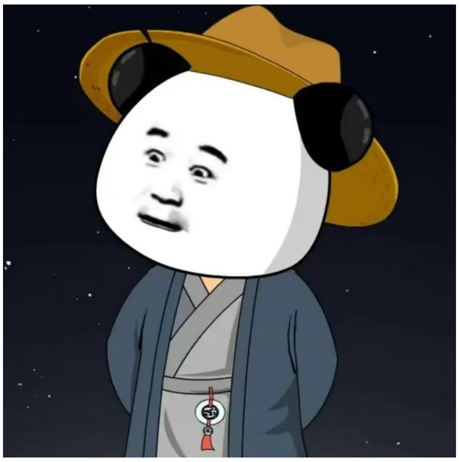
数学之旅



Ji Li

2025 年 10 月 28 日

目录

第 1 章

二项式系数

引言

本章内容主要来自 Brualdi « 组合数学 » 第 5 章 (二项式系数) 的内容及对其的拓展与思考.

预备知识

基本组合数公式:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

帕斯卡公式:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

1.1 二项式定理

定理 1.1.1 (二项式定理)**.** *设 n 是正整数. 对所有的 x 和 y, 有*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

证明. 法 1: 乘积展开, 对项 $x^{n-k}y^k$, 选择 k 个因子为 y 而剩下 $n-k$ 个因子为 x 的组合数.

法 2: 归纳法. $n=1$ 时等式成立.

假设等式对 n 成立, 对于 $n+1$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) \\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + \binom{n}{n} y^{n+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.
\end{aligned}
$$

即证. □

1.2 组合恒等式

通过二项式定理和组合数的性质, 可以得到诸多有益的推论和组合恒等式.

推论 1.2.1. 集合 S 含有奇数个元素的子集的数目恒等于含有偶数个元素的子集的数目.

证明. 设 $|S| = n$. 在二项式定理中, 令 $x = 1, y = -1$, 得

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

令 $x = 1, y = 1$, 得

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = 2^{n-1}, \\
\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1}.
\end{aligned}
$$

即证. □

对等式进行求导和积分是构造组合恒等式的常见思路. 如对等式 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, 两边对 x 求导得 $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$, 带入 $x = 1$ 得 $n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. 更进一步地, 该组合恒等式还可以在两边乘以 x 后继续迭代求导, 以得到 $\sum_{k=1}^{n} k^p \binom{n}{k}$ 对任意常数 p 的组合恒等式. 一个积分构造组合恒等式的例子:

推论 1.2.2.

$$\frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}.$$

证明. 对等式 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ 两边对 x 求不定积分:

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

令 $x=0$, 解得 $C = \frac{1}{n+1}$. 令 $x=1$, 即得所求式子. 注意两边求不定积分容易遗漏常数 C. □

推论 1.2.3 (范德蒙卷积公式)**.** 对正整数 m_1, m_2, n, 有

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k} = \binom{m_1+m_2}{n}.$$

证明. 设 S 是一个有 m_1+m_2 个元素的集合, 我们需要计数 S 的 n 子集的数目（即等式右边）. 把 S 划分成 A, B 两个子集, 其中 $|A| = m_1, |B| = m_2$. 利用这个划分去划分 S 的 n 子集. S 的每一个 n 子集包含 k 和 A 的元素和 $n-k$ 和 B 的元素, 这里 $0 \le k \le n$. 根据加法原理计数所有 k 的取值情况, 可得

$$\binom{m_1+m_2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k}.$$

即证. □

特别地, 我们有:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad (n \geqslant 0).$$

1.3 二项式系数的单峰性

定理 1.3.1. 设 n 为正整数. 二项式系数序列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

是单峰序列. 更精确地说, 如果 n 是偶数, 则

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{n/2}$$

$$\binom{n}{n/2} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

如果 n 是奇数, 则

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$$

$$\binom{n}{(n+1)/2} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

证明. 考虑 $1 \leq k \leq n$.

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{n-k+1}{k}.$$

比较 k 和 $n-k+1$ 的大小关系即可得出结论. □

推论 1.3.2. 对于正整数 n, 二项式系数

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

中的最大者为

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}.$$

设 S 是 n 元素集合, 定义 S 的一个反链为一个 S 的子集的集合 $\mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{A}$ 中的任意元素不存在包含关系. 定义 S 的一个链为一个 S 的子集的集合 $\mathcal{C}$, 其中 $\mathcal{C}$ 中的任意两元素之间存在包含关系. 显然, S 的每一个最大链的长度为 n, 最大链的数目与 n 元素的排列存在一一对应关系, 为 $n!$.

