数学分析

lihui588211

2024 年 2 月 21 日

目录

第一章　实数集与函数

1.1　实数

数学分析研究的基本对象是定义在实数集上的函数. 为此，我们先简要叙述实数的有关概念.

1.1.1　实数及其性质

在中学数学课程中，我们知道实数由有理数与无理数两部分组成. **有理数**可用分数形式 $\frac{p}{q}$ (p、q 为整数，$q \neq 0$) 表示，也可用有限十进制小数或无限循环十进制小数来表示；而无限不循环十进制小数则称为**无理数**. 有理数和无理数统称为**实数**.

为了之后讨论的需要，我们把有限十进制小数 (包括整数) 也统一表示为无限十进制小数. 为了实现这个目的，我们作如下规定:

- 对于正有限小数 $x = a_0.a_1a_2 \cdots a_n$ 时，其中 $0 \leq a_i \leq 9$, $i = 1, 2, \cdots n$, $a_n \neq 0$ ，a_0 为非负整数，记
$$x = a_0.a_1a_2 \cdots (a_n - 1)9999 \cdots$$
- 对于正整数 $x = a_0$ ，记
$$x = (a_0 - 1).9999 \cdots$$
- 对于负有限小数 (包括负整数) y ，先将 $-y$ 表示为正无限小数，再加负号得到 y 的无限小数形式
- 对于 0 , 记 $0 = 0.000 \cdots$

  于是，任何实数都可用一个确定的无限小数来表示. 如 5 表示为 $4.999 \cdots$ ，3.1415 表示为 $3.14149999 \cdots$ ，-2.738 表示为 $-2.7379999 \cdots$

我们已经熟知比较两个有理数大小的方法了. 下面定义两个实数的大小关系.

定义 1 (非负实数的大小) 给定两个非负实数

$$x = a_0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots, \quad y = b_0.b_1b_2 \cdots b_n \cdots$$

其中 a_0, b_0 为非负整数，$a_k, b_k (k = 1, 2, \cdots)$ 为整数，$0 \leq a_k \leq 9, 0 \leq b_k \leq 9$.
- 若有 $a_k = b_k (k = 0, 1, 2, \cdots)$ ，则称 x 与 y 相等，记为 $x = y$.
- 若 $a_0 > b_0$ 或存在非负整数 l ，使得 $a_k = b_k (k = 0, 1, 2, \cdots, l)$ 但 $a_{l+1} > b_{l+1}$ ，则称 x

大于 y 或 y 小于 x ，记为 $x > y$ 或 $y < x$.

对于负实数 x, y ，如果按照上面的定义，分别有 $-x = -y$ 与 $-x > -y$ ，则分别称 $x = y$ 与 $x < y$ (或 $y > x$).

另外，规定任何非负实数大于任何负实数.

下面给出一个通过有限小数来比较两个实数大小的等价条件. 为此，先给出如下定义.

定义 2 (实数的近似) 设 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为非负实数.
- 称有理数 $x_n = a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 为实数 x 的 $\boldsymbol{n}$ **位不足近似**.
- 称有理数 $\bar{x}_n = x_n + \dfrac{1}{10^n}$ 为 x 的 $\boldsymbol{n}$ **位过剩近似**.

对于负实数 $x = -a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ ，其 n 位不足近似和 n 位过剩近似分别规定为

$$x_n = -a_0.a_1a_2\cdots a_n - \frac{1}{10^n} \qquad \bar{x}_n = x_n + \frac{1}{10^n}$$

注 1 不难看出，实数 x 的不足近似 x_n 当 n 增大时不减，即 $x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots$; 而过剩近似 $\bar{x}_n$ 当 n 增大时不增，即 $\bar{x}_0 \ge \bar{x}_1 \ge \bar{x}_2 \ge \cdots$

我们有以下的命题.

命题 1 (近似等价比大小) 设 $x = a_0.a_1a_2\cdots$ 与 $y = b_0.b_1b_2\cdots$ 为两个实数，则

$$x > y \iff \exists n \in N, 使得 x_n > \bar{y}_n$$

其中，x_n 表示 x 的 n 位不足近似，$\bar{y}_n$ 表示 y 的 n 位过剩近似.

关于这个命题的证明，以及实数四则运算的定义，可参阅本书附录。

例 1 (两个实数之间必定存在有理数)

设 x,y 为实数，$x < y$. 证明: 存在有理数 r，满足 $x < r < y$.

证明 $x < y$, 由命题 1 得，存在非负整数 n , 使得 $\bar{x}_n < y_n$.

令 $r = \dfrac{1}{2}(\bar{x}_n + y_n)$, 则 r 为有理数，且有

$$x \le \bar{x}_n < r < y_n \le y$$

■

为了方便起见，通常将全体实数构成的集合记为 $\mathbb{R}$, 即 $\mathbb{R} = \{x \mid x为实数\}$.

实数有如下一些主要性质：

1. 实数集 $\mathbb{R}$ 对加、减、乘、除 (除数不为 0) 四则运算是封闭的，即任意两个实数的和、差、积、商 (除数不为 0) 仍然是实数.
2. 实数集是有序的，即任意两实数 a, b 必然满足下述三个关系之一：$a < b, a = b, a > b$.
3. 实数的大小关系具有传递性，即若 $a > b, b > c$, 则有 $a > c$.

4. 实数具有阿基米德 (Archimedes) 性，即对任何 $a,b\in\mathbb{R}$，若 $b>a>0$，则存在正整数 n，使得 $na>b$.

5. 实数集 $\mathbb{R}$ 具有稠密性，即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数，且既有有理数 (见例 1), 也有无理数.

6. 如果在一条直线上 (通常画成水平直线) 确定一点 O 作为原点，指定一个方向为正向 (通常把指向右方的方向规定为正向)，并规定一个单位长度，则称此直线为 **数轴**. 可以说明：任一实数都对应数轴上唯一的一点；反之，数轴上的每一点也都唯一地代表着一个实数. 于是，实数集 $\mathbb{R}$ 与数轴上的点有着一一对应关系. 在本书以后的叙述中，常把“实数 a”与“数轴上的点 a”这两种说法看做具有相同的含义.

例 2

设 $a,b\in\mathbb{R}$. 证明：若对任何正数 ε，有 $a<b+\varepsilon$，则 $a\le b$.

证明 用反证法. 假设结论不成立，则根据实数集的有序性，必有 $a>b$. 令 $\varepsilon=a-b$，则 ε 为正数，但有 $a=b+\varepsilon$，这与题设 $a<b+\varepsilon$ 产生矛盾. 因此必有 $a\le b$. ■

1.1.2 绝对值与不等式

实数 a 的**绝对值**定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & a\ge 0\\ -a, & a<0\end{cases}$$

从数轴上看，数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

实数的绝对值有如下一些性质：

1. $|a|=|-a|\ge 0$，当且仅当 $a=0$ 时，有 $|a|=0$.

2. $-|a|\le a\le |a|$.

3. $|a|<h \iff -h<a<h \qquad |a|\le h \iff -h\le a\le h$ (h>0).

4. 对任何 $a,b\in\mathbb{R}$，都有如下的**三角不等式**：

$$|a|-|b|\le |a\pm b|\le |a|+|b|$$

5. $|ab|=|a||b|$

6. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\ne 0)$

下面只证明性质 4，其余性质由读者自行证明.

证明 由性质 2 有 $\quad -|a|\le a\le |a|, -|b|\le b\le |b|$

两式相加得 $\quad -(|a|+|b|)\le a+b\le |a|+|b|$

根据性质 3，上式等价于

$$|a+b|\le |a|+|b| \tag{1}$$

将式 (1) 中 b 换成 $-b$, 即得 $|a-b| \le |a|+|-b| = |a|+|b|$, 这就证明了性质 4 不等式的右半部分.

又由 $|a| = |a-b+b|$, 根据式 (1.1) 得 $|a| \le |a-b|+|b|$, 从而有

$$|a|-|b| \le |a-b| \tag{2}$$

将式 (2) 中的 b 换成 $-b$, 即得 $|a|-|b| \le |a+b|$. 左半部分得证. ■

习题 1.1

† 1 设 a 为有理数，x 为无理数. 证明：

(1) $a+x$ 是无理数 (2) 当 $a \neq 0$ 时，ax 是无理数.

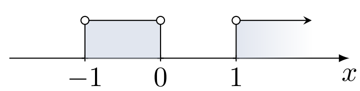
证明 (1) 用反证法. 假设 $a+x$ 是有理数，则存在整数 $q_1, p_1 \neq 0$ 使得 $a+x=\dfrac{q_1}{p_1}$. 又 a 为有理数，则存在整数 $q_2, p_2 \neq 0$ 使得 $a=\dfrac{q_2}{p_2}$. 则 $x=(a+x)-a=\dfrac{q_1}{p_1}-\dfrac{q_2}{p_2}=\dfrac{q_1p_2-q_2p_1}{p_1p_2}$. 其中，$q_1p_2-q_2p_1$,$p_1p_2$ 均为整数，且 $p_1p_2 \neq 0$, 则 x 也为有理数. 这与题设 x 为无理数相矛盾. 故 $a+x$ 必为无理数.

(2) 与 (1) 思路类似. 假设 ax 是有理数，有 $ax=\dfrac{q_1}{p_1}, a=\dfrac{q_2}{p_2}$, 其中 p_1, p_2, q_2 均不为 0. 则 $x=\dfrac{ax}{a}=\dfrac{q_1p_2}{p_1q_2}$ 也为有理数. 与题设矛盾. ■

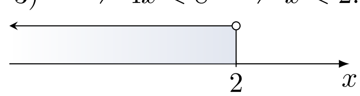
† 2 试在数轴上表示出下列不等式的解：

(1) $x(x^2-1)>0$ (2) $|x-1|<|x-3|$ (3)$\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1} \ge \sqrt{3x-2}$

解 (1) 因式分解得 $x(x+1)(x-1)>0 \implies -1<x<0或x>1$



(2) 两边平方得 $(x-1)^2<(x-3)^2 \implies 4x<8 \implies x<2.$



(3) 首先，根据平方根的非负性，有 $x-1 \ge 0, 2x-1 \ge 0, 3x-2 \ge 0, x-1 \ge 2x-1$

整理得相互矛盾的不等式：$x \ge 1, x \le 0$. 故不等式无解. ■

† 3 设 $a, b \in \mathbb{R}$. 证明：若对任何正数 ε , 都有 $|a-b|<\varepsilon$, 则 $a=b$.

证明 用反证法. 假设 $a \neq b$, 则 $|a-b|>0$. 取 $\varepsilon=|a-b|$, 则 $|a-b|=\varepsilon$. 这与题设 $|a-b|<\varepsilon$ 相矛盾. 故必有 $a=b$. ■

† 4 设 $x \neq 0$, 证明 $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| \ge 2$, 并说明其中等号何时成立.

证明 易知 $(x-\frac{1}{x})^2 \geq 0 \iff x^2-2+\frac{1}{x^2} \geq 0 \iff x^2+2+\frac{1}{x^2} \geq 4 \iff (x+\frac{1}{x})^2 \geq 4 \iff (|x+\frac{1}{x}|) \geq 2^2 \iff |x+\frac{1}{x}| \geq 2$. 并且，$|x+\frac{1}{x}|=2 \iff (x-\frac{1}{x})^2=0 \iff x=\frac{1}{x} \iff x^2=1 \iff |x|=1$. 即 $|x|=1$ 时等号成立. ■

† 5 证明：对任何 $x \in \mathbb{R}$，有

(1)$|x-1|+|x-2| \geq 1$　(2)$|x-1|+|x-2|+|x-3| \geq 2$

证明 (1) 由三角不等式得 $|x-1|+|x-2| \geq |(x-1)-(x-2)|=1$. 当且仅当 $x-1 \geq 0$ 且 $x-2 \leq 0$, 即 $x \in [1,2]$ 时等号成立.

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3| \geq |x-1|+|x-3| \geq |(x-1)-(x-3)|=2$. 当且仅当 $x=2$ 时等号成立. ■

† 6 设 $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ 表示全体正实数的集合). 证明：

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \leq |b-c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗？

证明 欲证 $|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}| \leq |b-c|$

只需证 $(|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}|)^2 \leq (|b-c|)^2$

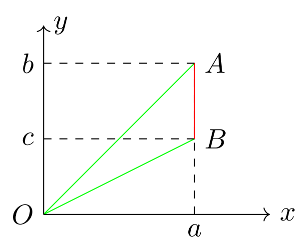
$\iff a^2+b^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+b^2+c^2 \leq b^2+2bc+c^2 \iff a^2+bc \leq \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$

$\iff a^4+2a^2bc+b^2c^2 \leq a^4+a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2$

$\iff 2a^2bc \leq a^2(b^2+c^2)$

由于 $a^2 \geq 0$ 且 $b^2+c^2 \geq 2bc$，故原命题得证.

几何意义：给出平面上两点 $A(a,b), B(a,c)$, 则 A, B 到原点 O 的距离分别为 $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+c^2}$，A, B 两点的距离为 $|b-c|$. 故原不等式等价于 $|OA-OB| \leq |AB|$，即两边之差小于第三边. 如下图所示.



■

† 7 设 $x>0, b>0, a \neq b$. 证明 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间.

证明

$$\begin{aligned}&(\frac{a+x}{b+x}-1)(\frac{a+x}{b+x}-\frac{a}{b})\\&=(\frac{a+x-b-x}{b+x})(\frac{ab+bx-ab-ax}{b(b+x)})\\&=\frac{-x(a-b)^2}{b(b+x)^2}\end{aligned}$$

由于 $x>0, b>0, a \neq b$，上式 <0. 故 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间. ■

† 8 设 p 为正整数. 证明：若 p 不是完全平方数，则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

证明 用反证法. 假设 $\sqrt{p}$ 是有理数，则存在互质的正整数 m,n 使得 $\sqrt{p}=\dfrac{n}{m} \iff p=\dfrac{n^2}{m^2}$. 可得 $n^2=pm^2$, 于是 p 是 n 的因数. 设 $n=pk$, 则 k 与 m 互质，且 $p^2k^2=pm^2 \iff m^2=pk^2$. 可得 p 也是 m 的因数. m,n 有公因数 p ，这与 m,n 互质相矛盾. 故 $\sqrt{p}$ 是无理数. ■

† 9 设 a,b 为给定实数. 试用不等式符号 (不用绝对值符号) 表示下列不等式的解：

(1) $|x-a|<|x-b|$　(2) $|x-a|<x-b$　(3) $|x^2-a|<b$

解 (1)

$$
\begin{aligned}
&|x-a|<|x-b| \\
\iff\ & (x-a)^2<(x-b)^2 \iff 2x(a-b)>a^2+b^2 \\
\iff\ & \begin{cases} \text{无解} & a=b \\ x>\dfrac{a+b}{2} & a>b \\ x<\dfrac{a+b}{2} & a<b \end{cases}
\end{aligned}
$$

(2) 解集必然是 $\{x \mid x>b\}$ 的子集. 结合 (1) 可得

$$
\begin{cases} \text{无解} & a\le b \\ x>\dfrac{a+b}{2} & a>b \end{cases}
$$

(3) <1> 当 $b\le 0$ 时，不等式无解.

<2> 当 $b>0$ 时，不等式等价于 $a-b<x^2<a+b$.

[1] 当 $a+b\le 0$ 时，不等式无解.

[2] 当 $a+b>0$ 时，

1) 若 $a<b$ ，不等式的解为 $-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b}$.

2) 若 $a>b$,不等式的解为 $\sqrt{a-b}<x<\sqrt{a+b}$ 或 $-\sqrt{a+b}<x<-\sqrt{a-b}$. ■

1.2　数集 • 确界原理

本节中我们先定义 $\mathbb{R}$ 中两类重要的数集——区间和邻域，然后讨论有界集，并给出确界的定义和确界原理.

1.2.1　区间和邻域

设 $a,b\in\mathbb{R}$ ，且 $a<b$. 我们称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为 **开区间**，记作 (a,b) ；称数集 $\{x \mid a\le x\le b\}$ 为 **闭区间**，记作 $[a,b]$ ；称数集 $\{x \mid a\le x<b\}$ 和 $\{x \mid a<x\le b\}$ 为 **半开半闭区间**，分别记作 $(a,b]$ 和 $[a,b)$. 以上这几类区间统称为 **有限区间**. 从数轴上来看，开区间 (a,b) 表示 a,b 两点间所有点的集合，闭区间 $[a,b]$ 比开区间 (a,b) 多两个端点，半开半闭区间 $(a,b]$ 和 $[a,b)$ 则比开区间 (a,b) 多一个端点.

数集 $\{x \mid x \geq a\}$ 记作 $[a,+\infty)$, 这里符号 ∞ 读作“无穷大”, $+\infty$ 读作“正无穷大”. 类似地，我们记

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$$
$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$$
$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$$

其中 $-\infty$ 读作“负无穷大”. 以上这几类数集统称为 **无限区间**. 有限区间和无限区间统称为 **区间**.

设 $a \in \mathbb{R}, \delta > 0$. 称集合 $\{x \mid\mid x-a \mid< \delta\}$ 为 **点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$, 或简记为 $U(a)$, 即有

$$U(a,\delta) = \{x \mid\mid x-a \mid< \delta\} = (a-\delta, a+\delta)$$

点 a 的空心 δ 邻域定义为

$$U^{\circ}(a,\delta) = \{x \mid 0 <\mid x-a \mid< \delta\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$$

它也可以简记为 $U^{\circ}(a)$. 注意到，$U^{\circ}(a,\delta)$ 和 $U(a,\delta)$ 的差别在于：$U^{\circ}(a,\delta)$ 不包含点 a.

此外，我们还常用到以下几种邻域：

点 a 的 δ 左邻域 $U_{-}(a,\delta) = (a-\delta, a]$, 简记为 $U_{-}(a)$.

点 a 的 δ 右邻域 $U_{+}(a,\delta) = [a, a+\delta)$, 简记为 $U_{+}(a)$.

点 a 的空心 δ 左邻域 $U^{\circ}_{-}(a,\delta) = (a-\delta, a)$, 简记为 $U^{\circ}_{-}(a)$.

点 a 的空心 δ 右邻域 $U^{\circ}_{+}(a,\delta) = (a, a+\delta)$, 简记为 $U^{\circ}_{+}(a)$.

∞ 邻域 $U(\infty) = \{x \mid\mid x \mid> M\}$, 其中 M 为充分大的正数 (下同).

$+\infty$ 邻域 $U(+\infty) = \{x \mid x > M\}$.

$-\infty$ 邻域 $U(-\infty) = \{x \mid x < -M\}$.

1.2.2 有界集 • 确界原理

定义 3 (有界数集) 设 S 为 $\mathbb{R}$ 中的一个数集.

- 若存在数 M, 使得对一切 $x \in S$, 都有 $x \leq M$, 则称 S 为 **有上界的数集** , 称 M 为 S 的一个 **上界**.
- 若存在数 L, 使得对一切 $x \in S$, 都有 $xgleM$, 则称 S 为 **有下界的数集** , 称 L 为 S 的一个 **下界**.
- 若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为**有界集**.

例 3 (正整数集无上界)
证明数集 $\mathbb{N}_{+} = \{n \mid n\text{为正整数}\}$ 有下界而无上界.

证明 显然，任何一个不大于 1 的实数都是 $\mathbb{N}_{+}$ 的下界，故 $\mathbb{N}_{+}$ 为有下界的数集.

为证 $\mathbb{N}_+$ 无上界，按照定义只需证明：对于无论多么大的数 M, 总存在某个正整数 $n_0 \in \mathbb{N}_+$, 有 $n_0 > M$. 事实上，对任何正数 M (无论多么大), 总可取 $n_0 = \lfloor M \rfloor + 1$, 则 $n_0 \in \mathbb{N}+$ ，且 $n_0 > M$. 这就证明了 $\mathbb{N}_+$ 无上界. ■

读者还可以自行证明：任何有限区间都是有界集，无限区间都是无界集; 由有限个数组成的数集是有界集.

若数集 S 有上界，则显然它有无穷多个上界，而其中最小的一个上界常常具有重要的作用，称它为数集 S 的上确界. 同样，有下界数集的最大下界，称为该数集的下确界. 下面给出数集的上确界和下确界的精确定义.

定义 4 (上确界) 设 S 是 $\mathbb{R}$ 中的一个数集. 若数 η 满足:

(i) 对一切 $x \in S$, 有 $x \leq \eta$, 即 η 是 S 的上界

(ii) 对任何 $\alpha < \eta$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$, 即 η 又是 S 的最小上界

则称数 η 为数集 S 的**上确界**，记作 $\eta = \sup S$

定义 5 (下确界) 设 S 是 $\mathbb{R}$ 中的一个数集. 若数 ξ 满足:

(i) 对一切 $x \in S$, 有 $x \geq \xi$, 即 ξ 是 S 的下界

(ii) 对任何 $\beta > \xi$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 < \beta$, 即 ξ 又是 S 的最大上界

则称数 ξ 为数集 S 的**下确界**，记作 $\xi = \inf S$

上确界与下确界统称为 **确界**.

