Cálculo IV

Rotacional e Divergente

Leidivania / Mirely / Wellington

Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

Agosto - 2021

Índice

Campo Vetorial em R^3

Definicão

Um campo vetorial no $\mathbb{R}^3$ *é um aplicação* $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, *onde* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Nesse caso, o campo vetorial pode ser escrito em termos de suas componentes P, Q, R da seguinte forma:

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

Onde, as funções reais de três variáveis $P, Q, R : \Omega$ são as funções componentes do campo vetorial.

É importante pensar em campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ como uma função que associa, a cada ponto $x, y, z \in \Omega$ um vetor $F(x, y, z)$.

Rotacional

Definicão

Considere um campo vetorial $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, *onde* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, *dado por* $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, *onde* P, Q, R *admitem derivadas parciais em* Ω. *O rotacional de* $\vec{F}$, *indicado por* $\nabla \times \vec{F}$ *(ou* $rot\vec{F}$*) é o campo vetorial definido em* Ω *dado por:*

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Onde $\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$.

Rotacional

Na definição do slide anterior, utilizamos o operador $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, chamado de operador *Nabla*

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Rotacional - Exemplos

Exemplo 1: Seja $\vec{F}(x,y,z) = 2x^2y\vec{i}, 3xz\vec{j}, -y\vec{k}$. Neste caso, $P(x,y,z) = 2x^2y, Q(x,y,z) = 3xz, R(x,y,z) = -y$. Então,

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 2x^2y & 3xz & -y \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial(-y)}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial(2x^2y)}{\partial z}\vec{j} + \frac{\partial(3xz)}{\partial x}\vec{k} \right)$$

$$- \left(\frac{\partial(-y)}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial(3xz)}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial(2x^2y)}{\partial y}\vec{k} \right)$$

$$= (-1 - 3x)\vec{i} + (3z - 2x^2)\vec{k}$$

Rotacional - Exemplos

Exemplo 2: Seja $\vec{F}(x,y,z) = (4x + 5yz\vec{i}, 5xz\vec{j}, 5xy\vec{k})$. Nesse caso, $P(x,y,z) = 4x + 5yz, Q(x,y,z) = 5xz, R(x,y,z) = 5xy$. Então,

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 4x + 5yz & 5xz & 5xy \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial(5xy)}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial(4x + 5yz)}{\partial z}\vec{j} + \frac{\partial(5xz)}{\partial x}\vec{k} \right)$$

$$- \left(\frac{\partial(5xy)}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial(5xz)}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial(4x + 5yz)}{\partial y}\vec{k} \right)$$

$$= (5x - 5x)\vec{i} + (5y - 5y)\vec{j} + (5z - 5z)\vec{k} = \vec{0}$$

Definicão

Seja $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo vetorial definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Suponha que P, Q, R admitem derivadas parciais em Ω. O divergente de $\vec{F}$, indicado por $\nabla \cdot \vec{F}$ (ou $div\vec{F}$) é o campo vetorial dado por:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

A expressão acima é dada por:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

A definição do slide anterior pode ser generalizada.

Se $\vec{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, então definimos o divergente de $\vec{F}$ por

$$\nabla \cdot \vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Fi}{\partial xi}.$$

Exemplo 1: Seja $\vec{F}(x,y,z) = (x^2y\vec{i}, 2xy\vec{j}, z^2\vec{k})$. Neste caso, $P(x,y,z) = x^2y, Q(x,y,z) = 2xy, R(x,y,z) = z^2$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x^2y, 2xy, z^2)$$

$$= \frac{\partial x^2y}{\partial x} + \frac{\partial 2xy}{\partial y} + \frac{\partial z^2}{\partial z}$$

$$= 2xy + 2x + 2z$$

Divergente - Exemplos

Exemplo 2: Seja $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{-mMG}{r^3}(x,y,z)$, onde m, M, G são constantes positivas.

