

# 经典电动力学

## Chapter 4. 静磁学

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

*hyang@ustc.edu.cn*

May 24, 2023

## ① 静磁学基本方程

- 无界空间中的静磁场
- 点磁荷与磁单极辨析

## ② 磁多极展开

- 磁偶极子
- 再论磁偶极子的磁场

## ③ 静磁场的能量

- 电流与外磁场之间的相互作用磁能
- 相互作用静磁能的多极展开
- 磁偶极子与外磁场的相互作用能量
- 磁偶极子与外磁场之间的相互作用有效势能
- $W_i^{(1)}$  与  $U$  之间的联系

## ④ 磁介质

- 磁介质的宏观描写
- 磁介质内部的静磁学方程组
- 磁介质分界面上的静磁边界条件

## ⑤ 静磁边值问题简介

# 静磁场

电磁场量不随时间变化的情形下, 电磁场退化为静电场与静磁场. 麦克斯韦方程组中描写静磁场的方程为:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

- 磁感应强度  $\mathbf{B}$  完全取决于矢势  $\mathbf{A}$  的分布:

$$B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} = \epsilon^{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \rightsquigarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

此定义式的理论基础是磁高斯定律  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

- 因为旋度场无散, 静磁现象中的电流分布必然是稳恒电流:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \rightsquigarrow \oint_S \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{j} = 0$$

- 静磁边界条件为:

$$n_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \Big|_S = 0, \quad n_{12} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \Big|_S = \mu_0 \boldsymbol{\alpha}$$

式中  $\alpha$  是界面  $S$  上面电流分布的线密度. 此外显然有:

$$n_{12} \cdot (j_2 - j_1) \Big|_S = 0$$

- 规范变换  $A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$  在静磁问题中退化为:

$$A(\mathbf{r}) \rightarrow A'(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) + \nabla \chi(\mathbf{r})$$

即  $\theta(x) = Ct + \chi(\mathbf{r})$ . 可以人为地选择规范函数  $\chi(\mathbf{r})$  指定矢势的散度. 静磁学中常取**库仑规范**:

$$\nabla \cdot A = 0$$

在库仑规范中, 静磁学基本方程可重新表为矢势的诸笛卡尔直角分量满足的泊松方程:

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{j} &= \nabla \times \mathbf{B} \\ &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{A} \end{aligned}$$

亦即：

$$\nabla^2 A = -\mu_0 j$$

## 无界空间中的静磁场：

矢势泊松方程可以通过格林函数法求解。类似于静电学，我们约定静磁第一类边值问题的格林函数的定解条件是：

$$\nabla^2 \mathcal{G}(r, r') = -\mu_0 \delta^{(3)}(r - r'), \quad \mathcal{G}(r, r') \Big|_{r \in S} = 0$$

因此，无界空间中的格林函数为：

$$\mathcal{G}(r, r') = \frac{\mu_0}{4\pi|r - r'|} \quad \leftarrow \nabla^2 \frac{1}{|r - r'|} = -4\pi\delta^{(3)}(r - r')$$

无界空间的静磁矢势分布为：

$$A(r) = \int d^3x' j(r') \mathcal{G}(r, r') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{j(r')}{|r - r'|}$$

无界空间的静磁场的磁感应强度分布为：

$$\begin{aligned} B(r) &= \nabla \times A(r) = \nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{j(r')}{|r - r'|} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \nabla \frac{1}{|r - r'|} \times j(r') \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{(r - r')}{|r - r'|^3} \times j(r') \end{aligned}$$

亦即：

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{j(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3}$$

这正是著名的比奥-萨法尔定律。初等电磁学中通常仅研究线电流分布激发的静磁场，此情形下比萨定律可表为：

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\mathbf{l} \times \frac{(r - r')}{|r - r'|^3}$$

式中  $C$  为存在稳恒电流分布的闭合曲线。

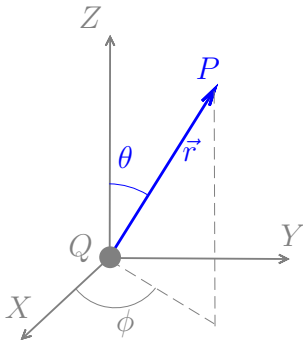
## 2: 经典电磁学理论上允许存在点磁荷吗?

倘若经典电磁理论允许存在点磁荷  $Q$ , 则类比于点电荷, 占据坐标原点的点磁荷  $Q$  应在空间激发一个球对称的静磁场, 其磁感应强度分布应为:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q r}{r^3}$$

采用球坐标系后,

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q e_r}{r^2}$$



计及  $\mathbf{e}_r = \nabla r$ , 我们有:

$$\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{1}{r^2} \nabla r = -\nabla \left( \frac{1}{r} \right), \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{B}(r) = -\nabla \left( \frac{\mu_0 Q}{4\pi r} \right) = -\nabla [\phi(r)]$$

换言之, 此点磁荷激发静磁场似乎可以用磁标势

$$\phi(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r}$$

描写. 然而从物理上讲这个结论似是而非. **电磁场是  $U(1)$  规范场. 根据规范原理, 磁场在本质上必须通过矢势描写.**

由于球坐标系基矢满足关系式  $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi$ , 我们也可以把点磁荷的磁感应强度改写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi}{r^2} = \frac{\mu_0 Q \sin \theta}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \times \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} \right) \\ &= \frac{\mu_0 Q \sin \theta}{4\pi} \nabla \theta \times \nabla \varphi = -\frac{\mu_0 Q}{4\pi} \nabla (\cos \theta) \times \nabla \varphi \\ &= -\frac{\mu_0 Q}{4\pi} \nabla \times (\cos \theta \nabla \varphi) \end{aligned}$$

最后一步使用了数学恒等式  $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ .



此式似乎建议我们可以对点磁荷的磁场引入矢势描写：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 Q}{4\pi} \cos \theta \nabla \varphi = -\frac{\mu_0 Q e_\varphi}{4\pi r} \cot \theta$$

不幸的是，这仅仅是一个错觉。理由如下：

- 磁感应强度与候选矢势的定义域不同。很显然，点磁荷磁感应强度

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r$$

的定义域为  $r > 0$ 。但候选矢势

$$\mathbf{A}(r) = -\frac{\mu_0 Q e_\varphi}{4\pi r} \cot \theta$$

的定义域却是  $r > 0, \theta \neq 0, \pi$ 。换言之，空间中的一条直线（即  $x^3$  轴）被排除在候选矢势的定义域之外。

- 根据矢势的规范变换, 可以把点磁荷的候选磁矢势选择为:

$$A_{\pm}(r) = A(r) \pm \nabla \varphi = \pm \frac{\mu_0 Q (1 \mp \cos \theta) e_{\varphi}}{4\pi r \sin \theta}$$

从而扩大它们的定义域. 具体地说,

$$A_{+}(r) = \frac{\mu_0 Q (1 - \cos \theta) e_{\varphi}}{4\pi r \sin \theta}, \quad (r > 0, \theta \neq \pi)$$

而

$$A_{-}(r) = -\frac{\mu_0 Q (1 + \cos \theta) e_{\varphi}}{4\pi r \sin \theta}, \quad (r > 0, \theta \neq 0)$$

但是, 不可能通过规范变换把矢势的定义域扩大到与点磁荷磁感应强度的定义域完全相同 ( $r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi$ ).

- 从规范原理的视角看, 球对称的矢量场分布

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^3} r$$

是不能诠释为一个静磁场的磁感应强度的, 因为其散度为  $\nabla \cdot B = \mu_0 Q \delta^{(3)}(r)$ ,  $\rightsquigarrow$  动摇了电磁场的规范场本性的理论基础.

- 可以考虑缩小磁感应强度的定义域, 同时达到让  $B = \nabla \times A$  与  $A$  具有完全相同的定义域和确保磁高斯定律  $\nabla \cdot B = 0$  成立两个目的. 例如, 我们认为与矢势

$$A(r) = \frac{\mu_0 Q (1 - \cos \theta) e_\varphi}{4\pi r \sin \theta}, \quad (r > 0, \theta \neq \pi)$$

对应的磁感应强度分布不是具有球对称性的矢量场

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q r}{r^3}$$

而是

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q r}{r^3} + \mu_0 Q e_3 \theta(-x^3) \delta(x^1) \delta(x^2)$$

显然, 上述  $A$  与  $B$  的定义域是相同的, 都是  $r > 0, \theta \neq \pi$ . 这个  $B(r)$  明显的不具有球对称性, 但它满足磁高斯定律:

$$\nabla \cdot B = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \nabla \cdot \left( \frac{r}{r^3} \right) + \mu_0 Q \left[ \frac{\partial \theta(-x^3)}{\partial x^3} \right] \delta(x^1) \delta(x^2) = 0$$

因此, 电磁场属于规范场的数学基础没有破坏.

2: 现在的问题是: 还能把没有球对称性的矢量场

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r} + \mu_0 Q e_3 \theta(-x^3) \delta(x^1) \delta(x^2)$$

诠释为点磁荷激发的磁感应强度分布吗?

显然不能. 我们把上述  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  诠释为占据了负  $x^3$  轴的磁单极子激发的磁感应强度分布<sup>1</sup>. 此磁单极在物理图像上不是一个坐落在坐标原点处的点磁荷, 而是一个端点在坐标原点且沿负  $x^3$  轴无限延伸的、横截面趋于零的半无限长载流螺线管.

例:

- ① 半径为  $a$  的导线圆环载有电流强度  $I$ , 求矢势和磁感应强度.

