《运筹学》第六章排队论习题

1. 思考题

（1）排队论主要研究的问题是什么；

（2）试述排队模型的种类及各部分的特征；

（3）$Kendall$ 符号 $X/Y/Z/A/B/C$ 中各字母的分别代表什么意义；

（4）理解平均到达率、平均服务率、平均服务时间和顾客到达间隔时间等概念；

（5）分别写出普阿松分布、负指数分布、爱尔朗分布的密度函数，说明这些分布的主要性质；

（6）试述队长和排队长；等待时间和逗留时间；忙期和闲期等概念及他们之间的联系与区别。

2．判断下列说法是否正确

（1）若到达排队系统的顾客为普阿松流，则依次到达的两名顾客之间的间隔时间服从负指数分布；

（2）假如到达排队系统的顾客来自两个方面，分别服从普阿松分布，则这两部分顾客合起来的顾客流仍为普阿松分布；

（3）若两两顾客依次到达的间隔时间服从负指数分布，又将顾客按到达先后排序，则第 1、3、5、7，----名顾客到达的间隔时间也服从负指数分布；

（4）对 $M/M/1$ 或 $M/M/C$ 的排队系统，服务完毕离开系统的顾客流也为普阿松流；

（5）在排队系统中，一般假定对顾客服务时间的分布为负指数分布，这是因为通过对大量实际系统的统计研究，这样的假定比较合理；

（6）一个排队系统中，不管顾客到达和服务时间的情况如何，只要运行足够长的时间后，系统将进入稳定状态；

（7）排队系统中，顾客等待时间的分布不受排队服务规则的影响；

（8）在顾客到达及机构服务时间的分布相同的情况下，对容量有限的排队系统，顾客的平均等待时间少于允许队长无限的系统；

（9）在顾客到达分布相同的情况下，顾客的平均等待时间同服务时间分布的方差大小有关，当服务时间分布的方差越大时，顾客的平均等待时间就越长；

（10）在机器发生故障的概率及工人修复一台机器的时间分布不变的条件下，由 1 名工人看管 5 台机器，或由 3 名工人联合看管 15 台机器时，机器因故障等待工人维修的平均时间不变。

3．某店有一个修理工人，顾客到达过程为 Poisson 流，平均每小时 3 人，修理时间服从负指数分布，平均需 19 分钟，求：

（1）店内空闲的时间；

（2）有 4 个顾客的概率；

（3）至少有一个顾客的概率；

（4）店内顾客的平均数；

（5）等待服务的顾客数；

（6）平均等待修理的时间；

（7）一个顾客在店内逗留时间超过 15 分钟的概率。

4．设有一个医院门诊，只有一个值班医生。病人的到达过程为 Poisson 流，平均到达时间间隔为 20 分钟，诊断时间服从负指数分布，平均需 12 分钟，求：

（1）病人到来不用等待的概率；

（2）门诊部内顾客的平均数；

（3）病人在门诊部的平均逗留时间；

（4）若病人在门诊部内的平均逗留时间超过 1 小时，则医院方将考虑增加值班医生。问病人平均到达率为多少时，医院才会增加医生？

5．某排队系统只有 1 名服务员，平均每小时有 4 名顾客到达，到达过程为 Poisson 流，，服务时间服从负指数分布，平均需 6 分钟，由于场地限制，系统内最多不超过 3 名顾客，求：

（1）系统内没有顾客的概率；

（2）系统内顾客的平均数；

（3）排队等待服务的顾客数；

（4）顾客在系统中的平均花费时间；

（5）顾客平均排队时间。

6．某街区医院门诊部只有一个医生值班，此门诊部备有 6 张椅子供患者等候应诊。当椅子坐满时，后来的患者就自动离去，不在进来。已知每小时有 4 名患者按 Poisson 分布到达，每名患者的诊断时间服从负指数分布，平均 12 分钟，求：

（1）患者无须等待的概率；

（2）门诊部内患者平均数；

（3）需要等待的患者平均数；

（4）有效到达率；

（5）患者在门诊部逗留时间的平均值；

（6）患者等待就诊的平均时间；

（7）有多少患者因坐满而自动离去？

7.某加油站有四台加油机，来加油的汽车按 Poisson 分布到达，平均每小时到达 20 辆。四台加油机的加油时间服从负指数分布，每台加油机平均每小时可给 10 辆汽车加油。求：

（1）前来加油的汽车平均等待的时间；

（2）汽车来加油时,4 台油泵都在工作,这时汽车平均等待的时间.

