

经典电动力学

Chapter 3. 静电学

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

May 15, 2023

① 静电学基础

- 静电唯一性定理
- 格林函数法
- 几个典型的格林函数
- 静电势分布的多极展开

② 静电相互作用能与静电力

- 电荷分布与外电场相互作用能的多级展开
- 电荷分布与外电场的相互作用力

③ 电介质

- 电介质的宏观描写
- 电介质分界面上的静电边界条件

静电基本方程

我们已经在相对性原理与规范原理的基础上建立起描写电磁现象的基本方程组, 即麦克斯韦方程组:

$$\frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu, \quad \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$$

和洛伦兹力公式:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = q F_{\mu\nu} U^\nu$$

- 这些方程可以用 \mathbb{E}_3 中的矢量场等价地表示为:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

与

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \frac{dW}{dt} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

- 接下来是事情自然是在各种典型情形下求解这组方程,用这些解描写各种电磁现象,深化我们对于电磁相互作用的理解.

最简单的情形是所有场量均不随时间改变的静态:¹

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

此时麦克斯韦方程组中的电场与磁场解耦,分别形成静电学:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

与静磁学:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

本章讨论静电学.

¹静态情形下所有场量均不随时间变化. 除了场强的时间导数为零之外,还有:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0.$$

$$\frac{E^i}{c} = F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0$$

在静电场情形下²:

$$E^i = -c \partial^i A^0 = -\partial^i \phi \quad \leftrightarrow \quad \boxed{A^0(r) \equiv \frac{\phi(r)}{c}, \quad A(r) = A}$$

$$E(r) = -\nabla \phi(r)$$

- $E(r) = -\nabla \phi(r)$ 与毕安琪恒等式 $\nabla \times E = 0$ 相容. 事实上, 我们常常使用前者取代后者.
- 规范变换 $A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$ 退化为:

$$\phi(x) \rightsquigarrow \phi'(x) = \phi(x) + C$$

即 $\theta(t, x) = Ct + \alpha_i x^i$ (α_i 为任意常数). 常数 C 的不确定性称为静电势零点选择的任意性.

²此处默认 A 为 \mathbb{E}_3 中的常矢量.

把 $E(r) = -\nabla\phi(r)$ 与电高斯定律相结合, 我们有:

$$\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = \nabla \cdot E(r) = -\nabla \cdot \nabla\phi(r)$$

即

$$\nabla^2\phi(r) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

这个泊松方程就是静电学的基本方程.

2: 哪些因素可以完全确定静电场的分布?

静电唯一性定理:

对于给定的电荷分布 $\rho(r) \in V$, 静电势的分布 $\phi(r)$ 唯一地取决于 ϕ 在区域边界面 $\partial V = S$ 上所满足的 Dirichlet 边界条件 ($\phi|_S$ 给定) 或者 Neumann 边界条件 ($\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$ 给定).

使用反证法证明. 假设在给定边界 S 上电势 $\phi|_S$ 或者电势的法向导数 $\partial\phi/\partial n|_S$ 的前提下, 区域 V 内的电势仍不唯一. 即假设静电泊松方程存在着 $\phi_1(r)$ 和 $\phi_2(r)$ 两个解, 使得:

$$\nabla^2\phi_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla^2\phi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

以及 $\phi_1|_S = \phi_2|_S$, 或者

$$\left.\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\right|_S = \left.\frac{\partial\phi_2}{\partial n}\right|_S$$

- 构造新函数:

$$u(r) = \phi_1(r) - \phi_2(r)$$

显然, $u(r)$ 服从拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 u = 0$$

且满足的边界条件 $u|_S = 0$, 或者 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$.

使用第一格林公式,

$$\int_V d^3x (\Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) = \oint_S ds \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

且取 $\Phi = \Psi = u$, 我们有:

$$\int_V d^3x (u \nabla^2 u + \nabla u \cdot \nabla u) = \oint_S ds u \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

亦即:

$$\int_V d^3x (\nabla u)^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \nabla u = 0 \quad \rightsquigarrow \quad u = C (\text{常数})$$

所以,

$$\phi_1(r) = \phi_2(r) + C$$

但静电势的附加常数对于静电场场强的分布没有影响. 这就证明了静电唯一性定理.

导体表面的特殊性：

若区域 V 的界面 S 是导体表面，则因为静电平衡状态下导体表面的等势面特点， $\phi_1|_S$ 和 $\phi_2|_S$ 均为常数， $u|_S = \phi_1|_S - \phi_2|_S$ 自然亦为常数。所以， u 满足的第一格林公式可进一步写为：

$$\begin{aligned}\int_V d^3x (\nabla u)^2 &= \oint_S ds u \frac{\partial u}{\partial n} = u|_S \left(\oint_S ds \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \oint_S ds \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right) \\ &= -u|_S \left(\oint_S ds \cdot E_1 - \oint_S ds \cdot E_2 \right)\end{aligned}$$

显然，为了保证 $\nabla u = 0$ ，除了指定界面 S 上的电势之外，也可以指定导体表面 S 上携带的电荷总量 Q

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_S ds \cdot E_1 = \oint_S ds \cdot E_2$$

这一特点是普通几何分界面不具备的。施加静电边界条件时，无须指定导体表面上的电荷面密度 $\sigma = -\epsilon_0 \partial \phi / \partial n|_S$ ，只需指定 S 上携带的总电荷量或者 S 的静电势。

第二格林公式

虽然唯一性定理指明了静电泊松方程 $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ 的定解条件, 但它本身并未给出求解泊松方程边值问题的具体思路. 不过, 唯一性定理的数学基础(第一格林公式)

$$\int_V d^3x (\Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) = \oint_S ds \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

的一个衍生公式(第二格林公式), 提供了求解泊松方程的一种最重要的方法: [格林函数法](#).

在第一格林公式中交换两个标量场的地位, 可得:

$$\int_V d^3x (\Psi \nabla^2 \Phi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi) = \oint_S ds \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

二式相减, 有:

$$\boxed{\int_V d^3x \Phi \nabla^2 \Psi = \int_V d^3x \Psi \nabla^2 \Phi + \oint_S ds \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)}$$

此式就是第二格林公式.

格林函数:

- 位置矢量为 \mathbf{x}' 处的单位点电荷所激发的静电势分布 $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 称为静电场的格林函数.
- 静电格林函数服从泊松方程:

$$\nabla^2 \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

- 考虑包含源点 \mathbf{x}' 在内的空间区域 V , 其边界面为 S . 倘若

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Big|_S = 0$$

称 $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 为第一类边值问题的格林函数. 倘若

$$\frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n} \Big|_S = -\frac{1}{\epsilon_0 S}$$

称 $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 为第二类边值问题的格林函数.

