3.3 Ritz-Galerkin 近似解法

主讲人 马啸

西北工业大学 应用数学系

2021 年 5 月 6 日

3.3 Ritz-Galerkin 近似解法 I

本节，我们将从变分问题出发，通过 Ritz-Galerkin 方法找到位势方程 Dirichlet 问题的近似解. 对于变分问题

$$J(u) = \min_{H_0^1(\Omega)} J(v) \tag{1.1}$$

Ritz 方法的基本思想: 在 $H_0^1(\Omega)$ 中选取一个 N 维子空间 S_N，在其中求解上述变分问题，即求

$$J(u_N) = \min_{v_N \in S_N} J(v_N) \tag{1.2}$$

近似解 u_N 与原解 u 的关系由以下定理给出

3.3 Ritz-Galerkin 近似解法 II

定理 3.8 投影定理

若在 $H_0^1(\Omega)$ 中定义等价范数

$$\|u\|_1 = \|\nabla u\|_0$$

那么 Ritz 近似解 u_N 是变分问题的解 u 在 S_N 上的投影，即

$$(\nabla(u - u_N), \nabla v_N) = 0, \quad \forall v_N \in S_N$$

或

$$\|u - u_N\|_1 = \min_{v_N \in S_N} \|u - v_N\|_1$$

证明 变分问题 (1.1) 与它的近似问题 (1.2) 的解分别满足

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.3}$$

$$(\nabla u_N, \nabla v_N) = (f, v_N), \quad \forall v_N \in S_N \tag{1.4}$$

由于 $S_N \subset H_0^1(\Omega)$, 故可在 (1.3) 中取 $v = v_N$，然后将以上两式相减，得

$$(\nabla u - \nabla u_N, \nabla v_N) = 0, \quad \forall v_N \in S_N$$

下证 $\|u-u_N\|_1 = \min_{v_N\in S_N}\|u-v_N\|_1$:

$$\boxed{\|\cdot\|_1 = \|\nabla\cdot\|_0}$$

$$\begin{aligned}
&\|u-v_N\|_1^2 \\
=&\|u-u_N\|_1^2+\|v_N-u_N\|_1^2-2(\nabla u-\nabla u_N,\nabla v_N-\nabla u_N) \\
=&\|u-u_N\|_1^2+\|v_N-u_N\|_1^2-2(\nabla u-\nabla u_N,\nabla(v_N-u_N))
\end{aligned}$$

由于 $(v_N-u_N)\in S_N$，因此

$$\begin{aligned}
&\min_{v_N\in S_N}\|u-v_N\|_1^2 \\
=&\min_{v_N\in S_N}[\|u-u_N\|_1^2+\|v_N-u_N\|_1^2] = \|u-u_N\|_1^2 \qquad \square
\end{aligned}$$

以下定理是投影定理的一个推论

定理 3.9 (收敛性定理)

若 $S_1, S_2, \ldots, S_N, \ldots, (S_i \subset S_{i+1})$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 的一列有限维子空间，满足$\bigcup_{N=1}^{\infty} S_N = H_0^1(\Omega) \Longleftrightarrow$ 对于 $u \in H_0^1(\Omega)$，存在 $\{\tilde{u}_N\}$ 使得 $\tilde{u}_N \in S_N (N = 1, 2, \ldots)$ 且

$$\lim_{N\to\infty} \|\tilde{u}_N - u\|_1 = 0$$

则由 Ritz 方法得到的近似解 u_N 必按 $H_0^1(\Omega)$ 的范数收敛于广义解 u.

证明 由定理 3.8 中 $\|u - u_N\|_1 = \min_{v_N \in S_N} \|u - v_N\|_1$ 知

$$\|u - u_N\|_1 \leqslant \|\tilde{u}_N - u\|_1$$

再由 $\lim_{N\to\infty} \|\tilde{u}_N - u\|_1 = 0$ 可得结论.□

构造 Ritz 近似解 u_N 的过程 I

- 构造 N 维子空间 S_N. 选定 $H_0^1(\Omega)$ 中的 N 个线性无关的函数 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$，由它们张成的线性子空间记作 S_N，即

$$S_N = \left\{ v_N \middle| v_N = \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i, \forall (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N \right\}$$

$\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 称为基函数.

