经典电动力学

Chapter 1. 狭义相对论

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

April 11, 2023

1. 相对论的实验基础
   - 电动力学的参考系问题
   - 狭义相对论的实验基础
2. 狭义相对论的基本原理
   - 间隔不变性
   - 洛伦兹变换
3. 相对论的时空结构
   - 因果律与相互作用的最大传播速度
   - 同时性的相对性
   - 运动时钟的延缓效应
   - 运动尺度的缩短
   - 速度、加速度合成法则
4. 闵氏空间中的张量
   - 欧氏空间中张量的数学定义
   - 四维闵氏空间中的张量
5. 狭义相对论中的加速参考系
6. 物理学规律的惯性参考系选择无关性

参考系问题

电磁现象的基本规律是 Maxwell 方程组和外电磁场之洛伦兹力作用下带电粒子的牛顿第二定律. 在真空中, 它们分别表为:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j}.$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}.$$

需要回答的物理问题是:

1. 这些方程直接适用于什么参考系?
2. 若观测者从一个惯性参考系变换到另一个惯性参考系, 上述方程组会不会发生改变? 如何改变?
3. 基本电磁场量 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 如何随参考系的不同选择而改变?

光速

Maxwell 方程组的参考系问题可以换一个角度提问. 从真空中远离电荷电流分布区域的 Maxwell 方程组出发, 可以证明电磁场的基本存在形式是电磁波:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0\,, \qquad \nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0\,.$$

式中,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ 米/秒}$$

是真空中电磁波的传播速度.

$\mathcal{Q}$:

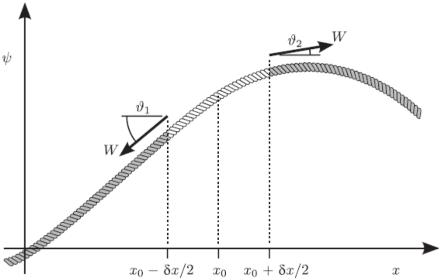
1. 令人迷惑的是, 为什么 c 是一个常数?
2. 换言之, $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ 是电磁波相对于哪一个参考系的传播速度 ?

电磁波传播速度的常数性

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ 米/秒}$$

对人类的认知能力提出了挑战，它迫使物理学家们在如下两个可能的选项中做出单项选择：

1. 或者Maxwell 方程组与 Lorentz 力公式在所有的惯性参考系中都成立
   - 电磁波在任一惯性系中的传播速度都是 $c \approx 3 \times 10^8$ 米/秒
   - 不同惯性系彼此之间不能通过伽利略变换相联系
2. 或者Maxwell 方程组与 Lorentz 力公式仅在某一特殊的惯性参考系 S 中才成立
   - 电磁波仅仅在 S 系中的传播速度是 $c \approx 3 \times 10^8$ 米/秒
   - 不同惯性系彼此之间仍通过伽利略变换相联系



考察绳子里传播的机械波． 设绳子的质量线密度为 M, 张力为 W,

$$\sin\vartheta_1 \approx \tan\vartheta_1 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x-\delta x/2}$$

则按牛顿第二定律有：

$$M\delta x\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_{x_0} = W\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x+\delta x/2} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x-\delta x/2}\right]$$

亦即,

$$M\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = W\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

或者等价地,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

式中的 c

$$c = \sqrt{\frac{W}{M}}$$

就是此机械波的波速. 显然, 这里的 c 也是一个常数.

提醒:

机械波波速的常数性并不造成任何逻辑困难. 机械波的传播离不开介质的存在[1], 上述波速即是与介质质心保持相对静止的观测者测得的波速.

[1]此例情形下介质即为绳子.

旧时代的物理学家普遍坚信惯性参考系必须由伽利略变换相联系、进而普遍认为电磁波的传播也需要媒介，即“以太”(ether). $c \approx 3 \times 10^8\ m/s$ 是电磁波相对于以太的传播速度.

所以，

1. **测量地球相对于以太的运动速度**
2. **测量电磁波相对于地球上观测者的传播速度**

就构成了 Maxwell 方程组物理自洽性的实验基础. 通常称之为狭义相对论的实验基础.

物理专业经典教材

光学（第二版）

母国光　战元龄　编

高等教育出版社
Higher Education Press

狭义相对论的实验基础

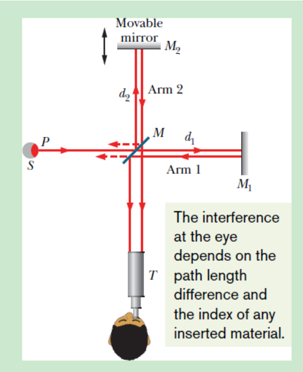
牛顿时空观认为：真空中电磁波的传播速度只有在某个特殊的参考系 (aether) 才等于 c. 若能够测定各个方向上光速的差异，就可以确定地球相对于 aether 的运动.

数量级估计：

地球绕太阳公转的速率约为 30km/s，因此，地球相对于 aether 参考系的运动速度至少应与此具有同一数量级，

$$\frac{v}{c} \sim 10^{-4}$$

Michelson-Morley 实验 (1887) 是测量光速沿不同方向的差异的典型实验.



地球绕太阳的公转速率：

天文学家 Lalande 通过对金星凌日现象的观测，估算出了地球与太阳之间的距离：

$$R \approx 1.5 \times 10^8 \ \ \mathrm{km}$$

所以，地球公转的线速度大小可估算如下[2]：

$$v = \frac{2\pi R}{T} \approx \frac{2 \times 3.14 \times 1.5 \times 10^8}{360 \times 24 \times 60 \times 60} \approx 30 \ \mathrm{km/s}$$

相对于地球而言，太阳更有资格与绝对惯性系 (aether) 保持相对静止. 所以，地球相对于以太 (aether) 参考系的速率具有下限：

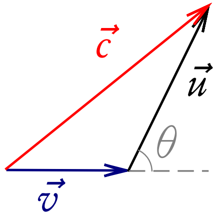
$$v \gtrsim 30 \ \mathrm{km/s}$$

[2]如此，地球人在地球公转轨道上每天走过的路程大约是：

$$S = vt \approx 30 \times 24 \times 60 \times 60 \approx 2.62 \times 10^6 \ \mathrm{km}$$

经典的速度合成法则

现在用经典速度合成法则计算 Michelson-Morley 实验中电磁波沿两条光路 $M \to M_1 \to M$ 与 $M \to M_2 \to M$ 的传播时间. 如图示,



- $\boldsymbol{v}$ 为观测者相对于 aether 的运动速度;
- $\boldsymbol{u}$ 为观测者参考系所测得的光速, 设其与牵连速度 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角为 θ;
- $\boldsymbol{c}$ 是 aether 参考系中的光速.

按照经典的速度合成法则, 应有: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. 所以,

$$c^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta$$

由此求得观测者所测得的光速的大小为:

$$u = \sqrt{c^2 - v^2\sin^2\theta} - v\cos\theta$$

Michelson-Morley 实验

设观测者相对于 aether 参考系的运动速度沿着光路 $M \to M_1$.
这样, 光线 $M \to M_1 \to M$ 的传播时间为:

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2cl}{c^2-v^2} \approx \frac{2l}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$$

而光线 $M \to M_2 \to M$ 的传播时间是:

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}} \approx \frac{2l}{c}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)$$

两束光线的光程差为:

$$c(t_1-t_2) \approx l\frac{v^2}{c^2}$$

把仪器转动 90^o, 使两束光位置互换, 理论上预计应该观测到干涉条纹的移动个数是:

$$\Delta N = \frac{2c(t_1-t_2)}{\lambda} \approx \frac{2l}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}$$

否定的实验结果

Michelson-Morley 实验设定:

1. 利用多次反射技术可以使有效臂长达到 $l \approx 10$m;
2. 假定地球相对于 aether 的速度大小与地球的公转速率具有同一量级, 使得: $(v/c)^2 \approx 10^{-8}$;
3. 取钠黄光做实验, $\lambda \approx 5 \times 10^{-7}$m.

如此, 经典理论预计的干涉条纹移动数目是:

$$\Delta N \approx \frac{2l}{\lambda}(v/c)^2 \approx \frac{20 \times 10^{-8}}{5 \times 10^{-7}} = 0.4$$

但是, 实验结果是否定的: $\Delta N \lesssim 0.01$.

- Michelson-Morley 实验实际上表明光速不服从伽利略 (Galileo) 速度合成法则, 光在不同惯性系中的传播速度具有相同的大小.

光速不变假设的实验基础

迄今为止的所有实验,都指出光速的大小与观测者所处的参考系无关,也与光源的运动速度无关:

- Michelson-Morley 实验 (1887).
- Cedarholm 微波激射实验 (1955), $\rightsquigarrow \quad v \lesssim 3 \times 10^{-2}\text{km/s}$
- Isaak 利用穆斯堡尔效应所做的实验 (1970),
  $\rightsquigarrow \quad v \lesssim 5 \times 10^{-5}\text{km/s}$

所以,光速的参考系选择无关性(俗称光速不变) 是电磁现象的一条基本规律.

狭义相对论就是在光速不变性实验的基础上建立起来的.

狭义相对论的基本原理

Einstein(1905) 提出了两条相对论的基本假设:

1. 相对性原理. 所有惯性系都是等价的,物理学规律对于所有惯性系都可以表为相同形式.
2. 光速不变原理. 真空中的光速相对于任何惯性系均为 c, 光速与光源的运动无关.

相对论时空观:

光速不变性所导致的时空概念与经典时空观之间存在着深刻的矛盾.

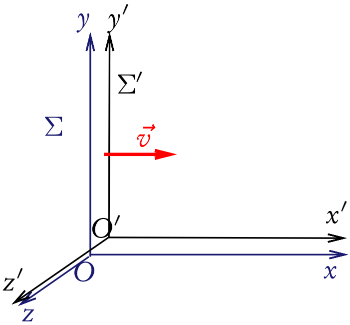
所有最基本的时空概念,如同时性、距离、时间、速度等概念都需要在光速不变性的假设之上重新理解.

Galileo 变换

牛顿时空观集中反映在惯性参考系的 Galileo 变换中.

设惯性系 Σ' 相对于另一惯性系 Σ 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动. 建立 Cartesian 直角坐标系,并选 x 和 x' 轴沿运动方向,Galileo 变换可表为:

$$
\begin{aligned}
x' &= x - vt \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= t
\end{aligned}
$$



牛顿时空观的基本特征是时间与空间的分离. 时间在宇宙中均匀流逝着,而空间则好像是一个容器,二者之间没有联系,也不与物质的运动发生关系.

与牛顿时空观类似，相对论的时空观也集中反映在从一个惯性参考系到另一个惯性参考系的时空坐标变换式里.

这个坐标变换称为 Lorentz 变换.

以下我们将从相对论的基本原理出发建立 Lorentz 变换. 为此，先引入一个新概念：事件 (event). 物质运动可以看作一系列事件的发展过程. 事件可以有各种不同的具体内容，但是它们总是在一定地点于一定时刻发生的.

狭义相对论假定可以用四个 Cartesian 坐标 (t, x^1, x^2, x^3) 表示一个事件[3]. 或者，

$$x = (x^\mu) = (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

式中，$x^0 \equiv ct$. x^μ 为 Cartesian 坐标意味着：

$$-\infty < x^\mu < +\infty, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

[3]之所以能使用 Cartesian 坐标，是因为狭义相对论默认的物理时空是不存在引力的四维闵氏 (Minkowski) 平坦空间.

- 同一个事件 P 在惯性系 Σ 上用 $x_P = (x_P^\mu)$ 表达，但在另一惯性系 Σ' 中就用 $(x_P'^\mu)$ 表达.
- Lorentz 变换就是同一事件在不同惯性系的两组坐标 x^μ 和 x'^μ 之间的联系.

狭义相对论默认的物理时空是内禀曲率为零的四维闵氏平坦空间. 所以，在狭义相对论理论中，

1. 时间是均匀的.
2. 空间既是均匀的，也是各向同性的.

时空的均匀性意味着同一时空点在不同坐标系的两组笛卡尔坐标之间的联系只能是线性变换. 证明如下：

- 考虑两个时空 P 与 Q. 设 P 在坐标系 Σ 与 Σ' 中的笛卡尔坐标分别为 x^μ 和 x'^μ，Q 在 Σ 与 Σ' 中的笛卡尔坐标分别为 y^μ 和 y'^μ. 一般情形下，

$$x'^\mu = f^\mu(x), \qquad y'^\mu = f^\mu(y).$$

- 此二时空点的时间间隔与空间距离在坐标系 Σ 中为 $x^\mu - y^\mu$，在另一坐标系 Σ' 中为：

$$x'^\mu - y'^\mu = f^\mu(x) - f^\mu(y)$$

- 时间与空间的均匀性假设意味着不存在有特权的时空点. 所以，在坐标系 Σ 中重新选取坐标原点，

$$x^\mu \to x^\mu + b^\mu, \qquad y^\mu \to y^\mu + b^\mu$$

既不会改变 P、Q 两点在 Σ 系中的时空坐标差 $x^\mu - y^\mu$，也不会改变它们在 Σ' 系中的时空坐标差：

$$x'^\mu - y'^\mu = f^\mu(x) - f^\mu(y) = f^\mu(x+b) - f^\mu(y+b)$$

求此式对 x^ν 的微商，

$$\frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu} = \frac{\partial f^\mu(x+b)}{\partial x^\nu}$$

- 鉴于平移量 b^μ 的任意性，上式的成立意味着：

$$\frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu$$

是一些独立于时空坐标 x 的常数．把上式看做一个偏微分方程组，其通解是：

$$f^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu + a^\mu$$

所以，时间与空间的均匀性意味着同一时空点在闵氏空间两个不同坐标系之间的笛卡尔坐标只能通过线性变换相联系：

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu + a^\mu$$

- **惯性参考系是闵氏空间中一类特殊的坐标系，其中光速是一个常数．** 因此，期望中的 Lorentz 变换必须是上述线性变换的一个特例．

事件的间隔：

为了计入光速不变原理对时空坐标变换的限制，再引入事件间隔的概念．设两事件 P 与 Q 在惯性系 Σ 中的笛卡尔坐标分别为 x_P^μ 和 x_Q^μ，则二者的间隔定义为：

$$(x_P - x_Q)^2 \equiv -c^2(t_P - t_Q)^2 + (x_P^1 - x_Q^1)^2 + (x_P^2 - x_Q^2)^2 + (x_P^3 - x_Q^3)^2$$

或者，

$$(x_P - x_Q)^2 = \eta_{\mu\nu}(x_P^\mu - x_Q^\mu)(x_P^\nu - x_Q^\nu)$$

$\eta_{\mu\nu}$ 称为闵氏空间度规张量 $\boldsymbol{\eta}$ 的笛卡尔分量：

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

上式常简记为：

$$\mathrm{diag}\,(\eta_{\mu\nu}) = (-1, 1, 1, 1)$$

度规张量 $\eta_{\mu\nu}$ 存在逆张量 $\eta^{\mu\nu}$:

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho} := \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho}$$

式中,

$$\boxed{\eta^{00} = \eta_{00} = -1, \qquad \eta^{ij} = \eta_{ij} = \delta_i^j, \qquad \eta^{0j} = \eta_{0j} = 0.}$$

1. 若两事件在同一地点相继发生,则:

$$(x_P - x_Q)^2 = -c^2(t_P - t_Q)^2 < 0$$

2. 若两事件同时发生于不同地点,则:

$$(x_P - x_Q)^2 = (x_P^1 - x_Q^1)^2 + (x_P^2 - x_Q^2)^2 + (x_P^3 - x_Q^3)^2 > 0$$

3. 设二事件在惯性系 Σ' 上的坐标分别为 $(x_P'^{\mu})$ 和 $(x_Q'^{\mu})$. 如此, Σ' 系中观察者所测得的事件间隔将是:

$$(x_P' - x_Q')^2 = \eta_{\mu\nu}(x_P'^{\mu} - x_Q'^{\mu})(x_P'^{\nu} - x_Q'^{\nu})$$

$\mathcal{Q}$: $(x_P - x_Q)^2$ 与 $(x'_P - x'_Q)^2$ 之间有何关系？

- 倘若 P, Q 二事件是通过光讯号相联系，计及光速不变原理，则有：

$$(x_P - x_Q)^2 = 0, \quad \leftrightarrow \quad (x'_P - x'_Q)^2 = 0.$$

- 因此，在一般情形下，

$$(x'_P - x'_Q)^2 = f\Big[v, (x_P - x_Q)^2\Big] \;= \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(v)\, \Big[(x_P - x_Q)^2\Big]^n$$

  其中系数 $f_n(v)$ 可以是牵连速度 v 的函数，且 $f_n(0) = \delta_{n1}$. 只有这样才能保证光讯号的间隔在两个惯性系中均为零.

- 惯性系之间的笛卡尔坐标变换只能是线性变换. 所以，

$$f_n(v) = \sigma(v)\delta_{n1}, \quad \rightsquigarrow \quad (x'_P - x'_Q)^2 = \sigma(v)(x_P - x_Q)^2, \quad \rightsquigarrow \quad \sigma(0) = 1$$

- 二惯性系是平权的. 因此, 交换 Σ 与 Σ' 后上式应修正为:

$$(x_P - x_Q)^2 = \sigma(-v)(x'_P - x'_Q)^2 \quad \rightsquigarrow \quad \sigma(-v)\sigma(v) = 1$$

- 空间的各向同性假设意味着空间中不存在特定的方向. 因此, 比例因子 $\sigma(v)$ 只可能依赖于牵连速度的绝对值,

$$\sigma(v) = \sigma(-v) = \sigma(v)$$

所以:

$$\sigma(v) = \pm 1$$

注意到 $\sigma(0) = 1$ 并计及变换的连续性, 我们有 $\sigma(v) = 1$.

1. 两个事件的间隔不因惯性系选择的不同而不同,

$$\boxed{(x'_P - x'_Q)^2 = (x_P - x_Q)^2}$$

这个结论称为**间隔不变性**. 它是光速不变原理的数学表达式.

