我们在平台中发端进入 IFFT 之前的数据叫做频域的数据， 经过 IFFT 之后叫时域的数据，时域数据与多径信道卷积，被接收到后去除 CP，然后经过 FFT 后进行频域的均衡和解调。

对于第二个题目，希望你写出频域的信道（2-28），频域的数据乘以频域的信道后进行频域的均衡和解调。

你要证明这两个过程的等价性。

%--

用数学的方式来描述一个 OFDM 符号时间内信号的传输函数，对于其他的 OFDM 符号，同样适用于此分析。经过 N 点 IFFT 的发射信号可以表示为：

$$\mathbf{s} = \left(s[0], s[1], \ldots s[N-1]\right)^T \tag{2-16}$$

其中 $\mathbf{A}^T$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置，假设循环前缀的长度为 N_{CP}，则添加上 CP 之后的发射信号可以表示为：

$$\tilde{\mathbf{s}} = \left(s[-N_{CP}], \ldots, s[-1], s[0], s[1], \ldots s[N-1]\right)^T \tag{2-17}$$

其中当 $n<0$ 时，$s[n]=s[n+N]$，当发射信号经过信道，时域接收信号可以表示为：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}} &= \left(y[-G], \ldots y[-1], y[0], y[1], \ldots y[N-1]\right) \\ &= \tilde{\mathbf{h}}\left(s[-N_{CP}-Q+1], \ldots, s[-1], s[0], s[1], \ldots s[N-1]\right)^T\end{aligned} \tag{2-18}$$

每个元素可以表示为类似于式(2-4)的形式：

$$y(n) = \sum_{q=0}^{Q-1} h[n,q]s[n-q] + w[n], \quad -N_{CP} \le n \le N-1 \tag{2-19}$$

而 $\tilde{\mathbf{h}}$ 是一个 $(N+N_{CP})\times(N+N_{CP}+Q-1)$ 维度的矩阵，可以表示为：

$$\tilde{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} h[-N_{CP},Q-1] & h[-N_{CP},Q-2] & \cdots & h[-N_{CP},0] & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h[-N_{CP}+1,Q-1] & h[-N_{CP}+1,Q-2] & \cdots & h[-N_{CP}+1,0] & 0 & \cdots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \cdots & h[N-2,0] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h[N-1,Q-1] & \cdots & h[N-1,0] \end{pmatrix}$$

(2-20)

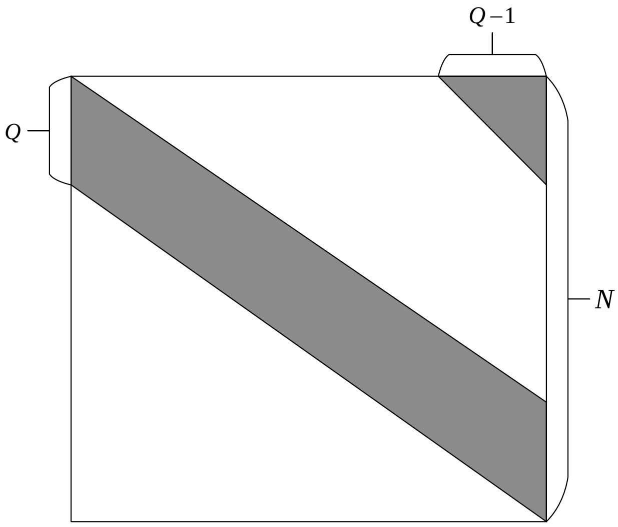
接收信号去掉循环前缀 CP 之后，得到 N 点时域信号：

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \left(y(0), y(1), \ldots, y(N-1)\right)^T \\ &= \mathbf{hs}\end{aligned} \tag{2-21}$$

循环前缀 CP 除了能避免符号间干扰，还能使得线性卷积变成圆卷积，所以时域信道矩阵$\mathbf{h}$是$N \times N$维度的卷积矩阵：

$$\mathbf{h}=\begin{pmatrix} h[0,0] & 0 & 0 & 0 & h[0,Q-1] & & h[0,1] \\ h[1,1] & h[1,0] & 0 & \cdots & \ldots & h[1,3] & h[1,2] \\ h[2,2] & h[2,1] & h[2,0] & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h[\mathrm{N}-1,Q-1] & \cdots & h[\mathrm{N}-1,0] \end{pmatrix} \tag{2-22}$$

