第四章　位势方程

主讲人　马啸

西北工业大学　应用数学系

2021 年 5 月 6 日

本章讨论位势方程

$$
-\Delta u = f \tag{0.1}
$$

其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ 称为 Laplace 算子.

$f \equiv 0$ 称为 Laplace 方程或调和方程，其连续解 u 为调和函数

§1 基本解与 Green 函数

1.1 基本解与 Green 公式

定义 1.1 基本解

若 $U \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 在广义函数意义下满足

$$-\Delta U = \delta(\mathbf{x} - \xi), \quad \mathbf{x}, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

即对于 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，有

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} U(-\Delta \varphi)\, d\mathbf{x} = \varphi(\xi).$$

则称 U 为 n 维 Laplace 方程的一个基本解，记为 $\Gamma(\mathbf{x}; \xi)$

1.1 基本解与 Green 公式 I

基本解的物理意义: 在 $\mathbf{x}=\xi$ 处放置一个单位点热源所产生的空间中的稳定的温度分布 $u(\mathbf{x};\xi)$.

求基本解的表达式 考虑近似问题 ($n=3$ 的情况下): 设球 $B_\epsilon=\{\mathbf{x}\big||\mathbf{x}-\xi|<\epsilon\}$ 中有均匀分布的热源，它通过球面 ∂B_ϵ 向 $\mathbb{R}^3\backslash B_\epsilon$ 均匀提供总量为 1 个单位的热量.

该问题满足球对称性，球面各点热流向量 $\mathbf{q}$ 的外法向分量 $\mathbf{q}\bullet\mathbf{n}$ 为常数，因此由 Fourier 热传导定律 ($\mathbf{q}=-k\nabla u_\epsilon$) 知

$$1=\oiint\limits_{\partial B_\epsilon}\mathbf{q}\bullet\mathbf{n}dS=\oiint\limits_{\partial B_\epsilon}-k\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\mathbf{n}}dS=-4\pi\epsilon^2\frac{\partial u_\epsilon}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial B_\epsilon} \tag{1.1}$$

1.1 基本解与 Green 公式 II

其中热传导系数 $k=1$. 因此，u_ϵ 满足定解问题（外问题）

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \backslash B_\epsilon \\ -4\pi\epsilon^2 \dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial B_\epsilon} = 1. \end{cases}$$

引入以 ξ 为原点的球坐标 (r,θ,φ)，由于问题的球对称性，因而可设 $u_\epsilon(\mathbf{x};\xi) = u_\epsilon(r)$，其中 $r = \left|\mathbf{x}-\xi\right|$. 问题可改写为:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial r}\right) = 0, & \epsilon < r < \infty \\ \epsilon^2 \dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial r}\Big|_{r=\epsilon} = -\dfrac{1}{4\pi}. \end{cases}$$

1.1 基本解与 Green 公式 III

其次，令 $\epsilon \to 0$，若 $u_\epsilon \to u$ 可得

$$\begin{cases} -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0, & 0 < r < \infty \\ \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \frac{\partial u_\epsilon}{\partial r}\Big|_{r=\epsilon} = -\frac{1}{4\pi}. \end{cases}$$

可得到 $u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$，利用边界条件得 $C_1 = \frac{1}{4\pi}$，若不记常数 C_2（表示初始温度），则三维 Laplace 方程的基本解可表为:

$$\Gamma(\mathbf{x};\xi) = u(\mathbf{x};\xi) = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\xi|}.$$

1.1 基本解与 Green 公式 IV

若 $n > 3$, 则 n 维 Laplace 方程基本解的表达式是

$$\Gamma(\mathbf{x};\xi) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \bullet \frac{1}{|\mathbf{x}-\xi|^{n-2}} \tag{1.2}$$

假设其中 $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ 是 n 维空间中单位球面的面积.
二维 Laplace 方程基本解的表达式是

$$\Gamma(\mathbf{x};\xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\xi|} \tag{1.3}$$

1.1 基本解与 Green 公式 V

定理 1.1 Green 第二公式

设 $\partial\Omega$ 分段光滑，$u, v \in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\bar{\Omega})$，则我们有如下 Green 公式

$$\iint\limits_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)\,dxdy = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dl$$

其中 n 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向.

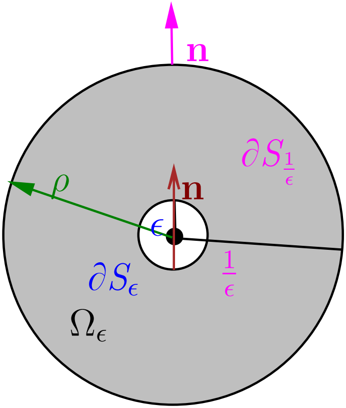
定理 1.2

由 (1.2),(1.3) 定义的函数 $\Gamma(\mathbf{x};\xi)$ 是 Laplace 方程的基本解.

Proof. 这里只证二维的情况. 由于 $\Gamma(x,y;\xi,\eta)$ 在 $(x,y)=(\xi,\eta)$ 时有奇性，考虑区域 $\Omega_\epsilon = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| \epsilon^2 < (x-\xi)^2+(y-\eta)^2 < \frac{1}{\epsilon^2}\right\}$. 对于 $\forall\varphi\in(\mathbb{R}^2)$

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \Gamma(x,y;\xi,\eta)(-\Delta\varphi(x,y))\,dxdy$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \iint\limits_{\Omega_\epsilon} \Gamma(x,y;\xi,\eta)(-\Delta\varphi(x,y))\,dxdy$$



$$\partial\Omega_\epsilon = \partial S_{\frac{1}{\epsilon}} \bigcup \partial S_\epsilon$$

取 ϵ 足够小，使得 $\varphi\big|_{\partial S_{\frac{1}{\epsilon}}} = 0$. 在 Ω_ϵ 上应用Green 第二公式有

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \Gamma(x,y;\xi,\eta)(-\Delta\varphi(x,y))\,dxdy \quad \boxed{\Delta\Gamma\big|_{\Omega_\epsilon} = 0}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \iint\limits_{\Omega_\epsilon} \varphi(x,y)\Delta\Gamma(x,y;\xi,\eta) - \Gamma(x,y;\xi,\eta)\Delta\varphi(x,y)\,dxdy$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \oint\limits_{\partial S_\epsilon} \left(\Gamma(x,y;\xi,\eta)\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial\rho} - \frac{\partial\Gamma(x,y;\xi,\eta)}{\partial\rho}\varphi(x,y)\right) dl$$

$$\left|\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint\limits_{\partial S_\epsilon} \Gamma(x,y;\xi,\eta)\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial\rho}\,dl\right|$$

$$\leqslant \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\epsilon}\oint\limits_{\partial S_\epsilon}\left|\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial\rho}\right| dl \leqslant \max|\nabla\varphi| \bullet 2\pi\epsilon\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\epsilon} \to 0(\epsilon\to 0^+)$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0^+}\oint_{\partial S_\epsilon} -\frac{\partial\Gamma(x,y;\xi,\eta)}{\partial\rho}\varphi(x,y)\,dl\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{\partial S_\epsilon}\frac{1}{\epsilon}\varphi(x,y)\,dl\\
=&\frac{1}{2\pi\epsilon}\int_{\partial S_\epsilon}\varphi(x,y)\,dl\to\varphi(\xi,\eta)\quad \square\text{当}\epsilon\to 0^+
\end{aligned}
$$

即得

$$
\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\Gamma(x,y;\xi,\eta)(-\Delta\varphi(x,y))\,dxdy=\varphi(\xi,\eta).
$$

类似地，我们可以得到如下定理

定理 1.3

设 $\partial\Omega$ 分段光滑，$u \in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\bar{\Omega})$ 则

$$
\begin{aligned}
u(\xi,\eta) = &-\iint\limits_{\Omega} \Gamma(x,y;\xi,\eta)\Delta u(x,y)\,dxdy \\
&+ \int_{\partial\Omega}\left[\Gamma(x,y;\xi,\eta)\frac{\partial u(x,y)}{\partial n} - \frac{\partial\Gamma(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}u(x,y)\right]dl.
\end{aligned}
$$

思考：如何从该定理出发，设法获得 Poisson 方程的形式解？

由 Green 第二公式出发，还可得到如下重要推论.

定义 1.2

如果 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = 0, & x \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

有非零解，则称 λ 为以上问题的特征值，相应的非零解称为特征函数，记为 u_λ.