洛伦兹群

1. 闵氏空间中同一个事件在两个不同坐标系中分别表示为笛卡尔坐标 x^μ 和 x'^μ，二者之间通过线性变换 $(\Lambda^\mu{}_\nu, a^\mu)$ 相联系：

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

   这样的线性变换倘若保持任意两个事件的间隔，

$$(x'_P - x'_Q)^2 = (x_P - x_Q)^2$$

   则称其为 Poincare 变换，或者非齐次的 Lorentz 变换.
2. $a^\mu = 0$ 情形下的 Poincare 变换称为齐次 Lorentz 变换或简称为 Lorentz 变换，记作 $\Lambda^\mu{}_\nu$.

因为，

$$(x'^\mu_P - x'^\mu_Q) = \Lambda^\mu{}_\nu (x^\nu_P - x^\nu_Q), \quad (x_P - x_Q)^2 = \eta_{\mu\nu}(x^\mu_P - x^\mu_Q)(x^\nu_P - x^\nu_Q),$$

$$(x'_P - x'_Q)^2 = \eta_{\mu\nu}(x'^\mu_P - x'^\mu_Q)(x'^\nu_P - x'^\nu_Q)$$

Lorentz 变换矩阵 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 具有性质:

$$\boxed{\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}}$$

或者等价地,

$$\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\eta^{\sigma\alpha} = \eta_{\rho\sigma}\eta^{\sigma\alpha} = \delta^{\alpha}_{\rho} \qquad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{\Lambda}^{T}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}^{-1} = \boldsymbol{I}$$

赝正交矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda^{\mu}{}_{\nu})$ 的全体在矩阵乘法的意义下形成一个群 $O(1,3)$, 称为 Lorentz 群:

- Lorentz 变换条件显然存在特解

  $$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \qquad \rightsquigarrow \quad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu} = x^{\mu}$$

  即单位元是存在的.

- 求 Lorentz 变换性质矩阵形式两端的行列式, 我们有:

  $$(\det \boldsymbol{\Lambda})^{2} = 1, \qquad \rightsquigarrow \quad \det \boldsymbol{\Lambda} = \pm 1 \neq 0$$

  所以逆 Lorentz 变换存在, $\tilde{\boldsymbol{\Lambda}} = (\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}^{-1})^{T} = (\boldsymbol{\eta}^{-1})^{T}\boldsymbol{\Lambda}^{T}\boldsymbol{\eta}^{T}$.

计及度规矩阵及其逆矩阵均是对称矩阵的事实，我们有：

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \boldsymbol{\eta}^{-1}\mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{\eta} \qquad \leadsto \quad \tilde{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \boldsymbol{I}$$

其矩阵元是：

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{\mu}{}_{\nu} = \left(\boldsymbol{\eta}^{-1}\mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{\eta}\right)^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\sigma}\left(\mathbf{\Lambda}^T\right)_{\sigma}{}^{\rho}\eta_{\rho\nu} = \eta^{\sigma\mu}\Lambda^{\rho}{}_{\sigma}\eta_{\nu\rho}$$

亦即，

$$\boxed{\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{\mu}{}_{\nu} = \eta_{\nu\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\sigma}\eta^{\sigma\mu}}$$

- 请大家自行检验 Lorentz 变换满足封闭性和结合律.

现在分析 Lorentz 变换的物理内涵. Lorentz 变换满足的性质可以重新表为：

$$1 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \delta_{ij}\Lambda^i{}_0\Lambda^j{}_0, \qquad \delta_{ij} = -\Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_j + \delta_{kl}\Lambda^k{}_i\Lambda^l{}_j,$$

$$0 = -\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_j + \delta_{ik}\Lambda^i{}_0\Lambda^k{}_j$$

它有如下特解：

$$\Lambda^0{}_0 = 1, \quad \Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = 0, \quad \delta_{kl}\Lambda^k{}_i\Lambda^l{}_j = \delta_{ij}. \qquad \leadsto \quad O(3)$$

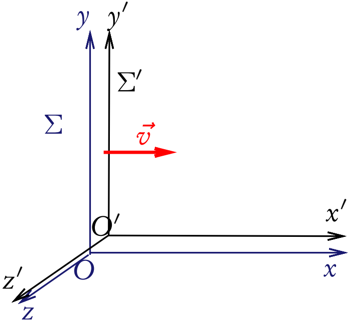
$\mathcal{Q}$: 除了空间转动外，是否还存在非平庸的 Lorentz 变换？

考虑 P、Q 两个事件：Q 在惯性系 Σ 中的笛卡尔坐标为 $(0,0,0,0)$，P 在 Σ 中的笛卡尔坐标为 (ct, x^1, x^2, x^3). 如此，Σ 系中二事件之间的间隔是：

$$s^2 = -(ct)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

现考虑此二事件在另一惯性系 Σ' 中的间隔. 设 Σ' 相对于 Σ 的运动速度为 $\boldsymbol{v}$，且在初始时刻 $(t = t' = 0)$ 二惯性系重合. 这样，二事件在 Σ' 系中的笛卡尔坐标分别为 $(0,0,0,0)$ 和 (ct', x'^1, x'^2, x'^3)，相应的间隔是：

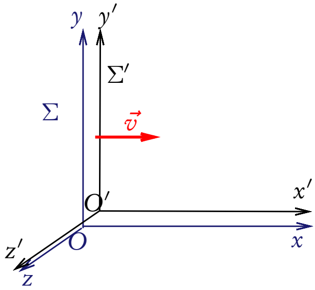
$$s'^2 = -(ct')^2 + (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2$$



洛伦兹推动变换

为简单计，暂设两坐标系的 $x^1(x'^1)$ 轴都沿 Σ' 相对于 Σ 的运动方向. 此情形下，期待的 Lorentz 变换具有如下特殊线性形式：

$$
\begin{aligned}
ct' &= \Lambda^0{}_0\, ct + \Lambda^0{}_1\, x^1 \\
x'^1 &= \Lambda^1{}_0\, ct + \Lambda^1{}_1\, x^1 \\
x'^2 &= x^2 \\
x'^3 &= x^3
\end{aligned}
$$



1. 习惯上常把同一时空点在两个惯性参考系之间的坐标变换称为洛伦兹推动变换 (Boost).
2. 由于 x^1 轴与 x'^1 轴正向相同，$\rightsquigarrow$ $\Lambda^1{}_1 > 0$.
3. 同理，通常取时间 t 和 t' 的演化箭头方向相同，$\rightsquigarrow$ $\Lambda^0{}_0 > 0$.

将猜测的 Lorentz 推动变换代入到间隔不变性的表式 $s^2 = s'^2$ 中，则有：

$$
\begin{aligned}
-(ct)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 &= s^2 \\
&= s'^2 \\
&= -(ct')^2 + (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\
&= -(\Lambda^0{}_0\, ct + \Lambda^0{}_1\, x^1)^2 + (\Lambda^1{}_0\, ct + \Lambda^1{}_1\, x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \\
&= -(ct)^2 \left[(\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2\right] + \left[(\Lambda^1{}_1)^2 - (\Lambda^0{}_1)^2\right] (x^1)^2 \\
&\quad - 2ctx^1 (\Lambda^0{}_0\, \Lambda^0{}_1 - \Lambda^1{}_0\, \Lambda^1{}_1) + (x^2)^2 + (x^3)^2
\end{aligned}
$$

比较两端得知：

$$
\begin{aligned}
&(\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 = 1, \qquad (\Lambda^1{}_1)^2 - (\Lambda^0{}_1)^2 = 1, \\
&\Lambda^0{}_0\, \Lambda^0{}_1 - \Lambda^1{}_0\, \Lambda^1{}_1 = 0.
\end{aligned}
$$

由前两个方程得知：

$$
\Lambda^0{}_0 = \sqrt{1 + (\Lambda^1{}_0)^2}\,, \quad \Lambda^1{}_1 = \sqrt{1 + (\Lambda^0{}_1)^2}
$$

第三个方程改写为：

$$\Lambda^0{}_1\sqrt{1+(\Lambda^1{}_0)^2}=\Lambda^1{}_0\sqrt{1+(\Lambda^0{}_1)^2} \quad \leadsto \quad \Lambda^0{}_1=\Lambda^1{}_0$$

这些系数可以用牵连速度、即 Σ' 与 Σ 之间的相对速度表出. 考虑惯性系 Σ' 的原点 O'. 在 Σ 上观测，质点 O' 以速度 v 沿 x^1 轴正方向移动，因此其坐标为 $x^1=vt$. 但 O' 在 Σ' 中的坐标始终是 $x'^1=0$. 所以由 Lorentz 推动变换知：

$$0=\Lambda^1{}_1\,vt+\Lambda^1{}_0\,ct, \qquad \leadsto \quad \frac{\Lambda^1{}_0}{\Lambda^1{}_1}=-v/c=-\beta$$

这里 $\beta\equiv v/c$ 是无量纲的牵连速度. 从而：

$$\Lambda^1{}_1=\Lambda^0{}_0=1/\sqrt{1-\beta^2}, \qquad \Lambda^1{}_0=\Lambda^0{}_1=-\beta/\sqrt{1-\beta^2}$$

所求得的特殊 Lorentz 变换即为：

$$x'^1=\frac{x^1-vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad x'^2=x^2, \quad x'^3=x^3, \quad t'=\frac{t-vx^1/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Lorentz 推动变换常表达为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \; X' = \mathbf{\Lambda} X$$

式中出现的无量纲参数为:

$$\beta = v/c, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

习惯上常把

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

称为沿 x^1 方向的 Lorentz 推动矩阵. 显然, $\det \mathbf{\Lambda} = 1$.

称为沿 x^1 方向 Lorentz 推动矩阵的逆矩阵为：

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \boldsymbol{\eta}^{-1}\mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \quad \det\tilde{\mathbf{\Lambda}} = 1$$

沿 x^1 方向的逆 Lorentz 推动变换即为：

$$X = \tilde{\mathbf{\Lambda}}X' \qquad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}$$

或者等价地，

$$x^1 = \frac{x'^1 + vt'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3, \quad t = \frac{t' + vx'^1/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

逆变换也可以直接使用相对性原理、从二惯性系的平权性获得.

点评：

- 若两个惯性系之间的相对速度远小于光速，$v \ll c$，精确到无量纲牵连速度 $\beta = v/c$ 的一次幂，Lorentz 推动变换近似为：

$$\boxed{t' = t - \frac{vx^1}{c^2}, \quad x'^1 = x^1 - vt, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3}$$

  此式称为 Lorentz 推动的低速近似. 也可以称之为无穷小的 Lorentz 推动.

- 若取 $c \to \infty$，则 Lorentz 推动退化为 Galileo 变换：

$$\boxed{t' = t, \quad x'^1 = x^1 - vt, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3}$$

  所以，Galileo 变换也可以称为是 Lorentz 推动变换的非相对论极限.

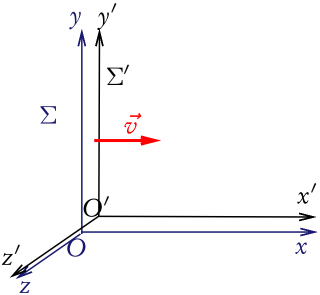
- 无穷小的 Lorentz 推动仍是 Lorentz 变换，它与 Galileo 变换在物理上是有本质差别的.

普适的 Lorentz 推动变换

现在讨论与坐标系[4]选择无关的 Lorentz 变换.

如图示，事件 (t, x^1, x^2, x^3) 的位置矢量可以在 Cartesian 直角坐标系里表达为：

$$\boldsymbol{r} = x^1\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + x^3\boldsymbol{k}$$



以二参考系相对运动速度 $\boldsymbol{v}$ 为参考，可以将 $\boldsymbol{r}$ 改写为：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\parallel} + \boldsymbol{r}_{\perp}$，这里 $\boldsymbol{r}_{\parallel} = x^1\boldsymbol{i}$ 而 $\boldsymbol{r}_{\perp} = x^2\boldsymbol{j} + x^3\boldsymbol{k}$. 前面求得的 Lorentz 推动可重新表为：

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{r}'_{\parallel} &= \gamma(\boldsymbol{r}_{\parallel} - \boldsymbol{\beta}ct) \\ \boldsymbol{r}'_{\perp} &= \boldsymbol{r}_{\perp} \end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$，且 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. $\rightsquigarrow$ $\beta^2 = (\gamma^2 - 1)/\gamma^2$.

---

[4] 而非参考系.

因为，

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} = \frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta})}{\beta^2}\boldsymbol{\beta} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta})\vec{\boldsymbol{\beta}}, \qquad \boldsymbol{r}_{\perp} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{\parallel}$$

我们有：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r}'_{\parallel} + \boldsymbol{r}'_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{r}_{\parallel} - \boldsymbol{\beta}ct) + \boldsymbol{r}_{\perp} \\ &= \boldsymbol{r} + (\gamma-1)\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}ct \\ &= \boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}ct \end{aligned}$$

从而，普适的、与坐标系选择无关的 Lorentz 推动变换是：

$$\boxed{ct' = \gamma(ct - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}ct}$$

逆 Lorentz 推动变换的普适形式为：

$$\boxed{ct = \gamma(ct' + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} + \gamma \boldsymbol{\beta} ct'}$$

有了上述与坐标系选择无关的 Lorentz 推动变换及其逆变换，我们可以随意选择两个坐标系将其分量化. 例如在二惯性系 Σ、Σ' 上均选择 Cartesian 直角坐标系， 则可把正反 Lorentz 推动分别表达为：

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \quad x^{\mu} = \tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu} x'^{\nu} \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu} = \eta_{\nu\rho} \Lambda^{\rho}{}_{\sigma} \eta^{\sigma\mu}$$

- Lorentz 推动中的变换系数为：

$$\boxed{\Lambda^{0}{}_{0} = \gamma, \quad \Lambda^{0}{}_{j} = -\gamma\beta_j, \quad \Lambda^{i}{}_{0} = -\gamma\beta^i, \quad \Lambda^{i}{}_{j} = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j}$$

- 逆 Lorentz 推动中的变换系数则为：

$$\boxed{\tilde{\Lambda}^{0}{}_{0} = \gamma, \quad \tilde{\Lambda}^{0}{}_{j} = \gamma\beta_j, \quad \tilde{\Lambda}^{i}{}_{0} = \gamma\beta^i, \quad \tilde{\Lambda}^{i}{}_{j} = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j}$$

$\mathcal{Q}$: 检验赝正交条件 $\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\,\tilde{\Lambda}^{\rho}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$.

- 情形 $\mu = \nu = 0$:

$$\Lambda^{0}{}_{\rho}\,\tilde{\Lambda}^{\rho}{}_{0} = \Lambda^{0}{}_{0}\,\tilde{\Lambda}^{0}{}_{0} + \Lambda^{0}{}_{i}\,\tilde{\Lambda}^{i}{}_{0} = \gamma^2 - \gamma^2\beta_i\beta^i = \gamma^2(1-\beta^2) = 1$$

- 情形 $\mu = 0,\ \nu = j$:

$$\begin{aligned}\Lambda^{0}{}_{\rho}\,\tilde{\Lambda}^{\rho}{}_{j} = \Lambda^{0}{}_{0}\,\tilde{\Lambda}^{0}{}_{j} + \Lambda^{0}{}_{i}\,\tilde{\Lambda}^{i}{}_{j} &= \gamma^2\beta_j - \gamma\beta_i\left(\delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j\right)\\ &= \gamma(\gamma-1)\beta_j - \frac{\gamma^3\beta_i\beta^i}{\gamma+1}\beta_j\\ &= \gamma(\gamma-1)\beta_j - \frac{\gamma(\gamma^2-1)}{\gamma+1}\beta_j = 0\end{aligned}$$

同理知 $\Lambda^{i}{}_{\rho}\,\tilde{\Lambda}^{\rho}{}_{0} = 0$.

以上验算中我们使用了数学恒等式:

$$\beta^i\beta_i = \beta^2, \qquad \gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1 = (\gamma+1)(\gamma-1)$$

- 情形 $\mu = i,\ \nu = j$:

$$\begin{aligned}
\Lambda^i{}_\rho\,\tilde{\Lambda}^\rho{}_j &= \Lambda^i{}_0\,\tilde{\Lambda}^0{}_j + \Lambda^i{}_k\,\tilde{\Lambda}^k{}_j \\
&= -\gamma^2\beta^i\beta_j + \left(\delta^i_k + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_k\right)\left(\delta^k_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^k\beta_j\right) \\
&= -\gamma^2\beta^i\beta_j + \delta^i_j - \frac{2\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j + \frac{\gamma^4\beta^2}{(\gamma+1)^2}\beta^i\beta_j \\
&= \delta^i_j + \gamma^2\left(-1 + \frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\beta^i\beta_j \\
&= \delta^i_j
\end{aligned}$$

至此, Lorentz 满足一般 Lorentz 变换赝正交条件的论断完全证实. 换言之, Lorentz 推动的确属于洛伦兹变换(群).

$\mathcal{Q}$: 怎样正确解读与洛伦兹变换矩阵相关的矩阵元?

- 鉴于我们把闵氏空间时空点的位置坐标写成了 x^μ 且约定 x^μ 构成了列矩阵

$$X = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

第 μ 行的矩阵元, 洛伦兹变换 $x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu$ 可以理解为矩阵方程:

$$X \quad \rightsquigarrow \quad X' = \mathbf{\Lambda} \, X$$

式中 $\mathbf{\Lambda}$ 是洛伦兹变换矩阵:

$$\mathbf{\Lambda} = (\Lambda^\mu{}_\nu) \qquad \rightsquigarrow \quad \Lambda^\mu{}_\nu = (\mathbf{\Lambda})^\mu{}_\nu$$

换言之, 应该把 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 解读为洛伦兹变换矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 第 μ 行、第 ν 列的矩阵元.

