我这里内容的顺序是老师上课的顺序，不是书本的顺序。所以页码标记至关重要

直积在书本 p11 页有讲

定理 1.3 就单纯想说明上极限只要求有无穷项，但是下极限却要求从某一项以后的所有项都要满足 p11 例 8 老师有讲，但是我认为没有比较记录。因为他说的和书本没什么区别，只是更加详细了。我不是高中生了，所以我不会记录这段内容

引入基数是为了在无限的情况下两个集合比大小 人的常识总是认为 $A > B$ $A = B$ $A < B$ 这三件事情有一件是一定发生的。那是当然了，毕竟数量可以直接数出来 但是这三件事情中的一件要一定发生。需要满足 axiom of choice 和 well-ordering theorem

$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \Leftrightarrow 存在A到B的一一映射$

p13 思考题

1. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, 记 f_1(x) = f(x), f_n(x) = f(f_{n-1}(x))(n = 2, 3, \cdots). 若存在 n_0, 使得 f_{n_0}(x) = x, 则 f$ 是$\mathbb{R}$到$f(\mathbb{R})$ 上的一一映射

证明：要证明一一映射，就得证明单射和满射

单射：如果不单射，则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f_n(x_1) = f_n(x_2)$

当 $n > n_0$ 时

$$f(x_1) = x_1$$

$$f(x_2) = x_2$$

而这与不单射冲突，所以单射

满射：即证明 f(x) 可以映射回 x

$\because f_{n_0}(x) = f_{n_0}\left(f_{n_0-1}(x)\right)$

令$f_{n_0-1}(x) = y$

则$f_{n_0}(y) = x$

所以满射

2. 不存在 Q 上的连续函数 f, 它在无理数集 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 上是一一映射，而在 $\mathbb{Q}$ 上则不是一一映射

证明：连续函数要么单调，要么不单调。如果单调。那么在有理数集上就双射了，不满足在有理数上不是双射这个条件。所以这个函数肯定不是单调的。既然不是单调的，那么就肯定有最值 $a, b \in \mathbb{Q}, f(a) = f(b)$ 这个是满足在 QQ 上不是一一映射。根据 Rolle’s Theorem，极值点左边一个无理数 x1 的值肯定可以在极值点右边找到对因一个 x2 使得 x1 = x2 这里 x2 不能是无理数，因为 x2 如果是无理数的话就和无理数单射冲突了，所以这里 x2 必须得是有理数 但是在这个区间中，有理数的势是远小于无理数的势的。所以总是有无理数找不到对应的有理数。但是这个无理数总是需要有东西对应。所以只能对因一个无理数，和单射冲突

3. $f : X \to Y$ 是满射当且仅当对任意的真子集 $B \subset Y$ 有 $f(f^{-1}(B)) = B$

先证明单射: 如果不是单射，那么我们可以在 B 中找到两个数 x1, x2 使得 $f(x_1) = f(x_2)$ 但是 $f^{-1}(f(x_1))$ 就会对应两个值了，要么 x1 要么 x2 所以和$f^{-1}(f(B)) = B$ 矛盾，得到$f(x)$ 是单射

再证明满射

如果 $f(x)$ 不是满射，我们取 $A = Y \setminus B$ 既然不是满射，我们可以得到 $\forall y \in A\ f^{-1}(y) \in X$ 不妨令 $y_1 \in A$ 则 $f^{-1}(y_1) = x_1, x_1 \in A$ 由于不满射，所以 $f(x_1) = y_2, y_2 \in B$ 即 $f^{-1}(f(y_1)) = y_2, y_1 \in A, y_2 \in B$ 直接和后面的矛盾了。所以 $f: X \to Y$ 是满射

但是我整个写完，也没感觉证明这个单射的必要

老师在讲这道题之前还讨论了几个有意思的问题

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$A_i \subset \mathbb{R}$

$f(\bigcup\limits_{i\in N} A_i) = \bigcup\limits_{i\in N} f(A_i)$

这个东西成立吗？ 只要 f 是一个映射，这个结论一定成立。 可以证明一下。要证明两个集合相等。就是要证明两个集合互为子集 老师说是$f(\bigcup\limits_{i\in N} A_i) \supset \bigcup\limits_{i\in N} f(A_i)$ 容易证明，那么我们就先说明左边包含右边 因为可以把右边拆出来，每一个$f(A_i)$ 都被 $f(\bigcup\limits_{i\in N} A_i)$ 包含，所以它们的并，肯定也被包含 那么反过来呢？

存在$y \in \bigcup\limits_{i\in N} f(A_i)$ 一定能找到一个 x 使得 $x \in \bigcup\limits_{i\in N} A_i$ 当 $x \in A_i$ 时，对应的 $y \in f(A_i)$ 而 $f(A_i) \in \bigcup\limits_{i\in N} f(A_i)$

