基础知识

主讲人 马啸

西北工业大学 数学与统计学院

2021 年 3 月 4 日

场的概念

若对全空间或其中某一区域 V 中每一点 M，都有一个数量（或向量）与之对应，则称在 V 上给定了一个**数量场**（或**向量场**）. 例: 数量场：温度场、密度场；向量场：重力场、速度场... 场其实就是定义在某空间上的**函数**.

梯度场 I

梯度的概念：

$$\mathrm{grad}\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{1}$$

梯度也给出了一个向量场，称为**梯度场**.
引入梯度算子符号:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

梯度的基本性质:

梯度场 II

1. 若 u, v 是数量函数, 则

$$\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v$$
$$\nabla(u \bullet v) = u(\nabla v) + (\nabla u)v$$
$$\nabla(u^2) = 2u(\nabla u).$$

2. 若 $\mathbf{r} = (x, y, z), \varphi = \varphi(x, y, z)$，则

$$d\varphi = d\mathbf{r} \bullet \nabla\varphi.$$

3. 若 $f = f(u), u = u(x, y, z)$，则

$$\nabla f = f'(u)\nabla u.$$

散度场 I

设 $\mathbf{A}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 为空间区域 V 上的向量函数，对 V 上每一点 (x, y, z)，定义数量函数

$$D(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

称其为 $\mathbf{A}$ 在 (x, y, z) 处的**散度**, 记作

$$D(x, y, z) = div\mathbf{A}(x, y, z)$$

设 $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为曲面的单位法向量，则 $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS$ 称为**面积元素向量**.Gauss 公式可以写成如下向量形式：

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{A}\,dV = \oint\!\!\!\oint_S \mathbf{A} \bullet d\mathbf{S}$$

散度场 II

在 V 中任取一点 M_0，对上式中左边应用中值定理，

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\mathbf{A}\, dV = \mathrm{div}\mathbf{A}(M^*) \bullet \Delta V = \oiint\limits_S \mathbf{A} \bullet d\mathbf{S}$$

因此，可以用如下极限定义一点 M_0 的散度

$$\mathrm{div}\mathbf{A}(M_0) = \lim_{V \to M_0} \frac{\oiint_S \mathbf{A} \bullet d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

散度的物理意义：流速为 $\mathbf{A}$ 的不可压缩流体，经过封闭曲面 S 的流量是

$$\oiint\limits_S \mathbf{A} \bullet d\mathbf{S}$$

散度场 III

散度的极限定义式表明 $\mathrm{div}\mathbf{A}(M_0)$ 是流量对体积 V 的变化率，称它为流量密度. 若 $\mathrm{div}\mathbf{A}(M_0) > 0$，说明有流体流出该点，则称该点为**源**，相反，则表明流体在该点被吸收，并称其为**汇**. 若在向量场 $\mathbf{A}$ 中每一点有

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$$

则称 $\mathbf{A}$ 为**无源场**. 散度的向量形式为

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \nabla \bullet \mathbf{A}.$$

散度的基本性质:

1. 若 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 是向量函数，则

$$\nabla \bullet (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \bullet \mathbf{u} + \nabla \bullet v$$

散度场 IV

2. 若 φ 是数量函数，$\mathbf{F}$ 是向量函数，则

$$\nabla \bullet (\varphi \mathbf{F}) = \varphi \nabla \bullet \mathbf{F} + \mathbf{F} \bullet \nabla \varphi.$$

3. 若 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ 是一数量函数，则

$$\nabla \bullet \nabla \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi.$$

旋度场

设 $\mathbf{A}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 为空间区域 V 上的向量函数，对 V 上每一点 (x, y, z)，定义向量函数

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

称为向量函数 $\mathbf{A}$ 在 (x, y, z) 处的**旋度**，记作

$$F(x, y, z) = rot\mathbf{A}.$$

其向量形式为

$$rot\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Green 公式 I

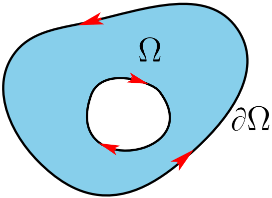

图: 区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$.

