第二章　波动方程

主讲人　马啸

西北工业大学　应用数学系

2021 年 3 月 26 日

§1 一阶线性方程的特征线解法 I

运动流体的连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0. \tag{1.1}$$

- 以 $n = 1$ 情况为例，若 $v(x,t) \equiv a$ 已知，且 $\Omega \equiv \{-\infty < x < +\infty\}$，即求解 Cauchy 问题

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{1.2}$$

$$\rho(x,0) = \rho_0(x). \tag{1.3}$$

其中 $\rho_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

§1 一阶线性方程的特征线解法 II

称如下 ODE 初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a, \\ x(0) = c \end{cases}$$

的解 $x(t, c) = at + c$（$c \equiv const.$）为方程 (1.2) 的特征线

沿特征线 $x = x(t, c)$，$\rho = \rho(x(t, c), t)$ 满足如下 ODE

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} = 0,$$

说明 $\rho(x, t)$ 沿特征线取常数.

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a, \\ x(0) = c \end{cases}}$$

$$\rho(x(t, c), t) = \rho(x(0, c), 0) = \rho(c, 0) = \rho_0(c)$$
$$\Longrightarrow \rho(x, t) = \rho_0(x - at)$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + a\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0, & (1.2) \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x). & (1.3) \end{cases}}$$

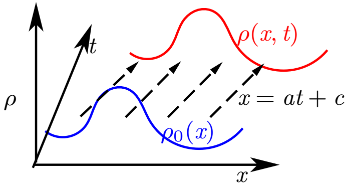


图: 方程 (1.2) 的特征线和解 $(a > 0)$

考虑更一般的变系数方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(v(x)\rho)=0 \tag{1.4}$$

其中 $v(x)\in C^1(\mathbb{R})$. 以上方程变形为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+v(x)\frac{\partial \rho}{\partial x}+v'(x)\rho=0.$$

如何构造特征线？

构造特征线 $x=x(t,c)$ 满足 ODE 初值问题

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=v(x(t)),\\ x(0)=c,\end{cases} \tag{1.5}$$

可得沿该特征线 $x(t,c)=c+\int_0^t v(x(\tau))\,d\tau$，$\rho=\rho(x(t,c),c)$ 满足

$$\begin{cases}\frac{d\rho}{dt}=-v'(x(t,c))\rho,\\ \rho_{x=c,t=0}=\rho(x(0,c),0)=\rho(c,0)=\rho_0(c)\end{cases} \tag{1.6}$$

求解以上 ODE 的初值问题

$$\int_{\rho_0(c)}^{\rho(x(t,c),t)} \frac{d\rho}{\rho} d\rho = \int_0^t -v'(x(\tau,c))\,d\tau$$

$$\ln\rho(x(t,c),t) - \ln\rho_0(c) = \int_c^{x(t,c)} -v'(x(\tau,c))\frac{d\tau}{dx}dx$$

$\boxed{\text{变量替换} x = x(\tau, c)}$

$$\begin{aligned}\ln\rho(x(t,c),t) &= \ln\rho_0(c) + \int_c^{x(t,c)} \frac{-v'(x(\tau,c))}{v(x(\tau,c))}dx \\ &= \ln\rho_0(c) - \ln v(x(t,c)) + \ln v(c)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{假设} v(x) \neq 0}$

$$\rho(x(t,c),t) = \rho_0(c)\frac{v(c)}{v(x(t,c))}$$

从特征线方程中反解出 $c=\varphi(x,t)$

$$\rho(x,t)=\rho_0(\varphi(x,t))\frac{v(\varphi(x,t))}{v(x)}.$$

作业：验证这是原 PDE 的解

总结特征线方程法解一阶 PDE 的过程

1. 求特征线 $x=x(t,c)$
2. 沿特征线将原方程化为关于 $\rho=\rho(x(t,c),t)$ 的 ODE，并求出 $\rho=u(t,c)$
3. 从特征线方程解出 $c=\varphi(x,t)$，则所求的解为 $\rho=u(t,\varphi(x,t))$

例　求下列 Cauchy 问题的解

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(x+t)\frac{\partial u}{\partial x}+u=x,\quad x\in\mathbb{R}^1,t>0 \tag{1.7}$$

$$u(x,0)=x. \tag{1.8}$$

作业：P100, 3(2).

§2 初值问题 (一维情形)
2.1 问题的简化

考虑波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.1}$$

叠加原理

若 $\diamond$ 是一个线性算子，则

$$\diamond u_i = p_i,\ i = 1, 2, \ldots, m \Longrightarrow \diamond \sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{i=1}^{m} p_i \tag{2.2}$$

$$
\begin{cases}
\Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & \mathbb{R} \times (0,\infty), \\
u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\
u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}.
\end{cases} \tag{2.1}
$$

由叠加原理，以上问题可以分解为如下三个问题

$$
\boxed{\begin{cases}
\Box u_1 = 0, \\
u_1(x,0) = \varphi(x), \\
(u_1)_t(x,0) = 0, .
\end{cases} \qquad \text{(I)}}
$$

$$
\boxed{\begin{cases}
\Box u_3 = f(x,t), \\
u_3(x,0) = 0, \\
(u_3)_t(x,0) = 0.
\end{cases} \qquad \text{(III)}}
$$

$$
\boxed{\begin{cases}
\Box u_2 = 0, \\
u_2(x,0) = 0, \\
(u_2)_t(x,0) = \psi(x).
\end{cases} \qquad \text{(II)}}
$$

定理 2.1

设 $u_2 = M_\psi(x,t)$ 是 (II) 的解，则另两个问题的解可分别表为

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x,t), \tag{2.3}$$

$$u_3 = \int_0^t M_{f_\tau}(x, t-\tau)\, d\tau, \tag{2.4}$$

其中 $f_\tau = f(x,\tau)$，且假定 $M_\varphi(x,t)$ 和 $M_{f_\tau}(x,t-\tau)$ 分别在区域 $\{x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant t < \infty\}$ 和 $\{x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant \tau \leqslant t < \infty\}$ 上对变量 x, t 和 τ 充分光滑.

Proof. 思路：将解的表达式代入定解问题 (II) 和 (III) 中验证是定解问题的解. 首先，有：

$$\begin{cases} \Box M_\varphi = 0, \\ M_\varphi(x,t)|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases} \quad \begin{cases} \Box M_{f_\tau}(x,t-\tau) = 0, \\ M_{f_\tau}(x,t-\tau)|_{t=\tau} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} M_{f_\tau}(x,t-\tau)|_{t=\tau} = f(x,\tau), \end{cases}$$

(I):

$$
\begin{cases}
\Box u_1 = \Box \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \Box M_\varphi(x,t) = 0 \\
u_1(x,0) = \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \\
(u_1)_t(x,0) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_\varphi(x,t)\right)\Big|_{t=0} = \left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} M_\varphi(x,t)\right)\Big|_{t=0} \\
\qquad\qquad = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(M_\varphi|_{t=0}\right) = 0
\end{cases}
$$

(III):

$$u_3(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = M_{f_\tau}(x, t-\tau)\Big|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} M_{f_\tau}(x, t-\tau)\, d\tau$$

$$(u_3)_t(x,0) = 0$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} M_{f_\tau}(x, t-\tau)\Big|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{f_\tau}(x, t-\tau)\, d\tau \\
&= f(x,t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} M_{f_\tau}(x, t-\tau)\, d\tau \\
&= f(x,t) + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t M_{f_\tau}(x, t-\tau)\, d\tau \\
&= f(x,t) + a^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}, \qquad \square
\end{aligned}
$$

附注　PDE 的求解过程常采取如下步骤:

1. 求形式解：先假定所有运算（如积分号下求导、积分号下取极限、交换积分次序、级数与求导积分可交换等）都合法
2. 验证解的合法性：考虑对定解资料加什么条件才能保证所得的形式解确实是真正的解（足够的连续可微性 + 代入方程和定解条件等号成立）

2.1 解的表达式

由以上讨论，只需解如下定解问题即可

$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{II}$$

由 $\Box = \left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right)$，可以将方程 $\Box u = 0$ 分解为两个一阶方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x} = v, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{2.6}$$

u, v 分别满足的定解问题为

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial u}{\partial x} = v, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (a)}
\qquad
\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + a\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ v(x, 0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} - a\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \quad (b)}$$

特征线方程为:

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + a\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ v(x,0) = \psi(x). \end{cases} \quad (b)}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a \\ x_1(0) = c \end{cases}$$

得$x_1(t) = at + c,\ c = x_1 - at$

$$\begin{cases} \frac{dv(x_1(t),t)}{dt} = 0 \\ v(x_1(0),0) = \psi(x_1(0)) \end{cases} \Longrightarrow v(x_1(t),t) = v(x_1(0),0) = \psi(c)$$

$$v(x,t) = \psi(x - at).$$

特征线方程为:

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x} = v, \\ u(x,0) = 0. \end{cases} \quad (a)}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = -a \\ x_2(0) = c \end{cases}$$

得$x_2(t) = -at + c,\ c = x_2 + at$

$$\begin{cases} \frac{du(x_2(t),t)}{dt} = v(x_2(t),t) \\ u(x_2(0),0) = 0. \end{cases} \Longrightarrow u(x_2(t),t) = \int_0^t \psi(x_2(\tau) - a\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t \psi(c - 2a\tau)\,d\tau$$

$$\overset{\xi = c-2a\tau}{\Longleftrightarrow} -\frac{1}{2a}\int_c^{c-2at} \psi(\xi)\,d\xi$$

最终得到 (II) 的解

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2a}\int_c^{c-2at} \psi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi \quad \boxed{M_\psi(x,t)} \qquad (2.7)$$

由定理 2.1 得到

$$u_1=\frac{\partial}{\partial t}M_{\varphi}(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right], \tag{2.8}$$

$$u_3=\int_0^t M_{f_\tau}(x,t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi, \tag{2.9}$$

原 Cauchy 问题的解可表示为：

$$\begin{aligned} u=&\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi \\ &+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi \end{aligned} \tag{2.10}$$

当 $f\equiv 0$，该表达式称为D'Alembert 公式.

