



通信网理论基础

第四章 通信网络性能分析

彭木根

(pmg@bupt.edu.cn)

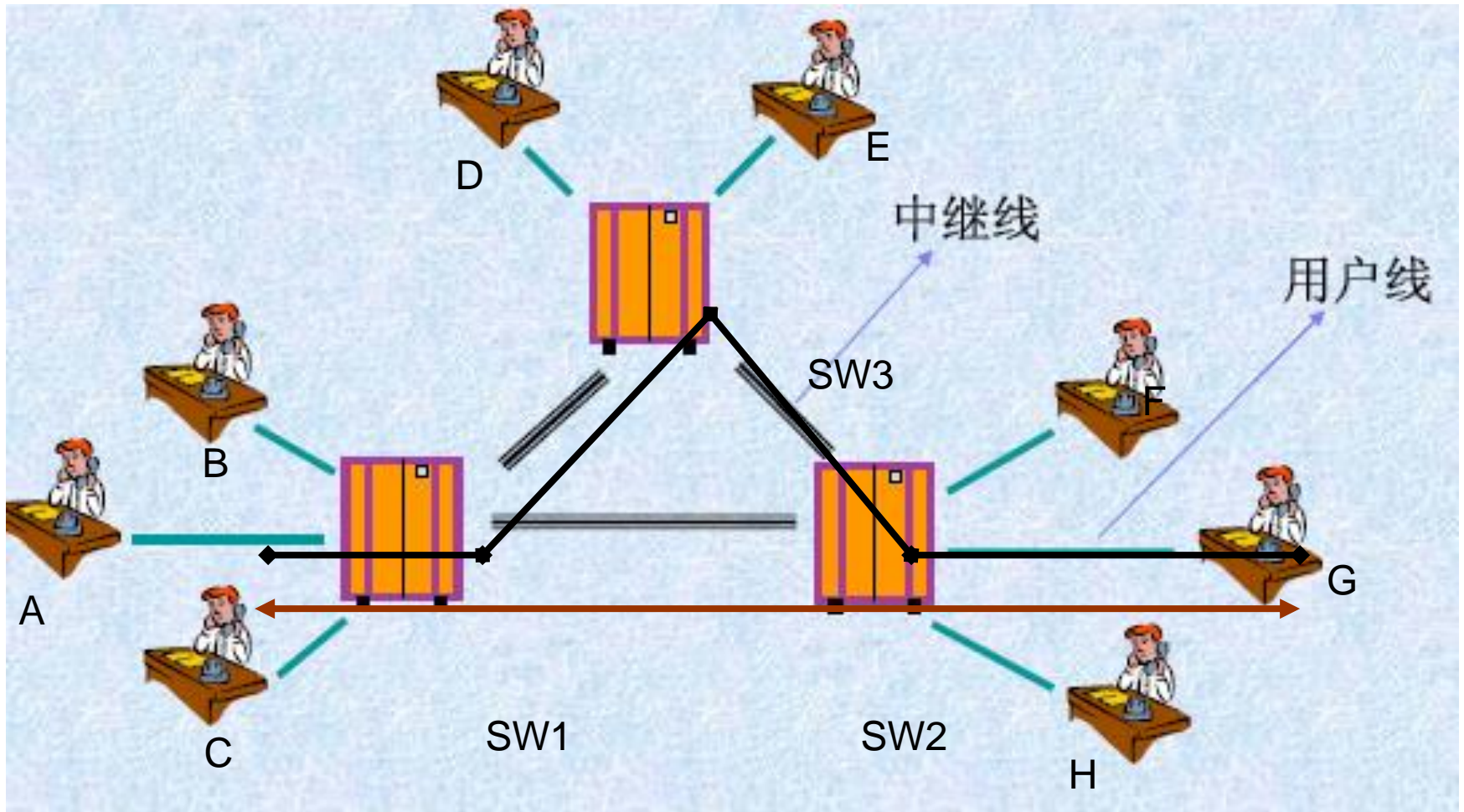
北京邮电大学无线信号处理与网络实验室



目录

- ▶ **4.1 引言**
- ▶ 4.2 重复呼叫流呼损计算
- ▶ 4.3 迂回呼叫流呼损计算
- ▶ 4.4 电话网络平均呼损
- ▶ 4.5 数据网络平均时延

4.1 引言





- ▶ 本章将在上一章的基础上，进一步讨论通信网的性能分析，完成网络的平均呼损近似计算和平均时延近似计算，了解网络各种优化模型。
- 对于网络这个整体，实际上有许多交换机，彼此之间相互影响。
- 一个单独交换系统或排队系统的分析是基础，但是不充分。



通信网络表示

▶ 以下四点可以理论上表示一个通信网络：

1 各节点之间呼叫量或包到达率；

2 网络拓扑结构；

3 网络容量配置；

4 网络路由规划

▶ 路由表

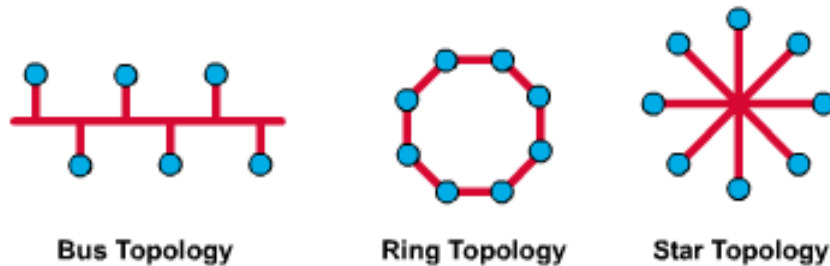
▶ 路由使用方式（使用顺序）

物理拓扑结构

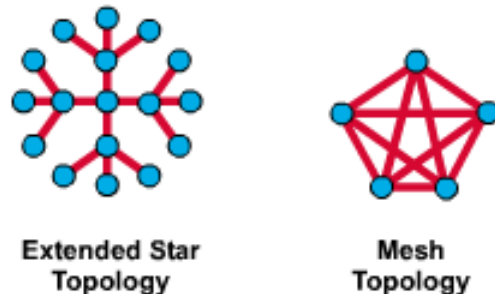
逻辑拓扑

服务对象

物理拓扑vs.逻辑拓扑

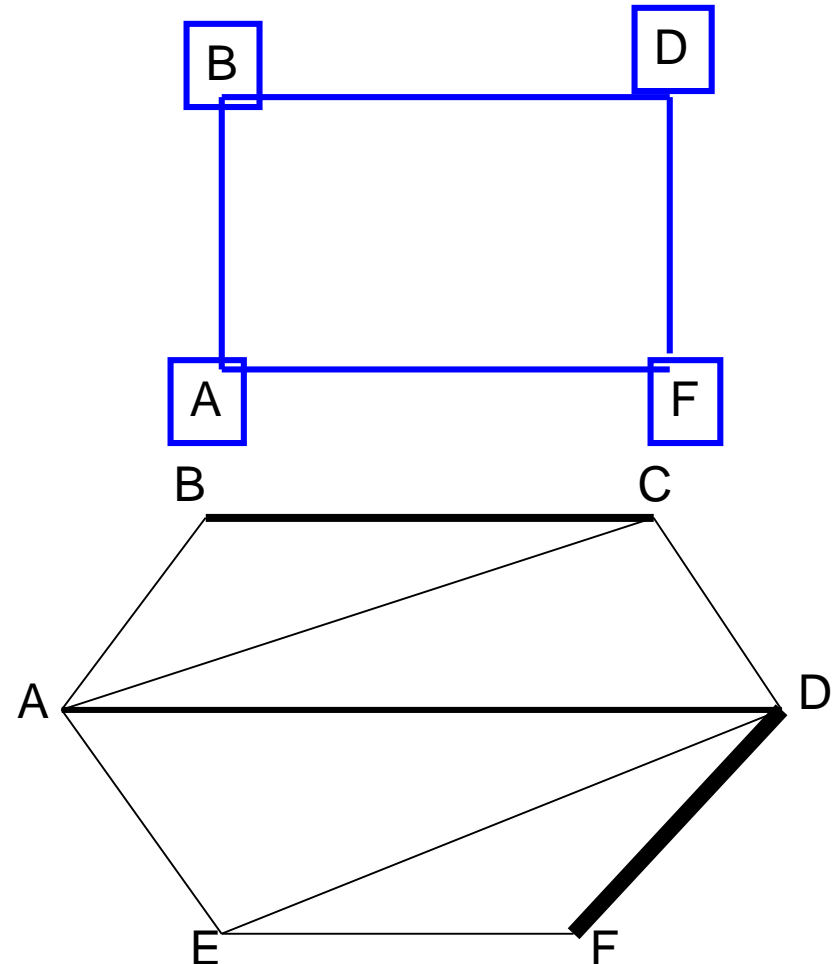
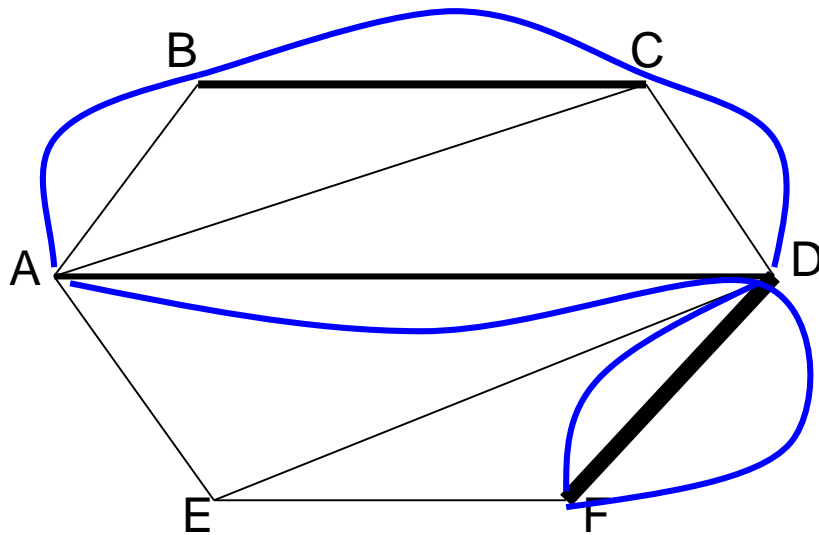