根据第二格林公式,

$$\int_V d^3x \Phi \nabla^2 \Psi = \int_V d^3x \Psi \nabla^2 \Phi + \oint_S ds \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)$$

区域 V 中静电势的第一类边值问题

$$\nabla^2 \phi(r) = -\rho(r)/\epsilon_0, \quad \phi(r)|_S = \varphi(r)$$

的解是:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \int_V d^3x' \phi(r') \delta^{(3)}(r - r') \\ &= -\epsilon_0 \int_V d^3x' \phi(r') \nabla'^2 \mathcal{G}(r', r) \\ &= -\epsilon_0 \int_V d^3x' \mathcal{G}(r', r) \nabla'^2 \phi(r') - \epsilon_0 \oint_S ds' \left(\phi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'} - \mathcal{G} \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right) \\ &= \int_V d^3x' \mathcal{G}(r', r) \rho(r') - \epsilon_0 \oint_S ds' \varphi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'} \end{aligned}$$

静电势的第二类边值问题

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\epsilon_0, \quad \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_S = \zeta(\mathbf{r})$$

的解是：

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \int_V d^3x' \phi(\mathbf{r}') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= -\epsilon_0 \int_V d^3x' \phi(\mathbf{r}') \nabla'^2 \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\ &= -\epsilon_0 \int_V d^3x' \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') - \epsilon_0 \oint_S ds' \left(\phi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'} - \mathcal{G} \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right) \\ &= \int_V d^3x' \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') + \frac{1}{S} \oint_S ds' \phi(\mathbf{r}') + \epsilon_0 \oint_S ds' \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \zeta(\mathbf{r}') \\ &= \langle \phi \rangle_S + \int_V d^3x' \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') + \epsilon_0 \oint_S ds' \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \zeta(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

典型区域的格林函数

- ① 很显然, 格林函数法的核心在于使用格林函数. 格林函数从何而来呢?

无界空间的静电格林函数:

位于地点 r' 的单位点电荷在无界空间激发的静电势为

$$\mathcal{G}(r, r') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

按照数学恒等式 $\nabla^2 |r - r'|^{-1} = -4\pi\delta^{(3)}(r - r')$, 我们有:

$$\nabla^2 \mathcal{G}(r, r') = -\delta^{(3)}(r - r')/\epsilon_0$$

且:

$$\mathcal{G}(r, r') \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0$$

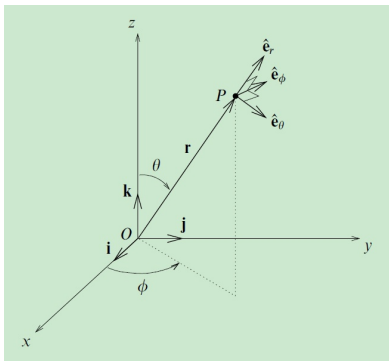
故此 $\mathcal{G}(r, r')$ 正是无界空间第一类静电边值问题的格林函数.

球坐标系中 ∇^2 的表达式:

$\nabla^2\phi$ 在笛卡尔直角坐标系中的表达式非常简单,

$$\nabla^2\phi = \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2}$$

但是在静电学中, 倘若考虑到静电场分布区域的几何形状, 上式给出的 $\nabla^2\phi$ 使用起来往往很笨拙. 我们常需要在其他曲线坐标系中写出 $\nabla^2\phi$ 的表达式.



以球坐标系为例. ϕ 的梯度表达为:

$$\nabla\phi = e_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{e_\theta}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{e_\phi}{r\sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\phi}$$

现在的问题是:

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = ?$$

现在介绍球坐标系里矢量分析的独孤剑法³。三个球坐标的梯度分别是：

$$\nabla r = \mathbf{e}_r, \quad \nabla \theta = \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}, \quad \nabla \varphi = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta}$$

因为梯度场无旋，我们有恒等式：

$$\nabla \times \mathbf{e}_r = 0, \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \right) = 0, \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} \right) = 0$$

使用矢量分析恒等式

$$\nabla \times (fg) = \nabla f \times g + f \nabla \times g$$

我们有

$$\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} = \mathbf{e}_r \times \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} = \nabla r \times \nabla \theta = \nabla \times (r \nabla \theta) - r \nabla \times \nabla \theta$$

即：

$$\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} = \nabla \times (r \nabla \theta)$$

³It is only a joke.

同理有：

$$\frac{e_r}{r^2 \sin \theta} = \nabla \times (\theta \nabla \varphi), \quad \frac{e_\theta}{r \sin \theta} = \nabla \times (\varphi \nabla r)$$

因为旋度场无散, 我们有恒等式:

$$\nabla \cdot \left(\frac{e_r}{r^2 \sin \theta} \right) = 0, \quad \nabla \cdot \left(\frac{e_\theta}{r \sin \theta} \right) = 0, \quad \nabla \cdot \left(\frac{e_\varphi}{r} \right) = 0$$

再辅之以

$$\nabla \cdot (fg) = \nabla f \cdot g + f \nabla \cdot g$$

$$\nabla(\phi\psi) = \phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi$$

这五个恒等式就构成了球坐标系中进行矢量分析的绝杀技.

现在我们使用这些恒等式在球坐标系中计算 $\nabla^2 \phi$:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \phi &= \nabla \cdot \left(e_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{e_\theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{e_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \\
&= \nabla \cdot \left[\frac{e_r}{r^2 \sin \theta} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{e_\theta}{r \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{e_\varphi}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \right] \\
&= \left(\frac{e_r}{r^2 \sin \theta} \right) \cdot \nabla \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \left(\frac{e_\theta}{r \sin \theta} \right) \cdot \nabla \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\
&\quad + \left(\frac{e_\varphi}{r} \right) \cdot \nabla \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \\
&= \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

亦即：

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \hat{\mathcal{D}}^2 \phi$$

式中出现的

$$\hat{\mathcal{D}}^2 \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

是定义域在单位球面上的复平方可积函数构成的函数空间 \mathcal{H} 中的线性自伴算符，其本征值方程是：

$$\hat{\mathcal{D}}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

- 算符 $\hat{\mathcal{D}}^2$ 的本征值为 $-l(l+1)$ ， l 称为角量子数，其可能的取值为非负整数 $l = 0, 1, 2, \dots$ 。
- $\hat{\mathcal{D}}^2$ 属于本征值 $-l(l+1)$ 的本征函数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 称为球谐函数：

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad -l \leq m \leq l$$

- $P_l^m(\cos \theta)$ 称为缔合勒让德多项式:

$$P_l^m(x) \equiv \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}(x^2-1)^l}{dx^{l+m}}$$

$m=0$ 情形下的 $P_l^0(x)$ 简记作 $P_l(x)$ 并称为勒让德多项式:

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l(x^2-1)^l}{dx^l}$$

几个低阶的勒让德多项式的显示表达式为:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

- 球谐函数具有对称性 $Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \varphi)$. 几个低阶球谐函数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 的显示表达式是:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}$$

- 球谐函数满足正交归一条件：

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

和完备性公式：

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta', \varphi') = \frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')$$

