ms, k) + 2(q, p - ms)(qk)] \frac{d^3k}{E} \\ &= \frac{G_F^2}{24\pi^3 E_\mu} \int [(2m_\mu^2 - (pk))(p - ms, k) + 2(q, p - ms)(pk)] d \cos \Theta E dE. \end{aligned} \quad (2.11)$$

и вычислим явным образом два интеграла:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int (pk) d \cos \Theta E dE \\ I_2 &= \int (sk) d \cos \Theta E dE \end{aligned}$$

В системе покоя мюона:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 d \cos \Theta m_\mu \int_0^{m_\mu/2} E \Theta E dE = \frac{m_\mu^4}{12} \\ I_2 &= \int_{-1}^1 \cos \Theta d \cos \Theta \int_0^{m_\mu/2} E^2 dE = 0 \end{aligned}$$

В лабораторной системе:

$$s = \left(\frac{(\eta \cdot \mathbf{P}_\mu)}{m_\mu}, \eta + \frac{(\eta \cdot \mathbf{P}_\mu) \mathbf{P}_\mu}{m_\mu(m_\mu + E_\mu)} \right)$$

Итак, учитывая, что $E_\mu = \frac{m_\mu}{\sqrt{1-\beta^2}}$, получим:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int (pk) d \cos \Theta E dE \\
 &= \left(\int_{-1}^1 d \cos \Theta \int_0^{(E_\mu - P_\mu)/2} + \int_{\frac{1}{\beta} - \frac{m_\mu^2}{2P_\mu E}}^1 d \cos \Theta \int_{(E_\mu - P_\mu)/2}^{(E_\mu + P_\mu)/2} \right) (E_\mu E - P_\mu E \cos \Theta) E dE \\
 &= \frac{E_\mu^4 (1 - \beta)^3}{12} - \frac{1}{24} (1 - \beta)^2 (3 + \beta^2) E_\mu^4 + \frac{m_\mu^4}{8} = \frac{m_\mu^4}{12} \\
 I_2 &= \int (sk) d \cos \Theta E dE \\
 &= \left(\int_{-1}^1 d \cos \Theta \int_0^{(E_\mu - P_\mu)/2} + \int_{\frac{1}{\beta} - \frac{m_\mu^2}{2P_\mu E}}^1 d \cos \Theta \int_{(E_\mu - P_\mu)/2}^{(E_\mu + P_\mu)/2} \right) \left(\frac{P_\mu}{m_\mu} - \cos \Theta - \frac{P_\mu^2 \cos \Theta}{m_\mu (m_\mu + E_\mu)} \right) \eta E^2 dE \\
 &= \eta \frac{P_\mu E_\mu}{m_\mu} \left(m_\mu^2 \frac{(1 - \beta)^3}{6} + \frac{E_\mu^3 (3 + \beta^2) (2\beta^3 - 3\beta^2 + 1)}{12\beta^2} + \frac{m_\mu^2 E_\mu}{2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{m_\mu^4}{4\beta P_\mu} \right) \\
 &= \frac{\eta P_\mu E_\mu m_\mu}{48\beta^2 (1 - \beta^2)} (2\beta^2 (1 - \beta^2) + (3 + \beta^2) (2\beta^3 - 3\beta^2 + 1) - 3(1 - \beta^2)^2) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Упражнение 9

Убедитесь в справедливости вычислений (2.12).

2.2 Распад $\pi \rightarrow l \nu$

Рассмотрим распад заряженного пиона на лептон и (анти) нейтрино (Рис.2.1).

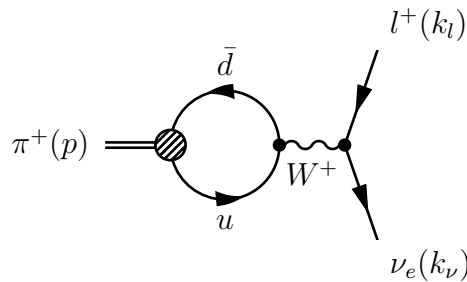


Figure 2.1: Диаграмма Фейнмана для распада $\pi^+(p) \rightarrow l^+(k_l) + \nu_l(k_\nu)$

С одной стороны такой распад сложнее рассчитать, чем чисто лептонный, потому что в нем участвуют кварки в связанном состоянии, а этот объект до сих пор толком нельзя описать чисто теоретически. С другой же стороны, именно по этой причине,

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

теоретики придумали множество рецептов феноменологического описания таких процессов, что делает практические вычисления даже проще, чем в лептонных процессах. Амплитуда распада пиона может быть записана как произведение адронного и лептонного токов:

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cos \Theta_C H_\alpha L^\alpha,$$

где $\cos \Theta_C$ - это косинус угла Кабиббо смешивания u и d кварков. Лептонный ток L^α записать легко по правилу Фейнмана; в данном случае вылетают две частицы - лептон и нейтрино, что можно представить как вылетевшее по времени нейтрино и влетевший против времени лептон: $L^\alpha = \bar{\nu} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) l$. Адронный ток H_α , в силу двухчастичности распада, может зависеть только от одного 4-импульса p_α , так что его можно представить в виде: $H_\alpha = f_\pi p_\alpha$, где f_π - это некоторая константа, вобравшая в себя всю динамику взаимодействия кварков и глюонов внутри пиона. Мы не можем ее *вычислить*, но можем легко параметризовать! Теперь, амплитуду распада пиона можно представить в виде:

$$M = \frac{G_F \cos \Theta_C f_\pi}{\sqrt{2}} p_\alpha \bar{\nu} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) l = \frac{G_F \cos \Theta_C f_\pi}{\sqrt{2}} \bar{\nu} \hat{p} (1 - \gamma_5) l \quad (2.13)$$

Выражение $\bar{\nu} \hat{p} (1 - \gamma_5) l$ можно упростить, воспользовавшись законом сохранения энергии-импульса $p = k_\nu + k_l$, а также уравнениям Дирака 1.36:

$$\bar{\nu} \hat{p} (1 - \gamma_5) l = \bar{\nu} (\hat{k}_\nu + \hat{k}_l) (1 - \gamma_5) l = m_l \bar{\nu} (1 + \gamma_5) l.$$

Нам понадобится также комплексно-сопряженное этому выражению $m_l (\bar{\nu} (1 + \gamma_5) l)^+ = m_l l^+ (1 + \gamma_5) \gamma_0 \nu_l = m_l l^+ \gamma_0^2 (1 + \gamma_5) \gamma_0 \nu_l = m_l \bar{l} (1 - \gamma_5) \nu_l$. Теперь квадрат матричного элемента легко посчитать:

$$\begin{aligned} |\overline{M}|^2 &= \frac{G_F^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2 m_l^2}{2} \text{Tr} \nu_l \bar{\nu}_l (1 + \gamma_5) \bar{l} l (1 - \gamma_5) \\ &= \frac{G_F^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2 m_l^2}{2} \text{Tr} \hat{k}_\nu (1 + \gamma_5) (\hat{k}_l + m_l) (1 - \gamma_5) \\ &= \frac{G_F^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2 m_l^2}{2} 2 \text{Tr} \hat{k}_\nu \hat{k}_l \\ &= 4 G_F^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2 m_l^2 (k_\nu k_l) = 4 G_F^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2 m_l^2 (k_\nu, (p - k_\nu)) \\ &= 4 G_F^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2 m_l^2 m_\pi E_\nu \end{aligned} \quad (2.14)$$

При получении последнего равенства мы воспользовались тем, что $p = (m_\pi, 0)$, $k_\nu^2 = m_\nu^2 = 0$. Вычислим ширину по стандартной формуле (1.73):

$$\Gamma = \int \frac{|\overline{M}|^2}{2m_\pi} d\Phi = \frac{|\overline{M}|^2}{2m_\pi} \Phi. \quad (2.15)$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

В уравнении (2.15) мы распространили интегрирование только на фазовый объем, поскольку это распад двух-частичный и все импульсы зафиксированы законом сохранения². Вычислим фазовый объем:

$$\begin{aligned}\Phi &= \\ &= \int \delta^4(p - k_\nu - k_l) (2\pi)^4 \frac{d^3 k_\nu}{(2\pi)^3 E_\nu} \frac{d^3 k_l}{(2\pi)^3 E_l} = \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{d^3 k_\nu}{E_\nu E_l} \delta(m_\pi - E_\nu - \sqrt{m_l^2 + E_\nu^2}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{E_\nu^2 dE_\nu}{E_\nu E_l} \delta(m_\pi - E_\nu - \sqrt{m_l^2 + E_\nu^2}) = \frac{1}{4\pi} \frac{E_\nu}{E_l} \frac{1}{1 + E_\nu/E_l} = \frac{1}{4\pi} \frac{E_\nu}{E_l} \frac{E_l}{m_\pi} = \frac{E_\nu}{4\pi m_\pi}\end{aligned}\quad (2.16)$$

Подставляя вычисленный фазовый объем (2.16) в уравнение (2.15), получим:

$$\Gamma = \frac{G_F^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2 m_l^2 m_\pi}{8\pi} \left(1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2}\right)^2. \quad (2.17)$$

Упражнение 10

Оцените значение константы f_π , сравнив вычисленное значение для времени жизни $\tau = \hbar/\Gamma$ с экспериментальным значением $\tau_{exp} = 2.6 \cdot 10^{-8}$ сек.

2.2.1 Подавление распада $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$ по сравнению с $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$

Из уравнения (2.17) можно немедленно получить отношение ширин для распадов $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$ $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$:

$$\frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \right)^2 \quad (2.18)$$

Подставив значения масс электрона, мюона и пиона: $m_e = 0.51$, $m_\mu = 105.658$, $m_\pi = 139.57$ МэВ, получим отношение (2.18) равным $1.278 \cdot 10^{-4}$, что неплохо согласуется с отношением из [8], равным $1.230 \cdot 10^{-4}$. Любопытно, почему же эти ширины отличаются в 10 тысяч раз? Чем электрон "хуже" мюона при распаде пиона?

На этот вопрос можно ответить математически:

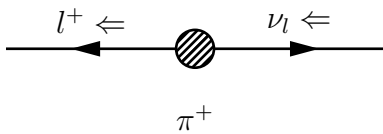
-- потому что квадрат матричного элемента (2.14) пропорционален m_l^2 .

Некоторые даже добавляют:

-- это следствие $V - A$ взаимодействия.

Figure 2.2: Бесспиновый пион распадается на "левое" нейтрино и "правый" лептон, дающий в сумме спин 1.

²напомним, что в трех и более частичном распаде получается спектр импульсов продуктов распадов.



больше в 10 тысяч раз, чем на позитрон и электронное нейтрино? Попробуем разобраться. На рис.2.2 изображен распад $\pi^+ \rightarrow l^+ \nu_l$. Стрелками показано направление спинов "левого" нейтрино и "правого" лептона. Эти "левость" и "правость" следуют действительно из $V-A$ взаимодействия. При этом получается система нейтрино плюс лептон со спином 1, в то время как распадающийся пион обладает нулевым спином. Такой распад вообще не должен был бы идти из-за сохранения "орбитального момента" -- спина. Очевидно, что в природе такие распады существуют, и причина этого заключается в том, что спиральность заряженного лептона (т.е. проекция спина на импульс лептона) не является "хорошим" квантовым числом -- она зависит даже от системы отсчета³. Нерелятивистская частица описывается волновой функцией, в которой ей смесь левых и правых компонент. Легко оценить скорости позитрона и мюона из распада покоящегося пиона:

$$v_e = 99.995\%c, \quad v_\mu = 27\%c$$

Таким образом, позитрон рождается ультра-релятивистским, а мюон нерелятивистским. Значит, та часть волновой функции позитрона, которая обладает нужной для распада "левой" спиральностью -- очень мала (но не равна нулю!), что подавляет распад пиона на позитрон и нейтрино. Такая же компонента для мюона не подавлена и процесс распада легко идет.

Читателям, для которых "слова ничего не значат", приведем еще и простые формулы. Мы называем левой компонентой волновой функции выражение:

$$\psi_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi.$$

Используя явный вид матрицы $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, запишем:

$$\psi_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi - \chi \\ \chi - \varphi \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Из уравнения Дирака $(\hat{p} - m) \psi = (E\gamma_0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - m) \psi = 0$ следует:

$$\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi, \quad \varphi - \chi = \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \right) \varphi = \left(1 - \frac{p\sigma_z}{E + m} \right) \varphi =$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{v}{1+m/E} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{v}{1+m/E} \end{pmatrix} \varphi.$$

³Например, в лабораторной системе отсчета лептон может быть "правым", т.е. его спин направлен параллельно своему импульсу. Если же мы перейдем в систему отсчета, которая движется быстрее лептона, то в ней направление импульса поменяет свое направление на противоположное, в то время, как спин -- нет. В новой системе отсчета лептон будет уже "левым". Есть одно важное исключение из этого -- безмассовая частица -- ее невозможно обогнать, а потому спиральность безмассовой частицы -- хорошее квантовое число.

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Видим, что ψ_L зависит только от разности $\varphi - \chi$, но не от их суммы. В последнее уравнение мы ввели скорость $v = p/E$. Теперь рассмотрим два случая истинно левой

$\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и правой $\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ волновых функций:

$$\begin{array}{cc} v \rightarrow 1 & v \rightarrow 0 \\ \varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Получился интересный результат: в ультрарелятивистском пределе ψ_L действительно не содержит правой примеси, целиком состоя из левой компоненты. В тоже время в нерелятивистском пределе обе правая и левая компонента входят в ψ_L поровну. В общем фактор подавления процесса пропорционален квадрату волновой функции $\sim 1 - v^2 = \frac{m_l^2}{E_l^2}$, что у нас и получилось явным вычислением. Очень важно заметить, что это действительно проявление $V - A$ вида взаимодействия. Если бы взаимодействие не было чувствительным к спиральности частиц, то отношение ширины $\frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)}$ было бы пропорционально отношению фазовых объемов $\left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2 \sim 5.5$, т.е. на позитрон и электронное нейтрино пион распадался бы даже в 5.5 раз вероятнее, чем на мюон и мюонное нейтрино!

Упражнение 11

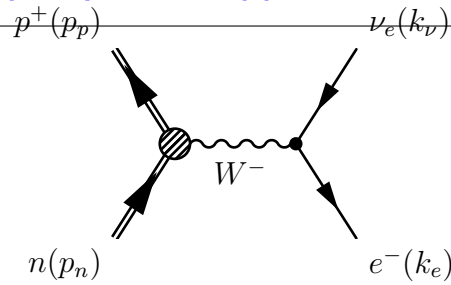
Покажите, что энергии нейтрино и лептона даются выражениями:

$$E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi}, \quad E_l = \frac{m_\pi^2 + m_l^2}{2m_\pi}.$$

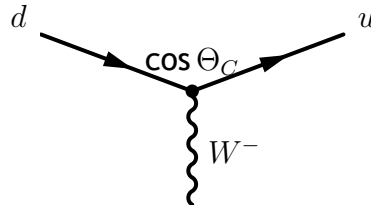
Покажите также, что скорость лептона дается выражением: $v_l = \frac{p_l}{E_l} = \left(\frac{m_\pi^2 - m_l^2}{m_\pi^2 + m_l^2}\right)$ и убедитесь в том, что наши оценки для скоростей мюона и позитрона правильные.

2.3 β распад нейтрона

Диаграмма Фейнмана для распада $n(p_n) \rightarrow p(p_p) + e(k_e) + \bar{\nu}_e(k_\nu)$ приведена на Рис. 2.3. Превращение нейтрона с кварковым составом udd в протон с кварковым

Figure 2.3: Диаграмма Фейнмана для распада $n(p_n) \rightarrow p(p_p) + e(k_e) + \bar{\nu}_e(k_\nu)$

составом uud происходит за счет слабого тока:



Поэтому амплитуду распада можно записать в виде:

$$M = \frac{G_F \cos \Theta_C}{\sqrt{2}} L_\alpha H^\alpha,$$

где L_α - это лептонный ток, который легко записать явно:

$$L_\alpha = \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \nu,$$

адронный ток H^α является довольно сложной функцией, из которой мы выделим лишь два члена -- векторный и аксиально-векторный:

$$H^\alpha = V^\alpha - A^\alpha = \bar{p} (g_V(q^2) \gamma^\alpha - g_A(q^2) \gamma^\alpha \gamma_5) n,$$

где q^2 -- это квадрат переданного 4-импульса от нейтрона протону, который из-за близости масс протона и нейтрона можно с хорошей точностью положить равным нулю, а g_V и g_A -- это неизвестные функции q^2 . Экспериментально эти функции измеряются в процессах (квази) упругого рассеяния лептонов на нуклонах. Мы обсуждаем этот вопрос подробно в Главе 4. Пока же представим матричный элемент в виде:

$$M = \frac{G_F \cos \Theta_C}{\sqrt{2}} \bar{p} \gamma_\alpha (1 - \lambda \gamma_5) n \cdot \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \nu, \quad (2.19)$$

где $\lambda = g_A/g_V$. Вычислим $|M|^2$. Для этого запишем адронный ток в виде суммы левой и правой компонент:

$$\bar{p} \gamma_\alpha (1 - \lambda \gamma_5) n = \bar{p} (a \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) + b \gamma_\alpha (1 + \gamma_5)) n, \quad \text{где} \quad \begin{cases} a = (1 + \lambda)/2, \\ b = (1 - \lambda)/2. \end{cases}$$

Применим преобразование Фирца к матричному элементу (2.19):

$$M = \frac{G_F \cos \Theta_C}{\sqrt{2}} (-a \bar{p} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu \cdot \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) n + 2b \bar{p} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu \cdot \bar{e} \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) n).$$

Взяв комплексное сопряжение к этому выражению, получим:

$$M^+ = \frac{G_F \cos \Theta_C}{\sqrt{2}} (-a \bar{\nu} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) p \cdot \bar{n} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) e + 2b \bar{\nu} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) p \cdot \bar{n} \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) e).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} |M|^2 = \frac{G_F^2 \cos^2 \Theta_C}{2} & (-a^2 \nu \bar{\nu} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) p \bar{p} \gamma_\beta (1 - \gamma_5) n \bar{n} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) e \bar{e} \gamma^\beta (1 - \gamma_5) + \\ & + 2ab \nu \bar{\nu} (1 + \gamma_5) p \bar{p} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) n \bar{n} (1 - \gamma_5) e \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) - \\ & - ab \nu \bar{\nu} \gamma_\beta (1 - \gamma_5) p \bar{p} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) n \bar{n} \gamma^\beta (1 - \gamma_5) e \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) + \\ & + 2b^2 \nu \bar{\nu} (1 + \gamma_5) p \bar{p} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) n \bar{n} (1 - \gamma_5) e \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5)). \end{aligned}$$

Проводя стандартные вычисления каждого из четырех следов, получим:

$$|M|^2 = 128 G_F^2 \cos^2 \Theta_C [a^2 (p_p p_e)(p_\nu p_n) - ab m_n m_p (p_\nu p_e) + b^2 (p_n p_e)(p_\nu p_p)] \quad (2.20)$$

Это выражение можно упростить далее, заметив, что покоящийся нейтрон превращается в практически покоящийся протон. Это легко понять, поскольку максимально доступная кинетическая энергия это $(m_n - m_p)/2 \equiv \Delta/2 \approx 0.64$ МэВ, что составляет менее 7 процентов от массы протона. Пренебрегая энергией отдачи протона, запишем скалярные произведения в виде: $(p_p p_e) = m_p E_e$, $(p_\nu p_n) = E_\nu m_n$, $(p_\nu p_e) = E_\nu E_e - \mathbf{k}_\nu \cdot \mathbf{k}_e$, $(p_\nu p_p) = m_p E_\nu$. Тогда:

$$\begin{aligned} |M|^2 = 128 G_F^2 \cos^2 \Theta_C m_n m_p & [(a^2 - ab + b^2) E_e E_\nu + ab \mathbf{k}_\nu \cdot \mathbf{k}_e] = \\ & 32 G_F^2 \cos^2 \Theta_C m_n m_p E_e E_\nu [(1 + 3\lambda^2) + (1 - \lambda^2) \mathbf{n}_\nu \cdot \mathbf{v}_e], \end{aligned} \quad (2.21)$$

где \mathbf{n}_ν -- это единичный вектор вдоль направления вылета анти-нейтрино, \mathbf{v}_e -- это скорость электрона. По стандартной формуле (1.73) запишем ширину распада нейтрона:

$$\begin{aligned} d\Gamma = \int \frac{32 G_F^2 \cos^2 \Theta_C m_n m_p}{4m_n} (2\pi)^4 \delta^4(p_n - p_p - k_e - k_\nu) & \frac{d\mathbf{k}_\nu}{2E_\nu (2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_p}{2E_p (2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}_e}{2E_e (2\pi)^3} \\ E_e E_\nu [(1 + 3\lambda^2) + (1 - \lambda^2) \mathbf{n}_\nu \cdot \mathbf{v}_e] & = \frac{G_F^2 \cos^2 \Theta_C}{8\pi^5} \int \delta(\Delta - E_\nu - E_e) \frac{d\mathbf{k}_\nu}{E_\nu} \frac{d\mathbf{k}_e}{E_e} \\ [(1 + 3\lambda^2) + (1 - \lambda^2) \mathbf{n}_\nu \cdot \mathbf{v}_e] & \end{aligned} \quad (2.22)$$

В (2.22) член, пропорциональный $\mathbf{n}_\nu \cdot \mathbf{v}_e$ исчезает после интегрирования по углам вылета анти-нейтрино и электрона, возникнет множитель $(4\pi)^2$ и с учетом того, что $d\mathbf{k}_\nu = d\Omega_\nu E_\nu^2 dE_\nu$, $d\mathbf{k}_e = d\Omega_e |\mathbf{k}_e| E_e dE_e$ получим:

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 \cos^2 \Theta_C (1 + 3\lambda^2)}{2\pi^3} (\Delta - E_e)^2 \sqrt{E_e^2 - m_e^2} E_e dE_e \quad (2.23)$$

Проинтегрировав это выражение по энергии электрона, получим полную ширину распада нейтрона:

$$\Gamma = \frac{G_F^2 \Delta^5 \cos^2 \Theta_C (1 + 3\lambda^2)}{60\pi^3} 0.47. \quad (2.24)$$

Легко также оценить корреляцию вылета электрона и анти-нейтрино:

$$\nu - e \text{ корреляция} = \frac{\Gamma(\mathbf{n}_\nu \cdot \mathbf{v}_e > 0) - \Gamma(\mathbf{n}_\nu \cdot \mathbf{v}_e < 0)}{\Gamma(\mathbf{n}_\nu \cdot \mathbf{v}_e > 0) + \Gamma(\mathbf{n}_\nu \cdot \mathbf{v}_e < 0)} = \frac{(1 - \lambda^2)}{(1 + 3\lambda^2)} \approx -0.1 \text{ при } \lambda \approx 1.25$$

2.4 Распады τ лептона

Из физики частиц...

Тау лептон -- это третий известный заряженный лептон, спин 1/2, с массой 1777.03 ± 0.3 МэВ. Время жизни тау лептона -- $(2.906 \pm 0.0011) \times 10^{-13}$ сек. Он был открыт в 1975 году на встречных пучках e^+e^- в Стэнфорде, в эксперименте SPEAR (1973-1974). Мартин Перл изучал реакцию аннигиляции $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$, которые распадались с образованием мюона и электрона, как на левом рис. 2.4. Детектор регистрировал только два заряженных трека -- мюона и электрона, причем импульсы этих частиц были не сбалансированы из-за уносящих часть импульса нейтрино и анти-нейтрино. Пример такого события, реконструированного компьютером, приведен на правом рис. 2.4. Мартин Перл и Фредерик Рейнес в 1995 году получили Нобелевскую Премию за открытие тау лептона.

2.4.1 Оценка времени жизни τ лептона

τ лептон распадается по многим каналам: лептонным и полуадронным. В этом его отличие от, скажем, мюона, который не может распадаться на адрон из-за своей малой массы. Попробуем оценить время жизни τ лептона, исходя из следующих простых соображений. Поскольку τ -- заряженный лептон, то за его распад ответственно испускание W^\pm бозона (заряженный ток), который может превратиться, либо в пару лептон-нейтрино, либо в пару кварк-антикварк. В первом случае будет иметь место чисто лептонный распад, во втором -- полуадронный. Вероятность превращения W^\pm бозона в пару $u - \bar{d}$ в первом приближении должна быть пропорциональна вероятности превращения в пару лептон-нейтрино, с коэффициентом пропорциональности число цветов кварков $\times \cos^2 \Theta_C$. Аналогично, вероятность превращения W^\pm бозона в странную пару $u\bar{s}$ отличается коэффициентом число цветов кварков $\times \sin^2 \Theta_C$. Таким образом, полуадронная ширина распада τ лептона может быть оценена как:

$$\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau \text{ адроны}) = 3 \times (\cos^2 \Theta_C + \sin^2 \Theta_C) \Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu) = 3\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu).$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

страница 48/130

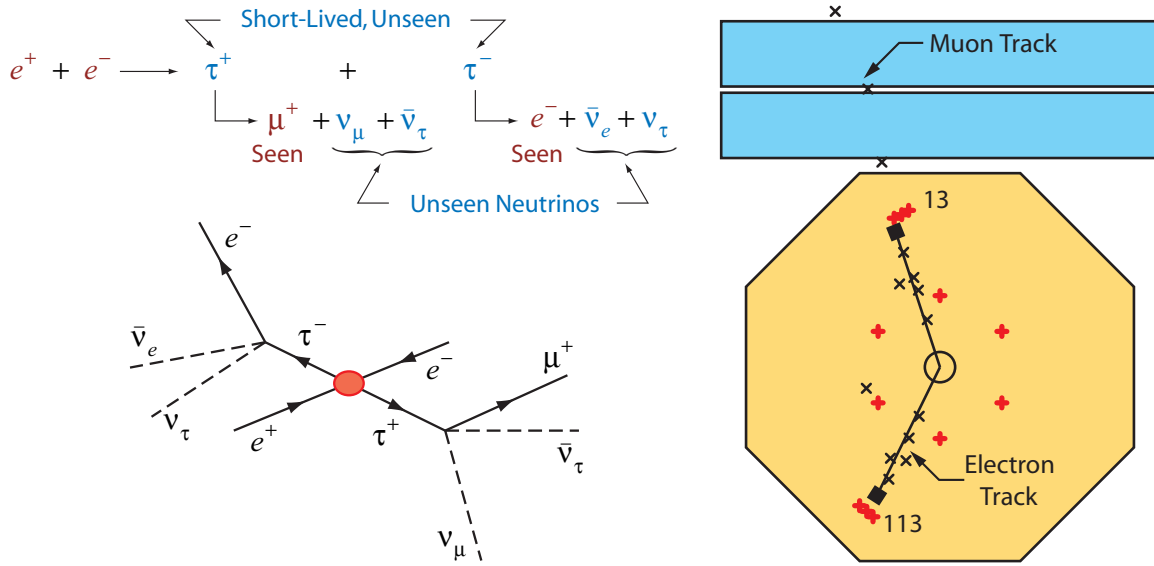


Figure 2.4: Аннигиляция $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ с последующим быстрым распадом тау лептонов на мюон и два нейтрино и электрон и два нейтрино (левый рисунок). Реконструированное событие рассматриваемого типа в детекторе SPEAR. Мюон оставляет отсчеты также в специальном детекторе, до которого электрон не способен добраться из-за потерь энергии (правый рисунок).

Для оценки лептонной ширины $\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu)$ можно воспользоваться результатами вычислений распада мюона §2.1. В уравнении (2.7) нужно всего лишь заменить массу мюона на массу тау лептона:

$$\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu) = \Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau e \bar{\nu}_e) = \frac{G_F^2 m_\tau^5}{192\pi^3} = \left(\frac{m_\tau}{m_\mu}\right)^5 \Gamma(\mu^- \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu).$$

Полная ширина распада τ лептона -- это сумма всех парциальных ширин:

$$\Gamma(\tau \rightarrow \text{все}) = \Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau e \bar{\nu}_e) + \Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu) + \Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau \text{адроны}) = 5 \left(\frac{m_\tau}{m_\mu}\right)^5 \Gamma(\mu^- \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu).$$

Подставив числа в это уравнение, получаем, оценку для времени жизни τ лептона:

$$\tau_\tau = \frac{\hbar}{\Gamma(\tau \rightarrow \text{все})} = 3.16 \cdot 10^{-13} \text{ сек.},$$

что с 9% точностью согласуется с экспериментальным значением.

2.4.2 Распад $\tau \rightarrow \nu_\tau \pi$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Из физики частиц...

Через 25 лет после открытия τ лептона, коллаборация DONUT (Direct Observation of the Nu Tau) из 54 физиков США, Японии, Кореи и Греции объявила о прямом наблюдении ν_τ в эмульсионной пленке. Активная часть детектора DONUT состоит из слоев железа толщиной в 1 мм, проложенных слоями пластика, на которые, с противоположных сторон нанесены слои фотоэмульсии. Заряженные частицы, проходя через слои фотоэмульсии оставляют четкий след, по которым экспериментаторы восстанавливают треки частиц. На рис. 2.5 приведено реальное событие из данных эксперимента DONUT. В этом событии τ нейтрино в результате взаимодействия с нуклоном вещества с обеном W^+ бозона (такие события называются событиями по каналу заряженного тока) превратилось в τ лептон, с образованием адронной струи. τ лептон, пройдя расстояние порядка 0.2 мм, распался, вероятно по каналу: $\tau \rightarrow \nu_\tau + \text{адрон}$. Невидимое τ у нейтрино вылетело из детектора, унося с собой часть импульса, а адрон оставил четкий след в последующий слоях фотоэмульсии. В результате, экспериментаторы четко видят "изломанный" трек, который является сигнатурой τ у лептона.

Detecting a Tau Neutrino

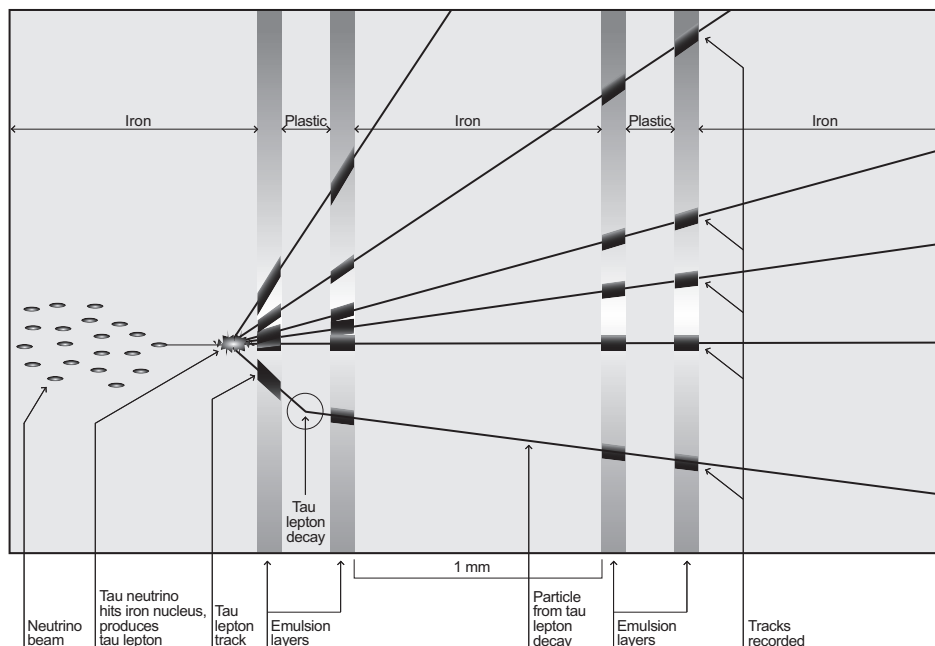


Figure 2.5: Событие в эксперименте DONUT, в котором ν_τ в результате взаимодействия с нуклоном вещества превратилось в τ лептон. Последний, распавшись, оставил "изломанный" трек.