下一步：验证形式解的合法性.

定理 2.2 证明留作习题

若 $\varphi\in C^2(\mathbb{R}),\psi\in C^1(\mathbb{R}),f\in C^1(\bar{Q}),Q=\{(x,t)\big|-\infty<x<\infty,t>0\}$，则由表达式 (3.10) 给出的函数 $u\in C^2(\bar{Q})$，且是 Cauchy 问题 (2.1) 的解.

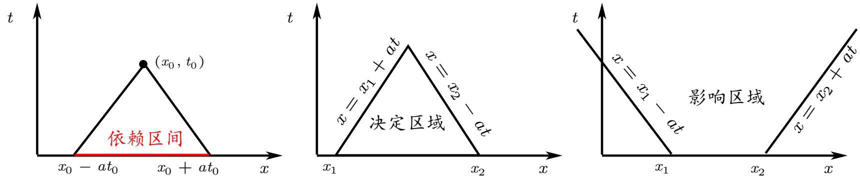
推论

若 φ,ψ,f 是 x 的偶（奇，周期）函数，则由表达式 (3.10) 给出的解 u 也定是 x 的偶（奇，周期）函数.

2.3 依赖区间、决定区域和影响区域

$f \equiv 0$ 时，观察 D'Alembert 公式:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) - \varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi$$

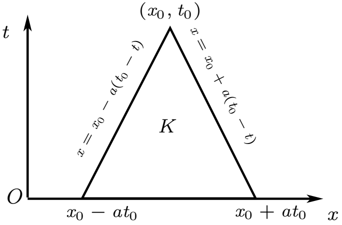


$x = c \pm at$ 称为波动方程的特征线，在波动方程研究中起着重要作用。
以上讨论中可以看出,a 就是波的传播速度。
有限速度传播是波动方程的一个重要特点。

2.4 能量不等式 I

在上半平面 Q 任取一点 (x_0, t_0)，通过该点向下作两条特征线 $x = x_0 \pm a(t_0 - t)$，与 x 轴所围成的三角形区域称为以 (x_0, t_0) 为顶点的特征锥，记为 K.

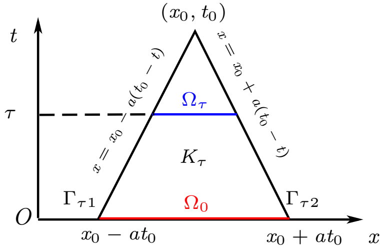
$u(x_0, t_0)$ 由 φ, ψ 在依赖区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 上的值及 f 在 K 上的值确定.



定理 2.3（能量不等式） 设 $u \in C^1(\bar{Q}) \bigcap C^2(Q)$ 是定解问题 (2.1) 的解，则有估计

$$\int_{\Omega_\tau} \left[u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau)\right] dx \leqslant M\left[\int_{\Omega_0} (\psi^2 + a^2\varphi_x^2)\, dx + \iint\limits_{K_\tau} f^2(x,t)\, dxdt\right], \tag{2.11}$$

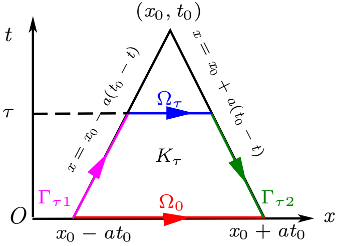
$$\iint\limits_{K_\tau} \left[u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau)\right] dxdt \leqslant M\left[\int_{\Omega_0} (\psi^2 + a^2\varphi_x^2)\, dx + \iint\limits_{K_\tau} f^2(x,t)\, dxdt\right] \tag{2.12}$$



证明 在波动方程两边同乘以 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 并在 K_τ 上积分

$$\iint\limits_{K_\tau} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dxdt = \iint\limits_{K_\tau} \frac{\partial u}{\partial t} fdxdt.$$

$$\iint\limits_{K_\tau} \left\{\frac{1}{2}(u_t^2 + a^2 u_x^2)_t - a^2(u_t u_x)_x\right\} dxdt = \iint\limits_{K_\tau} u_t fdxdt$$



$$\partial K_\tau = \Omega_0 \bigcup(-\Gamma_{\tau 2})\bigcup(-\Omega_\tau)\bigcup(-\Gamma_{\tau 1})$$

应用 Green 公式得: go

$$-\oint\limits_{\partial K_\tau} a^2(u_t u_x)dt + \frac{1}{2}(u_t^2 + a^2 u_x^2)dx$$

$$= \int_{\Gamma_{\tau 2}\bigcup\Gamma_{\tau 1}} a^2 u_t u_x dt + \frac{1}{2}(u_t^2 + a^2 u_x^2)dx$$

$$-\int_{\Omega_0} \frac{1}{2}(u_t^2 + a^2 u_x^2)dx + \int_{\Omega_\tau} \frac{1}{2}(u_t^2 + a^2 u_x^2)dx = J_1 + J_2 + J_3$$

$$\boxed{\Gamma_{\tau 1} : dx = adt; \quad \Gamma_{\tau 2} : dx = -adt}$$

- $$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\Gamma_{\tau 1}} \frac{1}{2} a \left[2 a u_t u_x + u_t^2 + a^2 u_x^2 \right] dt + \int_{\Gamma_{\tau 2}} \frac{1}{2} a \left[2 a u_t u_x - u_t^2 - a^2 u_x^2 \right] dt \\ &= \int_{\Gamma_{\tau 1}} \frac{1}{2} a (u_t + a u_x)^2 \, dt - \int_{\Gamma_{\tau 2}} \frac{1}{2} a (u_t - a u_x)^2 \, dt \end{aligned}$$

- $$J_1 = \int_{\Gamma_{\tau 1}} \frac{1}{2} a \left[2 a u_t u_x + u_t^2 + a^2 u_x^2 \right] dt + \int_{\Gamma_{\tau 2}} \frac{1}{2} a \left[2 a u_t u_x - u_t^2 - a^2 u_x^2 \right] dt$$
  $$= \int_{\Gamma_{\tau 1}} \frac{1}{2} a (u_t + a u_x)^2 dt - \int_{\Gamma_{\tau 2}} \frac{1}{2} a (u_t - a u_x)^2 dt$$
- 而$\Gamma_{\tau 1}$上$dt > 0, \Gamma_{\tau 2}$上$dt < 0$, 所以 $J_1 \geqslant 0$. 从而得到
  $$J_3 \leqslant \iint\limits_{K_\tau} u_t f dx dt - J_2$$
  即 $$\int_{\Omega_\tau} \frac{1}{2} (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx \leqslant \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx + \iint\limits_{K_\tau} u_t f dx dt$$
  $$\int_{\Omega_\tau} (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx \leqslant \int_{\Omega_0} (\psi^2 + a^2 \varphi_x^2) dx + \iint\limits_{K_\tau} 2 u_t f dx dt$$
  $$\leqslant \int_{\Omega_0} (\psi^2 + a^2 \varphi_x^2) dx + \iint u_t^2 + f^2 dx dt$$

$$\int_{\Omega_\tau}(u_t^2+a^2u_x^2)\,dx \leqslant \int_{\Omega_0}(\psi^2+a^2\varphi_x^2)\,dx+\iint\limits_{K_\tau} u_t^2+f^2\,dxdt$$

$$令\ G(\tau)=\iint\limits_{K_\tau}(u_t^2+a^2u_x^2)\,dxdt=\boxed{\int_0^\tau\int_{x_0-a(t_0-t)}^{x_0+a(t_0-t)}(u_t^2+a^2u_x^2)\,dxdt}$$

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau}=\int_{\Omega_\tau}(u_t^2+a^2u_x^2)\,dx$$

$$\Longrightarrow \frac{dG(\tau)}{d\tau}\leqslant G(\tau)+F(\tau)$$

$$其中\quad F(\tau)=\int_{\Omega_0}(\psi^2+a^2\varphi_x^2)\,dx+\iint\limits_{K_\tau} f^2\,dxdt$$

由 Gronwall 不等式得定理 2.3 不等式. □

- 附注 1

$\frac{1}{2}\rho u_t^2 dx$	弦元素 dx 在 t 时刻的动能
$\frac{T}{2}u_x^2 dx$	弦元素 dx 在 t 时刻的应变能（势能）
$\int_{\Omega_\tau}(u_t^2+a^2u_x^2)\,dx$	弦段 Ω_τ 在 τ 时刻的机械能; 能量积分或 u 的能量模.

定理 2.3 就是初值问题解的能量模估计.

- 附注 1

$\frac{1}{2}\rho u_t^2 dx$	弦元素 dx 在 t 时刻的动能
$\frac{T}{2}u_x^2 dx$	弦元素 dx 在 t 时刻的应变能（势能）
$\int_{\Omega_\tau}(u_t^2+a^2u_x^2)\,dx$	弦段 Ω_τ 在 τ 时刻的机械能；能量积分或 u 的能量模.

定理 2.3 就是初值问题解的能量模估计.

- 附注 2 基于定理 2.3，可对 u 本身的 L^2 模进行估计.

$$\int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau)\,dx \leqslant M_1\left[\int_{\Omega_0}(\varphi^2+\psi^2+a^2\varphi_x^2)\,dx+\iint_{K_\tau} f^2\,dxdt\right]$$

$$\iint_{K_\tau} u^2(x,\tau)\,dx \leqslant M_1\left[\int_{\Omega_0}(\varphi^2+\psi^2+a^2\varphi_x^2)\,dx+\iint_{K_\tau} f^2\,dxdt\right]$$

其中 $M_1=e^{t_0}(e^{t_0}+1),\ \tau\in[0,t_0]$.