其全体形成了复函数空间 \mathcal{H} 的一组完备基. 单位球上的任意函数可以表达为球谐函数的线性组合：

$$\mathcal{A}(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

叠加系数为：

$$a_{lm} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \mathcal{A}(\theta, \varphi)$$

球壳空间的静电格林函数:

首先须把格林函数满足的微分方程 $\nabla^2 \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/\epsilon_0$ 在球坐标系中表出. 由于

$$\begin{aligned} 1 &= \int_V d^3x \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 在球坐标系中应表为:

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \left[\frac{1}{\sin\theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi') \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{lm} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

所以, 可以把格林函数 $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 的表达式在球坐标系中试设为:

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{lm} g_{lm}(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

注意到

$$\nabla^2(g_{lm}Y_{lm}) = 2\nabla g_{lm} \cdot \nabla Y_{lm} + Y_{lm}\nabla^2 g_{lm} + g_{lm}\nabla^2 Y_{lm}$$

其中：

$$\nabla g_{lm} \cdot \nabla Y_{lm} = \nabla g_{lm}(r, r') \cdot \nabla Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0$$

$$\nabla^2 g_{lm} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dg_{lm}(r, r')}{dr} \right]$$

$$\nabla^2 Y_{lm} = \frac{1}{r^2} \hat{\mathcal{D}}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

可知 $g_{lm}(r, r')$ 服从微分方程：

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dg_{lm}(r, r')}{dr} \right] - l(l+1)g_{lm}(r, r') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(r - r')$$

这个方程表明 $g_{lm}(r, r')$ 实际上与参数 m 无关. 此后我们将其记为 $g_l(r, r')$.

- 倘若 $r \neq r'$, $g_l(r, r')$ 满足的方程退化为:

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dg_l(r, r')}{dr} \right] - l(l+1)g_l(r, r') = 0$$

设

$$g_l(r, r') = \frac{h_l(r, r')}{r}$$

上式化为:

$$\frac{d^2 h_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} h_l = 0$$

取试探解 $h_l = r^s$, 知 $s(s-1) - l(l+1) = 0$. 参数 s 有两个可能取值, 即 $s = -l$ 和 $s = l+1$. $h_l(r, r')$ 的通解为:

$$h_l(r, r') = \frac{a_l(r')}{r^l} + b_l(r')r^{l+1} \quad (r' \neq r)$$

换言之, $r' \neq r$ 情形下 $g_l(r, r')$ 的一般结构是:

$$g_l(r, r') = \frac{a_l(r')}{r^{l+1}} + b_l(r')r^l$$

- 求 $g_l(r, r')$ 所满足的微分方法在区间

$$r' - 0^+ \leq r \leq r' + 0^+$$

的积分, 并假设 $g_l(r, r')$ 在 $r = r'$ 处取值有限, 不难看出 $\frac{dg_l}{dr}$ 在 $r = r'$ 处发生了跃变:

$$\left[\frac{dg_l}{dr} \right]_{r \rightarrow r' + 0^+} - \left[\frac{dg_l}{dr} \right]_{r \rightarrow r' - 0^+} = -\frac{1}{\epsilon_0 r'^2}$$

- 假设静电场存在于半径分别为 $r = a$ 和 $r = b$ 的两个同心球面界定的球壳之间 ($a < b$). 对于第一类静电边值问题而言, 格林函数在区域的边界面上为零:

$$\mathcal{G}(r, r')|_{r=a} = \mathcal{G}(r, r')|_{r=b} = 0$$

因为当 $r \neq r'$ 时 $g_l(r, r')$ 的通解是

$$g_l(r, r') = \frac{a_l(r')}{r^{l+1}} + b_l(r')r^l$$

倘若 $r < r'$,

$$g_l(r, r') = b_l(r') \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right)$$

倘若 $r > r'$,

$$g_l(r, r') = a_l(r') \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right)$$

综合以上两种情形, 我们有:

$$g_l(r, r') = c_l(a, b) \left(r'_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r'_{<}^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r'_{>}^{l+1}} - \frac{r'_{>}^l}{b^{2l+1}} \right)$$

式中 $r_{<}(r_{>})$ 是 r 与 r' 中的较小者(较大者), 常系数 $c_l(a, b)$ 待定.

现在使用 $\frac{dg_l}{dr}$ 的跃变条件确定 $c_l(a, b)$. 倘若 $r = r' + 0^+$,

$$g_l(r, r') = c_l(a, b) \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right)$$

由此知:

$$\left. \frac{dg_l(r, r')}{dr} \right|_{r \rightarrow r' + 0^+} = -\frac{c_l(a, b)}{r'^2} \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[(l+1) + l \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right]$$

倘若 $r = r' - 0^+$,

$$g_l(r, r') = c_l(a, b) \left(r' - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right)$$

由此知:

$$\left. \frac{dg_l(r, r')}{dr} \right|_{r \rightarrow r' - 0^+} = \frac{c_l(a, b)}{r'^2} \left[l + (l+1) \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[1 - \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right]$$

帶入到 $\frac{dg_l}{dr}$ 的跃变方程中, 可得:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\epsilon_0 r'^2} &= \left[\frac{dg_l}{dr} \right]_{r \rightarrow r' + 0^+} - \left[\frac{dg_l}{dr} \right]_{r \rightarrow r' - 0^+} \\ &= -\frac{c_l(a, b)}{r'^2} \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[(l+1) + l \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] \\ &\quad - \frac{c_l(a, b)}{r'^2} \left[l + (l+1) \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[1 - \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] \end{aligned}$$

化简知：

$$c_l(a, b) = \frac{1}{(2l+1)\epsilon_0 \left[1 - (a/b)^{2l+1} \right]}$$

所以，球壳空间中第一类静电边值问题的格林函数是：

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)\epsilon_0 \left[1 - (a/b)^{2l+1} \right]} \left(r'_{<} - \frac{a^{2l+1}}{r'_{<}^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r'_{>}^{l+1}} - \frac{r'_{>}}{b^{2l+1}} \right)$$

- 球内空间 ($a = 0$) 第一类静电格林函数：

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)\epsilon_0} \left(\frac{r'_{<}}{r'_{>}^{l+1}} - \frac{r'_{>} r'_{<}}{b^{2l+1}} \right)$$

- 球外空间 ($b \rightarrow \infty$) 第一类静电格林函数：

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)\epsilon_0} \left(\frac{r'_{<}}{r'_{>}^{l+1}} - \frac{a^{2l+1}}{r'_{>}^{l+1} r'_{<}^{l+1}} \right)$$

- 无界空间 ($a = 0, b \rightarrow \infty$) 第一类静电边值问题的格林函数:

$$\mathcal{G}(r, r') = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}$$

如前所述,

$$\mathcal{G}(r, r') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

所以:

$$\frac{1}{|r - r'|} = 4\pi \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}$$

此式是数学物理中最著名的级数展开之一.

静电势分布的多极展开

电荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ 在无界空间激发的静电势分布是：

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3x' \rho(\mathbf{r}') \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

上式中的积分是全空间.

