IMU 传播推导

1.IMU 量测

我们使用 6 轴惯性测量单元（IMU）来测量模型的角速度和线加速度。其中 IMU 坐标系下的角速度用ω_m表示，IMU 坐标系下的线加速度用a_m表示。依据 IMU 的模型我们可以得到下面的两个公式：

$$\omega_m(t)=\omega(t)+b_g(t)+n_g(t) \tag{1}$$

$$a_m(t)=a(t)+{}_G^IR(t)\,{}^Gg+b_a(t)+n_a(t) \tag{2}$$

这里，$\omega(t)$和$a(t)$是 IMU 坐标系（即$\{I\}$系）下角速度与线加速度的真实值。b_g和b_a分别表示陀螺仪与加速度计的漂移。n_g和n_a均为高斯白噪声。${}^Gg=\begin{bmatrix}0 & 0 & 9.81\end{bmatrix}^T$指全局坐标系（即$\{G\}$系）下的重力加速度。${}_G^IR$指把物理量从全局坐标系变换到 IMU 坐标系的旋转矩阵。

2.状态向量

t时刻的状态向量$x_I(t)$如下式所示：

$$x_I(t)=\begin{bmatrix}{}_G^I\bar{q}(t)\\ {}^Gp_I(t)\\ {}^Gv_I(t)\\ b_g(t)\\ b_a(t)\end{bmatrix} \tag{3}$$

这里${}_G^I\bar{q}$是表示物理量从全局坐标系变换到 IMU 坐标系下的变换，用单位四元数的形式存储。${}^Gp_I$表示 IMU 在全局坐标系下的位置。${}^Gv_I$表示 IMU 在全局坐标系下的速度。为了定义 IMU 的状态误差，对位置，速度和漂移采用了标准的可加性误差定义。我们下面的四元数的误差量是乘在左边的。

$${}_G^I\bar{q}=\delta\bar{q}\otimes{}_G^I\hat{\bar{q}} \tag{4}$$

$$\delta\bar{q} = \begin{bmatrix} \hat{k}\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \\ \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\theta \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

这里k表示的是旋转轴，θ表示的是旋转角。当旋转的角度很小的时候，我们可以做上述的近似。最后总的 IMU 状态误差向量定义为如下的15×1的向量。

$$x_I(t) = \begin{bmatrix} {}_G^I q(t) \\ {}^G p_I(t) \\ {}^G\tilde{v}_I(t) \\ \tilde{b}_g(t) \\ \tilde{b}_a(t) \end{bmatrix} \tag{6}$$

3.IMU 运动学

各个状态变量的导数如下所示：

$${}_G^I\dot{\bar{q}}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\left[\omega(t)\times\right] & \omega(t) \\ -\omega^T(t) & 0 \end{bmatrix} {}_G^{I_t}\bar{q} = \frac{1}{2}\Omega\left(\omega(t)\right){}_G^{I_t}\bar{q} \tag{7}$$

$${}^G\dot{p}_I(t) = {}^Gv_I(t) \tag{8}$$

$${}^G\dot{v}_I(t) = {}_G^{I_t}R^T a(t) \tag{9}$$

$$\dot{b}_g(t) = n_{wg} \tag{10}$$

$$\dot{b}_a(t) = n_{wa} \tag{11}$$

这里陀螺仪和加速度计的漂移均为随机游走误差,所以对时间的导数为高斯白噪声。注意，上述的关系式均是以真实的角速度与加速度来定义的。

4.连续时间条件下的 IMU 传播

若已知连续时间下$t\in\left[t_k,t_{k+1}\right]$角速度$\omega_m(t)$和线加速度$a_m(t)$以及他们的估计$\omega(t)=\omega_m(t)-\hat{b}_g(t)$，$a(t)=a_m(t)-\hat{b}_a(t)-{}_G^IR(t)\,{}^Gg$，我们可以定义上述 IMU 运动学微分方程的解。微分方程形式如下：

$${}_G^{I_t}\bar{q} = \Theta(t,t_k)\,{}_G^{I_k}\bar{q} \tag{12}$$

根据上式我们可得：

$$\Theta\left(t,t_k\right)={}_G^{I_t}\bar{q}\,{}_G^{I_k}\bar{q}^{-1} \tag{13}$$

两边求导得：

$$\dot{\Theta}\left(t,t_k\right)={}_G^{I_t}\dot{\bar{q}}\,{}_G^{I_k}\bar{q}^{-1}=\frac{1}{2}\Omega\left(\omega\left(t\right)\right){}_G^{I_t}\bar{q}\,{}_G^{I_k}\bar{q}^{-1}=\frac{1}{2}\Omega\left(\omega\left(t\right)\right)\Theta\left(t,t_k\right) \tag{14}$$

如果$\omega\left(t\right)$是常量，则$\Theta\left(t,t_k\right)=I_4$，因此，$\Theta\left(t,t_k\right)$可通过下面推导求出：

$$\frac{d\Theta\left(t,t_k\right)}{\Theta\left(t,t_k\right)}=\frac{1}{2}\Omega\left(\omega\left(t\right)\right) \tag{15}$$

$$\ln\Theta\left(t,t_k\right)=\frac{1}{2}\Omega\left(\omega\left(t\right)\right) \tag{16}$$

