# 第三章　热传导方程

主讲人　马啸

西北工业大学　应用数学系

2021 年 5 月 6 日

# §1 初值问题

本章研究热传导方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f$$

首先研究一维热传导方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

# 1.1 Fourier 变换 I

本小节将介绍 Fourier 变换，利用它可以将热传导方程的初值问题转化为 ODE 初值问题解决.

**定义 1.1**

若 $f(x) \in L(-\infty, \infty)$，则积分

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \hat{f}(\lambda)$$

有意义，它定义了一个从 $f(x) \to \hat{f}(\lambda)$ 的变换，我们称之为 Fourier 变换,$\hat{f}(\lambda)$ 称为 $f(x)$ 的 Fourier 变式，或 Fourier 变换的像.

# 1.1 Fourier 变换 II

对比第二章分离变量法部分，定理 **4.1** 中 **4.**$\forall f(x) \in L_2[0,l]$ 可以按特征函数系 $\{X_n(x)\}$ 展开，即：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x),$$

$$\text{其中}\, C_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x)\, dx}{\int_0^l X_n^2(x)\, dx}$$

对比 Fourier 变换，可知其有着显著的物理意义.$\hat{f}(\lambda)$ 代表 $f(x)$ 中所包含的简谐波 $\exp -i\lambda x$ 的复振幅，也称为 $f(x)$ 的频谱.

Q: 可否从 $\hat{f}$ 再找回 $f$?

# 1.1 Fourier 变换 III

**定理 1.1（Fourier 积分定理）**

若 $f(x)\in L(-\infty,\infty)\bigcap C^1(-\infty,\infty)$，那么有：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda=f(x).$$

上式称为反演公式. 左端积分也称为 **Fourier** 逆变换，记为 $(\hat{f}(\lambda))^{\vee}$. 因此反演公式也可简单记为:

$$(\hat{f})^{\vee}=f.$$

# 1.1 Fourier 变换 IV

**Proof.** 由 $f(x) \in L(-\infty, \infty)$ 因此积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$$

对 $\lambda$ 一致收敛，并且是 $\lambda$ 的连续函数，因此

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi\, e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\xi \int_{-N}^{N} e^{i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \frac{N(x-\xi)}{x-\xi}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta + x) \frac{\sin N\eta}{\eta}\, d\eta = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\infty}^{-M} + \int_{-M}^{M} + \int_{M}^{\infty} \right) = J_1 + J_2 + J_3$$

考虑当 $N \to \infty$ 时 $J_i$ 的极限. 首先

$$|J_1|, |J_3| \leqslant \frac{1}{\pi M} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx,$$

而

$$\begin{aligned} J_2 =& \frac{1}{\pi} \int_{-M}^{M} \frac{f(\eta + x) - f(x)}{\eta} \sin N\eta\, d\eta + \frac{f(x)}{\pi} \int_{-M}^{M} \frac{\sin N\eta}{\eta}\, d\eta \\ =& \frac{1}{\pi} \int_{-M}^{M} g(x, \eta) \sin N\eta\, d\eta \quad \boxed{g(x, \eta) = \int_0^1 f'(x + \tau\eta)\, d\tau} \\ &+ \frac{f(x)}{\pi} \int_{-MN}^{MN} \frac{\sin \beta}{\beta}\, d\beta \quad \boxed{\beta = N\eta} \end{aligned}$$

由于 $f \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow g$ 是关于 $x, \eta$ 的连续函数.

先取 $M$ 足够大，使得 $|J_1|, |J_3| < \epsilon/4$，再固定该 $M$，取 $N$ 充分大，由Riemann-Lebesgue 引理知: go

$$J_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-M}^{M} g(x,\eta)\sin N\eta\, d\eta \quad \boxed{\leqslant \epsilon/4}$$

$$+\frac{f(x)}{\pi}\int_{-MN}^{MN}\frac{\sin\beta}{\beta}d\beta \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\beta}{\beta}d\beta = \pi}$$

因此可以取足够大的 $N$，使得$\left|\dfrac{f(x)}{\pi}\displaystyle\int_{-MN}^{MN}\frac{\sin\beta}{\beta}d\beta - f(x)\right| \leqslant \epsilon/4.$

附注 在今后应用 Fourier 变换反演公式求解时，我们先不考虑函数是否 $C^1(\mathbb{R})\bigcap L(\mathbb{R})$，而是先应用其导出形式解，再来验证解的真实性.

# Fourier 变换的性质 I

## 1. 线性性质

若 $f_i \in L(\mathbb{R}), a_i \in \mathbb{C}, (i=1,2)$, 则

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2)^\wedge = a_1 \hat{f}_1 + a_2 \hat{f}_2.$$

## 2. 微商性质

若 $f(x), f'(x) \in L(\mathbb{R}) \bigcap C(\mathbb{R})$, 则

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^\wedge = i\lambda\hat{f}.$$

# Fourier 变换的性质 II

Proof. 由 $f, f' \in L(\mathbb{R}) \bigcap C(\mathbb{R})$，故

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0.$$

这是由于 $f' \in C(\mathbb{R})$:  $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(\xi)\,d\xi.$

由于$f' \in L(\mathbb{R}) : \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a_\pm = f(0) + \int_0^{\pm\infty} f'(\xi)\,d\xi$

因此 $a_\pm$ 是一个有限的数，再由 $f \in L(\mathbb{R})$ 可知，$a_\pm = 0$.

# Fourier 变换的性质 III

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{df}{dx}\right)^{\wedge} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = i\lambda \hat{f}(\lambda). \square
\end{aligned}
$$

推论：若 $f, \ldots, f^{(m)}(x) \in C(\mathbb{R}) \bigcap L(\mathbb{R})$，则

$$
\left(\frac{d^m f}{dx^m}\right)^{\wedge} = (i\lambda)^m \hat{f} \quad (m \geqslant 1).
$$

Q: 利用该性质，你如何把热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$ 化为 ODE?

# Fourier 变换的性质 IV

## 3. 乘多项式

若 $f(x), xf(x) \in L(\mathbb{R})$，则

$$(xf(x))^{\wedge} = i\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda).$$

Proof. 由于 $f(x), xf(x) \in L(\mathbb{R})$，故 $\hat{f}(\lambda)$ 是 $\lambda$ 的连续可微函数，且有

$$\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)\,e^{-i\lambda x}\,dx = -i(xf(x))^{\wedge}.\square$$

# Fourier 变换的性质 V

**推论：** 若 $f, \ldots, x^m f(x) \in L(\mathbb{R})$，则

$$(x^m f(x))^{\wedge} = i^m \frac{d^m}{d\lambda^m}\hat{f}(\lambda) \quad (m \geqslant 1).$$

## 4. 平移性质（作业）

若 $f \in L(\mathbb{R})$，则

$$(f(x-a))^{\wedge} = e^{-i\lambda a}\hat{f}(\lambda).$$

# Fourier 变换的性质 VI

## 5. 伸缩性质

若 $f \in L(\mathbb{R})$，则

$$(f(kx))^{\wedge} = \frac{1}{|k|}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{k}\right), k \neq 0.$$

# Fourier 变换的性质 VII

Proof. 不妨设 $k<0$，则

$$
\begin{aligned}
(f(kx))^{\wedge} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(kx)\,e^{-i\lambda x}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-i\lambda y/k}\,d(y/k) \boxed{y=kx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{k}\right)\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-i\lambda/ky}\,dy \\
&= \frac{1}{|k|}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{k}\right).
\end{aligned}
$$

# Fourier 变换的性质 VIII

## 6. 对称性质

若 $f(x) \in L(\mathbb{R})$，则

$$(f(x))^{\vee} = \hat{f}(-\lambda)$$

## 7. 卷积性质

若 $f(x), g(x) \in L(\mathbb{R})$，则

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt \in L(\mathbb{R})$$

且有 $(f * g)^{\wedge} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}$.

