

# Simulating Different Receivers in a Rayleigh Fading, SISO Environment

Project #1

Intelligent Communication Systems (ICS) Lab.  
노용재

Winter Intern Seminar (2023-1)

## Contents

<b>1</b>	<b>Implementation</b>	<b>2</b>
1.1	Common Environment Variables . . . . .	2
1.2	ZF(Zero-forcing) . . . . .	2
1.3	MMSE(Minimum Mean Square Error) . . . . .	2
1.4	MLD(Maximum Likelihood Detection) . . . . .	3
<b>2</b>	<b>결과 및 분석</b>	<b>4</b>
2.1	Simulation Result . . . . .	4
2.2	Normalization Factor . . . . .	4
2.3	Binary Modulation, 4-QAM에서 ZF, MMSE간 BER 일치 현상 . . . . .	6
2.4	ZF와 MLD간 BER의 동일성 . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Entire Code</b>	<b>8</b>

---

Binary Modulation, 4-QAM, 16-QAM의 modulation 환경에서 Zero-forcing (ZF) receiver, Minimum Mean Square Error (MMSE) receiver, Maximum Likelihood Detection (MLD)의 BER (bit error rate)를 구하기 위해 실험을 MATLAB에서 수행하였다. 실험의 공통된 조건은 다음과 같다.

- SISO; Single Input, Single Output
- Rayleigh Fading
- $E_s/N_0$ 는 -2dB~20dB(2dB 간격)
- 신호의 평균전력은 1W이 되도록한다. ( $E_s = 1$ )

# 1 Implementation

## 1.1 Common Environment Variables

$$y = hs + n \quad (1)$$

```
1 EsNO_dB = -2:2:20;
2 EsNO = db2pow(EsNO_dB);
3
4 EbNO = EsNO / log2(M);
5 EbNO_dB = pow2db(EbNO);
6
7 NumberOfSignals = 1;
8 LengthBitSequence = NumberOfSignals*log2(M); % log2(M) bits per signal
9
10 % Bit Generation
11 BitSequence = randi([0 1], 1, LengthBitSequence);
12 SymbolSequence = qammod(BitSequence.', M, 'InputType', 'bit', '
    UnitAveragePower', 1).';
13
14 % Noise (n) Generation
15 NoiseSequence = (randn(1, length(SymbolSequence)) + 1j * randn(1, length(
    SymbolSequence))) / sqrt(2);
16
17 % Channel (h) Generation
18 H = (randn(1, length(SymbolSequence)) + 1j * randn(1, length(
    SymbolSequence))) ./ sqrt(2);
19
20 % Received Signal (y = s + n) Generation
21 ReceivedSymbolSequence = H .* SymbolSequence + NoiseSequence * sqrt(1 /
    EsNO(indx_EbNO));
```

## 1.2 ZF(Zero-forcing)

$$z = wy : w_{ZF} = (h)^{-1} \quad (2)$$

$$\hat{s} = \underset{s}{\operatorname{argmin}} |z - s|^2 \quad (3)$$

```
1 w_zf = H.^(-1);
2 DetectionSymbolSequence_ZF = ReceivedSymbolSequence .* w_zf; % Detection (
    Zero-Forcing: y / h)
3
4 DetectionBitSequence_ZF = qamdemod(DetectionSymbolSequence_ZF.', M, '
    OutputType', 'bit', 'UnitAveragePower', 1)';
```

## 1.3 MMSE(Minimum Mean Square Error)

$$z = wy : w_{MMSE} = (|h|^2 + 1/\rho)^{-1} h^* \quad (4)$$

$$\hat{s} = \underset{s}{\operatorname{argmin}} |z - s|^2 \quad (5)$$

```

1 w_mmse = (abs(H).^2+1/EsNO(indx_EbNO)).^(-1) .* conj(H);
2 DetectionSymbolSequence_MMSE = ReceivedSymbolSequence .* w_mmse;
3 DetectionBitSequence_MMSE = qamdemod(DetectionSymbolSequence_MMSE.', M, '
    OutputType', 'bit', 'UnitAveragePower', 1)';

```

#### 1.4 MLD(Maximum Likelihood Detection)

$$\hat{s} = \underset{s}{\operatorname{argmin}} |y - hs|^2 \quad (6)$$

```

1 alphabet = qammod([0:M-1], M, 'UnitAveragePower', true);
2 arg = (ones(length(alphabet),1) * ReceivedSymbolSequence) - (alphabet.' *
    H);
3 [val,idx] = min(abs(arg).^2);
4 DetectionBitSequence_MLD = reshape(de2bi(idx-1, log2(M), 'left-msb'), 1,
    []);