- 注意到列矩阵的转置是行矩阵,

$$X = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad X^T = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$$

洛伦兹变换可以等价地表为 $X^T \rightsquigarrow X'^T = X^T \mathbf{\Lambda}^T$. 写成矩阵元形式, 即为:

$$x^\mu \quad \rightsquigarrow \quad x'^\mu = x^\nu \left(\mathbf{\Lambda}^T\right)_\nu{}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu \quad \rightsquigarrow \quad \left(\mathbf{\Lambda}^T\right)_\nu{}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu$$

所以, 转置洛伦兹变换矩阵 $\mathbf{\Lambda}^T$ 的矩阵元结构是:

$$\mathbf{\Lambda}^T = \left[\left(\mathbf{\Lambda}^T\right)_\nu{}^\mu\right]$$

换言之, 也可以把 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 按照 $\Lambda^\mu{}_\nu = \left(\mathbf{\Lambda}^T\right)_\nu{}^\mu$ 解读为 $\mathbf{\Lambda}^T$ 第 ν 行、第 μ 列的矩阵元.

- 或许你有机会遭遇到“矩阵元”

$$\Lambda_\mu{}^\nu$$

如何解读它呢? 它的确可以诠释为某个矩阵第 μ 行、第 ν 列的矩阵元，但这个矩阵不是洛伦兹变换矩阵 $\mathbf{\Lambda}$. 如前述，$\mathbf{\Lambda}$ 第 μ 行、第 ν 列的矩阵元是 $\Lambda^\mu{}_\nu$. 为了找到这个矩阵，我们使用闵氏空间的度规矩阵和逆矩阵对 $\Lambda_\mu{}^\nu$ 的指标进行升降:

$$\Lambda_\mu{}^\nu \equiv \eta_{\mu\alpha}\,\Lambda^\alpha{}_\beta\,\eta^{\beta\nu} = \left(\boldsymbol{\eta}\,\mathbf{\Lambda}\,\boldsymbol{\eta}^{-1}\right)_\mu{}^\nu$$

即把 $\Lambda_\mu{}^\nu$ 定义成为复合矩阵 $\boldsymbol{\eta}\,\mathbf{\Lambda}\,\boldsymbol{\eta}^{-1}$ 第 μ 行、第 ν 列的矩阵元.

注意到逆洛伦兹矩阵

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \boldsymbol{\eta}^{-1}\,\mathbf{\Lambda}^T\,\boldsymbol{\eta} \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{\mathbf{\Lambda}}^T = \boldsymbol{\eta}\,\mathbf{\Lambda}\,\boldsymbol{\eta}^{-1}$$

换言之,

$$\Lambda_\mu{}^\nu \equiv \left(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^T\right)_\mu{}^\nu$$

即应该把 $\Lambda_\mu{}^\nu$ 解读为逆洛伦兹变换矩阵之转置矩阵 $\tilde{\mathbf{\Lambda}}^T$ 第 μ 行、第 ν 列的矩阵元.

- $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ 本来并没有定义，它也并没有出现在洛伦兹变换中. 这个事实值得特别强调. 前页我们通过

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} \equiv \eta_{\mu\alpha}\,\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\,\eta^{\beta\nu}$$

给它补充了一个定义. 但实际上是不必要的. 以下我们选择不定义符号 $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ 以避免出现歧义. 因此，$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}^T$ 的矩阵元应准确地表达为：

$$\left(\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}^T\right)_{\mu}{}^{\nu} = \eta_{\mu\alpha}\,\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\,\eta^{\beta\nu}$$

- 根据逆洛伦兹变换矩阵 $\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}$ 的表达式

$$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\eta}^{-1}\,\boldsymbol{\Lambda}^T\,\boldsymbol{\eta}$$

我们很容易弄明白 $\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}$ 的矩阵元结构. 很显然，$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}$ 第 $\boldsymbol{\mu}$ 行、第 $\boldsymbol{\nu}$ 列的矩阵元是：

$$\tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu} \equiv \left(\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}\right)^{\mu}{}_{\nu} = \eta_{\nu\alpha}\,\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\,\eta^{\beta\mu} = \left(\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}^T\right)_{\nu}{}^{\mu}$$

相对论的时空结构

设时空中存在着两个事件. 以第一事件 O 为时空原点 $(0,0,0,0)$ 建立直角坐标系, 使得第二事件 P 的时空坐标为 (t, x^1, x^2, x^3), 则此 O, P 二事件的间隔是:

$$s^2 = -c^2t^2 + r^2$$

这里 $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ 为二事件的空间距离.

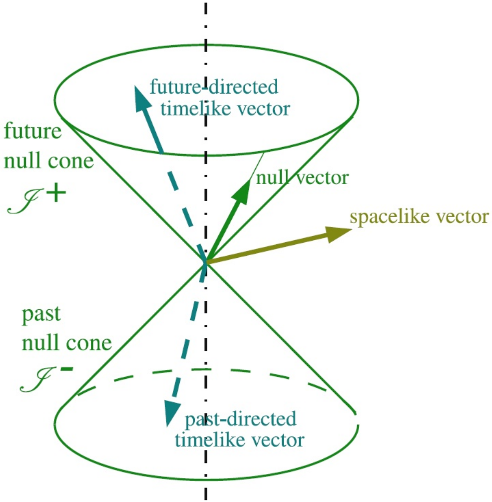
事件的间隔可以有如下三种类型:

1. 类光间隔: 若二事件可以用光波联系, 则 $r = ct$, $\rightsquigarrow$ $s^2 = 0$.
2. 类时间隔: 若二事件可用速度为 u $(u < c)$ 的作用联系, 则 $r = ut < ct$, $\rightsquigarrow$ $s^2 < 0$.
3. 类空间隔: 若二事件的空间距离超过了光波在时间 t 内所能传播的距离, 则 $r > ct$, $\rightsquigarrow$ $s^2 > 0$.

事件的间隔不因参考系的变换而改变. 因此, 上述三种间隔的分类是绝对的, 与参考系的选择无关.

光锥 (Lightcone):

若事件 P 与事件 O 的间隔类光, $s^2=0$, 则 $r=ct$, 即 P 点位于一个以 O 点为顶点的锥面上, 这个锥面称为光锥.



因果律与相互作用的最大传播速度

- 二事件之间存在因果联系的前提条件是二者的间隔类时或类光.

若事件 O, P 的间隔类时 (类光)、且在某惯性系中事件 P 处于 O 的上半光锥内 (包括锥面), 则对任意选择的其他惯性系而言, P 也保持在 O 的上半光锥内:

- 事件 P 是事件 O 的绝对未来.
- 事件 O, P 之间可用光波或者其传播速度低于光速的作用相联系. 所以, 事件 O 是因, 事件 P 为果.

因此, 如果不存在超光速的相互作用, 则两事件 O, P 发生因果联系的必要条件是 P 处于 O 的光锥内. 这样, 二事件发生的先后次序在各个参考系中相同, 因而因果关系是绝对的.

1. 相互作用的最大传播速度是真空中的光速.

现在从 Lorentz 变换出发定量地研究二事件之间的因果律.

在惯性系 Σ 上, 以 (t_1, x_1^1) 表示作为原因的第一事件, (t_2, x_2^1) 表示作为结果的第二事件. $\rightsquigarrow$ $t_2 > t_1$.

若这两个事件在另一惯性系 Σ' 上用 $(t'_1, x_1'^1)$ 和 $(t'_2, x_2'^1)$ 表示, 则由 Lorentz 变换知:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - v(x_2^1 - x_1^1)/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

若二事件之间的因果联系是绝对的、不因参考系的选择而改变, 应有: $t'_2 > t'_1$. 从而应有条件:

$$\frac{x_2^1 - x_1^1}{t_2 - t_1} < c^2/v$$

用 u 表示 Σ 系中测得的作用传播速度, $u = (x_2^1 - x_1^1)/(t_2 - t_1)$, 则上述条件可改写为: $uv < c^2$.

固定于参考系 Σ' 上的观测者也可以用来传递作用, 即牵连速度 v 也可以看做一种作用传递速度, 从而在不等式 $uv < c^2$ 中 u, v 的角色是平权的.

所以, $uv < c^2$ 的解是:

$$u \leq c, \quad v < c.$$

结论:

若相互作用的传播速度不大于光速 ($u \leq c$) 且二事件的间隔类时或类光, 则此二事件之间可以存在因果联系.

考虑具有类空间隔的二事件.

1. 若二事件的间隔类空，则 $r > ct$. 因为相互作用的传播速度不超过光速，间隔类空的二事件之间不可能用任何方式相互联系，它们之间没有因果联系，其发生的先后次序也就失去了绝对性.

现在从 Lorentz 推动出发研究类空间隔. 设参考系 Σ 上二事件的时空坐标为 (t_1, x_1^1) 和 (t_2, x_2^1). 若二事件间隔类空且 Σ 系上的观测者测得第一事件先于第二事件发生，则：

$$c \left\| t_2 - t_1 \right\| < \left\| x_2^1 - x_1^1 \right\|, \quad t_1 < t_2.$$

变换到另一惯性系 Σ' 上，由 Lorentz 推动变换知：

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - (x_2^1 - x_1^1)v/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

若 Σ' 相对于 Σ 的速度 v 足够大，则我们的约定 $t_2 > t_1$ 和类空间隔不等式 $c|t_2 - t_1| < |x_2^1 - x_1^1|$ 仍允许存在如下不等式：

$$0 < t_2 - t_1 \leq \frac{v}{c} \cdot \frac{|x_2^1 - x_1^1|}{c} < \frac{|x_2^1 - x_1^1|}{c}$$

回忆所涉及的 Lorentz 推动，

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - (x_2^1 - x_1^1)v/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

我们看到，若上列不等式成立则必有：

$$t_2' \leq t_1'$$

即对于 Σ' 系中的观测者而言，第二事件是先于 (或同时于) 第一事件发生的.

这样的两个事件自然不会有因果联系. 其时间次序的先后或同时，都没有绝对的意义，因参考系的选择而不同.

运动时钟的延缓

现在聚焦狭义相对论所预言的典型运动学效应．第一个要考虑的问题是：

$\mathcal{Q}$: 若在不同惯性系中观测同一物理过程，观测者测得的过程持续时间之间有何联系？

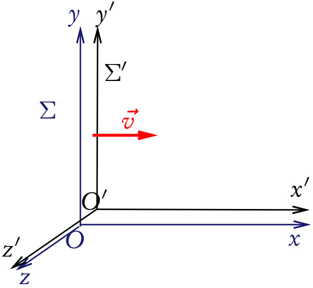
设某物理体系内部相继发生两事件．惯性系 Σ' 是此体系的自身参考系，即体系相对于 Σ' 始终保持静止状态：

1. 在 Σ' 中，两事件发生在同一地点，即 $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_2$.
2. 在 Σ' 中观测到两事件发生的时刻分别为 t'_1 和 t'_2，相应的时间为 $\Delta\tau = t'_2 - t'_1$.
3. 体系的自身参考系只有一个，对任一物理过程而言，$\Delta\tau$ 是唯一的．通常称 $\Delta\tau$ 为该物理过程的固有时．

所以，两事件的间隔是：

$$s^2 = -c^2(\Delta\tau)^2$$

现在实验室参考系 Σ 中观测. 设体系以速度 $\boldsymbol{v}$ 相对于 Σ 做匀速直线运动, 则在 Σ 看来, 上述二事件既发生于不同时刻 t_1 和 t_2, 也发生于不同的地点.



按照逆 Lorentz 推动 $ct = \gamma(ct' + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{r}')$:

$$\Delta t := (t_2 - t_1) = \gamma \left[(t_2' - t_1') + \frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \cdot (\boldsymbol{r}_2' - \boldsymbol{r}_1') \right] = \gamma \Delta \tau$$

即:

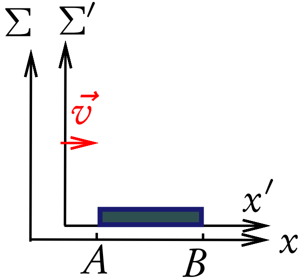
$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}}$$

显然, $\Delta t > \Delta \tau$. 运动物体上发生的物理过程比起静止物体的同一过程而言, 时间延缓了. 这就是相对论的时间延缓效应.

运动尺度的缩短

狭义相对论的另一典型运动学效应涉及比较不同惯性系中对同一物体长度的测量.

如图示, 设一把直尺相对于惯性系 Σ 以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 x^1 轴正向运动. 在 Σ 系中,若直尺后端经过 A 点 (第一事件) 与其前端经过 B 点 (第二事件) 同时发生, 则 A, B 两点在 x^1 轴上坐标差的绝对值就定义为 Σ 系中测得的直尺长度: $L = x_2^1(t) - x_1^1(t)$.



以 Σ' 表示直尺自身参考系. 直尺前后两端在 x'^1 轴上坐标差的绝对值对这把直尺而言是唯一的,

$$L_0 := x_2'^1 - x_1'^1$$

L_0 称为直尺的固有长度.

由 Lorentz 推动变换知：

$$L_0 = x_2'^1 - x_1'^1 = \gamma\left(x_2^1 - vt_2\right) - \gamma\left(x_1^1 - vt_1\right) = \gamma\left[x_2^1(t) - x_1^1(t)\right] = \gamma L$$

即运动直尺的长度与其固有长度相比缩短了：

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - (v/c)^2}$$

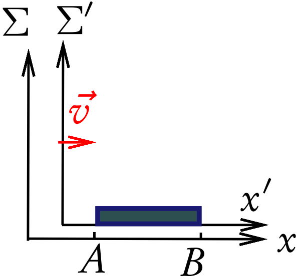
提醒：

1. 时间延迟效应与尺度缩短效应是相关的.
2. 二者都是运动着的物体相互之间时空关系的客观反映，并不是观测者的主观臆测.

作为时间延缓与尺度缩短效应相关性的一个验证，以下我们尝试从前者出发导出后者.

如前述，在实验室参考系 Σ 中，直尺以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 x^1 轴正向运动．考虑如下两个事件：

1. 直尺右端在 t_1 时刻到达坐标为 x_1^1 的 A 点．
2. 直尺左端在 $t_1+\Delta t$ 时刻到达 A 点．



从 Σ 系观测，直尺左端到达 A 点的同时，其右端到达坐标为 x_2^1 的 B 点．于是，Σ 系观测者测得的直尺长度为：

$$L=x_2^1(t_1+\Delta t)-x_1^1(t_1+\Delta t)=v\Delta t, \qquad \rightsquigarrow \quad \Delta t=\frac{L}{v}$$

$\mathcal{Q}$: 怎样理解 Δt？

上述二事件发生于同一个空间点 (A 点)．所以，Δt 是联系它们的物理过程的固有时．

Σ' 系观点：

对于直尺自身系 Σ' 中的观测者而言，固定在 Σ 系上的质点 A 沿 x' 轴负方向以速度 v 做匀速直线运动．前述二事件应该重新表达为：

1. 第一事件是质点 A 在 t_1' 时刻到达直尺右端．
2. 第二事件是质点 A 在 $t_1' + \Delta t'$ 时刻到达直尺左端．

所以，

$$\Delta t' = \frac{L_0}{v}$$

根据运动时钟的延迟效应，$\Delta t' = \gamma \Delta t$．　即：

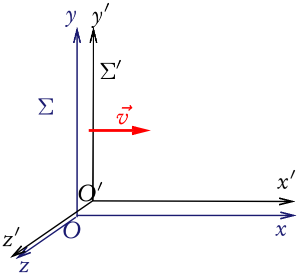
$$L_0/v = \frac{L/v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\leadsto \boxed{L = L_0\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

相对论的速度合成法则

设某质点在两惯性系 Σ 和 Σ' 中的时空坐标分别为 $(t, \boldsymbol{r})$ 和 $(t', \boldsymbol{r}')$，则其相对于 Σ 与 Σ' 的速度分别是：

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \quad \boldsymbol{u}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'}.$$



$\mathcal{Q}$: $\boldsymbol{u}'$ 与 $\boldsymbol{u}$ 如何联系？

回忆普适的 Lorentz 推动变换：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}ct \\ t' &= \gamma\left(t - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}/c\right) \end{aligned}$$

求此二式对 t 的导数，并注意到牵连速度 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$ 是常矢量，得：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c$$
$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \gamma\left(1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c\right)$$

Σ' 系中观测者测得的质点速度是:

$$\vec{u}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'}$$

显然,它可以通过以上二式相除获得:

$$\boxed{\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c}{\gamma\left(1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c\right)}}$$

这就是相对论的速度合成法则.

注意到:

$$\boldsymbol{u}_{\parallel}=\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}\quad\rightsquigarrow\quad(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}=\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\boldsymbol{u}_{\parallel},\qquad\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{\parallel}+\boldsymbol{u}_{\perp}$$

速度合成法则还可以更直观地写为:

$$\boxed{\boldsymbol{u}_{\parallel}'=\frac{\boldsymbol{u}_{\parallel}-\boldsymbol{\beta}c}{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c},\qquad\boldsymbol{u}_{\perp}'=\frac{\boldsymbol{u}_{\perp}}{\gamma\left(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c\right)}}$$

其逆变换式如下:

$$\boldsymbol{u}_{\parallel}=\frac{\boldsymbol{u}_{\parallel}'+\boldsymbol{\beta}c}{1+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}'/c},\qquad\boldsymbol{u}_{\perp}=\frac{\boldsymbol{u}_{\perp}'}{\gamma\left(1+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}'/c\right)}$$

1. 倘若 $\beta\ll 1$ 且 $|\boldsymbol{u}|\ll c$, 精确到 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{v}/c$ 的一次幂, 速度合成公式近似为:

$$\boldsymbol{u}_{\parallel}'\approx\boldsymbol{u}_{\parallel}-\boldsymbol{v},\qquad\boldsymbol{u}_{\perp}'\approx\vec{u}_{\perp}.$$

这正是经典力学中的 Galileo 速度合成法则.

$\mathcal{Q}$: 验证真空中的光速不因惯性系的不同选择而改变其大小.