---

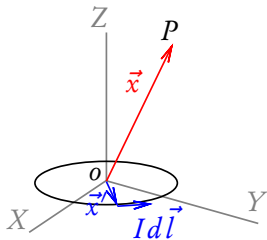
<sup>1</sup>通常把这里的负  $x^3$  轴称为 Dirac 弦.

解：

因电流分布于空间有限区域,其激发的静磁场矢势可由下式计算:

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\vec{l}}{r}$$

式中  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ .



设场点  $P$  的球坐标为  $(R, \theta, \phi)$ , 则:

$$\mathbf{x} = R\mathbf{e}_R = R\cos\theta\mathbf{e}_3 + R\sin\theta\cos\phi\mathbf{e}_1 + R\sin\theta\sin\phi\mathbf{e}_2$$

载流圆环位于赤道面上. 任一源点的球坐标可写为  $(a, \pi/2, \phi')$ , 其相对于坐标原点的位置矢量可表为:

$$\mathbf{x}' = a\mathbf{e}_R = a\cos\phi'\mathbf{e}_1 + a\sin\phi'\mathbf{e}_2$$

可以把环形导线上的电流元表达为:

$$Id\mathbf{l} = Id\mathbf{x}' = Ia(-\sin\phi'\mathbf{e}_1 + \cos\phi'\mathbf{e}_2)d\phi'$$

$\phi'$  的取值范围是  $0 \leq \phi' \leq 2\pi$ . 进一步注意到:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' &= Ra \sin \theta (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi') \\ &= Ra \sin \theta \cos(\phi - \phi') \end{aligned}$$

场点、源点之间的距离可以表达为:

$$\begin{aligned} r &= |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \\ &= \sqrt{R^2 + a^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'} = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \end{aligned}$$

把  $Idl$  与  $r$  的表式代回到矢势的计算公式中, 并计及直角坐标系基矢是常矢量这一常识, 我们得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left[ -\mathbf{e}_1 \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi' d\phi'}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \sin \theta \cos(\phi - \phi')}} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{e}_2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \sin \theta \cos(\phi - \phi')}} \right] \end{aligned}$$

做变量代换  $\alpha = \phi' - \phi$ ，并计及数学恒等式：

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \sin \theta \cos \alpha}} = 0$$

可以把矢势的表达式简化为：

$$A = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} (-\sin \phi e_1 + \cos \phi e_2) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \sin \theta \cos \alpha}}$$

场点  $P$  处的球坐标沿方位角  $\phi$  方向的单位基矢可以通过整体直角坐标基矢表为，

$$e_\phi = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi e_R = -\sin \phi e_1 + \cos \phi e_2$$

所以，

$$A = e_\phi \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \sin \theta \cos \alpha}}$$

即  $P$  点磁场的矢势只有  $\phi$  分量, 且此分量只依赖于两个球坐标  $R$  与  $\theta$ , 和方位角  $\phi$  的大小无关. 此表达式中涉及的积分是椭圆积分, 无解析表达式.

现在设场点  $P$  的位置满足条件:

$$2Ra \sin \theta \ll R^2 + a^2$$

这个条件描写

- $R \gg a$ , 远场
- $R \sin \theta \ll a$ , 近轴

两种近似情形. 此条件成立的情形中,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \sin \theta \cos \phi'}} \\ & \approx \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \left[ 1 + \left( \frac{Ra \sin \theta \cos \phi'}{R^2 + a^2} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{Ra \sin \theta \cos \phi'}{R^2 + a^2} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{5}{2} \left( \frac{Ra \sin \theta \cos \phi'}{R^2 + a^2} \right)^3 + \cdots \right] \end{aligned}$$



利用此展开式, 并注意到当  $n$  为非负整数时,

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \phi' d\phi' = \frac{\pi^2 2^{2n+1}}{(2n)! [\Gamma(1/2 - n)]^2}, \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} \phi' d\phi' = 0$$

可以求出矢势的近似表达式如下:

$$A = A_\phi(R, \theta) e_\phi$$

式中,

$$A_\phi(R, \theta) \approx \frac{\mu_0 I a}{4\sqrt{R^2 + a^2}} \frac{R a \sin \theta}{R^2 + a^2} \left[ 1 + \frac{15}{8} \frac{R^2 a^2 \sin^2 \theta}{(R^2 + a^2)^2} \right]$$

下面求磁感应强度的分布:

$$\begin{aligned} B &= \nabla \times A = \nabla \times (A_\phi e_\phi) = \nabla \times \left[ (R \sin \theta A_\phi) \frac{e_\phi}{R \sin \theta} \right] \\ &= \nabla (R \sin \theta A_\phi) \times \frac{e_\phi}{R \sin \theta} \\ &= \left[ e_R \partial_R (R \sin \theta A_\phi) + \frac{e_\theta}{R} \partial_\theta (R \sin \theta A_\phi) \right] \times \frac{e_\phi}{R \sin \theta} \end{aligned}$$

亦即：

$$\mathbf{B} = \frac{e_R}{R^2 \sin \theta} \partial_\theta (R \sin \theta A_\phi) - \frac{e_\theta}{R \sin \theta} \partial_R (R \sin \theta A_\phi)$$

设场点  $P$  位于远场区,  $R \gg a$ , 则：

$$A_\phi \approx \frac{\mu_0 I a^2}{4R^2} \sin \theta \left( 1 + \frac{15}{8} \frac{a^2 \sin \theta}{R^2} \right) \approx \frac{\mu_0 I a^2}{4R^2} \sin \theta$$

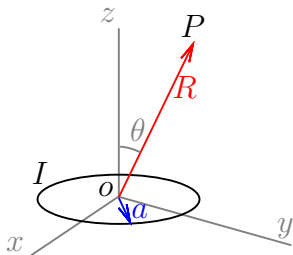
通过简单的计算可知：

$$\partial_\theta (R \sin \theta A_\phi) \approx \frac{\mu_0 I a^2}{2R} \sin \theta \cos \theta, \quad \partial_R (R \sin \theta A_\phi) \approx -\frac{\mu_0 I a^2}{4R^2} \sin^2 \theta$$

代入到  $\mathbf{B}$  的表达式中, 有：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{4R^3} \left( 2 \cos \theta \mathbf{e}_R + \sin \theta \mathbf{e}_\theta \right)$$

将来我们会看到, 上式实际上是磁偶极子激发的磁感应强度. 所以, 闭合载流导线对于远处的场点而言相当于是一个磁偶极子.



按照本题的分析, 半径  $a \rightsquigarrow 0$  但  $m = I\pi a^2$  保持有限的环形载流导线在空间激发的静磁矢势为:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu_0 I a^2}{4R^2} \sin \theta e_\phi \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3} \end{aligned}$$

式中  $\mathbf{m} = m \mathbf{e}_3$  是载流线圈的磁偶极矩,  $\mathbf{R} = R \mathbf{e}_R$  是场点  $P$  相对于载流线圈中心的位置矢量. 采取柱坐标系,  $\mathbf{R} = \rho \boldsymbol{\rho} + z \mathbf{e}_3$ , 则有:

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_R \\ &= \mathbf{e}_3 \times \sin \theta (\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2) \\ &= \sin \theta (\cos \phi \mathbf{e}_2 - \sin \phi \mathbf{e}_1) \\ &= \sin \theta \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

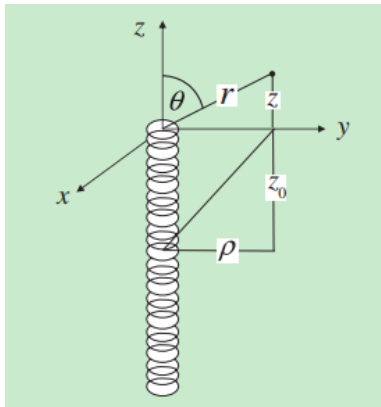
$$A = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_\phi$$

例：

- ① 请计算半无限长的载流螺线管在空间激发的静磁场的矢势和磁感应强度分布.

解：

如图示, 设螺线管占据  $-z$  轴, 单位长度的磁偶极矩为  $ge_3$ ,



螺线管上纵向坐标为  $z_0$  的载流圆环在场点  $P$  处激发的静磁矢势为：

$$dA = \frac{\mu_0 g dz_0}{4\pi} \frac{\rho}{[\rho^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} e_\phi$$

半无限长载流螺线管在场点  $P$  处激发的静磁矢势为：

$$\begin{aligned} A &= \int dA \\ &= e_\phi \frac{\mu_0 g \rho}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{dz_0}{[\rho^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \\ &= e_\phi \frac{\mu_0 g \rho}{4\pi} \frac{1}{\rho^2} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right] \end{aligned}$$

引入  $P$  点的球坐标  $(r, \theta, \phi)$ . 由前页示意图知：

$$\rho = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta$$

故半无限长载流螺线管在长点  $P$  处激发的矢势可重新表为：

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{g(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} e_\phi$$

显然,此矢势的定义域为  $r > 0$ ,  $0 \leq \theta < \pi$ , 即矢势在排除了原点及  $-z$  轴的空间中有效.

半无限长载流螺线管在场点  $P$  处激发的磁感应强度分布为:

$$\begin{aligned} B &= \nabla \times A = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[ \frac{g(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} e_\phi \right] \\ &= \frac{\mu_0 g}{4\pi} \nabla(1 - \cos \theta) \times \frac{e_\phi}{r \sin \theta} \\ &= \frac{\mu_0 g}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} e_\theta \times \frac{e_\phi}{r \sin \theta} \\ &= \frac{\mu_0 g}{4\pi} \frac{e_r}{r^2} \end{aligned}$$

这正是期望中的平方反比律,但其定义域是  $r > 0$ ,  $0 \leq \theta < \pi$ .

### 顿悟:

- ① 从经典电动力学的角度看,磁单极就是半无限长的载流螺线管.