定理 1.3.3 (Sperner 定理)**.** 设 S 是 n 元素集合. 那么 S 上的一个反链至多包含 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个元素.

证明. 设 $\mathcal{A}$ 是一个反链, A 是 $\mathcal{A}$ 中的一个元素, C 是包含 A 的一个最大链. 我们考虑有序对 (A, C) 的数目 β. 每一个 C 包含且只包含 $\mathcal{A}$ 中的一个元素, 因此 $\beta \leq n!$. (考虑每个 C 对应的 A)

对于 $\mathcal{A}$ 中的一个元素 A, 设 $|A| = k$. 则包含 A 的所有最大链数目为 $k!(n-k)!$. (考虑每一个 A 对应的 C)

设 α_k 是反链 $\mathcal{A}$ 中大小为 k 的元素个数, 则 $|\mathcal{A}| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$. 于是

$$\beta = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k k!(n-k)! \leq n.$$

变形得

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

根据推论1.3.2可得

$$|\mathcal{A}| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

即证. □

1.4 多项式定理

定义多项式系数

$$\binom{n}{n_1\ n_2 \cdots n_t} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_t!}.$$

其中，n_1 ,$n_2, \cdots, n_t$ 是非负整数且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$.

定理 1.4.1 (多项式系数的帕斯卡公式)**.**

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_t} = \binom{n-1}{n_1 - 1\ n_2\ \cdots\ n_t} + \binom{n-1}{n_1\ n_2 - 1\ \cdots\ n_t} + \cdots + \binom{n-1}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_t - 1}.$$

对右边式子通分即可得到证明.which perl

定理 1.4.2 (多项式定理)**.** *设 n 是正整数. 对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_t$, 有*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}.$$

证明. 法 1: 根据乘法原理, 式子 $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$ 出现的次数为

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}{n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_t!} = \binom{n}{n_1\ n_2 \cdots n_t}.$$

即证.

法 2: 归纳法. 注意是对 n 归纳, 而不是对 k 归纳. $n = 1$ 时等式成立.

若取值为 n 时等式成立, 即 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$. 当取值为 $n+1$ 时:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^{n+1} = \sum_{i=1}^{k} x_i \sum \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}.$$

考虑 $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^{n+1}$ 中, 项 $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_t^{m_t}$ 的系数, 其中 $m_1+m_2+\cdots m_t = n+1$. 该项可能由 k 种方式产生:

- 从 $x_1^{m_1-1} x_2^{m_2} \cdots x_k^{m_k}$ 乘以 x_1(若 $m_1 \geq 1$), 系数为 $\frac{n!}{(m_1-1)! m_2! \cdots m_k!}$;
- 从 $x_1^{m_1} x_2^{m_2-1} \cdots x_k^{m_k}$ 乘以 x_2(若 $m_2 \geq 1$), 系数为 $\frac{n!}{m_1!(m_2-1)! \cdots m_k!}$;
- $\cdots$
- 从 $x_1^{m_1} \cdots x_k^{m_k-1}$ 乘以 x_k(若 $m_k \geq 1$), 系数为 $\frac{n!}{m_1! \cdots (m_k-1)!}$.

由定理1.4.1, $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_t^{m_t}$ 的系数为 $\binom{n+1}{m_1\ m_2\ \cdots\ m_t}$, 即证.

□

特别地, 当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_t = 1$ 时, 有

$$t^n = \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_t}.$$

第 2 章

容斥原理

引言

本章内容主要来自 Brualdi « 组合数学 » 第 6 章 (容斥原理及应用) 的内容及对其的拓展与思考.

2.1 容斥原理及其对偶形式

设 S 是对象的有限集合, $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 是 S 的对象所涉及的 m 个性质, 并设

$$A_i = \{x : x \text{ 属于} S \text{ 且} x \text{ 具有性质} P_i\} \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

定理 2.1.1 (容斥原理的对偶形式). 集合 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的对象个数由下面的交错表达式给出:

$$\begin{aligned}&|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| \\ =&|S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|.\end{aligned}$$

证明. 显然, 不具备 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 中任何一条性质的对象对等式右边的贡献为 1, 该贡献源于 $|S|$.