倘若电荷分布仅仅存在于空间中一个小区域 Ω 中⁴, 则上面的静电势分布可以等价地表为：

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d^3x' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

进一步假设我们只关心远场区 ($r \equiv |\mathbf{r}| \gg R$) 的电势分布,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= [r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}']^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{3(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2}{2r^3} \quad \leftarrow \text{p} \quad \mathbf{e}_r \equiv \frac{\mathbf{r}}{r} \end{aligned}$$

⁴即假设仅仅当 $r' \equiv |\mathbf{r}'| \lesssim R$ 时才有 $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$.

如此, 远场区的静电势分布可以近似表达为:

$$\phi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int_{\Omega} d^3x' \rho(\mathbf{r}') + \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \cdot \int_{\Omega} d^3x' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \frac{1}{2r^3} \int_{\Omega} d^3x' \left[3(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2 \right] \rho(\mathbf{r}') \right\}$$

在笛卡尔直角坐标系中,

$$3(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2 = \frac{3}{r^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2 = \frac{3}{r^2} x^i x^j x'_i x'_j - r'^2 = \frac{x^i x^j}{r^2} (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2)$$

所以:

$$\phi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{ij} Q_{ij} x^i x^j \right]$$

式中,

$$Q = \int_{\Omega} d^3x' \rho(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{p} = \int_{\Omega} d^3x' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}'), \quad Q_{ij} = \int_{\Omega} d^3x' (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}')$$

分别称为电荷分布的总电荷、电偶极矩矢量与电四极矩张量。

使用无界空间静电第一类边值问题格林函数的另一表达式

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)} \frac{r'^l_{<}}{r'^{l+1}_{>}}$$

我们可以把无界空间中静电势的分布重新表达为：

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \int d^3x' \rho(\mathbf{r}') \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)} \int d^3x' \rho(\mathbf{r}') \frac{r'^l_{<}}{r'^{l+1}_{>}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi')\end{aligned}$$

倘若电荷仅分布于线度为 R 的小区域 Ω^5 ，则在 Ω 内 $r_{<} = r'$ ， $r_{>} = r$ 。所以，

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)} \left[\frac{1}{r^{l+1}} \int_{\Omega} d^3x' \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi)\end{aligned}$$

⁵我们暂把 Ω 看做是一个半径为 R 的球体。

式中

$$q_{lm} \equiv \int_{\Omega} d^3x' \rho(r') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

称为电荷分布的球多极矩. 容易看到:

$$q_{00} = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}, \quad q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_3, \quad q_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_1 \pm ip_2).$$

q_{2m} 本质上就是电四极矩张量诸分量的线性组合. 静电势球多极展开的优点在于它简洁地给出了高阶项的贡献.

例:

- ① 接地导体内部存在着一个半径为 R 的球形空腔, 空腔中心放置了一个偶极矩为 \boldsymbol{p} 的电偶极子. 求空腔内部的静电势分布.

解：

本问题显然属于第一类静电边值问题. 我们打算使用格林函数法解之：

$$\phi(r) = \int_V d^3x' \mathcal{G}(r', r) \rho(r') - \epsilon_0 \oint_S ds' \varphi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}$$

式中，

- $\mathcal{G}(r, r')$ 是球内空间的格林函数，

$$\mathcal{G}(r, r') = \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)\epsilon_0} \left(\frac{r'_{<}}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r'_{>}}{R^{2l+1}} \right)$$

- 因为导体接地, $\varphi|_S = 0$. 所以,

$$\epsilon_0 \oint_S ds' \varphi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'} = 0$$

- $\rho(r')$ 是电偶极子的电荷体密度.

电偶极矩 \mathbf{p} 可在笛卡尔直角坐标系中写为 $\mathbf{p} = p^i \mathbf{e}_i = \delta_j^i \mathbf{e}_i p^j$. 因为电偶极子置于球心 (坐标原点), 我们有:

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \mathbf{p} \int d^3x' \delta^{(3)}(\mathbf{r}') = \mathbf{e}_i p^j \int d^3x' \delta_j^i \delta^{(3)}(\mathbf{r}') \\&= \mathbf{e}_i p^j \int d^3x' \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} \delta^{(3)}(\mathbf{r}') \\&= \mathbf{e}_i p^j \int d^3x' \frac{\partial}{\partial x'^j} [x'^i \delta^{(3)}(\mathbf{r}')] - \mathbf{e}_i p^j \int d^3x' x'^i \frac{\partial \delta^{(3)}(\mathbf{r}')}{\partial x'^j} \\&= - \int d^3x' \mathbf{r}' [\mathbf{p} \cdot \nabla' \delta^{(3)}(\mathbf{r}')] \end{aligned}$$

比较此式与电偶极矩的定义式

$$\mathbf{p} = \int_{\Omega} d^3x' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}')$$

可知电偶极子的电荷体密度是:

$$\rho(\mathbf{r}') = -\mathbf{p} \cdot \nabla' \delta^{(3)}(\mathbf{r}')$$

现在求空腔内部的静电势分布：

$$\begin{aligned}
 \phi(r) &= \int_{\Omega} d^3x' \mathcal{G}(r', r) \rho(r') \\
 &= - \int_{\Omega} d^3x' \mathcal{G}(r', r) \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\nabla}' \delta^{(3)}(r') \\
 &= - \int_{\Omega} d^3x' \boldsymbol{\nabla}' \cdot [\mathcal{G}(r', r) \boldsymbol{p} \delta^{(3)}(r')] + \int_{\Omega} d^3x' \boldsymbol{\nabla}' \cdot [\mathcal{G}(r', r) \boldsymbol{p}] \delta^{(3)}(r') \\
 &= \boldsymbol{\nabla}' \cdot [\mathcal{G}(r', r) \boldsymbol{p}] \Big|_{r'=0} \\
 &= \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\nabla}' \mathcal{G}(r', r) \Big|_{r'=0}
 \end{aligned}$$

上式涉及的梯度运算完成后须取 $r' = 0$. 因此, 可在格林函数中取 $r_{<} = r'^6$:

$$\mathcal{G}(r, r') = \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)\epsilon_0} r'^l \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r^l}{R^{2l+1}} \right)$$

⁶亦即取 $r_{>} = r$.