8．某售票处有 3 个售票口，顾客的到达服从 Poisson 分布，平均每分钟到达 $\lambda = 0.9$（人），3 个窗口售票的时间都服从负指数分布，平均每分钟卖给 $\mu = 0.4$（人），设可以归纳为M/M/3 模型，试求：

（1）整个售票处空闲的概率；

（2）平均对长；

（3）平均逗留时间；

（4）平均等待时间；

（5）顾客到达后的等待概率。

9．一个美容院有 3 张服务台，顾客平均到达率为每小时 5 人，美容时间平均 30 分钟，求：

（1）美容院中没有顾客的概率；

（2）只有一个服务台被占用的概率。

10．某系统有 3 名服务员,每小时平均到达 240 名顾客,且到达服从 Poisson 分布，服务时间服从负指数分布，平均需 0.5 分钟，求:

(1)整个系统内空闲的概率；

(2) 顾客等待服务的概率；

（3）系统内等待服务的平均顾客数；

（4）平均等待服务时间；

（5）系统平均利用率；

（6）若每小时顾客到达的顾客增至 480 名，服务员增至 6 名，分别计算上面的（1）——（5）的值。

11．某服务系统有两个服务员，顾客到达服从 Poisson 分布，平均每小时到达两个。服务时间服从负指数分布，平均服务时间为 30 分钟，又知系统内最多只能有 3 名顾客等待服务，当顾客到达时，若系统已满，则自动离开，不再进入系统。求：

（1）系统空闲时间；

（2）顾客损失率；

（3）服务系统内等待服务的平均顾客数；

（4）在服务系统内的平均顾客数；

（5）顾客在系统内的平均逗留时间；

（6）顾客在系统内的平均等待时间；

（7）被占用的服务员的平均数。

12．某车站售票口，已知顾客到达率为每小时 200 人，售票员的服务率为每小时 40 人，求：

（1）工时利用率平均不能低于 60％；

（2）若要顾客等待平均时间不超过 2 分钟，设几个窗口合适？

13．某律师事物所咨询中心，前来咨询的顾客服从 Poisson 分布，平均天到达 50 个。各位被咨询律师回答顾客问题的时间是随机变量，服从负指数分布，每天平均接待 10 人。每位律师工作 1 天需支付 100 元，而每回答一名顾客的问题的咨询费为 20 元，试为该咨询中心确定每天工作的律师人数，以保证纯收入最多。

14．某厂的原料仓库，平均每天有 20 车原料入库，原料车到达服从 Poisson 分布，卸货率服从负指数分布，平均每人每天卸货 5 车，每个装卸工每天总费用 50 元，由于人手不够而影响当天装卸货物，导致每车的平均损失为每天 200 元，试问，工厂应安排几名装卸工，最节省开支？

15．某公司医务室为职工检查身体，职工的到达服从 Poisson 分布，每小时平均到达 50 人，若职工不能按时体检，造成的损失为每小时每人平均 60 元。体检所花时间服从负指数分布，平均每小时服务率为 μ，每人的体检费用为 30 元，试确定使公司总支出最少的参数 μ。

《运筹学》第六章排队论习题解答

2．（1）√ （2）√ （3）X（4）√（5）X（6）X（7）X（8）√（9）√（10）X

3．解：单位时间为小时，$\lambda = 3$, $\mu = 6$, $\rho = \lambda/\mu = 3/6 = 0.5$

（1）店内空闲的时间：$p_0 = 1 - \rho = 1 - 1/2 = 0.5$；

（2）有 4 个顾客的概率：$\rho_4 = \rho^4(1-\rho) = \left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^5} = 0.03125$；

（3）至少有一个顾客的概率：$P\{N \geq 1\} = 1 - p_0 = 0.5$；

（4）店内顾客的平均数：$L = \dfrac{\rho}{1-\rho} = 1$；

（5）等待服务的顾客的平均数：$L_q = L - \rho = 0.5$

（6）平均等待修理的时间：$W = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{0.5}{3} = 0.1667$；

（7）一个顾客在店内逗留时间超过 15 分钟的概率。

$$P\{T > 15\} = e^{-(\mu-\lambda)t} = e^{-15(\frac{1}{10}-\frac{1}{20})} = e^{-\frac{1}{2}} = 0.607$$

4．解：单位时间为小时，$\lambda = 3$，$\mu = 60/12 = 5$，$\rho = \lambda/\mu = 0.6$

（1）病人到来不用等待的概率：$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0.6 = 0.4$

（2）门诊部内顾客的平均数：$L = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{0.6}{1-0.6} = 1.5$（人）

