数学分析

lihui588211

2023 年 10 月 30 日

目录

第一章　实数集与函数

1.1　实数

数学分析研究的基本对象是定义在实数集上的函数. 为此，我们先简要叙述实数的有关概念.

1.1.1　实数及其性质

在中学数学课程中，我们知道实数由有理数与无理数两部分组成. **有理数**可用分数形式 $\frac{p}{q}$ (p、q 为整数，$q \neq 0$) 表示，也可用有限十进制小数或无限循环十进制小数来表示；而无限不循环十进制小数则称为**无理数**. 有理数和无理数统称为**实数**.

为了之后讨论的需要，我们把有限十进制小数 (包括整数) 也统一表示为无限十进制小数. 为了实现这个目的，我们作如下规定:

- 对于正有限小数 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 时，其中 $0 \le a_i \le 9$, $i = 1, 2, \cdots n$, $a_n \neq 0$ ，a_0 为非负整数，记
$$x = a_0.a_1a_2\cdots(a_n - 1)9999\cdots$$
- 对于正整数 $x = a_0$ ，记
$$x = (a_0 - 1).9999\cdots$$
- 对于负有限小数 (包括负整数) y ，先将 $-y$ 表示为正无限小数，再加负号得到 y 的无限小数形式
- 对于 0 , 记 $0 = 0.000\cdots$

  于是，任何实数都可用一个确定的无限小数来表示. 如 5 表示为 $4.999\cdots$ ，3.1415 表示为 $3.14149999\cdots$ ，-2.738 表示为 $-2.7379999\cdots$

我们已经熟知比较两个有理数大小的方法了. 下面定义两个实数的大小关系.

定义 1 (非负实数的大小) 给定两个非负实数
$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,\quad y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$$
其中 a_0, b_0 为非负整数，$a_k, b_k (k = 1, 2, \cdots)$ 为整数，$0 \le a_k \le 9, 0 \le b_k \le 9$.
- 若有 $a_k = b_k (k = 0, 1, 2, \cdots)$ ，则称 x 与 y 相等，记为 $x = y$.
- 若 $a_0 > b_0$ 或存在非负整数 l ，使得 $a_k = b_k (k = 0, 1, 2, \cdots, l)$ 但 $a_{l+1} > b_{l+1}$ ，则称 x

大于 y 或 y 小于 x ，记为 $x > y$ 或 $y < x$.

对于负实数 x,y ，如果按照上面的定义，分别有 $-x = -y$ 与 $-x > -y$ ，则分别称 $x = y$ 与 $x < y$ (或 $y > x$).

另外，规定任何非负实数大于任何负实数.

下面给出一个通过有限小数来比较两个实数大小的等价条件. 为此，先给出如下定义.

定义 2 (实数的近似) 设 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为非负实数.

- 称有理数 $x_n = a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 为实数 x 的 **n 位不足近似**.
- 称有理数 $\bar{x}_n = x_n + \dfrac{1}{10^n}$ 为 x 的 **n 位过剩近似**.

对于负实数 $x = -a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ ，其 n 位不足近似和 n 位过剩近似分别规定为

$$x_n = -a_0.a_1a_2\cdots a_n - \frac{1}{10^n} \qquad \bar{x}_n = x_n + \frac{1}{10^n}$$

注 1 不难看出，实数 x 的不足近似 x_n 当 n 增大时不减，即 $x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots$; 而过剩近似 $\bar{x}_n$ 当 n 增大时不增，即 $\bar{x}_0 \ge \bar{x}_1 \ge \bar{x}_2 \ge \cdots$

我们有以下的命题.

命题 1 (近似等价比大小) 设 $x = a_0.a_1a_2\cdots$ 与 $y = b_0.b_1b_2\cdots$ 为两个实数，则

$$x > y \iff \exists n \in N, 使得 x_n > \bar{y}_n$$

其中，x_n 表示 x 的 n 位不足近似，$\bar{y}_n$ 表示 y 的 n 位过剩近似.

关于这个命题的证明，以及实数四则运算的定义，可参阅本书附录。

例 1 (两个实数之间必定存在有理数)

设 x,y 为实数，$x < y$. 证明: 存在有理数 r，满足 $x < r < y$.

证明 $x < y$, 由命题 1 得，存在非负整数 n , 使得 $\bar{x}_n < y_n$.