```

$arg$ 는  $(y - hs)$ 를 나타낸 matrix이다.  $arg$ 의  $length(alphabet) \times length(SymbolSequence)$ 이다.  $(M \times l)$

$$ReceivedSymbolSequence = \{d_1, d_2, \dots, d_l\} \quad (7)$$

$$alphabet = \{a_1, a_2, \dots, a_M\} \quad (8)$$

$$H = \{h_1, h_2, \dots, h_l\} \quad (9)$$

$$(10)$$

$$\begin{aligned}
 arg &= \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_{l-1} & d_l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{l-1} & d_l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 h_1 & a_1 h_2 & \dots & a_1 h_{l-1} & a_1 h_l \\ a_2 h_1 & a_2 h_2 & \dots & a_2 h_{l-1} & a_2 h_l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M-1} h_1 & a_{M-1} h_2 & \dots & a_{M-1} h_{l-1} & a_{M-1} h_l \\ a_M h_1 & a_M h_2 & \dots & a_M h_{l-1} & a_M h_l \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} d_1 - a_1 h_1 & d_2 - a_1 h_2 & \dots & d_{l-1} - a_1 h_{l-1} & d_l - a_1 h_l \\ d_1 - a_2 h_1 & d_2 - a_2 h_2 & \dots & d_{l-1} - a_2 h_{l-1} & d_l - a_2 h_l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1 - a_{M-1} h_1 & d_2 - a_{M-1} h_2 & \dots & d_{l-1} - a_{M-1} h_{l-1} & d_l - a_{M-1} h_l \\ d_1 - a_M h_1 & d_2 - a_M h_2 & \dots & d_{l-1} - a_M h_{l-1} & d_l - a_M h_l \end{bmatrix} \quad (11)
 \end{aligned}$$

## 2 결과 및 분석

### 2.1 Simulation Result

이론값은 Matlab의 *berfading* 함수를 통해 얻어졌다.

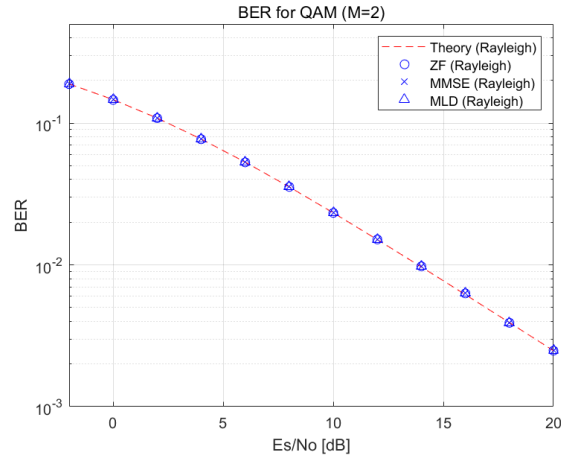
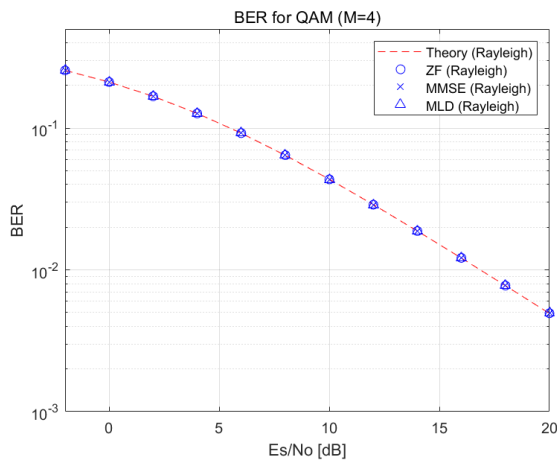
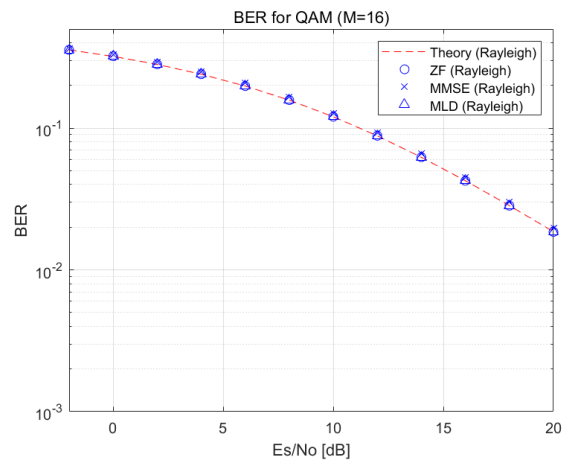


