


数字图像处理
Digital Image Processing
第04章 灰度变换
Intensity Transformation
点运算与直方图变换
张朝晖
河北师范大学
2020年10月4日

教材的对应部分：第三章前三节内容

图像增强

处理方式

处理策略

处理对象

{

空域法 { 基于点运算 (及直方图变换)
基于模板运算
变换域
全局
局部
灰度图像
彩色图像

⇒ 本章：基于空域的灰度图像处理

2

主要内容

4.1 背景知识

4.2 一些基本的灰度变换函数

4.3 直方图处理

➤ **图像灰度变换的两种方式**

空域法-----直接对图像的像素取值进行处理
 变换域法---常见为频域法。

首先将图像进行傅里叶变换；修改图像的频域内容；再逆向变换，得到输出结果。

➤ **基于空域的灰度变换：**

$$g(x,y) = T[f(x,y)]$$

{

$f(x,y)$ -输入图像
 $g(x,y)$ -输出图像
 $T[\cdot]$ -在给定位置邻域上的关于 f 的操作

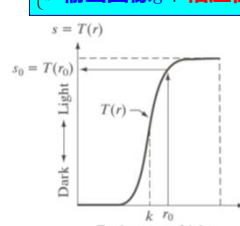
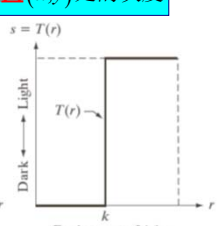
4

➤ **基于空域的灰度变换，简化形式**

$$s = T(r)$$

{

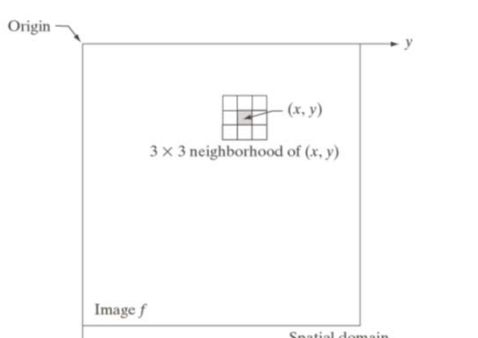
r -输入图像中任意位置 (x,y) 处的灰度
 s -输出图像 g 中相应位置 (x,y) 处的灰度

左：对比度非线性拉伸； 右：阈值化处理

5

➤ **空域处理法中，基于模板(邻域)的运算示意**



6

主要内容

4.1 背景知识

4.2 一些基本的灰度变换函数

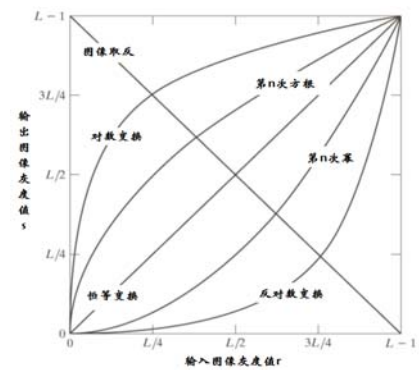
点运算

4.3 直方图处理

7

点运算

$$s = T(r)$$



一些基本的灰度变换函数，所有输出灰度级都缩放至适合显示的灰度范围[0,L-1]

8

(1) 图像取反(Image Negatives)

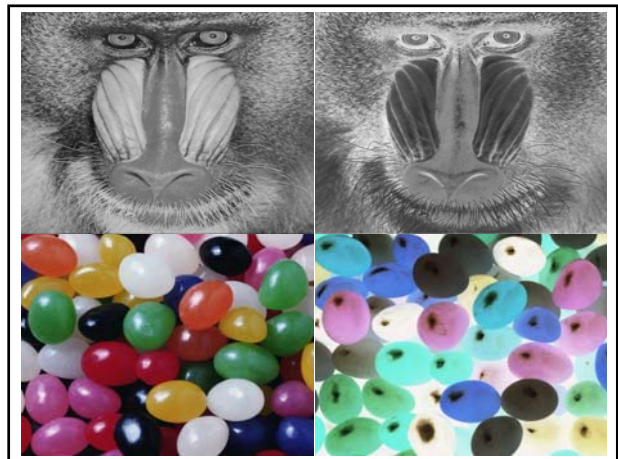
$$s = L - 1 - r$$

[0,L-1]为图像的灰度级。

作用：黑的变白，白的变黑

用于增强嵌入在图像暗区的白色或灰色细节。

9

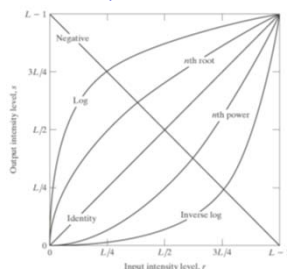


(2) 对数变换(Log Transformations)

$$s = c \log(1+r)$$

$$\begin{cases} c \rightarrow \text{常数} \\ r \geq 0 \end{cases}$$

作用：将输入图像中灰度范围较窄的低灰度值映射为输出图像中较宽范围的灰度值；相反，对高的输入灰度值也是如此。



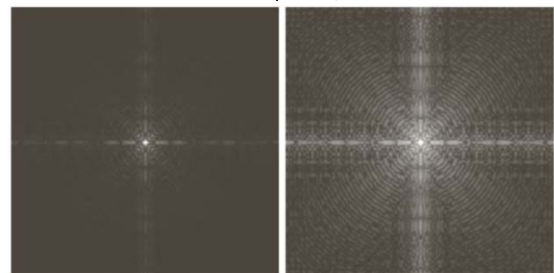
若输入图像的灰度动态范围太大，超出某些显示设备的允许动态范围，如直接显示原图，则一部分细节可能丢失，解决办法是对原图进行灰度压缩，如对数变换