定理 1.4

问题

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f, & (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

在 $C^1(\bar{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$ 中有解的必要条件是对于相应的齐次问题的任意特征函数 $u_\lambda(x, y)$ 都有

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y) u_\lambda(x, y)\, dxdy + \int_{\partial\Omega} \varphi(x, y) u_\lambda(x, y)\, dl = 0.$$

Pf. 在 Green 第二公式

$$\iint\limits_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)\,dxdy = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dl$$

中取 $v = u_\lambda$，则得

$$\iint\limits_{\Omega}\left[u(\lambda u_\lambda) - u_\lambda(\lambda u - f)\right]dxdy = \int_{\partial\Omega}(u0 - u_\lambda\varphi)\,dl$$

$$\iint\limits_{\Omega}u_\lambda f dxdy + \int_{\partial\Omega}u_\lambda\varphi dl = 0. \qquad \square$$

推论　对于

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = 0, & x \in \Omega \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

当 $\lambda = 0$ 时，$u_\lambda = C$，因此，Poisson 方程的 Neumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x, y) \in \Omega \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

有解的必要条件是

$$\iint\limits_{\Omega} f dx dy + \int_{\partial\Omega} \varphi dl = 0$$

1.2 Green 函数 I

本小节以二维情形为例讨论，所有结论均可推广至三维情形.

考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y), & (x,y)\in\Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x,y). \end{cases} \tag{1.4}$$

1.2 Green 函数 II

由定理 1.3 得

$$u(\xi,\eta)=\iint\limits_{\Omega}\Gamma(x,y;\xi,\eta)f\,dxdy$$
$$+\int_{\partial\Omega}\left[\Gamma(x,y;\xi,\eta)\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}-\frac{\partial\Gamma(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}\varphi(x,y)\right]dl.$$

1.2 Green 函数 III

考虑一个 Ω 上的调和函数 $g(x, y; \xi, \eta)$，对其使用 Green 第二公式,$(v = g, u = u)$

$$0 = \iint\limits_{\Omega} g(x, y; \xi, \eta) f(x, y)\, dxdy + \int_{\partial\Omega} \left[g(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} - \frac{\partial g(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} \varphi(x, y) \right] dl$$

若定义格林函数

1.2 Green 函数 IV

$G(x, y; \xi, \eta) = \Gamma(x, y; \xi, \eta) + g(x, y; \xi, \eta)$，则有

$$u(\xi, \eta) = \iint\limits_{\Omega} G(x, y; \xi, \eta) f(x, y)\, dxdy$$
$$+ \int_{\partial\Omega} \left[G(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} - \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} \varphi(x, y) \right] dl$$

1.2 Green 函数 V

为消掉未知项，我们希望 $G(x,y;\xi,\eta)\big|_{\partial\Omega}=0$，从而

$$u(\xi,\eta)=\iint\limits_{\Omega}G(x,y;\xi,\eta)f(x,y)\,dxdy-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}\varphi(x,y)\,dl \tag{1.5}$$

即，若 $u\in C^1(\bar{\Omega})\bigcap C^2(\Omega)$，则可借助 Green 函数将 u 用 f 和 φ 表示出来.

1.2 Green 函数 VI

定义 1.3

定义于 $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\setminus\{(x,y)=(\xi,\eta)\}$ 的连续函数

$$G(x,y;\xi,\eta)=\Gamma(x,y;\xi,\eta)+g(x,y;\xi,\eta)$$

称为 Green 函数.

1.2 Green 函数 VII

如果其中的 $g(x,y;\xi,\eta)\in C^2(\Omega\times\Omega)$，且 $G(x,y;\xi,\eta)$ 满足以下问题（广义函数意义下）：

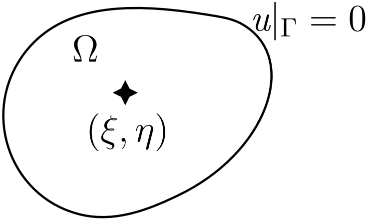
$$\begin{cases} -\Delta_{(x,y)}G(x,y;\xi,\eta)=\delta(x-\xi,y-\eta), \\ G(x,y;\xi,\eta)\big|_{\partial\Omega}=0. \end{cases}$$

1.2 Green 函数 VIII

可知 $g(x,y;\xi,\eta)$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_{(x,y)} g(x,y;\xi,\eta) = 0, \\ g\big|_{\partial\Omega} = -\Gamma(x,y;\xi,\eta)\big|_{\partial\Omega}. \end{cases} \tag{1.6}$$

附注 1 Green 函数的物理意义：a. 在 Ω 内 (ξ,η) 处放置一个单位点热源，其表面 $\partial\Omega=\Gamma$ 保持恒温 $u=0$，那么这个物体的稳定温度场就是 Green 函数.
b. 或者在表面接地的导体 Ω 内一点 (ξ,η) 处放置一个单位点电荷，所产生的电势分部也是 Green 函数.



附注 2 引入 Green 函数的意义

$$\text{为解}\begin{cases}-\Delta u = f(x,y), & (x,y)\in\Omega\\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x,y).\end{cases} \tag{1.4}$$

$$\text{可通过}u(\xi,\eta) = \iint\limits_{\Omega} G(x,y;\xi,\eta)f(x,y)\,dxdy$$

$$-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}\varphi(x,y)\,dl \tag{1.5}$$

$$\text{归结为求解}\begin{cases}-\Delta_{(x,y)}g(x,y;\xi,\eta) = 0,\\ g\big|_{\partial\Omega} = -\Gamma(x,y;\xi,\eta)\big|_{\partial\Omega}.\end{cases} \tag{1.6}$$

而 $g(x,y;\xi,\eta)$ 的问题，仅与区域有关.

定理 1.5

设 u 是问题 (1.4) 的解，则 u 可表示成 (1.5)，其中 $G(x,y;\xi,\eta)$ 是相应的 Green 函数.

附注　前面（由于 Green 第二公式）要求 $u\in C^1(\bar{\Omega})\bigcap C^2(\Omega)$. 若 $u\in C(\bar{\Omega})\bigcap C^2(\Omega)$，则可现在 Ω 的具有光滑边界的子区域 Ω_ϵ 上讨论，再令 Ω_ϵ 逼近 Ω.

Green 函数的一些性质:

1. 当 $(x, y) \in \Omega \setminus \{(\xi, \eta)\}$ 时,

$$\Delta_{(x,y)} G(x, y; \xi, \eta) = 0,$$

$$\lim_{(x,y)\to(\xi,\eta)} \frac{G(x, y; \xi, \eta)}{\Gamma(x, y; \xi, \eta)} = 1$$

$$\boxed{\Gamma(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]}}}$$

2. 当 $(x, y) \in \Omega \setminus \{(\xi, \eta)\}$ 时,

$$0 < G(x, y; \xi, \eta) \leqslant \frac{1}{2\pi} \ln \frac{d}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$$

其中 d 是 Ω 的直径.

3. Green 函数具有对称性（互易性），即

$$G(x,y;\xi,\eta)=G(\xi,\eta;x,y)$$

Proof. 任意固定两点 $P(\xi,\eta),P'(\xi',\eta')\in\Omega$，在区域 $\Omega_\epsilon=\Omega\backslash(B_\epsilon(P)\bigcup B_\epsilon(P'))$ 上应用 Green 公式得

$$0=\iint\limits_{\Omega_\epsilon}[G(x,y;\xi,\eta)\Delta G(x,y;\xi',\eta')-G(x,y;\xi',\eta')\Delta G(x,y;\xi,\eta)]dxdy$$

$$=\int_{\partial\Omega_\epsilon}\left[G(x,y;\xi,\eta)\frac{\partial G(x,y;\xi',\eta')}{\partial n}-G(x,y;\xi',\eta')\frac{G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}\right]dl.$$

$$=\int_{\partial B_\epsilon(P)\bigcup\partial B_\epsilon(P')}\left[G(x,y;\xi,\eta)\frac{\partial G(x,y;\xi',\eta')}{\partial n}-\right.$$

$$\left.G(x,y;\xi',\eta')\frac{G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}\right]dl=0$$

$$\int_{\partial B_\epsilon(P)} G(x,y;\xi',\eta')\frac{G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}\,dl=\int_{\partial B_\epsilon(P')} G(x,y;\xi,\eta)\frac{G(x,y;\xi',\eta')}{\partial n}\,dl$$

$$\int_{\partial B_\epsilon(P)} G(x,y;\xi',\eta')\frac{G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}\,dl\to G(\xi,\eta;\xi',\eta'),\quad \epsilon\to 0^+$$

$$\int_{\partial B_\epsilon(P')} G(x,y;\xi,\eta)\frac{G(x,y;\xi',\eta')}{\partial n}\,dl\to G(\xi',\eta';\xi,\eta),\quad \epsilon\to 0^+. \qquad \square$$

4. $$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}\,dl=-1.$$

Proof. 对于 Dirichlet 问题，取 $u=1$，则 $f=0,\varphi=1$，代入 (1.5) 即得 □.