- 证明

$$\int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau) - u^2(x,0)\,dx = \int_{\Omega_\tau}\int_0^\tau \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial t}\,dtdx = \int_{\Omega_\tau}\int_0^\tau 2uu_t\,dtdx$$

$$\leqslant \int_{\Omega_\tau}\int_0^\tau u^2 + u_t^2\,dtdx \leqslant \iint\limits_{K_\tau} u^2 + u_t^2\,dtdx$$

因此 $\displaystyle\int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau)\,dx \leqslant \iint\limits_{K_\tau} u^2\,dxdt + \int_{\Omega_\tau} \varphi(x)^2\,dx + \iint\limits_{K_\tau} u_t^2\,dxdt$

- 证明

$$\int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau) - u^2(x,0)\,dx = \int_{\Omega_\tau}\int_0^\tau \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial t}\,dtdx = \int_{\Omega_\tau}\int_0^\tau 2uu_t\,dtdx$$

$$\leqslant \int_{\Omega_\tau}\int_0^\tau u^2 + u_t^2\,dtdx \leqslant \iint\limits_{K_\tau} u^2 + u_t^2\,dtdx$$

因此 $\int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau)\,dx \leqslant \iint\limits_{K_\tau} u^2\,dxdt + \int_{\Omega_\tau}\varphi(x)^2\,dx + \iint\limits_{K_\tau} u_t^2\,dxdt$

- 证明

$$\int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau) - u^2(x,0)\,dx = \int_{\Omega_\tau}\int_0^\tau \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial t}\,dtdx = \int_{\Omega_\tau}\int_0^\tau 2uu_t\,dtdx$$

$$\leqslant \int_{\Omega_\tau}\int_0^\tau u^2 + u_t^2\,dtdx \leqslant \iint\limits_{K_\tau} u^2 + u_t^2\,dtdx$$

因此$\int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau)\,dx \leqslant \iint\limits_{K_\tau} u^2\,dxdt + \int_{\Omega_\tau} \varphi(x)^2\,dx + \iint\limits_{K_\tau} u_t^2\,dxdt$

-

$$令\, G(\tau) = \iint\limits_{K_\tau} u^2(x,t)\,dxdt \geqslant 0, 满足: G(0) = 0,$$

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leqslant G(\tau) + F(\tau)$$

$$其中\, F(\tau) = \int_{\Omega_\tau} \varphi(x)^2\,dx + \iint\limits_{K_\tau} u_t^2\,dxdt$$

- 因此，根据 Gronwall 不等式可得：

$$\int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau)\,dx \leqslant e^{t_0}\left(\int_{\Omega_\tau}\varphi(x)^2\,dx + \iint\limits_{K_\tau} u_t^2\,dxdt\right)$$

$$\iint\limits_{K_\tau} u^2(x,\tau)\,dx \leqslant e^{t_0}\left(\int_{\Omega_\tau}\varphi(x)^2\,dx + \iint\limits_{K_\tau} u_t^2\,dxdt\right)$$

- 因此，根据 Gronwall 不等式可得：

$$\int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau)\,dx \leqslant e^{t_0}\left(\int_{\Omega_\tau} \varphi(x)^2\,dx + \iint\limits_{K_\tau} u_t^2\,dxdt\right)$$

$$\iint\limits_{K_\tau} u^2(x,\tau)\,dx \leqslant e^{t_0}\left(\int_{\Omega_\tau} \varphi(x)^2\,dx + \iint\limits_{K_\tau} u_t^2\,dxdt\right)$$

- Q: 如何得到结论不等式？

- 因此，根据 Gronwall 不等式可得：

$$\int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau)\,dx \leqslant e^{t_0}\left(\int_{\Omega_\tau}\varphi(x)^2\,dx + \iint\limits_{K_\tau} u_t^2\,dxdt\right)$$

$$\iint\limits_{K_\tau} u^2(x,\tau)\,dx \leqslant e^{t_0}\left(\int_{\Omega_\tau}\varphi(x)^2\,dx + \iint\limits_{K_\tau} u_t^2\,dxdt\right)$$

- Q: 如何得到结论不等式？
- A: 利用定理 2.3 第二个不等式即得.

$$\iint\limits_{K_\tau} u_t^2\,dxdt \leqslant \iint\limits_{K_\tau} u_t^2 + a^2u_x^2\,dxdt$$

$$\leqslant e^{t_0}\left[\int_{\Omega_0}(\psi^2 + a^2\varphi_x^2)\,dx + \iint\limits_{K_\tau} f^2(x,t)\,dxdt\right]$$

$\square$.

附注 3 能量不等式 $\Longrightarrow$ 解的唯一性和稳定性?

附注 **3** 能量不等式 $\Longrightarrow$ 解的唯一性和稳定性？

定理 2.4 解的唯一性

波动方程初值问题的解在 $C^1(\bar{Q})\bigcap C^2(Q)$ 中是唯一的.

附注 **3** 能量不等式 $\Longrightarrow$ 解的唯一性和稳定性？

定理 2.4 解的唯一性

波动方程初值问题的解在 $C^1(\bar{Q})\bigcap C^2(Q)$ 中是唯一的.

证明.

设 $u_1, u_2 \in C^1(\bar{Q})\bigcap C^2(Q)$ 是初值问题的解，则 $u = u_1 - u_2$ 是齐次初值问题的解，由能量不等式可证 $u \equiv 0$. □

附注 **3** 能量不等式 $\Longrightarrow$ 解的唯一性和稳定性？

定理 2.4 解的唯一性

波动方程初值问题的解在 $C^1(\bar{Q})\bigcap C^2(Q)$ 中是唯一的.

证明.

设 $u_1, u_2 \in C^1(\bar{Q})\bigcap C^2(Q)$ 是初值问题的解，则 $u = u_1 - u_2$ 是齐次初值问题的解，由能量不等式可证 $u \equiv 0$. □

定理 2.4 解的稳定性（作业）

波动方程初值问题的解在下述意义下连续依赖于 f, φ, ψ:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$，使得 $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant \delta$,

$\|\varphi_1' - \varphi_2'\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant \delta, \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant \delta, \|f_1 - f_2\|_{L^2(K_\tau)} \leqslant \delta$

那么对应于 (φ_i, ψ_i, f_i) 的解 $u_i, (i = 1, 2)$ 满足：

$\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega_\tau)} \leqslant \epsilon$, $\|(u_1)_x - (u_2)_x\|_{L^2(\Omega_\tau)} \leqslant \epsilon$, $\|(u_1)_t - (u_2)_t\|_{L^2(\Omega_\tau)} \leqslant \epsilon$,

$\|u_1 - u_2\|_{L^2(K_\tau)} \leqslant \epsilon$, $\|(u_1)_x - (u_2)_x\|_{L^2(K_\tau)} \leqslant \epsilon$, $\|(u_1)_t - (u_2)_t\|_{L^2(K_\tau)} \leqslant \epsilon$.

作业:P102, 13

2.5 半无界问题

在区域 $\bar{Q}=\{0\leqslant x<\infty, 0\leqslant t<\infty\}$ 求解定解问题:

$$\begin{cases} \Box u=f(x,t) & 0<x<\infty, 0<t<\infty, \\ u|_{t=0}=\varphi(x), & 0\leqslant x<\infty, \\ u_t|_{t=0}=\psi(x), & 0\leqslant x<\infty, \\ u|_{x=0}=g(t), & t>0. \end{cases} \tag{2.13}$$

A. $g(t)\equiv 0$ 的情形

思路: 设法将问题延拓至全空间 $(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty)$，并使得 $u(0,t)=0$ 能够自然地得到满足。$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{对问题关于 } x \text{ 作奇延拓。}}$

定义 $\bar{\varphi}(x)$，$\bar{\psi}(x)$，$\bar{f}(x,t)$ 使得

$$\bar{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geqslant 0\\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases}$$

$$\bar{\psi}(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\geqslant 0\\ -\psi(-x), & x<0\end{cases}$$

$$\bar{f}(x,t)=\begin{cases}f(x,t), & x\geqslant 0, t\geqslant 0\\ -f(-x,t), & x<0, t\geqslant 0\end{cases}$$

验证这样定义的 $\bar{\varphi},\bar{\psi},\bar{f}$ 是关于 x 的奇函数.
进而求解如下全空间上的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}\Box\bar{u}=\bar{f}(x,t), & -\infty<x<\infty, t>0,\\ \bar{u}|_{t=0}=\bar{\varphi}(x), & -\infty<x<\infty,\\ \bar{u}_t|_{t=0}=\bar{\psi}(x), & -\infty<x<\infty.\end{cases}$$

它的解为:

$$\bar{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\bar{\varphi}(x+at)+\bar{\varphi}(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\bar{\psi}(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\bar{f}(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{2.14}$$

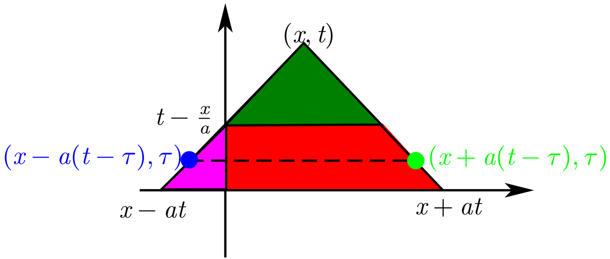
它必然是 x 的奇函数，你的依据是什么？

原问题的解 $\boxed{u=\bar{u}|_{\bar{Q}}}$

$$x \geqslant at:\ u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{2.15}$$

$x < at:$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) - \varphi(at-x)\right] + \frac{1}{2a}\left(\int_{x-at}^{0} -\psi(-\xi)\,d\xi + \int_{0}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi\right)$$
$$+ \frac{1}{2a}\left[\int_{t-x/a}^{t} d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\right.$$
$$\left.+ \int_{0}^{t-x/a} d\tau \left(\int_{0}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi + \int_{x-a(t-\tau)}^{0} -f(-\xi,\tau)\,d\xi\right)\right].$$



$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)-\varphi(-x+at)\right]+\frac{1}{2a}\left(\int_{at-x}^{0}\psi(\xi)\,d\xi+\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi\right)\\
&+\frac{1}{2a}\left[\int_{t-x/a}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi\right.\\
&\left.+\int_{0}^{t-x/a}d\tau\left(\int_{0}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi+\int_{-x+a(t-\tau)}^{0}f(\xi,\tau)\,d\xi\right)\right]\\
=&\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)\right]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi\\
&+\frac{1}{2a}\left[\int_{t-x/a}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi\right.\\
&\left.+\int_{0}^{t-x/a}d\tau\int_{-x+a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi\right]. \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

以上解法称为对称开拓法.

