

我这里内容的顺序是老师上课的顺序，不是书本的顺序。所以页码标记至关重要

直积在书本 p11 页有讲

定理 1.3 就单纯想说明上极限只要求有无穷项，但是下极限却要求从某一项以后的所有项都要满足 p11 例 8 老师有讲，但是我认为没有比较记录。因为他说的和书本没什么区别，只是更加详细了。我不是高中生了，所以我不会记录这段内容

引入基数是为了在无限的情况下两个集合比大小 人的常识总是认为  $A > B$   $A = B$   $A < B$  这三件事情有一件是一定发生的。那是当然了，毕竟数量可以直接数出来 但是这三件事情中的一件要一定发生。需要满足 axiom of choice 和 well-ordering theorem

$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \Leftrightarrow$  存在  $A$  到  $B$  的一一映射

p13 思考题

1. 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 记  $f_1(x) = f(x)$ ,  $f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) (n = 2, 3, \dots)$ . 若存在  $n_0$ , 使得  $f_{n_0}(x) = x$ , 则  $f$  是  $\mathbb{R}$  到  $f(\mathbb{R})$  上的一一映射

证明: 要证明一一映射, 就得证明单射和满射

单射: 如果不单射, 则存在  $x_1 \neq x_2$  使得  $f_n(x_1) = f_n(x_2)$

当  $n > n_0$  时

$$f(x_1) = x_1$$

$$f(x_2) = x_2$$

而这与不单射冲突, 所以单射

满射: 即证明  $f(x)$  可以映射回  $x$

$$\because f_{n_0}(x) = f_{n_0}(f_{n_0-1}(x))$$

$$\text{令 } f_{n_0-1}(x) = y$$

$$\text{则 } f_{n_0}(y) = x$$

所以满射

2. 不存在  $\mathbb{Q}$  上的连续函数  $f$ , 它在无理数集  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  上是一一映射, 而在  $\mathbb{Q}$  上则不是一一映射

证明: 连续函数要么单调, 要么不单调。如果单调。那么在有理数集上就双射了, 不满足在有理数上不是双射这个条件。所以这个函数肯定不是单调的。既然不是单调的, 那么就肯定有最值  $a, b \in \mathbb{Q}, f(a) = f(b)$  这个是满足在  $\mathbb{Q}$  上不是一一映射。根据 Rolle' s Theorem, 极值点左边一个无理数  $x_1$  的值肯定可以在极值点右边找到对因一个  $x_2$  使得  $x_1 = x_2$  这里  $x_2$  不能是无理数, 因为  $x_2$  如果是无理数的话就和无理数单射冲突了, 所以这里  $x_2$  必须得是有理数 但是在这个区间中, 有理数的势是远小于无理数的势的。所以总是有无理数找不到对应的有理数。但是这个无理数总是需要有东西对应。所以只能对因一个无理数, 和单射冲突

3.  $f: X \rightarrow Y$  是满射当且仅当对任意的真子集  $B \subset Y$  有  $f(f^{-1}(B)) = B$

先证明单射: 如果不是单射, 那么我们可以在  $B$  中找到两个数  $x_1, x_2$  使得  $f(x_1) = f(x_2)$  但是  $f^{-1}(f(x_1))$  就会对应两个值了, 要么  $x_1$  要么  $x_2$  所以和  $f^{-1}(f(B)) = B$  矛盾, 得到  $f(x)$  是单射

再证明满射

如果  $f(x)$  不是满射, 我们取  $A = Y \setminus B$  既然不是满射, 我们可以得到  $\forall y \in A f^{-1}(y) \in X$  不妨令  $y_1 \in A$  则  $f^{-1}(y_1) = x_1, x_1 \in A$  由于不满射, 所以  $f(x_1) = y_2, y_2 \in B$  即  $f^{-1}(f(y_1)) = y_2, y_1 \in A, y_2 \in B$  直接和后面的矛盾了。所以  $f: X \rightarrow Y$  是满射

但是我整个写完, 也没感觉证明这个单射的必要

老师在讲这道题之前还讨论了几个有意思的问题

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A_i \subset \mathbb{R}$$

$$f\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) = \bigcup_{i \in N} f(A_i)$$

这个东西成立吗? 只要  $f$  是一个映射, 这个结论一定成立。可以证明一下。要证明两个集合相等。就是要证明两个集合互为子集 老师说是  $f\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) \supset \bigcup_{i \in N} f(A_i)$  容易证明, 那么我们就先说明左边包含右边 因为可以把右边拆出来, 每一个  $f(A_i)$  都被  $f\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right)$  包含, 所以它们的并, 肯定也被包含 那么反过来呢?

