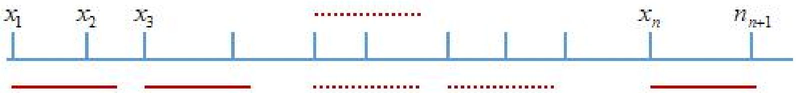
1、给定数轴 X 上 n 个不同点的集合{x1,x2,...,xn}，其中 x1<x2<⋯<xn 。现在用若干个长度为 1 的闭区间来覆盖这些点。设计一个算法找到最少的闭区间个数和位置。

(1) 请简要叙述贪心算法的策略；（2 分）

(2) 请证明你的贪心策略能够给出最优解（4 分）；

(3) 请分析算法的空间和时间复杂度（4 分）。

(1)、如下图，从第一个点开始，每个长度为 1 的区间起始处刚好覆盖前一个区间没有覆盖的下一个点，自该点开始依次往后判断，若当前点在覆盖区间内，则跳过，否则继续添加下一个覆盖区间。直到第 n 个点为止。



(2) 、正确性证明（归纳法）

命题：对于 n 个点，算法能得到最优解。

归纳基础：对于只有一个点的情况，该算法显然是最优解。

归纳步骤：

假设对于 n 个点（$x_1 .x_2......x_n$），算法能得到最优解

考虑 n+1 个点（$x_1x_2......x_nx_{n+1}$），由归纳假设：

对于 n 个点 $x_2x_3......x_{n+1}$，算法能得到最优解 I'

令 $I = I' \cup \{1\}$

I 是 n+1 个点 $x_1x_2......x_nx_{n+1}$ 的最优解

若不然，存在 n+1 个点的最优解 I^*（必定包括覆盖第 1 个点的区间）

则 $I^* - \{1\}$ 是 n 个点 $x_2x_3......x_{n+1}$ 的最优解

$\because I^* < I \qquad \therefore I^* - \{1\} < I - \{1\} = I'$

则 n 个点 $x_2x_3......x_{n+1}$ 的最优解为 $I^* - \{1\}$，与最优解为 I' 矛盾

所以 $I = I' \cup \{1\}$ 是 n+1 个点 $x_1x_2......x_nx_{n+1}$ 的最优解

综上所述，对于 n 个点，算法能得到最优解。

(3) 、时空复杂度分析

可以定义一个数组存储这些覆盖区间的位置，一个计数器累加存储覆盖区间的个数，最坏情况下每个点对应一个覆盖区间，空间复杂度为 O(n)
从第一个点依次往后判断，直到最后一个点为止，时间复杂度为 O(n)

2. 一个公司需要购买 n 个密码软件的许可证，按规定每个月至多可得到一个软件许可证，每个许可证当前售价都是 1000 元，但是第i个许可证的售价将按照$r_i > 1$ 的指数因子增长，$i = 1,2,\dots,n$. 例如，第i个许可证的售价在 1 个月后将是$r_i * 1000$元，2 月后将是$r_i^2 * 1000$元，k 个月后将是$r_i^k * 1000$元，假设$r_1, r_2, \dots, r_n$是给定正整数，试给出一个购买许可证的顺序，以使得话费 的总钱数最少。

1. 令问题的解I是$i_1, i_2, \dots, i_n$，其中$i_1, i_2, \dots, i_n$是自然数 1 到 n 的排列。问：按照这个解给出的顺序，当月购买第一个许可证，以后每个月恰好购买一个软件许可证，总的花费是多少元？
2. 设计一个贪心算法求解这个问题，用一段简短的话说明该算法的贪心策略.
3. 证明算法的正确性。
4. 求出算法在最坏情况下的时间复杂度。

(1) 、

总的花费 S=$1000 + r_{i_2} * 1000 + r_{i_3}{}^{2} * 1000 + \dots\dots + r_{i_n}{}^{n-1} * 1000$

$=1000(1 + r_{i_2} + r_{i_3}{}^{2} + \dots\dots r_{i_n}{}^{n-1})$

(2) 、

按照贪心算法的思路，首先买 r_i 比较大的软件许可证。

所以，可以先将 r 由大到小排序，再按照这个排列购买。

(3) 、正确性证明（反证法）

当只有一个软件许可证时，显然是最优解
当有 n 个软件许可证时（n>1），将 r 从大到小排序

假设得到的序列为 $i_1 i_2 ......i_n$，对应的花费 S 为最优解

若不然，则在该序列中必存在 r_p 和 r_q （$1 \le p, q \le n$,p<q, $r_p < r_q$ ），将其对换，得到对应的

花费应当为 $S^{'} < S$ ，然而根据问题 1 的式子，因为兑换后 r_q 在 r_p 前面，S'>S，两者相矛盾

所以将 r 从大到小排序后得到的序列 $i_1 i_2 ......i_n$ 对应的花费 S 为最优解

(4) 、时间复杂度
最坏情况下，排序的时间复杂度为 O(nlogn)，计算的时间复杂度为 O(n)
所以最坏情况下的时间复杂度为 O(nlogn).