例 4

设 $S = \{x \mid x\text{为区间}(0,1)\text{上的有理数}\}$. 试按照上下确界的定义验证：$\sup S = 1, \inf S = 0$.

证明 先验证 $\sup S = 1$:

(i) 对一切的 $x \in S$, 明显有 $x \leq 1$, 即 1 确实是 S 的上界.

(ii) 对于任何的 $\alpha < 1$,

- 若 $\alpha \leq 0$, 则任取 $x_0 \in S$, 都有 $x_0 > \alpha$
- 若 $\alpha > 0$, 则由有理数集在实数集中的稠密性可知，在 $(\alpha, 1)$ 上必有有理数 x_0 , 即存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$.

类似地，可以验证 $\inf S = 0$. ■

读者还可自行验证：闭区间 [0 1] 的上、下确界分别为 1 和 0; 对于数集 $E = \{\dfrac{(-1)^n}{n} \mid n = 1, 2, \cdots\}$ ，有 $\sup E = \dfrac{1}{2}, \inf E = -1$; 正整数集 $\mathbb{N}_+$ 有下确界 $\inf \mathbb{N}_+ = 1$, 而没有上确界.

注 2 由上 *(下)* 确界的定义可见，若数集 S 存在上 *(下)* 确界，则一定是唯一的. 又若数集 S 存在上、下确界，则有 $\inf S \leq \sup S$.

注 3 从上面一些例子可见，数集 S 的确界可能属于 S，也可能不属于 S.

例 5 (确界与最值)
设数集 S 有上确界. 证明

$$\eta=\sup S\in S \iff \eta=\max S$$

证明 $\Longrightarrow$) 设 $\eta=\sup S\in S$，则对一切 $x\in S$，都有 $x\le\eta$, 而 $\eta\in S$, 故 η 是数集 S 中最大的数，即 $\eta=\max S$.

$\Longleftarrow$) 设 $\eta=\max S$，则 $\eta\in S$; 下面验证 $\eta=\sup S$:

(i) 对一切 $x\in S$，均有 $x\le\eta$, 即 η 是 S 的上界.

(ii) 对任何 $\alpha<\eta$，只需取 $x_0=\eta\in S$，便有 $x_0>\alpha$. 这说明 $\eta=\sup S$. ■

关于数集确界的存在性，我们给出如下确界原理.

定理 1 (确界原理) *设 S 为非空数集. 若 S 有上界，则 S 必有上确界; 若 S 有下界，则 S 必有下确界.*

证明 我们只证明关于上确界的结论，后一结论可类似地证明.

为了叙述方便，不妨设 S 含有非负数. 由于 S 有上界，故可以找到非负整数 n，使得

1) 对于任何 $x\in S$，都有 $x<n+1$.

2) 存在 $a_0\in S$，使 $a_0\ge n$.

对于半开半闭区间 $[n,n+1)$ 作 10 等分，分点为 $n.1,n.2,\cdots,n.9$，则存在 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个数 n_1，使得

1) 对于任何 $x\in S$，都有 $x<n.n_1+\dfrac{1}{10}=n.(n_1+1)$.

2) 存在 $a_1\in S$，使 $a_1\ge n.n_1$.

. 对于半开半闭区间 $[n.n_1,n.n_1+\dfrac{1}{10})$ 作 10 等分，分点为 $n.n_11,n.n_12,\cdots,n.n_19$，则存在 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个数 n_2，使得

1) 对于任何 $x\in S$，都有 $x<n.n_1n_2+\dfrac{1}{10^2}=n.n_1(n_2+1)$.

2) 存在 $a_2\in S$，使 $a_2\ge n.n_1n_2$.

继续不断地 10 等分在前一步骤中所得到的半开区间，可知对任何 $k=1,2,\cdots$，存在 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个数 n_k，使得

1) 对于任何 $x\in S$，都有 $x<n.n_1n_2\cdots n_k+\dfrac{1}{10^k}=n.n_1n_2\cdots(n_k+1)$. (3)

2) 存在 $a_k\in S$，使 $a_k\ge n.n_1n_2\cdots n_k$.

将上述步骤无限地进行下去，得到实数 $\eta=n.n_1n_2\cdots n_k\cdots$. 下面证明 $\eta=\sup S$. 为此，只需证明:

(i) 对一切 $x \in S$, 有 $x \le \eta$.

(ii) 对任何 $\alpha > \eta$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$

倘若结论 (i) 不成立，即存在 $x \in S$, 使 $x > \eta$, 则可以找到 x 的 k 位不足近似 x_k ， 使得

$$x_k > \bar{\eta}_k = n.n_1n_2\cdots n_k + \frac{1}{10^k}$$

但这与不等式 (3) 相矛盾. 于是 (i) 得证.

现设 $\alpha < \eta$, 则存在 k, 使 η 的 k 位不足近似 $\eta_k > \bar{\alpha}_k$, 即 $n.n_1n_2\cdots n_k > \bar{\alpha}_k$. 根据数 η 的构造过程，存在 $x_0 \in S$, 有 $x_0 \ge \eta_k > \bar{\alpha}_k \ge \alpha$. 于是我们得到 $x_0 > \alpha$. 这说明 (ii) 成立. ■

在本书中，确界原理是极限理论的基础，读者应给予充分的重视.

例 6

设 A, B 为非空数集, 满足：对一切 $x \in A$ 和 $y \in B$ 有 $x \le y$. 证明：数集 A 有上确界，数集 B 有下确界, 且

$$\sup A \le \inf B \tag{4}$$

证明 由题设可得，数集 B 中任何一个数 y 都是数集 A 的上界，A 中任何一个数 x. 都是 B 的下界，故由确界原理推知，数集 A 有上确界，数集 B 有下确界.

现证不等式 (4). 对任何 $y \in B$,y 都是数集 A 的一个上界，而由上确界的定义得，$\sup A$ 是数集 A 的最小上界. 因此 $\sup A \le y$. 而此式又表明数 $\sup A$ 是数集 B 的一个下界，故由下确界的定义得 $\sup A \le \inf B$. ■

例 7

设 A, B 为非空有界数集，$S = A \cup B$. 证明:

(i) $\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}$

(ii) $\inf S = \min\{\inf A, \inf B\}$

证明 由于 $S = A \cup B$, 易知 S 也是非空有界数集，因此 S 的上、下确界都存在.

(i) 对于任何的 $x \in S$, 有 $x \in A$ 或 $x \in B \implies x \le \sup A$ 或 $x \le \sup B$, 从而有 $x \le \max\{\sup A, \sup B\}$ ， 故得 $\sup S \le \max\{\sup A, \sup B\}$.

另一方面，对任何的 $x \in A$, 有 $x \in S \implies x \le \sup S \implies \sup A \le \sup S$; 同理有 $\sup B \le \sup S$. 所以有 $\sup S \ge \max\{\sup A, \sup B\}$.

综上，即可证得 $\sup S \ge \max\{\sup A, \sup B\}$.

(ii) 可类似证明. ■

若把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 补充到实数集中，并规定任何一个实数 a 与 $+\infty$ ，$-\infty$ 的大小关系为: $-\infty < a < +\infty$, 则确界的概念可以扩充为: 若数集 S 无上界，则定义 $+\infty$ 为 S 的**非正常上确界**，记作 $\sup S = +\infty$; 若 S 无下界，定义 $-\infty$ 为 S 的**非正常下确界**，记作 $\inf S = -\infty$. 相应地，前面定义 4, 定义 5中所定义的确界分别称为 **正常上、下确界**.

在上述扩充意义下，我们有

定理 2 (推广的确界原理) 任何一个非空数集必有上、下确界 (正常的或非正常的).

例如,对于正整数集 $\mathbb{N}_+$,有 $\inf \mathbb{N}_+ = 1, \sup \mathbb{N}_+ = +\infty$; 对于数集 $S = \{y \mid y = 2-x^2, x \in \mathbb{R}\}$, 有 $\inf S = -\infty, \sup S = 2$.

习题 1.2

† 1 用区间表示下列不等式的解:

(1) $\mid 1-x \mid -x \geq 0$ (2)$\mid x+\dfrac{1}{x} \mid \leq 6$

(3) $(x-a)(x-b)(x-c) > 0$ (a,b,c 为常数,且 $a<b<c$) (4) $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解 (1) $\mid 1-x \mid -x \geq 0 \iff \mid 1-x \mid \geq x \iff 1-x \geq x$或$x-1 \geq x \iff x \leq \dfrac{1}{2}$

用区间表示为 $(-\infty, \dfrac{1}{2}]$.

(2) $\mid x+\dfrac{1}{x} \mid \leq 6 \iff (x+\dfrac{1}{x})^2 \leq 36 \iff (x^2+1)^2 \leq 36x^2 \iff x^4-34x^2+1 \leq 0$

$\iff 17-12\sqrt{2} \leq x^2 \leq 17+12\sqrt{2} \iff -3-2\sqrt{2} \leq x \leq -3+2\sqrt{2}$或$3-2\sqrt{2} \leq x \leq 3+2\sqrt{2}$

用区间表示为 $[-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}] \cup [3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$.

(3) 解集为 $\{x \mid a<x<b$或$x>c\}$. 写成区间为 $(a,b) \cup (c,+\infty)$.

(4) $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi]$

† 2 设 S 为非空数集. 试对下列概念给出定义:

(1) S 无上界 (2) S 无界

解 (1) S 为非空数集,若对任意的正数 M, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > M$,则称 S 无上界.

(2) S 为非空数集,若对任意的正数 M, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $\mid x_0 \mid > M$,则称 S 无界.

† 3 试证明数集 $S = \{y \mid y = 2-x^2, x \in \mathbb{R}\}$ 有上界而无下界.

证明 $y = 2-x^2 \leq 2$, 故 S 有上界 2.

对于任何一个正数 M, 都存在 $x_0 = \sqrt{3+M}$, 使得 $y_0 = 2-x_0^2 = -M-1 < -M$. 故 S 无下界.

† 4 求下列数集的上、下确界,并依据定义加以验证:

(1) $S = \{x \mid x^2 < 2\}$ (2)$S = \{x \mid x = n!, n \in \mathbb{N}_+\}$

(3) $S = \{x \mid x$为$(0,1)$上的无理数$\}$ (4) $S = \{x \mid x = 1-\dfrac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}_+\}$

解 (1) $\sup S = \sqrt{2}, \inf S = -\sqrt{2}$. 易得,$\sqrt{2}$ 是 S 的一个上界. 对任意的 $\eta < \sqrt{2}$, 若 $\eta < -\sqrt{2}$,则 $\forall x \in S$,都有 $x > \eta$; 若 $\eta \geq -\sqrt{2}$,则存在 $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}+\eta}{2} \in S$,有 $x_0 > \eta$. 由定义得,$\sqrt{2}$ 是 S 的上确界. 同理可验证 $-\sqrt{2}$ 是 S 的下确界.

(2) $\sup S=+\infty,\inf S=1$．对任意的正数 M，都存在 $x_0=\lceil M\rceil!\in S$, 有 $x_0>M$. 故 $\sup S=+\infty$. 易知，1 为 S 的一个下界. 对任意的 $\xi>1$, 存在 $x_0=1\in S$，有 $x_0<\xi$. 故 1 为 S 的下确界.

(3) $\sup S=1,\inf S=0$．易知 1 为 S 的一个上界. 对任意的 $\eta<1$, 根据无理数的稠密性，在 $(\eta,1)$ 上必然存在无理数 $x_0\in S$, 即有 $x_0>\eta$. 故 1 为 S 的上确界. 同理可证 0 为 S 的下确界.

(4) $\sup S=1,\inf S=\dfrac{1}{2}$. 对任意的 $x\in S$, 有 $x=1-\dfrac{1}{2^n}\leq 1$. 故 1 是 S 的上界. 对任何的 $\eta<1$, 若 $\eta<\dfrac{1}{2}$, 则存在 $x_0=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\in S$, 有 $x_0>\eta$；若 $\eta\geq\dfrac{1}{2}$, 取 $n=\lceil log_2(\dfrac{1}{1-\eta})\rceil$，则存在 $x_0=1-\dfrac{1}{2^n}\in S$，有 $x_0>\eta$．故 1 是 S 的上确界. 容易验证，下确界即为 S 中的数的最小值 $\dfrac{1}{2}$.

† 5 设 S 为非空有下界的数集，证明:$\inf S=\xi\in S\iff\xi=\min S$.

证明 $\Longrightarrow$) 设 $\xi=\inf S\in S$，则对一切 $x\in S$，都有 $x\geq\xi$, 而 $\xi\in S$, 故 ξ 是数集 S 中最小的数，即 $\eta=\min S$.

$\Longleftarrow$) 设 $\xi=\min S$，则 $\xi\in S$; 下面验证 $\xi=\inf S$:

(i) 对一切 $x\in S$，均有 $x\geq x$, 即 ξ 是 S 的下界.

(ii) 对任何 $\beta>\xi$，只需取 $x_0=\xi\in S$，便有 $x_0<\beta$. 这说明 $\xi=\inf S$.

† 6 设 S 为非空数集，定义 $S^-=\{x\mid -x\in S\}$. 证明:

(1) $\inf S^-=-\sup S$　　(2) $\sup S^-=-\inf S$.

证明 (1) 对任意的 $x\in S^-$，都有 $-x\in S$, 则 $-x\leq\sup S$, 故 $x\geq-\sup S$, 即 $-\sup S$ 是 S^- 的下界. 对任意的 $\beta>-\sup S$，也即 $-\beta<\sup S$，都存在 $-x_0\in S$，有 $-x_0>-\beta$，则 $x_0\in S^-$，且 $x_0<\beta$. 故 $-\sup S$ 是 S^- 的下确界.

(2) 对任意的 $x\in S^-$，都有 $-x\in S$, 则 $-x\geq\inf S$, 故 $x\leq-\inf S$, 即 $-\inf S$ 是 S^- 的上界. 对任意的 $\alpha<-\inf S$，也即 $-\alpha>\inf S$，都存在 $-x_0\in S$，有 $-x_0<-\alpha$，则 $x_0\in S^-$，且 $x_0>\alpha$. 故 $-\inf S$ 是 S^- 的上确界.

† 7 设 A,B 均为非空有界数集，定义数集 $A+B=\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}$.

证明:(1) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$　　(2)$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$

证明 (1) $\Longrightarrow$) 对任意的 $z\in A+B$，有 $z=x+y\leq\sup A+\sup B$, 其中 $x\in A,y\in B$. 故 $\sup A+\sup B$ 是 $A+B$ 的一个上界, 则 $\sup(A+B)\leq\sup A+\sup B$.

$\Longleftarrow$) 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $x_0\in A$，有 $x_0>\sup A-\dfrac{1}{2}\varepsilon$，存在 $y_0\in B$，有 $y_0>\sup B-\dfrac{1}{2}\varepsilon$. 故 $\sup(A+B)\geq z_0=x_0+y_0>\sup A+\sup B-\varepsilon$．由 ε 的任意性可知, $\sup(A+B)\geq\sup A+\sup B$.

综上，$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

(2) $\Longrightarrow$) 对任意的 $z\in A+B$，有 $z=x+y\geq\inf A+\inf B$, 其中 $x\in A,y\in B$. 故 $\inf A+\inf B$ 是 $A+B$ 的一个下界, 则 $\inf(A+B)\geq\inf A+\inf B$.

$\Longleftarrow$) 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $x_0\in A$，有 $x_0<\inf A+\dfrac{1}{2}\varepsilon$，存在 $y_0\in B$，有 $y_0<\inf B+\dfrac{1}{2}\varepsilon$. 故 $\inf(A+B)\leq z_0=x_0+y_0<\inf A+\inf B+\varepsilon$．由 ε 的任意性可知, $\inf(A+B)\leq\inf A+\inf B$.

综上，$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

1.3 函数的概念

关于函数的概念，在中学数学中我们已经有了初步的了解，本节将对此作进一步的讨论.

1.3.1 函数的定义

定义 6 (函数) 给定两个实数集 D 和 M, 若有对应法则 f, 使得对于每一个 $x \in D$, 都有唯一的 $y \in M$ 与它相对应, 则称 f 是定义在数集 D 上的**函数**，记作

$$\begin{aligned} f :&D \to M \\ x &\longmapsto y \end{aligned} \tag{5}$$

数集 D 称为函数 f 的**定义域**, x 所对应的 y 称为 f 在点 x 处的**函数值**, 常记为 $f(x)$. 全体函数值的集合 $f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\} \subset M$ 称为函数 f 的**值域**.

式 (5) 中的第一式“$f : D \to M$”表示按照法则 f 建立数集 D 到 M 的函数关系; 第二式“$x \longmapsto y$ 表示这两个数集中元素之间的对应关系，也可以记作“$x \longmapsto f(x)$”. 习惯上，我们称此函数关系中的 x 为**自变量**，y 为**因变量**.

关于函数的定义，我们作如下几点说明:

1. 定义 6中的实数集 M 常用 $\mathbb{R}$ 来代替，于是定义域 D 和对应法则 f 就成为确定函数的两个主要因素. 所以，我们也常用 $y = f(x), x \in D$ 来表示一个函数. 由此，我们说某两个函数相同，是指它们有相同的定义域和对应法则. 如果两个函数对应法则相同而定义域不同，那么这两个函数仍然是不相同的. 例如 $f(x) = 1, x \in \mathbb{R}$ 和 $g(x) = 1, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 是不相同的两个函数. 另一方面，两个相同的函数，其对应法则的表达形式可能有所不同. 例如 $\varphi(x) =| x |, x \in R$ 和 $\psi(x) = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$.

2. 我们在中学数学中已经知道，表示函数的主要方法是解析法 (公式法)，即用数学运算式子来表示函数. 这时，函数的定义域常取使得该运算式子有意义的自变量的全体，通常称为**存在域**. 在这种情况下，函数的定义域 (即存在域)D 可以省略不写，而只用对应法则 f 来表示一个函数, 此时可以简单地说“函数 $y = f(x)$”或“函数 f”.

3. 函数 f 给出了 x 轴上的点集 D 到 y 轴上的点集 M 之间的**单值对应**，也称为**映射**. 对于 $a \in D$,$f(a)$ 称为映射 f 下 a 的**象**，a 则称为 $f(a)$ 的**原象**.

4. 在函数定义中，对每一个 $x \in D$ ，只能有唯一的一个 y 值与之对应，这样定义的函数称为**单值函数**. 若同一个 x 值可以对应多于一个的 y 值，则称这种函数为 **多值函数**. 在本书范围内，我们只讨论单值函数.

1.3.2 函数的表示法

在中学课程里，我们已经知道函数的表示法主要有三种，即解析法、列表法和图像法.

有些函数在其定义域的不同部分用不同的公式表达，这类函数通常称为**分段函数**. 例如，函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

是分段函数，称为**符号函数**, 其图像如图 1.1所示. 又如函数 $f(x) = |x|$ 也可以用如下的分段函数表示:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

它还可以表示为 $f(x) = x\operatorname{sgn} x$.

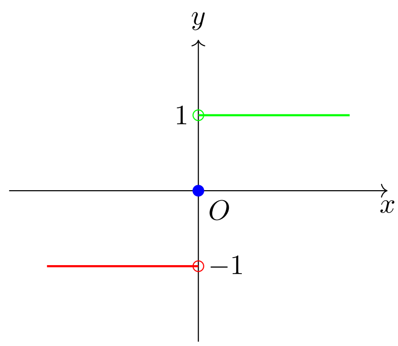


图 1.1: sgn x 的图像

函数 $y = f(x), x \in D$ 又可以用有序数对的集合 $G = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 来表示. 在坐标平面上，集合 G 的每一个元素 (x, y) 对应平面上的一个点，因而集合 G 在坐标平面上描绘出这个函数的图像. 这就是用图像法表示函数的依据.

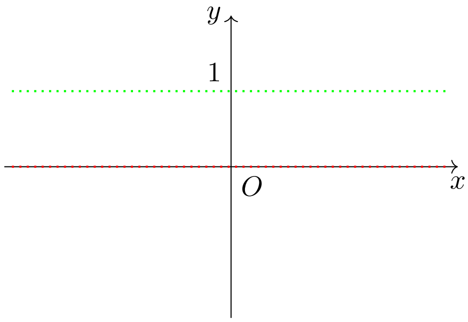
有些函数只能用语言来描述. 比如，定义在 $\mathbb{R}$ 上的狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当}x\text{为有理数} \\ 0, & \text{当}x\text{为无理数} \end{cases}$$

和定义在 $[0, 1]$ 上的黎曼 (Riemann) 函数

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{当}x = \dfrac{q}{p}(p, q \in \mathbb{N}_+, \dfrac{q}{p}\text{为既约真分数}) \\ 0, & \text{当}x = 0, 1\text{和}(0, 1)\text{内的无理数}. \end{cases}$$

图 1.2是这两个函数的示意图.