对具备 $n \geq 1$ 条性质的对象, 我们证明它对等式右边的贡献为 0. 它对集合 $|S|$, $\sum |A_i|$, $\sum |A_i \cap A_j|$, $\cdots$ 的贡献依次为: 1, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\cdots$. 由推论1.2.1得其在等式右边贡献和为

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

即证. □

定理 2.1.2 (容斥原理). 集合 S 中至少具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 之一的对象个数由下式给出:

$$\begin{aligned}&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| \\ =&\sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|.\end{aligned}$$

证明. 由德摩根律

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m.$$

因此,

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| \\
=&|S| - \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m} \\
=&|S| - \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m \\
=&\sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|.
\end{aligned}$$

□

2.2 Möbius 反演

考虑一个有限偏序集 $(X, \leq)$. 设 $\mathcal{F}(X)$ 是满足只要 $x \leq y$ 就有 $f(x,y)=0$ 的所有实值函数

$$f : X \times X \to \mathbb{R}$$

的集合, 于是 $f(x,y)$ 只在 $x \leq y$ 时可能不等于 0. 我们如下定义 $\mathcal{F}(X)$ 中两个函数 f 和 g 的卷积 $h = f * g$:

$$h(x,y) = \begin{cases} \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x,z)g(z,y) & \text{若} x \leq y, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

引理 2.2.1. *卷积满足结合律. 即* $f * (g * h) = (f * g) * h \quad (f, g, h \in \mathcal{F}(X))$.

证明. 证明 $x \leq y$ 的情况.

$$\begin{aligned}
f * (g * h)(x,y) =& \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x,z) \cdot (g * h)(z,y) \\
=& \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x,z) \sum_{z': z \leq z' \leq y} g(z,z')h(z',y) \\
=& \sum_{z: x \leq z \leq y} \sum_{z': z \leq z' \leq y} f(x,z)g(z,z')h(z',y) \\
=& \sum_{z': x \leq z' \leq y} \sum_{z: x \leq z \leq z'} f(x,z)g(z,z')h(z',y) \\
=& \sum_{z': x \leq z' \leq y} (f * g)(x,z') \cdot h(z',y) \\
=&(f * g) * h(x,y).
\end{aligned}$$

即证. □

我们考虑 $\mathcal{F}(X)$ 中三种特殊的函数:

- δ 函数:

$$\delta(x,y)=\begin{cases}1 & 若 x=y\\ 0 & 其他\end{cases}$$

对所有的 $f\in\mathcal{F}(X)$, 有 $\delta * f = f*\delta = f$, 故称 δ 为卷积下的恒等函数.

- ζ 函数:

$$\zeta(x,y)=\begin{cases}1 & 若 x\le y\\ 0 & 其他\end{cases}$$

ζ 函数是偏序集 $(X,\le)$ 的一种表示.

- Möbius 函数 μ: ζ 函数在卷积下的逆函数.

引理 2.2.2. *设 f 是 $\mathcal{F}(X)$ 中的函数, 对 X 中的所有 y 满足 $f(y,y)\neq 0$. 则 f 在卷积下存在逆函数.*

证明. 如下递归地定义 $\mathcal{F}(X)$ 中的函数 g:

首先, 由于 $f(y,y)\neq 0$, 可以定义

$$g(y,y)=\frac{1}{f(y,y)}\quad (y\in X).$$

然后,

$$g(x,y)=-\frac{1}{f(y,y)}\sum_{z:x\le z<y} g(x,z)f(z,y)\quad (x<y).$$

于是, 不难观察到

$$\sum_{z:x\le z\le y} g(x,z)f(z,y)=\delta(x,y)\quad (x\le y)$$

即证 g 是 f 在卷积意义下的左逆函数: $g*f=\delta$.

同理可以证明 f 存在卷积意义下的右逆函数: $f*h=\delta$. 由引理2.2.1,

$$g=g*\delta=g*(f*h)=(g*f)*h=\delta*h=h.$$

即证, g 是 f 的逆函数. □

因此, 由于 $\mu*\zeta=\delta$, 我们得到

$$\sum_{z:x\le z\le y}\mu(x,z)\zeta(z,y)=\sum_{z:x\le z\le y}\mu(x,z)=\delta(x,y)\quad (x\le y).$$

由上式可知对所有的 $x \in X$, 有 $\mu(x,x)=1$. 以及

$$\mu(x,y) = -\sum_{z:x\le z<y} \mu(x,z) \quad (x<y)$$

利用 μ 是 ζ 的右逆函数也可以得到对偶的类似结果.

