

# 第一章 方程的导出和定解条件

主讲人 马啸

西北工业大学 数学与统计学院

2021 年 3 月 4 日

# §1 守恒律

## 1.1 动量守恒与弦振动方程

- **物理模型**：一根两端固定的拉紧的均匀柔软的长度为  $l$  的细弦，在垂直于弦方向的外力作用下在平衡位置附近作微小的横振动，求弦上各点的运动规律。

# §1 守恒律

## 1.1 动量守恒与弦振动方程

- **物理模型**：一根两端固定的拉紧的均匀柔软的长度为  $l$  的细弦，在垂直于弦方向的外力作用下在平衡位置附近作微小的横振动，求弦上各点的运动规律。

# §1 守恒律

## 1.1 动量守恒与弦振动方程

- **物理模型**：一根两端固定的拉紧的均匀柔软的长度为  $l$  的细弦，在垂直于弦方向的外力作用下在平衡位置附近作微小的横振动，求弦上各点的运动规律。
- **理想假设**

# §1 守恒律

## 1.1 动量守恒与弦振动方程

- **物理模型**：一根两端固定的拉紧的均匀柔软的长度为  $l$  的细弦，在垂直于弦方向的外力作用下在平衡位置附近作微小的横振动，求弦上各点的运动规律。
- **理想假设**
  - 两端固定 边界条件

# §1 守恒律

## 1.1 动量守恒与弦振动方程

- **物理模型**：一根两端固定的拉紧的均匀柔软的长度为  $l$  的细弦，在垂直于弦方向的外力作用下在平衡位置附近作微小的横振动，求弦上各点的运动规律。

- **理想假设**

两端固定 边界条件

拉紧 弦的长度 =  $x$  轴上所占据的长度  $u(x, t), x \in [0, l]$

# §1 守恒律

## 1.1 动量守恒与弦振动方程

- **物理模型**：一根两端固定的拉紧的均匀柔软的长度为  $l$  的细弦，在垂直于弦方向的外力作用下在平衡位置附近作微小的横振动，求弦上各点的运动规律。

- **理想假设**

两端固定 边界条件

拉紧 弦的长度 =  $x$  轴上所占据的长度  $u(x, t), x \in [0, l]$

均匀柔软 线密度  $\rho = \text{const}$ ; 形变时不抵抗弯曲：各质点间的张力方向与弦的切线方向一致

# §1 守恒律

## 1.1 动量守恒与弦振动方程

- **物理模型**：一根**两端固定**的**拉紧**的**均匀柔软**的长度为  $l$  的**细弦**，在垂直于弦方向的外力作用下在平衡位置附近作**微小的横振动**，求弦上各点的运动规律。
- **理想假设**
  - 两端固定** 边界条件
  - 拉紧** 弦的长度 =  $x$  轴上所占据的长度  $u(x, t), x \in [0, l]$
  - 均匀柔软** 线密度  $\rho = \text{const}$ ；形变时不抵抗弯曲：各质点间的张力方向与弦的切线方向一致
  - 细弦** 横截面极小，与长度相比可忽略



# §1 守恒律

## 1.1 动量守恒与弦振动方程

- **物理模型**：一根**两端固定**的**拉紧**的**均匀柔软**的长度为  $l$  的**细弦**，在垂直于弦方向的外力作用下在平衡位置附近作**微小的横振动**，求弦上各点的运动规律。
- **理想假设**
  - 两端固定** 边界条件
  - 拉紧** 弦的长度 =  $x$  轴上所占据的长度  $u(x, t), x \in [0, l]$
  - 均匀柔软** 线密度  $\rho = \text{const}$ ；形变时不抵抗弯曲：各质点间的张力方向与弦的切线方向一致
  - 细弦** 横截面极小，与长度相比可忽略
  - 微小的横振动** 振动很小：振动中弦长度没有变化（具体用到再指明）

# 建模过程 1

- ① 建立坐标系, 令  $u(x, t)$  表示  $x$  点处的弦在  $t$  时刻在竖直方向上的位移
- ② 取弦上任意一段  $x_1$  到  $x_2$  作为研究对象, 分析其受力情况, 设弦上  $x$  点处  $t$  时刻受到弦的张力为  $\mathbf{T}(x, t)$ , 记  

$$T(x, t) = |\mathbf{T}(x, t)|$$
- ③ 证明  $T(x, t) \equiv \text{const.}$

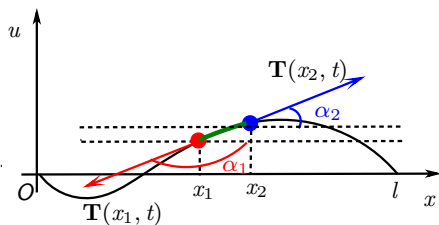


图: String

## 建模过程 2

- $T(x, t) = T(x)$ .

**方法:**证明弦段的弦长不随时间变化, 从而由胡克定律:

$$\text{Hooke's law } F = -kx, \text{ or } F(t_2) - F(t_1) = -k(S(t_2) - S(t_1))$$

知张力大小也不随时间改变.