（3）病人在门诊部的平均逗留时间；$W = \dfrac{1}{\mu - \lambda} = 0.5$（小时）

（4）若病人在门诊部内的平均逗留时间超过 1 小时，则有：

$$1 = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{5-\lambda} \quad , \quad \therefore \quad \lambda = 4$$

即当病人平均到达时间间隔小于等于 15 分钟时，医院将增加值班医生。

5．解：单位时间为小时，$\lambda = 4$，$\mu = 10$，$\rho = \lambda/\mu = 0.4$，$K = 3$；

（1）系统内没有顾客的概率：$p_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^4} = \dfrac{1-0.4}{1-0.4^4} = 0.616$；

（2）系统内顾客的平均数：

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} = \frac{0.4}{1-0.4} - \frac{4\times 0.4^4}{1-0.4^4} = 0.562$$（人）；

（3）排队等待服务的顾客数：$L_q = L - (1 - p_0) = 0.562 - 0.384 = 0.178$（人）；

（4）顾客在系统中的平均花费时间：

$$W = \frac{L}{\lambda(1-\rho^3 p_0)} = \frac{0.562}{3.842} = 0.146 = 8.8$$（分钟）

（5）顾客平均排队时间：$W_q = W - 1/\mu = 0.146 - 0.1 = 0.046 = 2.8$（分钟）。

6．解：此问题可归结为M／M／1／7的模型，单位时间为小时，

$\lambda = 4$，$\mu = 5$，$\rho = \lambda/\mu = 0.8$，$K = 7$

（1）患者无须等待的概率：$p_0 = \dfrac{1-0.8}{1-0.8^8} = 0.2403$；

（2）门诊部内患者平均数：$L = \dfrac{0.8}{1-0.8} - \dfrac{8\times 0.8^8}{1-0.8^8} = 2.387$（人）

（3）需要等待的患者平均数：$L_q = 2.387 - (1 - p_0) = 1.627$（人）

（4）有效到达率：$\lambda_{\varepsilon}=\lambda(1-P_7)=4\times(1-\frac{1-0.8}{1-0.8^8}\times0.8^7)=3.8$；

（5）患者在门诊部逗留时间的平均值：

$W=\frac{L}{\lambda_{\varepsilon}}=\frac{2.387}{3.8}=0.628$（小时）=37.7(分钟)

（6）患者等待就诊的平均时间：$W_q=37.7-12=25.7$（分钟）

（7）有 $P_7=\frac{1-\rho}{1-\rho^8}\rho^7=0.0503=5.03\%$ 的患者因坐满而自动离去.

7.解：此为一个M/M/4系统，$\lambda=20$，$\mu=10$，$\rho=\lambda/\mu=2$，系统服务强度 $\rho^*=\frac{2}{4}=0.5$，所以 $p_0=\left(\sum_{k=0}^{3}\frac{2^k}{k!}+\frac{2^k}{4!}\frac{1}{1-1/2}\right)^{-1}=0.13$

（1）前来加油的汽车平均等待的时间即为W_q：

因为 $W_q=W-\frac{1}{\mu}=\frac{L}{\lambda}-\frac{1}{\mu}=\frac{L}{20}-\frac{1}{10}$

而 $L=\frac{\rho^c\rho^*p_0}{c!(1-\rho^*)^2}+\rho=\frac{2^4\times0.5\times0.13}{4!\times(1-0.5)^2}+2=2.17$

故：W_q = 0．0085（小时）=0.51（分钟）

（2）汽车来加油时,4台油泵都在工作,设汽车平均等待的时间为W^*.

则 $W^*=\frac{W_q}{\sum_{k=c}^{\infty}P_k}$，因为 $p_1=\rho p_0=0.26$，$p_2=\frac{\rho^2}{2}p_0=0.26$

$p_3=\frac{\rho^3}{3!}p_0=0.18$，$c=4$，

$\sum_{k=4}^{\infty}p_k=1-\sum_{k=0}^{3}p_k=0.17$

所以 ：$W^*=\frac{W_q}{0.17}=\frac{0.51}{0.17}=3$（分钟）。

8．解：此为一个M/M/3系统，$\lambda=0.9$，$\mu=0.4$，$\rho=\lambda/\mu=2.25$，系统服务强度：

$\rho^*=\frac{\rho}{3}=0.75$

（1）$p_0=\left(\sum_{k=0}^{3}\frac{(2.25)^k}{k!}+\frac{(2.25)^3}{3!}\times\frac{1}{1-0.75}\right)^{-1}=0.0743$

