我这里内容的顺序是老师上课的顺序，不是书本的顺序。所以页码标记至关重要

直积在书本 p11 页有讲

定理 1.3 就单纯想说明上极限只要求有无穷项，但是下极限却要求从某一项以后的所有项都要满足 p11 例 8 老师有讲，但是我认为没有比较记录。因为他说的和书本没什么区别，只是更加详细了。我不是高中生了，所以我不会记录这段内容

引入基数是为了在无限的情况下两个集合比大小 人的常识总是认为 $A > B$ $A = B$ $A < B$ 这三件事情有一件是一定发生的。那是当然了，毕竟数量可以直接数出来 但是这三件事情中的一件要一定发生。需要满足 axiom of choice 和 well-ordering theorem

$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \Leftrightarrow 存在A到B的一一映射$

p13 思考题

1. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, 记 f_1(x) = f(x), f_n(x) = f(f_{n-1}(x))(n = 2, 3, \cdots). 若存在 n_0, 使得 f_{n_0}(x) = x$, 则 f 是$\mathbb{R}$到$f(\mathbb{R})$ 上的一一映射

证明：要证明一一映射，就得证明单射和满射

单射：如果不单射，则存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f_n(x_1) = f_n(x_2)$

当 $n > n_0$ 时

$$f(x_1) = x_1$$

$$f(x_2) = x_2$$

而这与不单射冲突，所以单射

满射：即证明 f(x) 可以映射回 x

$\because f_{n_0}(x) = f_{n_0}\left(f_{n_0-1}(x)\right)$

令$f_{n_0-1}(x) = y$

则$f_{n_0}(y) = x$

所以满射

2. 不存在 Q 上的连续函数 f, 它在无理数集 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 上是一一映射，而在 $\mathbb{Q}$ 上则不是一一映射

证明：连续函数要么单调，要么不单调。如果单调。那么在有理数集上就双射了，不满足在有理数上不是双射这个条件。所以这个函数肯定不是单调的。既然不是单调的，那么就肯定有最值 $a, b \in \mathbb{Q}, f(a) = f(b)$ 这个是满足在 QQ 上不是一一映射。根据 Rolle’s Theorem，极值点左边一个无理数 x1 的值肯定可以在极值点右边找到对因一个 x2 使得 x1 = x2 这里 x2 不能是无理数，因为 x2 如果是无理数的话就和无理数单射冲突了，所以这里 x2 必须得是有理数 但是在这个区间中，有理数的势是远小于无理数的势的。所以总是有无理数找不到对应的有理数。但是这个无理数总是需要有东西对应。所以只能对因一个无理数，和单射冲突

3. $f : X \to Y$ 是满射当且仅当对任意的真子集 $B \subset Y$ 有 $f(f^{-1}(B)) = B$

先证明单射: 如果不是单射，那么我们可以在 B 中找到两个数 x1, x2 使得 $f(x_1) = f(x_2)$ 但是 $f^{-1}(f(x_1))$ 就会对应两个值了，要么 x1 要么 x2 所以和$f^{-1}(f(B)) = B$ 矛盾，得到$f(x)$ 是单射

再证明满射

如果 $f(x)$ 不是满射，我们取 $A = Y \setminus B$ 既然不是满射，我们可以得到 $\forall y \in A$ $f^{-1}(y) \in X$ 不妨令 $y_1 \in A$ 则 $f^{-1}(y_1) = x_1, x_1 \in A$ 由于不满射，所以 $f(x_1) = y_2, y_2 \in B$ 即 $f^{-1}(f(y_1)) = y_2, y_1 \in A, y_2 \in B$ 直接和后面的矛盾了。所以 $f : X \to Y$ 是满射

但是我整个写完，也没感觉证明这个单射的必要

老师在讲这道题之前还讨论了几个有意思的问题

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$A_i \subset \mathbb{R}$

$f(\bigcup\limits_{i \in N} A_i) = \bigcup\limits_{i \in N} f(A_i)$

这个东西成立吗？ 只要 f 是一个映射，这个结论一定成立。 可以证明一下。要证明两个集合相等。就是要证明两个集合互为子集 老师说是$f(\bigcup\limits_{i \in N} A_i) \supset \bigcup\limits_{i \in N} f(A_i)$ 容易证明，那么我们就先说明左边包含右边 因为可以把右边拆出来，每一个$f(A_i)$ 都被 $f(\bigcup\limits_{i \in N} A_i)$ 包含，所以它们的并，肯定也被包含 那么反过来呢?

存在$y \in \bigcup\limits_{i \in N} f(A_i)$ 一定能找到一个 x 使得 $x \in \bigcup\limits_{i \in N} A_i$ 当 $x \in A_i$ 时，对应的 $y \in f(A_i)$ 而 $f(A_i) \in \bigcup\limits_{i \in N} f(A_i)$

但是这个交集的结论转成交集就不一定成立了 对任意的$A, B \subset X$, 有$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ 可以让左边交为空，而右边有交集。 而，如果想要这个等式可以成立。只要满足 f 是单射就行了，这就是第 4 题的ii 想告诉我们的

好，现在继续看思考题第 4 题。老师在第 4 题前讲这些内容就是为了第 4 题做铺垫的 这里由 $i \to ii$ 其实条件过强了。其实只要满足 f 是单射就可以证明了。

首先，我们可以得到的一个结论就是 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ 这个是无论是否单射都能成立的。只要是个映射，都能成立 我先把这个的结论证明一下。 let

$$y \in f(A \cap B)$$

this means there exists an $x \in A \cap B$ such that

$$y = f(x)$$

since $x \in A$, we know $y = f(x) \in f(A)$ since $x \in B$, we know $y = f(x) \in f(B)$ Because y is in both $f(A)$ and $f(B)$, we have

$$y \in f(A) \cap f(B)$$

Therefore, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ is always true
其实就是说，不管从左边取哪一个元素，那个元素一定可以在右边找到。在 windows 上写中文太痛苦了。我以后会尽量用英文和符号来表达。除非由大段的文字要写 好，要说明两边相等，我们还需要证明右边是左边的子集。 老师的说法不好。不如我下面说的iii 的反证法清晰。直接看我iii 中用反证法说明的。如果单射，那么一定是从两个集合中取到相同的数，而这个相同的数的集合就是 A 与 B 的交集 由此$i \to ii$ 就被证明了 iii 这里可以直接使用ii 的结论
Of course, you can prove by contradiction. If the right side is not $\varnothing$
When you say $y \in f(A) \cap f(B)$, this still means there’s an $a \in A$ and an $b \in B$ with $f(a) = y \wedge f(b) = y$
Because the function is injective, we know that a and b must be the same elemen.