1.3 圆上的 Poisson 公式 I

$$
\begin{cases}
-\Delta_{(x,y)} G(x, y; \xi, \eta) = \delta(x-\xi, y-\eta), \\
G(x, y; \xi, \eta)\big|_{\partial\Omega} = 0
\end{cases}
$$

镜像法 (静电源像法)：即在物体外虚设点源（汇），使得这些虚拟的点源（汇）以及物体内部的点源（汇）一起在全平面产生的温度（电）场恰好在物体表面上等于 0.

本节用镜像法构造圆上的 Green 函数. 设 Ω 是以原点为心, a 为半径的圆 B_a, 在圆外点 $P^*(\xi^*,\eta^*)$ 处虚设点源, 它与圆内点源的位置 $P(\xi,\eta)$ 具有某种对称性, 我们将 Green 函数表示为如下形式:

$$\begin{aligned} G(x,y;\xi,\eta) =& \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \\ &-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{C}{\sqrt{(x-\xi^*)^2+(y-\eta^*)^2}} \end{aligned}$$

再确定 (ξ^*,η^*) 的位置以及常数 C 使得

$$G(x,y;\xi,\eta)\big|_{\partial B_a}=0$$

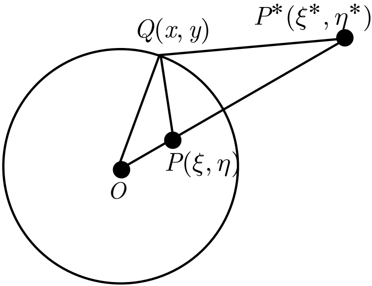
取 P^* 是 P 关于 ∂B_a 的反演点，若以极坐标表示 $P(\rho,\theta)$,$P^*(\rho^*,\theta)$，且

$$\rho\rho^* = a^2.$$

易证当 $Q(x,y) \in \partial B_a \Rightarrow$

$$\triangle\, OQP \sim \triangle\, OP^*Q$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{QP}}{\overline{QP^*}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\rho}{a}.$$



因此：

$$
\begin{aligned}
&G(x,y;\xi,\eta)\Big|_{Q\in\partial B_a}\\
=&\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\overline{QP}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{C}{\overline{QP^*}}\\
=&\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\overline{QP}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{C}{(\overline{QP}\bullet\frac{\rho}{a})}
\end{aligned}
$$

为使 $G\Big|_{\partial B_a}=0$，只需 $C=a/\rho$，即有

$$
G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\overline{QP}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{\rho\bullet\overline{QP^*}}.
$$

若 Q 的极坐标为 $Q(r,\alpha)$，则可求得

$$\begin{aligned}\overline{QP}^2 &= r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha),\\ \overline{QP^*}^2 &= r^2+(\rho^*)^2-2r\rho^*\cos(\theta-\alpha),\\ &= r^2+\frac{a^4}{\rho^2}-2\frac{ra^2}{\rho}\cos(\theta-\alpha).\end{aligned}$$

于是

$$G(r,\alpha;\rho,\theta)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\rho^2r^2+a^4-2r\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{a^2[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)]}.$$

在 ∂B_a 上有

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{r=a} = \frac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r=a} = \frac{1}{2\pi a}\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 + a^2 - 2a\rho\cos(\theta-\alpha)}.$$

于是圆上的 Dirichlet 问题的解

$$\begin{aligned} u(\rho,\theta) =& \frac{1}{4\pi}\int_0^a rdr\int_0^{2\pi}\ln\frac{\rho^2r^2 + a^4 - 2r\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{a^2[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)]}f(r,\alpha)\,d\alpha \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\varphi(\alpha)\,d\alpha. \end{aligned}$$

若 $f \equiv 0$，则上式退化为

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\varphi(\alpha)\,d\alpha. \tag{1.7}$$

称为圆上的 **Poisson** 公式.

定理 1.6

设 $\varphi\in C(\partial B_a), f\equiv 0$，则表达式 (1.7) 给出了圆上 Dirichlet 问题的解.

Proof. **(1)** 验证光滑性及方程. 对于 $\forall\delta>0$, 当 $|\rho|\leqslant a-\delta$ 时，表达式 (2.2) 的被积函数关于 θ 充分光滑，且无任何奇点，因此可在积分号下求任意次导数.

$$u(\xi,\eta)=-\oint\limits_{\partial B_a}\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial n}\varphi(x,y)\,dl.$$

$$\Delta_{(\xi,\eta)}u(\xi,\eta)=-\oint\limits_{\partial B_a}\frac{\partial}{\partial n}\Delta_{(\xi,\eta)}G(x,y,\xi,\eta)\varphi(x,y)\,dl.$$

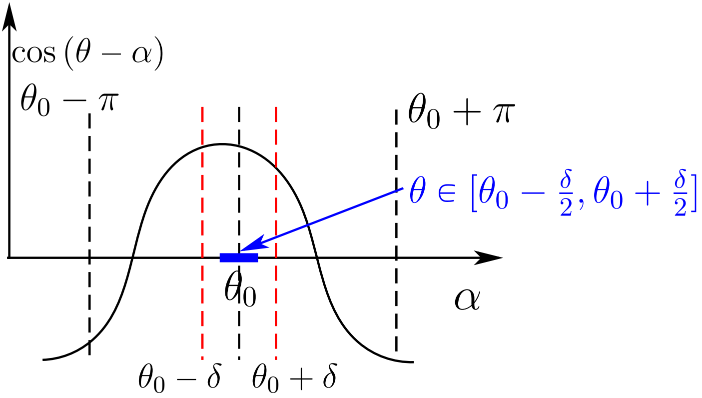
$$\Delta_{(\xi,\eta)}u(\xi,\eta)=0$$

(2) 验证边值条件由 Green 函数的性质 4 知

$$1=-\int_{\partial B_a}\frac{\partial G}{\partial n}dl=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}d\alpha$$

因此 $\forall\theta_0 \in [0, 2\pi]$

$$
\begin{aligned}
&\left|u(\rho,\theta) - \varphi(\theta_0)\right| \\
=&\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}(\varphi(\alpha)-\varphi(\theta_0))\,d\alpha\right| \\
\leqslant&\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\left|\varphi(\alpha)-\varphi(\theta_0)\right|d\alpha \\
=&\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0-\delta}+\int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta}+\int_{\theta_0+\pi}^{\theta_0+\delta} \qquad \boxed{\delta\text{待定}} \\
=&J_1+J_2+J_3.
\end{aligned}
$$



$$\theta \to \theta_0$$

$$\theta - \alpha \to \theta_0 - \alpha$$

对 $\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $|\alpha-\theta_0|<\delta$ 时，$|\varphi(\alpha)-\varphi(\theta_0)|<\epsilon/3$，选定这个 δ

$$J_2\leqslant\frac{\epsilon}{3}\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta}\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}d\alpha\leqslant\epsilon/3.$$

记 $\Phi = \max_{[0,2\pi]} |\varphi(\alpha)|$，当 $|\theta - \theta_0| < \frac{\delta}{2}$，$\rho \geqslant \frac{a}{2}$ 时

$$
\begin{aligned}
|J_1| &\leqslant 2\Phi \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0-\delta} \frac{1}{2\pi} \frac{a^2-\rho^2}{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)} d\alpha \\
&\leqslant 2\Phi \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0-\delta} \frac{1}{2\pi} \frac{a^2-\rho^2}{2a\rho\left(1-\cos\frac{\delta}{2}\right)} d\alpha \\
&\leqslant 2\Phi \frac{a^2-\rho^2}{a^2\left(1-\cos\frac{\delta}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

$\exists\delta_1>0$，当 $|\rho-a|<\delta_1$ 时 $|J_1|\leqslant\frac{\epsilon}{3}$. 同理可证 $|J_3|\leqslant\frac{\epsilon}{3}$. 因此

$$\lim_{(\rho,\theta)\to(a,\theta_0)} u(\rho,\theta)=\varphi(\theta_0). \qquad \square$$

附注 **1** 以上镜像法同样适用于 $n\geqslant 3$ 的情形。思考球区域，半空间如何构造 Green 函数？矩形区域呢？半圆呢？

附注 **2** 构造平面 Laplace 方程的 Green 函数的另一重要方法: 保角变换法.

