Liheng Cao

April 18, 2021

1

(a)

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$Av_1 = v_1\lambda_1, Av_2 = v_2\lambda_2 \implies A[v_1, v_2] = [v_2, v_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} A &= VDV^{-1} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(d) The transformation matrix applied to one of it's eigenvectors is the same as multiplying the eigenvector by its respective eigenvalue.

(e)

$$\begin{aligned} A^{33} &= VD^{33}V^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{33} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^{33} & 0 \\ 0 & (-2)^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{33} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{7} \left(5^{33} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + (-2)^{33} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

2

(a)