- ▶ **Physical topology** – 物理设备和媒介的规划



- ▶ **Logical topology** – 网络中，信号从一点到另一点经过的路径。

► 物理拓扑+路由规划→逻辑拓扑





通信网性能指标

- ▶ 电话网络：网络平均呼损
 - 如果能够计算任意端对端之间的呼损，则将其对呼叫量取加权平均得网络平均呼损。
- ▶ 数据网络：网络平均时延
 - 如果能够计算任意端对端之间的时延，则将其对包到达率取加权平均得网络平均时延。



- ▶ 网络用图 $G = (V, E)$ 表示, $|V| = n, |E| = m$
- ▶ 如果任意两点之间的呼叫量为

$$a_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

- ▶ 它们之间的呼损为: (利用 *Erlang* 公式) $P_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n$

- ▶ 全网平均呼损 =
$$\frac{\sum_{i < j} a_{ij} P_{i,j}}{\sum_{i < j} a_{ij}}$$



- ▶ 如果任意两点之间信息包的到达率为:

$$\lambda_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

- ▶ 它们之间的延迟为:

$$T_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$\text{全网平均延迟} = \frac{\sum_{i \neq j} \lambda_{ij} T_{ij}}{\sum_{i \neq j} \lambda_{ij}}$$

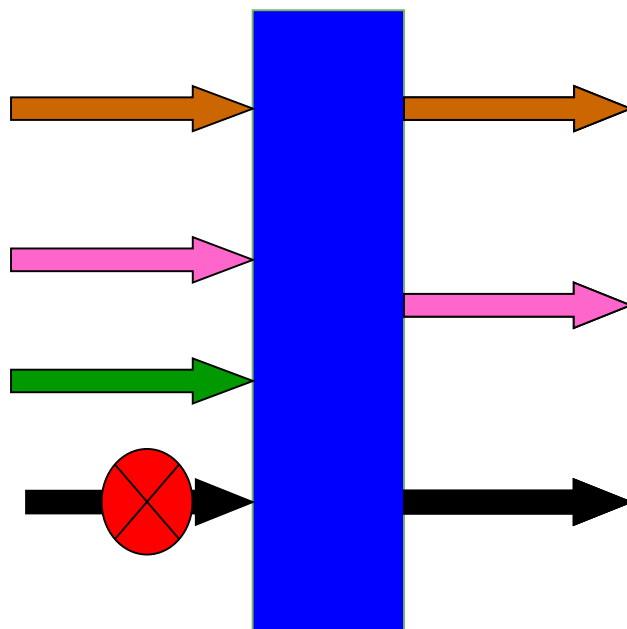


目录

- ▶ 4.1 引言
- ▶ **4.2 重复呼叫流呼损计算**
- ▶ 4.3 迂回呼叫流呼损计算
- ▶ 4.4 电话网络平均呼损
- ▶ 4.5 数据网络平均时延



4.2 重复呼叫流



考虑一个电话交换系统，有 s 条中继线，到达的呼叫量为 a ，由爱尔兰公式可得呼损 $B(s, a)$ 。这部分被拒绝的呼叫中会有一部分继续尝试呼叫，形成重复呼叫流。



重复呼叫流的呼损计算

- ▶ 一般来说，重复呼叫流不再是 $Poisson$ 过程。但是为了分析和计算简单，下面介绍的一个近似计算方法：
 - 假定重复呼叫流是 $Poisson$ 过程，这样原始呼叫流和重复呼叫流之和仍为 $Poisson$ 过程。



- ▶ 原始呼叫流为 a ，由于重复呼叫， Δa 为增加的呼叫量，则总呼叫量 a_R 为：

$$a_R = a + \Delta a$$

- ▶ 被拒绝的呼叫量为： $a_R B(s, a_R)$
- ▶ 如果 Δa 占被拒绝的呼叫量的比例为 ρ , ($0 \leq \rho \leq 1$)，则

$$a_R = a + \rho a_R B(s, a_R)$$



- ▶ 在给定了 a , s 和 ρ 之后, 可以通过上面的方程, 使用迭代的方法求 a_R , 呼损和通过的呼叫量。
- ▶ 实践表明, 当中继线群负荷较重时可以认为 $\rho \approx 1$ 。对一般的中继线群, 可以认为 $\rho \approx 0.55$ 。



- ▶ 例4.1 如果 $a=4.0\text{erl}$, $s=6$, $\rho=0.5$, 求 a_R , 呼损和通过的呼叫量。

解 令 $F(a_R) = a + \rho a_R B(s, a_R)$, 代入 $a=4.0\text{erl}$, $s=6$, $\rho=0.5$,
 $\Rightarrow F(a_R) = 4 + 0.5a_R B(6, a_R)$, 通过迭代求解

令 $a_R = 4$, $F(a_R) = 4.24$; 令 $a_R = 4.24$, $F(a_R) = 4.29$;

令 $a_R = 4.29$, $F(a_R) = 4.30$; 令 $a_R = 4.30$, $F(a_R) = 4.30$;

$\therefore a_R = 4.30$, 呼损 $B(6, a_R) = 0.139$

通过的呼叫量 $a' = a_R(1 - B(6, 4.30)) = 3.70\text{erl}$

如果没有重复呼叫,

呼损 $B(6, 4.0) = 0.128$, 通过呼叫量 $a' = 4 \times (1 - 0.128) = 3.49\text{erl}$



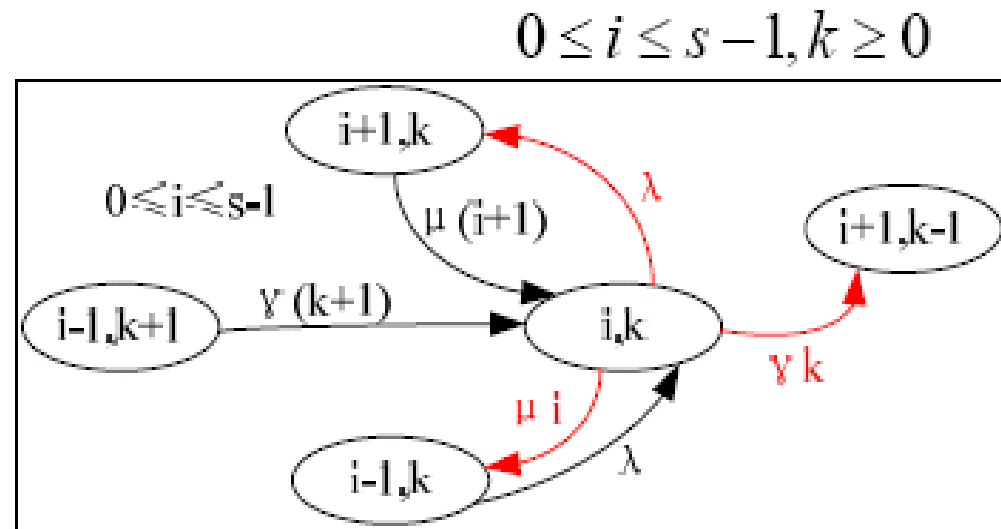
具有重复呼叫的拒绝系统模型

- ▶ 中继线容量为 s ，初始呼叫流的强度为 λ ，任意通话持续时间为 μ 参数的负指数分布。
- ▶ 在任一时刻 t 的状态，用二维变量 (i,k) 表示，其中 i 表示占用的中继数， k 表示重复呼叫话源的数目
- ▶ 对于每个重复呼叫流，它的呼叫流为参数的泊松过程。
- ▶ 在中继线全满时，初次呼叫将以概率 α 成为重复呼叫流，重复呼叫流将以概率 β 继续成为重复呼叫流。

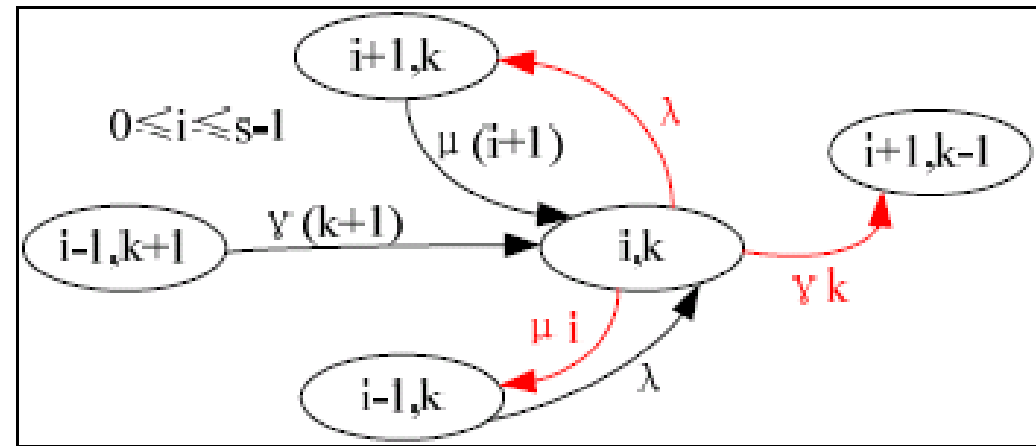
状态转移图1(1)