Therefore, the single pre-image x must belong to both A and B, which means $x \in A \cap B$.

这个iv 其实更加好证明了
$B \setminus A = (B \setminus A) \cap X$
$f(B) \setminus f(A) = (f(B) \setminus f(A)) \cap Y$
直接就可以套用ii 中的式子 这个从$iv \to i$ 其实也是可以直接反证法，如果不是单射，这个等式就不成立了。
最后可以总结一下。一般这种互相成立的都是$i \to ii \to iii \to iv \to i$ 这样证明一圈下来，不用两两互相证明。因为效果是一样的。 满射其实在这里面一点用都没有

5.设$f : X \to Y, g : Y \to X$. 若对任意的 $x \in X$,必有$g(f(x)) = x$,则f是单射,g是满射
第一个单射直接用 x1 x2 让他们对应的 y 相同，那么 g(y) 唯一，所以 x1 = x2 这个满射也很容易证明。在 X 中找一个点，不在 g 的值域上，使得映射不成立就好了

定理 1.5 **(Cantor-Bernstein 定理)** 若集合X与Y 的某个真自己对等，Y与 X 的某个真子集对等，则$X \sim Y$
这个定理说明了 $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$
$\overline{\overline{X}} \geq \overline{\overline{Y}}$
$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$
这三个等式，一定会有一个发生 这里一个是有势，一个是这里用的是 $\leq$ 与 $\geq$
如果这里使用的是 $<$ 与 $>$ 就不行 这个定理说的就是 $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$
$\overline{\overline{X}} > \overline{\overline{Y}}$
这两件事情是一定不可能同时发生的 这个和这两件事情一定有一件会发生是两回事

如果
$\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$
$\overline{\overline{X}} \geq \overline{\overline{Y}}$
这两件事情同时发生了，那么说明
$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$

现在证明定理 1.5 老师的证明方法和书本的方案不同。我这里说一下老师的证明方案。
老师的证明方法和郑维行的是一样的，他们的这个方法和夏道行的方法其实是同一个意思，只是用的变量名字和画的图不同罢了
程其襄和夏道行的是一样的。徐森林的第二种证法也是这个。
徐森林的第一个其实就是我们现在这个周民强的方法，直接用了 Banach 的结论
我这里专门把这个证明重新写一遍，是因为我当时其实是有一个疑惑的。而解开这个疑惑的就是我下面这句:
这个东西的证明最重要的是能够合理应用这两个对等。

先把变量初始化一下 😋

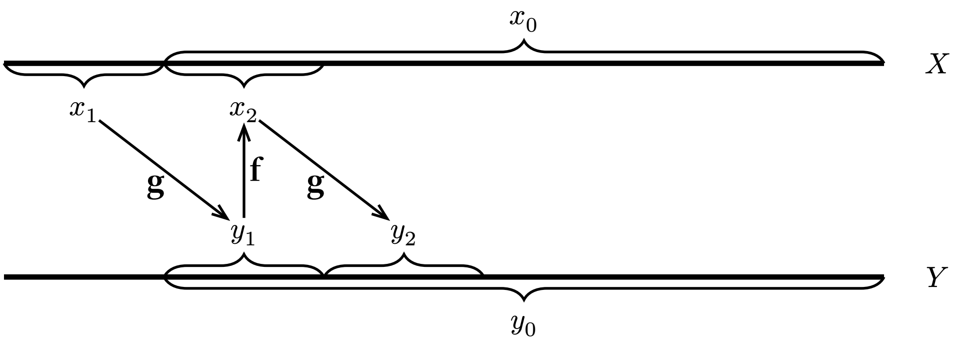
$x_0 \subsetneq X$
$y_0 \subsetneq Y$

由题目给出的条件，我们定义两个双射

$x_0 \xleftrightarrow{f} Y$
$y_0 \xleftrightarrow{g} X$

好，下面令

$x_1 = X \setminus x_0$



下面的我就不继续画了，等我什么时候成为 typst 高手再说吧
我当时的疑惑在于从$y_1 \mapsto x_2$ 这段，因为y_1 这个时候是在y_0 中的。 诶这个时候就会有小聪明会说了，我们上面不是有定义了一个映射了吗?
$y_0 \xleftrightarrow{g} X$
这不就说明 y_1 可以映射到整个X 上的某个区间了?
对于这个看法，我只能说，你是对的!你非常敏锐，这不就说明x_2 不一定会在x_0，也可能与x_1 有交集。
这就是我专门把这个题目自己写一遍证明的原因了。
注意，我们其实是有两个双射， 我们还有一个
$x_0 \xleftrightarrow{f} Y$
这个双射可以让处于Y 中的y_1 映射到x_0 上
我当时的问题就是，为什么不使用
$y_0 \xleftrightarrow{g} X$
这个映射，这个映射也是成立的吧?为什么不使用这个映射呢?
这个映射成立，没有问题
就是因为这个映射成立，所以我们其实可以得到将y_1 双射到X 上可以有别的区间， 不仅仅是现在的这个在x_0 中的区间。 (当然，我现在只能找到y_1通过 g 来对应到x_1，是一个x_2 以外的区间。其他的我就真不知道怎么找了)
但是。使用这个映射，无法得到我们希望得到的东西。所以我们不采用这个映射。
仅此而已。 明明使用f 是没有问题的，而且还可以得到我们想要的结论，为什么不用呢?
至于详细证明什么我，我就不再写了，书上都有。
不过这里我有一个东西没有思考清楚。夏道行讲了一个性质 4°，这个东西在别的教材中没说。老师上课的时候是直接用的。夏说可以自己证明。但是我实在不知道怎么写这个证明。因为非常显然。

p17 思考题 1.设$A_1 \subset A_2, B_1 \subset B_2$,若$A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$,试问:是否有 $(A_2 \setminus A_1) \sim (B_2 \setminus B_1)$?
这个是不对的，我想到的是
$A_1 = N$
$A_2 = \{-1, -2, -3, N\}$
$B_1 = N$
$B_2 = \{-1, N\}$
老师给的例子是
$A_1 \sim A_2 \sim$ 偶数
$B_1 \sim$ 奇数
$B_2 \sim$ 自然数