（2）因为：$L=\frac{(2.25)^3\times0.75}{3!\times(1-0.75)^2}\times0.0743+2.25=3.95$（人）

所以：$L_q=L-\rho=3.95-2.25=1.70$（人）

（3）平均逗留时间：$W=\dfrac{L}{\lambda}=\dfrac{3.95}{0.9}=4.39$ （分钟）

（4）平均等待时间：$W_q=W-1/\mu=4.39-1/0.4=1.89$ （分钟）

（5）设顾客到达后的等待概率为P^*，则

$$P^*=\sum_{k=c}^{\infty}P_k=\frac{\rho^c}{c!}\frac{1}{1-\rho^*}P_0=\frac{(2.25)^3}{3!}\times\frac{1}{1-0.75}\times 0.0743=0.57$$

9．解：此为系统为M / M / n (n=3)损失制无限源服务模型，

$\lambda=5$，，$\mu=60/30=2$，$\rho=\lambda/\mu=2.5$，

（1）$$p_0=\left(\sum_{k=0}^{3}\frac{(2.5)^k}{k!}\right)^{-1}=(1+2.5+3.125+2.604)^{-1}=0.108$$

（2）$$p_1=\rho\, p_0=2.5\times 0.108=0.27$$

10．此为系统为M / M / n (n=3)服务模型，

$$\lambda=\frac{240}{60}=4(人/分钟),\ \mu=\frac{1}{0.5}=2(人/分钟),\ \rho=\lambda/\mu=2,\ n=3$$，

（1）整个系统内空闲的概率：

$$p_0=\left[\sum_{k=0}^{2}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^3}{3!}\left(\frac{n}{n-\rho}\right)\right]^{-1}=(1+2+2+4)^{-1}=0.111$$；

（2）顾客等待服务的概率：

$$p\{W>0\}=\frac{\rho^3}{3!}\left(\frac{n}{n-\rho}\right)p_0=\frac{4}{9}=0.444$$；

（3）系统内等待服务的平均顾客数：

$$L_q=\frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2}p_0=\frac{8}{9}=0.888$$ （人）；

（4）平均等待服务时间：

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{8}{9}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{9}=0.222$$；

（5）系统平均利用率；$\rho^*=\rho/n=2/3=0.667$；

（6）若每小时顾客到达的顾客增至480名，服务员增至6名，分别计算上面的（1）——（5）的值。

$$\lambda=\frac{480}{60}=8(人/分钟),\ \mu=\frac{1}{0.5}=2(人/分钟),\ \rho=\lambda/\mu=4,\ n=6$$

则：整个系统内空闲的概率：

$$p_0=\left[\sum_{k=0}^{2}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{n}{n-\rho}\right)\right]^{-1}=(42.866+17.067)^{-1}=0.017$$

顾客等待服务的概率：$$p\{W>0\}=\frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{n}{n-\rho}\right)p_0=17.067\times 0.017=0.285$$

系统内等待服务的平均顾客数：$$L_q=\frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2}p_0=0.58$$ （人）

平均等待服务时间：$W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = 0.07$

系统平均利用率；$\rho^* = \rho / n = 4/6 = 0.667$。

11．解：将此系统看成一个 M / M / 2 / 5 排队系统，其中

$\lambda = 2$, $\mu = 0.5$, $\rho = \lambda / \mu = 4$, $n = 2$, $K = 5$

（1）系统空闲时间：$p_0 = \left(1 + 4 + \dfrac{4^2(1-(4/2)^{5-2+1})}{2(1-4/2)}\right)^{-1} = 0.008$；

（2）顾客损失率：$p_5 = \dfrac{4^5 \times 0.008}{2! \times 2^{5-2}} = 0.512$；

（3）服务系统内等待服务的平均顾客数：

$$L_q = \frac{0.008 \times 4^2 \times (4/2)}{2!((1-4/2)^2} \left[1 - \left(\frac{4}{2}\right)^{5-2+1} - (1-\frac{4}{2})(5-2+1)(\frac{4}{2})^{5-2}\right] = 2.18$$ （人）

