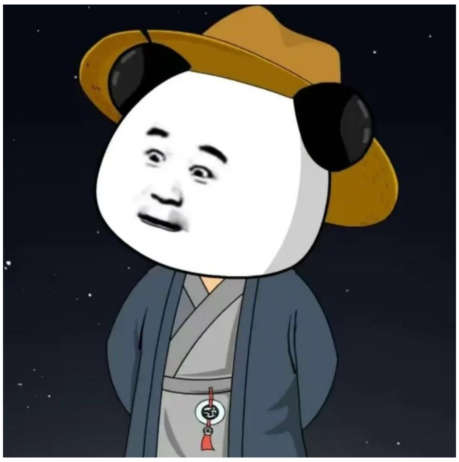
数学之旅



Ji Li

2025 年 6 月 11 日

目录

第 1 章

二项式系数

预备知识

基本组合数公式：

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

帕斯卡公式:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

1.1 二项式定理

定理 1.1.1 (二项式定理)**.** 设 n 是正整数. 对所有的 x 和 y，有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

证明. 法 1：乘积展开，对项 $x^{n-k}y^k$，选择 k 个因子为 y 而剩下 $n-k$ 个因子为 x 的组合数.

法 2：归纳法.$n=1$ 时等式成立.

假设等式对 n 成立，对于 $n+1$：

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) \\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + \binom{n}{n} y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.$$

即证. □

1.2 组合恒等式

通过二项式定理和组合数的性质，可以得到诸多有益的推论和组合恒等式.

推论 1.2.1. 集合 S 含有奇数个元素的子集的数目恒等于含有偶数个元素的子集的数目.

证明. 设 $|S| = n$. 在二项式定理中，令 $x = 1, y = -1$，得

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

令 $x = 1, y = 1$，得

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

因此有

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = 2^{n-1},$$
$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1}.$$

即证. □

对等式进行求导和积分是构造组合恒等式的常见思路. 如对等式 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$，两边对 x 求导得 $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$，带入 $x = 1$ 得 $n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. 更进一步地，该组合恒等式还可以在两边乘以 x 后继续迭代求导，以得到 $\sum_{k=1}^{n} k^p \binom{n}{k}$ 对任意常数 p 的组合恒等式. 一个积分构造组合恒等式的例子：

推论 1.2.2.

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}.$$

证明. 对等式 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ 两边对 x 求不定积分：

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

令 $x = 0$，解得 $C = \frac{1}{n+1}$. 令 $x = 1$，即得所求式子. 注意两边求不定积分容易遗漏常数 C. □

推论 1.2.3 (范德蒙卷积公式). 对正整数 m_1, m_2, n，有

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k} = \binom{m_1+m_2}{n}.$$

证明. 设 S 是一个有 m_1+m_2 个元素的集合，我们需要计数 S 的 n 子集的数目（即等式右边）. 把 S 划分成 A, B 两个子集，其中 $|A| = m_1, |B| = m_2$. 利用这个划分去划分 S 的 n 子集.S 的每一个 n 子集包含 k 和 A 的元素和 $n-k$ 和 B 的元素，这里 $0 \le k \le n$. 根据加法原理计数所有 k 的取值情况，可得

$$\binom{m_1+m_2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}.$$

即证. □

特别地，我们有：

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad (n \geqslant 0).$$

1.3 二项式系数的单峰性

定理 1.3.1. 设 n 为正整数. 二项式系数序列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

是单峰序列. 更精确地说，如果 n 是偶数，则

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{n/2}$$

$$\binom{n}{n/2} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

如果 n 是奇数，则

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$$

$$\binom{n}{(n+1)/2} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

证明. 考虑 $1 \le k \le n$.

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{n-k+1}{k}.$$

比较 k 和 $n-k+1$ 的大小关系即可得出结论. □

推论 1.3.2. 对于正整数 n，二项式系数

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

中的最大者为

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}.$$

待补充