

**灰度变换的特性**  $p_r(r)dr = p_s(s)ds$  **空间分辨率**是图像在单位面积内像素的个数，表示了图像的空间细节分辨能力；**灰度分辨率**指的是在纯黑和纯白之间灰度级别的多少，指的是图像对灰度变化细节的分辨能力。

**直方图均衡化** 图像的直方图反映了图像的明暗程度以及对比强度。对比度适中的图像通常具有均匀分布的直方图。直方图均衡化的目的是通过变换使得变换后的图像具有分布均衡的直方图，即输出的图像在每个灰度级别具有相对平均的像素点数。

1. 概率:  $p_r(r_k) = \frac{n_k}{MN}, k = 0, 1, 2, \dots, L-1$  灰度级别为  $[0, L-1]$
2. 累计分布函数:  $P(r_k) = \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{MN}, k = 0, 1, 2, \dots, L-1$
3. 变换函数:  $s_k = T(r_k) = \frac{L-1}{MN} * \sum_{j=0}^k n_j = (L-1) * P(r_k) = (L-1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j), k = 0, 1, 2, \dots, L-1$
4. 将  $s_k$  “四舍五入”转换为标准灰度级别，如果有相同的  $[s_k]$ ，则合并。

$r$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n$	400	700	800	900	500	400	196	200
$p_k$	0.098	0.171	0.195	0.220	0.122	0.098	0.048	0.048
	0.098	0.269	0.464	0.684	0.806	0.904	0.952	1
$s_k$	1	2	3	5	6	6	7	7

#### 直方图匹配（直方图规定化）

1. 计算出原图的直方图均衡  $s_k$
2. 计算目标图像的直方图均衡:  $G(z_k) = (L-1) \sum_{i=0}^k p_z(z_i)$
3. 得到变换公式:  $G(z_k) = s_k, z_k = G^{-1}(s_k)$

$z$	0	1	2	3	4	5	6	7
$p$	0.05	0.05	0.1	0.1	0.15	0.2	0.25	0.1
$s'_k = G(z_k)$	0.05	0.10	0.2	0.3	0.45	0.65	0.9	1

接下来，对每一个  $s_k$  查找最近的  $s'_k$

$r_k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$s_k$	0.098	0.269	0.464	0.684	0.806	0.904	0.952	1
closest $s'_k$	0.10	0.3	0.45	0.65	0.9	0.9	1	1
$z_k$	1	3	4	5	6	6	7	7

**空间域线性滤波的基本公式（相关）**  $g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x+s, y+t) = w(x, y) \circ f(x, y)$

**卷积**：等同于将模板旋转 180 度后做相关  $w(x, y) * f(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x-s, y-t)$

**锐化**为了突出图像中的细节或者增强被模糊了的细节；增强边缘和其它突变（如噪声），削弱灰度变化缓慢的区域。

**平滑**去除细小的细节（噪声）提取大的目标，从而得到感兴趣物体的一个大致描述

**欧拉公式**  $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

**二维离散傅里叶变换**  $F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi ut} dt \quad ut \rightarrow (u, v)(t, z)^T = ut + vz \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{j2\pi ut} du$

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \quad f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

**平移**:  $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(x_0 u/M + y_0 v/N)} \quad f(x, y) e^{j2\pi(u_0 x/M + v_0 y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$

**实函数的傅里叶变换是共轭对称的**:  $F^*(u, v) = F(-u, -v)$

**谱（幅度）**:  $|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$  平移不变，旋转等变

**频率域滤波步骤小结**

1. 对图像  $f(x, y)$  进行零填充（长宽均变为两倍， $P \times Q$ ）
2. 频谱中心化：用  $(-1)^{x+y}$  乘以填充后的图像
3. 计算 2 结果的 DFT，即  $F(u, v)$
4. 用滤波器函数  $H(u, v)$  乘以  $F(u, v)$ :  $G(u, v) = H(u, v) F(u, v)$
5. 计算 4 中结果的 IDFT
6. 取 5 结果的实部
7. 用  $(-1)^{x+y}$  乘以 6 结果
8. 提取 7 中的左上角（与输入图像同大小）

**频率域与空间域**：左边箭头所指区域为较高频率对应图像中变化较快的部分，如边缘、细节、噪声等，其亮度表示

了图像中这部分成分的多少；右边箭头所指区域为较低频率对应图中变化较慢的分量，如图像的大体轮廓、背景等平滑部分，其亮度也表明了这部分成分的多少。中心点  $u=v=0$  对应图像的平均灰度。

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} = \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} = \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) e^{-j2\pi ux/M}$$

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^3 \sum_{y=0}^3 f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)/4}, u, v = 0, 1, 2, 3$$

$$\text{令 } W^{mn} = e^{-j2\pi mn/4} \quad A_x = A_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \quad F = A_x f A_y$$