2.若$(A \setminus B) \sim (B \setminus A)$则$A \sim B$对吗?
我第一个想到的证明是令

$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$
$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$
但是这么看来，感觉这个好像是对的了。因为这个本来看起来就对，加上我找不到反例
这里其实就用到了一个结论
现在有三个集合 A,B,C，现在 A 与 B 对等，能否得到这个结论?
$A \sim B \Rightarrow A \cup C \sim B \cup C$
当然是不能的。我们可以让$A = C = \{1,2,3\}$，让$B = \{4,5,6\}$，显然这个有限集的例子就是反例了
但是我们可以通过添加条件使得这个对等，当 C 与 A,B 都不相交的时候就是对的
证明的时候，让 A 与 B 对等，然后 C 与自己对等就好了。

现在我们有了这个结论，也是分别对等就可以了。证明结束

$A \sim B \Rightarrow ? A \cap C \sim B \cap C$

3. 若$A \subset B$且$A \sim (A \cup C)$，试证明$B \sim (B \cup C)$.

$B \cup C = B \cup (C \setminus B)$
$B = A \cup (B \setminus A)$
$A \cup C = A \cup (C \setminus A)$
$\therefore B \cup C = A \cup (B \setminus A) \cup (C \setminus B)$
$\because B \cup C = (B \setminus A) \cup A \cup (C \setminus B)$
$\because C \setminus B \cup A \sim A$
$\therefore (B \setminus A) \cup A \cup (C \setminus B) \sim (B \setminus A) \cup A \sim B$
但是，问题的重点就是在于，为什么$A \cup (C \setminus B) \sim A$
老师没讲。
好现在让我献上 gemini 的证明 要证明对等，其实就是能够找到一一映射
既然题目给出了两个对等关系，那么
$A \xleftrightarrow{\text{f}} B$
$A \xleftrightarrow{\text{g}} A \cup C$
要证明$B = A \cup (B \setminus A) \sim (B \cup C) = A \cup (B \setminus A) \cup (C \setminus B)$ 其实就是证明
$A \cup (B \setminus A) \sim A \cup (B \setminus A) \cup (C \setminus B)$
我们可以在 B 中找到这两个映射。为什么会想到这么划分区间？ 纯属是想要把 g 这个映射用上。
因为$B = A \cup (B \setminus A)$
好，下面这步拆分很关键
$B \cup C = A \cup C \cup (B \setminus A)$
所以很容易想到我们前面定义的两个双射。如果可以让 B 中的$B \setminus A$ 与$B \cup C$ 中的 $B \setminus A$ 对应， B 中的 A 与$B \cup C$ 中的 $A \cup C$对应的话，我们就可以建立从 B 到$B \cup C$ 的双射了。
这一看，诶。现在难道不就是嘛？ 前者直接自己映射自己， 后者直接用 g 就可以了。
但是这个划分方法是错误的。因为$B \setminus A$ 与$A \cup C$ 是完全存在重叠的部分的。 重叠部分得同时映射到 B 中的 A 与$B \setminus A$ 才可以保证一一对应
所以这个映射方案是错误的。但是，通过观察，我们其实可以发现。
B 中$(B \cup C) \setminus (A \cup C)$ 的部分其实可以映射到$B \cup C$中的 $(B \cup C) \setminus (A \cup C)$ 而 B 中的 A 可以继续映射到$B \cup C$ 中的$A \cup C$ 不过这下，这两个区间就没有重复的地方了
ai 小丑的地方是直接说根据他的划分，交集应该为空。实际他根本没办法证明交集为空。 但是启发了我重新划分区间。这就对了
主要按照老师的分法应该需要某个结论。类似 $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \ldots \subset C_n$
如果 $A \cup C_n \sim A$ 则任意 i < n 有$A \cup C_i \sim A$

下面我会写一点零碎的东西。老师没怎么讲，但是书上有

1.14 幂集 $\mathscr{P}$

这个例一有点抽象 如果$A \subset B$ 那么 $f(A) \subset f(B)$ 难道不是一定成立的吗？ 直接把 B 看成 A 并上余集 不就好了 直接就是 $A \cup A^c = B$ and $f(A) \subset (f(A) \cup f(A^c))$ 感觉这个条件给了和没一样 但是我问了 ai 说是集合的映射和函数的映射是不一样的，在幂集上是从集合到集合的映射。 这个 S 我直观上知道是对的，这个东西会需要专门说明是对的吗?
对，这个 S 的存在是需要条件的。只是在这里，幂集满足了这个条件。 这个证明看懂了.我之只能说值得多看几遍

例 10 还是不会证明

定理 1.10 的证明，我并不满意,这只能说明，他这种排法不行，没能证明其他的排法不行 1.12 的证明我不是很能理解，先记下来吧

p20 例 10 的证明里面用到了有理数的稠密性

可数和可列看书本 p20，例 10 上面那句话

书本 p11 他这里例一，为什么有这个结论 书本 p11 md 这个论文在第 93 卷，不在第 78 卷书上的标记是有误的 他这个例 2 为什么上积分和下积分不同，难道无理数就是比有理数小吗?

