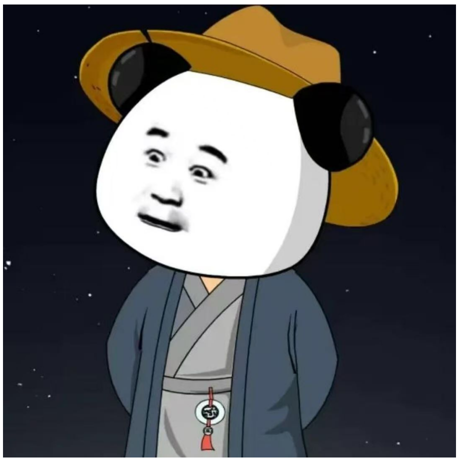
数学之旅



Ji Li

2025 年 8 月 7 日

目录

第 1 章

二项式系数

预备知识

基本组合数公式：

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

帕斯卡公式:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

1.1 二项式定理

定理 1.1.1 (二项式定理)**.** 设 n 是正整数. 对所有的 x 和 y, 有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

证明. 法 1：乘积展开, 对项 $x^{n-k}y^k$, 选择 k 个因子为 y 而剩下 $n-k$ 个因子为 x 的组合数.

法 2：归纳法. $n=1$ 时等式成立.

假设等式对 n 成立, 对于 $n+1$：

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) \\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + \binom{n}{n} y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.$$

即证. □

1.2 组合恒等式

通过二项式定理和组合数的性质, 可以得到诸多有益的推论和组合恒等式.

推论 1.2.1. 集合 S 含有奇数个元素的子集的数目恒等于含有偶数个元素的子集的数目.

证明. 设 $|S| = n$. 在二项式定理中, 令 $x = 1, y = -1$, 得

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

令 $x = 1, y = 1$, 得

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

因此有

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = 2^{n-1},$$
$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1}.$$

即证. □

对等式进行求导和积分是构造组合恒等式的常见思路. 如对等式 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, 两边对 x 求导得 $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$, 带入 $x = 1$ 得 $n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. 更进一步地, 该组合恒等式还可以在两边乘以 x 后继续迭代求导, 以得到 $\sum_{k=1}^{n} k^p \binom{n}{k}$ 对任意常数 p 的组合恒等式. 一个积分构造组合恒等式的例子：

推论 1.2.2.

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}.$$

证明. 对等式 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ 两边对 x 求不定积分：

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

令 $x = 0$, 解得 $C = \frac{1}{n+1}$. 令 $x = 1$, 即得所求式子. 注意两边求不定积分容易遗漏常数 C. □

推论 1.2.3 (范德蒙卷积公式)**.** 对正整数 m_1, m_2, n, 有

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k} = \binom{m_1+m_2}{n}.$$

证明. 设 S 是一个有 m_1+m_2 个元素的集合, 我们需要计数 S 的 n 子集的数目（即等式右边）. 把 S 划分成 A, B 两个子集, 其中 $|A| = m_1, |B| = m_2$. 利用这个划分去划分 S 的 n 子集. S 的每一个 n 子集包含 k 和 A 的元素和 $n-k$ 和 B 的元素, 这里 $0 \le k \le n$. 根据加法原理计数所有 k 的取值情况, 可得

$$\binom{m_1+m_2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}.$$

即证. □

特别地, 我们有:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad (n \geqslant 0).$$

1.3 二项式系数的单峰性

定理 1.3.1. 设 n 为正整数. 二项式系数序列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

是单峰序列. 更精确地说, 如果 n 是偶数, 则

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{n/2}$$

$$\binom{n}{n/2} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

如果 n 是奇数, 则

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$$

$$\binom{n}{(n+1)/2} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

证明. 考虑 $1 \le k \le n$.