假设 Ω 是平面上一具有光滑边界的单连通区域，$v = v(z)(z = x + iy)$ 是把 Ω 变成单位圆的保角变换. 设 ζ 是 Ω 的一个内点 $(\zeta = \xi + i\eta)$，则

$$w = w(z, \zeta) = \frac{v(z) - v(\zeta)}{1 - v(z)\overline{v(\zeta)}}.$$

是把 Ω 变成了单位圆 $|w| < 1$, 并把 $z = \zeta$ 变成 $w = 0$ 的保角变换. 可验证

$$G(x, y; \xi, \eta) = Re\left(-\frac{1}{2\pi}\ln\left[w(z, \zeta)\right]\right) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w(z, \zeta)|}$$

是问题对应的 Green 函数.

$$\begin{cases} -\Delta G = \delta(x-\xi, y-\eta), \quad (x, y) \in \Omega, \\ G|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

半圆域上的 Green 函数 I

设 $\Omega = B_a^+ = \left\{(x, y)\middle|\sqrt{x^2+y^2} < a, y > 0\right\}$，则 Green 函数应满足

$$\begin{cases} -\Delta_{(x,y)} G(x, y; \xi, \eta) = \delta(x-\xi, y-\eta), & (x, y) \in B_a^+ \\ G(x, y; \xi, \eta)\big|_{\partial B_a^+} = 0 \end{cases}$$

半圆域上的 Green 函数 II

边界条件可以写成

$$G\Big|_{\{y=0\}} = 0,$$

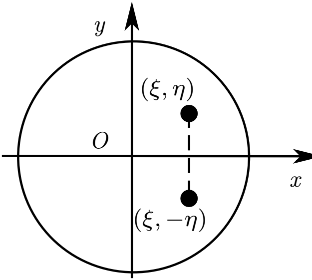
$$G\Big|_{\partial B_a \bigcap \{y>0\}} = 0$$

半圆域上的 Green 函数 III

1. $G\big|_{\{y=0\}} = 0 \quad \Rightarrow$ 关于 y 作奇开拓 $\Rightarrow$ 区域延拓为 B_a.

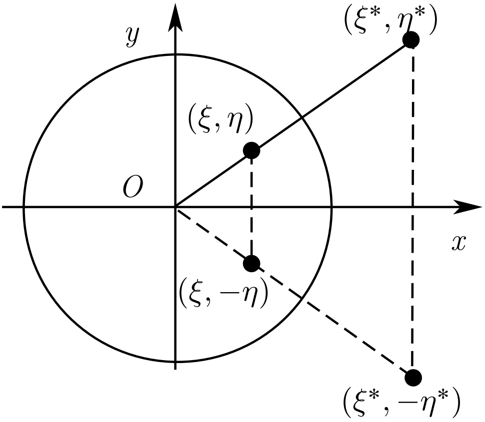
延拓后的函数记为 $\widetilde{G}(x,y;\xi,\eta)$, 满足如下方程

$$\begin{cases} -\Delta\widetilde{G} = \delta(x-\xi, y-\eta) - \delta(x-\xi, y+\eta) \\ \widetilde{G}(x,y;\xi,\eta)\big|_{\partial B_a} = 0. \end{cases}$$



2. $G\big|_{\partial B_a \bigcap \{y>0\}} = 0 \quad \Rightarrow$ 找到关于圆 B_a 的反演点，放置一定量相反电荷即可

半圆域上的 Green 函数 IV



半圆域上的 Green 函数 V

令 $G_0(x, y; \xi, \eta)$ 表示 B_a 上的 Dirichlet 问题的 Green 函数，由叠加原理得

$$\widetilde{G}(x, y; \xi, \eta) = G_0(x, y; \xi, \eta) - G_0(x, y; \xi, -\eta)$$

P216: 16(2),19,20(2)

§2 极值原理与调和函数的性质

2.1 极值原理

设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$，为有界开区域，其边界记为 $\partial\Omega$. 本节将考虑更加一般的方程

$$Lu = -\Delta u + c(x)u = f(x).$$

假定 $c(x) \geqslant 0$，当 $x \in \Omega$. 本节将估计该方程的解 u 的最大模.

引理 2.1

设 $c(x) \geqslant 0$，函数 $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ 且在 Ω 内满足 $Lu = f < 0$，则 u 不能在 Ω 内达到它在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值.

Proof. 反证法. 若 $u(x)$ 在 Ω 内某点 x^0 达到非负最大值，即

$$u(x^0) = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = M \geqslant 0.$$

$$\text{则} \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right|_{x=x^0} \leqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

$$\text{于是有} \quad Lu\big|_{x=x^0} \geqslant 0.$$

产生矛盾，引理得证.□

定理 2.2（弱极值原理）

设 $c(x) \geqslant 0$ 且在 Ω 上有界，$u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ 且在 Ω 内满足 $Lu = f \leqslant 0$，则 u 在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值必在 $\partial\Omega$ 上达到，即

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) \leqslant \sup_{x\in\partial\Omega} u^+(x).$$

其中 $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$.

Proof. 对于 $\forall \epsilon > 0$，令

$$w(x) = u(x) + \epsilon e^{ax_1}$$

其中 a 待定，易得

$$Lw = Lu + \epsilon e^{ax_1}(-a^2 + c(x)).$$

由于 $c(x)$ 在 Ω 上有界，可选取 a 足够大，使得

$$-a^2 + c(x) < 0 \Rightarrow Lw < 0.$$

由引理 2.1，w 的非负最大值只能在 $\partial\Omega$ 上达到，因此

$$\sup_{x\in\Omega} w(x) \leqslant \sup_{x\in\partial\Omega} w^+(x)$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in\Omega} u(x) \leqslant \sup_{x\in\Omega} w(x) \leqslant \sup_{x\in\partial\Omega} w^+(x)$$

$$\leqslant \sup_{x\in\partial\Omega} u^+(x) + \epsilon \sup_{\Omega} e^{ax_1}$$

令$\epsilon \to 0$即得结论． $\square$.

附注 1 如果 $c(x) \equiv 0$，则引理 2.1 与定理 2.2 中的" 非负最大值"$\Rightarrow$ " 最大值".

附注 2 极值原理的物理意义: 对于一个稳定的温度场, 如果内部有热汇, 则温度的最大值必在边界达到.

附注 3 定理 2.2 中, 若在 Ω 内 $Lu = f \geqslant 0$, 则 u 在 $\overline{\Omega}$ 上的非正最小值必在 $\partial\Omega$ 上达到. 若 $Lu \equiv 0$, 则 u 在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值与非正最小值都必在 $\partial\Omega$ 上达到.

弱极值原理只说非负最大值一定在边界上达到, 但没有说不能在内部达到（除了 $u \equiv const.$ 的情况下）。事实上的确是不能在内部达到的, 这个结论就是强极值原理.

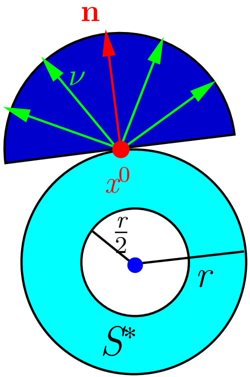
引理 2.5 (边界点引理)

设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个球，在 S 上 $c(x) \geqslant 0$ 且有界，若 $u \in C^1(\bar{S}) \bigcap C^2(S)$ 且满足条件

1. 1^0 $Lu \leqslant 0$
2. 2^0 $x^0 \in \partial S, u(x^0) \geqslant 0$, 且当 $x \in S$ 时 $u(x) < u(x^0)$, 则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=x^0} > 0,$$

其中 ν 与 ∂S 在点 x^0 的单位外法向量 n 的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$.