回忆

$$\nabla' = e_{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{e_{\theta}'}{r'} \frac{\partial}{\partial \theta'} + \frac{e_{\varphi}'}{r' \sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \varphi'}$$

以及低阶球谐函数的表达式

$$Y_{00}(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_{10}(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta'$$

$$Y_{1,\pm 1}(\theta', \varphi') = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta' e^{\pm i\varphi}$$

我们看到格林函数中 $l=0$ 与 $l \geq 2$ 的项都不会对空腔内的静电势产生影响：

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right) \mathbf{p} \cdot \nabla' \left[r' \sum_{m=-1}^1 Y_{1m}^*(\theta', \varphi') Y_{1m}(\theta, \varphi) \right] \Big|_{r'=0} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right) \mathbf{p} \cdot \left(e_{r'} + e_{\theta}' \frac{\partial}{\partial \theta'} + \frac{e_{\varphi}'}{\sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \varphi'} \right) \\ &\quad [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')] \Big|_{\theta'=\varphi'=0} \end{aligned}$$

化简得：

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right) \mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{e}_{r'} \cos \theta + \mathbf{e}_{\theta'} \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_{\varphi'} \sin \theta \sin \varphi \right) \Big|_{\theta'=\varphi'=0}$$

笛卡尔直角坐标系与球坐标系基矢的变换关系是：

$$\mathbf{e}_{r'} = \mathbf{e}_3 \cos \theta' + \mathbf{e}_1 \sin \theta' \cos \varphi' + \mathbf{e}_2 \sin \theta' \sin \varphi'$$

$$\mathbf{e}_{\theta'} = -\mathbf{e}_3 \sin \theta' + \mathbf{e}_1 \cos \theta' \cos \varphi' + \mathbf{e}_2 \cos \theta' \sin \varphi'$$

$$\mathbf{e}_{\varphi'} = -\mathbf{e}_1 \sin \varphi' + \mathbf{e}_2 \cos \varphi'$$

因此有：

$$\mathbf{e}_{r'} \Big|_{\theta'=\varphi'=0} = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_{\theta'} \Big|_{\theta'=\varphi'=0} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_{\varphi'} \Big|_{\theta'=\varphi'=0} = \mathbf{e}_2$$

导体空腔内的静电势分布最终表达为：

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right) \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$$

静电场的能量

电磁场的能量体密度为：

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)$$

对于静电场, $B = 0$, 其能量体密度退化为：

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

- ❶ 静电场不能脱离电荷分布独立存在, $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$. 此外, 它是无旋的矢量场

$$\nabla \times E = 0 \quad \rightsquigarrow \quad E = -\nabla \phi \quad \rightsquigarrow \quad \nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0$$

静电场的总能量可表为：

$$W = \int d^3x u = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\int_{r \leq R} d^3x E^2 \right] \Big|_{R \rightarrow \infty}$$

因为

$$E^2 = \nabla\phi \cdot \nabla\phi = \nabla \cdot (\phi \nabla\phi) - \phi \nabla^2\phi = \nabla \cdot (\phi \nabla\phi) + \frac{\rho}{\epsilon_0}\phi$$

且

$$\left[\int_{r \leq R} d^3x \nabla \cdot (\phi \nabla\phi) \right] \Big|_{R \rightarrow \infty} = \left[\oint_{r=R} ds \cdot (\phi \nabla\phi) \right] \Big|_{R \rightarrow \infty} = 0$$

我们可以把静电场的总能量重新表达为：

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \rho\phi$$

或者等价地，

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^3x \rho\phi$$

式中 Ω 是电荷分布 $\rho(r)$ 占据的空间区域.

现在假设空间中的电荷分布为：

$$\rho(r) = \rho_1(r) + \rho_2(r)$$

其中 $\rho_i(r)$ 仅在区域 Ω_i 中不为零. 鉴于电动力学是一个线性理论, 静电势服从的泊松方程是线性微分方程, 空间中的静电势分布可表为：

$$\phi(r) = \phi_1(r) + \phi_2(r)$$

这里 $\phi_i(r)$ 是电荷分布 $\rho_i(r)$ 激发的静电势, $\nabla^2 \phi_i = -\rho_i/\epsilon_0$. 空间中的总静电能是：

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int d^3x (\rho_1 + \rho_2)(\phi_1 + \phi_2) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \rho_1 \phi_1 + \frac{1}{2} \int d^3x \rho_2 \phi_2 + \boxed{\frac{1}{2} \int d^3x (\rho_1 \phi_2 + \rho_2 \phi_1)} \end{aligned}$$

最后一项显然在物理上应诠释为两个电荷分布之间的静电相互作用能：

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d^3x (\rho_1 \phi_2 + \rho_2 \phi_1)$$

静电相互作用能

静电相互作用能表达式中的两项实际上完全相等。这是因为

$$\begin{aligned}\int d^3x \rho_1 \phi_2 &= \epsilon_0 \int d^3x (\nabla \cdot \mathbf{E}_1) \phi_2 \\&= \epsilon_0 \int d^3x \nabla \cdot (\phi_2 \mathbf{E}_1) - \epsilon_0 \int d^3x \nabla \phi_2 \cdot \mathbf{E}_1 \\&= \left[\epsilon_0 \oint_{r=R} d\mathbf{s} \cdot \phi_2 \mathbf{E}_1 \right] \Big|_{R \rightarrow \infty} + \epsilon_0 \int d^3x \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \\&= \epsilon_0 \int d^3x \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1\end{aligned}$$

最后一步的结果关于指标 1 与 2 的交换对称，

$$\rightsquigarrow \int d^3x \rho_2 \phi_1 = \epsilon_0 \int d^3x \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1$$

所以，两个电荷分布之间的静电相互作用能可以重新表达为：

$$W_{\text{int}} = \epsilon_0 \int d^3x \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$$

或者,

$$W_{\text{int}} = \int d^3x \rho_1 \phi_2 = \int d^3x \rho_2 \phi_1$$

最后这个表达式还可以等价地写为:

$$W_{\text{int}} = \int_{\Omega_1} d^3x \rho_1 \phi_2 = \int_{\Omega_2} d^3x \rho_2 \phi_1$$

电荷分布与外电场的相互作用能:

假设把占据了空间区域 Ω 的电荷分布 $\rho(r)$ 置于外静电场 E_{ext} 中,

$$E_{\text{ext}} = -\nabla \phi_{\text{ext}}, \quad \nabla^2 \phi_{\text{ext}}(r) = 0, \quad \forall r \in \Omega$$

外电场的静电势在 Ω 内变化缓慢,

$$\phi_{\text{ext}}(r) \approx \phi_{\text{ext}}(0) + r \cdot [\nabla \phi_{\text{ext}}(r)] \Big|_{r \rightarrow 0} + \frac{1}{2} \sum_{ij} x^i x^j \left[\frac{\partial^2 \phi_{\text{ext}}(r)}{\partial x^i \partial x^j} \right] \Big|_{r \rightarrow 0} + \dots$$

或者,

$$\begin{aligned}\phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r}) \approx & \phi_{\text{ext}}(0) + \boldsymbol{r} \cdot [\nabla \phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})] \Big|_{\boldsymbol{r} \rightarrow 0} \\ & + \frac{1}{6} \sum_{ij} \left(3x^i x^j - \delta^{ij} r^2 \right) \left[\frac{\partial^2 \phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})}{\partial x^i \partial x^j} \right] \Big|_{\boldsymbol{r} \rightarrow 0} + \dots\end{aligned}$$