11

基于对数变换的傅里叶幅度频谱可视化

左：某图像的傅里叶频谱幅度图，在8位显示系统的显示效果，频谱图像值域 $0 \sim 1.5 \times 10^6$

右：对幅度谱进行对数运算后，在8位系统显示效果， $c=1$



(3) 幂律(伽马)变换**-Power-Law(Gamma) Transformations**

$$s = c \cdot r^\gamma$$

$$s = c \cdot (r + \epsilon)^\gamma$$

c --正常数

γ --正常数

r --输入图像灰度级

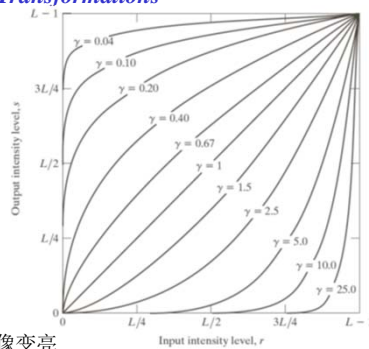
s --输出图像灰度级

通常 $\epsilon = 1$

$$s = c \cdot [(r + 1)^\gamma - 1]$$

$0 < \gamma < 1$ 提高灰度级, 图像变亮

$\gamma > 1$ 降低灰度级, 图像变暗



13

基于伽马变换的人体胸部上部脊椎骨折核磁共振图像增强示例。

$\gamma < 1$, 提高灰度级

使图像变亮

左上, 输入图像

右上, $c=1, \gamma=0.6$

左下, $c=1, \gamma=0.4$

右下, $c=1, \gamma=0.3$

**基于伽马变换的航空图像灰度级压缩**

左上--输入图像

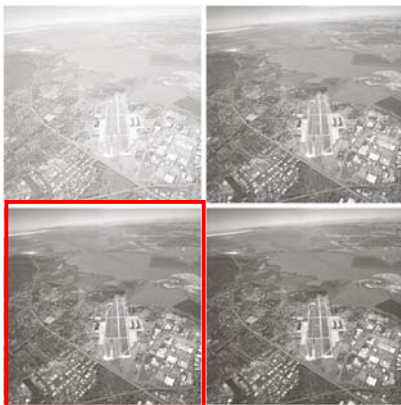
右上-- $c=1, \gamma=3$

左下-- $c=1, \gamma=4$

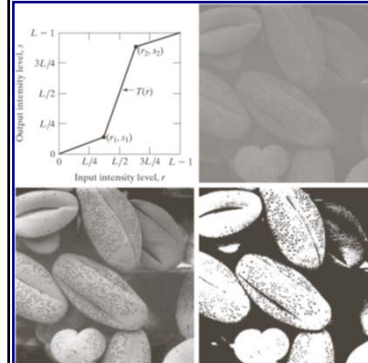
右下-- $c=1, \gamma=5$

$\gamma > 1$, 降低灰度级

使图像变暗

**(4) 基于分段线性(piece-wise linear)变换的对比度拉伸**

目的: 扩展图像灰度级动态范围。



Contrast Stretching

左上, 分段线性映射函数

右上, 低对比度花粉图像

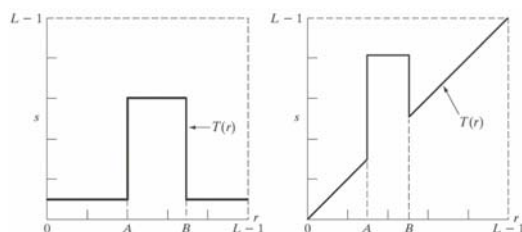
左下, 对比度拉伸结果

右下, 阈值化处理结构

16

(5) 基于分段线性(piece-wise linear)变换的灰度级分层

Intensity-level slicing



左A, 二值图像, 关心范围指定为较高值, 其它范围指定较低值。

右B, 灰度图像, 关心范围灰度级变亮(暗), 保持其它灰度级不变。

17

基于灰度级分层处理的大动脉血管造影图像“主要血管”增强

左, 原始输入图像

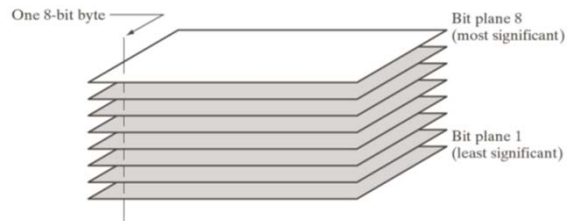
中, 基于A图的增强结果

右, 基于B图的增强结果

18

(6) 基于分段线性变换的比特平面分层 (bit-plane slicing)-位平面分层

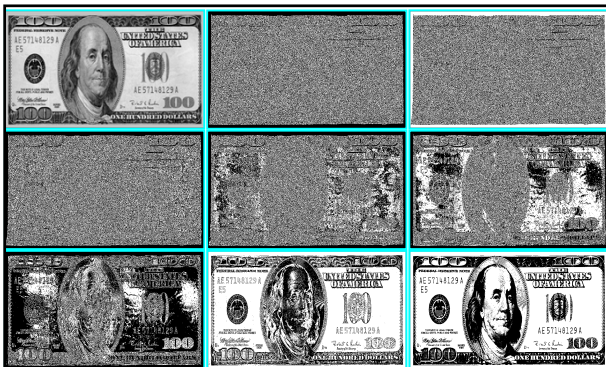
若图像的灰度级数为256，可以用8位来表示；
则图像可由8个**1位平面**组成，范围从**位平面1**到**位平面8**，其中，位平面1包含图像中像素的最低位，位平面8包含像素的最高位；每个位平面都是一幅二值图像。



位平面图像的作用

- 对特定位置提高亮度，改善图像质量
- 较高位（如前4位）包含大多数视觉重要数据
- 较低位（如后4位）对图像微小细节有作用
- 将图像分解为位平面，可以分析每一位在图像中的相对重要性