Proof. 由于 x^0 是最大值点，因此 $\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}\right|_{x=x^0} \geqslant 0$ 是显然的. 现在只需证明等号的不可能成立. 利用辅助函数法. 不妨设 S 以原点为球心，半径为 r. 在球壳 $S^* = \left\{x \middle| \frac{r}{2} < |x| < r\right\}$ 上考虑辅助函数

$$w(x) = u(x) - u(x^0) + \epsilon v(x).$$

其中 $\epsilon > 0$ 待定，$v(x)$ 待定若能选取 $\epsilon, v(x)$，使得 $w(x)$ 仍然在 x^0 点达到非负最大值，则

$$0 \leqslant \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{x^0} = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \epsilon\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_{x^0} \Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x^0} \geqslant -\epsilon\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{x^0}$$

因此，若能构造函数 v 使得

$$Lv \leqslant 0, \quad -\frac{\partial v}{\partial \nu}\bigg|_{x^0} > 0.$$

$$\text{取}\, v(x) = e^{-a|x|^2} - e^{-ar^2}$$

其中 $a > 0$ 是待定常数，在球壳 S^* 上，有

$$\begin{aligned} Lv &= [-4a^2|x|^2 + 2na + c(x)]\, e^{-a|x|^2} - c(x)\, e^{-ar^2} \\ &\leqslant \left[-4a^2(\frac{r}{2})^2 + 2na + C\right] e^{-a|x|^2} \end{aligned}$$

其中 $C=\sup_S c(x)$. 在上式中可取 a 足够大，以使得 $Lv<0$. 由此，我们有 $Lw<0$. 由引理 2.1 知，w 不能在球壳 S^* 的内部取到非负最大值. 在球壳的内部球面 $\partial S^*\bigcap S$，即 $|x|=\frac{r}{2}$ 上有

$$\min_{|x|=r/2}\left(u(x^0)-u(x)\right)=\beta>0.$$

因此总可选取 ϵ 充分小，使得

$$w\Big|_{\partial S^*\bigcap S}\leqslant -\beta+\epsilon v<0.$$

在球壳的外部球面 $\partial S^* \bigcap \partial S$ 上有

$$\begin{aligned} w(x) =& u(x) - u(x^0) + \epsilon v(x) \\ \leqslant& u(x^0) - u(x^0) + \epsilon v(x^0) = 0 \end{aligned}$$

并在 x^0 上达到非负最大值，由前面的讨论知

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x^0} \geqslant -\epsilon \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{x^0}$$

而

$$-\frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{x^0} = -\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\cos(\nu,\mathbf{n}) - \frac{\partial v}{\partial \tau}\cos(\nu,\tau)\Big|_{x^0} > 0$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{x^0} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\Big|_{x^0} = 2are^{-ar^2},\ \frac{\partial v}{\partial \tau}\Big|_{x^0} = 0} \quad \square$$

定理 2.4 (强极值原理)

设 Ω 是有界连通开区域，在 Ω 上 $c(x) \geqslant 0$ 且有界,$u \in C(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$ 且满足 $Lu \leqslant 0$. 若 u 在 Ω 内达到非负最大值，则 $u \equiv const.$

Proof. 记 $M=\max_{\overline{\Omega}} u(x)\geqslant 0$，考虑集合

$$E=\{x\in\Omega \big| u(x)=M\}.$$

E 相对于 Ω 是个闭集: $\Leftarrow u\in C(\Omega)$

若能证明 E 相对于 Ω 也是个开集，则根据 Ω 的连通性可知:

$E=\varnothing$:u 不能在 Ω 上达到非负最大值

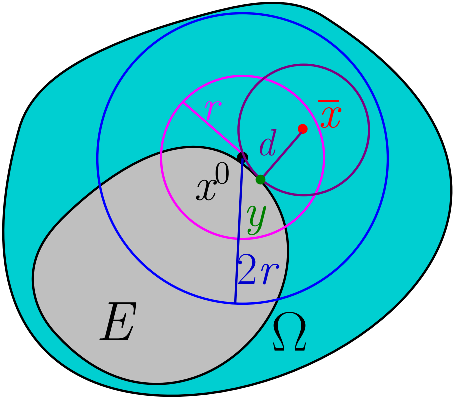
或 $E=\Omega$:$u\equiv const.$

$\forall x^0\in E$，都 $\exists r>0$，s.t.$B_{2r}(x^0)\subset\Omega$. 往证 $\forall x^0\in E$ 是内点，即 $\exists r>0$,s.t. $B_r(x^0)\subset E$.

现在用反证，假设 $\exists x^0\in E$ 不是内点，即 $\forall r>0$,

$\exists\bar{x}\in(\Omega\backslash E)\bigcap B_r(x^0)$.

记 $d = dist\{\bar{x}, \bar{E}\}$.，则易见 $d \leqslant r \Longrightarrow \quad B_d(\bar{x}) \subset B_{2r}(x^0) \subset \Omega$.



现在设 $y \in \partial B_d(\bar{x}) \bigcap E$. 由于 y 是一个内点 + 极值点 (由于 E 是闭集，$\inf_{x\in E}|x - \bar{x}|$ 的极小点 y 在 E 中)

$$\Longrightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_y = 0$$

应用边界点引理，

$(B_d(\bar{x}) \to S, y \to x^0)$

$$\Rightarrow \exists \nu, s.t. \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_y > 0$$

矛盾. 假设不成立，则 E 是一个开集.□

2.2 边值问题解的最大模估计 I

考虑 n 维位势方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \end{cases}$$

利用极值原理可得到该问题的解的最大模估计.

2.2 边值问题解的最大模估计 II

定理 2.5

设 $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega})$ 是 Dirichlet 问题的解，则

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leqslant \Phi + CF.$$

其中 $\Phi = \max_{\partial\Omega} |\varphi(x)|, F = \sup_{\Omega} |f(x)|$，$C$ 是常数，仅依赖于 n 和 Ω 的直径.

2.2 边值问题解的最大模估计 III

Proof. 不妨设区域 Ω 包含原点，令 $w(x) = z(x) \pm u(x)$，其中

$$z(x) = \frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2) + \Phi.$$

$$d = \sup_{x,y\in\Omega} |x - y| \text{是 } \Omega \text{ 的直径，容易验证}$$

$$-\Delta w = -\Delta z \pm f = F \pm f \geqslant 0,$$

$$w\big|_{\partial\Omega} \geqslant \Phi \pm \varphi \geqslant 0.$$

2.2 边值问题解的最大模估计 IV

由极值原理，在 Ω 上 $w(x) \geqslant 0$，因此

$$\max_{\overline{\Omega}} |u(x,t)| \leqslant \Phi + \frac{d^2}{2n} F. \qquad \square$$

考虑第三边值问题

$$\begin{cases} Lu = -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)u\right)\Big|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

当 $\alpha(x) \equiv 0$ 时，则以上问题退化为 Neumann 问题.

2.2 边值问题解的最大模估计 V

定理 2.6

设 $c(x) \geqslant 0, \alpha(x) \geqslant \alpha_0 > 0, u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\bar{\Omega})$ 是 (2.1) 的解，则

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leqslant C(\Phi + F)$$

其中 C 只依赖于 n, α_0, d, 而 Φ, F, d 如定理 2.5 所定义.

2.2 边值问题解的最大模估计 VI

Proof. 不妨设区域包含坐标原点，考虑如下辅助函数

$$w(x) = z(x) + \frac{\Phi}{\alpha_0} \pm u(x),$$

$$\text{其中}\, z(x) = \frac{F}{2n}\left(\frac{1+d^2}{\alpha_0} + d^2 - |x|^2\right).$$

2.2 边值问题解的最大模估计 VII

记 $\partial\Omega$ 的单位外法向 $n = (\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))$, 则 $\sum_{i=1}^n \beta_i^2(x) \equiv 1$ 在 $x \in \partial\Omega$ 上成立. 容易验算

$$
\begin{aligned}
& -\Delta z + c(x)z \geqslant F, \quad x \in \Omega, \\
& \left[\frac{\partial z}{\partial n} + \alpha(x)z\right]_{\partial\Omega} \\
= & \frac{F}{2n}\left[-2\sum_{i=1}^n x_i\beta_i(x) + \alpha(x)\left(\frac{1+d^2}{\alpha_0} + d^2 - |x|^2\right)\right]_{\partial\Omega} \\
\geqslant & \frac{F}{2n}\left[-|x|^2 - \sum_{i=1}^n \beta_i^2(x) + 1 + d^2\right]_{\partial\Omega} \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

2.2 边值问题解的最大模估计 VIII

因而

$$
\begin{aligned}
&-\Delta w + c(x)w = -\Delta z + c(x)z + c(x)\frac{\Phi}{\alpha_0} \pm f(x) \geqslant 0, \quad x \in \Omega, \\
&\left[\frac{\partial w}{\partial n} + \alpha(x)w\right]_{\partial\Omega} = \left[\frac{\partial z}{\partial n} + \alpha(x)z\right]_{\partial\Omega} + \alpha(x)\frac{\Phi}{\alpha_0} \pm \varphi(x) \geqslant 0
\end{aligned}
$$

2.2 边值问题解的最大模估计 IX

由弱极值原理,$w(x)$ 的非正最小值必在 $\partial\Omega$ 上达到. 设该最小值 <0, 且在某点 $x^0\in\partial\Omega$ 达到, 则

$$\left[\frac{\partial w}{\partial n}+\alpha(x)w\right]_{x^0}\leqslant\alpha(x^0)w(x^0)<0 \quad \boxed{\frac{\partial w}{\partial n}\leqslant 0}$$

与边界条件相矛盾, 假设最小值 $u(x^0)<0$ 不成立, 即 $w(x)|_{\bar\Omega}\geqslant 0$. 则有

$$\max_{\bar\Omega}|u(x)|\leqslant\max_{\bar\Omega}z(x)+\frac{\Phi}{\alpha_0}\leqslant\frac{F}{2n}\left(\frac{1+d^2}{\alpha_0}+d^2\right)+\frac{\Phi}{\alpha_0}\leqslant C(F+\Phi)$$

2.2 边值问题解的最大模估计 X

其中 $C = \max\left\{\frac{1}{\alpha_0}, \frac{1}{2n}\left(\frac{1+d^2}{\alpha_0} + d^2\right)\right\}$ □.

