书本 52 页闭区间套定理和实数集是不可列集的证明。 我懂，但是我对于这两个东西的理解还是非常迷糊的 我不知道怎么形容这个感觉。我觉得自己需要更加高维的角度来看待这个问题 我不知道该怎么对这个问题提出质疑，我总是认为这个证明缺少了某些省略了但是非常重要的条件。 (这个现象正常吗？)

《陈纪修》定义 5.1.2 p146 页 有关于凹凸函数的定义。 我直接抄下来吧 设函数$f(x)$ 在区间 I 上定义， 若对 I 中的任意两点x_1和x_2 和任意$\lambda \in (0,1)$,都有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 是 I 上的下凸函数。 若不等号严格成立，则称$f(x)$ 在 I 上是严格下凸函数。 类似地可以给出上凸函数和严格上凸函数的定义。

开区间的凸函数在定义域内一定连续 这个是可以证明的，以下凸函数为例,我现在直接证明
令$f(x_0) < \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 我们这里直接令左右极限存在且相等 这样我们可以取一个点$a < x_0$ 不妨令$\lambda = 0.5$
$f(\lambda a + (1-\lambda)x_0) = f(0.5a + 0.5x_0)$ 这里如果$a \to x_0$ 那么 $f(0.5a + 0.5x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 而 $\lambda f(a) + (1-\lambda) f(x_0) = 0.5 f(a) + 0.5 f(x_0)$ 这个值显然是小于左极限的 和定义矛盾 如果 $f(x_0) > \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
这个更加好证明了，具体找两个点a, b使$\lambda a + (1-\lambda) b = x_0$ 让$f(a), f(b)$ 都小于 $f(x_0)$ 就好了 这样就和定义矛盾了 所以可以得到函数值一定不会大于或者小于左右极限，那么只能是等于了 所以我们可以说凸函数一定连续。 不过是开区间内，闭区间的那两个端点可以不连续依然满足定义。
可以证明，开区间的凸函数如果有不可微的点，只能是左右导数不相等。不可能是跳跃或者别的。
都证明函数一定连续了，那还说啥呢，只能是这个情况了

《陈纪修》例 3.2.7 p78 页 Riemann 函数 这个是我发现总是用到这个东西，所以这个要看 这个函数特殊在，他的左右极限都是存在且相等，都为 0,但是函数值会由于其是否是有理数而不同 从而导致连续性的区别

《陈纪修》例 3.4.6 p97 页 Cantor 定理 这个还挺有意思的，花时间看看

《华师大》第一章 §2二、p5 有关于上下确界的定义。多看几遍，别忘了，上下确界和这个值是否在集合中无关

还有 31 页的子列的定义和那些性质，都自己多翻翻，挺重要的

陈纪修没有讲有限覆盖定理，所以我现在把华师大的教材这部分讲一下

《华师大》第十三章 §1p25 这里函数列的极限函数并没有要求函数列连续 这里只是说定义在同一数集上的函数，不代表就连续了 极限函数是通过数列的极限来定义的 这样，原来的函数可以不连续，可以有间断点，反正在那个点可以直接把间断的函数直接剃掉 但是后面可以继续用这个有间断的函数 我现在唯一的疑问就是，这个函数间断点的位置和数量能否被 n 影响？如果可以的话，具体的影响是怎么样的 这部分的反例什么的都比较充足，挺不错的

这个一致收敛的定义还挺奇妙，并不是直接由函数列来找极限函数， 而是通过函数列和某个函数的关系来定义一致收敛。 但是我有一个疑问，就是这个 f(x) 一般是怎么找到的？ 其实一致收敛的极限函数一定是逐点收敛的极限函数把。 一致收敛是逐点收敛的充分条件

我有一个疑问，一致收敛出来的极限函数的连续性怎么看？ 如果函数列统一在某个点间断，是不同样也可以得到极限函数，并且还是间断的？

这里通过定义一来得到不一致收敛的的结论里要求$n' > N$ 是有道理的 不然任意一个 n 来找这个 x 不是随便找嘛。就算是收敛的，也能找到差值大于ε_0的

函数一致收敛的柯西准则和函数列一致收敛是充要条件 这个柯西准则好，不用找那个极限函数了。直接由函数列本身就能定义一致收敛了

这个定理 13.2 我感觉就是定义换了一种说法，这个和定义的意思难道不一样吗？ 不过他这个推论还挺不错。有点海涅原理的味道。

这部分和函数项级数的关系还挺紧密。 定理 13.4 这个求和自己想想为什么是$\frac{x^n}{x-1}$ 其实很简单 级数的一致收敛，我只在函数项级数中看到。这应该是函数项级数专有的词 其实可以想象，别的级数没有一致收敛这种说法。 我对于一致收敛的理解还有点浅。但是我知道这之间有区别 等我将一致收敛的理解提高后，我还会再回来补充的 我现在的理解是：一致连续中的 N 只和ε 有关，和 x 无关 而每个数项级数可以理解为 x 固定的函数项级数 所以从这个角度，他们的 N 只和ε 有关 我不确定，这个解释是否完善。但是我自认为自己能够理解

还挺奇妙，函数项级数的收敛是通过和函数的收敛性来判断的 但是函数项级数的一致收敛性是通过余函数的极限来判断的 因为数项级数是收敛于某个确定的数，而函数项级数是收敛于某个函数 函数列本身可以收敛和一致收敛于某个函数 函数列的和，函数项级数也可以收敛和一致收敛于某个函数

这个定理 13.8 我自己先写一下证明 由一致连续的定义入手 令$x_1 \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$且$|x_1 - x_0| = \varepsilon$ 由一致收敛的定义可得 $\exists N > n_0$ so that

$$|f_N(x_1) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

不妨令 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ $\exists |f(x_1) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $|f_N(x_1) - y_0| < |f_N(x_1) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$ 差不多就是这样。这只是一个思路，但是没有严谨写完。但我估计严谨也是这个套路

在 p35 页的定理 13.9 上面的 13.8 还挺有意思 极限可以交换顺序的条件是一致连续 不知道普通函数的条件是什么