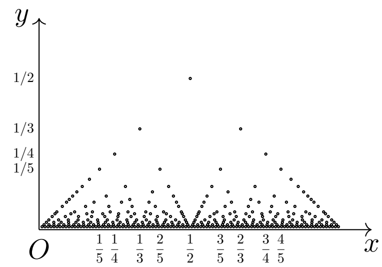


图 1.2: 狄利克雷函数和黎曼函数的示意图

1.3.3 函数的四则运算

定义 7 (函数的四则运算) 给定两个函数 $f, x \in D_1$ 和 $g, x \in D_2$. 记 $D = D_1 \cap D_2$, 并设 $D \neq \varnothing$. 我们定义 f 与 g 在 D 上的和、差、积运算如下:

$$F(x) = f(x) + g(x), x \in D$$
$$G(x) = f(x) - g(x), x \in D$$
$$H(x) = f(x)g(x), x \in D$$

若在 D 中剔除使 $g(x) = 0$ 的 x 值, 即令 $D^* = D_1 \cap \{x \mid g(x) \neq 0, x \in D_2\} \neq \varnothing$, 可在 D^* 上可以定义 f 与 g 的商的运算如下:

$$L(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D^*$$

注 4 若 $D = D_1 \cap D_2 = \varnothing$, 则 f 与 g 不能进行四则运算. 例如, 设

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, x \in D_1 = \{x \mid \mid x \mid \leq 1\}$$
$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4}, x \in D_2 = \{x \mid \mid x \mid \geq 2\}$$

由于 $D = D_1 \cap D_2 = \varnothing$, 所以表达式 $f(x) + g(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 4}$ 是没有意义的.

以后为了叙述方便，函数 f 与 g 的和、差、积、商分别写作 $f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}$.

1.3.4 复合函数

定义 8 (函数的复合) 设有两个函数 $y = f(u), u \in D$ 和 $u = g(x), x \in E$. 记 $E^* = \{x \mid g(x) \in D\} \cap E$. 若 $E^* \neq \varnothing$, 则对每一个 $x \in E^*$, 都可以通过函数 g 对应 D 上唯一的一个值 u ，而 u 又可以通过函数 f 对应唯一的一个值 y. 这就确定了一个定义在 E^* 上的函数, 它以 x 为自变量，y 为因变量，记作

$$y = f(g(x)), x \in E^* \text{ 或 } (f \circ g)(x), x \in E^*$$

称为函数 f 与 g 的**复合函数**, 并称 f 为**外函数**,g 为**复合函数**,u 为**中间变量**.

函数 f 与 g 的复合运算也可以简单地写作 $f \circ g$.

例 8

求函数 $y = f(u) = \sqrt{u}, u \in D = [0, +\infty)$ 与函数 $u = g(x) = 1 - x^2, x \in E = \mathbb{R}$ 的复合函数.

解 定义域 $E^* = \{x \mid 1 - x^2 \geq 0\} \cap \mathbb{R} = [-1, 1]$.

复合函数为 $y = f(g(x)) = \sqrt{1 - x^2}, x \in E^*$ 或 $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 - x^2}, x \in E^*$ ■

复合函数也可以由多个函数相继复合而成. 例如，由三个函数 $y = \sin u, u = \sqrt{v}, v = 1 - x^2$ (它们的定义域取为各自的存在域) 相继复合而得的复合函数为 $y = \sin \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1]$.

注 5 当且仅当 $E^* \neq \varnothing$ 时，函数 f 与 g 才能进行复合. 例如，以 $y = f(u) = \arcsin u, u \in D = [-1, 1]$ 为外函数，$u = g(x) = 2 + x^2, x \in E = \mathbb{R}$ 为内函数，就不能进行复合. 这是因为外函数的定义域 $D = [-1, 1]$ 与内函数的值域 $g(E) = [2, +\infty)$ 不相交.

1.3.5 反函数

函数 $y = f(x)$ 的自变量 x 与因变量 y 的关系往往是相对的. 有时我们不仅要研究 y 随 x 而变化的状况，也要研究 x 随 y 而变化的状况. 对此，我们引入反函数的概念.

定义 9 (反函数) 设函数 $y = f(x), x \in D$ 满足: 对于值域 $f(D)$ 上的每一个 y, D 中有且只有一个 x, 使得 $f(x) = y$, 则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数，称这个函数为 f 的**反函数**, 记作

$$
\begin{aligned}
f^{-1} : & f(D) \to D \\
& y \mapsto x
\end{aligned}
$$

或

$$
x = f^{-1}(y), y \in f(D) \tag{6}
$$

注 6 函数 f 有反函数，意味着 f 是 D 与 $f(D)$ 之间的一个一一映射. 我们称 f^{-1} 为映射 f 的**逆映射**, 它把集合 $f(D)$ 映射到集合 D, 即把 $f(D)$ 中的每一个值 $f(a)$ 对应到 D 上唯一的一个值 a. 这时，称 a 为逆映射 f^{-1} 下 $f(a)$ 的象，而 $f(a)$ 则是 a 在逆映射 f^{-1} 下的原象.

从上述的讨论可以看到，函数 f 也是函数 f^{-1} 的反函数. 或者说，函数 f 和函数 f^{-1} 互为反函数. 并且，我们可以得到以下恒等式:

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(f(x)) \equiv x, x \in D \\
f(f^{-1}(y)) \equiv y, y \in f(D)
\end{aligned}
$$

注 7 在反函数 f^{-1} 的表达 式 *(6)* 中，是以 y 为自变量，x 为因变量. 如果按照习惯，仍用 x 作为自变量的记号，y 作为自变量的记号，则反函数可记作

$$
y = f^{-1}(x), x \in f(D) \tag{7}
$$

例如，按照习惯记法，函数 $y=ax+b(a\neq 0, y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 与 $y=\sin x, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的反函数分别是 $y=\frac{x-b}{a}, y=log_a x$ 与 $y=\arcsin x$.

应该注意，尽管反函数 f^{-1} 的表达式 *(6)* 和表达式 *(7)* 的形式有所不同，但它们仍然表示同一个函数，因为它们的定义域都是 $f(D)$, 对应法则都是 f^{-1}, 只是变量所用的记号不同而已.

例 9

设 $a>0, n(\geq 2)$ 是自然数. 证明: $x^n=a$ 有唯一的正数解. 这个解称为 a 的 n 次正根 (即算术根), 记为 $\sqrt[n]{a}$ 或 $a^{\frac{1}{n}}$.

证明 为简单起见，我们仅证 $n=2$ 的情形.

首先证明存在性. $a=1$ 时显然有解. 又由于方程 $x^2=a$ 与方程 $(\frac{1}{x})^2=\frac{1}{a}$ 具有相同的解, 所以我们仅需考虑 $0<a<1$ 的情形.

设 $E=\{x\mid x>0, x^2<a\}$. 易得，1 是 E 的一个上界且 $a\in E$. 由确界原理得，E 存在上确界. 记 $\eta=\sup E$, 则有 $a\leq\eta\leq 1$. 下面证明 $\eta^2=a$.

- 若 $\eta^2>a$, 根据实数的阿基米德性质，存在自然数 m, 使得 $\frac{1}{m}<\frac{\eta^2-a}{2}, \frac{1}{m}<\eta$. 又由确界的定义得，存在 $x_0\in E$, 有 $x_0>\eta-\frac{1}{m}>0$, 从而

$$x_0^2>(\eta-\frac{1}{m})^2=\eta^2-2\cdot\frac{\eta}{m}+\frac{1}{m^2}>\eta^2-\frac{2}{m}>\eta^2-(\eta^2-a)=a$$

这与 $x_0\in E$ 相矛盾，说明 $\eta^2\leq a$.

- 若 $\eta^2<a$, 根据实数的阿基米德性质，存在自然数 m, 使得 $\frac{1}{m}<\frac{a-\eta^2}{3}, \frac{1}{m}<\eta$. 从而

$$(\eta+\frac{1}{m})^2=\eta^2+2\cdot\frac{\eta}{m}+\frac{1}{m^2}<\eta^2+\frac{3}{m}><\eta^2+(a-\eta^2)=a$$

这说明 $x_0=\eta+\frac{1}{m}\in E$, 但 $x_0>\eta$, 这与 η 是 E 的上确界相矛盾，说明 $\eta^2=a$.

再证明唯一性. 对任意正数 $b(\neq\eta)$, 有 $b^2-a=b^2-\eta^2=(b-\eta)(b+\eta)\neq 0$. 这就证明了解的唯一性. ■

1.3.6 初等函数

在中学数学中, 读者已经熟悉基本初等函数有以下六类:

常量函数 $y=c$ (c 是常数)

幂函数 $y=x^\alpha$ (α 为实数)

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$

对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

三角函数 $y=\sin x$ (正弦函数) $y=\cos x$ (余弦函数)
$y=\tan x$ (正切函数) $y=\cot x$ (余切函数)

反三角函数 $y=\arcsin x$ (反正弦函数) $y=\arccos x$ (反余弦函数)
$y=\arctan x$ (反正切函数) $y=\operatorname{arccot} x$ (反余切函数)

这里我们要指出，幂函数 $y=x^\alpha$ 和指数函数 $y=a^x$ 都涉及乘幂，而在中学数学课程中只给出了有理指数乘幂的定义. 下面我们借助确界来定义无理指数幂，使它与有理指数幂一起构成实指数幂，并保持有理指数幂的基本性质.

定义 10 (无理指数幂) 给定实数 $a>0, a\neq 1$. 设 x 为无理数，我们规定

$$a^x=\begin{cases}\sup\limits_{r<x}\{a^r \mid r\text{为有理数}\} & a>1\\ \inf\limits_{r<x}\{a^r \mid r\text{为有理数}\} & 0<a<1\end{cases}$$

注 8 对任何一个无理数 x, 必有有理数 r_0, 使得 $x<r_0$. 则当有理数 $r<x$ 时，有 $r<r_0$, 从而根据有理数乘幂的性质，当 $a>1$ 时，有 $a^r<a^{r_0}$. 这表明非空数集 $\{a^r \mid r\text{为有理数}\}$ 有一个上界 a^{r_0}. 由确界原理，该数集有上确界. 同理得，$0<a<1$ 时，该数集有下确界. 由确界的唯一性得，上述定义是合理的.

注 9 如果将上述定义中的 $r<x$ 改为 $r\leq x$ ，那么无论 x 是有理数还是无理数，a^x 都可以用该定义中的确界形式来统一表示.

定义 11 (初等函数) 由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数，统称为**初等函数**.

不是初等函数的函数，称为**非初等函数**. 如狄利克雷函数和黎曼函数等.

习题 1.3

† 1 试作下列函数的图像:

(1) $y=x^2+1$ (2) $y=(x+1)^2$ (3) $y=1-(x+1)^2$

(4) $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$ (5) $y=\begin{cases}3x & |x|>1\\ x^3 & |x|<1\\ 3 & |x|=1\end{cases}$

解 第 (1)、(2)、(3) 问都是二次函数，只需注意顶点、对称轴、开口方向便能很好地绘制出函数图像.

第 (4) 问可以先画出 $y=\sin x$ 的图像，再根据符号函数的意义绘制出 $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$.

第 (5) 问只需注意各个部分定义域和函数关系的对应即可.

图像如 图 1.3, 图 1.4 所示. ■

† 2 试比较函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 分别当 $a=2$ 和 $a=\dfrac{1}{2}$ 时的图像.

解 绘制图像如图 1.5所示. 可见，$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 总关于直线 $y=x$ 对称. 事实上，互为反函数的函数的图像总是关于 $y=x$ 对称. ■

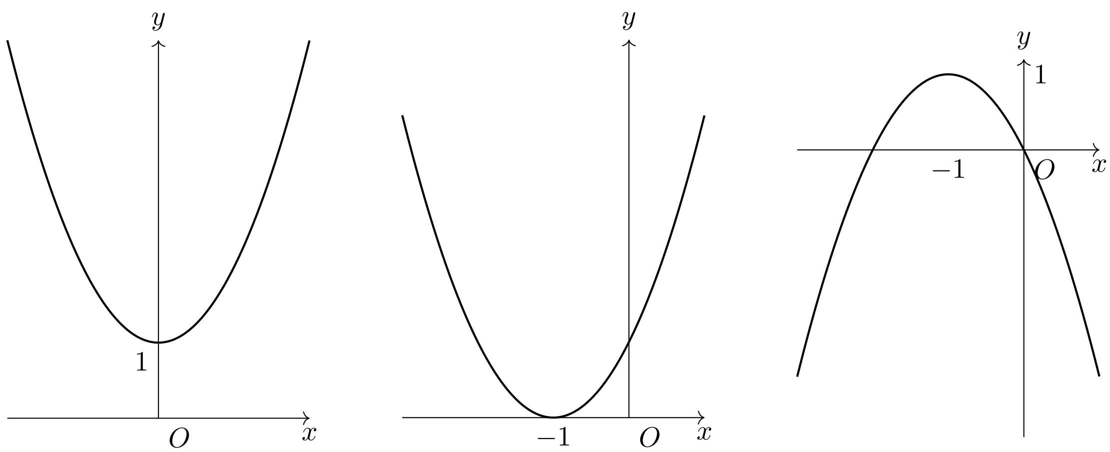


图 1.3: 第 1 题中 (1)、(2)、(3) 的图像

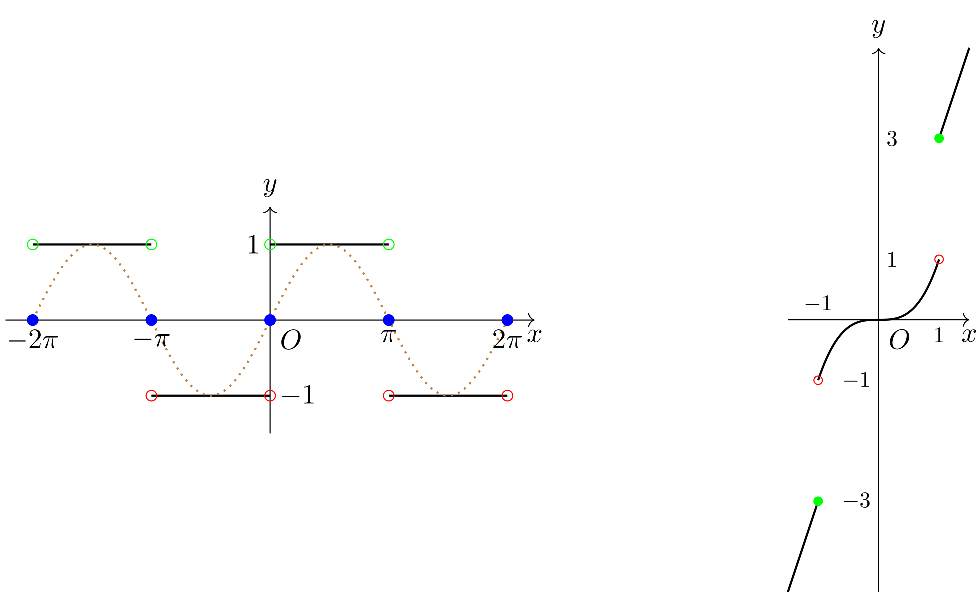


图 1.4: 第 1 题中 (4)、(5) 的图像

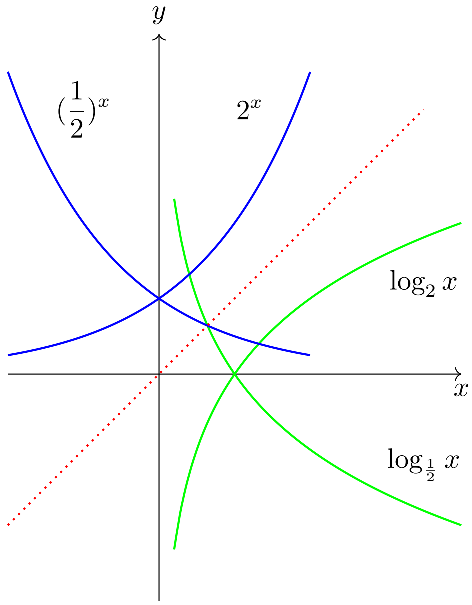
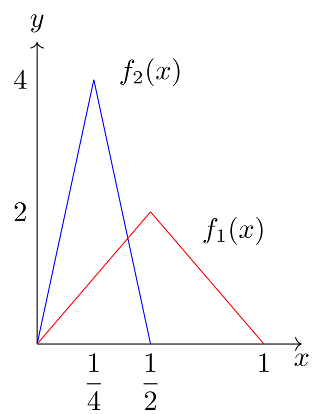


图 1.5: $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 图像的比较

† 3 根据下图写出定义在 $[0, 1]$ 上的分段函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的解析式.



解

$$f_1(x) = \begin{cases} 4x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -4x + 4 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 16x & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ -16x + 8 & \frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

† 4 确定下列初等函数的存在域:

(1) $y = \sin \sin x$ (2) $y = \lg(\lg x)$

(3) $y = \arcsin(\lg \dfrac{x}{10})$　　(4) $y = \lg(\arcsin \dfrac{x}{10})$

解 (1) 函数由 $y = \sin u, u \in \mathbb{R}$ 和 $u = \sin x, x \in \mathbb{R}$ 复合而成. 函数的存在域为 $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

(2) 函数由 $y = \lg u, u \in (0, +\infty)$ 和 $u = \lg x, x \in (0, +\infty)$ 复合而成. 函数的存在域为 $\{x \in (0, +\infty) \mid \lg x \in (0, +\infty)\} = (1, +\infty)$.

(3) 函数由 $y = \arcsin u, u \in [-1, 1]$ 和 $u = \lg \dfrac{x}{10}, x \in (0, +\infty)$ 复合而成. 函数的存在域为 $\{x \in (0, +\infty) \mid \lg \dfrac{x}{10} \in [-1, 1]\} = [1, 100]$.

(4) 函数由 $y = \lg u, u \in (0, +\infty)$ 和 $u = \arcsin \dfrac{x}{10}, x \in [-10, 10]$ 复合而成. 函数的存在域为 $\{x \in [-10, 10] \mid \arcsin \dfrac{x}{10} \in (0, +\infty)\} = (0, 10]$. ■

† 5 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2+x & x \le 0 \\ 2^x & x > 0 \end{cases}$. 求:

(1)$f(-3), f(0), f(1)$　　(2) $f(\Delta x) - f(0), f(-\Delta x) - f(0).(\Delta x > 0)$

解 (1) $f(-3) = 2 + (-3) = -1$　　$f(0) = 2 + 0 = 2$　　$f(1) = 2^1 = 2$

(2) $f(\Delta x) - f(0) = 2^{\Delta x} - 2$

$f(-\Delta x) - f(0) = 2 - \Delta x - 2 = -\Delta x$ ■

† 6 设函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, 求 $f(2+x), f(2x), f(x^2), f(f(x)), f(\dfrac{1}{f(x)})$.

解

$$\begin{aligned}
f(2+x) &= \frac{1}{1+(2+x)} = \frac{1}{3+x} \\
f(2x) &= \frac{1}{1+2x} \\
f(x^2) &= \frac{1}{1+x^2} \\
f(f(x)) &= \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{2+x} \\
f(\frac{1}{f(x)}) &= f(1+x) = \frac{1}{1+(1+x)} = \frac{1}{2+x}
\end{aligned}$$

■

† 7 试问下列函数是由哪些初等函数复合而成:

(1) $y = (1+x)^{20}$　　(2) $y = (\arcsin x^2)^2$

(3) $y = \lg(1 + \sqrt{1+x^2})$　　(4) $y = 2^{\sin^2 x}$

解 (1) 函数由 $y = u^{20}$, $u = v + w$,$v = 1$,$w = x$ 复合而成.

(2) 函数由 $y = u^2$, $u = \arcsin v$ 和 $v = x^2$ 复合而成.

(3) 函数由 $y = \lg u$, $u = v + w$, $v = 1$,$w = s^{\frac{1}{2}}$,$s = v + t$,$t = x^2$ 复合而成.

(3) 函数由 $y = 2^u$, $u = v^2$, $v = \sin x$ 复合而成. ■

† 8 在什么条件下，函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数就是它本身?

解 (1) 若 $c=0$, 则 $d\neq 0$, 则原函数为 $y=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$

若反函数存在，则 $a\neq 0$, 反解得 $x=\dfrac{d}{a}y-\dfrac{b}{a}$.