该段弦长为:

$$S(t) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \quad (1.1)$$

由于  $\frac{\partial u}{\partial x}$  很小 ( $o(x_2 - x_1)$ ) (微小振动的内涵), 因此可认为


$$S(t) \approx x_2 - x_1. \square$$

## 建模过程 3

- $T(x) \equiv \text{const.}$  方法: 由于弦段在  $x$  方向上没有位移, 因此该方向受合力为 0.  Figure1.

$$x_1 \text{ 点处: } T_x(x_1) = -T(x_1) \cos(\pi - \alpha_1) = T(x_1) \cos \alpha_1$$

$$x_2 \text{ 点处: } T_x(x_2) = T(x_2) \cos \alpha_2$$

由微元法可知: .

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \alpha_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right]^2}} \approx 1 \Rightarrow \alpha_1 \approx \pi \end{aligned} \quad (1.2)$$

同理,  $\alpha_2 \approx 0$ .  $\cos \alpha_1 \approx -1, \cos \alpha_2 \approx 1 \Rightarrow T(x_1) = T(x_2) \equiv \text{const.} \square$

## 建模过程 4 I

4. 分析  $(t_1, t_2)$  时间段中,  $(x_1, x_2)$  的弦在  $u$  方向所受张力, 并依据动量守恒律

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \int_{\Omega} \rho(t_2) v(t_2) d\sigma - \int_{\Omega} \rho(t_1) v(t_1) d\sigma$$

列出方程.

此处因外力线密度  $F(x, t)$  而分两类情形:

- A. 外力  $F(x, t) \equiv 0$

# 建模过程 4 II

- 首先, 弦段在  $t$  时刻所受  $u$  方向外力为:

$$\begin{aligned}
 & -T(x_1) \sin(\pi - \alpha_1) + T(x_2) \sin \alpha_2 \\
 & \approx T(\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) \\
 & = T \left( \frac{\partial u(x_2, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_1, t)}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

- 其次, 微元  $x$  处的速度变化也可以求出, 即为:

$$\frac{\partial u(x, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t_1)}{\partial t}$$

## 建模过程 4 III

由动量定理, 对于弦段来说,  $(t_1, t_2)$  时段有:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} T \left( \frac{\partial u(x_2, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_1, t)}{\partial x} \right) dt &= \int_{x_1}^{x_2} \rho \left( \frac{\partial u(x, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t_1)}{\partial t} \right) dx \\
 \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx dt &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dt dx \\
 \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left( T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right) dx dt &= 0
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

由选取弦段  $[x_1, x_2]$  和时间段  $[t_1, t_2]$  的任意性, 以及被积函数的连续性, 可知:

$$T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1.4}$$

## 建模过程 5

记  $a^2 = \frac{T}{\rho}$ , 上式化为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1.5)$$

称其为不受外力作用时一维弦振动方程 (自由振荡) .

### 思考

该方程的线性性? 阶数? 齐次性?



## 建模过程 6

B. 外力  $F(x, t) \neq 0$ , 则由动量守恒律知:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} T \left( \frac{\partial u(x_2, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_1, t)}{\partial x} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \rho dx \left( \frac{\partial u(x, t_2)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t_1)}{\partial t} \right) dx \\
 & \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t) dx dt = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dt dx \\
 & \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left( T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t) - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right) dx dt = 0 \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t) - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7)$$

## 建模过程 7

记  $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}$ , 则得到外力作用下一维弦振动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t). \quad (1.8)$$

### 思考

该方程的线性性? 阶数? 齐次性?

# 定解条件

## PDE 的解

$\exists u$  满足

- 1) 具有 PDE 中所需的各阶连续偏导数;
- 2) 将  $u$  代入 PDE 中等号恒成立

$\implies u$  称为该 PDE 的解.

## Question

只有弦振动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t). \quad (1.8)$$

是否足以确定方程的解? 会不会出现多个  $u$  满足弦振动方程的情形?

# 定解条件

初始条件：弦在  $t = 0$  时刻的状态（位移、速度）

Answer

必须增加相应的**定解条件**，才能对方程定解。

首先是**初始条件**：

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in [0, l] \quad (1.9)$$

- $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ : 齐次初始条件
- 其他情形: 非齐次初始条件

# 定解条件

边界条件：弦在边界处（两个端点）的状态

- **两端固定**: 给出了弦两端点  $0, l$  处固定在水平位置, 即:

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \quad t \in [0, \infty). \quad (1.10)$$

更一般地  $u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t)$ .

称为**第一类边界条件** (**Dirichlet 边界条件**)

# 定解条件

边界条件：弦在边界处（两个端点）的状态

- **两端固定**：给出了弦两端点  $0, l$  处固定在水平位置，即：

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \quad t \in [0, \infty). \quad (1.10)$$

更一般地  $u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t)$ .