# Fourier 变换的性质 IX

Proof. 由 Fubini 定理

$$
\begin{aligned}
\|f*g\|_{L_1} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt \right| \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)g(t)|\,dt \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\,d(x-t) \\
&= \|g\|_{L_1}\|f\|_{L_1}.
\end{aligned}
$$

# Fourier 变换的性质 X

故 $f*g\in L(\mathbb{R})$，又由 Fubini 定理

$$\begin{aligned}(f*g)^{\wedge} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}dx\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\lambda t}dt\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-i\lambda(x-t)}d(x-t)\\ &= \sqrt{2\pi}\hat{g}(\lambda)\hat{f}(\lambda). \qquad \square\end{aligned}$$

**例 1** 设

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant A,\\ 0, & |x|>A.\end{cases}$$

# Fourier 变换的性质 XI

得:

$$\hat{f}_1(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda A}{\lambda}.$$

**例 2** 设

$$f_2(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

得:

$$\hat{f}_2(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 + i\lambda}.$$

# Fourier 变换的性质 XII

例 **3** 设 $f_3(x) = e^{-|x|}$，求 $\hat{f}_3(\lambda)$.
由 $f_3(x) = f_2(x) + f_2(-x)$，由线性和伸缩性质得:

$$\begin{aligned}\hat{f}_3(\lambda) &= \hat{f}_2(\lambda) + \hat{f}_2(-\lambda)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+i\lambda} + \frac{1}{1-i\lambda}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{1+\lambda^2}\end{aligned}$$

例 **4** 设 $f_4(x) = e^{-x^2}$，求 $\hat{f}_4(\lambda)$.

# Fourier 变换的性质 XIII

由定义与分部积分公式:

$$\begin{aligned}\hat{f}_4(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{\lambda}\left[e^{-x^2}e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx\right] \\ &= \frac{2i}{\lambda}[xe^{-x^2}]^\wedge = -\frac{2}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\hat{f}_4(\lambda).\end{aligned}$$

从而得到如下 ODE 初值问题:

$$\begin{cases}\frac{d}{d\lambda}\hat{f}_4(\lambda) = -\frac{\lambda}{2}\hat{f}_4(\lambda), \\ \hat{f}_4(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}. \ \boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}}\end{cases}$$

解得 $\hat{f}_4(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda^2/4}$.

# Fourier 变换的性质 XIV

例 **5** 设 $f_5(x) = e^{-Ax^2}, (A > 0)$, 则:

$$(f_5(x))^\wedge = (f_4(\sqrt{A}x))^\wedge = \frac{1}{\sqrt{A}}\hat{f}_4(\frac{\lambda}{\sqrt{A}}) = \frac{1}{\sqrt{2A}}e^{-\lambda^2/(4A)}$$

# 多维 Fourier 变换 I

**定义 1.2** 设 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L(\mathbb{R}^n)$，则积分

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\lambda \bullet \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \hat{f}(\lambda)$$

有意义，称为 $f(\mathbf{x})$ 的 Fourier 变换，$\hat{f}(\lambda)$ 称为 $f(\mathbf{x})$ 的 **Fourier** 变式.

## 定理 1.2 (反演公式)

若 $f(\mathbf{x}) \in C^1(\mathbb{R}^n) \bigcap L(\mathbb{R}^n)$，则有

$$(\hat{f}(\lambda))^{\vee} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-N}^{N} \cdots \int_{-N}^{N} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda \bullet \mathbf{x}} d\lambda = f(\mathbf{x})$$

$(\hat{f}(\lambda))^{\vee}$ 表示函数 $\hat{f}(\lambda)$ 的 Fourier 逆变换.

# 多维 Fourier 变换的性质 I

易证，一维 Fourier 变换的性质 $1 \sim 7$ 对于多维 Fourier 变换同样成立. 另外还有:

**8.** 若 $f(\mathbf{x}) = f_1(x_1)f_2(x_2)\dots f_n(x_n)$，其中 $f_i(x_i) \in L(\mathbb{R})$ 则

$$\hat{f}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \hat{f}_i(\lambda_i).$$

根据这一性质，可求得:

$$(e^{-A|\mathbf{x}|^2})^\wedge = \prod_{i=1}^{n} (e^{-Ax_i^2})^\wedge = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2A}} e^{-\lambda_i^2/(4A)} = \frac{1}{(\sqrt{2A})^n} e^{-|\lambda|^2/(4A)}$$

# 1.2 Poisson 公式 I

一维热传导方程的 Cauchy 问题如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{1.2}$$

对该方程两边关于 $x$ 做 Fourier 变换，得:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + a^2 \lambda^2 \hat{u} = \hat{f}(\lambda,t), \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\varphi}(\lambda). \end{cases}$$

# 1.2 Poisson 公式 II

解之得:

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi} e^{-a^2\lambda^2 t} + \int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau) e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)} d\tau.$$

再对上式两边做 Fourier 逆变换，为此，应用反演公式:

$$u(x, t) = (\hat{\varphi} e^{-a^2\lambda^2 t})^{\vee} + \int_0^t (\hat{f}(\lambda, \tau) e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)})^{\vee} d\tau.$$

$$(\hat{\varphi} e^{-a^2\lambda^2 t})^{\vee} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi * (e^{-a^2\lambda^2 t})^{\vee}$$

$$(e^{-a^2\lambda^2 t})^{\vee} = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-x^2/(4a^2 t)}. \quad \boxed{\text{由例 5 取} A = \frac{1}{4a^2 t}}.$$

# 1.2 Poisson 公式 III

$$\text{因此}:(\hat{\varphi}e^{-a^2\lambda^2 t})^\vee = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{-(x-\xi)^2/(4a^2t)}\,d\xi.$$

$$\text{同理有}:(\hat{f}(\lambda,\tau)\,e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)})^\vee$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)\,e^{-(x-\xi)^2/(4a^2(t-\tau))}\,d\xi.$$

如引入

$$K(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/(4a^2t)}, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

正态分布概率密度函数:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\mu=0,\sigma=a\sqrt{2t}$$

# 1.2 Poisson 公式 IV

可得到一维热传导方程初值问题的解（**Poisson 公式**）：

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{1.3}$$

其中 $K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/(4a^2t)}, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$

$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=K(x-\xi,t-\tau)$ 热传导方程的基本解

# 1.2 Poisson 公式 V

## 定理 1.3

若 $\varphi(x) \in C(\mathbb{R})$ 且有界，$f(x,t) \equiv 0$，则由 Poisson 公式 (1.3) 确定的函数是初值问题 (1.1) 的有界解.

Proof. 当 $f \equiv 0$ 时，Poisson 公式退化为:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

当 $t > 0$，$u(x,t)$ 无穷次连续可微，并可在积分号下关于 $x,t$ 求任意阶导数（由积分的一致收敛性），易证

# 1.2 Poisson 公式 VI

$$\frac{\partial K}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = 0.$$

从而 $t > 0$ 时有

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial K(x-\xi,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 K(x-\xi,t)}{\partial x^2} \right) \varphi(\xi)\, d\xi = 0$$

# 1.2 Poisson 公式 VII

下面证明初值条件满足. 即 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 有 $\lim_{x\to x_0, t\to 0^+} u(x,t) = \varphi(x_0)$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-(\xi-x)^2/(4a^2t)}\, d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+2a\sqrt{t}\eta)\, e^{-\eta^2}\, d\eta \qquad \boxed{\eta = (\xi - x)/(2a\sqrt{t})}
\end{aligned}
$$

# 1.2 Poisson 公式 VIII

由于 $\varphi$ 有界，以上积分在 $x\in\mathbb{R}, t>0$ 时关于 $x,t$ 一致收敛，因此取极限与积分可交换顺序

$$\lim_{x\to x_0, t\to 0^+} u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{x\to x_0, t\to 0^+} \varphi(x+2a\sqrt{t}\eta)\, e^{-\eta^2}\, d\eta$$
$$= \varphi(x_0). \qquad \square$$

