Cálculo IV

Rotacional

Tamires Oliveira, Luiz Carlos, Wolker Viana

Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

Fevereiro - 2021

Índice

Rotacional

Definição: Considere um campo vetorial $\vec{F}$ no $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

onde P, Q, R admitem derivadas parciais.

O rotacional de F, denotado por $\nabla \times \vec{F}$ (ou $rot\ \vec{F}$) é o campo:

$$\begin{aligned} rot\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \end{aligned}$$

Na definição acima, utilizamos $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, chamado operador $nabla$.

Ex. 1: $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

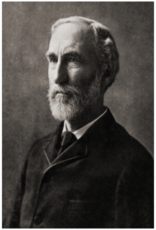
$$\begin{aligned}
rot\vec{F} &= \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ x & y & z & x & y \end{array} \right| \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{k} \\
&= \vec{0}
\end{aligned}$$

Ex. 2: $\vec{F}(x,y,z) = (2x^2y, 3xz, -y)$

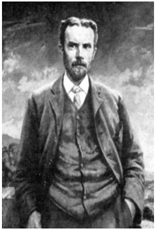
$$
\begin{aligned}
rot\vec{F} &= \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 2x^2y & 3xz & -y & 2x^2y & 3xz \end{array} \right| \\
&= \left(\frac{\partial(-y)}{\partial y} - \frac{\partial(3xz)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial(2x^2y)}{\partial z} - \frac{\partial(-y)}{\partial x} \right) \vec{j} \\
&+ \left(\frac{\partial(3xz)}{\partial x} - \frac{\partial(2x^2y)}{\partial y} \right) \vec{k} = (-1 - 3x)\vec{i} + (3z - 2x^2)\vec{k}
\end{aligned}
$$

A história do cálculo vetorial foi desenvolvida a partir da análise quarteniónica por Josiah Willard Gibbs (matemático, físico, químico e engenheiro) e Oliver Heaviside (matemático, físico, químico e engenheiro) em torno do século XIX.

Grande parte das notações e terminologias só foram estabelecidas em 1901, no livro *Vector Analysis*



(a) Gibbs



(b) Oliver

Teorema

Teorema. *Se f é um função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então o rotacional do gradiente de f é o vetor nulo, ou seja $rot(\nabla f) = 0$.*

Demonstração

Pelo teorema de **Clairaut-Schwarz**, temos:

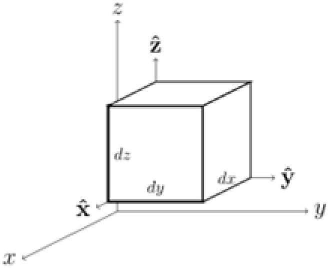
$$
\begin{aligned}
rot(\nabla f) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) \vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}
\end{aligned}
$$

Lembrando que no teorema de Clairaut-Schwarz fica estabelecido que, se as derivadas parciais existem e são contínuas, então são iguais.

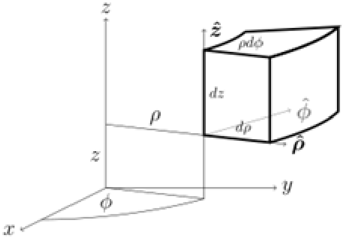
Corolário. *Se F é um campo vetorial conservativo, então $rotF = 0$.*

Desse modo, se $rotF \neq 0$, F não é um campo vetorial.

Coordenadas Cartesianas

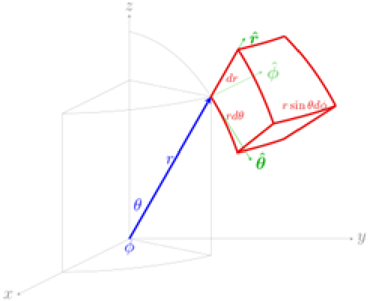


$$\nabla \times A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$



$$\nabla \times A = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_\rho}{\partial z} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{z}$$

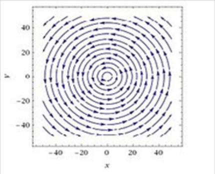
Coordenadas Esféricas



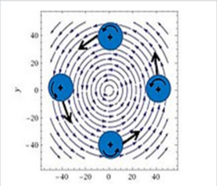
$$\nabla \times A = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi \sin\theta)\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\varphi}$$

- O rotacional de um campo vetorial mede o quanto ele se curva (rotacional) em torno de um dado ponto
- Por exemplo, em 2D o campo vetorial, segundo a regra da mão direita, aponta para a direção e sentido do versor $\hat{z}$.
- Algumas vezes, no estudo dos fenômenos físicos, nos defrontamos com situações nas quais o operador nabla é aplicado duas vezes (Vorticidade).



Representação do Campo Vetorial
F(x,y)= -yi +xj



Representação física do Rotacional

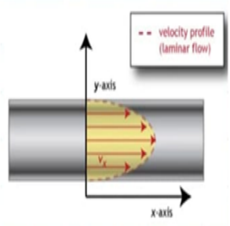
Mecânicas dos fluidos

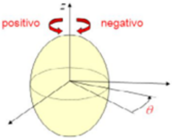
Presença de outro campo vetorial, que indica a magnitude e direção da rotação de qualquer ponto.

Positivo: anti-horário

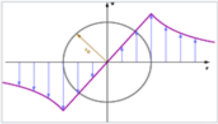
Negativo: horário

Regra da mão direita





Vorticidade x Equação de Stokes



A velocidade do fluido é nula no centro (chamado "olho do furacão") que é relativamente calma. Devido a diferença de pressão, o ar é "aspirado" das partes externas para a região central.[9]

Vorticidade x Equação de Stokes

$$\omega = \nabla \times \vec{v}$$

$$\nabla \times \vec{v} = \left\{ \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\partial}{\partial_y} & \frac{\partial}{\partial_z} \\ u & v & w \end{matrix} \right\}$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \omega \cdot \nabla u + v\nabla^2 \omega$$

(Equação de Navier-Stokes)