# 矢势的磁多极展开

给定电流分布在空间激发的静磁矢势是：

$$A(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{r}, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$$

写出此式时已经选择无穷远点为矢势零点. 如果电流分布于小区域内, 而场点距离该区域非常远, 则可以将  $1/r$  按照  $(1/R)$  作泰勒展开:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - x'_i \partial_i \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{R} + \cdots$$

式中,  $R = |\mathbf{x}|$ .

将此展开式代入到矢势的表达式中, 可得:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \left[ \frac{1}{R} - x'_i \partial_i \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{R} + \cdots \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_i}{R^3} \int_V d^3x' x'_i \mathbf{j}(\mathbf{x}') + \cdots \end{aligned}$$

这里利用了数学恒等式<sup>2</sup>:

$$\partial_i \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \partial_i R = -\frac{1}{R^2} \partial_i \sqrt{x^j x_j} = -\frac{1}{2R^2} \frac{2x^j (\partial_i x_j)}{\sqrt{x^k x_k}} = -\frac{x^j \delta_{ij}}{R^3} = -\frac{x_i}{R^3}$$

矢势展开式的前两项分别是:

$$A^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V d^3x' \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')$$

和

$$A^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} x_i \int_V d^3x' x'_i \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')$$

为了看清矢势多极展开各项的物理意义, 现在构造一个**静磁学恒等式**. 我们已经约定电流分布于小区域  $V$  中, 没有电流溢出  $V$  的边界面  $S$ . 所以, 若以  $f, g$  表示源点坐标的两个任意的标量函数, 则有:

$$\oint_S d\boldsymbol{s}' \cdot [f(\boldsymbol{x}') g(\boldsymbol{x}') \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')] = 0$$

---

<sup>2</sup>场点位置矢径的长度是  $R = |\boldsymbol{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^j x_j}$ .



利用奥高定理可以将此式左端改写为区域  $V$  上的体积分：

$$\int_V d^3x' \nabla' \cdot [f(\mathbf{x}') g(\mathbf{x}') \mathbf{j}(\mathbf{x}')] ]$$

注意到,

$$\nabla' \cdot (f g \mathbf{j}) = (f \nabla' g + g \nabla' f) \cdot \mathbf{j} + f g \nabla' \cdot \mathbf{j}$$

以及稳恒电流连续性方程  $\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}') = 0$ , 我们有:

$$\int_V d^3x' \left[ f(\mathbf{x}') \mathbf{j}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' g(\mathbf{x}') + g(\mathbf{x}') \mathbf{j}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' f(\mathbf{x}') \right] = 0$$

- 取  $f = 1$ ,  $g = x'_i$ . 在直角坐标系中,

$$\nabla' f = 0, \quad \nabla' g = \mathbf{e}^j \partial'_j x'_i = \mathbf{e}^j \delta_{ij} = \mathbf{e}_i$$

上述恒等式退化为:

$$0 = \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_i = \int_V d^3x' j_i(\mathbf{x}')$$

鉴于直角坐标系基矢是常矢量，上式的成立意味着：

$$\int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') = 0$$

所以，矢势多极展开的首项等于零：

$$A^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') = 0$$

与静电标势情形不同，静磁矢势展开式不含“点磁荷”项，即不含与点电荷静电势对应的项。

- 取  $f = x'_i$ ,  $g = x'_k$ . 在直角坐标系中，

$$\nabla' f = \mathbf{e}_j \partial'_j x'_i = \delta_{ij} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i, \quad \nabla' g = \mathbf{e}_k$$

上述恒等式退化为：

$$0 = \int_V d^3x' \left[ x'_i \mathbf{j}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_k + x'_k \mathbf{j}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_i \right] = \int_V d^3x' \left[ x'_i j_k(\mathbf{x}') + x'_k j_i(\mathbf{x}') \right]$$

于是, 矢势多极展开式的第二项所涉及的积分可进一步简化. 选取直角坐标系使得  $\mathbf{j}(\mathbf{x}') = e^k j_k(\mathbf{x}')$ , 则:

$$\begin{aligned} x^i \int_V d^3 x' x'_i j(\mathbf{x}') &= x^i e^k \int_V d^3 x' x'_i j_k(\mathbf{x}') \\ &= \frac{1}{2} x^i e^k \int_V d^3 x' \left[ x'_i j_k(\mathbf{x}') - x'_k j_i(\mathbf{x}') \right] \\ &= \frac{1}{2} x^i e^k \int_V d^3 x' \epsilon_{ikl} \left[ \mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') \right]_l \\ &= -\mathbf{x} \times \left[ \frac{1}{2} \int_V d^3 x' \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') \right] \\ &= \mathbf{m} \times \mathbf{x} \end{aligned}$$

式中

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3 x' \mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}')$$

诠释为电流分布具有的磁偶极矩.

- ① 倘若稳恒电流分布于闭合导线  $C$ , 则有  $\oint_C \mathbf{j} d^3 \mathbf{x}' = I d\mathbf{l}$ . 此载流线圈表现为一个磁偶极子, 其磁偶极矩矢量表达为:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{x}' \times d\mathbf{l} = I \mathbf{S} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{x}' \times d\mathbf{l}$$

此处的  $\mathbf{S}$  是闭合曲线  $C$  所包围曲面的面积矢量.

磁偶极子激发的磁矢势为:

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{R^3}$$

式中  $R = |\mathbf{x}|$  是场点到磁偶极子的距离.

现在计算磁偶极子所激发磁场的磁感应强度矢量:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{x}) &= \nabla \times \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[ \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{x}}{R^3} \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[ \mathbf{m} \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right] \end{aligned}$$

这里使用了数学恒等式:

$$\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{x}}{R^3}$$

进一步的化简需要计算  $\nabla \times (m \times \nabla \psi)$ , 此处  $\psi = 1/R$ . 采用直角坐标系, 我们有:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (m \times \nabla \psi) &= e_i \epsilon^{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} m^l \partial^n \psi) \\
 &= e_i \epsilon^{ijk} \epsilon_{lnk} m^l \partial_j \partial^n \psi \\
 &= e_i (\delta_l^i \delta_n^j - \delta_n^i \delta_l^j) m^l \partial_j \partial^n \psi \\
 &= e_i m^i \partial_j \partial^j \psi - e_i m^j \partial_j \partial^i \psi = m \nabla^2 \psi - (m \cdot \nabla) \nabla \psi
 \end{aligned}$$

回忆

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi \delta^{(3)}(x)$$

对于远场区的场点 ( $x \neq 0$ ),  $\nabla^2 \psi = 0$ . 于是, 磁偶极子  $m$  在远场区激发的磁场的磁感应强度分布是:

$$B^{(1)}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} (m \cdot \nabla) \nabla \psi = -\frac{\mu_0}{4\pi} (m \cdot \nabla) \frac{x}{R^3}$$

## 磁标势:

- ① 磁偶极子磁感应强度的上列表达式启发我们可以引入磁标势

$$\phi_m^{(1)} = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}}{4\pi R^3}$$

描写磁偶极子的磁场,  $\mathbf{B}^{(1)} = -\mu_0 \nabla \phi_m^{(1)}$ .

理由如下. 选择笛卡尔直角坐标系做计算, 则  $\nabla = e^j \partial_j$ ,  $\mathbf{x} = x^j e_j$  且  $R = \sqrt{x^j x_j}$ . 于是,

$$\partial_j \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \partial_j R = -\frac{1}{R^2} \partial_j \sqrt{x^i x_i} = -\frac{2x_i (\partial_j x^i)}{2R^3} = -\frac{x_j}{R^3}$$

由此可知:

$$\frac{\mathbf{x}}{R^3} = e_j \frac{x^j}{R^3} = -e_j \partial^j \frac{1}{R} = -\nabla \frac{1}{R}$$

凭借此恒等式, 我们可以把磁偶极子的磁感应强度重新表达为:

$$\begin{aligned}
 B^{(1)}(\boldsymbol{x}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} (\boldsymbol{m} \cdot \nabla) \frac{\boldsymbol{x}}{R^3} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} (\boldsymbol{m} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{R} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} m^j \partial_j \left[ \boldsymbol{e}_i \partial^i \frac{1}{R} \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \boldsymbol{e}_i \partial^i \left[ m^j \partial_j \left( \frac{1}{R} \right) \right] \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \boldsymbol{e}_i \partial^i \left[ m^j \frac{x_j}{R^3} \right] \\
 &= -\mu_0 \nabla \left[ \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x}}{4\pi R^3} \right] \\
 &= -\mu_0 \nabla \phi_m^{(1)} \quad \leftrightarrow \quad \phi_m^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x}}{4\pi R^3}
 \end{aligned}$$

当然, 这一结论仅在  $R \neq 0$  的场点成立.