20

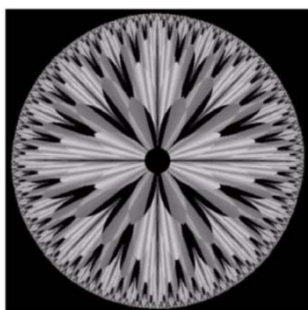


原始灰度图像及八个位平面成分(1-8)对应的二值图像

21

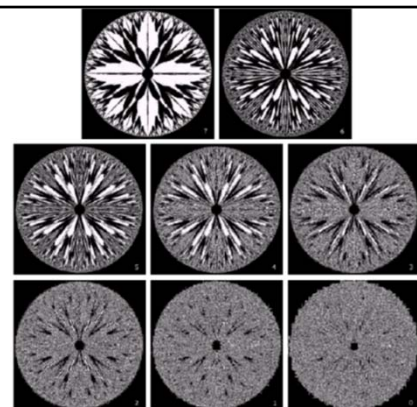


输入图像及其基于不同位平面成分的重建结果。由上至下，顺时针方向，依次对应：原始图像；8；7-8；6-8；5-8；4-8。

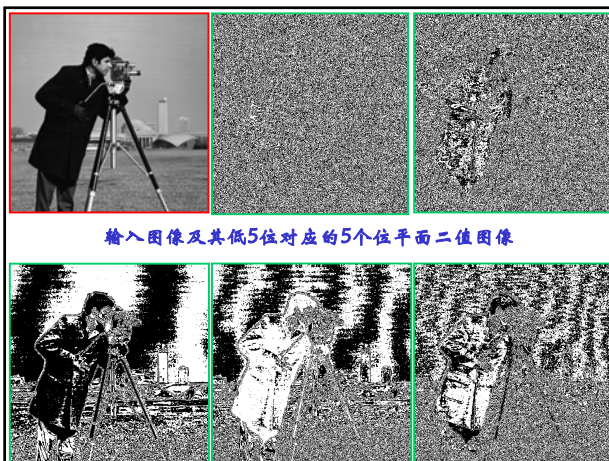


原始分形图像

23



分形图像的8个位平面二值图像(由高及低)



输入图像及其低5位对应的5个位平面二值图像



输入图像及其高5位对应的5个位平面二值图像



输入图像及其基于不同位平面成分的重建结果。由上至下，顺时针方向，依次对应：原始图像；8；7-8；6-8；5-8；4-8。

应用：LSB, MLSB

---基于LSB(Least Significant Bits)算法的信息隐藏(Information Hiding)

➤ 一般思路—顺序替换

如何隐藏二值、灰度、彩色秘密图像？

如何进行多幅不同尺寸、不同格式的图像隐藏？

➤ 如何使隐藏算法具有较好的抗攻击性？

采用一定规则将被隐藏信息打乱

如：基于指定种子数，生成随机位置；

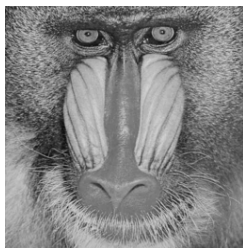
被隐藏的图像置乱

➤ 如何进行隐秘信息的提取？

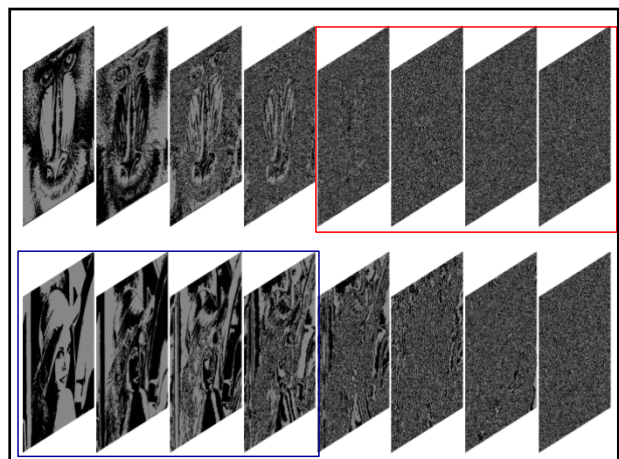
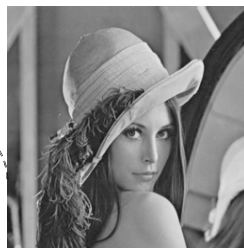
例：基于LSB的灰度图像隐藏

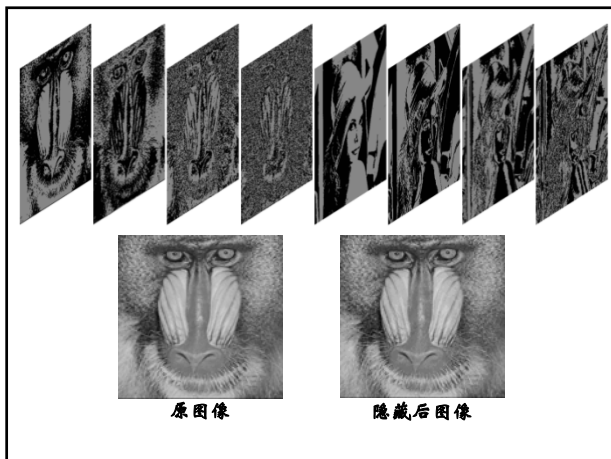
---待隐藏图像与原始图像的尺寸一致

左：源图像



右：待隐藏图像





例：基于LSB的多幅灰度/彩色图像隐藏

如何隐藏信息？如何提取隐藏的信息？

源图像(1800*3000)



信息隐藏后的输出图像



主要内容

4.1 背景知识

4.2 一些基本的灰度变换函数

4.3 直方图处理(Histogram Processing)

实质：借助直方图运算确定灰度映射模型，进而灰度变换。

直方图定义

基于直方图的图像统计特征；

直方图均衡化

直方图规范化

局部增强

35

1. 图像的灰度直方图及累积直方图定义

设M行×N列的数字图像灰度级[0,L-1]