如果反函数就是它本身，则 $\dfrac{d}{a}=\dfrac{a}{d},\dfrac{b}{d}=-\dfrac{b}{a}\iff a^2=d^2,b(a+d)=0$

因此，$c=0,a\neq 0,a=d,b=0$ 或 $c=0,a\neq 0,a=-d$ 时，函数的反函数就是它本身.

(2) 若 $c\neq 0$, 则原函数为 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},x\neq -\dfrac{d}{c}$

若 $\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$, 则反函数存在. 反解得 $x=\dfrac{-yd+b}{cy-a},y\neq\dfrac{a}{c}$.

如果反函数就是它本身，则 $a=-d$.

因此，$c\neq 0,ad\neq bc,a=-d$ 时，函数的反函数就是它本身.

† 9 试作函数 $y=\arcsin(\sin x)$ 的图像.

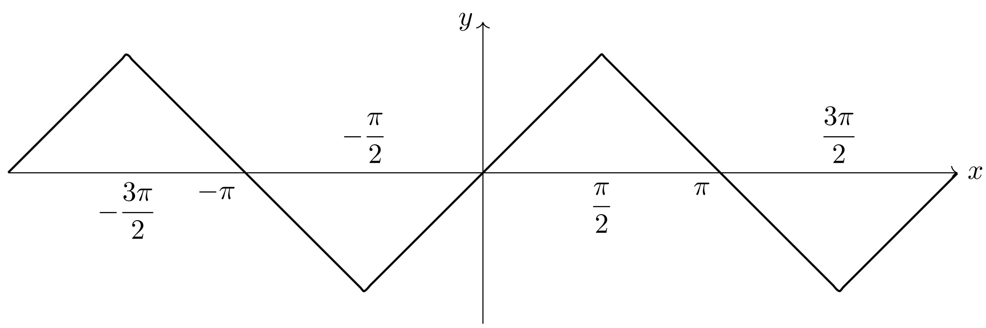


图 1.6: 函数 $y=\arcsin(\sin x)$ 的图像

解 在 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上，$y=\arcsin(\sin x)=x$.

而当 $x\in[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}]$ 时，有 $\pi-x\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$,

故 $y=\arcsin(\sin x)=\arcsin(\sin(\pi-x))=\pi-x$.

当 $x\in[\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}]$ 时，有 $x-2\pi\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$,

故 $y=\arcsin(\sin x)=\arcsin(\sin(x-2\pi))=x-2\pi$.

可归纳得 $y=\arcsin(\sin x)=(-1)^k(x-k\pi),x\in[-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi],k\in\mathbb{Z}$

† 10 试问下列等式是否成立:

(1) $\tan(\arctan x)=x,x\in\mathbb{R}$

(2) $\arctan(\tan x)=x,x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k=0,\pm1,\pm2,+\infty$

解 (1) 成立.

(2) 不成立. 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上确实有 $\arctan(\tan x)=x$. 但在 $(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$ 上，有 $x-\pi\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$, 则 $\arctan(\tan x)=\arctan(\tan(x-\pi))=x-\pi$. 同理可得，在 $(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi)$ 上，有 $\arctan(\tan x)=\arctan(\tan(x-k\pi))=x-k\pi$

† **11** 试问 $y = |x|$ 是初等函数吗?

解 是. $y = |x| = \sqrt{x^2}$ 由基本初等函数 $y = u^{\frac{1}{2}}$ 和 $u = x^2$ 复合而成.

† **12** 证明关于函数 $y = \lfloor x \rfloor$ 的如下不等式:

(1) 当 $x > 0$ 时, $1 - x < x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor \le 1$.

(2) 当 $x < 0$ 时, $1 \le x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor < 1 - x$.

证明 (1) 当 $x > 0$ 时, 有 $\frac{1}{x} - 1 < \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \le \frac{1}{x}$, 两边同乘 x, 得到 $1 - x < x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor \le 1$.

(2) 当 $x < 0$ 时, 同样有 $\frac{1}{x} - 1 < \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \le \frac{1}{x}$, 两边同乘 x, 得到 $1 \le x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor < 1 - x$.

1.4 具有某些特性的函数

1.4.1 有界函数

定义 12 (有界函数) 设 f 为定义在 D 上的函数. 若存在数 $M(L)$, 使得对每一个 $x \in D$, 都有 $f(x) \le M(f(x) \ge L)$, 则称 f 为 D 上的**有上 *(*下*)* 界函数**, $M(L)$ 称为 f 在 D 上的一个上 *(*下*)* 界.

根据定义, f 在 D 上有上 (下) 界, 意味着值域 $f(D)$ 是一个有上 (下) 界的数集. 又若 $M(L)$ 为 f 在 D 上的上 (下) 界, 则任何大于 (小于)$M(L)$ 的数也是 f 在 D 上的上 (下) 界.

定义 13 设 f 为定义在 D 上的函数. 若存在正数 M, 使得对每一个 $x \in D$, 有 $|f(x)| \le M$, 则称 f 为 D 上的 **有界函数**.

根据定义, f 在 D 上有界, 意味着值域 $f(D)$ 是一个有界集. 又按定义, 不难验证:f 在 D 上有界的充要条件是 f 在 D 上既有上界又有下界. 同时, 从几何意义上看, f 在 D 上有界, 那么 f 的图像将完全落在直线 $y = M$ 和 $y = -M$ 之间.

例如, 正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 为 $\mathbb{R}$ 上的有界函数, 因为对每一个 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $|\sin x| \le 1$ 和 $|\cos x| \le 1$.

关于函数 f 在数集 D 上无上界、无下界或无界的定义, 可按上述相应定义的否定说法来叙述. 例如, 设 f 为定义在 D 上的函数, 若对任何 M (无论 M 多大), 都存在 $x_0 \in D$, 使得 $f(x_0) > M$, 则称 f 为 D 上的**无上界函数**.

作为练习, 读者可以自行写出无下界函数与无界函数的定义.

例 10

证明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 为 $(0, 1]$ 上的无上界函数.

证明 对于任何正数 M, 取 $(0, 1]$ 上的一点 $x_0 = \frac{1}{M+1}$, 则有 $f(x_0) = \frac{1}{x_0} = M + 1 > M$.

前面已经指出，f 在其定义域 D 上有上界，是指值域 $f(D)$ 为有上界的数集. 于是由确界原理，数集 $f(D)$ 有上确界. 通常，我们把 $f(D)$ 的上确界记为 $\sup\limits_{x\in D} f(x)$, 并称之为 f 在 D 上的上确界. 类似地，若 f 在其定义域 D 上有下界，则 f 在 D 上的下确界记为 $\inf\limits_{x\in D} f(x)$.

例 11

设 f,g 为 D 上的有界函数. 证明:

(1) $\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)\le \inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$

(2) $\sup\limits_{x\in D} f(x)+\sup\limits_{x\in D} g(x)\ge \sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$

证明 (1) 对任何 $x\in D$, 都有 $\inf\limits_{x\in D} f(x)\le f(x), \inf\limits_{x\in D} g(x)\le g(x)$. 由此可得 $\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)\le f(x)+g(x)$. 这说明 $\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)$ 是 $f(x)+g(x)$ 的一个下界，故 $\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)\le \inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$

(2) 可类似证明. ■

注 10 例 *11* 中的两个不等式,其严格的不等号有可能成立. 例如,设 $f(x)=x, g(x)=-x, x\in[-1,1]$, 则有 $\inf\limits_{|x|<1} f(x)=\inf\limits_{|x|<1} g(x)=-1, \sup\limits_{|x|<1} f(x)=\sup\limits_{|x|<1} g(x)=1$, 然而 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}=\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}=0$

1.4.2 单调函数

定义 14 (单调函数) 设 f 为定义在 D 上的函数. 若对任何 $x_1,x_2\in D$, 当 $x_1<x_2$ 时，总有

(1) $f(x_1)\le f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的 ***(递)* 增函数**, 特别当成立严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 时，称 f 为 D 上的**严格 *(递)* 增函数**

(2) $f(x_1)\ge f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的 ***(递)* 减函数**, 特别当成立严格不等式 $f(x_1)>f(x_2)$ 时，称 f 为 D 上的**严格 *(递)* 减函数**

增函数和减函数统称为 **单调函数**. 严格增函数和严格减函数统称为 **严格单调函数**.

例 12

函数 $y=x^3$ 在 $\mathbb{R}$ 上是严格增的. 因为对任何的 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, 当 $x_1<x_2$ 时，总有 $x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)=(x_2-x_1)[(x_2+\frac{x_1}{2})^2+\frac{3}{4}x_1^2]>0$, 即 $x_1^3<x_2^3$.

例 13

函数 $y=\lfloor x\rfloor$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增的. 因为对任何的 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, 当 $x_1<x_2$ 时, 显然有 $\lfloor x_1\rfloor<\lfloor x_2\rfloor$. 但此函数在 $\mathbb{R}$ 上不是严格增的, 若取 $x_1=0, x_2=\frac{1}{2}$, 则有 $\lfloor x_1\rfloor=\lfloor x_2\rfloor=0$, 即定义中所要求的严格不等式不成立. 此函数的图像如图 1.7所示.

严格单调函数的图像与任一平行于 x 轴的直线至多有一个交点，这一特性保证了它必定具有反函数.

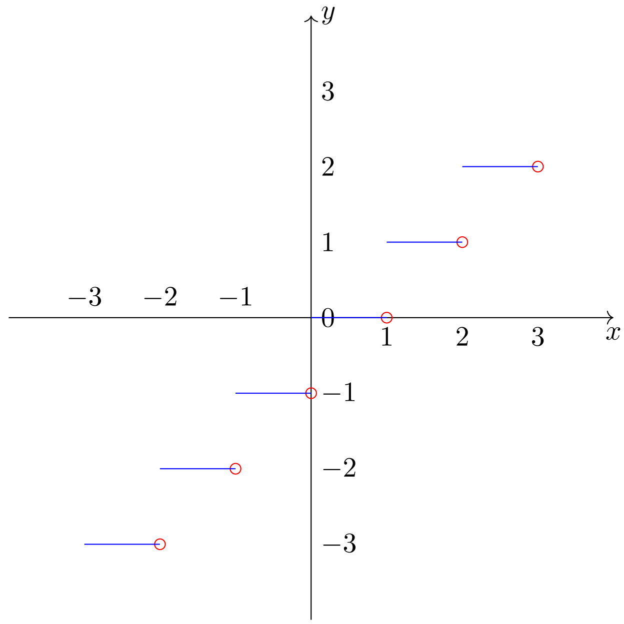


图 1.7: $y=\lfloor x\rfloor$ 的图像

定理 3 设 $y=f(x),x\in D$ 为严格增 *(减)* 函数，则 f 必有反函数 f^{-1}，且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格增 *(减)* 函数.

证明 设 f 在 D 上严格增. 对任何一个 $y\in f(D)$, 有 $x\in D$ 使 $f(x)=y$. 下面证明: 这样的 x 只能有一个. 事实上，对于 D 中任何一个 $x_1\neq x$, 由 f 在 D 上的严格增性，当 $x_1<x$ 时，$f(x_1)<y$, 当 $x_1>x$ 时，有 $f(x_1)>y$, 总之 $f(x_1)\neq y$. 这就说明，对每一个 $y\in f(D)$, 都只存在唯一的一个 $x\in D$, 使得 $f(x)=y$, 从而函数 f 存在反函数 $x=f^{-1}(y),y\in f(D)$.

现证 f^{-1} 也是严格增的. 任取 $y_1,y_2\in f(D),y_1<y_2$. 设 $x_1=f^{-1}(y_1),x_2=f^{-2}(y_2)$, 则 $y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)$. 由 $y_1<y_2$ 及 f 的单调性, 显然有 $x_1<x_2$, 即 $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$. 所以反函数 f^{-1} 是严格增的. ■

例 14

函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 是严格增的，其值域为 $[0,+\infty)$, 故有反函数 $y=\sqrt{x},x\in[0,+\infty)$；函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 是严格减的, 其值域为 $(0,+\infty)$, 故有反函数 $y=-\sqrt{x},x\in(0,+\infty)$. 但 $y=x^2$ 在整个定义域 $\mathbb{R}$ 上不是单调的，也不存在反函数.

上节中我们给出了实指数幂的定义，从而将指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的定义域拓广到整个实数集 $\mathbb{R}$. 下面证明指数函数在 $\mathbb{R}$ 上的严格单调性.

例 15

证明: $y=a^x$ 当 $a>1$ 时在在 $\mathbb{R}$ 上严格递增，当 $0<a<1$ 时在 $\mathbb{R}$ 上严格递减.

证明 设 $a>1$. 给定 $x_1,x_2\in\mathbb{R},x_1<x_2$. 由有理数集的稠密性，可取到有理数 r_1,r_2, 使得 $x_1<r_1<r_2<x_2$(参见例 1), 故有 $a^{x_1}=\sup\limits_{r\leq x_1}\{a^r\mid r\text{为有理数}\}\leq a^{r_1}<a^{r_2}\leq\sup\limits_{r\leq x_2}\{a^r\mid r\text{为有理数}\}=a^{x_2}$, 这就证明了 $y=a^x$ 当 $a>1$ 时在在 $\mathbb{R}$ 上严格递增.

类似地可以证明 $y=a^x$ 当 $0<a<1$ 时在 $\mathbb{R}$ 上严格递减. ■

注 11 因为 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的值域为 $(0,+\infty)$, 所以由例 *15*及定理 *3*还可得出结论: 对数函数 $y=\log_a x$ 当 $a>1$ 时在 $(0,+\infty)$ 上严格递增, 当 $0<a<1$ 时在 $(0,+\infty)$ 上严格递减. 另外, 在第四章中将证明关于实指数幂的一个基本性质 $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$, 从而相应地有 $\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x(a>0,a\neq 1,x\in\mathbb{R}^+,\alpha\in\mathbb{R})$.

1.4.3 奇函数与偶函数

定义 15 (函数的奇偶性) 设 D 为对称于原点的数集, f 为定义在 D 上的函数. 若对每一个 $x\in D$, 有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 f 为 D 上的**奇函数**. 若对每一个 $x\in D$, 有 $f(-x)=f(x)$, 则称 f 为 D 上的**偶函数**.

从函数图形上来看，奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像则关于 y 轴对称.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 和正切函数 $y=\tan x$ 是奇函数，余弦函数 $y=\cos x$ 是偶函数，符号函数是奇函数. 而函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数. 因为如果取 $x_0=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $f(x_0)=\sqrt{2}, f(-x_0)=0$, 显然既不成立 $f(-x_0)=-f(x_0)$, 也不成立 $f(-x_0)=f(x_0)$.

1.4.4 周期函数

定义 16 (周期函数) 设 f 为定义在数集 D 上的函数. 若存在 $\sigma>0$, 使得对一切 $x\in D$, 有 $x\pm\sigma\in D$, 且 $f(x\pm\sigma)=f(x)$, 则称 f 为**周期函数**,σ 为 f 的一个**周期**. 显然, 若 σ 为 f 的周期, 则 $n\sigma$ *(n* 为正整数*)* 也是 f 的周期. 若在周期函数 f 的所有周期中有一个最小的周期, 则称此最小周期为 f 的**基本周期**, 或简称**周期**.

例如，$\sin x$ 的周期为 2π,$\tan x$ 的周期为 π, 函数 $f(x)=x-\lfloor x\rfloor, x\in\mathbb{R}$ 的周期为 1(图 1.8), 常量函数 $f(x)=c$ 是以任何正数为周期的周期函数，但不存在基本周期.

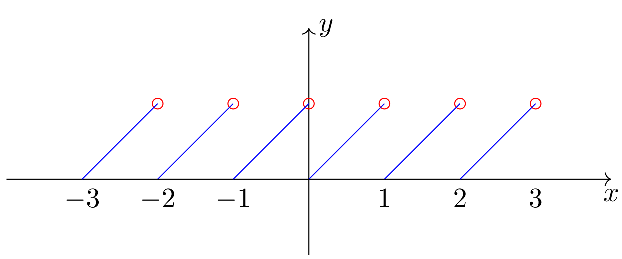


图 1.8: $y=x-\lfloor x\rfloor$ 的图像

习题 1.4

† **1** 证明 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数.

证明 对于任意的 $x\in\mathbb{R}$，若 $x\neq 0$，则 $|\dfrac{x}{x^2+1}|=\dfrac{|x|}{(|x|)^2+1}<\dfrac{1}{|x|+\frac{1}{|x|}}\leq\dfrac{1}{2}$; 若 $x=0$, 也有 $|\dfrac{x}{x^2+1}|=0<\dfrac{1}{2}$, 故 $M=\dfrac{1}{2}$ 是 f 的一个界.

† **2** (1) 叙述无界函数的定义

(2) 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 为 $(0,1)$ 上的无界函数.

(3) 举出 f 的例子，使 f 为闭区间 $[0,1]$ 上的无界函数.

解 (1) 设 f 为定义在 D 上的函数. 若对任意的正数 M, 都存在着 $x_0\in D$, 有 $|f(x)|>M$, 则称 f 为 D 上的无界函数.

(2) 对任意的正数 M, 都存在着 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{M+1}}\in(0,1)$, 有 $|\dfrac{1}{x_0^2}|=M+1>M$, 故 f 为 D 上的无界函数.

(3) 如 $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{1}{x^2} & 0<x\leq 1\end{cases}$

† **3** 证明下列函数在指定区间上的单调性:

(1) $y=3x-1$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上严格递增.

(2) $y=\sin x$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上严格递增.

(3) $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上严格递减.

证明 (1) 任意 $x_1<x_2\in(-\infty,\infty)$, 有 $y_1-y_2=(3x_1-1)-(3x_2-1)=3(x_1-x_2)<0$, 即 $y_1<y_2$, 故 $y=3x-1$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上严格递增.

(2) 任意 $x_1<x_2\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$, 有 $y_1-y_2=\sin x_1-\sin x_2=\sin(\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{x_1-x_2}{2})+\sin(\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{x_1-x_2}{2})=2\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}$.

$\dfrac{x_1+x_2}{2}\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$, 故 $\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}>0$. $\dfrac{x_1-x_2}{2}\in[-\dfrac{\pi}{2},0)$, 故 $\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$.

则 $y_1<y_2$. 故 $y=\sin x$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上严格递增.

(3) 任意 $x_1<x_2\in[0,\pi]$, 有 $y_1-y_2=\cos x_1-\cos x_2=\cos(\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{x_1-x_2}{2})+\cos(\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{x_1-x_2}{2})=-2\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}$.

$\dfrac{x_1+x_2}{2}\in(0,\pi)$, 故 $\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}>0$. $\dfrac{x_1-x_2}{2}\in[-\dfrac{\pi}{2},0)$, 故 $\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$.

则 $y_1<y_2$. 故 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上严格递减.

† **4** 判别下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4+x^2-1$ (2) $f(x)=x+\sin x$

(3) $f(x)=x^2e^{-x^2}$ (4) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$

解 (1) $f(-x)=\dfrac{1}{2}(-x)^4+(-x)^2-1=\dfrac{1}{2}x^4+x^2-1=f(x),x\in\mathbb{R}$. 故 $f(x)$ 是偶函数.

(2) $f(-x)=-x+\sin(-x)=-x-\sin x=-(x+\sin x)=-f(x),x\in\mathbb{R}$. 故 $f(x)$ 是奇函数.

(3) $f(-x)=(-x)^2e^{-(-x)^2}=x^2e^{-x^2}=f(x),x\in\mathbb{R}$. 故 $f(x)$ 是偶函数.

(4) $f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=-\lg\dfrac{1}{-x+\sqrt{1+(-x)^2}}=-\lg\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{(x+\sqrt{1+x^2})(-x+\sqrt{1+x^2})}=$ $-\lg\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)-x^2}=-\lg(-x+\sqrt{1+x^2})=-f(x), x\in\mathbb{R}$. 故 $f(x)$ 是奇函数.

† 5 求下列周期函数的周期:

(1)$\cos^2 x$　　(2) $\tan 3x$　　(3) $\cos\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{3}$

解 (1) $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$. 而 $\cos 2x$ 的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$. 故 $\cos^2 x$ 的周期为 π.

(2) $\tan x$ 的周期为 $T_0=\pi$, 故 $\tan 3x$ 的周期为 $\dfrac{T_0}{3}=\dfrac{\pi}{3}$.

(3) $\cos\dfrac{x}{2}$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$. $\cos\dfrac{x}{3}$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$.4 与 6 的最小公倍数为 12，故 $\cos\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{3}$ 的周期为 12π.

† 6 设函数 f 定义在 $[-a,a]$ 上，证明:

(1) $F(x)=f(x)+f(-x), x\in[-a,a]$ 为偶函数

(2) $G(x)=f(x)-f(-x), x\in[-a,a]$ 为奇函数

(3) f 可表示成某个奇函数与某个偶函数之和.

证明 (1) $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x), x\in[-a,a]$. 故 $F(x)$ 为偶函数.