（4）在服务系统内的平均顾客数：

$L = L_q + \rho(1-p_5) = 2.18 + 4 \times (1-0.512) = 4.13$ （人）；

（5）顾客在系统内的平均逗留时间：

$W = \dfrac{L}{\lambda(1-p_5)} = \dfrac{4.13}{2 \times (1-0.512)} = 4.23$ （分钟）；

（6）顾客在系统内的平均等待时间：

$W_q = W - 1/\mu = 4.23 - 2 = 2.23$ （分钟）

（7）被占用的服务员的平均数。

$\overline{n} = L - L_q = 4.13 - 2.18 = 1.95$ （个）

12．解：将此系统看成一个 M / M / n 排队系统，其中

$\lambda = 140$, $\mu = 45$, $\rho = \lambda / \mu = 3.5$ ，则

工时利用率平均不能低于 60%，即系统服务强度：

$\rho^* = \dfrac{\rho}{n} = \dfrac{3.5}{n} \geq 0.6$ ，所以 $n \leq 4.17$，设 $n = 1 , 2 , 3 , 4$ 均满足工时利用率的要求，现在计算是否满足等待时间的要求：

（1）当 $n = 4$ 时，

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{3} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{n}{n-\rho}\right)\right]^{-1} = \left[1 + 2.5 + \frac{2.5^2}{2} + \frac{2.5^3}{3!} + \frac{2.5^4}{4!}\frac{4}{0.5}\right]^{-1} = 0.0737$$

平均等待时间：

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho^{n+!}}{\lambda(n-1)!(n-\rho)^2} p_0$$

$$= \frac{2.5^5}{200 \times 6 \times 1.5^2} \times 0.0148 = \frac{7.197}{2700} = 0.0067$$

（小时）=0．16（分）

（2）当 $n = 3$ 时，$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{2} \dfrac{\rho^k}{k!} + \dfrac{\rho^n}{n!}\left(\dfrac{n}{n-\rho}\right)\right]^{-1} = 0.045$

平均等待时间：$W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{\rho^{n+!}}{\lambda(n-1)!(n-\rho)^2} p_0 = 0.0176$（小时）=1.05(分)

若$n \le 2$，则$\rho/n > 1$，所以，应该设3个窗口符合要求。

13．解：这是一个M / M / n 系统确定n的问题，因为：

$\lambda = 50$, $\mu = 10$, $\rho = \lambda/\mu = 5$, $\rho^* = \rho/n = 5/n$，则

$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\rho^k}{k!} + \dfrac{\rho^n}{n!}\dfrac{1}{1-\rho^*}\right]^{-1}$，设$f(n)$表示当律师有$n$个时的纯收入，则：

$$f(n) = -100n + 200p_0\left[5\sum_{k=0}^{n-2}\frac{5^k}{k!} + \frac{5^n}{(n-1)!}\frac{n}{(n-5)}\right]$$

对n的约束只有一个，即$\rho^* < 1$，由此可得$n > 5$，为求n，我们由下表计算$f(n)$，再取最大值。

n	6	7	8	……
p_0	4.51×10^{-3}	5.97×10^{-3}	7.2×10^{-3}	……
$f(n)$	399.97	287.49	274.87	……

由此可以看出，当$n = 6$时，律师咨询中心的纯收入最大。

14．解：此问题为一个M / M / n 系统确定n的问题，因为：

$\lambda = 20$, $\mu = 5$, $\rho = \lambda/\mu = 4$, $\rho^* = \rho/n = 4/n$

设$f(n)$表示当装卸工有n个时工厂在装卸方面的总支出，则所求为

$$\min f(n) = 50n + E[C_w]$$

其中C_w为由于货车等待装卸而导致的单位时间的经济损失。

$C_w = 100L = 100\left[\rho + \dfrac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2}\right]$，经计算得

n	5	6	7	8	9	10	……
$E[C_w]$	17466.7	3813.3	652.8	481.3	426	408	……
$50n$	250	300	350	400	450	500	……
$f(n)$	17716.7	4113.3	1002.8	881.3	876	908	……

由此可以看出，当有9名装卸工时，工厂的支出最小。

15．解：我们用M / M / 1 来描述此题，因为

$\lambda = 50$ 人/小时，$C_s = 30$ 元/人，$C_w = 60$ 元/人，则公司每小时总支出为

$$z = C_s\mu + C_wL = C_s\mu + C_w\frac{\lambda}{\mu-\lambda},$$

对μ求导，并令导数为零，得：$\mu = \lambda + \sqrt{C_w\lambda/C_s}$，所以有

$\mu^* = 50 + \sqrt{60 \times 50/30} = 50 + 10 = 60$（人/小时）。