Figure 1: Binary Modulation



(a) 4-QAM



(b) 16-QAM

Figure 2: QAM

### 2.2 Normalization Factor

코드 내에서 직접적으로 쓰이지는 않았지만 생각해볼 만한 부분은 *Normalization Factor*이다. 이 *Normalization Factor*를 사용하여 평균 전력이 1W가 되게끔 할 수 있다.

Code1

```
alphabet = qammod([0:M-1], M, 'UnitAveragePower', true);
```

Code 2

```
Normalization_Factor = sqrt(2/3*(M-1));
```

```
alphabet = qammod([0:M-1], M) / Normalization_Factor;
```

Code 1과 Code 2는 동일한 결과를 이룬다.

$M = 2^{2n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )일 때의 *Normalization Factor*를 일반화 시켜보겠다.  
일반적인 QAM의 Constellation Diagram을 살펴보면 실수  $\sqrt{M}$ 개, 허수  $\sqrt{M}$ 개의 point를 갖는 것을 알 수 있다.  
하나의 신호에 대한 값을 그 신호의 *alphabet*이라고하자.  $M$ 개의 *alphabet*이 다음과 같다고하자.

$$alphabet = \pm(2n-1) \pm j \cdot (2n-1) \quad n \in 1, 2, \dots, \frac{\sqrt{M}}{2} \quad (12)$$

그렇다면 신호의 평균전력은 다음과 같이 일반화 가능하다.

$$\begin{aligned} E_s = E[|s|^2] &= \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M |s_n|^2 \\ &= \frac{1}{M} \cdot 4 \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{M}}{2}} \sum_{m=1}^{\frac{\sqrt{M}}{2}} [(2n-1)^2 + (2m-1)^2] \\ &= \frac{1}{M} \cdot 4 \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{M}}{2}} \sum_{m=1}^{\frac{\sqrt{M}}{2}} [(2n-1)^2] + \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{M}}{2}} \sum_{m=1}^{\frac{\sqrt{M}}{2}} [(2m-1)^2] \\ &= \frac{1}{M} \cdot 4 \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{M}}{2}} \sum_{m=1}^{\frac{\sqrt{M}}{2}} [(2n-1)^2] \cdot 2 \\ &= \frac{1}{M} \cdot 4 \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{M}}{2}} [(2n-1)^2 \cdot \sqrt{M}] \\ &= \frac{4}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{M}}{2}} [4n^2 - 4n + 1] \\ &= \frac{2}{3}(M-1) \end{aligned} \quad (13)$$

(13)에서의 결과를 토대로 normalization이 이뤄진 alphabet을 구할 수 있다.

$$normalized\ alphabet = \left[ \pm \frac{2n-1}{\sqrt{\frac{2}{3}(M-1)}} \pm j \cdot \frac{2n-1}{\sqrt{\frac{2}{3}(M-1)}} \right] \quad n \in \{1, 2, \dots, \sqrt{M}\} \quad (14)$$

해당 결과를 토대로 다시 평균 전력을 구한다면  $E_s$ 가 1W임을 확인할 수 있다.

#### 참고자료

다음은 16-QAM의 Constellation이다.