附注 由定理 2.5、2.6 的直接推论，Dirichlet 问题与 Robin 问题当 $c(x) \geqslant 0$,$\alpha(x) \geqslant \alpha_0 > 0$ 时，解是唯一的，且在最大模的意义下连续依赖于边界与方程的非齐次项.

若仅为证明 (2.1) 的解唯一，则条件 $\alpha(x) \geqslant \alpha_0 > 0$ 可减弱，但边界需附加一些条件，且 $c(x)$ 与 $\alpha(x)$ 中至少有一个不恒为 0.

2.2 边值问题解的最大模估计 XI

若 $c(x) \equiv 0, \alpha(x) \equiv 0$，则问题 (2.1) 为

$$\begin{cases} Lu = -\Delta u = f(x), & x \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \end{cases}$$

该问题的解若为 u，则 $u(x) + C$ 仍是它的解. 利用强极值原理可以证明，在区域 Ω 的边界满足一些条件时，

2.2 边值问题解的最大模估计 XII

该问题属于 $C^2(\Omega)\bigcap C^1(\bar{\Omega})$ 的解在相差一个常数的意义下唯一.

P212:1,2,5；Green 函数的性质 2

2.3 能量模估计 I

本节对位势方程的解进行能量模估计.

首先考虑如下 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

2.3 能量模估计 II

定理 2.7

设 $c(x) \geqslant c_0 > 0$，且 $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$ 是 Dirichlet 问题的解，则有估计

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{c_0}{2} \int_\Omega |u(x)|^2 dx \leqslant M \int_\Omega |f(x)|^2 dx$$

其中 M 仅依赖于 c_0.

2.3 能量模估计 III

Proof.

$$-\int_\Omega u\Delta u dx + \int_\Omega c(x)u^2 dx = \int_\Omega fu dx$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + c_0\int_\Omega u^2 dx \leqslant \frac{c_0}{2}\int_\Omega u^2 dx + \frac{1}{2c_0}\int_\Omega f^2 dx.$$

□

附注 1 利用本章下节的 Friedrichs 不等式 go，可将该定理推广至 $c(x) \geqslant 0$ 的情形.

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + c(x)\int_\Omega u^2 dx \leqslant \frac{1}{8d^2}\int_\Omega u^2 dx + \frac{4d^2}{2}\int_\Omega f^2 dx$$

$$\leqslant \frac{4d^2}{8d^2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + 2d^2\int_\Omega f^2 dx$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + 2c(x)\int_\Omega u^2 dx \leqslant 4d^2\int_\Omega f^2 dx$$

$$\frac{1}{4d^2}\int_\Omega |u|^2 dx \leqslant 4d^2\int_\Omega f^2 dx$$

附注 2 由定理 2.7 可推导出 Dirichlet 问题解的唯一性和稳定性.

附注 3 当 $c(x) \equiv 0$ 时,Dirichlet 问题描述的是边界固定、处于平衡状态的薄膜，能量估计式表示，外力做功转变为储存于薄膜的势能可以通过外力的大小估计出来.

对于第二、三边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega \\ \left[\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)u\right]_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

有如下估计

定理 2.8(留作作业)

设 $c(x) \geqslant c_0 > 0, \alpha(x) \geqslant 0, u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$ 是以上问题的解，则有估计

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{c_0}{2} \int_\Omega |u(x)|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u^2(x) dl \leqslant M \int_\Omega |f(x)|^2 dx$$

其中 M 也仅依赖于 c_0.

附注　可由定理 2.8 推导问题解的唯一性. 即齐次问题是否存在非零解.

当 $c(x) \geqslant 0, \alpha(x) \geqslant 0$, 且二者不都恒为 0, $\Longrightarrow \nabla u \equiv 0, u(x) \equiv 0$

当 $c(x) \equiv 0, \alpha(x) \equiv 0 \Longrightarrow \nabla u \equiv 0$, 齐次问题的解为常数.

2.4 调和函数的性质 I

本文以二维调和方程的解——Poisson 公式为工具讨论，本节的定理 2.9 和 2.10 可推广至三维情形.

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\varphi(\alpha)\,d\alpha.$$

定理 2.9

设 u 在 Ω 内调和，则 u 在 Ω 内解析.

Proof. $\forall P_0\in\Omega,\exists a>0$, 使得 $B_a(P_0)\subset\Omega$. 只需证明 u 在 $B_a(P_0)$ 内解析，再由 P_0 的任意性可得到 u 在 Ω 内解析.

2.4 调和函数的性质 II

不妨设 P_0 是坐标原点，由圆内 Dirichlet 问题解的唯一性可得，u 在 B_a 内任一点的值可通过 Poisson 公式标出

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\varphi(\alpha)\,d\alpha. \tag{2.2}$$

用复数坐标表示：$z=\rho e^{i\theta},\quad \zeta=ae^{ia}$.

2.4 调和函数的性质 III

Poisson 公式的核为

$$\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}=\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}=\frac{\zeta\bar{\zeta}-z\bar{z}}{(\zeta-z)(\bar{\zeta}-\bar{z})}$$

$$=-\frac{z}{z-\zeta}+\frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}=\frac{\frac{z}{\zeta}}{1-\frac{z}{\zeta}}+\frac{1}{1-\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}}}$$

2.4 调和函数的性质 IV

当 $z \in B_a$ 时，$\left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$，利用幂级数展开

$$\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 + a^2 - 2a\rho\cos(\theta - \alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}}\right)^n$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} Re\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} Re\left(\frac{\rho}{a}\right)^n e^{in(\theta-\alpha)}.$$

2.4 调和函数的性质 V

对于任意的 $\delta > 0$, 当 $\rho \leqslant a - \delta$ 时，以上级数一致收敛，因此当 $\rho \leqslant a - \delta$ 时

$$
\begin{aligned}
u(\rho,\theta) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} Re\left(\frac{\rho}{a}\right)^n e^{in(\theta-\alpha)}\right) u(a,\alpha)\,d\alpha \\
=& b_0 + 2Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{a^n}(b_n - ic_n)
\end{aligned}
$$

2.4 调和函数的性质 VI

其中

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\alpha \quad u(a,\alpha)\,d\alpha \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin n\alpha \quad u(a,\alpha)\,d\alpha \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

由级数的一致收敛性知

$$u(\rho,\theta) = b_0 + 2Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+iy)^n}{a^n}(b_n - ic_n) = \sum_{h,l} c_{hl}x^h y^l$$

同样一致收敛，因此 u 在 B_a 中解析.□

2.4 调和函数的性质 VII

定理 2.10（平均值定理）

设 $u(x,y)$ 在 Ω 内调和，对于 $\forall P_0(x_0,y_0)\in\Omega$，如果 $\overline{B_R}(P_0)\subset\Omega$。则有

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B_R(P_0)} u\,dl.$$

Proof. 不妨设 P_0 为原点，在 Poisson 公式中取 $\rho=0$ 即得 □.

定理 2.11（Liouville 定理）

在全平面上有下界（或上界）的调和函数必为常数.

2.4 调和函数的性质 VIII

Proof. 设在 $\mathbb{R}^2$ 内 $u \geqslant -M$，令 $v = u + M$，则 v 为非负调和函数，对于任意球 $B_R(0)$，有

$$(R-\rho)^2 \leqslant R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta-\alpha) \leqslant (R+\rho)^2$$

由 Poisson 公式得到

$$\begin{aligned} & v(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \\ \leqslant & \frac{R^2-\rho^2}{(R-\rho)^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\,d\alpha = \frac{R+\rho}{R-\rho}v(0,0). \end{aligned}$$

2.4 调和函数的性质 IX

同理可得

$$v(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \geqslant \frac{R-\rho}{R+\rho} v(0,0)$$

故而有

$$\frac{R-\rho}{R+\rho} v(0,0) \leqslant v(x,y) \leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho} v(0,0)$$

其中 $R > \rho = \sqrt{x^2+y^2}$，若令 $R \to \infty$ 则得到

$$v(x,y) = v(0,0). \quad \square$$

§3 变分方法 I

3.1 $H^1(\Omega)$ 空间

本节将介绍 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$，首先引入强广义微商的概念.

