

经典电动力学

若干选题

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院

hyang@ustc.edu.cn

June 21, 2023

目录

- 1 若干选题
 - 洛伦兹力公式的不自洽性
 - 洛伦兹-狄拉克力公式

至此,我们这门课的主要内容完成了. 在狭义相对论和规范原理的指导下,我们重塑了经典电动力学的理论基础:

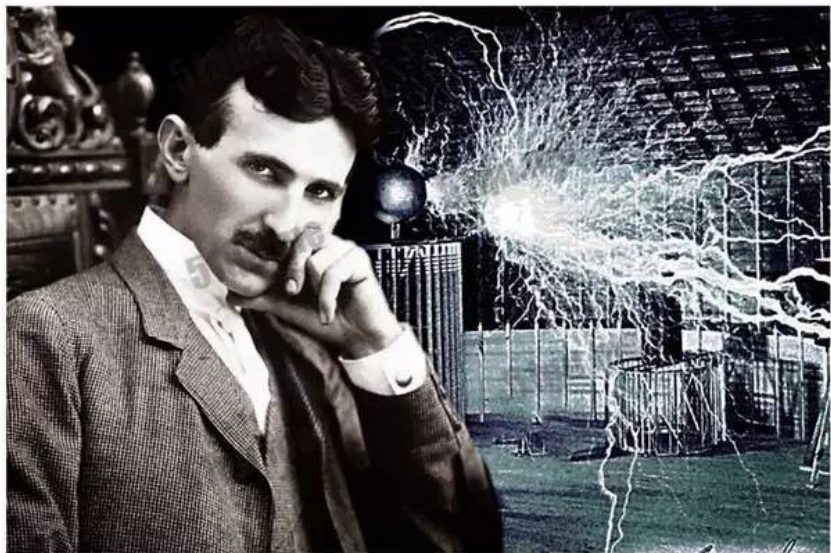
$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu, \quad \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$$

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^{\mu\nu} J_\nu$$

经典电动力学完成了物理学史上关于电、磁和光的理论的一次统一,为第二次工业革命(电气化时代)奠定了物理学基础.我们的课堂相继讨论了以下专题:

- 静电、静磁边值问题的求解与介质的极化、磁化现象.
- 推迟势.
- 与时变的电流(或者加速运动带电粒子)激发辐射电磁场的规律.
- 电磁波在真空、绝缘介质和导体中的传播.

这些专题形成了经典电动力学的主体内容,为同学们进一步研究探索自然界中的基本相互作用做了本科水平应有的准备.



特斯拉

- 尼古拉·特斯拉 (1856-1943), 塞尔维亚裔美国物理学家、发明家 (IQ ~ 500), 第二次工业革命的代表人物.
- 交流发电机的发明者, 使得工业大规模使用电能成为可能.
- 相继发明了收音机、传真机、真空管等, 他的一生取得了大大小小约 1500 项专利. 有人称赞说: **特斯拉以一己之力使人类大步跨进了电力时代.**
- 11 次拒绝接受诺贝尔物理学奖. 后来有人据此戏称特斯拉交流发电机的发明强过 10 个诺贝尔物理学奖金获得者对于物理学发展的贡献. 当然, 这只是个别人私下的溢美之词.
- 那么, 应该如何公正地评价特斯拉对于人类科学发展所做的贡献呢? 物理学界通过在国际单位制中规定磁感应强度的单位含蓄地表达出了物理学家们的观点:

$$1 \text{ 特斯拉} = 10000 \text{ 高斯}$$

尽管经典电动力学理论取得了巨大的成功,但理论中仍包含明显的缺点和不足,不是人类社会对电磁相互作用的最新认识.

- 它仅仅描写了电磁场的波动性,没有揭示和描写电磁场的粒子性. 因此,经典电动力学仅仅适用于描写宏观的电磁现象.
- 即使在宏观领域,洛伦兹力公式也蕴藏着明显的不自洽性,应该被所谓洛伦兹-狄拉克力公式

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qF_{\text{ext}}^{\mu\nu}U_\nu + \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0} \left(\frac{d\mathcal{A}^\mu}{d\tau} - \frac{1}{c^2}\mathcal{A}^2 U^\mu \right)$$

取代¹, 式中

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau}$$

是粒子的 4-加速度. 为什么?

