以 I_0, I_1 代 I，F_2^0, F_2^1 代 F_1，又可得到 a_2, b_2，以及

$$I_{00}=(a,a_2),\quad I_{01}=(a_2,a_1),\quad I_{10}=(b_1,b_2),\quad I_{11}=(b_2,b),$$

且对 F_3，有 $F_3^{00}, F_3^{01}, F_3^{10}, F_3^{11}$ 等非空闭集. 继续这样做下去，可得闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 以及开区间组列 $I_{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}$（其中 $\varepsilon_i=0$ 或 1），且有 $I_{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i=\varnothing$. 作点集

$$E_n=\bigcup_{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n\in\{0,1\}}I_{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n},$$

不难证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$ 的基数为 c.

(5) 反证法. 若结论成立，则可在 $\mathbf{R}^2$ 上取一条直线，它不通过所有闭圆盘之间的切点. 这样，$\mathbf{R}$ 就表成了一列互不相交闭集之并，而与(4)矛盾. 证毕.

例 6 解答下列问题：

(1) 试在坐标平面 $\mathbf{R}^2$ 中作稠密点集 E，使得平行于两轴的直线至多交 E 中一个点.

(2) 设 $F\subset\mathbf{R}^2$ 是闭集. 若 D 是包含 F 的闭圆盘，且是任一包含 F 的闭圆盘的子集，试证明 D 中的点均为 F 中两个点连线的中点.

证明 (1) $Q=\{r_n\}$ 为 $(-\infty,\infty)$ 中的有理数列，且当 q 是有理数时，定义 $\pi(q)$ 为 q 的十进位小数表达式中出现 1 的个数(非负正整数值)，并作点集 $E=\{(q,\sqrt{2}q+r_{\pi(q)}):q\in Q\}$.

(i) 对 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 以及 $\varepsilon>0$，则在区间 $I_\varepsilon=[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\times[y-\varepsilon,y+\varepsilon]$ 中必有属于 E 的点. 这是因为取 $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ 中有理数 q'，设其小数位为：

$$q'=.a_1a_2\cdots a_n\quad(a_n\neq 0),$$

则当 m 充分大时，存在点 q''：

$$q''=.a_1a_2\cdots a_n\overbrace{0\cdots0}^{m个}2<x+\varepsilon,\quad q'<q''.$$

假定在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有 k 个 1，则当 y 取遍 $[q',q'']$ 中的有理数时，$r_{\pi(y)}$ 取遍 $r_k,r_{k+1},\cdots$. 根据稠密性可知，$[q',q'']$ 中存在 $r_0\in Q$，使得

$$|\sqrt{2}r_0+r_{\pi(r_0)}-y|<\varepsilon.$$