构造 Ritz 近似解 u_N 的过程 II

- 求解近似变分问题. 由 $J(v)$ 的定义

$$J(v_N) = \frac{1}{2}(\nabla \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i, \nabla \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i) - (f, \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i) \tag{1.5}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_i a_j(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j) - \sum_{i=1}^{N} a_i(f, \varphi_i) \tag{1.6}$$

引入

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{N\times N}, \quad a_{ij} = (\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j)$$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)^T, \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_N)^T, b_i = \int_\Omega f\varphi_i dx$$

构造 Ritz 近似解 u_N 的过程 III

则 (1.5) 可写成

$$J(v_N) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}, \mathbf{A}\mathbf{a}) - (\mathbf{b}, \mathbf{a}) \Rightarrow \text{该式记为} j(a)$$

则求变分问题的解等价于求解如下极小问题

$$j(a_0) = \min_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^N} j(\mathbf{a})$$

构造 Ritz 近似解 u_N 的过程 IV

因此 $\mathbf{a}_0$ 必须满足

$$\frac{\partial j(\mathbf{a})}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{a_0} = \mathbf{b}$$

构造 Ritz 近似解 u_N 的过程 V

下证线性代数方程组 $\mathbf{A}\mathbf{a}_0 = \mathbf{b}$ 存在唯一的解. 为此, 证明 $\mathbf{A}$ 是正定的.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a}, \mathbf{A}\mathbf{a}) &= \sum_{i,j=1}^{N} a_i a_j (\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j) \\
&= (\nabla \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i, \nabla \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i) = \|v_N\|_1^2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{A}\mathbf{a}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{A}\text{是对称正定矩阵.}$$

构造 Ritz 近似解 u_N 的过程 VI

因此，求变分问题的近似解可归结为求解线性代数方程组的问题. 其步骤如下

1. 构造基函数 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N \in H_0^1(\Omega)$.
2. 计算积分

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{N\times N}, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} dx$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_N)^T, \quad b_i = \int_\Omega f \varphi_i dx.$$

构造 Ritz 近似解 u_N 的过程 VII

3. 解线性代数方程组

$$\mathbf{Aa} = \mathbf{b}$$

4. 由 $\mathbf{Aa} = \mathbf{b}$ 的解 $a_0 = (a_1^0, a_2^0, \ldots, a_N^0)^T$ 确定变分问题的近似解

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i^0 \varphi_i$$

Galerkin 方法 I

Galerkin 方法的基本出发点是从积分等式

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

定义的广义解，在 $H_0^1(\Omega)$ 中选取的 N 维子空间 S_N 中寻求 $u_N \in S_N$，使得

$$(\nabla u_N, \nabla v_N) = (f, v_N), \forall v_N \in S_N.$$

Galerkin 方法 II

设 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 是 S_N 的基函数, $v_N = \sum_{i=1}^N a_i\varphi_i$.

该问题最终同样归结为求解代数方程组 $\mathbf{Aa} = \mathbf{b}$.

因此 Ritz 方法和 Galerkin 方法的求解过程是殊途同归的.

附注 Ritz 方法与 Galerkin 方法中，基函数的构造是个困难的问题 (边界条件，S_N 充分逼近 $H_0^1(\Omega)$). 一般选取的 N 较大，使得最终所要求解的线性代数方程组较为庞大.

Galerkin 方法 III

有限元素法是古典变分方法 (Ritz-Galerkin 方法) 与分块多项式插值的结合. 该结合很好地解决了基函数的构造与减少计算量等问题，对于任意形状的区域 Ω 有很强的适应性.