设磁偶极矩矢量沿  $x^3$  轴正向,  $\boldsymbol{m} = m\boldsymbol{e}_3$ . 对场点  $P$  的位置取球坐标  $(R, \theta, \phi)$ ,  $\boldsymbol{x} = R\boldsymbol{e}_R$ , 这里的  $\boldsymbol{e}_R$  是  $P$  点  $R$  增大方向的单位矢量:

$$\boldsymbol{e}_R = \cos \theta \boldsymbol{e}_3 + \sin \theta \cos \phi \boldsymbol{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \boldsymbol{e}_2$$

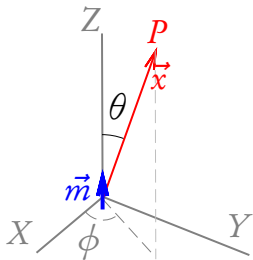
根据定义  $\boldsymbol{e}_\theta = \partial_\theta \boldsymbol{e}_R$  和  $\boldsymbol{e}_\phi = \partial_\phi \boldsymbol{e}_R / \sin \theta$ ,  $P$  点处另外两个球坐标系基矢是:

$$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin \theta \boldsymbol{e}_3 + \cos \theta \cos \phi \boldsymbol{e}_1 + \cos \theta \sin \phi \boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{e}_\phi = -\sin \phi \boldsymbol{e}_1 + \cos \phi \boldsymbol{e}_2$$

所以,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m} \cdot \nabla &= m\boldsymbol{e}_3 \cdot \left( \boldsymbol{e}_R \partial_R + \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{R} \partial_\theta + \frac{\boldsymbol{e}_\phi}{R \sin \theta} \partial_\phi \right) \\ &= m \left( \cos \theta \partial_R - \frac{\sin \theta}{R} \partial_\theta \right) \end{aligned}$$





场点  $P$  处的磁感应强度计算如下:

$$\begin{aligned} B &= -\frac{\mu_0}{4\pi}(m \cdot \nabla) \frac{x}{R^3} = -\frac{\mu_0 m}{4\pi} \left( \cos \theta \partial_R - \frac{\sin \theta}{R} \partial_\theta \right) \frac{e_R}{R^2} \\ &= -\frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (-2 \cos \theta e_R - \sin \theta \partial_\theta e_R) = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (2 \cos \theta e_R + \sin \theta e_\theta) \end{aligned}$$

- ① 对于一个由“载有电流强度为  $I$  且半径为  $a$  的圆环状导线”形成的磁偶极子,  $m = \pi a^2 I$ , 上式可等价地表达为:

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{4R^3} (2 \cos \theta e_R + \sin \theta e_\theta)$$

这恰为之前例题的结果.

- ② 磁偶极子  $m$  激发的磁场可以表达为与坐标系选择无关的形式:

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(m \cdot x)x}{R^5} - \frac{m}{R^3} \right]$$

此处约定  $x = R e_R$ , 且  $R > 0$ .

## 再论磁偶极子的磁场

2: 倘若计及磁偶极子  $m$  占据的地点、即  $R=0$  处,  $m$  激发的磁感应强度分布的表达式是什么?

我们在坚持磁高斯定律  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  成立的前提下回答此问题.

- 前面的讨论中实际上已经默认磁高斯定律在  $R > 0$  情形下是成立的. 倘若  $R > 0$ , 我们可以把磁偶极子的磁感应强度表达为矢势的旋度

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{m}}{R^3} \right] = \nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\mathbf{m} \times \mathbf{x})}{R^3} \right]$$

从而必然有:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \left[ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{m}}{R^3} \right] = 0, \quad \forall R > 0$$

- 现在的问题是: 怎么确保  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  在  $R \geq 0$  情形下仍成立?

倘若计及  $\boldsymbol{x} = 0$  的场点, 我们猜想

$$\nabla \cdot \left[ \frac{3(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{R^3} \right]$$

的值应与  $\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})$  有关. 为了检验这一猜想并使之精确化, 我们考虑如下数学恒等式:

$$\nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$$

假设  $|\boldsymbol{a}| \sim 0$ , 可以对上式两端分别进行泰勒级数处理. 精确到  $\mathcal{O}(a^2)$ , 恒等式的右端表达为:

$$\begin{aligned} -4\pi\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) &= -4\pi \left[ \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) - a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} a^i a^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) + \cdots \right] \\ &= -4\pi\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) + 4\pi(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned}$$

而它的左端表达为：

$$\begin{aligned}\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} &= \nabla^2 \left[ \frac{1}{R} - a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{R} + \mathcal{O}(a^2) \right] \\ &= \nabla^2 \frac{1}{R} + \nabla^2 \left[ \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{R^3} \right] + \mathcal{O}(a^2) \\ &= -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \nabla \cdot \nabla \left[ \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{R^3} \right] + \mathcal{O}(a^2)\end{aligned}$$

我们现在需要计算标量函数

$$\Psi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{R^3}$$

的梯度。首先考虑  $\mathbf{x} \neq 0$  的情形。  $\mathbf{x} \neq 0$  意味着  $R > 0$ 。 所以：

$$\begin{aligned}\nabla \Psi &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \nabla \left( \frac{1}{R^3} \right) + \frac{1}{R^3} \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \\ &= - \left[ \frac{3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{a}}{R^3} \right]\end{aligned}$$

为了计及  $\nabla\Psi$  在  $\mathbf{x} = 0$  处可能存在的发散, 我们计算  $\nabla\Psi$  在全空间的体积分. 不失一般性, 我们取  $\mathbf{a} = ae_3$ . 使用奥高散度定理的推论

$$\int d^3x \nabla\Psi = \oint d\mathbf{s} \Psi$$

可得:

$$\begin{aligned}\int d^3x \nabla\Psi &= \oint d\mathbf{s} \Psi = \oint \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{R^3} \mathbf{e}_R R^2 d\Omega \\&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_R) [e_3 \cos\theta \\&\quad + e_1 \sin\theta \cos\phi + e_2 \sin\theta \sin\phi] \\&= e_3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_R) \cos\theta \\&= 2\pi a e_3 \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \\&= \frac{4\pi}{3} \mathbf{a}\end{aligned}$$

但是, 倘若挖掉原点处一个半径为  $\epsilon \rightarrow 0^+$  的球体,  $\nabla\psi$  在剩余空间  $V_\epsilon$  中的体积分却并不与上式一致, 而是为零. 在  $V_\epsilon$  中,

$$\nabla\psi = - \left[ \frac{3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{a}}{R^3} \right]$$

式中  $\mathbf{x} = R\mathbf{e}_R$ ,  $R > 0$ . 因为在所取的坐标系中,  $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_3$ , 我们可以把上式进一步表为:

$$\begin{aligned}\nabla\psi &= -\frac{a}{R^3} (3\cos\theta\mathbf{e}_R - \mathbf{e}_3) \\ &= -\frac{a}{R^3} \left[ (3\cos^2\theta - 1)\mathbf{e}_3 + 3\cos\theta\sin\theta(\cos\phi\mathbf{e}_1 + \sin\phi\mathbf{e}_2) \right]\end{aligned}$$

联合使用定积分公式,

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi = 0$$

以及

$$\int_0^\pi (3\cos^2\theta - 1)\sin\theta d\theta = 0$$

可知：

$$\begin{aligned}\int_{V_\epsilon} d^3x \nabla \Psi &= -a \mathbf{e}_3 \int_\epsilon^\infty \frac{dR}{R} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta \\ &= -2\pi a \ln(R/\epsilon) \Big|_{R \rightarrow \infty} \cdot \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

以上计算表明：梯度  $\nabla \Psi$  在半径为  $\epsilon \rightarrow 0^+$  的球体内的积分值应该为  $4\pi a/3$ 。因为该球体的体积近似为零， $\nabla \Psi$  作为被积函数，它在原点处的值必然是发散的。

## 顿悟：

- ①  $\nabla \Psi$  的表达式中隐藏着正比于  $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$  的发散项：

$$\nabla \left( \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{R^3} \right) = - \left[ \frac{3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{a}}{R^3} \right] + \frac{4\pi}{3} \mathbf{a} \delta^{(3)}(\mathbf{x})$$

进而,

$$\nabla^2 \left( \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{R^3} \right) = -\nabla \cdot \left[ \frac{3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{a}}{R^3} \right] + \frac{4\pi}{3}(\mathbf{a} \cdot \nabla) \delta^{(3)}(\mathbf{x})$$

利用此式, 我们有:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} &= -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x}) - \nabla \cdot \left[ \frac{3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{a}}{R^3} \right] \\ &\quad + \frac{4\pi}{3}(\mathbf{a} \cdot \nabla) \delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned}$$

如此, 数学恒等式

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

的成立意味着存在如下新的数学恒等式:

$$\nabla \cdot \left[ \frac{3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{a}}{R^3} \right] = -\frac{8\pi}{3}(\mathbf{a} \cdot \nabla) \delta^{(3)}(\mathbf{x})$$



我们现在可以使用这个新的数学恒等式研究磁偶极子的磁感应强度分布. 假设计入了  $\boldsymbol{x} = 0$  点之后, 磁偶极子  $\boldsymbol{m}$  在空间激发的磁场修正为:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{R^3} \right] + \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{x})$$

磁高斯定律  $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$  的成立要求:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \left[ \frac{3(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{R^3} \right] + \nabla \cdot \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{x}) \\ &= -\frac{2\mu_0}{3} (\boldsymbol{m} \cdot \nabla) \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) + \nabla \cdot \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{x}) \\ &= \nabla \cdot \left[ \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{x}) - \frac{2\mu_0}{3} \boldsymbol{m} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) \right] \end{aligned}$$

此方程的具有一般解:

$$\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{x}) = \frac{2\mu_0}{3} \boldsymbol{m} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$$

从物理上考虑,

$$B'(x) \Big|_{x \neq 0} = 0$$

故应取积分常矢量  $C = 0$ . 至此求出了磁偶极子  $m$  所激发的磁感应强度分布的完整表达式:

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(m \cdot x)x}{R^5} - \frac{m}{R^3} \right] + \frac{2\mu_0}{3} m \delta^{(3)}(x)$$

### 引伸:

倘若坐标原点  $O$  处存在着一个电偶极矩为  $p$  的电偶极子, 其电荷分布体密度为:

$$\rho(x) = -(p \cdot \nabla) \delta^{(3)}(x)$$

$p$  激发的静电场强度在远场区表为:

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(p \cdot x)x}{R^5} - \frac{p}{R^3} \right], \quad R > 0$$

式中  $x = R e_R$  是场点相对于偶极子占据地点  $O$  的位矢.

