数学分析

lihui588211

2023 年 11 月 4 日

目录

第一章　实数集与函数

1.1　实数

数学分析研究的基本对象是定义在实数集上的函数. 为此，我们先简要叙述实数的有关概念.

1.1.1　实数及其性质

在中学数学课程中，我们知道实数由有理数与无理数两部分组成. **有理数**可用分数形式 $\frac{p}{q}$ (p、q 为整数，$q \neq 0$) 表示，也可用有限十进制小数或无限循环十进制小数来表示；而无限不循环十进制小数则称为**无理数**. 有理数和无理数统称为**实数**.

为了之后讨论的需要，我们把有限十进制小数 (包括整数) 也统一表示为无限十进制小数. 为了实现这个目的，我们作如下规定:

- 对于正有限小数 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 时，其中 $0 \leq a_i \leq 9$, $i = 1, 2, \cdots n$, $a_n \neq 0$ ，a_0 为非负整数，记
$$x = a_0.a_1a_2\cdots(a_n - 1)9999\cdots$$
- 对于正整数 $x = a_0$ ，记
$$x = (a_0 - 1).9999\cdots$$
- 对于负有限小数 (包括负整数) y ，先将 $-y$ 表示为正无限小数，再加负号得到 y 的无限小数形式
- 对于 0 , 记 $0 = 0.000\cdots$

  于是，任何实数都可用一个确定的无限小数来表示. 如 5 表示为 $4.999\cdots$ ，3.1415 表示为 $3.14149999\cdots$ ，-2.738 表示为 $-2.7379999\cdots$

我们已经熟知比较两个有理数大小的方法了. 下面定义两个实数的大小关系.

定义 1 (非负实数的大小) 给定两个非负实数

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, \quad y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$$

其中 a_0, b_0 为非负整数，$a_k, b_k (k = 1, 2, \cdots)$ 为整数，$0 \leq a_k \leq 9, 0 \leq b_k \leq 9$.

- 若有 $a_k = b_k (k = 0, 1, 2, \cdots)$ ，则称 x 与 y 相等，记为 $x = y$.
- 若 $a_0 > b_0$ 或存在非负整数 l ，使得 $a_k = b_k (k = 0, 1, 2, \cdots, l)$ 但 $a_{l+1} > b_{l+1}$ ，则称 x

大于 y 或 y 小于 x，记为 $x>y$ 或 $y<x$.

对于负实数 x,y，如果按照上面的定义，分别有 $-x=-y$ 与 $-x>-y$，则分别称 $x=y$ 与 $x<y$ (或 $y>x$).

另外，规定任何非负实数大于任何负实数.

下面给出一个通过有限小数来比较两个实数大小的等价条件. 为此，先给出如下定义.

定义 2 (实数的近似) 设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为非负实数.

- 称有理数 $x_n=a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 为实数 x 的 **n 位不足近似**.
- 称有理数 $\bar{x}_n=x_n+\dfrac{1}{10^n}$ 为 x 的 **n 位过剩近似**.

对于负实数 $x=-a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，其 n 位不足近似和 n 位过剩近似分别规定为

$$x_n=-a_0.a_1a_2\cdots a_n-\frac{1}{10^n}\qquad \bar{x}_n=x_n+\frac{1}{10^n}$$

注 1 不难看出，实数 x 的不足近似 x_n 当 n 增大时不减，即 $x_0\le x_1\le x_2\le\cdots$; 而过剩近似 $\bar{x}_n$ 当 n 增大时不增，即 $\bar{x}_0\ge\bar{x}_1\ge\bar{x}_2\ge\cdots$

我们有以下的命题.

命题 1 (近似等价比大小) 设 $x=a_0.a_1a_2\cdots$ 与 $y=b_0.b_1b_2\cdots$ 为两个实数，则

$$x>y\iff\exists n\in N,\text{使得}x_n>\bar{y}_n$$

其中，x_n 表示 x 的 n 位不足近似，$\bar{y}_n$ 表示 y 的 n 位过剩近似.

关于这个命题的证明，以及实数四则运算的定义，可参阅本书附录。

例 1 (两个实数之间必定存在有理数)

设 x,y 为实数，$x<y$. 证明: 存在有理数 r，满足 $x<r<y$.

证明 $x<y$, 由命题 1 得，存在非负整数 n，使得 $\bar{x}_n<y_n$.

令 $r=\dfrac{1}{2}(\bar{x}_n+y_n)$，则 r 为有理数，且有

$$x\le\bar{x}_n<r<y_n\le y$$ ■

为了方便起见，通常将全体实数构成的集合记为 $\mathbb{R}$，即 $\mathbb{R}=\{x\mid x\text{为实数}\}$.