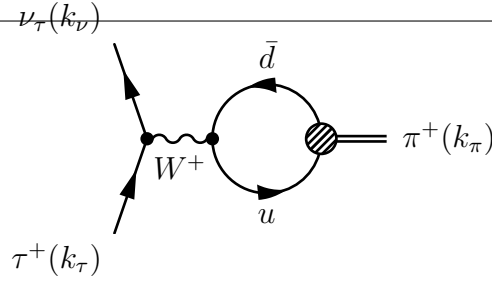
Figure 2.6: Диаграмма Фейнмана для распада $\tau^+(k_\tau) \rightarrow \pi^+(k_\pi) + \nu_\tau(k_\nu)$

Диаграмма Фейнмана, соответствующая распаду $\tau \rightarrow \nu_\tau \pi$ приведена на рис. 2.6. Мы уже встречали похожую диаграмму при вычислении ширины распада пиона §2.2. Действительно, диаграмма, приведенная на рис. 2.1 отличается "зеркальным отражением" и сменой обозначений. Легко выписать матричный элемент распада $\tau^+(k_\tau) \rightarrow \pi^+(k_\pi) + \nu_\tau(k_\nu)$:

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cos \Theta_C f_\pi k_\pi^\alpha \bar{\nu}_\tau \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \tau = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cos \Theta_C f_\pi m_\tau \bar{\nu}_\tau \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \tau.$$

При получении последнего равенства мы воспользовались сохранением энергии-импульса: $k_\tau = k_\pi + k_\nu$, и уравнением Дирака, аналогично тому как мы это проделали в §2.2. Квадрат матричного элемента, усредненный по поляризации τ лептона есть:

$$\frac{1}{2} \overline{|M|^2} = \frac{1}{4} G_F^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2 m_\tau^2 \text{Tr} \nu_\tau \bar{\nu}_\tau (1 + \gamma_5) \tau \bar{\tau} (1 - \gamma_5) = 2 G_F^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2 m_\tau^3 E_\nu, \quad (2.25)$$

где мы воспользовались тем, что:

$$\text{Tr} \nu_\tau \bar{\nu}_\tau (1 + \gamma_5) \tau \bar{\tau} (1 - \gamma_5) = \text{Tr} \hat{k}_\nu (1 + \gamma_5) (\hat{k}_\tau + m_\tau) (1 - \gamma_5) = 2 \text{Tr} \hat{k}_\nu \hat{k}_\tau = 8 k_\nu \cdot k_\tau = 8 E_\nu m_\tau.$$

Фазовый объем Φ вычисляется аналогично уравнению (2.16):

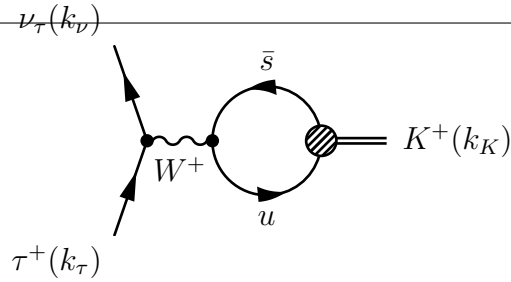
$$\Phi = \int \delta^4(k_\tau - k_\nu - k_\pi) (2\pi)^4 \frac{d^3 k_\nu}{(2\pi)^3 E_\nu} \frac{d^3 k_\pi}{(2\pi)^3 E_\pi} = \frac{E_\nu}{4\pi m_\tau}. \quad (2.26)$$

Наконец, ширина:

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau \rightarrow \pi \nu) &= \frac{1}{2} \overline{|M|^2} \frac{\Phi}{2m_\tau} = \frac{G_F^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2 m_\tau^2 E_\nu^2}{4\pi} = \frac{G_F^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2 m_\tau^3}{16\pi} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_\tau^2}\right)^2 \\ &= \frac{12\pi^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2}{m_\tau^2} \Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau e \nu_e) \approx 0.6 \Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau e \nu_e). \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.4.3 Распад $\tau \rightarrow \nu_\tau K$

Диаграмма Фейнмана для распада $\tau^+(k_\tau) \rightarrow K^+(k_K) + \nu_\tau(k_\nu)$ приведена на Рис. 2.7. Кварковый состав K^+ мезона - $u\bar{s}$, что соответствует $u\bar{s}$ току, с элементом матрицы ККМ $|V_{us}|^2$, который можно считать пренебрегая смешиванием третьего поколения

Figure 2.7: Диаграмма Фейнмана для распада $\tau^+(k_\tau) \rightarrow K^+(k_K) + \nu_\tau(k_\nu)$

лептонов, равным $\sin \Theta_C$. Этот распад аналогичен распаду $\tau \rightarrow \nu_\tau \pi$ с заменами $f_\pi \rightarrow f_K$, $m_\pi \rightarrow m_K$, $\cos \Theta_C \rightarrow \sin \Theta_C$. Таким образом, ширина распада тау лептона на нейтрино и заряженный каон дается формулой:

$$\Gamma(\tau \rightarrow K\nu) = \frac{G_F^2 \sin^2 \Theta_C f_K^2 m_\tau^3}{16\pi} \left(1 - \frac{m_K^2}{m_\tau^2}\right)^2 = \frac{12\pi^2 \sin^2 \Theta_C f_K^2}{m_\tau^2} \Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau e \nu_e). \quad (2.28)$$

2.4.4 Основные моды распада тау лептона

В таблице 2.1 для справки приведены основные моды распада тау лептона.

канал распада	вероятность распада
$\mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$	17.36 ± 0.06
$e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$	17.84 ± 0.06
$h^- \nu_\tau$	11.75 ± 0.11
$h^- (\geq \text{neutrals}) \nu_\tau$	36.92 ± 0.14
$h^- h^- h^+ \nu_\tau$	15.19 ± 0.07
всего	$\approx 99\%$

Table 2.1: Основные моды распада тау лептона

Chapter 3

Лептон-лептонное взаимодействие

3.1 Кинематика реакций

TBD

3.2 Заряженные токи

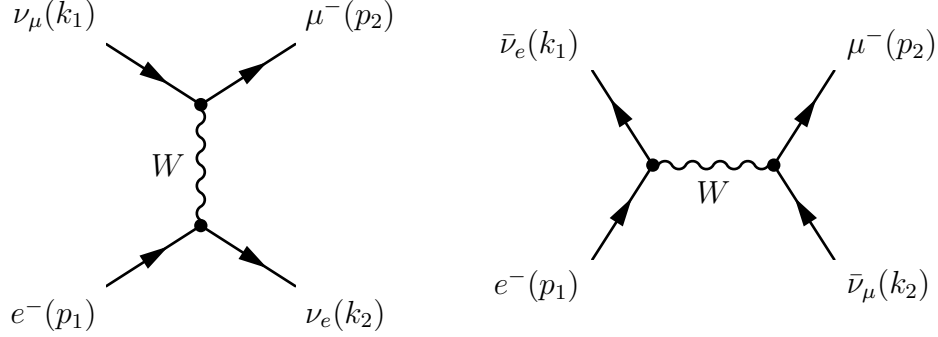


Figure 3.1: Диаграммы процессов $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$ (слева) и $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ (справа).

В этом разделе мы вычислим сечения реакций $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$ и $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$. Теория этих процессов достаточно проста, поскольку в нижнем порядке теории возмущений в них участвуют только заряженные токи (рис. 3.1).

Начнем с реакции обратного мюонного распада ($\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$). Матричный элемент этого процесса имеет вид:

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) e \cdot \bar{\mu} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \nu_\mu \quad (3.1)$$

Его квадрат был вычислен нами при рассмотрении распада мюона (см. раздел 2.1). Суммируя выражение (2.4) по спину мюона, найдем:

$$\sum_s |\mathcal{M}|^2 = 128 G_F^2 (p_1 k_1) (p_2 k_2) = 32 G_F^2 (s - m_\mu^2)(s - m_e^2) \quad (3.2)$$

Сечение процесса вычислим по формуле (1.75):

$$\sigma_{\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e} = \frac{1}{8 (k_1 p_1)} \int \sum_s |\mathcal{M}|^2 \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_2 + p_2 - k_1 - p_1) \quad (3.3)$$

Здесь мы просуммировали по поляризации вылетающего мюона и усреднили по спину электрона в начальном состоянии (дополнительный фактор 1/2 в сечении).

Выполняя интегрирование в системе центра масс получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e} &= \frac{2G_F^2}{\pi} (k_2 p_2) \int d\omega_2^* d\cos\theta^* \frac{\omega_2^*}{E_2^*} \delta\left(\omega_2^* + [(\omega_2^*)^2 + m_\mu^2]^{1/2} - \sqrt{s}\right) \\ &= \frac{G_F^2}{\pi} (s - m_\mu^2) \int d\omega_2^* d\cos\theta^* \frac{\omega_2^*}{E_2^* + \omega_2^*} \delta\left(\omega_2^* - \frac{s - m_\mu^2}{2\sqrt{s}}\right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Мы видим, что дифференциальное сечение изотропно в системе центра масс. Окончательно, полное сечение процесса равно:

$$\sigma_{\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e} = \frac{4G_F^2}{\pi} (\omega_2^*)^2 = \frac{G_F^2}{\pi} s \left(1 - \frac{m_\mu^2}{s}\right)^2 \quad (3.5)$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Дифференциальное сечение можно записать также и в терминах инвариантных переменных s , u и t . Поскольку $t = (k_1 - k_2)^2$, то $dt = 2\omega_1^* \omega_2^* d \cos \theta^*$ и

$$\left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{\nu_e e \rightarrow \mu \nu_e} = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{s - m_\mu^2}{s - m_e^2}, \quad \text{tin}[0; 4\omega_1^* \omega_2^*] \quad (3.6)$$

Перейдем к рассмотрению процесса $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$. Матричный элемент этой реакции связан с амплитудой обратного мюонного распада соотношениями кроссинг-симметрии: испускание ν_e заменено поглощением $\bar{\nu}_e$, поглощение ν_μ -- испусканием $\bar{\nu}_\mu$. Поэтому мы не будем вычислять квадрат матричного элемента, а в (3.2) произведем замену $k_1 \rightarrow -k_2$ и $k_2 \rightarrow -k_1$ (в терминах инвариантных переменных это означает замену $s \rightarrow u = (k_1 - p_2)^2$):

$$\sum_s |\mathcal{M}|^2 = 128 G_F^2 (p_1 k_2) (p_2 k_1) = 32 G_F^2 (u - m_\mu^2)(u - m_e^2) \quad (3.7)$$

Дифференциальное сечение равно:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\bar{\nu}_e e \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu} &= \frac{2 G_F^2 (p_1 k_2) (p_2 k_1)}{\pi (p_1 k_1)} \frac{\omega_2^*}{E_2^* + \omega_2^*} d \cos \theta^* \\ &= \frac{2 G_F^2 (\omega_2^*)^2}{\pi s} (E_1^* + \omega_2^* \cos \theta^*) (E_2^* + \omega_1^* \cos \theta^*) d \cos \theta^* \end{aligned} \quad (3.8)$$

Или в инвариантной записи:

$$d\sigma_{\bar{\nu}_e e \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu} = \frac{G_F^2 (p_1 k_2) (p_2 k_1)}{\pi (p_1 k_1)^2} dt = \frac{G_F^2 (s + t - m_\mu^2)(s + t - m_e^2)}{\pi (s - m_e^2)^2} dt \quad (3.9)$$

Интегрируя по $d \cos \theta^*$ (или по dt) найдем полное сечение:

$$\sigma_{\bar{\nu}_e e \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu} = \frac{4 G_F^2 (\omega_2^*)^2}{\pi s} \left(E_1^* E_2^* + \frac{1}{3} \omega_1^* \omega_2^* \right) \quad (3.10)$$

$$= \frac{G_F^2}{3\pi} s \left(1 - \frac{m_\mu^2}{s} \right)^2 \left(1 + \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2s} + \frac{m_\mu^2 m_e^2}{s^2} \right) \quad (3.11)$$

В асимптотике ($s \gg m_\mu^2$) мы наблюдаем линейный рост сечений с ростом энергии нейтрино:

$$\begin{cases} \sigma_{\nu_e e \rightarrow \mu \nu_e} \simeq \sigma_0 E_\nu \\ \sigma_{\bar{\nu}_e e \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu} \simeq \sigma_0 E_\nu / 3 \end{cases} \quad \sigma_0 = 2m_e G_F^2 / \pi \approx 1.723 \cdot 10^{-41} \text{cm}^2 / \text{GeV} \quad (3.12)$$

Теперь попробуем отвлечься от математических формул и дать физическое объяснение полученным результатам. Линейный рост сечения с ростом энергии налетающего нейтрино определяется размерностью константы Ферми $[G_F] = \text{GeV}^{-2}$. При $s \rightarrow \infty$ единственный размерный параметр, который имеется в нашем распоряжении - это полная энергия в системе центра масс.

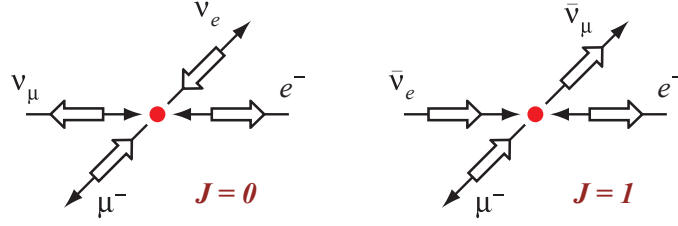


Figure 3.2: Конфигурация импульсов и спинов в процессах $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$ (слева) и $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ (справа).

Угловая изотропия $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$ в этой системе является следствием того, что суммарный угловой момент как сталкивающихся, так и вылетающих частиц равен нулю. Напротив, в процессе $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ суммарный угловой момент системы равен 1 и направлен по импульсу налетающего антинейтрино ($J_z = 1$). В силу сохранения J_z из возможных состояний конечных частиц с $J_z = 0, \pm 1$ реализуется только одно. Этому соответствует фактор $1/3$ в выражении для $\sigma_{\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu}$.

3.3 Нейтральные токи

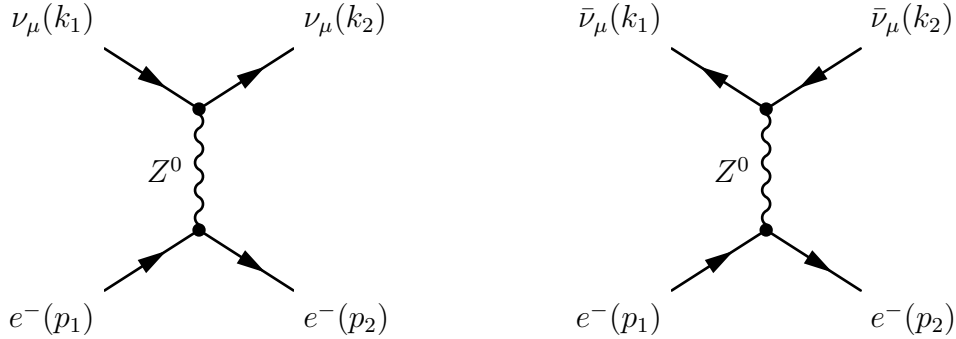


Figure 3.3: Упругое рассеяние мюонного (анти)нейтрино на электроны.

Процессы упругого рассеяния $\nu_\mu e^-$ и $\bar{\nu}_\mu e^-$ могут протекать только за счет взаимодействия нейтральных токов. Пользуясь правилами Фейнмана, сформулированными в разделе 1.4, выпишем амплитуду $\nu_\mu e^-$ рассеяния:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\frac{g^2}{4 M_Z^2 \cos^2 \theta_W} \bar{\nu}_\mu(k_2) \gamma^\alpha \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu_\mu(k_1) \cdot \bar{e}(p_2) \gamma_\alpha \left[-\frac{1 - \gamma_5}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \right] e(p_1) \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu(k_2) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \nu_\mu(k_1) \cdot \bar{e}(p_2) \gamma_\alpha [g_L (1 - \gamma_5) + g_R (1 + \gamma_5)] e(p_1) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Значения констант g_L и g_R в (3.13) равны:

$$\begin{cases} g_L = -1/2 + \sin^2 \theta_W \\ g_R = \sin^2 \theta_W \end{cases} \quad (3.14)$$

Теперь вычислим \mathcal{M}^+ и воспользуемся тождествами Фирца (см. упражнение ??):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^+ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu(k_1) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) e(p_2) \cdot \bar{e}(p_1) \gamma_\beta (1 - \gamma_5) \nu_\mu(k_2) \\ &\quad - 2 \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu(k_1) (1 - \gamma_5) e(p_2) \cdot \bar{e}(p_1) (1 - \gamma_5) \nu_\mu(k_2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Техника вычисления квадрата матричного элемента полностью аналогична использованной нами при рассмотрении распада мюона. Пользуясь тождествами (1.38), найдем:

$$\begin{aligned} \sum_s |\mathcal{M}|^2 &= 8 G_F^2 \left(g_L^2 \text{Tr} \hat{k}_2 \gamma_\beta \hat{k}_1 \hat{p}_1 \gamma^\beta \hat{p}_2 (1 - \gamma_5) \right. \\ &\quad \left. + g_R^2 \text{Tr} \hat{k}_2 \gamma_\beta \hat{k}_1 \hat{p}_2 \gamma^\beta \hat{p}_1 (1 - \gamma_5) + 2 g_L g_R m_e^2 \text{Tr} \hat{k}_2 \gamma_\beta \hat{k}_1 \gamma^\beta (1 - \gamma_5) \right) \\ &= 128 G_F^2 \left[g_L^2 (k_1 p_1) (k_2 p_2) + g_R^2 (k_2 p_1) (k_1 p_2) - g_L g_R m_e^2 (k_1 k_2) \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Выразим скалярные произведения из (3.16) через долю переданной энергии в лабораторной системе отсчета y :

$$\begin{aligned} y &= 1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_1^*}{\sqrt{s}} (1 - \cos \theta^*) \\ (p_1 k_1) &= (p_2 k_2) = m_e \omega_1 = \sqrt{s} \omega_1^* \\ (p_1 k_2) &= (p_2 k_1) = m_e \omega_2 = \omega_2^* (E_1^* + \omega_2^* \cos \theta^*) = \sqrt{s} \omega_1^* (1 - y) \\ (k_1 k_2) &= (\omega_1^*)^2 (1 - \cos \theta^*) = \sqrt{s} \omega_1^* y \end{aligned}$$

Вычисляя фазовый объем в системе центра масс системы (см. предыдущий раздел), найдем:

$$d\sigma_{\nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e} = \frac{G_F^2}{\pi} (s - m_e^2) \left[g_L^2 + g_R^2 (1 - y)^2 - g_L g_R \frac{2m_e^2 y}{s - m_e^2} \right] dy \quad (3.17)$$

Интегрируя (3.17) в пределах $y \in [0; 1 - m_e^2/s]$, найдем полное сечение:

$$\sigma_{\nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e} = \frac{G_F^2}{\pi} s \left(1 - \frac{m_e^2}{s} \right)^2 \left[g_L^2 + \frac{g_R^2}{3} \left(1 + \frac{m_e^2}{s} + \frac{m_e^4}{s^2} \right) - \frac{m_e^2}{s} g_L g_R \right] \quad (3.18)$$

Чтобы получить сечение для $\bar{\nu}_\mu e^-$ рассеяния, воспользуемся кросс-симметрией. Это означает, что в амплитуде процесса (3.16) надо сделать замену $k_1 \rightarrow -k_2$ и $k_2 \rightarrow$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

$-k_1$. Значит, в выражениях для сечения (3.17, 3.18) надо поменять местами левую и правую компоненты $g_L \leftrightarrow g_R$:

$$\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)_{\bar{\nu}_\mu e \rightarrow \bar{\nu}_\mu e} = \frac{G_F^2}{\pi} (s - m_e^2) \left[g_R^2 + g_L^2 (1 - y)^2 - g_L g_R \frac{2m_e^2 y}{s - m_e^2} \right] \quad (3.19)$$

$$\sigma_{\bar{\nu}_\mu e \rightarrow \bar{\nu}_\mu e} = \frac{G_F^2}{\pi} s \left(1 - \frac{m_e^2}{s}\right)^2 \left[g_R^2 + \frac{g_L^2}{3} \left(1 + \frac{m_e^2}{s} + \frac{m_e^4}{s^2}\right) - \frac{m_e^2}{s} g_L g_R \right] \quad (3.20)$$

3.4 Интерференция заряженного и нейтрального токов

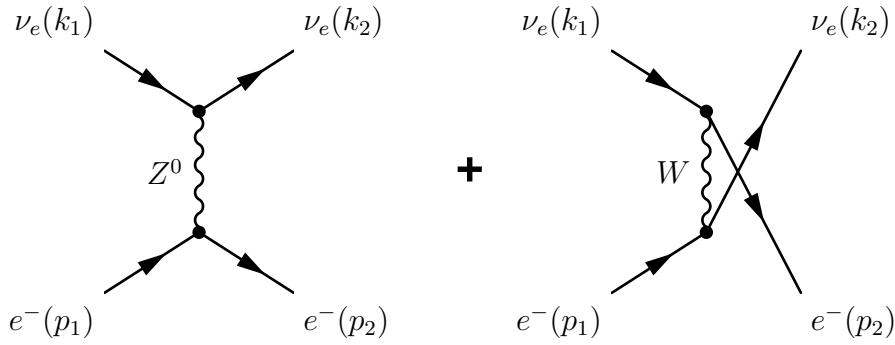


Figure 3.4: Упругое рассеяние электронного нейтрино на электроне, обусловленное заряженными и нейтральными токами.

Процесс $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$ дает интересную возможность изучения интерференции заряженных и нейтральных токов (рис. 3.4). Здесь мы в первый раз на практике увидим, что диаграммы, отличающиеся друг от друга перестановкой двух внешних тождественных фермионов, имеют противоположный знак. Появление этого *дополнительного* знака, может быть строго обосновано только в рамках вторичного квантования. Действительно, амплитуды \mathcal{M}^{NC} и \mathcal{M}^{CC} , соответствующие обмену Z^0 и W бозонами, пропорциональны

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{NC} &\sim \int dx dy \langle f | \mathbf{T} [\bar{\psi}_e(x) \mathcal{O}_\alpha^{NC} \psi_e(x) Z^\alpha(x) :: \bar{\psi}_\nu(y) \mathcal{O}_\beta^{NC} \psi_\nu(y) Z^\beta(y) :] | i \rangle \\ &\sim \int dx dy G_Z^{\alpha\beta}(x-y) \langle a_\nu^-(k_2) a_e^-(p_2) : \bar{\psi}_e(x) \mathcal{O}_\alpha^{NC} \psi_e(x) :: \bar{\psi}_\nu(y) \mathcal{O}_\beta^{NC} \psi_\nu(y) : a_\nu^+(k_1) a_e^+(p_1) \rangle_0 \\ \mathcal{M}^{CC} &\sim \int dx dy \langle f | \mathbf{T} [\bar{\psi}_\nu(x) \mathcal{O}_\alpha^{CC} \psi_e(x) W^\alpha(x) :: \bar{\psi}_e(y) \mathcal{O}_\beta^{CC} \psi_\nu(y) W^\beta(y) :] | i \rangle \\ &\sim \int dx dy G_W^{\alpha\beta}(x-y) \langle a_\nu^-(k_2) a_e^-(p_2) : \bar{\psi}_\nu(x) \mathcal{O}_\alpha^{CC} \psi_e(x) :: \bar{\psi}_e(y) \mathcal{O}_\beta^{CC} \psi_\nu(y) : a_\nu^+(k_1) a_e^+(p_1) \rangle_0 \end{aligned}$$

Напомним, что сейчас волновые функции ψ частиц являются операторами. Поэтому при спаривании их операторами рождения и уничтожения частиц a^\pm надо

учитывать число ферми-перестановок. Поскольку порядок следования операторов в \mathcal{M}^{NC} и \mathcal{M}^{CC} отличается только перестановкой ψ_e и $\bar{\psi}_e$, то и соответствующие вклады будут иметь противоположный знак. Итак, амплитуда процесса имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \mathcal{M}^{NC} + \mathcal{M}^{CC} = & -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e(k_2) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \nu_e(k_1) \cdot \bar{e}(p_2) \gamma_\alpha \left[-\frac{1 - \gamma_5}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \right] e(p_1) \\ & + \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e(k_2) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) e(p_1) \cdot \bar{e}(p_2) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu_e(k_1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Сделав преобразование Фирца для \mathcal{M}^{CC} мы получаем возможность переписать выражение (3.21) в виде (3.13), переопределив лишь константы g_L и g_R :

$$\begin{cases} g_L = 1/2 + \sin^2 \theta_W \\ g_R = \sin^2 \theta_W \end{cases} \quad (3.22)$$

Поскольку кинематика процессов упругого $\nu_\mu e^-$ и $\nu_e e^-$ рассеяния идентична, то выражения для сечений (3.17) и (3.18) будут справедливы и в этом случае. Тип реакции будет определяться значением констант g_L и g_R .

3.5 Аннигиляция $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

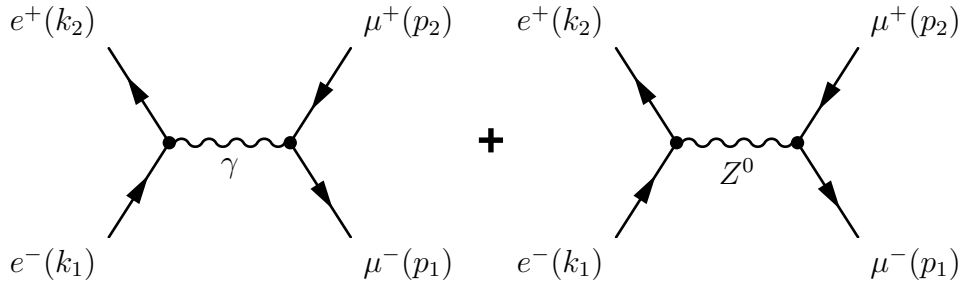


Figure 3.5: Вклад электромагнитного и слабого взаимодействий в реакцию $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$.

Chapter 4

Структура нуклона из лептон-нуклонных взаимодействий

В этой главе мы обсудим взаимодействие (анти) нейтрино и заряженных лептонов с нуклоном. Рассмотрение начнем с обсуждения кварк-партонной модели. Рассмотрим кинематические переменные. Вычислим сечения глубоконеупругого взаимодействия (анти) нейтрино и заряженных лептонов с нуклоном, вводя структурные функции нуклона. Вычислим эти же сечения в рамках кварк-партонной модели. Сравнив два подхода, найдем связь между кварковыми распределениями в нуклоне и структурными функциями. Сформулируем некоторые правила сумм. Приведем краткий обзор экспериментальных данных. Рассмотрим (квази) упругое и глубоконеупругое взаимодействия.

4.1 Кварк-партонная модель

Нуклон состоит из трех валентных кварков и моря кварк-антикварковых пар, которые на короткое время, разрешенное принципом неопределенности, рождаются и исчезают из вакуума. Кварки и анти-кварки удерживаются вместе *цветовым взаимодействием* посредством обмена глюонами. Все вместе является весьма сложной системой для теоретических вычислений в рамках квантовой хромодинамики (КХД). В последние годы в связи с быстрым развитием компьютеров замечен прогресс в численных методах КХД на решетке <http://www.lqcd.org/>.

Экспериментально структура нуклона изучается в реакциях рассеяния заряженных лептонов, (анти) нейтрино на нуклонах. Эти взаимодействия подразделяются на упругие и глубоконеупругие. Глубоконеупругое рассеяние лептонов на нуклонах изучается уже на протяжении более 30 лет, начиная с конца шестидесятых, когда первые измерения, выполненные в СЛАКе в $e - p$ рассеянии, показали, что нуклон состоит из точечно-подобных объектов [11], названных партонами [12]. В отличие от упругого $e - p$ рассеяния, в котором сечение быстро падает с

ростом переданного импульса, сечение глубоконеупругого процесса оказалось не зависящим от переданного импульса в согласии с предсказанием [12]. Физическую интерпретацию этому дал Фейнман [13] в рамках кварк-партонной модели. Качественное объяснение этого факта заключается в том, что взаимодействие партона с промежуточным фотоном происходит за столь короткое время, что партоны не успевают провзаимодействовать друг с другом и ведут себя как газ свободных, невзаимодействующих частиц. Глубоконеупругие процессы могут быть успешно описаны в рамках так называемой кварк-партонной модели (КПМ). Простейшая КПМ формулируется в системе бесконечно большого импульса нуклона, в которой можно пренебречь поперечными импульсами партонов. Поэтому можно считать, что каждый партон несет некоторую долю ξ 4-импульса нуклона P и $f_i^h(\xi) d\xi$ -- число партонов i -- типа, переносящих часть импульса адрона h в интервале от ξ до $\xi + d\xi$. Естественно, что:

$$\sum_i \int_0^1 d\xi \xi f_i^h(\xi) = 1.$$

Глубоко-неупругое лептон-нуклонное взаимодействие является упругим рассеянием лептона на кварке с последующей фрагментацией кварка, приводящей к развалу нуклона. Сечение глубоко-неупругого процесса записывается в виде взвешенной суммы лептон-партоновых сечений:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \sum_i \int_0^1 d\xi f_i^h(\xi) \frac{d^2\sigma_i(\xi, y)}{dx dy}, \quad (4.1)$$

Для легких (точнее -- безмассовых) (u, d, s) кварков $\xi = x$. Действительно, после того как кварк с импульсом ξP получит переданный импульс $q = k - k'$, его импульс станет: $\xi P + q$. Квадрат этого импульса равен квадрату массы кварка, что можно считать для легких кварков нулем:

$$m_q^2 = (\xi P + q)^2 \approx 2\xi P + q^2 \approx 0.$$

Откуда:

$$\xi \approx \frac{Q^2}{2Pq} = x. \quad (4.2)$$

Таким образом, становится понятной интерпретация Бьеркеновской переменной x как доли импульса нуклона, переносимой данным кварком. Точное решение предыдущего уравнения имеет вид:

$$\xi = \frac{-\nu + (\nu^2 + m^2 + Q^2)^{1/2}}{M} = x \left(1 - \frac{x^2 M^2 - m^2}{Q^2} + \dots \right), \quad (4.3)$$

поэтому более корректно распределение кварков в нуклоне описывает переменная Нахтмана:

$$\xi_N = \frac{2x}{1 + (1 + 4x^2 M^2 / Q^2)^{1/2}} \approx x \left(1 - \frac{x^2 M^2}{Q^2} \right). \quad (4.4)$$

Следующие обозначения используются для протонов и нейтронов:

кварковые распределения в протоне:

$$\begin{aligned} f_u^p(x) &= u(x); & f_d^p(x) &= d(x); & f_s^p(x) &= s(x); & f_c^p(x) &= c(x); & \dots; \\ f_{\bar{u}}^p(x) &= \bar{u}(x); & f_{\bar{d}}^p(x) &= \bar{d}(x); & f_{\bar{s}}^p(x) &= \bar{s}(x); & f_{\bar{c}}^p(x) &= \bar{c}(x); & \dots; \end{aligned}$$

кварковые распределения в нейтроне записываются, используя изоспиновую симметрию:

$$\begin{aligned} f_u^n(x) &= d(x); & f_d^n(x) &= u(x); & f_s^n(x) &= s(x); & f_c^n(x) &= c(x); & \dots; \\ f_{\bar{u}}^n(x) &= \bar{d}(x); & f_{\bar{d}}^n(x) &= \bar{u}(x); & f_{\bar{s}}^n(x) &= \bar{s}(x); & f_{\bar{c}}^n(x) &= \bar{c}(x); & \dots; \end{aligned}$$

4.1.1 Правила сумм

Кварковые распределения должны удовлетворять следующим очевидным условиям:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx (u(x) - \bar{u}(x)) &= 2, & \int_0^1 dx (d(x) - \bar{d}(x)) &= 1, \\ \int_0^1 dx (s(x) - \bar{s}(x)) &= 0, & \int_0^1 dx (c(x) - \bar{c}(x)) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.2 Кинематика и сечение

4.2.1 Кинематика

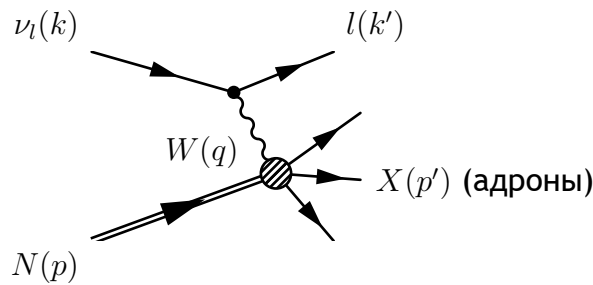


Figure 4.1: Кинематика глубоконеупругого лептон-нуклонного рассеяния.