(2) $G(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-G(x), x\in[-a,a]$. 故 $G(x)$ 为奇函数.

(3) $f(x)=\dfrac{[f(x)+f(-x)]+[f(x)-f(-x)]}{2}=\dfrac{F(x)-G(x)}{2}$. $\dfrac{F(x)}{2}$ 为偶函数，$\dfrac{G(x)}{2}$ 为奇函数.

† 7 由三角函数的两角和差公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\beta\sin\alpha$$

推出：

(1) 和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(2) 积化和差公式

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

证明 令和差化积公式等号左边的 $\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2},\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$，根据两角和差公式展开，即可得到和差化积公式. 将两角和差公式公式进行加减数乘运算即可得到积化和差公式. ■

† 8 设 f,g 为定义在 D 上的有界函数，满足 $f(x)\le g(x),x\in D$. 证明:

(1) $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}\le\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$ (2) $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}\le\inf\limits_{x\in D}\{g(x)\}$

证明 (1) 对于任何 $x\in D$, 有 $f(x)\le g(x)\le\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$. 故 $\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$ 是 $f(x)$ 的一个上界，则 $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}\le\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$.

(2) 对于任何 $x\in D$, 有 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}\le f(x)\le g(x)$. 故 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}$ 是 $g(x)$ 的一个下界，则 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}\le\inf\limits_{x\in D}\{g(x)\}$. ■

† 9 设 f 为定义在 D 上的有界函数, 证明:

(1) $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}$ (1) $\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}$

证明 (1) 记 $\xi=\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}$, 则在 D 上 $f(x)\ge\xi$ 且 $\forall\beta>\xi$, 都存在 x_0 使得 $f(x_0)<\beta$. 也就是说,$-f(x)\le-\xi$ 且 $\forall-\beta<-\xi$, 都存在 x_0 使得 $-f(x_0)>-\beta$. 故 $-\xi$ 为 $-f(x)$ 的上确界. 即 $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}$.

(2) 记 $\eta=\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}$, 则在 D 上 $f(x)\le\eta$ 且 $\forall\alpha<\eta$, 都存在 x_0 使得 $f(x_0)>\alpha$. 也就是说,$-f(x)\ge-\eta$ 且 $\forall-\alpha>-\eta$, 都存在 x_0 使得 $-f(x_0)<-\alpha$. 故 $-\eta$ 为 $-f(x)$ 的下确界. 即 $\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}$. ■

† 10 证明: $\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上无界，而在任何一个闭区间 $[a,b]\subset(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上有界.

证明 对于任意的 $M>0$, 存在 $x_0=\arctan(M+1)\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 使得 $|\tan x_0|=M+1>M$, 故 $\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上无界.

存在 $M=\max\{|\tan a|,|\tan b|\}$, 使得对任意的 $x\in[a,b]\subset(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 都有 $|\tan x|\le M$. ■

† 11 讨论狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数}\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数}\end{cases}$$

的有界性、单调性与周期性.

解 存在 $M=1$, 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $|D(x)|=0$ 或 $1\le M$, 故 $D(x)$ 为有界函数.

取 x_1 为有理数, 则存在无理数 $x_2>x_1$, 使得 $D(x_2)=0\le1=D(x_1)$. 取 x_1 为无理数，则存在有理数 $x_2>x_1$, 使得 $D(x_2)=1\ge0=D(x_1)$. 故 $D(x)$ 无单调性.

由于 有理数 + 有理数 = 有理数，无理数 + 有理数 = 无理数，所以对任意的 $x\in\mathbb{R},T\in\mathbb{Q}$, 有 $D(x+T)=D(x)$. 即任意有理数都是狄利克雷函数的周期. 但狄利克雷函数没有基本周期. ■

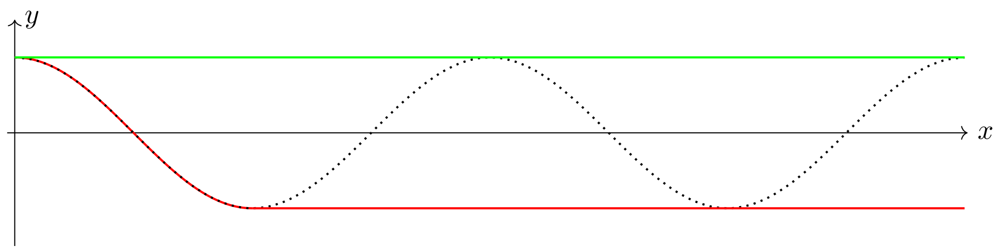
† 12 证明:$f(x)=x+\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增.

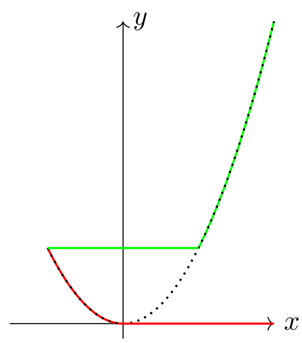
证明 任意的 $x_1<x_2$, 有 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)+(\sin x_1-\sin x_2)$
$=(x_1-x_2)-2\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}\le(x_1-x_2)+2|\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}||\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}|$
$<(x_1-x_2)+2|\dfrac{x_1-x_2}{2}||\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}|=(x_1-x_2)-2\times\dfrac{x_1-x_2}{2}|\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}|$
$=(x_1-x_2)(1-|\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}|)\le 0$. 即 $f(x_1)-f(x_2)<0$. 故:$f(x)=x+\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增.■

† 13 设定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数 f 在任何闭区间 $[a,b]$ 上有界. 定义 $[a,+\infty)$ 上的函数 $m(x)=\inf\limits_{a\le y\le x}f(y), M(x)=\sup\limits_{a\le y\le x}f(y)$. 试讨论 $m(x)$ 与 $M(x)$ 的图像, 其中

(1) $f(x)=\cos x, x\in[0,+\infty)$　　(2) $f(x)=x^2, x\in[-1,+\infty)$

解 在 $[a,x]$ 上 $\{f(y)\}$ 为有界数集, 故 $m(x)$ 为最小值,$M(x)$ 为最大值. 根据两个函数的性质，可绘制图像如下:





第 1 章总习题

† 1 设 $a,b\in\mathbb{R}$, 证明:

(1) $\max\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b+|a-b|)$

(2) $\min\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b-|a-b|)$

证明 设 $a>b$, 则 $\max\{a,b\}=a,\min\{a,b\}=b$.

(1) $\dfrac{1}{2}(a+b+|a-b|)=\dfrac{1}{2}(a+b+a-b)=a=\max\{a,b\}$.

(1) $\dfrac{1}{2}(a+b-|a-b|)=\dfrac{1}{2}(a+b-a+b)=b=\min\{a,b\}$. ■

† 2 设 f 和 g 都是 D 上的初等函数. 定义 $M(x)=\max\{f(x),g(x)\},m(x)=\min\{f(x),g(x)\},x\in D$. 试问 $M(x)$ 和 $m(x)$ 是否为初等函数?

解 由习题2 得，

$$M(x)=\frac{1}{2}(f+g+\mid f-g\mid)=\frac{1}{2}(f+g+\sqrt{(f-g)^2})$$
$$m(x)=\frac{1}{2}(f+g-\mid f-g\mid)=\frac{1}{2}(f+g-\sqrt{(f-g)^2})$$

故 $M(x),m(X)$ 由初等函数经过四则运算和复合运算得来, 均为初等函数.

† 3 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ ，求 $f(-x),f(x+1),f(x)+1,f(\dfrac{1}{x}),\dfrac{1}{f(x)},f(x^2),f(f(x))$.

解 $f(-x)=\dfrac{1+x}{1-x}$. $f(x+1)=\dfrac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\dfrac{-x}{x+2}$.

$f(x)+1=\dfrac{1-x}{1+x}+1=\dfrac{2}{1+x}$. $f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x+1}$.

$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1+x}{1-x}$. $f(x^2)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. $f(f(x))=\dfrac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}=\dfrac{2x}{2}=x$

† 4 已知 $f(\dfrac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$，求 $f(x)$.

解 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则 $x=\dfrac{1}{t}$, 代入表达式得 $f(t)=\dfrac{1}{t}+\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}$. 即 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}},x\neq 0$.

† 5 利用函数 $y=\lfloor x\rfloor$ 求解：

(1) 某系各班级推选学生代表，每 5 人推选 1 名代表，余额满 3 人可增选 1 名. 写出可推选代表数 y 与班级学生数 x 之间的函数关系.

(2) 正数 x 经四舍五入后得到整数 y , 写出 y 与 x 的函数关系.

解 (1) 余额满 3 人可增选 1 名，可加上 2 人后再取整，即 $y=\lfloor\dfrac{x+2}{5}\rfloor$

(2) 小数部分超过 0.5 可进 1. $y=\lfloor x+0.5\rfloor$

† 6 已知函数 $y=f(x)$ 的图像，试作下列各函数的图像：

(1) $y=-f(x)$ (2) $y=f(-x)$ (3) $y=-f(-x)$ (4) $y=\mid f(x)\mid$

(5) $y=\operatorname{sgn} f(x)$ (6) $y=\dfrac{1}{2}[\mid f(x)\mid+f(x)]$ (7) $y=\dfrac{1}{2}[\mid f(x)\mid-f(x)]$

解 (1) x 值相同，y 值相反. 二者图像关于 x 轴对称.

(2) x 值相反，y 值相同. 二者图像关于 y 轴对称.

(3) x 值相反，y 值相反. 二者图像关于原点对称.

(4) x 值相同,y 值非负则相等,y 值为负则相反. 相当于把原图像 y 值为负的部分关于 x 轴对称.

(5) y 值为正则为 1，y 值为 0 则为 0, y 值为负则为 -1. 相当于取原函数值的正负.

(6) x 值相同,y 值非负则相等,y 值为负则为 0. 相当于把原图像 y 值为负的部分设置为 0.

(6) x 值相同,y 值为正则为 0,y 值为负则相反. 相当于把原图像 y 值为正的部分设置为 0，并将原图像 y 值为负的部分关于 x 轴对称.

† 7 已知函数 f 和 g 的图像，试作下列函数的图像：

(1) $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ $\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$

解 将函数 f 和 g 的图像绘制在同一坐标轴上，始终取上方的曲线，得到 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$; 始终取下方的曲线，得到 $\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$

† 8 设 f,g 和 h 为增函数，满足 $f(x)\le g(x)\le h(x),x\in\mathbb{R}$. 证明: $f(f(x))\le g(g(x))\le h(h(x))$.

证明 $f(f(x))\le f(g(x))\le g(g(x))\le g(h(x))\le h(h(x))$.

† 9 设 f 和 g 都为区间 (a,b) 上的增函数，证明第 7 题中定义的函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 也都是 (a,b) 上的增函数.

证明 任意的 $x_1<x_2\in(a,b)$, 都有 $f(x_1)\le f(x_2),g(x_1)\le g(x_2)$.

又 $f(x_2)\le\max\{f(x_2),g(x_2)\},g(x_2)\le\max\{f(x_2),g(x_2)\}$.

则 $f(x_1)\le\max\{f(x_2),g(x_2)\},g(x_1)\le\max\{f(x_2),g(x_2)\}$.

故 $\max\{f(x_1),g(x_1)\}\le\max\{f(x_2),g(x_2)\}$.

又 $f(x_1)\ge\min\{f(x_1),g(x_1)\},g(x_1)\ge\min\{f(x_1),g(x_1)\}$.

则 $f(x_2)\ge\min\{f(x_1),g(x_1)\},g(x_2)\ge\min\{f(x_1),g(x_1)\}$.

故 $\min\{f(x_2),g(x_2)\}\ge\min\{f(x_1),g(x_1)\}$.

† 10 设 f 为 $[-a,a]$ 上的奇 (偶) 函数. 证明: 若 f 在 $[0,a]$ 上增，则 f 在 $[-a,0]$ 上增 (减).

证明 若 f 为在 $[0,a]$ 上单调增的奇函数. 任取 $x_1<x_2\in[-a,0]$, 则 $-x_1>-x_2\in[0,a]$, 则 $f(-x_1)\ge f(-x_2)\iff -f(x_1)\ge -f(x_2)\iff f(x_1)\le f(x_2)$, 故 f 在 $[-a,0]$ 上增.

若 f 为在 $[0,a]$ 上单调增的偶函数, 则 $f(-x_1)\ge f(-x_2)\iff f(x_1)\ge f(x_2)$, 故 f 在 $[-a,0]$ 上减.

† 11 证明:

(1) 两个奇函数之和为奇函数，其积为偶函数.

(2) 两个偶函数之和与积都为偶函数.

(3) 奇函数与偶函数之积为奇函数.

证明 (1) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为奇函数，$h(x)=f(x)+g(x),m(x)=f(x)g(x)$. 则 $h(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-h(x)$,$m(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=m(x)$. 即两个奇函数之和为奇函数，其积为偶函数.

(2)，(3) 同理可得.

† 12 设 f 和 g 为 D 上的有界函数. 证明:

(1) $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\inf\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)$

(2) $\sup\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)\le\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$

证明 (1) 由下确界的定义得,$\forall\varepsilon>0,\exists x_1\in D$, 有 $f(x_1)<\inf\limits_{x\in D}f(x)+\varepsilon$.

又显然有 $g(x_1)\le\sup\limits_{x\in D}g(x)$. 则 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le f(x_1)+g(x_1)<\inf\limits_{x\in D}f(x)+\varepsilon+\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

由 ε 的任意性得,$\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\inf\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

(2) 由上确界的定义得,$\forall\varepsilon>0,\exists x_1\in D$, 有 $\sup\limits_{x\in D}f(x)-\varepsilon<f(x_1)$.

又显然有 $\inf\limits_{x\in D} g(x) \le g(x_1)$. 则 $\sup\limits_{x\in D} f(x)-\varepsilon+\inf\limits_{x\in D} g(x) < f(x_1)+g(x_1) \le \sup\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)$.
由 ε 的任意性得,$\sup\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x) \le \sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$. ■

† 13 设 f 和 g 为 D 上的非负有界函数. 证明:

(1) $\inf\limits_{x\in D} f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D} g(x) \le \inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}$

(2) $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\} \le \sup\limits_{x\in D} f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D} g(x)$

证明 (1) 有 $0\le \inf\limits_{x\in D} f(x)\le f(x), 0\le \inf\limits_{x\in D} g(x)\le g(x)$. 则 $\inf\limits_{x\in D} f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D} g(x)\le f(x)g(x)$.
因此 $\inf\limits_{x\in D} f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D} g(x)$ 是 $f(x)g(x)$ 的一个下界. 故 $\inf\limits_{x\in D} f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D} g(x)\le\inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}$.
(2) 有 $0\le f(x)\le\sup\limits_{x\in D} f(x), 0\le g(x)\le\sup\limits_{x\in D} g(x)$. 则 $f(x)g(x)\le\sup\limits_{x\in D} f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D} g(x)$.
因此 $\sup\limits_{x\in D} f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D} g(x)$ 是 $f(x)g(x)$ 的一个上界. 故 $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\le\sup\limits_{x\in D} f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D} g(x)$. ■

† 14 将定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 f 延拓到 $\mathbb{R}$ 上，使延拓后的函数为 (i) 奇函数 (ii) 偶函数. 设

(1) $f(x)=\sin x+1$

(2) $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{1-x^2} & 0<x\le 1\\ x^3 & x>1\end{cases}$

解 (1) (i) $f(0)=-f(0) \implies f(0)=0$. 若 $x<0$, 则 $f(x)=-f(-x)=-(\sin(-x)+1)=\sin x-1$.

即 $f(x)=\begin{cases}\sin x+1 & x>0\\ 0 & x=0\\ \sin x-1 & x<0\end{cases}$

(ii) 若 $x<0$, 则 $f(x)=f(-x)=\sin(-x)+1=-\sin x+1$. 即 $f(x)=\begin{cases}\sin x+1 & x>0\\ c & x=0\\ -\sin x+1 & x<0\end{cases}$

(2) (i) $f(0)=-f(0) \implies f(0)=0$. 若 $x<0$,

则 $f(x)=-f(-x)=\begin{cases}\sqrt{1-(-x)^2}-1 & 0<-x\le 1\\ -(-x)^3 & -x>1\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}-1 & -1\le x<0\\ x^3 & x<-1\end{cases}$.

即 $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{1-x^2} & 0<x\le 1\\ x^3 & x>1\\ 0 & x=0\\ \sqrt{1-x^2}-1 & -1\le x<0\\ x^3 & x<-1\end{cases}$

(ii) 若 $x<0$,

则 $f(x)=f(-x)=\begin{cases}1-\sqrt{1-(-x)^2} & 0<-x\le 1\\ (-x)^3 & -x>1\end{cases}=\begin{cases}1-\sqrt{1-x^2} & -1\le x<0\\ -x^3 & x<-1\end{cases}$.

即 $f(x)=\begin{cases} 1-\sqrt{1-x^2} & 0<x\le 1 \\ x^3 & x>1 \\ c & x=0 \\ 1-\sqrt{1-x^2} & -1\le x<0 \\ -x^3 & x<-1 \end{cases}$

† 15 设 f 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的以 h 为周期的函数, a 为实数. 证明: 若 f 在 $[a,a+h]$ 上有界, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

证明 设 $\forall x\in[a,a+h]$, 有 $f(x)\le M$.

任意的 $x\in\mathbb{R}$, 有 $x+(\dfrac{a-x+h}{h})h=a+h$.

又 $\dfrac{a-x+h}{h}-1<\lfloor\dfrac{a-x+h}{h}\rfloor\le\dfrac{a-x+h}{h}$.

则 $x+(\dfrac{a-x+h}{h}-1)h<x+\lfloor\dfrac{a-x+h}{h}\rfloor h\le x+(\dfrac{a-x+h}{h})h$.

即 $a<x+\lfloor\dfrac{a-x+h}{h}\rfloor h\le a+h$.

故 $f(x)=f(x+\lfloor\dfrac{a-x+h}{h}\rfloor h)\le M$. 即 f 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

† 16 设 f 在区间 I 上有界. 记 $M=\sup\limits_{x\in I}f(x), m=\inf\limits_{x\in I}f(x)$.

证明: $\sup\limits_{x',x''\in I}\mid f(x')-f(x'')\mid=M-m$.

证明 显然有 $m-M\le f(x')-f(x'')\le M-m$, 即 $\mid f(x')-f(x'')\mid\le M-m$.

由确界的最小上界性得, $\sup\limits_{x',x''\in I}\mid f(x')-f(x'')\mid\le M-m$.

由确界的定义得,$\forall\varepsilon>0,\exists x_1,x_2\in I$, 使得 $f(x_1)>M-\varepsilon, f(x_2)<m+\varepsilon \iff -f(x_2)>-m-\varepsilon$. 则 $f(x_1)-f(x_2)>M-m-2\varepsilon$.

可取足够小的 ε, 使得 $M-m-2\varepsilon>0$, 则 $\mid f(x_1)-f(x_2)\mid>M-m-2\epsilon>0$

由 ε 的任意性得, $\sup\limits_{x',x''\in I}\mid f(x')-f(x'')\mid\ge\mid f(x_1)-f(x_2)\mid\ge M-m$.

综上, $\sup\limits_{x',x''\in I}\mid f(x')-f(x'')\mid=M-m$.

† 17 设 $f(x)=\begin{cases} p & 当 x=\dfrac{q}{p}(p,q\in\mathbb{N}_+,\dfrac{q}{p}为既约真分数,0<q<p) \\ 0 & x为(0,1)中的无理数 \end{cases}$

证明: 对任意 $x_0\in(0,1)$. 任意正数 $\delta,(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(0,1)$, 有 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上无界.

证明 $\forall M>0$, 都存在 $x_0=\dfrac{q}{M+1}\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 使得 $f(x_0)=M+1>M$. 故 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上无界.

第二章 数列极限

2.1 数列极限概念

若函数 f 的定义域为全体正整数集合 $\mathbb{N}_+$, 则称 $f:\mathbb{N}_+\to\mathbb{R}$ 或 $f(n),n\in\mathbb{N}_+$ 为**数列**. 由于正整数集 $\mathbb{N}_+$ 的元素可按从小到大的顺序排列为 $1,2,\cdots,n,\cdots$, 故数列 $f(n)$ 也可以写作 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$, 或者简记为 $\{a_n\}$. 其中,a_n 称为该数列的**通项**.

关于数列极限，先举一个我国古代有关数列的例子.

例 16

古代哲学家庄周所著《庄子·天下篇》曾引用过一句话:"一尺之锤, 日取其半，万世不竭."其含义为: 一根长为一尺的木棒，每天截下一半，这样的过程可以无限进行下去.