实数有如下一些主要性质：

1. 实数集 $\mathbb{R}$ 对加、减、乘、除 (除数不为 0) 四则运算是封闭的，即任意两个实数的和、差、积、商 (除数不为 0) 仍然是实数.
2. 实数集是有序的，即任意两实数 a,b 必然满足下述三个关系之一：$a<b,a=b,a>b$.
3. 实数的大小关系具有传递性，即若 $a>b,b>c$，则有 $a>c$.

4. 实数具有阿基米德 (Archimedes) 性，即对任何 $a,b \in \mathbb{R}$, 若 $b > a > 0$, 则存在正整数 n，使得 $na > b$.

5. 实数集 $\mathbb{R}$ 具有稠密性，即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数，且既有有理数 (见例 1), 也有无理数.

6. 如果在一条直线上 (通常画成水平直线) 确定一点 O 作为原点，指定一个方向为正向 (通常把指向右方的方向规定为正向)，并规定一个单位长度，则称此直线为 **数轴**. 可以说明：任一实数都对应数轴上唯一的一点；反之，数轴上的每一点也都唯一地代表着一个实数. 于是，实数集 $\mathbb{R}$ 与数轴上的点有着一一对应关系. 在本书以后的叙述中，常把“实数 a”与“数轴上的点 a”这两种说法看做具有相同的含义.

例 2

设 $a,b \in \mathbb{R}$. 证明：若对任何正数 ε , 有 $a < b+\varepsilon$, 则 $a \le b$.

证明 用反证法. 假设结论不成立，则根据实数集的有序性，必有 $a > b$. 令 $\varepsilon = a-b$, 则 ε 为正数，但有 $a = b+\varepsilon$, 这与题设 $a < b+\varepsilon$ 产生矛盾. 因此必有 $a \le b$. ■

1.1.2 绝对值与不等式

实数 a 的**绝对值**定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

从数轴上看，数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

实数的绝对值有如下一些性质：

1. $|a| = |-a| \ge 0$, 当且仅当 $a = 0$ 时，有 $|a| = 0$.

2. $-|a| \le a \le |a|$.

3. $|a| < h \iff -h < a < h \qquad |a| \le h \iff -h \le a \le h$ (h>0).

4. 对任何 $a,b \in \mathbb{R}$, 都有如下的**三角不等式**：

$$|a| - |b| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$$

5. $|ab| = |a||b|$

6. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}(b \ne 0)$

下面只证明性质 4，其余性质由读者自行证明.

证明 由性质 2 有 $\quad -|a| \le a \le |a|, -|b| \le b \le |b|$

两式相加得 $\quad -(|a|+|b|) \le a+b \le |a|+|b|$

根据性质 3，上式等价于

$$|a+b| \le |a|+|b| \tag{1}$$

将式 (1) 中 b 换成 $-b$, 即得 $|a-b| \le |a|+|-b| = |a|+|b|$, 这就证明了性质 4 不等式的右半部分.

又由 $|a| = |a-b+b|$, 根据式 (1.1) 得 $|a| \le |a-b|+|b|$, 从而有

$$|a|-|b| \le |a-b| \tag{2}$$

将式 (2) 中的 b 换成 $-b$, 即得 $|a|-|b| \le |a+b|$. 左半部分得证. ■

习题 1.1

† 1 设 a 为有理数，x 为无理数. 证明：

(1) $a+x$ 是无理数　(2) 当 $a \neq 0$ 时，ax 是无理数.

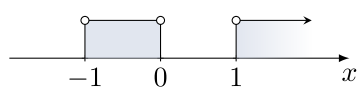
证明 (1) 用反证法. 假设 $a+x$ 是有理数，则存在整数 $q_1, p_1 \neq 0$ 使得 $a+x = \frac{q_1}{p_1}$. 又 a 为有理数，则存在整数 $q_2, p_2 \neq 0$ 使得 $a = \frac{q_2}{p_2}$. 则 $x = (a+x)-a = \frac{q_1}{p_1} - \frac{q_2}{p_2} = \frac{q_1p_2 - q_2p_1}{p_1p_2}$. 其中，$q_1p_2 - q_2p_1$,$p_1p_2$ 均为整数，且 $p_1p_2 \neq 0$, 则 x 也为有理数. 这与题设 x 为无理数相矛盾. 故 $a+x$ 必为无理数.

