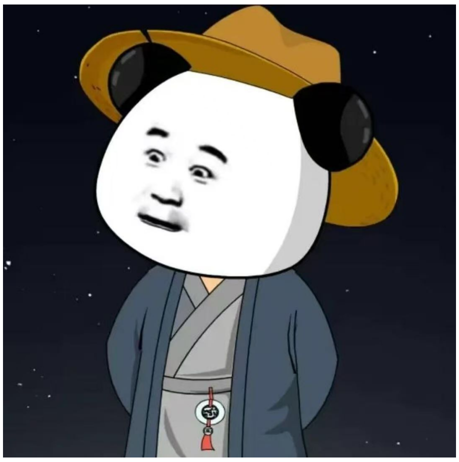
数学之旅



Ji Li

2025 年 8 月 7 日

目录

第 1 章

二项式系数

引言

本章内容主要来自 Brualdi « 组合数学 » 第 5 章 (二项式系数) 的内容及对其的拓展与思考.

预备知识

基本组合数公式：

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

帕斯卡公式:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}.$$

1.1 二项式定理

定理 1.1.1 (二项式定理)**.** *设 n 是正整数. 对所有的 x 和 y, 有*

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

证明. 法 1：乘积展开, 对项 $x^{n-k}y^k$, 选择 k 个因子为 y 而剩下 $n-k$ 个因子为 x 的组合数.

法 2：归纳法. $n=1$ 时等式成立.

假设等式对 n 成立, 对于 $n+1$：

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1}&=(x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right)\\
&=x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right)+y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} + \binom{n}{n}y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k.
\end{aligned}
$$

即证. □

1.2 组合恒等式

通过二项式定理和组合数的性质, 可以得到诸多有益的推论和组合恒等式.

推论 1.2.1. 集合 S 含有奇数个元素的子集的数目恒等于含有偶数个元素的子集的数目.

证明. 设 $|S| = n$. 在二项式定理中, 令 $x = 1, y = -1$, 得

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

令 $x = 1, y = 1$, 得

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots &= 2^{n-1}, \\
\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots &= 2^{n-1}.
\end{aligned}
$$

即证. □

对等式进行求导和积分是构造组合恒等式的常见思路. 如对等式 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, 两边对 x 求导得 $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$, 带入 $x = 1$ 得 $n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$. 更进一步地, 该组合恒等式还可以在两边乘以 x 后继续迭代求导, 以得到 $\sum_{k=1}^{n}k^p\binom{n}{k}$ 对任意常数 p 的组合恒等式. 一个积分构造组合恒等式的例子：

推论 1.2.2.

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}.$$

证明. 对等式 $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ 两边对 x 求不定积分:

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}+C.$$

令 $x=0$, 解得 $C=\frac{1}{n+1}$. 令 $x=1$, 即得所求式子. 注意两边求不定积分容易遗漏常数 C. □

推论 1.2.3 (范德蒙卷积公式)**.** 对正整数 m_1,m_2,n, 有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}=\binom{m_1+m_2}{n}.$$

证明. 设 S 是一个有 m_1+m_2 个元素的集合, 我们需要计数 S 的 n 子集的数目（即等式右边）. 把 S 划分成 A,B 两个子集, 其中 $|A|=m_1,|B|=m_2$. 利用这个划分去划分 S 的 n 子集. S 的每一个 n 子集包含 k 和 A 的元素和 $n-k$ 和 B 的元素, 这里 $0\le k\le n$. 根据加法原理计数所有 k 的取值情况, 可得

$$\binom{m_1+m_2}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}.$$

即证. □

特别地, 我们有:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}\quad(n\geqslant 0).$$

1.3 二项式系数的单峰性

定理 1.3.1. 设 n 为正整数. 二项式系数序列

$$\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\dots,\binom{n}{n}$$

是单峰序列. 更精确地说, 如果 n 是偶数, 则

$$\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\cdots<\binom{n}{n/2}$$

$$\binom{n}{n/2}>\cdots>\binom{n}{n-1}>\binom{n}{n}.$$

如果 n 是奇数, 则

$$\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\cdots<\binom{n}{(n-1)/2}=\binom{n}{(n+1)/2}$$

$$\binom{n}{(n+1)/2}>\cdots>\binom{n}{n-1}>\binom{n}{n}.$$

证明. 考虑 $1 \le k \le n$.

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{n-k+1}{k}.$$

比较 k 和 $n-k+1$ 的大小关系即可得出结论. □

推论 1.3.2. 对于正整数 n, 二项式系数

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

中的最大者为

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}.$$

设 S 是 n 元素集合, 定义 S 的一个反链为一个 S 的子集的集合 $\mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{A}$ 中的任意元素不存在包含关系. 定义 S 的一个链为一个 S 的子集的集合 $\mathcal{C}$, 其中 $\mathcal{C}$ 中的任意两元素之间存在包含关系. 显然, S 的每一个最大链的长度为 n, 最大链的数目与 n 元素的排列存在一一对应关系, 为 $n!$.

定理 1.3.3 (Sperner 定理)**.** 设 S 是 n 元素集合. 那么 S 上的一个反链至多包含 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个元素.