Процесс лептон-нуклонного глубоко-неупругого рассеяния графически изображен на рис. 4.1, где приведены следующие 4-импульсы:

- $k = (E, \mathbf{k})$ --- налетающего лептона,

- $k' = (E', \mathbf{k}')$ --- вылетающего лептона,
- $p = (M, 0)$ --- нуклона мишени,
- $p' = (E_h, \mathbf{p}_h)$ --- системы конечных адронов,
- $q = (q_0, \mathbf{q}) = k - k'$ --- промежуточного бозона.

Для описания глубоконеупругого события используются такие лоренц-инвариантные кинематические переменные:

- $\nu = \frac{P \cdot q}{M} = E - E'$ - потеря энергии лептона,
- $Q^2 = -q^2 = 2(E E' - \mathbf{k} \mathbf{k}') - m_l^2 - m_{l'}^2 \approx 4 E E' \sin^2(\theta/2)$, квадрат переданного 4-импульса, где m_l^2 ($m_{l'}^2$) - масса лептона в начальном (конечном) состоянии и θ --- угол рассеяния лептона в лабораторной системе.
- $x = \frac{Q^2}{2 M \nu}$ - в кварк-партонной модели x аппроксимирует долю импульса нуклона, переносимую кварком, на котором происходит рассеяние.
- $y = \frac{\nu}{E}$ - доля энергии налетающего лептона в лабораторной системе, потерянная в результате взаимодействия.
- $W^2 = (P + q)^2 = M^2 + 2 M \nu - Q^2 = M^2 + Q^2(\frac{1}{x} - 1)$ - квадрат инвариантной массы конечной адронной системы.
- $s = (k + P)^2 = 2 M E + M^2 = \frac{Q^2}{xy} + M^2$ - квадрат полной энергии в системе центра масс.

Для данной энергии нейтрино область изменения кинематических переменных ограничена в следующих пределах:

$$\begin{aligned}
 \frac{m_\mu^4}{8xME^2} \leq \nu &\leq \frac{E}{(1 + 2Mx/E)} \rightarrow E, \\
 \frac{m_\mu^4}{8xME^3} \leq y &\leq \frac{1}{(1 + 2Mx/E)} \rightarrow 1, \\
 \frac{m_\mu^4}{4E^2} \leq Q^2 &\leq \frac{2MExy}{(1 + 2Mx/E)} \rightarrow 2MExy, \\
 \frac{m_\mu^2}{2ME} \leq x &\leq 1.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Кинематика столкновений с партонов

Мы уже дали интерпретацию переменной x как доли импульса нуклона, переносимой кварком (4.2). Введем еще и полную энергию системы нейтрино-кварк:

$$\hat{s} = (k + xP)^2 \approx x2kP \approx xs$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Также легко дать партонную интерпретацию переменной y . Для этого перейдем в систему центра масс нейтрино и кварка, в которой Θ^* - это угол вылета лептона по отношению к направлению нейтрино. Учтем при этом, что энергии нейтрино и лептона в этой системе $2E_* \approx E'_* = \sqrt{\hat{s}}/4$:

$$y = \frac{\nu}{E} = \frac{2m\nu}{s} = \frac{Q^2}{xs} = -\frac{(k-k')^2}{xs} = \frac{2E_*E'_*(1-\cos\Theta^*)}{\hat{s}} = \frac{(1-\cos\Theta^*)}{2} = \sin^2 \frac{\Theta^*}{2} \quad (4.7)$$

4.2.2 Сечение

Сечение рассеяния (анти) нейтрино на точечном кварке должно совпадать с сечениями $\nu_\mu e$, $\bar{\nu}_\mu e$ за счет заряженных токов, выведенными в Главе 3:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{\nu q}}{dy} &= \frac{G_F^2 s}{\pi} \\ \frac{d\sigma^{\bar{\nu} q}}{dy} &= \frac{G_F^2 s}{\pi} (1-y)^2 \end{aligned}$$

Используя эти сечения и определение сечения νp , νn (4.1) легко записать сечения глубоконеупругого рассеяния в рамках кварк партонной модели, используя функции кварковых распределений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma^{\nu p}}{dx dy} &= \frac{G_F^2 xs}{\pi} [d(x) + s(x) + (1-y)^2(\bar{u}(x) + \bar{c}(x))] \\ \frac{d^2\sigma^{\nu n}}{dx dy} &= \frac{G_F^2 xs}{\pi} [u(x) + s(x) + (1-y)^2(\bar{d}(x) + \bar{c}(x))] \\ \frac{d^2\sigma^{\nu N}}{dx dy} &= \frac{G_F^2 xs}{2\pi} [d(x) + u(x) + 2s(x) + (1-y)^2(\bar{d}(x) + \bar{u}(x) + 2\bar{c}(x))] \\ \frac{d^2\sigma^{\bar{\nu} p}}{dx dy} &= \frac{G_F^2 xs}{\pi} [(1-y)^2(u(x) + c(x)) + \bar{d}(x) + \bar{s}(x)] \\ \frac{d^2\sigma^{\bar{\nu} n}}{dx dy} &= \frac{G_F^2 xs}{\pi} [(1-y)^2(d(x) + c(x)) + \bar{u}(x) + \bar{s}(x)] \\ \frac{d^2\sigma^{\bar{\nu} N}}{dx dy} &= \frac{G_F^2 xs}{2\pi} [(1-y)^2(d(x) + u(x) + 2c(x)) + \bar{d}(x) + \bar{u}(x) + 2\bar{s}(x)] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Дифференциальное сечение глубоконеупругого рассеяния (анти) нейтрино на изоскалярной нуклонной мишени в КПМ имеет вид:

$$\frac{d^2\sigma^{\nu N}}{dx dy} = \sigma_0 x \{ [q(x) + s(x) - c(x)] + (1-y)^2 [\bar{q}(x) + \bar{c}(x) - \bar{s}(x)] \} \quad (4.9)$$

$$\frac{d^2\sigma^{\bar{\nu} N}}{dx dy} = \sigma_0 x \{ (1-y)^2 [q(x) + c(x) - s(x)] + [\bar{q}(x) + \bar{s}(x) - \bar{c}(x)] \} \quad (4.10)$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

где $q(x) = u(x) + d(x) + s(x) + c(x)$ и $\bar{q}(x) = \bar{u}(x) + \bar{d}(x) + \bar{s}(x) + \bar{c}(x)$. По порядку величины

$$\sigma_0 = \frac{G_F^2 M E}{\pi} = 1.6 \times 10^{-38} \frac{E}{\text{ГэВ}} \text{ см}^2.$$

Интегральные сечения можно получить, проинтегрировав (4.9), (4.10) по x, y :

$$\begin{aligned} \sigma^{\nu N} &= \sigma_0 \left[(Q + S) + \frac{1}{3}(\bar{Q} - \bar{S}) \right] \\ \sigma^{\bar{\nu} N} &= \sigma_0 \left[\frac{1}{3}(Q - S) + (\bar{Q} + \bar{S}) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $Q = \int_0^1 x q(x) dx$, $\bar{Q} = \int_0^1 x \bar{q}(x) dx$, $S = \int_0^1 x s(x) dx$ и $\bar{S} = \int_0^1 x \bar{s}(x) dx$ представляют собой долю импульса, переносимую кварками и антикварками соответственно.

Заметим, что если бы в нуклоне не было морских кварков и анти-кварков, то сечение рассеяния нейтрино на нуклоне было бы ровно в три раза больше, чем сечение рассеяния анти-нейтрино на нуклоне:

$$\sigma^{\nu N} / \sigma^{\bar{\nu} N} = 3 \text{ если нет морских кварков и анти-кварков}$$

Экспериментальные значения:

$$\begin{aligned} \sigma_{exp}^{\nu N} &= (0.677 \pm 0.019) \times 10^{-38} \times \frac{E_\nu}{\text{ГэВ}} \text{ см}^2 \\ \sigma_{exp}^{\bar{\nu} N} &= (0.339 \pm 0.010) \times 10^{-38} \times \frac{E_\nu}{\text{ГэВ}} \text{ см}^2 \\ \frac{\sigma_{exp}^{\nu N}}{\sigma_{exp}^{\bar{\nu} N}} &= 2.00 \pm 0.08 \end{aligned}$$

свидетельствуют косвенным образом в пользу существования морских кварков и анти-кварков в нуклоне.

Упражнение 12

Длина пробега (анти) нейтрино в среде с плотностью ρ , состоящим из вещества с атомным номером $\langle A \rangle$ определяется как:

$$\lambda = \frac{\langle A \rangle}{\sigma N_A \rho},$$

где σ - это сечение взаимодействия (анти) нейтрино со средой (нуклонами и электронами), N_A - число Авогадро.

- Получите формулу для λ
- Оцените, чему равна длина пробега нейтрино с энергий 1 ГэВ в солнечной и земной средах? Сравните полученные числа с диаметрами Солнца и Земли соответственно.

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

- Оцените, при какой энергии нейтрино Земля станет ``непрозрачной`` для нейтрино?

Для справки:

$$\begin{aligned}\rho_{\oplus} &= 5.52 \text{ г/см}^3 \\ R_{\oplus} &= 6.37 \cdot 10^6 \text{ м} \\ \rho_{\odot} &= 1.4 \text{ г/см}^3 \\ R_{\odot} &= 6.95 \cdot 10^8 \text{ м}\end{aligned}$$

4.3 Глубоконеупругое рассеяние нейтрино и антинейтрино на нуклоне

Выведем общую формулу для сечения рассеяния лептонов на нуклоне. Начнем с общей формулы (1.75):

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(k \cdot P)^2 - k^2 P^2}} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Phi, \quad (4.12)$$

где $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ - квадрат матричного элемента процесса, а $d\Phi$ включает в себя фазовый объем продуктов реакции с учетом нормировки спиноров:

$$d\Phi = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \frac{d^3 k'}{2E'(2\pi)^3} \prod_f \frac{d^3 p_f}{2E_f(2\pi)^3}.$$

Фактор $4\sqrt{(k \cdot P)^2 - k^2 P^2} \approx 4EM$ отвечает потоку начальных частиц. Используя определение в ур. (4.12) и пренебрегая массой вылетающего лептона: $d^3 k'/E' \approx 2\pi E' dE' d\cos\Theta$, дифференциальное сечение (4.12) может быть представлено в следующем общем виде:

$$\frac{d\sigma}{dE' d\cos\Theta} = \frac{E'}{E} \frac{(2\pi)^2 \delta^4(p_i - p_f) |\overline{\mathcal{M}}|^2}{8M} d\Phi_X. \quad (4.13)$$

От переменных $E', \cos\Theta$ легко перейти к любым другим используя соответствующий Якобиан перехода. Например:

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{My}{1-y} \frac{d\sigma}{dE' d\cos\Theta} \quad (4.14)$$

4.3.1 Сечение

$|\overline{\mathcal{M}}|^2$ для процесса глубоконеупругого рассеяния (анти)нейтрино на нуклоне запишем в виде:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G_F^2}{2} \left(\frac{m_W^2}{m_W^2 + Q^2} \right)^2 l_\mu l_\nu^\dagger h^\mu h^{\nu\dagger}, \quad (4.15)$$

где $l_\mu = \bar{\mu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu$ - лептонный ток, h^μ - соответствующий адронный ток, фактор $\left(\frac{m_W^2}{m_W^2 + Q^2} \right)^2$ происходит от пропагатора W^\pm бозона.

Введем лептонный тензор:

$$L_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{8} l_\mu l_\nu^\dagger = \frac{1}{8} \text{Tr} (\gamma_\mu (1 \mp \gamma_5) \bar{\nu} \nu \gamma_\nu (1 \mp \gamma_5) \bar{\mu} \mu), \quad (4.16)$$

где знак минус относится к нейтрино, а плюс к анти-нейтрино.

Аналогично определим адронный тензор:

$$W^{\mu\nu} = \int \frac{(2\pi)^3 \delta^4(p_i - p_f) h^\mu h^{\nu\dagger}}{2M} d\Phi_X \quad (4.17)$$

Используя теперь уравнения (4.13), (6.3), (4.16), (4.17), сечение глубоконеупругого рассеяния (анти) нейтрино на нуклоне может быть записано в виде:

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\cos\Theta} = \frac{G_F^2}{2\pi} \left(\frac{m_W^2}{m_W^2 + Q^2} \right)^2 \frac{E'}{E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}. \quad (4.18)$$

Вычислим теперь $L_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{8} \text{Tr} \left(\gamma_\mu (1 \mp \gamma_5) \hat{k} \gamma_\nu (1 \mp \gamma_5) (\hat{k}' + m_\mu) \right) = \frac{1}{4} \text{Tr} \left(\gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu \hat{k}' (1 \mp \gamma_5) \right) \\ &= \frac{1}{4} k_\alpha k'_\beta \text{Tr} (\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (1 \mp \gamma_5)) = k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k \cdot k' \pm i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где мы воспользовались уравнениями:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu &= 4 (g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} - g_{\alpha\mu} g_{\nu\beta}) \\ \text{Tr} \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu &= -4i \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.20)$$

В отличие от лептонного тензора, на сегодняшний день мы не умеем вычислять адронный тензор $W^{\mu\nu}$. Поэтому представим его в виде суммы структур, переносящих индексы μ, ν . Очевидно, что $W^{\mu\nu}$ зависит от p и q , так что в общем виде адронный тензор может зависеть от структур вида:

$$g^{\mu\nu}, p^\mu p^\nu, p^\mu q^\nu, q^\mu q^\nu, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho q_\sigma.$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Заметим, что структуры, содержащие q^μ в пренебрежении массой мюона исчезают после свертки с симметричной относительно перестановки индексов μ и ν частью лептонного тензора:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^S q^\mu &= ((kq)k'_\nu + k_\nu(qk') - q_\nu(kk')) = (-(kk')k'_\nu + k_\nu(kk') - q_\nu(kk')) \\ &= (-k'_\nu + k_\nu - q_\nu)(kk') = 0 \end{aligned}$$

Оценим размерность адронного тензора:

$$[W^{\mu\nu}] = [\delta^4(p_i - p_f)][h^\mu h^{\nu\dagger}][d\Phi_X]/[M] = \frac{1}{m^4} m^2 \frac{1}{m} m^2 = \frac{1}{m}$$

Таким образом, адронный тензор можно записать в следующем виде:

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{M} \left(-F_1(x, Q^2) g^{\mu\nu} + F_2(x, Q^2) \frac{p^\mu p^\nu}{M\nu} + \frac{i}{2M\nu} F_3(x, Q^2) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho q_\sigma \right),$$

где $F_i(x, Q^2)$ - безразмерные структурные функции нуклона в реакции рассеяния (анти) нейтрино на нуклоне. Перемножим $L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$:

$$L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} = \frac{1}{M} \left(2(kk') F_1 + \frac{2(kp)(k'p) - M^2(kk')}{M\nu} F_2 \pm \frac{(kp)(k'q) \pm (k'p)(kq)}{M\nu} F_3 \right), \quad (4.21)$$

где мы воспользовались:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\mu\nu\gamma\delta} = -2 (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha)$$

Учтем теперь скалярные произведения $(kp) = EM$, $(k'q) \approx (kk') = Q^2/2$, $(k'p) = E'M$, $(kq) = -(kk') = -Q^2/2$, $Q^2 = 4EE' \sin^2 \Theta/2$. Окончательно:

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\cos\Theta} = \frac{G_F^2}{\pi} \left(\frac{m_W^2}{m_W^2 + Q^2} \right)^2 \frac{E'^2}{M} \left(2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} F_1 + \cos^2 \frac{\Theta}{2} \frac{M}{\nu} F_2 \pm \frac{(E+E')}{\nu} \sin^2 \frac{\Theta}{2} F_3 \right) \quad (4.22)$$

Используя уравнение (4.14), а также соотношения: $E' = E(1-y)$, $\sin^2 \frac{\Theta}{2} = \frac{Q^2}{4EE'}$, $\cos^2 \frac{\Theta}{2} = 1 - \frac{Mxy}{2E(1-y)}$, $E + E' = E(2-y)$, сечение глубоконеупругого рассеяния (анти) нейтрино на нуклоне в лоренц-инвариантных переменных имеет вид:

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{G_F^2(s-M^2)}{2\pi} \left(\frac{m_W^2}{m_W^2 + Q^2} \right)^2 \left[xy^2 F_1 + (1-y - \frac{M^2xy}{s-M^2}) F_2 \pm xy(1-y/2) F_3 \right]. \quad (4.23)$$

В приближении $Q^2 \ll M_W^2$, что соответствует $E_\nu \ll \frac{M_W^2}{2M} = 3.4 \times 10^3$ ГэВ, а также, предполагая $E_\nu \gg M$, ур. (4.23) приобретает вид:

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{G_F^2 ME}{\pi} [xy^2 F_1 + (1-y) F_2 \pm xy(1-y/2) F_3]. \quad (4.24)$$

4.3.2 Структурные функции и правила сумм

Сравнив выражение для сечения (анти) нейтрино-нуклонного DIS, выраженное через структурные функции (4.24) с выражениями (4.9), (4.10), можно найти выражения для структурных функций через кварковые распределения:

$$F_1^{\nu,\bar{\nu}}(x) = \sum_{q_i} q_i(x) + \sum_{\bar{q}_i} \bar{q}_i(x) \quad (4.25)$$

$$F_2^{\nu,\bar{\nu}}(x) = 2x \left[\sum_{q_i} q_i(x) + \sum_{\bar{q}_i} \bar{q}_i(x) \right] \quad (4.26)$$

$$F_3^{\nu,\bar{\nu}}(x) = 2 \left[\sum_{q_i} q_i(x) - \sum_{\bar{q}_i} \bar{q}_i(x) \right] \quad (4.27)$$

Для ν : $q = d, s, b$ и $\bar{q} = \bar{u}, \bar{c}, \bar{t}$; для $\bar{\nu}$: $q = u, c, t$ и $\bar{q} = \bar{d}, \bar{s}, \bar{b}$.

Структурные функции F_1 и F_2 связаны друг с другом соотношениями Коллана-Гросса:

$$2x F_1^{\nu}(x) = F_2^{\nu}(x) \quad 2x F_1^{\bar{\nu}}(x) = F_2^{\bar{\nu}}(x).$$

Предполагая симметрию в распределениях:

$$s(x) = \bar{s}(x) \quad c(x) = \bar{c}(x),$$

выражения для структурных функций упрощаются:

$$\begin{aligned} F_2^{\nu N}(x) &= F_2^{\bar{\nu} N}(x) = x [q(x) + \bar{q}(x)] \\ F_3^{\nu N}(x) &= [q(x) - \bar{q}(x) + 2s(x) - 2c(x)] \\ F_3^{\bar{\nu} N}(x) &= [q(x) - \bar{q}(x) + 2c(x) - 2s(x)] \end{aligned}$$

Экспериментальные измерения $F_{2,3}^{\nu}$ как функций x, Q^2 были выполнены коллаборацией CCFR (см. рис. 4.2, 4.3, 4.4, 4.5).

Структурные функции $F_{2,3}^{\nu}(x)$

Правило сумм Адлера

Для структурной функции $F_2^{\nu}(x)$, основываясь на уравнении (4.26), можно получить правило сумм Адлера [14]:

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x} [F_2^{\bar{\nu} p}(x) - F_2^{\nu p}(x)] = N_u - N_d = 1, \quad (4.28)$$

(экспериментальная проверка [15] с большими ошибками согласуется с этим правилом)

Правило сумм Гросса-Ллевелина Смита

Для структурной функции $x F_3^\nu(x)$, основываясь на уравнении (4.27), можно получить правило сумм Гросса-Ллевелина Смита [16]

$$I_{GLS} = \int_0^1 \frac{dx}{2x} [x F_3^{\nu p}(x) + x F_3^{\bar{\nu} p}(x)] = N_u + N_d = 3 \quad (4.29)$$

4.4 Глубоконеупругое рассеяние заряженных лептонов на нуклоне

4.4.1 Сечение

Рассмотрим глубоконеупругое рассеяние заряженного лептона на нуклоне в однофотонном приближении. В этом случае, аналогично случаю рассеяния (анти) нейтрино (§§4.3), запишем сечение в виде:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}.$$

Здесь α постоянная тонкой структуры, а тензоры $L_{\mu\nu}$ и $W_{\mu\nu}$ описывают лептонную и адронную вершины диаграммы 4.1 соответственно. Просуммировав по поляризации вылетающего лептона и используя правила Фейнмана, легко написать точное выражение для лептонного тензора $L_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}^S + i L_{\mu\nu}^A$:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^S &= 2(k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}(k \cdot k' - m_l^2)) \\ L_{\mu\nu}^A &= 2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho s^\sigma \end{aligned}$$

Вся информация об адронной мишени содержится в тензоре $W^{\mu\nu}$, который можно записать как сумму симметричного и антисимметричного относительно перестановок индексов μ, ν тензоров: $W_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}^S + i W_{\mu\nu}^A$. Требования ковариантности, сохранения четности, зарядовой симметрии и сохранения тока ($q^\mu W_{\mu\nu} = 0$) приводят к такой форме адронного тензора:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^S &= \frac{1}{M} (-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}) F_1^{em}(x, Q^2) + \frac{1}{M^2 \nu} (p_\mu - q_\mu \frac{p \cdot q}{q^2}) (p_\nu - q_\nu \frac{p \cdot q}{q^2}) F_2^{em}(x, Q^2) \\ W_{\mu\nu}^A &= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha}{M \nu} \left(S^\beta g_1(x, Q^2) + (S^\beta - p^\beta \frac{q \cdot S}{M \nu}) g_2(x, Q^2) \right) \end{aligned}$$

Физический смысл структурных функций F_i, g_i можно выяснить рассматривая рассеяние поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах. Обозначим продольную поляризацию пучка (мишени) в виде стрелочек $\uparrow\downarrow$ ($\uparrow\downarrow$). Легко показать, что сумма сечений $d^2\sigma^{\uparrow\uparrow} + d^2\sigma^{\uparrow\downarrow} \sim L_{\mu\nu}^S W^{\mu\nu S}$, тогда как разность сечений $d^2\sigma^{\uparrow\downarrow} - d^2\sigma^{\uparrow\uparrow} \sim L_{\mu\nu}^A W^{\mu\nu A}$. Запишем выражения для суммы и разности сечений в явном

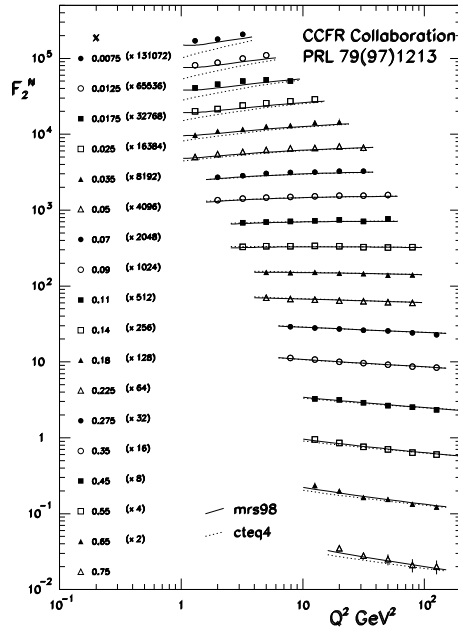


Figure 4.2: F_2^N как функция Q^2 в различных интервалах по x . Для удобства каждое последующее распределение умножено на 2, начиная снизу вверх.

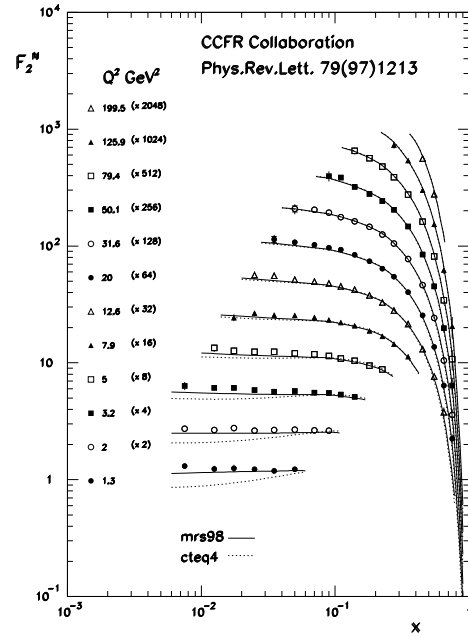


Figure 4.3: F_2^N как функция x в различных интервалах по Q^2 . Для удобства каждое последующее распределение умножено на 2, начиная снизу вверх.

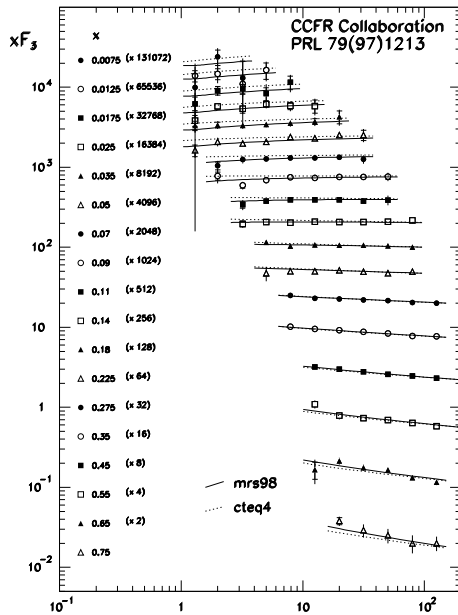


Figure 4.4: xF_3^N как функция Q^2 в различных интервалах по x . Для удобства каждое последующее распределение умножено на 2, начиная снизу вверх.

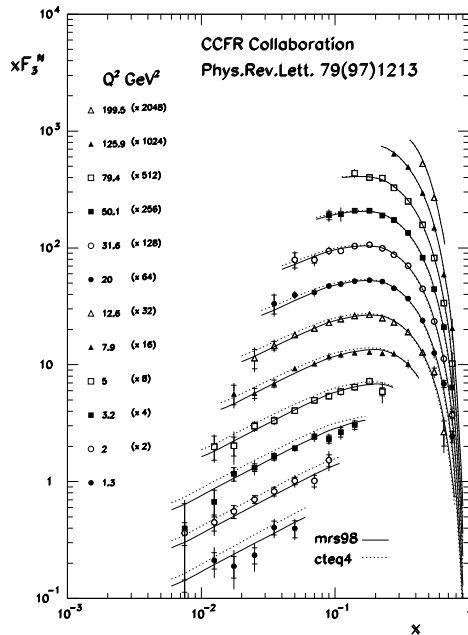


Figure 4.5: xF_3^N как функция x в различных интервалах по Q^2 . Для удобства каждое последующее распределение умножено на 2, начиная снизу вверх.

виде.

Сумма сечений

Неполяризованное сечение лептон-нуклонного рассеяния может быть найдено как среднее от суммы сечений с противоположно направленными спинами частиц:

$$d\sigma^{unp} = 1/2(d\sigma^{\uparrow\uparrow} + d\sigma^{\uparrow\downarrow}).$$

Для суммы сечений можно получить выражение:

$$\frac{d^2\sigma^{\uparrow\uparrow}}{d\Omega dE'} + \frac{d^2\sigma^{\uparrow\downarrow}}{d\Omega dE'} = \frac{8\alpha^2 E'^2}{MQ^4} \left[2\sin^2 \theta/2 F_1^{em}(x, Q^2) + \frac{M}{\nu} \cos^2 \theta/2 F_2^{em}(x, Q^2) \right]. \quad (4.30)$$

В Лоренц-инвариантной записи имеем:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2\sigma^{\uparrow\downarrow}}{dx dy} + \frac{d^2\sigma^{\uparrow\uparrow}}{dx dy} \right) = \frac{4\pi\alpha^2(s - M^2)}{Q^4} \left[xy^2 F_1^{em} + \left((1 - y) - \frac{M^2}{s - M^2} xy \right) F_2^{em} \right]. \quad (4.31)$$

Из ур. (4.30), (4.31) следует, что структурные функции F_1^{em}, F_2^{em} описывают спино-независящую структуру нуклона. Легко сделать оценку сечения по порядку величины:

$$\sigma^{unp} \approx 8\pi M\alpha^2 \frac{E}{Q^4} \approx 5 \times 10^{-31} \frac{E}{GeV} \frac{GeV^4}{Q^4} \text{ см}^2.$$

Разность сечений

Спиновая зависимость сечения лептон-нуклонного DIS может быть исследована изучая разность сечений с противоположно направленными спинами частиц пучка и мишени. Выражение для разности сечений имеет следующий Лоренц-инвариантный вид:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2\sigma^{\uparrow\downarrow}}{dx dy} - \frac{d^2\sigma^{\uparrow\uparrow}}{dx dy} \right) = \frac{4\pi\alpha^2(s - M^2)}{Q^4} \left[(2y - y^2 - \frac{Mxy^2}{E}) x g_1(x, Q^2) - \frac{4M^2}{s - M^2} x^2 y g_2(x, Q^2) \right] \quad (4.32)$$

Структурные функции g_1, g_2 описывают спино-зависящую структуру нуклона. При характерных энергиях лептонных пучков $E \sim 100 \text{ GeV}$, второе слагаемое в (4.32) кинематически подавлено на уровне $M/E \sim 0.01$.

4.4.2 Структурные функции и правила сумм

Записав сечение рассеяния лептона на кварке по стандартным правилам Фейнмана, и используя ур. (4.1), (4.31), (4.32), можно найти связь между структурными функциями F_i^{em}, g_i и кварковыми распределениями.

Спино-независимые структурные функции F_1^{em}, F_2^{em}

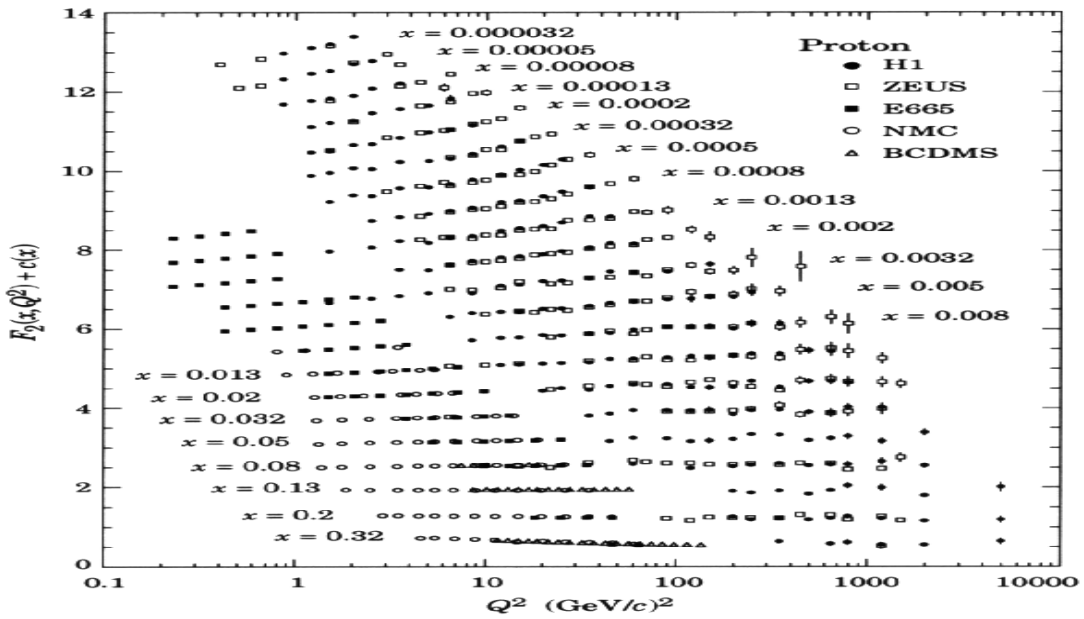


Figure 4.6: Мировые данные по структурной функции $F_2^p(x, Q^2)$ [17, 18, 19, 20, 21]. Для удобства к функции $F_2^p(x, Q^2)$ добавлена константа $c(x) = 0.6(i_x - 0.4)$, где i_x номер бина по переменной x . i_x меняется в пределах от $i_x = 1(x = 0.32)$ до $i_x = 21(x = 0.000032)$

Спино-независимые структурные функции $F_{1,2}^{em}$ в КПМ имеют вид:

$$F_1^{em}(x) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 q(x) \quad (4.33)$$

$$F_2^{em}(x) = x \sum_q e_q^2 q(x) = 2x F_1^{em}(x)$$

Хотя функции $F_{1,2}^{em}(x)$ были введены в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$, для конечного Q^2 структурные функции зависят от Q^2 из-за нарушения скэйлинга. На рис. 4.6 приведены мировые данные по измерению структурной функции $F_2^p(x, Q^2)$. Очевиден огромный прогресс за последние два десятилетия, приведший к уменьшению статистических ошибок и лучшему пониманию неполяризованной структуры нуклона. Эксперименты используют разные методики: с фиксированной протонной мишенью

(NMC,BCDMS,E665) и коллайдерные эксперименты на HERA-DESY (ZEUS, H1). Приведенные в широкой кинематической области данные свидетельствуют об очевидном нарушении скейлинга, что является, в свою очередь, предсказанием пертурбативной КХД.