定义 3.1

设 $u \in L_2(\Omega)$，如果存在序列 $\{u_N\} \subset C^1(\overline{\Omega})$，当 $N \to \infty$ 时，$u_N \to u(L_2(\Omega))$ 且 $\frac{\partial u_N}{\partial x_i} \to v_i(L_2(\Omega))(i = 1, 2, \ldots, n)$，则称 u 关于 x 具有一阶强广义微商，记作 $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

§3 变分方法 II

3.1 $H^1(\Omega)$ 空间

古典连续微商（$u \in C^1(\overline{\Omega})$ 的情况下）是强广义微商

（只需取 $u_N = u$ 即可.）

定理 3.1

强广义微商是唯一的.

§3 变分方法 III
3.1 $H^1(\Omega)$ 空间

Proof. 假如不然，则存在 $\left\{u_N^{(1)}\right\},\left\{u_N^{(2)}\right\}\subset C^1(\overline{\Omega})$，使得 $N\to\infty$ 时

$$u_N^{(k)} \to u, \qquad (L_2(\Omega))$$

$$\frac{\partial u_N^{(k)}}{\partial x_i} \to v_i^{(k)}, \qquad (L_2(\Omega)), k=1,2; i=1,\dots,n$$

其中 $v_i^{(1)}$ 与 $v_i^{(2)}$ 不相等.

§3 变分方法 IV

3.1 $H^1(\Omega)$ 空间

取 $\forall\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$，由于

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial u_N^{(1)}}{\partial x_i}-\frac{\partial u_N^{(2)}}{\partial x_i}\right)\varphi\,dx=-\int_\Omega(u_N^{(1)}-u_N^{(2)})\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx$$

在等式两边令 $N\to\infty$，即得到

$$\int_\Omega(v_i^{(1)}-v_i^{(2)})\varphi\,dx=0,\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

由 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密，可得到 $v_i^{(1)}=v_i^{(2)}(a.e.\Omega)$.□

定义 3.2

$H^1(\Omega)$ 表示 $u \in L_2(\Omega)$ 且具有所有一阶强广义微商 $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), (i = 1, 2, \ldots, n)$ 的一切函数组成的空间，其中赋予范数

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left[\int_\Omega u^2 dx + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right]^{1/2}$$

从而构成了一个线性赋范空间，称为Sobolev 空间.

由上述定义，若 $u \in H^1(\Omega)$，则 $\exists \{u_N\} \subset C^1(\overline{\Omega})$，使得

$$\|u_N - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0, \quad N \to \infty.$$

即：$C^1(\overline{\Omega})$ 在 $H^1(\Omega)$ 中稠密。

引理 3.2

$H^1(\Omega)$ 是完备的，即对于 $\forall\,\{u_k\} \subset H^1(\Omega)$:

$$\|u_k - u_l\|_{H^1(\Omega)} \to 0, \quad (k, l \to \infty)$$

则 $\exists u \in H^1(\Omega)$，使得

$$u_k \to u \quad \big(H^1(\Omega)\big)$$

证明： 设 $\{u_k\}$ 是 $H^1(\Omega)$ 的基本列，则当 $k, l \to \infty$ 时，

$$\|u_k - u_l\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u_k - u_l\|_{H^1(\Omega)} \to 0,$$

$$\left\|\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u_k - u_l\|_{H^1(\Omega)} \to 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

由 $L_2(\Omega)$ 的完备性，$\exists u, v_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 使得当 $k \to \infty$ 时

$$
\begin{aligned}
&u_k \to u \quad (L_2(\Omega)) \\
&\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \to v_i \quad (L_2(\Omega)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

现在证明 v_i 是 u 的强广义导数. 由于 $u_i \in H^1(\Omega)$, 则存在 $u_k^{(k)} \in C^1(\overline{\Omega})$, 使得

$$\|u_k^{(k)} - u_k\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \frac{1}{k}.$$

因而

$$
\begin{aligned}
&\|u_k^{(k)} - u\|_{L_2(\Omega)} \\
\leqslant &\|u_k^{(k)} - u_k\|_{L_2(\Omega)} + \|u_k - u\|_{L_2(\Omega)} \\
\leqslant &\frac{1}{k} + \|u_k - u\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad k \to \infty \\
&\|\frac{\partial u_k^{(k)}}{\partial x_i} - v_i\|_{L_2(\Omega)} \\
\leqslant &\|\frac{\partial u_k^{(k)}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\|_{L_2(\Omega)} + \|\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - v_i\|_{L_2(\Omega)} \\
\leqslant &\frac{1}{k} + \|\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - v_i\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad k \to \infty
\end{aligned}
$$

由广义微商的定义，$v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}(i = 1, 2, \ldots, n)$，因而 $u \in H^1(\Omega)$.

附注 **1**　若在 $H^1(\Omega)$ 内定义内积

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

则 $H^1(\Omega)$ 是 Hilbert 空间.

附注 **2**　我们可以同定义 3.1 一样定义 $k \geqslant 1$ 阶强广义微商. 同样，我们也可用 $L_p(\Omega)(p \geqslant 1)$ 代替 $L_2(\Omega)$，在 L_p 意义下定义一个函数的各阶强广义微商.

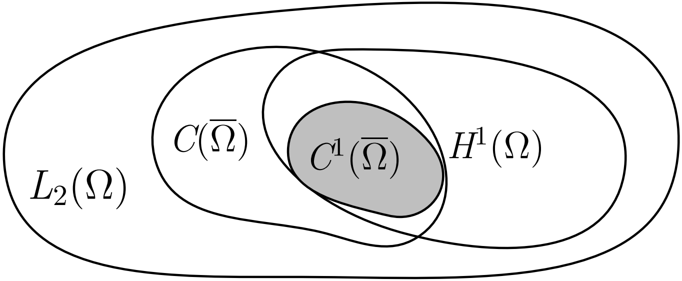
附注 3 可将定义 3.2 进一步推广，引入更一般的 Sobolev 空间 $W^{p,k}(\Omega)(p \geqslant 1, k \geqslant 1$ 是整数): 表示 $u \in L_p(\Omega)(p \geqslant 1)$ 且具有属于 $L_p(\Omega)$ 的 1 阶至 k 阶强广义微商的所有函数所组成的空间，其赋予的范数为

$$\|u\|_{W^{p,k}(\Omega)} = \left[\|u\|^p_{L_p(\Omega)} + \sum_{l=1}^{k} \sum_{a_1+\ldots+a_n=l} \left\| \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{a_1} \ldots \partial x_n^{a_n}} \right\|^p_{L_p(\Omega)} \right]^{1/p}$$

可以证明它是一个 Banach 空间，特别地，当 $p = 2$ 时，$W^{p,k}(\Omega)$ 记为 $H^k(\Omega)$.$H^k(\Omega)$ 是个 Hilbert 空间（如何定义内积?)

附注 4 关于 Sobolev 空间最深刻的结果是嵌入定理，它刻画了 Sobolev 空间与其他函数空间之间的关系.

若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开域，$\partial\Omega$ 充分光滑，$n \geqslant 2$，$H^1(\Omega)$ 与 $C^1(\overline{\Omega})$，$C(\overline{\Omega})$ 以及 $L_2(\Omega)$ 的关系如图



附注 **5** 设 $C_*^1(\overline{\Omega})$ 为以下函数集合：

$$C_*^1(\overline{\Omega}) = \{v|v \in C(\overline{\Omega}), v\text{在 } \overline{\Omega} \text{ 上具有分块连续微商}\}$$

这里的"分块连续微商"是指 v 的微商在 $\overline{\Omega}$ 上除有限块间断面外都连续，在间断面两侧存在左右极限，可证

$$C_*^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$$

附注 **6** 易证强广义微商必为弱广义微商.

还可证明: 若广义函数 u 及其弱广义微商 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 都属于 $L_2(\Omega)$, 则弱广义微商 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 也是 u 的强广义微商. 因此, $H^1(\Omega)$ 也可定义为在其中引入范数

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left[\int_\Omega u^2\,dx + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right]^{1/2}$$

的 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 的如下子空间:

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \middle| u\text{及其弱微商}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), (i = 1, 2, \ldots, n)\right\}.$$

定义 3.3

记 $C_0^1(\Omega)=\left\{u\in C^1(\overline{\Omega})\Big|u|_{\partial\Omega}=0\right\}$. $C_0^1(\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中的闭包记为 $H_0^1(\Omega)$

$\Longrightarrow H_0^1(\Omega)$ 是 $H^1(\Omega)$ 的线性子空间.