**图像增强**的首要目标是处理图像，使其比原始图像更适合于特定应用，例如使图像的对比度增加等，主要是一个主观过程。**图像复原**利用退化现象和噪声干扰的先验知识来重建或复原被干扰和退化的原始图像，大部分是一个客观过程。两者的目的都是为了改善图像，在去除噪声方面所使用的方法有很多交叉相同的部分。

**噪声**：随机变量，用概率密度函数描述。高斯噪声，瑞利噪声，伽马噪声，指数噪声，均匀噪声，脉冲噪声（盐/椒）

**估计噪声 PDF**：传感器产生的噪声，其 PDF 参数可以从说明书上查到；若成像系统可用，最简单的方式就是在“平坦”（均匀光照，单色背景）环境中成像，截取一组以噪声为主的图像作为系统噪声的指示器；如果无法利用成像系统，仅有图像可以利用时，可以从图像中截取一小部分具有恒定灰度的区域来估计噪声的 PDF：首先计算这一小部分图像的直方图，然后利用已知的噪声模型（如高斯、瑞利等）和计算出来的直方图作对比，寻找最接近的形状，再根据估计相应的参数（如均值、方差）。

**噪声滤波方法**：空间滤波【均值滤波器-算数、几何、谐波、逆谐波，统计排序，自适应】频率域【带阻，陷波】**逆谐波均值滤波器**是一个加权均值滤波器，像素  $(s, t)$  的权值为  $g(s, t)^Q / \sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q$ ，对  $(x, y)$  的邻域  $S_{xy}$ ，分母为常数，像素  $(s, t)$  的权值的大小取决于分子。 $Q > 0$  时，滤波器掩模下各像素灰度值  $g(s, t)$  越大，对滤波结果的贡献

$$\text{逆滤波: } \hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} = \frac{H(u, v)F(u, v) + N(u, v)}{H(u, v)} = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)} \quad \text{需要限制滤波的频率, 使其接近原点【H(0,0)最高值】}$$

**HSI 色调 H(Hue)**：与光波的波长有关，它表示人的感官对不同颜色的感受，如红色、绿色、蓝色等，它也可表示一定范围的颜色，如暖色、冷色等。**饱和度 S(Saturation)**：表示颜色的纯度，纯光谱色是完全饱和的，加入白光会稀释饱和度。饱和度越大，颜色看起来就会越鲜艳。**强度 I(Intensity)**：对应成像亮度和图像灰度，是颜色的明亮程度。

采用 HSI 颜色模型，更符合人眼对颜色的解释。该模型可以在彩色图像中从携带的彩色信息中将色度信息（色调和饱和度）和强度信息的分量分开。因此，该模型对于开发基于色彩描述的图像处理方法是一个较好的工具。

$$\text{饱和度 } S = 1 - \frac{3}{R+G+B} [\min(R, G, B)] \quad \text{强度 } I = \frac{R+G+B}{3} \quad \text{色调 } H = \theta = \arccos \left\{ \frac{\frac{1}{2}[(R-G) + (R-B)]}{[(R-G)^2 + (R-G)(G-B)]^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

色调和饱和度一起称为**色度**。等能量点到边界，线段上所有点色调相同。色差是色度图是两个点之间的距离差。

$$\text{CMY 颜料三原色, 青、紫红、黄} \quad \begin{bmatrix} C \\ M \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \quad \text{补色} \quad \begin{bmatrix} R_c \\ G_c \\ B_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_o \\ G_o \\ B_o \end{bmatrix}$$

真彩色图像处理：在向量空间执行，包括两种：对各个颜色平面单独处理，对色彩向量统一处理

$$\text{图像的熵 } e = - \sum_{k=0}^{l-1} p(r_k) \log_2 p(r_k)$$

**数据冗余**：编码冗余，空间和时间冗余，心理视觉冗余。压缩：1. 变换（映射）：1-1。降低空间和时间冗余，可逆。

2. 量化：多-1。有损压缩的主要来源，不可逆，去除心理视觉冗余。3. 编码。把字符流变成二进制位流。

$$\text{腐蚀 } A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\} = \{z | (B)_z \cap A^c = \emptyset\} \quad \text{膨胀 } A \oplus B = \{z | (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\} \quad \text{边界提取 } A - (A \ominus B)$$

**开操作**  $A \circ B$  先腐蚀再膨胀 **闭操作**  $A \cdot B$  先膨胀再腐蚀  $\downarrow$  与物体有关的结构元  $B_1$ ，与背景有关的结构元  $B_2$

$$\text{击中/击不中变换 } A \circledast B = (A \ominus D) \cap [A^c \ominus (W - D)] = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2) = (A \ominus B_1) \cap (A \oplus \hat{B}_2)$$