(2) 与 (1) 思路类似. 假设 ax 是有理数，有 $ax = \frac{q_1}{p_1}, a = \frac{q_2}{p_2}$, 其中 p_1, p_2, q_2 均不为 0. 则 $x = \frac{ax}{a} = \frac{q_1p_2}{p_1q_2}$ 也为有理数. 与题设矛盾. ■

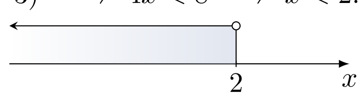
† 2 试在数轴上表示出下列不等式的解：

(1) $x(x^2-1) > 0$　(2) $|x-1| < |x-3|$　(3)$\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} \ge \sqrt{3x-2}$

解 (1) 因式分解得 $x(x+1)(x-1) > 0 \implies -1 < x < 0$或$x > 1$



(2) 两边平方得 $(x-1)^2 < (x-3)^2 \implies 4x < 8 \implies x < 2$.



(3) 首先，根据平方根的非负性，有 $x-1 \ge 0, 2x-1 \ge 0, 3x-2 \ge 0, x-1 \ge 2x-1$

整理得相互矛盾的不等式：$x \ge 1, x \le 0$. 故不等式无解. ■

† 3 设 $a, b \in \mathbb{R}$. 证明：若对任何正数 ε , 都有 $|a-b| < \varepsilon$, 则 $a = b$.

证明 用反证法. 假设 $a \neq b$, 则 $|a-b| > 0$. 取 $\varepsilon = |a-b|$, 则 $|a-b| = \varepsilon$. 这与题设 $|a-b| < \varepsilon$ 相矛盾. 故必有 $a = b$. ■

† 4 设 $x \neq 0$, 证明 $|x + \frac{1}{x}| \ge 2$, 并说明其中等号何时成立.

证明 易知 $(x-\frac{1}{x})^2 \geq 0 \iff x^2-2+\frac{1}{x^2} \geq 0 \iff x^2+2+\frac{1}{x^2} \geq 4 \iff (x+\frac{1}{x})^2 \geq 4 \iff (|x+\frac{1}{x}|) \geq 2^2 \iff |x+\frac{1}{x}| \geq 2$. 并且，$|x+\frac{1}{x}|=2 \iff (x-\frac{1}{x})^2=0 \iff x=\frac{1}{x} \iff x^2=1 \iff |x|=1$. 即 $|x|=1$ 时等号成立. ■

† 5 证明：对任何 $x\in\mathbb{R}$，有

(1)$|x-1|+|x-2|\geq 1$ (2)$|x-1|+|x-2|+|x-3|\geq 2$

证明 (1) 由三角不等式得 $|x-1|+|x-2|\geq|(x-1)-(x-2)|=1$. 当且仅当 $x-1\geq 0$ 且 $x-2\leq 0$, 即 $x\in[1,2]$ 时等号成立.

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geq|x-1|+|x-3|\geq|(x-1)-(x-3)|=2$. 当且仅当 $x=2$ 时等号成立. ■

† 6 设 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ 表示全体正实数的集合). 证明：

$$|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}|\leq|b-c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗？

证明 欲证 $|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}|\leq|b-c|$

只需证 $(|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}|)^2\leq(|b-c|)^2$

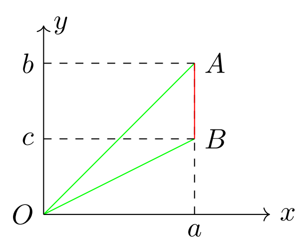
$\iff a^2+b^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+b^2+c^2\leq b^2+2bc+c^2 \iff a^2+bc\leq\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$

$\iff a^4+2a^2bc+b^2c^2\leq a^4+a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2$

$\iff 2a^2bc\leq a^2(b^2+c^2)$

由于 $a^2\geq 0$ 且 $b^2+c^2\geq 2bc$，故原命题得证.

几何意义：给出平面上两点 $A(a,b),B(a,c)$, 则 A,B 到原点 O 的距离分别为 $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+c^2}$，A,B 两点的距离为 $|b-c|$. 故原不等式等价于 $|OA-OB|\leq|AB|$，即两边之差小于第三边. 如下图所示.



■

† 7 设 $x>0,b>0,a\neq b$. 证明 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间.

证明

$$\begin{aligned}&(\frac{a+x}{b+x}-1)(\frac{a+x}{b+x}-\frac{a}{b})\\&=(\frac{a+x-b-x}{b+x})(\frac{ab+bx-ab-ax}{b(b+x)})\\&=\frac{-x(a-b)^2}{b(b+x)^2}\end{aligned}$$

由于 $x>0,b>0,a\neq b$，上式 <0. 故 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间. ■

† 8 设 p 为正整数. 证明：若 p 不是完全平方数，则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

证明 用反证法. 假设 $\sqrt{p}$ 是有理数，则存在互质的正整数 m,n 使得 $\sqrt{p}=\dfrac{n}{m} \iff p=\dfrac{n^2}{m^2}$. 可得 $n^2=pm^2$，于是 p 是 n 的因数. 设 $n=pk$，则 k 与 m 互质，且 $p^2k^2=pm^2 \iff m^2=pk^2$. 可得 p 也是 m 的因数. m,n 有公因数 p，这与 m,n 互质相矛盾. 故 $\sqrt{p}$ 是无理数. ■