13 页的这个 V.Volterra 做出的可微函数是哪一个 同一元这个我也不理解

现在我会一点也不按照老师的进度，而是直接按照周明强书中的顺序和自己的顺序写

我会选择这么做是因为我发现老师讲的很多东西其实就是不同教科书合在一起的内容。 所以我选择自己看不同的教科书。并且路上会自己查漏补全。 现在讲到 18 页了 我现在讲 p20 页的例 9,这中间的内容自己看书 这个说是每一个E_i 都是一个可列集，可列集的意思就是和 N 对等。这里N^n 是指 N 的 n 次笛卡尔积。
所以$E_1 \times E_2 \times E_3 \times ... \times E_n = N^n$ 两个一一映射 为什么会用到素数?因为不同素数的 n 次幂是不会重复的。这样就能不重复的列出来了
这样，我们可以建立这种对等关系:
E_1 既然和 N 对等，那么自然就和p_1^n 对等了，这里的 n 就是 1,2,3,4⋯
同理$E_2, E_3, E_4, ...$ 这样。 如此就建立了对等关系。因为这些素数和他们的幂都在 N 上，所以就和 N 建立了对等关系。由此可列。 不过我真的不喜欢这个证明。我感觉没有用素数也能说清楚。我提这么一嘴就是为了说明一下这个素数干什么用的。

p20 例子 10 这个东西在周明强的书中没有证明。我现在先看郑维行的书，看完后再回来看这题

郑维行 p10 第三章 为什么 p12 页的例 1 一定要是闭区间? 因为开区间会导致只有一个元素吗？ 这个问题，完全是脑子想歪了，和开区间没有半毛钱关系，这个问题太莫名其妙了，估计是累了，没有理解题干

必要性质能理解，充分性不能理解。还有，必要和充分的英文是什么?
necessary and sufficient condition
md 其实很形象。现在想想，其实中文翻译也很形象。
我直接举个例子吧。
A is necessary condition for B 就是说，要想 B 成立，那么就得先满足 A 所以 B 是 A 的子集
B is sufficient condition for A 就是说，满足 B 的条件，一定就满足 A 了 所以 B 是 A 的子

集。所以叫 sufficient，充分就是这个意思
如果 A 既是 B 的充分条件也是 B 的必要条件，那么 A 是 B 的子集的同时 B 也是 A 的子集。

幂集的势比原集合大的证明居然在郑维行的书上定理 5.1 中说明了，真不错 第 5 章我没看完，个人觉得应该挺精彩的。但是我已经完成了第 4 章了，所以我现在要继续看教材了。
笔记基本都在 zotero 上了，未来我会将所有的内容都集中放在笔记里面。 在每次讲到某个内容的时候我都会使用 书名+章节+页码的模式

我现在回归到了周明强的书中了
我现在把郑维行的书看完了，但是没有涉及到 实变函数论 P20 例 10 的证明 这个证明我能理解，但是我认为这个证明应该有更多理论去支撑。
所以我在这里放一个 TODO,这应该是需要点集拓扑的知识了
以后这种支线内容应该另外拨时间去做，不能妨碍主线的推动
不过这里例 10 其实也有一个有意思的结论，就是虽然开区间是可数的，但是闭区间就不可数了。
热爱就是花时间，热爱是行动的热爱，不是空想的热爱。不然那就是自慰
是否应该切换任务应该看能否看懂题目
如果已经无法理解题目了，那么就应该切换任务
一个人的精力是有限的，不可能有时间将任何有疑问的点都理解清楚，重点是能快速解决问题。

例子 12 的 i 直接使用不相交的开区间可数就行了。但是我不知道怎么说明。 而且我也不能理解为什么要使用 arctan 这个函数? 他这个证明ii 说实话，我还是没看懂。

例 13 这里的r_n 不是实数的意思。这个是指 E 中的元素 但是我认为这个题目没必要这么证明，因为是证明存在，我们直接说 E 是有理数集就好了。 x_0直接取一个无理数不就好了

例 14 我大概理解了，他就是想要让我们找到这么一个函数可以在无理数上连续，在有理数上间断

这个定理 1.8 其实用到了定理 1.6 任一无限集必定包含了一个可列子集 md 真想吐槽，这个规则是真的抽象。当初制定这些规则的人确实脑子也是够抽象的 1.9 有不使用 1.8 的方法吗？我想要更加底层的方案

这里例 15 中说明右导数存在这里。我说明一下，因为 前面其实在证明这个函数 $\varphi(m) = \frac{f(x+m)-f(x)}{m}$ 是递增的。这里 x 表示的是(a, b) 上任意一点
那么当$m > 0 \land m \to 0$ 时 函数值应该减小，h 好，现在单调有了。接下来找有界 在凸函数中，肯定是有界的 但是这里的具体证明需要用到凸函数的 Lipschitz 性，这个东西后面才学 书上的证明我现在理解不了。但是我可以理解凸函数的不可导点是可数个。 因为凸函数的不可导点只能是左右导数不同的点 至少我认为，如果要证明的话，应该证明这些不可导的点之间一定有别的数 这里凸函数连续，所以导数一定是单调递增的，诶那其实就回到了例 11 了 所以得证

这个思考题 4 让我想到郑维行的 p24 例 3 一切实系数多项式的集的势为$\aleph$ 但是具体的证明，我现在还是不能理解 所以这里答案肯定是$\aleph_0$ 这是可以确定的 我想到的证明是 其实就是 $aX + bY = c$
要想要X和Y 都是有理数，那么a, b, c 都必须是有理数 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{Q}$ 所以是$\aleph_0$ 思考题 5 任意等差数列其实可以写成 $a_0 + d$ 这里说两个都是自然数，那么 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq N$ 所以是$\aleph_0$

这个题目的意思，我一开始还没有读懂 这个题目的意思其实就是在一个区间， 如果只有可数个点的导数不为零，其他地方的导数都为 0 的话，这个函数在这个区间还是一个常量

这个条件就比在整个区间上导数为 0 好很多了

他这个导数其实就和 Riemann 函数很像只是 Riemann 是他这里的一种特殊情况 额这里导数存在不代表导数就是连续的，可以自己找例子或者再重新翻翻数学分析的教材 思考题 6 的证明需要测度论中的东西，这个证明到时候花时间补完 md 这个和勒贝格微分定理几乎就是同一个东西，未来一定要返回把这个补完

思考题 7 也是需要测度论的知识 这个的意思就是说你的 f(x) 要在 R 上也连续 我第一个想法就是有理数自变量不能将像集中的无理数占满 不过严格的论证需要测度

思考题 8 我对这个问题是直接束手无策。我看别人的证明是直接证明是有限集的并 但是我认为应该有更加有道理的证明方法。而且他的那个证明也不能保证收敛

他这个定理 1.10 我也没有理解， 他只是某个排列方法没有排列出来，为什么能说明不可列呢?