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Правило сумм Готтфрида

Используя ур. (4.33), после интегрирования по x , можно получить:

$$I_G = \int_0^1 \frac{dx}{x} [F_2^p(x, Q^2) - F_2^n(x, Q^2)] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_0^1 dx [\bar{u}(x, Q^2) - \bar{d}(x, Q^2)]. \quad (4.34)$$

В предположении симметричного моря антикварков имеет место правило сумм Готтфрида: $I_G = 1/3$ [22]. Эксперименты NMC (CERN) и E665 (FNAL) измерили отношение F_2^n/F_2^p и разницу $F_2^p - F_2^n$ как функции x при различных Q^2 (см. рис. 4.7). Данные свидетельствуют в пользу нарушения симметрии x -распределений морских кварков в протоне. При малых x , в предположении симметрии морских кварков, можно было бы ожидать, что отношение F_2^n/F_2^p должно стремиться к единице, т.к. вклад морских кварков при $x \rightarrow 0$ доминирует над вкладом валентных. Результаты NMC согласуются с этим ожиданием. Данные E665 продвинулись в область еще более малых x и, с большими статистическими ошибками, наблюдается отклонение от ожидания $F_2^n(x)/F_2^p(x) \rightarrow 1$. В эксперименте NuSea [23] измерялось отношение выходов мюонных пар, рожденных в процессе Дрелла-Яна в протон-протонном или протон-дейтроном взаимодействиях. Это позволяет измерить отношение \bar{d}/\bar{u} (см. рис. 4.8), которое существенно зависит от x и подтверждает флэйворную асимметрию: $\bar{d} > \bar{u}$. Используя параметризацию для $\bar{d} + \bar{u}$, можно оценить величину $\bar{d} - \bar{u}$, которая в основном положительна (см. рис. 4.9). Качественное объяснение флэйворной асимметрии заключается в принципе Паули. Поскольку в протоне в два раза больше валентных u_{val} кварков, чем d_{val} кварков, то фазовый объем для морских $\bar{u}u$ кварков меньше, чем для морских $\bar{d}d$ кварков, что в результате и дает асимметрию \bar{d} и \bar{u} распределений.

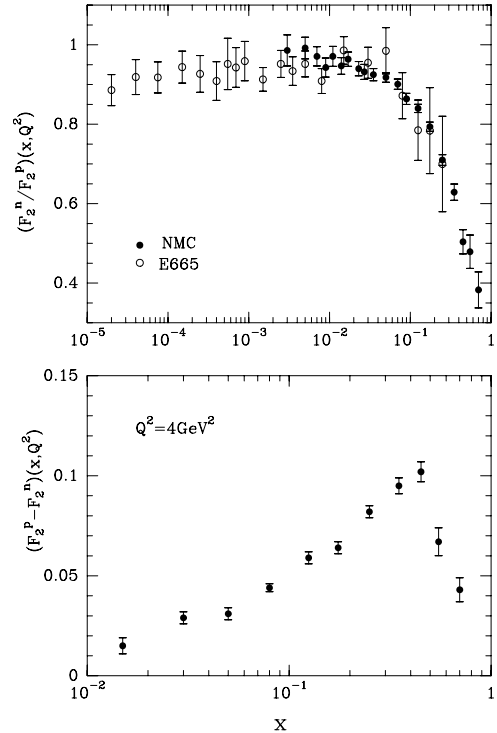


Figure 4.7: Отношение F_2^n/F_2^p как функция x при различных Q^2 [17, 21] (верх). Разница $F_2^p - F_2^n$ как функция x при $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ (низ)

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

страница 77/130

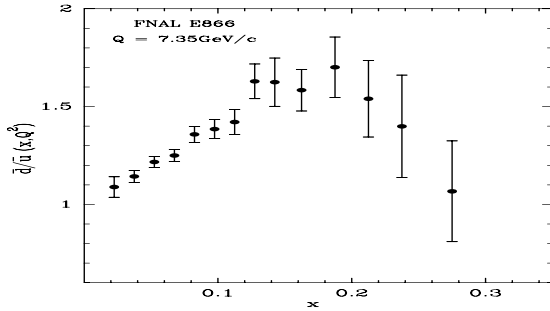


Figure 4.8: \bar{d}/\bar{u} npu $Q = 7.35 \text{ GeV}$ [21]

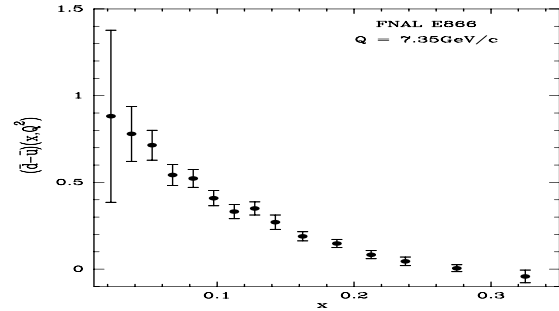


Figure 4.9: $\bar{d} - \bar{u}$ npu $Q = 7.35 \text{ GeV}$ [21]

Спино-зависимые структурные функции g_1, g_2

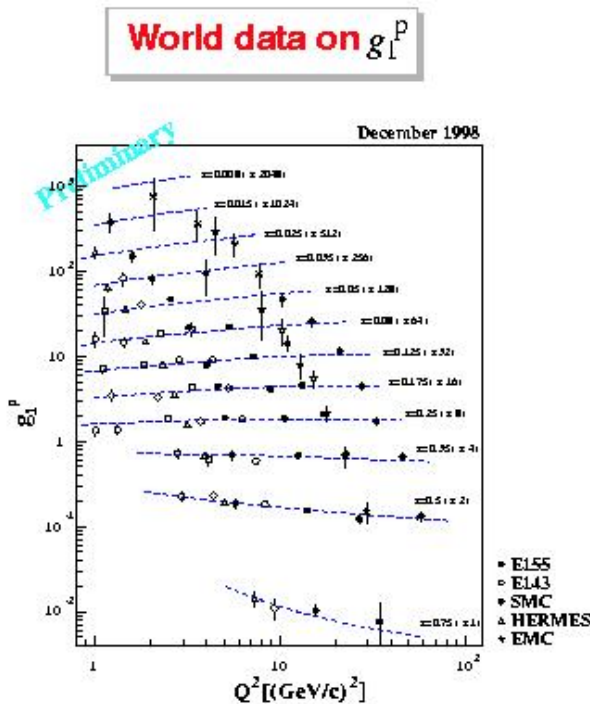


Figure 4.10: Мировые данные по измерению спино-зависимой структурной функции g_1 [24]

Структурная функция $g_1(x)$ описывает распределение продольно-поляризованных (анти) кварков в нуклоне. Прецизионное измерение $g_1(x)$ является одной из актуальнейших проблем современной физики высоких энергий, изучающей спиновую структуру нуклона. Пионерское измерение $g_1(x)$ было сделано коллаборацией EMC (CERN) [25], обнаружившей удивительное явление - доля спина нуклона, переносимая кварками, оказалась ничтожно малой по сравнению с ожиданиями в КПМ. Разные экспериментальные методики измерения использовались SMC (CERN) [26], и используются в данный момент коллаборациями: E143 [27], E155 [28], HERMES [29]. Результаты измерений этих экспериментов согласуются друг с другом и подтверждают выводы EMC. На рис. 4.10 приведены мировые данные по измерению спино-зависимой структурной функции g_1 [24]. Очевиден прогресс в точности измерения этой

функции, однако по-прежнему, статистические ошибки измерения $g_1(x)$ далеки от прецизионности измерения неполяризованных структурных функций $F_{1,2}$ (см.

рис. 4.6).

Transversity - поперечная поляризация

Структурная функция g_2 связана с поперечной поляризацией кварков в нуклоне и не имеет простой интерпретации в КПМ. В настоящее время наметилась заметная активность в изучении этой функции как экспериментальная так и теоретическая [30, 31, 32, 33, 34]. g_2 связана с $g_1(x)$ с помощью правила сумм Вандзура-Вильчека [35] (Wandzura-Wilczek sum rule) для $J \geq 1$:

$$\int_0^1 dx x^{J-1} \left[\frac{J-1}{J} g_1(x) + g_2^{WW}(x) \right] = 0. \quad (4.35)$$

При $J = 1$ получается *Burkhardt-Cottingham sum rule* [36] (BCSR)

$$\int_0^1 dx g_2^p(x) = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 dx g_2^n(x) = 0, \quad (4.36)$$

а при $J = 2$ ур. (4.35) становится:

$$g_2^{WW}(x) = \int_x^1 g_1(y) \frac{dy}{y} - g_1(x). \quad (4.37)$$

4.5 Упругое взаимодействие нейтрино.

4.6 Резонансное взаимодействие.

Chapter 5

Физика нейтрино

5.1 Как измерить сечение νN

Как измерить абсолютное сечение некоторой реакции? Для этого нужно наблюдаемое число интересующих нас взаимодействий N разделить на поток Φ налетающих частиц:

$$\sigma = \frac{N}{\Phi}.$$

В реальном эксперименте основные трудности заключаются в выделении сигнала, предсказании фона, в учете акцептанса и эффективности реконструкции и идентификации нужных экспериментатору событий. Определение абсолютного сечения является, как правило, очень трудной задачей из-за необходимости мониторингирования пучка. В случае рассеяния заряженных частиц, например, электронов или протонов, мониторингирование пучка, хотя бы в принципе понятно как можно осуществить. Разнообразные детекторы, такие как ионизационные камеры, Черенковские счетчики, тороиды и другие способны "посчитать" поток налетающих заряженных частиц. Так обстоит дело с измерением сечения заряженных частиц. Каким же образом можно измерить сечение рассеяния нейтрино или анти-нейтрино на нуклоне (электроне)? Очевидно, что прямое мониторингирование слабо взаимодействующих нейтрино невозможно. На сегодняшний день используются два метода определения потока (анти) нейтрино: *абсолютного* и *относительного* потока. Рассмотрим подробнее оба метода.

5.1.1 Определение потока

Определение абсолютного потока

Нейтринные и анти-нейтринные пучки в современных ускорительных экспериментах получаются, как правило, в результате распадов пионов и каонов, рождающихся в столкновениях протонов с мишенью (обычно бериллием). Большинство распадов пионов и каонов -- двух-частичные. Это позволяет определить

энергию и поток нейтрино, если измерять характеристики вторичного пучка. Необходимо тщательно измерять интенсивность, энергию, пространственное и угловое распределения вторичных пионов и каонов для надежного предсказания потока и энергии нейтрино. Этот метод, в основном, применим, к пучкам (анти) нейтрино с узким спектром энергии. Чтобы добиться узкого спектра энергии нейтрино применяют специальные магнитные линзы, фокусирующие пионы и каоны только с определенным импульсом (из-за экспериментального разрешения аппаратуры -- в узком интервале импульсов). В ряде экспериментов, таких как CCFR E616[37, 38], CDHSW [39, 40] и CHARM [41] использовался этот метод для определения потока (анти) нейтринного пучка. Экспериментаторы стараются измерять одни и те же характеристики сразу несколькими детекторами для уменьшения систематических неопределенностей.

В этом методе есть две основные неопределенности:

1. *Трех-частичные распады пионов и каонов.*

В основном, это распады $K \rightarrow \pi\mu\nu$. Поправку на такие распады вычисляют на основании Монте Карло моделирования нейтринного пучка.

2. *Распады пионов и каонов до фокусирующих магнитов.*

Связанную с этим неопределенность можно измерить поставив поглотитель вторичного пучка пионов и каонов с определенной энергией сразу после магнита. В таком режиме работы эксперимента все взаимодействия будут происходить из нейтрино, родившихся в результате распадов до фокусирующих магнитов.

Определение относительного потока

Определение относительного потока (анти) нейтрино основано на замечательном свойстве сечения глубоконеупругого взаимодействия (анти) нейтрино с нуклоном. Напомним, что эти сечения могут быть выражены через структурные функции в следующем виде:

$$\frac{d\sigma^{\nu,\bar{\nu}}}{dx dy} = \frac{G_F^2 x s}{2\pi} [F_1(x) (y^2 + 2(1-y)) \mp F_3(x)y(1-y/2)],$$

где мы воспользовались соотношением Коллана-Гросса: $2xF_1(x) = F_2(x)$. Заметим, что оба сечения, проинтегрированные по x для нейтрино и анти-нейтрино совпадают при $y \rightarrow 0$:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{d\sigma^{\nu,\bar{\nu}}}{dy} = \frac{G_F^2 s}{2\pi} \int_0^1 F_2(x) \propto \frac{G_F^2 m E}{\pi} \int_0^1 F_2(x) \equiv N E.$$

При этом отношения:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{E} \frac{d\sigma^{\nu,\bar{\nu}}}{dy} = N$$

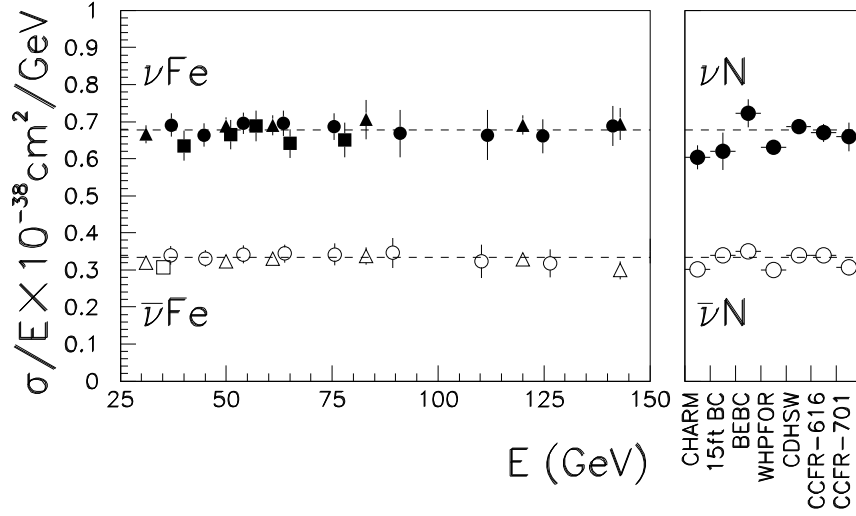


Figure 5.1: Экспериментальные результаты для отношения σ/E_ν для нейтрино (закрашенные фигуры) и анти-нейтрино (незакрашенные фигуры).

Эксперимент	σ^ν/E	$\sigma^{\bar{\nu}}/E$	$\sigma^{\bar{\nu}}/\sigma^\nu$	ref.
CCFR (E616)	0.669 ± 0.024	0.340 ± 0.020	0.499 ± 0.025	[42]
CDHSW	0.686 ± 0.020	0.339 ± 0.022	0.495 ± 0.010	[39]
CCFR (E701)	0.659 ± 0.039	0.307 ± 0.020	0.467 ± 0.028	[38]
CCFR (E744/770)			0.509 ± 0.010	[43]
Мировое среднее	0.677 ± 0.014	0.334 ± 0.008	0.500 ± 0.007	

Table 5.1: Измерение полного сечения (анти) нейтрино на железе

не зависят от энергии (анти) нейтрино. На этом основана идея нормировки на относительный поток. Число зарегистрированных в детекторе событий ($dN_{\nu,\bar{\nu}}$) пропорционально произведению потока ($\Phi_{\nu,\bar{\nu}}$) и сечения взаимодействия ($\sigma_{\nu,\bar{\nu}}$). При $y \rightarrow 0$ запишем:

$$\frac{1}{E_\nu} \frac{dN_{\nu,\bar{\nu}}}{dy} = \Phi_{\nu,\bar{\nu}}(E) \frac{1}{E_\nu} \frac{d\sigma_{\nu,\bar{\nu}}}{dy} = \Phi_{\nu,\bar{\nu}}(E) N, \quad (5.1)$$

Таким образом, в экспериментальных данных можно определить поток нейтрино из самих данных, аккуратно измерив число событий при нулевой передаче энергии ($y \rightarrow 0$). Зная относительный поток, вычисленный в каждом интервале по энергии таким образом, можно измерить сечение в любой другой кинематической области. Этот метод применялся коллаборацией CCFR E616[37, 38] для проверки метода нормировки на абсолютный поток. На рис. 5.1 приведена компиляция экспериментальных данных отношения σ/E_ν для рассеяния на нуклоне нейтрино и анти-нейтрино. В таблице 5.1 собраны результаты измерений отношения σ/E_ν для нейтрино и анти-нейтрино для разных экспериментов, а также соответствующие мировые средние.

5.1.2 Глубоконеупругое взаимодействие

5.1.3 Упругое и квази-упругое взаимодействие

TBD

5.2 Нейтринные эксперименты

TBD

5.2.1 Эксперименты off-axes

Прецизионные измерения с пучками нейтрино, как правило, требуют знания энергии нейтрино. Однако, измерить энергию нейтрино в детекторе можно только тщательно измерив импульсы и определив тип частиц, родившихся в процессе взаимодействия нейтрино с веществом мишени детектора. Хорошее качество измерения типа и импульсов частиц зависит от многих параметров: используемых детекторов, электроники, программ реконструкции. Всё это имеет свои естественные ограничения по точности. Также, немаловажную роль играет то, что до сих пор не до конца изучены механизмы адронизации кварков, что приводит к неизбежным ошибкам при реконструкции родившихся адронов, и как следствие, к ошибкам в определении энергии нейтрино. При этом, в ускорительных экспериментах, как правило, падающие на мишень нейтрино обладают широким спектром энергий. Было бы замечательно, если бы мы могли заранее знать энергию нейтрино. Этого можно добиться, если бы спектр энергии нейтрино был узким (в пределе δ функцией). Что же уширяет спектры энергий? Среди множества причин выделим главную - это разброс по энергиям частиц (в основном π^\pm), в результате распада которых и рождаются (анти) нейтрино. Можно попытаться ``охладить`` адронные пучки, чтобы уменьшить разброс по их импульсам. Есть и другая альтернатива - ставить детектор нейтрино немного в стороне от оси пучка. Такое парадоксальное, на первый взгляд, решение, тем менее существует и ряд проектов, таких как NOVA, T2K уже используют эту идею. Разберемся в чем тут дело.

Рассмотрим распад пиона на мюон и нейтрино с очевидными обозначениями для 4-импульсов участвующих частиц: p_π, p_μ, p_ν .

Найдём энергию нейтрино, вылетающего под углом Θ_ν к направлению импульса пиона. Для этого рассмотрим такое скалярное произведение:

$$(p_\pi p_\mu) = m_\pi p_\mu^* = m_\pi \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2} \quad (5.2)$$

$$= p_\pi(p_\pi - p_\mu) = m_\pi^2 - E_\pi E_\nu (1 - \cos \Theta_\nu) \quad (5.3)$$

$$\Rightarrow E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2E_\pi(1 - v_\pi \cos \Theta_\nu)} \quad (5.4)$$

Найдем угол Θ_ν^0 при котором энергия нейтрино не зависела бы энергии пиона:

$$\frac{dE_\nu}{dE_\pi} = -\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2(E_\pi - |\mathbf{p}_\pi| \cos \Theta_\nu)^2} \left(1 - \frac{d|\mathbf{p}_\pi|}{dE_\pi} \cos \Theta_\nu\right) \Big|_{\Theta_\nu=\Theta_\nu^0} = 0 \quad (5.5)$$

$$\text{откуда } \cos \Theta_\nu = v_\pi, \quad v_\pi = |\mathbf{p}_\pi|/E_\pi. \quad (5.6)$$

Получается, что есть такой угол вылета нейтрино, при котором энергия нейтрино не зависит от энергии пиона. Если воспользоваться тем, что в случае релятивистских скоростей, можно считать Θ_ν^0 близким к нулю и разложить $\cos \Theta_\nu^0 \approx 1 - (\Theta_\nu^0)^2/2$, и скорость пиона $v_\pi \approx 1 - (2\gamma^2)^{-1}$, то получим:

$$\Theta_\nu^0 = \frac{1}{\gamma} \quad (5.7)$$

Заметим, что энергия нейтрино при угле вылета Θ_ν^0 равна:

$$E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2E_\pi(1 - v_\pi^2)} = E_\nu^*, \quad (5.8)$$

где $E_\nu^* = (m_\pi^2 - m_\mu^2)/2m_\pi$ - энергия нейтрино в системе покоя пиона.

Большинство нейтрино вылетает под нулевым углом к направлению импульса пиона. Чтобы вычислить на сколько уменьшается поток нейтрино, вылетающих под углом Θ_ν^0 , вспомним выражение для дифференциальной ширины распада пиона. Ширина распада пиона (см. (??)) пропорциональна:

$$d\Gamma \propto \int (p_\pi p_\nu) \delta^4(p_\pi - p_\nu - p_\mu) \frac{d\mathbf{p}_\nu}{E_\nu} \frac{d\mathbf{p}_\mu}{E_\mu} = \int 2\pi(p_\pi p_\nu) \delta(E_\pi - E_\nu - E_\mu) \frac{E_\nu}{E_\mu} dE_\nu d\cos \Theta_\nu \quad (5.9)$$

Снимем интеграл по энергии нейтрино, воспользовавшись тем, что: $E_\mu = \sqrt{m_\mu^2 + \mathbf{p}_\mu^2} = \sqrt{m_\mu^2 + (\mathbf{p}_\pi^2 - \mathbf{p}_\nu^2)} = \sqrt{m_\mu^2 + \mathbf{p}_\pi^2 + E_\nu^2 - 2p_\pi E_\nu \cos \Theta_\nu}$, а также тем, что

$$\int dE_\nu \delta(E_\pi - E_\nu - E_\mu) = \frac{1}{1 + \frac{E_\nu - p_\pi \cos \Theta_\nu}{E_\mu}} = \frac{E_\mu}{E_\pi(1 - v_\pi \cos \Theta_\nu)},$$

Тогда,

$$\frac{d\Gamma}{d\cos \Theta_\nu} \propto \int E_\pi E_\nu (1 - v_\pi \cos \Theta_\nu) \frac{E_\nu d\cos \Theta_\nu}{E_\pi(1 - v_\pi \cos \Theta_\nu)} = E_\nu^2 = \left(\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2E_\pi(1 - v_\pi \cos \Theta_\nu)} \right)^2 \quad (5.10)$$

Отношение потока нейтрино, вылетающих под углом Θ_ν^0 , к потоку нейтрино, вылетающих под углом $\Theta_\nu = 0$ равно:

$$R = \frac{d\Gamma(\Theta_\nu = \Theta_\nu^0)/d\cos \Theta_\nu}{d\Gamma(\Theta_\nu = 0)/d\cos \Theta_\nu} = \frac{E_\nu^2(\Theta_\nu = \Theta_\nu^0)}{E_\nu^2(\Theta_\nu = 0)} = \left(\frac{1 - v_\pi}{1 - v_\pi^2} \right)^2 \approx \left(\frac{1}{1 + v_\pi} \right)^2 = \frac{1}{4} \quad (5.11)$$

Таким образом, поток ослабевает всего в четыре раза, но при этом мы зарабатываем возможность иметь узкий спектр энергии нейтрино. На самом деле получившийся спектр не будет δ функцией, потому что сам угол вылета зависит от энергии пиона, а следовательно для разных энергий пиона наиболее оптимальный угол вылета будет свой. Тем не менее, на практике получается, что спектр энергии нейтрино становится заметно уже, чем исходный спектр энергии пионов, и как следствие нейтрно, вылетающих под нулевым углом.

Chapter 6

Нейтринные осцилляции

В этой главе мы рассмотрим одну из так называемых ``горячих тем" в современной физике нейтрино - нейтринные осцилляции. Подробно рассмотрим осцилляции в вакууме и в веществе. Формулы для нейтринных осцилляций будут выведены как классическим способом (из квантовой механики), так и используя аппарат квантовой теории поля.

В рассмотренных нами в предыдущих главах примерах с участием нейтрино мы систематически предполагали нулевую массу этой частицы. В случае не равной нулю массы нейтрино возникает интересное явление - возможность того, что нейтрино, рожденное в какой-нибудь реакции как нейтрино сорта $\alpha = e, \mu, \tau$, будет зарегистрировано как нейтрино другого сорта β . Вероятность такого явления зависит гармоническим образом от расстояния между точками рождения и детектирования нейтрино. Это явление носит название *нейтринные осцилляции*.

Вектор из трех компонент нейтрино может быть разложен по одному из двух базисов ν_α - состояния взаимодействия или ν_i - состояния с определенными массами:

$$|\nu_\alpha\rangle = \begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix}, \quad |\nu_i\rangle = \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

С теоретической точки зрения вовсе не обязательно, чтобы эти два базиса совпадали друг с другом. Например, в кварковом секторе у нас именно такая ситуация: кварки с определенными массами¹ (d, s, b в слабых взаимодействиях смешиваются с суперпозицией верхних компонент кварковых дублетов (u, c, t) (смотрите уравнения 1.66, 1.67). В полной аналогии с кварковым смешиванием введем матрицу

¹В уравнениях квантовой хромодинамики - именно кварковые состояния d, s, b и u, c, t обладают определенными массами. Заметим, однако, что вследствие запертия цвета, или невозможности наблюдать свободный кварк (который обладает цветом) - экспериментально измерить массу кварка не очевидная и неоднозначная задача. Например, есть так называемые токовые массы, или конститутивные массы.

смешивания U , связывающую два базиса:

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Нам известно решение уравнения Дирака для свободных полей:

$$|\nu_i\rangle = e^{-ip_i \cdot x_i} |\nu_i(0)\rangle = e^{-i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i + iE_i t_i} |\nu_i(0)\rangle.$$

Рассмотрим теперь подробно вопрос нейтринных осцилляций. Нас будут интересовать два случая: осцилляции нейтрино в вакууме и в веществе.

6.1 Вакуумные осцилляции

6.1.1 Квантовомеханический вывод

Исторически формулу для нейтринных осцилляций выводят из следующих квантовомеханических соображений. Рассмотрим сначала для простоты случай двух нейтрино (ν_e и ν_μ). Предположим, что в некоторой реакции родилось электронное нейтрино ν_e (например, в результате ядерных реакций в Солнце). В начальный момент времени волновая функция электронного нейтрино запишется в виде $|\nu_e(0)\rangle$. Спустя некоторое время t , когда нейтрино пройдет расстояние x волновая функция запишется в виде:

$$|\nu_e\rangle = U_{e1}e^{-ip_1x_1} |\nu_1(0)\rangle + U_{e2}e^{-ip_2x_2} |\nu_2(0)\rangle.$$

В случае смешивания только двух нейтрино матрица смешивания может быть записана в виде:

$$\begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Используя (6.3), можно переписать волновые функции электронного и мюонного нейтрино в виде:

$$|\nu_e\rangle = \cos \Theta e^{-ip_1x_1} |\nu_1(0)\rangle + \sin \Theta e^{-ip_2x_2} |\nu_2(0)\rangle. \quad (6.4)$$

$$|\nu_\mu\rangle = -\sin \Theta e^{-ip_1x_1} |\nu_1(0)\rangle + \cos \Theta e^{-ip_2x_2} |\nu_2(0)\rangle. \quad (6.5)$$

$$(6.6)$$

Вычислим теперь амплитуду перехода между нейтрино ν_e и ν_μ :

$$A_{e\mu} \equiv \langle \nu_\mu(x) | \nu_e(0) \rangle = \sin \Theta \cos \Theta (-e^{-ip_1x_1} \langle \nu_1(0) | \nu_1(0) \rangle + e^{-ip_2x_2} \langle \nu_2(0) | \nu_2(0) \rangle)$$

Для нашего рассмотрения можно положить нормировки $\langle \nu_1(0) | \nu_1(0) \rangle = \langle \nu_2(0) | \nu_2(0) \rangle = 1$, тогда амплитуда становится:

$$A_{e\mu} = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\Theta (-e^{-ip_1x_1} + e^{-ip_2x_2})$$

Вероятность процесса пропорциональна квадрату модуля амплитуды:

$$P_{e\mu} = |A_{e\mu}|^2 = \frac{1}{4} \cdot \sin^2 2\Theta | -e^{-ip_1x_1} + e^{-ip_2x_2} |^2$$

После простых арифметически преобразований, приходим к следующему выражению для вероятности:

$$P_{e\mu} = \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2\Theta (1 - \cos(p_1x_1 - p_2x_2)) = \sin^2 2\Theta \sin^2 \frac{p_1x_1 - p_2x_2}{2}$$

Вычислим разность фаз $\phi_{12} = p_1x_1 - p_2x_2$ в рамках *стандартного предположения*:

- В ультрарелятивистском случае можно положить $t_1 = t_2 = |\mathbf{x}_1| = |\mathbf{x}_2| = L$, где L - это расстояние между точками рождения и детектирования нейтрино.

$$\phi_{12} = (E_1 - E_2)L - (p_1 - p_2)L = \left(\frac{E_1^2 - E_2^2}{E_1 + E_2} - \frac{p_1^2 - p_2^2}{p_1 + p_2} \right) L \approx \frac{m_1^2 - m_2^2}{2E} L \quad (6.7)$$

Таким образом, вероятность

$$P_{e\mu} = \sin^2 2\Theta \sin^2 \frac{m_1^2 - m_2^2}{4E} L \quad (6.8)$$

Легко теперь обобщить случай двух нейтрино на случай смешивания трех нейтрино. Предположим, в некоторой реакции родилось нейтрино ν_α . Волновая функция этого состояния записывается в виде когерентной суперпозиции волновых функций массивных состояний $|\nu_i\rangle$:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} e^{-ip_i x_i} |\nu_i(0)\rangle$$

Таким образом

$$P_{\alpha\beta} \equiv |\langle \nu_\beta(x) | \nu_\alpha(0) \rangle|^2 = \sum_{ij} U_{\alpha i} U_{i\beta}^* U_{\alpha j}^* U_{j\beta} e^{-i(p_i x_i - p_j x_j)}$$

В рамках того же стандартного предположения $t = x = L$ легко получить:

$$P_{\alpha\beta} \equiv |\langle \nu_\beta(x) | \nu_\alpha(0) \rangle|^2 = \sum_{ij} U_{\alpha i} U_{i\beta}^* U_{\alpha j}^* U_{j\beta} e^{-i \frac{m_1^2 - m_2^2}{2E} L} \quad (6.9)$$

6.1.2 Реалистичность квантовомеханического вывода

До сих пор в литературе дискутируется реалистичность квантовомеханического вывода. Приведем один из наиболее наглядных на наш взгляд аргументов *против* такого вывода. Рассмотрим пример распада пиона на лептон и нейтрино. Из закона

сохранения следует, что родившееся нейтрино должно обладать определенной энергией и определенным импульсом. И энергия и импульс массивных нейтрино с разными массами m_i и m_j разные. Следовательно, скорости массивных нейтрино ν_i и ν_j тоже разные: $\mathbf{v}_i = \mathbf{p}_i/E_i \neq \mathbf{v}_j = \mathbf{p}_j/E_j$. Если у двух нейтрино разные скорости, то расстояние L они пройдут за разное время:

$$t_i = \frac{L}{v_i} = L \frac{E_i}{p_i} \neq t_j = \frac{L}{v_j} = L \frac{E_j}{p_j}$$

Вычислим теперь разность фаз с учетом того, что время распространения двух нейтрино разное:

$$\begin{aligned} \phi_{ij} &= (E_i t_i - E_j t_j) - (p_i - p_j) L \\ &= \left(\frac{E_i}{v_i} - \frac{E_j}{v_j} - (p_i - p_j) \right) L \\ &= \left(\frac{E_i^2}{p_i} - \frac{E_j^2}{p_j} - (p_i - p_j) \right) L \\ &= \left(\frac{p_i^2 + m_i^2}{p_i} - \frac{p_j^2 + m_j^2}{p_j} - (p_i - p_j) \right) L \\ &= \frac{m_i^2 - m_j^2}{p} L \end{aligned} \tag{6.10}$$

Разность фаз получилась в два раза большей по сравнению со стандартной (6.7), выведенной в предыдущем параграфе! Какая же формула правильная: (6.7), (6.10)? В последнее время в литературе активно обсуждаются подобные вопросы (смотрите, например: [http : //www.nu.to.infn.it/NeutrinoOscillations/](http://www.nu.to.infn.it/NeutrinoOscillations/)). Чтобы ответить на заданный выше вопрос необходимо рассмотреть проблему исходя из первых принципов. Обратимся для этого к диаграммам Фейнмана.