† 9 设 a,b 为给定实数. 试用不等式符号 (不用绝对值符号) 表示下列不等式的解：

(1) $|x-a|<|x-b|$ (2) $|x-a|<x-b$ (3) $|x^2-a|<b$

解 (1)

$$\begin{aligned}
&|x-a|<|x-b|\\
&\iff (x-a)^2<(x-b)^2 \iff 2x(a-b)>a^2+b^2\\
&\iff \begin{cases} \text{无解} & a=b \\ x>\dfrac{a+b}{2} & a>b \\ x<\dfrac{a+b}{2} & a<b \end{cases}
\end{aligned}$$

(2) 解集必然是 $\{x\mid x>b\}$ 的子集. 结合 (1) 可得

$$\begin{cases} \text{无解} & a\le b \\ x>\dfrac{a+b}{2} & a>b \end{cases}$$

(3) <1> 当 $b\le 0$ 时，不等式无解.

<2> 当 $b>0$ 时，不等式等价于 $a-b<x^2<a+b$.

[1] 当 $a+b\le 0$ 时，不等式无解.

[2] 当 $a+b>0$ 时，

1) 若 $a<b$，不等式的解为 $-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b}$.

2) 若 $a>b$，不等式的解为 $\sqrt{a-b}<x<\sqrt{a+b}$ 或 $-\sqrt{a+b}<x<-\sqrt{a-b}$. ■

1.2 数集 • 确界原理

本节中我们先定义 $\mathbb{R}$ 中两类重要的数集——区间和邻域，然后讨论有界集，并给出确界的定义和确界原理.

1.2.1 区间和邻域

设 $a,b\in\mathbb{R}$，且 $a<b$. 我们称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为 **开区间**，记作 (a,b)；称数集 $\{x\mid a\le x\le b\}$ 为 **闭区间**，记作 $[a,b]$；称数集 $\{x\mid a\le x<b\}$ 和 $\{x\mid a<x\le b\}$ 为 **半开半闭区间**，分别记作 $(a,b]$ 和 $[a,b)$. 以上这几类区间统称为 **有限区间**. 从数轴上来看，开区间 (a,b) 表示 a,b 两点间所有点的集合，闭区间 $[a,b]$ 比开区间 (a,b) 多两个端点，半开半闭区间 $(a,b]$ 和 $[a,b)$ 则比开区间 (a,b) 多一个端点.

数集 $\{x \mid x \geq a\}$ 记作 $[a,+\infty)$, 这里符号 ∞ 读作"无穷大"，$+\infty$ 读作"正无穷大". 类似地，我们记

$$
\begin{aligned}
(-\infty, a] &= \{x \mid x \leq a\} \\
(a, +\infty) &= \{x \mid x > a\} \\
(-\infty, a) &= \{x \mid x < a\} \\
(-\infty, +\infty) &= \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

其中 $-\infty$ 读作"负无穷大". 以上这几类数集统称为 **无限区间**. 有限区间和无限区间统称为 **区间**.

设 $a \in \mathbb{R}, \delta > 0$. 称集合 $\{x \mid\mid x-a \mid< \delta\}$ 为 **点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$, 或简记为 $U(a)$, 即有

$$U(a,\delta) = \{x \mid\mid x-a \mid< \delta\} = (a-\delta, a+\delta)$$

点 a 的空心 δ 邻域定义为

$$U^\circ(a,\delta) = \{x \mid 0 <\mid x-a \mid< \delta\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$$

它也可以简记为 $U^\circ(a)$. 注意到，$U^\circ(a,\delta)$ 和 $U(a,\delta)$ 的差别在于：$U^\circ(a,\delta)$ 不包含点 a.

此外，我们还常用到以下几种邻域：

点 a 的 δ 左邻域 $U_-(a,\delta) = (a-\delta, a]$, 简记为 $U_-(a)$.

点 a 的 δ 右邻域 $U_+(a,\delta) = [a, a+\delta)$, 简记为 $U_+(a)$.

点 a 的空心 δ 左邻域 $U_-^\circ(a,\delta) = (a-\delta, a)$, 简记为 $U_-^\circ(a)$.

点 a 的空心 δ 右邻域 $U_+^\circ(a,\delta) = (a, a+\delta)$, 简记为 $U_+^\circ(a)$.

∞ 邻域 $U(\infty) = \{x \mid\mid x \mid> M\}$, 其中 M 为充分大的正数 (下同).

$+\infty$ 邻域 $U(+\infty) = \{x \mid x > M\}$.

$-\infty$ 邻域 $U(-\infty) = \{x \mid x < -M\}$.

