

我这里内容的顺序是老师上课的顺序，不是书本的顺序。所以页码标记至关重要

直积在书本 p11 页有讲

定理 1.3 就单纯想说明上极限只要求有无穷项，但是下极限却要求从某一项以后的所有项都要满足 p11 例 8 老师有讲，但是我认为没有比较记录。因为他说的和书本没什么区别，只是更加详细了。我不是高中生了，所以我不会记录这段内容

引入基数是为了在无限的情况下两个集合比大小 人的常识总是认为 $A > B$ $A = B$ $A < B$ 这三件事情有一件是一定发生的。那是当然了，毕竟数量可以直接数出来 但是这三件事情中的一件要一定发生。需要满足 axiom of choice 和 well-ordering theorem

$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \Leftrightarrow$ 存在 A 到 B 的一一映射

p13 思考题

1. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 记 $f_1(x) = f(x)$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) (n = 2, 3, \dots)$. 若存在 n_0 , 使得 $f_{n_0}(x) = x$, 则 f 是 \mathbb{R} 到 $f(\mathbb{R})$ 上的一一映射

证明: 要证明一一映射, 就得证明单射和满射

单射: 如果不单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f_n(x_1) = f_n(x_2)$

当 $n > n_0$ 时

$$f(x_1) = x_1$$

$$f(x_2) = x_2$$

而这与不单射冲突, 所以单射

满射: 即证明 $f(x)$ 可以映射回 x

$$\because f_{n_0}(x) = f_{n_0}(f_{n_0-1}(x))$$

$$\text{令 } f_{n_0-1}(x) = y$$

$$\text{则 } f_{n_0}(y) = x$$

所以满射

2. 不存在 \mathbb{Q} 上的连续函数 f , 它在无理数集 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 上是一一映射, 而在 \mathbb{Q} 上则不是一一映射

证明: 连续函数要么单调, 要么不单调。如果单调。那么在有理数集上就双射了, 不满足在有理数上不是双射这个条件。所以这个函数肯定不是单调的。既然不是单调的, 那么就肯定有最值 $a, b \in \mathbb{Q}, f(a) = f(b)$ 这个是满足在 \mathbb{Q} 上不是一一映射。根据 Rolle's Theorem, 极值点左边一个无理数 x_1 的值肯定可以在极值点右边找到对因一个 x_2 使得 $x_1 = x_2$ 这里 x_2 不能是无理数, 因为 x_2 如果是无理数的话就和无理数单射冲突了, 所以这里 x_2 必须得是有理数 但是在这个区间中, 有理数的势是远小于无理数的势的。所以总是有无理数找不到对应的有理数。但是这个无理数总是需要有东西对应。所以只能对因一个无理数, 和单射冲突

3. $f: X \rightarrow Y$ 是满射当且仅当对任意的真子集 $B \subset Y$ 有 $f(f^{-1}(B)) = B$

先证明单射: 如果不是单射, 那么我们可以找到两个数 x_1, x_2 使得 $f(x_1) = f(x_2)$ 但是 $f^{-1}(f(x_1))$ 就会对应两个值了, 要么 x_1 要么 x_2 所以和 $f^{-1}(f(B)) = B$ 矛盾, 得到 $f(x)$ 是单射

再证明满射

如果 $f(x)$ 不是满射, 我们取 $A = Y \setminus B$ 既然不是满射, 我们可以得到 $\forall y \in A f^{-1}(y) \in X$ 不妨令 $y_1 \in A$ 则 $f^{-1}(y_1) = x_1, x_1 \in A$ 由于不满射, 所以 $f(x_1) = y_2, y_2 \in B$ 即 $f^{-1}(f(y_1)) = y_2, y_1 \in A, y_2 \in B$ 直接和后面的矛盾了。所以 $f: X \rightarrow Y$ 是满射

但是我整个写完，也没感觉证明这个单射的必要

老师在讲这道题之前还讨论了几个有意思的问题

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A_i \subset \mathbb{R}$$

$$f\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) = \bigcup_{i \in N} f(A_i)$$

这个东西成立吗？只要 f 是一个映射，这个结论一定成立。可以证明一下。要证明两个集合相等。就是要证明两个集合互为子集 老师说是 $f\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) \supset \bigcup_{i \in N} f(A_i)$ 容易证明，那么我们就先说明左边包含右边 因为可以把右边拆出来，每一个 $f(A_i)$ 都被 $f\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right)$ 包含，所以它们的并，肯定也被包含 那么反过来呢？