考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f, & x\in\Omega\\ u\Big|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{3.1}$$

定义 3.4

若 $\exists u \in H_0^1(\Omega)$，使得

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v),$$

其中

$$\begin{aligned} J(v) =& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega (\frac{\partial v}{\partial x_i})^2 dx - \int_\Omega fv dx \\ =& \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega fv dx \end{aligned}$$

此处 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 是一阶强广义微商

则称 u 是以上 Dirichlet 问题的广义解 (弱解).

附注　通常也可以按下述方式定义广义解：若

$\exists u \in H_0^1(\Omega)$，使得

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \boxed{(\cdot,\cdot): L_2(\Omega)\text{中内积}}$$

则称 u 是以上 Dirichlet 问题的广义解 (弱解).

这两个定义是等价的!(参考第一章 §2.2)

Q: 1) 古典解是否是广义解?

2) 广义解是否唯一? (在 $H_0^1(\Omega)$ 中)

3) 什么条件下，广义解是古典解?（正则性问题）

A: 1) 是.

定理 3.3

设 u 是 Dirichlet 问题 (3.1) 的古典解，且 $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$，则 u 是广义解.

证明　即证

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \Longrightarrow (\nabla u, \nabla v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

A: 2) 是.

引理 3.4

$\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$ 有

$$\left\| \frac{\nabla(u-v)}{2} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 = J(u) + J(v) - 2J\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

证明　简记 $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)} \to \|\cdot\|_0$，$\|\cdot\|_{H^1(\Omega)} \to \|\cdot\|_1$ 容易验证，$L_2(\Omega)$ 的范数有以下平行四边形等式：

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_0^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\|u\|_0^2 + \|v\|_0^2\right)$$

由于

$$J(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_0^2 - (f, v)$$

则

$$
\begin{aligned}
& J(u)+J(v)-2J\left(\frac{u+v}{2}\right) \\
= & \frac{1}{2}\|\nabla u\|_0^2+\frac{1}{2}\|\nabla v\|_0^2-\left\|\frac{\nabla u+\nabla v}{2}\right\|_0^2 \\
= & \left\|\frac{\nabla u-\nabla v}{2}\right\|_0^2 \\
= & \left\|\frac{\nabla(u-v)}{2}\right\|_0^2 . \qquad \square
\end{aligned}
$$

引理 3.5（Friedrichs 不等式）

设 $u \in H_0^1(\Omega)$，则

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 2d\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$$

其中 d 是 Ω 的直径. back

证明 先设 $u \in C_0^1(\Omega)$. 则定能找到一个边长为 $2d$ 且各边平行于坐标轴的正方形将 Ω 包含于其内. 不妨设该正方形为

$$\overline{Q} = \{x | 0 \leqslant x_i \leqslant 2d, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

令

$$\tilde{u} = \begin{cases} u, & x \in \overline{\Omega} \\ 0, & x \in \overline{Q} \backslash \overline{\Omega}. \end{cases}$$

显然 $\tilde{u} \in C_*^1(\overline{Q})$ 且 $\tilde{u}\big|_{\partial Q} = 0$，于是

$$\tilde{u}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_0^{x_1} \frac{\partial \tilde{u}(\xi, x_2, \ldots, x_n)}{\partial \xi} \cdot 1 \, d\xi.$$

利用 Schwarz 不等式 $|(u, v)|^2 \leqslant \|u\|_0^2 \|v\|_0^2$ 得

$$\tilde{u}^2(x) \leqslant x_1 \int_0^{x_1} \left| \frac{\partial \tilde{u}(\xi, x_2, \ldots, x_n)}{\partial \xi} \right|^2 d\xi$$

$$\leqslant 2d \int_0^{2d} \left| \frac{\partial \tilde{u}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1} \right|^2 dx_1$$

$$\int_Q \tilde{u}^2(x) \leqslant 2d \int_Q \int_0^{2d} \left| \frac{\partial \tilde{u}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1} \right|^2 dx_1\, dx$$

$$\begin{aligned}
\int_Q \tilde{u}^2(x) &\leqslant 2d \int_Q \int_0^{2d} \left| \frac{\partial \tilde{u}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1} \right|^2 dx_1\, dx \\
&\leqslant 2d \int_Q \int_0^{2d} \left| \nabla \tilde{u} \right|^2 dx_1\, dx \\
&\leqslant 2d \int_0^{2d} \int_Q \left| \nabla \tilde{u} \right|^2 dx dx_1 \leqslant 4d^2 \int_Q \left| \nabla \tilde{u} \right|^2 dx.
\end{aligned}$$

再由 $\int_Q \tilde{u}^2 dx = \int_\Omega u^2 dx$, $\int_Q \left|\nabla \tilde{u}\right|^2 dx = \int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx$ 得到

$$\|u\|_0 \leqslant 2d \|\nabla u\|_0$$

再根据 $H_0^1(\Omega)$ 是 $C_0^1(\Omega)$ 在空间 $H^1(\Omega)$ 中的闭包，得到 $\forall u \in H_0^1(\Omega)$，$\exists \{u_m\} \subset C_0^1(\Omega)$，使得 $u_m \to u \quad (H^1(\Omega))$，由上述不等式知

$$\|u_m\|_0 \leqslant 2d\|\nabla u_m\|_0$$

再令 $m \to \infty$ 立得结论 $\square$.

附注 在 $H_0^1(\Omega)$ 中，$\|u\|_1$ 与 $\|\nabla u\|_0$ 等价.

即 $\exists C_1, C_2 > 0$, 使得

$$C_1\|\nabla u\|_0 \leqslant \|u\|_1 \leqslant C_2\|u\|_1, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

定理 3.6

变分问题的解是唯一的.

证明　设 $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ 是变分问题的解，使得

$$J(u_1) = J(u_2) = m = \inf_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v)$$

由引理 3.4 知

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{\nabla(u_1-u_2)}{2}\right\|_0^2 \\
=&J(u_1)+J(u_2)-2J\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \\
\leqslant&2m-2m=0
\end{aligned}
$$

由 $\|\cdot\|_0$ 与 $\|\cdot\|_1$ 的等价性得

$$u_1=u_2 \quad (a.e.\Omega) \qquad \square$$

定理 3.7

若 $f \in L_2(\Omega)$，则变分问题的解存在.

证明

1. 证明 $J(v)$ 有下界.

$$
\begin{aligned}
J(v) =&\frac{1}{2}\|\nabla v\|_0^2-(f,v)\\
\geqslant&\frac{1}{2}\|\nabla v\|_0^2-\|f\|_0\|v\|_0\\
\geqslant&\frac{1}{2}\|\nabla v\|_0^2-2d\|f\|_0\|\nabla v\|_0\\
=&\frac{1}{2}(\|\nabla v\|_0-2d\|f\|_0)^2-2d^2\|f\|_0^2\geqslant -2d^2\|f\|_0^2.
\end{aligned}
$$

2. 因此，$J(v)$ 有下确界，记

$$m = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v)$$

由下确界的定义，存在序列 $\{v_k\} \subset H_0^1(\Omega)$，使得

$$J(v_k) \leqslant m + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

3. 下证 $\{v_k\}$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 的基本列.

$$\left\|\frac{\nabla(v_k-v_l)}{2}\right\|_0^2 = J(v_k)+J(v_l)-2J\left(\frac{v_k+v_l}{2}\right)$$
$$\leqslant m+\frac{1}{k}+m+\frac{1}{l}-2m=\frac{1}{k}+\frac{1}{l}.$$

因此有

$$\|v_k-v_l\|_1 = (\|v_k-v_l\|_0^2+\|\nabla v_k-\nabla v_l\|_0^2)^{1/2}$$
$$\leqslant (4d^2+1)^{1/2}\|\nabla v_k-\nabla v_l\|_0 \to 0 \quad (k,l\to\infty)$$

由于 $H_0^1(\Omega)$ 的完备性，知 $\exists u \in H_0^1(\Omega)$，使得

$v_k \to u \quad (H_0^1(\Omega))$, 则有

$$J(v_k) \to J(u), \quad (k \to \infty)$$

因此

$$J(u) = m = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v) \quad \square$$

A: 3) 附注　只需广义解 $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$ 即可满足.

P220:32