附注 **1** 对于多维热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) & (\mathbb{R}^n\times(0,\infty)), \\ u(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

# 1.2 Poisson 公式 IX

我们可类似地利用 Fourier 变换给出其解的表达式，例如 $n=3$ 时

$$u(x,y,z,t)=\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} K(x-\xi,y-\eta,z-\zeta,t)\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

$$+\int_0^t d\tau\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} K(x-\xi,y-\eta,z-\zeta,t-\tau)\bullet f(\xi,\eta,\zeta,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

$$\text{其中}K(x,y,z,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{(4\pi a^2t)^{3/2}}e^{-(x^2+y^2+z^2)/(4a^2t)}, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

# 1.2 Poisson 公式 X

附注 **2** 定理 1.3 中的条件“$\varphi$ 有界”可放宽为:

$$|\varphi(x)| \leqslant Me^{Ax^2} \quad (-\infty < x < \infty, t > 0)$$

同时 $f \equiv 0$. 通过类似的推导可证明，在区域 $\left\{0 \leqslant t < \frac{1}{4a^2A}, -\infty < x < \infty\right\}$ 上,Poisson 公式定义的解仍然是 (1.1) 的解.

# 热传导方程解的一些重要性质 I

## 1. 奇偶性与周期性

若 $\varphi(x)$ 是奇（偶、周期为 $l$ 的）函数，则解同样是 $x$ 的奇（偶、周期为 $l$ 的）函数.

# 热传导方程解的一些重要性质 II

## 2. 无限传播速度

若杆的初始温度 $\varphi(x)$ 只在一小段 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上不为零，不妨设 $>0$，则在 $t>0$ 时，杆上个点的温度

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi>0.$$

即热量会在顷刻间传递到杆上任一点（$x_0$ 附近影响较大，离开 $x_0$ 较远的点影响较小），即传播速度为无穷大，这是与波动方程的本质不同.

# 热传导方程解的一些重要性质 III

## 3. 无穷次可微性

无论初值多么不光滑，只要 $\varphi(x)$ 有界或适合 $|\varphi(x)| \leqslant Me^{Ax^2}$，则在 $t>0$ 时，解无穷次可微.

$$\frac{\partial^{k+l}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^l} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} K(x-\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

即 $u(x,t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2_+)$

作业：P161, 1(1),3(2),4

# 1.3 广义函数简介 I

广义函数的重要例子:Dirac 函数

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \infty, & x=0,\end{cases} \text{且} \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1.$$

物理含义: 直线上 $x=\xi$ 处一个单位点电荷（其余各处无电荷）产生的电荷密度为:

$$\rho(x)=\begin{cases}0, & x\neq \xi,\\ \infty, & x=\xi,\end{cases}$$

由于电荷量为 1，故要求 $\int_{\mathbb{R}}\rho(x)\,dx=1$，因此，取 $\rho(x)=\delta(x-\xi)$
广义函数的来源之一是与线性泛函产生联系.

首先考虑泛函的定义域 $\rightarrow$ 基本空间的定义.

## 定义 1.3

若 $\varphi(x), \varphi_n(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}), n = 1, 2, \ldots,$ 且满足:

(1)$\exists M > 0$, 使得 $|x| \geqslant M$ 时 $\varphi(x) \equiv 0, \varphi_n(x) \equiv 0, n = 1, 2, \ldots,$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \max_{[-M,M]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{[-M,M]} |\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| = 0, k = 1, 2, \ldots,$$

则称序列 $\{\varphi_n\}$ 收敛于 $\varphi$. 规定了上述收敛性的线性空间 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 称为基本空间 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ 称为试验函数.

## 定义 1.4

若 $f:\mathcal{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 是线性连续泛函，则称 $f$ 是一个广义函数. 设 $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 是一个试验函数，用 $\langle f,\varphi\rangle$ 表示它所对应的数值，称为对偶积.

因此，广义函数 $f$ 也可记成 $f:\varphi\to\langle f,\varphi\rangle$.

线性 $\forall a,b\in\mathbb{R},\varphi,\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, 有 $\langle f,a\varphi+b\psi\rangle=a\langle f,\varphi\rangle+b\langle f,\psi\rangle$;

连续 $\forall\{\varphi_n\}$ 和试验函数 $\varphi$，只要 $\forall\{\varphi_n\}$ 在 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 意义下收敛于 $\varphi$，则

$$\lim_{n\to\infty}\langle f,\varphi_n\rangle=\langle f,\varphi\rangle.$$

所有广义函数的集合记作 $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

例 1 $\delta$ 函数的严格定义:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

易证 $\varphi \to \varphi(0)$ 是 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 上的线性连续泛函.

例 2 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上局部绝对可积函数，即存在任何有限区间 $(a, b)$ 上积分

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

存在, 则试验函数 $\varphi(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\, dx$ 是一个广义函数.

$L_{loc}(\mathbb{R})$: 所有在 $\mathbb{R}$ 上局部绝对可积函数的集合.

因此，对于任意一个 $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$，都可以定义一个相应的广义函数，因此可用 $f$ 标记该广义函数. 例 2 表明，$L_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

附注 **1** $\delta \notin L_{loc}(\mathbb{R})$: Proof. 反证法. 若 $\exists f \in L_{loc}(\mathbb{R})$,s.t.$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ 有 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$; 取 $\varphi_n(x) = \rho_n(x,0)$，再令 $n \to \infty$，即得矛盾

$$\varphi_n(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_n(x)\,dx \leqslant \varphi_n(0)\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x)|\,dx < \varphi_n(0)/2$$

(取 $n$ 足够大，由绝对可积函数的绝对连续性可得 go)

**附注 2** 广义函数可定义加法与数乘运算.$f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$，$a \in \mathbb{R}$ 则 $f+g, af \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$，且

$$\langle f+g, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle + \langle g, \varphi\rangle,$$
$$\langle af, \varphi\rangle = a\langle f, \varphi\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

但广义函数之间的乘积没有意义.

## 定义 1.5

设 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \{f_n\} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$，若

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

则称广义函数 $f$ 是广义函数序列 $\{f_n\}$ 当 $n \to \infty$ 的极限，记作

$$f_n \rightharpoonup f \qquad (\text{在 } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ 的意义下}).$$

类似可给出依赖于参数的广义函数极限:

## 定义 1.6

设 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \{f_\lambda\} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$，其中 $\lambda$ 为参数. 若

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \langle f_\lambda, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

则称广义函数 $f$ 是广义函数序列 $\{f_\lambda\}$ 当 $\lambda \to \lambda_0$ 的极限，记作

$$f_\lambda \rightharpoonup f \qquad (\lambda \to \lambda_0, 在\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})\ 的意义下).$$

例 **3** 矩形脉冲 $Q_n(x)$:

$$Q_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & |x| \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0, & |x| \geqslant \frac{1}{n}. \end{cases}$$

易知 $Q_n(x)\in L_{loc}(\mathbb{R})$, 且 $\varphi(x)$ 有:

$$\langle Q_n,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}Q_n(x)\varphi(x)\,dx=\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\varphi(x)\,dx=\varphi(x_n),x_n\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right].$$

$$\lim_{n\to\infty}\langle Q_n,\varphi\rangle=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\varphi(0).\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$$

即, $Q_n\rightharpoonup\delta, n\to\infty.$

**例 4** Dirichlet 核 $K_n(x)$:

$$K_n(x)=\begin{cases}1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}, & |x|\leqslant\pi,\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$$

$K_n \in L_{loc}(\mathbb{R})$，同 Fourier 积分定理的证明，可证得 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \frac{1}{2\pi} K_n, \varphi \rangle - \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} K_n(x)\varphi(x)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\varphi(0)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\varphi(x) - \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} - 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)\varphi(0)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{\sin\frac{x}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})x dx, \qquad \boxed{\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx = 0, k = 1, 2, \ldots}$$

由 Riemann-Lebesgue 引理可知，只需证明 $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{\sin\frac{x}{2}}$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的 Riemann 或 Lebesgue 可积函数，即有

$$\lim_{n\to\infty}\langle \frac{1}{2\pi}K_n, \varphi\rangle - \varphi(0) = 0$$

而由于

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{\sin\frac{x}{2}}=2\varphi'(0).
$$

$$
\Rightarrow \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{\sin\frac{x}{2}}\text{连续且可积}
$$

$$
\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\langle\frac{1}{2\pi}K_n,\varphi\rangle-\varphi(0)=0
$$

广义函数序列 $\left\{\frac{1}{2\pi}K_n(x)\right\}$ 收敛于 $\delta$ 函数.