令 $r = \dfrac{1}{2}(\bar{x}_n + y_n)$, 则 r 为有理数，且有

$$x \le \bar{x}_n < r < y_n \le y$$ ■

为了方便起见，通常将全体实数构成的集合记为 $\mathbb{R}$, 即 $\mathbb{R} = \{x \mid x为实数\}$.

实数有如下一些主要性质：

1. 实数集 $\mathbb{R}$ 对加、减、乘、除 (除数不为 0) 四则运算是封闭的，即任意两个实数的和、差、积、商 (除数不为 0) 仍然是实数.
2. 实数集是有序的，即任意两实数 a,b 必然满足下述三个关系之一：$a < b, a = b, a > b$.
3. 实数的大小关系具有传递性，即若 $a > b, b > c$, 则有 $a > c$.

4. 实数具有阿基米德 (Archimedes) 性，即对任何 $a, b \in \mathbb{R}$, 若 $b > a > 0$, 则存在正整数 n，使得 $na > b$.

5. 实数集 $\mathbb{R}$ 具有稠密性，即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数，且既有有理数 (见例 1), 也有无理数.

6. 如果在一条直线上 (通常画成水平直线) 确定一点 O 作为原点，指定一个方向为正向 (通常把指向右方的方向规定为正向)，并规定一个单位长度，则称此直线为 **数轴**. 可以说明：任一实数都对应数轴上唯一的一点；反之，数轴上的每一点也都唯一地代表着一个实数. 于是，实数集 $\mathbb{R}$ 与数轴上的点有着一一对应关系. 在本书以后的叙述中，常把“实数 a”与“数轴上的点 a”这两种说法看做具有相同的含义.

例 2
设 $a, b \in \mathbb{R}$. 证明：若对任何正数 ε , 有 $a < b + \varepsilon$, 则 $a \le b$.

证明 用反证法. 假设结论不成立，则根据实数集的有序性，必有 $a > b$. 令 $\varepsilon = a - b$, 则 ε 为正数，但有 $a = b + \varepsilon$, 这与题设 $a < b + \varepsilon$ 产生矛盾. 因此必有 $a \le b$. ■

1.1.2 绝对值与不等式

实数 a 的**绝对值**定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

从数轴上看，数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

实数的绝对值有如下一些性质：

1. $|a| = |-a| \ge 0$, 当且仅当 $a = 0$ 时，有 $|a| = 0$.

2. $-|a| \le a \le |a|$.

3. $|a| < h \iff -h < a < h \qquad |a| \le h \iff -h \le a \le h$ (h>0).

4. 对任何 $a, b \in \mathbb{R}$, 都有如下的**三角不等式**：

$$|a| - |b| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$$

5. $|ab| = |a||b|$

6. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} (b \ne 0)$

下面只证明性质 4，其余性质由读者自行证明.

证明 由性质 2 有 $\quad -|a| \le a \le |a|, -|b| \le b \le |b|$

两式相加得 $\quad -(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|$

根据性质 3，上式等价于

$$|a + b| \le |a| + |b| \tag{1}$$

将式 (1) 中 b 换成 $-b$, 即得 $|\, a-b \,|\le|\, a \,|+|-b\,|=|\, a \,|+|\, b\,|$, 这就证明了性质 4 不等式的右半部分.

又由 $|\, a \,|=|\, a-b+b \,|$, 根据式 (1.1) 得 $|\, a \,|\le|\, a-b \,|+|\, b \,|$, 从而有

$$|\, a \,|-|\, b \,|\le|\, a-b \,| \tag{2}$$

将式 (2) 中的 b 换成 $-b$, 即得 $|\, a \,|-|\, b \,|\le|\, a+b \,|$. 左半部分得证. ■

习题 1.1

† 1 设 a 为有理数，x 为无理数. 证明：

(1) $a+x$ 是无理数 (2) 当 $a\neq 0$ 时，ax 是无理数.

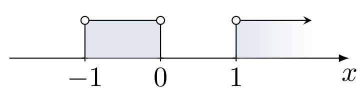
证明 (1) 用反证法. 假设 $a+x$ 是有理数，则存在整数 $q_1,p_1\neq 0$ 使得 $a+x=\dfrac{q_1}{p_1}$. 又 a 为有理数，则存在整数 $q_2,p_2\neq 0$ 使得 $a=\dfrac{q_2}{p_2}$. 则 $x=(a+x)-a=\dfrac{q_1}{p_1}-\dfrac{q_2}{p_2}=\dfrac{q_1p_2-q_2p_1}{p_1p_2}$. 其中，$q_1p_2-q_2p_1$,$p_1p_2$ 均为整数，且 $p_1p_2\neq 0$, 则 x 也为有理数. 这与题设 x 为无理数相矛盾. 故 $a+x$ 必为无理数.