称为**第一类边界条件**（Dirichlet 边界条件）


- 弦的两端处于自由状态（可在  $u$  方向自由移动），即端点处所受张力在  $u$  方向的分量为 0，则由前文推导得：

$$-T \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = T \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad t \in [0, \infty). \quad (1.11)$$

更一般地  $-T \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \mu_1(t); T \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \mu_2(t)$ .

称为**第二类边界条件**（Neumann 边界条件）

# 边界条件：弦在边界处（两个端点）的状态

- 两端放置在弹性支承上，由胡克定律知  figure3:

$$T \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \sigma u(0, t) \quad - \quad T \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \sigma u(l, t), \quad t \in [0, \infty) \quad (1.12)$$

更一般地

$$T \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - \sigma u(0, t) = \mu_1(t), \quad -T \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} - \sigma u(l, t) = \mu_2(t).$$

称为**第三类边界条件**（Robin 边界条件）。

$\mu_1(t) = \mu_2(t) \equiv 0$  齐次边界条件

$\mu_1(t) \not\equiv 0$  or  $\mu_2(t) \not\equiv 0$  非齐次边界条件

# 定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in (0, l), t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t), & t \in [0, \infty). \end{cases} \quad (1.13)$$

以上称为弦振动方程的**混合问题**。若弦足够长，从而在所考虑的时间内，弦的端点的影响可忽略不计，可认为弦长为无穷，因此不必考虑边界条件。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in (-\infty, \infty), t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), & x \in (-\infty, \infty). \end{cases} \quad (1.14)$$

称为弦振动方程的**初值问题 (Cauchy 问题)**。



# 高维波动方程 I

类似于弦振动方程，即一维波动方程的建模过程，可以建立二维（膜振动方程：谷超豪教材 P25-P27）及三维波动方程。至此， $n$  维波动方程的形式统一为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, \infty) \quad (1.15)$$

其中  $\Omega$  为  $R^n$  中的开子集。

初始条件

$$u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = \psi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.16)$$

# 高维波动方程 II

## 边界条件

$$u(x, t)|_{\Gamma} = g(\mathbf{x}, t) \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = g(\mathbf{x}, t) \quad (1.18)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\bigg|_{\Gamma} = g(\mathbf{x}, t) \quad (1.19)$$

其中  $\Gamma = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ .

作业 P27: 1, 3, 5.

## 1.2 能量守恒与热传导方程 I

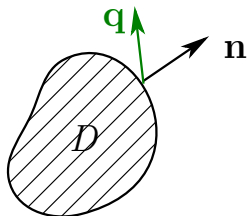
- **物理模型：**三维空间中，考虑一均匀、各向同性的物体  $\Omega$ ，假定它内部有热源，并且与周围介质存在热交换，研究物体内部温度的分布和变化.
- **能量守恒律：**

$$\boxed{E(t_2)} - \boxed{E(t_1)} = \boxed{\text{边界上的流入热量}} + \boxed{\text{热源产生的热量}}$$

- **建模过程：**

## 1.2 能量守恒与热传导方程 II

- ① 研究对象：在  $\Omega$  内取一块  $D$ ，研究时段  $[t_1, t_2]$  内  $D$  内温度  $u$  (单位  $K$ ) 的变化.  $c$  是比热容 ( $J/(kg \cdot K)$ ) ;  $\rho$  是密度;  $q$  是热流密度 ( $W/m^2$ ) ;  $f_0$  是热源强度 ( $J/(kg \cdot s)$ ) .



## 1.2 能量守恒与热传导方程 III

② 依据能量守恒律列方程:

$$\begin{aligned} & \iiint_D c\rho \left( u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1} \right) dx dy dz \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \oiint_{\partial D} \mathbf{q} \bullet \mathbf{n} dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_D \rho f_0 dx dy dz. \end{aligned} \quad (1.20)$$

由 Fourier 定律 (热流向量与温度梯度成正比, 即  $\mathbf{q} = -k\nabla u$  负号表示热量的流向与温度的增长方向相反) 知:

$$\mathbf{q} \bullet \mathbf{n} = -k \frac{\partial u}{\partial n} \quad (1.21)$$

## 1.2 能量守恒与热传导方程 IV

(1.20) 右侧第一项可化为:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \oint_{\partial D} k \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (1.22)$$

再假设  $u$  在  $\Omega \times (0, \infty)$  内具有连续偏导  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ , 应用 Gauss 公式,

$$(1.22) = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_D \nabla \cdot (k \nabla u) dx dy dz. \quad (1.23)$$

## 1.2 能量守恒与热传导方程 V

再假设  $u$  在  $\Omega \times (0, \infty)$  内具有连续偏导  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , 则进一步地, (1.20) 可化为:

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_D c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_D [\nabla \cdot (k \nabla u) + \rho f_0] dx dy dz dt \quad (1.24)$$

由于被积函数  $\in C[\Omega \times (0, \infty)]$ , 且  $[t_1, t_2]$  及  $D$  的任意性得:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f \quad (1.25)$$

其中  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ ,  $f = \frac{f_0}{c}$  ( $f \leq 0$ : 热汇;  $f \geq 0$  热源) .

上式称为**热传导方程**.