在状态 (i, k) 时, 各种可能的变化如下:

- 从 $(i-1, k)$ 到达一个初次呼叫进入 (i, k) , 到达率为 λ ;
- 从 $(i+1, k)$ 离开一个呼叫进入 (i, k) , 离去率为 $\mu(i+1)$;
- 从 $(i-1, k+1)$ 到达一个重复呼叫进入 (i, k) , 到达率为 $\gamma(k+1)$;
- 从 (i, k) 到达一个初次呼叫进入 $(i+1, k)$, 到达率为 λ ;
- 从 (i, k) 离开一个呼叫进入 $(i-1, k)$, 离去率为 μi ;
- 从 (i, k) 到达一个重复呼叫进入 $(i+1, k-1)$, 到达率为 γk ;



状态转移图1(2)



由此分析，可以建立稳态方程：

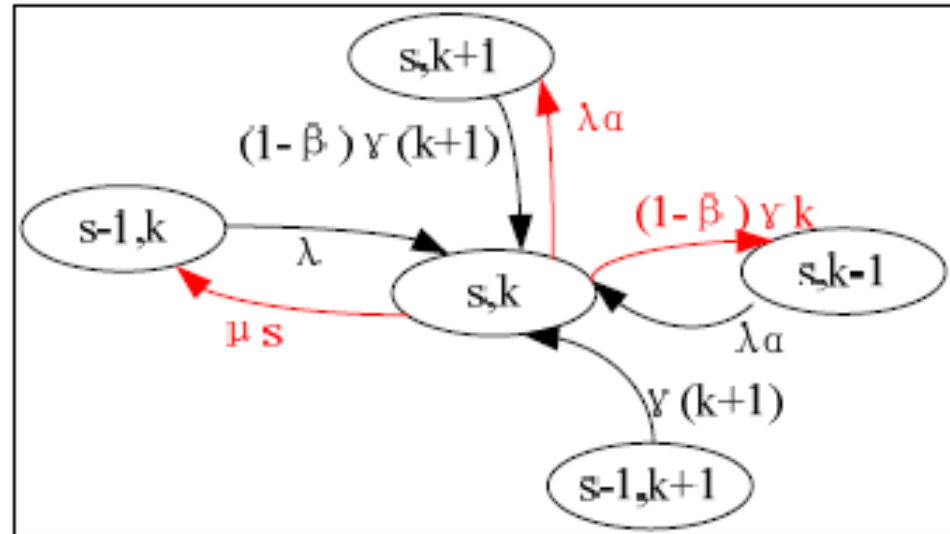
$$(\lambda + \mu i + \gamma k) p_{i,k} = \lambda p_{i-1,k} + \gamma(k+1) p_{i-1,k+1} + \mu(i+1) p_{i+1,k}$$

$$0 \leq i \leq s-1, \quad k \geq 0$$

状态转移图2(1)

在状态 (s, k) 时, 各种可能的变化如下:

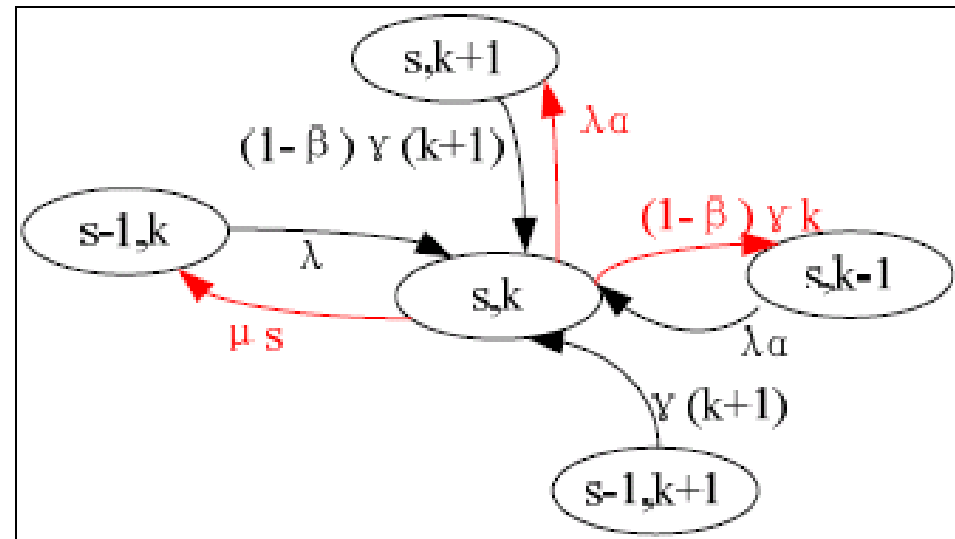
- 从 $(s-1, k)$ 到达一个初次呼叫进入 (s, k) , 到达率为 λ ;
- 从 $(s-1, k+1)$ 到达一个重复呼叫, 被接纳进入 (s, k) , 到达率为 $\gamma(k+1)$;
- 从 $(s, k-1)$ 到达一个初次呼叫, 被拒绝, 以概率 α 成为重复呼叫, 进入 (s, k) , 到达率为 $\alpha\lambda$;
- 从 $(s, k+1)$ 到达一个重复呼叫, 被拒绝, 以概率 β 成为重复呼叫, 则进入 (s, k) 的到达率为 $(1-\beta)\gamma(k+1)$;



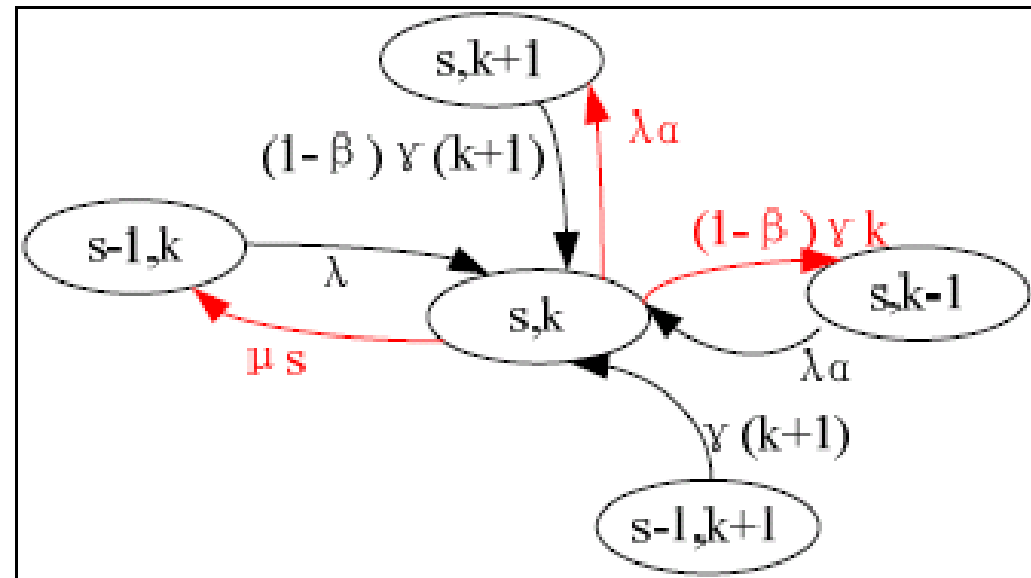
状态转移图2 (2)

在状态 (s, k) 时, 各种可能的变化如下:

- 从 (s, k) 离开一个呼叫进入 $(s-1, k)$, 离去率为 μs ;
- 从 (s, k) 到达一个初次呼叫, 被拒绝, 以概率 α 成为重复呼叫进入 $(s, k+1)$, 到达率为 $\alpha\lambda$;
- 从 (s, k) 到达一个重复呼叫, 被拒绝, 以概率 β 成为重复呼叫, 则进入 $(s, k-1)$ 的到达率为 $(1-\beta)\gamma k$;



状态转移图2 (3)



由此分析，可以建立稳态方程：

$$[\alpha\lambda + \mu s + \gamma k(1-\beta)]p_{s,k} =$$

$$\lambda p_{s-1,k} + \gamma(k+1)p_{s-1,k+1} + \alpha\lambda p_{s,k-1} + (1-\beta)\lambda(k+1)p_{s,k+1}$$

$$k \geq 0$$



状态转移图2 (4)

$$\begin{cases} (\lambda + \mu i + \gamma k) p_{i,k} = \lambda p_{i-1,k} + \gamma(k+1) p_{i-1,k+1} + \mu(i+1) p_{i+1,k} \\ [\alpha\lambda + \mu s + \gamma k(1-\beta)] p_{s,k} = \\ \quad \lambda p_{s-1,k} + \gamma(k+1) p_{s-1,k+1} + \alpha\lambda p_{s,k-1} + (1-\beta)\lambda(k+1) p_{s,k+1} \\ \sum_{i=0}^s \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k} = 1 \end{cases}$$

$$0 \leq i \leq s-1, \quad k \geq 0$$

$$\text{初次呼叫的呼损 } p_0 = \sum_{k=0}^{\infty} p_{s,k}, \quad \text{总呼损 } p_1 = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + k\gamma) p_{s,k}}{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^s (\lambda + k\gamma) p_{i,k}}$$

$$\text{初次呼叫的平均重复呼叫次数 } M = \frac{E[k]\gamma}{\lambda} = \frac{[\sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{i=0}^s p_{i,k}] \lambda}{\lambda}$$