A. 灰度直方图

定义(1)--图像中不同灰度级的像素出现的次数。

$$h(r_k) = n_k$$

n_k -- 图像中灰度级为 r_k 的像素数目

r_k -- 第k个灰度级的取值

$k = 0, 1, \dots, L-1$

通常记为 $h(k) = n_k$

36

定义(2)--图像中具有不同灰度级的像素关于总像素数目的比值。

归一化直方图 $p(r_k) = \frac{n_k}{n} = \frac{n_k}{M \times N}$

$$\sum_{k=0}^{L-1} p(r_k) = 1$$

$\begin{cases} n_k -- \text{图像中灰度级为 } r_k \text{ 的像素数目} \\ r_k -- \text{第 } k \text{ 个灰度级的取值, } k=0,1,\dots,L-1 \\ n = M \times N -- \text{图像总像素数目} \end{cases}$

通常记为 $p(k) = \frac{n_k}{M \times N}$

37

主要采用定义(2)描述图像直方图。

好处:

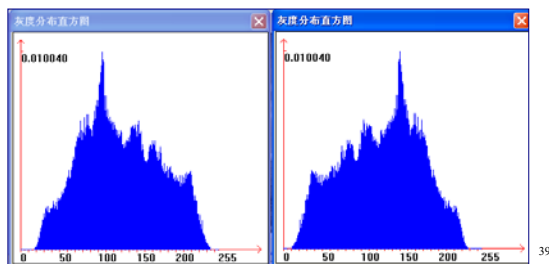
- 使函数值规范化到[0,1]区间, 成为实数函数
- 函数值的范围与图像所含像素总数(或者: 图像大小)无关
- 是关于不同灰度级在图像中取值的概率统计
--对于连续实值灰度取值, 为概率密度函数。

38

灰度图像直方图

左,原图像;

右,反色图像



39

B. 累积直方图

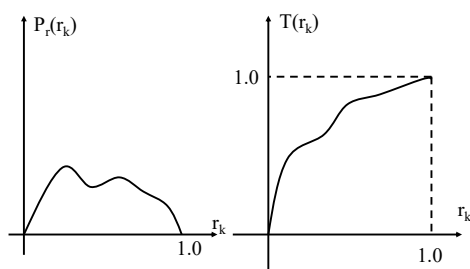
灰度直方图 $p(r_k) = \frac{n_k}{n} = \frac{n_k}{M \times N} \quad 0 \leq k \leq L-1$

累积直方图 $T(r_k) = \sum_{l=0}^k p(r_l) \quad 0 \leq T(r_k) \leq 1$

$T(r_k)$ 单调递增 $\begin{cases} T(r_0) \leftarrow p(r_0) \\ T(r_k) \leftarrow p(r_k) + T(r_{k-1}) \quad 1 \leq k \leq L-1 \\ T(r_{L-1}) = 1 \end{cases}$

40

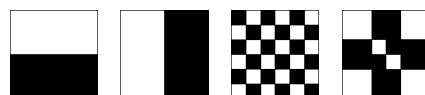
归一化灰度级的图像直方图及其累积直方图



41

不同图像的直方图

- 图像直方图丢失了位置信息
- 任何一幅图像都能唯一确定一个直方图;
但不同图像, 可能有相同直方图。

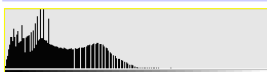


- 图像的视觉效果和其直方图有对应关系
- 改变直方图的形状可改善视觉效果

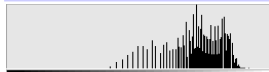
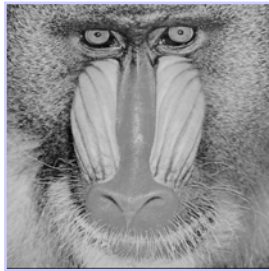
42

具有不同视觉效果图像的直方图

暗图像

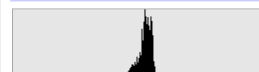
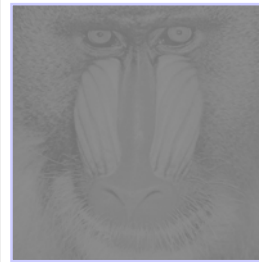


亮图像

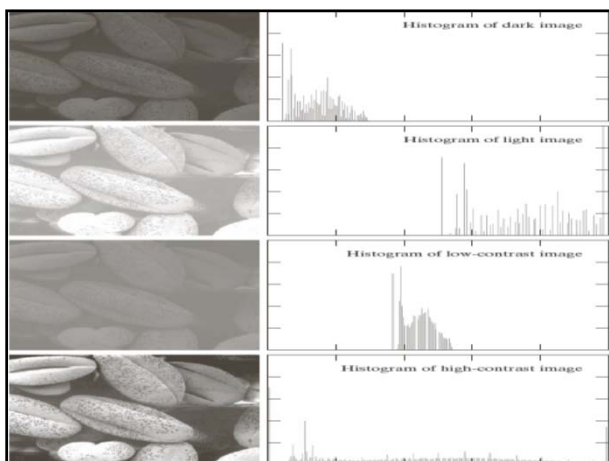
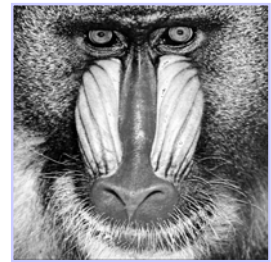


图像的几种典型直方图类型

低对比度图像



高对比度图像



C. 基于直方图的图像统计特征

灰度均值 $m = \sum_{l=0}^{L-1} r_l p(r_l)$

灰度方差 $\mu_2 = \sigma^2 = \sum_{l=0}^{L-1} (r_l - m)^2 p(r_l)$

k 阶中心矩 $\mu_k = \sum_{l=0}^{L-1} (r_l - m)^k p(r_l)$

灰度均值 $m = \frac{1}{M \times N} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$

灰度方差 $\sigma^2 = \frac{1}{M \times N} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) - m]^2$ 46

两种常见的基于直方图变换的图像处理技术:

借助直方图变换实现灰度图像映射, 达到图像的增强、或灰度匹配变换的目的。

➤ 直方图均衡化 (Histogram Equalization)

即: 灰度分布均衡化

➤ 直方图规定化 (Histogram Specification)

即: 灰度的匹配变换

2. 直方图均衡化(Histogram Equalization)

(1) 直方图均衡化目的

使一幅数字图像的**各像素取值占有全部可能的灰度级**、且均匀分布, 从而使**图像能够具有高对比度、灰度细节丰富(清晰图像)、动态范围较大**。

实质: 对图像中像素数目多的灰度级展宽, 而对像素数目少的灰度级进行缩减。

□ **关键: 如何确定灰度级变换 $s = T(r)$?**

问题之一：如何确定灰度级变换函数
 $s = T(r)$?