## 1.2 能量守恒与热传导方程 VI

- **附注：**在研究分子扩散过程中也会遇到类似的方程，如气体扩散、液体的渗透、半导体材料中的杂质扩散等. 称为**扩散方程**.

热传导方程	扩散方程
温度 $u$	浓度 $N$
Fourier 定律: $\mathbf{q} = -k\nabla u$	Nernst 定律 <sup>1</sup> : $\mathbf{v} = -D\nabla N$
热量守恒律	质量守恒律
$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f$	$\frac{\partial N}{\partial t} - D \Delta N = f$

# 定解条件 I

## 初始条件

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{\Omega} \quad (1.26)$$

**边界条件** ① Dirichlet 边界条件: 已知边界上的温度分布.

$$u|_{\Sigma} = g(x, y, z, t), \quad \Sigma = \partial\Omega \times [0, \infty). \quad (1.27)$$

$g$  为常数, 表示物体表面保持恒温.

② Neumann 边界条件: 已知通过  $\partial\Omega$  的热量.

$$k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = g(x, y, z, t). \quad (1.28)$$

$g \geq 0$  表示热量流入,  $g \leq 0$  表示热量流出,  $g \equiv 0$ ?

## 定解条件 II

- ③ Robin 边界条件: 已知通过  $\partial\Omega$  与周围介质有热交换  
(依据热传导实验定律: 从物体流到介质中的热量与二者温差成正比.)

$$k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = \alpha_0 (g_0 - u) \Big|_{\Sigma}. \quad (1.29)$$

或

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \right) \Big|_{\Sigma} = g(x, y, z, t). \quad (1.30)$$

其中  $g_0$  表示周围介质温度,  $\alpha_0$  表示热交换系数,  
 $\alpha = \frac{\alpha_0}{k} > 0$ ,  $g = \frac{g_0}{k} > 0$ .

## 定解条件 III

- 对某些特殊的三维问题，可取恰当的坐标系将其化归为一维或二维问题处理。

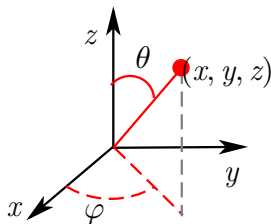
- ① 例 1: 若物体可看成一根细杆，侧表面绝热，与周围介质的热交换只在杆的两端  $x = 0$  和  $x = l$  进行；若在杆的任意一个与杆的轴线垂直的截面上，初始温度和热源强度的变化很小，那么可近似认为杆上的温度只依赖于截面的位置. 若取杆的轴线为  $x$  轴，则热传导方程可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (1.31)$$

称为一维热传导方程.

# 定解条件 IV

- ② 例 2: 一半径为  $R$  的球体, 球面各点所受周围介质的影响都相同, 球内任意一点的初始温度与热源强度只依赖于与球心的距离, 选取球心为坐标原点, 建立球坐标系。球内一点与原点距离为  $r$ ,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , 球内温度  $u(r, t)$



$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{x_i^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{r^2 - x_i^2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r}$$

# 定解条件 V

从而

$$\Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

于是  $u(r, t)$  满足如下方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = f(r, t).$$

称为**球对称问题的热传导方程**.

## 定解条件 VI

- ③ 例 3: 一个高为  $H$ , 半径为  $R$  的圆柱形物体, 引入柱坐标, 取柱体的轴线为  $z$  轴, 下底落在  $z = 0$  平面上, 假设在柱体的侧表面和上、下底上给出的边界条件只分别依赖于  $z$  和  $r$ , 且柱体初始温度和内部热源只是  $r$  和  $z$  的函数。试推导柱体内温度  $u = u(r, z, t)$  满足的**二维轴对称问题的热传导方程**。

### 思考题

热传导方程的定解问题如何定义? 你能否写出热传导方程的混合问题、Cauchy 问题?

作业 P27: 7.



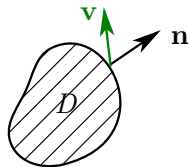
## 1.3 质量守恒与连续性方程 I

- **物理模型**: 研究区域  $\Omega$  内运动流体的质量分布变化.
- **质量守恒定律**: 任意一块区域  $D$  内流体的质量变化满足

$$m(t_2) - m(t_1) = \boxed{\text{边界上的流入质量}} + \boxed{\text{源 (汇) 生成的质量}}$$

- **建模过程**:

- ① 在  $\Omega$  内取任意一块区域  $D$ , 研究  $[t_1, t_2]$  内流体的运动规律.  $\mathbf{v}$  是流体的运动速度 ( $m/s$ ).



$-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  流体沿内法向的流速分量

$-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt$   $dt$  内流入的距离

$-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt dS$   $dt$  内通过  $dS$  流入的流体体积

$-\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt dS$   $dt$  内通过  $dS$  流入的流体质量

## 1.3 质量守恒与连续性方程 II

### ② 对 $D$ 应用质量守恒律

$$\iiint_D (\rho|_{t=t_2} - \rho|_{t=t_1}) dx dy dz = - \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_{\partial D} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

若  $\rho, \mathbf{v}$  连续可微, 则由 Gauss 公式可得

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_D \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dx dy dz = 0$$

由于被积函数  $\in C(\Omega)$ , 以及  $D$  和  $[t_1, t_2]$  的任意性, 可得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \Omega \times (0, \infty) \quad (1.32)$$

称为**连续性方程**.