设在 Σ 系中测得的光波传播方向的单位矢量是 $\boldsymbol{n}$, 使得: $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{n}$. 这样, 按照相对论的速度合成法则, 另一惯性系 Σ' 中测得的光速应为 $\boldsymbol{u}' = c\boldsymbol{n}'$,

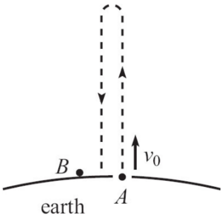
$$\boldsymbol{n}' = \frac{1}{\gamma(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})}\left[\boldsymbol{n} - \gamma\boldsymbol{\beta} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{\beta}\right].$$

现计算 $\boldsymbol{n}'$ 的大小:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{n}' &= \frac{1}{\gamma^2(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^2}\left[1+\gamma^2\beta^2+\frac{\gamma^4\beta^2}{(\gamma+1)^2}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^2 - 2\gamma(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})\right.\\ &\qquad \left. + \frac{2\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^2 - 2\frac{\gamma^3\beta^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})\right]\end{aligned}$$

注意到 $\beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1$, 化简上式知 $\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{n}' = 1$, 即 $\boldsymbol{n}'$ 也是一个单位矢量. 故惯性系 Σ' 测得的光速仍为 c.

孪生子悖论:



考虑一对孪生子, Alice 与 Bob. 如图示, Bob 留在地球上, 但 Alice 乘宇宙飞船到 4 光年外的半人马座 (Alpha Centauri) 做了一次星际旅行. 现在的问题是: 当 Alice 重返地球后二者重逢时, 谁的年龄更小些?

倘若马虎地应用运动时钟延缓效应, 或许你会得出悖论(Paradox):

- Bob 认为 Alice 在运动. 因此, Alice 的钟走的慢, Alice 年轻.
- Alice 认为 Bob 在运动. 因此, Bob 的钟走的慢, Bob 年轻.

很明显, 二人重逢时上述彼此冲突的观点不可能都正确. 这就是著名的孪生子悖论 (Twin Paradox). 解决此悖论的关键是要认识到Alice 在旅行过程中至少要经历 4 段加速运动过程, 因此 Alice 所乘坐的宇宙飞船不是惯性参考系.

1. 欲解决孪生子悖论, 须在狭义相对论中研究质点的加速度.

相对论的加速度合成法则

与牛顿力学相同，相对论力学中质点的加速度仍然定义为其速度的时间导数．所以，质点相对于惯性系 Σ 和 Σ' 的加速度分别是：

$$\boxed{\boldsymbol{w} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}, \qquad \boldsymbol{w}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}'}{\mathrm{d}t'}.}$$

通过计算速度合成法则求 $\boldsymbol{u}'$

$$\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c}{\gamma(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c)}$$

对 Σ 系中时间参数 t 的导数，可得：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}'}{\mathrm{d}t} &= \frac{\boldsymbol{w} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\gamma(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c)} - \left[\frac{\boldsymbol{u} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c}{\gamma(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c)^2}\right](-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{w}/c) \\ &= \frac{1}{\gamma^2(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c)^2}\left[\boldsymbol{w} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{w}) + \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w})\right]\end{aligned}$$

注意到

$$\boldsymbol{u}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}}, \qquad \frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c\right)$$

我们有:

$$\boldsymbol{w}' = \frac{1}{\gamma^3(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}/c)^3}\left[\boldsymbol{w} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{w}) + \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w})\right]$$

这就是相对论的加速度合成法则. 它的反变换式如下:

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{\gamma^3(1+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u}'/c)^3}\left[\boldsymbol{w}' - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{w}') - \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{w}')\right]$$

1. 低速近似下, $\beta \ll 1$, $|\boldsymbol{u}| \ll c$, 质点的加速度将不依赖于惯性系的选择:

   $$\boldsymbol{w}' \approx \boldsymbol{w}$$

   这正是牛顿力学中的情形.

瞬时自身系 (MCRF):

1. 倘若取 Σ' 为粒子的瞬时自身参考系[5], 则有 $\boldsymbol{u}'=0$, 但 $\boldsymbol{w}'\neq 0$.

倘若粒子以速度 $\boldsymbol{u}$ 相对于实验室参考系 Σ 运动, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{u}/c$. 如此, 实验室系中测得的粒子加速度 $\boldsymbol{w}$ 与粒子瞬时自身系中的加速度 $\boldsymbol{w}'$ 之间的关系为:

$$\boldsymbol{w}=\frac{1}{\gamma^3}\left[\boldsymbol{w}'-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{w}')\right]$$

- 若 $\boldsymbol{w}'\parallel\boldsymbol{\beta}$,

$$\boldsymbol{w}=\frac{\boldsymbol{w}'}{\gamma^3}=\left[1-(u/c)^2\right]^{\frac{3}{2}}\boldsymbol{w}' \quad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{w}\parallel\boldsymbol{u}$$

即粒子相对于 Σ 系做加速直线运动.

[5] Momentarily Comoving Reference Frame, 简称 MCRF.

- 若 $\boldsymbol{w}' \perp \boldsymbol{\beta}$,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= \frac{1}{\gamma^3}\left[\boldsymbol{w}' - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{w}')\right] \\
&= \frac{1}{\gamma^3}\left[\boldsymbol{w}' - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{w}') + \frac{\gamma^2\beta^2}{\gamma+1}\boldsymbol{w}'\right] \\
&= \frac{1}{\gamma^3}\left[\boldsymbol{w}' + \frac{\gamma^2\beta^2}{\gamma+1}\boldsymbol{w}'\right] = \frac{\boldsymbol{w}'}{\gamma^2}
\end{aligned}
$$

亦即:

$$
\boldsymbol{w} = \left[1-(u/c)^2\right]\boldsymbol{w}' \qquad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{w}\perp\boldsymbol{u}
$$

若设 $\boldsymbol{u} = u\hat{\boldsymbol{u}}$, 此处用单位矢量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 表示速度 $\boldsymbol{u}$ 的方向, 我们有:

$$
\boldsymbol{w} = \dot{u}\hat{\boldsymbol{u}} + u\dot{\hat{\boldsymbol{u}}}
$$

$\boldsymbol{w}\perp\boldsymbol{u}$ 意味着 $\dot{u}=0$, 即 Σ 系中的观测者认识到粒子的速率不随时间改变, 粒子作匀速曲线运动.

物理量的显示协变性

我们已经学习了 Lorentz 变换：

$$x^\mu \quad \rightsquigarrow \; x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$$

特别是惯性参考系之间的 Lorentz 推动变换：

$$t' = \gamma\,(t - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}/c)$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}ct$$

现在我们有条件贯彻狭义相对论的第二条假设了，即考察候选的“物理学规律”是否具有惯性参考系选择的无关性.

1. 当务之急的事情是了解各个具体的物理量在 Lorentz 变换下如何变换.
2. Lorentz 变换表现为四维闵氏空间中的赝转动：

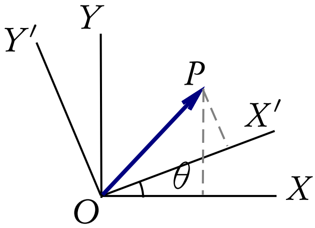
$$X \quad \rightsquigarrow \; X' = \boldsymbol{\Lambda}\, X, \quad \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \eta^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^T\eta$$

$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}$ 是 Lorentz 变换矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的逆矩阵，$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}} \neq \boldsymbol{\Lambda}^T$.

三维欧氏空间中的转动

鉴于 Lorentz 变换非常类似于欧氏空间中的转动，我们首先对三维欧氏空间中的转动做一简单复习、并讨论一下物理量按照其在转动变换下的性质所进行的分类.

先看二维平面上的转动，设坐标系 S' 相对于 S 转了一个角 θ，平面上的点 P 在新旧坐标系中的坐标分别为 (x', y') 与 (x, y). 转动前后 P 点位置坐标之间的关系是:



$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\
y' &= -x\cos\theta + y\cos\theta
\end{aligned}
$$

1. 显见，转动变换的特点是保持 OP 矢量的长度不变:

$$
\left\|OP\right\|^2 = x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2
$$

现在考虑三维欧氏空间的转动.

设 P 为三维欧氏空间 $\mathbb{E}_3$ 中的一点，其在笛卡尔直角坐标系 S 中的坐标为 (x^1, x^2, x^3). P 点相对于原点 $O(0,0,0)$ 的位置矢量为：

$$\boldsymbol{r} = x^i \boldsymbol{e}_i$$

- 若在 $\mathbb{E}_3$ 中建立另一笛卡尔直角坐标系 S', 使得 P 点在其中的位置坐标为 (x'^1, x'^2, x'^3) 且 $\boldsymbol{r} = x'^i \boldsymbol{e}_i'$, 则这两组坐标之间一般是通过线性变换相联系：

$$x'^i = a^i{}_j x^j + b^i$$

- 倘若此变换保持新旧坐标系具有同一坐标原点 ($\rightsquigarrow$ $b^i = 0$) 且保持 P 点相对于原点的位置矢量的长度不变：

$$x'^i x_i' = x^i x_i \equiv \delta_{ij} x^i x^j$$

则称此线性变换为转动 (Rotation).

1. 倘若采取笛卡尔坐标，欧氏空间 $\mathbb{E}_3$ 中两点之间的距离 (平方) 表达为：

$$\|r_P - r_Q\|^2 = \left(x_P^1 - x_Q^1\right)^2 + \left(x_P^2 - x_Q^2\right)^2 + \left(x_P^3 - x_Q^3\right)^2$$

换言之，

$$\|r_P - r_Q\|^2 = \delta_{ij}\left(x_P^i - x_Q^i\right)\left(x_P^j - x_Q^j\right)$$

由此知 $\mathbb{E}_3$ 的度规矩阵为单位矩阵，$g = (\delta_{ij})$. $\mathbb{E}_3$ 的逆度规矩阵实际上也是单位矩阵

$$g^{-1} = \left(\delta^{ij}\right) \quad \rightsquigarrow \quad g\, g^{-1} = g^{-1} g = I \quad \hookleftarrow \quad I = \left(\delta^i_j\right)$$

或者写成矩阵元形式：

$$\delta_{ij}\,\delta^{jk} = \delta^{kj}\,\delta_{ji} = \delta^k_i$$

2. 可以在 $\mathbb{E}_3$ 中引入下指标的笛卡尔坐标：

$$x_i \equiv \delta_{ij}\, x^j \qquad \rightsquigarrow \quad x^i = \delta^{ij}\, x_j$$

按照保持位置矢量长度不变的要求，转动变换 $x'^i = a^i{}_j x^j$ 的系数 $a^i{}_j$ 须满足如下条件：

$$x^i x_i = x'^i x'_i = \delta_{ij}\, a^i{}_k\, a^j{}_l\, x^k x^l \qquad \rightsquigarrow \; \delta_{ij}\, a^i{}_k\, a^j{}_l = \delta_{kl}$$

或者等价地，

$$\tilde{a}^l{}_i\, a^i{}_k = \delta^l_k \qquad \hookleftarrow \quad \tilde{a}^l{}_i \equiv \delta_{ij}\, a^j{}_k\, \delta^{kl}$$

若将线性变换 $x'^i = a^i{}_j x^j$ 写成矩阵方程 $X' = A\,X$，这里，

$$X' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

我们看到：

$$a^i{}_j = (A)^i{}_j \quad \rightsquigarrow \; \tilde{a}^l{}_i = (g)_{ij}\,(A)^j{}_k \left(g^{-1}\right)^{kl} = \left(gAg^{-1}\right)_i{}^l$$

换言之,

$$\tilde{a}^l{}_i = \left(\tilde{A}\right)^l{}_i = \left(\tilde{A}^T\right)_i{}^l \quad \hookleftarrow \quad \tilde{A} \equiv g^{-1}A^T g$$

进而可以把转动变换条件 $\tilde{a}^l{}_i a^i{}_k = \delta^l_k$ 表为矩阵方程:

$$\tilde{A}A = I \quad \rightsquigarrow \quad A^{-1} = \tilde{A} = g^{-1}A^T g \approx A^T$$

1. 满足这个条件的矩阵 A 称为正交矩阵, 相应的变换称为正交变换. 显见, $\det A = \pm 1$.
2. 对于真实的空间转动而言, $\det A = 1$.
3. 可以把空间转动 $X \rightsquigarrow X' = AX$ 等价地重新表达为

$$gX \rightsquigarrow gX' = gAX = gAg^{-1}gX$$

亦即:

$$(gX')^T = (gX)^T g^{-1}A^T g = (gX)^T \tilde{A}$$

注意到:

$$(gX)^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

上式所示的转动变换可以显示地写为:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \tilde{A}$$

其矩阵元形式是:

$$x_i \quad \rightsquigarrow \quad x_i' = x_l \left(\tilde{A}\right)^l{}_i = x_l\, \tilde{a}^l{}_i$$

值得强调的是:

- 虽然 $x_i = \delta_{ij}\, x^j$ 在取值上等同于 x^i, 但二者在空间转动下的变换性质完全不同.
- 鉴于 $\tilde{a}^l{}_i$ 的定义,

$$\boxed{\tilde{a}^l{}_i = \delta_{ij}\, a^j{}_k\, \delta^{kl}}$$

变换式 $x_i \rightsquigarrow x_i' = x_l\, \tilde{a}^l{}_i$ 和 $x^i \rightsquigarrow x'^i = a^i{}_j\, x^j$ 在几何内涵上完全一致.

物理量按空间转动性质的分类

物理量常常分类为标量、矢量和高阶张量等. 这种分类本质上是根据物理量在三维欧氏空间转动

$$x^i \rightsquigarrow x'^i = a^i{}_j x^j, \qquad \tilde{a}^l{}_i a^i{}_k = \delta^l_k, \qquad \det\left(a^i{}_j\right) = \det\left(\tilde{a}^i{}_j\right) = 1$$

下的变换性质规定的 ($\tilde{a}^l{}_i = \delta_{ij} a^j{}_k \delta^{kl}$):

- 若某物理量, 例如 u, 它仅有 1 个分量, 在坐标系转动时此分量保持不变,
$$u \rightsquigarrow u' = u$$
则称其为标量.
- 若某物理量, 例如 V, 它具有 3 个独立分量 (v^1, v^2, v^3), 在坐标系转动时其分量 v^i 与位置矢径的分量 x^i 具有相同的变换法则:
$$v^i \rightsquigarrow v'^i = a^i{}_j v^j$$
则称 V 为 $\mathbb{E}_3$ 中的矢量、v^i 为矢量 V 的逆变分量.

- 考虑矢量 V, 倘若它的 3 个独立分量 (v_1, v_2, v_3), 在坐标系转动时的变换法则为:

$$v_i \rightsquigarrow \quad v_i' = v_j \tilde{a}^j{}_i$$

则称 v_i 为矢量 V 的协变分量.

1. 矢量 V 的协变分量与逆变分量之间的关系是:

$$v_i = \delta_{ij} v^j, \qquad v^i = \delta^{ij} v_j$$

根据 $v'^i = a^i{}_j v^j$ 并注意到 δ^{ij} 是转动变换下的不变张量, 我们有:

$$v_i \quad \rightsquigarrow \quad v_i' = \delta_{ij}' v'^j = \delta_{ij} a^j{}_k v^k = \left(\delta_{ij} a^j{}_k \delta^{kl}\right) v_l = v_l \tilde{a}^l{}_i$$

2. x^i 与 x_i 分别称为位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的逆变分量和协变分量. 二者的关系是 $x^i = \delta^{ij} x_j$ 或者 $x_i = \delta_{ij} x^j$.
3. 两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的点乘运算定义为:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \equiv a^i b_i = a_i b^i = \delta_{ij} a^i b^j$$

点乘服从交换律, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$, 其结果是标量.

- 在欧氏空间 $\mathbb{E}_3$ 中建立笛卡尔直角坐标系，引入坐标轴方向的单位基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 使得

$$V = v^i \boldsymbol{e}_i \quad \rightsquigarrow \quad (\boldsymbol{e}_j)^i = \delta^i_j \quad \hookleftarrow \quad \boldsymbol{e}_j = \delta^i_j\, \boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{e}_j)^i\, \boldsymbol{e}_i$$

我们看到两个单位基矢之间的标量积恰好给出了 $\mathbb{E}_3$ 度规矩阵的矩阵元：

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{kl}\, (\boldsymbol{e}_i)^k\, (\boldsymbol{e}_j)^l = \delta_{kl}\, \delta^k_i\, \delta^l_j = \delta_{ij}$$

由此推论：

$$V \cdot \boldsymbol{e}_i = v^m\, \boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_i = v^m\, \delta_{im} = v_i \quad \rightsquigarrow \quad v_i = V \cdot \boldsymbol{e}_i$$

- 也可以在 $\mathbb{E}_3$ 中定义两个矢量的矢量积、特别是笛卡尔坐标系中基矢之间的矢量积：

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j \equiv \epsilon_{ijk}\, \boldsymbol{e}^k \quad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \epsilon_{ijk}\, \boldsymbol{e}^k a^i b^j$$

式中 $\boldsymbol{e}^i$ 是与基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 相关联的所谓余基矢：

$$\boldsymbol{e}^i \equiv \delta^{im} \boldsymbol{e}_m \quad \rightsquigarrow \quad V = v^i \boldsymbol{e}_i = v_i \boldsymbol{e}^i$$

ϵ_{ijk} 称为 Levi-Civita 全反对称符号，

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & (ijk) \text{ 形成 } (123) \text{ 的偶排列；} \\ -1, & (ijk) \text{ 形成 } (123) \text{ 的奇排列；} \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

或者等价地，

$$\epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_i^1 & \delta_i^2 & \delta_i^3 \\ \delta_j^1 & \delta_j^2 & \delta_j^3 \\ \delta_k^1 & \delta_k^2 & \delta_k^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_i^1 & \delta_j^1 & \delta_k^1 \\ \delta_i^2 & \delta_j^2 & \delta_k^2 \\ \delta_i^3 & \delta_j^3 & \delta_k^3 \end{vmatrix}$$

所以 $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{jik}$，但 $\epsilon_{ijk}\,\delta^{ij} = 0$.

- 若某物理量 T, 它具有 3^{n+m} 个独立分量 $T^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_n}$. 在坐标系转动时其分量的每一个上指标都与位置矢径逆变分量 x^i 有相同的变换法则，每一个下指标都与位置矢径协变分量 x_i 有相同的变换法则：

$$T^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_n} \quad \rightsquigarrow \quad T'^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_n} = a^{i_1}{}_{k_1} \cdots a^{i_m}{}_{k_m}\; T^{k_1 k_2 \cdots k_m}_{l_1 l_2 \cdots l_n}\; \tilde{a}^{l_1}{}_{j_1} \cdots \tilde{a}^{l_n}{}_{j_n}$$

则称 T 为 $\mathbb{E}_3$ 中的一个 (m, n) 型张量，$m+n$ 称为此张量的阶.