1.2.2 有界集 • 确界原理

> **定义 3 (有界数集)** 设 S 为 $\mathbb{R}$ 中的一个数集.
>
> - 若存在数 M, 使得对一切 $x \in S$, 都有 $x \leq M$, 则称 S 为 **有上界的数集** ，称 M 为 S 的一个 **上界**.
> - 若存在数 L, 使得对一切 $x \in S$, 都有 $xgleM$, 则称 S 为 **有下界的数集** ，称 L 为 S 的一个 **下界**.
> - 若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为**有界集**.

例 3 (正整数集无上界)
证明数集 $\mathbb{N}_+ = \{n \mid n\text{为正整数}\}$ 有下界而无上界.

证明 显然，任何一个不大于 1 的实数都是 $\mathbb{N}_+$ 的下界，故 $\mathbb{N}_+$ 为有下界的数集.

为证 $\mathbb{N}_+$ 无上界，按照定义只需证明：对于无论多么大的数 M, 总存在某个正整数 $n_0 \in \mathbb{N}_+$ ，有 $n_0 > M$. 事实上，对任何正数 M (无论多么大), 总可取 $n_0 = \lfloor M \rfloor + 1$ ，则 $n_0 \in \mathbb{N}+$ ，且 $n_0 > M$. 这就证明了 $\mathbb{N}_+$ 无上界. ■

读者还可以自行证明：任何有限区间都是有界集，无限区间都是无界集; 由有限个数组成的数集是有界集.

若数集 S 有上界，则显然它有无穷多个上界，而其中最小的一个上界常常具有重要的作用，称它为数集 S 的上确界. 同样，有下界数集的最大下界，称为该数集的下确界. 下面给出数集的上确界和下确界的精确定义.

定义 4 (上确界) 设 S 是 $\mathbb{R}$ 中的一个数集. 若数 η 满足：

(i) 对一切 $x \in S$ ，有 $x \leq \eta$, 即 η 是 S 的上界

(ii) 对任何 $\alpha < \eta$ ，存在 $x_0 \in S$ ，使得 $x_0 > \alpha$, 即 η 又是 S 的最小上界

则称数 η 为数集 S 的**上确界**，记作 $\eta = \sup S$

定义 5 (下确界) 设 S 是 $\mathbb{R}$ 中的一个数集. 若数 ξ 满足：

(i) 对一切 $x \in S$ ，有 $x \geq \xi$, 即 ξ 是 S 的下界

(ii) 对任何 $\beta > \xi$ ，存在 $x_0 \in S$ ，使得 $x_0 < \beta$, 即 ξ 又是 S 的最大上界

则称数 ξ 为数集 S 的**下确界**，记作 $\xi = \inf S$

上确界与下确界统称为 **确界**.

例 4

设 $S = \{x \mid x\text{为区间}(0,1)\text{上的有理数}\}$. 试按照上下确界的定义验证：$\sup S = 1, \inf S = 0$.

证明 先验证 $\sup S = 1$:

(i) 对一切的 $x \in S$ ，明显有 $x \leq 1$ ，即 1 确实是 S 的上界.

(ii) 对于任何的 $\alpha < 1$,

- 若 $\alpha \leq 0$ ，则任取 $x_0 \in S$, 都有 $x_0 > \alpha$
- 若 $\alpha > 0$ ，则由有理数集在实数集中的稠密性可知，在 $(\alpha, 1)$ 上必有有理数 x_0 ，即存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$.

类似地，可以验证 $\inf S = 0$. ■

读者还可自行验证：闭区间 $[0\ 1]$ 的上、下确界分别为 1 和 0; 对于数集 $E = \{\frac{(-1)^n}{n} \mid n = 1, 2, \cdots\}$ ，有 $\sup E = \frac{1}{2}, \inf E = -1$; 正整数集 $\mathbb{N}_+$ 有下确界 $\inf \mathbb{N}_+ = 1$ ，而没有上确界.

注 2 由上 (下) 确界的定义可见，若数集 S 存在上 (下) 确界，则一定是唯一的. 又若数集 S 存在上、下确界，则有 $\inf S \leq \sup S$.

注 3 从上面一些例子可见，数集 S 的确界可能属于 S，也可能不属于 S.

例 5 (确界与最值)
设数集 S 有上确界. 证明

$$\eta = \sup S \in S \iff \eta = \max S$$

证明 $\Longrightarrow$) 设 $\eta = \sup S \in S$，则对一切 $x \in S$，都有 $x \le \eta$, 而 $\eta \in S$, 故 η 是数集 S 中最大的数，即 $\eta = \max S$.

$\Longleftarrow$) 设 $\eta = \max S$，则 $\eta \in S$; 下面验证 $\eta = \sup S$:

(i) 对一切 $x \in S$，均有 $x \le \eta$, 即 η 是 S 的上界.