## 1.3 质量守恒与连续性方程 III

### • 几个特例:

①

$$\mathbf{v} \equiv \text{const.} \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla \rho = 0 \quad (1.33)$$

② 流体不可压缩 ( $\rho \equiv \text{const.}$ )

$$\nabla \bullet \mathbf{v} = 0 \quad (1.34)$$

③ 不可压缩无旋 ( $\text{rot} \mathbf{v} = 0$ ) 运动

这种流场是有势的, 即存在函数  $\varphi$  (速度势) 使得

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi$$

## 1.3 质量守恒与连续性方程 IV

如果区域  $\Omega$  单连通, 则  $\varphi$  是一个单值函数.

若流体不可压缩, 则连续性方程化为

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

因此有

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \Delta \varphi = 0$$

表示不可压缩无旋流体的速度势  $\varphi$  适合 Laplace 方程.

作业 P27: 10.

## 预备知识

### 定义 (泛函)

从一个集合到实数的映射.

### 例

$\forall f(x) \in C([a, b])$ , 映射

$$f(x) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

是定义在  $C([a, b])$  上的一个泛函.

### 定义 (变分问题)

求某一特定泛函在定义域内的极值.

## 定义

设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^2$  中的区域, 定义在  $\Omega$  上的无穷次可微且在  $\Omega$  的边界附近为 0 的函数的全体, 记为  $C_0^\infty(\Omega)$ .

## 例: 函数

$$\rho(x, y) = \begin{cases} ke^{-1/[1-(x^2+y^2)]}, & x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

属于  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ , 其中  $k$  为常数, 选取  $k$  使得

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y) dx dy = 1.$$

## 又定义

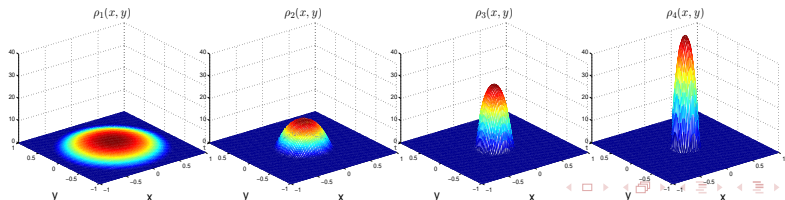
$$\rho_n(x, y) = n^2 \rho(nx, ny), \quad (n > 0)$$

则

$$\rho_n(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \rho_n(x, y) dx dy = 1.$$

且当  $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{1}{n}$  时,  $\rho_n(x, y) = 0$





## 引理

设  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^2$  中有界区域,  $f(x, y) \in C(\Omega)$ , 若  $\forall \varphi(x, y) \in C_0^\infty(\Omega)$ ,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \varphi(x, y) dx dy = 0$$

则  $f(x, y)$  在  $\Omega$  上恒为 0.

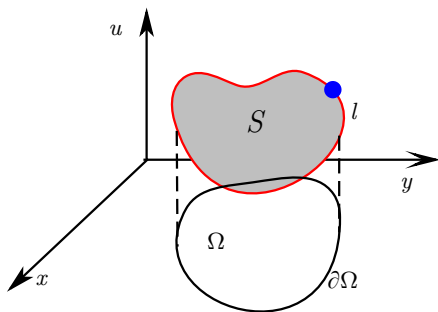
证明.

反证法.



## 2.1 极小曲面问题 I

### ● 问题描述



$$l: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ u = \varphi(s) \end{cases} \quad (0 \leq s \leq s_0)$$

$$\begin{aligned} x(0) &= x(s_0) \\ y(0) &= y(s_0) \\ \varphi(0) &= \varphi(s_0) \end{aligned}$$

求一张定义在  $\bar{\Omega}$  上的曲面  $S$ , 使得: **a.**  $S$  以  $l$  为周界; **b.**  $S$  的表面积最小.

## 2.1 极小曲面问题 II

- **变分问题：** 给定函数集合

$$M_\varphi = \{v \mid v \in C^1(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = \varphi\} \quad \boxed{\text{允许函数类}} \quad (2.1)$$

定义  $M_\varphi$  上泛函

$$J(v) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2} dx dy$$

$$\boxed{J: M_\varphi \rightarrow \mathbb{R}, \text{即定义在 } M_\varphi \text{ 上的泛函}} \quad (2.2)$$

求  $u \in M_\varphi$ , 使得

$$J(u) = \min_{v \in M_\varphi} J(v) \quad \boxed{u: \text{该 } J \text{ 在 } M_\varphi \text{ 上的极小值点}} \quad (2.3)$$

- **求解变分问题：** 设  $u$  是变分问题的解

## 2.1 极小曲面问题 III

- **必要条件:** 定义  $M_0 = \{v | v \in C^1(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = 0\}$