Green 公式 II

有 $P(x, y), Q(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$，则：

$$\iint\limits_{\Omega} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} d\sigma = \oint\limits_{\partial\Omega} Pdx + Qdy$$

或者由于 $dx = -\cos(\mathbf{n}, y)\, dS,\ dy = \cos(\mathbf{n}, x)\, dS$

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = \oint\limits_{\partial\Omega} Q \cos(\mathbf{n}, x) + P \cos(\mathbf{n}, y)\, dS$$

Gauss 公式 I

设 $P, Q, R \in C^1(V)$，$S = \partial V$ 则

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint\limits_{\partial V} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Gauss 公式可写为如下向量形式:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{A}\, dV = \oiint\limits_{\partial V} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{S} = \oiint\limits_{\partial V} \mathbf{A} \bullet \mathbf{n}\, dS$$

$$\text{其中}\mathbf{n} = (\cos(\mathbf{n}, x), \cos(\mathbf{n}, y), \cos(\mathbf{n}, z))$$

Gauss 公式的一些常用变体:

1. 取 $\mathbf{A} = \nabla u$

$$\iiint\limits_V \Delta u dV = \oiint\limits_{\partial V} \nabla u \bullet d\mathbf{S} = \oiint\limits_{\partial V} \nabla u \bullet \mathbf{n} dS = \oiint\limits_{S} \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

Gauss 公式 II

2. 取 $\mathbf{A} = u\nabla v$

$$\iiint\limits_V u\Delta v dV = \oiint\limits_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint\limits_V \nabla u \bullet \nabla v dV. \quad \boxed{\text{格林第一公式}} \tag{2}$$

同理，取 $\mathbf{A} = v\nabla u$ 可得

$$\iiint\limits_V v\Delta u dV = \oiint\limits_{\partial V} v\frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint\limits_V \nabla u \bullet \nabla v dV. \tag{3}$$

3. 将 (2) 与 (3) 两式相减即得:

$$\iiint\limits_V v\Delta u - u\Delta v dV = \oiint\limits_{\partial V} v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} dS \quad \boxed{\text{格林第二公式}}$$

线性泛函分析–Banach 空间 I

令 X 表示一个实线性空间.

定义 (范数 (norm))

若映射 $\|\cdot\|: X \to [0,\infty)$ 满足下述条件:

1. $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in X$ (三角不等式)
2. $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|, \forall u \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ (齐次性)
3. $\|u\| = 0$ 当且仅当 $u = 0$

则称 $|\cdot\|$ 为**范数**.

我们都假设 X 是赋范线性空间.

线性泛函分析–Banach 空间 II

定义

如果 X 中的序列 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足:

$$\lim_{k\to\infty}\|u_k-u\|=0.$$

则称该序列收敛到 $u\in X$，记为

$$u_k\longrightarrow u.$$

线性泛函分析–Banach 空间 III

定义

1. X 中的序列 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ 称为 **Cauchy 列或基本列**，如果它满足 $\forall\epsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得
$$\|u_k - u_l\| < \epsilon, \forall k, l \geqslant N.$$
2. 如果 X 中的任意 Cauchy 列均收敛，即 $\forall\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$，均 $\exists u \in X$，使得 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛到 u，则 X 称为**完备**的.
3. 完备线性的赋范空间称为 **Banach 空间（B 空间）**.

线性泛函分析–Hilbert 空间 I

用 H 表示一个实线性空间.

定义

映射 $(,):H\times H\to\mathbb{R}$ 若满足以下条件:

1. $(u,v)=(v,u)$, $\forall u,v\in H$
2. 映射 $u\mapsto(u,v)$ 对 $\forall v\in H$ 都是线性的
3. $(u,u)\geqslant 0, \forall u\in H$
4. $(u,u)=0$ 当且仅当 $u=0$

则称它是**内积**.

如果 $(,)$ 是内积，则其诱导的范数为:

$$\|u\|:=(u,u)^{1/2}, u\in H$$

线性泛函分析–Hilbert 空间 II

由 Cauchy-Schwartz 不等式可得：

$$|(u,v)| \leqslant \|u\|\|v\|, \forall u, v \in H$$

定义

一个赋予内积诱导范数的 B 空间称为 **Hilbert 空间（H 空间）**.

例

$L_2(\Omega)$ 是 H 空间，其内积为：

$$(f,g) = \int_\Omega fg dx$$

$\boxed{\text{习题}}$ 若 B 空间 X 中 Cauchy 列有：$u_n \to u$，$v_n \to v$，证明：

1. $(u_n, v_n) \to (u, v)$
2. $u_n + v_n \to u + v$

基本不等式

- **Cauchy 不等式**:
$$ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$
- **带 ϵ 的 Cauchy 不等式:**
$$ab \leqslant \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}$$
- **Hölder 不等式**: 假设 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则若 $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, 则
$$\int_\Omega |uv|\, dx \leqslant \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$
- **Cauchy-Schwarz 不等式**:
$$|x \cdot y| \leqslant \|x\| \|y\|, x, y \in \mathbb{R}^n$$