把每天截下部分的长度列出（单位为尺）：第 1 天截下 $\frac{1}{2}$, 第 2 天截下 $\frac{1}{2^2},\cdots$, 第 n 天截下 $\frac{1}{2^n},\cdots$. 这样就得到一个数列 $\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$. 也即 $\{\frac{1}{2^n}\}$.

不难看出，数列 $\{\frac{1}{2^n}\}$ 的通项 $\frac{1}{2^n}$ 随着 n 的无限增大而无限地趋于 0. 一般而言，对于数列 $\{a_n\}$, 当 n 无限增大时,a_n 能无限地接近某一个常数 a, 则称此数列为收敛数列, 常数 a 称为它的极限. 不具备这种性质的数列就不是收敛数列.

收敛数列的特性是“随着 n 的无限增大,a_n 无限地趋于某一常数 a”. 这也就是说，当 n 充分大时, 数列的通项 a_n 与常数 a 之差的绝对值可以任意小。下面我们给出收敛数列及其极限的精确定义.

定义 17 (数列极限) 设 $\{a_n\}$ 为数列，a 为定数. 若对任意的正数 ε，总存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $\mid a_n-a\mid<\varepsilon$, 则称**数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a**, 定数 a 称为数列 $\{a_n\}$ 的**极限**, 并记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \quad 或 \quad a_n\to a(n\to\infty)$$

若数列 $\{a_n\}$ 没有极限，则称 $\{a_n\}$ 不收敛，或称 $\{a_n\}$ 为**发散数列**.

定义 17 常称为 **数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义**. 下面举例说明如何根据 $\varepsilon-N$ 定义来验证数列极限.

例 17

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$, 这里 α 为正数.

证明 令 $\mid\frac{1}{n^\alpha}-0\mid=\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon$, 解得 $n>\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}$.

于是, $\forall\varepsilon>0,\exists N=\lfloor\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\rfloor+1$, 使得 $n>N$ 时, 有 $\mid\frac{1}{n^\alpha}-0\mid<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$. ■

例 18

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2-3}=3$.

证明 $\mid\frac{3n^2}{n^2-3}-3\mid=\mid\frac{3n^2-3n^2+9}{n^2-3}\mid=\frac{9}{n^2-3}\le\frac{9}{n}\quad(n\ge3,n^2-n-3\ge0)$

解 $\frac{9}{n}<\varepsilon$ 得 $n>\frac{9}{\varepsilon}$.

于是,$\forall\varepsilon>0,\exists N=\max\{\lfloor\frac{9}{\varepsilon}\rfloor+1,3\}$, 使得 $n>N$ 时, 有 $\mid\frac{3n^2}{n^2-3}-3\mid<\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2-3}=3$. ■

注 12 在例 *18*中, 我们将 $\mid a_n-a\mid$ 稍作放大，使得求 N 的过程更加简便. 而且, 定义 *17* 中的 N 其实不一定要为正整数，只要是正数即可等价.

例 19

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, 这里 $\mid q\mid<1$.

证明 若 $q=0$, 结果是显然的.

若 $0<\mid q\mid<1$, 则可令 $h=\frac{1}{\mid q\mid}-1>0$.

$\mid q^n-0\mid=\mid q\mid^n=\frac{1}{(1+h)^n}=\frac{1}{1+nh+C_n^2h^2+\cdots}<\frac{1}{1+nh}<\frac{1}{nh}$

解 $\frac{1}{nh}<\varepsilon$ 得 $n>\frac{1}{h\varepsilon}$.

于是,$\forall\varepsilon>0,\exists N=\frac{1}{h\varepsilon}$, 使得 $n>N$ 时, 有 $\mid q^n-0\mid<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

也可以利用对数函数 $y=\lg x$ 的严格单调增性质 (注 11) 来证明:

$\mid q^n-0\mid<\varepsilon\iff n\ln\mid q\mid<\ln\varepsilon\iff n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln\mid q\mid}$ (假定 $0<\varepsilon<1$) ■

例 20

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, 其中 $a>0$.

证明 当 $a=1$ 时, 结果是显然的.

若 $a>1$, 则可令 $h=\sqrt[n]{a}-1>0$

则 $a=(1+h)^n=1+nh+C_n^2h^2+\cdots\ge1+nh$

即 $\mid\sqrt[n]{a}-1\mid=h\le\frac{a-1}{n}$. 解 $\frac{a-1}{n}<\varepsilon$ 得 $n>\frac{a-1}{\varepsilon}$

于是,$\forall\varepsilon>0,\exists N=\frac{a-1}{\varepsilon}$, 使得 $n>N$ 时, 有 $\mid\sqrt[n]{a}-1\mid<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

若 $a<1$, 令 $h=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}-1>0$.

则 $\frac{1}{a}=(1+h)^n\ge1+nh\implies\mid\sqrt[n]{a}-1\mid<h\le\frac{1-a}{an}$. 解 $\frac{1-a}{an}<\varepsilon$ 得 $n>\frac{1-a}{a\varepsilon}$ ■

例 21

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

证明 若 $a=0$, 结论显然成立.

若 $a\neq 0$, 取 $k=\lfloor|a|\rfloor+1$, 则 $|a|<k$. 当 $n>k$ 时, 有
$|\frac{a^n}{n!}-0|=\frac{|a|^n}{n!}=\frac{|a|\cdots\cdot|a|\cdots\cdot|a|}{1\cdot 2\cdots\cdot k\cdots\cdot n}<K\frac{|a|}{n}$
其中,$K=\frac{|a|\cdots\cdot|a|}{1\cdot 2\cdots\cdot k}$. 解 $K\frac{|a|}{n}<\varepsilon$ 得 $n>\frac{K|a|}{\varepsilon}$.
于是,$\forall\varepsilon>0,\exists N=\max\{k,\frac{K|a|}{\varepsilon}\}$, 使得 $n>N$ 时, 有 $|\frac{a^n}{n!}-0|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$. ■

关于数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义，通过以上几个小例子，读者已经有了初步的认识. 对此，还应该着重注意一下以下几点:

1. **ε 的任意性** 定义 17 中正数 ε 的作用在于衡量数列通项 a_n 与定数 a 的接近程度，ε 越小，代表二者接近得越好; 而正数 ε 可以任意小, 这说明 a_n 和 a 可以接近到任意程度. 然而，尽管 ε 有其任意性，只要它已经给出，就暂时被确定下来，以便根据它来求出 N. 又由于 ε 是任意小的正数，那么 $\frac{\varepsilon}{2},3\varepsilon,\varepsilon^2$ 等也是任意小的正数，因此 定义 17 中的 ε 可以用 $\frac{\varepsilon}{2},3\varepsilon,\varepsilon^2$ 等来替代。同时，正由于 ε 是任意小的正数，我们可以限定 ε 小于一个确定的正数 (如例 19 中限定 $0<\varepsilon<1$). 另外, 定义 17 中的 $|a_n-a|<\varepsilon$ 也可以改为 $|a_n-a|\leq\varepsilon$.

2. **N 的相应性** 一般而言,N 随着 ε 的变小而变大, 由此常把 N 写作 $N(\varepsilon)$, 来强调 N 是依赖于 ε 的, 但这并不是意味着 N 是由 ε 唯一确定的. 比如，当 $N=100$ 时, 能使 $n>N$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon$, 则 $N=101$ 或更大时此不等式自然也成立. 这里重要的是 N 的存在性，而不在于它的值的大小. 另外, 定义 17 中的 $n>N$ 也可以改为 $n\geq N$.

3. **几何意义** “当 $n>N$ 时,$|a_n-a|<\varepsilon$”意味着: 所有下标大于 N 的项 a_n 都落在邻域 $U(a,\varepsilon)$ 内; 而在邻域 $U(a,\varepsilon)$ 外的项最多只有 N 个 (有限个). 反之, 若数列 $\{a_n\}$ 在邻域 $U(a,\varepsilon)$ 外的项最多只有有限个, 取这有限个项的最大下标为 N, 则当 $n>N$ 时,a_n 落在 $U(a,\varepsilon)$ 内, 即 $|a_n-a|<\varepsilon$. 根据以上所述，我们可以给出数列极限的一种等价定义如下.

定义 18 (极限的邻域定义) 任给 $\varepsilon>0$, 若在 $U(a,\varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 只有有限项，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于极限 a.

由定义 18得, 若存在某个 ε_0 , 使得在 $U(a,\varepsilon_0)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 有无穷项，则 $\{a_n\}$ 一定不以 a 为极限.

例 22

证明 $\{n^2\},\{(-1)^n\}$ 都是发散数列.

证明 对任何 a, 取 $\varepsilon_0=1$, 则 $U(a,\varepsilon_0)=U(a,1)$ 之外有 $\{n^2\}$ 的无穷多项 $\{n^2\mid n>a+1\}$. 故任何 a 都不是 $\{n^2\}$ 的极限，$\{n^2\}$ 发散.

若 $a=1$, 取 $\varepsilon_0=1$, 则 $U(a,\varepsilon_0)=U(1,1)$ 之外有 $\{(-1)^n\}$ 的无穷多个奇数项 -1. 若 $a\neq 1$, 取 $\varepsilon_0=\frac{a-1}{2}$, 则 $U(a,\varepsilon_0)=U(a,\frac{a-1}{2})$ 之外有 $\{(-1)^n\}$ 的无穷多个偶数项 1. 故任何 a 都不是 $\{(-1)^n\}$ 的极限，$\{(-1)^n\}$ 发散. ■

例 23

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 作数列 $\{z_n\}$ 为 $x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots$. 求证: 数列 $\{z_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $a=b$.

证明 $\Longleftarrow$) 若 $a=b$, 则数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 落在 $U(a,\varepsilon)$ 之外的项是有限个的，自然而然数列 $\{z_n\}$ 落在 $U(a,\varepsilon)$ 之外的项是有限个的. 从而 $\{z_n\}$ 收敛于 a.

$\Longrightarrow$) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$, 则 $\{z_n\}$ 落在 $U(a,\varepsilon)$ 之外的项是有限个的，自然而然数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 落在 $U(a,\varepsilon)$ 之外的项也是有限个的. 从而 $\{x_n\},\{y_n\}$ 均收敛于 a. ■

例 24

设 $\{a_n\}$ 为给定的数列, $\{b_n\}$ 为对 $\{a_n\}$ 增加、减少或改变有限项之后得到的数列. 证明: 数列 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 同时收敛或发散，且在收敛时两者的极限相等.

证明 设 $\{a_n\}$ 为收敛数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. 任意的 $\varepsilon>0$, 在 $U(a,\varepsilon)$ 之外都只有 $\{a_n\}$ 的有限项.$\{b_n\}$ 为对 $\{a_n\}$ 增加、减少或改变有限项之后得到的数列, 则从某一个下标开始,$\{b_n\}$ 的项都是 $\{a_n\}$ 中的一项. 则 $U(a,\varepsilon)$ 之外只有 $\{b_n\}$ 的有限项 (这个下标之前的有限项与之后 $\{a_n\}$ 中的有限项之并). 则 $\{b_n\}$ 为收敛数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a$.

若 $\{a_n\}$ 发散, 假设 $\{b_n\}$ 收敛, 又 $\{a_n\}$ 也可以看作 $\{b_n\}$ 增加、减少或改变有限项之后得到的数列, 则由已证可知 $\{a_n\}$ 收敛, 这产生矛盾. 所以 $\{a_n\}$ 发散时 $\{b_n\}$ 也发散. ■

在所有的收敛数列中, 有一类重要的数列, 称为无穷小数列. 其定义如下.

定义 19 (无穷小数列) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, 则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列.

由无穷小数列的定义，读者不难证明如下定理:

定理 4 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充要条件是 $\{a_n-a\}$ 为无穷小数列.

最后我们介绍一下无穷大数列的概念.

定义 20 (无穷大数列) 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意正数 $M>0$, 总存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|\, a_n \,|>M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散于无穷大, 并记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ 或 $a_n\to\infty$.

注 13 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, 则称 $\{a_n\}$ 是一个无穷大数列或无穷大量.

定义 21 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意正数 $M>0$, 总存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $a_n>M(a_n<-M)$, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散于正无穷大 (负无穷大), 并记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ 或 $a_n\to+\infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$ 或 $a_n\to-\infty)$.

例如数列 $\{n\}$,$\{(-1)^n\dfrac{n^2+1}{n}\}$ 均是无穷大量; 而数列 $\{[1+(-1)^n]n\}$ 虽然是无界数列, 但却并不是无穷大量.

习题 2.1

† 1 设 $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}, n=1,2,\cdots.\ a=0$.

(1) 对下列 ε 分别求出极限定义中相应的 N: $\varepsilon_1=0.1,\varepsilon_2=0.01,\varepsilon_3=0.001$.

(2) 对 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 可找到对应的 N, 这是否证明了 a_n 趋于 0? 应该怎样做才对.

(3) 对给定的 ε 是否只能找到一个 N?

解 (1) 偶数项全为 0, 奇数项为 $\dfrac{1}{n}$. 对应的 N 可以取为 $N_1=11,N_2=101,N_3=1001$.

(2) 对 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 可找到对应的 N, 并不能证明 a_n 趋于 0. 要对任意的 $\varepsilon>0$ 找到对应的 $N(\varepsilon)$

(3) 不是只能找到一个 N. 假设找到 N_0, 那么任何大于 N_0 的数都可以满足条件.

† 2 按 $\varepsilon-N$ 定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}=0$ (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0(a>1)$

证明 (1) $\mid\dfrac{n}{n+1}-1\mid=\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon\implies n>\dfrac{1}{\varepsilon}$

(2) $\mid\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\mid=\mid\dfrac{2n+3}{2(2n^2-1)}\mid<\dfrac{2n+3n}{4n^2-2n}=\dfrac{5}{4n-2}<\varepsilon\implies n>\dfrac{5}{4\varepsilon}+\dfrac{1}{2}$

(3) $\mid\dfrac{n!}{n^n}-0\mid=\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n}{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n\cdot n}<\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}<\varepsilon\implies n>\dfrac{1}{\varepsilon}$

(4) $\mid\sin\dfrac{\pi}{n}-0\mid=\mid\sin\dfrac{\pi}{n}\mid<\dfrac{\pi}{n}<\varepsilon\implies n>\dfrac{\pi}{\varepsilon}\quad n>1$

(5) $\mid\dfrac{n}{a^n}-0\mid=\mid\dfrac{n}{a^n}\mid=\dfrac{n}{(a-1+1)^n}=\dfrac{n}{1+n(a-1)+\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2+\cdots}<\dfrac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2}$

$=\dfrac{2}{(a-1)^2(n-1)}<\varepsilon\implies n>\dfrac{2}{(a-1)^2\varepsilon}+1$

† 3 根据例 17, 例 19, 例 20的结果求以下极限, 并指出哪些是无穷小数列.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2^n}}$ (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}$ (7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}=0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{3})^n=0$ (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^n=0$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}=1$ (7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}}=1$

其中,$\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\},\{\dfrac{1}{n^3}\},\{\dfrac{1}{3^n}\},\{\dfrac{1}{\sqrt{2^n}}\}$ 是无穷小数列.

† 4 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则对任一正整数 k, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

证明 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 使得 $n>N$ 时, 有 $\mid a_n-a\mid<\varepsilon$.

又 $n+k>N$, 则 $\mid a_{n+k}-a\mid<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

† 5 试用定义 18 证明:

(1) 数列 $\{\dfrac{1}{n}\}$ 不以 1 为极限

(2) 数列 $\{n^{(-1)^n}\}$ 发散

证明 (1) 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, 则 $U(1,\varepsilon_0)=(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ 之外有 $\{\frac{1}{n}\}$ 的无限个项 $\{\frac{1}{n}\mid n>2\}$.

(2) 对于任意的 a, 取 $\varepsilon_0=1$, 则 $U(a,\varepsilon_0)=(a-1,a+1)$ 之外有 $\{n^{(-1)^n}\}$ 的无限个项 $\{n\mid n\text{为偶数且}n>a+1\}$ ■

† 6 试证明定理 4, 并应用它证明数列 $\{1+\frac{(-1)^n}{n}\}$ 的极限是 1.

证明 定理 4: 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充要条件是 $\{a_n-a\}$ 为无穷小数列.

$\Longleftarrow$) 若 $\{a_n-a\}$ 为无穷小数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$. $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 使得 $n>N$ 时, 有 $\mid a_n-a-0\mid=\mid a_n-a\mid<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

$\Longrightarrow$) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 使得 $n>N$ 时, 有 $\mid a_n-a\mid=\mid a_n-a-0\mid<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$.

$(1+\frac{(-1)^n}{n})-1=\frac{(-1)^n}{n}\to 0$. $\mid\frac{(-1)^n}{n}-0\mid=\frac{1}{n}<\varepsilon\implies n>\frac{1}{\varepsilon}$. ■

† 7 在下列数列中哪些数列是有界数列、无界数列以及无穷大数列:

(1) $\{[1+(-1)^n]\sqrt{n}\}$　(2) $\{\sin n\}$　(3) $\{\frac{n^2}{n-\sqrt{5}}\}$　(4) $\{2^{(-1)^n n}\}$

证明 (1) 任意 $M>0$, 存在数 $n>M^2$ 且 n 为偶数使得 $a_n=2M>M$. 故 $\{a_n\}$ 无界. 任意 N, 都存在 $n>N$ 且 n 为偶数, 使得 $a_n=0<M$. 故 a_n 不是无穷大数列.

(2) 存在 $M=1$, 使得任意 n, 都有 $\sin n\le M$. 故 $\{\sin n\}$ 有界. 存在 $M_0=2$, 使得对于任意 N, 都存在 $n>N$, 使得 $\sin n\le 1<M_0$. 故 $\{\sin n\}$ 不是无穷大数列.

(3) $\{\frac{n^2}{n-\sqrt{5}}\}=\infty$. 故 $\{\frac{n^2}{n-\sqrt{5}}\}$ 无界且为无穷大数列.

(4) $a_{2n}=2^{2n}\to\infty, a_{2n+1}=(\frac{1}{2})^{2n+1}\to 0$. 故 $\{2^{(-1)^n n}\}$ 无界但不是无穷大数列. ■

† 8 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mid a_n\mid=\mid a\mid$. 当且仅当 a 为何值时反之也成立?

证明 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 使得 $n>N$ 时, 有 $\mid a_n-a\mid<\varepsilon$.

则 $\mid\mid a_n\mid-\mid a\mid\mid\le\mid a_n-a\mid<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\mid a_n\mid=\mid a\mid$.

若要反之也成立, 则需 $\mid a_n-a\mid\le\mid\mid a_n\mid-\mid a\mid\mid$. 这只有 $a=0$ 时才一定成立. ■

† 9 按照 $\varepsilon-N$ 定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$, 其中 $a_n=\begin{cases}\frac{n-1}{n} & n\text{为偶数}\\ \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} & n\text{为奇数}\end{cases}$

证明 (1) $\mid\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0\mid=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon\implies n>\frac{1}{4\varepsilon^2}$.

(2) $\mid\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}-0\mid=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}=\frac{n(n+1)}{2n^3}=\frac{n+1}{2n^2}\le\frac{n+n}{2n^2}=\frac{1}{n}<\varepsilon\implies n>\frac{1}{\varepsilon}$

$$(3)\ |\ a_n - 1\ |= \begin{cases} 1-\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{1}{n} & n\text{为偶数} \\ \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1=\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}<\dfrac{1}{n} & n\text{为奇数} \end{cases}$$

$\dfrac{1}{n}<\varepsilon \implies n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. ■

† 10 设 $a_n \neq 0$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 使得 $n > N$ 时, 有 $|\ a_n\ |< \varepsilon$. $\iff \forall M = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0, \exists N > 0$, 使得 $n > N$ 时, 有 $|\ \dfrac{1}{a_n}\ |> \dfrac{1}{\varepsilon} = M \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$. ■

2.2 收敛数列的性质

收敛数列有如下一些重要性质.

> **定理 5 (极限的唯一性)** 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则它只有一个极限.

证明 设 a 是 $\{a_n\}$ 的一个极限. 下面证明: 任何数 $b \neq a$ 都不是 $\{a_n\}$ 的极限. 由定义 18得, 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}\ |\ b-a\ |$, $U(a,\varepsilon_0)$ 外只存在 $\{a_n\}$ 的有限项. 而 $U(b,\varepsilon_0)$ 在 $U(a,\varepsilon_0)$ 外, 因此 $U(b,\varepsilon_0)$ 中只有 $\{a_n\}$ 中的有限项. 从而 b 不是 $\{a_n\}$ 的极限. ■

一个收敛数列一般含有无穷多个数, 而它的极限只是一个数. 我们单凭这一个数就能精确地估计出几乎全体项的大小. 以下收敛数列的一些性质, 大都基于这一事实.