6.1.3 Квантово-полевого вывод

Очевидно, что нейтринные осцилляции возможны только при *нарушении закона сохранения лептонного числа*. Нейтрино, рожденное, например, в распаде $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$, может провзаимодействовать с нейтроном $\nu n \rightarrow p + e$ только в случае нарушения лептонного числа. Таким образом, вероятность цепочки реакций $\pi^+ \rightarrow \mu^+(\nu)n \rightarrow p + e$ должна иметь *осцилляционный характер*. Вычислим амплитуду такого процесса в рамках квантовой теории поля как сумму трех амплитуд с промежуточными (виртуальными) массивными состояниями нейтрино. На рис. 6.1 приведена полная амплитуда как сумма трех диаграмм Фейнмана. Определим начальное и конечные состояния:

$$|in\rangle = |\pi^+, n\rangle, \quad \langle out| = \langle \mu^+, e, p|$$

Волновые функции конечных состояний можно представить в виде плоских волн:

$$\psi(x) = e^{-ipx}$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

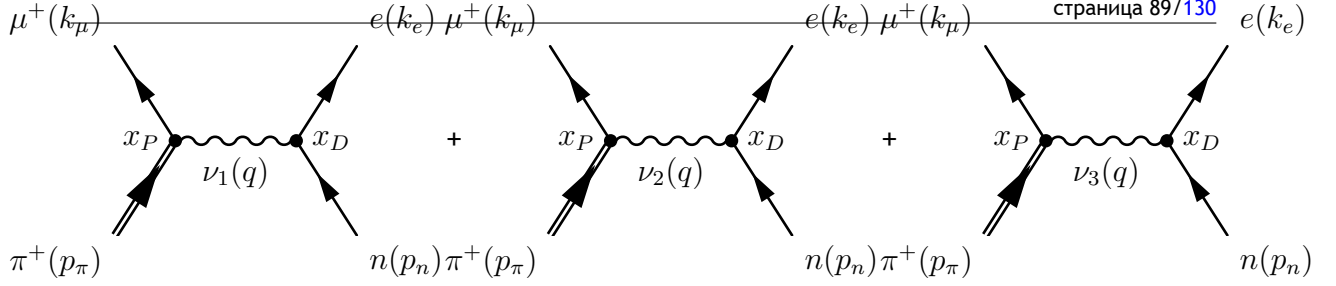


Figure 6.1: Диаграмма Фейнмана для процесса распада $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ с последующим рассеянием нейтрино на нейтроне с рождением протона и электрона $\nu + n \rightarrow p + e$. Нейтрино находится в виртуальном состоянии между точками его рождения и поглощения. Точки x_P и x_D могут быть разнесены на макроскопическое расстояние: $|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_D| = L$.

Волновые функции начальных состояний в общем случае нельзя считать плоскими волнами, поскольку, как правило мишень находится в детекторе в связанном состоянии, да и частица из пучка также может описываться более сложной функцией. Поэтому представим:

$$\begin{aligned}\Phi_\pi(x_1) &= e^{-iE_P t_1} \Psi_P(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_P) \\ \Phi_n(x_2) &= e^{-iE_D t_2} \Psi_D(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_D)\end{aligned}\quad (6.11)$$

Волновые функции $\Psi_P(\mathbf{x})$ и $\Psi_D(\mathbf{x})$ определены так, чтобы иметь максимум в нуле своего аргумента $\mathbf{x} = 0$ и быстро убывать при больших \mathbf{x} . Запишем амплитуду реакции $\pi^+ \rightarrow \mu^+(\nu_i)n \rightarrow e + p$:

$$A = \langle \mu^+, e, p | -iT \int d^4 x_1 \mathcal{L}_P(x_1) \int d^4 x_2 \mathcal{L}_D(x_2) | \pi^+, n \rangle \quad (6.12)$$

В этой формуле, $\mathcal{L}_P(x_1)$ - это лагранжиан процесса $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_i$, $\mathcal{L}_D(x_2)$ - это лагранжиан процесса $\nu_i + n \rightarrow p + e$, оператор T - это оператор упорядочивания по времени.

$$\nu_\alpha = \sum_i V_{\alpha i}^* \nu_i. \quad (6.13)$$

Флэйворные и массовые состояния нормированы таким образом:

$$\begin{aligned}\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle &= \delta_{\alpha\beta} \\ \langle \nu_i | \nu_j \rangle &= \delta_{ij},\end{aligned}$$

что приводит также к такому условию:

$$\sum_i V_{\alpha i}^* V_{\beta i} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (6.14)$$

Для рассматриваемого нами процесса, лагранжианы $\mathcal{L}_P(x_1)$, $\mathcal{L}_D(x_2)$:

$$\mathcal{L}_P(x_1) = \frac{G_F V_{ud}}{\sqrt{2}} \sum_i U_{\mu i}^* H_\pi^\alpha(x_1) \bar{\nu}_i(x_1) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \mu(x_1), \text{ смотрите уравнение (2.14)}$$

$$\mathcal{L}_D(x_2) = \frac{G_F V_{ud}}{\sqrt{2}} \sum_j U_{ej} \bar{p}(x_2) \gamma_\alpha (1 - \lambda \gamma_5) n(x_2) \cdot \bar{\nu}_i(x_2) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \nu_i(x_2), \text{ смотрите уравнение (2.19)}$$

Теперь амплитуда (6.12) может быть записана как:

$$A = \frac{G_F^2 V_{ud}^2}{2} \sum_{ij} U_{\mu i}^* U_{ej} \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{-i(E_n - E_p - E_e)t_2} e^{-i(E_\pi - E_\mu)t_1} e^{-i\mathbf{p}_\mu \mathbf{x}_1} e^{-i(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_p) \mathbf{x}_2} \\ J^\lambda(\mathbf{x}_2) \Psi_D(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_D) \bar{e}(p_e) \gamma_\lambda (1 - \lambda \gamma_5) G_{ij}(x_1 - x_2) H_\pi^\mu(\mathbf{x}_1) \Psi_P(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_P) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \mu(p_\mu), \quad (6.15)$$

где для краткости введено обозначение $J^\lambda(\mathbf{x}_2) = \bar{p}(x_2) \gamma_\alpha (1 - \lambda \gamma_5) n(x_2)$. Виртуальное нейтрино описывается функцией Грина $G_{ij}(x_1 - x_2)$:

$$G_{ij}(x_1 - x_2) \equiv \langle 0 | \nu_j(x_1) \bar{\nu}_i(x) | 0 \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \delta_{ij} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\hat{q} + m_i}{q^2 - m_i^2 + i\epsilon} e^{-iq(x_1 - x_2)} \quad (6.16)$$

Вычислим теперь интегралы по $d^4 x_1 d^4 x_2$. Проинтегрируем сначала по временам:

$$\int dt_1 e^{-i(E_\pi - E_\mu + q_0)t_1} = 2\pi \delta(E_\pi - E_\mu + q_0) \equiv 2\pi \delta(w_1 + q_0) \\ \int dt_2 e^{-i(E_n - E_p - E_e - q_0)t_2} = 2\pi \delta(E_n - E_p - E_e - q_0) \equiv 2\pi \delta(w_2 - q_0)$$

Интегрирование по $d^3 x_1$ и $d^3 x_2$ в общем случае не дает соответствующих импульсных δ функций. Вместо этого получаем:

$$\int d^3 x_1 e^{-i(\mathbf{p}_\mu - \mathbf{q}) \mathbf{x}_1} \Psi_P^\mu(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_P) = e^{+i(\mathbf{p}_\mu - \mathbf{q}) \mathbf{x}_P} \Psi_P^\mu(\mathbf{p}_\mu - \mathbf{q}) \\ \int d^3 x_2 e^{-i(\mathbf{p}_e + \mathbf{q}) \mathbf{x}_2} \Psi_D^\lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_D) = e^{+i(\mathbf{p}_e + \mathbf{q}) \mathbf{x}_D} \Psi_D^\lambda(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_p + \mathbf{q}).$$

В этих уравнениях $\Psi_P^\mu(\mathbf{p}_\mu - \mathbf{q})$ и $\Psi_D^\lambda(\mathbf{p}_e + \mathbf{q})$ Фурье образы. Заметим, что Фурье образ плоской волн - это δ функция. Именно вследствие этого появляются δ^4 функции в стандартном выражении для квадрата матричного элемента.

$$A = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{G_F^2 V_{ud}^2 \delta(w_1 - w_2)}{2(2\pi)^2} \sum_i U_{\mu i}^* U_{ei} \int d^3 q J^\lambda(p_n; p_p) \Psi_D^\lambda(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_p + \mathbf{q}) \bar{e}(p_e) \\ \gamma_\lambda (1 - \lambda \gamma_5) \frac{\hat{q} + m_i}{q^2 - m_i^2 + i\epsilon} e^{+i\mathbf{q}\mathbf{L}} H_\pi^\mu(\mathbf{x}_1) \Psi_P(\mathbf{p}_\mu - \mathbf{q}) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \mu(p_\mu), \quad (6.17)$$

Интеграл $d^3 q$ содержит полюс при $q^2 = m_i^2$. Поэтому, пренебрегая другими медленно изменяющимися факторами, вычислим сначала такой интеграл:

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^3 q \frac{e^{+i\mathbf{q}\mathbf{L}}}{q^2 - m_i^2 + i\epsilon} = \frac{2\pi}{iL} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dq q \frac{e^{+iqL} - e^{-iqL}}{w_1^2 - q^2 - m_i^2 + i\epsilon} \\ = \frac{2\pi}{iL} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty dq q \frac{e^{+iqL}}{w_1^2 - q^2 - m_i^2 + i\epsilon} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\text{по дуге } |z|=R} dz \frac{e^{i\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 |q}}{w_1^2 - q^2 - m_i^2 + i\epsilon} \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2\pi}{iL} \oint dq q \frac{e^{iLq}}{w_1^2 - q^2 - m_i^2 + i\epsilon} = \frac{4\pi^2}{L} e^{iL\sqrt{w_1^2 - m_i^2}}$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Введем обозначение $k_i = \sqrt{w_1^2 - m_i^2}$. Наконец, (6.17) запишется в виде:

$$A = \frac{G_F^2 V_{ud}^2 \delta(w_1 - w_2)}{2L} \sum_i U_{\mu i}^* U_{ei} e^{ik_i L} J^\lambda(p_n; p_p) \Psi_D^\lambda(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_p + \mathbf{q}) \bar{e}(p_e) \gamma_\lambda (1 - \lambda \gamma_5) \frac{1}{\hat{q} + m_i} H_\pi^\mu(\mathbf{x}_1) \Psi_P(\mathbf{p}_\mu - \mathbf{q}) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \mu(p_\mu), \quad (6.18)$$

Виртуальное нейтрино находится *почти* на массовой поверхности, как следует из нашего вычисления. Соответственно, положим:

$$(\hat{q} + m_i) \approx \bar{\nu}(q) \nu(q).$$

Тогда амплитуду A можно записать в виде произведения двух амплитуд:

$$A \propto \frac{1}{L} \sum_i U_{\mu i}^* U_{ei} e^{ik_i L} A(\pi \rightarrow \mu \nu) \otimes A(\nu n \rightarrow p e) \quad (6.19)$$

Соответственно, модуль квадрата амплитуды $|A|^2$ может быть представлен как произведение квадратов модулей амплитуд процессов, соответствующих распаду пиона и взаимодействию нейтрино с нейтроном. После интегрирования по фазовому объему вероятность нашего процесса будет пропорциональна

$$N = \frac{1}{L^2} \Gamma(\pi \rightarrow \mu \nu) \sigma(\nu + n \rightarrow p + e) \sum_{i,j} U_{\mu i}^* U_{ei} U_{\mu j} U_{ej}^* e^{ik_i L} e^{-ik_j L} = \frac{1}{L^2} \Gamma(\pi \rightarrow \mu \nu) \sigma(\nu + n \rightarrow p + e) \sum_{i,j} U_{\mu i}^* U_{ei} U_{\mu j} U_{ej}^* e^{-i \frac{m_1^2 - m_2^2}{2E} L}.$$

Как видим, формула для числа событий может быть представлена в виде произведения трех факторов: ширины распада пиона, сечения взаимодействия нейтрино с нейтроном, и фактора, осциллирующего от расстояния L . В последнем факторе мы узнаем стандартный фактор со стандартной фазой (6.9), (6.7).

6.2 Осцилляции в веществе

TBD

6.3 *Нейтринные осцилляции в вакууме и веществе. КТП и волновые пакеты.

Амплитуда $\mathcal{A} = \langle f | S - 1 | i \rangle$, описывающая переходы между начальным $|i\rangle$ и конечным $|f\rangle$ состояниями должна быть обобщена для случая, когда начальное и

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

конечное состояния локализованы в пространстве-времени. Такое обобщение может быть сделано с использованием *волновых пакетов*:

$$\mathcal{A} = \int \prod_i \frac{d\mathbf{k}'_i}{(2\pi)^3 [2E_{k'_i}]^{1/2}} \phi_i(k'_i, \mathbf{k}_i) \prod_j \frac{d\mathbf{p}'_j}{(2\pi)^3 [2E_{p'_j}]^{1/2}} \phi_j^*(p'_j, \mathbf{p}_j) \langle f | \mathcal{S}(\{k', p'\}) - 1 | i \rangle, \quad (6.20)$$

где начальные и конечные частицы нумеруются индексами i и j соответственно, их импульсы k' и p' , соответствующие им наборы импульсов обозначаются $\{k'\}$, $\{p'\}$, и $E_{k_i} = [\mathbf{k}_i^2 + m_i^2]^{1/2}$.

Функции $\phi_i(k'_i, \mathbf{k}_i)$ описывают волновые пакеты:

$$\phi_i(k'_i, \mathbf{k}_i) = a_i(\mathbf{k}'_i - \mathbf{k}_i) e^{ik'_i x_i}. \quad (6.21)$$

Вещественная функция $a_i(\mathbf{k}'_i - \mathbf{k}_i)$ имеет пик в точке $\mathbf{k}'_i = \mathbf{k}_i$, так что \mathbf{k}_i можно интерпретировать как среднее значение импульса частицы i . Пространственно-временная точка x_i - это точка, от которой начинается ``отсчет`` функции $\phi_i(k'_i, \mathbf{k}_i)$, поэтому для всех частиц, участвующих в процессе рождения нейтрино в точке $x_s = (x_s^0, \mathbf{x}_s)$ запишем $x_i = x_s$. Аналогично, для точки детектирования нейтрино $x_i = y_d$ и (в случае осцилляций нейтрино в веществе локализованного в точке z_m) $x_i = z_m$.

Нормировка волновых пакетов даётся:

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\phi_i(k, \mathbf{k}_i)|^2 = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |a_i(\mathbf{k})|^2 = 1 \quad (6.22)$$

В дальнейшем нам понадобится функция:

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} a_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (6.23)$$

являющаяся Фурье образом $a_i(\mathbf{k})$.

Используя (6.22) получим:

$$\int d\mathbf{x} |\psi_i(\mathbf{x})|^2 = 1 \quad (6.24)$$

В последующих вычислениях нам понадобятся две полезные теоремы, доказательства которых мы не приводим.

Теорема 1 (Обобщённое преобразование Фурье для гауссиана) Для реальной и симметричной матрицы A с положительными собственными значениями

$$\int dx e^{-A_{\mu\nu} x^\mu x^\nu - i k_\mu x^\mu} = \frac{\pi^2}{\sqrt{\det A}} e^{-(A^{-1})_{\mu\nu} k^\mu k^\nu / 4} \quad (6.25)$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Теорема 2 (Теорема Гримуса-Штокингер [44]) Пусть $F(\mathbf{q})$ трижды гладко дифференцируемая функция, такая что $F(\mathbf{q})$ сама и все её первые и вторые производные убывают по крайней мере как $1/|\mathbf{q}|^2$ для $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$. Тогда в пределе $L = |\mathbf{L}| \rightarrow \infty$ для $A > 0$:

$$\int d\mathbf{q} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{L}} \frac{F(\mathbf{q})}{A - \mathbf{q}^2 + i\varepsilon} = -\frac{2\pi^2}{L} F(-\sqrt{A}\mathbf{L}/L) e^{i\sqrt{A}L} + O(L^{-3/2}) \quad (6.26)$$

в то время как для $A < 0$ интеграл убывает как L^{-2} .

6.3.1 Осцилляции в вакууме

Амплитуда

Рассмотрим процесс рождения нейтрино и лептона ℓ_α^+ в точке x_s , описываемое плотностью лагранжиана $\mathcal{L}_s(x)$ с последующим детектированием нейтрино и лептона ℓ_β^- в точке y_d с плотностью лагранжиана $\mathcal{L}_d(x)$. Тогда \mathcal{S} матрица:

$$\mathcal{S} = \mathbf{T} \left[e^{i \int [\mathcal{L}_s(x) + \mathcal{L}_d(x)] dx} \right]. \quad (6.27)$$

Соответствующие плотности лагранжиана в приближении Ферми даются формулами:

$$\mathcal{L}_s(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[J_s^\mu(x) \sum_i V_{\alpha i} \bar{\ell}_\alpha(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_i(x) + \text{h.c.} \right] \quad (6.28)$$

$$\mathcal{L}_d(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[J_d^\mu(x) \sum_i V_{\beta i} \bar{\ell}_\beta(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_i(x) + \text{h.c.} \right], \quad (6.29)$$

где $J_s^\mu(x)$, $J_d^\mu(x)$ - токи частиц, участвующих в рождении и поглощении нейтрино.

Разлагая (6.27) до второго порядка, получим:

$$\begin{aligned} \langle f | \mathcal{S}(\{k', p'\}) - 1 | i \rangle &= \frac{i^2}{2!} \int dx dy \langle f | \mathbf{T} [\mathcal{L}_s(x) \mathcal{L}_d(y) + \mathcal{L}_s(y) \mathcal{L}_d(x)] | i \rangle \\ &= - \int dx dy \langle f | \mathbf{T} [\mathcal{L}_d(y) \mathcal{L}_s(x)] | i \rangle \\ &= \int \frac{dq}{(2\pi)^4} dx dy e^{-i(k'_s - p'_s - q) \cdot x - i(k'_d - p'_d + q) \cdot y} \mathcal{M}_{\nu, (\bar{\nu})}(\{k', p'\}, q) \end{aligned} \quad (6.30)$$

где $k'_s(p'_s)$ - сумма внешних импульсов (исключая нейтрино) входящих (исходящих) частиц в точке x_s . Аналогичное определение использовано для точки y_d . При вычислении $\langle f | \mathbf{T} [\mathcal{L}_d(y) \mathcal{L}_s(x)] | i \rangle$ в уравнениях (6.30) возникает вакуумное среднее $\langle 0 | \mathbf{T} [\nu_i(y) \bar{\nu}_i(x)] | 0 \rangle$ - это *пропагатор нейтрино*:

$$\langle 0 | \mathbf{T} [\nu_i(y) \bar{\nu}_i(x)] | 0 \rangle = G_i(y - x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int S_i(q) e^{-iq \cdot (x - y)} dq, \quad S_i(q) = \frac{\hat{q} + m_i}{q^2 - m_i^2 + i\varepsilon} \quad (6.31)$$

В явном виде \mathcal{M} в случае реакции с участием (анти)нейтрино даётся:

$$\mathcal{M}_\nu = -\frac{i}{2} G_F^2 J_s^\mu(\{k', p'\}_s) J_d^\nu(\{k', p'\}_d) \sum_{i=1}^3 V_{\alpha i}^* V_{\beta i} \bar{\ell}_\beta \gamma_\nu (1 - \gamma_5) S_i(q) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \ell_\alpha \quad (6.32)$$

$$\mathcal{M}_{\bar{\nu}} = -\frac{i}{2} G_F^2 \tilde{J}_s^\mu(\{k', p'\}_s) \tilde{J}_d^\nu(\{k', p'\}_d) \sum_{i=1}^3 V_{\alpha i} V_{\beta i}^* \bar{\ell}_\alpha \gamma_\mu (1 - \gamma_5) S_i(-q) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \ell_\beta \quad (6.33)$$

Тогда амплитуда (6.20) становится:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \int \prod_i \frac{d\mathbf{k}'_i}{(2\pi)^3 [2E_{k'_i}]^{1/2}} \phi_i(k'_i, \mathbf{k}_i) \prod_j \frac{d\mathbf{p}'_j}{(2\pi)^3 [2E_{p'_j}]^{1/2}} \phi_j^*(p'_j, \mathbf{p}_j) \times \\ & \times \int \frac{dq}{(2\pi)^4} dx dy e^{-i(k'_s - p'_s - q) \cdot x - i(k'_d - p'_d + q) \cdot y} \mathcal{M}_{\nu, (\bar{\nu})}(\{k', p'\}, q) \end{aligned} \quad (6.34)$$

Теперь мы готовы снять интегралы $\int d\mathbf{k}'_i d\mathbf{p}'_j$ в (6.34). Учтывая, что функции $a_i(\mathbf{k}'_i - \mathbf{k}_i)$ имеют острый максимум при $\mathbf{k}'_i = \mathbf{k}_i$, нам будет достаточно разложить быстро меняющиеся функции в окрестности максимума, а медленно меняющиеся функции вычислить в точке максимума:

$$\int \frac{d\mathbf{k}'_i}{(2\pi)^3 [2E_{k'_i}]^{1/2}} \phi_i(k'_i, \mathbf{k}_i) e^{-ik'_i \cdot x} \mathcal{M}(k'_i, \dots) \approx \frac{e^{-ik_i \cdot (x - x_s)}}{[2E_{k_i}]^{1/2}} \psi_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s - \mathbf{v}_i(x^0 - x_s^0)) \mathcal{M}(k_i, \dots), \quad (6.35)$$

где мы воспользовались тем, что

$$\begin{aligned} k'(x - x_s) &= k(x - x_s) + (\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot [\nabla_{\mathbf{k}'} E_{k'}(x^0 - x_s^0) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)]_{\mathbf{k}'=\mathbf{k}} + \dots \\ &= k(x - x_s) - (\mathbf{k}' - \mathbf{k}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s - \mathbf{v}_k(x^0 - x_s^0)) + \dots \end{aligned} \quad (6.36)$$

$\mathbf{v}_k = \nabla_{\mathbf{k}'} E_{k'}|_{\mathbf{k}'=\mathbf{k}}$, а также определением (6.23).

В рамках использованного приближения амплитуда (6.20) становится:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \Psi_s \Psi_d \int dx dy e^{-i(k_s - p_s) \cdot (x - x_s) - i(k_d - p_d) \cdot (y - y_d)} E_s(x - x_s) E_d(y - y_d) \cdot \\ & \cdot \int \frac{dq}{(2\pi)^4} e^{-iq(y-x)} \mathcal{M}(\{k, p\}, q) \end{aligned} \quad (6.37)$$

где

$$\Psi_s = \left[\prod_{i \in \{i_s\}} \frac{\psi_i(\mathbf{x}_s, x_s^0)}{[2E_{k_i}]^{1/2}} \right] \left[\prod_{j \in \{f_s\}} \frac{\psi_j(\mathbf{x}_s, x_s^0)}{[2E_{p_j}]^{1/2}} \right] \quad (6.38)$$

$$E_s(x - x_s) = \left[\prod_{i \in \{i_s, f_s\}} \psi_i(\mathbf{x}, x_s^0) \right]^{-1} \left[\prod_{j \in \{i_s, f_s\}} \psi_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s - \mathbf{v}_j(x^0 - x_s^0)) \right] \quad (6.39)$$

с определением:

$$\psi_i(\mathbf{x}_s, x_s^0) = \psi_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s - \mathbf{v}_i(x^0 - x_s^0)) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, x^0=x_s^0} \quad (6.40)$$

Степень относительного размытия волновых пакетов в источнике нейтрино отражается в определении функции $E_s(x - x_s)$, аналогичную роль играет $E_d(y - y_d)$ для точки детектирования нейтрино. Определим четырехмерные объёмы, связанные с областями рождения и детектирования нейтрино следующим образом:

$$\mathcal{V}_s = \int dx [E_s(x - x_s)]^2, \mathcal{V}_d = \int dy [E_d(y - y_d)]^2. \quad (6.41)$$

Разлагая $E_s(x - x_s)$ в окрестности $x = x_s$, и используя теорему 1, получим:

$$\mathcal{V}_s = \int dx [E_s(x - x_s)]^2 = \int dx e^{2\ln[1 - \frac{1}{2}(W_s)_{\mu\nu}(x-x_s)^\mu(x-x_s)^\nu + \dots]} \approx \frac{\pi^2}{\sqrt{\det(W_s)}} \quad (6.42)$$

где

$$(W_s)_{\mu\nu} \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} E_s(x - x_s) \Big|_{x=x_s} \quad (6.43)$$

Времяподобные (пространственноподобные) компоненты тензора $(W_s)_{\mu\nu}$ отражают разброс по энергии (импульсу), доступный в реакции, в то время как Времяподобные (пространственноподобные) компоненты тензора $(W_s^{-1})_{\mu\nu}$ характеризуют разброс по времени (пространству) перекрытия волновых пакетов.

Используя теорему 1, легко вычислить интеграл $\int dx$ в (6.37):

$$\begin{aligned} I_x &= e^{+iqx_s} \int dx e^{-i(k_s - p_s - q) \cdot (x - x_s)} E_s(x - x_s) \\ &= 4\mathcal{V}_s e^{[-\frac{1}{2}(W_s^{-1})_{\mu\nu}(k_s - p_s - q)^\mu(k_s - p_s - q)^\nu + iq_\mu x_s^\mu]} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Аналогичное вычисление для интеграла $\int dy$ позволяет переписать (6.37) в такой форме:

$$\mathcal{A} = \Psi_s \Psi_d (16\mathcal{V}_s \mathcal{V}_d) \int \frac{dq}{(2\pi)^4} e^{-iq(y_d - x_s) - D(q)} \mathcal{M}(\{k, p\}, q) \quad (6.45)$$

где

$$D(q) = \frac{1}{2}(W_s^{-1})_{\mu\nu}(k_s - p_s - q)^\mu(k_s - p_s - q)^\nu + \frac{1}{2}(W_d^{-1})_{\mu\nu}(k_d - p_d + q)^\mu(k_d - p_d + q)^\nu \quad (6.46)$$

Фактор $e^{-D(q)}$ обеспечивает сохранение энергии-импульса насколько это позволяет размытие волновых пакетов. Используя теорему 2 для вычисления интеграла $\int dq$ и определив $\mathbf{L} = \mathbf{y}_d - \mathbf{x}_s$, получим:

$$\mathcal{A} = -\Psi_s \Psi_d \frac{4\mathcal{V}_s \mathcal{V}_d}{\pi L} \sum_{i=1}^3 V_{\alpha i}^* V_{\beta i} \int \frac{dq^0}{2\pi} e^{-iq^0(y_d^0 - x_s^0) + iLs_i(q^0) - D_i(q^0)} \mathcal{M}_i \quad (6.47)$$

где

$$s_i(q^0) = [q^0 - m_i^2]^{1/2}, \quad D_i(q^0) = D(q)|_{q=s_i(q^0)L/L} \quad (6.48)$$

Явный вид \mathcal{M}_i , с $q^\mu = (q^0, s_i(q^0)L/L)$ даётся:

$$\mathcal{M}_{(\nu)} = -i \frac{G_F^2}{2} J_s^\mu J_d^\nu \bar{\ell}_\beta \gamma_\nu (1 - \gamma_5) (\hat{q} + m_i) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \ell_\alpha \quad (6.49)$$

$$\mathcal{M}_{(\bar{\nu})} = -i \frac{G_F^2}{2} \tilde{J}_s^\mu \tilde{J}_d^\nu \bar{\ell}_\alpha \gamma_\mu (1 - \gamma_5) (-\hat{q} + m_i) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \ell_\beta, \quad q^\mu = (\lambda_i, s_i(\lambda_i)L/L) \quad (6.50)$$

Оставшееся интегрирование по dq^0 может быть выполнено аналогично тому, как мы это сделали для dx . Интеграл насыщается около λ_i , определённой из:

$$\frac{D_i(\lambda)}{d\lambda} = 0 \quad (6.51)$$

Разлагая $D_i(q^0)$ до второго порядка около λ_i , оставшийся аргумент экспоненты до первого порядка, и оставшуюся часть подынтегральной функции до нулевого порядка, получим:

$$\begin{aligned} & -iq^0(y_d^0 - x_s^0) + iLs_i(q^0) - D_i(q^0) = \\ & = -i\lambda_i(y_d^0 - x_s^0) + iLs_i(\lambda_i) - D_i(\lambda_i) - i(y_d^0 - x_s^0 - L/v_i)(q^0 - \lambda_i) - \sigma_i^2(q^0 - \lambda_i)^2 \end{aligned} \quad (6.52)$$

проинтегрируем по dq^0 :

$$\begin{aligned} I_{q^0} &= \int dq^0 e^{-iq^0(y_d^0 - x_s^0) + iLs_i(q^0) - D_i(q^0)} \mathcal{M}_i(q^0, \dots) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma_i} e^{-i\lambda_i(y_d^0 - x_s^0) + iLs_i(\lambda_i) - D_i(\lambda_i) - C_i(\lambda_i, x_s, y_d)} \mathcal{M}_i(\lambda_i, \dots) \end{aligned} \quad (6.53)$$

где

$$C_i(\lambda_i, x_s, y_d) = \frac{1}{4\sigma_i^2} \left[y_d^0 - x_s^0 - \frac{L}{v_i} \right]^2, \quad \sigma_i^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 D_i(\lambda)}{d\lambda^2} \Big|_{\lambda=\lambda_i}, \quad v_i = \frac{s_i(\lambda_i)}{\lambda_i} \quad (6.54)$$