**例 5** Poisson 核 $K(x,t)$：

$$K(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/(4a^2t)}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

将 $t$ 看成参数，$\forall t>0,\quad K(x,t)\in L_{loc}(\mathbb{R})$，可证

$$\lim_{t\to 0^+}\langle K,\varphi\rangle=\lim_{t\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty}K(x,t)\varphi(x)\,dx=\varphi(0),\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

广义函数序列 $K(x,t)$ 收敛于 $\delta$ 函数.

# 广义函数微商 I

若 $f(x), f'(x) \in C(\mathbb{R})$，则 $f(x), f'(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$，则对于 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ 有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

注意到 $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$，则上式可写成如下对偶积的形式:

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

基于以上思路，可定义广义函数的弱微商 (广义微商).

# 广义函数微商 II

## 定义 1.7 广义微商

广义函数 $f$ 的微商 $f'$ 也是广义函数，用下式定义:

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

类似地，可以定义 $f''$:

$$\langle f'', \varphi \rangle = -\langle f', \varphi' \rangle = (-1)^2 \langle f, \varphi'' \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

# 广义函数微商 III

类似，k 阶微商 $f^{(k)}$ 可定义为

$$\langle f^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), k = 1, 2, \ldots.$$

由此可知，每个广义函数都是无穷次可微的.

**例 6** 设 $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$，则其广义微商 $f'$ 就是 $f'(x)$ 确定的广义函数.

| 广义函数微商与狭义函数微商的相容性 |
|---|

**例 7** $\delta$ 函数的广义微商.

# 广义函数微商 IV

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$\delta$ 函数的 k 阶广义微商

$$\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle \delta, \varphi^{(k)} \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), k = 1, 2, \ldots.$$

# 广义函数微商 V

例 **8** Heaviside 函数

$$H(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

的广义微商 $H'$ 是 $\delta$ 函数.

$$\begin{aligned}\langle H',\varphi\rangle &= -\langle H,\varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx\\ &= -\int_{0}^{\infty}\varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle. \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})\end{aligned}$$

# 广义函数微商 VI

## 定义 1.8 广义函数的平移

广义函数的平移也是广义函数，若右移 $\xi$，则平移后的广义函数记为 $f(x-\xi)$，并用下式表示:

$$\langle f(x-\xi),\varphi\rangle=\langle f,\varphi(x+\xi)\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})\ \boxed{\text{广义函数定义，变量替换}}$$

例如:$\delta(x-\xi)$:

$$\langle\delta(x-\xi),\varphi\rangle=\langle\delta,\varphi(x+\xi)\rangle=\varphi(\xi),\quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$$

# 广义函数微商 VII

二元广义函数: 引入 $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ 及基本空间 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, 可定义二元广义函数 $f$ 是如下线性连续泛函:

$$f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}.$$

定义二元 $\delta$ 函数 $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0,0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

及其平移 $\delta(x-\xi, y-\eta)$

$$\langle \delta(x-\xi, y-\eta), \varphi \rangle = \varphi(\xi, \eta), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$$

# 广义函数微商 VIII

可验证:$\delta(x-\xi, y-\eta) = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$.

$\boxed{\text{张量积（直积）}\ \delta(x-\xi) \otimes \delta(y-\eta)}$

Proof.

$$
\begin{aligned}
&\langle \delta(x-\xi)\delta(y-\eta), \varphi \rangle \\
=&\langle \delta(y-\eta), \langle \delta(x-\xi), \varphi(x,y) \rangle \rangle \\
=&\langle \delta(y-\eta), \varphi(\xi, y) \rangle \\
=&\varphi(\xi, \eta), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2). \square
\end{aligned}
$$

# 广义函数微商 IX

附注　可类似地定义 $\mathbb{R}^n, n=1,2,\ldots$ 中任一开域 $\Omega$ 上的基本空间 $\mathcal{D}(\Omega)$ 及其上的广义函数空间 $\mathcal{D}'(\Omega)$.

作业:P162, 5(1), 7

# 1.4 基本解 I

## 定义 1.9 基本解

设 $Q=\{(x,t)|-\infty<x<\infty,t>0\}$，对于 $\forall(\xi,\tau)\in Q$，若函数 $u(x,t)\in L_{loc}(Q)\bigcap C(\bar{Q}\backslash(\xi,\tau))$，且在广义函数的意义下满足如下方程与初值条件:

$$\begin{cases} Lu = u_t - a^2u_{xx} = \delta(x-\xi,t-\tau), & (x,t)\in Q \quad \boxed{L\text{: 热传导算子}} \\ u(x,0)=0, & -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

则称其为热传导方程的基本解，记为 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$.

# 1.4 基本解 II

下面证明:

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=K(x-\xi,t-\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-(x-\xi)^2/(4a^2(t-\tau))}, & t>\tau\\ 0, & t\leqslant\tau.\end{cases}$$

Proof.

1. 证明初始条件: 当 $\tau>0$ 时，有
$K(x-\xi,0-\tau)=0,-\infty<x<\infty$，成立.

# 1.4 基本解 III

2. 证明满足方程: 只需验证

$$\langle LK, \varphi \rangle = \varphi(\xi, \tau), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

由广义微商的定义得:

$$\langle LK, \varphi \rangle = \langle K, -\varphi_t - a^2 \varphi_{xx} \rangle = \langle K, L^* \varphi \rangle.$$

$\boxed{L^* \text{热传导算子 } L \text{ 的共轭算子}}$

# 1.4 基本解 IV

由于 $K\in L(\mathbb{R}^2)$

$$\langle K, L^*\varphi\rangle = \iint\limits_{\mathbb{R}^{\not\models}} K(x-\xi, t-\tau)L^*\varphi(x,t)\,dxdt$$

$$= \int_{\tau}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, t-\tau)L^*\varphi(x,t)\,dxdt$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\tau+\epsilon}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, t-\tau)L^*\varphi(x,t)\,dxdt$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} -\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, t-\tau)\varphi(x,t)\Big|_{t=\tau+\epsilon}^{t=\infty} dx + \quad \boxed{\text{分部积分}}$$

$$\int_{\tau+\epsilon}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} LK(x-\xi, t-\tau)\varphi(x,t)\,dxdt \quad \boxed{LK=0, x\in\mathbb{R}, t>\tau}$$

# 1.4 基本解 V

$$
\begin{aligned}
&\langle K, L^*\varphi\rangle \\
=&\lim_{\epsilon\to 0^+} -\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, t-\tau)\varphi(x,t)\Big|_{t=\tau+\epsilon}^{t=\infty} dx \\
=&\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, \epsilon)\varphi(x, \tau+\epsilon)\, dx \\
=&\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-(x-\xi)^2/(4a^2\epsilon)}\varphi(x, \tau+\epsilon)\, dx \\
=&\frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}\varphi(\xi+2a\sqrt{\epsilon}\eta, \tau+\epsilon)\, d\eta \qquad \boxed{\frac{x-\xi}{2a\sqrt{\epsilon}}=\eta} \\
=&\varphi(\xi,\tau). \qquad \square
\end{aligned}
$$

# 1.4 基本解 VI

易知，$K(x-\xi,t)$ 满足如下热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} Lu=0, & (x,t)\in Q \\ u(x,0)=\delta(x-\xi), & -\infty<x<\infty. \end{cases} \tag{1.4}$$

## 定义 1.10 基本解的另一定义

设 $Q=\{(x,t)|-\infty<x<\infty,t>0\}$，对于 $\forall\xi\in\mathbb{R}$，若函数 $u(x,t)\in L_{loc}(Q)$ 且在广义函数的意义下满足 (1.4)，则称其为热传导方程的基本解.