(ii) 对任何 $\alpha < \eta$，只需取 $x_0 = \eta \in S$，便有 $x_0 > \alpha$. 这说明 $\eta = \sup S$. ■

关于数集确界的存在性，我们给出如下确界原理.

定理 1 (确界原理) 设 S 为非空数集. 若 S 有上界，则 S 必有上确界; 若 S 有下界，则 S 必有下确界.

证明 我们只证明关于上确界的结论，后一结论可类似地证明.

为了叙述方便，不妨设 S 含有非负数. 由于 S 有上界，故可以找到非负整数 n，使得

1) 对于任何 $x \in S$，都有 $x < n + 1$.

2) 存在 $a_0 \in S$，使 $a_0 \ge n$.

对于半开半闭区间 $[n, n+1)$ 作 10 等分，分点为 $n.1, n.2, \cdots, n.9$，则存在 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中的一个数 n_1，使得

1) 对于任何 $x \in S$，都有 $x < n.n_1 + \dfrac{1}{10} = n.(n_1 + 1)$.

2) 存在 $a_1 \in S$，使 $a_1 \ge n.n_1$.

. 对于半开半闭区间 $[n.n_1, n.n_1 + \dfrac{1}{10})$ 作 10 等分，分点为 $n.n_11, n.n_12, \cdots, n.n_19$，则存在 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中的一个数 n_2，使得

1) 对于任何 $x \in S$，都有 $x < n.n_1n_2 + \dfrac{1}{10^2} = n.n_1(n_2 + 1)$.

2) 存在 $a_2 \in S$，使 $a_2 \ge n.n_1n_2$.

继续不断地 10 等分在前一步骤中所得到的半开区间，可知对任何 $k = 1, 2, \cdots$，存在 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中的一个数 n_k，使得

1) 对于任何 $x \in S$，都有 $x < n.n_1n_2 \cdots n_k + \dfrac{1}{10^k} = n.n_1n_2 \cdots (n_k + 1)$. (3)

2) 存在 $a_k \in S$，使 $a_k \ge n.n_1n_2 \cdots n_k$.

将上述步骤无限地进行下去，得到实数 $\eta = n.n_1n_2 \cdots n_k \cdots$. 下面证明 $\eta = \sup S$. 为此，只需证明:

(i) 对一切 $x \in S$, 有 $x \leq \eta$.

(ii) 对任何 $\alpha > \eta$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$

倘若结论 (i) 不成立，即存在 $x \in S$, 使 $x > \eta$, 则可以找到 x 的 k 位不足近似 x_k ，使得

$$x_k > \bar{\eta}_k = n.n_1n_2\cdots n_k + \frac{1}{10^k}$$

但这与不等式 (3) 相矛盾. 于是 (i) 得证.

现设 $\alpha < \eta$, 则存在 k, 使 η 的 k 位不足近似 $\eta_k > \bar{\alpha}_k$, 即 $n.n_1n_2\cdots n_k > \bar{\alpha}_k$. 根据数 η 的构造过程，存在 $x_0 \in S$, 有 $x_0 \geq \eta_k > \bar{\alpha}_k \geq \alpha$. 于是我们得到 $x_0 > \alpha$. 这说明 (ii) 成立. ■

在本书中，确界原理是极限理论的基础，读者应给予充分的重视.

例 6

设 A, B 为非空数集, 满足：对一切 $x \in A$ 和 $y \in B$ 有 $x \leq y$. 证明：数集 A 有上确界，数集 B 有下确界, 且

$$\sup A \leq \inf B \tag{4}$$

证明 由题设可得，数集 B 中任何一个数 y 都是数集 A 的上界，A 中任何一个数 x. 都是 B 的下界，故由确界原理推知，数集 A 有上确界，数集 B 有下确界.

现证不等式 (4). 对任何 $y \in B$,y 都是数集 A 的一个上界，而由上确界的定义得，$\sup A$ 是数集 A 的最小上界. 因此 $\sup A \leq y$. 而此式又表明数 $\sup A$ 是数集 B 的一个下界，故由下确界的定义得 $\sup A \leq \inf B$. ■

例 7

设 A, B 为非空有界数集，$S = A \cup B$. 证明:

(i) $\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}$

(ii) $\inf S = \min\{\inf A, \inf B\}$

证明 由于 $S = A \cup B$, 易知 S 也是非空有界数集，因此 S 的上、下确界都存在.

(i) 对于任何的 $x \in S$, 有 $x \in A$ 或 $x \in B \implies x \leq \sup A$ 或 $x \leq \sup B$, 从而有 $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ ，故得 $\sup S \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.