对于上述电偶极子激发的静电场而言, 电高斯定律表为:

$$\nabla \cdot E(x) = -\frac{1}{\epsilon_0}(\boldsymbol{p} \cdot \nabla) \delta^{(3)}(x)$$

据此可推知电偶极子电场强度分布的完整表达式应该是<sup>3</sup>:

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{R^3} \right] - \frac{\boldsymbol{p}}{3\epsilon_0} \delta^{(3)}(x)$$

**例:**

- 请检验磁偶极子的磁感应强度分布满足积分形式的磁高斯定律.

**解:**

以磁偶极子  $m$  占据的地点  $O$  为球心构造一个半径为  $R > 0$  的球面  $S$ . 我们现在的任务是计算面积分:

---

<sup>3</sup>本周作业题.

$$\Phi_B = \oint_S \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}$$

因为  $R > 0$ , 在球面  $S$  上我们有:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{m}}{R^3} \right]$$

计及  $\mathrm{d}\mathbf{s} = R^2 \mathbf{e}_R \mathrm{d}\Omega$  与  $\mathbf{x} = R \mathbf{e}_R$ , 并取  $\mathbf{m} = m\mathbf{e}_3$ , 知:

$$\mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi R} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_R) \mathrm{d}\Omega = \frac{\mu_0 m}{2\pi R} \cos \theta \sin \theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

所以,

$$\oint_S \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 m}{R} \int_{-1}^1 \xi \mathrm{d}\xi = 0$$

此处  $\xi = \cos \theta$ . 至此验证了积分形式的磁高斯定律.

例：

- 请计算磁偶极子磁感应强度在全空间的体积分.

解：

以磁偶极子  $m$  占据的地点  $O$  为球心、以无穷小量  $\epsilon$  为半径构造一个球面把空间划分为球内与球外二区域. 在球内区域  $V_1$ ,

$$B(x) = \frac{2}{3}\mu_0 m \delta^{(3)}(x)$$

我们有：

$$\int_{V_1} B(x) d^3x = \frac{2}{3}\mu_0 m$$

在球外区域  $V_2$ ,

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(m \cdot x)x}{R^5} - \frac{m}{R^3} \right]$$

取  $\mathbf{m} = m\mathbf{e}_3$ , 可以把上式重新表为:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} [3 \cos \theta \mathbf{e}_R - \mathbf{e}_3] \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} \left[ \mathbf{e}_3 (3 \cos^2 \theta - 1) + \mathbf{e}_1 \cos \theta \sin \theta \cos \phi + \mathbf{e}_2 \cos \theta \sin \theta \sin \phi \right] \end{aligned}$$

因为,

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0$$

磁感应强度在  $V_2$  中的体积分为:

$$\int_{V_2} \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x = \frac{\mu_0 m \mathbf{e}_3}{4\pi} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dR}{R} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta$$

亦即:

$$\int_{V_2} \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x = \frac{1}{2} \mu_0 m [\ln(R/\epsilon)] \Big|_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0^+} \cdot \int_0^{\pi} (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta$$

上式中对极角积分的因子等于零,

$$\int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 (3\xi^2 - 1) d\xi = \xi^3 \Big|_{-1}^1 - 2 = 0$$

因此我们有:

$$\int_{V_2} \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x = 0$$

综合以上分析, 知磁偶极子  $\mathbf{m}$  激发的磁感应强度在全空间的体积分:

$$\int \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{m}$$

# 静磁场的能量

磁场的总能量表达为：

$$W = \int u \, d^3x \quad \leftrightarrow \quad u = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

上式中  $u$  是磁能密度, 总能量体积分遍及磁场分布的全部区域.  
在静磁现象中,  $B = \nabla \times A$ ,  $\nabla \times B = \mu_0 j$ . 注意到:

$$\begin{aligned} B^2 &= (\nabla \times A) \cdot B \\ &= \epsilon^{ijk} (\partial_j A_k) B_i \\ &= \partial_j (\epsilon^{ijk} A_k B_i) - \epsilon^{ijk} A_k (\partial_j B_i) \\ &= \nabla \cdot (A \times B) + A \cdot (\nabla \times B) \\ &= \nabla \cdot (A \times B) + \mu_0 A \cdot j \end{aligned}$$

静磁场的总能量可以重新表达为：

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \, d^3x = \frac{1}{2\mu_0} \oint_S (A \times B) \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{2} \int A \cdot j \, d^3x$$



假设激发静磁场的稳恒电流分布在空间有限区域,

$$A(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \rightsquigarrow A(\boldsymbol{x}) \Big|_{|\boldsymbol{x}| \rightarrow \infty} \sim |\boldsymbol{x}|^{-2}$$

进而

$$B(\boldsymbol{x}) \Big|_{|\boldsymbol{x}| \rightarrow \infty} \sim |\boldsymbol{x}|^{-3}$$

上述磁场总能量表达式右端第一项的面积分为零<sup>4</sup>. 所以,

$$W = \frac{1}{2} \int_V d^3x \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j}$$

式中的积分区域  $V$  仅仅代表电流的分布区域.

---

<sup>4</sup>这里的分析使用到了静磁学恒等式

$$\int_V d^3x' \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') = 0$$

笔者感谢与鲁东大学刘艳红老师在此问题上的讨论.

# 电流与外磁场之间的相互作用磁能

现在计算某电流分布  $\mathbf{j}$  在给定外磁场中的相互作用能量. 以  $\mathbf{A}_e$  表示外磁场的矢势,  $\mathbf{j}_e$  表示产生此外磁场的电流分布. 以  $\mathbf{A}$  表示电流分布  $\mathbf{j}$  本身所激发磁场的矢势. 如此, 总的电流分布  $(\mathbf{j} + \mathbf{j}_e)$  所激发的总的静磁场能量可写为:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int (\mathbf{j} + \mathbf{j}_e) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{A}_e) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3x + \frac{1}{2} \int \mathbf{j}_e \cdot \mathbf{A}_e d^3x \\ &\quad + \frac{1}{2} \int (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}_e + \mathbf{j}_e \cdot \mathbf{A}) d^3x \end{aligned}$$

所以, 电流  $\mathbf{j}$  与外磁场  $\mathbf{B}_e$  的相互作用能量是:

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}_e + \mathbf{j}_e \cdot \mathbf{A}) d^3x$$

因为,

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(x') d^3x'}{|x - x'|}, \quad A_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_e(x') d^3x'}{|x - x'|}$$

前页所得的相互作用能  $W_{\text{int}}$  表达式中的两项相等. 所以,

$$W_{\text{int}} = \int_V j \cdot A_e d^3x$$

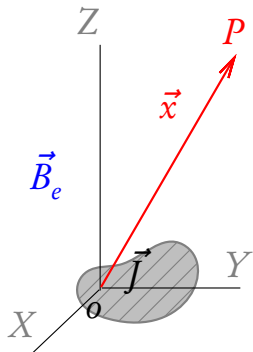
## 小区域内的电流分布与外磁场的相互作用

设外磁场  $\vec{B}_e$  的矢势为  $A_e$ , 给定电流分布  $\vec{j}(\vec{x})$   
与此外磁场的相互作用能量是:

$$W_i = \int_V d^3x \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{A}_e(\vec{x})$$

以电流分布区域中的适当点为原点建立直角坐标系. 若电流分布于小区域  $V$  内,  $V$  的线度远小于外磁场矢势  $A_e$  发生显著变化的线度, 则可以把  $A_e(\vec{x})$  在坐标原点邻域上作泰勒展开,

$$A_e(\vec{x}) = A_e(0) + x^i \partial_i A_e(0) + \dots$$



结合以上两式, 并使用静磁学恒等式:

$$\int_V d^3x j_i(\vec{x}) = 0, \quad \int_V d^3x \left[ x_i j_k(\vec{x}) + x_k j_i(\vec{x}) \right] = 0$$

我们有：

$$\begin{aligned}
 W_i &= \int_V d^3x \left[ j_i A_{(e)}^i(0) + j_i x_k \partial^k A_{(e)}^i(0) + \cdots \right] \\
 &= A_{(e)}^i(0) \int_V d^3x j_i(\mathbf{x}) + [\partial^k A_{(e)}^i(0)] \int_V d^3x j_i(\mathbf{x}) x_k + \cdots \\
 &= \frac{1}{2} [\partial^k A_{(e)}^i(0)] \int_V d^3x \left[ x_k j_i(\mathbf{x}) - x_i j_k(\mathbf{x}) \right] + \cdots \\
 &= \frac{1}{2} [\partial^k A_{(e)}^i(0)] \int_V d^3x \epsilon_{kij} \left[ \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}) \right]^j + \cdots \\
 &= \epsilon_{kij} [\partial^k A_{(e)}^i(0)] \left[ \frac{1}{2} \int_V d^3x \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}) \right]^j + \cdots \\
 &= \epsilon_{kij} [\partial^k A_{(e)}^i(0)] m^j + \cdots \\
 &= m^j [\nabla \times A_e(0)]_j + \cdots \\
 &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(0) + \cdots
 \end{aligned}$$

# 磁偶极子与外磁场的相互作用能量

以上结果表明,磁偶极子与外磁场之间的相互作用能量为:

$$W_i^{(1)} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e$$

这里出现的问题是: 如何理解  $W_i^{(1)}$ ? 换言之,可否将  $W_i^{(1)}$  诠释为磁偶极子与外磁场之间相互作用的有效“势能”?

## 物理小贴士:

$W_i^{(1)}$  当  $\mathbf{m}$  与  $\mathbf{B}_e$  反向时取极小值. 所以,倘若把  $W_i^{(1)}$  解释为磁偶极子与外磁场体系的势能,则意味着磁偶极子受外磁场作用时其磁矩  $\mathbf{m}$  将会倾向于与外磁场反向. 这个结论显然是荒谬的.