# 1.4 基本解 VII

可取为 $K(x-\xi,t)$, 即 $\Gamma(x,t;\xi,0)$

基本解的物理意义

$$\begin{cases} Lu = \delta(x-\xi, t-\tau), & (x,t) \in Q \\ u(x,0) = 0, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

$\delta(x-\xi,t-\tau)$ 杆上 $\xi$ 处 $\tau$ 时刻的一个瞬时单位热源.

# 1.4 基本解 VIII

**基本解 $\Gamma(x-\xi, t-\tau)$** 瞬时单位热源所引起的细杆的温度分布及其变化，称为瞬时单位点热源的影响函数（简称：点源函数）.

$$
\begin{cases} Lu = 0, & (x,t) \in Q \\ u(x,0) = \delta(x-\xi), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{1.5}
$$

**基本解 $\Gamma(x-\xi, t)$** 初始时刻 $\tau = 0$ 杆上 $\xi$ 处存在一个瞬时单位热源所产生的细杆上的温度分布及变化.

$\boxed{\text{初始温度分布 } u(x,0) \text{ 满足 } \int_{\mathbb{R}} c\rho u dx = 1 \Leftarrow c\rho = 1:}$

# 1.4 基本解 IX

考虑 $\xi$ 的一个小邻域 $I_\epsilon=(\xi-\epsilon,\xi+\epsilon)$，在其上增加一个单位热源，则由能量守恒知:

$$\int_{\mathbb{R}} c\rho u_\epsilon(x,0)\,dx=\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} u_\epsilon(x,0)\,dx=1.$$

假设 $I_\epsilon$ 上温度分布均匀，则 : $u_\epsilon(x,0)=\begin{cases}\frac{1}{2\epsilon}, & x\in I_\epsilon\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash I_\epsilon\end{cases}$

令 $\epsilon\to0^+$ 则得到初始时刻杆上温度分布

$$u(x,0)=\lim_{\epsilon\to0^+}u_\epsilon(x,0)=\delta(x-\xi)$$

# 1.4 基本解 X

## 基本解的性质

1. $t > \tau$ 时 $\Gamma(x, t; \xi, \tau) > 0$.
2. $\Gamma(x, t; \xi, \tau) = \Gamma(\xi, t; x, \tau)$.
3. $t > \tau, x \in \mathbb{R}$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau)\, d\xi = 1.$$

# 1.4 基本解 XI

Proof. $t > \tau$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-(x-\xi)^2/(4a^2(t-\tau))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta = 1. \quad \boxed{\eta = (\xi - x)/(2a\sqrt{t-\tau})}. \qquad \square$$

4. $t > \tau, x, \xi \in \mathbb{R}$ 时

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \Gamma(x, t; \xi, \tau) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \Gamma(x, t; \xi, \tau) = 0.$$

# 1.4 基本解 XII

5. $\varphi(x) \in C(\mathbb{R})$ 且有界时，

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi = \varphi(x).$$

定理 1.3 中已证.

6. $(x,t) \neq (\xi,\tau)$ 时，$\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ 无穷次连续可微，且有估计:

$$\left|\Gamma(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant \frac{M}{\sqrt{t-\tau}}, t > \tau.\text{其中}M\text{为常数}$$

# Poisson 公式与基本解的关联：一个物理解释 I

将无穷长杆分割成长度为 $\Delta\xi$ 的小段，即

$$\mathbb{R}=\bigcup_{i=-\infty}^{\infty}[\xi_{i-1},\xi_i],\Delta\xi=\xi_i-\xi_{i-1}$$

$$令\varphi_i(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in[\xi_{i-1},\xi_i]\\ 0, & otherwise\end{cases}\Longrightarrow\varphi(x)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\varphi_i(x)$$

引入如下初值问题

$$\begin{cases}Lu_i=0, & (x,t)\in Q\\ u_i(x,0)=\varphi_i(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

# Poisson 公式与基本解的关联：一个物理解释 II

$u_i$ 是 $[\xi_{i-1},\xi_i]$ 上的初始温度所产生的影响函数. 根据叠加原理知:$u(x,t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}u_i(x)$. 设 $c\rho=1$，则杆 $[\xi_{i-1},\xi_i]$ 由 0 变到初始温度 $\varphi(x)$ 所需要的热量为：

$$Q_i=\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}c\rho\varphi(x)\,dx=\varphi(\bar{\xi}_i)\Delta\xi,\quad \bar{\xi}_i\in[\xi_{i-1},\xi_i].$$

若将 $Q_i$ 作为点热源集中作用于 $\bar{\xi}_i$，则在杆上将产生初始温度分布为: $\bar{u}_i(x,0)=Q_i\delta(x-\bar{\xi}_i)$. 可得到 $t>0$ 时产生的温度分布为 $\bar{u}_i(x,t)=Q_i\Gamma(x,t;\bar{\xi}_i,0)$.

# Poisson 公式与基本解的关联：一个物理解释 III

将所有的 $\bar{u}_i$ 叠加得到温度分布:

$$\bar{u}(x,t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\bar{u}_i(x,t)$$

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\lim_{\Delta\xi\to 0^+}\bar{u}(x,t)=\lim_{\Delta\xi\to 0^+}\sum_{i=-\infty}^{\infty}Q_i\Gamma(x,t;\bar{\xi}_i,0)\\&=\lim_{\Delta\xi\to 0^+}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\Gamma(x,t;\bar{\xi}_i,0)\varphi(\bar{\xi}_i)\Delta\xi\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi.\qquad\boxed{\text{Poisson 公式}}\end{aligned}$$

# 1.5 半无界问题 I

第一、二边值问题，分别关于 x 轴进行奇延拓与偶延拓. 第三边值问题，如何延拓？

考虑如下齐次边界条件的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u_x + \alpha u = 0, & x = 0, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0, \end{cases}$$

# 1.5 半无界问题 II

其中 $\alpha$ 为常数. 将其延拓后化为 Cauchy 问题求解, 假设延拓后化为如下问题

$$\begin{cases} W_t - a^2 W_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ W(x,0) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\text{其中}\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geqslant 0, \\ \psi(x), & x < 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

这里 $\psi$ 待定. 需要满足

$$W_x(0,t) + \alpha W(0,t) = 0,$$

# 1.5 半无界问题 III

根据 Poisson 公式可得到 (1.6) 的解是

$$W(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi,t)\Phi(\xi)\,d\xi,$$

# 1.5 半无界问题 IV

再由 $W(x,t)$ 满足的边界条件反解 $\psi$ 由此得到

$$
\begin{aligned}
W_x &= \int_{-\infty}^{\infty} K_x(x-\xi,t)\Phi(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} -K_\xi(x-\xi,t)\Phi(\xi)\,d\xi \\
&= -K(x-\xi,t)\Phi(\xi)\Big|_{-\infty}^{0} - K(x-\xi,t)\Phi(\xi)\Big|_{0}^{\infty} \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)\Phi'(\xi)\,d\xi \\
&= -K(x,t)\psi(0) + K(x,t)\varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)\Phi'(\xi)\,d\xi
\end{aligned}
$$