$\aleph_0$与c 之间应该是没有其他基数了

1.12 无最大基数定理，我大概知道讲什么，但是我实在理解不了 首先，这个 B 肯定是 A 的子集吧，我 A 当然也是$\mathscr{P}A$ 的子集啦， 我不能理解，为什么还要专门提一下 我更加不能理解为什么要构造这么一个映射，tm 什么集合都遭不住这样映射呀 快被恶心死了

$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$ woc 我顺着捋，看懂了，但是我还是有地方不理解
woc 我终于看懂了。 如果 $A \sim \mathscr{P}(A)$ 对等，那么 A 中任意元素而应该可以找到和$\mathscr{P}(A)$ 中找到与之对应的元素 而$\mathscr{P}(A)$ 中的元素都是集合,更加精确点，都是 A 的子集 ,就是说 A 中任一元素 x 肯定可以和一个 A 的子集对应
如果我们能在 $\mathscr{P}(A)$ 中找到一个元素，即 A 的一个子集，让这个子集在 A 中没有元素和他对应不就好了。
既然 x 对应的元素是 A 的子集，那么肯定有 x 对应的集合中不包含 x 本身的可能 比如 x 是 1,但是对应的集合是{2,3} 这种 我们把符合这种条件的 x 全部找出来，放进一个叫 B 的集合中 既然 B 集合中的元素是从 A 中挑出来的，那么肯定就是 A 的某个子集了， 既然是 A 的某个子集，那么在 A 中肯定有元素和它对应 那么我们不妨让与 B 对应的元素为 y 则, f(y) = B 那么我们现在应该找到这个 y 吧 具体怎么找? 我们是不是可以把 A 中的元素划分成两类，属于 B 的，和不属于 B 的。 如果 y 是 B 中的元素，则 f(y) 应该不含有 y 但是 f(y) = B 呀，y 是 B 中的元素。所以 y 一定不在 B 中 如果 y 不是 B 中的元素，则 f(y) 应该含有 y 但是 f(y) = B 呀，y 不是 B 中的元素，f(y)居然不含有 y 了。所以 y 在 B 中 两个结合，这个 y 是不存在的。 就是说，A 中找不到元素和这个 B 对应

我之前其实一直有一个疑问，因为我感觉这么找，就是可以一一映射，这么映射也弄的不能映射了
自己手动模拟一下，找两个一一对应有限集，会发现就算能凑出这个 B,这个 B 也不会在像集上。 问题是无限可数集，我就不知道该怎么写了。 而且我还有很多问题。这个方法只能放在幂集中使用吗? 毕竟因为是幂集，所以任何子集都会在里面。 我对于这个方法的底层原理并没有理解。

思考题 9，实数对，基数等于$\aleph$ 思考题 10,

试证明存在$x_0 \in E$，使得对于任一 内含x_0 的圆领域$B(x_0)$，点集$E \cap B(x_0)$ 这题其实非常简单，真艹了 反过来想想。逆否命题其实就是每个点都是可数集

有限开覆盖和构成区间还挺像 这个 10 我先跳过了，用有限开覆盖来证明，我知道他怎么证明的，但是我还没有认同和理解他的方案 这个覆盖能够存在需要用到一个拓扑基的东西

11.设$E \subset R$且$\overline{\overline{E}} < c$，试证明存在实数 a，使得
$E + \{a\} = \{x + a : x \in E\} \subset R \setminus Q.$ $\left(a \notin Q - E \xlongequal{\text{def}} \{x - y : x \in Q, y \in E\}\right)$

就是说让 E 全体 加上一个数后，里面就都不含有理数了 反正 a 一定不是有理数，这是可以确定的。因为有理数加有理数还是有理数 我认为难点在于 E 可以有无理数，

其实后面括号给的条件很好，直接说明 E 加上 a 后一定不会是有理数，我是指，避免了 -e + a = 0 这种情况 我知道存在，但是应该不好直接证明 我的想法就是直接反证，如果这个 a 是不存在的。就是说，任何一个 a 加上 E 后都会产生有理数 a 肯定不能在有理数上取，就是说，a 取任意无理数，加上 E 都会产生有理数。 那我是不是能说 E 的势和无理数一样大，和 $\overline{\overline{E}} < c$ 冲突了 我是指，不管 a 取什么无理数，E 中都有其相反数。感觉这应该设计到数论的知识了吧

⋆
12. 我还是一样，可以看懂他在干嘛，但是具体为什么要这么干，我就不知道了，但是

这个结论很重要

14. 应该是直接用了 12 的结论，代数数对应$\mathscr{P}(N)$

《实变函数论》§1.4 定理 1.13 说明问题的方法可以学学，就是顺着说要怎么说。我现在其实看不到规律 但是未来这种证明多看看就会说了 思考题 1.E 的导集如果为空，说明任意一点x总能找到δ 使得$(x - \delta, x + \delta)$ 使得里面没有 E 中的任何点 那么我就可以用不相交的区间来映射每个点了。而 R 上不相交的开区间是可数的，和不可数矛盾 2.这个我还真不会了，判断可数，我现在一点手法也没有。判断对等互为子集，但是这个我真不会

真造孽呀，我看了眼 v1 发现例 11 的第一题还挺有意思的，但是我不会，艹了 这个例 11 里面每题都非常有含金量 感觉 v1 里面很多题目都很能点播人

思考题 2 的证明其实很简单，自己再想想，居然是自己的老方法了 思考题 3，我不知道为什么不能以数值大小排列就是无线集了
4. 给提示了，自己写完
5. 距离大于 1 可以用开区间表示，可数，具体证明等下写完整

其实《实变函数论》§1.5 例 1 p10 这里我其实有一点没想明白 既然可以通过开区间套确定一个唯一的有理数，那么这个开区间所圈出来的区域不就不包含其他点了吗？ 这个问题一定要得到解释