则  $\forall v \in M_0, \forall \epsilon \in (-\infty, +\infty)$ , 有  $u + \epsilon v \in M_\varphi$ , 定义

$$j(\epsilon) = J(u + \epsilon v) \quad j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{可微函数}$$

$$j(\epsilon) \geq j(0), \forall \epsilon \in \mathbb{R} \implies j'(0) = 0$$

计算得到:

$$\begin{aligned} j'(\epsilon) &= \iint_{\Omega} \frac{(u + \epsilon v)_x v_x + (u + \epsilon v)_y v_y}{\sqrt{1 + (u_x + \epsilon v_x)^2 + (u_y + \epsilon v_y)^2}} dx dy \\ &\implies \iint_{\Omega} \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} v_x + \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} v_y dx dy = 0 \end{aligned}$$

## 2.1 极小曲面问题 IV

假设  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , 令

$$P = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} v, \quad Q = \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} v$$

再由 Green 公式

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial\Omega} P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y) dS \quad (2.4)$$

## 2.1 极小曲面问题 V

得:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} v \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} v \right] dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right] \right\} v + \frac{u_x v_x + u_y v_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right] \right\} v dx dy \\
 &= \oint_{\partial\Omega} \frac{v}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} dS
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

## 2.1 极小曲面问题 VI

由于  $v|_{\partial\Omega} = 0$ , 且由 (2.5) 中被积函数的连续性及其  $v$  的任意性知:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right] = 0 \quad (2.6)$$

称为本变分问题的 **Euler 方程**.

$$\boxed{\text{变分问题的解}} \implies \boxed{\text{Euler 方程}} + \boxed{\text{边界条件: } u|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y).}$$

## 2.1 极小曲面问题 VII

- 充分条件: 还需证明 (2.6) 是否为充分? 计算得:

$$j''(\epsilon) = \iint_{\Omega} \frac{v_x^2 + v_y^2 + [v_y(u_x + \epsilon v_x) - v_x(u_y + \epsilon v_y)]^2}{[1 + (u_x + \epsilon v_x)^2 + (u_y + \epsilon v_y)^2]^{3/2}} dx dy$$

$$\implies j''(0) > 0$$

变分问题  $\iff$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right] = 0, & x, y \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \quad (2.7)$$



## 2.1 极小曲面问题 VIII

- **附注** Euler 方程可改写为:

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y \bullet u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

Q: 这是一个线性方程吗?

假设  $|u_x|, |u_y| \ll 1$ , 则该方程可以简化为:

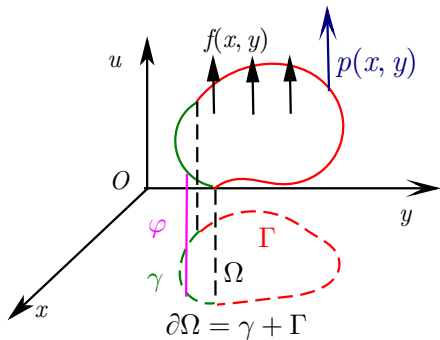
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (2.8)$$

由此, 极小曲面  $u = u(x, y)$  可近似看做 Laplace 方程的第一边值问题的解.

## 2.2 膜的平衡问题 I

### 物理模型

考虑一处于紧张状态的薄膜，它的部分边界固定在一框架上，另一部分边界上受到外力的作用；若整个薄膜在垂直于平衡位置的外力作用下处于平衡状态，问膜的形状如何？



## 2.2 膜的平衡问题 II

**最小势能原理** 受外力作用的弹性体，在满足已知边界位移约束的一切可能位移中，以达到平衡状态的位移使物体的总势能为最小.

膜达到平衡状态  $\iff$  膜的总势能最小

将物理问题转化成了一个**优化问题**.

- 1 什么是总势能？及其数学形式？
- 2 满足已知边界位移约束的一切可能位移？

**回答:**

## 2.2 膜的平衡问题 III

$$\textcircled{1} \quad \boxed{\text{总势能}} = \boxed{\text{应变能}} - \boxed{\text{外力做功}}$$

**应变能:** 把膜从水平位置转移到这个位置, 为了抵抗张力所作的功的总和.

$$\boxed{\text{应变能}} = T\Delta\sigma = T \left[ \iint_{\Omega} (\sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2} - 1) dx dy \right]$$

$$\approx \frac{T}{2} \iint_{\Omega} (v_x^2 + v_y^2) dx dy, \quad \boxed{\approx : \text{不计高阶无穷小量}}$$

$$\boxed{\text{外力做功}} = \iint_{\Omega} f(x, y) v(x, y) dx dy + \int_{\Gamma} p(s) v(s) ds.$$

## 2.2 膜的平衡问题 IV

$$\text{因此: 总势能} = J(v) = \frac{T}{2} \iint_{\Omega} (v_x^2 + v_y^2) dx dy \\ - \iint_{\Omega} f(x, y) v(x, y) dx dy - \int_{\Gamma} p(s) v(s) ds. \quad (2.9)$$