(2) 与 (1) 思路类似. 假设 ax 是有理数，有 $ax=\dfrac{q_1}{p_1},a=\dfrac{q_2}{p_2}$, 其中 p_1,p_2,q_2 均不为 0. 则 $x=\dfrac{ax}{a}=\dfrac{q_1p_2}{p_1q_2}$ 也为有理数. 与题设矛盾. ■

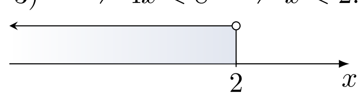
† 2 试在数轴上表示出下列不等式的解：

(1) $x(x^2-1)>0$ (2) $|\, x-1 \,|<|\, x-3 \,|$ (3)$\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\ge\sqrt{3x-2}$

解 (1) 因式分解得 $x(x+1)(x-1)>0 \implies -1<x<0$或$x>1$



(2) 两边平方得 $(x-1)^2<(x-3)^2 \implies 4x<8 \implies x<2$.



(3) 首先，根据平方根的非负性，有 $x-1\ge 0,2x-1\ge 0,3x-2\ge 0,x-1\ge 2x-1$ 整理得相互矛盾的不等式：$x\ge 1,x\le 0$. 故不等式无解. ■

† 3 设 $a,b\in\mathbb{R}$. 证明：若对任何正数 ε , 都有 $|\, a-b \,|<\varepsilon$, 则 $a=b$.

证明 用反证法. 假设 $a\neq b$, 则 $|\, a-b \,|>0$. 取 $\varepsilon=|\, a-b \,|$, 则 $|\, a-b \,|=\varepsilon$. 这与题设 $|\, a-b \,|<\varepsilon$ 相矛盾. 故必有 $a=b$. ■

† 4 设 $x\neq 0$, 证明 $|\, x+\dfrac{1}{x} \,|\ge 2$, 并说明其中等号何时成立.

证明 易知 $(x-\frac{1}{x})^2 \geq 0 \iff x^2-2+\frac{1}{x^2} \geq 0 \iff x^2+2+\frac{1}{x^2} \geq 4 \iff (x+\frac{1}{x})^2 \geq 4 \iff (|x+\frac{1}{x}|) \geq 2^2 \iff |x+\frac{1}{x}| \geq 2$. 并且，$|x+\frac{1}{x}|=2 \iff (x-\frac{1}{x})^2=0 \iff x=\frac{1}{x} \iff x^2=1 \iff |x|=1$. 即 $|x|=1$ 时等号成立. ■

† 5 证明：对任何 $x\in\mathbb{R}$，有

(1)$|x-1|+|x-2| \geq 1$　(2)$|x-1|+|x-2|+|x-3| \geq 2$

证明 (1) 由三角不等式得 $|x-1|+|x-2| \geq |(x-1)-(x-2)|=1$. 当且仅当 $x-1\geq 0$ 且 $x-2\leq 0$, 即 $x\in[1,2]$ 时等号成立.

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3| \geq |x-1|+|x-3| \geq |(x-1)-(x-3)|=2$. 当且仅当 $x=2$ 时等号成立. ■

† 6 设 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ 表示全体正实数的集合). 证明：

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \leq |b-c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗？

证明 欲证 $|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}| \leq |b-c|$

只需证 $(|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}|)^2 \leq (|b-c|)^2$

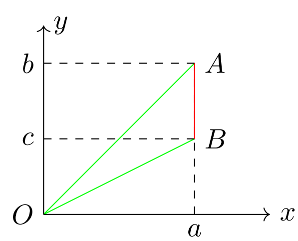
$\iff a^2+b^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+b^2+c^2 \leq b^2+2bc+c^2 \iff a^2+bc \leq \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$

$\iff a^4+2a^2bc+b^2c^2 \leq a^4+a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2$

$\iff 2a^2bc \leq a^2(b^2+c^2)$

由于 $a^2\geq 0$ 且 $b^2+c^2\geq 2bc$，故原命题得证.

几何意义：给出平面上两点 $A(a,b), B(a,c)$, 则 A,B 到原点 O 的距离分别为 $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+c^2}$，A,B 两点的距离为 $|b-c|$. 故原不等式等价于 $|OA-OB| \leq |AB|$，即两边之差小于第三边. 如下图所示.



■

† 7 设 $x>0, b>0, a\neq b$. 证明 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间.