Nesse caso, $P(x,y,z) = \dfrac{-mMGx}{r^3}, Q(x,y,z) = \dfrac{-mMGy}{r^3}, R(x,y,z) = \dfrac{-mMGz}{r^3}$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{-mMGx}{r^3}, \frac{-mMGy}{r^3}, \frac{-mMGz}{r^3}\right)$$

$$= \frac{\partial \dfrac{-mMGx}{r^3}}{\partial x} + \frac{\partial \dfrac{-mMGy}{r^3}}{\partial y} + \frac{\partial \dfrac{-mMGz}{r^3}}{\partial z}$$

$$= \frac{-mMGr^3}{r^6} + \frac{-mMGr^3}{r^6} + \frac{-mMGr^3}{r^6}$$

$$= \frac{-3mMGr^3}{r^6} = \frac{-3mMG}{r^3}$$

- **George Green (1793-1841)**:
    - Matemático autodidata
    - "Um ensaio sobre a aplicação da análise matemática às Teorias de Elasticidade e Magnetismo."
- **Gauss (1777-1855)**:
    - Príncipe dos matemáticos
    - Teorema de Gauss
- **Michal V. Ostrogradskij (1801-1861)**:
    - Declarou e provou a fórmula

- **Stokes (1819-1903):**
  - Referência em dinâmica dos fluídos, óptica e física matemática
  - Utiliza o rotacional em seu teorema e fórmula

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S rotF dS$$

Aplicações

- Mecânica dos fluídos
- Eletricidade
- Magnetismo

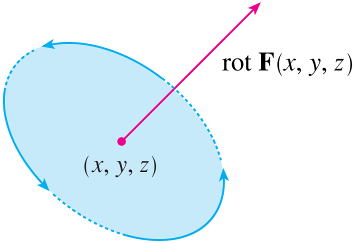
Interpretação física do rotacional

- A razão para o nome *rotacional* é que o vetor rotacional está associado com rotações.
- Outra ocorre quando F representa um campo de velocidade em mecânica dos fluidos.
- O rotacional de um campo de vetores que representa a velocidade de um fluido, está relacionado ao fenômeno de rotação do fluído. Existe uma relação entre rotacional e aspectos rotacionais do movimento.

Interpretação física do rotacional

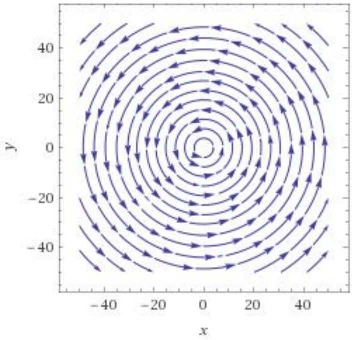
Seja F um campo de vetores que representa o campo de velocidade de um fluido e consideramos uma partícula situada no ponto $\vec{F}$.

As particulas situadas num vizinhança deste ponto, tendem a rodar em torno do eixo que aponta na direção do $rot\vec{F}(x, y, z)$, e o comprimento desse vetor rotacional é a medida de quão rápido as partículas se movem em torno desse eixo.



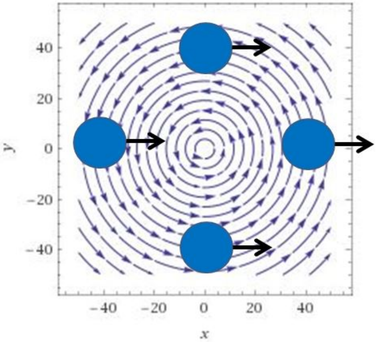
Interpretação física do rotacional

Como já dito, o rotacional pode ter sua representação física relacionada à capacidade de giro que uma parte infinitesimal de um campo vetorial apresenta. Para auxiliar na visualização, vamos imaginar um campo vetorial qualquer, tomo como exemplo a função $F(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.



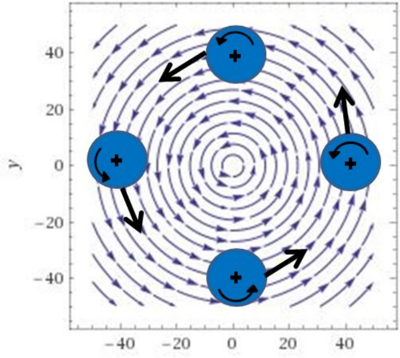
Interpretação física do rotacional

Então é colocado um disco dentro da água, e este disco tem um *"Norte"*, que consiste no seu sentido de orientação. Ao ser colocado dentro do campo vetorial o disco começa a se movimentar de forma circular, acompanhando o deslocamento da água, mas sem mudar seu sentido e direção, mantendo seu *"Norte"*. Este campo é dado como irrotacional.



