

书本 52 页闭区间套定理和实数集是不可列集的证明。我懂，但是我对于这两个东西的理解还是非常迷糊的 我不知道怎么形容这个感觉。我觉得自己需要更加高维的角度来看待这个问题 我不知道该怎么对这个问题提出质疑，我总是认为这个证明缺少了某些省略了但是非常重要的条件。(这个现象正常吗?)

《数学分析》定义 5.1.2 p146 页 有关于凹凸函数的定义。我直接抄下来吧 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上定义，若对 I 中的任意两点 x_1 和 x_2 和任意 $\lambda \in (0, 1)$, 都有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 是 I 上的下凸函数。若不等号严格成立，则称 $f(x)$ 在 I 上是严格下凸函数。类似地可以给出上凸函数和严格上凸函数的定义。

开区间的凸函数在定义域内一定连续 这个是可以证明的，我现在直接证明

令 $f(x_0) < \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 我们这里直接令左右极限存在且相等 这样我们可以取一个点 $a < x_0$ 不妨令 $\lambda = 0.5$

$f(\lambda a + (1 - \lambda)x_0) = f(0.5a + 0.5x_0)$ 这里如果 $a \rightarrow x_0$ 那么 $f(0.5a + 0.5x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 而 $\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(x_0) = 0.5f(a) + 0.5f(x_0)$ 这个值显然是小于左极限的 和定义矛盾 如果 $f(x_0) > \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

这个更加好证明了，具体找两个点 a, b 使 $\lambda a + (1 - \lambda)b = x_0$ 让 $f(a), f(b)$ 都小于 $f(x_0)$ 就好了 这样就和定义矛盾了 所以可以得到函数值一定不会大于或者小于左右极限，那么只能是等于了 所以我们可以说凸函数一定连续。不过是开区间内，闭区间的那两个端点可以不连续依然满足定义。

可以证明，开区间的凸函数如果有不可微的点，只能是左右导数不相等。不可能是跳跃或者别的。

都证明函数一定连续了，那还说啥呢，只能是这个情况了