两边积分得，

$$\Theta\left(t,t_k\right)=\exp\left(\frac{1}{2}\Omega\left(\omega\right)\Delta t\right) \tag{17}$$

$$\Theta\left(\Delta t\right)=I_{4\times4}+\frac{1}{2}\Omega\left(\omega\right)\Delta t+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\Omega\left(\omega\right)\Delta t\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\Omega\left(\omega\right)\Delta t\right)^3+\dots \tag{18}$$

$$=I_{4\times4}+\frac{1}{2}\Delta t\Omega\left(\omega\right)-\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)^2\left|\omega\right|^2 I_{4\times4}-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)^3\left|\omega\right|^2\Omega\left(\omega\right)\dots$$

$$=\left(1\text{-}\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)^2\left|\omega\right|^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)^4\left|\omega\right|^4-\dots\right)I_{4\times4}+$$

$$\frac{1}{\left|\omega\right|}\left(\frac{1}{2}\left|\omega\right|\Delta t-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\left|\omega\right|\Delta t\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\left|\omega\right|\Delta t\right)^5-\dots\right)\Omega\left(\omega\right)$$

所以最终可得，

$$\Theta\left(\Delta t\right)=\cos\left(\frac{\left|\omega\right|}{2}\Delta t\right)I_{4\times4}+\frac{1}{\left|\omega\right|}\sin\left(\frac{\left|\omega\right|}{2}\Delta t\right)\Omega\left(\omega\right) \tag{19}$$

$$\simeq I_{4\times4}+\frac{\Delta t}{2}\Omega\left(\omega\right)$$

当Δt很小时，从t_k到t_{k+1}，$\omega\left(t\right)$近似为一个常量ω，那么四元数的传播公式为：

$${}_G^{I_{k+1}}\bar{q}=\exp\left(\frac{1}{2}\Omega\left(\omega\right)\Delta t\right){}_G^{I_k}\bar{q} \tag{20}$$

另外，我们也可以通过积分求得速度与位移。

$${}^G\hat{v}_{k+1}={}^G\hat{v}_{I_k}+\int_{t_k}^{t_{k+1}}{}^Ga\left(\tau\right)d\tau \tag{21}$$

$$= {}^{G}\hat{v}_{I_k} - {}^{G}g\Delta t + \int_{t_k}^{t_{k+1}} {}_{I_\tau}^{G}R\left(a_m(\tau) - \hat{b}_a(\tau)\right)d\tau$$

$$^{G}p_{I_{k+1}} = {}^{G}p_{I_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} {}^{G}\hat{v}_I(\tau)\,d\tau \tag{22}$$

$$= {}^{G}p_{I_k} + {}^{G}\hat{v}_{I_k}\Delta t - \frac{1}{2}{}^{G}g\Delta t^2 + \int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{s} {}_{I_\tau}^{G}R\left(a_m(\tau) - \hat{b}_a(\tau)\right)d\tau ds$$

$\hat{b}_g$，$\hat{b}_a$ 也可以通过积分求得，

$$\hat{b}_{g,k+1} = \hat{b}_{g,k} + \int_{t_{k+1}}^{t_k} n_{wg}(\tau)\,d\tau = \hat{b}_{g,k} \tag{23}$$

$$\hat{b}_{a,k+1} = \hat{b}_{a,k} + \int_{t_{k+1}}^{t_k} n_{wa}(\tau)\,d\tau = \hat{b}_{a,k} \tag{24}$$

注：这里积分的噪声均为均值为 0 的高斯白噪声。

5.离散时间条件下的 IMU 传播

首先我们假设采样时间是恒定的，其次各量测在采样周期内保持恒定。下面直接给出在时间$[t_k, t_{k+1}]$内，各个状态量的传播公式：

$$^{I_{k+1}}_{G}\bar{q} = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega\left(\omega_{m,k} - \hat{b}_{g,k}\right)\Delta t\right){}^{I_k}_{G}\bar{q} \tag{25}$$

$$^{G}\hat{v}_{k+1} = {}^{G}\hat{v}_{I_k} - {}^{G}g\Delta t + {}^{I_k}_{G}R^{T}\left(a_{m,k} - \hat{b}_{a,k}\right)\Delta t \tag{26}$$

$$^{G}p_{I_{k+1}} = {}^{G}p_{I_k} + {}^{G}\hat{v}_{I_k}\Delta t - \frac{1}{2}{}^{G}g\Delta t^2 + \frac{1}{2}{}^{I_k}_{G}R^{T}\left(a_{m,k} - \hat{b}_{a,k}\right)\Delta t^2 \tag{27}$$

$$\hat{b}_{g,k+1} = \hat{b}_{g,k} \tag{28}$$

$$\hat{b}_{a,k+1} = \hat{b}_{a,k} \tag{29}$$

6.离散时间条件下的状态误差传播