设： r ——输入图像像素的归一化灰度级
 s ——输出图像像素的归一化灰度级

即

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq s \leq 1 \end{aligned}$$

对于输入图像，在 $[0,1]$ 区间内的任何一个 r 值，都可产生一个 s 值，且变换函数：

$$s = T(r)$$

50

变换函数 $s = T(r)$ 满足下列条件：

① 在 $0 \leq r \leq 1$ 内， $s = T(r)$ 为单值且单调递增

保序：确保反函数的单调性，保证变换前后的灰度级从黑到白次序不变；

② 在 $0 \leq r \leq 1$ 内，有 $0 \leq s = T(r) \leq 1$

保范围：确保变换前后灰度动态范围一致。

51

显然，图像的灰度累积直方图

$$\begin{cases} T(r_k) = \sum_{l=0}^k p(r_l) & \text{单调递增} \\ 0 \leq T(r_k) \leq 1 \end{cases}$$

所以灰度变换函数： $s_k = T(r_k) = \sum_{l=0}^k p(r_l)$

52

问题之二：给定一幅灰度图像，如何进行直方图均衡化处理？

例1：直方图均衡化处理步骤演示。

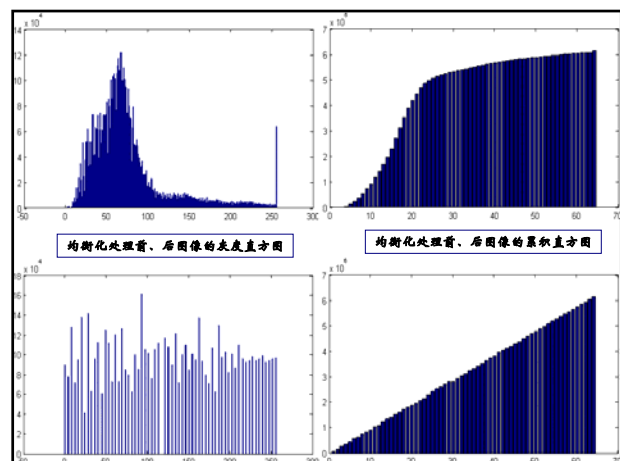
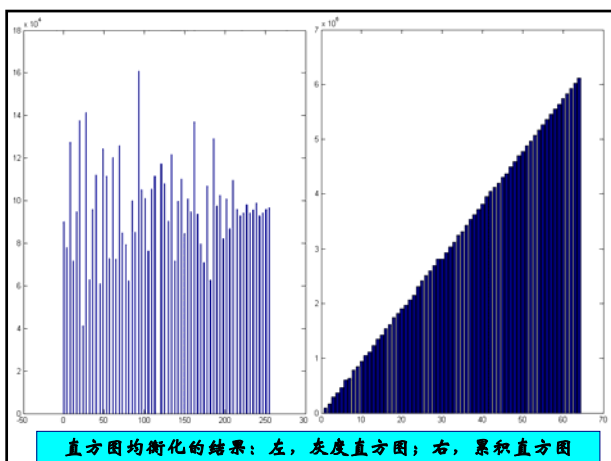
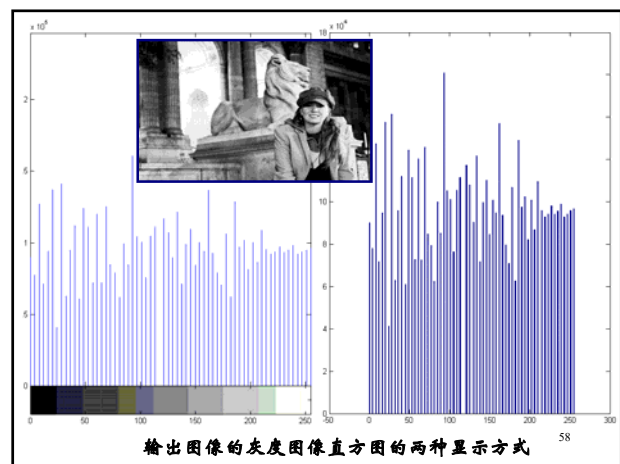
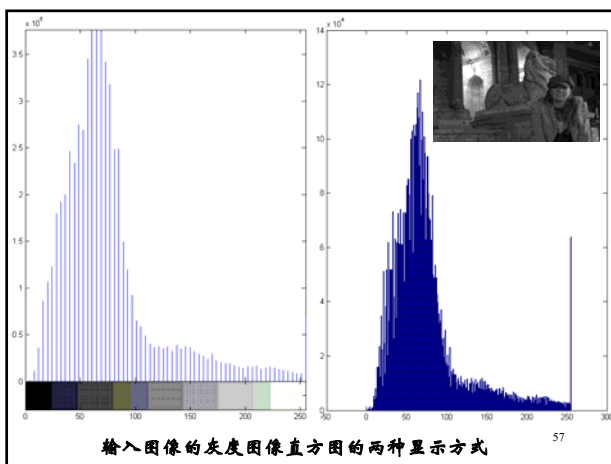
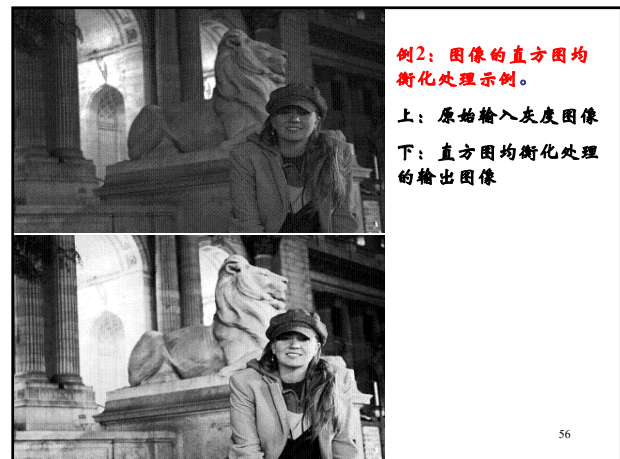
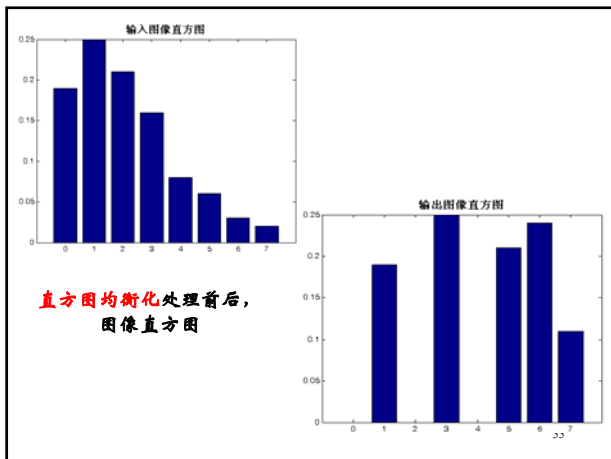
设有一幅大小为 M 行 $\times N$ 列 $=64$ 行 $\times 64$ 列的3比特灰度图像，灰度级数为 $L=8$ ，要求对其进行直方图均衡化，并使输出图像的灰度取值为 $0 \sim L_{\text{out}}-1$ ，请确定输出图像。