所以, 不能将磁偶极子与外磁场之间的相互作用能

$$W_i^{(1)} = m \cdot B_e$$

错误地诠释为磁偶极子与外磁场之间的相互作用势能. 事实上, 由于静磁场施加给电流分布的洛伦兹力

$$F = j d^3x \times B, \quad \rightsquigarrow \nabla \times F \neq 0$$

不是保守力场<sup>5</sup>, 原则上不存在“静磁势能”这个概念.

---

<sup>5</sup>这个论断与  $\nabla \times B = \mu_0 j$  的右端是否为零无关. 因为磁力的受力对象仍然是电荷(虽然是运动电荷), 而不是磁荷.

现在从力和力矩的角度研究电流分布与外磁场之间的相互作用. 回忆洛伦兹力密度公式,  $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ . 所以, 在外磁场  $\mathbf{B}_e$  中给定电流分布  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  将受到如下静磁力:

$$\mathbf{F} = \int_V d^3x \, \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}_e(\mathbf{x})$$

和力矩:

$$\boldsymbol{\tau} = \int_V d^3x \, \mathbf{x} \times [\mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}_e(\mathbf{x})]$$

仍然假设电流分布于小区域  $V$  中, 外磁场在  $V$  内没有明显变化. 在  $V$  中选择适当地点作为原点建立直角坐标系, 使得

$$\mathbf{B}_e(\mathbf{x}) = e_i B_{(e)}^i(\mathbf{x})$$

把  $\mathbf{B}_e(\mathbf{x})$  在原点邻域上做泰勒展开:

$$\mathbf{B}_e(\mathbf{x}) \approx \mathbf{B}_e(0) + x^i \partial_i \mathbf{B}_e(0)$$



代入到静磁力公式中, 得:

$$\begin{aligned}
 F &= \int_V d^3x \, \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \left[ \mathbf{B}_e(0) + x^i \partial_i \mathbf{B}_e(0) + \cdots \right] \\
 &= e_i \epsilon^{ijk} \int_V d^3x \, j_j(\mathbf{x}) \left[ B_k^{(e)}(0) + x^l \partial_l B_k^{(e)}(0) + \cdots \right] \\
 &= e_i \epsilon^{ijk} B_k^{(e)}(0) \left[ \int_V d^3x \, j_j(\mathbf{x}) \right] + e_i \epsilon^{ijk} [\partial^l B_k^{(e)}(0)] \left[ \int_V d^3x \, x_l j_j(\mathbf{x}) \right] + \cdots \\
 &= \frac{1}{2} e_i \epsilon^{ijk} [\partial^l B_k^{(e)}(0)] \int_V d^3x \left[ x_l j_j(\mathbf{x}) - x_j j_l(\mathbf{x}) \right] + \cdots \\
 &= \vec{e}_i \epsilon^{ijk} [\partial^l B_k^{(e)}(0)] \epsilon_{l j n} \left[ \frac{1}{2} \int_V d^3x \, \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}) \right]^n + \cdots \\
 &= e_i (\delta_l^i \delta_n^k - \delta_n^i \delta_l^k) [\partial^l B_k^{(e)}(0)] m^n + \cdots \\
 &= e_i \partial^i [m^k B_k^{(e)}(0)] - e_i m^i \partial^k B_k^{(e)}(0) + \cdots \\
 &= \nabla [\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(0)] - \mathbf{m} [\nabla \cdot \mathbf{B}_e(0)] + \cdots
 \end{aligned}$$

计入磁荷体密度恒为零的电磁学基本假设<sup>6</sup>, 我们有:

$$\nabla \cdot B_e(0) = 0$$

所以, 外磁场  $B_e$  中磁偶极子  $m$  受到如下静磁力作用:

$$F = \nabla [m \cdot B_e(0)]$$

- ① 只有在非均匀的外磁场中, 磁偶极子才受到非零的静磁力.
- ② 对于磁偶极子与外磁场相互作用体系, 可以定义“等效静磁势能”:

$$U = -m \cdot B_e(0)$$

从而把静磁力写为  $U$  的负梯度  $F = -\nabla U$ .

- ③  $U$  的极小值对应于  $m$  与  $B_e$  取向一致, 这和介质磁化的物理图像相符.
- ④  $U = -W_i^{(1)}$ , 它表明  $U$  只是磁偶极子与外磁场相互作用总能量  $W_i^{(1)}$  中的一部分, 不是全部.

---

<sup>6</sup>这是电磁场的规范场属性的基本前提, 目前认知水平下它也是一个实验事实.

进一步讨论电流分布在外磁场中所受到的力矩. 为简单计, 假设外磁场是均匀磁场,  $B_e(\mathbf{x}) \approx B_e(0)$ . 以前述直角坐标系为依托, 我们有:

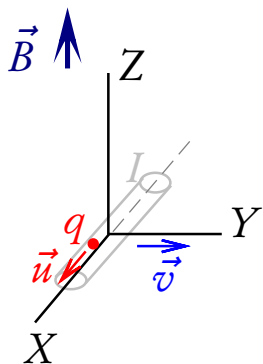
$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau} &= \int_V d^3x \, \mathbf{x} \times [\mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}_e(0)] \\
 &= \mathbf{e}^i \times (\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k) \int_V d^3x \, x_{ij} j_j(\mathbf{x}) B_k^{(e)}(0) \\
 &= (\delta^{ik} \mathbf{e}^j - \delta^{ij} \mathbf{e}^k) B_k^{(e)}(0) \frac{1}{2} \int_V d^3x \, [x_{ij} j_j(\mathbf{x}) - x_{ji} j_i(\mathbf{x})] \\
 &= (\delta^{ik} \mathbf{e}^j - \delta^{ij} \mathbf{e}^k) B_k^{(e)}(0) \epsilon_{ijl} m^l \\
 &= \epsilon_{ijl} \mathbf{e}^j m^l B_{(e)}^i(0)
 \end{aligned}$$

即:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_e(0)$$

## $w_i^{(1)}$ 与 $U$ 之间的联系

让我们再仔细分析一下处于外磁场中的磁偶极子与外磁场的相互作用能  $w_i^{(1)}$  与等效相互作用势能  $U$  之间的联系。



从考虑一段载流导线在外磁场中的运动入手。

导线中某载流子  $q$  参与两种运动. 一个分运动是沿电流方向的漂移, 速度为  $u$ ;

$$Idl \propto qu$$

另一运动是随导线整体沿  $Y$  轴作机械运动, 速度为  $v$ .

外磁场作用于此载流子上的洛伦兹力是:

$$F = q(u + v) \times B$$

外磁场提供的洛伦兹力在整体上对载流子并不做功. 但是:

$$\begin{aligned}0 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{F} = q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot [(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{B}] \\&= q[(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} + \mathbf{v})] \cdot \mathbf{B} \\&= q(\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{B} \\&= \mathbf{u} \cdot (q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{v} \cdot (q\mathbf{u} \times \mathbf{B})\end{aligned}$$

- ❶ 第一项是洛伦兹力在载流子漂移方向做功的功率. 我们假设导线中的电流强度不随时间变化, 如此, 洛伦兹力在载流子漂移方向所作的功率将转化为电源电能的时间增加率:

$$\frac{dW_s}{dt} \propto \mathbf{u} \cdot (q\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- ❷ 第二项是洛伦兹力在载流子随导线整体机械运动方向做功的功率. 显然, 这部分功率若与机械运动的路径无关, 就有可能表现为载流导线与外磁场相互作用势能的时间增加率:

$$\frac{dU}{dt} \propto \mathbf{v} \cdot (q\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

洛伦兹力整体上对载流子不作功意味着：

$$\frac{dW_s}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0$$

解之，知：

$$W_s + U = \text{常数}$$

上式右端的常数意指其不随时间变化.我们假设在初始时刻载流导线与外磁场相距无穷远,彼此并无相互作用. 如此,应取此常数为零:

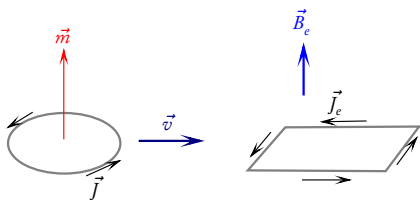
$$W_s + U = 0$$

因此，

对于处在外磁场中运动的载流导线而言，外磁场洛伦兹力对导线中电源所作的电功与其对导线整体运动所作的机械功完全抵消。

这就是此情形下洛伦兹力不作功的真相。

现在考虑磁偶极子与外磁场之间的相互作用能：



- 为方便计, 把磁偶极子设想为一个圆形载流线圈.
- 假设外磁场由另一矩形载流线圈产生.
- 二载流线圈作相向机械运动, 相对运动速度为  $v$ .

于是, 磁偶极子与外磁场之间总的相互作用能量应该是:

$$W_i^{(1)} = W_{\text{dipole}} + W_{\text{coil}} + U$$

- ①  $W_{\text{dipole}}$  是矩形载流线圈磁场的洛伦兹力对磁偶极子线圈中的电源所作的电功.
- ②  $W_{\text{coil}}$  是磁偶极子磁场的洛伦兹力对矩形载流线圈电路中电源所作的电功.
- ③  $U$  是二者因为相向机械运动而具有的相互作用势能.