¹洛伦兹-狄拉克方程涉嫌违反因果律, 仍有不自洽. K. Lechner 认为, 解决经典电动力学逻辑上的不自洽性的终极方案就是量子电动力学.

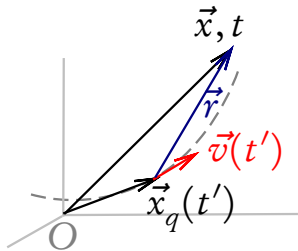
辐射反作用力

带电粒子在其周围空间会激发电磁场。特别地,加速运动带电粒子在其周围空间会激发李纳-维谢尔电磁场:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{LW}} &= \frac{q \mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q[\boldsymbol{\beta} - 3(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r]}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q \mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{4\pi\epsilon_0 c r} \\ \mathbf{B}_{\text{LW}} &= \frac{q(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{e}_r)}{4\pi\epsilon_0 c r^2} + \frac{q(\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \mathbf{e}_r)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\end{aligned}$$

式中约定 \mathbf{e}_r 是粒子位矢 $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t') = r\mathbf{e}_r$ 方向的单位矢量, 而

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')| = c(t - t')$$



因为辐射电磁场可以独立于带电粒子而存在, 考虑带电粒子的动力学方程

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = q\mathbf{E} + qc\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}$$

原则上必须计入此带电粒子产生的辐射电磁场提供的洛伦兹力:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_r &= q\mathbf{E}_r + qc\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_r \\ &= \frac{q^2 \mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{4\pi\epsilon_0 c r} + \frac{q^2 \boldsymbol{\beta} \times (\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \mathbf{e}_r)}{4\pi\epsilon_0 c r} \end{aligned}$$

亦即 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_r$. 通常称 \mathbf{F}_r 为施加给带电粒子的辐射反作用力. 遗憾的是, 在粒子轨道上处处有 $r = 0$:

$$\mathbf{F}_r \rightsquigarrow \infty$$

一个逻辑自洽的带电粒子动力学方程似乎不存在.

Dirac 在 1930 年代就认识到了洛伦兹力公式的上述不自洽性. 他从能量守恒的角度找到了一个替代方案, 这就是洛伦兹-狄拉克力公式.

- 通过李纳-维谢尔辐射电磁场能动量张量的计算, 可以求出带电粒子因具有加速度向外发出的辐射电磁场 4-动量时间变化率为:

$$\frac{dP_r^\mu}{d\tau} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2} \mathcal{A}^2 U^\mu$$

- 从体系能动量守恒的角度, 可以朴素地把带电粒子的动力学方程修正为:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qF_{\text{ext}}^{\mu\nu} U_\nu - \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2} \mathcal{A}^2 U^\mu$$

然而上式不可能成立, 因为它不满足质壳条件 $U^2 = -c^2$ 的限制. 所以, 合理的带电粒子动力学方程应具有形式:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qF_{\text{ext}}^{\mu\nu} U_\nu - \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2} (\mathcal{A}^2 U^\mu + \text{Other Terms})$$

- 注意到 $U_\mu \mathcal{A}^\mu = 0$, Dirac 猜出了正确的表达式:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qF_{\text{ext}}^{\mu\nu}U_\nu + \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{c^2} \mathcal{A}^2 U^\mu + \frac{d\mathcal{A}^\mu}{d\tau} \right)$$

Lechner 借用量子场论的重整化方案验证了洛伦兹-Dirac 方程的正确性.

- 找不到能导致洛伦兹-Dirac 方程的拉氏密度, 说明经典场论方法本身具有局限性.
- 经典电动力学理论逻辑上的不自洽不限于洛伦兹力公式. 电磁场的能量动量张量所包含的奇异性也超出了一个自洽物理理论的警戒线, 也需要重整化 (详见 Lechner 著作的 Chapter16).