证明. 设 $\mathcal{A}$ 是一个反链, A 是 $\mathcal{A}$ 中的一个元素, C 是包含 A 的一个最大链. 我们考虑有序对 (A, C) 的数目 β. 每一个 C 包含且只包含 $\mathcal{A}$ 中的一个元素, 因此 $\beta \le n!$. (考虑每个 C 对应的 A)

对于 $\mathcal{A}$ 中的一个元素 A, 设 $|A| = k$. 则包含 A 的所有最大链数目为 $k!(n-k)!$. (考虑每一个 A 对应的 C)

设 α_k 是反链 $\mathcal{A}$ 中大小为 k 的元素个数, 则 $|\mathcal{A}| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$. 于是

$$\beta = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k k!(n-k)! \le n.$$

变形得

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \le 1.$$

根据推论1.3.2可得

$$|\mathcal{A}| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

即证. □

1.4 多项式定理

定义多项式系数

$$\binom{n}{n_1\ n_2 \cdots n_t} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_t!}.$$

其中，n_1 ,$n_2, \cdots ,n_t$ 是非负整数且 $n_1+n_2+\cdots+n_t=n$.

定理 1.4.1 (多项式系数的帕斯卡公式)**.**

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_t} = \binom{n-1}{n_1-1\ n_2\ \cdots\ n_t} + \binom{n-1}{n_1\ n_2-1\ \cdots\ n_t} + \cdots + \binom{n-1}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_t-1}.$$

对右边式子通分即可得到证明.

定理 1.4.2 (多项式定理)**.** *设 n 是正整数. 对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_t$，有*

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}.$$

证明. 法 1: 根据乘法原理, 式子 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$ 出现的次数为

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}{n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_t!} = \binom{n}{n_1\ n_2 \cdots n_t}.$$

即证.

法 2: 归纳法. 注意是对 n 归纳, 而不是对 k 归纳. $n=1$ 时等式成立.

若取值为 n 时等式成立, 即 $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t} x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$. 当取值为 $n+1$ 时:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^{n+1} = \sum_{i=1}^{k} x_i \sum \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t} x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}.$$

考虑 $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^{n+1}$ 中, 项 $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_t^{m_t}$ 的系数, 其中 $m_1+m_2+\cdots m_t = n+1$. 该项可能由 k 种方式产生:

- 从 $x_1^{m_1-1}x_2^{m_2}\cdots x_k^{m_k}$ 乘以 x_1(若 $m_1 \geq 1$), 系数为 $\frac{n!}{(m_1-1)!m_2!\cdots m_k!}$;
- 从 $x_1^{m_1}x_2^{m_2-1}\cdots x_k^{m_k}$ 乘以 x_2(若 $m_2 \geq 1$), 系数为 $\frac{n!}{m_1!(m_2-1)!\cdots m_k!}$;
- $\cdots$
- 从 $x_1^{m_1}\cdots x_k^{m_k-1}$ 乘以 x_k(若 $m_k \geq 1$), 系数为 $\frac{n!}{m_1!\cdots(m_k-1)!}$.

由定理1.4.1, $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_t^{m_t}$ 的系数为 $\binom{n+1}{m_1\ m_2\ \cdots\ m_t}$, 即证.

□

特别地, 当 $x_1=x_2=\cdots=x_t=1$ 时, 有

$$t^n = \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t}.$$

第 2 章

容斥原理

引言

本章内容主要来自 Brualdi « 组合数学 » 第 6 章 (容斥原理及应用) 的内容及对其的拓展与思考.

2.1 容斥原理及其对偶形式

设 S 是对象的有限集合, $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 是 S 的对象所涉及的 m 个性质，并设

$$A_i = \{x : x \text{ 属于} S \text{ 且} x \text{ 具有性质} P_i\} \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

定理 2.1.1 (容斥原理的对偶形式)**.** 集合 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的对象个数由下面的交错表达式给出：

$$\begin{aligned} &|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| \\ =&|S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|. \end{aligned}$$

证明. 显然, 不具备 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 中任何一条性质的对象对等式右边的贡献为 1, 该贡献源于 $|S|$.

对具备 $n \geq 1$ 条性质的对象, 我们证明它对等式右边的贡献为 0. 它对集合 $|S|$, $\sum |A_i|$, $\sum |A_i \cap A_j|$, $\cdots$ 的贡献依次为: 1, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\cdots$. 由推论1.2.1得其在等式右边贡献和为

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

即证. □

定理 2.1.2 (容斥原理)**.** 集合 S 中至少具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 之一的对象个数由下式给出：

$$\begin{aligned} &|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| \\ =&\sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|. \end{aligned}$$

证明. 由德摩根律

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m.$$

因此,

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| \\
=&|S| - \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m} \\
=&|S| - \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m \\
=&\sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|.
\end{aligned}$$

□

2.2 Möbius 反演

考虑一个有限偏序集 $(X, \leq)$. 设 $\mathcal{F}(X)$ 是满足只要 $x \leq y$ 就有 $f(x,y)=0$ 的所有实值函数

$$f : X \times X \to \mathbb{R}$$

的集合，于是 $f(x,y)$ 只在 $x \leq y$ 时可能不等于 0. 我们如下定义 $\mathcal{F}(X)$ 中两个函数 f 和 g 的卷积 $h = f * g$:

$$h(x,y) = \begin{cases} \sum_{z:x\leq z\leq y} f(x,z)g(z,y) & \text{若} x \leq y, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

引理 2.2.1. *卷积满足结合律. 即* $f * (g * h) = (f * g) * h \quad (f, g, h \in \mathcal{F}(X))$.