因为磁场的洛伦兹力在整体上不作功, 我们看到:

- 从矩形载流线圈的视角看:

$$W_{\text{dipole}} + U = 0$$

- 从磁偶极子的视角看:

$$W_{\text{coil}} + U = 0$$

此二式相加, 则有:

$$W_{\text{dipole}} + W_{\text{coil}} + 2U = 0$$

所以,

$$\begin{aligned} W_i^{(1)} &= W_{\text{dipole}} + W_{\text{coil}} + U \\ &= (W_{\text{dipole}} + W_{\text{coil}} + 2U) - U \\ &= -U \end{aligned}$$



即：

$$W_i^{(1)} = -U$$

这正是我们知道的结论。磁偶极子与外磁场的相互作用总能量是  $W_i^{(1)} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e$ ，但反映其在外磁场中因为作机械运动而具有的相互作用势能是  $U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e$ 。二者之差

$$W_i^{(1)} - U = -2U = 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e$$

其实是电源提供的以保持两个载流回路中电流强度均不随时间变化所需的电功<sup>7</sup>。

---

<sup>7</sup>进一步的讨论请参考 Feynman 等人的著作，[THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS](#), Vol2, Chapter15 and Chapter16.

# 磁介质及其宏观描写

磁介质是由原子、分子等微观组分<sup>8</sup>构成的磁性材料：

- 磁介质分子具有、或者有能力具有非零的分子磁偶极矩  $m_i$ .
- 磁介质内部的静磁场分布决定于麦克斯韦方程组：

$$\nabla \cdot B(r) = 0, \quad \nabla \times B(r) = -\mu_0 \sum_i m_i \times \nabla \delta^{(3)}(r)$$

其中  $m_i$  对  $j_i(r)$  的贡献是  $j_i(r) = -m_i \times \nabla \delta^{(3)}(r - r_i)$ .

- 通常我们仅关心磁介质的宏观性质，需要对上述“微观”描写在一个微观大、宏观小的区域内求平均。使用类配分函数  $f_L(r)$ ，我们把磁介质中的与微观物理量  $\Psi(r)$  对应的宏观物理量  $\langle \Psi \rangle(r)$  定义为：

$$\langle \Psi \rangle(r) \equiv \int d^3x' \Psi(r') f_L(r - r')$$

---

<sup>8</sup>以下统称“分子”。

## 磁介质中的宏观电流分布 $\langle j \rangle(r)$ :

从微观角度讲, 磁介质中的电流体密度矢量可表为:

$$j(r) = j_f(r) + \sum_i j_i(r)$$

其中  $j_i(r)$  是身处地点  $r_i$  的第  $i$  个“分子”的电流密度, 它非零值集中在位矢  $r_i$  处尺度为  $d$  的小区域内 ( $d \ll L$ ).  $j_i(r)$  对介质中宏观电流密度的贡献是:

$$\langle j_i \rangle(x) = \int d^3x' j_i(r') f_L(r - r')$$

将类配分函数  $f_L(r - r')$  在  $r' = r_i$  处做泰勒展开,

$$\begin{aligned} f_L(r - r') &= f_L[(r - r_i) - (r' - r_i)] \\ &= f_L(r - r_i) - (r' - r_i) \cdot \nabla_r f_L(r - r') \Big|_{r'=r_i} + \mathcal{O}[(r' - r_i)^2] \\ &\approx f_L(r - r_i) - (r' - r_i) \cdot \nabla_r f_L(r - r_i) \end{aligned}$$

我们有：

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{j}_i \rangle (\mathbf{x}) &= \int d^3 x' \mathbf{j}_i(\mathbf{r}') f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\
 &= \left[ \int d^3 x' \mathbf{j}_i(\mathbf{r}') \right] f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\
 &\quad - \int d^3 x' \mathbf{j}_i(\mathbf{r}') [(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)] \\
 &= - \int d^3 x' \mathbf{j}_i(\mathbf{r}') [\mathbf{r}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)] \\
 &= -e^b \left[ \int d^3 x' j_{ib}(\mathbf{r}') x'_a \right] \frac{\partial f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{\partial x_a} \\
 &= -e^b \left[ \frac{1}{2} \int d^3 x' (x'_a j_{ib}(\mathbf{r}') - x'_b j_{ia}(\mathbf{r}')) \right] \frac{\partial f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{\partial x_a} \\
 &= -e^b \epsilon_{abc} m_i^c \frac{\partial f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{\partial x_a} \\
 &= -\mathbf{m}_i \times \nabla_{\mathbf{r}} f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)
 \end{aligned}$$

上式中  $\mathbf{m}_i$  是磁介质中第  $i$  个分子的磁偶极矩矢量:

$$\mathbf{m}_i = \frac{1}{2} \int d^3x' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}_i(\mathbf{r}')$$

所以, 磁介质中的宏观电流密度矢量为:

$$\langle \mathbf{j} \rangle(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) + \sum_i \langle \mathbf{j}_i \rangle(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) - \sum_i \mathbf{m}_i \times \nabla_{\mathbf{r}} f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

使用数学恒等式

$$f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \int d^3x' \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

又可把上式改写为:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j} \rangle(\mathbf{r}) &= \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) - \int d^3x' \left[ \sum_i \mathbf{m}_i \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \right] \times \nabla_{\mathbf{r}} f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) - \int d^3x' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}} f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

式中

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \sum_i m_i \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

诠释为磁介质内部总磁偶极矩的体密度.

宏观电流密度矢量  $\langle \mathbf{j} \rangle(\mathbf{r})$  表达式中的第二项可重新表为:

$$\begin{aligned} - \int d^3x' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla_r f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \nabla \times \left[ \int d^3x' \mathbf{M}(\mathbf{r}') f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \\ &= \nabla \times \langle \mathbf{M} \rangle(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

它诠释为磁介质内部宏观的磁化电流密度矢量:

$$\langle \mathbf{j}_M \rangle(\mathbf{r}) \equiv \nabla \times \langle \mathbf{M} \rangle(\mathbf{r})$$

式中出现的的宏观物理量

$$\langle \mathbf{M} \rangle(\mathbf{r}) \equiv \int d^3x' \mathbf{M}(\mathbf{r}') f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

称为磁介质的磁化强度矢量.

综合起来, 我们有:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{j}_f + \langle \mathbf{j}_M \rangle = \mathbf{j}_f + \nabla \times \langle \mathbf{M} \rangle$$

### 磁介质内部宏观的静磁学方程:

在磁介质内部定义宏观的磁感应强度分布:

$$\langle \mathbf{B} \rangle(\mathbf{r}) \equiv \int d^3x' \mathbf{B}(\mathbf{r}') f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

则因求宏观平均与对空间坐标求微商对易, 磁介质内部的静磁学方程组可表为:

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle = 0, \quad \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle = \mu_0 \langle \mathbf{j} \rangle = \mu_0 \mathbf{j}_f + \mu_0 \nabla \times \langle \mathbf{M} \rangle$$

很明显, 上式使用起来并不方便.

通常在磁介质中定义静磁场的**磁场强度** $\langle H \rangle$ :

$$\langle H \rangle = \frac{\langle B \rangle}{\mu_0} - \langle M \rangle$$

如此, 宏观静磁学基本方程组可以重新表达为:

$$\nabla \cdot \langle B \rangle = 0, \quad \nabla \times \langle H \rangle = j_f$$

- 求解宏观静磁学方程需要事先指定介质中的  $j_f$  和  $\langle M \rangle$ . 对于  $j_f$  这的确是可能的.
- 遗憾的是, 介质的磁化强度  $\langle M \rangle$  并不能事先确定,  $\langle M \rangle$  强烈地依赖于介质中的总磁感应强度分布  $\langle B \rangle$ .
- 倘若  $\langle B \rangle$  的量值不是特别的大, 介质的磁化强度  $\langle M \rangle$  会线性地依赖于介质中的总磁场强度  $\langle H \rangle$ :

$$\langle M_i \rangle(r) = \sum_k \chi_{(m)i}^k(r) \langle H_k \rangle(r)$$

以无量纲系数  $\chi_{(m)i}^k(r)$  作为矩阵元构成的矩阵称为磁介质的**磁化率张量**.



- 倘若磁介质是均匀的线性介质, 则  $\chi_{(m)i}^k(\mathbf{r}) = \chi_{(m)i}^k$  不依赖于求极化率的地点.
- 倘若磁介质不但是均匀的, 而且是各向同性的, 则极化率张量仅有一个独立分量  $\chi_{(m)i}^k(\mathbf{r}) = \chi_m \delta_i^k$ ,

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \chi_m \langle \mathbf{H} \rangle$$

$\chi_m$  称为介质的磁化率. 此情形下,

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \mu \langle \mathbf{H} \rangle \quad \leftrightarrow \quad \mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

- 对于均匀且各向同性的线性磁介质而言,

$$\mathbf{j}_f = \nabla \times \langle \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{\mu} \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \langle \mathbf{A} \rangle)$$

因此, 在库仑规范中 ( $\nabla \cdot \langle \mathbf{A} \rangle = 0$ ), 磁介质内部的宏观静磁学方程可表为:

$$\boxed{\nabla^2 \langle \mathbf{A} \rangle = -\mu \mathbf{j}_f} \quad \leftrightarrow \quad \nabla \times \langle \mathbf{A} \rangle = \langle \mathbf{B} \rangle$$

## 磁介质分界面上的静磁边界条件:

设空间中存在着两种磁介质, 磁导率分别为  $\mu_1$  和  $\mu_2$ .  $P$  为介质分界面上的一点, 在  $P$  点附近局部范围内介质的分界面可视为  $z=0$  的  $xy$  平面,  $e_3$  为其单位法矢量, 从介质 1 指向介质 2. 我们可以把  $P$  点处的宏观磁感应强度分布表达为:

$$\langle B \rangle = \langle B_1 \rangle \theta(-z) + \langle B_2 \rangle \theta(z)$$

式中  $\theta(s)$  是 Heaviside 阶梯函数. 同理,  $P$  点处的宏观磁场强度分布与传导电流密度矢量可分别表达为:

$$\langle H \rangle = \langle H_1 \rangle \theta(-z) + \langle H_2 \rangle \theta(z), \quad j_f = j_f^{(1)} \theta(-z) + j_f^{(2)} \theta(z) + \alpha_f \delta(z)$$

这里  $\alpha_f$  表示分界面上的传导电流线密度.