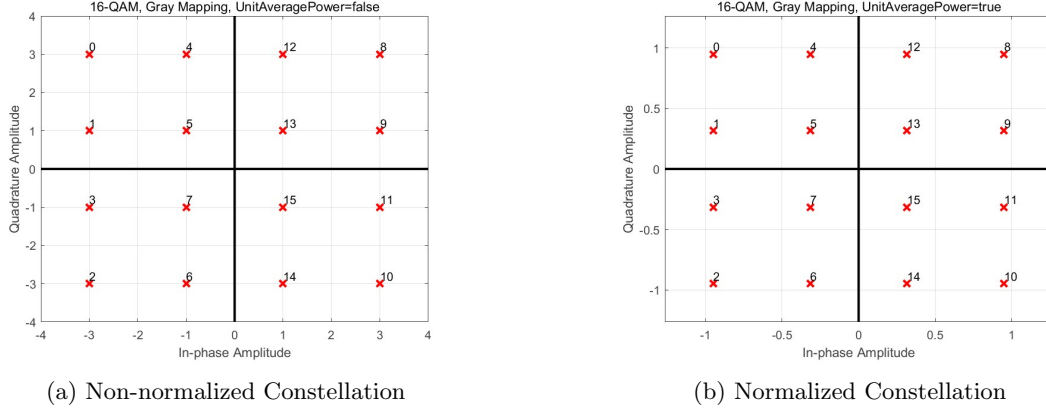


Figure 3: 16-QAM Constellation

### 2.3 Binary Modulation, 4-QAM에서 ZF, MMSE간 BER 일치 현상

실험 결과에 따르면, **Binary Modulation**일 때와 **4-QAM**일 때 ZF 혹은 MMSE 방식을 사용한지와 무관하게 BER이 동일한 것을 관찰할 수 있었다.

ZF와 MMSE에 해당하는 조건식들은 다음과 같다.

$$\hat{s} = \underset{s}{\operatorname{argmin}} |z - s|^2 \quad (15)$$

$$z = w(hs + n) \quad (16)$$

$$w_{ZF} = (h)^{-1} \quad (17)$$

$$w_{MMSE} = (|h|^2 + 1/\rho)^{-1} h^* \quad (18)$$

$z$ 는 post-processing signal에 해당된다. ZF와 MMSE, 각각의 post-processing signal을 살펴보겠다.

#### ZF의 Post-processing Signal

$$\begin{aligned} z_{ZF} &= w_{ZF}(hs + n) \\ &= h^{-1}(hs + n) \\ &= s + \frac{n}{h} \end{aligned} \quad (19)$$

#### MMSE의 Post-processing Signal

$$\begin{aligned} z_{MMSE} &= w_{MMSE}(hs + n) \\ &= (|h|^2 + 1/\rho)^{-1} h^* (hs + n) \\ &= (|h|^2 + 1/\rho)^{-1} h^* h (s + \frac{n}{h}) \end{aligned} \quad (20)$$

위의 결과를 토대로 다음과 같이 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned} z_{MMSE} &= (|h|^2 + 1/\rho)^{-1} h^* h \cdot z_{ZF} \\ \operatorname{sgn}(z_{MMSE}) &= \operatorname{sgn}((|h|^2 + 1/\rho)^{-1} h^* h \cdot z_{ZF}) \\ &= \operatorname{sgn}(z_{ZF}) \quad (\because A \in \mathbb{R} \text{ and } A \geq 0 \mid A = (|h|^2 + 1/\rho)^{-1} h^* h) \end{aligned} \quad (21)$$

*Complex signum*의 정의에 따라,  $\operatorname{sgn}(z) = \frac{z}{|z|}$ 임을 따르면,  $\operatorname{sgn}(z_{MMSE}) = \operatorname{sgn}(z_{ZF})$ 라는 것은 극 좌표계로 나타냈을 때의 각도가 같다는 것을 의미한다. **Binary modulation**이나 **4-QAM**의 경우 신호의 감지에 **amplitude**가 아닌 **phase**에만 영향을 받기 때문에  $z$ 의 값의 phase가 같은 ZF와 MMSE는 BER이 동일해진다.

```

>> [theta_zf, rho_zf] = cart2pol(real(DetectionSymbolSequence_ZF), imag(DetectionSymbolSequence_ZF));
>> [theta_mmse, rho_mmse] = cart2pol(real(DetectionSymbolSequence_MMSE), imag(DetectionSymbolSequence_MMSE));
>> max(abs(theta_zf-theta_mmse))

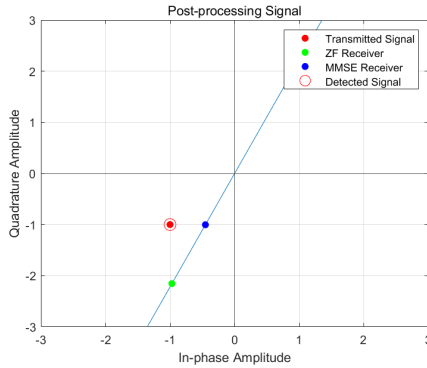
ans =

4.4409e-16

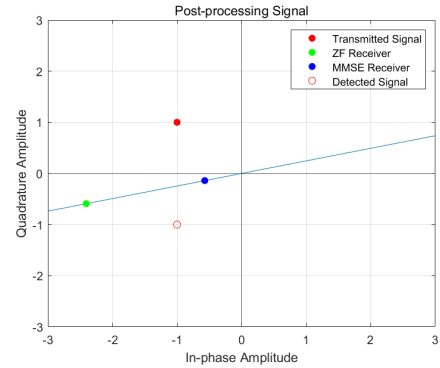
```