Фактор $e^{-C_i(\lambda_i, x_s, y_d)}$ подавляет вклады в амплитуду распространения нейтрино, которые не следуют классической траектории между точками рождения (x_s^0, \mathbf{x}_s) и поглощения (y_d^0, \mathbf{y}_d) . Таким образом, получаем:

$$\mathcal{A} = -\Psi_s \Psi_d \frac{2\mathcal{V}_s \mathcal{V}_d}{\pi^2 L} \sum_{i=1}^3 V_{\alpha i}^* V_{\beta i} \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma_i} e^{-i\lambda_i(y_d^0 - x_s^0) + iLs_i(\lambda_i) - D_i(\lambda_i) - C_i(\lambda_i, x_s, y_d)} \mathcal{M}_i \quad (6.55)$$

Макроскопическая скорость счёта

Квадрат амплитуды (6.55) есть:

$$|\mathcal{A}|^2 = |\Psi_s|^2 |\Psi_d|^2 \frac{4\mathcal{V}_s^2 \mathcal{V}_d^2}{\pi^4 L^2} \left| \sum_{i=1}^3 V_{\alpha i}^* V_{\beta i} \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma_i} e^{-i\lambda_i(y_d^0 - x_s^0) + iLs_i(\lambda_i) - D_i(\lambda_i) - C_i(\lambda_i, x_s, y_d)} \mathcal{M}_i \right|^2 \quad (6.56)$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Чтобы связать квадрат амплитуды с экспериментальным наблюдением нужно перейти к макроскопическим переменным. Для этого, множитель $\mathcal{V}_s \mathcal{V}_d$ запишем в виде $dx_s^0 d\mathbf{x}_s dy_s^0 d\mathbf{y}_s$, квадрат функции $|\psi_{\mathbf{k}_i}(\mathbf{x}_s, x_s^0)|^2$ можно интерпретировать как плотность вероятности найти частицу сорта i в точке (x_s^0, \mathbf{x}_s) со значением импульса \mathbf{k}_i (нормировка (6.24) удовлетворяет такой интерпретации). Согласно методам статистической физики, положим:

$$\begin{aligned} |\psi_{\mathbf{k}_i}(\mathbf{x}_s, x_s^0)|^2 &= [d\mathbf{k}_i/(2\pi)^3] f(\mathbf{k}_i, \mathbf{x}_s, x_s^0) && \text{для всех входящих частиц} \\ |\psi_{\mathbf{k}_i}(\mathbf{x}_s, x_s^0)|^2 &= [d\mathbf{k}_i/(2\pi)^3] && \text{для всех исходящих частиц,} \end{aligned} \quad (6.57)$$

где $f(\mathbf{k}_i, \mathbf{x}_s, x_s^0)$ - это плотность числа частиц в фазовом пространстве. Нейтрино родилось в источнике объёмом $d\mathbf{x}_s$ в течение времени dx_s^0 в процессе взаимодействия $[d\mathbf{k}_i/(2\pi)^3] f(\mathbf{k}_i, \mathbf{x}_s, x_s^0)$ начальных частиц, в результате чего, кроме нейтрино родилось ещё $[d\mathbf{k}_{i'}/(2\pi)^3]$ новых частиц. Ожидаемое число событий взаимодействия нейтрино в объёме детектора $d\mathbf{y}_d$ за время наблюдения dy_d^0 с числом частиц в детекторе $[d\mathbf{p}_j/(2\pi)^3] f(\mathbf{p}_j, \mathbf{y}_d, y_d^0)$, с числом родившихся частиц в детекторе $\prod_{j'} [d\mathbf{p}_{j'}/(2\pi)^3]$ равно:

$$\begin{aligned} dN &= d\mathbf{x}_s dx_s^0 d\mathbf{y}_d dy_d^0 \prod_i \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_i}} f(\mathbf{k}_i, \mathbf{x}_s, x_s^0) \prod_{i'} \frac{d\mathbf{k}_{i'}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_{i'}}} \\ &\times \frac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_j}} f(\mathbf{p}_j, \mathbf{y}_d, y_d^0) \prod_{j'} \frac{d\mathbf{p}_{j'}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_{j'}}} \\ &\times \frac{4\mathcal{V}_s \mathcal{V}_d}{\pi^4 L^2} \sum_{\text{spins}} \left| \sum_{i=1}^3 V_{\alpha i}^* V_{\beta i} \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma_i} e^{-i\lambda_i(y_d^0 - x_s^0) + iLs_i(\lambda_i) - D_i(\lambda_i) - C_i(\lambda_i, x_s, y_d)} \mathcal{M}_i \right|^2 \end{aligned} \quad (6.58)$$

Общая формула (6.58) автоматически ``знает``, что нейтрино, испущенные в слишком разные макроскопические времена не будут интерферировать между собой. Многие современные эксперименты регистрируют время взаимодействия нейтрино, поэтому будет не правильным проинтегрировать по всем временам детектирования y_d^0 . В то же время, для большинства сегодняшних экспериментов² можно усреднить по времени испускания нейтрино x_s^0 . Рассмотрим отдельно интерференционный член:

$$\begin{aligned} &\sum_{\text{spins}} \left| \sum_{i=1}^3 V_{\alpha i}^* V_{\beta i} \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma_i} e^{-i\lambda_i(y_d^0 - x_s^0) + iLs_i(\lambda_i) - D_i(\lambda_i) - C_i(\lambda_i, x_s, y_d)} \mathcal{M}_i \right|^2 \\ &= \sum_{\text{spins}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 V_{\alpha i}^* V_{\beta i} V_{\alpha j} V_{\beta j}^* e^{-i(\lambda_i - \lambda_j)(y_d^0 - x_s^0) + iL(s_i(\lambda_i) - s_j(\lambda_j)) - (C_i(\lambda_i, x_s, y_d) + C_j(\lambda_j, x_s, y_d))} \\ &\quad \times e^{-(D_i(\lambda_i) + D_j(\lambda_j))} \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^* \end{aligned} \quad (6.59)$$

²кроме тех, в которых время наблюдения четко привязано к времени рождения нейтрино, например, в ускорительных экспериментах

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Интегрирование по dx_s^0 выделяет область интегрирования $((x_s^0)_{ij} - \delta x_s^0, (x_s^0)_{ij} + \delta x_s^0)$, в которой насыщается интеграл. За пределами этой области подынтегральная функция экспоненциально стремится к нулю из-за множителя $e^{-(C_i(\lambda_i, x_s, y_d) + C_j(\lambda_j, x_s, y_d))}$. Величина $(x_s^0)_{ij}$ определяется исходя из минимума $(C_i(\lambda_i, x_s, y_d) + C_j(\lambda_j, x_s, y_d))$, в то время как $\delta x_s^0 \approx \sigma_i$ (смотрите (6.54)). Будем искать $(x_s^0)_{ij}$ в виде:

$$(x_s^0)_{ij} = y_d^0 - \frac{L}{v_{ij}}, \quad (6.60)$$

где v_{ij} есть некая средняя скорость движения нейтрино. Найдем её минимизируя выражение:

$$C_i(\lambda_i, x_s, y_d) + C_j(\lambda_j, x_s, y_d) = \frac{L^2}{\sigma_i^2} \left(\frac{1}{v_{ij}} - \frac{1}{v_i} \right) + \frac{L^2}{\sigma_j^2} \left(\frac{1}{v_{ij}} - \frac{1}{v_j} \right).$$

Находим, что

$$v_{ij} = \frac{v_i v_j (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}{v_i \sigma_i^2 + v_j \sigma_j^2}. \quad (6.61)$$

Заметим, что если $\sigma_i \sim \sigma_j$, то

$$\frac{1}{v_{ij}} = \frac{1}{v_i} + \frac{1}{v_j},$$

что соответствует скорости нейтрино, средней по времени испускания.

Разложим $(C_i(\lambda_i, x_s, y_d) + C_j(\lambda_j, x_s, y_d))$ до второго порядка вокруг минимума $(x_s^0)_{ij}$, $y_d^0 - x_s^0$ до первого порядка:

$$\begin{aligned} & \sqrt{C_i(\lambda_i, x_s, y_d) + C_j(\lambda_j, x_s, y_d)} \\ &= (C_i(\lambda_i, x_s, y_d) + C_j(\lambda_j, x_s, y_d))|_{x_s^0=(x_s^0)_{ij}} + \frac{1}{2} \frac{d^2(C_i + C_j)}{dx_s^0{}^2} (x_s^0 - (x_s^0)_{ij})^2 \\ &= \frac{L^2}{4} \frac{(v_i - v_j)^2}{v_i^2 v_j^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} + \frac{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}{4\sigma_i^2 \sigma_j^2} (x_s^0 - (x_s^0)_{ij})^2, \end{aligned} \quad (6.62)$$

$$\sqrt{-i(\lambda_i - \lambda_j)(y_d^0 - x_s^0)} = -i(\lambda_i - \lambda_j) \frac{L}{v_{ij}} + i(\lambda_i - \lambda_j)(x_s^0 - (x_s^0)_{ij}) \quad (6.63)$$

Теперь мы можем записать показатель экспоненты в (6.59), зависящий от x_s^0 в виде:

$$\begin{aligned} & -i(\lambda_i - \lambda_j)(y_d^0 - x_s^0) - (C_i(\lambda_i, x_s, y_d) + C_j(\lambda_j, x_s, y_d)) = \\ &= -i(\lambda_i - \lambda_j) \frac{L}{v_{ij}} + i(\lambda_i - \lambda_j)(x_s^0 - (x_s^0)_{ij}) - \frac{L^2}{4} \frac{(v_i - v_j)^2}{v_i^2 v_j^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} - \frac{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}{4\sigma_i^2 \sigma_j^2} (x_s^0 - (x_s^0)_{ij})^2 \\ &= -i(\lambda_i - \lambda_j) \frac{L}{v_{ij}} - \frac{L^2}{4} \frac{(v_i - v_j)^2}{v_i^2 v_j^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} - \frac{(\lambda_i - \lambda_j)^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \\ & \quad - \frac{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}{4\sigma_i^2 \sigma_j^2} \left(x_s^0 - (x_s^0)_{ij} - 2i(\lambda_i - \lambda_j) \frac{\sigma_i^2 \sigma_j^2}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.64)$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Теперь интеграл по dx_s^0 в (6.58), будучи гауссовым интегралом, легко снимается:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s^0 e^{-i(\lambda_i - \lambda_j)(y_d^0 - x_s^0) - (C_i(\lambda_i, x_s, y_d) + C_j(\lambda_j, x_s, y_d))} = \\ = 2\sqrt{\frac{\pi}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}} \sigma_i \sigma_j \exp \left[-i(\lambda_i - \lambda_j) \frac{L}{v_{ij}} - \frac{L^2}{4} \frac{(v_i - v_j)^2}{v_i^2 v_j^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} - \frac{(\lambda_i - \lambda_j)^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \right] \end{aligned} \quad (6.65)$$

Дальнейшее упрощение возможно в релятивистском пределе. В первом порядке по ($m_i = 0$)

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda + \delta\lambda_i, \\ s_i(\lambda_i) &= \lambda + \delta\lambda_i - \frac{m_i^2}{2\lambda}, \\ v_i &= 1 - \frac{m_i^2}{2\lambda^2}, \\ \sigma_i^2 &= \sigma^2 + \delta\sigma_i^2, \\ v_{ij} &= 1 - \frac{(m_i^2 + m_j^2)}{4\lambda^2}, \end{aligned} \quad (6.66)$$

Показатель экспоненты в релятивистском пределе в уравнении (6.58) с учётом формул (6.65), (6.66) есть:

$$\begin{aligned} \left[-i(\lambda_i - \lambda_j) \frac{L}{v_{ij}} - \frac{L^2}{4} \frac{(v_i - v_j)^2}{v_i^2 v_j^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} - \frac{(\lambda_i - \lambda_j)^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} + iL(s_i(\lambda_i) - s_i(\lambda_j)) \right] = \\ = -\frac{m_i^2 - m_j^2}{32\sigma^2\lambda^4} L^2 - i\frac{m_i^2 - m_j^2}{2\lambda} L \end{aligned} \quad (6.67)$$

Произведение $\mathcal{M}_i \mathcal{M}_i^*$ в (6.58) в используемом нами приближении не зависит более от индексов i, j и может быть представлено в таком виде (аналогично для случая анти-нейтрино):

$$\begin{aligned} \sum_{s_\alpha s_\beta \dots s} |\mathcal{M}_{(\nu)}|^2 &= \sum_{s_\alpha s_\beta \dots s} \frac{G_F^4}{4} |J_s^\mu J_d^\nu \bar{\ell}_\beta \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \hat{q} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \ell_\alpha|^2, \quad \text{с учётом } q^\mu = (\lambda, s(\lambda)\mathbf{L}/L), \\ &= \sum_{s_\alpha s_\beta s_\nu} \frac{G_F^2}{2} |J_s^\mu \bar{\ell}_\beta \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \nu|^2 \frac{G_F^2}{2} |J_d^\nu \bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \ell_\alpha|^2, \quad \text{используя } \hat{q} = \sum_{s_\nu} \nu \bar{\nu} \\ &= \left[\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_S|^2 \right] \left[\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_D|^2 \right] \end{aligned} \quad (6.68)$$

Замечательным следствием релятивистского приближения является факторизация квадрата матричного элемента на произведение квадратов матричных элементов

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

в точках рождения и детектирования нейтрино. Таким образом, приходим к следующей формуле для числа событий:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dy_d^0} \equiv d\Gamma = & \int d\mathbf{x}_s \int d\mathbf{y}_d \prod_i^{I_S} \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_i}} f(\mathbf{k}_i, \mathbf{x}_s, x_s^0) \prod_{i'}^{F_S} \frac{d\mathbf{k}_{i'}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_{i'}}} \\
 & \times \frac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_j}} f(\mathbf{p}_j, \mathbf{y}_d, y_d^0) \prod_{j'}^{F_D} \frac{d\mathbf{p}_{j'}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_{j'}}} \\
 & \times \frac{8\mathcal{V}_S \mathcal{V}_D}{\pi^3 L^2} \left[\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_S|^2 \right] \left[\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_D|^2 \right] \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma^2}} e^{-2D(\lambda)} \\
 & \times \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 V_{\alpha i}^* V_{\beta i} V_{\alpha j} V_{\beta j}^* \exp \left[-i \frac{m_i^2 - m_j^2}{2\lambda} L - \frac{(m_i^2 - m_j^2)^2}{32\sigma^2 \lambda^4} L^2 \right]
 \end{aligned} \quad (6.69)$$

Заметим, что фактор $\sqrt{\frac{\pi}{2\sigma^2}} e^{-2D(\lambda)}$ можно представить в виде интеграла по энергии нейтрино:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\sigma^2}} e^{-2D(\lambda)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_q e^{-2D(\lambda)} e^{-2\sigma^2(E_q - \lambda)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_q e^{-2D(E_q)}, \quad (6.70)$$

В свою очередь, фактор $e^{-2D(E_q)}$, как уже отмечалось, экспоненциально мал для $k_s - p_s - q \neq 0$ и $k_d - p_d + q \neq 0$, что соответствует закону сохранения энергии-импульса. Поэтому, мы можем положить фактор $e^{-2D(E)}$ пропорциональным произведению $C_s C_d \delta^4(k_s - p_s - q) \delta^4(k_d - p_d + q)$. Коэффициенты пропорциональности, с учётом (6.42), найдем проинтегрировав левую и правую части равенств :

$$C_s = C_s \int dq \delta^4(k_s - p_s - q) = \int dE_q e^{-2D_s(E_q)} = \frac{\pi^2}{\sqrt{W_s^{-1}}} = \frac{\pi^2}{\mathcal{V}_s} \quad (6.71)$$

$$C_d = C_d \int dq \delta^4(k_s - p_s + q) = \int dE_q e^{-2D_d(E_q)} = \frac{\pi^2}{\sqrt{W_d^{-1}}} = \frac{\pi^2}{\mathcal{V}_d}. \quad (6.72)$$

Таким образом, получим:

$$e^{-2D(E_q)} = \frac{\pi^8 \delta^4(k_s - p_s - q) \delta^4(k_d - p_d + q)}{\mathcal{V}_s \mathcal{V}_d}. \quad (6.73)$$

Наконец, макроскопическая скорость счёта в детекторе в единицу времени y_d^0 может быть выражено в виде:

$$\begin{aligned}
 d\Gamma(y_d^0) = & \int d\mathbf{x}_s \int d\mathbf{y}_d \int \left[\prod_i^{I_S} \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \right] \left[f(\mathbf{k}_i, \mathbf{x}_s, x_s^0) \Big|_{x_s^0=y_d^0-|\mathbf{y}_d-\mathbf{x}_s|} \right] \\
 & \times \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{p}, \mathbf{y}_d, y_d^0) d\Gamma(\{\mathbf{k}\}, \{\mathbf{p}\}, \mathbf{x}_s, \mathbf{y}_d),
 \end{aligned} \quad (6.74)$$

где одночастичная скорость счёта (ширина) есть:

$$d\Gamma(\{\mathbf{k}\}, \{\mathbf{p}\}, \mathbf{x}_s, \mathbf{y}_d) = \int dE_q \left[\frac{d\Gamma(\{\mathbf{k}\}, E_q)}{L^2 d\Omega_q dE_q} \right] [P_{\text{mix}}(E_q, \mathbf{x}_s, \mathbf{y}_d)] [d\sigma(\{\mathbf{p}\}, E_q)]. \quad (6.75)$$

В (6.75),

$$\begin{aligned} dE_q \left[\frac{d\Gamma(\{\mathbf{k}\}, E_q)}{L^2 d\Omega_q dE_q} \right] &= \frac{1}{L^2} \frac{E_q^2 dE_q}{(2\pi)^{32} E_q} \left[\prod_i^{I_s} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right] \left[\prod_{i'}^{F_s} \int \frac{d\mathbf{k}_{i'}}{(2\pi)^{32} E_{\mathbf{k}_{i'}}} \right] \\ &\times \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_s(\{\mathbf{k}\}, E_q)|^2 (2\pi)^4 \delta^4(-k_s + q) \end{aligned} \quad (6.76)$$

это поток нейтрино с энергией E_q в точке \mathbf{y}_d из-за взаимодействия в точке \mathbf{x}_s , как если бы было посчитано стандартным образом с плоскими волнами.

$$d\sigma(\{\mathbf{p}\}, E_q) = \frac{1}{2E_q 2E_p} \left[\prod_{j'}^{F_D} \frac{d\mathbf{p}_{j'}}{(2\pi)^{32} E_{\mathbf{p}_{j'}}} \right] \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_D(\{\mathbf{p}\}, E_q)|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_d - q) \quad (6.77)$$

-- это сечение взаимодействия безмассового нейтрино в детекторе.

$$P_{\text{mix}}(E_q, \mathbf{x}_s, \mathbf{y}_d) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 V_{\alpha i}^* V_{\beta i} V_{\alpha j} V_{\beta j}^* \exp \left[-i \frac{(m_i^2 - m_j^2)L}{2E_q} - \frac{(m_i^2 - m_j^2)^2 L^2}{32E_q^4 \sigma^2} \right] \quad (6.78)$$

-- это вероятность нейтринных ``осцилляций``.

Обсуждение

Повторим кратко путь вывода, сделанные предположения и полученные результаты.

- Обобщение амплитуды перехода. Мы начали с того, что обобщили амплитуду перехода введя размазку по энергии-импульсу частиц в источнике и в детекторе нейтрино (смотрите (6.20)). Обычно используемые в квантовой теории поля плоские волны не подходят для использования описания осцилляции нейтрино. От волновых пакетов, использованных нами при выводе окончательной формулы для числа событий, мы всегда можем совершить предельный переход к плоским волнам просто положив ``размазку`` равной нулю: $\sigma \rightarrow 0$. Как легко видеть из (6.78) все слагаемые с $i \neq j$ при $\sigma \rightarrow 0$ будут стремиться к нулю. Выживут только те слагаемые, где $i = j$. Тогда

$$P_{\text{mix}} = \sum_{i=1}^3 V_{\alpha i}^* V_{\beta i} \sum_{j=1}^3 V_{\alpha j} V_{\beta j}^* = \delta_{\alpha\beta},$$

что соответствует *отсутствию нейтринных осцилляций*.

- Квадрат амплитуды и макроскопическая скорость счёта Проделав ряд утомительных, но не сложных вычислений, мы получили квадрат амплитуды (6.56), который мы решили связать с макроскопической скоростью счёта. Полученная формула (6.58) весьма общая и содержит в себе информацию о времени и месте детектирования нейтрино, а также о времени и месте рождения нейтрино, автоматически ``знает`` о том, что нейтрино, испущенные ``слишком давно``, не могут интерферировать друг с другом и многое другое.
- Релятивистский предел и факторизация Дальнейшее упрощение и возможность факторизации квадрата амплитуды возможно в релятивистском пределе. В результате мы пришли к формуле (6.74), которая интуитивно понятна: это есть произведение потока нейтрино, родившегося в источнике, на вероятность осцилляций нейтрино, на сечение взаимодействия, проинтегрированное по объёмам источника и детектора.
- Вероятность осцилляций. Формула для вероятности осцилляций содержит в себе стандартный квантово-механический фактор $\exp\left[-i\frac{(m_i^2-m_j^2)L}{2E_q}\right]$, но кроме этого, новый фактор, подавляющий осцилляции на больших расстояниях $\exp\left[-\frac{(m_i^2-m_j^2)^2 L^2}{32E_q^4\sigma^2}\right]$. Происхождение этого фактора связано с тем, что частицы в источнике и детекторе *не обладают определенными энергией-импульсом*. Это является необходимым требованием для возможности когерентного сложения амплитуд с разными массами, однако это же явление приводит к обязательной потере когерентности на больших расстояниях. Фактор подавления можно записать как:

$$e^{-L^2/L_{coh}^2}, \quad L_{coh} = \sqrt{8}L_{osc}E_q\sigma, \quad L_{osc} = \frac{2E_q}{m_i^2 - m_j^2}$$

откуда легко увидеть, что максимальное число осцилляций, которое возможно без потери когерентности есть:

$$N_{max} = \frac{L}{L_{coh}} \approx \frac{E_\nu}{\Delta E_\nu},$$

где $\Delta E \sim 1/\sigma$ это неопределенность в энергии нейтрино из-за ``размазки`` волновых пакетов.

6.3.2 Осцилляции в веществе

Рассмотрим теперь в рамках использованного формализма в параграфе 6.3.1 случай распространения нейтрино через среду. Для простоты будем считать пока, что среда состоит из одних электронов, на которых нейтрино *упруго* рассеиваются, не изменяя своего импульса, за счёт заряженных и нейтральных токов. Используем

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

тоже определение амплитуды, что и в вакуумном случае (6.20), только будем иметь в виду, что часть множителей

$$\prod_{i=1}^{N_e} \frac{d\mathbf{k}'_i}{(2\pi)^3 [2E_{k'_i}]^{1/2}} \phi_i(k'_i, \mathbf{k}_i) \prod_{j=1}^{N_e} \frac{d\mathbf{p}'_j}{(2\pi)^3 [2E_{p'_j}]^{1/2}} \phi_j^*(p'_j, \mathbf{p}_j) \quad (6.79)$$

относится не только к частицам, участвующим в рождении и детектировании нейтрино, но и к электронам среды. Для удобства записи мы даже введём другое обозначение для функций $\phi_i(k'_i, \mathbf{k}_i)$, относящихся к электронам среды:

$$\phi_i(k'_i, \mathbf{k}_i) \equiv \Phi_i(k'_i, \mathbf{k}_i) \text{ для электронов среды}$$

Амплитуда

Аналогично определению \mathcal{S} матрицы в вакуумном случае (6.27), определим \mathcal{S} матрицу для осцилляций в веществе:

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} \left[e^{i \int [\mathcal{L}_s(x) + \mathcal{L}_m(x) + \mathcal{L}_d(x)] dx} \right], \quad (6.80)$$

где $\mathcal{L}_m(x)$ - это плотность лагранжиана, соответствующая взаимодействию нейтрино с электронами среды, а $\mathcal{L}_s(x)$ и $\mathcal{L}_d(x)$ определены также как и в вакуумном случае. Запишем амплитуду аналогично (6.30):

$$\begin{aligned} \langle f | \mathcal{S}(\{k', p'\}) - 1 | i \rangle &= i^2 \langle f | \int dx dy \mathcal{T} \left[\mathcal{L}_d(y) e^{i \int dz \mathcal{L}_m(z)} \mathcal{L}_s(x) \right] | i \rangle \\ &= - \sum_{i,j} \int dx dy V_{\alpha i}^* V_{\beta j} e^{-i(k_s - p_s)x - i(k_d - p_d)y} \overline{\mathcal{M}}'_d P_L \langle f | \mathcal{T} \left[\nu_j(y) e^{i \int dz \mathcal{L}_m(z)} \bar{\nu}_i(x) \right] | i \rangle P_R \mathcal{M}'_s \end{aligned} \quad (6.81)$$

где мы ввели обозначения:

$$P_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5), \quad \mathcal{M}'_s(\{k', p'\}) = \frac{2G_F}{\sqrt{2}} J_s^\mu \gamma_\mu \ell_\alpha, \quad \overline{\mathcal{M}}'_d(\{k', p'\}) = \frac{2G_F}{\sqrt{2}} J_d^\mu \bar{\ell}_\beta \gamma_\mu$$

Спиноры $\mathcal{M}'_s(\{k', p'\})$, $\overline{\mathcal{M}}'_d(\{k', p'\})$ зависят от своих наборов импульсов для входящих и выходящих частиц, k_s, p_s (k_d, p_d) - это, как и в вакуумном случае, суммы импульсов всех входящих и выходящих (кроме нейтрино) частиц в источнике (детекторе) нейтрино. Если предположить взаимодействие со средой бесконечно малым ($\mathcal{L}_m(z) \sim 0$), то формула (6.81) перейдет в формулу (6.30) для вакуумного случая. Заметим, что $\langle 0 | \mathcal{T} [\nu_j(y) \bar{\nu}_i(x)] | 0 \rangle = \delta_{ij} G_i(y - x)$ (пропагатор нейтрино с массой m_i в вакууме), так что одно суммирование по индексам i, j снимается и мы в точности получим (6.30). Это наводит нас на мысль о том, что выражение $\langle f | \mathcal{T} [\nu_j(y) e^{i \int dz \mathcal{L}_m(z)} \bar{\nu}_i(x)] | i \rangle$ является чем-то вроде пропагатора нейтрино в среде. Заметим при этом, что эта величина зависит от двух индексов i, j , а также не стоит забывать о волновых пакетах, определенных в (6.79), сопутствующим состояниям

$|i\rangle, |f\rangle$. Поэтому, введем величину:

$$G_{ij}(y-x) \equiv \prod_{i=1}^{N_e} \frac{d\mathbf{k}'_i \Phi_i(k'_i, \mathbf{k}_i)}{(2\pi)^3 [2E_{k'_i}]^{1/2}} \prod_{j=1}^{N_e} \frac{d\mathbf{p}'_j \Phi_j^*(p'_j, \mathbf{p}_j)}{(2\pi)^3 [2E_{p'_j}]^{1/2}} \langle f | T \left[\nu_j(y) e^{i \int dz \mathcal{L}_m(z)} \bar{\nu}_i(x) \right] | i \rangle, \quad (6.82)$$

и запишем амплитуду перехода в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & - \int \prod_l \frac{d\mathbf{k}'_l \phi_l(k'_l, \mathbf{k}_l)}{(2\pi)^3 [2E_{k'_l}]^{1/2}} \prod_k \frac{d\mathbf{p}'_k \phi_k^*(p'_k, \mathbf{p}_k)}{(2\pi)^3 [2E_{p'_k}]^{1/2}} \sum_{i,j} dx dy V_{\alpha i}^* V_{\beta j} e^{-i(k_s - p_s)x - i(k_d - p_d)y} \\ & \times \overline{\mathcal{M}}'_d P_L G_{ij}(y-x) P_R \mathcal{M}'_s \end{aligned} \quad (6.83)$$

Если бы влиянием вещества можно было пренебречь в (6.83), то мы бы положили $G_{ij}(y-x) = \delta_{ij} G_i(y-x)$ и дальше просто воспользовались бы результатами, полученными для случая распространения нейтрино в вакууме, рассмотренном в параграфе 6.3.1. Для того, чтобы учесть влияние среды на распространение нейтрино нам нужно явным образом *вычислить* чему равна величина $G_{ij}(y-x)$, и проделать тот же путь к числу событий аналогично вакуумному случаю.

Функция Грина

Лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_m(z)$ описывает обмен W^\pm и Z^0 бозонами нейтрино с электроном в четырехфермионном приближении:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m(z) = & \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{kl} V_{ek} V_{el}^* \bar{\nu}_l(z) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e(z) \cdot \bar{e}(z) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_k(z) + \\ & + \frac{G_F}{2\sqrt{2}} \sum_k \bar{\nu}_k(z) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_k(z) \cdot \bar{e}(z) \gamma^\mu (g_L^e (1 - \gamma_5) + g_R^e (1 + \gamma_5)) e(z), \end{aligned} \quad (6.84)$$

где $g_L^e = -\frac{1}{2} + \sin^2 \Theta_W$, $g_R^e = \sin^2 \Theta_W$

Приступим к вычислению $G_{ij}(y-x)$, определенной в (6.82). Начнём с рассмотрения величины:

$$\begin{aligned} & \langle f | T \left[\nu_j(y) e^{i \int dz \mathcal{L}_m(z)} \bar{\nu}_i(x) \right] | i \rangle \\ & = \langle f | T \left[\nu_j(y) \left(1 + i \int dz \mathcal{L}_m(z) + i^2 \int dz_1 dz_2 \mathcal{L}_m(z_1) \mathcal{L}_m(z_2) \cdots \right) \bar{\nu}_i(x) \right] | i \rangle \\ & = \langle f | i \rangle \langle 0 | T [\nu_j(y) \bar{\nu}_i(x)] | 0 \rangle + i \langle f | T \left[\nu_j(y) \int dz \mathcal{L}_m(z) \bar{\nu}_i(x) \right] | i \rangle + \\ & + i^2 \langle f | T \left[\nu_j(y) \int dz_1 dz_2 \mathcal{L}_m(z_1) \mathcal{L}_m(z_2) \bar{\nu}_i(x) \right] | i \rangle + \cdots \end{aligned} \quad (6.85)$$

Используя (6.82, 6.85), получим:

$$G_{ij}(y-x) = \int \frac{dq}{(2\pi)^4} e^{i(y-x)q} \left(iS_i + iS_j i\Omega_{ij} iS_i + \sum_k iS_j i\Omega_{jk} iS_k i\Omega_{ki} iS_i + \sum_k \sum_l iS_j i\Omega_{jk} iS_k i\Omega_{kl} iS_l i\Omega_{li} iS_i + \dots \right) \quad (6.86)$$

$$S_i = S_i(q) = \frac{1}{\hat{q} - m_i} = \frac{\hat{q} + m_i}{q^2 - m_i^2 + i\epsilon}$$

Или обозначив выражение в скобках iG_{ji} получим:

$$G_{ij}(y-x) = \int \frac{dq}{(2\pi)^4} e^{i(y-x)q} iG_{ji} \quad (6.87)$$

В (6.86) матрица Ω_{ij} складывается из обмена заряженным Ω_{ij}^{cc} и нейтральным Ω_{ij}^{nc} бозонами:

$$\Omega_{ij} = \Omega_{ij}^{cc} + \Omega_{ij}^{nc} \quad (6.88)$$

$$\Omega_{ij}^{cc} = -\sqrt{2}n_e G_F V_{ei} V_{ej}^* \hat{u} (1 - \gamma_5)$$

$$\Omega_{ij}^{nc} = \delta_{ij} \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e (1 - 4 \sin^2 \Theta_W) \hat{u} (1 - \gamma_5),$$

где $\hat{u} = \gamma_\mu u^\mu$, $u = \gamma_u(1, \mathbf{u})$ - это 4-вектор скорости среды, $\gamma_u = [1 - u^2]^{-1/2}$ - Лоренцевский фактор, \mathbf{u} - это трехмерная скорость движения среды, n_e - плотность числа электронов среды.