由特征线理论知: 一维波动方程的初始条件的奇性必沿着特征线传播，因此，必须要求解在包含 $(0,0)$ 在内的 $\bar{Q}=\{0\leqslant x<\infty, t\geqslant 0\}$ 上二次连续可微。因此需增加如下相容性条件:

1.

$$u\in C(\bar{Q})\Longrightarrow \lim_{t\to 0}u(0,t)=\lim_{x\to 0}u(x,0)$$
$$0=\lim_{t\to 0}g(t)=\lim_{x\to 0}\varphi(x)$$
$$\varphi(0)=0 \tag{2.17}$$

2.

$$u\in C^1(\bar{Q})\Longrightarrow u_t\text{必须在角点 }(0,0)\text{ 处连续}\Longrightarrow \psi(0)=g'(0)=0. \tag{2.18}$$

3

$$u \in C^2(\bar{Q}), u\text{在 } Q \text{ 内部适合弦振动方程} \Longrightarrow \lim_{(x,t)\to(0,0)} (\Box u - f) = 0.$$

$$\lim_{t\to 0} u_{tt}(0,t) - a^2 \lim_{x\to 0} u_{xx}(x,0) - f(0,0) = 0.$$

$$\Longrightarrow g''(0) - a^2\varphi''(0) = f(0,0). \Longrightarrow a^2\varphi''(0) + f(0,0) = 0. \tag{2.19}$$

定理 **2.5** 若 $\varphi(x) \in C^2[0,\infty)$,$\psi(x) \in C^1[0,\infty)$,$f(x,t) \in C^1(\bar{Q})$，且适合相容性条件 (2.17)-(2.19), 那么半无界问题 (2.13) 必有解 $u(x,t) \in C^2(\bar{Q})$，且由表达式 (2.15),(2.16) 给出.

B. $g(t) \neq 0$

作函数代换

$$u = v + g(t),$$

v 在区域 $\bar{Q}$ 上适合以下齐次边值的定解问题：

$$\begin{cases} \Box v = \Box u - \Box g(t) = f(x,t) - g''(t), \\ v(0,t) = 0, \\ v(x,0) = \varphi(x) - g(0), \\ v_t(x,0) = \psi(x) - g'(0). \end{cases}$$

将问题转化为 **A.** $g(t) \equiv 0$ 的情形.

定理 2.6 若
$g(t) \in C^3[0,\infty)$,$\varphi(x) \in C^2[0,\infty)$,$\psi(x) \in C^1[0,\infty)$,$f(x,t) \in C^1(\bar{Q})$，且适合相容性条件 $\varphi(0) = g(0)$,$\psi(0) = g'(0)$,$g''(0) - a^2\varphi''(0) = f(0,0)$,
那么半无界问题 (2.13) 有解 $u(x,t) \in C^2(\bar{Q})$.

- 思考　当半无界问题取第二类边界条件 $u_x(0,t) = g(t)$ 时，应该如何求解?

　　作函数代换 $u = xg(t) + v \Longrightarrow v_x(0,t) = 0$. 之后，对关于 v 的半无界问题进行偶开拓。（留作作业）

§3 初值问题（高维情形）

3.1 解的表达式

本节将首先利用球面平均法推导三维波动方程 Cauchy 问题解的表达式，再利用 降维法推导二维波动方程 Cauchy 问题解的表达式.

$n=3$ 三维波动方程的 Cauchy 问题如下:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) = f(x,t), & \mathbb{R}^3\times(0,\infty), \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x_1,x_2,x_3), & x\in\mathbb{R}^3 \\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x_1,x_2,x_3), & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{3.1}$$

利用叠加原理，只须考虑 $f=\varphi=0$ 的情形。

球平均法 I

- 考虑函数 $h(x)$ 在以 x 为球心，r 为半径的球面上的平均值：

$$I(x,r;h)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|y|=1} h(x+ry)\,dS_y,\quad \boxed{\text{自变量为 } (x,r)} \tag{3.2}$$

$$\text{满足: } \lim_{r\to 0} I(x,r;h)=h(x) \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial R}I(x,R;h)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|y|=1} y_i\frac{\partial h}{\partial x_i}(x+Ry)\,dS_y \tag{3.4}$$

球平均法 II

推导 $I(x, r; h)$ 满足的方程，首先：

$$\iiint\limits_{|z|\leqslant R} h(x+z)\,dz = \int_0^R r^2\,dr \iint\limits_{|y|=1} h(x+ry)\,dS_y$$
$$= \int_0^R 4\pi r^2 I(x, r; h)\,dr$$

因此若 $h(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$，则：

$$\Delta \int_0^R 4\pi r^2 I(x, r; h)\, dr$$

$$= \iiint\limits_{|z|\leqslant R} \Delta_x h(x+z)\, dz = \iiint\limits_{|z|\leqslant R} \Delta_z h(x+z)\, dz$$

$$= \iint\limits_{|z|=R} \frac{\partial h}{\partial n_z}(x+z)\, dS_z = \iint\limits_{|z|=R} \frac{\partial h}{\partial z_i}\frac{z_i}{R}\, dS_z$$

$$= \iint\limits_{|y|=1} R^2 y_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(x+Ry)\, dS_y \qquad \boxed{z = Ry; \frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial h}{\partial z_i}}$$

$$= 4\pi R^2 \frac{\partial}{\partial R} I(x, R; h),$$

$$\frac{\partial}{\partial R}\Delta\int_0^R 4\pi r^2 I(x,r;h)\,dr = \frac{\partial}{\partial R}\int_0^R 4\pi r^2 \Delta I(x,r;h)\,dr$$
$$= 4\pi R^2 \Delta I(x,R;h)$$

则由前式: $\frac{\partial}{\partial R}\left[4\pi R^2 \frac{\partial}{\partial R} I(x,R;h)\right] = 4\pi R^2 \Delta I(x,R;h)$

$$2R\frac{\partial}{\partial R}I + R^2\frac{\partial^2}{\partial R^2}I = R^2\Delta I(x,R;h)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial R^2}(RI(x,R;h)) =} 2\frac{\partial}{\partial R}I + R\frac{\partial^2}{\partial R^2}I = \Delta RI(x,R;h)$$

$\boxed{u\text{是 } f=0, \varphi=0 \text{ 时方程的解}}$ $\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rI(x,r;u)) = \Delta rI(x,r;u)$

令: $M(x,r;t) = rI(x,r;u)$

那么有:

$$a^2\frac{\partial^2 M}{\partial r^2}=a^2\Delta M=\frac{a^2 r}{4\pi}\iint\limits_{|y|=1}\Delta u(x+ry,t)\,dS_y$$

$$=\frac{r}{4\pi}\iint\limits_{|y|=1}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x+ry,t)\,dS_y=\frac{\partial^2 M}{\partial t^2},$$

$\boxed{M\text{ 满足的方程}}$

又有:

$$\left.\begin{aligned}&M(x,r,t)|_{t=0}=rI(x,r;0)=0,\\&M_t(x,r,t)|_{t=0}=rI(x,r;\psi),\end{aligned}\right\}$$

$\boxed{\text{初始条件}}$

$$M(x,r,t)|_{r=0}=0,$$

$\boxed{\text{边界条件}}$

$\forall x, M(x,r,t)$ 满足以下半无界问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 M}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 M}{\partial r^2} = 0, & r > 0, t > 0 \\ M|_{t=0} = 0, \\ M_t|_{t=0} = rI(x,r;\psi). \\ M|_{r=0} = 0, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 0 \leqslant r \leqslant at : M(x,r,t) = \frac{1}{2a}\int_{at-r}^{at+r} \xi I(x,\xi;\psi)\,d\xi,$$

$$\boxed{u(x,t) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}M(x,r,t)} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{2ar}\int_{at-r}^{at+r} \xi I(x,\xi;\psi)\,d\xi$$

$$u(x,t) = \frac{1}{a}[\xi I(x,\xi;\psi)]\Big|_{\xi=at} = tI(x,at;\psi) = \frac{t}{4\pi}\iint\limits_{|y|=1} \psi(x+aty)\,dS_y.$$

再经过换元 $aty=y'$ 得:

$$u_2(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}(0)}\psi(x+y)\,dS. \qquad \boxed{f=0,\varphi=0}$$

$$\text{其中}:S_{at}(0)=\left\{y\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,|y|=at\right\}.$$

$$u_1(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}(0)}\varphi(x+y)\,dS\right] \qquad \boxed{f=0,\psi=0}$$

$$u_3(x,t)=\int_0^t\left[\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\iint\limits_{S_{a(t-\tau)}(0)}f(x+y,\tau)\,dS\right]d\tau. \qquad \boxed{\varphi=0,\psi=0}$$

则原三维波动方程的解为：

$$\begin{aligned} u(x,t) =& u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) \\ =& \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}(x)} \varphi(y)\,dS\right] + \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}(x)} \psi(y)\,dS \\ &+ \int_0^t \left[\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\iint\limits_{S_{a(t-\tau)}(x)} f(y,\tau)\,dS\right] d\tau \end{aligned} \tag{3.5}$$

上式称为 **Kirchhoff** 公式.