介质分界面附近矢势分布也可类似地表达为:

$$\langle A \rangle = \langle A_1 \rangle \theta(-z) + \langle A_2 \rangle \theta(z)$$

根据宏观的磁高斯定律,

$$\begin{aligned}0 &= \nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle \\&= [\nabla \cdot \langle \mathbf{B}_1 \rangle] \theta(-z) + [\nabla \cdot \langle \mathbf{B}_2 \rangle] \theta(z) + \nabla \theta(-z) \cdot \langle \mathbf{B}_1 \rangle \\&\quad + \nabla \theta(z) \cdot \langle \mathbf{B}_2 \rangle \\&= \delta(z) \mathbf{e}_3 \cdot (\langle \mathbf{B}_2 \rangle - \langle \mathbf{B}_1 \rangle)\end{aligned}$$

我们看到:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\langle \mathbf{B}_2 \rangle - \langle \mathbf{B}_1 \rangle) \Big|_S = 0$$

这是静磁边值条件之一, 式中  $\mathbf{n}_{12} = \mathbf{e}_3$  表示介质分界面上的单位法矢量. 此边界条件断言: 磁感应强度的法分量在介质分界面上是连续的.

根据磁介质中宏观的安培环路定律,

$$\begin{aligned} j_f &= \nabla \times \langle H \rangle \\ &= [\nabla \times \langle H_1 \rangle] \theta(-z) + [\nabla \times \langle H_2 \rangle] \theta(z) + \nabla \theta(-z) \times \langle H_1 \rangle \\ &\quad + \nabla \theta(z) \times \langle H_2 \rangle \\ &= j_f^{(1)} \theta(-z) + j_f^{(2)} \theta(z) + \delta(z) e_3 \times (\langle H_2 \rangle - \langle H_1 \rangle) \end{aligned}$$

上式左端可表为:

$$j_f = j_f^{(1)} \theta(-z) + j_f^{(2)} \theta(z) + \alpha_f \delta(z)$$

比较以上二式, 我们看到:

$$n_{12} \times (\langle H_2 \rangle - \langle H_1 \rangle) \Big|_S = \alpha_f$$

这是另一个基本的静磁边值条件, 它表明磁场强度的切分量在介质分界面上有可能会跃变.

现在考虑矢势在介质分界面上服从的边界条件. 我们已经把磁介质分界面上  $P$  点处的宏观矢势表达为:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \langle \mathbf{A}_1 \rangle \theta(-z) + \langle \mathbf{A}_2 \rangle \theta(z)$$

- 库仑规范条件意味着:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot \langle \mathbf{A} \rangle \\ &= [\nabla \cdot \langle \mathbf{A}_1 \rangle] \theta(-z) + [\nabla \cdot \langle \mathbf{A}_2 \rangle] \theta(z) + \nabla \theta(-z) \cdot \langle \mathbf{A}_1 \rangle \\ &\quad + \nabla \theta(z) \cdot \langle \mathbf{A}_2 \rangle \\ &= \delta(z) \mathbf{e}_3 \cdot (\langle \mathbf{A}_2 \rangle - \langle \mathbf{A}_1 \rangle) \end{aligned}$$

由此可推论:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\langle \mathbf{A}_2 \rangle - \langle \mathbf{A}_1 \rangle) \Big|_S = 0$$

- 宏观磁感应强度的定义式意味着：

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{B} \rangle &= \nabla \times \langle \mathbf{A} \rangle \\&= [\nabla \times \langle \mathbf{A}_1 \rangle] \theta(-z) + [\nabla \times \langle \mathbf{A}_2 \rangle] \theta(z) + \nabla \theta(-z) \times \langle \mathbf{A}_1 \rangle \\&\quad + \nabla \theta(z) \times \langle \mathbf{A}_2 \rangle \\&= \langle \mathbf{B}_1 \rangle \theta(-z) + \langle \mathbf{B}_2 \rangle \theta(z) + \delta(z) \mathbf{e}_3 \times (\langle \mathbf{A}_2 \rangle - \langle \mathbf{A}_1 \rangle)\end{aligned}$$

上式左端可表为：

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{B}_1 \rangle \theta(-z) + \langle \mathbf{B}_2 \rangle \theta(z)$$

比较以上二式，我们看到：

$$\mathbf{n}_{12} \times (\langle \mathbf{A}_2 \rangle - \langle \mathbf{A}_1 \rangle) \Big|_S = 0$$

综合以上二结论可知：矢势的所有分量在两种介质分界面上均是连续的，

$$\langle \mathbf{A}_1 \rangle \Big|_S = \langle \mathbf{A}_2 \rangle \Big|_S$$

此边界条件的核心内容来自于磁高斯定律, 因此它实际上等价于分界面上磁感应强度法分量的连续性.

介质分界面上磁场强度切分量的跃变条件只能以直接的方式转化为矢势边界条件. 对于线性、各向同性的均匀磁介质而言,

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{\mu} \langle \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{\mu} \nabla \times \langle \mathbf{A} \rangle$$

所以, 静磁边界条件

$$\mathbf{n}_{12} \times (\langle \mathbf{H}_2 \rangle - \langle \mathbf{H}_1 \rangle) \Big|_S = \boldsymbol{\alpha}_f$$

在线性、各向同性磁介质情形下转换为:

$$\mathbf{n}_{12} \times \left( \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \langle \mathbf{A}_2 \rangle - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \langle \mathbf{A}_1 \rangle \right) \Big|_S = \boldsymbol{\alpha}_f$$

## 小结：

库仑规范下求解静磁场分布的基本方法是求矢势微分方程

$$\nabla^2 \langle A \rangle = -\mu j_f$$

满足边界条件

$$\langle A_1 \rangle \Big|_S = \langle A_2 \rangle \Big|_S$$

$$n_{12} \times \left( \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \langle A_2 \rangle - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \langle A_1 \rangle \right) \Big|_S = \alpha_f$$

的解.



# 磁场轴对称分布情形下矢势的定解问题

若电流密度矢量沿  $z$  轴分布, 矢势满足的微分方程在库仑规范中退化为:

$$\nabla^2 A = -\mu j_f e_3$$

- ① 这个方程的解的一种可能的形式是:

$$A = A(x, y, z) e_3$$

- ② 库仑规范条件  $\nabla \cdot A = 0$  进一步要求:

$$0 = \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial z} \quad \rightsquigarrow \quad A = A(x, y)$$

由此求出的磁感应强度将与  $z$  坐标无关, 即磁场分布本质上是一个二维问题:

$$A = A(x, y) e_3$$

设所涉及的物理问题宜采取柱坐标系, 二介质的分界面是半径为  $\rho = R$  的圆柱面. 这样,

$$\mathbf{A} = A(\rho, \phi) \mathbf{e}_3$$

$A(\rho, \phi)$  满足的微分方程是:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} = -\mu j_f$$

若  $j_f = 0$ , 则此方程可以通过分离变量法求解. 通解的具体形式是:

$$\begin{aligned} A(\rho, \phi) = & (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) \\ & + \sum_{m>0} \left( a_m \rho^m + \frac{b_m}{\rho^m} \right) [c_m \sin(m\phi) + d_m \cos(m\phi)] \end{aligned}$$

通解中的积分常数应由矢势满足的边界条件确定.

## 矢势边界条件:

- ① 自然边界条件是  $\rho \rightarrow 0$  和  $\rho \rightarrow \infty$  两种情形下矢势的有限性<sup>9</sup>.
- ②  $\rho = R$  边界上矢势的连续性可表为:

$$A_{\text{in}}(\rho, \phi)|_{\rho=R} = A_{\text{out}}(\rho, \phi)|_{\rho=R}$$

- ③ 最后分析  $\rho = R$  边界上的边界条件

$$\mathbf{e}_\rho \times \left[ \frac{1}{\mu_{\text{out}}} \nabla \times \mathbf{A}_{\text{out}} - \frac{1}{\mu_{\text{in}}} \nabla \times \mathbf{A}_{\text{in}} \right]_{\rho=R} = \alpha_f \mathbf{e}_3$$

---

<sup>9</sup> 此处默认电流是分布于空间有限区域. 倘若电流分布可以延伸到无穷远, 则  $A_{\text{out}}(\rho, \phi)|_{\rho \rightarrow \infty} \sim \ln \rho$ .

注意到：

$$\begin{aligned}\nabla \times A &= \nabla \times [A(\rho, \phi) e_3] \\&= \nabla A(\rho, \phi) \times e_3 \\&= \left[ e_\rho \partial_\rho A + \frac{e_\phi}{\rho} \partial_\phi A \right] \times e_3 \\&= -e_\phi \partial_\rho A + \frac{e_\rho}{\rho} \partial_\phi A\end{aligned}$$

我们有：

$$e_\rho \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) = -e_3 \frac{1}{\mu} \partial_\rho A$$

所以，前述边界条件具体化为：

$$\frac{1}{\mu_{\text{out}}} \frac{\partial A_{\text{out}}(\rho, \phi)}{\partial \rho} \bigg|_{\rho=R} - \frac{1}{\mu_{\text{in}}} \frac{\partial A_{\text{in}}(\rho, \phi)}{\partial \rho} \bigg|_{\rho=R} = -\alpha_f$$