将此式代回到相互作用静电能的表达式, 知:

$$\begin{aligned}W_{\text{int}} &= \int_{\Omega} d^3x \, \rho(\boldsymbol{r}) \phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r}) \\ &= \int_{\Omega} d^3x \, \rho(\boldsymbol{r}) \left\{ \phi_{\text{ext}}(0) + \boldsymbol{r} \cdot [\nabla \phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})] \Big|_{\boldsymbol{r} \rightarrow 0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \sum_{ij} \left(3x^i x^j - \delta^{ij} r^2 \right) \left[\frac{\partial^2 \phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})}{\partial x^i \partial x^j} \right] \Big|_{\boldsymbol{r} \rightarrow 0} + \dots \right\} \\ &\approx Q\phi_{\text{ext}}(0) + \boldsymbol{p} \cdot [\nabla \phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})] \Big|_{\boldsymbol{r} \rightarrow 0} + \frac{1}{6} \sum_{ij} Q^{ij} \left[\frac{\partial^2 \phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})}{\partial x^i \partial x^j} \right] \Big|_{\boldsymbol{r} \rightarrow 0}\end{aligned}$$

或者：

$$W_{\text{int}} \approx Q\phi_{\text{ext}}(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} Q^{ij} \left[\frac{\partial E_i^{\text{ext}}}{\partial x^j} \right] \Big|_{r \rightarrow 0}$$

电荷分布与外电场的相互作用力：

电荷分布 ρ 在外静电场 $\mathbf{E}_{\text{ext}} = -\nabla\phi_{\text{ext}}$ 中受到的静电力为：

$$\mathbf{F} = \int d^3x \mathbf{f} = \int_{\Omega} d^3x \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

式中的 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 是位矢为 \mathbf{r} 的地点 P 处的总电场强度：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\text{self}}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$$

- $\mathbf{E}_{\text{self}}(\mathbf{r})$ 是电荷分布 ρ 自身在 P 点激发的静电场强度：

$$\mathbf{E}_{\text{self}}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_{\text{self}}(\mathbf{r}) = -\nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d^3x' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

因为

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

我们有：

$$\mathbf{E}_{\text{self}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d^3x' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

电荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ 作用于自身的总静电力为⁷：

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{self}} &= \int_{\Omega} d^3x \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{\text{self}}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Omega} d^3x d^3x' \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0 \end{aligned}$$

● $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ 是外电场在 P 点激发的静电场强度：

$$\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + \sum_i x^i \left[\frac{\partial \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{\partial x^i} \right] \bigg|_{\mathbf{r} \rightarrow 0} + \frac{1}{2} \sum_{ij} x^i x^j \left[\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{\partial x^i \partial x^j} \right] \bigg|_{\mathbf{r} \rightarrow 0}$$

⁷我们约定这里的电荷分布不包括点电荷组。

外电场的电势满足拉普拉斯方程,

$$\nabla^2 \phi_{\text{ext}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \nabla^2 E_{\text{ext}} = 0 \quad \Leftarrow \quad E_{\text{ext}} = -\nabla \phi_{\text{ext}}$$

所以, 外电场施加给电荷分布 $\rho(r)$ 的总静电力为:

$$\begin{aligned} F_{\text{ext}} &= \int_{\Omega} d^3x \rho(r) E_{\text{ext}}(r) \\ &\approx QE_{\text{ext}}(0) + \boldsymbol{p} \cdot \nabla E_{\text{ext}}(r) \Big|_{r \rightarrow 0} + \frac{1}{6} \sum_{ij} Q^{ij} \left[\frac{\partial^2 E_{\text{ext}}(r)}{\partial x^i \partial x^j} \right] \Big|_{r \rightarrow 0} \end{aligned}$$

很显然, 静电力属于保守力:

$$F_{\text{ext}} = -\nabla W_{\text{int}}$$

- 多极矩存在时, 外电场对电荷分布也会施加力矩的作用:

$$\boldsymbol{\tau} = \int d^3x \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} = \int_{\Omega} d^3x \boldsymbol{r} \times [\rho(r) \boldsymbol{E}_{\text{ext}}(r)] \approx \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}_{\text{ext}}(0)$$

- 点电荷激发的静电场总能量是发散的：

$$W = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0} \int d^3x \frac{q^2}{r^4} \rightsquigarrow \infty$$

或者，设点电荷 q 处于位矢为 \mathbf{r}' 的地点， $\rho(\mathbf{r}) = q\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ，其在空间激发如下静电势分布

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

q 的静电场总能量为：

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int d^3x \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}'|} \propto \frac{1}{0} \end{aligned}$$

这个计算表明，经典电磁理论中的点电荷、点电荷组模型并不总能提供数学上有意义的对电荷分布的描写。

- 不过, 点电荷的概念在研究相互作用方面很胜任. 设空间中存在着两个点电荷 q_1 与 q_2 , 它们占据地点的位置矢量分别为 r_1 和 r_2 . 如此,

$$\rho_i(r) = q_i \delta^{(3)}(r - r_i) \quad (i = 1, 2)$$

q_1 在空间激发的静电势分布为:

$$\phi_1(r) = \int d^3x' \frac{\rho_1(r')}{4\pi\epsilon_0|r-r'|} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0|r-r_1|}$$

q_2 与 q_1 之间的静电相互作用能与力分别为:

$$W_{12} = \int d^3x \rho_2(r) \phi_1(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0|r_1 - r_2|}$$

与

$$F_{2 \rightarrow 1} = -\nabla_{r_1} W_{12} = \frac{q_1 q_2 (r_1 - r_2)}{4\pi\epsilon_0|r_1 - r_2|^3}$$

最后一式正是预期的库仑定律, 但这里它没有以电动力学课程出发点的面目出现.

电介质及其宏观描写

电介质是由原子、分子等微观组分⁸构成的导电性极差的绝缘材料：

- 电介质分子具有、或者有能力具有非零的分子电偶极矩 p_i .
- 电介质内部的静电势决定于泊松方程：

$$\nabla^2 \phi(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_i \rho_i(r)$$

其中 p_i 对 $\rho_i(r)$ 的贡献是 $\rho_i(r) = -p \cdot \nabla \delta^{(3)}(r - r_i)$.