这个例 2,tm 必要性中有用到闭集吗？你证明 nm 呢？ 我大概看懂了，其实就是想通过$E' \subset E$ 来证明闭集，而聚点定义了连续 例 3 学学怎么说明。我知道这个很显然 为什么闭包一定会属于闭球 F？ woc 这里其实用到了一个结论： 一个集合的闭包是包含该集合的最小闭集。如果 $A \subset B$ 且 B 是闭集， 那么$\overline{B(x_0, r)} \subset B$ 这个东西的证明其实不难，因为闭包就是最小闭集，任何包含了这个集合的闭集都大于等于闭包 关于集合的闭包是包含该集合的最小闭集的证明，我还是比较认可 gemini 的方法的
原集合为 A 定义$E = \cap_{F \in \mathcal{F}} (F)$ 这里 F 就是包含 A 中所有点的闭集 因为无限个闭集的交还是闭集，自然，这里的 E 也是闭集了，而是还是最小的 现在要证明的就是这个闭集能够包含 A 的所有聚点 额，其实写到这里，我就写不下去了。就不知道怎么写了。 现在我需要证明这个 E 与$\overline{A}$ 是相等的。 首先$\overline{A} \subset E$ 这个是显然的。接下来需要证明 $E \subset \overline{A}$ 我想到的是反证法。如果不是子集，就是说明 E 有 A 和 A 的聚点以外的点了。那么我们就在 E 中找到一个子集 让它只包含那些点，和 E 是最小的矛盾 不过我也不知道我这里的证明怎么样。总感觉还是有问题

如何证明闭集中任意子集的导集都在闭集中。这个很好证 聚点的定义就是任意区间无穷个点，这无穷个点既属于子集，也属于整个的集合。 所以既是子集的聚点也是整个集合的聚点。就那么简单就可以说明了

例 3 的后半段证明就是闭集的点同时也是子集的点。但是我认为并不严谨。因为它周围可以有无穷的点 但是这些无穷的点并不一定属于$B(x_0, r)$，最直接的例子就是有理数， 你可以说一个点边上有无穷的有理数也可以说有无穷个无理数。但是你不能说这无穷个无理数是有理数

注意，例三最后居然来了一个稠密的定义。太恶心了。 这里一定要注意稠密的定义 例 4 这个我真证明不来。左边是右边的子集很好证明。重点是右边为什么可以是左边的子集 任取一点，然后说明任一区间都有无穷个 E 中的点吗？ 这怎么说明？ α其实是固定的，这怎么说明总能找到两个整数让他们与一个无理数相乘，前 m 项小数可以相同? 这是需要理论依据的吧

例 5 这个我真不行了。主要是对三角函数不是那么熟悉，左边是右边的子集很好证明 问题是如何证明右边是左边的子集? 别的不说，想要证明 1 属于左边都够呛吧 我看了一眼证明，我大概猜到了，和例 4 有关
令 A = $\{n + 2m\pi : n, m \in z\}$ 那么 cos(A) 与 cos(n) 的值其实是相等的吧， 我是指，A 中的 n 和后面的 n 相同的时候。
而这里2π 是个无理数，我们其实可以得到 A 的导集其实是 R 吧
由于 cos 是连续函数，任取一个点$y_0 \in [-1, 1]$ 总能在 R 上找到一个点x_0，使得$\cos(x_0) = y_0$ 并且，有 $\lim\limits_{x \to x_0} (\cos(x)) = y_0$ 即 $\lim\limits_{x \to x_0} (\cos(x)) - y_0 < \delta$ 现在只需要证明这个点是 A 的聚点就好了 取任意$\delta_0 > 0$ 令$10^{-m} < \delta_0$ 总能在 A 中找到点m_0 使得m_0 与x_0 的前 m 项是相同的，令$[\![m_0 - x_0]\!]$为n_0 我们就在 A 中找到了这个点$n_0 + 2m_0\pi$ 说明这个x_0 确实是A 的聚点 而且还能得到 $|\cos(n_0) - \cos(y_0)| < \delta$ 说明[−1,1] 上任意一点的任意区间都有一个 n 使得 $|\cos(n_0) - \cos(y_0)| < \delta$ 说明$[-1, 1] \subset \overline{E}$ 诶，看了眼，答案，思路确实就是这样的

这个定理 1.16 其实在郑维行的书中有。哈哈。有限个闭集的并是闭集但是无限个就不行了 可以直接取反，就是无限个开集的交，(0,1/n)就是反例 这里对于极限的理解，我认为非常有说法。因为按照有限的证明说法，套进无限的情况下 明明是符合条件的，但是无限的情况在符合条件的情况下，居然可以不是闭集。 这太颠覆我的认知了。 书上这个证明自己再看一遍，和郑维行的是一个方法。但是书上没有证明聚点的交等于交的聚点 但是他这个ii 的证明我就看不懂了，莫名其妙的就是交集的自己了，是F_α 的子集 和是他交集的子集之间有什么关系吗? 还有最后那个交集的闭包是闭包交的子集，可以花时间证明一下?

定理 1.17 我前面看懂了。后面我猜他是想说，这个极限点不在$F_k \setminus F_{k+1}$ 中 既然不在这里，那么极限点就一定在F_{k+1} 中了。所以F_{k+1} 不空 这中间肯定跳步骤了。得找别的教材的证明，反正我感觉这里的证明都是奇奇怪怪的。 主要我不知道为什么他突然拿出 Bolzano-Weierstrass 了 我 tm 还不好说他不研究，谁让我菜呢。md

