

我这里内容的顺序是老师上课的顺序，不是书本的顺序。所以页码标记至关重要

直积在书本 p11 页有讲

定理 1.3 就单纯想说明上极限只要求有无穷项，但是下极限却要求从某一项以后的所有项都要满足 p11 例 8 老师有讲，但是我认为没有比较记录。因为他说的和书本没什么区别，只是更加详细了。我不是高中生了，所以我不会记录这段内容

引入基数是为了在无限的情况下两个集合比大小 人的常识总是认为 $A > B$ $A = B$ $A < B$ 这三件事情有一件是一定发生的。那是当然了，毕竟数量可以直接数出来 但是这三件事情中的一件要一定发生。需要满足 axiom of choice 和 well-ordering theorem

$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \Leftrightarrow$ 存在 A 到 B 的一一映射

p13 思考题

1. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 记 $f_1(x) = f(x)$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) (n = 2, 3, \dots)$. 若存在 n_0 , 使得 $f_{n_0}(x) = x$, 则 f 是 \mathbb{R} 到 $f(\mathbb{R})$ 上的一一映射

证明: 要证明一一映射, 就得证明单射和满射

单射: 如果不单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f_n(x_1) = f_n(x_2)$

当 $n > n_0$ 时

$$f(x_1) = x_1$$

$$f(x_2) = x_2$$

而这与不单射冲突, 所以单射

满射: 即证明 $f(x)$ 可以映射回 x

$$\because f_{n_0}(x) = f_{n_0}(f_{n_0-1}(x))$$

$$\text{令 } f_{n_0-1}(x) = y$$

$$\text{则 } f_{n_0}(y) = x$$

所以满射

2. 不存在 \mathbb{Q} 上的连续函数 f , 它在无理数集 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 上是一一映射, 而在 \mathbb{Q} 上则不是一一映射

证明: 连续函数要么单调, 要么不单调。如果单调。那么在有理数集上就双射了, 不满足在有理数上不是双射这个条件。所以这个函数肯定不是单调的。既然不是单调的, 那么就肯定有最值 $a, b \in \mathbb{Q}, f(a) = f(b)$ 这个是满足在 \mathbb{Q} 上不是一一映射。根据 Rolle' s Theorem, 极值点左边一个无理数 x_1 的值肯定可以在极值点右边找到对因一个 x_2 使得 $x_1 = x_2$ 这里 x_2 不能是无理数, 因为 x_2 如果是无理数的话就和无理数单射冲突了, 所以这里 x_2 必须得是有理数 但是在这个区间中, 有理数的势是远小于无理数的势的。所以总是有无理数找不到对应的有理数。但是这个无理数总是需要有东西对应。所以只能对因一个无理数, 和单射冲突

3. $f: X \rightarrow Y$ 是满射当且仅当对任意的真子集 $B \subset Y$ 有 $f(f^{-1}(B)) = B$

先证明单射: 如果不是单射, 那么我们可以在 B 中找到两个数 x_1, x_2 使得 $f(x_1) = f(x_2)$ 但是 $f^{-1}(f(x_1))$ 就会对应两个值了, 要么 x_1 要么 x_2 所以和 $f^{-1}(f(B)) = B$ 矛盾, 得到 $f(x)$ 是单射

再证明满射

如果 $f(x)$ 不是满射, 我们取 $A = Y \setminus B$ 既然不是满射, 我们可以得到 $\forall y \in A f^{-1}(y) \in X$ 不妨令 $y_1 \in A$ 则 $f^{-1}(y_1) = x_1, x_1 \in A$ 由于不满射, 所以 $f(x_1) = y_2, y_2 \in B$ 即 $f^{-1}(f(y_1)) = y_2, y_1 \in A, y_2 \in B$ 直接和后面的矛盾了。所以 $f: X \rightarrow Y$ 是满射

但是我整个写完, 也没感觉证明这个单射的必要

老师在讲这道题之前还讨论了几个有意思的问题

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A_i \subset \mathbb{R}$$

$$f\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) = \bigcup_{i \in N} f(A_i)$$

这个东西成立吗? 只要 f 是一个映射, 这个结论一定成立。可以证明一下。要证明两个集合相等。就是要证明两个集合互为子集 老师说是 $f\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) \supset \bigcup_{i \in N} f(A_i)$ 容易证明, 那么我们就先说明左边包含右边 因为可以把右边拆出来, 每一个 $f(A_i)$ 都被 $f\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right)$ 包含, 所以它们的并, 肯定也被包含 那么反过来呢?

存在 $y \in \bigcup_{i \in N} f(A_i)$ 一定能找到一个 x 使得 $x \in \bigcup_{i \in N} A_i$ 当 $x \in A_i$ 时, 对应的 $y \in f(A_i)$ 而 $f(A_i) \in \bigcup_{i \in N} f(A_i)$

但是这个交集的结论转成交集就不一定成立了 对任意的 $A, B \subset X$, 有 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ 可以让左边交为空, 而右边有交集。而, 如果想要这个等式可以成立。只要满足 f 是单射就行了, 这就是第 4 题的 *ii* 想告诉我们的

好, 现在继续看思考题第 4 题。老师在第 4 题前讲这些内容就是为了第 4 题做铺垫的 这里由 $i \rightarrow ii$ 其实条件过强了。其实只要满足 f 是单射就可以证明了。