存在 $y \in \bigcup_{i \in N} f(A_i)$ 一定能找到一个 x 使得 $x \in \bigcup_{i \in N} A_i$ 当 $x \in A_i$ 时，对应的 $y \in f(A_i)$ 而 $f(A_i) \in \bigcup_{i \in N} f(A_i)$

但是这个交集的结论转成交集就不一定成立了 对任意的 $A, B \subset X$, 有 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ 可以让左边交为空，而右边有交集。而，如果想要这个等式可以成立。只要满足 f 是单射就行了，这就是第 4 题的 ii 想告诉我们的

好，现在继续看思考题第 4 题。老师在第 4 题前讲这些内容就是为了第 4 题做铺垫的 这里由 $i \rightarrow ii$ 其实条件过强了。其实只要满足 f 是单射就可以证明了。

首先，我们可以得到的一个结论就是 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ 这个是无论是否单射都能成立的。只要是个映射，都能成立 我先把这个的结论证明一下。let

$$y \in f(A \cap B)$$

this means there exists an $x \in A \cap B$ such that

$$y = f(x)$$

since $x \in A$, we know $y = f(x) \in f(A)$ since $x \in B$, we know $y = f(x) \in f(B)$ Because y is in both $f(A)$ and $f(B)$, we have

$$y \in f(A) \cap f(B)$$

Therefore, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ is always true

其实就是说，不管从左边取哪一个元素，那个元素一定可以在右边找到。在 windows 上写中文太痛苦了。我以后会尽量用英文和符号来表达。除非由大段的文字要写好，要说明两边相等，我们还需要证明右边是左边的子集。老师的说法不好。不如我下面说的 iii 的反证法清晰。直接看我 iii 中用反证法说明的。如果单射，那么一定是从两个集合中取到相同的数，而这个相同的数的集合就是 A 与 B 的交集 由此 $i \rightarrow ii$ 就被证明了 iii 这里可以直接使用 ii 的结论

Of course, you can prove by contradiction. If the right side is not \emptyset

When you say $y \in f(A) \cap f(B)$, this still means there's an $a \in A$ and an $b \in B$ with $f(a) = y \wedge f(b) = y$

Because the function is injective, we know that a and b must be the same elemen.

Therefore, the single pre-image x must belong to both A and B , which means $x \in A \cap B$.

这个 iv 其实更加好证明了

$$B \setminus A = (B \setminus A) \cap X$$

$$f(B) \setminus f(A) = (f(B) \setminus f(A)) \cap Y$$

直接就可以套用 ii 中的式子 这个从 $iv \rightarrow i$ 其实也是可以直接反证法，如果不是单射，这个等式

就不成立了。

最后可以总结一下。一般这种互相成立的都是 $i \rightarrow ii \rightarrow iii \rightarrow iv \rightarrow i$ 这样证明一圈下来，不用两两互相证明。因为效果是一样的。满射其实在这里面一点用都没有