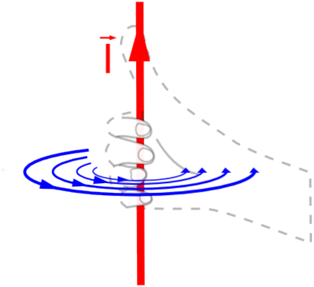
Interpretação física do rotacional

Agora imagine que outro disco é colocado dentro da água, só que desta vez, o centro do disco começa a se movimentar e girar em torno do seu prórpio eixo, ao longo do seu movimento, seu *"Norte"* muda de sentido e direção. Esta capacidade do disco girar ao longo do movimento pode ser interpretada como o rotacional do campo vetorial.



Interpretação física do rotacional

O rotacional pode ser obtido através da regra da mão direita, em que se posicionam os 4 dedos acompanhando o movimento de giro do disco, e por consequência, o polegar acaba apontando na direção do rotacional. No caso do disco, utilizando a regra, conclui-se que o rotacional está apontando para o eixo $\vec{k}$ positivo, isto é, para fora.



Para o campo $F(x,y)$ dado, tem-se:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Calculando-se então o determinante:

$$det = \left(\frac{\partial}{\partial y} \cdot 0 - \frac{\partial}{\partial z} \cdot x \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \cdot (-y) - \frac{\partial}{\partial x} \cdot 0 \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot x - \frac{\partial}{\partial x} \cdot (-y) \right)$$

Calculando as derivadas, tem-se então:

$$det = (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (1+1)\vec{k}$$

Interpretação física do divergente

A divergência mede a mudança na densidade de um liquido escoando de acordo com um dado campo vetorial.

- Interprete um campo vetorial como representando o escoamento de um fluido.
- A divergência é um operador que tem como entrada a função vetorial que define esse campo e dá como saída um função escalar que mede a variação da densidade do fluido em cada ponto do campo.
- Fórmulo da divergência:

$$div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \cdots$$

- Onde, $F_1, F_2, \ldots$ são funções componentes de $\vec{F}$.

Interpretação física do divergente

Digamos que, ao calcular a divergência de um função $\vec{F}$ em um certo ponto (x_0, y_0), encontramos um valor negativo.

$$\nabla \cdot \vec{F}(x_0, y_0) < 0$$

Isso significa que um fluido escoando segundo o campo vetorial definido por $\vec{F}$ tenderia a ficar **mais denso** no ponto (x_0, y_0).

Animação de um campo com divergência negativa na origem:

- Divergente Negativo

Por outro lado, se a divergência no ponto (x_0, y_0) for positiva,

$$\nabla \cdot \vec{F}(x_0, y_0) > 0$$

o fluido escoando de acordo com o campo vetorial se torna menos denso ao redor de (x_0, y_0).

Animação de um campo com divergência positiva:

- Divergente Positivo

Por fim, o conceito de divergência nula, ele indica que até mesmo se um fluido estiver escoando livremente, sua densidade se mantêm constante. Conveniente quando se modela fluido incompressível, como a água.

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0$$

Tais campos vetoriais são chamados de "divergência nula".

Animação de como o campo deve se parecer:

- Fluido incompressível

Da mesma forma, ao invés de pensar nos pontos com divergência positiva como se tornando menos densos durante um movimento momentâneo, esses pontos podem ser vistos como "fontes", constantemente gerando mais partículas do fluido.

$$\nabla \cdot \vec{F}(x_0, y_0) < 0$$

Animação de como deve ser a aparência de sumidouros

- Sumidouros

Fontes e Sumidoros

Às vezes, nos pontos com divergência negativa, ao invés de pensar em um fluido ficando mais denso após um movimento momentâneo, algumas pessoas imaginam o fluido sendo drenado naquele ponto enquanto o fluido escoa constantemente.

$$\nabla \cdot \vec{F}(x_0, y_0) > 0$$

Animação de como deve ser a aparência de fontes

- Fontes

Time

- Leidivania
- Mirely
- Wellington