降维法 I

n=2 二维波动方程的 Cauchy 问题如下:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = f(x, t), & \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2), & x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x_1, x_2), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{3.6}$$

降维法 II

令 $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t)$，则 $\tilde{u}$ 满足如下三维波动方程：

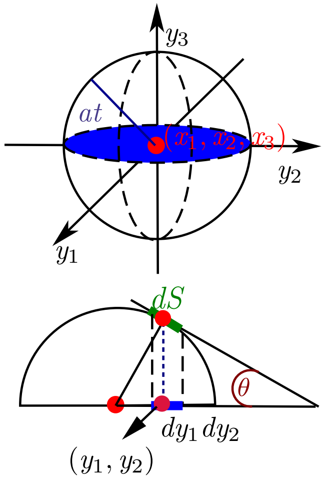
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_3^2} \right) = f(x_1, x_2, t) \\ \tilde{u}\big|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2) \\ \tilde{u}_t\big|_{t=0} = \psi(x_1, x_2). \end{cases}$$

则有解:

降维法 III

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) = & \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}(x)} \varphi(y_1, y_2)\, dS\right] \\
& + \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}(x)} \psi(y_1, y_2)\, dS \\
& + \int_0^t \left[\frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)}\iint\limits_{S_{a(t-\tau)}(x)} f(y_1, y_2, \tau)\, dS\right] d\tau
\end{aligned}
$$

降维法 IV



将球面 $S_{at}(x)$ 上的积分转化为关于圆平面 $\Sigma_{at}(x)$ 内的积分，为求 Jacobi 行列式，注意到积分微元存在如下关系：

$$\cos\theta\, dS = dy_1\, dy_2$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}{at}$$

降维法 V

最后得到二维波动方程 Cauchy 问题的解，称为 **Poisson** 公式:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t) \\
=&\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\Sigma_{at}(x)} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{a^2t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}dy\right] \\
&+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\Sigma_{at}(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{a^2t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}dy \\
&+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t \iint\limits_{\Sigma_{a(t-\tau)}(x)} \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}dy d\tau
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

降维法 VI

定理 3.1 若

$\varphi\in C^3(\mathbb{R}^n)$,$\psi\in C^2(\mathbb{R}^n)$,$f\in C^2(\bar{Q})$, $Q=\{(x,t)|x\in\mathbb{R}^n, t>0\}$，则由表达式 (3.8),(3.9) 给出的函数 $u\in C^2(\bar{Q})$ 分别是定解问题 (3.1) 和 (3.6) 的解。

Proof: 略.

作业:P101, 9

(提示: 进行函数代换:$v(x,y,t)=u(x,t)\exp\left(-i\frac{\sqrt{c}}{a}y\right)$)

P103,19

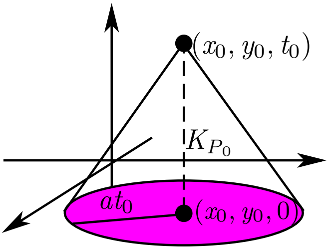
3.2 特征锥与惠更斯原理 I

以二维波动方程为例说明：

Poisson 公式:$u(x_1, x_2, t) =$

$$\iint\limits_{\Sigma_{at}(x)} \bullet dy + \iint\limits_{\Sigma_{at}(x)} \bullet dy +$$

$$\int_0^t \iint\limits_{\Sigma_{a(t-\tau)}(x)} \bullet dy d\tau$$



$$K_{P_0} = \left\{(x, y, t) \middle| \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leqslant a(t_0 - t), 0 \leqslant t \leqslant t_0\right\}: \text{特征锥}$$

3.2 特征锥与惠更斯原理 II

$u(x_0, y_0, t_0)$ 只依赖于 $K_{P_0} \bigcap \{t = 0\}$ 内 φ 及 ψ 的取值以及 K_{P_0} 内 f 的取值. $K_{P_0} \bigcap \{t = 0\}$: 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 对初值的依赖区域. 点 P 的依赖区域记为 D_P.

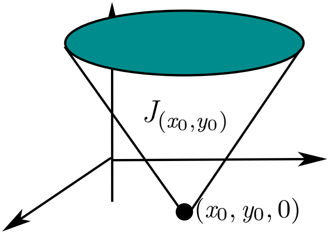
依赖区域之外的区域的初值，对 P_0 点的解毫无影响: 扰动的传播速度有限.

给定 xy 平面上一块区域 D

决定区域:$F_D = \left\{P(x, y, t) \middle| D_P \subset D\right\}$

影响区域:$J_D = \left\{P(x, y, t) \middle| D_P \bigcap D \neq \varnothing\right\}$

3.2 特征锥与惠更斯原理 III



点 $(x_0, y_0, 0)$ 的影响区域:

$$J_{(x_0,y_0)} = \Big\{P(x,y,t)\Big| \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \leqslant at, t \geqslant 0\Big\}$$

对于三维波动方程:

$$\text{Kirchhoff 公式:}u(x_1,x_2,x_3,t) = \iint\limits_{S_{at}(x)} \bullet dy + \iint\limits_{S_{at}(x)} \bullet dy + \int_0^t \iint\limits_{S_{a(t-\tau)}(x)} \bullet dy d\tau$$

3.2 特征锥与惠更斯原理 IV

点 P_0 依赖区域为；$D_{P_0} =$
$\left\{(x,y,z,t)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \leqslant a(t_0-t), 0\right.$
当 $f=0$ 时

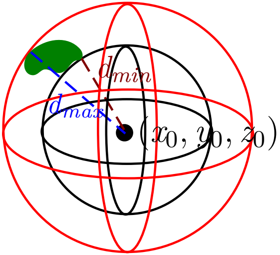
二维波动方程: 点 $P_0(x_0,y_0,t_0)$ 的解依赖于:

$$\Sigma_{at_0}(x_0,y_0) = \left\{(x,y,0)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \leqslant at_0\right\}$$

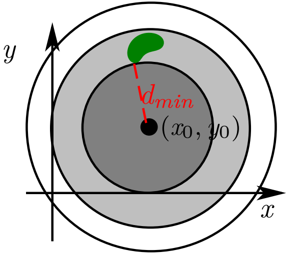
三维波动方程: 点 $P_0(x_0,y_0,z_0,t_0)$ 的解依赖于:

$$S_{at_0}(x_0,y_0,z_0) = \left\{(x,y,z,0)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)} = at_0\right\}$$

3.2 特征锥与惠更斯原理 V



三维 当 $\frac{d_{min}}{a} < t < \frac{d_{max}}{a}$ 时 $u(x_0, y_0, z_0, t) \neq 0$. 惠更斯原理或无后效现象.



二维 当 $t > \frac{d_{min}}{a}$ 时 $u(x_0, y_0, t) \neq 0$. 波的弥散或波具有后效现象.

波动方程解的渐进衰减性质：
（考虑 $f=0$ 时，初始条件 φ,ψ 产生的扰动的衰减性，假设 φ,ψ 具有紧支集 $\boxed{\text{支（撑）集：} spt(f)=\{x|f(x)\neq 0\}\text{，支集是紧的}}$）

三维

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t) \\
=& \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}(x)}\varphi(y)\,dS\right]+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}(x)}\psi(y)\,dS
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

$$
|u(x,t)|<Ct^{-1}
$$

二维

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\Sigma_{at}(x)} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{a^2t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\,dy\right]$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\Sigma_{at}(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{a^2t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\,dy \qquad (3.9)$$

$$|u(x,t)| < Ct^{-1/2}$$

一维

$$u = \frac{1}{2}\left[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi \qquad (3.10)$$

无衰减.

§4 混合问题

4.1 分离变量法

考虑两端固定的弦振动方程混合问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & Q = \{0 < x < l, t > 0\}, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l \end{cases} \tag{4.1}$$

设法找到所有具有变量分离形式的非零特解，即:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

代入方程得:$XT'' - a^2X''T = 0$, 或$\dfrac{T''}{a^2T} = \dfrac{X''}{X} \boxed{= a(x) = a(t)} = -\lambda.$

$$T'' + a^2\lambda T = 0, \quad (t > 0) \tag{4.2}$$
$$X'' + \lambda X = 0, \quad (0 < x < l). \tag{4.3}$$

再代入边界条件 $u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$,

$$\Longrightarrow X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0, t > 0$$
$$\Longrightarrow X(0) = X(l) = 0.$$

由此得到关于 X 的 ODE 齐次边值问题:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & (0 < x < l) \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad \boxed{\text{Sturm-Liouville 问题}} \tag{4.4}$$

使得以上问题取非零解的 λ 称为该边值问题的特征值；相应的非零解称为特征函数. 寻求该方程所有特征值与特征函数的问题称为特征值问题或 **Sturm-Liouville** 问题.

定理 **4.1** 在 $[0,l]$ 上特征值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < l, \\ -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0, \end{cases}$$

(其中 $\alpha_i, \beta_i \geqslant 0, \alpha_i + \beta_i \neq 0$) 具有如下性质: **1.** 所有特征值都是非负实数，特别当 $\beta_1 + \beta_2 > 0$ 时，所有特征值都是正数.