思考题 1 包的，如果是无限集，那就有聚点了，有聚点，那么自己就可以有开集

woc,无限集可以有自然数，那没办法了，每个点都是闭集

思考题 2 肯定不成立呀，那么好的结论，如果是个人，肯定会拿出来当定理的
如果是并集，我还可以一眼找出一个大小关系，证明另一个就好了。可惜这个是交集 但是左边一定属于右边是好证明的。 首先$A \cap B$ 一定 $\subset A或B$ 其次$A \cap B$ 的聚点一定是 A 的聚点或是B 的聚点 所以左边一定是右边的子集 md 不能这么证明，因为又做了一个交集的操作 只能直接用定义 直接取x_0 为 $A \cap B$ 的聚点， 令$\{x_n\}$ 就是那个无穷点列 x_n 中的每个元素$\in A \cap B$ 那么很容易得到，这些元素也同时$\in \overline{A} \cap \overline{B}$ 所以左边是右边的子集 右边到左边，得到的应该是这个： $y_0 \in \overline{A} \cap \overline{B}$ 得到的可以是两列 $\{y_n\} \in A$ $\{y_m\} \in B$ 这里$y_n和y_m$ 可以是不同的点列 有了。虽然我现在脑子有点累，没能想到是什么情形。但是这么看来，右边不一定是左边的子集 艹了，我写了一堆，nm 答案就一个反例

思考题 3. 无限个闭集的并不是闭集的反例这不就来了嘛。啥也不是，下一个

思考题 4. 这我之前就证明过了，我证明例 3 的时候证明了一下这个， 事实证明，这个结论和例 3 没有半毛钱关系 答案的前半部分直接说，闭集中所有子集的闭包都是这个闭包的自己就好了。
本来定义的就是 $\bigcap_{E\subset F} F$ 这样，我们就可以说 E 的闭包一定属于 $\bigcap_{E\subset F} F$ 答案的另一半比我的优雅。我 tm 说了一堆，其实很浅显，既然都是 E 是所有闭集的交了，那么自然 一定也是闭包的子集，这就是定义呀。闭包包含了集合的所有点，那么一定就是 E 的父集

思考题 5. 这里 F 和 F' 就相差了孤立点 有导集了，所以肯定是无限集。现在就是需要证明可数 我 tm 证明可数一直证明不来，每次都不懂为什么可以这么说明。 我就只会一个方法，证明和 N 或者 Q 这类可列的集合对等 证明集合对等的话就很简单了，互为子集，不然呢？ 这里要是证明导集是可数的，很简单，因为一个无穷对应了一个与其他开集互不相交的开集 而 R 上互不相交的开集是可数的。这里抽象的要死，说 F 是可数集 这个先跳过吧

思考题 6. 我想到的是反证法。找不在 F 上的聚点。如果这个聚点存在，就说明不是闭集 好，不妨直接令这个点为(x_0, y_0) 点列$\{(x_n, y_n) : f(x_n) \geq y_n\}$ 既然这个点要不在 F 上，那么一定是 $f(x_0) < y_0$ 直接来一波保号性。如果这个点的函数值小于y_0 那么其极限点应该都小于，直接矛盾

思考题 7. 一个是 Q，一个是$P = \{q + e\} \setminus \varnothing$ 首先，他们肯定不相交，并且 Q 在 R 上稠密 现在证明 P 在 R 上稠密。$P \subset R$ 这是肯定的，所以接下来就是证明 P 的聚点也属于 R 了 md 这我怎么说，R 上怎么可能还有数不属于 R 的，默认成立😋

极限无穷和间断 导致可列的那几个题目再自己多看看

这个定义 1.24 真的操蛋，现在才说。明明是很有用的东西 这个例 6， 简直了，在郑维行的书上，是大于等于和小于等于，然后说是闭集。哈哈 艹，我没找到。以后有机会再找吧 这个在答案 v1 中的 49 里面例 6 的(1) 里面 现在把这个例 6 自己重新看看 没看懂。还是不能理解他们之间的必要性 哦，这个应该是在郑维行中的像集开集，原像集就是开集那里

这里的连续是拓扑上的连续。拓扑上连续的定义就是像集是开集，原像集为开集

ok 了，补了 1 页，还有 3 页

例 7. 这个振幅还挺有意思。如果是连续函数，振幅会为 0 吗？答案是不会 $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 这个东西在(0,1) 上是有定义的，而且连续，但是振幅却为 2 估计这个概念诞生就是因为有这类函数 看了答案了，我认为答案的写法很好。这题一下子给我想歪了。其实这题的解法很死板

36 页看完就能把 2025-10-11 号的内容补完了

这个定理 1.19 我不理解这里的构成区间为什么一定要分那么多次？直接说(a', a'') 之间满足这个条件就好了。

他这个证明 R 中不相交的区间族是可数。完全理解不了 为什么$(c, d) = (a', a'') = (b', b'')$ 我看到这个我知道他想证明这两个区间是相交的。中间也不知道在说些什么，神人 中间就一句“且” 就得到结论了，注意力太惊人了。 我认为更加好的说法就是反证。如果不是重合的，那就不满足定义了。一堆话，完全不知道在干嘛

说实话，我看完这个ii 中的证明，看了那么多对于可列的证明。感觉证明方式都很模糊 找出一种可列方法就行了吗？我认为最合适的方法还是要和 N 建立一一对应吧。 每次都很喜欢用这种抽象的序数方式，太逆天了 这个“还有一个重要事实”我现在还是理解不了

思考题
1.

后面这个明显就是定义呀。这个边界点包括了不属于内点的聚点和孤立点
$\left(\mathring{E}\right)^c = \overline{E^c}$

要证明两个集合相等就证明他们之间互相包含 我现在证明右边是左边的子集，因为好证明 (其实我一开始是想要在我做取补集前就比较的，但是，我不知道会不会影响结果)
E = $\mathring{E}$ ∪聚点中属于 E 的点 ∪ 孤立点
那么 E 的补集就包括了 $\left(\mathring{E}\right)^c \cap 聚点中属于E的点^c \cap 孤立点^c$

我感觉还是直接说明更加简单一点
任取一个点x_0 在$\mathring{E}$ 中 则我们能够证明这个点一定能在右边找到就好了

艹了，说不来。我知道这个是对的。但是不知道怎么说 这个证明在 v1 的例 10 的第一问 证明略。我艹

我现在想到的方案是将这些中文的点用算术表示出来 这样才能运算 按照聚点的定义，一个点如何是内点，则一定是聚点

聚点中不属于 E 的点 $E' - E$
孤立点 $E - E'$
聚点中属于 E 的 点 $E - \mathring{E}$
跳过了，想不下去了，晚上再想

这个直接说明就好了。 任取一个点x_0 在$\mathring{E}$ 中 则我们能够证明这个点一定能在右边找到。 具体怎么个找到法 定义一个区间$B(x_0, r) \subset E$ 这个是符合定义的 则$B \cap E^c = \varnothing$ 由于x_0 边上的点都是 E 中的点，所以自然不可能是E^c 的聚点了，所以 $x_0 \notin \overline{E^c}$ 那么自然 $x_0 \in \left(\overline{E^c}\right)^c$ 得到$\mathring{E} \subset \left(\overline{E^c}\right)^c$