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{n-k+1}{k}.$$

比较 k 和 $n-k+1$ 的大小关系即可得出结论. □

推论 1.3.2. 对于正整数 n, 二项式系数

$$\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\dots,\binom{n}{n}$$

中的最大者为

$$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}=\binom{n}{\lceil n/2\rceil}.$$

设 S 是 n 元素集合, 定义 S 的一个反链为一个 S 的子集的集合 $\mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{A}$ 中的任意元素不存在包含关系. 定义 S 的一个链为一个 S 的子集的集合 $\mathcal{C}$, 其中 $\mathcal{C}$ 中的任意两元素之间存在包含关系. 显然, S 的每一个最大链的长度为 n, 最大链的数目与 n 元素的排列存在一一对应关系, 为 $n!$.

定理 1.3.3 (Sperner 定理)**.** 设 S 是 n 元素集合. 那么 S 上的一个反链至多包含 $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ 个元素.

证明. 设 $\mathcal{A}$ 是一个反链, A 是 $\mathcal{A}$ 中的一个元素, C 是包含 A 的一个最大链. 我们考虑有序对 (A,C) 的数目 β. 每一个 C 包含且只包含 $\mathcal{A}$ 中的一个元素, 因此 $\beta\le n!$. (考虑每个 C 对应的 A)

对于 $\mathcal{A}$ 中的一个元素 A, 设 $|A|=k$. 则包含 A 的所有最大链数目为 $k!(n-k)!$. (考虑每一个 A 对应的 C)

设 α_k 是反链 $\mathcal{A}$ 中大小为 k 的元素个数, 则 $|\mathcal{A}|=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k$. 于是

$$\beta=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k k!(n-k)!\le n.$$

变形得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\le 1.$$

根据推论1.3.2可得

$$|\mathcal{A}|=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\le\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}.$$

即证. □

1.4 多项式定理

定义多项式系数

$$\binom{n}{n_1\ n_2\cdots n_t}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_t!}.$$

其中，n_1 ,$n_2,\cdots$,n_t 是非负整数且 $n_1+n_2+\cdots+n_t=n$.

定理 1.4.1 (多项式系数的帕斯卡公式)**.**

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_t} = \binom{n-1}{n_1-1\ n_2\ \cdots\ n_t} + \binom{n-1}{n_1\ n_2-1\ \cdots\ n_t} + \cdots + \binom{n-1}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_t-1}.$$

对右边式子通分即可得到证明.

定理 1.4.2 (多项式定理)**.** 设 n 是正整数. 对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_t$，有

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}.$$

证明. 法 1: 根据乘法原理, 式子 $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$ 出现的次数为

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}{n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_t!} = \binom{n}{n_1\ n_2 \cdots n_t}.$$

即证.

法 2: 归纳法. 注意是对 n 归纳, 而不是对 k 归纳. $n=1$ 时等式成立.

若取值为 n 时等式成立, 即 $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$. 当取值为 $n+1$ 时:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^{n+1} = \sum_{i=1}^{k} x_i \sum \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}.$$

考虑 $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^{n+1}$ 中, 项 $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_t^{m_t}$ 的系数, 其中 $m_1+m_2+\cdots m_t = n+1$. 该项可能由 k 种方式产生:

- 从 $x_1^{m_1-1} x_2^{m_2} \cdots x_k^{m_k}$ 乘以 x_1(若 $m_1 \geq 1$), 系数为 $\frac{n!}{(m_1-1)! m_2! \cdots m_k!}$;
- 从 $x_1^{m_1} x_2^{m_2-1} \cdots x_k^{m_k}$ 乘以 x_2(若 $m_2 \geq 1$), 系数为 $\frac{n!}{m_1!(m_2-1)! \cdots m_k!}$;
- $\cdots$
- 从 $x_1^{m_1} \cdots x_k^{m_k-1}$ 乘以 x_k(若 $m_k \geq 1$), 系数为 $\frac{n!}{m_1! \cdots (m_k-1)!}$.

由定理1.4.1, $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_t^{m_t}$ 的系数为 $\binom{n+1}{m_1\ m_2\ \cdots\ m_t}$, 即证.

□

特别的, 当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_t = 1$ 时, 有

$$t^n = \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t}.$$

第 2 章

容斥原理