以 $(0,2)$ 型张量 T 为例[6]，它具有 9 个独立分量 T_{ij}. 在坐标系转动时 T_{ij} 中的变换法则是：

$$T_{ij} \rightsquigarrow \quad T'_{ij} = T_{kl}\,\tilde{a}^{k}{}_{i}\,\tilde{a}^{l}{}_{j}$$

T_{ij} 可以进一步分解为：

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} + \frac{1}{3} T^{k}{}_{k}\,\delta_{ij}$$

其中，

1. $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - \frac{1}{3} T_{k}{}^{k}\,\delta_{ij}$ 是对称无迹的二阶张量，$S_{ij} = S_{ji}$，$S_{ij}\delta^{ji} = 0$.
2. $A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ 是反对称二阶张量，$A_{ij} = -A_{ji}$. 反对称张量天然无迹，$A_{ij}\delta^{ji} = 0$.
3. $T^{k}{}_{k} \equiv T_{ij}\,\delta^{ji}$ 称为张量 T_{ij} 的迹，它本身是一个标量.
4. δ_{ij} 是 $\mathbb{E}_3$ 的度规张量，它在空间转动变换下保持不变.

[6] 也可以称它为 2 阶协变张量.

疑难解析:

1. 张量的对称性质不因空间转动而改变. 设 S_{ij} 在转动前的坐标系中是对称张量, $S_{ij} = S_{ji}$. 空间转动后,

$$S_{ij} \rightsquigarrow S'_{ij} = S_{kl}\, \tilde{a}^{k}{}_{i}\, \tilde{a}^{l}{}_{j} = S_{lk}\, \tilde{a}^{l}{}_{j}\, \tilde{a}^{k}{}_{i} = S'_{ji}$$

2. 张量之迹确为标量:

$$T^{k}{}_{k} \rightsquigarrow T'^{k}{}_{k} = a^{k}{}_{i}\, T^{i}{}_{j}\, \tilde{a}^{j}{}_{k} = T^{i}{}_{j} \left(\tilde{a}^{j}{}_{k}\, a^{k}{}_{i} \right) = \delta^{j}_{i}\, T^{i}{}_{j} = T^{i}{}_{i}$$

3. 度规 δ_{ij} 是欧氏空间 $\mathbb{E}_3$ 中的不变张量:

$$\delta_{ij} \rightsquigarrow \delta'_{ij} = \delta_{kl}\, \tilde{a}^{k}{}_{i}\, \tilde{a}^{l}{}_{j} = \delta_{kl} \left(\delta_{im}\, a^{m}{}_{n}\, \delta^{nk} \right) \tilde{a}^{l}{}_{j} = \delta_{im}\, a^{m}{}_{l}\, \tilde{a}^{l}{}_{j}$$

所以,

$$\delta'_{ij} = \delta_{im}\, \delta^{m}_{j} = \delta_{ij}$$

$\mathcal{Q}$: 欧氏空间 $\mathbb{E}_3$ 中独立的不变张量共有两个. 除二阶对称的度规张量 δ_{ij} 之外, 另一个不变张量是三阶 Levi-Civita 全反对称张量 ϵ_{ijk}.

现在检验 ϵ_{ijk} 在空间转动下的不变性. 首先约定 ϵ_{ijk} 是 $\mathbb{E}_3$ 中的三阶协变张量, 则在进行了空间转动变换 $x^i \rightsquigarrow x'^i = a^i{}_j x^j$ 之后, ϵ_{ijk} 变为:

$$\epsilon_{ijk} \quad \rightsquigarrow \quad \epsilon'_{ijk} = \epsilon_{mnl}\, \tilde{a}^m{}_i\, \tilde{a}^n{}_j\, \tilde{a}^l{}_k = \kappa\, \epsilon_{ijk}$$

上式最后一步基于对称性的分析. 为了确定比例系数 κ, 注意到真实空间转动矩阵的行列式是 $+1$,

$$1 = \det \tilde{A} = \epsilon_{mnl}\, \tilde{a}^m{}_1\, \tilde{a}^n{}_2\, \tilde{a}^l{}_3$$

所以:

$$\kappa = \kappa\, \epsilon_{123} = \epsilon'_{123} = \epsilon_{mnl}\, \tilde{a}^m{}_1\, \tilde{a}^n{}_2\, \tilde{a}^l{}_3 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}$$

点评：

虽然 $\mathbb{E}_3$ 中独立的不变张量只有 δ_{ij} 与 ϵ_{ijk}，但与它们相关的 δ^{ij}, δ^i_j 与 ϵ^{ijk} 也都是空间转动下的不变张量. 例如在空间转动变换下，

$$\delta^i_j \quad \rightsquigarrow \quad (\delta\,')^i_j = a^i{}_k\,\delta^k_l\,\tilde{a}^l{}_j = a^i{}_k\,\tilde{a}^k{}_j = \delta^i_j, \qquad \delta^i_i = 3$$

全反对称的逆变 Levi-Civita 张量 ϵ^{ijk} 定义为：

$$\epsilon^{ijk} \equiv \delta^{im}\,\delta^{jn}\,\delta^{kl}\,\epsilon_{mnl} = \delta^{im}\,\delta^{jn}\,\delta^{kl}\begin{vmatrix} \delta^1_m & \delta^1_n & \delta^1_l \\ \delta^2_m & \delta^2_n & \delta^2_l \\ \delta^3_m & \delta^3_n & \delta^3_l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta^i_1 & \delta^i_2 & \delta^i_3 \\ \delta^j_1 & \delta^j_2 & \delta^j_3 \\ \delta^k_1 & \delta^k_2 & \delta^k_3 \end{vmatrix}$$

不难证明 (Optional):

$$\epsilon^{ijk}\,\epsilon_{mnl} = \begin{vmatrix} \delta^i_m & \delta^i_n & \delta^i_l \\ \delta^j_m & \delta^j_n & \delta^j_l \\ \delta^k_m & \delta^k_n & \delta^k_l \end{vmatrix}$$

从而，

$$\boxed{\epsilon^{ijk}\,\epsilon_{mnk} = \delta^i_m\,\delta^j_n - \delta^i_n\,\delta^j_m} \qquad \rightsquigarrow \quad \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{mjk} = 2\delta^i_m, \qquad \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{ijk} = 6$$

作为 $\mathbb{E}_3$ 中张量的物理量举例

- **标量：** 质量 m, 电荷 Q, 静电标势 φ, 电荷分布的体密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ 等．特别是处在空间点 $\boldsymbol{r}_0$ 处的点电荷 Q 的电荷体密度：

$$\rho(\boldsymbol{r}) = Q\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

显然，

$$\int_V \rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3x = Q\int_V \delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}^3x = Q$$

$\mathcal{Q}$: 为什么说狄拉克戴尔塔函数 $\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 是标量？

戴尔塔函数的定义是：

$$\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} \infty, & \text{倘若 } \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0; \\ 0, & \text{倘若 } \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}_0. \end{cases} \qquad \int_V \delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}^3x = 1$$

$\mathbb{E}_3$ 的体积元在笛卡尔坐标系中定义为：

$$\mathrm{d}^3x \equiv \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$$

式中 $\wedge$ 表示坐标微分 $\mathrm{d}x^i$ 之间的外积[7]，具有性质：

$$\boxed{\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i} \quad \rightsquigarrow \; \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^1 = \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^3 = 0$$

所以，

$$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k = \epsilon^{ijk}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 = \epsilon^{ijk}\,\mathrm{d}^3x$$

在空间转动变换下，$x^i \rightsquigarrow x'^i = a^i{}_j\, x^j$，我们看到：

$$\mathrm{d}x^i \quad \rightsquigarrow \; \mathrm{d}x'^i = a^i{}_j\,\mathrm{d}x^j$$

$$\mathrm{d}^3x \quad \rightsquigarrow \; \mathrm{d}^3x' = \mathrm{d}x'^1 \wedge \mathrm{d}x'^2 \wedge \mathrm{d}x'^3 = a^1{}_i\, a^2{}_j\, a^3{}_k\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k$$

---

[7] 外积就是反对称化的直积。例如：

$$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j - \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^i\right).$$

亦即：

$$\mathrm{d}^3x\,' = a^1{}_i\, a^2{}_j\, a^3{}_k\, \epsilon^{ijk}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 = \det \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}^3x = \mathrm{d}^3x$$

换言之，体积元 d^3x 在空间转动变换下保持不变，它是 $\mathbb{E}_3$ 中的标量.

鉴于此以及戴尔塔函数的积分定义式，

$$\int_V \delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\, \mathrm{d}^3x = 1$$

我们确信 $\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 也是 $\mathbb{E}_3$ 中的标量， 其量纲为：

$$\left[\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\right] = L^{-3}$$

- **矢量：** 带电粒子的速度 $\boldsymbol{u}$，静电力 $\boldsymbol{F}$，电场强度 $\boldsymbol{E}$，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 等. 特别地，点电荷 Q 以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动时它的电流密度矢量：

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \equiv \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{u} = Q\boldsymbol{u}\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

- 梯度算符 ∇ 也具有矢量性质. 在笛卡尔直角坐标系中,

$$\nabla = e^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

其分量算符在空间转动下的变换法则是:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

在空间转动下,

$$x^i \quad \rightsquigarrow \quad x'^i = a^i{}_j\, x^j \quad \rightsquigarrow \quad x^j = \tilde{a}^j{}_i\, x'^i$$

由此我们知:

$$\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \tilde{a}^j{}_i \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial}{\partial x^j} \tilde{a}^j{}_i}$$

即 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 形成了矢量算符 ∇ 的协变分量.

4-张量

1. 物理量可以按照其在空间转动变换下的变换性质分类为欧氏空间 $\mathbb{E}_3$ 中的标量、矢量和高阶张量等.
2. 为了方便地表达狭义相对论的相对性原理，我们需要把物理量按照其在洛伦兹变换下的变换性质重新进行分类.

洛伦兹变换

$$x^\mu \quad \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu, \qquad \boxed{\eta_{\mu\nu} \, \Lambda^\mu{}_\rho \, \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}}$$

可以重新诠释为四维闵氏空间(Minkowski)中的赝转动:

$$X^T \boldsymbol{\eta} \, X = X'^T \boldsymbol{\eta} \, X', \quad X' = \boldsymbol{\Lambda} \, X, \quad \boldsymbol{\Lambda} \, \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} \, \boldsymbol{\Lambda} = I$$

式中,

$$\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\eta}^{-1} \, \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\eta}, \; \left(\boldsymbol{\Lambda}^T\right)_\nu{}^\mu = (\boldsymbol{\Lambda})^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu, \quad \rightsquigarrow \quad \left(\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}\right)^\mu{}_\nu = \eta_{\nu\rho} \, \Lambda^\rho{}_\sigma \, \eta^{\sigma\mu}$$

且:

$$\det \boldsymbol{\Lambda} = \det \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \pm 1$$

物理量新分类的结果常常称之为 4-张量或者四维协变量.

假设在闵氏空间 $\mathbb{M}_4$ 中建立起了笛卡尔直角坐标系，沿各坐标轴延伸方向的单位基矢为 $\boldsymbol{e}_\mu$ $(\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ 使得

$$\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}$$

- 仅有一个分量且其在洛伦兹变换下保持不变的物理量 A

  $$A \quad \rightsquigarrow \quad A' = A$$

  称为 4-标量.

- 具有四个分量的物理量 $\boldsymbol{V}$, 设其在笛卡尔坐标系中表达为：

  $$\boldsymbol{V} = V^\mu \boldsymbol{e}_\mu$$

  倘若 V^μ 在洛伦兹变换下与位置坐标 x^μ 有相同的变换法则，

  $$\boxed{V^\mu \quad \rightsquigarrow \quad V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu}$$

  则称 $\boldsymbol{V}$ 形成了一个 4-矢量. V^μ 称为 4-矢 $\boldsymbol{V}$ 的逆变分量.

$\mathcal{Q}$: 怎么定义时间轴方向的单位基矢 e_0 ?

- 通过度规矩阵 $\eta_{\mu\nu}$ 与 V^μ 的缩并，我们也可以定义 4-矢量 V 的协变分量：

$$V_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} V^\nu \qquad \rightsquigarrow \quad V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu$$

在洛伦兹变换下，

$$V_\mu \quad \rightsquigarrow \quad V'_\mu = \eta'_{\mu\nu} V'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho V^\rho = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho \eta^{\rho\sigma} \, V_\sigma$$

亦即：

$$\boxed{V_\mu \quad \rightsquigarrow \quad V'_\mu = V_\nu \, \tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu}$$

- 具有 4^{m+n} 个笛卡尔分量的物理量 T, 倘若在洛伦茨变换下它的分量

$$T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\ \ \nu_1\nu_2\cdots\nu_n}$$

中每一个上指标 μ_i $(1\le i\le m)$ 都与逆变位置坐标 x^μ 有相同的变换法则、每一个下指标 ν_j $(1\le j\le n)$ 都与协变位置坐标 x_ν 有相同的变换法则:

$$\boxed{T^{\mu_1\cdots\mu_m}_{\ \ \nu_1\cdots\nu_n} \quad\rightsquigarrow\quad T'^{\mu_1\cdots\mu_m}_{\ \ \nu_1\cdots\nu_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\ \ \rho_1}\cdots\Lambda^{\mu_m}_{\ \ \rho_m}\, T^{\rho_1\cdots\rho_m}_{\ \ \sigma_1\cdots\sigma_n}\, \tilde{\Lambda}^{\sigma_1}_{\ \ \nu_1}\cdots\tilde{\Lambda}^{\sigma_n}_{\ \ \nu_n}}$$

则称 T 为 $(m,\ n)$ 型 4-张量, $m+n$ 为此张量的阶.

1. 通常把 $(m,\ 0)$ 型的 4-张量称为逆变的 m 阶 4-张量, 把 $(0,\ n)$ 型的 4-张量称为协变的 n 阶 4-张量.
2. m 与 n 皆取非零值时的 $(m,\ n)$ 型 4-张量称为混合张量.
3. 4-张量的逆变、协变分量可以通过度规矩阵 $\eta_{\mu\nu}$ 或者其逆 $\eta^{\mu\nu}$ 相互转换. 例如:

$$T_{\mu\nu} \quad\rightsquigarrow\quad T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}T_{\rho\sigma}$$

4-标量举例:

- 事件的间隔

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu$$

  不受洛伦兹变换的影响, 因此是一个 4-标量.

- 物理过程持续的固有时 $d\tau = -ds/c$.

- 电磁波的相位因子 ϕ. 相位只是计数问题, 不应随参考系的改变而发生变化.

- 粒子的质量 m.

- 闵氏空间 $\mathbb{M}_4$ 的体积元 $d^4x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

- 带电粒子的电荷 Q 及其在 $\mathbb{M}_4$ 中的电荷体密度:

$$\rho(x) = Q\,\delta^{(4)}(x - x_0) \equiv \frac{Q}{c}\,\delta(t - t_0)\,\delta^{(3)}(r - r_0)$$

4-矢量举例:

- 粒子的时空坐标本身形成了一个四维矢量,

$$X = (x^\mu) = (x^0,\ r)$$

常称之为 4-位置矢量, 此处 $x^0 \equiv ct$.

- 对 x^μ 的微商算符形成了一个 4-矢量微商,

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\ \nabla\right)$$

常称之为 4-梯度算符. 洛伦兹变换$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu$的逆变换可写为:

$$x^\nu = \tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu\, x'^\mu$$

因此在洛伦兹变换下,

$$\partial_\mu \quad \rightsquigarrow \partial'_\mu := \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu\, \partial_\nu$$

即 ∂_μ 形成了 4-梯度矢量的协变分量.

- 对 $X = (x^\mu)$ 的微分形成了一个四维矢量：

$$\mathrm{d}X = (\mathrm{d}x^\mu) = \left(\mathrm{d}x^0,\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right)$$

常称之为 4-位移矢量.

- 将 4-位移 $\mathrm{d}X$ 与固有时 $\mathrm{d}\tau$ 相除，可以构造出一个 4-矢量 U，其逆变分量为：

$$\boxed{U^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}}$$

常称 U 为粒子的 4-速度. 按此构造，U^μ 与 x^μ 显然具有完全相同的在洛伦兹变换规律：

$$U^\mu \quad \rightsquigarrow \quad U'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu U^\nu$$

注意到粒子的物理速度为 $\boldsymbol{u} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$，而运动时钟延缓效应又暗示着：

$$\mathrm{d}t = \gamma_u \mathrm{d}\tau, \qquad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \qquad \rightsquigarrow \quad U = (U^\mu) = \gamma_u(c,\ \boldsymbol{u})$$

这就是粒子的 4-速度 U 与其物理速度 $\boldsymbol{u}$ 之间的联系.

粒子的 4-速度 U

- 粒子 4-速度 U^μ 与其自身求缩并，可以构造出一个四维标量：

$$\boxed{U^\mu U_\mu = -c^2}$$

此式是 $U = (U^\mu)$ 最重要的性质.

- 可以把闵氏空间 $\mathbb{M}_4$ 时间轴方向的单位基矢选择为：

$$e_0 = \frac{U}{c} \quad \rightsquigarrow \quad e_0 \cdot e_0 = -1 = \eta_{00}$$

- 利用 4-速度可以高效地推导出相对论的速度合成法则.