定理 2.2.3 (Möbius 反演)**.** *设 $(X,\le)$ 是偏序集且有最小元 0. 设 μ 是它的 Möbius 函数, 并设 $F: X\to\mathbb{R}$ 是定义在 X 上的实值函数. 设函数 $G: X\to\mathbb{R}$ 是如下定义的函数:*

$$G(x) = \sum_{z:z\le x} F(z) \quad (x\in X)$$

那么

$$F(x) = \sum_{y:y\le x} G(y)\mu(y,x) \quad (x\in X).$$

证明.

$$\begin{aligned}
\sum_{y:y\le x} G(y)\mu(y,x) &= \sum_{y:y\le x}\sum_{z:z\le y} F(z)\mu(y,x)\\
&= \sum_{y:y\le x}\mu(y,x)\sum_{z:z\in X}\zeta(z,y)F(z)\\
&= \sum_{z:z\in X}\sum_{y:y\le x}\zeta(z,y)\mu(y,x)F(z)\\
&= \sum_{z:z\in X}\left(\sum_{y:z\le y\le x}\zeta(z,y)\mu(y,x)\right)F(z)\\
&= \sum_{z:z\in X}\delta(z,x)F(z)\\
&= F(x).
\end{aligned}$$

即证. (第二个等式构造出 ζ 函数) □

2.3 μ 函数及其性质

推论 2.3.1. *偏序集 $(\mathcal{P}(X_n),\subseteq)$ 的 μ 函数. 设 $|X_n|=n$, A,B 是 X_n 的子集且 $A\subseteq B$. 那么*

$$\mu(A,B) = (-1)^{|B|-|A|}.$$

证明. 由于 μ 是 ζ 的逆函数, $\mu(A,A)=1$. 因此当 $B=A$ 时, 等式成立.

当 $A\subsetneq B$ 时, 应用归纳法. 令 $p=|B\backslash A|=|B|-|A|$. 根据引理2.2.2的推论和归纳假设 (对于 $C: A\subseteq C\subseteq B$ 时假设成立), 我们得到

$$\mu(A,B) = -\sum_{C:A\subseteq C\subsetneq B}\mu(A,C) = -\sum_{C:A\subseteq C\subsetneq B}(-1)^{|C|-|A|} = -\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\binom{p}{k}.$$

根据二项式定理, 我们有

$$0=(1-1)^p=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}.$$

于是

$$\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\binom{p}{k}=-(-1)^p\binom{p}{p}.$$

回代 μ 的式子中

$$\mu(A,B)=(-1)^p\binom{p}{p}=(-1)^p=(-1)^{|B|-|A|}.$$

即证. □

推论 2.3.2. *线性有序集的 μ 函数. 考虑线性有序集 $(X_n,\leqslant)$, 其中 $1<2<\cdots<n$. 我们有*

$$\mu(k,l)=\begin{cases}1 & 若 l=k\\ -1 & 若 l=k+1\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

证明. 由归纳法易证. □

结合定理2.2.3和推论2.3.1, 还能得到以下推论.

推论 2.3.3. *设 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$, 且设 $F:\mathcal{P}(X_n)\to\mathbb{R}$ 为定义在 X_n 的子集上的函数. 设 $G:\mathcal{P}(X_n)\to\mathbb{R}$ 是由下式定义的函数:*

$$G(K)=\sum_{L\subseteq K}F(L)\quad(K\subseteq X_n)$$

那么

$$F(K)=\sum_{L\subseteq K}(-1)^{|K|-|L|}G(L)\quad(K\subseteq X_n).$$

接下来我们考虑直积与其各分量偏序集的 μ 函数的关系. 设 $(X,\leqslant_1)$ 和 $(Y,\leqslant_2)$ 为两个偏序集. 在下面的集合

$$X\times Y=\{(x,y):x\in X,y\in Y\}$$

上定义关系 $\leqslant$ 为

$$(x,y)\leqslant(x',y')\ 当且仅当 x\leqslant_1 x'\ 且 y\leqslant_2 y'.$$

容易直接验证 $(X\times Y,\leqslant)$ 是一个偏序集, 叫做 $(X,\leqslant_1)$ 和 $(Y,\leqslant_2)$ 的直积. 我们可以把这个直积结构扩展到任意个偏序集上.

