

书本 52 页闭区间套定理和实数集是不可列集的证明。我懂，但是我对于这两个东西的理解还是非常迷糊的 我不知道怎么形容这个感觉。我觉得自己需要更加高维的角度来看待这个问题 我不知道该怎么对这个问题提出质疑，我总是认为这个证明缺少了某些省略了但是非常重要的条件。(这个现象正常吗?)

《陈纪修》定义 5.1.2 p146 页 有关于凹凸函数的定义。我直接抄下来吧 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上定义，若对 I 中的任意两点 x_1 和 x_2 和任意 $\lambda \in (0, 1)$, 都有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 是 I 上的下凸函数。若不等号严格成立，则称 $f(x)$ 在 I 上是严格下凸函数。类似地可以给出上凸函数和严格上凸函数的定义。

开区间的凸函数在定义域内一定连续 这个是可以证明的，以下凸函数为例，我现在直接证明 令 $f(x_0) < \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 我们这里直接令左右极限存在且相等 这样我们可以取一个点 $a < x_0$ 不妨令 $\lambda = 0.5$

$f(\lambda a + (1 - \lambda)x_0) = f(0.5a + 0.5x_0)$ 这里如果 $a \rightarrow x_0$ 那么 $f(0.5a + 0.5x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 而 $\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(x_0) = 0.5f(a) + 0.5f(x_0)$ 这个值显然是小于左极限的 和定义矛盾 如果 $f(x_0) > \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

这个更加好证明了，具体找两个点 a, b 使 $\lambda a + (1 - \lambda)b = x_0$ 让 $f(a), f(b)$ 都小于 $f(x_0)$ 就好了 这样就和定义矛盾了 所以可以得到函数值一定不会大于或者小于左右极限，那么只能是等于了 所以我们可以说凸函数一定连续。不过是开区间内，闭区间的那两个端点可以不连续依然满足定义。

可以证明，开区间的凸函数如果有不可微的点，只能是左右导数不相等。不可能是跳跃或者别的。

都证明函数一定连续了，那还说啥呢，只能是这个情况了

《陈纪修》例 3.2.7 p78 页 Riemann 函数 这个是我发现总是用到这个东西，所以这个要看 这个函数特殊在，他的左右极限都是存在且相等，都为 0，但是函数值会由于其是否是有理数而不同 从而导致连续性的区别

《陈纪修》例 3.4.6 p97 页 Cantor 定理 这个还挺有意思的，花时间看看

《华师大》第一章 §2 二、p5 有关于上下确界的定义。多看几遍，别忘了，上下确界和这个值是否在集合中无关

还有 31 页的子列的定义和那些性质，都自己多翻翻，挺重要的

陈纪修没有讲有限覆盖定理，所以我现在把华师大的教材这部分讲一下

《华师大》第十三章 §1 p25 这里函数列的极限函数并没有要求函数列连续 这里只是说定义在同一数集上的函数，不代表就连续了 极限函数是通过数列的极限来定义的 这样，原来的函数可以不连续，可以有间断点，反正在那个点可以直接把间断的函数直接剃掉 但是后面可以继续用这个有间断的函数 我现在唯一的疑问就是，这个函数间断点的位置和数量能否被 n 影响？如果可以的话，具体的影响是怎么样的 这部分的反例什么的都比较充足，挺不错的

这个一致收敛的定义还挺奇妙，并不是直接由函数列来找极限函数，而是通过函数列和某个函数的关系来定义一致收敛。但是我有一个疑问，就是这个 $f(x)$ 一般是怎么找到的？其实一致收敛的极限函数一定是逐点收敛的极限函数把。一致收敛是逐点收敛的充分条件

我有一个疑问，一致收敛出来的极限函数的连续性怎么看？如果函数列统一在某个点间断，是不同样也可以得到极限函数，并且还是间断的？

这里通过定义一来得到不一致收敛的结论里要求 $n' > N$ 是有道理的 不然任意一个 n 来找这个 x 不是随便找嘛。就算是收敛的，也能找到差值大于 ε_0 的

函数一致收敛的柯西准则和函数列一致收敛是充要条件 这个柯西准则好，不用找那个极限函数了。直接由函数列本身就能定义一致收敛了

这个定理 13.2 我感觉就是定义换了一种说法，这个和定义的意思难道不一样吗？不过他这个推论还挺不错。有点海涅原理的味道。

这部分和函数项级数的关系还挺紧密。