目录

- ▶ 4.1 引言
- ▶ 4.2 重复呼叫流呼损计算
- ▶ **4.3 迂回呼叫流呼损计算**
- ▶ 4.4 电话网络平均呼损
- ▶ 4.5 数据网络平均时延



4.3 溢出呼叫流

- ▶ 4.3.1 溢出呼叫流的统计特征
- ▶ 考虑 *Erlang* 拒绝系统，到达的呼叫量为 a ，中继线数目为 s ，则拒绝概率为 $B(s, a)$ ，溢出的呼叫量为 $aB(s, a)$ 。
- ▶ 如果对于溢出的呼叫流，提供第2条路由，在第2条路由上，溢出呼叫流是否仍为 *Poisson* 过程呢？

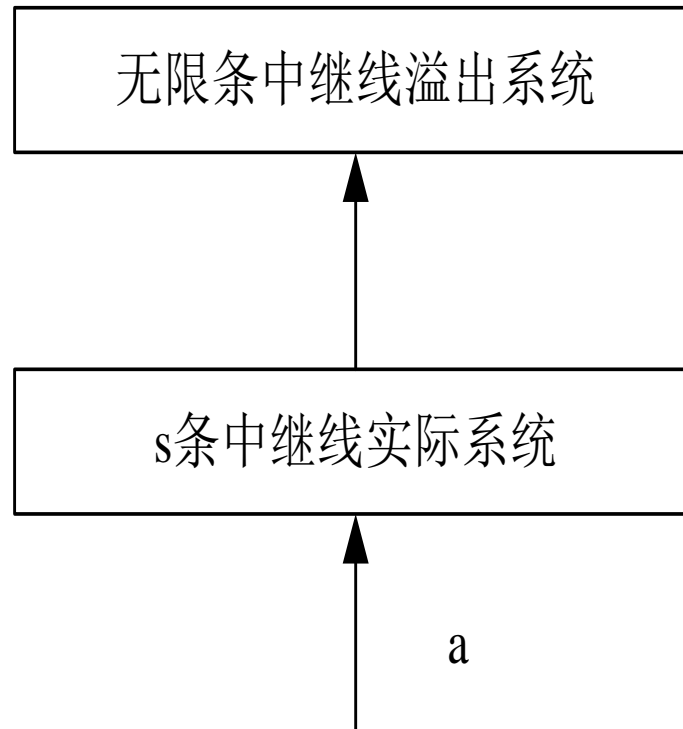
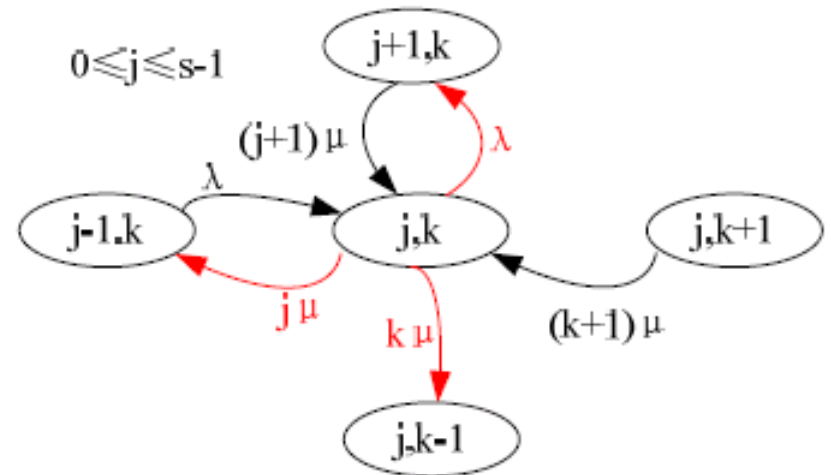


图4.2 溢出呼叫流



溢出呼叫流的稳态方程(1)

- 假如使用一个二元变量 $(j,k), 0 \leq j \leq s, k \geq 0$ 表示系统状态，其中 j 表示第一个系统的呼叫数， k 表示第二个系统中的呼叫数，用 $p(j,k)$ 表示状态 (j,k) 的概率。



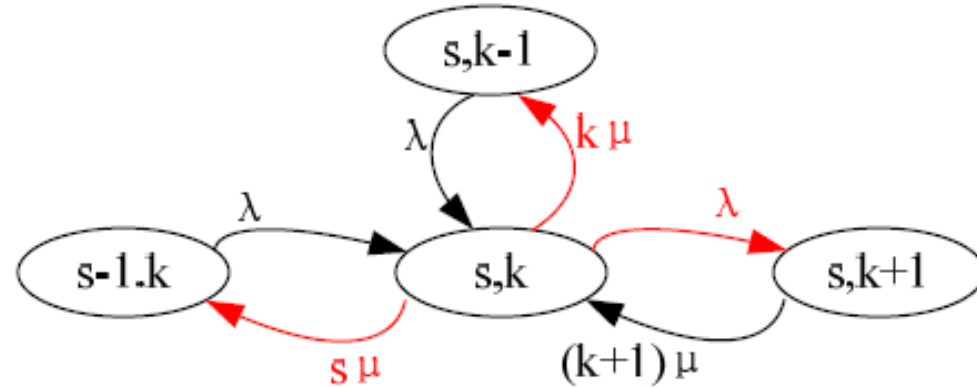
- 系统的稳态方程如下：

$$\lambda p_{j-1,k} + (j+1)\mu p_{j+1,k} + (k+1)\mu p_{j,k+1} = (\lambda + j\mu + k\mu) p_{j,k}$$

$$\Rightarrow \lambda p_{j-1,k} + (j+1)\mu p_{j+1,k} + (k+1)\mu p_{j,k+1} = (\lambda + j\mu + k\mu) p_{j,k}$$

$$0 \leq j \leq s-1, k \geq 0$$

溢出呼叫流的稳态方程(2)



● 系统的稳态方程如下：

$$\lambda p_{s-1,k} + \lambda p_{s,k-1} + (k+1)\mu p_{s,k+1} = (\lambda + s\mu + k\mu) p_{s,k}$$

$$\Rightarrow a p_{s-1,k} + a p_{s,k-1} + (k+1) p_{s,k+1} = (a + s + k) p_{s,k}$$

$$k \geq 0 \text{ 且 } p(s, -1) = 0$$

► 概率归一性

$$\sum_{j=0}^s \sum_{k=0}^{\infty} p(j, k) = 1$$



- ▶ 实际系统中呼叫数 j 的分布为:

$$p_j = \sum_{k=0}^{\infty} p(j, k)$$

- ▶ 溢出系统中呼叫数 k 的分布为:

$$q_k = \sum_{j=0}^s p(j, k)$$



定理4.1 (Wilkinson)

► 分布 $\{q_k\}$ 的均值 $\alpha = E[k]$ 和方差 $v = Var[k]$

► 定理4.1

$$\alpha = aB(s, a) \quad v = \alpha(1 - \alpha + \frac{a}{s + 1 + \alpha - a})$$



- ▶ 根据定理4.1，溢出呼叫流不是*Poisson*过程并可证明 $\nu > \alpha$
- ▶ 峰值因子 $z = \frac{\nu}{\alpha}$
- ▶ 例4.3 呼叫量 a 首先到达有 s 条中继线的第一路由，然后溢出呼叫量去第二路由，如果 $a = 15\text{erl}$ ， $s = 20$ ，计算：
 - 1 第一路由上通过的呼叫量和方差；
 - 2 到达第二路由上的呼叫量和方差；



求解示例 (1)

解： (1) 第一条路由呼叫数 k 的概率为

$$p_k = \frac{a^k}{k!} / \sum_{r=0}^s \frac{a^r}{r!}$$

通过的呼叫量为

$$a' = a[1 - B(s, a)] = 15[1 - B(20, 15)] = 14.31 \text{ erl}$$

通过的呼叫量的方差为

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{k=0}^s k^2 p_k - a'^2 = \sum_{k=1}^s k(k-1) p_k + a' - a'^2 \\ &= a^2(1 - p_{s-1} - p_s) + a(1 - p_s) - a^2(1 - p_s)^2 \\ &= a(1 - p_s - ap_{s-1} + ap_s - ap_s^2) \end{aligned}$$



求解示例 (2)

$$\because p_{s-1} = (1 - p_s)B(s-1, a)$$

$$\therefore v' = a' \{1 - a[B(s-1, a) - B(s, a)]\}$$

在 $s = 20$, $a = 15 \text{ erl}$ 时, $v' = 10.45$

$$\text{峰值因子 } z = \frac{v'}{a'} = 0.73$$

$$(2) \alpha = aB(s, a) = 15 \times 0.046 = 0.69 \text{ erl}$$

$$v = \alpha \left(1 - \alpha + \frac{a}{s + 1 + \alpha - a}\right) = 1.55$$

$$z = \frac{v}{\alpha} = 2.24$$

问题：泊松过程的
峰值因子是多少？



4.3.2 溢出呼叫流呼损的近似计算方法

- ▶ 溢出呼叫流不再是 $Poisson$ 过程，但是它的特征可以用它的均值和方差表示。
- ▶ 这个近似方法首先计算一个中继线群上到达总呼叫流的均值和方差，然后考虑一个等价系统，该系统的特征有两个参量，中继线数目 s 和到达的呼叫量 a ，然后依照图4.2中的概念计算该等价系统溢出呼叫量的均值和方差。