> **定理 6 (收敛数列的有界性)** 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 为有界数列, 即存在正数 M, 使得对于一切正整数 n, 都有 $|\ a_n\ |\leq M$.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使得 $n > N$ 时, 有 $|\ a_n - a\ |< \varepsilon \iff a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$. 取 $M = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_N, |\ a-\varepsilon\ |, |\ a+\varepsilon\ |\}$, 对于一切正整数 n, 都有 $|\ a_n\ |\leq M$. ■

注 14 数列收敛能推出数列有界, 但反过来不一定成立. 例如, 数列 $\{(-1)^n\}$ 有界, 但它并不收敛 *(例 22)*.

> **定理 7 (极限的保序性 1)** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < b$(或 $> b$), 则存在正数 N, 使得 $n > N$ 时, 有 $a_n < b$ (或 $a_n > b$).

证明 设 $a < b$. 则取 $\varepsilon_0 = b - a > 0, \exists N > 0$, 使得 $n > N$ 时, 有 $|\ a_n - a\ |< \varepsilon_0 = b - a$. 即 $b - 2a < a_n < b$. 由此得 $a_n < b$. 对于 $a > b$ 的情形也可以类似得证. ■

注 15 在应用极限的保序性时, 通常取 $b = \dfrac{a}{2}$.

推论 1 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, a < b$, 则存在 $N > 0$, 使得 $n > N$ 时, 有 $a_n < b_n$.

证明 $a < \dfrac{a+b}{2} < b \implies$ 存在 $N_1 > 0$,$n > N_1$ 时 $a_n < \dfrac{a+b}{2}$, 存在 $N_0, n > N_2$ 时 $\dfrac{a+b}{2} < b_n$.
$\implies$ 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, $n > N$ 时有 $a_n < \dfrac{a+b}{2} < b_n$. ■

定理 8 (极限的保序性 2) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为收敛数列. 若存在正数 N_0, 使得 $n > N_0$ 时, 有 $a_n \le b_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2 > 0$, 使得 $n > N_1$ 时, 有 $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$,$n > N_2$ 时, 有 $b-\varepsilon < b_n < b+\varepsilon$. 取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 则 $n > N$ 时, 有 $a-\varepsilon < a_n \le b_n < b+\varepsilon$. 由此得 $a < b + 2\varepsilon$. 由 ε 的任意性得,$a \le b$. ■

注 16 定理 8中, 即使条件改为 $a_n < b_n$, 结论也不能改为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 例如,$a_n = \dfrac{1}{n}, b_n = \dfrac{2}{n}, a_n < b_n$ 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

例 25

设 $a_n \ge 0 (n = 1, 2, \cdots)$. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证明 由定理 8得, $a \ge 0$.

若 $a = 0$, 则对于 $\varepsilon^2 > 0, \exists N > 0$, 使得 $n > N$ 时, 有 $|\, a_n - 0 \,| = a_n < \varepsilon^2$. 则 $|\, \sqrt{a_n} - 0 \,| = \sqrt{a_n} < \varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a} = 0$.

若 $a > 0$, 则对于 $\sqrt{a}\varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使得 $n > N$ 时, 有 $|\, a_n - a \,| < \sqrt{a}\varepsilon$. 则 $|\, \sqrt{a_n} - \sqrt{a} \,| = \dfrac{|\, a_n - a \,|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \dfrac{|\, a_n - a \,|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. ■

定理 9 (数列的迫敛性) 设收敛数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都以 a 为极限, 数列 $\{c_n\}$ 满足: 存在正数 N_0, 当 $n > N_0$ 时, 有 $a_n \le c_n \le b_n$, 则数列 $\{c_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

证明 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2$, 使得 $n > N_1$ 时, 有 $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$,$n > N_2$ 时, 有 $a-\varepsilon < b_n < a+\varepsilon$. 取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 则 $n > N$ 时, 有 $a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon$, 即 $|\, c_n - a \,| < \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. ■

定理 9不仅给出了判定数列收敛的一种方法, 而且提供了一个求极限的工具.

例 26

求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的极限.

解 记 $a_n = \sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, 这里 $h_n > 0 (n > 1)$, 则有

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \implies h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

于是 $1 \le a_n < 1 + \sqrt{\dfrac{2}{n-1}} \to 1$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ■

例 27

求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

证明 对于任给的正数列 $\{\varepsilon_n\}$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{1}{\varepsilon})^n}{n!}=0$(由例 21得). 从而由极限的保序性得, 存在 $N>0$, 使得 $n>N$ 时,$\dfrac{(\frac{1}{\varepsilon_n})^n}{n!}<1 \implies \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon_n$. 从而 $0\le\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon_n\to 0$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$. ■

在求数列极限时, 常需要使用极限的四则运算法则.

定理 10 (极限的四则运算法则) 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 为收敛数列, 则 $\{a_n+b_n\}$,$\{a_n\cdot b_n\}$ 也都是收敛数列, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.
若再假设 $b_n\ne 0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\ne 0$, 则 $\{\dfrac{a_n}{b_n}\}$ 也是收敛数列, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$

证明 由于 $a_n-b_n=a+(-1)b_n$ 及 $\dfrac{a_n}{b_n}=a_n\cdot\dfrac{1}{b_n}$, 因此我们只需证明关于和、积与倒数运算即可.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 分别存在正数 N_1 与 N_2, 使得 $n>N_1$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon$,$n>N_2$ 时, $|b_n-b|<\varepsilon$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时, 上述两个不等式同时成立, 从而有

1.$|(a_n+b_n)-(a+b)|\le|a_n-a|+|b_n-b|<2\varepsilon \implies \lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$

2.$|a_nb_n-ab|=|(a_n-a)b_n+a(b_n-b)|\le|a_n-a||b_n|+|a||b_n-b|$

由收敛数列的有界性得, 存在 $M>0$, 使得对一切的 n 都有 $|b_n|<M$. 于是, 当 $n>N$ 时, $|a_nb_n-ab|<(M+|a|)\varepsilon$. 这就证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

3. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\ne 0$, 根据收敛数列的保序性, 存在正数 N_3, 使得 $n>N_3$ 时, 有 $|b_n|>\dfrac{1}{2}|b|$. 取 $N'=\max\{N_2,N_3\}$, 则当 $n>N'$ 时, 有 $|\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b}|=\dfrac{|b_n-b|}{|b_nb|}<\dfrac{2|b_n-b|}{b^2}<\dfrac{2\varepsilon}{b^2}$. 这就证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{b}$. ■

例 28 (抓大头)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1n+b_0}$. 其中 $m\le k, a_n\ne 0, b_k\ne 0$.

解 上下同乘 n^{-k}, 所求极限化为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_mn^{m-k}+a_{m-1}n^{m-1-k}+\cdots+a_1n^{1-k}+a_0n^{-k}}{b_k+b_{k-1}n^{-1}+\cdots+b_1n^{1-k}+b_0n^{-k}}$. 由例 17得 $\alpha>0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-\alpha}=0$. 于是,$m=k$ 时, 上式除了 $\lim\limits_{n\to\infty}a_mn^{m-k}=a_m$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}b_k=b_k$ 外, 其余项极限均为 0; 当 $m<k$ 时, 分子极限均为 0, 分母极限仍为 b_k.

综上所述, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1n+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_m}{b_k} & k=m\\ 0 & k>m\end{cases}$ ■

例 29

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}$, 其中 $a\ne -1$.

解 若 $a=1$, 则显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}=\dfrac{1}{2}$.

若 $|\,a\,|<1$, 则由 $\lim a^n=0$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a^n}{1+\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=0$.

若 $|\,a\,|>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{a^n}}=\dfrac{1}{1+0}=1$.

例 30

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

最后, 我们给出数列的子类概念和关于子列的一个重要定理.

定义 22 (子列) 设 $\{a_n\}$ 为数列,$\{n_k\}$ 为正整数集 N_+ 的无限子集, 且 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$, 则数列 $a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots$ 称为数列 $\{a_n\}$ 的**一个子列**, 记为 $\{a_{n_k}\}$.

注 17 由定义可见,$\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 的各项都取自 $\{a_n\}$, 且保持这些项在 $\{a_n\}$ 中的先后次序不变. $\{a_{n_k}\}$ 中的第 k 项是 $\{a_n\}$ 中的第 n_k 项, 故总有 $n_k\geq k$. 实际上,$\{n_k\}$ 本身也是正整数列 $\{n\}$ 的子列.

例如, 子列 $\{a_{2k}\}$ 由数列 $\{a_n\}$ 的所有偶数项所组成, 而子列 $\{a_{2k-1}\}$ 则由 $\{a_n\}$ 的所有奇数项所组成. $\{a_n\}$ 本身也是自己的一个子列, 此时 $n_k=k,k=1,2,\cdots$.

定理 11 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a $\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}$ 的任何子列都收敛于 a.

证明 $\Longleftarrow$) $\{a_n\}$ 本身也是自己的一个子列, 结论显然.

$\Longrightarrow$) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的任一子列.$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 使得 $k>N$ 时, 有 $|\,a_k-a\,|<\varepsilon$. 又 $n_k\geq k>N$, 则 $|\,a_{n_k}-a\,|<\varepsilon$. 故 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于同一极限 a.

由上述定理及其证明可知, 若数列 $\{a_n\}$ 有一个子列发散, 或者两个子列分别收敛于不同的极限, 则数列 $\{a_n\}$ 必定发散. 例如, 数列 $\{(-1)^n\}$, 其偶数项组成的子列 $\{(-1)^{2k}\}$ 收敛于 1, 其奇数项组成的子列 $\{(-1)^{2k-1}\}$ 收敛于 -1, 从而 $\{(-1)^n\}$ 发散. 再如, 数列 $\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\}$, 它的奇数项组成的子列 $\{\sin\dfrac{2k-1}{2}\pi\}$ 即为 $\{(-1)^{k-1}\}$, 由于这个子列发散, 故 $\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\}$ 必定发散. 由此可见, 定理 11 是判断数列是否发散的有力工具.

这里应该注意: 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=A$, 则由例 23 得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

习题 2.2

† **1** 求以下极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2+1}{4n^3+2n+3}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n}{n^2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{10})$ (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2+1}{4n^3+2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3n^{-1}+n^{-3}}{4+2n^{-2}+3n^{-3}}=\dfrac{1}{4}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n})=0+0=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})^n+\frac{1}{3}}{(-\frac{2}{3})^{n+1}+1}=\dfrac{\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{1}{3}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{10})=1+1+\cdots+1=10$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{3^n}}=\dfrac{2}{1}=2.$

† **2** 设 $\{a_n\}$ 为无穷小数列,$\{b_n\}$ 为有界数列, 证明 $\{a_nb_n\}$ 为无穷小数列.

证明 由于 $\{b_n\}$ 有界, 因此存在 $M>0$, 对任意的 n,$b_n\le M$.$\{a_n\}$ 为无穷小数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 对于 $\dfrac{\varepsilon}{M}>0,\exists N>0$, 使得 $n>N$ 时, 有 $|\ a_n\ |<\dfrac{\varepsilon}{M}$, 则 $|\ a_nb_n-0\ |<|\ b_n\ |\dfrac{\varepsilon}{M}\le\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$, 即 $\{a_nb_n\}$ 为无穷小数列.

† **3** 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)})$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n})$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\dfrac{1}{n}}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2})$ (6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}})$

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)})=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n+1})=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^n}}=2.$

(3) 记 $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}+0$, 则 $\dfrac{1}{2}S_n=0+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-3}{2^n}+\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$.

$S_n=2(S_n-\dfrac{1}{2}S_n)=2(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\cdots+\dfrac{2}{2^n}-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}})=2(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{2}{2^2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}})=1+2(1-\dfrac{1}{2^n})-\dfrac{2n-1}{2^n}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1+2-0=3$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n-1}}{\sqrt[n]{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n-1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}$.

又 $1\le\sqrt[n]{n-1}<\sqrt[n]{n}\to 1(n>1)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n-1}=1$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\dfrac{1}{n}}=1$

(5) $\frac{n+1}{4n^2}=\frac{n+1}{(2n)^2}\le\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\le\frac{n+1}{n^2}$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0$.

由收敛数列的迫敛性得, $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2})=0$.

(6) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$.

由收敛数列的迫敛性得, $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=1$.

† 4 设 $\{a_n\}$ 收敛,$\{b_n\}$ 发散. 证明 $\{a_n\pm b_n\}$ 是发散数列. 又问 $\{a_nb_n\}$ 和 $\{\frac{a_n}{b_n}\},(b_n\ne 0)$ 是否必为发散数列.

证明 假设 $\{a_n\pm b_n\}$ 是收敛数列, 则由收敛数列的四则运算法则得,$\{a_n\pm b_n-a_n\}$ 为收敛数列, 即 $\{\pm b_n\}$ 是收敛数列. 这与 $\{b_n\}$ 是发散数列相矛盾. 则 $\{a_n\pm b_n\}$ 发散.

不一定. 如 $a_n=\frac{1}{n},b_n=n$, 则 $a_nb_n=1,\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{n^2}$. 很明显,$\{a_nb_n\}$ 和 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 均收敛.

† 5 证明以下数列发散:

(1) $\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\}$ (2) $\{n^{(-1)^n}\}$ (3) $\{\cos\frac{n\pi}{4}\}$

证明 (1) $a_{2k}=\frac{2k}{2k+1}\to 1$. $a_{2k-1}=-\frac{2k-1}{2k}\to -1$. 两个子列 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于不同数, 故 $\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\}$ 发散.

(2) $a_{2k}=2k\to\infty$. 子列 $\{a_{2k}\}$ 发散, 故 $\{n^{(-1)^n}\}$ 发散.

(3) $a_{1+8k}=\cos(\frac{\pi}{4}+2k\pi)=1$. $a_{3+8k}=\cos(\frac{3\pi}{4}+2k\pi)=-1$. 两个子列 $\{a_{1+8k}\}$ 和 $\{a_{3+8k}\}$ 收敛于不同数, 故 $\{\cos\frac{n\pi}{4}\}$ 发散.

† 6 判断下列结论是否成立:

(1) 若 $\{a_{2k-1}\}$ 和 a_{2k} 都收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

(2) 若 $\{a_{3k-2}\},\{a_{3k-1}\}$ 和 a_{3k} 都收敛于同一个数 a, 则 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

解 (1) 不成立. 如 $\{(-1)^n\}$.

(2) 成立. $\{a_{3k-2}\},\{a_{3k-1}\}$ 和 a_{3k} 都收敛于同一个数 a, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists K_1,K_2,K_3>0$, 使得 $k>K_1$ 时, 有 $|a_{3k-2}-a|<\varepsilon$, $k>K_2$ 时, 有 $|a_{3k-1}-a|<\varepsilon$, $k>K_3$ 时, 有 $|a_{3k}-a|<\varepsilon$. 取 $N=\max\{3K_1-2,3K_2-1,3K_3\}$, 则 $n>N$ 时, 若 $n=3k-2$, 则 $k>K_1,|a_n-a|<\varepsilon$; 若 $n=3k-1$, 则 $k>K_2,|a_n-a|<\varepsilon$; 若 $n=3k$, 则 $k>K_3,|a_n-a|<\varepsilon$.

† 7 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha],0<\alpha<1$. (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n}),|\alpha|<1$.

解 (1) 设 $T=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$.

则 $0<T^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{1}{2n+1}$
$=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{(2n)^2})\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n+1}\implies 0<T<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 0.$
由收敛数列的迫敛性得, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}=0.$

(2) $n!<\sum\limits_{p=1}^{n}p!<(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!<2(n-1)!+n!,$

因此 $1<\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}<\frac{2(n-1)!+n!}{n!}=1+\frac{2}{n}\to 1$. 由收敛数列的迫敛性得, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}=1.$

(3) $0<\alpha<1\implies\alpha-1<0\implies(n+1)^{\alpha-1}<n^{\alpha-1}$
$\implies(n+1)^\alpha<(n+1)n^{\alpha-1}=n^\alpha+n^{\alpha-1}\implies 0<(n+1)^\alpha-n^\alpha<n^{\alpha-1}\to 0.$
由收敛数列的迫敛性得, $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]=0, 0<\alpha<1.$

(4) 记 $P_n=(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n}),$
则 $(1-\alpha)P_n=(1-\alpha)(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n})=1-\alpha^{2^{n+1}}\implies P_n=\frac{1-\alpha^{2^{n+1}}}{1-\alpha}\to\frac{1}{1-\alpha}.$ ■

† 8 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 m 个正数, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$

证明 设 $a_{max}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\},$
则 $a_{max}=\sqrt[n]{a_{max}^n}<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}<\sqrt[n]{ma_{max}^n}=\sqrt[n]{m}a_{max}\to a_{max}.$
由收敛数列的迫敛性得, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a_{max}.$ ■

† 9 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lfloor na_n\rfloor}{n}=a$
(2) 若 $a>0, a_n>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$

证明 (1) $na_n-1<\lfloor na_n\rfloor\le na_n\implies a_n-\frac{1}{n}<\frac{\lfloor na_n\rfloor}{n}\le a_n.$
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 由极限的迫敛性得, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lfloor na_n\rfloor}{n}=a.$
(2) 对于 $\varepsilon_0=\frac{a}{2}>0,\exists N>0$, 使得 $n>N$ 时, 有 $a-\varepsilon_0<a_n<a+\varepsilon_0$, 即 $\frac{a}{2}<a_n<\frac{3a}{2}.$
故 $\sqrt[n]{\frac{a}{2}}<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{\frac{3a}{2}}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3a}{2}}=1$, 由收敛数列迫敛性得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1.$ ■

2.3 数列极限存在的条件

在研究比较复杂的数列极限问题时, 通常先考察该数列是否有极限 (极限的存在性问题); 若有极限, 再考虑如何计算此极限 (极限值的计算问题). 这是极限理论的两个基本问题. 在实际应用中, 解决了数列 $\{a_n\}$ 极限的存在性问题之后, 即使极限值的计算较为困难, 但由于当 n 充分大时, a_n 能充分接近其极限 a, 故可用 a_n 作为 a 的近似值. 本节将重点讨论极限的存在性问题.

为了确定某个数列是否存在极限, 当然并不可能将每个实数依定义一一验证, 根本的方法是直接从数列本身的特征来作出判断.

首先讨论单调数列, 其定义与单调函数相仿.

定义 23 (单调数列) 若数列 $\{a_n\}$ 的各项满足关系式 $a_n \le a_{n+1}(a_n \ge a_{n+1})$, 则称 $\{a_n\}$ 为**递增** *(*递减*)* 数列.

递增数列和递减数列统称为**单调数列**. 如 $\{\dfrac{1}{n}\}$ 为递减数列; $\{\dfrac{n}{1+n}\}$ 与 $\{n^2\}$ 为递增数列; 而 $\{\dfrac{(-1)^n}{n}\}$ 则不是单调数列, 但 $\{\dfrac{(-1)^n}{n}\}$ 的奇数项子列与偶数项子列分别是单调的.

定理 12 (单调有界定理) 在实数系中, 有界的单调数列必定收敛.

证明 不妨设 $\{a_n\}$ 为有上界的单调递增数列. 由确界原理, 数列 $\{a_n\}$ 有上确界, 记 $a=\sup a_n$. 下证 a 就是 $\{a_n\}$ 的极限. 事实上, 任给 $\varepsilon>0$, 按照上确界的定义, 存在数列 $\{a_n\}$ 中的某一项 a_N, 使得 $a-\varepsilon<a_N$. 又由 $\{a_n\}$ 的递增性, 有 $n>N$ 时, $a-\varepsilon<a_N<a_n$. 同时,a 为 a_n 的一个上界, 则 $a_n\le a<a+\varepsilon$. 综上所述, $n>N$ 时,$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

当 $\{a_n\}$ 为有下界的单调递减数列时, 也可类似证明. ■

例 31

设 $a_n=1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{n^\alpha},\alpha>1$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明 显然 $\{a_n\}$ 递增.$n\ge 2$ 时,

$$\begin{aligned}
&a_n<a_{2n}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}=(1+\frac{1}{3^n}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^\alpha})+(\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha})\\
&<1+(\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^\alpha}+\frac{1}{(2n+1)^\alpha})+(\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha})\\
&<1+2(\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha})=1+2\frac{a_n}{2^\alpha}=1+\frac{a_n}{2^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

故 $(1-\dfrac{1}{2^{\alpha-1}})<1 \implies a_n<\dfrac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}$.

$\{a_n\}$ 单调增且有上界, 由单调有界定理得,$\{a_n\}$ 收敛. ■

例 32

证明数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个根号}},\cdots$ 收敛, 并求其极限.

证明 $a_1=\sqrt{2}<2$. 假设 $a_n<2$, 则 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2$. 因此 $\{a_n\}$ 有上界 2.

$a_{n+1}^2-a_n^2=2+a_n-a_n^2>2+2-2^2=0$. 因此 $\{a_n\}$ 单调递增.