定理 1.5 (Cantor-Bernstein 定理) 若集合 X 与 Y 的某个真自己对应， Y 与 X 的某个真子集对应，则 $X \sim Y$

这个定理说明了 $\overline{X} \leq \overline{Y}$

$$\overline{X} \geq \overline{Y}$$
$$\overline{X} = \overline{Y}$$

这三个等式，一定会有一个发生 这里一个是有势，一个是这里用的是 \leq 与 \geq

如果这里使用的是 $<$ 与 $>$ 就不行 这个定理说的就是 $\overline{X} < \overline{Y}$

$$\overline{X} > \overline{Y}$$

这两件事情是一定不可能同时发生的 这个和这两件事情一定有一件会发生是两回事

如果

$$\overline{X} \leq \overline{Y}$$
$$\overline{X} \geq \overline{Y}$$

这两件事情同时发生了，那么说明

$$\overline{X} = \overline{Y}$$

现在证明定理 1.5 老师的证明方法和书本的方案不同。我这里说一下老师的证明方案。

老师的证明方法和郑维行的是一样的，他们的这个方法和夏道行的方法其实是同一个意思，只是用的变量名字和画的图不同罢了

程其襄和夏道行的是一样的。徐森林的第二种证法也是这个。

徐森林的第一个其实就是我们现在这个周民强的方法，直接用了 Banach 的结论

我这里专门把这个证明重新写一遍，是因为我当时其实是有一个疑惑的。而解开这个疑惑的就是我下面这句：

这个东西的证明最重要的是能够合理应用这两个对等。

先把变量初始化一下 😊

$$x_0 \subsetneq X$$

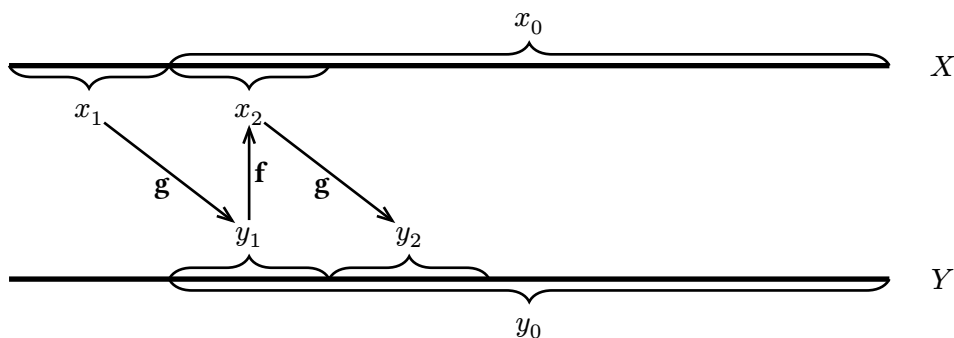
$$y_0 \subsetneq Y$$

由题目给出的条件，我们定义两个双射

$$\begin{array}{ccc} x_0 & \xleftarrow{f} & Y \\ & \xrightarrow{g} & \\ y_0 & \xleftarrow{g} & X \end{array}$$

好，下面令

$$x_1 = X \setminus x_0$$



下面的我就不继续画了，等我什么时候成为 typst 高手再说吧

我当时的疑惑在于从 $y_1 \mapsto x_2$ 这段，因为 y_1 这个时候是在 y_0 中的。诶这个时候就会有小聪明会说了，我们上面不是有定义了一个映射了吗？

$$y_0 \xrightarrow{g} X$$

这不就说明 y_1 可以映射到整个 X 上的某个区间了?

对于这个看法,我只能说,你是对的!你非常敏锐,这不就说明 x_2 不一定在 x_0 , 也可能与 x_1 有交集。

这就是我专门把这个题目自己写一遍证明的原因了。

注意,我们其实是有两个双射, 我们还有一个

$$x_0 \xrightarrow{f} Y$$

这个双射可以让处于 Y 中的 y_1 映射到 x_0 上

我当时的问题就是,为什么不使用

$$y_0 \xrightarrow{g} X$$

这个映射, 这个映射也是成立的吧?为什么不使用这个映射呢?

这个映射成立,没有问题

就是因为这个映射成立,所以我们其实可以得到将 y_1 双射到 X 上可以有别的区间, 不仅仅是现在的这个在 x_0 中的区间。(当然,我现在只能找到 y_1 通过 g 来对应到 x_1 , 是一个 x_2 以外的区间。其他的我就真不知道怎么找了)

但是。使用这个映射,无法得到我们希望得到的东西。所以我们不采用这个映射。

仅此而已。明明使用 f 是没有问题的,而且还可以得到我们想要的结论,为什么不用呢?

至于详细证明什么我,我就不再写了,书上都有。

p17 思考题 1. 设 $A_1 \subset A_2, B_1 \subset B_2$, 若 $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$, 试问: 是否有 $(A_2 \setminus A_1) \sim (B_2 \setminus B_1)$? 这个是不对的, 我想到的是

$$A_1 = N$$

$$A_2 = \{-1, -2, -3, N\}$$

$$B_1 = N$$

$$B_2 = \{-1, N\}$$

老师给的例子是

$$A_1 \sim A_2 \sim \text{偶数}$$

$$B_1 \sim \text{奇数}$$

$$B_2 \sim \text{自然数}$$

2. 若 $(A \setminus B) \sim (B \setminus A)$ 则 $A \sim B$ 对吗?

我第一个想到的证明是令

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

但是这么看来,感觉这个好像是对的。因为这个本来看起来就对,加上我找不到反例

这里其实就用到了一个结论

现在有三个集合 A, B, C , 现在 A 与 B 对等, 能否得到这个结论?

$$A \sim B \Rightarrow A \cup C \sim B \cup C$$

当然是不能的。我们可以让 $A = C = \{1, 2, 3\}$, 让 $B = \{4, 5, 6\}$, 显然这个有限集的例子就是反例了

但是我们可以通过添加条件使得这个对等, 当 C 与 A, B 都不相交的时候就是对的证明的时候, 让 A 与 B 对等, 然后 C 与自己对自己对等就好了。

现在我们有了这个结论, 也是分别对等就可以了。证明结束

$$A \sim B \Rightarrow A \cap C \sim B \cap C$$

3. 若 $A \subset B$ 且 $A \sim (A \cup C)$, 试证明 $B \sim (B \cup C)$.