- 通常我们仅关心电介质的宏观性质，需要对上述“微观”描写在一个微观大、宏观小的区域内求平均。请留意 3 种不同的尺度： $d \sim$ 分子尺度, $L \sim$ 求平均值的尺度, $R \sim$ 电介质尺度。微观大、宏观小的确切涵义是：

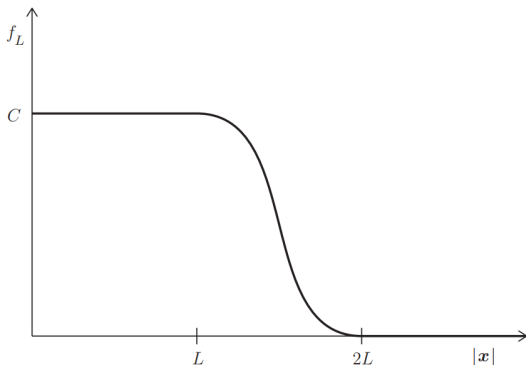
$$d \ll L \ll R$$

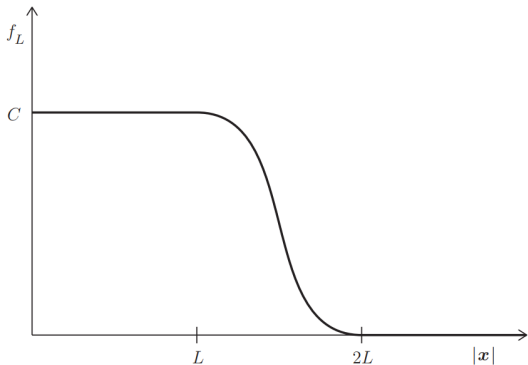
不过，此平均值强烈地依赖于物理量 $\Psi(r)$ 在 $B_L(r)$ 球界面上的取值 $\Psi(r)|_{|r|=L}$ ，从而强烈地依赖于参数 L 的选择。这是明显的缺点。

⁸以下统称“分子”。

借鉴统计力学中定义宏观量的方法, 我们可以在电介质内部引入类配分函数 $f_L(\mathbf{r})$:

- $f_L(\mathbf{r})$ 是一个光滑的、正定的、球对称函数.
- $f_L(\mathbf{r})$ 无量纲.
- 倘若 $0 \leq |\mathbf{r}| \leq L$, $f_L(\mathbf{r}) = C > 0$.
- 倘若 $|\mathbf{r}| \geq 2L$, $f_L(\mathbf{r}) = 0$.
- 倘若 $L < |\mathbf{r}| < 2L$, $f_L(\mathbf{r})$ 单调地插入在 0 和 C 之间.
- $\int d^3x f_L(\mathbf{r}) = 1$.





使用类配分函数 $f_L(r)$, 我们把电介质中的与微观物理量 $\Psi(r)$ 对应的**宏观物理量**定义为:

$$\langle \Psi \rangle (r) \equiv \int d^3x' \Psi(r') f_L(r - r')$$

如此定义宏观量的一个优点是求平均运算与对空间坐标微商运算对易：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle \Psi \rangle}{\partial x^i}(r) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \int d^3x' \Psi(r') f_L(r - r') \\
 &= \int d^3x' \Psi(r') \frac{\partial}{\partial x^i} f_L(r - r') \\
 &= - \int d^3x' \Psi(r') \frac{\partial}{\partial x'^i} f_L(r - r') \\
 &= - \int d^3x' \frac{\partial}{\partial x'^i} [\Psi(r') f_L(r - r')] + \int d^3x' \frac{\partial \Psi(r')}{\partial x'^i} f_L(r - r') \\
 &= \int d^3x' \frac{\partial \Psi(r')}{\partial x'^i} f_L(r - r') \\
 &= \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right\rangle(r)
 \end{aligned}$$

求宏观平均值 $\langle \rangle$ 与求微商 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 这两种运算的次序无关性(即所谓对易性)为我们研究电介质的宏观性质提供了极大的便利。

电介质中的宏观电荷分布 $\langle \rho \rangle(r)$:

从微观角度讲, 电介质中的电荷体密度可表为:

$$\rho(r) = \sum_i \rho_i(r)$$

其中 $\rho_i(r)$ 是身处地点 r_i 的第 i 个“分子”的电荷体密度, 它的非零值集中在位矢 r_i 处尺度为 d 的小区域内 ($d \ll L$). $\rho_i(r)$ 对电介质中宏观电荷体密度的贡献是:

$$\langle \rho_i \rangle(x) = \int d^3x' \rho_i(r') f_L(r - r')$$

将类配分函数 $f_L(r - r')$ 在 $r' = r_i$ 处做泰勒展开,

$$\begin{aligned} f_L(r - r') &= f_L[(r - r_i) - (r' - r_i)] \\ &= f_L(r - r_i) - (r' - r_i) \cdot \nabla_r f_L(r - r') \Big|_{r'=r_i} + \mathcal{O}[(r' - r_i)^2] \\ &\approx f_L(r - r_i) - (r' - r_i) \cdot \nabla_r f_L(r - r_i) \end{aligned}$$

我们有：

$$\begin{aligned}\langle \rho_i \rangle (\mathbf{x}) &= \int d^3x' \rho_i(\mathbf{r}') f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &\approx \left[\int d^3x' \rho_i(\mathbf{r}') \right] f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ &\quad - \left[\int d^3x' \rho_i(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \right] \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ &\approx q_i f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \mathbf{p}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\end{aligned}$$

此处 q_i 与 \mathbf{p}_i 分别是电介质中第 i 个分子的总电荷量和电偶极矩矢量，

$$q_i = \int d^3x' \rho_i(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{p}_i = \int d^3x' \rho_i(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)$$

所以，电介质中的宏观电荷体密度是：

$$\langle \rho \rangle (\mathbf{r}) = \sum_i \langle \rho_i \rangle (\mathbf{x}) \approx \sum_i [q_i f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \mathbf{p}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)]$$

使用数学恒等式

$$f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \int d^3x' \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

又可把上式改写为：

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle(\mathbf{r}) &= \int d^3x' \left[\sum_i q_i \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \mathbf{p}_i \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \right] f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \int d^3x' [\rho_f(\mathbf{r}') - \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}] f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

式中

$$\rho_f(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{p}_i \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

分别诠释为电介质内部自由电荷⁹体密度与总电偶极矩的体密度。

⁹“自由电荷”这个术语有误导嫌疑，因为这些电荷并不能在电介质内部自由移动。

宏观电荷体密度 $\langle \rho \rangle(r)$ 表达式中的第一项是：

$$\int d^3x' \rho_f(r') f_L(r - r') = \langle \rho_f \rangle(r)$$

它诠释为电介质内部宏观的自由电荷体密度. 第二项是：

$$\begin{aligned} - \int d^3x' P(r') \cdot \nabla_r f_L(r - r') &= -\nabla \cdot \left[\int d^3x' P(r') f_L(r - r') \right] \\ &= -\nabla \cdot \langle P \rangle(r) \end{aligned}$$

它诠释为电介质内部宏观的极化电荷体密度：

$$\langle \rho_P \rangle(r) \equiv -\nabla \cdot \langle P \rangle(r)$$

此处出现的的宏观物理量

$$\langle P \rangle(r) \equiv \int d^3x' P(r') f_L(r - r')$$

称为电介质的极化强度矢量.

综合起来, 我们有:

$$\langle \rho \rangle = \langle \rho_f \rangle + \langle \rho_P \rangle = \langle \rho_f \rangle - \nabla \cdot \langle P \rangle$$

电介质内部宏观的静电学方程:

在电介质内部定义宏观的静电势分布:

$$\langle \phi \rangle(r) \equiv \int d^3x' \phi(r') f_L(r - r')$$

则 $\langle \phi \rangle$ 服从如下泊松方程:

$$\nabla^2 \langle \phi \rangle = -\frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0} = -\frac{\langle \rho_f \rangle}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \langle P \rangle$$

这就是宏观的静电学基本方程. 很明显, 上式使用起来并不方便.