2. 所有特征值组成一个单调递增以无穷远点为凝聚点的序列:

$$0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

3. 不同特征值对应的特征函数必正交:

$$\int_0^l X_\lambda(x) X_\mu(x)\, dx = 0 \mathrm{if} \lambda \neq \mu.$$

4. $\forall f(x) \in L_2[0,l]$ 可以按特征函数系 $\{X_n(x)\}$ 展开，即：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x),$$

$$\text{其中 } C_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x)\,dx}{\int_0^l X_n^2(x)\,dx}$$

$$\text{即 } \lim_{N\to\infty} \|f(x) - \sum_{n=1}^{N} C_n X_n(x)\|_{L^2[0,l]} = 0.$$

证明：**(1)** 设 $X_\lambda(x)$ 是特征函数则有：

$$\int_0^l X''_\lambda X_\lambda + \lambda X_\lambda X_\lambda \, dx = 0 \Longrightarrow \int_0^l (X'_\lambda X_\lambda)' - (X'_\lambda)^2 + \lambda X_\lambda^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{\int_0^l (X'_\lambda)^2 \, dx - X_\lambda X'_\lambda\big|_0^l}{\int_0^l X_\lambda^2 \, dx}$$

$-X_\lambda X'_\lambda\big|_0^l = X_\lambda(0)X'_\lambda(0) - X_\lambda(l)X'_\lambda(l)$ 由边值条件得:

$$\alpha_1 X'_\lambda(0) X'_\lambda(0) = \beta_1 X_\lambda(0) X'_\lambda(0), \beta_1 X_\lambda(0) X_\lambda(0) = \alpha_1 X'_\lambda(0) X_\lambda(0),$$

两式相加: $X'_\lambda(0)X_\lambda(0) = \dfrac{1}{\alpha_1+\beta_1}[\alpha_1(X'_\lambda(0))^2 + \beta_1(X_\lambda(0))^2]$

同理得到: $X'_\lambda(l)X_\lambda(l) = \dfrac{-1}{\alpha_2+\beta_2}[\alpha_2(X'_\lambda(l))^2 + \beta_2(X_\lambda(l))^2]$

$$\Longrightarrow \lambda \geqslant 0.$$

$$\boxed{\lambda = 0} \Leftrightarrow \boxed{X'_\lambda(x) = 0 \text{且} \frac{\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}(X_\lambda(0))^2 + \frac{\beta_2}{\alpha_2+\beta_2}(X_\lambda(l))^2] = 0}$$

$$\text{由} X_\lambda'(x) = 0 \Longrightarrow X_\lambda(x) = C \neq 0 \Longrightarrow \beta_1 + \beta_2 = 0$$

因此，当 $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$ 时有 $\lambda > 0$.
只有当 $\beta_1 + \beta_2 = 0$ 即特征值问题取第二类边界条件时 $\lambda = 0$ 是特征值.
(3):

$$\int_0^l X_\lambda'' X_\mu + \lambda X_\lambda X_\mu dx = 0 \Rightarrow X_\mu X_\lambda'\Big|_0^l - \int_0^l X_\mu' X_\lambda' dx + \lambda \int_0^l X_\lambda X_\mu dx = 0$$

$$\int_0^l X_\mu'' X_\lambda + \mu X_\mu X_\lambda dx = 0 \Rightarrow X_\mu' X_\lambda\Big|_0^l - \int_0^l X_\mu' X_\lambda' dx + \mu \int_0^l X_\lambda X_\mu dx = 0$$

$$\text{两式相减得:}(\lambda - \mu) \int_0^l X_\lambda X_\mu dx = X_\mu(l) X_\lambda'(l) - X_\mu(0) X_\lambda'(0)$$
$$- X_\lambda(l) X_\mu'(l) + X_\lambda(0) X_\mu'(0).$$

考虑关于 α_1,β_1 的线性方程组: $\begin{cases} -\alpha_1 X'_\mu(0)+\beta_1 X_\mu(0)=0 \\ -\alpha_1 X'_\lambda(0)+\beta_1 X_\lambda(0)=0 \end{cases}$

$$\text{由}\alpha_1+\beta_1\neq 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} -X'_\mu(0) & X_\mu(0) \\ -X'_\lambda(0) & X_\lambda(0) \end{vmatrix}$$

$$= -X'_\mu(0)X_\lambda(0)+X_\mu(0)X'_\lambda(0)=0$$

同理可证 $X_\mu(l)X'_\lambda(l)-X_\lambda(l)X'_\mu(l)=0$，再由 $\lambda\neq\mu$ 可知 $\int_0^l X_\lambda X_\mu dx=0$.

即 X_μ 和 X_λ 在 $L_2[0,l]$ 中正交.

$\{X_n(x)\}$ 组成了 $L_2[0,l]$ 空间的一组完备正交基.

现在解由混合问题导出的 Sturm-Liouville 问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & (0 < x < l) \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

由 $\lambda > 0$，得到问题通解为:

$$X(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x.$$

代入边界条件:$C_2 = 0 \quad C_1 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$

为使其非零，须有:$\sqrt{\lambda}l = n\pi \Longrightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, \ldots.$

对应的特征函数:$X_n(x) = C\sin\frac{n\pi}{l}x, n = 1, 2, \ldots.$

每个特征值 λ_n 都对应一个 T 满足的方程：

$$T_n'' + a^2\lambda_n T_n = 0$$

$$\Longrightarrow T_n(t) = A_n \sin\frac{an\pi}{l}t + B_n \cos\frac{an\pi}{l}t,\ n = 1, 2, \ldots.$$

因此：$u_n(x,t) = \left(A_n \sin\frac{an\pi}{l}t + B_n \cos\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$

由叠加原理 $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ 满足方程与边值条件.

利用初始条件求解 A_n，B_n：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{an\pi}{l}t+B_n\cos\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x).$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{l}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x).$$

$$B_n: \int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx = \int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\frac{k\pi}{l}x \sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx = \int_0^l B_n \sin^2\frac{n\pi}{l}xdx \quad \boxed{\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{k\pi}{l}xdx = 0,\, k \neq n}$$

$$B_n = \int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \Big/ \int_0^l \sin^2\frac{n\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

同理可得:

$$A_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

至此，我们已经完整给出了混合问题的解的级数表达式.

分离变量法的步骤:

1. 令 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 适合方程及边界条件，从而得到 X 对应的 Sturm-Liouville 问题，以及 $T(t)$ 适合的 ODE.
2. 解 Sturm-Liouville 问题，得到全部 λ_n 及对应的 X_n，继而得到 T_n 的表达式.
3. 令 $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$，利用初始条件求出其中的待定系数.

下面证明形式解的确是混合问题的解

A: 须证实

$$\Box\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\Box u_n,$$

$$\lim_{x\to 0,l}\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 0,l}u_n,$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{t\to 0}\frac{\partial^m u_n}{\partial t^m},\ (m=0,1)$$

只需证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}Du_n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}D^2u_n$在$\bar{Q}=\{0\leqslant x\leqslant l,0\leqslant t\leqslant T\}$,

$(\forall\, T>0)$上一致收敛.

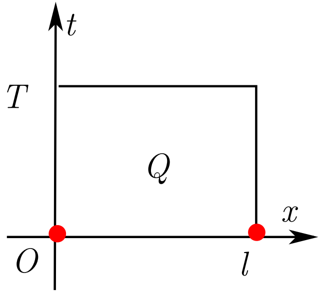
为此需要对定解条件的光滑性提出相应要求.

B: 角点 $(0,0),(l,0)$ 处满足相容性条件. 为此，提出如下定理:

定理 4.2

若 $\varphi(x)\in C^3[0,l]$,$\psi(x)\in C^2[0,l]$，以及 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 在定解区域的角点 $(0,0)$、$(l,0)$ 适合相容性条件:

$$\begin{aligned}&\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)\\=&\varphi''(l)=\psi(0)=\psi(l)=0,\end{aligned}$$



则由级数解表达式给出的函数 $u(x,t)$ 确实是混合问题的解，且 $u\in C^2(\bar{Q})$.

Proof. 略.

附注 1:边界条件必须齐次才能用变量分离法.
若边界条件非齐次，则需作如下函数代换:

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{x}{l}g_2(t)+\frac{l-x}{l}g_1(t),$$

将它化为齐次的，当然此时对于新的未知函数 v 来说，微分方程将变成齐次的.

附注 2:如果方程 $\Box u=f(x,t)$ 非齐次的 (边界条件齐次)，如何处理?

A. 利用叠加原理，例如：

$$\begin{cases}\Box u = f\\ u|_{t=0} = \varphi,\\ u_t|_{t=0} = \psi,\\ u|_{x=0,l} = 0.\end{cases} = \begin{cases}\Box u = f\\ u|_{t=0} = 0,\\ u_t|_{t=0} = 0,\\ u|_{x=0,l} = 0.\end{cases} + \begin{cases}\Box u = 0\\ u|_{t=0} = \varphi,\\ u_t|_{t=0} = 0,\\ u|_{x=0,l} = 0.\end{cases} + \begin{cases}\Box u = 0\\ u|_{t=0} = 0,\\ u_t|_{t=0} = \psi,\\ u|_{x=0,l} = 0.\end{cases}$$

$$u = \int_0^t M_{f_\tau}(x, t-\tau)\,d\tau + \frac{\partial}{\partial t}M_\varphi + M_\psi$$

B. 利用特征函数的正交基特性：

1. 将 $u = XT$ 代入齐次方程和边界条件中，得到 Sturm-Liouville 问题的特征值 λ_n 与特征函数 X_n.