Figure 4: EsN0=5dB

**Figure 4**는 *Matlab*을 통해  $z_{MMSE}$ 와  $z_{ZF}$ 를 직교좌표계로 바꾼 뒤, 두  $\theta$  값을 비교한 것이다.  $\theta$ 값의 차이 중 가장 큰 값은  $4.4409e^{-16}$ 이었다. 이는 매우 작은 값으로 컴퓨터가 가지는 'finite precision'로 인해 생겨난 오차로 생각할 수 있다. 그러므로 모든 경우에 대해서  $\theta_{MMSE} - \theta_{ZF} = 0$ 로 생각할 수 있다. 즉, 실험적으로도  $\theta_{MMSE} = \theta_{ZF}$ 이 성립함을 확인한 것이다. **Figure 5**의  $z_{MMSE}$ 와  $z_{ZF}$ 가 하나의 직선 위에 나타난 것을 통해 이를 시각적으로도 확인할 수 있다.



(a) Correct Detection Example



(b) Signal Detection Error Example

Figure 5: 4-QAM의 ZF, MMSE Post-processing Signal Example

## 2.4 ZF와 MLD간 BER의 동일성

$\hat{s}$ 를 감지된 신호라고 하자.

$$\begin{aligned}
 \hat{s}_{ZF} &= \underset{s}{\operatorname{argmin}} |z - s|^2 \\
 &= \underset{s}{\operatorname{argmin}} |wy - s|^2 \\
 &= \underset{s}{\operatorname{argmin}} \left| \frac{y}{h} - s \right|^2 \\
 &= \underset{s}{\operatorname{argmin}} \left| \frac{y - hs}{h} \right|^2
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\hat{s}_{ML} = \underset{s}{\operatorname{argmin}} |y - hs|^2 \tag{23}$$

$\underset{s}{\operatorname{argmin}} \left| \frac{y - hs}{h} \right|^2 = \underset{s}{\operatorname{argmin}} |y - hs|^2$ 이 성립한다면  $\hat{s}_{ZF} = \hat{s}_{ML}$  또한 성립한다.

$y - hs = \alpha \angle \theta$ ,  $h = \gamma \angle \phi$ 라 하자.

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{y - hs}{h} \right| &= \left| \frac{\alpha \angle \theta}{\gamma \angle \phi} \right| \\
 &= \left| \frac{\alpha}{\gamma} \angle (\theta - \phi) \right| \\
 &= \frac{\alpha}{\gamma} \\
 &= \frac{|y - hs|}{|h|}
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{argmin}_s \left| \frac{y - hs}{h} \right|^2 &= \operatorname{argmin}_s \left( \frac{|y - hs|}{|h|} \right)^2 \\
 &= \operatorname{argmin}_s \left( \frac{|y - hs|}{\gamma} \right)^2 \\
 &= \operatorname{argmin}_s \frac{|y - hs|^2}{\gamma^2} \\
 &= \operatorname{argmin}_s |y - hs|^2
 \end{aligned} \tag{25}$$

$\operatorname{argmin}_s \left| \frac{y - hs}{h} \right|^2 = \operatorname{argmin}_s |y - hs|^2$ 이 성립하므로,  $\hat{s}_{ZF} = \hat{s}_{ML}$ 이다.

즉, 감지되는 신호가 같으므로 **ZF와 MLD의 BER은 modulation order와 관계없이 동일하다.**

### 3 Entire Code <sup>1</sup>

```

1 close all
2 clear
3 clc
4
5 % Simulation
6 M = [2 4 16]
7 Nt = 1;
8 NumberOfSignals = 10^2;
9 LengthBitSequence = Nt * NumberOfSignals*log2(M); % log2(M) bits per
   signal
10
11 NumberIteration = 10^3;
12
13 Es = 1;
14
15 EsNO_dB = -2:2:20;
16 EsNO = db2pow(EsNO_dB);
17
18 EbNO = EsNO / log2(M);
19 EbNO_dB = pow2db(EbNO);
20
21 ErrorCount_ZF = zeros(1, length(EbNO_dB));
22 ErrorCount_MMSE = zeros(1, length(EbNO_dB));
23 ErrorCount_MLD = zeros(1, length(EbNO_dB));
24