同理右边，任取一个x_0 则$x_0 \notin \overline{E^c} = \varnothing$ 然后用的是定义，既然不属于补集的闭包了，就是说，这个点的领域没有补集的点 $B(x_0, r) \cap E^c = \varnothing$ 那不就说明 $B(x_0, r) \subset E$ 所以$x_0 \in \mathring{E}$ 得到 $\left(\overline{E^c}\right)^c \subset ()\mathring{E}$
所以相等 这题很好，一定要花时间多看看

2.这里的不连续点就是 $x \neq 0, y = 0$ 的点吧 就是 x 轴上的$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 极限为 0，不属于集合,所以不是闭集 和我的证明一样，很好

3.这题很简单 如果不为空，一定可以找到这样的∂G,其中某个点x_0使得$B(x_0, r) \cap G^c \neq \varnothing$ 如果 G 不是开集的话，就可以在 G 中找到一个点，x_0使得$B(x_0, r) \cap G^c \neq \varnothing$ 且$B(x_0, r) \cap G \neq \varnothing$, 那么$x_0 \in \partial G$这个与 $G \cap \partial G = \varnothing$ 矛盾 所以，充要 后半部分在郑维行的书中有，我也做过了。所以我就先不写了，但是以后一定要补完

4.这居然是开集，我还以为是闭集，太抽象了 不会，跳过了 过几天得花时间，将 v1 中这章的例题做一遍。我认为里面的题目都非常有意思 5.也是，这题我现在一点思路没有，只能多看别人的证明 6.这很好理解，但是具体该怎么证明？ 直接令这个点为$x_0 \in E$ 则一定存在 r，使得 $B(x_0, r) \setminus x_0 \subset E^c$ 所以$x_0 \in \overline{E^c}$ 所以$x_0 = E \cap \overline{E^c}$

我现在都不能理解引理 1.20 的证明

这个定理 1.21 为什么L_k 的定义里要和 F 交一下，不交会出问题吗？就是说，开覆盖可以包含 E 以外的点对吗？ woc,这个东西的证明我居然看懂了

例 8 可以理解。如果要我写证明的话， 我会这样写: 令$x_0 \in F$ 由于$F \subset G$，则$x_0 \subset G$，所以，必定存在$r_0 > 0$ 使得$B(x_0, r_0) \in G$ 那么$F + \{r_0\} \subset G$ 不过这题不用 Heine-Borel 有限子覆盖也能证明吧

定理 1.22 这里开覆盖的构造方法中 E 和E^c的δ_x居然是相同的 为什么这种开覆盖的构造方法能够保证一定是开覆盖？ 开覆盖难道不能包含 E 以外的点吗？ 说实话，我现在对于开覆盖的理解都非常模糊 这个 1.22 和 1.21 整成了个充要条件

思考题
7. 包能的，直接也能够定义，E 的导集上的点x_0 对于任意$B(x_0,\delta)$

总能找到一个点a_0 使得$a_0 \in E$既然$a_0 \in E$ 了，那么$a_0 \in \{G_\alpha\}$ 所以x_0 同样也是$\{G_\alpha\}$ 的聚点

8.这个我可以直接用闭区间套吗？ 需要说明一下 因为闭区间套要求是子集，而这里不一定。我大概知道这题什么意思 但是指标集用这种数有点恶心。 令$[a_1,b_1] \cap [a_2,b_2]$为$[c_1,d_1]$ 令 $[c_1,d_1] \cap [a_3,b_3]$为$[c_2,d_2]$ 则 $[c_2,d_2] \subset [c_1,d_1]$ 同理能够得到 $[c_1,d_1] \supset [c_2,d_2] \subset [c_3,d_3]... \subset [c_n,d_n]$ 由闭区间套可知，不为空

9.我想到的其实是每个闭区间对应一个有理数 这个不会了，ai 说这个结论是错的。给我人干麻了。但是我其实是认为这个结论应该没问题 因为是可数，如果是不可数集，那大概率不行。

哈哈，看了眼 v2 §1.2.2 的例 10 的第一问，那个不动点的证明还挺有意思

10.这个我是一点头绪没有。主要是完全没学过这个，艹！ gemini 说是用了 dini’s theorem ε 这个我看了一下 gemini 的解答，我大概懂了，但是还需要深层的理解

例 9. 这个就是 v2 §1.2.2 的例 10 的第一问。直接过

思考题 11. 我的想法是证明导集也属于 E F 是闭集，难道这个 E 不能是开集吗？ 应该分类讨论，分成连续和不连续的。 $\{x \in F : f(x) = 0\}$ 中连续的点命名为 E E 的边界点可以极限为 0 但是值不为 0 吗？ 不会，因为是连续的,如果左/右 极限为 0,则函数值一定为 0 所以边界是闭区间。 如果是不连续的点，那么自然是闭集 我认为我这个思路应该没有什么问题

思考题 12. 这个我能想到的就是直接定义，找任意一个点$x_0 \in (E_1 \cup E_2)$ 若$E_1 \cap E_2 = \varnothing$就分段 既然$x_0 \in (E_1 \cup E_2)$，则$x_0$ 要么在E_1中要么在E_2 中 当$x \in E_1$时 则对于任意ε，总能找到一个$\delta < 0$ 使得 $\forall x \in B(x_0,\delta) \cap E, f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ 同理E_2 对于$E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ 的情况其实也是分这两步 因为就算有交集，那也是在E_1 或者E_2 中，照样连续 (ii) 为什么闭集不能是并集了？ 因为只能保证在单独的E_1或E_2 上连续 事实上，如果这两个点的边界重合，可以有间断点的情况 这个证明，自己花时间写掉

思考题 13.