由于

$$
W_x(0,t) + \alpha W(0,t) = 0,
$$

# 1.5 半无界问题 V

得到

$$
\begin{aligned}
&-K(0,t)\psi(0)+K(0,t)\varphi(0)+\int_{-\infty}^{\infty}K(-\xi,t)\Phi'(\xi)\,d\xi\\
&+\alpha\int_{-\infty}^{\infty}K(-\xi,t)\Phi(\xi)\,d\xi=0.
\end{aligned}
$$

令 $\psi(0)=\varphi(0)$，则上式变为

$$
\int_{-\infty}^{\infty}K(-\xi,t)\Phi'(\xi)+\alpha K(-\xi,t)\Phi(\xi)\,d\xi=0.
$$

$$
\int_{-\infty}^{0}K(-\xi,t)(\Phi'(\xi)+\alpha\Phi(\xi))\,d\xi+\int_{0}^{\infty}K(-\xi,t)(\Phi'(\xi)+\alpha\Phi(\xi))\,d\xi=0.
$$

# 1.5 半无界问题 VI

$$\int_{-\infty}^{0} K(-\xi,t)(\Phi'(\xi)+\alpha\Phi(\xi))\,d\xi+\int_{0}^{\infty} K(-\xi,t)(\Phi'(\xi)+\alpha\Phi(\xi))\,d\xi=0.$$

$$\int_{0}^{\infty} K(\xi,t)(\Phi'(-\xi)+\alpha\Phi(-\xi))\,d\xi+\int_{0}^{\infty} K(\xi,t)(\Phi'(\xi)+\alpha\Phi(\xi))\,d\xi=0.$$

$$\Longleftarrow \psi'(-\xi)+\alpha\psi(-\xi)=-\varphi'(\xi)-\alpha\varphi(\xi),\quad \xi>0$$

$$\Longleftrightarrow \psi'(\xi)+\alpha\psi(\xi)=-\varphi'(-\xi)-\alpha\varphi(-\xi),\quad \xi<0$$

再结合初值条件 $\psi(0)=\varphi(0)$，可得到

$$\psi(\xi)=\varphi(-\xi)+2\alpha e^{-\alpha\xi}\int_{0}^{-\xi} e^{-\alpha\eta}\varphi(\eta)\,d\eta,\quad \xi<0.$$

代入 $W(x,t)$ 的表达式即可.

Q:当边界条件非齐次时如何处理?

# 2.1 有界杆的热传导问题 I

考虑如下一维热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

用分离变量法求解以上问题.

1. 考虑变量分离形式的解

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

# 2.1 有界杆的热传导问题 II

代入相应的齐次方程 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ 和边界条件 $u(0,t) = u(l,t) = 0$ 得如下 Sturm-Liouville 问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < l \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad \boxed{X(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x}$$

$$\boxed{C_2 = 0,\ C_1 \sin\sqrt{\lambda}x = 0}.$$

$$\Longrightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

# 2.1 有界杆的热传导问题 III

2. 把解 $u(x,t)$,$f(x,t)$,$\varphi(x)$ 按照特征函数系 $\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}$ 展开：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x\quad \varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

# 2.1 有界杆的热传导问题 IV

将以上级数代入混合问题的方程及初值条件得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\sin\frac{n\pi}{l}x+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} T_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t), \\ T_n(0)=\varphi_n. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow T_n(t)=\varphi_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}+\int_0^t f_n(\tau)e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}\,d\tau,\quad ,n=1,2,\ldots.$$

# 2.1 有界杆的热传导问题 V

最终得到混合问题的级数解如下

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t}+\int_0^t f_n(\tau)e^{-(\frac{an\pi}{l})^2(t-\tau)}d\tau\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

附注 **1**

$C^{2,1}(Q)$: 在 $Q=\{(x,t)|0<x<l,0<t\leqslant T\}$ 内关于 $x$ 二次连续可微，关于 $t$ 一次连续可微函数的集合.

$C^{1,0}(Q)$:?

可证明，若初值 $\varphi(x)$ 和非齐次项 $f(x,t)$ 具有一定的光滑性并满足某些相容性条件，则分离变量法所得到的级数解 $u(x,t)\in C^{2,1}(Q)\bigcap C(\bar{Q})$，而且确实是混合问题的解.

当 $f(x,t)\equiv 0$ 时，只要 $\varphi(x)$ 有界，解 $u(x,t)$ 在 $Q$ 内必无穷次可微.

附注 **2**

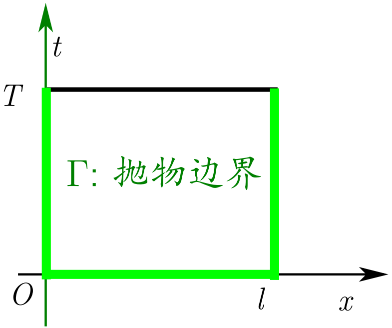
# 2.1 有界杆的热传导问题 VI

当边界条件非齐次 $u(0,t)=g_1(t), u(l,t)=g_2(t)$
则引入函数代换:

$$u(x,t)=v(x,t)+\left(1-\frac{x}{l}\right)g_1(t)+\frac{x}{l}g_2(t).$$

P163:9(5)

# 3.1 弱极值原理 I




$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$$

$f(x, t) \geqslant 0$ : 热源

$f(x, t) \leqslant 0$ : 热汇

图: $Q = \{(x, t) | 0 < x < l, 0 < t \leqslant T\}$

# 3.1 弱极值原理 II

**定理 3.1（弱极值原理）**

设 $u \in C^{2,1}(Q) \bigcap C(\bar{Q})$ 且满足 $Lu = f \leqslant 0$，则 $u$ 在 $\bar{Q}$ 上的最大值必在 $Q$ 的抛物边界 $\Gamma$ 上达到，即

$$\max_{\bar{Q}} u(x,t) = \max_{\Gamma} u(x,t)$$

Proof. **a)** 首先证 $f < 0 \Longrightarrow u$ 必不能在 $Q$ 内达到最大值.用反证法:

# 3.1 弱极值原理 III

设在点 $P_0(x_0, t_0) \in Q$ 使得 $u(x_0, t_0) = \max_{\bar{Q}} u(x, t)$，则有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} = 0, \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{P_0} \leqslant 0$$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{P_0} = 0, & t_0 < T \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{P_0} \geqslant 0, & t_0 = T \end{cases}$$

因此

$$f(x_0, t_0) = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|_{P_0} \geqslant 0.$$

# 3.1 弱极值原理 IV

产生矛盾，假设不成立，因而 $u$ 不能在 $Q$ 内达到最大值.

**b)** 考虑一般情况 $f(x,t) \leqslant 0$，为此，引入辅助函数

$$v(x,t) = u(x,t) - \epsilon t. \Longrightarrow \quad Lv = Lu - \epsilon = f - \epsilon < 0.$$

因而由 **a)** 的情形可知，$v$ 不会在 $Q$ 内达到最大值，即

$$\max_{\bar{Q}} v(x,t) = \max_{\Gamma} v(x,t).$$

因此 $$\max_{\bar{Q}} u(x,t) = \max_{\bar{Q}} (v(x,t) + \epsilon t) \leqslant \max_{\bar{Q}} v(x,t) + \epsilon T$$

$$\leqslant \max_{\Gamma} v(x,t) + \epsilon T \leqslant \max_{\Gamma} u(x,t) + \epsilon T$$

# 3.1 弱极值原理 V

令 $\epsilon \to 0$ 得到 $\max_{\bar{Q}} u(x,t) = \max_{\Gamma} u(x,t)$. $\square$

## 推论 1

设 $u \in C^{2,1}(Q) \bigcap C(\bar{Q})$ 且满足 $Lu = f \geqslant 0$，则 $u$ 在 $\bar{Q}$ 上的最小值必在 $\Gamma$ 上达到，即

$$\min_{\bar{Q}} u = \min_{\Gamma} u.$$

Proof. 令 $v = -u$，则利用定理 3.1 的结论可得

$$\max_{\bar{Q}} -u(x,t) = \max_{\Gamma} -u(x,t),$$

# 3.1 弱极值原理 VI

Q: 若$Lu = 0$，会有什么情况发生？

附注　注意

必在抛物边界上达到

必不能在 Q 内达到（除 $u \equiv const.$）

两种说法的区别，前者较弱，因此称弱极值原理.