另一方面，对任何的 $x \in A$, 有 $x \in S \implies x \leq \sup S \implies \sup A \leq \sup S$; 同理有 $\sup B \leq \sup S$. 所以有 $\sup S \geq \max\{\sup A, \sup B\}$.

综上，即可证得 $\sup S \geq \max\{\sup A, \sup B\}$.

(ii) 可类似证明. ■

若把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 补充到实数集中，并规定任何一个实数 a 与 $+\infty$ ，$-\infty$ 的大小关系为: $-\infty < a < +\infty$, 则确界的概念可以扩充为: 若数集 S 无上界，则定义 $+\infty$ 为 S 的**非正常上确界**，记作 $\sup S = +\infty$; 若 S 无下界，定义 $-\infty$ 为 S 的**非正常下确界**，记作 $\inf S = -\infty$. 相应地，前面定义 4, 定义 5中所定义的确界分别称为 **正常上、下确界**.

在上述扩充意义下，我们有

定理 2 (推广的确界原理) 任何一个非空数集必有上、下确界 (正常的或非正常的).

例如，对于正整数集 $\mathbb{N}_+$，有 $\inf \mathbb{N}_+ = 1, \sup \mathbb{N}_+ = +\infty$; 对于数集 $S = \{y \mid y = 2-x^2, x \in \mathbb{R}\}$, 有 $\inf S = -\infty, \sup S = 2$.

习题 1.2

† 1 用区间表示下列不等式的解:

(1) $|1-x| - x \geq 0$ (2) $|x + \dfrac{1}{x}| \leq 6$

(3) $(x-a)(x-b)(x-c) > 0$ (a, b, c 为常数，且 $a < b < c$) (4) $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解 (1) $|1-x| - x \geq 0 \iff |1-x| \geq x \iff 1-x \geq x$ 或 $x-1 \geq x \iff x \leq \dfrac{1}{2}$

用区间表示为 $(-\infty, \dfrac{1}{2}]$.

(2) $|x + \dfrac{1}{x}| \leq 6 \iff (x + \dfrac{1}{x})^2 \leq 36 \iff (x^2+1)^2 \leq 36x^2 \iff x^4 - 34x^2 + 1 \leq 0$

$\iff 17-12\sqrt{2} \leq x^2 \leq 17+12\sqrt{2} \iff -3-2\sqrt{2} \leq x \leq -3+2\sqrt{2}$ 或 $3-2\sqrt{2} \leq x \leq 3+2\sqrt{2}$

用区间表示为 $[-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}] \cup [3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$.

(3) 解集为 $\{x \mid a < x < b$ 或 $x > c\}$. 写成区间为 $(a, b) \cup (c, +\infty)$.

(4) $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi]$

† 2 设 S 为非空数集. 试对下列概念给出定义:

(1) S 无上界 (2) S 无界

解 (1) S 为非空数集，若对任意的正数 M, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > M$，则称 S 无上界.

(2) S 为非空数集，若对任意的正数 M, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $|x_0| > M$，则称 S 无界.

† 3 试证明数集 $S = \{y \mid y = 2-x^2, x \in \mathbb{R}\}$ 有上界而无下界.

证明 $y = 2-x^2 \leq 2$, 故 S 有上界 2.

对于任何一个正数 M, 都存在 $x_0 = \sqrt{3+M}$, 使得 $y_0 = 2 - x_0^2 = -M-1 < -M$. 故 S 无下界.

† 4 求下列数集的上、下确界，并依据定义加以验证:

(1) $S = \{x \mid x^2 < 2\}$ (2) $S = \{x \mid x = n!, n \in \mathbb{N}_+\}$

(3) $S = \{x \mid x$ 为 $(0,1)$ 上的无理数$\}$ (4) $S = \{x \mid x = 1 - \dfrac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}_+\}$

解 (1) $\sup S = \sqrt{2}, \inf S = -\sqrt{2}$. 易得，$\sqrt{2}$ 是 S 的一个上界. 对任意的 $\eta < \sqrt{2}$, 若 $\eta < -\sqrt{2}$，则 $\forall x \in S$，都有 $x > \eta$; 若 $\eta \geq -\sqrt{2}$，则存在 $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}+\eta}{2} \in S$，有 $x_0 > \eta$. 由定义得，$\sqrt{2}$ 是 S 的上确界. 同理可验证 $-\sqrt{2}$ 是 S 的下确界.

(2) $\sup S=+\infty,\inf S=1$. 对任意的正数 M ，都存在 $x_0=\lceil M\rceil!\in S$, 有 $x_0>M$. 故 $\sup S=+\infty$. 易知，1 为 S 的一个下界. 对任意的 $\xi>1$, 存在 $x_0=1\in S$, 有 $x_0<\xi$. 故 1 为 S 的下确界.