$$B \cup C = B \cup (C \setminus B)$$

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

$$A \cup C = A \cup (C \setminus A)$$

$$\therefore B \cup C = A \cup (B \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

$$\therefore B \cup C = (B \setminus A) \cup A \cup (C \setminus B)$$

$$\therefore C \setminus B \cup A \sim A$$

$$\therefore (B \setminus A) \cup A \cup (C \setminus B) \sim (B \setminus A) \cup A \sim B$$

但是，问题的重点就是在于，为什么 $A \cup (C \setminus B) \sim A$

老师没讲。

好现在让我献上 gemini 的证明 要证明对等，其实就是能够找到一一映射

既然题目给出了两个对等关系，那么

$$A \xleftarrow{f} B$$

$$A \xleftarrow{g} A \cup C$$

要证明 $B = A \cup (B \setminus A) \sim (B \cup C) = A \cup (B \setminus A) \cup (C \setminus B)$ 其实就是证明

$$A \cup (B \setminus A) \sim A \cup (B \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

我们可以在 B 中找到这两个映射。为什么会想到这么划分区间？纯属是想要把 g 这个映射用上。

因为 $B = A \cup (B \setminus A)$

好，下面这步拆分很关键

$$B \cup C = A \cup C \cup (B \setminus A)$$

所以很容易想到我们前面定义的两个双射。如果可以让 B 中的 $B \setminus A$ 与 $B \cup C$ 中的 $B \setminus A$ 对应，B 中的 A 与 $B \cup C$ 中的 $A \cup C$ 对应的话，我们就可以建立从 B 到 $B \cup C$ 的双射了。

这一看，诶。现在难道不就是嘛？前者直接自己映射自己，后者直接用 g 就可以了。

但是这个划分方法是错误的。因为 $B \setminus A$ 与 $A \cup C$ 是完全存在重叠的部分的。重叠部分得同时映射到 B 中的 A 与 $B \setminus A$ 才可以保证一一对应

所以这个映射方案是错误的。但是，通过观察，我们其实可以发现。

B 中 $(B \cup C) \setminus (A \cup C)$ 的部分其实可以映射到 $B \cup C$ 中的 $(B \cup C) \setminus (A \cup C)$ 而 B 中的 A 可以继续映射到 $B \cup C$ 中的 $A \cup C$ 不过这下，这两个区间就没有重复的地方了

ai 小丑的地方是直接说根据他的划分，交集应该为空。实际他根本没办法证明交集为空。但是启发了我重新划分区间。这就对了

主要按照老师的分法应该需要某个结论。类似 $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \dots \subset C_n$

如果 $A \cup C_n \sim A$ 则任意 $i < n$ 有 $A \cup C_i \sim A$

✍

1.14 幂集 \mathcal{P}

这个例一有点抽象 如果 $A \subset B$ 那么 $f(A) \subset f(B)$ 难道不是一定成立的吗？直接把 B 看成 A 并上余集 不就好了 直接就是 $A \cup A^c = B$ and $f(A) \subset (f(A) \cup f(A^c))$ 感觉这个条件给了和没一样 但是我问了 ai 说是集合的映射和函数的映射是不一样的，在幂集上是从集合到集合的映射。这个 S 我直观上知道是对的，这个东西会需要专门说明是对的吗？这个证明看懂了.我之只能说值得多看几遍

p14 思考题： 5. 设 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$. 若对任意的 $x \in X$, 必有 $g(f(x)) = x$, 则 f 是单射, g 是满射

第一个单射直接用 x_1, x_2 让他们对应的 y 相同，那么 $g(y)$ 唯一，所以 $x_1 = x_2$ 这个满射也很容易证明。在 X 中找一个点，不在 g 的值域上，使得映射不成立就好了

p17 关于集合大小的讨论，看老师视频

例 10 还是不会证明

定理 1.10 的证明，我并不满意,这只能说明，他这种排法不行，没能证明其他的排法不行 1.12 的证明我不是很能理解，先记下来吧

p19 例 10 的证明里面用到了有理数的稠密性

可数和可列看书本 p20，例 10 上面那句话

书本 p11 他这里例一，为什么有这个结论 书本 p11 md 这个论文在第 93 卷，不在第 78 卷书上的标记是有误的 他这个例 2 为什么上积分和下积分不同，难道无理数就是比有理数小吗？

13 页的这个 V.Volterra 做出的可微函数是哪一个 同一元这个我也不理解