数学物理方程

马啸

西北工业大学 数学与统计学院

2021 年 3 月 4 日

课程介绍

- 教师：马啸（长安校区数学与统计学院楼 203,maxiao@nwpu.edu.cn）
- 期末成绩占比 100%，答疑在 QQ 群内进行（请尽量在工作日提问）
- 教材与参考资料
  1. **教材：《数学物理方程讲义》(第三版）姜礼尚等，高等教育出版社。**
  2. 参考书：《数学物理方程》第三版，谷超豪，李大潜等，高等教育出版社。
  3. 参考书：*Partial Differential Equations*, Lawrence C. Evans,American Mathematical Society; 2nd Revised edition

导论

常微分方程 (Ordinary Differential Equations:ODE) 与偏微分方程对比:

$$ODE \quad \begin{cases} \text{一维问题（例如以时间 } t \text{ 为变量）} f(t) \\ \text{方程中出现一元函数及其导数:} F\left(t, f, \frac{df}{dt}, \ldots, \frac{d^m f}{dt^m}\right) = 0 \end{cases}$$

$$PDE \quad \begin{cases} \text{多维问题（时间—空间，高维空间问题）} u(t, \mathbf{x}), u(\mathbf{x}) \\ F\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}\right) = 0 \end{cases}$$

记 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, 并定义多重指标 (Multi-index)

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m), |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$$

可以定义如下记号:

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

$Du, D^2 u, \nabla^2 u$ 表示什么意思?

PDE 相关概念与分类：

* I. **线性 (linear)**: $\sum_{|\alpha|\le N} A_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u = g(\mathbf{x})$

II. **非线性 (nonlinear)**:

1. **半线性 (semi-linear)**: 主部（含最高阶导数的部分）线性.

$$\sum_{|\alpha|=N} A_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u + A_0(\mathbf{x}, u, Du, \ldots, D^{N-1}u) = g(\mathbf{x})$$

2. **拟线性 (quasi-linear)**: 最高阶导数本身是线性的.

$$\sum_{|\alpha|=N} A_\alpha(\mathbf{x}, u, Du, \ldots, D^{N-1}u) D^\alpha u + A_0(\mathbf{x}, u, Du, \ldots, D^{N-1}u) = g(\mathbf{x})$$

3. **完全非线性 (fully nonlinear)**: 对 u 的最高阶导数非线性.

* **PDE 的阶数** =PDE 中所出现的**最高阶导数的阶数**

* **齐次 vs 非齐次**: 只包含 u 及其导数的是齐次方程，包含其他项（称为自由项）的为非齐次方程。

PDE 一般是从实际问题中经过建模而得出的一种客观事物间的微分关系式，广泛用于力、热、光、电等领域的科学研究和应用。

Q 以下是一些典型的 PDE 例子，它们分别属于哪种类型？

Navier-Stokes (N-S) equation:

$$\mathbf{u}_t - \mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{u}_x = 0$$

Black-Scholes equation:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Acoustic equation:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

Schrödinger equation:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + V\psi$$

KdV equation:

$$U_t + U_{xxx} + UU_x = 0$$

Eikonal equation:

$$\nabla T \cdot \nabla T = S(\mathbf{x})$$

Monge-Ampère equation:

$$\det(D^2 u) = f(\mathbf{x})$$

本学期学习三类基本的二阶线性 PDE:

$$\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{双曲型方程：波动方程}\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = f(t,\mathbf{x})\\ \\ \text{抛物型方程：热传导方程}\\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(t,\mathbf{x})\end{array}\right\} u(t,\mathbf{x})\text{依赖于时间 } t\text{:属于发展方程}\\ \\ \quad\text{椭圆型方程：位势方程}\\ -\Delta u = f(\mathbf{x}) \longrightarrow u(\mathbf{x})\text{只依赖于空间变量}\mathbf{x}\end{array}\right.$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$