存在  $y \in \bigcup_{i \in N} f(A_i)$  一定能找到一个  $x$  使得  $x \in \bigcup_{i \in N} A_i$  当  $x \in A_i$  时, 对应的  $y \in f(A_i)$  而  $f(A_i) \subset \bigcup_{i \in N} f(A_i)$

但是这个交集的结论转成交集就不一定成立了 对任意的  $A, B \subset X$ , 有  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  可以让左边交为空, 而右边有交集。而, 如果想要这个等式可以成立。只要满足  $f$  是单射就行了, 这就是第 4 题的 *ii* 想告诉我们的

好, 现在继续看思考题第 4 题。老师在第 4 题前讲这些内容就是为了第 4 题做铺垫的 这里由  $i \rightarrow ii$  其实条件过强了。其实只要满足  $f$  是单射就可以证明了。

首先, 我们可以得到的一个结论就是  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$  这个是无论是否单射都能成立的。只要是个映射, 都能成立 我先把这个的结论证明一下。let

$$y \in f(A \cap B)$$

this means there exists an  $x \in A \cap B$  such that

$$y = f(x)$$

since  $x \in A$ , we know  $y = f(x) \in f(A)$  since  $x \in B$ , we know  $y = f(x) \in f(B)$  Because  $y$  is in both  $f(A)$  and  $f(B)$ , we have

$$y \in f(A) \cap f(B)$$

Therefore,  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$  is always true

其实就是说, 不管从左边取哪一个元素, 那个元素一定可以在右边找到。在 windows 上写中文太痛苦了。我以后会尽量用英文和符号来表达。除非由大段的文字要写好, 要说明两边相等, 我们还需要证明右边是左边的子集。老师的说法不好。不如我下面说的 *iii* 的反证法清晰。直接看我 *iii* 中用反证法说明的。如果单射, 那么一定是从两个集合中取到相同的数, 而这个相同的数的集合就是  $A$  与  $B$  的交集 由此  $i \rightarrow ii$  就被证明了 *iii* 这里可以直接使用 *ii* 的结论

Of course, you can prove by contradiction. If the right side is not  $\emptyset$

When you say  $y \in f(A) \cap f(B)$ , this still means there' s an  $a \in A$  and an  $b \in B$  with  $f(a) = y \wedge f(b) = y$

Because the function is injective, we know that  $a$  and  $b$  must be the same elemen.

Therefore, the single pre-image  $x$  must belong to both  $A$  and  $B$ , which means  $x \in A \cap B$ .

这个 $iv$  其实更加好证明了

$$B \setminus A = (B \setminus A) \cap X$$

$$f(B) \setminus f(A) = (f(B) \setminus f(A)) \cap Y$$

直接就可以套用 $ii$  中的式子 这个从 $iv \rightarrow i$  其实也是可以直接反证法, 如果不是单射, 这个等式就不成立了。

最后可以总结一下。一般这种互相成立的都是 $i \rightarrow ii \rightarrow iii \rightarrow iv \rightarrow i$  这样证明一圈下来, 不用两两互相证明。因为效果是一样的。满射其实在这里面一点用都没有

**定理 1.5 (Cantor-Bernstein 定理)** 若集合 $X$ 与 $Y$  的某个真自己相等,  $Y$ 与 $X$  的某个真子集相等, 则 $X \sim Y$

这个定理说明了  $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$

$$\overline{\overline{X}} \geq \overline{\overline{Y}}$$

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$$

这三个等式, 一定会有一个发生 这里一个是有势, 一个是这里用的是  $\leq$  与  $\geq$

如果这里使用的是  $<$  与  $>$  就不行 这个定理说的就是  $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$

$$\overline{\overline{X}} > \overline{\overline{Y}}$$

这两件事情是一定不可能同时发生的 这个和这两件事情一定有一件会发生是两回事

如果

$$\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$$

$$\overline{\overline{X}} \geq \overline{\overline{Y}}$$

这两件事情同时发生了, 那么说明

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$$

现在证明定理 1.5 老师的证明方法和书本的方案不同。我这里说一下老师的证明方案。

老师的证明方法和郑维行的是一样的, 他们的这个方法和夏道行的方法其实是同一个意思, 只是用的变量名字和画的图不同罢了

程其襄和夏道行的是一样的。徐森林的第二种证法也是这个。

徐森林的第一个其实就是我们现在这个周民强的方法, 直接用了 Banach 的结论

我这里专门把这个证明重新写一遍, 是因为我当时其实是有一个疑惑的。而解开这个疑惑的就是我下面这句:

这个东西的证明最重要的是能够合理应用这两个对等。

先把变量初始化一下 😊

$$x_0 \subsetneq X$$

$$y_0 \subsetneq Y$$

由题目给出的条件, 我们定义两个双射

$$x_0 \xleftarrow{f} Y$$

$$y_0 \xleftarrow{g} X$$

好, 下面令

$$x_1 = X \setminus x_0$$



下面的我就不继续画了，等我什么时候成为 typst 高手再说吧

我当时的疑惑在于从  $y_1 \mapsto x_2$  这段，因为  $y_1$  这个时候是在  $y_0$  中的。诶这个时候就会有小聪明会说了，我们上面不是有定义了一个映射了吗？