2. 将混合问题的方程及初始条件按照特征函数系展开:

$$\begin{cases} \Box \sum T_n(t)X_n(x) = \sum f_n(t)X_n(x) \\ \sum T_n(0)X_n(x) = \sum \varphi_n X_n(x) \\ \sum T_n'(0)X_n(x) = \sum \psi_n X_n(x) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} T_n''(t)X_n - a^2 T_n X_n'' = f_n(t)X_n \\ T_n(0) = \varphi_n \\ T_n'(0) = \psi_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} T_n''(t) + a^2 T_n \lambda_n = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \\ T_n'(0) = \psi_n \end{cases}$$

3. 解关于 T 的 ODE 初值问题，得:

$$\begin{aligned} T_n(t) = & \varphi_n \cos \frac{an\pi}{l} t + \frac{l}{an\pi} \psi_n \sin \frac{an\pi}{l} t \\ & + \frac{l}{an\pi} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{an\pi}{l} (t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

代入 $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$

附注 **3.**同样可以将混合问题进行周期延拓至全空间，再利用 D'Alembert 公式求解.

附注 **4.**对于其他边界条件，会得到不同的特征值及特征函数.

例:求解弦振动方程的混合问题

$$\begin{cases} \Box u = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ -u_x + a_0 u = 0, & x = 0, t > 0, \\ u_x + a_l u = 0, & x = l, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < l, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 < x < l. \end{cases}$$

作业：P104, 22(2),23(2),25,26(3)

4.2 物理意义，驻波法与共振 I

$$u_n(x,t) = \left(A_n \sin\frac{an\pi}{l}t + B_n\cos\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$
$$= N_n \sin\frac{n\pi}{l}x \sin\left(\frac{an\pi}{l}t + \alpha_n\right)$$
$$\text{其中} N_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \alpha_n = \arctan\frac{B_n}{A_n}$$

上式可看做一个简谐振动方程，其中：振幅 $= N_n \sin\frac{n\pi}{l}x$，圆频率 $\omega_n = \frac{an\pi}{l}$，初相位为 α_n.

在 $\sin\frac{n\pi}{l}x = 0 \Longrightarrow x = 0, \frac{l}{n}, \ldots, \frac{(n-1)l}{n}, l$ 时，振幅为 0

4.2 物理意义，驻波法与共振 II

在 $\sin \frac{n\pi}{l} x = 1 \Longrightarrow x = \frac{l}{2n}, \frac{3l}{2n}, \ldots, \frac{(2n-1)l}{2n}, l$ 时，振幅最大，为 $\pm N_n$

这种形式的运动称为驻波. 物理上将分离变量法也称为驻波法.

波的运动可看成一系列不同频率的驻波的叠加.

基音 $\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ 泛音 $\omega_n, n \geqslant 2$

一般来讲, 基音的振幅相对大得多，决定着声音的音调，而泛音部分构成了声音的音色.

4.2 物理意义，驻波法与共振 III

共振现象 考虑定解问题:

$$\begin{cases} \Box u = A(x)\sin\omega t, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

其解可表示为$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n l}{a n\pi} \sin\frac{n\pi}{l}x \int_0^t \sin\omega\tau \sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau.$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}(\omega\sin\omega_n t - \omega_n \sin\omega t)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中$\omega_n = \frac{an\pi}{l}$, $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l A(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

当 $A(x)\in C^1[0,l]$ 且 $A(0)=A(l)=0$ 时，上式的确是解. 若 $\omega\to\omega_k$ 则级数第 k 项的系数有：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\omega\to\omega_k}\frac{a_k}{\omega_k(\omega^2-\omega_k^2)}(\omega\sin\omega_k t-\omega_k\sin\omega t)\\
=&\lim_{\omega\to\omega_k}\frac{a_k}{\omega_k(\omega^2-\omega_k^2)}\left[(\omega-\omega_k)\sin\omega_k t+\omega_k(\sin\omega_k t-\sin\omega t)\right]\\
=&\lim_{\omega\to\omega_k}\frac{a_k}{\omega_k(\omega+\omega_k)}\sin\omega_k t-\frac{a_k}{\omega^2-\omega_k^2}2\cos\left(\frac{\omega_k+\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_k-\omega}{2}t\right)\\
=&\frac{a_k}{2\omega_k^2}\sin\omega_k t-\frac{a_k}{2\omega_k}t\cos\omega_k t
\end{aligned}
$$

即第 k 项将随时间 t 的增长而无限增大.

共振现象在建筑工程、电子工程中有重要应用!

4.3 能量不等式 I

为证明混合问题解的唯一性和稳定性，对其建立能量不等式，以 $n=1$ 情形为例:

定理 4.3(能量不等式) 若 $u(x,t)\in C^1(\bar{Q}_T)\bigcap C^2(Q_T)$ 是波动方程混合问题的解，其中 $Q_T=(0,l)\times(0,T)$, 则存在只依赖于 T 的常数 M，使得

$$\int_0^l u_t^2(x,\tau)+a^2u_x^2(x,\tau)\,dx\leqslant M\left[\int_0^l \psi^2+a^2\varphi_x^2\,dx+\iint_{Q_\tau} f^2\,dxdt\right] \tag{4.5}$$

4.3 能量不等式 II

$$\iint\limits_{Q_\tau} u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau)\, dxdt \leqslant M\left[\int_0^l \psi^2 + a^2\varphi_x^2 dx + \iint\limits_{Q_\tau} f^2\, dxdt\right] \tag{4.6}$$

其中 $0 \leqslant \tau \leqslant T$ 且在 (4.5) 中，若 $f = 0$, 则 $M = 1$，$\leqslant$ 由 $=$ 代替.

4.3 能量不等式 III

Proof.

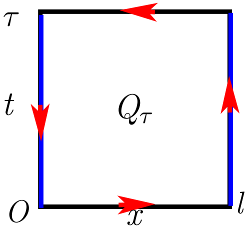
$$\iint\limits_{Q_\tau} u_t(u_{tt} - a^2 u_{xx})\,dxdt = \iint\limits_{Q_\tau} u_t f dxdt$$

$$\text{LHS} = \iint\limits_{Q_\tau} \frac{1}{2}(u_t^2)_t + \frac{1}{2}a^2(u_x^2)_t - (a^2 u_t u_x)_x$$

$$= -\oint\limits_{\partial Q_\tau} (\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}a^2 u_x^2)\,dx + a^2 u_t u_x dt = J$$

4.3 能量不等式 IV

$$
\begin{aligned}
J =& \frac{1}{2}\int_0^l \left(u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau)\right) dx \\
&- \frac{1}{2}\int_0^l \left(\psi^2 + a^2 \varphi_x^2\right) dx \\
&+ \int_0^\tau a^2 u_t u_x\Big|_{x=0} dt - \int_0^\tau a^2 u_t u_x\Big|_{x=l} dt \\
=& \frac{1}{2}\int_0^l \left(u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau)\right) dx \\
&- \frac{1}{2}\int_0^l \left(\psi^2 + a^2 \varphi_x^2\right) dx
\end{aligned}
$$



4.3 能量不等式 V

$$\text{得: } \int_0^l \left(u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau)\right) dx$$

$$= \int_0^l (\psi^2 + a^2\varphi_x^2)\, dx + 2 \iint\limits_{Q_\tau} u_t f dx dt$$

$$\leqslant \int_0^l (\psi^2 + a^2\varphi_x^2)\, dx + \iint\limits_{Q_\tau} f^2\, dx dt + \iint\limits_{Q_\tau} u_t^2\, dx dt$$

4.3 能量不等式 VI

利用 Gronwall 不等式，令

$$G(\tau)=\iint_{Q_\tau} u_t^2(x,\tau)+a^2u_x^2(x,\tau)\,dxdt$$

则以上不等式可改写为：

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau}\leqslant G(\tau)+F(\tau)$$

$$\text{其中}\,F(\tau)=\int_0^l(\psi^2+a^2\varphi_x^2)\,dx+\iint_{Q_\tau} f^2\,dxdt$$

由 Gronwall 不等式立得能量不等式.□

4.3 能量不等式 VII

附注 **1.** 当 $f=0$ 时，以上证明过程中可知:

$$\int_0^l \left(u_t^2(x,\tau)+a^2u_x^2(x,\tau)\right)dx=\int_0^l (\psi^2+a^2\varphi_x^2)\,dx$$

说明弦的总能量保持不变.

4.3 能量不等式 VIII

附注 **2.** 仿照 §2.4 中 Cauchy 问题能量不等式，可得到 u 的 L_2 模的估计式，从而得到:

$$\iint\limits_{Q_\tau} u^2 + u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau)\,dxdt$$

$$\leqslant M\left[\int_0^l \varphi^2 + \psi^2 + a^2\varphi_x^2\,dx + \iint\limits_{Q_\tau} f^2\,dxdt\right]$$

其中 M 为常数，且只依赖于 T.

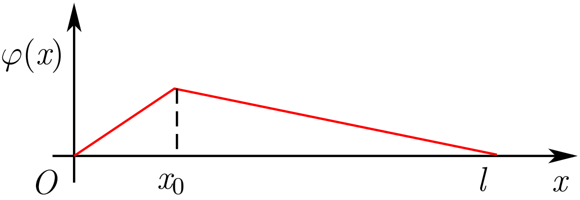
4.3 能量不等式 IX

附注 **3.** 由能量不等式可证明波动方程混合问题的解在 $C^1(\bar{Q})\bigcap C^2(Q)$ 中是唯一的，并且在能量模意义下连续依赖于定解资料.

作业:P106,28

4.4 广义解 I

以上得到的波动方程的解 $\in C^2(\Omega\times[0,\infty))$，称为古典解，均要求定解资料满足一定的光滑性条件（例如 $\varphi(x)\in C^2(\Omega),\psi(x)\in C^1(\Omega)$）及相容性条件.



4.4 广义解 II

对于定解资料不满足光滑性条件的情形，现实中也存在对应的解，但只有将求解的函数类扩大，才能找到，扩大函数类后求得的解称为广义解. 函数类应该如何扩大是一个值得研究的问题，应满足如下两原则:

1. 古典解必是广义解;
2. 广义解是唯一的，且按某种度量连续依赖于定解资料.

