# 关于二维和三维变换的李群与李代数

## 1.SO(3)：表示三维空间中的旋转

### 1.1 表示

SO(3)这个群表示三维空间的旋转矩阵。旋转矩阵是正交的，其逆与转置相等。

 (1)

 (2)

李代数so(3)对应着一个的反对称矩阵，李代数是一个三维的向量，用表示对应的反对称矩阵。

### 1.2 指数映射

由李代数构成的反对称矩阵的指数映射，实际就是矩阵在不同指数下的线性组合：

 (3)

 (4)

我们还可以写作：

 (5)

我们知道反对称矩阵有如下的特性：

 (6)

我们做如下的变换：

 (7)

 (8)

 (9)

根据上面的这些特性，我们可以重新整理指数映射的泰勒展开式。

 (10)

 (11)

 (12)

由此我们实现了从so(3)到SO(3)的转换。如果要想从SO(3)反求so(3)可以通过下面的公式计算：

 (13)

 (14)

 (15)

这里，由此我们可以求出。

### 1.3 伴随

在李群中，我们经常需要将一个切向量从一个切平面转换到另一个切平面。下面就利用伴随矩阵来实现这一转化。若属于李群，那么伴随阵记为。

 (16)

 (17)

所以，

 (18)

在不失一般性的情况下，令，，在处求导，

 (19)

 (20)

 (21)

 (22)

 (23)

我们可以根据上述关系交换乘积顺序。

### 1.4 雅克比

考虑。向量通过的旋转表示如下：

 (24)

变换结果对向量求导得，

 (25)

如果变换结果对旋转矩阵求导则推导如下：





 (26)

 (27)

 (28)

 (29)

 (30)

 (31)

 (32)

 (33)

 (34)

下面我们讨论输入扰动量与输出扰动量之间的关系。我们首先建立两者的关系式：

 (35)

根据导数的定义，对求导等于因变量的变化量除以自变量的变化量，因为是小量所以把直接去掉了。

 (36)

那么根据式(35)可得，

 (37)

所以，

 (38)

式(38)提供了一个从自变量的左切平面空间扰动到因变量的左切平面空间扰动的线性映射关系。

下面我们考虑这样一个用例，

 (39)

首先建立关于输入扰动与输出扰动之间的等式。

 (40)

根据上面推导的公式有：

 (41)

 (42)

 (43)

 (44)

## 2.SE(3)三维空间的刚体变换

## 2.1 表示



 (45)

两个变换矩阵相乘与变换矩阵求逆的公式如下：



 (46)

 (47)

三维坐标乘转移矩阵可表示为：



 (48)

时，是笛卡尔点。

转移矩阵对应的李代数se(3)有六个变量，因此它所对应的四维矩阵对每一个变量求偏导可得：













### 2.2 指数映射



 (49)

我们可以分块求解该矩阵。

 (50)

 (51)

 (52)

 (53)

展开得，

 (54)

 (55)

另外，可由下式反解，

 (56)

 (57)

### 2.3 伴随矩阵推导



 (58)

 (59)

 (60)

 (61)

 (62)

### 2.4 雅克比

已知，则，

 (63)

根据上文的推导有，

 (64)

 (65)

另外还有，

 (66)

 (67)

## 3.Sim(3)相似性变换

### 3.1表示

三维相似性变换结合了三维刚体变换与尺度因子。



 (68)

另外有，

 (69)

 (70)

当时，有，

 (71)

### 3.2 指数映射

与前文的方法相一致，，

 (72)

 (73)

有,

 (74)

 (75)

展开有，

 (76)

 (77)

令，

 (78)

其中，，，。

先考虑参数，

 (79)

 (80)

 (81)

 (82)

 (83)

令,

(84)

 (85)

 (86)

 (87)

 (88)

 (89)

(90)

令,

 (91)

其中，

 (92)

 (93)

 (94)

由泰勒展开式的形式得：

 (95)

 (96)

 (97)

接下来再求，

 (98)

 (99)

 (100)

最后统一整理得，

 (101)

 (102)

 (103)

 (104)

 (105)

 (106)

 (107)

 (108)

 (109)

 (110)

 (111)

 (112)

 (113)

 (114)

 (115)

 (116)

 (117)

### 3.3 伴随矩阵

直接给出求解公式：



 (118)

 (119)

 (120)

 (121)