- ▶ 近似方法的目标是使这个均值和方差与实际系统中呼叫流的均值和方差一致，从而在知道实际系统中继线数目 c 后，可以依照*Erlang*呼损公式计算呼损。

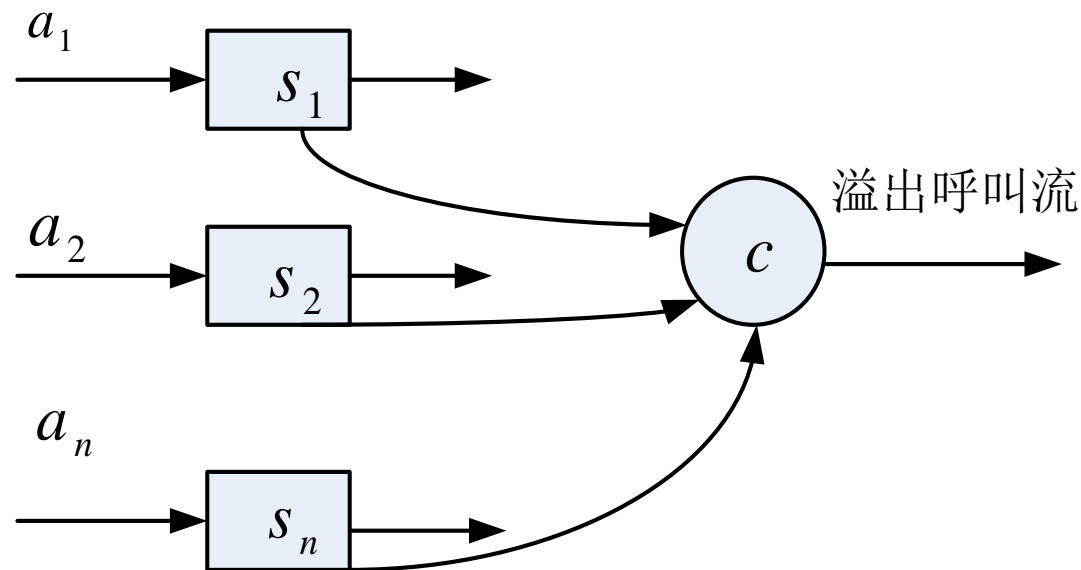


图4.3 溢出呼叫流的分析



- ▶ 每个中继线群的溢出呼叫量为:

$$\alpha_k = a_k B(s_k, a_k) \quad k=1,2,\dots,n$$

- ▶ 方差为:

$$v_k = \alpha_k \left(1 - \alpha_k + \frac{a_k}{s_k + 1 + \alpha_k - a_k} \right) \quad k=1,2,\dots,n$$

- ▶ 在备用中继线群上到达的总呼叫量和方差分别为:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$



呼损的近似计算方法 *Rapp*

- ▶ 第一步，计算 $z = \frac{v}{\alpha}$
- ▶ 第二步，令 $a = v + 3z(z - 1)$
然后， $s = \frac{a(\alpha + z)}{\alpha + z - 1} - \alpha - 1$

但 s 一般不为整数，向下取整，记为 $[s]$

- ▶ 第三步，重新计算

$$a = \frac{([s] + \alpha + 1)(\alpha + z - 1)}{\alpha + z}$$

有了等效系统的 a 和 $[s]$ ，通过它们就可以计算最后的呼损。



- ▶ 例4.4 在一个迂回路由上到达的呼叫量的特征如下： $\alpha = 3.88, v = 7.29$
- 请计算需要多少条中继线才能使最后的呼损小于0.01？被拒绝的呼叫量为多少？



求解

解：峰值因子 $z = \frac{v}{\alpha} = 1.88$

$$a = v + 3z(z - 1) = 7.29 + 3 \times 1.88 \times (1.88 - 1) = 12.25 \text{erl}$$

$$s = \frac{a(\alpha + z)}{\alpha + z - 1} - \alpha - 1 = \frac{12.25 \times (3.88 + 1.88)}{3.88 + 1.88 - 1} - 3.88 - 1 = 9.94$$

$$\therefore [s] = 9$$

$$a = \frac{([s] + \alpha + 1)(\alpha + z - 1)}{\alpha + z} = \frac{(9 + 3.88 + 1) \times (3.88 + 1.88 - 1)}{3.88 + 1.88} = 11.47$$

$$\because B(s + c, a) < 0.01 \quad \therefore s + c \geq 20, \text{ 即 } c \geq 11$$

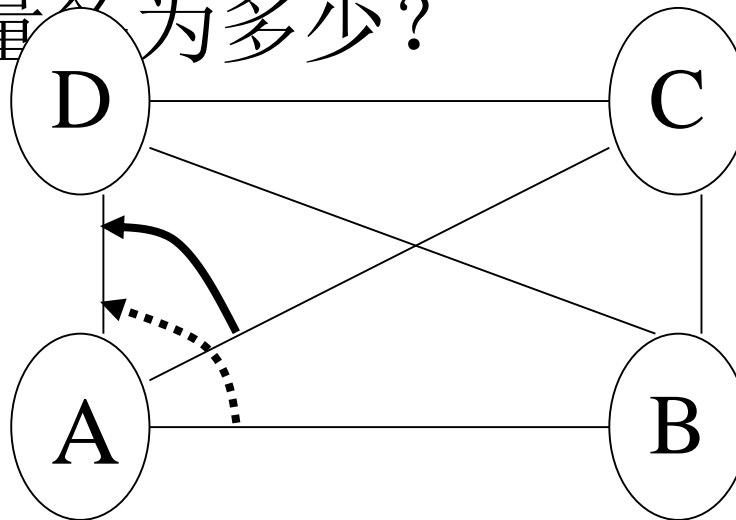
即需要11条中继线才可以使最后的呼损小于0.01

拒绝的呼叫量为：

$$aB(s + c, a) = 11.47 \times B(20, 11.47) = 0.115 \text{erl}$$

示例4.5

- ▶ 例4.5 在图4.4中，路由AD为AB和AC的迂回路由，AB和AC之间到达的呼叫流为 *Poisson*过程，且 $a_{AB} = 8.8\text{erl}$, $s_{AB} = 13$; $a_{AC} = 7.7\text{erl}$, $s_{AC} = 11$
- ▶ AB和AC的溢出呼叫量将去路由AD，如果AD的中继线数目为5。问：最后的呼损和拒绝呼叫量各为多少？





示例4.5求解 (1)

$$\text{解: } \alpha_{AB} = a_{AB} B(s_{AB}, a_{AB}) = 8.8 \times B(13, 8.8) = 0.431 \text{erl}$$

$$v_{AB} = \alpha_{AB} \left(1 - \alpha_{AB} + \frac{a_{AB}}{s_{AB} + 1 + \alpha_{AB} - a_{AB}} \right) = 0.919$$

$$\text{类似的, } \alpha_{AC} = 0.539 \text{erl}, v_{AC} = 1.106$$

在 AD 上, 溢出呼叫流的特征为

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_{AB} + \alpha_{AC} = 0.97 \\ v &= v_{AB} + v_{AC} = 2.026 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = \frac{v}{\alpha} = 2.088 \quad \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow a = v + 3z(z-1) = 8.840, \quad s = \frac{a(a+z)}{a+z-1} - a - 1 = 11.17$$

$$\Rightarrow \lfloor s \rfloor = 11 \quad \textcircled{2}$$



示例4.5求解 (2)

$$\Rightarrow a = \frac{(\lfloor s \rfloor + a + 1)(\alpha + z - 1)}{\alpha + z} = 8.729 \text{erl} \quad \textcircled{3}$$

\therefore 等效系统为 $a = 8.729 \text{erl}$, $s = 11$

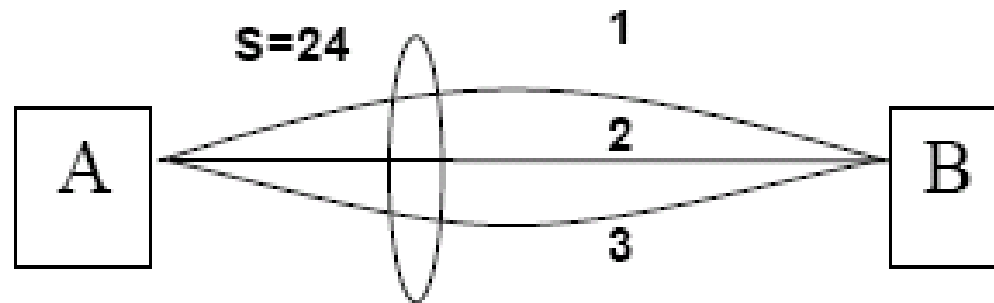
若 $c = 5$, 则呼损 $B(11 + 5.8, 8.729) = 0.009$

拒绝的呼叫量为 $8.729 \times B(11 + 5.8, 8.729) = 0.079 \text{erl}$

- Rapp的近似方法也可以应用在部分利用度的中继线群上, 完成呼损计算, 在例4.6中有一个部分利用度中继线群的简单例子。

示例4.6

- ▶ 例4.6 部分利用度中继线群，图4.5。



- A, B之间到达的呼叫量 $a=20$ erl, 呼叫规则如下:
 - A为主叫, 先尝试1号组, 如被拒绝则尝试2号组, 仍没有空闲中继线时, 拒绝该呼叫;
 - B为主叫, 先尝试3号组, 如被拒绝则尝试2号组, 仍没有空闲中继线时, 拒绝该呼叫;
- A和B作为主叫概率一样, 求被拒绝的呼叫量是多少?