证明

$$\begin{aligned}&(\frac{a+x}{b+x}-1)(\frac{a+x}{b+x}-\frac{a}{b})\\ &=(\frac{a+x-b-x}{b+x})(\frac{ab+bx-ab-ax}{b(b+x)})\\ &=\frac{-x(a-b)^2}{b(b+x)^2}\end{aligned}$$

由于 $x>0, b>0, a\neq b$，上式 <0. 故 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间. ■

† 8 设 p 为正整数. 证明：若 p 不是完全平方数，则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

证明 用反证法. 假设 $\sqrt{p}$ 是有理数，则存在互质的正整数 m,n 使得 $\sqrt{p}=\dfrac{n}{m} \iff p=\dfrac{n^2}{m^2}$. 可得 $n^2=pm^2$，于是 p 是 n 的因数. 设 $n=pk$，则 k 与 m 互质，且 $p^2k^2=pm^2 \iff m^2=pk^2$. 可得 p 也是 m 的因数. m,n 有公因数 p，这与 m,n 互质相矛盾. 故 $\sqrt{p}$ 是无理数. ■

† 9 设 a,b 为给定实数. 试用不等式符号 (不用绝对值符号) 表示下列不等式的解：

(1) $|x-a|<|x-b|$ (2) $|x-a|<x-b$ (3) $|x^2-a|<b$

解 (1)

$$
\begin{aligned}
&|x-a|<|x-b| \\
\iff &(x-a)^2<(x-b)^2 \iff 2x(a-b)>a^2+b^2 \\
\iff &\begin{cases} \text{无解} & a=b \\ x>\dfrac{a+b}{2} & a>b \\ x<\dfrac{a+b}{2} & a<b \end{cases}
\end{aligned}
$$

(2) 解集必然是 $\{x \mid x>b\}$ 的子集. 结合 (1) 可得

$$
\begin{cases} \text{无解} & a\le b \\ x>\dfrac{a+b}{2} & a>b \end{cases}
$$

(3) <1> 当 $b\le 0$ 时，不等式无解.

<2> 当 $b>0$ 时，不等式等价于 $a-b<x^2<a+b$.

[1] 当 $a+b\le 0$ 时，不等式无解.

[2] 当 $a+b>0$ 时，

1) 若 $a<b$，不等式的解为 $-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b}$.

2) 若 $a>b$，不等式的解为 $\sqrt{a-b}<x<\sqrt{a+b}$ 或 $-\sqrt{a+b}<x<-\sqrt{a-b}$. ■

1.2 数集 • 确界原理

本节中我们先定义 $\mathbb{R}$ 中两类重要的数集——区间和邻域，然后讨论有界集，并给出确界的定义和确界原理.

1.2.1 区间和邻域

设 $a,b\in\mathbb{R}$，且 $a<b$. 我们称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为 **开区间**，记作 (a,b)；称数集 $\{x \mid a\le x\le b\}$ 为 **闭区间**，记作 $[a,b]$；称数集 $\{x \mid a\le x<b\}$ 和 $\{x \mid a<x\le b\}$ 为 **半开半闭区间**，分别记作 $(a,b]$ 和 $[a,b)$. 以上这几类区间统称为 **有限区间**. 从数轴上来看，开区间 (a,b) 表示 a,b 两点间所有点的集合，闭区间 $[a,b]$ 比开区间 (a,b) 多两个端点，半开半闭区间 $(a,b]$ 和 $[a,b)$ 则比开区间 (a,b) 多一个端点.

数集 $\{x \mid x \geq a\}$ 记作 $[a, +\infty)$, 这里符号 ∞ 读作“无穷大”，$+\infty$ 读作“正无穷大”. 类似地，我们记

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$$
$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$$
$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$$

其中 $-\infty$ 读作“负无穷大”. 以上这几类数集统称为 **无限区间**. 有限区间和无限区间统称为 **区间**.

设 $a \in \mathbb{R}, \delta > 0$. 称集合 $\{x \mid| x - a |< \delta\}$ 为 **点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a, \delta)$, 或简记为 $U(a)$, 即有

$$U(a, \delta) = \{x \mid| x - a |< \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$

点 a 的空心 δ 邻域定义为

$$U^\circ(a, \delta) = \{x \mid 0 <| x - a |< \delta\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$

它也可以简记为 $U^\circ(a)$. 注意到，$U^\circ(a, \delta)$ 和 $U(a, \delta)$ 的差别在于：$U^\circ(a, \delta)$ 不包含点 a.