根据 $\langle \mathbf{E} \rangle = -\nabla \langle \phi \rangle$ 定义电介质内部的宏观电场强度, 我们有:

$$\nabla \times \langle \mathbf{E} \rangle = 0, \quad \nabla \cdot \langle \mathbf{E} \rangle = \frac{\langle \rho_f \rangle}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \langle \mathbf{P} \rangle$$

通常定义电介质的电位移矢量 $\langle \mathbf{D} \rangle$:

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \epsilon_0 \langle \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{P} \rangle$$

如此, 描写电介质宏观电磁性质的静电学基本方程可以重新表达为:

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{D} \rangle = \langle \rho_f \rangle, \quad \nabla \times \langle \mathbf{E} \rangle = 0$$

- 求解宏观静电学方程需要事先指定介质中的 $\langle \rho_f \rangle$ 和 $\langle \mathbf{P} \rangle$. 这对于 $\langle \rho_f \rangle$ 的确是可能的. 我们通常认为电介质在整体上是电中性的, 除非通过外部因素把“自由电荷”安插进电介质从而使得 $\langle \rho_f \rangle \neq 0$.
- 遗憾的是, 介质的极化强度 $\langle \mathbf{P} \rangle$ 并不能事先确定, $\langle \mathbf{P} \rangle$ 强烈地依赖于介质中的总电场强度 $\langle \mathbf{E} \rangle$.

- 倘若 $\langle E \rangle$ 的量值不是特别的大, 介质的极化强度 $\langle P \rangle$ 会线性地依赖于介质中的总电场强度 $\langle E \rangle$:

$$\langle P_i \rangle(r) = \epsilon_0 \sum_k \chi_i^k(r) \langle E_k \rangle(r)$$

以系数 $\chi_i^k(r)$ 作为矩阵元构成的矩阵称为电介质的**极化率张量**.

- 倘若电介质是均匀的线性介质, 则 $\chi_i^k(r) = \chi_i^k$ 不依赖于求极化率的地点.
- 倘若电介质不但是均匀的, 而且是各向同性的, 则极化率张量仅有一个独立分量 $\chi_i^k(r) = \chi \delta_i^k$,

$$\langle P \rangle = \epsilon_0 \chi \langle E \rangle$$

χ 称为电介质的极化率. 此情形下,

$$\langle D \rangle = \epsilon \langle E \rangle \quad \leftrightarrow \quad \epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$$

寻常电介质均有 $\chi > 0$. 所以通常有 $\epsilon > \epsilon_0$.

- 对于均匀且各向同性的线性电介质而言,

$$\langle \rho_f \rangle = \nabla \cdot \langle D \rangle = \epsilon \nabla \cdot \langle E \rangle = -\epsilon \nabla^2 \langle \phi \rangle$$

换言之, 电介质内部的宏观静电学方程可表为:

$$\nabla^2 \langle \phi \rangle = -\langle \rho_f \rangle / \epsilon$$

电介质分界面上的静电边界条件:

设空间中存在着两种电介质, 介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 . P 为介质分界面上的一点, 在 P 点附近局部范围内介质的分界面可视为 $z=0$ 的 xy 平面, \mathbf{e}_3 为其单位法矢量, 从介质 1 指向介质 2. 我们可以把 P 点处的宏观电场强度分布表达为:

$$\langle E \rangle = \langle E_1 \rangle \theta(-z) + \langle E_2 \rangle \theta(z)$$

式中 $\theta(s)$ 是 Heaviside 阶梯函数.

同理, P 点处的宏观电位移分布与自由电荷体密度可分别表达为:

$$\langle \boldsymbol{D} \rangle = \langle \boldsymbol{D}_1 \rangle \theta(-z) + \langle \boldsymbol{D}_2 \rangle \theta(z), \quad \langle \rho_f \rangle = \langle \rho_{f1} \rangle \theta(-z) + \langle \rho_{f2} \rangle \theta(z) + \sigma_f \delta(z)$$

这里 σ_f 表示分界面上的自由电荷面密度.

根据宏观的电高斯定律,

$$\begin{aligned} \langle \rho_f \rangle &= \nabla \cdot \langle \boldsymbol{D} \rangle \\ &= [\nabla \cdot \langle \boldsymbol{D}_1 \rangle] \theta(-z) + [\nabla \cdot \langle \boldsymbol{D}_2 \rangle] \theta(z) + \nabla \theta(-z) \cdot \langle \boldsymbol{D}_1 \rangle \\ &\quad + \nabla \theta(z) \cdot \langle \boldsymbol{D}_2 \rangle \\ &= \langle \rho_{f1} \rangle \theta(-z) + \langle \rho_{f2} \rangle \theta(z) + \delta(z) \boldsymbol{e}_3 \cdot (\langle \boldsymbol{D}_2 \rangle - \langle \boldsymbol{D}_1 \rangle) \end{aligned}$$

比较此式与之前列出的 $\langle \rho_f \rangle$ 表达式, 我们看到:

$$\boldsymbol{n}_{12} \cdot (\langle \boldsymbol{D}_2 \rangle - \langle \boldsymbol{D}_1 \rangle) \Big|_S = \sigma_f$$

这是静电边值条件之一, 式中 $\boldsymbol{n}_{12} = \boldsymbol{e}_3$ 表示介质分界面上的单位法矢量.

根据电介质中宏观的毕安恒等式，

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \times \langle E \rangle \\ &= [\nabla \times \langle E_1 \rangle] \theta(-z) + [\nabla \times \langle E_2 \rangle] \theta(z) + \nabla \theta(-z) \times \langle E_1 \rangle \\ &\quad + \nabla \theta(z) \times \langle E_2 \rangle \\ &= \delta(z) \mathbf{e}_3 \times (\langle E_2 \rangle - \langle E_1 \rangle) \end{aligned}$$

我们看到：

$$\mathbf{n}_{12} \times (\langle E_2 \rangle - \langle E_1 \rangle) \Big|_S = 0$$

这是另一个基本的静电边值条件，它表明电场强度的切分量在介质分界面上是连续的。

❶ 也可以把电介质分界面上 P 点处的宏观静电势分布表达为：

$$\langle \phi \rangle = \langle \phi_1 \rangle \theta(-z) + \langle \phi_2 \rangle \theta(z)$$

由此可推论：

$$\langle E \rangle = \langle E_1 \rangle \theta(-z) + \langle E_2 \rangle \theta(z) + \mathbf{e}_3 \delta(z) (\langle \phi_1 \rangle - \langle \phi_2 \rangle)$$

理论的自洽性要求静电势在分界面上连续： $\langle \phi_1 \rangle \Big|_S = \langle \phi_2 \rangle \Big|_S$ 。