其中： L_{out} 取值8

步骤	计算方法	计算结果							
1	列出输入图像灰度级 r_i	0	1	2	3	4	5	6	7
2	统计输入图像各灰度级像素数目 n_i	790	1023	850	656	329	245	122	81
3	计算输入图像直方图 $p(r_i) = \frac{n_i}{M \times N} = \frac{n_i}{4096}$	0.19	0.25	0.21	0.16	0.08	0.06	0.03	0.02

53

步骤	计算方法	计算结果							
1	列出输入图像灰度级 r_i	0	1	2	3	4	5	6	7
2	统计输入图像各灰度级像素数目 n_i	790	1023	850	656	329	245	122	81
3	计算输入图像直方图 $p(r_i) = \frac{n_i}{M \times N} = \frac{n_i}{4096}$	0.19	0.25	0.21	0.16	0.08	0.06	0.03	0.02
4	计算输入图像累积直方图，即：输出图像归一化灰度级 $s_k = T(r_k) = \sum_{l=0}^k p(r_l)$	0.19	0.44	0.65	0.81	0.89	0.95	0.98	1
5	计算均衡化处理后，输出图像的灰度级 $s_k = \text{int} \left[s_k \cdot (L_{\text{out}} - 1) + 0.5 \right]$ $L_{\text{out}} = 8$	1.33 \rightarrow 1	3.08 \rightarrow 3	4.55 \rightarrow 5	5.67 \rightarrow 6	6.23 \rightarrow 6	6.65 \rightarrow 7	6.86 \rightarrow 7	7 \rightarrow 7
6	建立输入、输出图像灰度级的映射关系： $k \rightarrow s_k$	0 \rightarrow 1	1 \rightarrow 3	2 \rightarrow 5	3 \rightarrow 6	4 \rightarrow 6	5 \rightarrow 7	6 \rightarrow 7	7 \rightarrow 7
7	由灰度映射关系得到输出图像的各像素灰度值	1	3	5	6	6	7	7	7
8	确定输出图像各灰度级像素数目	0	790	0	1023	0	850	985	448
9	计算输出图像直方图		0.19		0.25		0.21	0.24	0.11



3. 直方图规定化(Histogram Specification)

--直方图匹配

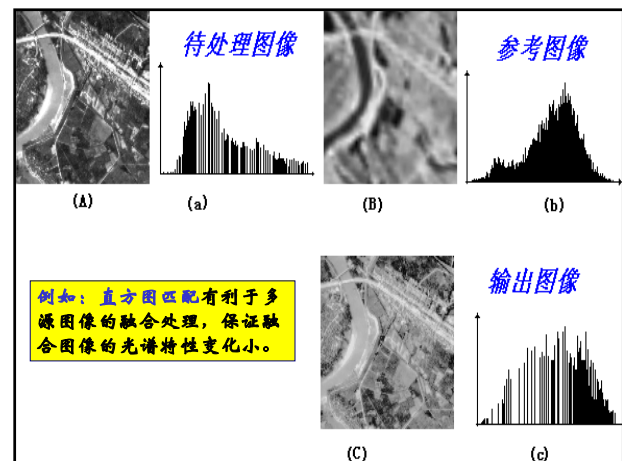
(1) 目的

建立一种灰度映射关系，使处理后的输出图像具有**规定形状**的直方图。

意义：面向实际需求，突出感兴趣灰度范围，即修正图像的直方图。

关键：如何建立输入/输出图像的灰度级映射？

61



(2) 基本原理

从灰度连续变化的概率密度函数出发，进行推导；然后推广至灰度离散的数字图像直方图规定化算法。

连续情况下，假设：

➢ r , $p_r(r)$ —归一化的**待处理输入图像**灰度级、灰度分布概率密度函数；

➢ z , $p_z(z)$ —归一化的**参考图像**灰度级、灰度分布概率密度函数(即：规定形状的直方图)。

63

①对**输入图像**进行**直方图均衡化**，即求变换函数(累积直方图)：

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(\tau) d\tau$$

②对**参考图像**进行**直方图均衡化**，即求变换函数(累积直方图)：

$$v = G(z) = \int_0^z p_z(\tau) d\tau$$

它的逆变换是：

$$z = G^{-1}(v)$$

64

③ 建立直方图规定化处理前后，**输入图像**灰度的映射关系：

$$z = G^{-1}(v) = G^{-1}(s) = G^{-1}(T(r))$$

理由：理论上，对于**直方图均衡化处理之后的输入图像**和**参考图像**

$$\left. \begin{array}{l} s = T(r) \\ v = G(z) \\ s = v \end{array} \right\} \Rightarrow z = G^{-1}(v) = G^{-1}(s) = G^{-1}(T(r))$$