回忆洛伦兹推动矩阵的矩阵元

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma, \quad \Lambda^0{}_i = -\gamma\beta_i, \quad \Lambda^i{}_0 = -\gamma\beta^i, \quad \Lambda^i{}_j = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j$$

式中 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, 而 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$ 是无量纲化的牵连速度. 惯性系 Σ 和 Σ' 中粒子 4-速度的逆变分量分别是：

$$U^\mu = \gamma_u(c, \ u^i), \quad U'^\mu = \gamma_{u'}(c, \ u'^i) \quad \rightsquigarrow \quad U'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu U^\nu$$

我们有:

$$\begin{aligned}\gamma_{u'} u'^i = U'^i = \Lambda^i{}_\nu U^\nu = \Lambda^i{}_0 U^0 + \Lambda^i{}_j U^j = \Lambda^i{}_0 \gamma_u c + \Lambda^i{}_j \gamma_u u^j \\ = -\gamma\beta^i\gamma_u c + \left[\delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j\right]\gamma_u u^j \\ = \gamma_u\left[u^i + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\beta^i - \gamma\beta^i c\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{u'} c = U'^0 = \Lambda^0{}_\nu U^\nu = \Lambda^0{}_0 U^0 + \Lambda^0{}_j U^j = \gamma\gamma_u c - \gamma\beta_j\gamma_u u^j \\ = \gamma_u\gamma c(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta}/c)\end{aligned}$$

整理此二式,我们看到:

$$u'^i = \frac{\gamma_u}{\gamma_{u'}}\left[u^i + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\beta^i - \gamma\beta^i c\right], \qquad \frac{\gamma_{u'}}{\gamma_u} = \gamma\left(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta}/c\right).$$

把第二式代入到第一式，即得：

$$u'^i = \frac{u^i + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\beta^i - \gamma\beta^i c}{\gamma\left(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta}/c\right)}$$

或等价地，

$$\boxed{\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c}{\gamma\left(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\beta}/c\right)}}$$

这正是相对论的速度合成法则.

- 通过求粒子 4-速度 $\boldsymbol{U}$ 对固有时 τ 的时间导数，可以构造出一个新的四维矢量 $\mathscr{A}$：

$$\mathscr{A} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}\tau} = (\mathscr{A}^\mu) = \left(\mathscr{A}^0,\ \mathscr{A}^i\right), \qquad \rightsquigarrow \mathscr{A}^\mu = \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

常称 $\mathscr{A} = (\mathscr{A}^\mu)$ 为粒子的 4-加速度.

现在研究粒子 4-加速度 $\mathscr{A}$ 与其物理加速度 $\boldsymbol{w}$ 之间的联系．注意到：

$$U^\mu = \gamma_u(c,\, u^i) = \gamma_u c(1,\, \beta_u^i), \quad , \boldsymbol{\beta}_u = \boldsymbol{u}/c, \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_u^2}}, \quad \mathrm{d}t = \gamma_u \mathrm{d}\tau$$

我们有 $\dot{u}^i = w^i$ 且 $\dot{\gamma}_u = \gamma_u^3\ (\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w}/c)$．进而，

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^0 &= \frac{\mathrm{d}U^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}(\gamma_u\, c)}{\mathrm{d}t} = \gamma_u^4\, \boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w} \\
\mathscr{A}^i &= \frac{\mathrm{d}U^i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}(\gamma_u\, c\beta_u^i)}{\mathrm{d}t} = \gamma_u(\gamma_u\, w^i + \dot{\gamma}_u c\, \beta_u^i) \\
&= \gamma_u^4 \left[(1-\beta_u^2)w^i + \boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w}\beta_u^i\right] \\
&= \gamma_u^4 w^i + \gamma_u^4\, [\boldsymbol{\beta}_u \times (\boldsymbol{\beta}_u \times \boldsymbol{w})]^i
\end{aligned}$$

亦即：

$$\boxed{\mathscr{A} = (\mathscr{A}^0,\, \mathscr{A}^i) = \gamma_u^4\Big(\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w},\ w^i + [\boldsymbol{\beta}_u \times (\boldsymbol{\beta}_u \times \boldsymbol{w})]^i\Big)}$$

粒子 4-加速度 $\mathscr{A}$ 的空间分矢量 $\boldsymbol{a} := (\mathscr{A}^i)$ 与其物理加速度 $\boldsymbol{w}$ 之间的联系是:

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \gamma_u^4 \left[\boldsymbol{w} + \boldsymbol{\beta}_u \times (\boldsymbol{\beta}_u \times \boldsymbol{w})\right]}$$

不难看出:$(\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{a}) = \gamma_u^4 (\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w})$. 所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的关系也可等价地表达为:

$$\boxed{\boldsymbol{w} = \frac{1}{\gamma_u^2}\left[\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\beta}_u(\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{a})\right]}$$

- 倘若 $\boldsymbol{\beta}_u \parallel \boldsymbol{w}$, 即粒子做加速直线运动, $\boldsymbol{a} = \gamma_u^4 \boldsymbol{w}$.
- 倘若 $\boldsymbol{\beta}_u \perp \boldsymbol{w}$, 即粒子做匀速曲线运动, $\boldsymbol{a} = \gamma_u^2 \boldsymbol{w}$.
- 倘若粒子的运动速率远小于光速, $|\boldsymbol{\beta}_u| \ll 1$, 精确到无量纲速度参数 $\boldsymbol{\beta}_u$ 的一次幂, 我们看到: $\boldsymbol{a} \approx \boldsymbol{w}$.
- 在粒子瞬时自身系 Σ' 中 $(\boldsymbol{\beta}_{u'} = 0,\ \gamma_{u'} = 1)$,

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{w}'$$

但必须注意的是: 绝不能把普通惯性系中的 $\boldsymbol{a}$ 误解为粒子在 Σ' 中、即其瞬时自身系 (MCRF) 中的物理加速度 $\boldsymbol{w}'$.

$\mathcal{Q}$: 粒子 4-加速度 $\mathscr{A}^\mu$ 的空间分矢量 $\boldsymbol{a}$ 与其瞬时自身系 Σ' 中的物理加速度 $\boldsymbol{w}'$ 之间有何关系？

前面我们已经求出了一般惯性系 Σ 中粒子 $\mathcal{O}$ 的物理加速度 $\boldsymbol{w}$ 与其瞬时自身系 Σ' 中物理加速度 $\boldsymbol{w}'$ 之间的联系：

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{\gamma_u^3}\left[\boldsymbol{w}' - \frac{\gamma_u^2}{\gamma_u + 1}\boldsymbol{\beta}_u \times (\boldsymbol{\beta}_u \times \boldsymbol{w}')\right]$$

式中 $\gamma_u = 1/\sqrt{1-\beta_u^2}$，而 $\boldsymbol{\beta}_u = \boldsymbol{u}/c$ 是 $\mathcal{O}$ 相对于 Σ 系的无量纲运动速度. 上式可以重新表为：

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{\gamma_u^2}\left[\boldsymbol{w}' - \frac{\gamma_u}{\gamma_u + 1}\boldsymbol{\beta}_u(\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w}')\right]$$

由此知：

$$\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w} = \frac{1}{\gamma_u^3}(\boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w}')$$

利用以上二式，我们有：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \gamma_u^4\left[\boldsymbol{w}+\boldsymbol{\beta}_u\times(\boldsymbol{\beta}_u\times\boldsymbol{w})\right] \\ &= \gamma_u^2\boldsymbol{w}+\gamma_u^4\boldsymbol{\beta}_u(\boldsymbol{\beta}_u\cdot\boldsymbol{w}) \\ &= \boldsymbol{w}'-\frac{\gamma_u}{\gamma_u+1}\boldsymbol{\beta}_u(\boldsymbol{\beta}_u\cdot\boldsymbol{w}')+\gamma_u\boldsymbol{\beta}_u(\boldsymbol{\beta}_u\cdot\boldsymbol{w}') \\ &= \boldsymbol{w}'+\frac{\gamma_u^2}{\gamma_u+1}\boldsymbol{\beta}_u(\boldsymbol{\beta}_u\cdot\boldsymbol{w}') \end{aligned}$$

或者等价地，

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\gamma_u\boldsymbol{w}'+\frac{\gamma_u^2}{\gamma_u+1}\boldsymbol{\beta}_u\times(\boldsymbol{\beta}_u\times\boldsymbol{w}')}$$

所以一般情形下 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{w}'$，除非 $\boldsymbol{\beta}_u\perp\boldsymbol{w}'$. 倘若粒子 $\mathcal{O}$ 做加速直线运动，$\boldsymbol{\beta}_u\parallel\boldsymbol{w}'$，我们看到：

$$\boldsymbol{a}=\gamma_u\boldsymbol{w}'=\frac{\boldsymbol{w}'}{\sqrt{1-\beta_u^2}}$$

关联于粒子的 4-加速度 $\mathscr{A}$, 存在着如下两个 4-标量:

$$\mathscr{A}^{\mu} U_{\mu}, \qquad \mathscr{A}^{\mu} \mathscr{A}_{\mu}$$

- 由于 $U^{\mu} U_{\mu} = -c^2$, 我们确定粒子的 4-速度 $\boldsymbol{U}$ 为类时 4-矢量. 求此式对于固有时 τ 的导数, 我们有:

$$0 = 2U_{\mu} \frac{\mathrm{d}U^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}, \qquad \rightsquigarrow \ \mathscr{A}^{\mu} U_{\mu} = 0$$

  所以, 粒子的 4-加速度 $\mathscr{A}$ 是类空 4-矢量. 总可以找到一个惯性系, 使得在其中 $\mathscr{A}^0 = 0$. 因为

$$\mathscr{A}^0 = \gamma_u^4 \, \boldsymbol{\beta}_u \cdot \boldsymbol{w}$$

  这个惯性系实际上是粒子的瞬时自身系 Σ'.

- 另一个 4-标量常常记为：

$$\mathscr{A}^{\mu}\mathscr{A}_{\mu} = a^2$$

在相对论力学中，粒子加速度的量值定义为：

$$a = \sqrt{\mathscr{A}^{\mu}\mathscr{A}_{\mu}}$$

1. 切记：$a \neq |\boldsymbol{a}| = \sqrt{\mathscr{A}^{i}\mathscr{A}_{i}}$.
2. 鉴于 $\mathscr{A}^{\mu}$ 的类空性，$\mathscr{A}^{\mu}\mathscr{A}_{\mu} > 0$. 所以 $a > 0$.
3. 不难证明：

$$a = \gamma_u^3 \sqrt{[1-(u/c)^2]\,\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})^2/c^2}$$

4. a 是 4-标量，它的量值不依赖于惯性系的选择. 可以把 a 用粒子瞬时自身系 Σ' 中的加速度 $\boldsymbol{w}'$ 表达为：

$$\boxed{a = \sqrt{\boldsymbol{w}'\cdot\boldsymbol{w}'} = |\boldsymbol{w}'|}$$

所以，a 就是瞬时自身系 Σ' 中粒子物理加速度的量值. 换言之，瞬时自身系中粒子物理加速度的量值 $|\boldsymbol{w}'|$ 是一个 4-标量.

- 电磁波的相位因子 $e^{i\phi}$ 是一个 4-标量，

$$\phi = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t$$

这是因为某个波峰通过某一时空点是一个物理事件，而相位 ϕ 只是计数问题，不应随参考系而变.

引入数组 $k^{\mu} = (\omega/c,\ \boldsymbol{k})$ 和 $x^{\mu} = (ct,\ \boldsymbol{r})$，可以把 4-标量 ϕ 重新写为：

$$\phi = \eta_{\mu\nu}k^{\mu}x^{\nu} = k^{\mu}x_{\mu}$$

然而 $(x_{\mu}) = X$ 是一个 4-矢量，即粒子在闵氏空间 $\mathbb{M}_4$ 中的位置矢量. 所以，

$$k^{\mu} = (\omega/c,\ \boldsymbol{k})$$

必须也是一个 4-矢量，常称之为 4-波矢. k^{μ} 的洛伦兹变换法则为：

$$k^{\mu} \quad \rightsquigarrow \quad k'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}k^{\nu}$$

倘若考虑洛伦兹推动变换，则有：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}' &= \boldsymbol{k} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}\omega/c \\ \omega' &= \gamma(\omega - c\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{k}) \end{aligned}$$

1. **相对论的多普勒效应.** 考虑在真空中传播的平面电磁波. 假设 Σ 系中的物理波矢 $\boldsymbol{k}$ 与牵连速度 $\boldsymbol{\beta}c$ 之间的夹角为 θ，

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{k} = k\beta\cos\theta = \frac{\omega}{c}\beta\cos\theta \qquad \hookleftarrow \quad k = \frac{\omega}{c}$$

我们有：

$$\omega' = \gamma(\omega - c\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{k}) = \gamma\omega(1 - \beta\cos\theta)$$

若 Σ' 系为光源静止参考系，$\omega' = \omega_0$. 这里用 ω_0 标记静止光源的辐射角频率. 于是，相对论的多普勒效应由下式描写：

$$\boxed{\omega = \frac{\omega_0\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}} \quad \text{光行差效应} \rightsquigarrow \quad \boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\theta' + \beta}}$$

- 在垂直于光源运动方向观测辐射时，经典力学多普勒效应的结论是 $\omega = \omega_0$.
- 与经典力学结论不同，狭义相对论预言存在横向的多普勒效应 ($\theta = \pi/2$)：
$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\beta^2} < \omega_0$$
横向多普勒效应为 Ives-Stilwell 实验 (1938) 所证实.

答疑：

现在解释一下如何理解“可以选择粒子的无量纲 4-速度 U/c 作为某惯性系中时间轴方向的单位基矢”.

- 设 Σ 为实验室参考系，有质量粒子 $\mathcal{O}$ 以速度 $\boldsymbol{u}$ 在其中作匀速直线运动. 倘若在 Σ 中建立笛卡尔直角坐标系，可以把坐标系的基矢取为：
$$e_0 = (1,0,0,0); \quad e_1 = (0,1,0,0); \quad e_2 = (0,0,1,0);$$
$$e_3 = (0,0,0,1)$$

- 粒子 $\mathcal{O}$ 相对于 Σ 系的 4-速度为：

$$U = U^\mu e_\mu = \gamma_u c e_0 + \gamma_u u^i e_i \quad \rightsquigarrow \quad \frac{U}{c} = \gamma_u \left(1, \ \frac{u^i}{c}\right)$$

- 设 Σ' 为粒子 $\mathcal{O}$ 的自身参考系. 倘若也在 Σ' 系中建立笛卡尔直角坐标系，则 $\mathcal{O}$ 会朴素地认为坐标系的基矢是：

$$e_0' = (1, 0, 0, 0); \quad e_1' = (0, 1, 0, 0); \quad e_2' = (0, 0, 1, 0);$$
$$e_3' = (0, 0, 0, 1)$$

换言之，

$$e_\mu' = \delta_\mu^\nu \, e_\nu' \quad \rightsquigarrow \quad \left(e_\mu'\right)^{\prime\nu} = \delta_\mu^\nu$$

特别地，e_0' 作为一个 4-矢量，其在粒子自身系 Σ' 中的笛卡尔分量为：

$$\boxed{\left(e_0'\right)^{\prime\nu} = \delta_0^\nu}$$

- 借助于 $\Sigma' \to \Sigma$ 的逆洛伦兹推动变换 $\tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}(\boldsymbol{u})$，我们推知类时 4-矢量 $\boldsymbol{e}_0'$ 在实验室参考系 Σ 中的笛卡尔分量为：

$$(e_0')^{\mu} = \tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}(\boldsymbol{u})\,(e_0')^{\prime\nu} = \tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}(\boldsymbol{u})\,\delta_0^{\nu} = \tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{0}(\boldsymbol{u})$$

所以，

$$(e_0')^{0} = \tilde{\Lambda}^{0}{}_{0}(\boldsymbol{u}) = \gamma_u, \qquad (e_0')^{i} = \tilde{\Lambda}^{i}{}_{0}(\boldsymbol{u}) = \gamma_u \beta_u^i, \qquad \boldsymbol{\beta}_u = \boldsymbol{u}/c$$

亦即：

$$\boxed{\boldsymbol{e}_0' = \gamma_u\left(1,\ \beta_u^i\right) = \frac{\boldsymbol{U}}{c}}$$

- 同理知类空 4-矢量 $\boldsymbol{e}_j'$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$ 在实验室参考系 Σ 中的笛卡尔分量为：

$$\boldsymbol{e}_j' = \left(\gamma_u \beta_{uj},\ \delta_j^i + \frac{\gamma_u^2}{\gamma_u + 1}\beta_u^i \beta_{uj}\right)$$

闵氏空间 $\mathbb{M}_4$ 中的不变张量

$\mathbb{M}_4$ 中存在着三个独立的不变张量：$\eta_{\mu\nu}$, δ^μ_ν 和 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

- $\eta_{\mu\nu}$ 与 δ^μ_ν 是 $\mathbb{M}_4$ 中不变张量. 假设 $\eta_{\mu\nu}$ 和 δ^μ_ν 在洛伦兹变换 $x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu$ 下形成二阶张量，我们有：

$$
\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu} \quad \rightsquigarrow \quad (\eta')_{\mu\nu} &= \eta_{\rho\sigma} \, \tilde{\Lambda}^\rho{}_\mu \, \tilde{\Lambda}^\sigma{}_\nu \\
&= \eta_{\rho\sigma} \, \eta_{\mu\alpha} \, \Lambda^\alpha{}_\beta \, \eta^{\beta\rho} \, \tilde{\Lambda}^\sigma{}_\nu \\
&= \eta_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\sigma \, \tilde{\Lambda}^\sigma{}_\nu \\
&= \eta_{\mu\alpha} \delta^\alpha_\nu \\
&= \eta_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta^\mu_\nu \quad \rightsquigarrow \quad (\delta')^\mu_\nu &= \Lambda^\mu{}_\alpha \, \delta^\alpha_\beta \, \tilde{\Lambda}^\beta{}_\nu \\
&= \Lambda^\mu{}_\alpha \, \tilde{\Lambda}^\alpha{}_\nu \\
&= \delta^\mu_\nu
\end{aligned}
$$

同理知 $\mathbb{M}_4$ 的逆度规张量 $\eta^{\mu\nu}$ 也是不变张量.