但是这个交集的结论转成交集就不一定成立了 对任意的$A, B \subset X$, 有$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ 可以让左边交为空，而右边有交集。 而，如果想要这个等式可以成立。只要满足 f 是单射就行了，这就是第 4 题的ii 想告诉我们的

好，现在继续看思考题第 4 题。老师在第 4 题前讲这些内容就是为了第 4 题做铺垫的 这里由 $i \to ii$ 其实条件过强了。其实只要满足 f 是单射就可以证明了。

首先，我们可以得到的一个结论就是 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ 这个是无论是否单射都能成立的。只要是个映射，都能成立 我先把这个的结论证明一下。 let

$$y \in f(A \cap B)$$

this means there exists an $x \in A \cap B$ such that

$$y = f(x)$$

since $x \in A$, we know $y = f(x) \in f(A)$ since $x \in B$, we know $y = f(x) \in f(B)$ Because y is in both $f(A)$ and $f(B)$, we have

$$y \in f(A) \cap f(B)$$

Therefore, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ is always true

其实就是说，不管从左边取哪一个元素，那个元素一定可以在右边找到。在 windows 上写中文太痛苦了。我以后会尽量用英文和符号来表达。除非由大段的文字要写 好，要说明两边相等，我们还需要证明右边是左边的子集。 老师的说法不好。不如我下面说的iii 的反证法清晰。直接看我iii 中用反证法说明的。如果单射，那么一定是从两个集合中取到相同的数，而这个相同的数的集合就是 A 与 B 的交集 由此$i \to ii$ 就被证明了 iii 这里可以直接使用ii 的结论

Of course, you can prove by contradiction. If the right side is not $\varnothing$

When you say $y \in f(A) \cap f(B)$, this still means there’s an $a \in A$ and an $b \in B$ with $f(a) = y \wedge f(b) = y$

Because the function is injective, we know that a and b must be the same elemen.

Therefore, the single pre-image x must belong to both A and B, which means $x \in A \cap B$.

这个iv 其实更加好证明了
$B \setminus A = (B \setminus A) \cap X$
$f(B) \setminus f(A) = (f(B) \setminus f(A)) \cap Y$
直接就可以套用ii 中的式子 这个从$iv \to i$ 其实也是可以直接反证法，如果不是单射，这个等式就不成立了。
最后可以总结一下。一般这种互相成立的都是$i \to ii \to iii \to iv \to i$ 这样证明一圈下来，不用两两互相证明。因为效果是一样的。 满射其实在这里面一点用都没有

定理 1.5 (**Cantor-Bernstein 定理**) 若集合X与Y 的某个真自己对等，Y与 X 的某个真子集对等，则$X \sim Y$
这个定理说明了 $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$
$\overline{\overline{X}} \geq \overline{\overline{Y}}$
$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$
这三个等式，一定会有一个发生 这里一个是有势，一个是这里用的是 $\leq$ 与 $\geq$
如果这里使用的是 $<$ 与 $>$ 就不行 这个定理说的就是 $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$
$\overline{\overline{X}} > \overline{\overline{Y}}$
这两件事情是一定不可能同时发生的 这个和这两件事情一定有一件会发生是两回事

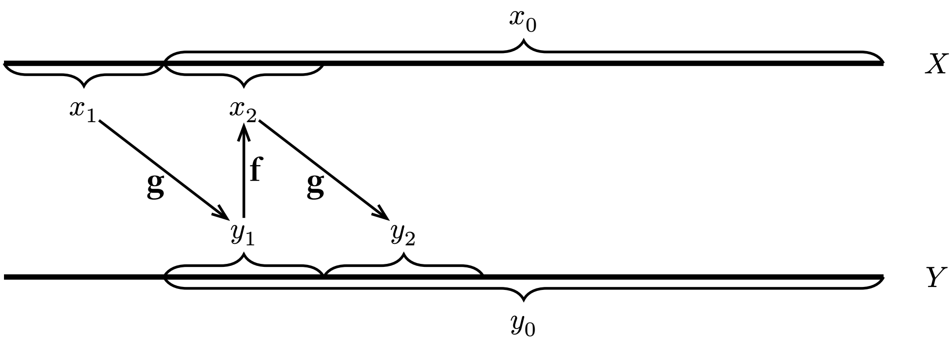
如果
$\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$
$\overline{\overline{X}} \geq \overline{\overline{Y}}$
这两件事情同时发生了，那么说明
$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$

