p13 思考题

1. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 记$f_1(x)=f(x), f_n(x)=f(f_{n-1}(x))(n=2,3,\cdots)$.若存在$n_0$, 使得$f_{n_0}(x)=x$, 则$f$ 是$\mathbb{R}$到$f(\mathbb{R})$ 上的一一映射

证明： 要证明一一映射，就得证明单射和满射

单射：如果不单射，则存在 $x_1\neq x_2$ 使得 $f_n(x_1)=f_n(x_2)$

当 $n > n_0$ 时

$$f(x_1)=x_1$$

$$f(x_2)=x_2$$

而这与不单射冲突，所以单射

满射：即证明 f(x) 可以映射回 x

$\because f_{n_0}(x)=f_{n_0}\left(f_{n_0-1}(x)\right)$

令$f_{n_0-1}(x)=y$

则$f_{n_0}(y)=x$

所以满射

2. 不存在 Q 上的连续函数 f, 它在无理数集 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 上是一一映射，而在 $\mathbb{Q}$ 上则不是一一映射

证明： 连续函数要么单调，要么不单调。如果单调。那么在有理数集上就双射了，不满足在有理数上不是双射这个条件。所以这个函数肯定不是单调的。既然不是单调的，那么就肯定有最值 $a,b\in\mathbb{Q}, f(a)=f(b)$ 这个是满足在 QQ 上不是一一映射。根据 Rolle's Theorem，极值点左边一个无理数 x1 的值肯定可以在极值点右边找到对因一个 x2 使得 x1 = x2 这里 x2 不能是无理数，因为 x2 如果是无理数的话就和无理数单射冲突了，所以这里 x2 必须得是有理数 但是在这个区间中，有理数的势是远小于无理数的势的。所以总是有无理数找不到对应的有理数。但是这个无理数总是需要有东西对应。所以只能对因一个无理数，和单射冲突

3. $f:X\to Y$ 是满射当且仅当对任意的真子集 $B\subset Y$ 有 $f(f^{-1}(B))=B$

先证明单射: 如果不是单射，那么我们可以在 B 中找到两个数 x1, x2 使得 $f(x_1)=f(x_2)$ 但是 $f^{-1}(f(x_1))$ 就会对应两个值了，要么 x1 要么 x2 所以和$f^{-1}(f(B))=B$ 矛盾，得到$f(x)$ 是单射

再证明满射

如果 $f(x)$ 不是满射，我们取 $A=Y\setminus B$ 既然不是满射，我们可以得到 $\forall y\in A\ f^{-1}(y)\in X$ 不妨令 $y_1\in A$ 则 $f^{-1}(y_1)=x_1, x_1\in A$ 由于不满射，所以 $f(x_1)=y_2, y_2\in B$ 即 $f^{-1}(f(y_1))=y_2, y_1\in A, y_2\in B$ 直接和后面的矛盾了。所以 $f:X\to Y$ 是满射

但是我整个写完，也没感觉证明这个单射的必要

老师在讲这道题之前还讨论了几个有意思的问题

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$A_i\subset\mathbb{R}$

$f(\bigcup\limits_{i\in N}A_i)=\bigcup\limits_{i\in N}f(A_i)$

这个东西成立吗？ 只要 f 是一个映射，这个结论一定成立。 可以证明一下。要证明两个集合相等。就是要证明两个集合互为子集 老师说是$f(\bigcup\limits_{i\in N}A_i)\supset\bigcup\limits_{i\in N}f(A_i)$ 容易证明，那么我们就先

说明左边包含右边 因为可以把右边拆出来，每一个$f(A_i)$ 都被 $f(\bigcup\limits_{i\in N} A_i)$ 包含，所以它们的并，肯定也被包含 那么反过来呢？

$A\bigcup B = A\bigcup(A\setminus B)$ 不妨令 $C = A\setminus B$ 同理

$$f(A)\bigcup f(B) = f(A)\bigcup((f(A)\setminus f(B)))$$

不妨令 $f(D) = f(A)\setminus f(B)$ 由

对任意的$A, B\subset X$, 有$f(A\bigcap B) = f(A)\bigcap f(B)$ 这个成立吗？这个就不成立了。 可以让左边交为空，而右边有交集。只要这个函数不是单射就好了

只要单射，不要求满射

1.15 对等关系

$A\sim B\Rightarrow ?\, A\bigcup C\sim B\bigcup C$

only if $C\cap A = \varnothing\wedge C\cap B = \varnothing$

$A\sim B\Rightarrow ?\, A\bigcap C\sim B\bigcap C$

p17
3. 若$A\subset B$且$A\sim(A\bigcup C)$, 试证明$B\sim(B\bigcup C)$.

$B\bigcup C = B\bigcup(C\setminus B)$

$B = A\bigcup(B\setminus A)$

$A\bigcup C = A\bigcup(A\setminus C)$

$\therefore B\bigcup C = A\bigcup(B\setminus A)\bigcup C\setminus B$

$\because B\bigcup C = (B\setminus A)\bigcup A\bigcup C\setminus B$

$\because C\setminus B$

可数和可列是同一件事

书本 p11 他这里例一，为什么有这个结论 书本 p11 md 这个论文在第 93 卷，不在第 78 卷书上的标记是有误的 他这个例 2 为什么上积分和下积分不同，难道无理数就是比有理数小吗？

13 页的这个 V.Volterra 做出的可微函数是哪一个 同一元这个我也不理解