- ② a. 满足已知位移约束:  $u|_{\gamma} = \varphi$ .  
 b. 使得总势能  $J(v)$  有意义: (2.9) 中被积函数可积.

$$M_{\varphi} = \{v | v \in C^1(\bar{\Omega}), v|_{\gamma} = \varphi\}$$

## 2.2 膜的平衡问题 V

### 求解变分问题

$$J(u) = \min_{v \in M_\varphi} J(v) \quad (2.10)$$

## 2.2 膜的平衡问题 VI

**必要条件:** 定义  $M_0 = \{v | v \in C^1(\bar{\Omega}), v|_{\gamma} = 0\}$  则

$\forall v \in M_0, \forall \epsilon \in (-\infty, +\infty)$ , 有  $u + \epsilon v \in M_{\varphi}$ , 定义

$$j(\epsilon) = J(u + \epsilon v)$$

$j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 可微函数

$$j(\epsilon) \geq j(0), \forall \epsilon \in \mathbb{R} \implies j'(0) = 0$$

计算得到:

$$j'(0) = T \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy - \iint_{\Omega} f v dx dy - \int_{\Gamma} p v ds = 0 \quad (2.11)$$

称为变分问题的 **Euler** 方程的积分形式.

## 2.2 膜的平衡问题 VII

若  $u \in C^2(\Omega)$ , 由Green 第一公式得:

$$-\iint_{\Omega} (T\Delta u + f)v dx dy + \int_{\Gamma} \left( T \frac{\partial u}{\partial n} - p \right) v ds = 0 \quad (2.12)$$

**注:Green 第一公式**若  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), v \in C^1(\bar{\Omega})$ , 则有:

$$\iint_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla v dx dy = - \iint_{\Omega} \Delta u v dx dy + \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (2.13)$$



## 2.2 膜的平衡问题 VIII

Q: 上式中为什么是  $\int_{\Gamma}$  而不是  $\oint_{\partial\Omega}$ ?

由  $v \in M_0$  的任意性, 先取  $v \in C_0^\infty(\Omega) \subset M_0$ , 使得

$$\begin{aligned} & -T \iint_{\Omega} (T\Delta u + f) v dx dy = 0 \\ \implies & -T\Delta u = f. \quad (\Omega) \quad \boxed{\text{Poisson 方程}} \quad (2.14) \end{aligned}$$

## 2.2 膜的平衡问题 IX

再将  $-T\Delta u = f$  代入 (2.12) 中得:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left( T \frac{\partial u}{\partial n} - p \right) v ds &= 0, \quad \forall v \in M_0 \\ \implies T \frac{\partial u}{\partial n} &= p. \quad (\Gamma) \end{aligned} \quad (2.15)$$

变分问题的解



$$\begin{cases} -T\Delta u = f, \\ T \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = p, u|_{\gamma} = \varphi. \end{cases}$$

(2.16)

**充分条件:** 若  $u$  满足以上定解问题, 取  $\forall w \in M_\varphi$ , 由  $w - u \in M_0$  得:

$$\begin{aligned}
 & J(w) - J(u) \\
 &= \frac{T}{2} \iint_{\Omega} |\nabla(w - u)|^2 dx dy + T \iint_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla(w - u) dx dy \\
 &\quad - \iint_{\Omega} f(w - u) dx dy - \int_{\Gamma} p(w - u) ds \\
 &= \frac{T}{2} \iint_{\Omega} |\nabla(w - u)|^2 dx dy - \iint_{\Omega} (T\Delta u + f)(w - u) dx dy \\
 &\quad + \int_{\Gamma} \left( T \frac{\partial u}{\partial n} - p \right) (w - u) ds = \frac{T}{2} \iint_{\Omega} |\nabla(w - u)|^2 dx dy \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{变分问题的解}} \iff \boxed{\begin{cases} -T\Delta u = f, \\ T\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = p, u|_{\Gamma} = \varphi. \end{cases}}$$

**附注 1** 本变分问题中可知：

- 第一类边界条件  $u|_{\Gamma} = \varphi$  是作为位移约束强加在  $M_{\varphi}$  上，变分法中称为**约束边界条件**或**强制边界条件**；
- 第二类边界条件  $T\frac{\partial u}{\partial n} = p$  是作为泛函  $J(v)$  的一部分，由泛函极值  $u$  自然满足的，称第二（三<sup>2</sup>）类边界条件为**自然边界条件**。

**附注 2**

若  $\gamma \equiv \partial\Omega$ , 则  $\Gamma \equiv \emptyset$ , 变分问题等价于 Poisson 方程的第一边值问题.

若  $\Gamma \equiv \partial\Omega$ , 则  $\gamma \equiv \emptyset$ , 变分问题等价于 Poisson 方程的第二边值问题.

作业 P27: 11, P28: 14.