$N \times N$维的卷积矩阵$\mathbf{h}$可以形象的用图 2-5 表示，阴影部分表示信道，这些信道数据分布在两个区域，一是对角线靠近左下方的区域，与对角线的距离小于等于$Q-1$，二是矩阵右上角的区域，呈一个边长为$Q-1$的三角形分布，而其余的位置则都没有信道数据，在矩阵中就是全零数据。



□ 2-5 OFDM □□□□□□□□□□□□□

接收端，时域信号经过傅里叶变换之后，转换到频域的信号传输函数可以表示为：

$$\mathbf{Y}=\mathbf{Fy}=\mathbf{FhF}^{H}\mathbf{X}+\mathbf{Fw} \tag{2-23}$$

其中$\mathbf{F}$表示$N \times N$维的标准归一化傅里叶变换矩阵，$\mathbf{X}$表示频域发射向量，$\mathbf{Y}$表示频域接收向量，$\mathbf{w}$表示噪声向量，$\mathbf{A}^{H}$表示矩阵$\mathbf{A}$的共轭转置：

$$\mathbf{X}=\left(X(0),X(1),\ldots,X(N-1)\right)^{T} \tag{2-24}$$

$$\mathbf{Y}=\left(Y(0),Y(1),\ldots,Y(N-1)\right)^{T} \tag{2-25}$$

$$\mathbf{w}=\left(w(0),w(1),\ldots,w(N-1)\right)^{T} \tag{2-26}$$

傅里叶变换矩阵 $\mathbf{F}$ 第 m 行第 n 列的元素可以表示为：

$$\mathbf{F}[\mathrm{m},\mathrm{n}]=\frac{1}{\sqrt{N}}\exp\left(-\frac{mn}{N}\right),\quad 0\le m,n\le N-1 \tag{2-27}$$

傅里叶反变换矩阵与 $\mathbf{F}$ 是共轭转置关系，所以频域信道矩阵可以表示为:

$$\mathbf{H}=\mathbf{F}\mathbf{h}\mathbf{F}^{H} \tag{2-28}$$

经过傅里叶变换之后噪声向量在频域可以表示为：

$$\mathbf{V}=\mathbf{F}\mathbf{w} \tag{2-29}$$

那么频域发射信号和接收信号之间的关系可以表示为：

$$\mathbf{Y}=\mathbf{H}\mathbf{X}+\mathbf{V} \tag{2-30}$$

通常在低速准静态环境下，信道的相干时间 Δt_c 远大于 OFDM 符号的持续时间，所以每条可分辨径的衰落系数在一个 OFDM 符号的持续时间内几乎不变，有：

$$h[0,q]\approx h[1,q]\approx\ldots\approx h[\mathrm{N}-1,q],\quad q=0,1,\mathrm{K}\ ,Q-1 \tag{2-31}$$

因此，时域信道矩阵 $\mathbf{h}$ 即为标准的循环移位矩阵，由矩阵运算可知，循环移位矩阵做式(2-28)的运算结果为理想的方阵，所以，信道的频域转移矩阵 $\mathbf{H}$ 近似为理想的对角阵，其对角线上的元素为：

$$H[k,k]=\sum_{q=0}^{Q-1}h(0,q)\exp\left(-\frac{j2\pi kq}{N}\right),\quad 0\le k\le N-1 \tag{2-32}$$

所以，在准静态的信道下，频域接收信号等于频域发射信号点乘信道增益，OFDM 系统采用循环前缀的结构，将线性卷积变成圆卷积，能有效的避免符号间干扰，并简化信道检测与均衡的复杂度，这是 OFDM 系统能广泛应用的一个优势。

%--------可能的话，进一步用仿真来验证下面的论述--

但是，如果在一个快速变化的环境下，一个 OFDM 符号内可分辨径的衰落系数变化剧烈，将破坏 $\mathbf{h}$ 的循环移位性质，那么 $\mathbf{H}$ 也不再是一个对角阵，其第 m 行 n 列的元素可以表示为：

$$H[m,n]=\frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{Q-1}h[p,q]\exp\left[\frac{j2\pi p(n-m)}{N}\right]\exp\left(-\frac{j2\pi nq}{N}\right) \tag{2-33}$$

因此，在高速移动场景下，频域信道矩阵 $\mathbf{H}$ 非对角线上的元素上就会带来 OFDM 系统的载波间干扰。