定理 2.3.4 (直积的 Möbius 函数)**.** *设 $(X, \leqslant_1)$ 和 $(Y, \leqslant_2)$ 为两个有限偏序集, 且它们的 Möbius 函数分别为 μ_1 和 μ_2. 设 μ 为 $(X, \leqslant_1)$ 和 $(Y, \leqslant_2)$ 的直积的 Möbius 函数. 则*

$$\mu((x,y),(x',y')) = \mu_1(x,x')\mu_2(y,y'). \quad ((x,y),(x',y') \in X \times Y)$$

证明. 当 $(x,y) \not\leq (x',y')$ 或 $(x,y) = (x',y')$ 时, 容易验证上式成立. 接下来我们对于 $(x,y) \leq (x',y')$ 且 $(x,y) \neq (x',y')$ 的情况使用归纳法:

$$\begin{aligned}
\mu((x,y),(x',y')) &= -\sum_{(u,v):(x,y)\leqslant(u,v)<(x',y')} \mu((u,v),(x',y')) \\
&= -\sum_{(u,v):(x,y)\leqslant(u,v)<(x',y')} \mu_1(u,x')\mu_2(v,y'). \ \text{（根据归纳假设）}
\end{aligned}$$

由于求和变量在两项乘数之间的独立性, 可以将上式分解为两个和式的积:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= -\Big(\sum_{u:x\leqslant_1 u\leqslant_1 x'} \mu_1(u,x')\Big)\Big(\sum_{v:y\leqslant_2 v\leqslant_2 y'} \mu_2(v,y')\Big) \quad + \mu_1(x,x')\mu_2(y,y') \\
&= -\delta(x,x')\delta(y,y') + \mu_1(x,x')\mu_2(y,y').
\end{aligned}$$

由于 $(x,y) \neq (x',y')$, $\delta(x,x')$ 和 $\delta(y,y')$ 中至少一项为 0. 即证. □

定理 2.3.5. *设 F 为定义在正整数集上的实值函数. 如下定义这个正整数集上的实值函数 G:*

$$G(n) = \sum_{k:k|n} F(k).$$

这时, 对于每一个正整数 n, 我们有

$$F(n) = \sum_{k:k|n} \mu\left(n/k\right) G(k)$$

其中把 $\mu(1,n/k)$ 写作 $\mu(n/k)$.

证明. 设 n 是正整数, $X_n = \{1,2,\cdots,n\}$. 我们考虑整除关系下的偏序集 $D_n = (X_n, |)$. 我们首先说明, 如果 $a \mid b$, 则 $\mu(a,b) = \mu\left(1, b/a\right)$. 设 $[a,b]$ 是所有既能整除 a 又能整除 b 的集合, 也就是说, $\forall s \in [a,b]$, 有 $s \mid a, s \mid b$. 我们考虑作用在集合 $[a,b]$ 上的映射 $f[a,b] = [1, b/a]$, 对于任意 $s \in [a,b]$, 存在唯一的 $t = s/a \in [1, b/a]$ 与之对应, 因此 f 是双射, 且保持了偏序关系的一致性. 因此, 在偏序关系下 $[a,b]$ 和 $[1,b/a]$ 是同构的 (表现的是同一个偏序集), 所以 $\mu(a,b) = \mu\left(1, b/a\right)$.

整数 n 有唯一素数因数分解 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是互不相同的素数, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 为正整数. 根据引理2.2.2, 可以得到

$$\mu(1, n) = -\sum_{m \geq 1, m | n, m \neq n} \mu(1, m).$$

由于 $m \mid n$, m 必须满足 $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ 且 $\beta_i \leq \alpha_i$. 因此, 我们其实只需考虑 X_n 中满足 $k \mid n$ 的所有正整数 k 组成的子集 X_n^*, 偏序集 $(X_n^*, |)$ 其实是 k 个线性序 $(1 \mid p_i \mid p_i^2 \mid \cdots \mid p_i^{\alpha_i})$ 的直积. 根据定理2.3.4

$$\mu(1, n) = \prod_{i=1}^{k} \mu(1, p_i^{\alpha_i}).$$

结合推论2.3.1, 我们得到

$$\mu(1, n) = \begin{cases} 1 & \text{若} n = 1 \\ (-1)^k & \text{若} n \text{是} k \text{个互不相同素数的乘积} \\ 0 & \text{其他情形.} \end{cases}$$

应用定理2.2.3, 我们即得到最终结果. $\square$

2.4 Möbius 反演的应用