- $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 称为四阶 Levi-Civita 全反对称张量．其文字定义式是：

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=\begin{cases}1, & 若\ (\mu\nu\rho\sigma)\ 是\ (0123)\ 的偶置换\\ -1, & 若\ (\mu\nu\rho\sigma)\ 是\ (0123)\ 的奇置换\\ 0, & 其他情况\end{cases}$$

从而，

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=\begin{cases}-1, & 若\ (\mu\nu\rho\sigma)\ 是\ (0123)\ 的偶置换\\ 1, & 若\ (\mu\nu\rho\sigma)\ 是\ (0123)\ 的奇置换\\ 0, & 其他情况\end{cases}$$

若将上述文字重新写成标准的数学表达式，即为：

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=\begin{vmatrix}\delta_0^\mu & \delta_1^\mu & \delta_2^\mu & \delta_3^\mu\\ \delta_0^\nu & \delta_1^\nu & \delta_2^\nu & \delta_3^\nu\\ \delta_0^\rho & \delta_1^\rho & \delta_2^\rho & \delta_3^\rho\\ \delta_0^\sigma & \delta_1^\sigma & \delta_2^\sigma & \delta_3^\sigma\end{vmatrix},\quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=-\begin{vmatrix}\delta_\mu^0 & \delta_\mu^1 & \delta_\mu^2 & \delta_\mu^3\\ \delta_\nu^0 & \delta_\nu^1 & \delta_\nu^2 & \delta_\nu^3\\ \delta_\rho^0 & \delta_\rho^1 & \delta_\rho^2 & \delta_\rho^3\\ \delta_\sigma^0 & \delta_\sigma^1 & \delta_\sigma^2 & \delta_\sigma^3\end{vmatrix}$$

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 满足的基本运算公式是：

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} = -\begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\mu_\beta & \delta^\mu_\gamma & \delta^\mu_\lambda \\ \delta^\nu_\alpha & \delta^\nu_\beta & \delta^\nu_\gamma & \delta^\nu_\lambda \\ \delta^\rho_\alpha & \delta^\rho_\beta & \delta^\rho_\gamma & \delta^\rho_\lambda \\ \delta^\sigma_\alpha & \delta^\sigma_\beta & \delta^\sigma_\gamma & \delta^\sigma_\lambda \end{vmatrix}$$

此式可以通过前页给出的 Levi-Civita 符号行列式表达式证实（Optional Exercise）. 由此可知 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 具有的几个重要恒等式：

1. $$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} = -\begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\mu_\beta & \delta^\mu_\gamma \\ \delta^\nu_\alpha & \delta^\nu_\beta & \delta^\nu_\gamma \\ \delta^\rho_\alpha & \delta^\rho_\beta & \delta^\rho_\gamma \end{vmatrix}$$

2. $$\boxed{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2\begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\mu_\beta \\ \delta^\nu_\alpha & \delta^\nu_\beta \end{vmatrix} = -2\left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha\right)}$$

3. $$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} = -6\delta^\mu_\alpha, \qquad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -24.$$

$\mathcal{C}$: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是 $\mathbb{M}_4$ 中的不变张量.

下面证明此立论. 假设 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是洛伦兹变换 $x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu$ 下的四阶张量, 则有:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad \rightsquigarrow \quad (\epsilon\,')^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\alpha\, \Lambda^\nu{}_\beta\, \Lambda^\rho{}_\gamma\, \Lambda^\sigma{}_\lambda\, \epsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} \propto \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

最后一步的成立源自于对称性分析. 暂设:

$$(\epsilon\,')^{\mu\nu\rho\sigma} = \lambda\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

我们看到:

$$\lambda = \lambda\, \epsilon^{0123} = (\epsilon\,')^{0123} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} \Lambda^0{}_\alpha\, \Lambda^1{}_\beta\, \Lambda^2{}_\gamma\, \Lambda^3{}_\sigma = \det(\boldsymbol{\Lambda}) = 1$$

换言之, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 在洛伦兹变换下保持不变:

$$(\epsilon\,')^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

狭义相对论不仅允许惯性参考系，也允许加速参考系．实际上，当粒子做加速运动时，狭义相对论是用粒子的无穷多瞬时自身系(它们均是惯性系)模拟其自身参考系(加速系)的．

为简单起见，这里仅考虑匀加速直线运动参考系．对于一般的加速参考系感兴趣的同学，请参考 M. Pauri 等人的论文[8]．

我们首先在惯性系 Σ 中研究一个做匀加速直线运动粒子的轨迹．出发点如下：

$$U^\mu U_\mu = -c^2, \qquad U^\mu \mathscr{A}^\mu = 0, \qquad \mathscr{A}^\mu \mathscr{A}_\mu = a^2$$

所谓匀加速运动，指的是 4-标量

$$a = \sqrt{\mathscr{A}^\mu \mathscr{A}_\mu} > 0$$

即 MCRF 中粒子物理加速度的大小 ($a = |\boldsymbol{w}'|$) 在粒子运动过程中保持不变．

[8] M. Pauri and M. Vallisneri, Märzke-Wheeler coordinates for accelerated observers in special relativity, Foundations of Physics Letters, 13(2000)401.

设粒子相对于实验室系 Σ 沿 x^1 轴做加速度为 a 的匀加速直线运动. 如此,

$$U^\mu = \left(U^0,\ U^1\right), \quad \mathscr{A}^\mu = \left(\mathscr{A}^0,\ \mathscr{A}^1\right) \qquad \hookleftarrow \ \mathscr{A}^\mu = \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

上面的三个方程表达为:

$$\begin{aligned} &-(U^0)^2 + (U^1)^2 = -c^2, \quad -U^0\mathscr{A}^0 + U^1\mathscr{A}^1 = 0 \\ &-(\mathscr{A}^0)^2 + (\mathscr{A}^1)^2 = a^2 \end{aligned}$$

把粒子的 4-速度 $U^\mu = U^\mu(\tau)$ 作为未知数. 因为它的分量满足双曲线方程, 故第一个方程具有试探解:

$$U^0 = c\cosh[A(\tau-\tau_0)], \quad U^1 = c\sinh[A(\tau-\tau_0)]$$

进而,

$$\mathscr{A}^0 = Ac\sinh[A(\tau-\tau_0)], \quad \mathscr{A}^1 = Ac\cosh[A(\tau-\tau_0)]$$

如此, 第二个方程自动满足. 但第三个方程的成立要求: $A = a/c$.

- 倘若选择初始条件[9]：

$$\boldsymbol{U}\Big|_{\tau\to 0} = c\boldsymbol{e}_0, \qquad \mathscr{A}\Big|_{\tau\to 0} = a\boldsymbol{e}_1$$

则积分常数 $\tau_0 = 0$. 粒子相对于实验室参考系 Σ 的 4-速度与 4-加速度分别为：

$$\boldsymbol{U} = c\cosh(a\tau/c)\boldsymbol{e}_0 + c\sinh(a\tau/c)\boldsymbol{e}_1$$
$$\mathscr{A} = a\sinh(a\tau/c)\boldsymbol{e}_0 + a\cosh(a\tau/c)\boldsymbol{e}_1$$

粒子 4-速度的分量又可写为：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{c}U^0 = \cosh(a\tau/c), \qquad \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} = U^1 = c\sinh(a\tau/c)$$

所以粒子相对于 Σ 系的物理速度是：

$$V(\tau) = \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} = c\tanh(a\tau/c) \qquad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{V}(\tau) = c\tanh(a\tau/c)\,\boldsymbol{e}_1$$

[9]这个初始条件的物理内涵是假设 $\tau = 0$ 时刻粒子相对于实验室系 Σ 保持静止.

假设 $\tau=0$ 时刻粒子在实验室系 Σ 的时空坐标为 $(ct_0,\ x_0^1)$，则此粒子在 Σ 系中的运动轨迹[10]可用如下参数方程组描述：

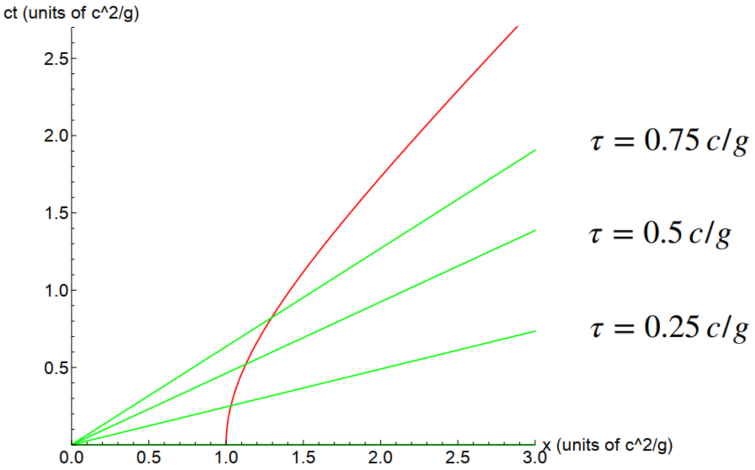
$$\begin{aligned} t &= t_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t = t_0+\int_0^{\tau}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = t_0+\int_0^{\tau}\cosh(a\tau/c)\,\mathrm{d}\tau \\ &= t_0+\frac{c}{a}\sinh(a\tau/c) \\ x^1 &= x_0^1+\int_{x_0^1}^{x^1}\mathrm{d}x^1 = x_0^1+\int_0^{\tau}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = x_0^1+c\int_0^{\tau}\sinh(a\tau/c)\,\mathrm{d}\tau \\ &= x_0^1+\frac{c^2}{a}\left[\cosh(a\tau/c)-1\right] \end{aligned}$$

亦即：

$$\boxed{t=t_0+\frac{c}{a}\sinh(a\tau/c),\quad x^1=x_0^1+\frac{c^2}{a}\left[\cosh(a\tau/c)-1\right]}$$

粒子的固有时 τ 充当着轨迹参数的角色.

[10]时空图上粒子的运动轨迹 (trajectory) 亦称为粒子的世界线 (worldline).



图中的红色曲线为加速直线运动粒子在实验室系 Σ 中的世界线（轨迹），约定 $a = g$, $x_0^1 = x^1\big|_{t_0 \to 0} = c^2/g$.

- 倘若选择初始条件[11]：

$$U\Big|_{\tau\to 0} = \gamma_u c\boldsymbol{e}_0 + \gamma_u u\boldsymbol{e}_1, \quad \mathscr{A}\Big|_{\tau\to 0} = \frac{u}{c}\gamma_u a\boldsymbol{e}_0 + \gamma_u a\boldsymbol{e}_1$$

式中 $\gamma_u = 1/\sqrt{1-(u/c)^2}$，则积分常数 A 的取值与前面情形相同，即 $A = a/c$，但 τ_0 的取值决定于：

$$\mathsf{tanh}(a\tau_0/c) = -\frac{u}{c} \ \rightsquigarrow\ \mathsf{cosh}(a\tau_0/c) = \gamma_u,\ \mathsf{sinh}(a\tau_0/c) = -\frac{u}{c}\gamma_u$$

粒子相对于实验室参考系 Σ 的 4-速度与 4-加速度分别为：

$$\begin{aligned} U = {} & \gamma_u c\left[\mathsf{cosh}(a\tau/c) + \frac{u}{c}\mathsf{sinh}(a\tau/c)\right]\boldsymbol{e}_0 \\ & + \gamma_u c\left[\mathsf{sinh}(a\tau/c) + \frac{u}{c}\mathsf{cosh}(a\tau/c)\right]\boldsymbol{e}_1 \end{aligned}$$

[11]这个初始条件的物理内涵是假设 $\tau = 0$ 时刻粒子相对于实验室系 Σ 的 3-速度为 $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{e}_1$.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A} = &\gamma_u a \left[\sinh(a\tau/c) + \frac{u}{c}\cosh(a\tau/c)\right] \boldsymbol{e}_0 \\
&+ \gamma_u a \left[\cosh(a\tau/c) + \frac{u}{c}\sinh(a\tau/c)\right] \boldsymbol{e}_1
\end{aligned}
$$

粒子 4-速度的分量可以写为:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{1}{c}U^0 = \gamma_u \left[\cosh(a\tau/c) + \frac{u}{c}\sinh(a\tau/c)\right], \\
\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} &= U^1 = \gamma_u c \left[\sinh(a\tau/c) + \frac{u}{c}\cosh(a\tau/c)\right]
\end{aligned}
$$

所以粒子相对于 Σ 系的物理速度 $\boldsymbol{V}(\tau) = V(\tau)\boldsymbol{e}_1$ 的量值是:

$$
V(\tau) = \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} = c\left[\frac{\sinh(a\tau/c) + \frac{u}{c}\cosh(a\tau/c)}{\cosh(a\tau/c) + \frac{u}{c}\sinh(a\tau/c)}\right] \quad \rightsquigarrow V(\tau)\Big|_{\tau\to 0} = u
$$

假设 $\tau=0$ 时刻粒子在实验室系 Σ 的时空坐标为 $(ct_0,\ x_0^1)$, 则此粒子在 Σ 系中的运动轨迹可用如下参数方程组描述:

$$\begin{aligned}
t &= t_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t = t_0+\int_0^{\tau}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau\\
&= t_0+\int_0^{\tau}\gamma_u\left[\cosh(a\tau/c)+\frac{u}{c}\sinh(a\tau/c)\right]\,\mathrm{d}\tau\\
&= t_0+\gamma_u\frac{c}{a}\sinh(a\tau/c)+\gamma_u\frac{u}{a}\left[\cosh(a\tau/c)-1\right]\\
x^1 &= x_0^1+\int_{x_0^1}^{x^1}\mathrm{d}x^1 = x_0^1+\int_0^{\tau}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau\\
&= x_0^1+\gamma_u c\int_0^{\tau}\left[\sinh(a\tau/c)+\frac{u}{c}\cosh(a\tau/c)\right]\,\mathrm{d}\tau\\
&= x_0^1+\gamma_u\frac{c^2}{a}\left[\cosh(a\tau/c)-1\right]+\gamma_u c\frac{u}{a}\sinh(a\tau/c)
\end{aligned}$$

粒子的固有时 τ 仍然充当着轨迹参数的角色.

匀加速参考系：

现在有条件建立匀加速直线运动情形下的加速参考系了. 设粒子 $\mathcal{O}$ 相对于惯性系 Σ 沿 x^1 轴做加速度为 a 的匀加速直线运动，τ 为其固有时. 倘若约定 $\tau=0$ 时的初始条件为：

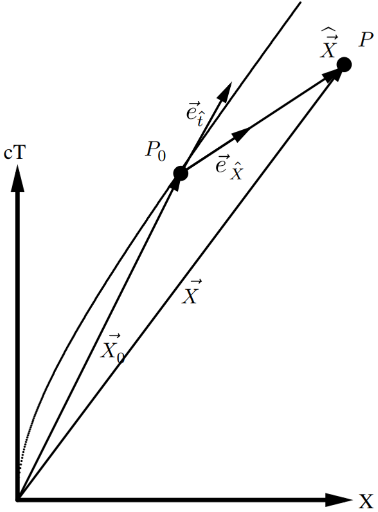
$$X_{\mathcal{O}}\Big|_{\tau\to 0}=0,\quad U_{\mathcal{O}}\Big|_{\tau\to 0}=\gamma_u c e_0+\gamma_u u e_1,\quad \mathscr{A}_{\mathcal{O}}\Big|_{\tau\to 0}=\frac{u}{c}\gamma_u a e_0+\gamma_u a e_1$$

式中 $X_{\mathcal{O}}=(X^{\mu}_{\mathcal{O}})$ 表示粒子 $\mathcal{O}$ 在 Σ 系中的 4-位置矢量，e_μ 是 Σ 系各笛卡尔坐标轴方向的单位 4-矢量，则 $\mathcal{O}$ 在惯性系 Σ 中的世界线由如下参数方程描写：

$$t_{\mathcal{O}}=\gamma_u\frac{c}{a}\,\mathsf{sinh}(a\tau/c)+\gamma_u\frac{u}{a}\,[\mathsf{cosh}(a\tau/c)-1],$$
$$x^1_{\mathcal{O}}=\gamma_u\frac{c^2}{a}\,[\mathsf{cosh}(a\tau/c)-1]+\gamma_u c\frac{u}{a}\,\mathsf{sinh}(a\tau/c)$$

或者等价地由 $\mathcal{O}$ 的 4-位置矢量 $X_{\mathcal{O}}$ 描写：

$$X_{\mathcal{O}}=ct_{\mathcal{O}}e_0+x^1_{\mathcal{O}}e_1$$



时空点 P 既与惯性系观测者处于时间坐标为 $x^0 = cT$ 的同时面 (simultaneity surface), 也与位于世界线上 P_0 点的加速运动粒子 $\mathcal{O}$ 处在时间坐标为 $x'^0 = 0$ 的同时面.

我们的讨论涉及两个参考系. 一个是惯性系 Σ, 另一个是粒子 $\mathcal{O}$ 的自身参考系 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$.

- 事件 P 通常标记为时空图上的一个几何点, 即时空点. 在惯性系 Σ 中, 时空点 P 既可以用笛卡尔坐标

$$x^{\mu} = (ct,\ x^{i})$$

描写, 也可以用 4-位置矢量

$$X = x^{\mu}\boldsymbol{e}_{\mu} = ct\boldsymbol{e}_0 + x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + x^3\boldsymbol{e}_3$$

描写. 这个描写的物理内涵是: 时空点 P 相对于坐标系原点的 3-位置矢量为 $\boldsymbol{r} = x^i\boldsymbol{e}_i$ 且与原点观测者处在时间参数为 t 的同时面 (simultaneity surface) 上.[12]

- 倘若在加速参考系 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 中可以把同一时空点 P 标记为笛卡尔坐标为 (conjecture):

$$x'^{\mu} = (ct',\ x'^{i})$$

的事件, 请问其物理内涵是什么?

[12] 原点特指时空图上空间轴的原点, 下同. 因为时间的流逝无法停顿, 没有哪一个观测者能自始至终地处在时间轴的原点.

