

História da Matemática

Os Elementos de Euclides

Wellington Menezes

Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

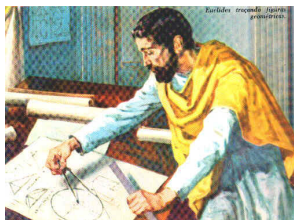
Fevereiro - 2022

- 1 Os Elementos de Euclides
- 2 Os Treze Livros
- 3 Livros I-IV
- 4 O Quinto Postulado de Euclides
- 5 Considerações Finais

Os Elementos de Euclides

A obra de Euclides, escrita em torno de 300 a. C é composta de 13 livros ou capítulos e reúne os conhecimentos de geometria, álgebra e aritmética. É uma obra que foi amplamente divulgada, sendo o livro mais editado após a Bíblia.

Reunindo o conhecimento das matemáticas de seu tempo e, embora algumas demonstrações sejam de autoria de Euclides, sua maior contribuição está na apresentação axiomática desse conhecimento.



- Os livros I-IV tratam de **geometria plana elementar**
- O livro V apresenta a teoria das proporções de Eudoxo na sua forma puramente geométrica
- O livro VI aplica-a semelhança de **figuras planas**
- Os livros VII-IX são dedicados à **teoria dos números**
- O livro X, o mais extenso de todos e muitas vezes considerado o mais difícil, contém a classificação geométrica de **irracionais quadráticos** e as suas raízes quadráticas
- Os livros XI-XIII ocupam-se com a **geometria sólida**

Conforme dito no slide anterior, os livros de I-IV tratam de geometria plana, partindo das mais elementares propriedades de rectas e ângulos conduzem à congruência de triângulos, à igualdade de áreas, ao teorema de Pitágoras.

Como a maioria dos treze livros, o livro I começa com uma lista de Definições (23, ao todo) sem qualquer comentário como, por exemplo, as de ponto, reta, círculo, triângulo, ângulo, paralelismo e perpendicularidade de retas tais como:

- Ponto é o, que não tem partes, ou o, que não tem grandeza alguma.
- Linha é o, que tem comprimento sem largura.
- As extremidades da linha são pontos.
- Linha reta é aquela, que está posta igualmente entre as suas extremidades.

Após as definições, aparecem os Postulados e as Noções Comuns ou Axiomas. Os Postulados são proposições geométricas específicas. "*Postular*" significa "*pedir para aceitar*". Assim, Euclides pede ao leitor para aceitar as cinco proposições geométricas que formula nos Postulados:

- 1 Póde-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.
- 2 Póde-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.
- 3 Póde-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.
- 4 Todos os ângulos retos são iguais.
- 5 Sejam duas retas m e n cortadas por uma terceira reta r . Se a soma dos ângulos formados é menor do que 180 graus, então m e n não são paralelas. Além disso, elas se intersectam do lado dos ângulos cuja soma é menor do que 180 graus.

O Quinto Postulado de Euclides

Proposição 28: *Sejam duas retas m e n cortadas por uma terceira reta r . Se a soma dos ângulos formados (ver figura 1.2) é 180 graus, então m e n são retas paralelas.*

$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow m \cap n = \emptyset \quad (1)$$

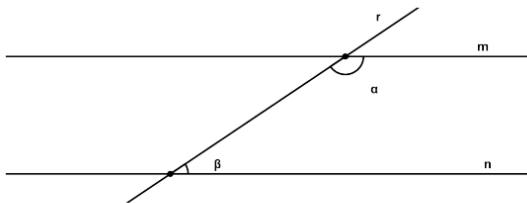


Figura 1.2: $\alpha + \beta = 180^\circ$.

O Quinto Postulado de Euclides

E a recíproca, é verdadeira? Ou seja, é verdade que

$$m \cap n = \emptyset \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ \quad (2)$$

A resposta a essa pergunta é complexa e levou mais de dois mil anos para ser entendida completamente. De fato, esta recíproca é exatamente o conteúdo do Postulado 5.

O Quinto Postulado de Euclides

Postulado 5. *Sejam duas retas m e n cortadas por uma terceira reta r . Se a soma dos ângulos formados (ver figura) é menor do que 180 graus, então m e n não são paralelas. Além disso, elas se intersectam do lado dos ângulos cuja soma é menor do que 180 graus.*

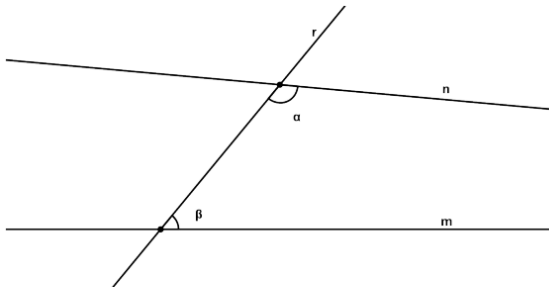
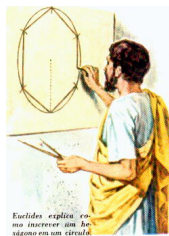


Figura 1.3: $\alpha + \beta < 180^\circ$.

Considerações Finais



Euclides compilou nos Elementos toda a geometria conhecida na sua época. Mas, não se limitou a reunir todo o conhecimento geométrico, ordenou-o e estruturou-o como ciência. Isto é, a partir de uns axiomas desenvolveu e demonstrou os teoremas e proposições geométricas, dando novas demonstrações quando as antigas não se adaptavam à nova ordem que havia dado às proposições. Além disso, esmiuçou a fundo as propriedades das figuras geométricas, das áreas e dos volumes e estabeleceu o conceito de lugar geométrico.