此外，我们还常用到以下几种邻域：

点 a 的 δ 左邻域 $U_-(a, \delta) = (a - \delta, a]$, 简记为 $U_-(a)$.

点 a 的 δ 右邻域 $U_+(a, \delta) = [a, a + \delta)$, 简记为 $U_+(a)$.

点 a 的空心 δ 左邻域 $U_-^\circ(a, \delta) = (a - \delta, a)$, 简记为 $U_-^\circ(a)$.

点 a 的空心 δ 右邻域 $U_+^\circ(a, \delta) = (a, a + \delta)$, 简记为 $U_+^\circ(a)$.

∞ **邻域** $U(\infty) = \{x \mid| x |> M\}$, 其中 M 为充分大的正数 (下同).

$+\infty$ **邻域** $U(+\infty) = \{x \mid x > M\}$.

$-\infty$ **邻域** $U(-\infty) = \{x \mid x < -M\}$.

1.2.2 有界集 • 确界原理

定义 3 (有界数集) 设 S 为 $\mathbb{R}$ 中的一个数集.

- 若存在数 M, 使得对一切 $x \in S$, 都有 $x \leq M$, 则称 S 为 **有上界的数集** ，称 M 为 S 的一个 **上界**.
- 若存在数 L, 使得对一切 $x \in S$, 都有 $xgleM$, 则称 S 为 **有下界的数集** ，称 L 为 S 的一个 **下界**.
- 若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为**有界集**.

例 3 (正整数集无上界)
证明数集 $\mathbb{N}_+ = \{n \mid n\text{为正整数}\}$ 有下界而无上界.

证明 显然，任何一个不大于 1 的实数都是 $\mathbb{N}_+$ 的下界，故 $\mathbb{N}_+$ 为有下界的数集.

为证 $\mathbb{N}_+$ 无上界，按照定义只需证明：对于无论多么大的数 M, 总存在某个正整数 $n_0 \in \mathbb{N}_+$, 有 $n_0 > M$. 事实上，对任何正数 M (无论多么大), 总可取 $n_0 = \lfloor M \rfloor + 1$, 则 $n_0 \in \mathbb{N}+$ ，且 $n_0 > M$. 这就证明了 $\mathbb{N}_+$ 无上界. ■

读者还可以自行证明：任何有限区间都是有界集，无限区间都是无界集; 由有限个数组成的数集是有界集.

若数集 S 有上界，则显然它有无穷多个上界，而其中最小的一个上界常常具有重要的作用，称它为数集 S 的上确界. 同样，有下界数集的最大下界，称为该数集的下确界. 下面给出数集的上确界和下确界的精确定义.

定义 4 (上确界) 设 S 是 $\mathbb{R}$ 中的一个数集. 若数 η 满足:

(i) 对一切 $x \in S$, 有 $x \leq \eta$, 即 η 是 S 的上界

(ii) 对任何 $\alpha < \eta$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$, 即 η 又是 S 的最小上界

则称数 η 为数集 S 的**上确界**，记作 $\eta = \sup S$

定义 5 (下确界) 设 S 是 $\mathbb{R}$ 中的一个数集. 若数 ξ 满足:

(i) 对一切 $x \in S$, 有 $x \geq \xi$, 即 ξ 是 S 的下界

(ii) 对任何 $\beta > \xi$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 < \beta$, 即 ξ 又是 S 的最大上界

则称数 ξ 为数集 S 的**下确界**，记作 $\xi = \inf S$

上确界与下确界统称为 **确界**.

例 4

设 $S = \{x \mid x\text{为区间}(0,1)\text{上的有理数}\}$. 试按照上下确界的定义验证：$\sup S = 1, \inf S = 0$.

证明 先验证 $\sup S = 1$:

(i) 对一切的 $x \in S$, 明显有 $x \leq 1$, 即 1 确实是 S 的上界.

(ii) 对于任何的 $\alpha < 1$,

- 若 $\alpha \leq 0$, 则任取 $x_0 \in S$, 都有 $x_0 > \alpha$
- 若 $\alpha > 0$, 则由有理数集在实数集中的稠密性可知，在 $(\alpha, 1)$ 上必有有理数 x_0 , 即存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$.

类似地，可以验证 $\inf S = 0$. ■

读者还可自行验证：闭区间 [0 1] 的上、下确界分别为 1 和 0; 对于数集 $E = \{\dfrac{(-1)^n}{n} \mid n = 1, 2, \cdots\}$ ，有 $\sup E = \dfrac{1}{2}, \inf E = -1$; 正整数集 $\mathbb{N}_+$ 有下确界 $\inf \mathbb{N}_+ = 1$, 而没有上确界.