Если записать теперь амплитуду перехода в виде:

$$\mathcal{A} = - \int \prod_l \frac{d\mathbf{k}'_l}{(2\pi)^3 [2E_{k'_l}]^{1/2}} \phi_l(k'_l, \mathbf{k}_l) \prod_k \frac{d\mathbf{p}'_k}{(2\pi)^3 [2E_{p'_k}]^{1/2}} \phi_k^*(p'_k, \mathbf{p}_k) \sum_{i,j} dx dy \frac{dq}{(2\pi)^4} V_{\alpha i}^* V_{\beta j} e^{-i(k_s - p_s + q)x - i(k_d - p_d - q)y} \times \overline{\mathcal{M}}'_d P_L iG_{ji}(q) P_R \mathcal{M}'_s, \quad (6.89)$$

то сравнив полученную формулу с (6.34), можно придти к выводу о полной идентичности полученных формул, с заменой $\sum_i V_{\alpha i}^* V_{\beta i} S_i(q) \rightarrow \sum_{ij} V_{\alpha i}^* V_{\beta j} iG_{ji}$. Очевидно, что при отсутствии вещества ($\Omega_{ij} = 0$) мы получим вакуумный случай. Весь эффект присутствия вещества на пути нейтрино от источника к детектору закодирован в ``перенормированном пропагаторе`` G_{ij} . Однако, прежде чем вычислить чему равно G_{ij} , покажем как получить уравнение (6.86).

- Покажем, что:

$$\int \prod_l \frac{d\mathbf{k}'_l}{(2\pi)^3 [2E_{k'_l}]^{1/2}} \Phi_l(k'_l, \mathbf{k}_l) \prod_k \frac{d\mathbf{p}'_k}{(2\pi)^3 [2E_{p'_k}]^{1/2}} \Phi_k^*(p'_k, \mathbf{p}_k) \langle f|i \rangle \langle 0|T[\nu_j(y)\bar{\nu}_i(x)]|0 \rangle = \delta_{ij} G_i(y-x) \quad (6.90)$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Действительно, $\langle f|i\rangle \langle 0|\mathbf{T}[\nu_j(y)\bar{\nu}_i(x)]|0\rangle = \langle f|i\rangle \delta_{ij}G_i(y-x)$, учитывая, что одночастичные состояния нормированы как $\langle p|k\rangle = (2\pi)^3\sqrt{2E_p}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{k})$, получим $\langle f|i\rangle = \prod_l (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_l}\delta^3(\mathbf{p}_l-\mathbf{k}_l)$. Тогда:

$$\begin{aligned} & \int \prod_l \frac{d\mathbf{k}'_l}{(2\pi)^3[2E_{k'_l}]^{1/2}} \Phi_l(k'_l, \mathbf{k}_l) \prod_k \frac{d\mathbf{p}'_k}{(2\pi)^3[2E_{p'_k}]^{1/2}} \Phi_k^*(p'_k, \mathbf{p}_k) \langle 0|\mathbf{T}[\nu_j(y)\bar{\nu}_i(x)]|0\rangle \langle f|i\rangle \\ &= \prod_l \int \frac{d\mathbf{k}'_l}{(2\pi)^3} |\Phi_l(k'_l, \mathbf{k}_l)|^2 \delta_{ij}G_i(y-x) = \delta_{ij}G_i(y-x), \end{aligned} \quad (6.91)$$

что доказывает (6.90).

- Убедимся теперь в том, что:

$$\begin{aligned} & i \int \prod_l \frac{d\mathbf{k}'_l}{(2\pi)^3[2E_{k'_l}]^{1/2}} \Phi_l(k'_l, \mathbf{k}_l) \prod_k \frac{d\mathbf{p}'_k}{(2\pi)^3[2E_{p'_k}]^{1/2}} \Phi_k^*(p'_k, \mathbf{p}_k) \langle f|\mathbf{T}\left[\nu_j(y) \int dz \mathcal{L}_m(z)\bar{\nu}_i(x)\right]|i\rangle \\ &= \int \frac{dq}{(2\pi)^4} e^{iq(y-x)} iS_j(q) i[\Omega_{ij}^{cc} + \Omega_{ij}^{nc}] iS_i(q), \text{ где} \end{aligned} \quad (6.92)$$

$$\Omega_{ij}^{cc} = -\sqrt{2}G_F n_e V_{ei} V_{ej}^* \hat{u}(1-\gamma_5) \quad \Omega_{ij}^{nc} = \delta_{ij} \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e (1-4\sin^2\Theta_W) \hat{u}(1-\gamma_5)$$

Рассмотрим матричный элемент:

$$\begin{aligned} & i \langle f|\mathbf{T}\left[\nu_j(y) \int dz \mathcal{L}_m(z)\bar{\nu}_i(x)\right]|i\rangle \\ &= i \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ei} V_{ej}^* \int dz \langle f|\mathbf{T}[\nu_j(y)\bar{\nu}_j(z)\gamma^\mu (1-\gamma_5) e(z) \cdot \bar{e}(z)\gamma_\mu (1-\gamma_5) \nu_i(z)\bar{\nu}_i(x)]|i\rangle + \\ &+ i \frac{G_F}{2\sqrt{2}} \int dz \langle f|\mathbf{T}[\nu_i(y)\bar{\nu}_i(z)\gamma_\mu (1-\gamma_5) \nu_i(z) \cdot \\ &\quad \cdot \bar{e}(z)\gamma^\mu (g_L^e (1-\gamma_5) + g_R^e (1+\gamma_5)) e(z)\bar{\nu}_i(x)]|i\rangle \\ &= i \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ei} V_{ej}^* \sum_l \int dz e^{-i(k'_l-p'_l)z} G_j(y-z)\gamma^\mu (1-\gamma_5) e(k'_l) \cdot \bar{e}(p'_l)\gamma_\mu (1-\gamma_5) G_i(z-x) + \\ &+ i \frac{G_F}{2\sqrt{2}} \sum_l \int dz e^{-i(k'_l-p'_l)z} G_i(y-z)\gamma_\mu (1-\gamma_5) \cdot \\ &\quad \cdot \bar{e}(p'_l)\gamma^\mu (g_L^e (1-\gamma_5) + g_R^e (1+\gamma_5)) e(k'_l)G_i(z-x) \end{aligned} \quad (6.93)$$

Умножив последние две строчки (6.93) на фактор $\int \prod_l \frac{d\mathbf{k}'_l}{(2\pi)^3[2E_{k'_l}]^{1/2}} \Phi_l(k'_l, \mathbf{k}_l) \prod_k \frac{d\mathbf{p}'_k}{(2\pi)^3[2E_{p'_k}]^{1/2}} \Phi_k^*(p'_k, \mathbf{p}_k)$, снимем интегрирования по импульсам электронов также как в (6.35):

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\mathbf{k}'_l}{(2\pi)^3[2E_{k'_l}]^{1/2}} e^{-ik'_l z} e(k'_l) \approx \frac{e^{-ik_l(z-z_m)}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}_l}}} e(k_l) \psi_{k_l}(\mathbf{z}-\mathbf{z}_m-\mathbf{v}_{k_l}(z^0-z_m^0)) \\ & \int \frac{d\mathbf{p}'_l}{(2\pi)^3[2E_{p'_l}]^{1/2}} e^{ip'_l z} \bar{e}(p'_l) \approx \frac{e^{ip_l(z-z_m)}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_l}}} \bar{e}(p_l) \psi_{p_l}^*(\mathbf{z}-\mathbf{z}_m-\mathbf{v}_{k_l}(z^0-z_m^0)) \end{aligned}$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

Поскольку мы рассматриваем упругое взаимодействие нейтрино на электроне, т.е. $k_l = p_l$, то

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\mathbf{k}'_l}{(2\pi)^3} \frac{\Phi_l(k'_l, \mathbf{k}_l)}{[2E_{k'_l}]^{1/2}} \frac{d\mathbf{p}'_l}{(2\pi)^3} \frac{\Phi_l^*(p'_l, \mathbf{p}_l)}{[2E_{p'_l}]^{1/2}} e^{-i(k'_l - p'_l)z} \bar{e}(p'_l) e(k'_l) \\ & \approx \frac{|\psi_{k_l}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_m - \mathbf{v}_{k_l}(z^0 - z_m^0))|^2}{2E_{\mathbf{k}_l}} \bar{e}(k'_l) e(k'_l) \end{aligned} \quad (6.94)$$

Аналогично (6.57) положим пространственную плотность вероятности найти электрон с импульсом \mathbf{k}_l в точке (\mathbf{z}_m, z_m^0) равной $|\psi_{k_l}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_m - \mathbf{v}_{k_l}(z^0 - z_m^0))|^2 = V^{-1} [d\mathbf{k}_l / (2\pi)^3] f(\mathbf{k}_l, \mathbf{z}_m, z_m^0)$. Предполагая независимость в распределениях по импульсам для всех электронов, сумму \sum_l в (6.93) заменим просто числом электронов N_e . Вычислим анзац для вклада от обмена заряженным бозоном. Просуммировав по спину электронов, получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{spins} \int \prod_l \frac{d\mathbf{k}'_l}{(2\pi)^3} \frac{\Phi_l(k'_l, \mathbf{k}_l)}{[2E_{k'_l}]^{1/2}} \prod_k \frac{d\mathbf{p}'_k}{(2\pi)^3} \frac{\Phi_k^*(p'_k, \mathbf{p}_k)}{[2E_{p'_k}]^{1/2}} \sum_l e^{-i(k'_l - p'_l)z} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e(k'_l) \cdot \\ & \bar{e}(p'_l) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) = n_e \frac{d\mathbf{k}_l}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}_l, \mathbf{z}_m, z_m^0) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \frac{\hat{k}_l + m_e}{2E_{\mathbf{k}_l}} \gamma_\mu (1 - \gamma_5), \\ & \text{где } n_e = N_e/V \end{aligned} \quad (6.95)$$

Далее, проинтегрировав по импульсу электрона, получаем:

$$\begin{aligned} & \int n_e \frac{d\mathbf{k}_l}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}_l, \mathbf{z}_m, z_m^0) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \frac{\hat{k}_l + m_e}{2E_{\mathbf{k}_l}} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \\ & = -2n_e \int \frac{d\mathbf{k}_l}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}_l, \mathbf{z}_m, z_m^0) \frac{\hat{k}_l}{E_{\mathbf{k}_l}} (1 - \gamma_5) = -2n_e \hat{u} (1 - \gamma_5), \end{aligned} \quad (6.96)$$

где мы использовали $\gamma_\mu \hat{k} \gamma^\mu = -2\hat{k}$. \hat{u} - средняя 4 скорость среды. Наконец, получим для вклада от обмена заряженным бозоном, с учётом суммирования по спину и интегрирования по импульсу электронов среды:

$$\begin{aligned} & \sum_{spins} \int d\mathbf{k}_l \int \frac{d\mathbf{k}'_l}{(2\pi)^3} \frac{\Phi_l(k'_l, \mathbf{k}_l)}{[2E_{k'_l}]^{1/2}} \frac{d\mathbf{p}'_l}{(2\pi)^3} \frac{\Phi_l^*(p'_l, \mathbf{p}_l)}{[2E_{p'_l}]^{1/2}} i \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ei} V_{ej}^* \int dz \langle f | T [\nu_j(y) \bar{\nu}_j(z) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e(z) \cdot \\ & \bar{e}(z) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_i(z) \bar{\nu}_i(x)] | i \rangle = \int dz G_j(y - z) \left(-i\sqrt{2} G_F n_e V_{ei} V_{ej}^* \hat{u} (1 - \gamma_5) \right) G_i(z - x) \\ & = \int dz \int \frac{dq}{(2\pi)^4} e^{iq(y-z)} i S_j(q) \left(-i\sqrt{2} G_F n_e V_{ei} V_{ej}^* \hat{u} (1 - \gamma_5) \right) \int \frac{dq'}{(2\pi)^4} e^{iq'(z-x)} i S_i(q') \\ & = \int \frac{dq}{(2\pi)^4} e^{iq(y-x)} i S_j(q) i \Omega_{ij}^{cc} i S_i(q), \text{ где } \Omega_{ij}^{cc} = -\sqrt{2} G_F n_e V_{ei} V_{ej}^* \hat{u} (1 - \gamma_5) \end{aligned} \quad (6.97)$$

Вклад от обмена нейтральным бозоном вычисляется аналогично. Заметим, что

$$\begin{aligned}
 & \sum_{spins} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \bar{e}(p) \gamma^\mu (g_L^e (1 - \gamma_5) + g_R^e (1 + \gamma_5)) e(p) \\
 &= \sum_{spins} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) Sp [e(p) \bar{e}(p) \gamma^\mu (g_L^e (1 - \gamma_5) + g_R^e (1 + \gamma_5))] \\
 &= 4(g_L^e + g_R^e) \hat{p} (1 - \gamma_5),
 \end{aligned} \tag{6.98}$$

что приводит к:

$$\Omega_{ij}^{nc} = \delta_{ij} \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e (g_L^e + g_R^e) \hat{u} (1 - \gamma_5) = \delta_{ij} \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e (1 - 4 \sin^2 \Theta_W) \hat{u} (1 - \gamma_5)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{spins} \int d\mathbf{k}_l \int \frac{d\mathbf{k}'_l \Phi_l(k'_l, \mathbf{k}_l)}{(2\pi)^3 [2E_{k'_l}]^{1/2}} \frac{d\mathbf{p}'_l \Phi_l^*(p'_l, \mathbf{p}_l)}{(2\pi)^3 [2E_{p'_l}]^{1/2}} i \frac{G_F}{2\sqrt{2}} \int dz \langle f | T [\nu_i(y) \bar{\nu}_i(z) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_i(z) \cdot \\
 & \cdot \bar{e}(z) \gamma^\mu (g_L^e (1 - \gamma_5) + g_R^e (1 + \gamma_5)) e(z) \bar{\nu}_i(x)] | i \rangle = \int \frac{dq}{(2\pi)^4} e^{iq(y-x)} i S_j(q) i \Omega_{ij}^{nc} i S_i(q),
 \end{aligned} \tag{6.99}$$

$$\text{где } \Omega_{ij}^{nc} = \delta_{ij} \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e (1 - 4 \sin^2 \Theta_W) \hat{u} (1 - \gamma_5)$$

Сложив (6.97) и (6.99), получим (6.92).

- Каждый следующий член ряда (6.86) может быть получен, исходя из аналогичных вычислений.

Ещё один вывод функции Грина

Для полноты картины приведём ещё один вывод формулы для функции Грина, используя формализм квантовой теории для твердого тела, а также правило Котковского. Уравнение (6.86) по своей форме очень напоминает уравнение на собственную энергию, хорошо знакомое теоретикам, работающими с перенормировками. Разница заключается только в том, что пропагатор нейтрино ``одевается`` не счёт радиационных поправок, а за счёт взаимодействия с веществом. Поскольку, однако, мы рассматриваем упругое взаимодействие нейтрино с веществом, не изменяющее импульс нейтрино, то аналогия с собственной энергией становится особенно прозрачной. На рис.6.2 приведены диаграммы Фейнмана, относящиеся к взаимодействию нейтрино с электроном за счёт обмена W^+ и Z^0 бозонами.

Если оставить нейтринные концы диаграмм на рис.6.2 нетронутыми, и вычислить только внутреннюю часть этих диаграмм, то оказывается, что это эквивалентно тому, чтобы вычислить петлевые диаграммы, в которых импульс лептона и бозона

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

страница 109/130

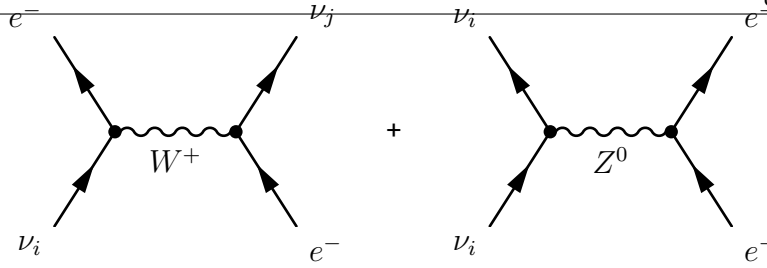


Figure 6.2: Диаграммы Фейнмана, относящиеся к взаимодействию нейтрино с электроном.

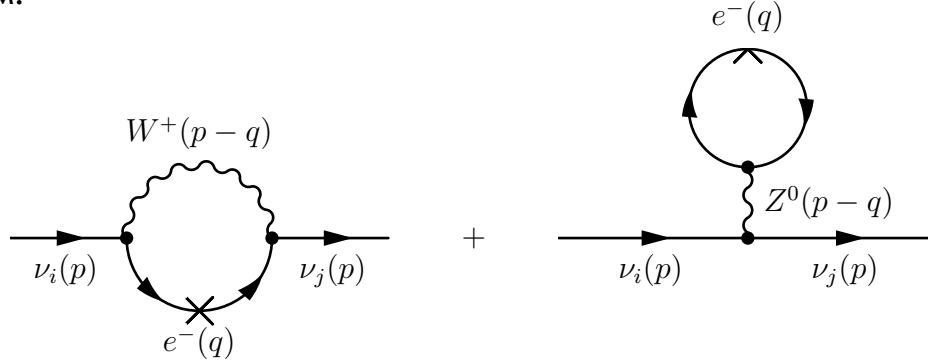


Figure 6.3: Петлевые диаграммы Фейнмана для собственной энергии нейтрино.

пробегают все допустимые значения. Это называется правилом Котковского. Соответствующие диаграммы приведены на рис. 6.3

Рассмотрим сначала диаграмму с обменом W^+ бозоном. Петля равна:

$$i\Omega_{ij}^{cc} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{igV_{ei}}{2\sqrt{2}} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) iS_e(q) \frac{igV_{ej}^*}{2\sqrt{2}} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p-q)^2 - M_W^2 + i\epsilon}$$

Пропагатор электрона $S_e(q)$ в среде меняется следующим образом:

$$iS_e(q) = i(\hat{q} + m_e) \left[\frac{1}{q^2 - m_e^2 + i\epsilon} + 2\pi i \delta(q^2 - m_e^2) f(q, T) \right], \quad (6.100)$$

где $f(q, T)$ - функция распределения электронов в среде при температуре T . Мы не будем рассматривать часть пропагатора электрона со стандартной формой $(\hat{q} + m_e)/(q^2 - m_e^2 + i\epsilon)$, поскольку эта часть приводит к перенормировке массы электрона, что не является для нас интересным в данном случае. Нас же будет интересовать часть пропагатора, в которой закодирован эффект среды. Учтём, что

$$\delta(q^2 - m_e^2) = \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0} \delta^4(k - q)$$

Тогда,

$$\begin{aligned}
 i\Omega_{ij}^{cc} &= - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \frac{igV_{ei}}{2\sqrt{2}} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \hat{q} \delta(q^2 - m_e^2) f(q, T) \frac{igV_{ej}^*}{2\sqrt{2}} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p-q)^2 - M_W^2 + i\epsilon} \\
 &= -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ei} V_{ej}^* \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \hat{q} \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0} \delta^4(k-q) f(k, T) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \frac{M_W^2}{(p-q)^2 - M_W^2 + i\epsilon} \\
 &= 2i \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ei} V_{ej}^* \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\hat{k}}{k_0} f(k, T) (1 - \gamma_5) = -i\sqrt{2} G_F n_e V_{ei} V_{ej}^* \hat{u} (1 - \gamma_5), \tag{6.101}
 \end{aligned}$$

$$\text{где } n_e \hat{u} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\hat{k}}{k_0} f(k, T)$$

Аналогично, обмен нейтральным бозоном даёт формулу:

$$\begin{aligned}
 i\Omega_{ij}^{nc} &= -\delta_{ij} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \frac{ig}{2 \cos \Theta_W} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \text{Sp} \left[(\hat{q} + m_e) \frac{ig}{2 \cos \Theta_W} \gamma_\nu \right] \left(-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \Theta_W \right) \times \\
 &\quad \times \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p-q)^2 - M_Z^2 + i\epsilon} \delta(q^2 - m_e^2) f(q, T) \\
 &= i\delta_{ij} \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\hat{k}}{k_0} f(k, T) (1 - \gamma_5) (-1 + 4 \sin^2 \Theta_W) \\
 &= i\delta_{ij} \frac{G_F (-1 + 4 \sin^2 \Theta_W)}{\sqrt{2}} n_e \hat{u} (1 - \gamma_5) \tag{6.102}
 \end{aligned}$$

6.3.3 Уравнение и полюса функции Грина

Уравнение на функцию Грина G_{ij} записано в виде ряда (см. (6.86)):

$$\begin{aligned}
 iG_{ji} &= iS_i \delta_{ij} + iS_j i\Omega_{ji} iS_i + iS_j \sum_k i\Omega_{jk} iS_k i\Omega_{ki} iS_i \\
 &\quad + iS_j \sum_k i\Omega_{jk} iS_k \sum_l i\Omega_{kl} iS_l i\Omega_{li} iS_j + \dots
 \end{aligned}$$

Из этого уравнение следует, что:

$$\begin{aligned}
 iS_j \sum_k i\Omega_{jk} iG_{ki} &= iS_j \sum_k i\Omega_{jk} \left(iS_k \delta_{ki} + iS_k i\Omega_{ki} iS_i + iS_k \sum_l i\Omega_{kl} iS_l i\Omega_{li} iS_i + \dots \right) \\
 &= iS_j i\Omega_{ji} iS_i + iS_j \sum_k i\Omega_{jk} iS_k i\Omega_{ki} iS_i + iS_j \sum_k i\Omega_{jk} iS_k \sum_l i\Omega_{kl} iS_l i\Omega_{li} iS_i + \dots \\
 &= iG_{ji} - iS_i \delta_{ij}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что $G_{ij}(q)$ удовлетворяет уравнению типа *уравнение Дайсона*

$$\sum_k (\delta_{jk} - iS_j i\Omega_{jk}) iG_{ki} = iS_j \delta_{ij}$$

что эквивалентно:

$$\sum_k [(\hat{q} - m_j) \delta_{jk} + \Omega_{jk}] G_{ki} = \delta_{ij}.$$

Последнее уравнение можно переписать в компактной матричной форме:

$$(\hat{q} - \mathbf{m} + \Omega) \mathbf{G} = 1, \quad (6.103)$$

где

$$\mathbf{G} = ||G_{ij}||, \quad \mathbf{W} = ||\Omega_{ij}||, \quad \text{и} \quad \mathbf{m} = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_N).$$

Заметим, что \hat{q} - это матрица 4×4 в Лоренцевском пространстве, в то время как \mathbf{m} - матрица $N \times N$ в пространстве состояний нейтрино. Поскольку матрица Ω содержит в себе произведение матриц $N \times N$ и матриц 4×4 , то разумно отфакторизовать эти пространства и записать $\Omega = 2\hat{u}P_L \mathbf{W}$, где \mathbf{W} - это энергия взаимодействия нейтрино с веществом в системе покоя среды:

$$W_{ji} = W_{ji}^{cc} + W_{ji}^{nc} = -\sqrt{2}G_F n_e V_{ei} V_{ej}^* + \delta_{ij} \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e (1 - 4 \sin^2 \Theta_W),$$

Тогда (6.103) запишется в виде:

$$(\hat{q} - \mathbf{m} + 2\hat{u}P_L \mathbf{W}) \mathbf{G} = 1. \quad (6.104)$$

Решением уравнения (6.104) теперь и займёмся. Формальное решение (6.104):

$$\mathbf{G} = (\hat{q} - \mathbf{m} + 2\hat{u}P_L \mathbf{W})^{-1},$$

или

$$(\hat{q} - \mathbf{m} + 2\hat{u}P_L \mathbf{W}) = \mathbf{G}^{-1}$$

Заметим, что

$$(\hat{q} - \mathbf{m} + 2\hat{u}P_L \mathbf{W})(\hat{q} + \mathbf{m}) = q^2 - m^2 + 2\hat{u}P_L \mathbf{W}(\hat{q} + \mathbf{m}) = \mathbf{G}^{-1}(\hat{q} + \mathbf{m})$$

Для удобства введём матрицу:

$$\mathbf{A} = q^2 - m^2 + 2\hat{u}P_L \mathbf{W}(\hat{q} + \mathbf{m}). \quad (6.105)$$

тогда

$$\mathbf{G} = (\hat{q} + \mathbf{m}) \mathbf{A}^{-1}. \quad (6.106)$$

Чтобы узнать чему равно \mathbf{A}^{-1} нам нужно попытаться привести матрицу \mathbf{A} к треугольной форме. Для этого заметим, что

$$2\hat{u}P_L = \gamma_u \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{u}\sigma \\ \mathbf{u}\sigma & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \gamma_u (1 + \mathbf{u}\sigma) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Далее

$$\begin{aligned}
 2\hat{u}P_L(\hat{q} + m) &= \gamma_u(1 + u\sigma) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 + m & -q\sigma \\ q\sigma & -q_0 + m \end{pmatrix} \\
 &= \gamma_u(1 + u\sigma) \begin{pmatrix} q_0 + m - q\sigma & (q_0 - m) - q\sigma \\ (q_0 + m) - q\sigma & q_0 - m - q\sigma \end{pmatrix} \\
 &= 2\gamma_u(1 + u\sigma) u_+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & q_0 - q\sigma \end{pmatrix} u_- \\
 &= 2\gamma_u(1 + u\sigma) u_- \begin{pmatrix} q_0 - q\sigma & -m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u_+,
 \end{aligned}$$

где

$$u_{\pm} = \frac{1 \pm \gamma_0 \gamma_5}{\sqrt{2}}, \quad u_{\pm} u_{\mp} = 1, \quad u_{\pm}^2 = \pm \gamma_0 \gamma_5.$$

Таким образом,

$$\Lambda = u_- \begin{pmatrix} q^2 - m^2 + 2(1 + u\sigma)(q_0 - q\sigma)\gamma_u W & -2(1 + u\sigma)\gamma_u W m \\ 0 & q^2 - m^2 \end{pmatrix} u_+. \quad (6.107)$$

Λ матрица, записанная в виде (6.107), имеет почти треугольную форму. Если бы нам удалось диагонализировать (или привести к треугольной форме) матрицу $(1 + u\sigma)(q_0 - q\sigma)$, то тогда Λ приобрела бы требуемый треугольный вид. Это можно сделать следующим образом. Определим вектора:

$$v = \frac{q}{q_0} \quad \text{и} \quad V = \frac{v - u - i(v \times u)}{1 - uv} \quad (6.108)$$

и запишем:

$$(1 + u\sigma)(q_0 - q\sigma) = q_0(1 - uv)(1 - V\sigma). \quad (6.109)$$

Обратим внимание, что вещественная и мнимая части вектора V ортогональны друг другу:

$$\text{Re} V \cdot \text{Im} V \propto (v - u) \cdot (u \times v) = 0,$$

что позволяет неэрмитову матрицу (6.109) диагонализировать простым преобразованием:

$$R(v)(V\sigma)R(v) = V_R\sigma_3, \quad (6.110)$$

в котором

$$R(v) = \frac{V\sigma + V_R\sigma_3}{\varrho} = \frac{1}{\varrho} \begin{pmatrix} V_R + V_3 & V_1 - iV_2 \\ V_1 + iV_2 & -V_R - V_3 \end{pmatrix}, \quad R^2(v) = 1, \quad (6.111)$$

$$V_R = \sqrt{V^2} = \sqrt{(\text{Re} V)^2 - (\text{Im} V)^2} = \frac{\sqrt{|v - u|^2 - |u \times v|^2}}{|1 - uv|} = \sqrt{1 - \frac{(1 - u^2)(1 - v^2)}{(1 - uv)^2}}, \quad (6.112)$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

и нормировочный фактор ϱ определяется из условия $|R(v)| = -1$:

$$\varrho = \sqrt{-|\mathbf{V}\boldsymbol{\sigma} + V_R\sigma_3|} = \sqrt{2V_R(V_R + V_{\kappa 3})}. \quad (6.113)$$

Теперь мы можем вычислить детерминант матрицы Λ как произведение детерминантов её диагональных блоков:

$$|\Lambda| = d^2 |q^2 - \mathbf{m}^2 + 2q_0(1 - \mathbf{u}\mathbf{v})(1 - \mathbf{V}\boldsymbol{\sigma})\gamma_u \mathbf{W}|, \quad (6.114)$$

где

$$d = |q^2 - \mathbf{m}^2| = \sqrt{|\hat{q} \pm \mathbf{m}|} = \prod_{k=1}^N (q^2 - m_k^2). \quad (6.115)$$

Используя (6.110), тогда получим:

$$|\Lambda| = d^2 |q^2 - \mathbf{m}^2 + 2q_0(1 + V_R)(1 - \mathbf{u}\mathbf{v})\gamma_u \mathbf{W}| |q^2 - \mathbf{m}^2 + 2q_0(1 - V_R)(1 - \mathbf{u}\mathbf{v})\gamma_u \mathbf{W}|. \quad (6.116)$$

Пусть $M_{\pm,k}^2(q)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) есть собственные значения матриц:

$$M_{\pm}^2(q) = \mathbf{m}^2 + 2q_0(1 \pm V_R)(1 - \mathbf{u}\mathbf{v})\gamma_u \mathbf{W}. \quad (6.117)$$

Упражнение 13

Покажите, что $V_R^2 \geq 0$ для $0 \leq v < \infty$.