## 推论 2（比较原理）

设 $u, v \in C^{2,1}(Q) \bigcap C(\bar{Q})$ 且有 $Lu \leqslant Lv$，$u\big|_{\Gamma} \leqslant v\big|_{\Gamma}$，则在 $\bar{Q}$ 上 $u(x,t) \leqslant v(x,t)$.

Proof.　令 $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$，再运用定理 3.1 即可.

作业：P165: 13, P166: 16 (提示：令 $v(x,t) = u_{l_2} - u_{l_1}$),18(提示：证明方法与弱极值原理类似)，19

# 3.2 第一边值问题解的最大模估计

考虑第一边值问题

$$\begin{cases} Lu = u_t - a^2 u_{xx} = f, & (x,t) \in Q, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u|_{x=0} = g_1(t),\ u|_{x=l} = g_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{3.1}$$

# 3.2 第一边值问题解的最大模估计

考虑第一边值问题

$$\begin{cases} Lu = u_t - a^2 u_{xx} = f, & (x,t) \in Q, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u|_{x=0} = g_1(t),\ u|_{x=l} = g_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{3.1}$$

## 定理 3.2

设 $u(x,t) \in C^{2,1}(Q) \bigcap C(\bar{Q})$ 是问题 (3.1) 的解，则

$$\max_{\bar{Q}} |u| \leqslant FT + B$$

$$\text{其中} F = \sup_{Q} |f|,\ B = \max\left\{ \sup_{[0,l]} |\varphi|, \sup_{[0,T]} |g_1|, \sup_{[0,T]} |g_2| \right\}.$$

Proof. 考虑辅助函数

$$w(x,t) = Ft + B \pm u(x,t) \Longrightarrow Lw = F \pm f \geqslant 0.$$

$$\text{在 } \Gamma \text{ 上} \qquad w\big|_{\Gamma} \geqslant B \pm u \geqslant 0.$$

由弱极值原理知, $Q$ 上 $w(x,t) \geqslant 0$, 由此得到 $\max_{\bar{Q}} |u| \leqslant FT + B.$ □

**推论 1**

第一边值问题的解在 $C^{2,1}(Q) \bigcap C(\bar{Q})$ 中的解是唯一的.

Proof. ?

## 推论 2

第一边值问题在 $C^{2,1}(Q)\bigcap C(\bar{Q})$ 中的解连续依赖于非齐次项 $f$, 初值 $\varphi$ 和边值 $g_1, g_2$.

Proof.?

附注 由此可知，最大模估计蕴涵解的唯一性和稳定性，因此下文中不再重复讨论这些问题.

# 3.3 第二、三边值问题解的最大模估计 I

第二、三边值问题可统一写成

$$\begin{cases} Lu = u_t - a^2 u_{xx} = f, & (x,t) \in Q, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \left[-\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha(t) u\right]_{x=0} = g_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(t) u\right]_{x=l} = g_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $\alpha(t), \beta(t) \geqslant 0$，当 $\alpha(t) \equiv \beta(t) \equiv 0$，为第二边值问题.

## 引理 3.3

设 $u(x,t) \in C^{2,1}(Q) \bigcap C^{1,0}(\bar{Q})$ 满足

$$\begin{aligned} Lu = u_t - a^2 u_{xx} &\geqslant 0, \quad (x,t) \in Q, \\ u\big|_{t=0} &\geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \left[-\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha(t) u\right]_{x=0} &\geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(t) u\right]_{x=l} &\geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{aligned}$$

则在 $\bar{Q}$ 上 $u(x,t) \geqslant 0$.

Proof. **1.** 首先设边界条件为

$$\left[-\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha(t)u\right]_{x=0}>0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\tag{3.3}$$
$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\beta(t)u\right]_{x=l}>0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

我们证明 $u$ 在 $\bar{Q}$ 上没有负最小值.
由定理 3.1 可知，$u$ 的最小值必在 $\Gamma$ 上达到. 假设在 $x=0$ 上的 $P_0$ 点达到负最小值，则

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0}\leqslant 0,\quad \alpha(t)u\Big|_{P_0}\leqslant 0,$$

与(3.3)矛盾，因此不可能在 $x=0$ 上达到负最小值. 同理，也不可能在 $x=l$ 上达到负最小值. 在 $t=0$ 上 $u\geqslant 0$，因此在 $\bar{Q}$ 上 $u(x,t)\geqslant 0$ 成立.

**2.** 对于边界条件$\geqslant 0$的情形，考虑如下辅助函数：

$$v(x,t) = u(x,t) + \epsilon\left[2a^2 t + (x - \frac{l}{2})^2\right]. \quad \forall \epsilon > 0$$

计算得:

$$\begin{aligned} Lv \geqslant 0 \quad v\Big|_{t=0} &\geqslant 0, \\ \left[-\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha(t)v\right]_{x=0} &\geqslant 0 \\ \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \beta(t)v\right]_{x=l} &\geqslant 0 \end{aligned}$$

因此有 $\bar{Q}$ 上 $v(x,t) \geqslant 0$

$$\begin{aligned} u(x,t) &\geqslant -\epsilon\left[2a^2 t + (x-\frac{l}{2})^2\right] \\ &\geqslant -\epsilon\left[2a^2 T + \frac{l^2}{4}\right] \quad , (x,t) \in \bar{Q} \end{aligned}$$

令 $\epsilon \to 0 \Longrightarrow u(x,t) \geqslant 0.$ $\square$

## 定理 3.4

设 $u(x,t) \in C^{2,1}(Q) \bigcap C^{1,0}(\bar{Q})$ 是问题 (3.2) 的解，则有

$$|u(x,t)| \leqslant C(F+B)$$

其中 $C$ 是一个仅依赖于 $a, l, T$ 的常数，且

$$F = \sup_{Q} |f|, \quad B = \max\left\{\max_{[0,T]} |g_1|, \max_{[0,T]} |g_2|, \max_{[0,l]} |\varphi|\right\}.$$

Proof. 引入辅助函数

$$w(x,t) = Ft + Bz(x,t) \pm u(x,t)$$

$$\text{其中}: z(x,t) = 1 + \frac{1}{l}\left[2a^2 t + (x - \frac{l}{2})^2\right].$$

计算得到

$$Lz = 0, \qquad z\big|_{t=0} \geqslant 1,$$
$$\left[-\frac{\partial z}{\partial x} + \alpha(t)z\right]_{x=0} > 1$$
$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} + \beta(t)z\right]_{x=l} > 1$$

因而 $Lw = F \pm f(x,t) \geqslant 0, \qquad w\big|_{t=0} \geqslant B \pm \varphi(x)$

$$\left[-\frac{\partial w}{\partial x} + \alpha(t)w\right]_{x=0} \geqslant B \pm g_1(t) \geqslant 0,$$
$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \beta(t)w\right]_{x=l} \geqslant B \pm g_2(t) \geqslant 0.$$

由引理 3.3 知，$\bar{Q}$ 上有 $w(x,t) \geqslant 0$. 于是

$$|u(x,t)| \leqslant Ft + Bz(x,t) \leqslant FT + \left(1 + \frac{2a^2 T}{l} + \frac{l}{4}\right) B$$

取 $C = \max\left\{T, 1 + \frac{2a^2 T}{l} + \frac{l}{4}\right\}$ 即得结论. $\square$

# 3.4 初值问题解的最大模估计 I

在带形区域 $Q = \{(x,t) \big| -\infty < x < \infty, \quad 0 < t \leqslant T\}$ 上考虑初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & (x,t) \in Q \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

前文已证当 $f \equiv 0, \varphi(x)$ 有界连续时，Poisson 公式给出热传导方程初值问题的一个有界解，本节将以定解条件最大模的有界性来保证有界解的唯一性.