$$y_0 \xrightarrow{g} X$$

这不就说明  $y_1$  可以映射到整个  $X$  上的某个区间了？

对于这个看法，我只能说，你是对的！你非常敏锐，这不就说明  $x_2$  不一定在  $x_0$ ，也可能与  $x_1$  有交集。

这就是我专门把这个题目自己写一遍证明的原因了。

注意，我们其实是有两个双射，我们还有一个

$$x_0 \xleftrightarrow{f} Y$$

这个双射可以让处于  $Y$  中的  $y_1$  映射到  $x_0$  上

我当时的问题就是，为什么不使用

$$y_0 \xrightarrow{g} X$$

这个映射，这个映射也是成立的吧？为什么不使用这个映射呢？

这个映射成立，没有问题

就是因为这个映射成立，所以我们其实可以得到将  $y_1$  双射到  $X$  上可以有别的区间，不仅仅是现在的这个在  $x_0$  中的区间。（当然，我现在只能找到  $y_1$  通过  $g$  来对应到  $x_1$ ，是一个  $x_2$  以外的区间。其他的我就真不知道怎么找了）

但是。使用这个映射，无法得到我们希望得到的东西。所以我们不采用这个映射。

仅此而已。明明使用  $f$  是没有问题的，而且还可以得到我们想要的结论，为什么不用呢？

至于详细证明什么我，我就不再写了，书上都有。

p17 思考题 1. 设  $A_1 \subset A_2, B_1 \subset B_2$ , 若  $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$ , 试问: 是否有  $(A_2 \setminus A_1) \sim (B_2 \setminus B_1)$  ?

这个是不对的，我想到的是

$$A_1 = \mathbb{N}$$

$$A_2 = \{-1, -2, -3, \mathbb{N}\}$$

$$B_1 = \mathbb{N}$$

$$B_2 = \{-1, \mathbb{N}\}$$

老师给的例子是

$$A_1 \sim A_2 \sim \text{偶数}$$

$$B_1 \sim \text{奇数}$$

$$B_2 \sim \text{自然数}$$

2. 若  $(A \setminus B) \sim (B \setminus A)$  则  $A \sim B$  对吗？

我第一个想到的证明是令

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

但是这么看来，感觉这个好像是对的。因为这个本来看起来就对，加上我找不到反例

这里其实就用到了一个结论

现在有三个集合 A,B,C, 现在 A 与 B 对等, 能否得到这个结论?

$$A \sim B \Rightarrow A \cup C \sim B \cup C$$

当然是不能的。我们可以让  $A = C = \{1, 2, 3\}$ , 让  $B = \{4, 5, 6\}$ , 显然这个有限集的例子就是反例了

但是我们可以通过添加条件使得这个对等, 当 C 与 A,B 都不相交的时候就是对的证明的时候, 让 A 与 B 对等, 然后 C 与自己对自己就好了。

现在有了这个结论, 也是分别对等就可以了。证明结束

$$A \sim B \Rightarrow A \cap C \sim B \cap C$$

3. 若  $A \subset B$  且  $A \sim (A \cup C)$ , 试证明  $B \sim (B \cup C)$ .

$$B \cup C = B \cup (C \setminus B)$$

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

$$A \cup C = A \cup (C \setminus A)$$

$$\therefore B \cup C = A \cup (B \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

$$\therefore B \cup C = (B \setminus A) \cup A \cup (C \setminus B)$$

$$\therefore C \setminus B$$

Q

#### 1.14 幂集 $\mathcal{P}$

这个例一有点抽象 如果  $A \subset B$  那么  $f(A) \subset f(B)$  难道不是一定成立的吗? 直接把 B 看成 A 并上余集 不就好了 直接就是  $A \cup A^c = B$  and  $f(A) \subset (f(A) \cup f(A^c))$  感觉这个条件给了和没一样 但是我问了 ai 说是集合的映射和函数的映射是不一样的, 在幂集上是从集合到集合的映射。这个 S 我直观上知道是对的, 这个东西会需要专门说明是对的吗? 这个证明看懂了. 我之只能说值得多看几遍

p14 思考题: 5. 设  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ . 若对任意的  $x \in X$ , 必有  $g(f(x)) = x$ , 则  $f$  是单射,  $g$  是满射

第一个单射直接用  $x_1, x_2$  让他们对应的  $y$  相同, 那么  $g(y)$  唯一, 所以  $x_1 = x_2$  这个满射也容易证明。在 X 中找一个点, 不在  $g$  的值域上, 使得映射不成立就好了

p17 关于集合大小的讨论, 看老师视频

例 10 还是不会证明

定理 1.10 的证明, 我并不满意, 这只能说明, 他这种排法不行, 没能证明其他的排法不行 1.12 的证明我不是很能理解, 先记下来吧

p19 例 10 的证明里面用到了有理数的稠密性

可数和可列看书本 p20, 例 10 上面那句话

书本 p11 他这里例一, 为什么有这个结论 书本 p11 md 这个论文在第 93 卷, 不在第 78 卷书上的标记是有误的 他这个例 2 为什么上积分和下积分不同, 难道无理数就是比有理数小吗?

13 页的这个 V. Volterra 做出的可微函数是哪一个 同一元这个我也不理解