经过以上处理后，**输入图像**的**灰度级**将具有**参考图像规定形状**的概率密度函数 $p_z(z)$

65

(3) 直方图规定化的基本步骤

例3：直方图规定化处理示例演示。

设有一幅大小为M行×N列=64行×64列的灰度图像，灰度级数为L=8。

要求：

(1)基于**参考直方图**(见下页的**红框**所示)，对该图像进行直方图规定化处理

(2)确定输出图像。

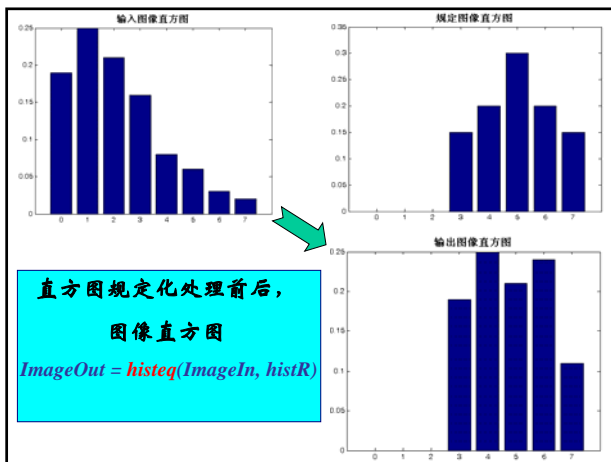
66

步骤	计算方法	计算结果							
1	列出图像灰度级片	0	1	2	3	4	5	6	7
2	统计输入图像各灰度级像素数目 n_k	790	1023	850	656	329	245	122	81
3	计算输入图像直方图 $p_r(r_k) = \frac{n_k}{M \times N} = \frac{n_k}{4096}$	0.19	0.25	0.21	0.16	0.08	0.06	0.03	0.02
4	计算输入图像累积直方图，即：输出图像归一化灰度级 $s_k = T(r_k) = \sum_{i=0}^k p_r(r_i)$	0.19	0.44	0.65	0.81	0.89	0.95	0.98	1
5	列出规定形状直方图 $p_z(z_k)$	0	0	0	0.15	0.20	0.30	0.20	0.15
6	计算规定直方图累积直方图 $v_k = G(z_k)$	0	0	0	0.15	0.35	0.65	0.85	1
7	基于最近距离法，确定： $j = \arg \min_{0 \leq i \leq L-1} s_k - v_i $	3	4	5	6	7	7	7	7
8	建立输入、输出图像灰度级的映射关系： $r_k \rightarrow z_j$	0→3	1→4	2→5	3,4→6			5,6,7→7	
9	由灰度映射关系得到输出图像的各像素取值	3	4	5	6	6	7	7	7

步骤	计算方法	计算结果							
1	列出图像灰度级片	0	1	2	3	4	5	6	7
2	统计输入图像各灰度级像素数目 n_k	790	1023	850	656	329	245	122	81
3	计算输入图像直方图 $p_r(r_k) = \frac{n_k}{M \times N} = \frac{n_k}{4096}$	0.19	0.25	0.21	0.16	0.08	0.06	0.03	0.02
8	建立输入、输出图像灰度级的映射关系： $r_k \rightarrow z_j$	0→3	1→4	2→5	3,4→6			5,6,7→7	
9	由灰度映射关系得到输出图像的各像素取值	3	4	5	6	6	7	7	7
10	确定输出图像各灰度级像素数目	0	0	0	790	1023	850	985	448
11	计算输出图像直方图	0	0	0	0.19	0.25	0.21	0.24	0.11
1	列出图像灰度级片	0	1	2	3	4	5	6	7

思考：如何直接确定输出图像的灰度直方图？

68



直方图规范化步骤总结：

假设图像处理前后灰度级数为 L

- (1) 计算输入图像的灰度直方图 $p_r(r_k)$ $k=0, \dots, L-1$
- (2) 计算输入图像的累积直方图 $s_k = \sum_{i=0}^k p_r(r_i)$ $k=0, \dots, L-1$
即为输入图像直方图均衡化后的归一化灰度级
- (3) 计算规定直方图 $p_z(z_k)$ 的累积直方图 $v_k = \sum_{i=0}^k p_z(z_i)$ $k=0, \dots, L-1$
即为参考图像直方图均衡化后的归一化灰度级
- (4) 建立输入/输出的灰度级映射关系： $r_k \rightarrow z_j$
对于每一个 s_k ，确定 $j = \arg \min_i |s_k - v_i|$ ，从而得到 v_j ，进而有： $r_k \rightarrow z_j$
注：若有多个 v_i 同时使 $|s_k - v_i|$ 达到最小，应取比较小的 i 作为返回值 j 。
- (5) 基于灰度映射关系，生成输出图像。

