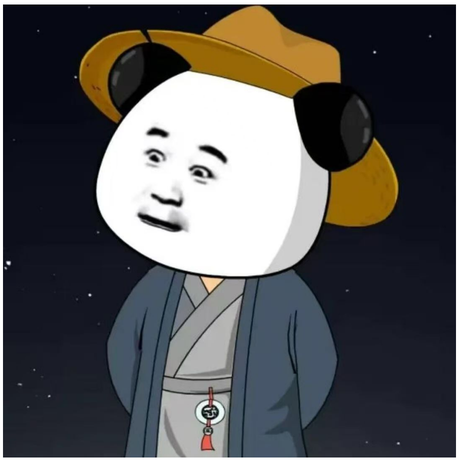
# 数学之旅



Ji Li

2025 年 8 月 7 日

# 目录

# 第 1 章

# 二项式系数

## 引言

本章内容主要来自 Brualdi « 组合数学 » 第 5 章 (二项式系数) 的内容及对其的拓展与思考.

## 预备知识

基本组合数公式：

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

帕斯卡公式:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

## 1.1 二项式定理

**定理 1.1.1** (二项式定理)**.** *设 $n$ 是正整数. 对所有的 $x$ 和 $y$, 有*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

*证明.* 法 1：乘积展开, 对项 $x^{n-k}y^k$, 选择 $k$ 个因子为 $y$ 而剩下 $n-k$ 个因子为 $x$ 的组合数.

法 2：归纳法. $n=1$ 时等式成立.

假设等式对 $n$ 成立, 对于 $n+1$：

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right) \\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} + \binom{n}{n}y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k.
\end{aligned}
$$

即证. □

## 1.2 组合恒等式

通过二项式定理和组合数的性质, 可以得到诸多有益的推论和组合恒等式.

**推论 1.2.1.** 集合 $S$ 含有奇数个元素的子集的数目恒等于含有偶数个元素的子集的数目.

*证明.* 设 $|S| = n$. 在二项式定理中, 令 $x = 1, y = -1$, 得

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

令 $x = 1, y = 1$, 得

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = 2^{n-1}, \\
\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1}.
\end{aligned}
$$

即证. □

对等式进行求导和积分是构造组合恒等式的常见思路. 如对等式 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, 两边对 $x$ 求导得 $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$, 带入 $x = 1$ 得 $n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$. 更进一步地, 该组合恒等式还可以在两边乘以 $x$ 后继续迭代求导, 以得到 $\sum_{k=1}^{n}k^p\binom{n}{k}$ 对任意常数 $p$ 的组合恒等式. 一个积分构造组合恒等式的例子:

**推论 1.2.2.**

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}.$$

证明. 对等式 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ 两边对 $x$ 求不定积分：

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

令 $x=0$, 解得 $C = \frac{1}{n+1}$. 令 $x=1$, 即得所求式子. 注意两边求不定积分容易遗漏常数 $C$. □

**推论 1.2.3** (范德蒙卷积公式)**.** 对正整数 $m_1, m_2, n$, 有

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k} = \binom{m_1+m_2}{n}.$$

证明. 设 $S$ 是一个有 $m_1+m_2$ 个元素的集合, 我们需要计数 $S$ 的 $n$ 子集的数目（即等式右边）. 把 $S$ 划分成 $A, B$ 两个子集, 其中 $|A| = m_1, |B| = m_2$. 利用这个划分去划分 $S$ 的 $n$ 子集. $S$ 的每一个 $n$ 子集包含 $k$ 和 $A$ 的元素和 $n-k$ 和 $B$ 的元素, 这里 $0 \le k \le n$. 根据加法原理计数所有 $k$ 的取值情况, 可得

$$\binom{m_1+m_2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}.$$

即证. □

特别地, 我们有：

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad (n \geqslant 0).$$

## 1.3 二项式系数的单峰性

**定理 1.3.1.** 设 $n$ 为正整数. 二项式系数序列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

是单峰序列. 更精确地说, 如果 $n$ 是偶数, 则

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{n/2}$$

$$\binom{n}{n/2} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

如果 $n$ 是奇数, 则

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$$

$$\binom{n}{(n+1)/2} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

证明. 考虑 $1 \le k \le n$.

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{n-k+1}{k}.$$

比较 $k$ 和 $n-k+1$ 的大小关系即可得出结论. □

**推论 1.3.2.** *对于正整数 $n$, 二项式系数*

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

*中的最大者为*

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}.$$

设 $S$ 是 $n$ 元素集合, 定义 $S$ 的一个反链为一个 $S$ 的子集的集合 $\mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{A}$ 中的任意元素不存在包含关系. 定义 $S$ 的一个链为一个 $S$ 的子集的集合 $\mathcal{C}$, 其中 $\mathcal{C}$ 中的任意两元素之间存在包含关系. 显然, $S$ 的每一个最大链的长度为 $n$, 最大链的数目与 $n$ 元素的排列存在一一对应关系, 为 $n!$.