4.4 广义解 III

扩大函数类的途径?

回到 PDE 的来源 $\Longrightarrow$ 守恒律和变分原理. 先由古典解的性质来尝试构造广义解的定义. 考虑如下一维波动方程的混合问题:

$$\begin{cases} \Box u = 0, x \in Q_T \\ u(x,0) = \varphi, u_t(x,0) = \psi, x \in [0,l] \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, t \geqslant 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

4.4 广义解 IV

$\forall \zeta \in C^2(\bar{Q}_T)$，有:

$$\iint\limits_{Q_T} (u_{tt} - a^2 u_{xx})\zeta \, dxdt = 0 \text{分部积分有:}$$

$$\iint\limits_{Q_T} u(\zeta_{tt} - a^2 \zeta_{xx})\, dxdt + \int_0^l (u_t \zeta - u \zeta_t)\Big|_0^T dx - a^2 \int_0^T (u_x \zeta)\Big|_0^l dt = 0$$

若令$\zeta(x, T) = \zeta_t(x, T) = \zeta(0, t) = \zeta(l, t) = 0$则上式变为：

4.4 广义解 V

$$\iint\limits_{Q_T} u(\zeta_{tt} - a^2\zeta_{xx})\,dxdt + \int_0^l \varphi\zeta_t(x,0)\,dx - \int_0^l \psi\zeta(x,0)\,dx = 0 \tag{4.8}$$

因此，若 $u \in C^2(\bar{Q}_T)$ 是混合问题的古典解，则 $\forall\zeta \in \mathcal{D} = \{\zeta(x,t) \in C^2(\bar{Q}_T) | \zeta(x,T) = \zeta_t(x,T) = \zeta(0,t) = \zeta(l,t) = 0\}$，以上积分等式总成立，且只要 $u \in C(\bar{Q}_T)$，则积分等式中的每项均有意义. 由此启发，我们定义混合问题的解如下:

定义 4.3 $u \in C(\bar{Q}_T)$ 称为定解问题 (4.7) 的广义解，若对 $\forall\zeta \in \mathcal{D}$，积分等式 (4.8) 总成立.

$\zeta(x,t)$ 称为试验函数;$\mathcal{D}$ 称为试验函数集合.

4.4 广义解 VI

Q: 检验如此定义的广义解是否满足两个原则?

1. 古典解 $\Longrightarrow$ 广义解: 由广义解的定义可知该项满足.
2. **定理 4.4** 混合问题 (4.7) 的广义解必唯一.

   Proof. 若 u_1, u_2 均是该问题的广义解, 则 $u = u_1 - u_2$ 满足:

$$\iint\limits_{Q_T} u(\zeta_{tt} - a^2\zeta_{xx})\,dxdt = 0, \forall \zeta \in \mathcal{D} \tag{4.9}$$

4.4 广义解 VII

设 $g(x,t)\in C_0^\infty(Q_T)$，考虑定解问题:

$$\begin{cases}\Box\zeta = g(x,t),\\ \zeta(l,t)=\zeta(0,t)=0,\\ \zeta(x,T)=0,\\ \zeta_t(x,T)=0.\end{cases} \tag{4.10}$$

4.4 广义解 VIII

令 $\tau = T - t$, $\bar{\zeta}(x,\tau) = \bar{\zeta}(x, T-t) = \zeta(x,t)$，易知 $\bar{\zeta}(x,\tau)$ 在 Q_T 上适合弦振动方程的混合问题:

$$\begin{cases} \Box\bar{\zeta} = g(x, T-\tau), & 0 < x < l, 0 < \tau \leqslant T \\ \bar{\zeta}(l,\tau) = \bar{\zeta}(0,\tau) = 0, & 0 \leqslant \tau \leqslant T, \\ \bar{\zeta}(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l \\ \bar{\zeta}_\tau(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{4.11}$$

4.4 广义解 IX

由于 $g(x,t)\in C_0^\infty(Q_T)$，在边界附近为 0，因此在角点 $(0,0),(0,l)$ 上适合相容性条件:

$$\bar{\zeta}(0,0)=\bar{\zeta}_\tau(0,0)=\bar{\zeta}(l,0)=\bar{\zeta}_\tau(l,0)=0,$$

$$\Box\bar{\zeta}|_{(0,0)}=g(0,T)=0,$$

$$\Box\bar{\zeta}|_{(l,0)}=g(l,T)=0.$$

4.4 广义解 X

由定理 4.2 附注 2 知混合问题 (4.11) 存在解 $\bar{\zeta}(x,\tau)\in C^2(\bar{Q}_T)$，因此 $\zeta(x,t)=\bar{\zeta}(x,T-t)\in\mathcal{D}$ 是定解问题 (4.10) 的解，将该解代入积分等式 (4.9) 得到:

$$\iint\limits_{Q_T} ugdxdt=0,\forall g\in C_0^\infty(Q_T)$$

由第一章引理 2.1 立得 $u\equiv 0\Longrightarrow u_1=u_2.\square$

4.4 广义解 XI

定理 4.5 若 $\varphi \in C[0,l], \varphi(0)=\varphi(l)=0, \varphi'(x)$、$\psi(x)$ 在 $[0,l]$ 上分别除了有限个点以外连续，而这些点两侧存在左右极限，则定解问题 (4.7) 存在唯一的广义解，且仍可表示成级数解 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n X_n$ 的形式.

Proof. 仅需证明解的存在性.

4.4 广义解 XII

φ, ψ 可以按照特征函数系展开成级数形式:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

$$\text{且:} \|\varphi(x) - S_N(x)\|_{L_2(0,l)} \to 0, \qquad \|\psi(x) - T_N(x)\|_{L_2(0,l)} \to 0$$

$$\text{这里:} S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \qquad T_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

4.4 广义解 XIII

解如下混合问题:

$$\begin{cases} \Box u_N = 0, & Q_T \\ u_N(0,t) = u_N(l,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T \\ u_N(x,0) = S_N(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ (u_N)_t(x,0) = T_N(x), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{4.12}$$

4.4 广义解 XIV

由混合问题解的存在性定理 4.2 知它存在唯一解

$$u_N(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\left(A_n\sin\frac{an\pi}{l}t+B_n\cos\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\text{这里:}A_n=\frac{l}{an\pi}\psi_n,\ B_n=\varphi_n$$

在问题 (4.12) 的方程中，两边乘以 $\zeta(x,t)\in\mathcal{D}$ 并分部积分得到:

$$\iint\limits_{Q_T}u_N\Box\zeta\,dxdt+\int_0^l S_N\zeta_t(x,0)\,dx-\int_0^l T_N\zeta(x,0)\,dx=0$$

4.4 广义解 XV

两边令 $N \to \infty$，令 $w_N(x,t) = u(x,t) - u_N(x,t)$，可知
$\|w_N\|_{C(\bar{Q}_T)} \to 0.$

这是由于:$|w_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{l}{an\pi}\psi_n \sin\frac{an\pi}{l}t + \varphi_n \cos\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\right|$,

$$
\begin{aligned}
\text{而:}\quad \varphi_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx \\
&= \frac{2}{l}\int_0^l \left(-\varphi(x)\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\right)' + \varphi'(x)\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x dx \\
&= \frac{l}{n\pi}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi'(x)\cos\frac{n\pi}{l}x dx = \frac{l}{n\pi}\varphi_n^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow |w_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{l}{n\pi}\left(\frac{1}{a}\psi_n \sin\frac{an\pi}{l}t + \varphi_n^{(1)}\cos\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\right|
$$

$$\Longrightarrow |w_N| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{l}{n\pi}\left[\frac{1}{a}|\psi_n| + |\varphi_n^{(1)}|\right]$$

由 Hölder 不等式得：

$$|w_N| \leqslant \left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\right)^{1/2}\left[\sum_{n=N+1}^{\infty}(|\psi_n| + |\varphi_n^{(1)}|)^2\right]^{1/2}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式得：

$$|w_N| \leqslant 2\left[\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\right]^{1/2}\left[\sum_{n=N+1}^{\infty}|\psi_n|^2 + |\varphi_n^{(1)}|^2\right]^{1/2}$$

由 Bessel 不等式 go 可知上式 $\to 0$. $\square$

引理 2.4(Gronwall 不等式)

若非负函数 $G(\tau)$ 在 $[0, T]$ 上连续可微，$G(0) = 0$，且对 $\tau \in [0, T]$，有

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leqslant CG(\tau) + F(\tau), \tag{5.1}$$

其中 $C > 0$ 为常数，$F(\tau)$ 为 $[0, T]$ 上不减的非负可积函数，则

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leqslant e^{C\tau} F(\tau) \tag{5.2}$$

$$G(\tau) \leqslant C^{-1}(e^{C\tau} - 1)F(\tau) \tag{5.3}$$

back to proof

Green 公式

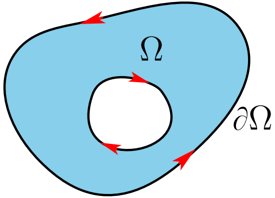


图: 区域 Ω 及其边界 ∂Ω.

$$\iint\limits_{\Omega} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} \\ P & Q \end{vmatrix} d\sigma = \oint\limits_{\partial\Omega} Pdx + Qdt \quad (5.4)$$

or

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} d\sigma = \oint\limits_{\partial\Omega} -Pdx + Qdt \quad (5.5)$$

back

Bessel 不等式

设 $(H,(\cdot,\cdot))$ 是一个内积空间，若 $\{e_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 是 H 中的正交集，则 $\forall x \in H$ 有

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |(x, e_\lambda)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

back