现在证明定理 1.5 老师的证明方法和书本的方案不同。我这里说一下老师的证明方案。
老师的证明方法和郑维行的是一样的，他们的这个方法和夏道行的方法其实是同一个意思，只是用的变量名字和画的图不同罢了
程其襄和夏道行的是一样的。徐森林的第二种证法也是这个。
徐森林的第一个其实就是我们现在这个周民强的方法，直接用了 Banach 的结论
我这里专门把这个证明重新写一遍，是因为我当时其实是有一个疑惑的。而解开这个疑惑的就是我下面这句:
这个东西的证明最重要的是能够合理应用这两个对等。

先把变量初始化一下 😋
$x_0 \subsetneq X$
$y_0 \subsetneq Y$

由题目给出的条件，我们定义两个双射
$x_0 \xleftrightarrow{f} Y$
$y_0 \xleftrightarrow{g} X$

好，下面令
$x_1 = X \setminus x_0$



下面的我就不继续画了，等我什么时候成为 typst 高手再说吧
我当时的疑惑在于从$y_1 \mapsto x_2$ 这段，因为y_1 这个时候是在y_0 中的。 诶这个时候就会有小聪明会说了，我们上面不是有定义了一个映射了吗?
$y_0 \xleftrightarrow{g} X$
这不就说明 y_1 可以映射到整个X 上的某个区间了?
对于这个看法，我只能说，你是对的!你非常敏锐，这不就说明x_2 不一定会在x_0，也可能与x_1 有交集。
这就是我专门把这个题目自己写一遍证明的原因了。
注意，我们其实是有两个双射， 我们还有一个
$x_0 \xleftrightarrow{f} Y$
这个双射可以让处于Y 中的y_1 映射到x_0 上
我当时的问题就是，为什么不使用
$y_0 \xleftrightarrow{g} X$
这个映射，这个映射也是成立的吧?为什么不使用这个映射呢?
这个映射成立，没有问题
就是因为这个映射成立，所以我们其实可以得到将y_1 双射到X 上可以有别的区间， 不仅仅是现在的这个在x_0 中的区间。 (当然，我现在只能找到y_1通过 g 来对应到x_1，是一个x_2 以外的区间。其他的我就真不知道怎么找了)
但是。使用这个映射，无法得到我们希望得到的东西。所以我们不采用这个映射。
仅此而已。 明明使用f 是没有问题的，而且还可以得到我们想要的结论，为什么不用呢?
至于详细证明什么我，我就不再写了，书上都有。

p17 思考题
1.

这个是不对的，我想到的是
$A_1 = N$
$A_2 = \{-1, -2, -3, N\}$
$B_1 = N$
$B_2 = \{-1, N\}$
老师给的例子是 $A_1 \sim A_2 \sim$ 偶数 $B_1 \sim$ 奇数 $B_2 \sim$ 自然数

1.14 幂集 $\mathscr{P}$

这个例一有点抽象 如果$A \subset B$ 那么 $f(A) \subset f(B)$ 难道不是一定成立的吗? 直接把 B 看成 A 并上余集 不就好了 直接就是 $A \cup A^c = B$ and $f(A) \subset (f(A) \cup f(A^c))$ 感觉这个条件给了和没一样 但是我问了 ai 说是集合的映射和函数的映射是不一样的，在幂集上是从集合到集合的映射。 这个 S 我直观上知道是对的，这个东西会需要专门说明是对的吗? 这个证明看懂了.我之只能说值得多看几遍

思考题:
5.

第一个单射直接用 x1 x2 让他们对应的 y 相同，那么 g(y) 唯一，所以 x1 = x2 这个满射也很容易证明。在 X 中找一个点，不在 g 的值域上，使得映射不成立就好了

$A \sim B \Rightarrow ? A \cup C \sim B \cup C$

only if $C \cap A = \varnothing, C \cap B = \varnothing$

$A \sim B \Rightarrow ? A \cap C \sim B \cap C$

p17
3. 若$A \subset B$且$A \sim (A \cup C)$，试证明$B \sim (B \cup C)$.

$B \cup C = B \cup (C \setminus B)$

$B = A \cup (B \setminus A)$

$A \cup C = A \cup (A \setminus C)$

$\therefore B \cup C = A \cup (B \setminus A) \cup C \setminus B$

$\because B \cup C = (B \setminus A) \cup A \cup C \setminus B$

$\because C \setminus B$

关于集合大小的讨论，看老师视频

例 10 还是不会证明

定理 1.10 的证明，我并不满意,这只能说明，他这种排法不行，没能证明其他的排法不行 1.12 的证明我不是很能理解，先记下来吧

p19 例 10 的证明里面用到了有理数的稠密性

可数和可列看书本 p20，例 10 上面那句话

书本 p11 他这里例一，为什么有这个结论 书本 p11 md 这个论文在第 93 卷，不在第 78 卷书上的标记是有误的 他这个例 2 为什么上积分和下积分不同，难道无理数就是比有理数小吗?

13 页的这个 V.Volterra 做出的可微函数是哪一个 同一元这个我也不理解