首先, 我们可以得到的一个结论就是 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ 这个是无论是否单射都能成立的。只要是个映射, 都能成立 我先把这个的结论证明一下。let

$$y \in f(A \cap B)$$

this means there exists an $x \in A \cap B$ such that

$$y = f(x)$$

since $x \in A$, we know $y = f(x) \in f(A)$ since $x \in B$, we know $y = f(x) \in f(B)$ Because y is in both $f(A)$ and $f(B)$, we have

$$y \in f(A) \cap f(B)$$

Therefore, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ is always true

其实就是说, 不管从左边取哪一个元素, 那个元素一定可以在右边找到。在 windows 上写中文太痛苦了。我以后会尽量用英文和符号来表达。除非由大段的文字要写好, 要说明两边相等, 我们还需要证明右边是左边的子集。老师的说法不好。不如我下面说的 *iii* 的反证法清晰。直接看我 *iii* 中用反证法说明的。如果单射, 那么一定是从两个集合中取到相同的数, 而这个相同的数的集合就是 A 与 B 的交集 由此 $i \rightarrow ii$ 就被证明了 *iii* 这里可以直接使用 *ii* 的结论

Of course, you can prove by contradiction. If the right side is not \emptyset

When you say $y \in f(A) \cap f(B)$, this still means there' s an $a \in A$ and an $b \in B$ with $f(a) = y \wedge f(b) = y$

Because the function is injective, we know that a and b must be the same elemen.

Therefore, the single pre-image x must belong to both A and B , which means $x \in A \cap B$.

这个 iv 其实更加好证明了

$$B \setminus A = (B \setminus A) \cap X$$

$$f(B) \setminus f(A) = (f(B) \setminus f(A)) \cap Y$$

直接就可以套用 ii 中的式子 这个从 $iv \rightarrow i$ 其实也是可以直接反证法, 如果不是单射, 这个等式就不成立了。

最后可以总结一下。一般这种互相成立的都是 $i \rightarrow ii \rightarrow iii \rightarrow iv \rightarrow i$ 这样证明一圈下来, 不用两两互相证明。因为效果是一样的。满射其实在这里面一点用都没有

定理 1.5 (Cantor-Bernstein 定理) 若集合 X 与 Y 的某个真自己相等, Y 与 X 的某个真子集相等, 则 $X \sim Y$

这个定理说明了 $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$

$$\overline{\overline{X}} \geq \overline{\overline{Y}}$$

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$$

这三个等式, 一定会有一个发生 这里一个是有势, 一个是这里用的是 \leq 与 \geq

如果这里使用的是 $<$ 与 $>$ 就不行 这个定理说的就是 $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$

$$\overline{\overline{X}} > \overline{\overline{Y}}$$

这两件事情是一定不可能同时发生的 这个和这两件事情一定有一件会发生是两回事

如果

$$\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$$

$$\overline{\overline{X}} \geq \overline{\overline{Y}}$$

这两件事情同时发生了, 那么说明

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$$

1.14 幂集 \mathcal{P}

这个例一有点抽象 如果 $A \subset B$ 那么 $f(A) \subset f(B)$ 难道不是一定成立的吗? 直接把 B 看成 A 并上余集 不就好了 直接就是 $A \cup A^c = B$ and $f(A) \subset (f(A) \cup f(A^c))$ 感觉这个条件给了和没一样 但是我问了 ai 说是集合的映射和函数的映射是不一样的, 在幂集上是从集合到集合的映射。这个 S 我直观上知道是对的, 这个东西会需要专门说明是对的吗? 这个证明看懂了.我之只能说值得多看几遍

思考题:

5.

第一个单射直接用 $x_1 x_2$ 让他们对应的 y 相同, 那么 $g(y)$ 唯一, 所以 $x_1 = x_2$ 这个满射也很容易证明。在 X 中找一个点, 不在 g 的值域上, 使得映射不成立就好了

1.15 对等关系

$$A \sim B \Rightarrow? A \cup C \sim B \cup C$$

only if $C \cap A = \emptyset, C \cap B = \emptyset$

$$A \sim B \Rightarrow? A \cap C \sim B \cap C$$

p15 引理 1.4 若有 可以直接分解, 不使用 Cantor-Bernstein 来证明 老师的方法, 我等下看视频再自己理解一下, 我现在用不动点先证明一遍 因为题目是存在, 所以我们的目标就是找到这么一个函数。这个题目条件满足 Knaster-Tarski 定理, 所以可以找到那么一个函数, 使得 $f(S) = X \setminus g(Y \setminus f(S))$

p17

3. 若 $A \subset B$ 且 $A \sim (A \cup C)$, 试证明 $B \sim (B \cup C)$.

$$B \cup C = B \cup (C \setminus B)$$

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

$$A \cup C = A \cup (A \setminus C)$$

$$\therefore B \cup C = A \cup (B \setminus A) \cup C \setminus B$$

$$\therefore B \cup C = (B \setminus A) \cup A \cup C \setminus B$$

$$\therefore C \setminus B$$

关于集合大小的讨论, 看老师视频

例 10 还是不会证明

定理 1.10 的证明, 我并不满意, 这只能说明, 他这种排法不行, 没能证明其他的排法不行 1.12 的证明我不是很能理解, 先记下来吧

p19 例 10 的证明里面用到了有理数的稠密性

可数和可列看书本 p20, 例 10 上面那句话

书本 p11 他这里例一, 为什么有这个结论 书本 p11 md 这个论文在第 93 卷, 不在第 78 卷书上的标记是有误的 他这个例 2 为什么上积分和下积分不同, 难道无理数就是比有理数小吗?

13 页的这个 V.Volterra 做出的可微函数是哪一个 同一元这个我也不理解