示例4.6求解 (1)

解：中继线1组的溢出呼叫量的特征如下：

$$\text{溢出呼叫量 } \alpha_1 = aB(s, a) = 10 \times B(8, 10) = 3.383\text{erl}$$

$$\text{方差 } v_1 = \alpha_1 \left(1 - \alpha_1 + \frac{a}{s + 1 + \alpha_1 - a} \right) = 6.135$$

$$\text{则在中继线2组上有 } \begin{cases} \alpha = \alpha_1 + \alpha_3 = 6.766 \\ v = v_1 + v_3 = 12.27 \end{cases}$$

$$\text{利用Rapp方法, 有 } \begin{cases} z = \frac{v}{a} = 1.81 \\ a = v + 3z(z - 1) = 16.668 \\ s = \frac{a(\alpha + z)}{\alpha + z - 1} - \alpha - 1 = 11.102 \Rightarrow \lfloor s \rfloor = 11 \end{cases}$$



示例4.6求解 (2)

$$\Rightarrow a = \frac{(\lfloor s \rfloor + \alpha + 1)(\alpha + z - 1)}{\alpha + z} = 16.578 \text{erl}$$

因为中继线2组数为8，则最后的呼损为 $B(11+8, 16.578) = 0.1$

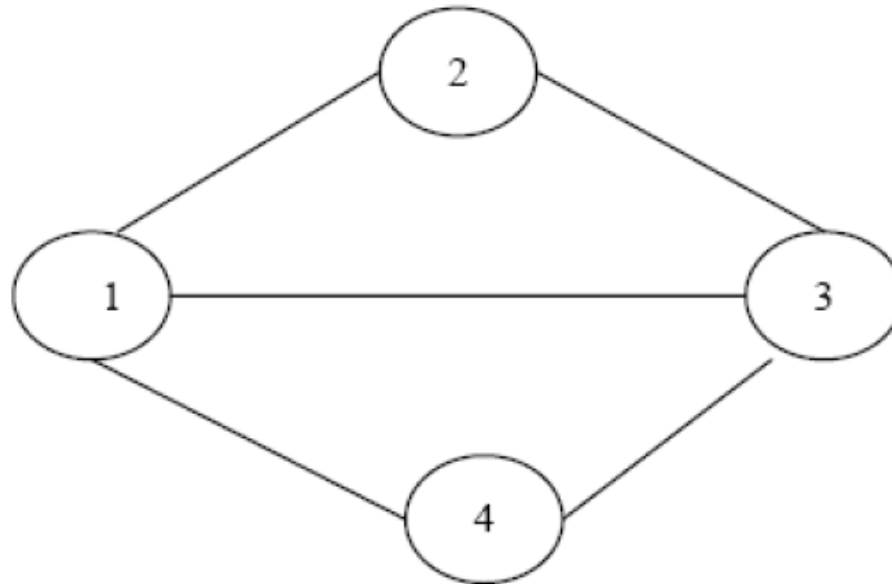
被拒绝的呼叫量为 $16.578 \times B(11+8, 16.578) = 1.66 \text{erl}$

如果是中继线群为全利用度，则呼损为 $B(24, 20) = 0.066$

被拒绝的呼叫量为 $20 \times B(24, 20) = 1.32 \text{erl}$

举一反三

- 如下图所示，1到2、1到3、1到4三对端点之间的呼叫量均为2 **erl**。1到3到有两个路由，第一路由为直达，第二路由经由2转接。其余端点之间只有直达路由。如果各条边的中继线数目均为3，计算：边(1,2)和边(1,4)上的呼损；或者计算端1到2、端1到4的呼损？





思路

- ▶ 先计算边13的溢出呼叫流

$$\alpha_{13} = aB(s, a):$$
$$v_{13} = \alpha_{13} \left(1 - \alpha_{13} + \frac{a}{s + 1 + \alpha_{13} - a} \right)$$

- ▶ 然后考察边12，均值和方差相加，再利用Rapp方法，计算等价业务量和等价中继线路数量
- ▶ 根据爱尔兰公式，计算得到边(1,2)的呼损
- ▶ 而对于边14,直接计算B（3，2）



目录

- ▶ 4.1 引言
- ▶ 4.2 重复呼叫流呼损计算
- ▶ 4.3 迂回呼叫流呼损计算
- ▶ **4.4 电话网络平均呼损**
- ▶ 4.5 数据网络平均时延



4.4电话网络平均呼损的计算

4.4.1端对端呼损计算

- ▶ *Erlang*呼损公式能够计算局部的呼损，现在考虑计算网络的平均呼损。
- ▶ 要完成网络呼损计算，必须计算出任意端对端之间的呼损。
- ▶ 网络中任意两端之间呼损的计算依赖于许多因素，下面首先考虑一些简单的情况。



串联情况

- 在图4.6中，端A和B之间的连接有 n 个边，如果能计算出每条边 i 的呼损 p_i ，并且这些概率相互独立，则A和B之间的呼损可以由下面的公式计算：

$$p_{AB} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$$

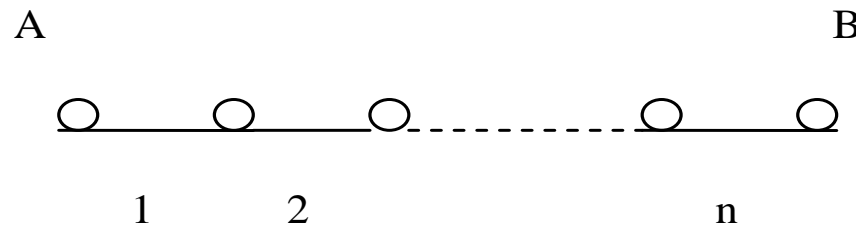


图 4.6 端对端呼损计算 1

并联情况

- 在图4.7中，端A和B之间有 n 条边不交的路由，假设AB之间的呼叫依次尝试 $1, 2, \dots, n$ 路由。如果能够计算出每条路由的呼损 p_i ，则A和B之间的呼损可计算

$$p_{AB} = \prod_{i=1}^n p_i$$

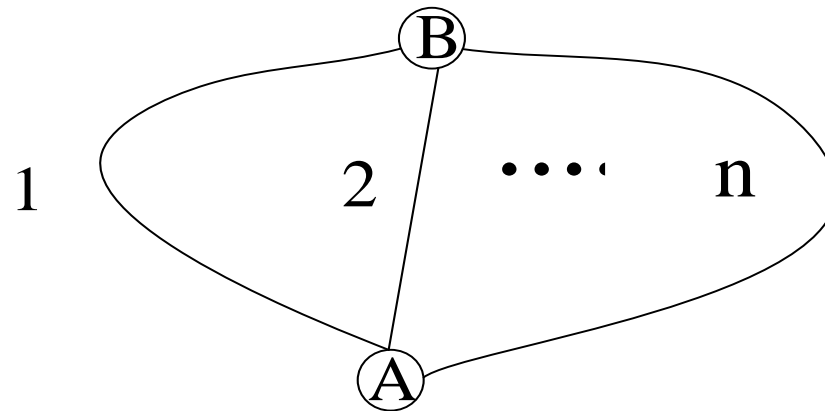


图4.7 端对端呼损计算2

- ▶ 例4.7 在图4.8的三角形网络中，如果各条边的中继线数目均为5，各端点之间的呼叫量均为 $a_{ij} = a$ 。有两种路由方法：第一种路由方法中，各端点对之间仅有直达路由；第二种路由方法中，各端点对之间除直达路由外，均有一条迂回路由。在 $a = 3, 4, 5 \text{ erl}$ 时，分别计算网络平均呼损。

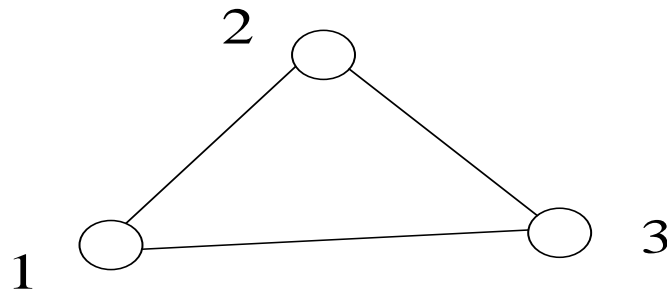


图4.8 例4.7题



解：(1) 第一种路由情况下，利用爱尔兰公式求解。

$$B(5,3) = 0.11, \quad B(5,4) = 0.20, \quad B(5,5) = 0.28$$

(2) 在第二种路由方法下，假设边 (i,j) 的阻塞率为 $b_{i,j}$ ，到达 (i,j) 的总呼叫量为 $A_{i,j}$ ，边 (i,j) 上的呼叫量 $A_{i,j}$ 由直达呼叫量和两种溢出呼叫量，具体到边 $(1,2)$ ，有

$$\begin{aligned} A_{1,2}(1-b_{1,2}) &= a_{1,2}(1-b_{1,2}) + a_{2,3}b_{2,3}(1-b_{1,2})(1-b_{1,3}) \\ &\quad + a_{1,3}b_{1,3}(1-b_{1,2})(1-b_{2,3}) \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad A_{1,2} = a_{1,2} + a_{2,3}b_{2,3}(1-b_{1,3}) + a_{1,3}b_{1,3}(1-b_{2,3})$$

$$\text{由爱尔兰公式，有} \begin{cases} B(s_{1,2}, A_{1,2}) = b_{1,2} \\ B(s_{1,3}, A_{1,3}) = b_{1,3} \\ B(s_{2,3}, A_{2,3}) = b_{2,3} \end{cases}, \text{ 可通过迭代求解}$$