## 定理 3.5

设 $u(x,t) \in C^{2,1}(Q) \bigcap C(\bar{Q})$ 是以上初值问题的有界解，则有估计

$$\sup_{Q} |u(x,t)| \leqslant T \sup_{Q} |f(x,t)| + \sup_{(-\infty,\infty)} |\varphi(x)|.$$

Proof. $\forall L > 0$，考虑区域 $Q_L = \left\{(x,t) \middle| |x| < L, 0 < t \leqslant T\right\}$. 记 $F = \sup_Q \left|f(x,t)\right|, \Phi = \sup_{(-\infty,\infty)} \left|\varphi(x)\right|$. 设 $\sup_Q \left|u(x,t)\right| = K$. 在 $Q_L$ 上考虑辅助函数

$$w(x,t) = Ft + \Phi + v_L(x,t) \pm u(x,t),$$

$$\text{其中} v_L(x,t) = \frac{K}{L^2}(x^2 + 2a^2 t).$$

可计算得到

$$\begin{aligned} w_t - a^2 w_{xx} = F \pm f \geqslant 0, &\quad (x,t) \in Q_L, \\ w\big|_{t=0} \geqslant 0, &\quad -L \leqslant x \leqslant L, \\ w\big|_{x=\pm L} \geqslant K \pm u \geqslant 0, &\quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned}$$

在 $Q_L$ 上应用极值原理可得 $\min_{Q_L} w(x,t) \geqslant 0$. 因此，对于 $\forall (x^0, t^0) \in Q$，当 $L$ 充分大时，皆有 $(x^0, t^0) \in Q_L$，由 $w(x^0, t^0) \geqslant 0$，即有

$$|u(x^0, t^0)| \leqslant Ft^0 + \Phi + \frac{K}{L^2}[(x^0)^2 + 2a^2(t^0)].$$

$$令 L \to \infty \quad \Rightarrow \boxed{|u(x^0, t^0)| \leqslant Ft^0 + \Phi}. \qquad \square$$

附注　还可以证明，Cauchy 问题在 $C^{2,1}(Q)\bigcap C(\bar{Q})\bigcap\left\{u\big||u(x,t)|\leqslant Me^{Nx^2},\exists M,N>0\right\}$ 中的解也唯一. 但在之外的情况下，解的唯一性不再保证.

# 3.5 边值问题解的能量模估计 I

本小节通过能量模估计来研究热传导方程解的唯一性和稳定性。
记 $Q_T = \left\{(x,t)\middle|0<x<l, 0<t\leqslant T\right\}$，在 $Q_T$ 上考虑混合问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, & (x,t)\in Q_T \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & 0\leqslant t\leqslant T. \end{cases} \tag{4.1}$$

# 3.5 边值问题解的能量模估计 II

## 定理 3.6

设 $u \in C^{1,0}(\bar{Q}_T) \bigcap C^{2,1}(Q_T)$ 是问题 (4.1) 的解，则我们有估计

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_0^l u^2(x,t)\,dx + 2a^2 \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt$$
$$\leqslant M\left(\int_0^l \varphi^2(x)\,dx + \int_0^T \int_0^l f^2(x,t)\,dxdt\right),$$

其中 $M$ 只与 $T$ 有关.

# 3.5 边值问题解的能量模估计 III

Proof.

$$\int_0^\tau\int_0^l u\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}udxdt=\int_0^\tau\int_0^l fudxdt$$

$$\int_0^\tau\int_0^l \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t}+a^2(\frac{\partial u}{\partial x})^2dxdt\leqslant\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt+f^2dxdt$$

$$\frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,\tau)dx-\frac{1}{2}\int_0^l\varphi^2(x)dx\leqslant\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt$$

$$\int_0^l u^2(x,\tau)dx\leqslant\int_0^l\varphi^2(x)dx+\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt+\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt$$

记 $G(\tau)=\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt,\quad F(\tau)=\int_0^l\varphi^2(x)dx+\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt$

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau}\leqslant F(\tau)+G(\tau).$$

# 3.5 边值问题解的能量模估计 IV

由 Gronwall 不等式可得：

$$\int_0^\tau\int_0^l u^2\,dxdt \leqslant e^\tau\left(\int_0^l \varphi^2(x)\,dx+\int_0^\tau\int_0^l f^2\,dxdt\right)$$

$$\text{代入}\int_0^\tau\int_0^l \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t}+a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dxdt=\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l u^2\,dxdt+f^2\,dxdt$$

$$\text{得}\int_0^\tau\int_0^l \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t}+a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dxdt$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(1+e^\tau)\left(\int_0^l \varphi^2(x)\,dx+\int_0^\tau\int_0^l f^2\,dxdt\right)$$

两边取上确界得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l u^2(x,t)\,dx+2a^2\int_0^T\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dxdt$$

$$\leqslant 2(1+e^T)\left(\int_0^l \varphi^2(x)\,dx+\int_0^T\int_0^l f^2(x,t)\,dxdt\right)$$

# 3.5 边值问题解的能量模估计 V

**附注 1** 由能量模估计同样可得混合问题解的唯一性、稳定性，但稳定性结果比极值原理得到的稍弱，解对给定数据仅具有平均稳定性.

**附注 2** 可同样对其他边值问题进行能量模估计.

**附注 3[作业]** 可得问题 (4.1) 进一步的能量模估计:

$$
\begin{aligned}
&a^2 \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + 2\int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt \\
\leqslant & M_1 \left( \int_0^l (\varphi'(x))^2 dx + \int_0^T \int_0^l f^2(x,t)\, dxdt \right)
\end{aligned}
$$

作业：P167:22,23

# 3.6 反向问题的不适定性 I

前文证明了热传导方程的三类边值问题、初值问题的适定性.
物理上看，热传导过程不可逆，因此相应于热传导逆过程的定解问题理应与本章中的定解问题有本质的不同，事实上，热传导逆过程的方程是不适定的!

提法如下:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, 0 \leqslant t < T, \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u\big|_{t=T} = \varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

# 3.6 反向问题的不适定性 II

即已知 $T$ 时刻的温度分布，来推测之前温度的分布与变化情况. 这类问题称为热传导方程的时间反向问题或终值问题.

1. 若 $u(x,0)$ 连续，则 $u(x,t), t>0$ 无穷次可微，甚至对于 $x$ 是解析的。因此若反向问题的解存在，必然要求 $\varphi(x)$ 是个解析函数.

2. 反向问题的解不是关于初值稳定的.

设 $u_n(x,T)=\varphi_n(x)=\frac{1}{n^k}\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad (k>0)$

则反向问题的解为

$$u_n(x,t)=\frac{1}{n^k}\sin\frac{n\pi x}{l}\exp\left[(n\pi/l)^2(T-t)\right], \quad (k>0).$$

# 3.6 反向问题的不适定性 III

当 $n \to \infty$ 时

$$\max_{[0,l]} |\varphi_n(x)| = \frac{1}{n^k} \to 0,$$

但对于 $t < T$，当 $n \to \infty$ 时

$$\max_{[0,l]} |u_n(x,t)| = \frac{1}{n^k} \exp\left[(n\pi/l)^2 (T-t)\right] \to \infty.$$

说明该问题不适定！

该类不适定问题存在很多实际应用。

如何解决？

对解增加约束条件，将问题适定化.

# Riemann-Lebesgue 引理

若 $g(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 Riemann 或 Lebesgue 可积函数，则

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b g(x)\sin mx dx = 0$$
$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b g(x)\cos mx dx = 0$$

back

# 绝对可积函数的绝对连续性质

若 $f(x) \in L^1(R)$，$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$，使得对任意可测集 $m(A) < \delta$:

$$\int_A |f(x)|\, dx < \epsilon.$$

back