

书本 52 页闭区间套定理和实数集是不可列集的证明。我懂，但是我对于这两个东西的理解还是非常迷糊的 我不知道怎么形容这个感觉。我觉得自己需要更加高维的角度来看待这个问题 我不知道该怎么对这个问题提出质疑，我总是认为这个证明缺少了某些省略了但是非常重要的条件。(这个现象正常吗?)

《陈纪修》定义 5.1.2 p146 页 有关于凹凸函数的定义。我直接抄下来吧 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上定义，若对  $I$  中的任意两点  $x_1$  和  $x_2$  和任意  $\lambda \in (0, 1)$ , 都有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则称  $f(x)$  是  $I$  上的下凸函数。若不等号严格成立，则称  $f(x)$  在  $I$  上是严格下凸函数。类似地可以给出上凸函数和严格上凸函数的定义。

开区间的凸函数在定义域内一定连续 这个是可以证明的，以下凸函数为例，我现在直接证明令  $f(x_0) < \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  我们这里直接令左右极限存在且相等 这样我们可以取一个点  $a < x_0$  不妨令  $\lambda = 0.5$

$f(\lambda a + (1 - \lambda)x_0) = f(0.5a + 0.5x_0)$  这里如果  $a \rightarrow x_0$  那么  $f(0.5a + 0.5x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  而  $\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(x_0) = 0.5f(a) + 0.5f(x_0)$  这个值显然是小于左极限的 和定义矛盾 如果  $f(x_0) > \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

这个更加好证明了，具体找两个点  $a, b$  使  $\lambda a + (1 - \lambda)b = x_0$  让  $f(a), f(b)$  都小于  $f(x_0)$  就好了 这样就和定义矛盾了 所以可以得到函数值一定不会大于或者小于左右极限，那么只能是等于了 所以我们可以说凸函数一定连续。不过是开区间内，闭区间的那两个端点可以不连续依然满足定义。

可以证明，开区间的凸函数如果有不可微的点，只能是左右导数不相等。不可能是跳跃或者别的。

都证明函数一定连续了，那还说啥呢，只能是这个情况了

《陈纪修》例 3.2.7 p78 页 Riemann 函数 这个是我发现总是用到这个东西，所以这个要看 这个函数特殊在，他的左右极限都是存在且相等，都为 0, 但是函数值会由于其是否是有理数而不同 从而导致连续性的区别

《陈纪修》例 3.4.6 p97 页 Cantor 定理 这个还挺有意思的，花时间看看

《华师大》第一章 §2 二、p5 有关于上下确界的定义。多看几遍，别忘了，上下确界和这个值是否在集合中无关

还有 31 页的子列的定义和那些性质，都自己多翻翻，挺重要的

陈纪修没有讲有限覆盖定理，所以我现在把华师大的教材这部分讲一下