### 3. 定解问题的适定性

为了 PDE 的定解问题正确反映客观实际，必须有解存在，只有一个解并对定解数据连续依赖（稳定）。如果一个定解问题的解**存在、唯一、稳定**，则该定解问题是**适定**的，在数学上认为其**提法是正确的**。

### 3. 定解问题的适定性

为了 PDE 的定解问题正确反映客观实际，必须有解存在，只有一个解并对定解数据连续依赖（稳定）。如果一个定解问题的解**存在、唯一、稳定**，则该定解问题是**适定**的，在数学上认为其**提法是正确的**。

**适定性问题是 PDE 研究的核心内容！**



### 3. 定解问题的适定性

为了 PDE 的定解问题正确反映客观实际，必须有解存在，只有一个解并对定解数据连续依赖（稳定）。如果一个定解问题的解**存在、唯一、稳定**，则该定解问题是**适定**的，在数学上认为其**提法是正确的**。

**适定性问题是 PDE 研究的核心内容！**

**存在性** 在某一**给定函数类**中是否有解？

### 3. 定解问题的适定性

为了 PDE 的定解问题正确反映客观实际，必须有解存在，只有一个解并对定解数据连续依赖（稳定）。如果一个定解问题的解**存在、唯一、稳定**，则该定解问题是**适定**的，在数学上认为其**提法是正确的**。

**适定性问题是 PDE 研究的核心内容！**

**存在性** 在某一**给定函数类**中是否有解？

**唯一性** 若  $u_1, u_2$  都是 PDE 的解， $u_1 \equiv u_2$ ？ or 齐次定解问题是否只有零解？

### 3. 定解问题的适定性

为了 PDE 的定解问题正确反映客观实际，必须有解存在，只有一个解并对定解数据连续依赖（稳定）。如果一个定解问题的解**存在、唯一、稳定**，则该定解问题是**适定**的，在数学上认为其**提法是正确的**。

**适定性问题是 PDE 研究的核心内容！**

**存在性** 在某一**给定函数类**中是否有解？

**唯一性** 若  $u_1, u_2$  都是 PDE 的解， $u_1 \equiv u_2$ ？ or 齐次定解问题是否只有零解？

**稳定性** PDE 的解是否连续依赖于定解问题中的参数：

### 3. 定解问题的适定性

为了 PDE 的定解问题正确反映客观实际，必须有解存在，只有一个解并对定解数据连续依赖（稳定）。如果一个定解问题的解**存在、唯一、稳定**，则该定解问题是**适定的**，在数学上认为其**提法是正确的**。

**适定性问题是 PDE 研究的核心内容！**

**存在性** 在某一**给定函数类**中是否有解？

**唯一性** 若  $u_1, u_2$  都是 PDE 的解， $u_1 \equiv u_2$ ？ or 齐次定解问题是否只有零解？

**稳定性** PDE 的解是否连续依赖于定解问题中的参数：

- 另外，PDE 中还会研究解的正则性、渐近性、求解方法（精确解、渐近解、数值解）等内容。

# 弦的受力分析

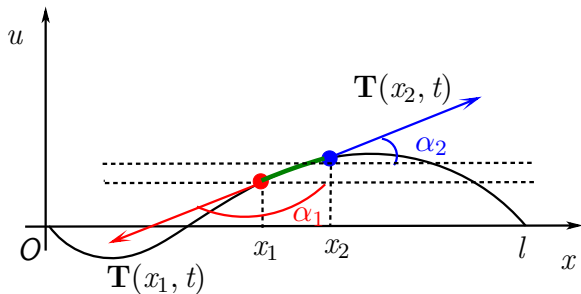


图: String

► back to page

# 张力方向角的计算

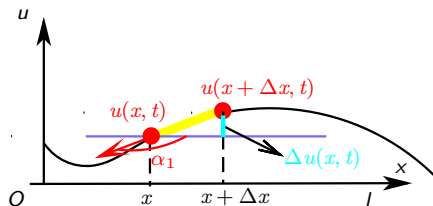


图: 张力方向角的微元法推导

► back to page

# Robin boundary condition

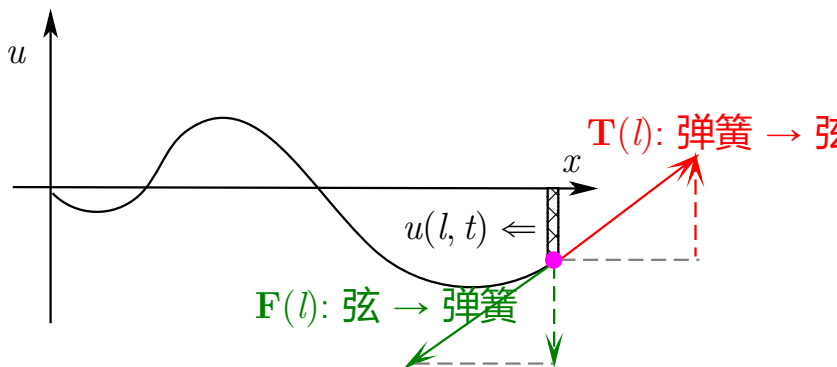


图: Robin Boundary Condition