- 粒子 $\mathcal{O}$ 占据加速系 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 的原点, 对钟后可以用它的固有时 $\tau_{\mathcal{O}}$ 统一标记 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 系中时间参数为 $\tau_{\mathcal{O}}$ 的同时面 $S_{\tau_{\mathcal{O}}}$ 上所有时空点的公共时间. 倘若猜想时空点 P 在 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 系具有 4-坐标:

$$x'^{\mu} = (ct', \ x'^{i})$$

其物理内涵就是假定 $t' = \tau_{\mathcal{O}}$, 且默认时空点 P 与粒子 $\mathcal{O}$ 处在同一个同时面 $S_{t'}$ 上. 换言之:

$$X = x'^{\mu} e'_{\mu} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{X = X_{\mathcal{O}} + \hat{X}}$$

式中,

$$X_{\mathcal{O}} = ct' e'_0$$

是粒子 $\mathcal{O}$ 的 4-位置矢量, 而

$$\hat{X} = x'^{i} e'_{i} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\left(\hat{X}\right)'^{\mu} = (0, \ x'^{i})}$$

是同时面 $S_{t'}$ 上时空点 P 相对于粒子 $\mathcal{O}$ 的 4-位置矢量.

$\mathcal{Q}$: 粒子 $\mathcal{O}$ 的 4-位置矢量 $X_{\mathcal{O}}$ 的两种表达式, 即

$$X_{\mathcal{O}} = ct_{\mathcal{O}}\boldsymbol{e}_0 + x^1_{\mathcal{O}}\boldsymbol{e}_1$$

和猜想的

$$X_{\mathcal{O}} = ct'\boldsymbol{e}'_0$$

在逻辑上自洽吗 ?

- 欲回答上述问题, 须事先确定加速参考系 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 中沿各个笛卡尔坐标轴方向的单位基矢 $\boldsymbol{e}'_\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$.
- 我们已经约定粒子 $\mathcal{O}$ 沿 x^1 轴方向做直线运动. 换句话说, $(1+3)$-维时空中的运动可以简化为 $(1+1)$-维时空中的运动, 粒子在 x^2 和 x^3 方向保持静止. 可以合理地假设:

$$\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_3.$$

- 粒子 $\mathscr{O}$ 的 4-速度 $U_{\mathscr{O}}$ 与 4-加速度 $\mathscr{A}_{\mathscr{O}}$ 具有性质:

$$U^{\mu}_{\mathscr{O}} U_{\mathscr{O}\mu} = -c^2, \quad U^{\mu}_{\mathscr{O}} \mathscr{A}_{\mathscr{O}\mu} = 0, \quad \mathscr{A}^{\mu}_{\mathscr{O}} \mathscr{A}_{\mathscr{O}\mu} = a^2$$

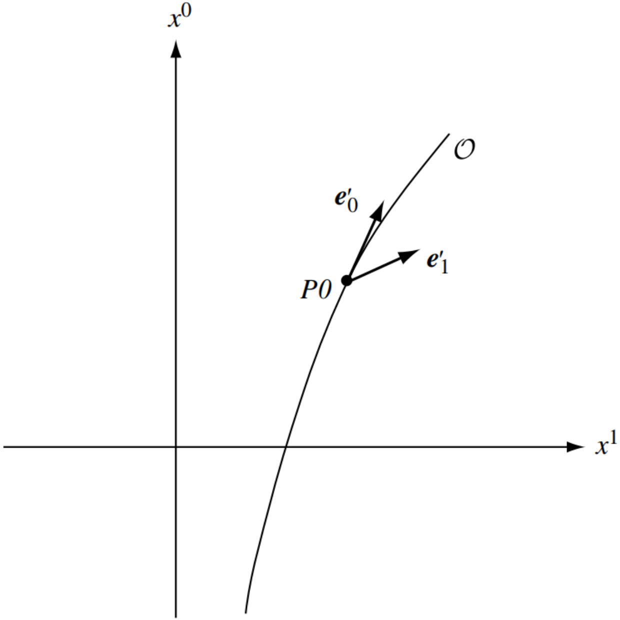
因此, 可以把粒子自身系 $\Sigma'_{\mathscr{O}}$ 前两个坐标轴方向的单位基矢选择为:

$$\boxed{e'_0 = \frac{U_{\mathscr{O}}}{c}, \quad e'_1 = \frac{\mathscr{A}_{\mathscr{O}}}{a}}$$

计及前面的分析和计算, 我们有:

$$\begin{aligned}
e'_0 &= \gamma_u \left[\cosh\left(at'/c\right) + \beta_u \sinh\left(at'/c\right)\right] e_0 \\
&\quad + \gamma_u \left[\sinh\left(at'/c\right) + \beta_u \cosh\left(at'/c\right)\right] e_1, \\
e'_1 &= \gamma_u \left[\sinh\left(at'/c\right) + \beta_u \cosh\left(at'/c\right)\right] e_0 \\
&\quad + \gamma_u \left[\cosh\left(at'/c\right) + \beta_u \sinh\left(at'/c\right)\right] e_1
\end{aligned}$$

式中 $\gamma_u = 1/\sqrt{1-\beta_u^2}$ 且 $\beta_u = u/c$ 是 $t' = 0$ 时刻粒子 $\mathscr{O}$ 相对于惯性系 Σ 的无量纲速度.



x^0
$\mathcal{O}$
$\boldsymbol{e}'_0$
$\boldsymbol{e}'_1$
$P0$
x^1

- 反解上面的基矢变换式，我们有：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_0 &= \gamma_u \left[\cosh(at'/c) + \beta_u \sinh(at'/c)\right] \boldsymbol{e}'_0 \\
&\quad - \gamma_u \left[\sinh(at'/c) + \beta_u \cosh(at'/c)\right] \boldsymbol{e}'_1 \\
\boldsymbol{e}_1 &= -\gamma_u \left[\sinh(at'/c) + \beta_u \cosh(at'/c)\right] \boldsymbol{e}'_0 \\
&\quad + \gamma_u \left[\cosh(at'/c) + \beta_u \sinh(at'/c)\right] \boldsymbol{e}'_1
\end{aligned}
$$

于是，粒子 $\mathcal{O}$ 的 4-位置矢量在惯性系中的表达式

$$
\begin{aligned}
X_{\mathcal{O}} &= ct_{\mathcal{O}}\boldsymbol{e}_0 + x^1_{\mathcal{O}}\boldsymbol{e}_1 \\
&= \frac{c^2}{a}\gamma_u \Big\{ \left[\sinh(at'/c) + \beta_u \cosh(at'/c)\right] \boldsymbol{e}_0 \\
&\quad + \left[\cosh(at'/c) + \beta_u \sinh(at'/c)\right] \boldsymbol{e}_1 \Big\} - \frac{c^2}{a}\gamma_u(\beta_u\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_1)
\end{aligned}
$$

可以在加速系 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 中重新写为：

$$
\boxed{X_{\mathcal{O}} = \frac{c^2}{a}\sinh(at'/c)\boldsymbol{e}'_0 + \frac{c^2}{a}\Big[1 - \cosh(at'/c)\Big]\boldsymbol{e}'_1}
$$

$X_{\mathcal{O}}$ 的上述表达式与之前的朴素猜想完全不同. 因此,

1. 虽然粒子 $\mathcal{O}$ 在运动过程中始终位于加速系 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 的原点, 但其演化并不完全是沿 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 系的时间轴:

$$X_{\mathcal{O}} \neq ct' e'_0$$

   不过, $X_{\mathcal{O}}\big|_{t'\to 0} \approx ct' e'_0$.

2. 倘若 $a=0$, 即 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 系退化为惯性系, 粒子 $\mathcal{O}$ 才会仅仅沿 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 系的时间轴演化:

$$X_{\mathcal{O}}\Big|_{a\to 0} = ct' e'_0$$

3. 根据 $X = X_{\mathcal{O}} + \hat{X}$, $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 系中与粒子 $\mathcal{O}$ 处在同时面 $S_{t'}$ 上的时空点 P 的笛卡尔坐标为:

$$\boxed{x'^{\mu} = \left(\frac{c^2}{a}\,\mathsf{sinh}(at'/c),\ x'^1 + \frac{c^2}{a}\left[1 - \mathsf{cosh}(at'/c)\right],\ x'^2,\ x'^3\right)}$$

强调指出: 在 $a \neq 0$ 的一般情形下, $x'^{\mu} \neq (ct',\ x'^i)$.

综合上面的分析，我们看到时空点 P 的 4-位置矢量既可以表达为：

$$X = ct\boldsymbol{e}_0 + x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + x^3\boldsymbol{e}_3$$

也可以表达为：

$$\begin{aligned}
X &= X_{\mathcal{O}} + \widehat{X} \\
&= ct_{\mathcal{O}}\boldsymbol{e}_0 + x^1_{\mathcal{O}}\boldsymbol{e}_1 + x'^i\boldsymbol{e}'_i \\
&= \gamma_u\left\{\left(x'^1 + \frac{c^2}{a}\right)\sinh(at'/c) + x'^1\beta_u\cosh(at'/c)\right. \\
&\qquad\left. + \beta_u\frac{c^2}{a}\left[\cosh(at'/c) - 1\right]\right\}\boldsymbol{e}_0 \\
&\quad + \gamma_u\left\{x'^1\cosh(at'/c) + \frac{c^2}{a}\left[\cosh(at'/c) - 1\right]\right. \\
&\qquad\quad\left. + \left(x'^1 + \frac{c^2}{a}\right)\beta_u\sinh(at'/c)\right\}\boldsymbol{e}_1 + x'^2\boldsymbol{e}_2 + x'^3\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$

所以，时空点 P 在惯性系 Σ 和加速系 Σ'_O 之间的坐标变换是：

$$\begin{aligned}
ct &= \gamma_u \left\{ \left(x'^1 + \frac{c^2}{a} \right) \sinh\left(at'/c\right) + x'^1 \beta_u \cosh\left(at'/c\right) \right. \\
&\quad \left. + \beta_u \frac{c^2}{a} \left[\cosh\left(at'/c\right) - 1 \right] \right\}, \\
x^1 &= \gamma_u \left\{ x'^1 \cosh\left(at'/c\right) + \frac{c^2}{a} \left[\cosh\left(at'/c\right) - 1 \right] \right. \\
&\quad \left. + \left(x'^1 + \frac{c^2}{a} \right) \beta_u \sinh\left(at'/c\right) \right\}, \\
x^2 &= x'^2, \\
x^3 &= x'^3.
\end{aligned}$$

不同于惯性系之间线性的洛伦兹推动变换，惯性系与加速系之间的坐标变换一般情形下是非线性变换[13]. 可以称之为广义 Møller 变换.

[13] 坐标变换的非线性并不影响闵氏时空 $\mathbb{M}_4$ 的平坦性.

- 倘若 $a \to 0$, 则 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 退化为惯性参考系.前述广义 Møller 变换也退化为沿 x^1 轴的洛伦兹推动变换:

$$
\begin{aligned}
ct &= \gamma_u\left(ct' + \beta_u x'^1\right),\\
x^1 &= \gamma_u\left(x'^1 + \beta_u ct'\right),\\
x^2 &= x'^2,\\
x^3 &= x'^3.
\end{aligned}
$$

- 倘若 $\beta_u \to 0$, 即假设 $t' = 0$ 时刻粒子 $\mathcal{O}$ 与惯性系 Σ 保持相对静止, 广义 Møller 变换简化为著名的Møller 变换:

$$
\begin{aligned}
ct &= \left(x'^1 + c^2/a\right)\sinh\left(at'/c\right),\\
x^1 &= x'^1\cosh\left(at'/c\right) + \frac{c^2}{a}\left[\cosh\left(at'/c\right) - 1\right],\\
x^2 &= x'^2,\\
x^3 &= x'^3.
\end{aligned}
$$

无需赘言, Møller 变换是非线性变换.

- 在加速参考系 Σ'_O 中，倘若坚持仍用 4-坐标 $x'^\mu = (ct', x'^i)$ 标记事件 P, 则闵氏空间的度规张量不再是 $\eta_{\mu\nu}$, 而应替换为 $g'_{\mu\nu}(x')$. 要求事件的间隔 $\mathrm{d}s^2$ 不依赖于参考系的选择，我们有：

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = g'_{\mu\nu}(x')\mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\nu$$

如此不难看出：

$$\boxed{g'_{\mu\nu}(x') = \eta_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}}$$

其非零分量如下：

$$\boxed{g'_{00} = -\left(1 + ax'^1/c^2\right)^2, \quad g'_{11} = g'_{22} = g'_{33} = 1.}$$

换言之，

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 + ax'^1/c^2\right)^2 (c\,\mathrm{d}t')^2 + (\mathrm{d}x'^1)^2 + (\mathrm{d}x'^2)^2 + (\mathrm{d}x'^3)^2$$

所以，$\eta_{\mu\nu}$ 虽然是洛伦兹变换下的不变张量，却不是一般坐标变换、例如 Møller 变换下的不变张量.

非惯性系中不同地点的观测者有不同的固有时.

- 以加速系 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 为例.$\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 系是粒子 $\mathcal{O}$ 的自身参考系, $\mathcal{O}$ 占据其原点. 因此, $\mathcal{O}$ 的固有时就是 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 系中的公共时:

$$\tau_{\mathcal{O}} = t' \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{d}\tau_{\mathcal{O}} = \mathrm{d}t'$$

- 设 $\mathcal{B}$ 是加速系 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 中与粒子 $\mathcal{O}$ 保持相对静止的另一观测者, 他与 $\mathcal{O}$ 具有相同的公共时 t', 但其空间坐标是 (x'^i).考虑 $\mathcal{B}$ 携带的时钟. 因为该时钟在 $\Sigma'_{\mathcal{O}}$ 系中始终处在同一地点, 它相继经历的二事件的间隔是:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 + ax'^1/c^2\right)^2 c^2(\mathrm{d}t')^2$$

式中 $\mathrm{d}t'$ 是该时钟所记录的二事件之间的坐标时间. 倘若用 $\mathrm{d}\tau_{\mathcal{B}}$ 表示二事件之间的固有时, $\mathrm{d}s^2 = -c^2(\mathrm{d}\tau_{\mathcal{B}})^2$, 我们有:

$$\boxed{\mathrm{d}\tau_{\mathcal{B}} = \left(1 + ax'^1/c^2\right)\,\mathrm{d}t' = \left(1 + ax'^1/c^2\right)\,\mathrm{d}\tau_{\mathcal{O}}}$$

物理规律的洛伦兹协变性

$\mathcal{Q}$: 4-张量为什么重要?

相对性原理声称:所有惯性参考系都是等价的、物理规律对于所有惯性系都可以表达为相同形式.

倘若一个物理学方程中的每一项都属于相同类型的 4-张量,例如:

$$\mathscr{F}_\mu + \mathscr{H}_\mu = 0$$

式中 $\mathscr{F}_\mu$ 与 $\mathscr{H}_\mu$ 都是 4-矢量. 或者,

$$\mathscr{T}_{\mu\nu} + \mathscr{U}_{\mu\nu} + \mathscr{W}_{\mu\nu} = 0$$

式中 $\mathscr{T}_{\mu\nu}$, $\mathscr{U}_{\mu\nu}$ 及 $\mathscr{W}_{\mu\nu}$ 都是二阶 4-张量, 则在洛伦兹变换下,方程的每一项都按相同的方式变换,保证方程的形式与惯性参考系的选择无关, 从而使得该物理学方程获得作为相对论所接受的物理规律的资格.

以

$$\mathscr{F}_\mu + \mathscr{H}_\mu = 0$$

为例. 假设这是惯性系 Σ 中的观测者通过实验所建立的一个物理量之间的关系式, 其中的 $\mathscr{F}_\mu$ 与 $\mathscr{H}_\mu$ 已被确认形成两个 4-矢量. 这样, 若在惯性系 Σ 和 $\Sigma\,'$ 之间进行洛伦兹变换

$$x^\mu \quad \rightsquigarrow \; x\,'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu$$

则在惯性系 $\Sigma\,'$ 里我们有:

$$\mathscr{F}_\mu{}' = \mathscr{F}_\nu \, \tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu = -\mathscr{H}_\nu \, \tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu = -\mathscr{H}_\mu{}'$$

亦即:

$$\mathscr{F}_\mu{}' + \mathscr{H}_\mu{}' = 0$$

此方程在两个惯性系中采取了相同的数学形式, 因此有资格作为一条被狭义相对论所承认的物理学规律.

$\mathcal{Q}$: 如下方程

$$\mathscr{A}_\mu \mathscr{B}_\nu + \mathscr{C}_{\mu\nu} = 0$$

是否有资格作为一条狭义相对论承认的物理规律?

正确答案是:

$$\boxed{\text{不知道 (unkown)}}$$

1. 不能自欺欺人地脑补、想当然地把 $\mathscr{A}_\mu$, $\mathscr{B}_\nu$ 与 $\mathscr{C}_{\mu\nu}$ 等认作是 4- 矢量与二阶 4-张量. 切记! 尚未明确其在洛伦兹变换下的变换性质之前, 它们不过是一些多分量数组而已.

$\mathcal{Q}$: 怎么建立狭义相对论承认的物理规律?

1. 一种可能的方案是从非相对论性的候选实验规律出发, 设法将其中的物理量更换为相应的 4-张量. 通过不断试错, 最终归纳出既符合实验事实、又满足相对性原理要求的物理规律.

例如, (真空中) 静电现象的实验规律是:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \nabla \times E = 0$$

静电场强分布的无旋性允许我们引入静电势替代场强描写静电场, $E = -\nabla \phi$. 所以,

$$\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0$$

- 严格地说, 此静电泊松方程仅仅在电荷分布 ρ 的自身参考系中才成立.

- 若想将其过渡到任意惯性系，必须把其中出现的物理量更换为相应的 4-张量. 特别地，

$$\nabla^2 \quad \rightsquigarrow \; \partial^\mu \partial_\mu = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

进而：

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = -\rho/\epsilon_0$$

- 接下来必须把 ϕ 与 ρ 替换为相应的 4-张量. 最简单的选择是假设它们均为 4-标量，如此上述方程自然符合相对论原理的要求. 次简单的选择是假设它们构成了 4-矢量的时间分量

$$A^\mu = (\phi,\, \boldsymbol{A}), \qquad J^\mu = (\rho,\, \boldsymbol{j})$$

符合相对性原理的方程变成了：

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = -J^\nu/\epsilon_0 \qquad \rightsquigarrow \; \partial^\mu \partial_\mu \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{j}/\epsilon_0$$

相比于 ϕ 的方程，现在多出了 $\boldsymbol{A}$ 满足的波动方程. 当然还可以有更复杂的选择. 我们应该如何抉择呢?