证明. 证明 $x \leq y$ 的情况.

$$\begin{aligned}
f * (g * h)(x,y) =& \sum_{z:x\leq z\leq y} f(x,z) \cdot (g*h)(z,y) \\
=& \sum_{z:x\leq z\leq y} f(x,z) \sum_{z':z\leq z'\leq y} g(z,z')h(z',y) \\
=& \sum_{z:x\leq z\leq y} \sum_{z':z\leq z'\leq y} f(x,z)g(z,z')h(z',y) \\
=& \sum_{z':x\leq z'\leq y} \sum_{z:x\leq z\leq z'} f(x,z)g(z,z')h(z',y) \\
=& \sum_{z':x\leq z'\leq y} (f*g)(x,z') \cdot h(z',y) \\
=&(f*g)*h(x,y).
\end{aligned}$$

即证. □

我们考虑 $\mathcal{F}(X)$ 中三种特殊的函数:

- δ 函数:

$$\delta(x,y)=\begin{cases}1 & 若 x=y\\ 0 & 其他\end{cases}$$

  对所有的 $f\in\mathcal{F}(X)$, 有 $\delta * f = f * \delta = f$, 故称 δ 为卷积下的恒等函数.

- ζ 函数:

$$\zeta(x,y)=\begin{cases}1 & 若 x\le y\\ 0 & 其他\end{cases}$$

  ζ 函数是偏序集 $(X,\le)$ 的一种表示.

- Möbius 函数 μ: ζ 函数在卷积下的逆函数.

引理 2.2.2. *设 f 是 $\mathcal{F}(X)$ 中的函数，对 X 中的所有 y 满足 $f(y,y)\neq 0$. 则 f 在卷积下存在逆函数.*

证明. 如下递归地定义 $\mathcal{F}(X)$ 中的函数 g:

首先, 由于 $f(y,y)\neq 0$, 可以定义

$$g(y,y)=\frac{1}{f(y,y)}\quad (y\in X).$$

然后,

$$g(x,y)=-\frac{1}{f(y,y)}\sum_{z:x\le z<y} g(x,z)f(z,y)\quad (x<y).$$

于是, 不难观察到

$$\sum_{z:x\le z\le y} g(x,z)f(z,y)=\delta(x,y)\quad (x\le y)$$

即证 g 是 f 在卷积意义下的左逆函数: $g*f=\delta$.

同理可以证明 f 存在卷积意义下的右逆函数: $f*h=\delta$. 由引理2.2.1,

$$g=g*\delta=g*(f*h)=(g*f)*h=\delta*h=h.$$

即证, g 是 f 的逆函数. □

因此, 由于 $\mu*\zeta=\delta$, 我们得到

$$\sum_{z:x\le z\le y}\mu(x,z)\zeta(z,y)=\sum_{z:x\le z\le y}\mu(x,z)=\delta(x,y)\quad (x\le y).$$

由上式可知对所有的 $x \in X$, 有 $\mu(x,x) = 1$. 以及

$$\mu(x,y) = -\sum_{z:x\leq z<y} \mu(x,z) \quad (x<y)$$

利用 μ 是 ζ 的右逆函数也可以得到对偶的类似结果.

定理 2.2.3 (Möbius 反演)**.** *设 $(X,\leq)$ 是偏序集且有最小元 0。设 μ 是它的 Möbius 函数, 并设 $F: X\to\mathbb{R}$ 是定义在 X 上的实值函数. 设函数 $G: X\to\mathbb{R}$ 是如下定义的函数:*

$$G(x) = \sum_{z:z\leq x} F(z) \quad (x\in X)$$

那么

$$F(x) = \sum_{y:y\leq x} G(y)\mu(y,x) \quad (x\in X).$$

证明.

$$\begin{aligned}
\sum_{y:y\leq x} G(y)\mu(y,x) &= \sum_{y:y\leq x}\sum_{z:z\leq y} F(z)\mu(y,x)\\
&= \sum_{y:y\leq x}\mu(y,x)\sum_{z:z\in X}\zeta(z,y)F(z)\\
&= \sum_{z:z\in X}\sum_{y:y\leq x}\zeta(z,y)\mu(y,x)F(z)\\
&= \sum_{z:z\in X}\left(\sum_{y:z\leq y\leq x}\zeta(z,y)\mu(y,x)\right)F(z)\\
&= \sum_{z:z\in X}\delta(z,x)F(z)\\
&= F(x).
\end{aligned}$$

即证. □

2.3 Möbius 反演的应用