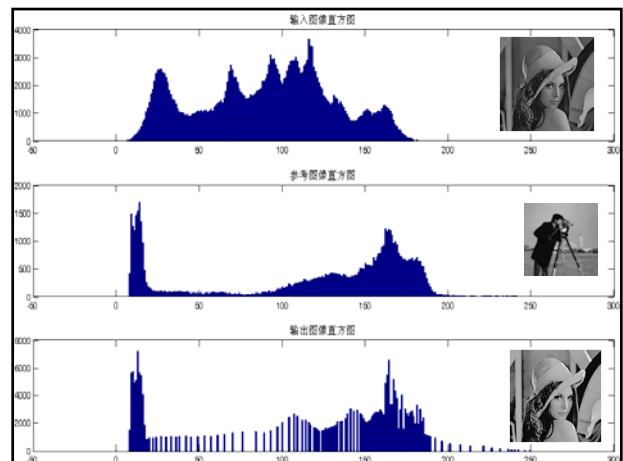
70

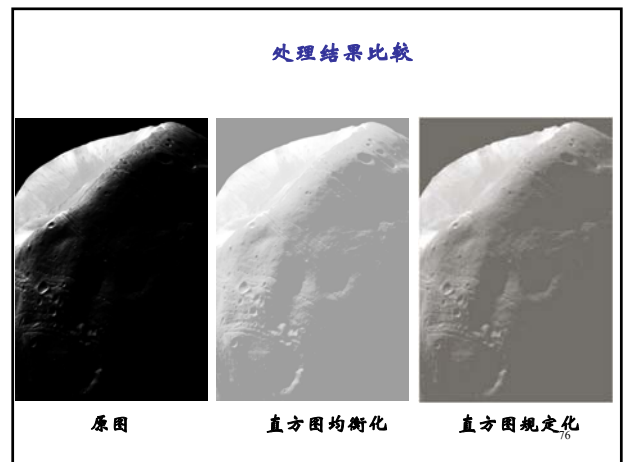
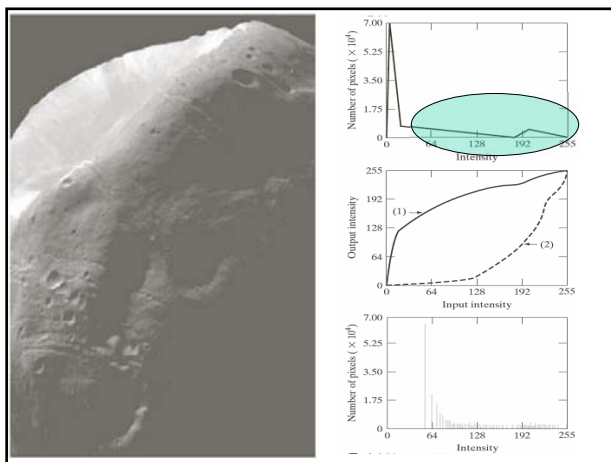
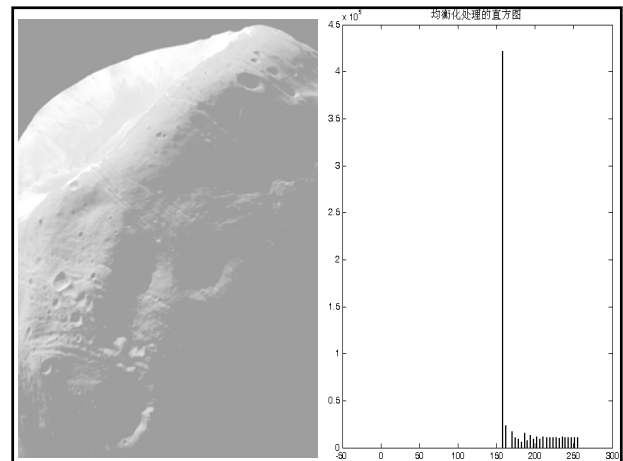
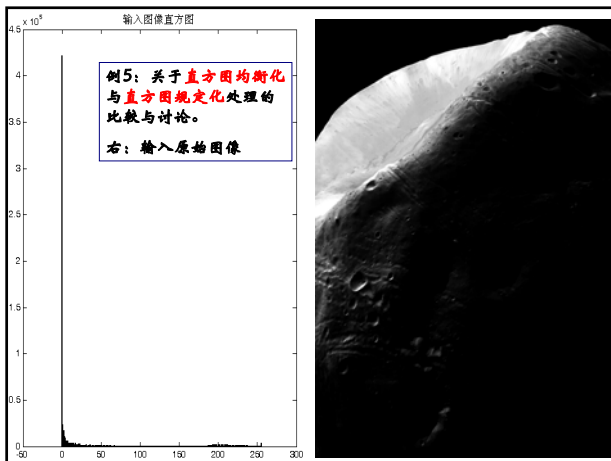
例4：直方图规范化处理示例。

右：参考图像

左下：输入图像

右下：输出图像





全局直方图处理 (Global Histogram Processing)

小结:

- 整幅图像 \rightarrow 一个归一化灰度直方图
 - \rightarrow 直方图变换
 - \rightarrow 全局映射函数 $s=T(r)$

- 两种直方图变换方法:
 - 直方图均衡化处理
 - 直方图规定化处理

77

本章小结

基于空域的灰度图像处理

点运算
直方图运算
模板运算

PART1: 点运算 $s=T(r)$

- | | |
|-------------|---|
| 图像反转 | $s = L - 1 - r$ |
| 对数运算 | $s = c \cdot \log(1+r)$ c --常数 $r \geq 0$ |
| 幂律(Gamma变换) | $s = c \cdot [(r+1)^\gamma - 1]$ c, γ 为正 |
| 分段线性变换 | 局部对比度增强 |
| | 灰度级分层, 位平面分层 |

78

本章小结**PART2: 直方图运算**

实质为点运算

掌握:

- (1) 图像的灰度(归一化)直方图, 累积直方图的计算
- (2) 基于灰度直方图的均值 / 方差的计算
- (3) 直方图均衡化的目的, 基本思想, 步骤与计算实例
- (4) 直方图规定化的目的, 基本思想, 步骤与计算实例
- (5) 基于直方图统计特性的图像增强

79