各端之间呼损可以由下式计算

$$\begin{cases} p_{1,2} = b_{1,2}[1 - (1 - b_{1,3})(1 - b_{2,3})] \\ p_{2,3} = b_{2,3}[1 - (1 - b_{1,2})(1 - b_{1,3})] \\ p_{1,3} = b_{1,3}[1 - (1 - b_{2,3})(1 - b_{1,2})] \end{cases}$$

已知 $s_{1,2} = s_{1,3} = s_{2,3} = 5$, $a_{1,2} = a_{1,3} = a_{2,3}$ 下, 则 $b_{1,2} = b_{1,3} = b_{2,3} = b$,
可以将前式简写为 $B(s, A) = b$, 其中 $A = a + 2ab(1 - b)$ 。

迭代可求解

$$\begin{cases} a = 3 \text{ 时, } b \approx 0.19, \\ a = 4 \text{ 时, } b \approx 0.35, \\ a = 5 \text{ 时, } b \approx 0.45, \end{cases}$$

$$p \approx 0.07$$

$$p \approx 0.20$$

$$p \approx 0.31$$

$$\begin{cases} B(5, 3) = 0.11 \\ B(5, 4) = 0.20 \\ B(5, 5) = 0.28 \end{cases}$$



- ▶ 一般来说，在网络负荷较轻时，提供合适迂回路由可以使网络呼损下降；但在越过负荷临界点后，迂回路由将使网络呼损上升。
- ▶ 对于一般网络，由于各端点之间的呼叫量不一样，负荷临界点的表现形式可以比较复杂。



举一反三

- ▶ 有3个中继线**a,b,c**串连，如果各中继线间的呼叫量均为1 *erl*，中继线的容量为2，请计算：
 - ▶ 1. 画出示意图，计算各中继线间的通过量；
 - ▶ 2. 计算各中继线间的呼损
 - ▶ 3. 计算整体的平均呼损。

- ▶ 有3个中继线**a,b,c**并连，如果各中继线间的呼叫量均为1 *erl*，中继线的容量为2，请计算：
 - ▶ 1. 画出示意图，计算各中继线间的通过量；
 - ▶ 2. 计算各中继线间的呼损
 - ▶ 3. 计算整体的平均呼损。



目录

- ▶ 4.1 引言
- ▶ 4.2 重复呼叫流呼损计算
- ▶ 4.3 迂回呼叫流呼损计算
- ▶ 4.4 电话网络平均呼损
- ▶ **4.5 数据网络平均时延**



4.5数据网络的平均时延

- ▶ 在已知下列四个条件下，考虑计算数据网络的平均时延。这四个条件是：
 - (1) 网络拓扑结构；
 - (2) 各端点之间到达率；
 - (3) 网络的容量配置；
 - (4) 网络的路由规划。



- ▶ 例3.7中，用 $M/M/1$ 模拟交换机的一个出端，包穿越交换机的平均系统时间 T

$$T = \frac{1}{\frac{c}{b} - \lambda} \quad (4.20)$$

- ▶ 上式中， λ 为到达端口的到达率， c 为线路速率， b 为平均包长。



- ▶ 与计算网络平均呼损类似，计算网络平均时延需要计算端对端时延。（4.20）中的计算对于信息交换更加合适，分组交换中如果使用（4.20）来计算误差会大一些。
- ▶ 在分组交换中，信息被分为许多较小的分组，同时有较多控制和应答等开销。故 *Kleinrock* 使用了更加复杂的模型去分析分组交换网络的时延。
- ▶ 为了简单起见，在本节中仅使用较简单的模型作分析。



- ▶ 另外，包在实际网络时，长度是不会变化的，但是 Kleinrock 发现那样分析较困难。
- ▶ Kleinrock 假设包在从一个交换机出来后，进入下一个交换机时，随机按负指数分布取一个新的长度，在这样的假设下考虑二次排队问题。



- ▶ 例4.8 二次排队问题。
- ▶ 包到达为参数 λ 的 *Poisson* 流，包长不定，服从负指数分布，平均包长为 b bit。图 4.9 是系统的示意图，包从第一个系统出来后将去第二个系统，两个信道的速率分别为 c_1 和 c_2 ，单位为 bit/s。

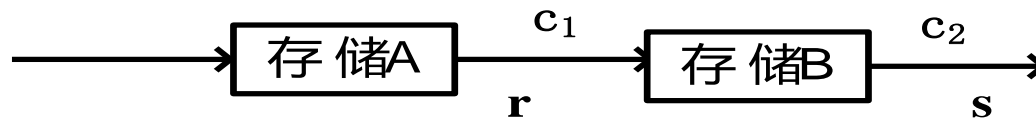


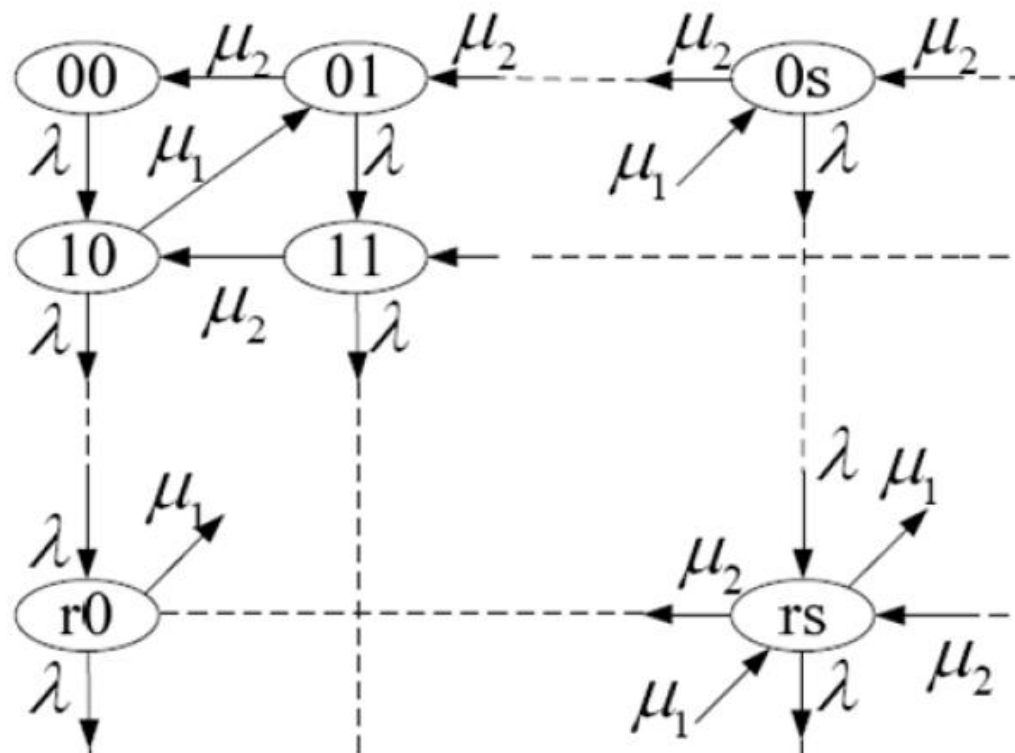
图4.9 二次排队系统



解：假定A和B的存储器足够大，为不拒绝系统。

两个系统的服务率为 $\mu_1 = \frac{c_1}{b}$, $\mu_2 = \frac{c_2}{b}$

设 r 为第1个排队系统中的包数， s 为第2个排队系统中的包数，





则有

$$\begin{cases} r = s = 0 & \lambda p_{0,0} = \mu_2 p_{0,1} \\ s = 0 & (\lambda + \mu_1) p_{r,0} = \lambda p_{r-1,0} + \mu_2 p_{r,1} \\ r = 0 & (\lambda + \mu_2) p_{0,s} = \mu_1 p_{1,s-1} + \mu_2 p_{0,s+1} \\ r > 0, s > 0 & (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) p_{r,s} = \lambda p_{r-1,s} + \mu_2 p_{r,s+1} + \mu_1 p_{r+1,s-1} \end{cases}$$

令通解形式为 $p_{r,s} = p_{0,0} x^r y^s$

代入方程得 $x = \frac{\lambda}{\mu_1} = \rho_1, y = \frac{\lambda}{\mu_2} = \rho_2 \Rightarrow p_{r,s} = p_{0,0} \rho_1^r \rho_2^s$

由概率归一性得: $\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} p_{r,s} = 1,$

则 $1 = p_{0,0} \sum_{r=0}^{\infty} \rho_1^r \sum_{s=0}^{\infty} \rho_2^s = \frac{p_{0,0}}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)} \Rightarrow p_{0,0} = (1-\rho_1)(1-\rho_2)$



稳态分布 $p_{r,s} = (1-\rho_1)(1-\rho_2)\rho_1^r \rho_2^s$

$\Rightarrow (r,s)$ 为两个独立随机变量，即

$$p_r = (1-\rho_1)\rho_1^r, \quad p_s = (1-\rho_2)\rho_2^s$$

全程系统时间为

$$\frac{1}{\mu_1(1-\rho_1)} + \frac{1}{\mu_2(1-\rho_2)} = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda} = \frac{1}{\frac{c_1}{b} - \lambda} + \frac{1}{\frac{c_2}{b} - \lambda}$$