```

<sup>1</sup>Uploaded on [https://github.com/lightwick/ICS\\_project](https://github.com/lightwick/ICS_project)



```

25 alphabet = qammod([0:M-1], M, 'UnitAveragePower', true);
26
27 for iTot = 1 : NumberIteration
28     % Bit Generation
29     BitSequence = randi([0 1], 1, LengthBitSequence);
30     SymbolSequence = qammod(BitSequence.', M, 'InputType', 'bit', '
        UnitAveragePower', 1).';
31
32     % Noise (n) Generation
33     NoiseSequence = (randn(1, length(SymbolSequence)) + 1j * randn(1,
        length(SymbolSequence))) / sqrt(2);
34
35     % Channel (h) Generation
36     H = (randn(1, length(SymbolSequence)) + 1j * randn(1, length(
        SymbolSequence))) ./ sqrt(2);
37
38     for indx_EbN0 = 1 : length(EbN0)
39         % Received Signal (y = s + n) Generation
40         ReceivedSymbolSequence = H .* SymbolSequence + NoiseSequence *
            sqrt(1 / EsN0(indx_EbN0));
41
42         % ZF Receiver
43         w_zf = H.^(-1);
44         DetectionSymbolSequence_ZF = ReceivedSymbolSequence .* w_zf; %
            Detection (Zero-Forcing: y / h)
45
46         % MMSE Receiver
47         w_mmse = (abs(H).^2+1/EsN0(indx_EbN0)).^(-1) .* conj(H);
48         DetectionSymbolSequence_MMSE = ReceivedSymbolSequence .* w_mmse;;
49
50         % MLD Receiver;
51         arg = (ones(length(alphabet),1) * ReceivedSymbolSequence) - (
            alphabet.' * H);
52         arg = abs(arg).^2;
53         [val,idx] = min(arg);
54
55         % Symbol Sequence -> Bit Sequence
56         DetectionBitSequence_ZF = qamdemod(DetectionSymbolSequence_ZF.', M
            , 'OutputType', 'bit', 'UnitAveragePower', 1)'; % Detection
57         DetectionBitSequence_MMSE = qamdemod(DetectionSymbolSequence_MMSE
            .', M, 'OutputType', 'bit', 'UnitAveragePower', 1)'; % tmp
            value;
58         DetectionBitSequence_MLD = reshape(de2bi(idx-1, log2(M), 'left-msb
            '), 1, []);
59
60         ErrorCount_ZF(1, indx_EbN0) = ErrorCount_ZF(1, indx_EbN0) + sum(
            DetectionBitSequence_ZF~=BitSequence);
61         ErrorCount_MMSE(1, indx_EbN0) = ErrorCount_MMSE(1, indx_EbN0) +
            sum(DetectionBitSequence_MMSE~=BitSequence);
62         ErrorCount_MLD(1, indx_EbN0) = ErrorCount_MLD(1, indx_EbN0) + sum(
            DetectionBitSequence_MLD~=BitSequence);
63     end
64 end
65

```

```

66 BER_Simulation_ZF = ErrorCount_ZF / (LengthBitSequence * NumberIteration);
67 BER_Simulation_MMSE = ErrorCount_MMSE / (LengthBitSequence *
    NumberIteration);
68 BER_Simulation_MLD = ErrorCount_MLD / (LengthBitSequence * NumberIteration
    );
69
70 if M==2
71     BER_Theory = berfading(EbNO_dB, 'psk', 2, 1);
72 else
73     BER_Theory = berfading(EbNO_dB, 'qam', M, 1); % not sure if 'dataenc'
        needs to be specified; I don't even know what it does
74 end
75
76 % Plot
77 figure()
78 semilogy(EsNO_dB, BER_Theory, 'r--');
79 hold on
80 semilogy(EsNO_dB, BER_Simulation_ZF, 'bo');
81 semilogy(EsNO_dB, BER_Simulation_MMSE, 'bx');
82 semilogy(EsNO_dB, BER_Simulation_MLD, 'b^');
83
84
85 axis([-2 20 10^-3 0.5])
86 grid on
87 legend('Theory (Rayleigh)', 'ZF (Rayleigh)', 'MMSE (Rayleigh)', 'MLD (
    Rayleigh)');
88 xlabel('Es/No [dB]');
89 ylabel('BER');
90 title('BER for QAM (M='+string(M)+'')');

```