Поскольку $V_R^2 \geq 0$, то матрицы $M_+^2(q)$ и $M_-^2(q)$ эрмитовы и существуют унитарные преобразования $T_+(q)$ и $T_-(q)$ такие, что:

$$T_{\pm}(q)M_{\pm}^2(q)T_{\pm}^{\dagger}(q) = \text{diag}(M_{\pm,1}^2, M_{\pm,2}^2, \dots, M_{\pm,N}^2), \quad T_{\pm}^{\dagger}(q)T_{\pm}(q) = 1. \quad (6.118)$$

Из (6.106) и (6.116) следует, что:

$$\begin{aligned} |G| &= d^2 |\Lambda|^{-1} = |q^2 - M_-^2(q)|^{-1} |q^2 - M_+^2(q)|^{-1} \\ &= \prod_{k=1}^N [q^2 - M_{-,k}^2(q)]^{-1} [q^2 - M_{+,k}^2(q)]^{-1}. \end{aligned} \quad (6.119)$$

Из равенства: $|G|^{-1} = 0$ мы получаем набор дисперсионных соотношений для нейтрино в среде:

$$q^2 = M_{\pm,k}^2(q), \quad k = 1, \dots, N. \quad (6.120)$$

Найдем теперь Λ^{-1} , воспользовавшись теоремой .7, а также тем, что $u_- = u_+^{-1}$:

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} &= u_- \begin{pmatrix} q^2 - \mathbf{m}^2 + 2(1 + \mathbf{u}\boldsymbol{\sigma})(q_0 - \mathbf{q}\boldsymbol{\sigma})\gamma_u \mathbf{W} & -2(1 + \mathbf{u}\boldsymbol{\sigma})\gamma_u \mathbf{W}\mathbf{m} \\ 0 & q^2 - \mathbf{m}^2 \end{pmatrix}^{-1} u_+ \\ &= u_- \begin{pmatrix} Y & Y^{-1}(1 + \mathbf{u}\boldsymbol{\sigma})\gamma_u \mathbf{W}\mathbf{m}X^{-1} \\ 0 & X \end{pmatrix} u_+. \end{aligned} \quad (6.121)$$

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

где 2×2 (в пространстве γ матриц) матрицы X, Y определены следующим образом:

$$\begin{aligned} X &\equiv \begin{pmatrix} [q^2 - m^2]^{-1} & 0 \\ 0 & [q^2 - m^2]^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [\mathcal{P}_v^2 - \mathbf{q}^2]^{-1} & 0 \\ 0 & [\mathcal{P}_v^2 - \mathbf{q}^2]^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.122)$$

$$\begin{aligned} Y &\equiv [q^2 - m^2 + 2q_0\gamma_u \mathbf{W} (1 - uv) (1 - \mathbf{V}\sigma)]^{-1} \\ &= R [q^2 - m^2 + 2q_0\gamma_u \mathbf{W} (1 - uv) (1 - V_R\sigma_3)]^{-1} R \\ &= R \begin{pmatrix} \mathbf{T}_-^\dagger [\mathcal{P}_{m,-}^2 - \mathbf{q}^2]^{-1} \mathbf{T}_- & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_+^\dagger [\mathcal{P}_{m,+}^2 - \mathbf{q}^2]^{-1} \mathbf{T}_+ \end{pmatrix} R \end{aligned} \quad (6.123)$$

где матрица R определена в (6.110), а диагональные матрицы (в пространстве состояний нейтрино $N \times N$) $\mathcal{P}_v^2, \mathcal{P}_{m,\pm}^2$ квадратов "эффективных импульсов" даются формулами:

$$\mathcal{P}_v^2 \equiv q_0^2 - m^2, \text{ собственные значения } (p_{v,1}^2, \dots, p_{v,N}^2) \quad (6.124)$$

$$\mathcal{P}_{m,\pm}^2 \equiv \mathbf{T}_\pm^\dagger [q_0^2 - m^2 + 2q_0\gamma_u \mathbf{W} (1 - uv) (1 \pm V_R)] \mathbf{T}_\pm, \text{ собственные значения } (p_{m,1}^2, \dots, p_{m,N}^2) \quad (6.125)$$

Заметим, что наибольший вклад в $\int d\mathbf{q} \Lambda^{-1}$ будет происходить от элементов матрицы Λ^{-1} , имеющих сингулярности в знаменателе, вида $[\mathcal{P}_v^2 - \mathbf{q}^2]^{-1}$ и $\mathbf{T}_\pm^\dagger [\mathcal{P}_{m,\pm}^2 - \mathbf{q}^2]^{-1} \mathbf{T}_\pm$. Вклад от элемента $\sim Wm$ подавлен по сравнению с сингулярными, и мы им спокойно пренебрегаем. Таким образом, пропагатор нейтрино (6.106) в среде есть:

$$G = (\hat{q} + m) u_- \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} u_+. \quad (6.126)$$

Теперь мы можем легко вычислить оставшийся интеграл, используя теорему 2:

$$\int d\mathbf{q} e^{-i(\mathbf{y}-\mathbf{x})\mathbf{q}} G \approx -\frac{2\pi^2 \hat{q}}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|} u_- \begin{pmatrix} R \begin{pmatrix} \mathbf{T}_-^\dagger e_{m,-} \mathbf{T}_- & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_+^\dagger e_{m,+} \mathbf{T}_+ \end{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} e_v & 0 \\ 0 & e_v \end{pmatrix} \end{pmatrix} u_+, \quad (6.127)$$

где диагональные матрица с собственными значениями эффективных импульсов в аргументе экспоненты определены как $e_{m,\pm} = e^{i|\mathbf{y}-\mathbf{x}|\mathcal{P}_{m,\pm}}$, $e_v = e^{i|\mathbf{y}-\mathbf{x}|\mathcal{P}_v}$. Хотя полученный ответ достаточно прозрачен сам по себе, имеет смысл перейти к релятивистскому пределу для энергии-импульса хотя бы потому, что дальнейшая факторизация квадрата амплитуды на произведение отдельных множителей, характеризующих рождение и детектирование нейтрино и "вероятность осцилляций" возможно только в этом пределе. Если скорость среды много меньше скорости

Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов

нейтрино (но может быть при этом вполне релятивистской), тогда можно приближенно положить $V_R \approx 1$. Это немедленно приводит к тому, что матрица $\mathcal{P}_{m,-}^2 \approx \mathcal{P}_v^2$ и $T_- \approx 1$. Кроме этого,

$$\mathcal{P}_{m,+}^2 = \mathbf{T}_+^\dagger [q_0^2 - m^2 + 4q_0\gamma_u \mathbf{W} (1 - uv)] \mathbf{T}_+,$$

Условимся для простоты обозначений считать в дальнейшем $\mathbf{T} = \mathbf{T}_+$, $\mathcal{P}_m^2 = \mathcal{P}_{m,+}^2$, $e_m = e_{m,+}$. Тогда (6.127) переписется в релятивистском пределе:

$$\int d\mathbf{q} e^{-i(\mathbf{y}-\mathbf{x})\mathbf{q}} \mathbf{G} \approx -\frac{2\pi^2 \hat{q}}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|} \mathbf{u}_- \begin{pmatrix} R \begin{pmatrix} e_v & 0 \\ 0 & \mathbf{T}^\dagger e_m \mathbf{T} \end{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} e_v & 0 \\ 0 & e_v \end{pmatrix} \end{pmatrix} \mathbf{u}_+, \quad (6.128)$$

В (6.128) $\hat{q} = q_\mu \gamma^\mu$, $q_\mu = (q_0, 0, 0, \mathbf{l}q_0)$, где $\mathbf{l} = (\mathbf{y} - \mathbf{x})/|\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ - единичный вектор в направлении от источника нейтрино к детектору. Выражение (6.128) можно ещё упростить, если воспользоваться явным видом матриц \mathbf{u}_\pm :

$$\mathbf{u}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \mp 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\mathbf{u}_- \begin{pmatrix} R \begin{pmatrix} e_v & 0 \\ 0 & \mathbf{T}^\dagger e_m \mathbf{T} \end{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} e_v & 0 \\ 0 & e_v \end{pmatrix} \end{pmatrix} \mathbf{u}_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A + B & A - B \\ A - B & A + B \end{pmatrix},$$

где мы для компактности обозначили:

$$A = R \begin{pmatrix} e_v & 0 \\ 0 & \mathbf{T}^\dagger e_m \mathbf{T} \end{pmatrix} R, \quad B = \begin{pmatrix} e_v & 0 \\ 0 & e_v \end{pmatrix}$$

В формуле для амплитуды перехода (6.89) пропагатор \mathbf{G} стоит в обкладках $P_L \mathbf{G} P_R$. Учтём это:

$$P_L \hat{q} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A + B & A - B \\ A - B & A + B \end{pmatrix} P_R = P_L \hat{q} P_R A$$

Замечательным образом блок B в котором содержатся вакуумные решения исчезает из полной амплитуды. Позже мы вернёмся к обсуждению этого вопроса. Заметим, однако, что в общем случае, матрица A содержит в себе смесь вакуумного решения и решения с "добавкой" от среды. Мы это также обсудим в дальнейшем и дадим простую физическую интерпретацию. Возможно и дальнейшее упрощение.

Воспользовавшись (6.110), запишем:

$$\begin{aligned}
 A &= R \begin{pmatrix} e_v & 0 \\ 0 & \mathbf{T}^\dagger e_m \mathbf{T} \end{pmatrix} R \\
 &= e_v R \begin{pmatrix} 1 + \sigma_3 \\ 2 \end{pmatrix} R + \mathbf{T}^\dagger e_m \mathbf{T} R \begin{pmatrix} 1 - \sigma_3 \\ 2 \end{pmatrix} R \\
 &= e_v \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{n}\sigma \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{T}^\dagger e_m \mathbf{T} \begin{pmatrix} 1 - \mathbf{n}\sigma \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{e_v}{2} \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{n}_3 & \mathbf{n}_1 - i\mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_1 + i\mathbf{n}_2 & 1 - \mathbf{n}_3 \end{pmatrix} + \frac{\mathbf{T}^\dagger e_m \mathbf{T}}{2} \begin{pmatrix} 1 - \mathbf{n}_3 & -\mathbf{n}_1 + i\mathbf{n}_2 \\ -\mathbf{n}_1 - i\mathbf{n}_2 & 1 + \mathbf{n}_3 \end{pmatrix}, \quad (6.129)
 \end{aligned}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{V}/V_R$. Наконец, учтём, что

$$P_L \hat{q} P_R = P_L \hat{q} P_R = \frac{1}{2} q_0 (1 - \mathbf{v}\sigma) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} q_0 (1 - \sigma_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Так что:

$$\begin{aligned}
 P_L \hat{q} P_R A &= \left(e_v \frac{1 - \mathbf{n}_3}{2} + \mathbf{T}^\dagger e_m \mathbf{T} \frac{1 + \mathbf{n}_3}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} q_0 (1 - \sigma_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \left(e_v \frac{1 - \mathbf{n}_3}{2} + \mathbf{T}^\dagger e_m \mathbf{T} \frac{1 + \mathbf{n}_3}{2} \right) P_L \hat{q} P_R \quad (6.130)
 \end{aligned}$$

Таким образом получаем очень красивую формулу:

$$P_L \int d\mathbf{q} e^{-i(\mathbf{y}-\mathbf{x})\mathbf{q}} \mathbf{G} P_R \approx -\frac{2\pi^2 P_L \hat{q} P_R}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \left(e_v \frac{1 - \mathbf{n}_3}{2} + \mathbf{T}^\dagger e_m \mathbf{T} \frac{1 + \mathbf{n}_3}{2} \right) \quad (6.131)$$

Chapter 7

Как обнаружить реликтовые нейтрино?

7.1 Рассеяние $\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \pi^-$

Рассмотрим рассеяние мюонов на реликтовых анти-нейтрино с рождением пиона в конечном состоянии (Рис.7.1).

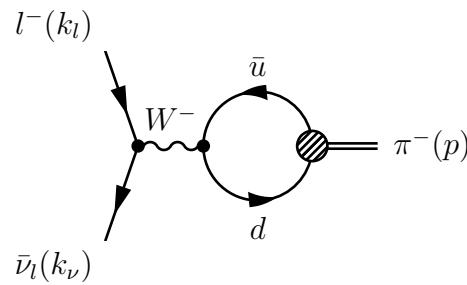


Figure 7.1: Диаграмма Фейнмана для $l^-(k_l) + \bar{\nu}_l(k_\nu) \rightarrow \pi^-(p)$

Найдем энергию лептона при которой возможна реакция $l^-(k_l) + \bar{\nu}_l(k_\nu) \rightarrow \pi^-(p)$. Полная энергия в системе центра масс должна быть равна массе пиона, откуда с учетом того, что реликтовые нейтрино имеют пренебрежимо малую кинетическую энергию по сравнению с их массой (если масса нейтрино больше 10^{-4} эВ), получим:

$$E_l = \frac{m_\pi^2}{8m_\nu} = 1000 \text{ ТэВ} \times \frac{1 \text{ эВ}}{m_\nu}. \quad (7.1)$$

Матричный элемент, соответствующий диаграмме (7.1) точно такой же, как для распада пиона (смотрите (2.14)), поэтому воспользуемся уже полученным результатом для квадрата амплитуды:

$$|\overline{M}|^2 = 4G_F^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2 m_l^2(k_\nu k_l) \quad (7.2)$$

По общей формуле вычислим сечение рассеяния $l^-(k_l) + \bar{\nu}_l(k_\nu) \rightarrow \pi^-(p)$:

$$\begin{aligned}\sigma &= \int \frac{(2\pi)^4 \delta(k_l + k_\nu - p_\pi)}{2 \cdot 4 \sqrt{(k_l k_\nu)^2 - m_l^2 m_\nu^2}} 4G_F^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2 m_l^2 (k_\nu k_l) \frac{d\mathbf{p}_\pi}{(2\pi)^3 2E_\pi} \\ &= \frac{\pi G_F^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2 m_l^2}{2E_\pi} \frac{1 - \mathbf{v}_l \cdot \mathbf{v}_\nu}{\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_\nu} \delta(E_l + E_\nu - E_\pi)\end{aligned}\quad (7.3)$$

В полученной формуле (7.3) сечение оказалось пропорциональным дельта-функции. На первый взгляд, такой результат может вызвать недоумение. Заметим, однако, что для любого реального пучка мюонов всегда будет разброс мюонов по энергии, так что число наблюдаемых событий будет пропорционально интегралу $\int \Phi_\mu(E_\mu) \sigma$ и будет конечным. На самом деле можно даже дать конечное и разумное значение и самому сечению (7.3). Для этого заметим, что появление дельта-функций в квадрате амплитуды перехода из начального состояния в конечное возможно только для таких состояний, которые могут быть представлены в виде плоских волн (см. главу 6). В общем случае, когда описывается взаимодействие частиц при помощи волновых пакетов, закон сохранения энергии-импульса ``держится`` на затухающих гауссовых экспонентах вида $e^{-(k_i - k_f)^2 / 2\sigma^2}$, где σ - это размазка волновых пакетов. В нашем случае, σ будет определяться полной шириной распада пиона Γ , которую можно приближенно считать равной $\Gamma(\pi \rightarrow \mu\nu)$ (2.17), откуда

$$G_F^2 \cos^2 \Theta_C f_\pi^2 m_l^2 = \frac{8\pi\Gamma(\pi \rightarrow l\nu_l)E_\pi}{m_\pi^2 (1 - m_l^2/m_\pi^2)^2}. \quad (7.4)$$

Подставив (7.4) в (7.3), получим:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{4\pi^2\Gamma(\pi \rightarrow l\nu_l)}{m_\pi^2 (1 - m_l^2/m_\pi^2)^2} \frac{1 - \mathbf{v}_l \cdot \mathbf{v}_\nu}{\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_\nu} \delta(E_l + E_\nu - E_\pi) \\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi^{3/2}m_l^2/m_\mu^2}{m_\pi^2 (1 - m_l^2/m_\pi^2)^2} \frac{1 - \mathbf{v}_l \cdot \mathbf{v}_\nu}{\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_\nu} e^{-(E_\mu + E_\nu - E_\pi)^2 / 2\Gamma^2},\end{aligned}$$

где в последней строчке мы учли явным образом, что $\sigma = \Gamma$. Подставив числа, получим:

$$\sigma = 3.3 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2 \frac{1 - \mathbf{v}_l \cdot \mathbf{v}_\nu}{\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_\nu} e^{-(E_\mu + E_\nu - E_\pi)^2 / 2\Gamma^2} m_l^2/m_\mu^2 \quad (7.5)$$

Полученное сечение, сравнимо по порядку величины с сечением рождения $e^+ + e^- \rightarrow Z^0$ при энергии $\sqrt{s} = M_{Z^0}$. Означает ли то, что сечение реакции $\mu^- + \bar{\nu}_\mu \rightarrow \pi^-(p)$ такое большое, что мы можем легко обнаружить реликтовые нейтрино? К сожалению нет. Как уже отмечалось выше, любой реальный пучок мюонов будет иметь ``размазку`` по энергии, описываемую, например, гауссовым распределением с шириной σ_{exp} , так

что число событий будет равно:

$$\begin{aligned}
 N &= \int dE_\mu \Phi(E_\mu) \cdot \sigma(E_\mu) \cdot N_\nu \cdot \text{время} = \\
 &= \frac{N_\mu}{10^{21}} 10^{21} \frac{\text{время}}{\text{см}^2 \text{ год}} 3.3 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2 \Gamma \frac{55 n_\nu}{55 \text{ см}^3} 10^5 \text{ см} \frac{L}{\text{км}} 10^{-2} \text{ см}^2 \frac{S}{\text{мм}^2} \times \\
 &\times \int dE_\mu \frac{e^{-(E_\mu + E_\nu - E_\pi)^2 / 2\Gamma^2}}{\sqrt{2\pi}\Gamma} \frac{e^{-(E_\mu - E_\mu^0)^2 / 2\sigma_{exp}^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{exp}} = \\
 &= 181 \frac{N_\mu \text{ время}}{10^{21} \text{ год}} \frac{n_\nu}{55 \text{ см}^3} \frac{L}{\text{км}} \frac{S}{\text{мм}^2} \frac{e^{-(E_\mu^0 + E_\nu - E_\pi)^2 / 2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma}{\sigma},
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

где $\sigma^2 = \sigma_{exp}^2 + \Gamma^2$. Мы предположили мюонный пучок с сечением $S = 1 \text{ мм}^2$, длиной $L = 1 \text{ км}$ (при такой длине мюон с энергией 1000 ТэВ заведомо будет стабильным), интенсивностью 10^{21} мюонов в год.

Проанализируем полученную формулу (7.6). Ширина $\Gamma = 3 \cdot 10^{-14} \text{ МэВ}$, что много меньше экспериментальной достижимой ширины σ_{exp} . В качестве оптимистичной оценки можно было бы положить $\sigma_{exp} = 1 \text{ кэВ}$, тогда число событий (7.6) будет подавлено фактором $\Gamma/\sigma_{exp} \approx 10^{-11}$. Подобное подавление делает возможность использования реакции $\mu^- + \bar{\nu}_\mu \rightarrow \pi^-(p)$ для детектирования реликтового нейтрино проблематичным:

$$N = 0.7 \cdot 10^{-9} \frac{N_\mu \text{ время}}{10^{21} \text{ год}} \frac{n_\nu}{55 \text{ см}^3} \frac{L}{\text{км}} \frac{S}{\text{мм}^2} e^{-(E_\mu^0 + E_\nu - E_\pi)^2 / 2\sigma_{exp}^2}. \tag{7.7}$$

Любопытно заметить следующее. Аналогичная формула (7.6) может быть написана для других резонсов, например, таких как $e^+ + e^- \rightarrow Z^0$, $e^+ + e^- \rightarrow J/\Psi$ и т.п. В случае $e^+ + e^- \rightarrow Z^0$ ширина Z^0 бозона порядка 2.5 ГэВ, что намного больше экспериментальной ширины, тогда фактор $\Gamma/\sqrt{\Gamma^2 + \sigma_{exp}^2} \approx 1$ и подавления не возникает. Для детектирования узкого резонанса, такого как J/Ψ с $\Gamma = 93.4 \text{ кэВ}$ необходим пучок с достаточно хорошим разрешением, чтобы фактор $\Gamma/\sqrt{\Gamma^2 + \sigma_{exp}^2}$ не был сильно подавляющим. Таким образом, заметим, что мало знать само резонансное сечение, чтобы судить о числе взаимодействий, очень важную роль еще играет ширина данного резонанса.

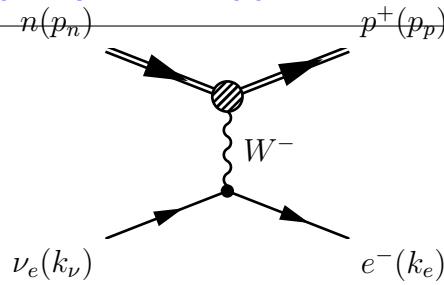
7.2 Рассеяние $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$

Квадрат матричного элемента, соответствующий диаграмме (7.2) уже вычислялся нами в параграфе 2.3:

$$|M|^2 = 32G_F^2 \cos^2 \Theta_C m_n m_p E_e E_\nu [(1 + 3\lambda^2) + (1 - \lambda^2) \mathbf{n}_\nu \cdot \mathbf{v}_e], \tag{7.8}$$

Тогда, вычисляя сечение по общей формуле (1.75), легко получить:

$$\sigma = \int \frac{(2\pi)^4 \delta(k_\nu + p_n - k_e - p_p) |M|^2}{2 \cdot 4 E_\nu v_\nu m_n} \frac{d\mathbf{p}_p}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d\mathbf{p}_e}{(2\pi)^3 2E_e} = \frac{G_F^2 \cos^2 \Theta_C E_e p_e (1 + 3\lambda^2)}{\pi v_\nu} \tag{7.9}$$

Figure 7.2: Диаграмма Фейнмана для распада $\nu_e + n \rightarrow p + e$

Поскольку реликтовое нейтрино имеет кинетическую энергию много меньшую ее массы (это, на самом деле, предположение, справедливое для масс нейтрино больших 10^{-4} эВ), то скорость нейтрино можно оценить из соотношения $m_\nu v_\nu^2/2 = 3/2kT$, откуда

$$v_\nu = 1.2 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{\text{эВ}}{m_\nu}}$$

Тогда сечение реакции $\nu_e + n \rightarrow p + e$ есть:

$$\sigma = 1.5 \cdot 10^{-41} \text{ см}^2 \sqrt{\frac{\text{эВ}}{m_\nu}}$$

Число взаимодействий на один нейтрон в одну секунду есть:

$$R = \Phi_\nu \sigma = n_\nu v_\nu \sigma = 55 \frac{n_\nu}{55 \text{ см}^3} 1.2 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}} 1.5 \cdot 10^{-41} \text{ см}^2 = 3 \cdot 10^{-31} \text{ сек}^{-1} \frac{n_\nu}{55 \text{ см}^3} \quad (7.10)$$

Тогда число взаимодействий реликтовых нейтрино со свободными нейтронами N_n :

$$\begin{aligned} N = N_n R \text{ время} &= 6.02 \cdot 10^{25} \frac{\text{масса нейтронов}}{100 \text{ г}} 3 \cdot 10^{-31} \text{ сек}^{-1} \frac{n_\nu}{55 \text{ см}^3} 3.14 \cdot 10^7 \frac{\text{время}}{\text{год}} \\ &= 60 \frac{\text{масса нейтронов}}{100 \text{ г}} \frac{n_\nu}{55 \text{ см}^3} \frac{\text{время}}{\text{год}} \end{aligned} \quad (7.11)$$

В оценке (7.11) мы предположили весьма оптимистичное число свободных нейтронов, соответствующее массе 100 граммов, времени наблюдения один год. В галактике концентрация реликтового нейтрино может на три-четыре порядка превышать среднее по Вселенной значение 55 нейтрино/см^3 , что еще увеличит ожидаемое число событий.

Характерен сигнал для такой реакции: практически покоящийся протон и электрон с энергией $E_e = m_n - m_p = 1.29 \text{ МэВ}$.

Может быть, такой сигнал уже идет от нейтронных звезд?

Chapter 8

Стандартная Модель

В этой главе

Chapter 9

Элементы классической теории поля

В этой главе

9.1 Принцип наименьшего действия

В этом разделе мы кратко

9.2 Свободные поля

9.2.1 Скалярное поле

9.2.2 Векторное поле

9.2.3 Спинорное поле

9.3 Симметрии

9.3.1 Теорема Нётер

9.3.2 Глобальные симметрии

9.3.3 Калибровочные абелевые симметрии.

9.3.4 Калибровочные неабелевые симметрии.

9.4 Нарушение симметрии

9.4.1 Глобальная симметрия и теорема Голдстоуна

9.4.2 $U(1)$ калибровочная симметрия

9.4.3 $SU(2)$ калибровочная симметрия

9.5 Квантовая теория поля

9.6 Стандартная Модель

9.6.1 Вид слабого взаимодействия. Исторический обзор

9.6.2 Лагранжиан Стандартной Модели для одного поколения лептонов

9.6.3 Нарушение симметрии

9.6.4 Массы лептона и нейтрино

9.6.5 Массы векторных бозонов

9.6.6 Масса бозона Хиггса

9.6.7 Лагранжиан после нарушения симметрии

9.6.8 Лагранжиан Стандартной Модели для трех поколений лептонов и кварков

9.6.9 Случайные симметрии и сохраняющиеся квантовые числа

9.6.10 Флэйворная Физика

Система $K^0 - \bar{K}^0$

Приложения

.1 Гауссовы интегралы

Докажем теорему 1, приведенную в разделе 6.3

$$\mathcal{G}(A, k) = \int e^{(-A_{\mu\nu}x^\mu x^\nu - ikx)} dx, \quad (.1)$$

где $A = ||A_{\mu\nu}||$ симметричная и положительно определенная матрица (не обязательно тензор). Матрица A может быть диагонализирована ортогональным преобразованием $K = ||K_{\mu\nu}||$ (см., например, [?]):

$$A_{\mu\nu} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} K_{\mu\alpha} K_{\nu\alpha}, \quad \sum_{\alpha} K_{\mu\alpha} K_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu}, \quad (.2)$$

где $a_{\alpha} > 0$ - собственные значения A . Имея это в виду, квадратичная форма аргумента экспоненты в выражении для $\mathcal{G}(A, k)$ может быть переписана как

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + ikx &= \sum_{\alpha} a_{\alpha} (K_{\mu\alpha}x^\mu) (K_{\nu\alpha}x^\nu) + ikx \\ &= \sum_{\alpha} (a_{\alpha}y_{\alpha}^2 + ik_{\mu}K_{\mu\alpha}y_{\alpha}), \end{aligned} \quad (.3)$$

где

$$y_{\alpha} = K_{\mu\alpha}x^{\mu} \quad \Longleftrightarrow \quad x^{\mu} = \sum_{\alpha} K_{\mu\alpha}y_{\alpha}. \quad (.4)$$

Якобиан перехода (.4):

$$\frac{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial (y_0, y_1, y_2, y_3)} = |K| = 1.$$

Так что $dx = dy$. Подставляя уравнение (.3) в (.1), получим:

$$\mathcal{G}(A, k) = \prod_{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{a_{\alpha}}} e^{\left[-\frac{1}{4a_{\alpha}} \left(\sum_{\mu} k_{\mu} K_{\mu\alpha} \right)^2 \right]}.$$

Согласно (.2)

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha}^{-1} K_{\mu\alpha} K_{\nu\alpha} = (A^{-1})_{\mu\nu} \quad \text{and} \quad \prod_{\alpha} a_{\alpha} = |A|.$$

Таким образом:

$$\mathcal{G}(A, k) = \frac{\pi^2}{\sqrt{|A|}} e^{\left[-\frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} (A^{-1})_{\mu\nu} k_\mu k_\nu\right]}, \quad (.5)$$

что доказывает теорему 1.

.2 General formulas for block matrices

.2.1 Inverse matrices

Теорема 3 (The Bellman's theorem [?]) *If A , B , C and D are nonsingular matrices of the same order then*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (.6)$$

Теорема 4 (Частный случай теоремы .6) *Если A и B не сингулярные матрицы, то:*

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix} \quad (.7)$$

.2.2 Determinants

1. For any matrices B and C

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \equiv \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{cases} |AD - ACA^{-1}B|, & \text{if } A \text{ is a nonsingular matrix,} \\ |AD - BD^{-1}CD|, & \text{if } D \text{ is a nonsingular matrix.} \end{cases} \quad (.8)$$

2. If A and B are nonsingular matrices and $\varkappa = \pm 1$. Then for any C

$$\begin{vmatrix} A & (1 - \varkappa)C \\ (1 + \varkappa)C & B \end{vmatrix} = |A||B|. \quad (.9)$$

.2.3 Transformation v

$$v \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} v^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (A + D) + (B + C) & -(A - D) + (B - C) \\ -(A - D) - (B - C) & (A + D) - (B + C) \end{pmatrix}, \quad (.10a)$$

$$v^T \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (A + D) - (B + C) & (A - D) + (B - C) \\ (A - D) - (B - C) & (A + D) + (B + C) \end{pmatrix}. \quad (.10b)$$

Литература

- [1] С.М. Биленький. *Введение в диаграммную технику Фейнмана*. М.:Наука, 1971.
- [2] М. В. Терентьев. *Введение в теорию элементарных частиц*. М.:ИТЭФ, 1998. - 236с.
- [3] С.Д.Дрелл Дж.Д. Бьеркен. *Релятивистская квантовая теория*. М.:Наука.
- [4] Л. Б. Окунь. *Лептоны и кварки*. М.:Наука, 1981. - 304 с.
- [5] Dima Bardin and Giampiero Passarino. *The Standard Model in the Making Precision Study of the Electroweak Interactions*. Oxford University Press, 1999. - 704 с.
- [6] Эйнштейн А. *Объяснение движения перигелия Меркурия в общей теории относительности*. - *Собрание научных трудов*. М.: Наука, 1965. т.1. с.439-447.
- [7] F. E. Close. *An Introduction to Quarks and Partons*. Academic Press, 1979.
- [8] Particle Data Group. <http://pdg.lbl.gov/index.html>.
- [9] N.Cabibbo. *Phys.Rev.Lett.*, 10:531, 1963.
- [10] M. Kobayashi and T. Maskawa. *Prog. Theor. Phys.*, 49:652, 1973.
- [11] W.K.H. Panofsky. *Proceedings of the 14th International Conference on High Energy Physics Vienna 23 (1968)*.
- [12] J.D. Bjorken. *Phys.Rev.*, 179:1547, 1969.
- [13] R.P. Feynman. *Phys.Rev.Lett*, 23:1415, 1969.
- [14] S. L. Adler. *Phys. Rev.*, 143:1144, 1966.
- [15] D. Allasia et al. *Z. Phys*, C28:321, 1985.
- [16] D. Gross and C. Llewellyn Smith. *Nucl. Phys*, B14:337, 1969.
- [17] M. Arneodo et al. *Phys.Rev.*, D50, 1994.

- [18] M. Derrick et al. *Z.Phys.*, C65:399, 1995.
- [19] T.Ahmed et al. *Nucl.Phys.*, B439:471, 1995.
- [20] A.C. Benvenuti et al. *Phys.Lett.*, B223:485, 1989.
- [21] *Phys.Rev.*, D54:3006, 1996.
- [22] K.Gottfried. *Phys.Rev.Lett*, 18:1174, 1967.
- [23] E.A. Hawker et al. *Phys.Rev.Lett*, 80:3715, 1998.
- [24] N.C.R. Makins [for the HERMES Collaboration]. *DIS2000 Proceedings*, 2001.
- [25] J.Ashman et al. [EMC Collaboration]. *Phys. Lett.*, B206:364, 1988.
- [26] D.Adams et al. [SMC Collaboration]. *Phys.Rev.*, D56:5330, 1997.
- [27] K.Abe et al. [E143 Collaboration]. *Phys.Rev.*, D58:112003, 1998.
- [28] P.L. Anthony et al. *Phys.Lett.*, B458:529, 1999.
- [29] K.Ackerstaff et al. [HERMES Collaboration]. *Phys. Lett.*, B464:123, 1999.
- [30] J.Ralston and D.E.Soper. *Nucl.Phys.*, B152:109, 1979.
- [31] X.Artru and M.Mekhfi. *Z.Phys.*, C45:669, 1990.
- [32] R.L.Jaffe and X.Ji. *Phys.Rev.Lett.*, 67:552, 1991.
- [33] J.P.Ralston J.L.Cortes, B.Pire. *Z.Phys.*, C55:409, 1992.
- [34] R.L.Jaffe. *hep-ph/9602236*, 1996.
- [35] S.Wandzura and F.Wilczek. *Phys.Lett.*, B72:195, 1977.
- [36] H.Burkhardt and W.N.Cottingham. *Ann.Phys.*, 56:453, 1970.
- [37] Oltman E. et al. (CCFR Collaboration). *Z.Phys. C.*, 53:51, 1992.
- [38] Auchincloss P. et al. (CCFR Collaboration). *Z.Phys. C.*, 48:411, 1990.
- [39] Berge J. P. et al. (CDHS Collaboration). *Z.Phys. C.*, 35:443, 1987.
- [40] Berge J. P. et al. (CDHS Collaboration). *Z.Phys. C.*, 49:187, 1991.
- [41] Allaby J. V. et al. (CHARM Collaboration). *Z.Phys. C.*, 38:403, 1988.
- [42] MacFarlane D. et al. *Z. Phys. C*, 26:1, 1984.

- [43] Seligman W. G. A next-to-leading-order qcd analysis of neutrino-iron structure functions at the tevatron. Ph.D. Thesis (Columbia University), Nevis Report-292 (Unpublished).
- [44] P. Stockinger. *Pramana*, 54:203, 2000.

Index

γ -матрицы, 11

Амплитуда распада, 33

Гравитация, 3

Магнитные моменты барионов, 10

Мюонное нейтрино, 9

Отклонение луча света в гравитационном
поле массивного объекта, 4

Прецессия перигелия Меркурия, 4

Распад мюона, 33

Спиновые волновые функции барионов, 9

Тау лептон, 45

Черенковский счетчик, 77

абсолютное сечение, 77

волновые пакеты, 90

ионизационная камера, 77

мюон, 33

нейтринные осцилляции, 83

осцилляции в веществе, 101

поток, 77

правило Котковского, 107

преобразования Фирца, 29

пропагатор нейтрино, 91

тау нейтрино, 47

уравнение Дайсона, 108

уравнение Дирака, 13

уравнение Клейна-Гордона, 12

черная дыра, 4

ширины и сечения, 27