注 2 由上 *(*下*)* 确界的定义可见，若数集 S 存在上 *(*下*)* 确界，则一定是唯一的. 又若数集 S 存在上、下确界，则有 $\inf S \leq \sup S$.

注 3 从上面一些例子可见，数集 S 的确界可能属于 S , 也可能不属于 S.

例 5 (确界与最值)
设数集 S 有上确界. 证明

$$\eta = \sup S \in S \iff \eta = \max S$$

证明 $\Longrightarrow$) 设 $\eta = \sup S \in S$，也对一切 $x \in S$, 都有 $x \leq \eta$, 而 $\eta \in S$, 故 η 是数集 S 中最大的数，即 $\eta = \max S$.

$\Longleftarrow$) 设 $\eta = \max S$，则 $\eta \in S$; 下面验证 $\eta = \sup S$:

(i) 对一切 $x \in S$, 均有 $x \leq S$, 即 η 是 S 的上界.

(ii) 对任何 $\alpha < \eta$, 只需取 $x_0 = \eta \in S$, 便有 $x_0 \geq \alpha$. 这说明 $\eta = \sup S$. ■

关于数集确界的存在性，我们给出如下确界原理.

定理 1 (确界原理) 设 S 为非空数集. 若 S 有上界，则 S 必有上确界; 若 S 有下界，则 S 必有下确界.

证明 我们只证明关于上确界的结论，后一结论可类似地证明.

为了叙述方便，不妨设 S 含有非负数. 由于 S 有上界，故可以找到非负整数 n , 使得

1) 对于任何 $x \in S$, 都有 $x < n + 1$.

2) 存在 $a_0 \in S$, 使 $a_0 \geq n$.

对于半开半闭区间 $[n, n+1)$ 作 10 等分，分点为 $n.1, n.2, \cdots, n.9$, 则存在 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中的一个数 n_1 ，使得

1) 对于任何 $x \in S$, 都有 $x < n.n_1 + \dfrac{1}{10} = n.(n_1 + 1)$.

2) 存在 $a_1 \in S$, 使 $a_1 \geq n.n_1$.

. 对于半开半闭区间 $[n.n_1, n.n_1 + \dfrac{1}{10})$ 作 10 等分，分点为 $n.n_11, n.n_12, \cdots, n.n_19$ ，则存在 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中的一个数 n_2 ，使得

1) 对于任何 $x \in S$, 都有 $x < n.n_1n_2 + \dfrac{1}{10^2} = n.n_1(n_2 + 1)$.

2) 存在 $a_2 \in S$, 使 $a_2 \geq n.n_1n_2$.

继续不断地 10 等分在前一步骤中所得到的半开区间，可知对任何 $k = 1, 2, \cdots$, 存在 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中的一个数 n_k ，使得

1) 对于任何 $x \in S$, 都有 $x < n.n_1n_2 \cdots n_k + \dfrac{1}{10^k} = n.n_1n_2 \cdots (n_k + 1)$. (3)

2) 存在 $a_k \in S$, 使 $a_k \geq n.n_1n_2 \cdots n_k$.

将上述步骤无限地进行下去，得到实数 $\eta = n.n_1n_2 \cdots n_k \cdots$. 下面证明 $\eta = \sup S$. 为此，只需证明:

(i) 对一切 $x \in S$, 有 $x \leq \eta$.

(ii) 对任何 $\alpha > \eta$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$

倘若结论 (i) 不成立，即存在 $x \in S$, 使 $x > \eta$, 则可以找到 x 的 k 位不足近似 x_k ，使得

$$x_k > \bar{\eta}_k = n.n_1 n_2 \cdots n_k + \frac{1}{10^k}$$

但这与不等式 (3) 相矛盾. 于是 (i) 得证.

现设 $\alpha < \eta$, 则存在 k, 使 η 的 k 位不足近似 $\eta_k > \bar{\alpha}_k$, 即 $n.n_1 n_2 \cdots n_k > \bar{\alpha}_k$. 根据数 η 的构造过程，存在 $x_0 \in S$, 有 $x_0 \geq \eta_k > \bar{\alpha}_k \geq \alpha$. 于是我们得到 $x_0 > \alpha$. 这说明 (ii) 成立. ■

在本书中，确界原理是极限理论的基础，读者应给予充分的重视.