**定理 1.3.3** (Sperner 定理)**.** *设 $S$ 是 $n$ 元素集合. 那么 $S$ 上的一个反链至多包含 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个元素.*

证明. 设 $\mathcal{A}$ 是一个反链, $A$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个元素, $C$ 是包含 $A$ 的一个最大链. 我们考虑有序对 $(A, C)$ 的数目 $\beta$. 每一个 $C$ 包含且只包含 $\mathcal{A}$ 中的一个元素, 因此 $\beta \le n!$. (考虑每个 $C$ 对应的 $A$)

对于 $\mathcal{A}$ 中的一个元素 $A$, 设 $|A| = k$. 则包含 $A$ 的所有最大链数目为 $k!(n-k)!$. (考虑每一个 $A$ 对应的 $C$)

设 $\alpha_k$ 是反链 $\mathcal{A}$ 中大小为 $k$ 的元素个数, 则 $|\mathcal{A}| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$. 于是

$$\beta = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k k!(n-k)! \le n.$$

变形得

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \le 1.$$

根据推论1.3.2可得

$$|\mathcal{A}| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

即证. □

## 1.4 多项式定理

定义多项式系数

$$\binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_t!.}$$

其中，$n_1$ ,$n_2, \cdots, n_t$ 是非负整数且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$.

**定理 1.4.1** (多项式系数的帕斯卡公式)**.**

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_t} = \binom{n-1}{n_1-1\ n_2\ \cdots\ n_t} + \binom{n-1}{n_1\ n_2-1\ \cdots\ n_t} + \cdots + \binom{n-1}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_t-1}.$$

对右边式子通分即可得到证明.

**定理 1.4.2** (多项式定理)**.** *设 $n$ 是正整数. 对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_t$，有*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}.$$

*证明.* 法 1: 根据乘法原理, 式子 $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$ 出现的次数为

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}{n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_t!} = \binom{n}{n_1\ n_2 \cdots n_t}.$$

即证.

法 2: 归纳法. 注意是对 $n$ 归纳, 而不是对 $k$ 归纳. $n = 1$ 时等式成立.

若取值为 $n$ 时等式成立, 即 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$. 当取值为 $n + 1$ 时:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^{n+1} = \sum_{i=1}^{k} x_i \sum \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}.$$

考虑 $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^{n+1}$ 中, 项 $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_t^{m_t}$ 的系数, 其中 $m_1+m_2+\cdots m_t = n+1$. 该项可能由 $k$ 种方式产生:

- 从 $x_1^{m_1-1} x_2^{m_2} \cdots x_k^{m_k}$ 乘以 $x_1$(若 $m_1 \geq 1$), 系数为 $\frac{n!}{(m_1-1)! m_2! \cdots m_k!}$;
- 从 $x_1^{m_1} x_2^{m_2-1} \cdots x_k^{m_k}$ 乘以 $x_2$(若 $m_2 \geq 1$), 系数为 $\frac{n!}{m_1!(m_2-1)! \cdots m_k!}$;
- $\cdots$
- 从 $x_1^{m_1} \cdots x_k^{m_k-1}$ 乘以 $x_k$(若 $m_k \geq 1$), 系数为 $\frac{n!}{m_1! \cdots (m_k-1)!}$.

由定理1.4.1, $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_t^{m_t}$ 的系数为 $\binom{n+1}{m_1\ m_2\ \cdots\ m_t}$, 即证.

□

特别地, 当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_t = 1$ 时, 有

$$t^n = \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t}.$$

# 第 2 章

# 容斥原理

## 引言

本章内容主要来自 Brualdi « 组合数学 » 第 6 章 (容斥原理及应用) 的内容及对其的拓展与思考.

## 2.1 容斥原理及其对偶形式

设 $S$ 是对象的有限集合, $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 是 $S$ 的对象所涉及的 $m$ 个性质，并设

$$A_i = \{x : x \text{ 属于} S \text{ 且} x \text{ 具有性质} P_i\} \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

**定理 2.1.1** (容斥原理的对偶形式). 集合 $S$ 中不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的对象个数由下面的交错表达式给出：

$$\begin{aligned}&|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m|\\ =&|S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|.\end{aligned}$$

证明. 显然, 不具备 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 中任何一条性质的对象对等式右边的贡献为 1, 该贡献源于 $|S|$.

对具备 $n \geq 1$ 条性质的对象, 我们证明它对等式右边的贡献为 0. 它对集合 $|S|, \sum |A_i|, \sum |A_i \cap A_j|, \cdots$ 的贡献依次为: 1, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\cdots$. 由推论1.2.1得其在等式右边贡献和为

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

即证. □

**定理 2.1.2** (容斥原理). 集合 $S$ 中至少具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 之一的对象个数由下式给出：

$$\begin{aligned}&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m|\\ =&\sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|.\end{aligned}$$

证明. 由德摩根律

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m.$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| \\
=&|S| - \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m} \\
=&|S| - \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m \\
=&\sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|.
\end{aligned}
$$

□

## 2.2 Möbius 反演