该例说明，包穿越两个交换机的系统时间可以分开计算，这样大大简化了端对端时延的计算。



Kleinrock模型

- ▶ 例4.8说明，包穿越两个交换机的系统时间可以分开计算，这样大大简化了端对端时延的计算。下面来说明*Kleinrock*的模型。
- ▶ 如果网络用图 $G=(V,E)$ 表示， γ_{ij} 表示从端 i 到端 j 的到达率，一般来说 $\gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}$ 。令 $\gamma = \sum_{i \neq j} \gamma_{ij}$ 。



- ▶ 数据网络中可以有許多不同的路由规划，这里假设路由为固定的路由方法，并且每对端点之间有一个唯一的路由。
- ▶ 如果网络采用其他如动态或自适应路由时，这个模型不适合。



- ▶ 边 i 的容量或速率为 c_i ，由于端点之间的到达率 γ_{ij} 和路由已知。自然可以计算出每条边的到达率 λ_i ，另外包的长度服从负指数分布，平均包长为 b 。
- ▶ 在边 i 上，如果 $\frac{c_i}{b} > \lambda_i$ ，则包穿越边 i 的时间为：

$$T_i = \frac{1}{\frac{c_i}{b} - \lambda_i}$$



- ▶ 根据例4.8，端i到端j的时延可以这样计算，通过将该路由包含的诸链路上的时延求和，就可以得到 T_{ij} ，这样，网络平均时延为：

$$T = \frac{\sum_{i,j} \gamma_{ij} \cdot T_{ij}}{\sum_{i,j} \gamma_{ij}} = \frac{\sum_{i,j} \gamma_{ij} \cdot T_{ij}}{\gamma}$$

- ▶ 将上式中的 T_{ij} 展开成为它包含的诸 T_i 之和，则

$$T = \frac{\sum_i T_i \lambda_i}{\gamma}$$



例题：

- ▶ 例4.9有5个节点的网络如下图，每对端点之间有一对边，它们的容量是一样的；任意端点之间的到达率如下表，也是对称的。
- ▶ 路由为固定路由表，每对端点有唯一路由。路由方法如下：能直达就直达；需要转接的安排为： A, E 是 $A \rightarrow B \rightarrow E$ ； A, D 是 $A \rightarrow C \rightarrow D$ ； C, E 是 $C \rightarrow D \rightarrow E$ ；另一个方向也经过相同的节点。而链路容量（单位比特/秒）为：

$C_1 = C_2 = 3130$ ， $C_9 = C_{10} = 2990$ ， $C_3 = C_4 = 5390$ ，
 $C_5 = C_6 = 1340$ ， $C_7 = C_8 = 517$ ， $C_{11} = C_{12} = 3020$ ，
 $C_{13} = C_{14} = 2790$ 。平均包长 $b = 100 \text{ bit}$

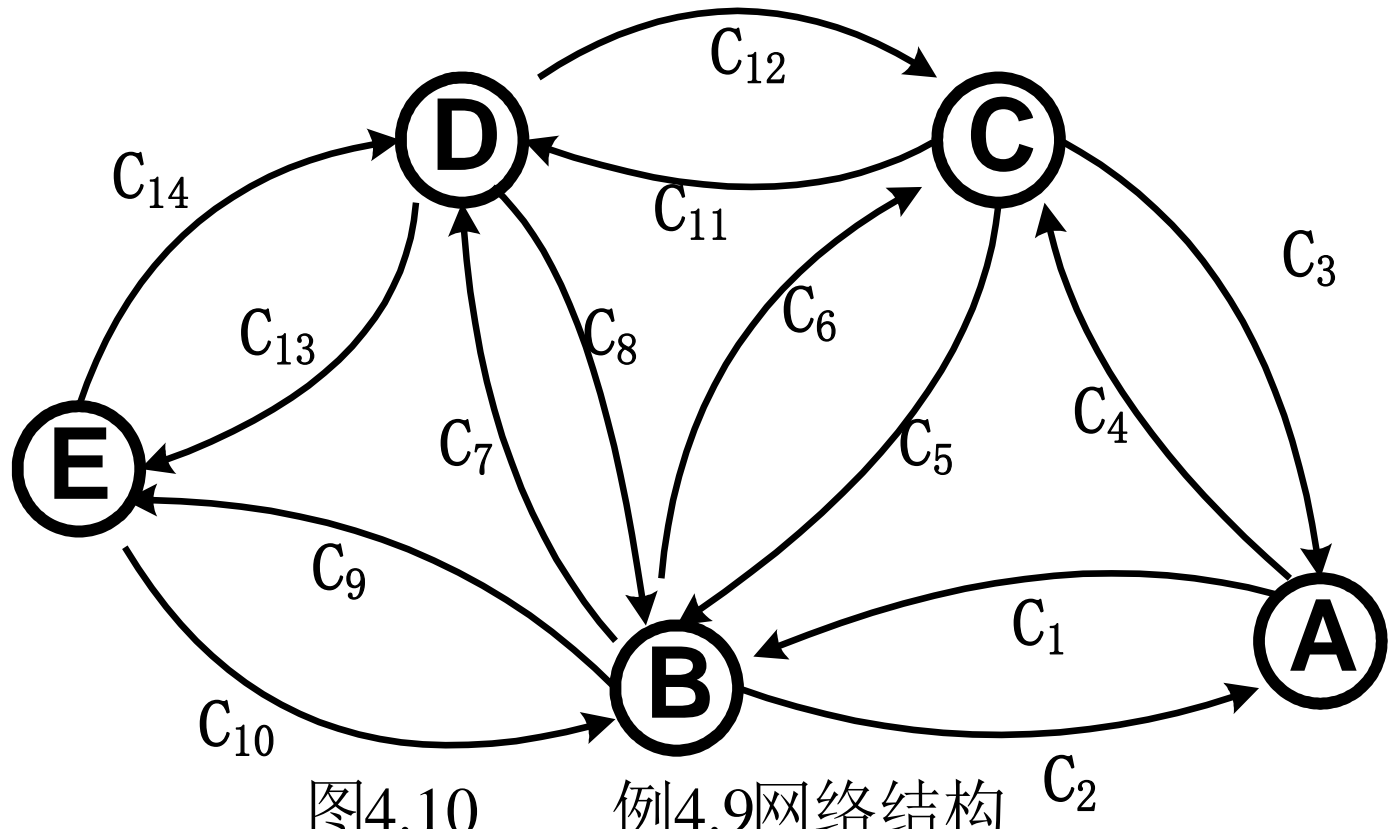




表4.1 任意端点对之间的到达率

	A	B	C	D	E
A	-	0.935	9.34	0.610	2.94
B	0.935	-	0.820	0.131	0.608
C	9.34	0.820	-	0.628	2.4
D	0.610	0.131	0.628	-	0.753
E	2.94	0.608	2.40	0.753	-

解: $\gamma = \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} \gamma_{j,k} = 38.33$, $\lambda_{1,1} = \lambda_{1,2} = \gamma_{A,D} + \gamma_{C,D} + \gamma_{C,E} = 3.638$,

则 $T = 0.045s$



习题

- ▶ 4.1
- ▶ 4.3
- ▶ 4.4
- ▶ 4.5
- ▶ 4.7



复习

- ▶ 泊松过程和负指数分布什么关系？一个随机过程是参数为 λ 的泊松过程，是否能够等价于其到达间隔彼此独立，且服从参数为 λ 的负指数分布？
- ▶ 两个Poisson流的合并流何时仍然是Poisson流？
- ▶ 生灭过程中的状态转移在相邻状态之间进行，其存在稳态分布与初始条件有关还是无关？
- ▶ Erlang即时拒绝系统的四个前提条件是什么？
- ▶ Erlang即时拒绝系统的每条中继线的通过呼叫量为？顺序使用中继线的情况下，第 k 条线的通过呼叫量为？



复习

- ▶ 对于爱尔兰等待制系统，到达的呼叫量和通过的呼叫量的关系是什么？
- ▶ Erlang公式能够能够直接应用在部分利用度的系统或者迂回系统？
- ▶ 对于Erlang拒绝系统M/M/s(s)，业务量为a，请计算：
 - ▶ (1) 给出 $\frac{aB(s-1, a)}{s + aB(s-1, a)}$ 计算结果
 - ▶ (2) s=6, a=5, 计算溢出呼叫量的均值和方差
 - ▶ (3) 如果中继线随机占用，问各个中继线通过的呼叫量为多少？
 - ▶ (4) 如果中继线严格按顺序占用，问各个中继线通过的呼叫量为多少？



复习

- ▶ 一个爱尔兰即时拒绝系统 $M/M/s(s)$ ，将中继线 s 平均分为两组，中继线组内随机使用，组间顺序使用。业务量 $a=6\text{erl}$ ，计算系统的呼损及通过呼叫量，以及每条中继线的通过的呼叫量。
- ▶ 一个爱尔兰等待系统 $M/M/s$ ， $s=10$ ， $a=7$ ，到达率为2，计算等待概率、平均等待时间、等待时间的概率分布。
- ▶ 一个系统有 s 个中继线，被到达率为 λ 的分组流共享，每个信道的服务时间服从参数为 μ 的负指数分布，（1）试求分组的平均系统时间；（2）如果到达率为 λ 的分组流在服务率为 $s\mu$ 的单中继线上传输，求轻负载和重负载时的分组的平均系统时间。