(3) $\sup S=1,\inf S=0$. 易知 1 为 S 的一个上界. 对任意的 $\eta<1$, 根据无理数的稠密性，在 $(\eta,1)$ 上必然存在无理数 $x_0\in S$, 即有 $x_0>\eta$. 故 1 为 S 的上确界. 同理可证 0 为 S 的下确界.

(4) $\sup S=1,\inf S=\frac{1}{2}$. 对任意的 $x\in S$, 有 $x=1-\frac{1}{2^n}\le 1$. 故 1 是 S 的上界. 对任何的 $\eta<1$, 若 $\eta<\frac{1}{2}$, 则存在 $x_0=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\in S$, 有 $x_0>\eta$; 若 $\eta\ge\frac{1}{2}$, 取 $n=\lceil log_2(\frac{1}{1-\eta})\rceil$, 则存在 $x_0=1-\frac{1}{2^n}\in S$, 有 $x_0>\eta$. 故 1 是 S 的上确界. 容易验证，下确界即为 S 中的数的最小值 $\frac{1}{2}$.

† 5 设 S 为非空有下界的数集，证明:$\inf S=\xi\in S \iff \xi=\min S$.

证明 $\Longrightarrow$) 设 $\xi=\inf S\in S$，则对一切 $x\in S$, 都有 $x\ge\xi$, 而 $\xi\in S$, 故 ξ 是数集 S 中最小的数，即 $\eta=\min S$.

$\Longleftarrow$) 设 $\xi=\min S$，则 $\xi\in S$; 下面验证 $\xi=\inf S$:

(i) 对一切 $x\in S$, 均有 $x\ge x$, 即 ξ 是 S 的下界.

(ii) 对任何 $\beta>\xi$, 只需取 $x_0=\xi\in S$, 便有 $x_0<\beta$. 这说明 $\xi=\inf S$.

† 6 设 S 为非空数集，定义 $S^-=\{x\mid -x\in S\}$. 证明:

(1) $\inf S^-=-\sup S$ (2) $\sup S^-=-\inf S$.

证明 (1) 对任意的 $x\in S^-$, 都有 $-x\in S$, 则 $-x\le\sup S$, 故 $x\ge-\sup S$, 即 $-\sup S$ 是 S^- 的下界. 对任意的 $\beta>-\sup S$, 也即 $-\beta<\sup S$, 都存在 $-x_0\in S$, 有 $-x_0>-\beta$, 则 $x_0\in S^-$, 且 $x_0<\beta$. 故 $-\sup S$ 是 S^- 的下确界.

(2) 对任意的 $x\in S^-$, 都有 $-x\in S$, 则 $-x\ge\inf S$, 故 $x\le-\inf S$, 即 $-\inf S$ 是 S^- 的上界. 对任意的 $\alpha<-\inf S$, 也即 $-\alpha>\inf S$, 都存在 $-x_0\in S$, 有 $-x_0<-\alpha$, 则 $x_0\in S^-$ ， 且 $x_0>\alpha$. 故 $-\inf S$ 是 S^- 的上确界.

† 7 设 A,B 均为非空有界数集，定义数集 $A+B=\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}$.

证明:(1) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$ (2)$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$

证明 (1) $\Longrightarrow$) 对任意的 $z\in A+B$, 有 $z=x+y\le\sup A+\sup B$, 其中 $x\in A,y\in B$. 故 $\sup A+\sup B$ 是 $A+B$ 的一个上界, 则 $\sup(A+B)\le\sup A+\sup B$.

$\Longleftarrow$) 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $x_0\in A$, 有 $x_0>\sup A-\frac{1}{2}\varepsilon$, 存在 $y_0\in B$, 有 $y_0>\sup B-\frac{1}{2}\varepsilon$. 故 $\sup(A+B)\ge z_0=x_0+y_0>\sup A+\sup B-\varepsilon$. 由 ε 的任意性可知, $\sup(A+B)\ge\sup A+\sup B$.

综上，$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

(2) $\Longrightarrow$) 对任意的 $z\in A+B$, 有 $z=x+y\ge\inf A+\inf B$, 其中 $x\in A,y\in B$. 故 $\inf A+\inf B$ 是 $A+B$ 的一个下界, 则 $\inf(A+B)\ge\inf A+\inf B$.

$\Longleftarrow$) 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $x_0\in A$, 有 $x_0<\inf A+\frac{1}{2}\varepsilon$, 存在 $y_0\in B$, 有 $y_0<\inf B+\frac{1}{2}\varepsilon$. 故 $\inf(A+B)\le z_0=x_0+y_0<\inf A+\inf B+\varepsilon$. 由 ε 的任意性可知, $\inf(A+B)\le\inf A+\inf B$.

综上，$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

1.3 函数的概念