由单调有界定理得, $\{a_n\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

对 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2$ 两边取极限, 有等式 $a=\sqrt{2+a}\implies a^2-a-2=0$, 解得 $a=-1$或2. $a_n>0$, 由极限的保序性及唯一性得, 只能取 $a=2$. ■

例 33

设 S 为有界数集. 证明: 若 $\sup S=a\notin S$, 则存在严格递增数列 $\{x_n\}\subset S$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证明 由于 a 是 S 的上确界, 故对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $x\in S$, 使得 $x>a-\varepsilon$. 又 $a\notin S$, 故 $x<a$, 从而有 $a-\varepsilon<x<a$.

取 $\varepsilon_1 = 1$, 则存在 $x_1 \in S$, 使得 $a - \varepsilon_1 < x_1 < a$. 再取 $\varepsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}, a - x_1\} > 0$, 则存在 $x_2 \in S$, 使得 $a - \varepsilon_2 < x_2 < a$ 且有 $x_2 > a - \varepsilon_2 \geq a - (a - x_1) = x_1$.

一般地, 按上述步骤得到 $x_{n-1} \in S$ 之后, 取 $\varepsilon_n = \min\{\frac{1}{n}, a - x_{n-1}\}$, 则存在 $x_n \in S$, 使得 $a - \varepsilon_n < x_n < a$, 且有 $x_n > a - \varepsilon_n \geq a - (a - x_{n-1}) = x_{n-1}$.

上述过程无限地进行下去, 得到数列 $\{x_n\} \subset S$, 它是严格递增数列, 且满足 $0 <| x_n - a |< \varepsilon_n \leq \frac{1}{n} \to 0$. 这就证明了 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. ■

例 34

证明极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在.

证明 记 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n, n = 1, 2, \cdots$. 由二项式定理得,

$$\begin{aligned}
a_n &= (1+\frac{1}{n})^n = 1 + C_n^1\frac{1}{n} + \cdots + C_n^k\frac{1}{n^k} + \cdots + C_n^n\frac{1}{n^n} \\
&= 2 + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \\
&< 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1}) \\
&+ \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1}) + \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}) = a_{n+1}
\end{aligned}$$

故 $\{a_n\}$ 是严格递增的. 由上式可推得

$$\begin{aligned}
a_n &< 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\
&= 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} < 3
\end{aligned}$$

故 $\{a_n\}$ 有上界 3. 由单调有界定理推知极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在. ■

通常用拉丁字母 e 代表 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 的极限, 即 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, 它是一个无理数 (待证), 其前十三位数字是 $e \approx 2.718, 281, 828, 459$. 以 e 为底的对数称为 **自然对数**, 通常记 $\ln x = \log_e x$.

例 35

任何数列都存在单调子列.

证明 设数列为 $\{a_n\}$. 下面分两种情形进行讨论:

1. 若对任何正整数 p, 数列 $\{a_{p+k}\}$ 有最大项. 设 $\{a_{1+k}\}$ 的最大项为 a_{n_1}, 因 $\{a_{n_1+k}\}$ 也有最大项, 设其最大项为 a_{n_2}, 显然有 $n_2 > n_1$, 且因 $\{a_{n_1+k}\}$ 是 $\{a_{1+k}\}$ 的一个子列, 故 $a_{n_2} \leq a_{n_1}$.

同理存在 $n_3 > N_2$, 使得 $a_{n_3} \leq a_{n_2}$

继续下去, 可得到一个单调递减的子列 $\{a_{n_k}\}$.

2. 至少存在某个正整数 p, 使得子列 $\{a_{p+k}\}$ 没有最大项. 先取 $n_1 = p+1$, 因为 $\{a_{p+k}\}$ 没有最大项, 故 a_{n_1} 后面总存在项 $a_{n_2}(n_2 > n_1)$, 使得 $a_{n_2} > a_{n_1}$. 同理存在 a_{n_2} 后面的项 $a_{n_3}(n_3 > n_2)$, 使得 $a_{n_3} > a_{n_2}$.

继续下去, 可得到一个严格单调递增的子列 $\{a_{n_k}\}$. ■

定理 13 (致密性定理) 任何有界数列必定有收敛子列.

证明 设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 由例 35 得,$\{a_n\}$ 存在单调且有界的子列 $\{a_{n_k}\}$. 由单调有界定理得,$\{a_{n_k}\}$ 收敛. ■

例 36

设数列 $\{a_n\}$ 无上界, 则存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$, 有 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=+\infty$.

证明 因为 $\{a_n\}$ 无上界, 所以对于任意的正数 M, 存在 a_{n_0}, 使得 $a_{n_0}>M$.

取 $M_1=1$, 存在 a_{n_1}, 使得 $a_{n_1}>1$;

取 $M_2=\max\{2,|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{n_1}|\}$, 存在 $a_{n_2}(n_2>n_1)$, 使得 $a_{n_2}>M_2$.

……

取 $M_k=\max\{k,|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{n_{k-1}}|\}$, 存在 $a_{n_k}(a_{n_k}>a_{n_{k-1}})$, 使得 $a_{n_k}>M_k$.

……

由此得到 $\{a_n\}$ 的一个子列 $\{a_{n_k}\}$, 满足 $a_{n_k}>M_k\geq k$, 推得 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=+\infty$. ■

单调有界定理只是数列收敛的一个充分条件. 下面给出在实数系中数列收敛的充分必要条件. 它从理论上完全解决了数列极限的存在性问题.

定理 14 (柯西收敛准则) 数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\iff$ 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得当 $m,n>N$ 时, 有 $|a_m-a_n|<\varepsilon$.

证明 $\Longrightarrow$) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得当 $m,n>N$ 时, 有 $|a_m-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 且 $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 则 $|a_m-a_n|=|(a_m-a)-(a_n-a)|\leq|a_m-a|+|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

$\Longleftarrow$) 先证明该数列必定有界. 取 $\varepsilon_0=1$, 由于 $\{a_n\}$ 满足柯西条件, 所以 $\exists N_0$, $\forall n>N_0$, 有 $|a_n-a_{N_0+1}|<1$. 令 $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{N_0}|,|a_{N_0+1}|+1|\}$, 则对一切的 n, 成立 $|a_n|\leq M$.

由致密性定理, 在 $\{a_n\}$ 中必有收敛子列 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k}=\xi$.

由条件,$\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当 $m,n>N$ 时, 有 $|a_m-a_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 在式中取 $a_n=a_{n_k}$, 其中 k 充分大, 满足 $n_k>N$, 并且令 $k\to\infty$, 于是得到 $|a_m-\xi|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. 即 $\{a_n\}$ 收敛于 ξ. ■

柯西收敛准则的条件称为**柯西条件**, 它反映这样的事实: 收敛数列各项的值越到后面, 彼此之间越接近, 以至于充分后面的任何两项之差的绝对值可以小于预先给定的任意小正数. 或者形象地说, 收敛数列的各项越到后面就越是“挤”在一起. 另外, 柯西收敛准则把 $\varepsilon-N$ 定义中 a_n 与 a 的关系换成了 a_n 与 a_m 的关系, 其好处在于无需借助数列以外的数 a , 只要根据数列本身的特征就能鉴别其敛散性.

例 37

证明: 任何一个无限十进制小数 $\alpha=0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ 的 n 位不足近似值 $(n=1,2,\cdots)$ 所组成的数列 $\dfrac{b_1}{10},\dfrac{b_1}{10}+\dfrac{b_2}{10^2},\cdots,\dfrac{b_1}{10}+\dfrac{b_2}{10^2}+\cdots+\dfrac{b_n}{10^n},\cdots$ 满足柯西条件, 其中 b_i 为 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个数,$k=1,2,\cdots$.

证明 记 $a_n = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n}{10^n}$. 不妨设 $n > m$, 则有

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= \frac{b_{m+1}}{10^{m+1}} + \frac{b_{m+2}}{10^{m+2}} + \cdots + \frac{b_n}{10^n}\\ &< 9(\frac{1}{10^{m+1}} + \frac{1}{10^{m+2}} + \cdots + \frac{1}{10^n}) = 9\frac{\frac{1}{10^{m+1}}(1-\frac{1}{10^{n-m}})}{1-\frac{1}{10}}\\ &= \frac{1}{10^m}(1 - \frac{1}{10^{n-m}}) < \frac{1}{10^m} < \frac{1}{m}\end{aligned}$$

对任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \frac{1}{\varepsilon}$, 则对一切的 $n > m > N$, 有 $|a_n - a_m| < \frac{1}{m} < \varepsilon$. 这就证明了数列 $\{a_n\}$ 满足柯西条件.

循环小数 $0.\dot{9}$ 的不足近似值组成的数列为 $a_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n}, n = 1, 2, \cdots$. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{9}{10}(1-\frac{1}{10^n})}{1-\frac{1}{10}} = 1$. 这就是为什么可以将无限小数 $0.\dot{9}$ 表示为 1 的一个原因.

习题 2.3

† 1 利用 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ 求下列极限.

(1) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$ (2) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ (3) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n$

(4) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^n$ (5) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n$

解 $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \ln a_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n \ln a_n} = e^{b\ln a} = a^b$.

(1) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}[1+(\frac{1}{-n})]^{(-n)(-1)} = e^{-1}$

(2) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})^n]^{\frac{n+1}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}} = e$

(3) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}} = e$

(4) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^n = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{2n})^{2n}]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

(5) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}]^{\frac{n}{n^2}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = e^0 = 1$

† 2 试问下面的解题方法是否正确?

求 $\lim_{n\to\infty} 2^n$.

解: 设 $a_n = 2^n$ 及 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. 由于 $a_n = 2a_{n-1}$, 两边取极限 $(n \to \infty)$ 得 $a = 2a$, 所以 $a = 0$.

解 不正确. 只有证明数列的极限确实存在后, 才可以设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. 事实上,$\{2^n\}$ 单调递增且无上界, 是个发散数列.

† 3 证明下列数列极限存在并求其值.

(1) 设 $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, n = 1, 2, \cdots$.

(2) 设 $a_1=\sqrt{c}(c>0), a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}, n=1,2\cdots$

(3) $a_n=\dfrac{c^n}{n!}(c>0), n=1,2,\cdots$

解 (1) $a_1=\sqrt{2}<2$. 假设 $a_n<2$, 则 $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}<2$. 故对于任何的 n, 都有 $a_n<2$. 故 $\{a_n\}$ 有上界. $a_{n+1}^2-a_n^2=2a_n-a_n^2>2\cdot 2-2^2=0$, 故 $\{a_n\}$ 单调递增. 由单调有界定理得, $\{a_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $a=\sqrt{2a}\implies a=0$或$a=2$. 又 $a_n\geq\sqrt{2}$, 由极限的保序性得 $a\geq\sqrt{2}$. 故 $a=2$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

(2) $a_1=\sqrt{c}<\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$. 假设 $a_n<\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$,

则 $a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}<\sqrt{c+\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4c+2+2\sqrt{1+4c}}=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+4c})$. 故对于任何的 n, 都有 $a_n<\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$. 故 $\{a_n\}$ 有上界. $a_{n+1}^2-a_n^2=c+a_n-a_n^2>0$, 故 $\{a_n\}$ 单调递增. 由单调有界定理得, $\{a_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $a=\sqrt{c+a}\implies a^2-a-c=0\implies a=\dfrac{1+\sqrt{1\pm 4c}}{2}$. 又 $a_n>0$, 由极限的保序性得 $a>0$. 故 $a=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

(3) 取正整数 $N=\lfloor c\rfloor$, 则 $n>N$ 时,

$0<\dfrac{c^n}{n!}=\dfrac{C^N}{1\cdot 2\cdots N}\cdot\dfrac{c^{n-N}}{(N+1)\cdots n}<\dfrac{C^N}{1\cdot 2\cdots N}\cdot\dfrac{c^{n-N}}{(N+1)^{n-N}}\to 0.$

由收敛数列的迫敛性得,$\{a_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

† 4 利用 $\{(1+\dfrac{1}{n})^n\}$ 为递增数列的结论, 证明 $\{(1+\dfrac{1}{n+1})^n\}$ 为递增数列.

证明 记 $a_n=(1+\dfrac{1}{n+1})^n$, 则 $a_{n+1}=(1+\dfrac{1}{n+2})^{n+1}=(1+\dfrac{1}{n+2})^{n+2}\dfrac{n+2}{n+3}$

$\geq(1+\dfrac{1}{n+1})^{n+1}\dfrac{n+2}{n+3}=(1+\dfrac{1}{n+1})^n\dfrac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}=(1+\dfrac{1}{n+1})^n\dfrac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3}$

$\geq(1+\dfrac{1}{n+1})^n=a_n$

† 5 应用柯西收敛准则, 证明以下数列 $\{a_n\}$ 收敛:

(1) $a_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$　　(2) $a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$

证明 (1) 不妨设 $n>m$.

$|a_n-a_m|=|\dfrac{\sin(m+1)}{2^{m+1}}+\dfrac{\sin(m+2)}{2^{m+2}}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}|<\dfrac{1}{2^{m+1}}+\dfrac{1}{2^{m+2}}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$

$=\dfrac{\frac{1}{2^{m+1}}(1-\frac{1}{2^{n-m}})}{1-\frac{1}{2}}<\dfrac{1}{2^m}<\dfrac{1}{m}<\varepsilon.$

故 $\forall\varepsilon>0,\exists N=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 使得 $\forall m,n>N$, 都有 $a_n-a_m<\varepsilon$. 由柯西收敛准则, $\{a_n\}$ 收敛.

(2) 不妨设 $n>m$.

$|a_n-a_m|=\dfrac{1}{(m+1)^2}+\dfrac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$

$<\dfrac{1}{m(m+1)}+\dfrac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}$

$=\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{m+2}-\dfrac{1}{m+3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$= \dfrac{1}{m+1} - \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{m+1} < \dfrac{1}{m}$

故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \dfrac{1}{\varepsilon}$, 使得 $\forall m,n > N$, 都有 $a_n - a_m < \varepsilon$. 由柯西收敛准则, $\{a_n\}$ 收敛. ■

† 6 证明: 如单调数列 $\{a_n\}$ 含有一个收敛子列, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 设单调数列 $\{a_n\}$ 有一个子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 a. $\{a_{n_k}\}$ 也是单调的, 则 $a_{n_k} \le a$.

对于任意的 k, 有 $k \le n_k$, 则 $a_k \le a_{n_k} \le a$. 故 $\{a_n\}$ 有界.

由单调有界定理得, $\{a_n\}$ 收敛. ■

† 7 证明: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证明 (解法一)$a_n = a_1 \dfrac{a_2}{a_1}\dfrac{a_3}{a_2}\cdots\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = a_1\dfrac{1}{l^{n-1}} \to 0$.

(解法二) 存在 $N > 0$, 使得 $n > N$ 时, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1$. 即 $n > N$ 时, $a_n > a_{n+1}$. $\{a_n\}$ 单调减且有下界 0, 由单调有界定理得, $\{a_n\}$ 收敛.

由保序性得, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ge 0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{a}{a} = 1$, 产生矛盾. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ■

† 8 证明: 若 $\{a_n\}$ 为递增 (递减) 有界数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}(\inf\{a_n\})$. 又问逆命题是否成立?

证明 记 $a = \sup\{a_n\}$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N > 0$, 使得 $a_N > a - \varepsilon$.

当 $n > N$ 时, 有 $a - \varepsilon < a_N < a_n \le a < a + \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

逆命题不成立. 如 $\{1, \dfrac{3}{2}, \cdots, \dfrac{1}{2k-1}, \dfrac{3}{2k}, \cdots\}$ ■

† 9 利用不等式 $b^{n+1} - a^{n+1} > (n+1)a^n(b-a), b > a > 0$, 证明: $\{(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}\}$ 为递减数列, 并由此推出 $\{(1+\dfrac{1}{n})^n\}$ 为有界数列.

证明 由不等式得 $b^{n+1} > a^n[(n+1)(b-a)+a] = a^n[(n+1)b - na]$

取 $a = 1 + \dfrac{1}{n+1}, b = 1 + \dfrac{1}{n}$,

有 $(1+\dfrac{1}{n})^{n+1} > (1+\dfrac{1}{n+1})^n[(n+1)(1+\dfrac{1}{n}) + 1 - n(1+\dfrac{1}{n+1})]$

$= (1+\dfrac{1}{n+1})^n[1 + \dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{2}{n+1}] > (1+\dfrac{1}{n+1})^n(1+\dfrac{1}{n+1})^2 = (1+\dfrac{1}{n+1})^{n+2}$

故 $\{(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}\}$ 为递减数列. 又 $\{(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}\}$ 有下界 0, 则 $\{(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}\}$ 收敛.

$(1+\dfrac{1}{n})^n < (1+\dfrac{1}{n})^{n+1} < (1+1)^2 = 4$. 故 $\{(1+\dfrac{1}{n})^n\}$ 为有界数列. ■

† 10 证明: $| e - (1+\dfrac{1}{n})^n | < \dfrac{3}{n}$

证明 由 9 得, $\{(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}\}$ 单调减且有下界, 故收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{n+1} = \inf\{(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}\}$.

又由 1 得, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{n+1} = e$. 故 $e = \inf\{(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}\} \implies e < (1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$.

下证 $(1+\frac{1}{n})^{n+1}-(1+\frac{1}{n})^{n}<\frac{3}{n}$. 即 $(1+\frac{1}{n})^{n}\frac{1}{n}<\frac{3}{n}\iff(1+\frac{1}{n})^{n}<3$. 由 $(1+\frac{1}{n})^{n}<e<3$ 易得.

综上,$|e-(1+\frac{1}{n})^{n}|=e-(1+\frac{1}{n})^{n}<(1+\frac{1}{n})^{n+1}-(1+\frac{1}{n})^{n}<\frac{3}{n}$. ■

† 11 给定两个正数 $a_1>b_1$, 作出其等差中项 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ 与等比中项 $b_2=\sqrt{a_1b_1}$. 一般地，令 $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}, n=1,2,\cdots,n,\cdots$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在且相等.

证明 易得 $b_1<b_n<b_{n+1}<a_{n+1}<a_n<a_1$, 故 $\{a_n\}$ 单调减有下界, $\{b_n\}$ 单调增有上界. 由单调有界定理得, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在.

对 $2a_{n+1}=a_n+b_n$ 两边取极限得, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. ■

† 12 设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 记 $\bar{a}_n=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\}$,$\underline{a}_n=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\}$. 证明:

(1) 对任何正整数 n, $\bar{a}_n\geq\underline{a}_n$

(2) $\{\bar{a}_n\}$ 为递减有界数列，$\{\underline{a}_n\}$ 为递增有界数列，且对任何正整数 n,m, 有 $\bar{a}_n\geq\underline{a}_m$

(3) 设 $\bar{a}$ 和 $\underline{a}$ 分别是 $\{\bar{a}_n\}$ 和 $\{\underline{a}_n\}$ 的极限，则 $\bar{a}\geq\underline{a}$

(4) $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是 $\bar{a}=\underline{a}$.

证明 (1) 对任何正整数 n , 有 $\underline{a}_n\leq a_n\leq\bar{a}_n$

(2) $\bar{a}_{n+1}=\sup\{a_{n+1},\cdots\}\leq\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\}=\bar{a}_n$, 故 $\{\bar{a}_n\}$ 为递减有界数列.

$\underline{a}_{n+1}=\inf\{a_{n+1},\cdots\}\geq\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\}=\underline{a}_n$, 故 $\{\underline{a}_n\}$ 为递增有界数列.

当 $n>m$ 时, $\bar{a}_n\geq\underline{a}_n\geq\underline{a}_m$. 当 $n<m$ 时, $\bar{a}_n\geq\bar{a}_m\geq\underline{a}_m$. 当 $n=m$ 时, $\bar{a}_n\geq\underline{a}_n=\underline{a}_m$.

(3) $\{\bar{a}_n\}$ 为递减有界数列，$\{\underline{a}_n\}$ 为递增有界数列, 极限均存在. 对任何正整数 n , 有 $\underline{a}_n\leq\bar{a}_n$, 由极限的保序性得, $\bar{a}\geq\underline{a}$.

(4) $\Longleftarrow)$ 若 $\bar{a}=\underline{a}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{a}_n=\lim\limits_{n\to\infty}\underline{a}_n$, 又 $\underline{a}_n\leq a_n\leq\bar{a}_n$, 由数列的迫敛性得, $\{a_n\}$ 收敛.

$\Longrightarrow)$ 若 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 使得 $n>N$ 时, 有 $a-\frac{\varepsilon}{2}<a_n<a+\frac{\varepsilon}{2}$.

由确界的定义得,$n>N$ 时, $\bar{a}_n\leq a+\frac{\varepsilon}{2}$ 且 $\underline{a}_n\geq a-\frac{\varepsilon}{2}$. 则 $\bar{a}-\underline{a}<\varepsilon$. 由 ε 的任意性得, $\bar{a}=\underline{a}$. ■